



HAL
open science

Suivi de santé structurale sur structures architecturées par techniques en ondes guidées

Thomas Brion

► **To cite this version:**

Thomas Brion. Suivi de santé structurale sur structures architecturées par techniques en ondes guidées. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2024. Français. NNT : 2024ECDL0043 . tel-04894764

HAL Id: tel-04894764

<https://theses.hal.science/tel-04894764v1>

Submitted on 17 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE
CENTRALE LYON



Numéro d'ordre : 2024ECDL0043

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

membre de

l'Université de Lyon

École Doctorale 162 : Mécanique, Énergétique, Génie Civil et Acoustique
Spécialité : Mécanique

Soutenue publiquement le 7 Novembre 2024, par

Thomas BRION

Suivi de santé structurale sur structures architecturées par techniques en ondes guidées

Devant le jury composé de :

Thouraya Baranger	Présidente du jury
Noureddine Atalla	Rapporteur
Alexandre Kawano	Rapporteur
Abdelkhalak El Hami	Examineur
Olivier Bareille	Directeur de thèse
Mohamed Ichchou	Directeur de thèse
Abdel-Malek Zine	Directeur de thèse

Résumé :

Dans de nombreux secteurs d'activités, il est nécessaire de vérifier la qualité et l'intégrité des pièces et des structures au stade de leur fabrication puis au cours de leur exploitation. Un grand nombre de techniques d'inspection, s'inspirant de domaines variés de la physique, ont émergé au fil du temps. Parmi ces techniques, celles basées sur la propagation des ondes guidées offrent une voie prometteuse. Ces techniques, malgré leurs attraits, présentent des enjeux scientifiques et applicatifs très importants. Elles sont également rendues plus difficiles par la démocratisation des matériaux composites et/ou de métastructures. Ces nouvelles architectures permettent d'atteindre des propriétés particulières par rapport aux matériaux classiques, mais au prix d'une complexité accrue.

Le travail de cette thèse porte sur l'étude des caractéristiques de dispersion des ondes dans des structures bidimensionnelles, leur identification et leur application à la caractérisation paramétrique et à la détection de défauts.

Les caractéristiques de dispersion des ondes fournissent beaucoup d'informations sur le comportement mécanique d'une structure, à la fois sur les aspects liés à la propagation de l'énergie qu'aux propriétés d'atténuation. Ces deux dernières décennies, de nombreuses méthodes inverses ont été développées pour identifier les nombres d'onde et k-spaces à partir de champs physiques mesurables. Dans ce contexte, une étude comparative entre plusieurs de ces approches, met en lumière leurs avantages et leurs limitations respectives.

Pour pallier à certaines des limitations identifiées, une nouvelle méthode k-space, basée sur l'identification algébrique est développée. Cette méthode a pour caractéristiques principales de présenter une grande robustesse aux diverses incertitudes et une bonne précision pour l'extraction des k-spaces de structures complexes, même à relativement basses fréquences.

Ensuite, une procédure d'identification de paramètres à l'aide des caractéristiques de dispersion est présentée. Cette procédure, adaptée à des équations de propagation d'onde sur des domaines bidimensionnels, permet une identification des coefficients en fonction de la fréquence. Elle consiste à comparer une formulation analytique des k-spaces à des k-spaces de référence calculés sur les champs solutions en utilisant les méthodes k-spaces identifiées comme les plus adaptées et la nouvelle méthode développée.

Enfin, une étude sur l'effet de la présence d'un défaut sur les caractéristiques de dispersion estimées par méthodes k-space est conduite, démontrant la possibilité d'utiliser une telle approche. Cette approche est ensuite déclinée en une procédure de localisation de défaut.

Mots clés : k-space, Structures périodiques, Propagation d'ondes, Méthodes inverses, Détection de défauts

Abstract :

In many industrial sectors, it is necessary to check the quality and integrity of parts and structures at the manufacturing stage and then during operation. Many inspection techniques have emerged over the years, based on various domains of physics. Among these techniques, those based on guided wave propagation offer a promising way forward. Despite their appeal, these techniques present very significant scientific and application challenges. They are also made more difficult by the democratisation of composite materials and/or metastructures. These new architectures make it possible to achieve specific properties compared with conventional materials, but at the cost of an increased complexity.

The work in this thesis concerns the study of wave dispersion characteristics in two-dimensional structures, their identification and their application to parametric characterisation and defect detection.

Wave dispersion characteristics provide a lot of information about the mechanical behaviour of a structure, both in terms of energy propagation and attenuation properties. Over the last two decades, numerous inverse methods have been developed to identify wave numbers and k-spaces from measurable physical fields. In this context, a comparative study of several of these approaches highlights their respective advantages and limitations.

To overcome some of the limitations identified, a new k-space method based on algebraic identification has been developed. The main features of this method are its robustness to various uncertainties and its good accuracy in extracting k-spaces from complex structures, even at relatively low frequencies.

Next, a procedure for identifying parameters using dispersion characteristics is presented. This procedure, adapted to wave propagation equations on two-dimensional domains, enables coefficients to be identified as a function of frequency. It consists of comparing an analytical formulation of the k-spaces with reference k-spaces calculated from the solution fields using the k-space methods identified as the most suitable and the new method developed.

Finally, a study of the effect of the presence of a defect on the dispersion characteristics estimated by k-space methods is carried out, demonstrating the possibility of using such an approach. This approach has then been modified into a defect location procedure.

Keywords : k-space, Periodic structures, Wave propagation, Inverse methods, Defect detection

Remerciements :

Je tiens tout d'abord à remercier mes trois directeurs de thèse Olivier BAREILLE, Mohamed ICHCHOU et Abdel-Malek ZINE pour ces trois années de thèse (et même les quelques années auparavant), pour leur soutien, leur aide, leurs conseils et pour toutes les discussions très intéressantes que j'ai pu avoir avec eux et que j'espère pouvoir continuer à avoir.

Je remercie encore les membres de mon jury de thèse, Thouraya BARANGER, Abdelkhalak EL HAMI, Noureddine ATALLA et Alexandre KAWANO, pour avoir examiné et rapporté consciencieusement mon travail, ainsi que pour les questions soulevées durant la soutenance.

Je voudrais saluer toute l'équipe pour l'accueil qu'ils m'ont fait au E6 et au LTDS, de ceux qui étaient là à mon arrivée à ceux qui y sont aujourd'hui. Merci à tous les doctorants, anciens doctorants et postdoctorants d'avoir tant participé à la bonne ambiance au labo et particulièrement à Pascal FOSSAT que j'ai eu la chance d'avoir comme cobureau, pour tous ses précieux conseils.

Un mot pour tous mes amis de Lyon, des Ardennes, de Reims et d'ailleurs : j'ai énormément de chance de vous rencontrer et j'espère vous revoir chacun et chacune vite !

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille qui m'a toujours soutenu dans tout ce que j'ai entrepris, de mes grands-parents, parrain, marraine, cousins, cousines à oncles et tantes.

Et pour finir, les plus importants, sans qui je ne serais jamais arrivé jusqu'à là, mes parents et ma sœur.

Table des matières

Liste d'abréviations	ix
Introduction générale	1
1 État de l'art	3
1.1 Surveillance de la santé des structures et contrôle non destructif	3
1.1.1 Introduction et enjeux	3
1.1.2 Approches non destructives existantes	4
1.1.3 Approches non destructives basées sur les vibrations d'une structure . .	5
1.1.4 Remarques intermédiaires	9
1.2 Matériaux composites et structures périodiques	10
1.2.1 Matériaux composites	10
1.2.2 Métamatériaux périodiques	11
1.2.3 Propagation des ondes dans les structures périodiques	11
1.3 Méthodes d'identification des caractéristiques de dispersion pour des champs d'ondes bidimensionnels	13
1.3.1 Nombres d'onde et k-spaces	13
1.3.2 Approches basées sur la transformée de Fourier	14
1.3.3 Approches basées sur la méthode de Prony	27
1.3.4 Identification algébrique	39
1.4 Conclusion intermédiaire	41
2 Étude comparative des méthodes k-spaces	43
2.1 Introduction	44
2.2 Présentation des méthodes k-spaces	44
2.2.1 Inhomogeneous Wave Correlation	45
2.2.2 Extended Inhomogeneous Wave Correlation	47
2.2.3 Corrélation basée sur une fonction de Green	47
2.2.4 Green Function Correlation	48
2.2.5 Green Function Correlation modifiée	49
2.2.6 INverse CONvolution METHod	50
2.3 Méthodes k-spaces pour des champs de plaques isotropes	54
2.3.1 Plaque isotrope	54
2.3.2 Plaque isotrope en domaine non borné	58
2.3.3 Plaque isotrope finie	64
2.3.4 Limitation aux basses fréquences	68
2.3.5 Limitation aux hautes fréquences	70
2.3.6 Robustesse aux bruits	72
2.4 Méthodes k-spaces pour des structures orthotropes	75
2.4.1 Orthotropie elliptique	75

2.4.2	Modèle numérique d'une paroi bi-raïdie	77
2.5	Conclusion intermédiaire	83
3	Développement d'une méthode k-space : Algebraic K-Space Identification	
	2D	87
3.1	Introduction	88
3.2	Algebraic Wavenumber Identification technique	91
3.2.1	Formules de l'AWI	92
3.2.2	Relations de dispersion calculées par l'AWI	93
3.3	Algebraic K-Space Identification 2D	95
3.3.1	Présentation des formules	96
3.3.2	Démonstration des formules	96
3.3.3	Implémentation numérique	101
3.3.4	Cas particuliers	103
3.4	Validations de la méthode	105
3.4.1	Validation sur des champs de déplacement analytiques	106
3.4.2	Modèle numérique d'une paroi bi-raïdie	120
3.4.3	Validation expérimentale	126
3.5	Conclusion intermédiaire	133
4	Identification d'équations aux dérivées partielles par analyse k-space	135
4.1	Introduction	136
4.2	Processus d'identification	138
4.2.1	Types d'équation	138
4.2.2	Méthodologie	139
4.3	Validation de la procédure avec des solutions numériques d'EDP	141
4.3.1	Équations d'ordre 2	142
4.3.2	Équations d'ordre 4	146
4.3.3	Équations d'ordre 6	149
4.4	Application de l'identification de paramètres pour l'amélioration d'un modèle de plaque orthotrope homogénéisé équivalent à une paroi bi-raïdie	151
4.4.1	Rappel du modèle homogénéisé	152
4.4.2	Identification de paramètres à partir de champ solution du modèle homogénéisé	153
4.4.3	Identification de paramètres à partir de la résolution du modèle complet	155
4.5	Identification de paramètres à partir de champs de déplacements expérimentaux	158
4.5.1	Plaques isotropes expérimentales	159
4.5.2	Plaque composite expérimentale, identification simultanée de deux paramètres	160
4.6	Conclusion intermédiaire	162
5	Détection de défauts dans des structures mono et bidimensionnelles par analyse k-spaces	165
5.1	Introduction	166

5.2	Détection de défauts dans des structures type poutres	166
5.2.1	Modélisation d'une poutre avec une entaille	167
5.2.2	Courbes de dispersion	168
5.2.3	Robustesse aux bruits et aux incertitudes de position	169
5.2.4	Fonction d'endommagement	170
5.3	Détection de défauts dans des structures type plaques	177
5.3.1	Effet d'un défaut sur les k-spaces mesurés	177
5.3.2	Localisation de défauts par approche k-space	180
5.3.3	Validation de la procédure de localisation	183
5.4	Conclusion intermédiaire	192
6	Conclusion générale	195
6.1	Conclusion	195
6.2	Perspectives	197
	Bibliographie	199

Liste d'abréviations

SHM Structural Health Monitoring	4
CND Contrôle Non Destructif	4
DI Damage Index	5
TEO Teager Energy Operator	8
DFT Transformée de Fourier Discrète (Discrete Fourier Transform)	15
FFT Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform)	16
IWC Inhomogeneous Wave Correlation	16
IWC-V Inhomogeneous Wave Correlation Variant	21
EIWC Extended Inhomogeneous Wave Correlation	21
GFC Green Function Correlation	24
SLaTCoW Spatial LAplace Transform for COmplex Wavenumber	25
ESPRIT Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique	28
HRWA High Resolution Wavenumber Analysis ou High Resolution Wavevector Analysis	28
INCOME INverse CONvolution MEmod	28
AWI Algebraic Wavenumber Identification	39
AKSI Algebraic K-Space Identification	40
SNR Signal-to-Noise Ratio	72
WFEM Wave Finite Element Method	94

Introduction générale

Contexte et objectifs

Les matériaux composites et les structures périodiques sont de plus en plus utilisés pour de nombreuses applications, en particulier dans l'industrie aéronautique. Ces structures ont l'avantage de pouvoir présenter des propriétés particulières difficiles à atteindre pour des matériaux classiques, telles que des raideurs élevées combinées à des masses faibles ou d'autres caractéristiques exotiques. Cependant, ces propriétés uniques sont obtenues au prix d'une plus grande complexité. Et cette complexité implique une difficulté accrue pour la modélisation, l'étude de ces structures et en particulier pour leurs inspections.

Il existe déjà de nombreuses approches pour tester la santé et l'intégrité des structures qui s'inspirent de nombreux domaines différents de la physique. En particulier, les approches basées sur la propagation des ondes guidées offrent une voie prometteuse. Ces techniques, malgré leurs attraits, présentent des enjeux scientifiques et applicatifs très importants, surtout à cause de la complexification des structures.

Les nombres d'onde et les k -spaces sont des candidats intéressants pour inspecter des champs d'onde associés à des structures. En effet, les nombres d'onde sont des quantités complexes qui caractérisent la propagation des ondes et le comportement dynamique des structures. Pour les structures bidimensionnelles, en particulier pour les structures anisotropes, la propagation des ondes, et par conséquent le nombre d'onde, dépendent de la directivité. L'ensemble des nombres d'onde pour toutes les directions du plan est appelé le k -space. Celui-ci contient de nombreuses informations tant sur la variation spatiale de phase des ondes propagatives que sur les aspects de propagation de l'énergie, d'atténuation et d'ondes évanescentes.

En se basant sur l'hypothèse qu'une singularité va affecter la propagation des ondes, cet impact pourrait se répercuter sur les k -spaces mesurés, et en particulier sur leur partie imaginaire. Cependant, l'identification précise et robuste des k -spaces est déjà en soi une problématique.

Ainsi, l'objectif de ce travail est dans un premier temps d'étudier les caractéristiques de dispersion des ondes, c'est-à-dire les k -spaces, dans les structures périodiques et les méthodes inverses pour les mesurer. Puis dans un second temps, il consiste à les utiliser dans une optique de détection de défauts dans des structures bidimensionnelles.

Organisation du manuscrit

Le premier chapitre propose une étude bibliographique sur la surveillance de la santé des structures, le contrôle non destructif et les méthodes inverses pour l'identification des nombres d'ondes. Il introduit les concepts de matériaux composites et de structures périodiques et permet de positionner l'étude de ce manuscrit.

Le deuxième chapitre expose une étude comparative entre différentes techniques k -spaces pour des problèmes bidimensionnels. Il permet de mettre en lumière leurs limites respectives en les comparant sur une série de cas tests. Des champs de déplacement isotropes et anisotropes,

déterminés analytiquement et numériquement, permettent de qualifier les performances respectives pour l'estimation des k-spaces complexes à haute et basse fréquences, leur robustesse, l'impact des conditions aux limites, de la position du point source et leur capacité à traiter des cas d'anisotropie.

Le troisième chapitre présente une nouvelle approche k-space, l'Algebraic K-Space Identification 2D (AKSI 2D), venant palier une limitation observée dans le chapitre précédent, à savoir une identification robuste de k-spaces complexes à basse fréquence. Les formules de cette nouvelle méthode, dérivant de l'identification algébrique, sont démontrées. Puis, la méthode est validée numériquement et expérimentalement, et ses performances sont comparées à d'autres méthodes populaires d'identification de k-space dans différentes conditions d'incertitude. Les cas d'études comprennent des champs isotropes résolus analytiquement, des champs anisotropes résolus numériquement et, enfin, des mesures expérimentales. Les résultats prometteurs démontrent que la méthode proposée est un outil robuste pour caractériser la propagation des ondes des structures bidimensionnelles dans des conditions incertaines.

Le quatrième chapitre présente une procédure d'identification de coefficients d'équations de propagation des ondes sur des domaines bidimensionnels. L'approche est basée sur les caractéristiques de dispersion des ondes. Elle utilise la comparaison entre des k-spaces mesurés à partir des champs de solution et des k-spaces déterminés analytiquement. L'identification des coefficients est testée sur des champs de solution calculés par éléments finis pour des exemples d'équations d'ordre 2, 4 et 6. Elle a ensuite été appliquée à un exemple de structure périodique dont il existe un modèle homogénéisé de plaque orthotrope équivalente, et enfin à des champs de plaques mesurés expérimentalement.

Le cinquième chapitre propose d'étudier la possibilité de se baser sur la variation des k-spaces complexes pour détecter la présence de défauts dans les structures mono et bidimensionnelles. Les k-spaces et nombres d'onde calculés sont comparés à des références, majoritairement des formulations analytiques de la relation de dispersion. Les structures étudiées comprennent des modèles de poutres analytiques avec une entaille, des modèles numériques de plaques isotropes et des exemples de plaques anisotropes. L'approche présentée tente de repérer la présence d'entailles dans les poutres et de trous ou de variations d'épaisseur dans les plaques.

Enfin, la conclusion synthétise les travaux réalisés et le cheminement suivi dans les différents chapitres, puis apporte des pistes d'approfondissement pour de futurs travaux.

État de l'art

Ce premier chapitre présente les concepts et permet de positionner l'étude de ce manuscrit. Il se découpe en trois sections. Tout d'abord, les concepts de surveillance de la santé des structures et le contrôle non destructif sont présentés. Un accent est mis sur les techniques basées sur le comportement vibratoire des structures. Ainsi le contexte général de l'étude est situé. Ensuite, les structures périodiques et les matériaux composites sont rapidement décrits. Par leur complexité, ces derniers posent un défi à l'application des techniques de contrôle non destructives. Enfin, ce chapitre développe sur les outils existant pour l'identification des caractéristiques de dispersion des ondes adaptées aux structures bidimensionnelles. Ces techniques sont centrales dans ce manuscrit et constituent une piste de réponse aux problématiques posées.

Contents

1.1	Surveillance de la santé des structures et contrôle non destructif . . .	3
1.1.1	Introduction et enjeux	3
1.1.2	Approches non destructives existantes	4
1.1.3	Approches non destructives basées sur les vibrations d'une structure . . .	5
1.1.4	Remarques intermédiaires	9
1.2	Matériaux composites et structures périodiques	10
1.2.1	Matériaux composites	10
1.2.2	Métamatériaux périodiques	11
1.2.3	Propagation des ondes dans les structures périodiques	11
1.3	Méthodes d'identification des caractéristiques de dispersion pour des champs d'ondes bidimensionnels	13
1.3.1	Nombres d'onde et k-spaces	13
1.3.2	Approches basées sur la transformée de Fourier	14
1.3.3	Approches basées sur la méthode de Prony	27
1.3.4	Identification algébrique	39
1.4	Conclusion intermédiaire	41

1.1 Surveillance de la santé des structures et contrôle non destructif

1.1.1 Introduction et enjeux

Dans de nombreux secteurs dont l'aéronautique, l'énergie ou le génie civil, il est nécessaire de vérifier la qualité et l'intégrité des pièces et structures au moment de leur fabrication puis

au cours de leur utilisation. La surveillance de la santé des structures (Structural Health Monitoring (SHM)) regroupe les différentes approches permettant de surveiller à différents instants l'état et la santé des structures. Cela englobe plusieurs niveaux de précision, allant du diagnostic global de grandes structures au contrôle non destructif plus précis au niveau d'une pièce en passant par le contrôle en temps réel avec l'usage de smart structures. La SHM répond avant tout à une problématique de sécurité, en particulier sur le long terme. Dans le domaine du génie civil par exemple, les ouvrages d'art tels que les ponts ou barrages ont vocation à durer et la SHM permet de surveiller et de détecter si une anomalie apparaît dans la structure et son comportement au bout de vingt, trente, quarante ans. Par ailleurs, l'aspect économique est aussi présent, en effet la SHM apporte une aide à la décision, elle permet de pouvoir décider si une pièce ou une structure est à changer. Ainsi, une rupture brutale ayant des conséquences néfastes à plus grande échelle peut être évitée. De plus, la surveillance permanente d'une pièce permet de réduire certains coefficients de sécurité. En aéronautique, cela permet de réduire la masse et d'augmenter par conséquent les performances. Et inversement, la SHM permet de diagnostiquer un composant et permettre de décider s'il peut continuer à être utilisé en toute sécurité malgré la présence d'une anomalie et par conséquent améliorer sa longévité.

Le Contrôle Non Destructif (CND) regroupe toutes les approches et techniques permettant de tester et de diagnostiquer la santé d'une pièce sans la détruire ni l'abîmer. Il s'agit de deux domaines ayant de nombreux points communs et se recoupant. Il existe de très nombreuses techniques basées sur divers domaines de la physique.

Pour positionner une étude, trois points sont à expliciter.

- Sur quels types de structures travaille-t-on, quels types de défauts cherche-t-on à détecter et comment sont-ils modélisés ?
- Quel domaine de la physique et quels phénomènes sont à la base de la détection de défauts ?
- Et enfin, quels indicateurs, quelles mesures, basés sur les phénomènes physiques, permettent de repérer les types de défauts recherchés dans les structures considérées ?

1.1.2 Approches non destructives existantes

De nombreuses approches existent en contrôle non destructif basées sur différents domaines de la physique [Gholizadeh 2016]. Parmi les principales se trouvent les inspections visuelles, réalisées non seulement à l'œil nu [Bossi 2015] mais aussi aidées de caméras et d'outils de traitement d'images [Silveira 2009], pour repérer visuellement la présence de défauts, majoritairement en surface. De plus, l'usage de liquides pénétrants permet de rendre visible de fines fissures qui passeraient inaperçues lors d'une inspection visuelle simple [Kalinichenko 2013]. Certaines méthodes sont basées sur l'électromagnétisme, [Yang 2013] et en particulier les courants de Foucault [Ali 2017] qui seront perturbés en présence d'une anomalie. Il existe aussi des techniques d'imagerie, pouvant être basées sur différents indicateurs, qui permettent d'obtenir une image ensuite traitée pour vérifier l'absence de défaut : la radiographie [Tan 2011] fait usage de rayons X pour obtenir une image, mais la thermographie [Vavilov 2015a, Vavilov 2015b] et l'interférométrie [Hung 2013, Liu 2014] peuvent aussi être citées. En outre, les émissions acoustiques produites par une structure peuvent permettre de l'inspecter [Arumugam 2011]. Enfin, un grand nombre de méthodes se basent sur l'étude des vibrations dans la structure.

1.1.3 Approches non destructives basées sur les vibrations d'une structure

La propagation d'ondes dans une structure donne de nombreuses indications sur la structure elle-même. Un grand nombre d'approches non destructives consistent à récupérer des informations de ce phénomène pour inférer, localiser ou quantifier la présence d'une anomalie. Cependant, l'émergence des métamatériaux et des structures composites vient compliquer l'usage de ces techniques. En effet, une potentielle anomalie peut être noyée dans l'hétérogénéité intrinsèque de ces matériaux. Deux classes principales d'approches peuvent être distinguées, les méthodes basées sur le domaine temporel qui vont être affectées par la dynamique rapide et les méthodes basées sur le domaine fréquentiel, qui vont être plus liées aux aspects macroscopiques et aux matériaux.

1.1.3.1 Techniques temporelles

Parmi les techniques temporelles, l'usage de la propagation d'ultrasons [Rose 2002] est une des principales approches pour tester la santé d'une structure en se basant sur de la propagation d'ondes, à haute fréquence. Elle consiste à envoyer un signal, souvent une pulse avec un émetteur et à mesurer à une autre position le signal reçu par un récepteur et éventuellement analyser la forme du signal reçu et quantifier à quel point il a été modifié. En effet, le signal envoyé est diffracté lorsqu'il y a une fissure, ce qui modifie le signal reçu [Golan 1980]. Par ailleurs, le signal diffracté est retardé par rapport au signal principal, ce qui donne des informations sur la position d'une éventuelle fissure. Cette approche est utilisable pour des structures monodimensionnelles, mais aussi bidimensionnelles. Elle permet également d'étudier l'anisotropie des matériaux composites [Chien 1993].

Il existe beaucoup d'informations contenues dans les signaux mesurés qui peuvent servir à inspecter une structure. La mesure la plus classiquement utilisée est celle des temps d'arrivées (Times of flight). Elle s'adapte à des structures complexes, par exemple pour les matériaux à gradient [Lendrum 2015], c'est-à-dire des matériaux dont les propriétés changent graduellement avec la position et dont [Kieback 2003] présente le principe et la fabrication. En suivant une idée similaire, en positionnant le récepteur à la même position que l'émetteur, le temps de parcours des signaux réfléchis permet d'identifier des défauts. Par exemple, dans des parois raidies, [Masserey 2009] se sert d'un seul émetteur-récepteur, envoie une pulse et étudie les temps de parcours des signaux réfléchis, un signal par raidisseur doit être obtenu, s'il y a un pic supplémentaire, c'est à cause d'une réflexion sur un défaut.

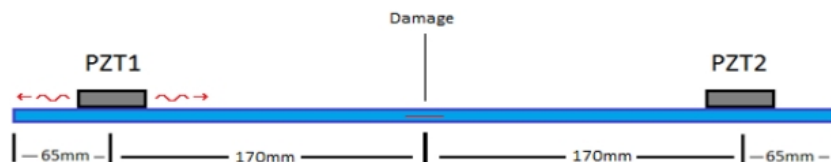


FIGURE 1.1 – Exemple de montage pour la détection de défauts avec un émetteur et un récepteur, [Lendrum 2015].

De nombreux auteurs définissent d'autres quantités à partir des signaux reçus, des Damage Index (DI). Ces quantités permettent de quantifier la probabilité qu'un défaut soit présent ou

sa sévérité. Souvent, les signaux mesurés par les récepteurs sont comparés à des signaux de référence [Su 2009]. Par exemple, [Betz 2006] présente un Damages Index dérivant de l'amplitude crête à crête. [Rizzo 2006] propose d'utiliser la racine de la moyenne des carrés après avoir débruité les signaux grâce à la transformée en ondelettes discrètes. Et [Barreto 2021] liste plusieurs possibilités de définitions de DI selon si un signal de référence est connu ou non. S'il n'y a pas de référence, des damages index basés sur la variance ou l'énergie des signaux peuvent être utilisés. Tandis que s'il y a une référence sans défaut, alors les damages index peuvent être définis à partir de la covariance, de l'écart relatif ou de la corrélation entre les signaux mesurés et de référence.

Techniques d'imagerie

Ensuite, des techniques poussent le concept de Damages Index plus loin, en définissant des fonctions de Damages Index dépendantes de la position spatiale. Ce type d'approche, dit d'imagerie, permet de localiser des anomalies, souvent même avec un nombre limité de mesures. Ainsi, [Michaels 2008, Cai 2011, Druet 2017, Sattarifar 2019] localisent une éventuelle anomalie en construisant une surface de Damages Index grâce aux signaux obtenus par quelques récepteurs. Pour tous points de la surface, le Damages Index est calculé en corrélant les signaux mesurés avec les signaux qui seraient obtenus si un défaut se trouvait au point considéré et provoquait une réflexion supplémentaire (delay-and-sum).

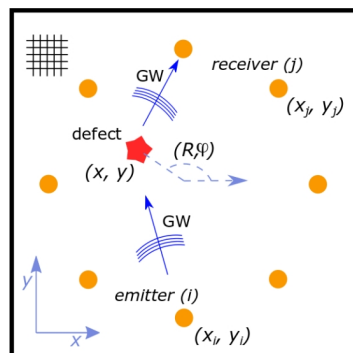


FIGURE 1.2 – Représentation schématisée de la méthodologie d'imagerie par ondes guidées basée sur l'approche delay-and-sum. Points oranges et étoile rouge représentant respectivement les positions des transducteurs piézoélectriques et la position du dommage. Les flèches bleues représentent la propagation des ondes guidées dans la structure, [Kulakovskiy 2021].

[Clarke 2011] montre le bon fonctionnement d'une telle approche sur des exemples de plaques complexes. [Miorelli 2021], effectue l'identification de défauts à partir de la surface de Damages Index en s'inspirant d'algorithmes issus du machine learning. Une approche plus probabiliste pour l'imagerie, elle aussi basée sur les temps d'arrivées, est proposée par [Zhou 2011]. De la même manière, [Hall 2014] se sert du minimum de variance par rapport à des signaux sans défaut. Enfin, l'approche Excitelet, expliquée par [Masson 2011] et utilisée par [Quaegebeur 2011, Kulakovskiy 2019] se base sur la corrélation entre les signaux mesurés et des reconstructions en supposant la présence de défauts. Plusieurs de ces techniques d'imageries

pour la détection de défauts sont comparées dans [Kulakovskiy 2021].

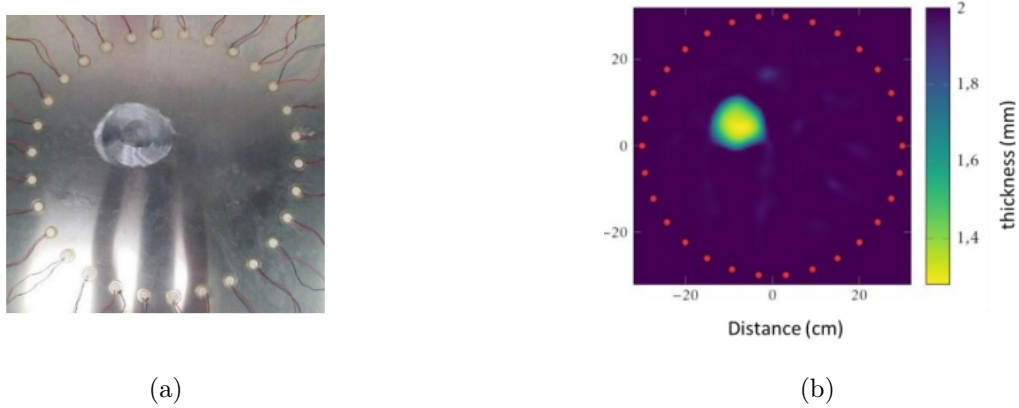


FIGURE 1.3 – (a) Montage expérimental et (b) reconstruction expérimentale de la plaque pour la localisation d’anomalie par [Druet 2017].

1.1.3.2 Techniques fréquentielles

D’autres approches se basent sur des mesures dans le domaine fréquentiel. Souvent, les signaux fréquentiels sont obtenus à partir des signaux temporels par la transformée de Fourier.

Coefficient de réflexion et de transmission

Pour détecter des défauts dans des guides d’onde ou au niveau d’une connexion entre guides d’onde, les coefficients de transmission et de réflexion sont des indicateurs efficaces. Il s’agit de rapports fréquentiels de l’amplitude du signal transmis sur celle du signal incident et de l’amplitude du signal réfléchi sur celle du signal incident.

En comparant les valeurs mesurées à celles d’une structure saine ou issue d’une modélisation, il est possible d’obtenir des informations quant à la présence ou non d’une anomalie. [Lhémercy 2010], en combinant des modélisations éléments finis semi-analytiques pour les guides d’onde et éléments finis pour la connexion, propose d’étendre les limites de cette approche à des cas de plus de deux guides d’onde connectés entre eux. [Apalowo 2018], étudie la possibilité d’appliquer cette approche à des guides d’onde constitués de matériaux composites en étudiant numériquement l’effet d’un défaut sur les coefficients de transmission et de réflexion. Dans des conditions similaires, [Yan 2020] utilise une approche probabiliste pour déterminer les caractéristiques du défaut les plus probables, en se basant sur les coefficients de transmission et de réflexion. D’un autre côté, [Madedo 2014] considère le problème dans l’autre sens, il propose de construire un métamatériau poreux tel que la présence d’un défaut ait un fort impact sur les coefficients de réflexion et de transmission et soit par conséquent facilement détectable. Enfin, [Yan 2022], étudie la possibilité de remplacer les coefficients de transmission et de réflexion. Au lieu d’une excitation appliquée à la structure, la structure n’est excitée que par le bruit ambiant. Deux capteurs mesurent les vibrations, et les coefficients de transmission et de réflexion sont remplacés par une fonction de transmissibilité, rapport des signaux mesurés par

les deux capteurs. [Yan 2022] travaille dans un cadre stochastique et se base sur cette fonction de transmissibilité pour repérer d'éventuelles anomalies.

Techniques basées sur la mesure du champ total

Enfin, d'autres approches proposent d'étudier le champ d'ondes dans son ensemble pour repérer des défauts. Les champs, de déplacement ou de vitesse, sont souvent mesurés, pour une ou plusieurs fréquences, par vibrométrie laser doppler, [Staszewski 2007]. Ainsi, la composante spatiale du champ est utilisée. Des anomalies peuvent être identifiées par des phénomènes se produisant localement aux alentours d'elles. En effet, d'après [Herwin 2021], dans un matériau composite, le champ d'onde est modifié au niveau d'une zone délaminée par des motifs d'interférence. En dehors de la zone délaminée, un champ diffracté est présent, mais d'amplitude bien moindre par rapport au champ d'onde ou au motif d'interférence.

Malgré cela, les champs diffractés peuvent s'avérer utiles. Sans utiliser le champ complet, seulement sur un réseau de récepteurs, [Wang 2003] décrit une méthode pour détecter la présence d'inhomogénéités en se basant sur ce champ diffracté qu'elles provoquent. Cette approche utilise un réseau d'émetteurs et de capteurs et modélise le champ diffracté à l'aide de fonctions de Green. Elle est appliquée à des plaques en composite stratifié.

Plusieurs techniques permettent d'inspecter une structure à partir de son champ et éventuellement localiser un défaut.

[Kudela 2015] se base sur la transformée de Fourier 2D et sa transformée inverse pour localiser des défauts à partir de la connaissance du champ. Dans le domaine de Fourier, les nombres d'onde associés aux ondes propagatives sont filtrés à l'aide d'un masque. Ainsi la transformée inverse révélera le champ uniquement associé à une singularité. Ensuite [Kudela 2018] élargit cette approche pour différents cas et différents types de défauts.

D'autre part, le Teager Energy Operator (TEO), proposé par [Teager 1983, Kaiser 1990] pour mesurer localement l'énergie d'un signal, peut être utilisé pour localiser des défauts dans des structures. Il s'agit d'un opérateur qui à un champ associera un autre, point par point. Une variation brutale de la valeur du TEO calculé peut informer sur la présence d'une hétérogénéité. Dans le cas monodimensionnel, [Cao 2014] propose de s'en servir sur la courbure des formes des modes [Yang 2016]. Pour limiter l'effet du bruit, très présent sur la courbure de la forme des modes, une procédure de filtrage basée sur la transformée en ondelettes peut être utilisée a priori. Le cas bidimensionnel a ensuite été traité par [Xu 2015]. Enfin, [Zheng 2023] utilise également cet opérateur pour localiser des défauts dans une paroi raidie. La recherche de défauts peut dans ce cas être améliorée en sélectionnant les fréquences d'excitation après une étude sur la transmission d'une cellule unitaire.

Une autre gamme de techniques se base sur une estimation locale des nombres d'onde pour la détection de défauts.

Les nombres d'onde locaux ont été introduits par [Rogge 2013] et [Flynn 2013]. La définition donnée par Rogge a été utilisée ensuite par [Mesnil 2015, Juarez 2015, Lugovtsova 2021, Moon 2018, Jeon 2017, Jeon 2020]. Ils servent souvent à détecter des défauts de délamination dans des composites ou de variations locales d'épaisseur apparente et se basent souvent sur l'étude des premiers modes des ondes de Lamb [Lamb 1917]. La méthode consiste à appliquer la

transformée de Fourier sur le champ multiplié par une petite fenêtre spatiale. Deux procédures sont présentées dans [Lugovtsova 2021]. La première considère des petites fenêtres 2D centrées sur chaque point. Ensuite, la transformée de Fourier bidimensionnelle est appliquée, le nombre d'onde ayant l'amplitude la plus élevée est alors associé au point. Tandis que la seconde se base sur la transformée de Fourier monodimensionnelle appliquée successivement à chaque ligne et chaque colonne avant d'en déduire une valeur pour chaque point. La taille de la fenêtre est d'une grande importance. Si elle est trop grande, alors la mesure sera imprécise, mais elle doit rester plus grande que la longueur d'onde. Le choix de la taille dépend des connaissances a priori sur le champ. Une taille de fenêtre de côté deux fois la longueur d'onde est conseillée par [Rogge 2013, Lugovtsova 2021].

[Juarez 2015] utilise cette définition des nombres d'onde locaux, mais propose de s'intéresser à plusieurs fréquences pour rendre l'approche plus robuste et estime entre quelles couches d'une plaque composite se situe un éventuel défaut de délamination. [Jeon 2017] rajoute une étape de filtration du champ a priori pour ne conserver que le champ associé au mode A0 des ondes de Lamb. À partir d'un champ en temps et 2D en espace, la transformée de Fourier spatiale monodimensionnelle est appliquée en temps puis 2D en espace. Le champ est filtré sur l'espace des nombres d'onde autour des valeurs du mode A0. Puis la transformée 2D inverse est appliquée pour obtenir un champ en espace et en fréquence, champ sur lequel le calcul des nombres d'onde locaux est effectué. À partir de la même procédure, [Moon 2018] choisit la fréquence d'excitation de manière à maximiser la variation des nombres d'onde locaux lors d'une variation d'épaisseur. Et [Jeon 2020] utilise la transformée en ondelettes pour effectuer la procédure de filtration.

Une autre méthode pour quantifier les nombres d'onde localement a été proposée par Mesnil, les nombres d'onde instantanés [Mesnil 2014a, Mesnil 2014b, Mesnil 2015, Mesnil 2016b, Mesnil 2016a]. En particulier, [Lugovtsova 2021] compare les performances de cette nouvelle définition avec les précédentes. Ceux-ci se basent sur le gradient de la phase. Pour cela, le champ est d'abord filtré puis mis sous forme analytique grâce à la transformée de Hilbert. La phase et en particulier ses dérivées peuvent s'obtenir de différentes manières. Soit, la dérivée logarithmique est utilisée. Soit la phase est obtenue en prenant l'arc-tangente du rapport des parties imaginaire et réelle du signal analytique.

Les résultats obtenus en utilisant les deux formules de nombres d'onde instantanés sont sensiblement les mêmes et ont été appliqués à des exemples de recherche de délamination dans des plaques en matériaux composites.

1.1.4 Remarques intermédiaires

Pour cadrer l'étude sur la détection de défauts réalisée dans ce manuscrit, en particulier dans le Chapitre. 5, les trois points importants sont rappelés et expliciter :

- Sur quels types de structures travaille-t-on, quels types de défauts cherche-t-on à détecter et comment sont-ils modélisés ?
- *Les structures étudiées sont des poutres, mais surtout plaques isotropes et orthotropes, associées au comportement de matériaux composites ou de structures périodiques. Les défauts sont modélisés très simplement, comme des variations locales d'épaisseur ou des*

trous dans le domaine.

- Quel domaine de la physique et quels phénomènes sont choisis pour être à la base de la détection de défauts ?
- *L'approche de détection de défauts proposée se base sur le comportement dynamique des structures, en particulier sur la propagation des ondes. Elle suppose que la présence d'un défaut va altérer la propagation des ondes et en particulier provoquer une dissipation de l'énergie.*
- Et enfin, quels indicateurs, quelles mesures, basés sur les phénomènes physiques, permettent de repérer les types de défauts recherchés dans les structures considérées ?
- *Pour repérer ces altérations, les mesures des k -spaces complexes servent d'indicateurs, en particulier leurs parties imaginaires sont étudiées car elles sont associées à la dissipation de l'énergie. Ceux-ci sont mesurés à partir des champs de déplacement dans le domaine fréquentiel à des fréquences relativement basses. Pour détecter des variations dans les k -spaces, ceux-ci sont comparés avec des k -spaces déterminés analytiquement ou à partir de structures ou portions de structure saine.*

C'est pourquoi la prochaine section traite des matériaux composites et des structures périodiques. Puis la section. 1.3 s'intéresse aux nombres d'ondes, aux k -spaces et aux méthodes inverses pour les mesurer à partir d'un champ de déplacement.

1.2 Matériaux composites et structures périodiques

Les structures composites et les métamatériaux sont utilisés de plus en plus souvent pour de nombreuses applications, en particulier dans l'industrie aéronautique. Ces structures ont l'avantage de pouvoir présenter des propriétés impossibles à atteindre pour des matériaux classiques ou isotropes [Del Vescovo 2014, Mukhopadhyay 2017].

1.2.1 Matériaux composites

Les matériaux composites sont formés par association d'au moins deux composants non miscibles et sont par conséquent hétérogènes [Berthelot 2012, Gay 2005]. Les composants sont sélectionnés pour leurs propriétés.

Usuellement, ils sont composés d'une matrice et de renforts. La matrice sert de liant aux renforts, elle peut être céramique ou métallique, mais elle est le plus souvent organique, c'est-à-dire en polymères. Les renforts sont incorporés à la matrice et permettent de modifier grandement le comportement mécanique du matériau. Ils peuvent être par exemple constitués de fibres en carbone ou de verre. La nature et l'ordonnement des renforts ont un impact très important sur les propriétés du matériau final.

Un composite stratifié est composé de l'empilement de plusieurs couches de ce type de matériau, éventuellement dans des directions différentes.

Les composites sandwichs sont une autre classe de matériaux composites. Ceux-ci sont constitués de deux peaux de part et d'autre d'une âme. Les peaux peuvent être des composites

stratifiés aussi bien que des matériaux plus classiques, alors que l'âme relie les deux peaux. Selon les performances recherchées, l'âme peut aussi bien être en mousse qu'en une structure plus complexe tel qu'en nids d'abeilles.

L'avantage principal de ces matériaux est de pouvoir atteindre des propriétés mécaniques, telles qu'une raideur élevée, tout en conservant une masse plus faible que les matériaux classiques. Ce qui est très utile, entre autres, en aéronautique ou dans d'autres secteurs industriels. De manière générale, les matériaux composites sont designés selon les besoins. Leur grande polyvalence justifie leur popularité malgré la difficulté de leur fabrication.

Cependant, les matériaux composites sont sujets à des risques de défauts qui leur sont propres, pouvant apparaître à la fabrication ou durant la durée de vie de la pièce. Entre autres, il faut citer la rupture de fibres, la décohésion entre renfort et matrice, ou encore la délamination, le décollement entre deux couches de composites que certaines méthodes d'imageries citées précédemment essayent de repérer.

1.2.2 Métamatériaux périodiques

D'autre part, les métamatériaux sont des structures architecturées, designées de manière à obtenir des propriétés intéressantes et exotiques. En mécanique, ils permettent de contrôler la propagation des ondes élastiques [Kadic 2013], mais leurs propriétés remarquables peuvent atteindre d'autres domaines que la mécanique, par exemple des propriétés optiques, acoustiques ou diélectriques.

Par exemple, en mécanique, les matériaux auxétiques présentent un coefficient de Poisson négatif [Bückmann 2014]. Il est même maintenant possible de fabriquer des structures "intelligentes" par impression 3D [Montgomery 2020].

1.2.3 Propagation des ondes dans les structures périodiques

Une structure est qualifiée de structure périodique lorsqu'elle est constituée d'un assemblage de motifs répétés spatialement. Il peut s'agir de structure 1D, 2D ou 3D. Fondamentalement, les solides cristallins sont des structures périodiques dont la cellule unitaire est proche de l'échelle atomique. La propagation des ondes dans des structures périodiques présente des spécificités intéressantes. Les théorèmes de Floquet et de Bloch [Floquet 1883, Bloch 1928, Collet 2011] permettent de montrer que l'étude de la propagation des ondes dans un réseau périodique infini pouvait se ramener à l'étude d'une seule cellule périodique unitaire. En particulier, toujours d'après ces théorèmes, le nombre d'onde associé à une onde se propageant dans un réseau périodique infini est indépendant de la position dans la cellule.

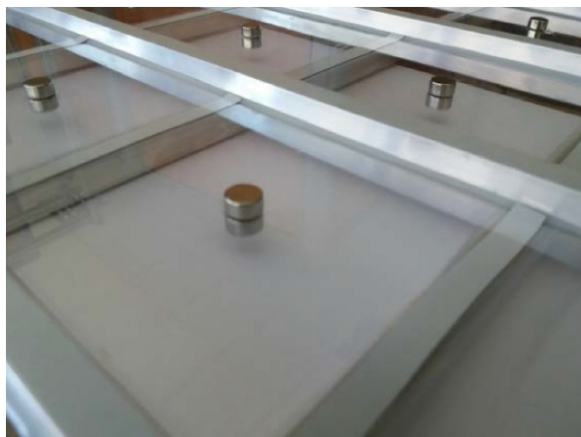


FIGURE 1.4 – Exemple d'une structure périodique contrastée : une paroi bi-raïdie constituée de plexiglas et d'aluminium avec masses ajoutées, [Boutin 2020].

En particulier, le contraste entre les matériaux et la périodicité géométrique permet d'obtenir des propriétés inhabituelles, telles que des bandes interdites pour l'atténuation des ondes [Claeys 2013]. Elles empêchent la propagation des ondes dans la structure à certaines fréquences. Deux mécanismes peuvent produire des bandes interdites en élastodynamique, les bandes interdites basées sur la diffraction de Bragg et les bandes interdites basées sur les résonances internes. Dans une structure périodique, l'effet de la diffraction de Bragg [Bragg 1915] est produit par interférences destructives entre les ondes transmises et réfléchies. Et par conséquent, provoque une réflexion forte et un coefficient de transmission très faible. Ce phénomène apparaît lorsque la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la taille d'une cellule de périodicité unitaire. D'un autre côté, les bandes interdites par résonances internes interviennent lorsque la cellule unitaire a un comportement de résonateur [Auriault 1985, Liu 2000, Wang 2004]. Ce mécanisme permet de créer des bandes interdites à plus basse fréquence que la diffraction de Bragg.

Il existe plusieurs approches pour modéliser le comportement vibratoire des structures périodiques. Dans les rares cas les plus simples, des solutions analytiques peuvent être calculées. Sinon, une résolution numérique est envisageable, soit par méthode des éléments finis ou par wave finite element method.

D'autre part, lorsque le contraste entre les composants de la structure périodique est fort, l'homogénéisation périodique permet de construire des modèles continus équivalents [Hans 2008, Bensoussan 2011]. Le point fort de cette approche est la prise en compte des aspects multi-échelle des structures. Cette approche se base sur des hypothèses de séparation d'échelle entre les comportements macroscopique et microscopique de la structure. La dynamique locale est incorporée dans le modèle en réalisant des développements asymptotiques sur les rapports entre les grandeurs caractéristiques de l'échelle microscopique et celles de l'échelle macroscopique.

Bien que le contraste entre les composants et la périodicité soient à l'origine des propriétés originales, c'est cette hétérogénéité qui rend la modélisation de ces structures et leur inspection plus compliquées.

1.3 Méthodes d'identification des caractéristiques de dispersion pour des champs d'ondes bidimensionnels

Les caractéristiques de propagation des ondes fournissent beaucoup d'informations sur le comportement d'une structure [Leissa 1969]. Leurs estimations précises sont applicables à la détection de défauts [Tian 2021], l'identification des matériaux [Santoni 2017] ou la caractérisation de structures [AllahTavakoli 2023].

1.3.1 Nombres d'onde et k-spaces

Le nombre d'onde k est une quantité complexe qui caractérise la propagation des ondes et le comportement dynamique des structures. Il peut être interprété comme l'équivalent spatial de la pulsation ω en temporelle. Pour les structures bidimensionnelles, en particulier pour les structures anisotropes, la propagation des ondes, et par conséquent le nombre d'onde, dépendent de la direction. L'ensemble des nombres d'onde pour toutes les directions du plan est appelé le k-space. La partie réelle du k-space décrit la variation spatiale de phase des ondes propagatives tandis que la partie imaginaire du k-space est étroitement liée à la propagation de l'énergie, à l'amortissement des ondes propagatives et aux ondes évanescentes.

Dans le cas des structures composites hétérogènes, et en particulier des structures périodiques, les théorèmes de Floquet et de Bloch [Floquet 1883, Bloch 1928, Collet 2011] garantissent une bonne définition des nombres d'onde et des k-spaces. Pour ces structures, le contraste entre les matériaux et la périodicité géométrique permettent d'obtenir des propriétés inhabituelles, telles que des bandes interdites pour l'atténuation des ondes [Claeys 2013] qui apparaissent sur la relation de dispersion.

La relation de dispersion permet de relier les k-spaces aux fréquences temporelles. Cette relation permet d'obtenir les vitesses de groupe $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial \Re(k)}$ et de phase $c_\phi = \frac{\omega}{\Re(k)}$, elle permet également d'estimer les propriétés de transmission et de rayonnement acoustique de la structure. En particulier, le facteur d'amortissement d'une structure peut se déduire des k-spaces complexes et des vitesses de propagation par la formule suivante, [Lyon 1995, Marchetti 2020, Fazail 2023b] :

$$\eta(\omega, \theta) = -2 \frac{\Im(k_\theta) c_g}{\Re(k_\theta) c_\phi}. \quad (1.1)$$

Et dans le cas des structures composites non isotropes, [Manconi 2010] propose une définition du ratio d'amortissement moyenné par la densité modale angulaire. La densité modale est donnée Eqn. (1.2), avec S la surface de la structure et le ratio d'amortissement moyen est présenté Eqn. (1.3).

$$n(\omega, \theta) = \frac{S \Re(k_\theta(\omega))}{\pi^2 c_g(\omega, \theta)}, \quad (1.2)$$

$$\bar{\eta}(\omega) = \frac{\int_0^{2\pi} \eta(\omega, \theta) n(\omega, \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} n(\omega, \theta) d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} \eta(\omega, \theta) \frac{\Re(k_\theta(\omega))}{c_g(\omega, \theta)} d\theta}{\int_0^{2\pi} \frac{\Re(k_\theta(\omega))}{c_g(\omega, \theta)} d\theta}. \quad (1.3)$$

Dans la littérature, il existe déjà de nombreuses méthodes inverses pour extraire les k-spaces des réponses vibratoires de structures en différentes dimensions. Les nombres d'onde étant apparentés à des fréquences spatiales, l'un des outils le plus classique pour les étudier est la transformée de Fourier [Fourier 1888]. Ainsi, une première catégorie de méthodes, non linéaires, est constituée par les approches basées sur la transformée de Fourier. Ces méthodes ont été améliorées au fil du temps pour affiner leur précision et élargir leur plage de fonctionnement.

Une autre catégorie de méthodes regroupe les approches basées sur la méthode de Prony [de Prony 1795]. Par rapport aux méthodes inverses basées sur la transformée de Fourier, cette catégorie de méthodes inverses présente une résolution élevée dans des conditions parfaites et de bonnes performances aux basses fréquences. Cependant, ces méthodes ont tendance à être très sensibles aux bruits et aux incertitudes en raison des limitations inhérentes à la méthode de Prony. Par ailleurs, elles nécessitent un échantillonnage périodique du champ en entrée. Et lorsqu'une structure périodique est étudiée, sa périodicité doit être prise en compte dans l'échantillonnage.

D'autres méthodes intéressantes en dehors de celles basées sur Fourier ou Prony peuvent être citées. La méthode de Mc Daniels est classique pour l'identification des nombres d'onde d'une structure monodimensionnelle [McDaniel 2000b, McDaniel 2000a]. Celle-ci consiste à modéliser le champ par la combinaison de quatre ondes, deux propagatives et deux évanescentes e^{-ikx} , e^{ikx} , e^{-kx} et e^{kx} , puis à rechercher le nombre d'onde minimisant l'écart au champ mesuré. Une extension pour des structures bidimensionnelles a été proposée par [Lajili 2022]. La méthode des sources images, proposée par [Gunda 1995], permet de reconstruire le champ harmonique de plaques rectangulaires excitées par un chargement ponctuel à l'aide d'une somme de fonctions de Hankel. Cette technique a été étendue aux plaques polygonales convexes avec des conditions aux limites arbitraires par [Cuenca 2012]. [Roozen 2017b] propose de rechercher le nombre d'onde en recherchant les valeurs faisant coïncider un champ construit par méthode des sources images au champ mesuré. Cette technique est limitée aux plaques polygonales convexes et la charge ponctuelle doit être connue avec précision, mais elle permet une identification précise du nombre d'onde. Une autre idée a été proposée par [Ablitzer 2017] dans le cas d'une structure orthotrope. Les dérivées partielles du champ sont estimées par différences finies pour en déduire les directions d'orthotropie, puis les propriétés de rigidité en flexion et les nombres d'onde. La grande majorité des méthodes se basent sur des champs d'onde dans le domaine fréquentiel, mais [Morandi 2022] rassemble des méthodes dans le domaine temporel pour estimer les caractéristiques de dispersion. Le nombre d'onde est estimé à partir de la vitesse phase. Celle-ci est déduite du temps de parcours qui est calculé par recherche du pic maximal, corrélation croisée ou kurtosis. Les approches temporelles sont principalement réservées aux hautes fréquences et limitées à des structures monodimensionnelles.

Dans cette partie, plusieurs méthodes d'extraction des k-spaces sont présentées, en portant un accent sur les méthodes fonctionnant sur des structures bidimensionnelles.

1.3.2 Approches basées sur la transformée de Fourier

La transformée de Fourier, introduite par [Fourier 1888] est l'outil historique pour étudier un signal temporel du point de vue fréquentiel, et par conséquent un signal spatial du point de vue des nombres d'onde. C'est pourquoi toute une classe de méthodes k-space en dérive.

1.3.2.1 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une transformation intégrale permettant de transformer une fonction du temps en une fonction de la fréquence ou une fonction de l'espace en une fonction des nombres d'onde. Pour un signal temporel, en une dimension, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier \hat{f} est définie par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad (1.4)$$

et sa transformée inverse par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (1.5)$$

Usuellement, la transformée de Fourier spatiale est légèrement différente, la variable x de l'espace joue le rôle de la variable temporelle t et le nombre d'onde k prend la place de la pulsation ω , cependant, dans l'exponentielle, ikx remplace $-i\omega t$ sans le signe négatif. Cette subtilité est expliquée par [Hambric 2018]. Le signe négatif est présent pour les signaux temporels, car pour ceux-ci, les ondes se propageant dans la direction des temps négatifs ne sont pas considérées, à l'inverse des signaux spatiaux, pour lesquels les ondes se propagent dans les deux directions. Ainsi, la transformée de Fourier spatiale monodimensionnelle est définie Eqn. (1.6) et sa transformée inverse Eqn. (1.7).

$$\forall k \in \mathbb{R}, F(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(x) dx, \quad (1.6)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} F(k) dk. \quad (1.7)$$

Dans un espace à deux dimensions, si $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, la transformée de Fourier \hat{f} est définie par :

$$\forall (k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2, \hat{f}(k_x, k_y) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(k_x x + k_y y)} f(x, y) dx dy. \quad (1.8)$$

La plupart du temps, les champs sont échantillonnés et sont traités par la Transformée de Fourier Discrète (Discrete Fourier Transform) (DFT). En une dimension et en notant N_x le nombre de points, celle-ci est définie par Eqn. (1.6) pour un ensemble discret de nombre d'onde $(k_p)_{0 \leq p < N_x - 1}$ définie par $k_p = p\Delta k = p \frac{2\pi}{N_x \Delta x}$.

$$\hat{f}(k_p) = \sum_{l=1}^{N_x} e^{ik_p x_l} f(x_l) \Delta x_l. \quad (1.9)$$

Et en dimension 2, sur une grille de N_x par N_y points, elle est définie pour les couples $(k_{x,p}, k_{y,q})$, p allant de 0 à $N_x - 1$ et q allant de 0 à $N_y - 1$, définies par $(k_{x,p}, k_{y,q}) = \left(p \frac{2\pi}{N_x \Delta x}, q \frac{2\pi}{N_y \Delta y} \right)$.

$$\hat{f}(k_{x,p}, k_{y,q}) = \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} e^{i(k_{x,p}x_l + k_{y,q}y_m)} f(x_l, y_m) \Delta x_l \Delta y_m. \quad (1.10)$$

L'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform) (FFT), rappelé dans [Heckbert 1995], permet d'obtenir la transformée de Fourier discrète le plus rapidement possible. La DFT a l'avantage majeur d'être bijective, mais n'est calculable qu'à certaines valeurs de nombres d'onde, ce qui peut rendre l'identification du k-space compliquée. La transformée de Fourier continue (CFT) [Ichchou 2008b] modifie légèrement la DFT, sacrifiant la bijectivité pour pouvoir approximer la transformée de Fourier en tout (k_x, k_y) appartenant à $\left[-\frac{\pi}{N_x}, \frac{\pi}{N_x} \right] \times \left[-\frac{\pi}{N_y}, \frac{\pi}{N_y} \right]$.

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} e^{i(k_x x_l + k_y y_m)} f(x_l, y_m) \Delta x_l \Delta y_m. \quad (1.11)$$

Pour un angle θ donné, le nombre d'onde du k-space peut être estimé par le couple (k_x, k_y) vérifiant : $\exists k \in \mathbb{R}_+$, $k_x = k \cos \theta$ et $k_y = k \sin \theta$ et maximisant le module de \hat{f} .

$$k_\theta = \underset{k \in \mathbb{R}}{\text{Argmax}} \left(\left| \hat{f}(k \cos \theta, k \sin \theta) \right| \right). \quad (1.12)$$

À l'inverse des méthodes k-spaces qui sont présentées après, la transformée de Fourier, combinée à sa transformée inverse, permet de faire du filtrage, en retirant des plages de nombres d'onde d'un champ. La transformée de Fourier est utilisable pour l'obtention des k-spaces mais possède quelques limitations. Seule la partie réelle des nombres d'onde peut être calculée, négligeant leur partie imaginaire qui est un paramètre important pour traduire la propagation de l'énergie dans la structure. Ensuite cette transformation est idéale pour les champs ou signaux infinis, or dans la pratique, les domaines sont finis, ce qui entraîne des effets de fuite spectrale. Une solution pour réduire cet effet consiste à remplacer la fonction de fenêtrage rectangulaire par une autre, comme une fonction de fenêtrage de Hanning ou de Hamming [Chen 2010, Podder 2014].

Par ailleurs, le pas d'échantillonnage doit être suffisamment inférieur à la longueur d'onde étudiée, au moins deux points par longueur d'onde (théorème de Nyquist-Shannon [Shannon 1949]). Enfin, selon la direction considérée, le nombre d'onde est plus ou moins facile à obtenir. Certaines méthodes basées sur la transformée de Fourier ont été développées pour améliorer le calcul des k-space telles que les méthodes Inhomogeneous Wave Correlation (IWC).

1.3.2.2 Inhomogeneous Wave Correlation

L'IWC : Inhomogeneous Wave Correlation, introduite tout d'abord par [Berthaut 2004, Berthaut 2005], est une méthode permettant de calculer des nombres d'onde à partir d'un

champ de déplacement. Celle-ci se base sur la maximisation d'une fonction de corrélation entre un champ de déplacement et une onde inhomogène. Cette approche est utilisable sur des champs monodimensionnels mais permet surtout, pour des champs bidimensionnels de déterminer les propriétés de propagation en fonction de la direction dans le plan. Elle est adaptée aux hautes fréquences et aux moyennes fréquences, lorsque le recouvrement modal est suffisamment élevé pour supposer qu'il y a des ondes dans toutes les directions du plan.

Principe et outils

Le formalisme suivant provient de [Boukadia 2021]. La corrélation entre f et g , définies sur un domaine suffisamment régulier Ω et appartenant à $L^2(\Omega)$, fait intervenir le produit hermitien et la norme dans $L^2(\Omega)$. Le produit scalaire, noté $\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)}$, est défini par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f^*(x)g(x)dx, \quad (1.13)$$

où f^* est le conjugué de f et la norme est définie par $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(\Omega)}}$. Ainsi, la corrélation entre deux fonctions f et g est définie par :

$$Corr(f, g) = \frac{|\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)}|}{\|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (1.14)$$

Quel que soit f et g , appartenant à $L^2(\Omega)$, $Corr(f, g)$ est à valeurs dans $[0, 1]$.

Le principe de l'IWC est de déterminer les paramètres d'une onde inhomogène, maximisant sa corrélation avec un champ de déplacement.

IWC monodimensionnelle

Dans le cas monodimensionnel, c'est à dire si $\Omega \subset \mathbb{R}$, un champ, noté u , peut par exemple représenter le déplacement d'une poutre en flexion. Si le champ u est connu temporellement, alors \hat{u} , sa transformée de Fourier temporelle, est utilisée. Le nombre d'onde associé à \hat{u} est recherché sous la forme $k(1 + i\gamma)$. Celui-ci s'obtient par maximisation de la corrélation entre \hat{u} et une onde inhomogène $\hat{o}_{k,\gamma}$, paramétrée par k et γ et définie sur Ω par :

$$\hat{o}_{k,\gamma}(x) = e^{-ik(1+i\gamma)x}. \quad (1.15)$$

L'idée de l'IWC est d'approximer le nombre d'onde par la valeur maximisant la fonction de corrélation du champ \hat{u} avec une onde inhomogène \hat{o} . Cette onde est paramétrée par le nombre d'onde. Ainsi, le nombre d'onde associé au champ \hat{u} se calcule par maximisation de la fonction de corrélation ci-dessous.

$$IWC(k, \gamma) = \frac{\left| \int_{\Omega} \hat{u} \cdot \hat{o}_{k,\gamma}^* dx \right|}{\sqrt{\int_{\Omega} |\hat{u}|^2 dx \cdot \int_{\Omega} |\hat{o}_{k,\gamma}|^2 dx}}. \quad (1.16)$$

En pratique, l'intégrale $\int_{\Omega} |\hat{u}|^2 dx$ n'est pas nécessairement calculée, car ne dépendant pas de k et γ . Enfin, le champ \hat{u} n'est souvent connu qu'en un nombre fini de points, c'est pourquoi l'intégration $\int_{\Omega} \hat{u} \cdot \hat{\delta}_{k,\gamma}^* dx$ est calculée numériquement. Les méthodes des rectangles, des trapèzes ou de Simpson sont les plus souvent utilisées. Dans le cas monodimensionnel, l'IWC permet d'extraire les caractéristiques de dispersion, comme le font [Van Damme 2018b, Van Damme 2018a] pour des poutres composites et des métastructures monodimensionnelles.

IWC bidimensionnelle

Pour un problème bidimensionnel, c'est à dire si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, le champ u peut représenter le déplacement hors plan d'une plaque. Comme pour le cas monodimensionnel, si le champ est connu en espace et en temps, alors \hat{u} sa transformée de Fourier temporelle est utilisée. Pour un problème 2D, le nombre d'onde dépend de la direction θ , c'est pourquoi il est recherché sous la forme $k(\theta)(1 + i\gamma(\theta))$. L'onde inhomogène est paramétrée par l'angle θ en plus du nombre d'onde.

$$\hat{\delta}_{k,\gamma,\theta}(x, y) = e^{-ik(\theta)(1+i\gamma(\theta))(x \cos \theta + y \sin \theta)}. \quad (1.17)$$

Et le nombre d'onde dans une direction θ s'obtient par maximisation de la fonction de corrélation ci-dessous.

$$IWC(k, \gamma, \theta) = \frac{\left| \iint_{\Omega} \hat{u} \cdot \hat{\delta}_{k,\gamma,\theta}^* dx dy \right|}{\sqrt{\iint_{\Omega} |\hat{u}|^2 dx dy \cdot \iint_{\Omega} |\hat{\delta}_{k,\gamma,\theta}|^2 dx dy}}. \quad (1.18)$$

Donc, pour tous les angles θ , au maximum de Eqn. (1.18), les valeurs k et γ sont déterminées. De la même manière que pour le cas monodimensionnel, l'intégrale $\iint_{\Omega} |\hat{u}|^2 dx dy$ n'est pas nécessairement calculée et les intégrations sont calculées numériquement.

[Berthaut 2004] propose une procédure en trois étapes pour la recherche du nombre d'onde complexe dans une direction θ :

- 1 : Tout d'abord γ est fixé à 0. La partie réelle k_1 est estimée par maximisation de $IWC(k, 0, \theta)$.
- 2 : Ensuite, k est fixé à sa valeur trouvée précédemment. γ_1 est estimé en maximisant $IWC(k_1, \gamma, \theta)$.
- 3 : Enfin, la recherche du maximum de la corrélation est réalisé sur les deux variables simultanément, aux alentours du couple (k_1, γ_1) trouvé aux étapes 1 et 2. La recherche peut s'effectuer par descente de gradient.

Ainsi pour chaque direction θ , un couple $(k(\theta), \gamma(\theta))$ est calculé. Et de ce couple découle le nombre d'onde : $k(\theta)(1 + i\gamma(\theta))$.

Par ailleurs, une procédure de vérification des résultats peut être mise en place. Soit $(\theta_i)_{1 \leq i \leq N_{\theta}}$ l'ensemble des directions considérées, souvent $\theta_i = \frac{2\pi(i-1)}{N_{\theta}}$. Si dans une direction θ_i , la corrélation est très inférieure au maximum des corrélations, si :

$$IWC(k(\theta_i), \gamma(\theta_i), \theta_i) \ll \max_{1 \leq j \leq N_{\theta}} IWC(k(\theta_j), \gamma(\theta_j), \theta_j), \quad (1.19)$$

alors la direction peut être retirée, l'onde ne porte pas assez d'énergie. De même, si l'amortissement $|\gamma(\theta_i)|$ est supérieur à 1, alors l'onde est suramortie ou évanescence et la valeur peut être retirée. Par ailleurs, la qualité des mesures peut être prise en compte lors du calcul numérique des intégrales. Si la cohérence ρ_n de chaque mesure est connue et S_n la surface associée à ce point de mesure :

$$\iint_S \bullet \, dx dy \longleftrightarrow \sum_n \bullet \, \rho_n S_n. \quad (1.20)$$

Si la cohérence n'est pas connue, celle-ci est prise égale à 1. Ainsi, la méthode IWC permet d'obtenir une mesure du k-space en fonction de la direction pour des structures isotropes comme anisotropes. [Berthaut 2005] l'utilise sur une structure composée d'une plaque en acier et d'un revêtement en matériaux poreux au comportement isotrope Fig. 1.5 et sur une plaque raidie ayant un comportement orthotrope Fig. 1.7.



FIGURE 1.5 – Plaque en acier avec matériau poreux, [Berthaut 2005].

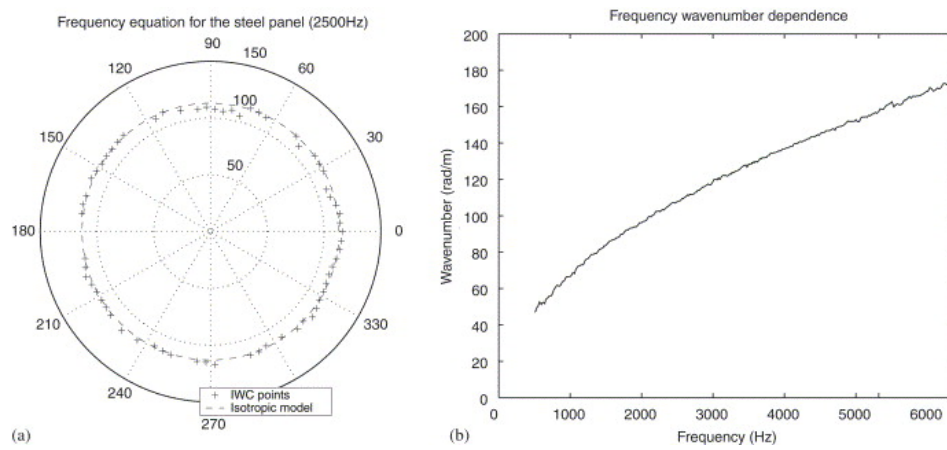


FIGURE 1.6 – Résultats de l'IWC sur la plaque en acier : (a) k-space, (b) nombre d'onde en fonction de la fréquence, [Berthaut 2005].

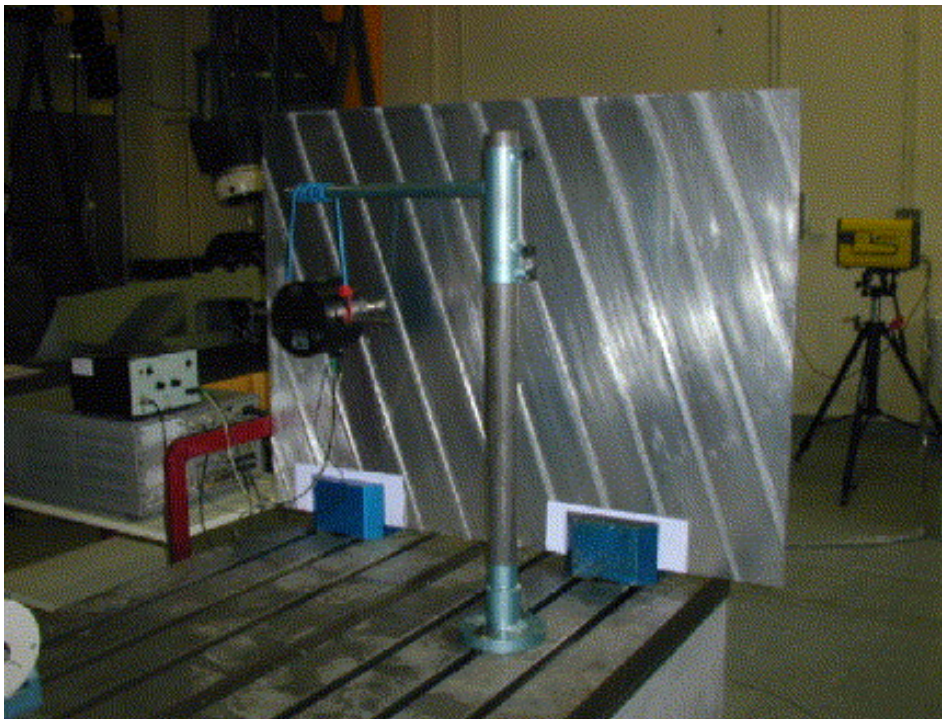


FIGURE 1.7 – Plaque raidie en aluminium, [Berthaut 2005].

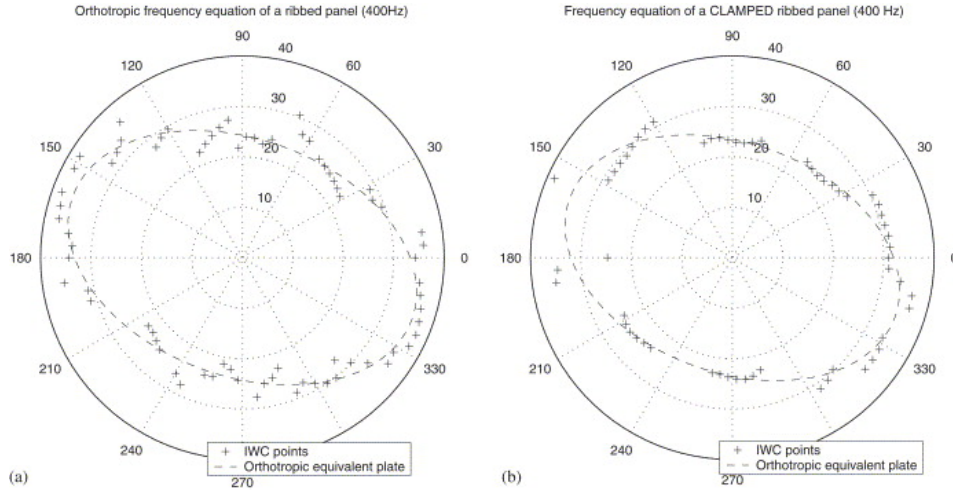


FIGURE 1.8 – Résultats de l’IWC sur la plaque en aluminium raidie pour deux conditions aux bords : (a) libre suspendue, (b) partiellement encastrée, [Berthaut 2005].

Les résultats obtenus pour la structure isotrope Fig. 1.6 et pour la structure raidie Fig. 1.8 montrent l’efficacité de la méthode IWC. De plus, [Ichchou 2008a] l’applique à une plaque composite avec un cœur en nid d’abeilles puis à une paroi raidie [Ichchou 2008b]. Et enfin, [Rak 2008] s’en sert pour estimer le ratio d’amortissement dans le cas monodimensionnel. [Tufano 2020b] a étendu l’IWC à des structures courbées. L’une des forces non négligeable de cette méthode consiste à pouvoir être utilisée sur un maillage non régulier et à présenter une résistance à des données bruitées. Cependant, cette méthode n’est pas exacte, même en absence de bruit, elle ne converge pas vers la valeur exacte du nombre d’onde. De plus, pour fonctionner efficacement, un nombre suffisant de longueurs d’onde doit être présent dans le domaine, la longueur d’onde doit être très inférieure à la taille caractéristique du domaine. Enfin, le calcul de la partie imaginaire des nombres d’onde pose des difficultés, surtout lorsque la structure est excitée par un point source dans le domaine. C’est pourquoi d’autres formulations ont été proposées. Par exemple, [Lajili 2018, Lajili 2022] améliore l’IWC classique en ajoutant une onde dans la direction opposée à l’onde inhomogène. Cette méthode est appelée méthode Inhomogeneous Wave Correlation Variant (IWC-V). Bien que cette amélioration permette un meilleur calcul des espaces k complexes, elle souffre toujours des mêmes limitations dans les basses fréquences que la méthode IWC classique.

Extended Inhomogeneous Wave Correlation

Pour traiter des cas avec un fort amortissement et gagner en précision sur la partie imaginaire des nombres d’onde mesurés, [Van Belle 2017] propose une version modifiée de l’IWC, nommée l’Extended Inhomogeneous Wave Correlation (EIWC). Si la structure est excitée par une source ponctuelle de position connue (x_0, y_0) , l’onde inhomogène $\hat{o}_{k,\gamma,\theta}$ est définie Eqn. (1.17) est remplacée par :

$$\hat{\sigma}_{k,\gamma,\theta}(x, y) = e^{-ik(\theta)|(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta}| e^{-|k(\theta)\gamma(\theta)((x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta)|}. \quad (1.21)$$

En 1D : $\hat{\sigma}_{k,\gamma}(x) = e^{-ik|x-x_0|}e^{-|k\gamma(x-x_0)|}$. Le reste de la procédure est identique pour la recherche de k et γ par maximisation de la fonction suivante :

$$EIWC(k, \gamma, \theta) = \frac{\left| \iint_{\Omega} \hat{u} \cdot \hat{\sigma}_{k,\gamma,\theta}^* dx dy \right|}{\sqrt{\iint_{\Omega} |\hat{u}|^2 dx dy \cdot \iint_{\Omega} |\hat{\sigma}_{k,\gamma,\theta}|^2 dx dy}}. \quad (1.22)$$

[Fazail 2023a] compare cette version améliorée avec la méthode classique de l'IWC sur plusieurs cas dont celui d'une plaque composite de type sandwich composée de plaques en aluminium et d'un cœur viscoélastique.

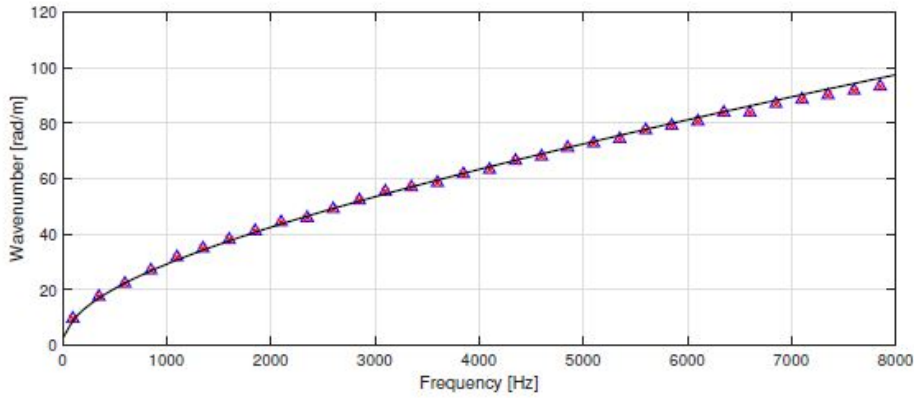


FIGURE 1.9 – Comparaison des courbes de dispersion d'un modèle numérique de plaque sandwich en aluminium avec cœur viscoélastique. – general laminate model (GLM), Δ méthode IWC et \times méthode EIWC, [Fazail 2023a].

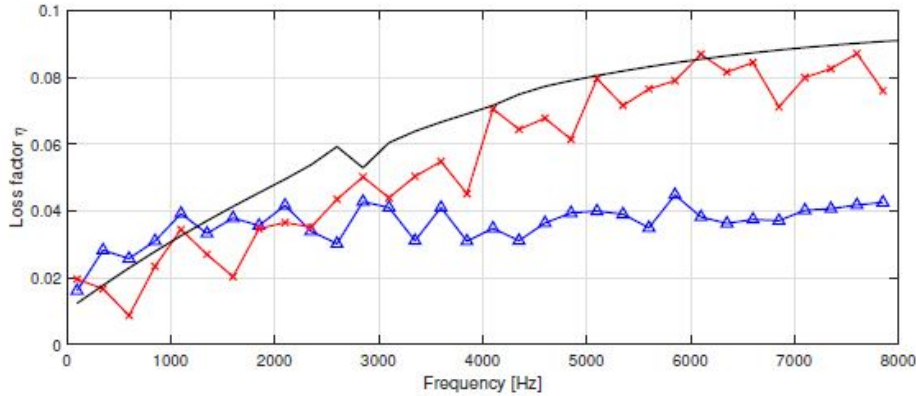


FIGURE 1.10 – Comparaison des courbes de dispersion d'un modèle numérique de plaque sandwich en aluminium avec cœur viscoélastique. – analytique, Δ méthode IWC et \times méthode EIWC, [Fazail 2023a].

Fig. 1.9 et Fig. 1.10 montrent que la méthode EIWC est aussi efficace pour récupérer la partie réelle des nombres d'onde que la méthode IWC classique, mais elle se montre plus efficace

pour l'identification de la partie imaginaire ou de l'amortissement. Bien que cette extension de l'IWC permette de mesurer précisément les nombres d'onde complexes, elle est limitée aux études de structures isotropes.

Inhomogeneous Wave Correlation avec fonction de Green

Dans le cas des structures isotropes, [Tufano 2019, Tufano 2020a] propose de remplacer l'exponentielle de l'onde inhomogène par une fonction inspirée du noyau de Green de l'équation de plaque de Kirchhoff Love. L'équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Delta^2 u - \hat{k}^4 u = 0, \quad (1.23)$$

et la fonction de Green associée est donnée par :

$$G_\infty(\hat{k}, r) = \frac{i}{8\hat{k}^2} \left(H_0^{(1)}(\hat{k}r) - H_0^{(1)}(i\hat{k}r) \right), \quad (1.24)$$

où r est la distance au point source, $H_0^{(1)}$ la fonction de Hankel du premier type à l'ordre 0 et $\hat{k} = k(1 + i\gamma)$. Si le point source est (x_0, y_0) alors $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Cette approche permet de séparer les effets liés à l'amortissement structural de ceux purement liés à l'atténuation spatiale. $\hat{k} = k(1 + i\gamma)$ sont recherchés par maximisation de la fonction suivante :

$$IWCG(\hat{k}) = \frac{\left| \iint_{\Omega} \hat{u} \cdot G_\infty^*(\hat{k}, r) dx dy \right|}{\sqrt{\iint_{\Omega} |\hat{u}|^2 dx dy \cdot \iint_{\Omega} |G_\infty^*(\hat{k}, r)|^2 dx dy}}. \quad (1.25)$$

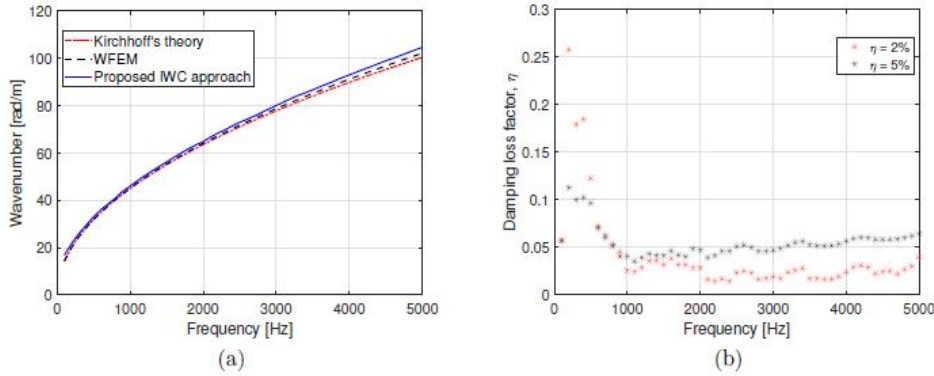


FIGURE 1.11 – Courbes de dispersion et ratio d'amortissement pour une plaque isotrope, [Tufano 2019].

[Tufano 2019] compare cette approche à un modèle analytique et s'en sert pour estimer le ratio d'amortissement Fig. 1.11. Cette idée a été combinée avec la méthode des sources d'images [Gunda 1995] par [Fazail 2023a] dans ses travaux de thèse, dans le cas d'une plaque rectangu-

laire avec des conditions aux bords spécifiques. Avec un nombre suffisant de sources d'images, la corrélation permet alors une identification presque parfaite du ratio d'amortissement, même aux basses fréquences et avec un faible amortissement. Elle reste cependant limitée aux cas isotropes et à des formes de structures très simples et avec des conditions particulières aux bords.

Green Function Correlation

Enfin [Bin Fazail Muhammad 2022, Fazail 2023a, Fazail 2023b] modifie la précédente approche pour appliquer les avantages apportés par les fonctions de Green à l'estimation des k-spaces de structures orthotropes en se basant sur des mesures de champ dépendantes de la direction θ . La nouvelle méthode est nommée la Green Function Correlation (GFC). La fonction de Green G_∞ est la même que précédemment, mais la mesure du champ total est remplacée, pour chaque direction θ , par une mesure 1D le long d'une ligne partant du point de chargement. Pour chaque direction θ , la recherche du nombre d'onde se fait par maximisation de la fonction suivante :

$$GFC(k, \gamma, \theta) = \frac{\left| \int_0^R u(r, \theta) \cdot G_\infty^*(k(1 + i\gamma), r) dr \right|}{\sqrt{\int_0^R |u(r, \theta)|^2 dr \cdot \int_0^R |G_\infty^*(k(1 + i\gamma), r)|^2 dr}}. \quad (1.26)$$

Figs. 1.12, 1.13 et 1.14 démontrent, par l'exemple d'un modèle numérique de plaque composite sandwich ayant 5% ou 20% d'amortissement dans l'âme, l'efficacité de cette dernière variante de l'IWC pour le calcul des nombres d'onde et en particulier de leur partie imaginaire.

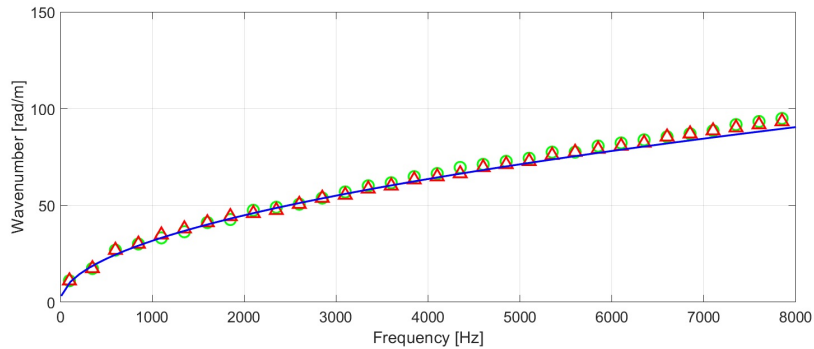


FIGURE 1.12 – Comparaison des courbes de dispersion – general laminate model (GLM), \circ GFC avec 5% d'amortissement dans le cœur et Δ GFC avec 20% d'amortissement dans le cœur, [Bin Fazail Muhammad 2022].

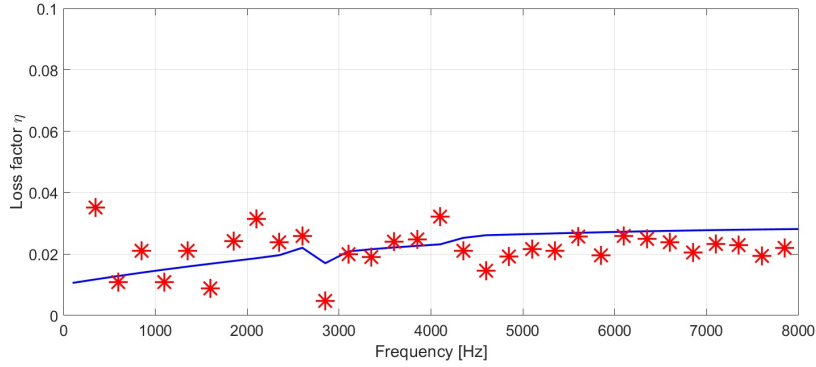


FIGURE 1.13 – Comparaison du facteur de perte par amortissement avec 5% d'amortissement dans le coeur — general laminate model (GLM) et * GFC, [Bin Fazail Muhammad 2022].

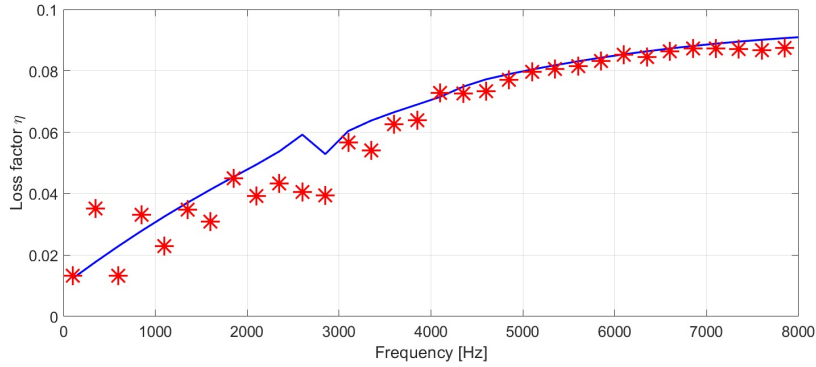


FIGURE 1.14 – Comparaison du facteur de perte par amortissement avec 20% d'amortissement dans le coeur — general laminate model (GLM) et * GFC, [Bin Fazail Muhammad 2022].

1.3.2.3 Spatial Laplace Transform for Complex Wavenumber

La méthode Spatial Laplace Transform for Complex Wavenumber (SLaTCoW), [Geslain 2016], est une autre technique pour le calcul des nombres d'onde, construite à partir de la transformée de Laplace. L'idée consiste à minimiser la norme L^2 de la différence, dans le domaine de Laplace, entre le signal et un champ d'ondes planes paramétré par les nombres d'onde complexes. Cette méthode a été développée pour la recherche des nombres d'onde de champs monodimensionnels. Une extension à des champs bidimensionnels a été proposée par [Cebrecos 2019] mais elle est limitée aux cas d'ondes se propageant dans une seule direction.

Lorsque le champ est monodimensionnel et est supposé connu sur le segment $[0, L]$, alors il est approximé par Eqn. (1.27), avec K^m le nombre d'onde associé au mode m , \mathcal{M} est l'ensemble des modes et Π est la fonction fenêtre valant 1 lorsque x est entre 0 et L , 0 sinon. Eqn. (1.28) est la transformée de Laplace de Eqn. (1.27).

$$\xi(x) = \sum_{m \in \mathcal{M}} \tilde{\xi}^m e^{iK^m x} \Pi(x, L). \quad (1.27)$$

Dans le modèle, les nombres d'onde sont complexes : $K^m = k_r^m + ik_i^m$ et vérifient : $k_r^m > 0$ et $k_i^m > 0$.

$$\Xi(s) = L \sum_{m \in \mathcal{M}} \tilde{\xi}^m e^{(iK^m - s)\frac{L}{2}} \times \frac{\sinh \left[(iK^m - s)\frac{L}{2} \right]}{(iK^m - s)\frac{L}{2}}. \quad (1.28)$$

D'autre part, la transformée de Laplace du champ mesuré, notée Ξ^{mes} est approximée de manière discrète sur un ensemble de valeurs s complexes du demi-espace $\Re(s) \geq 0$. En effet, les pôles de la transformée de Laplace du modèle sont situés en $ik_r^m - k_i^m$, mais s'agissant des valeurs recherchées par la méthode, celles-ci ne sont pas connues, la seule supposition étant que $k_i^m > 0$. Ensuite, la recherche des nombres d'onde K^m est réalisée par minimisation de Eqn. (1.29), où $|\tilde{\xi}^m|$ et ϕ^m sont respectivement l'amplitude et la phase du mode m . s , la variable complexe du domaine de Laplace est décomposée de la manière suivante $s = s_i + s_r$.

$$F \left(|\tilde{\xi}^m|, \phi^m, k_r^m, k_i^m, \mathcal{M} \right) = \sum_{s_r} \sum_{s_i} \left| \Xi^{mes}(s) - L \sum_{m \in \mathcal{M}} |\tilde{\xi}^m| e^{i\phi^m} e^{i(k_r^m + ik_i^m - s_r + is_i)\frac{L}{2}} \right. \\ \left. \times \frac{\sinh \left[i(k_r^m + ik_i^m - s_r + is_i)\frac{L}{2} \right]}{i(k_r^m + ik_i^m - s_r + is_i)\frac{L}{2}} \right|^2. \quad (1.29)$$

Cette expression a $4|\mathcal{M}|$ inconnues, à savoir, pour chaque mode, l'amplitude, la phase, la partie réelle du nombre d'onde et sa partie imaginaire. La détermination de ces inconnues est réalisée en deux étapes. Premièrement, le nombre de modes ainsi que leurs amplitudes, phases et la partie réelle de leur nombre d'onde sont déterminés en se basant sur la transformée de Fourier, soit toutes les valeurs de s telles que $s_i = 0$. Ensuite, les parties imaginaires des nombres d'onde sont calculées en utilisant l'ensemble des valeurs s de partie réelle positive.

Cette technique a été validée en étudiant plusieurs situations différentes, dont un exemple de propagation d'ondes élastiques dans des matériaux poreux, un exemple d'onde de Lamb à vitesse de groupe nulle dans une plaque en duralumin et un exemple d'ondes acoustiques de surface dans un cristal granulaire micro-échelle bidimensionnel adhérent à un substrat. Dans ces trois exemples, les relations de dispersion calculées par SLaTCoW correspondent aux valeurs théoriques. Le montage, la transformée de Laplace et les relations de dispersion complexes du premier exemple sont illustrées Fig. 1.15.

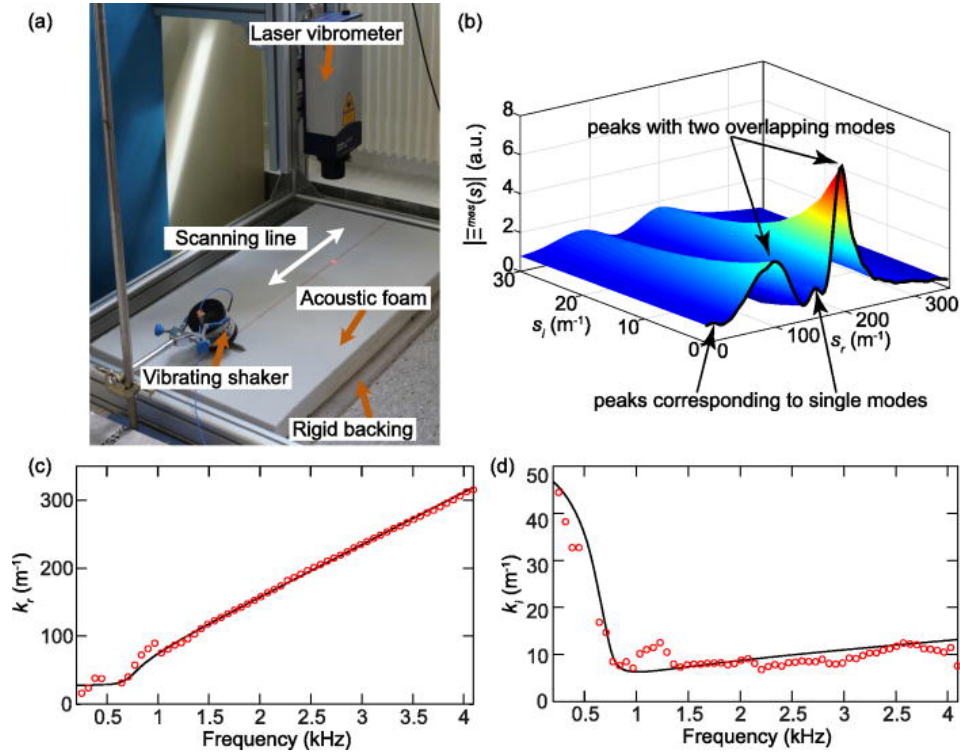


FIGURE 1.15 – (a) Photographie du montage expérimental. (b) Transformée de Laplace $\Xi^{mes}(s)$ correspondant à $f = 2453$ Hz. (c) k_r (d) atténuation (k_i) du premier mode guidé. Valeurs calculées par SLaTCoW (o) comparées aux résultats théoriques (-), [Geslain 2016].

Enfin, cette méthode a été appliquée avec succès à la recherche des relations de dispersion complexes dans des métamatériaux [Schwan 2017, Yan 2021].

1.3.3 Approches basées sur la méthode de Prony

La méthode de Prony est une autre approche pour identifier les caractéristiques d'un signal qui a inspiré le développement de plusieurs méthodes k-spaces.

1.3.3.1 La méthode de Prony

La méthode de Prony a été présentée pour la première fois par [de Prony 1795], puis a été réutilisée dans de nombreux travaux [Kumaresan 1984, Grosh 1993].

$$u(x) = \sum_{l=1}^M A_l e^{ik_l x}. \quad (1.30)$$

Dans le domaine de la vibroacoustique, cela consiste à décomposer le signal en une somme de M ondes planes ayant chacune leur nombre d'onde k_l et leur amplitude A_l . Cette méthode nécessite un échantillonnage périodique du signal, idéalement, il doit être connu en au moins $N > 2M$ points, c'est-à-dire, pour n allant de 1 à N , en posant Δx le pas de discrétisation et

$\lambda_l = e^{ik_l \Delta x}$:

$$U_n = \sum_{l=1}^M A_l \lambda_l^n. \quad (1.31)$$

Premièrement, les nombres d'onde sont identifiés et ensuite les amplitudes. Le principe de la première étape consiste à calculer les coefficients $(b_m)_m$ d'un polynôme caractéristique de degré M dont les λ_l sont racines.

$$P(X) = \prod_{l=1}^M (X - \lambda_l) = \sum_{m=0}^M b_m \lambda^{M-m}. \quad (1.32)$$

En sachant que $b_0 = 1$ et pour tout n allant de m à M :

$$\sum_{m=0}^M b_m U_{n-m} = 0. \quad (1.33)$$

Ainsi, les coefficients du polynôme sont déterminés en résolvant le système des $N - M$ équations linéaires Eqn. (1.33). Les $(\lambda_l)_l$ sont obtenus par recherche des racines du polynôme caractéristique Eqn. (1.32), et les nombres d'onde en sont déduits : $k_l = \frac{-i \ln \lambda_l}{\Delta x}$. La recherche des amplitudes, lorsqu'elle est voulue, se fait par recherche des M valeurs $(A_l)_l$ qui minimisent de l'expression suivante :

$$E = \sum_{n=1}^N \left| U_n - \sum_{l=1}^M A_l \lambda_l^n \right|^2. \quad (1.34)$$

Bien que cette approche soit monodimensionnelle, plusieurs travaux proposent des extensions aux cas bidimensionnels [Casar-Corredera 1985, Sacchini 1993]. [Roizen 2017a] compare la transformée de Fourier spatiale et de la méthode de Prony pour le calcul des nombres d'onde sur un exemple de plaque composite sandwich et en conclut une meilleure précision de la part de la méthode de Prony. Et [Morandi 2019] illustre son efficacité, avec celle de l'IWC (monodimensionnelle) sur un exemple de plaque en bois.

Inspirées de l'approche proposée par Prony, de nombreuses méthodes ont vu le jour, telles que l'algorithme MUSIC (pour Multiple Signal Classification) [Schmidt 1986, Friedlander 1990, Devendra 2015], la Matrix pencil method [Hua 1990] mais aussi l'High Resolution Wavenumber Analysis ou High Resolution Wavevector Analysis (HRWA) et l'INverse CONvolution MEthod (INCOME) qui ont été développées dans le but d'identifier les caractéristiques de dispersion et sont présentées plus en détail dans cette section.

1.3.3.2 High Resolution Wavenumber Analysis : HWRA

L'High Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) est une autre approche permettant d'estimer les nombres d'onde. Elle se base sur l'algorithme de traitement du signal Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique (ESPRIT) [Paulraj 1985, Roy 1986, Badeau 2006a, Shahbazpanahi 2001, Emiya 2007] lequel s'inspire de la méthode de Prony [de Prony 1795]. Cet algorithme a été ensuite étendu à des cas bidimensionnels [Rouquette 2001,

[Badeau 2006b]. Cette méthode, HRWA, [Margerit 2018] a été proposée par Margerit et al. pour les structures monodimensionnelles, puis étendue au cas des structures 2D [Margerit 2019].

L'algorithme ESPRIT considère un champ pouvant se mettre sous la forme Eqn. (1.35) d'une somme de R fonctions exponentielles complexes. ε représente le bruit sur la mesure. Le choix de R est fait en se basant sur le critère ESTER [Badeau 2006b]. Le champ est échantillonné régulièrement sur N points avec un pas de discrétisation Δx Eqn. (1.36). L'objectif est de chercher les valeurs des coefficients $z_m \in \mathbb{C}^*$. Dans le cas de la recherche des nombres d'onde $z_m^j = e^{-ik_m j \Delta x}$.

$$u(x) = \sum_{r=1}^R A_r \tilde{z}_r^x + \varepsilon(x) \quad (1.35)$$

$$U_j = \sum_{r=1}^R A_r z_r^{j-1} + \varepsilon_j \quad (1.36)$$

L'idée générale de l'algorithme est de chercher une base de fonctions $(x \mapsto \tilde{z}_r^x)_{1 \leq r \leq R}$ telle que la projection de u sur le sous-espace engendré par cette base soit le signal non bruité. Tout d'abord, la matrice de Hankel \mathbf{H} du champ est construite Eqn. (1.37). K doit être choisi supérieur à R le nombre de termes dans la somme. Usuellement $K \approx \frac{N}{2}$. Ensuite, des matrices de Vandermonde basées sur les coefficients $(z_r)_{1 \leq r \leq R}$ sont construites Eqn. (1.38).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_{N-K+1} \\ U_2 & U_3 & \dots & U_{N-K+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_K & U_{K+1} & \dots & U_N \end{bmatrix}, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{V}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_R^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Il est à noter qu'en posant $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, \dots, A_R)$ et en négligeant le terme de bruit ε , la matrice de Hankel est exprimable à partir de celles de Vandermonde et des amplitudes $\mathbf{H} = \mathbf{V}(K)\mathbf{A}\mathbf{V}(N-K+1)^T$. À partir de la matrice de Hankel, la matrice d'autocovariance \mathbf{R}_{SS} est calculée puis diagonalisée. $\mathbf{R}_{SS} = \mathbf{H}^*\mathbf{H} = \mathbf{W}^*\mathbf{D}\mathbf{W}$ avec \bullet^* symbolisant la transposée hermitienne. Les vecteurs colonnes de \mathbf{W} sont vecteurs propres de $\mathbf{H}^*\mathbf{H}$ et sont considérés ordonnés selon le module des valeurs propres associées. Le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes contient le champ U avec sa composante de bruit. Cet espace peut être découpé en un sous-espace lié au signal, à la somme de fonctions exponentielles, engendré par \mathbf{W}_p et un autre au bruit, engendré par \mathbf{W}_n .

$$\mathbf{W} = [[\mathbf{W}_p]_{K \times R}, [\mathbf{W}_n]_{K \times K-R}]_{K \times K}. \quad (1.39)$$

Si R a été bien choisi, alors le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de \mathbf{W}_p est le même que celui engendré par les vecteurs colonnes de la matrice de Vandermonde $\mathbf{V}(K)$. Par conséquent, il existe une matrice de transfert \mathbf{T} telle que $\mathbf{V}(K) = \mathbf{W}_p\mathbf{T}$.

Or les matrices de Vandermonde définies ci-dessus possèdent une propriété d'invariance

rotationnelle, de par la périodicité de l'échantillonnage, donnée Eqn. (1.40). En posant $\mathbf{Z} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_R)$ la matrice diagonale contenant les coefficients z_r , puis \bullet^\uparrow (respectivement \bullet^\downarrow) tels que pour une matrice \mathbf{M} de taille n par m , \mathbf{M}^\uparrow (respectivement \mathbf{M}^\downarrow) de taille $n - 1$ par m soit la matrice \mathbf{M} à laquelle la dernière ligne (respectivement la première ligne) a été retirée.

$$\mathbf{V}^\downarrow(n) = \mathbf{V}^\uparrow(n)\mathbf{Z}, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{W}_p^\downarrow = \mathbf{W}_p^\uparrow \mathbf{F}, \quad \text{avec } \mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{Z}\mathbf{T}^{-1}. \quad (1.41)$$

De Eqn. (1.40), il vient Eqn. (1.41). Ainsi $\mathbf{F} = \mathbf{W}_p^{\uparrow-1} \mathbf{W}_p^\downarrow$, où $\mathbf{W}_p^{\uparrow-1}$ est à considérer au sens pseudo inverse de \mathbf{W}_p^\uparrow .

Pour choisir au mieux le nombre R de fonctions exponentielles, ou autrement dit le nombre de vecteurs colonnes de \mathbf{W} à conserver, le critère ESTER est utilisé Eqn. (1.42). Celui-ci consiste à choisir le R qui minimise le résidu.

$$R = \underset{r \in \llbracket r_{min}, r_{max} \rrbracket}{\text{argmin}} \quad \|\mathbf{W}_p^\downarrow(r) - \mathbf{W}_p^\uparrow(r)\mathbf{F}(r)\|_2. \quad (1.42)$$

Enfin, une fois le nombre R choisi et la matrice \mathbf{F} calculée, les coefficients z_r sont obtenus en diagonalisant \mathbf{F} . Et des z_r , sont déduits les nombres d'onde k_r .

$$k_r = \frac{i \ln z_r}{\Delta x}. \quad (1.43)$$

L'efficacité de l'HRWA a pu être prouvée en mesurant des nombres d'onde à partir d'une poutre expérimentale en PVC Fig. 1.16. Les parties réelles et imaginaires ont pu être calculées, à la fois pour la flexion et pour la torsion.

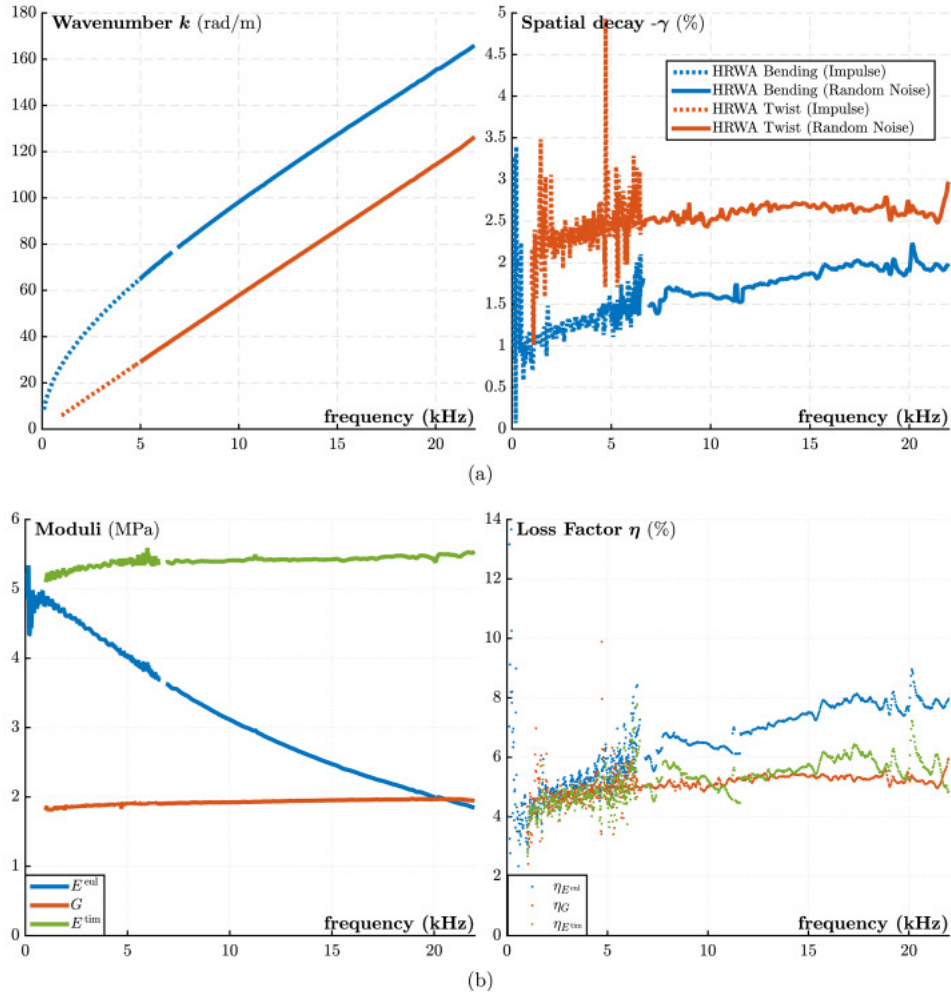


FIGURE 1.16 – nombres d'onde en flexion et en torsion calculés par HRWA à partir de mesures expérimentales sur une poutre en PVC. (a) Partie réelle des nombres d'onde et facteur de décroissance spatiale. (b) Valeurs des modules de Young (modèles de poutre d'Euler Bernoulli et de Timoshenko) et de cisaillement et ratios d'amortissement, [Margerit 2018].

La méthode HRWA a été étendue aux cas 2D [Margerit 2019].

High Resolution Wavevector Analysis

L'idée générale est la même, mais son implémentation est un peu plus compliquée. Une grille régulière de point doit être utilisée pour échantillonner le champ de déplacement. Le champ échantillonné est supposé de la forme Eqn. (1.44) sur N_x par N_y points.

$$U_{nm} = \sum_{r=1}^R A_r z_{1r}^{n-1} z_{2r}^{m-1} + \varepsilon_{nm}. \quad (1.44)$$

La matrice de Hankel \mathbf{H} est à remplacer par une matrice de Hankel par blocs dont chaque bloc

est une matrice de Hankel : Eqns. (1.45) et (1.46).

$$\mathbf{h}(n) = \begin{bmatrix} U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{n(N_y - K_2 + 1)} \\ U_{n2} & U_{n3} & \cdots & U_{n(N_y - K_2 + 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{nK_2} & U_{n(K_2 + 1)} & \cdots & U_{nN_y} \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(1) & \mathbf{h}(2) & \cdots & \mathbf{h}(N_x - K_1 + 1) \\ \mathbf{h}(2) & \mathbf{h}(3) & \cdots & \mathbf{h}(N_x - K_1 + 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}(K_1) & \mathbf{h}(K_1 + 1) & \cdots & \mathbf{h}(N_y) \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

L'utilisation de la propriété d'invariance rotationnelle est utilisée dans les deux directions de la grille. Ce qui permet d'obtenir en sortie de l'algorithme un ensemble de couples (k_x, k_y) . Un équivalent 2D du critère ESTER 2D est utilisé pour déterminer le nombre R de fonctions exponentielles dans la décomposition. La version 2D d'HRWA a été validée en calculant les surfaces de dispersion à partir d'une plaque composite de type sandwich Fig. 1.17.

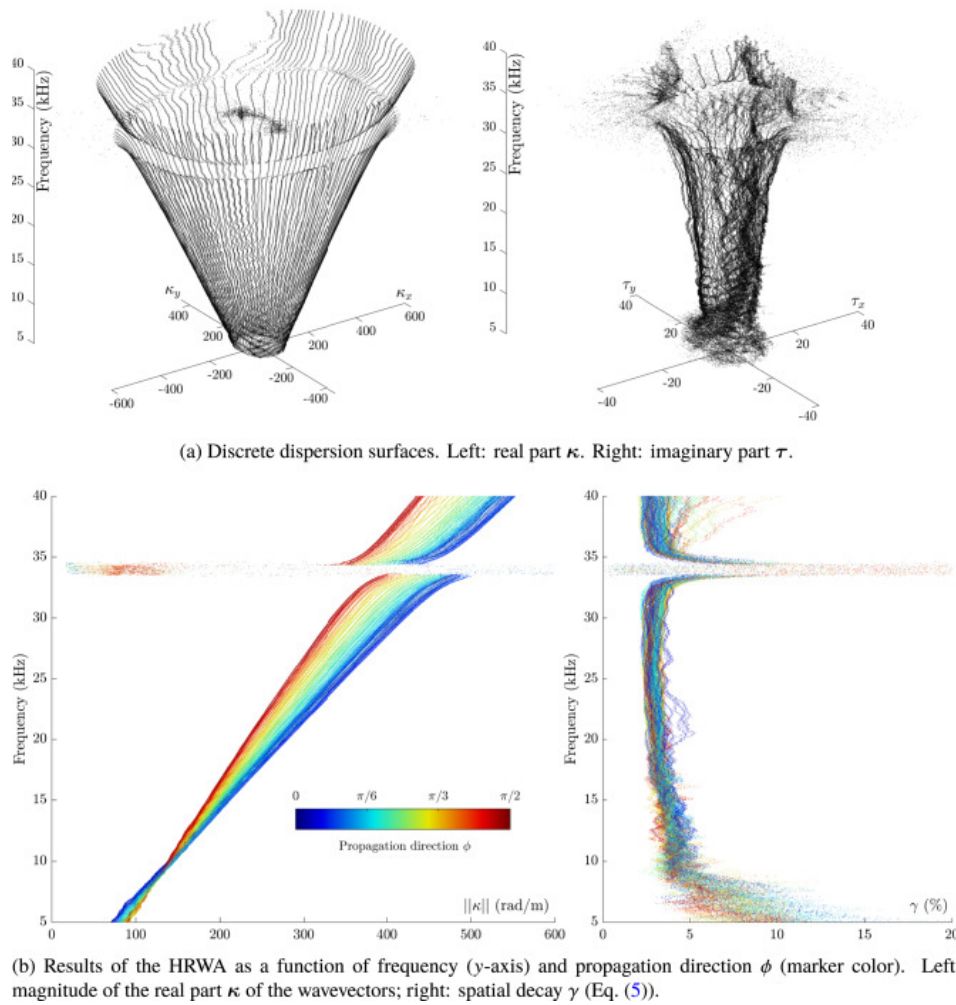


FIGURE 1.17 – Surface et relation de dispersion calculées par HRWA sur une plaque composite sandwich avec un cœur en nid d’abeilles, [Margerit 2019].

Cette méthode se révèle capable de traiter des structures anisotropes. Une de ses forces est de pouvoir traiter simultanément différents phénomènes de propagation. Par ailleurs, l’impact de la présence de bruit est limité. Cependant, malgré le critère ESTER en 2D, l’estimation de R la dimension du sous-espace, et par conséquent du nombre de différentes ondes, reste délicate en 2D. De plus, la méthode calcule un ensemble de couples (k_x, k_y) mais il est impossible de choisir a priori une direction pour le calcul d’un nombre d’onde.

1.3.3.3 INverse CONvolution METHod

L’INCOME, INverse CONvolution METHod est une autre méthode d’obtention des nombres d’onde à partir d’un champ de déplacement, proposée par [Boukadia 2021, Boukadia 2022]. Celle-ci s’inspire également de la méthode de Prony [de Prony 1795, Kumaresan 1984, Sacchini 1993, Casar-Corredera 1985]. La méthode consiste à trouver un noyau de convolution annulant le champ. Ensuite, le k-space est déduit de ce noyau.

Convolution

Soit deux suites $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la convolution est définie par :

$$\begin{cases} e = g * h = h * g, \\ e_n = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_{n-l} h_l. \end{cases} \quad (1.47)$$

Et pour deux suites finies $(g_n)_{0 \leq n \leq N}$ et $(h_n)_{0 \leq n \leq M}$ tel que $M \leq N$:

$$\begin{cases} e = g * h = h * g, \\ e_n = \sum_{l=0}^M g_{n+M-l} h_l. \end{cases} \quad (1.48)$$

Ainsi, en notant u le champ, le noyau de convolution S est recherché tel que :

$$u * S = 0. \quad (1.49)$$

La forme du noyau est déterminée a priori par le nombre de dimensions ainsi que les hypothèses faites sur le problème, telles que les hypothèses de symétrie du problème. La méthode est présentée sur plusieurs problèmes en dimension 1 et 2.

Dimension 1

En dimension 1, si n_w ondes et leurs réflexions sont considérées, le champ est supposé de la forme Eqn. (1.50), où les k_n sont les nombres d'onde associés aux différentes ondes.

$$u(x) = \sum_{m=1}^{n_w} A_m e^{-ik_m x} + B_m e^{ik_m x}. \quad (1.50)$$

Le champ de déplacement n'est connu ou mesuré que sur un nombre fini de points : $(u_n)_{1 \leq n \leq N}$. En notant Δx le pas de discrétisation supposé constant, les termes λ_m pour $1 \leq m \leq n_w$ sont définis tels que $\lambda_m = e^{-ik_m \Delta x}$.

$$u_n = \sum_{m=1}^{n_w} A_m \lambda_m^n + B_m \lambda_m^{-n}. \quad (1.51)$$

Le noyau de convolution est recherché avec la forme suivante :

$$S = \boxed{a_{n_w} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n_w}}. \quad (1.52)$$

Les coefficients, de S sont recherchés tels que $S * u = 0$.

$$a_0 u_n + \sum_{m=1}^{n_w} a_n (u_{n+m} + u_{n-m}) = 0, \quad n_w \leq n \leq N - n_w, \quad (1.53)$$

avec $\|(a_0, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{n_w})\|_2 = 1$.

En pratique, le problème est considéré au sens des moindres carrés et est résolu par décomposition en valeurs singulières.

$$S = \operatorname{argmin} \{\|U * S\|_2, \|S\|_2 = 1\}. \quad (1.54)$$

Ensuite, les termes λ_n sont obtenus comme les racines de l'expression suivante :

$$a_0 + \sum_{m=1}^{n_w} a_n (\lambda^m + \lambda^{-m}). \quad (1.55)$$

Enfin, les nombres d'onde découlent directement de la connaissance des λ_m .

$$k_m = \frac{i}{\Delta x} \ln \lambda_m. \quad (1.56)$$

Cette méthode a déjà été utilisée dans un cas monodimensionnel pour retrouver les parties réelle et imaginaire d'une relation de dispersion d'un champ obtenue par résolution analytique de l'équation de poutre d'Euler Bernoulli.

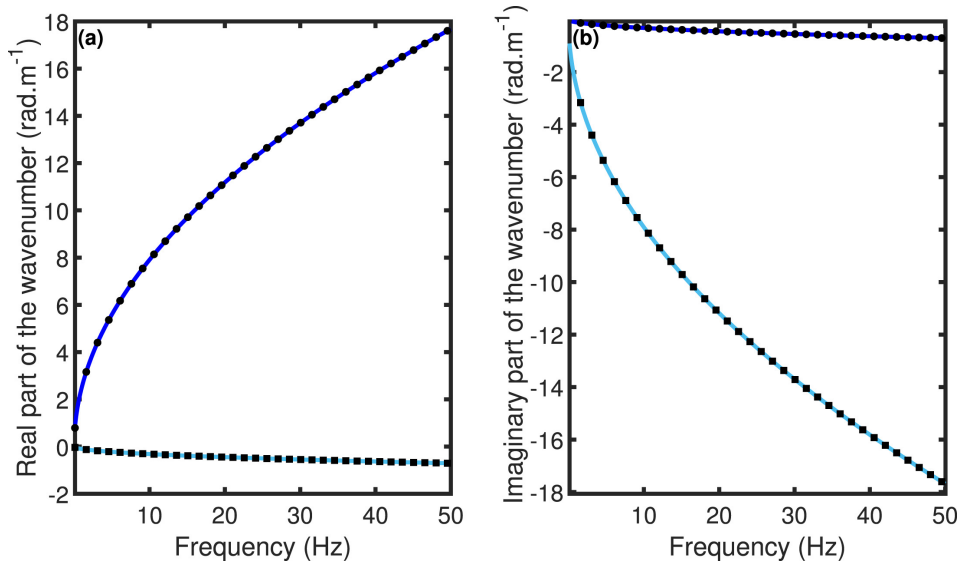


FIGURE 1.18 – Comparaison des parties réelles (a) et imaginaires (b) des nombres d'onde par l'INCOME 1D (trait plein) avec les valeurs analytiques (pointillés). Les lignes bleu foncé correspondent aux ondes propagatives et les bleu clair aux ondes évanescentes, [Boukadia 2022].

Par ailleurs, dans le cas d'une structure hétérogène périodique, lors du calcul des coefficients du noyau de convolution, [Ribeiro 2022] montre que la périodicité doit être respectée, comme

illustré Fig. 1.19. En effet, comme montrées Fig. 1.20 respectant la périodicité et fig. 1.21 ne la respectant pas, il s'agit d'une condition nécessaire à la bonne identification des nombres d'onde.

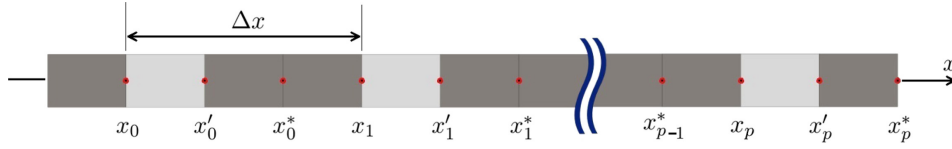


FIGURE 1.19 – Guide d'onde monodimensionnel périodique avec indication des positions où les mesures doivent être faites, [Ribeiro 2022].

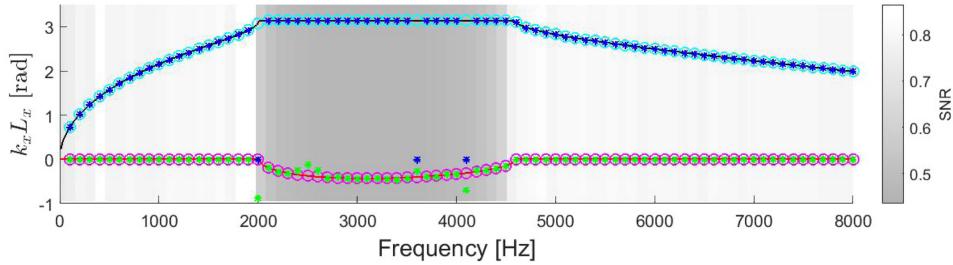


FIGURE 1.20 – Comparaison des courbes relations de dispersion d'un guide d'onde monodimensionnel périodique. Courbes théoriques (lignes noires et rouges) et valeurs estimées en respectant la périodicité (astérisques bleus et verts avec bruit et cercles cyans et roses sans bruit), [Ribeiro 2022].

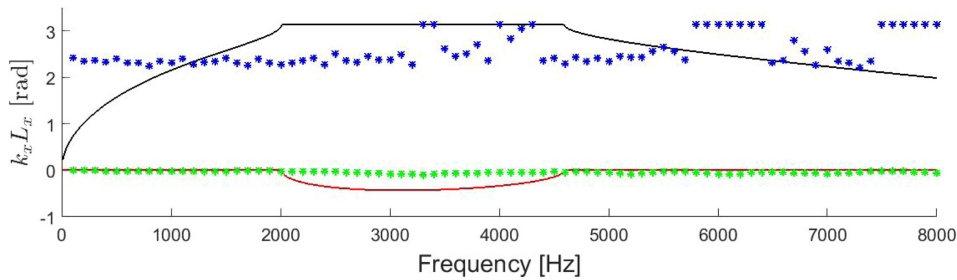


FIGURE 1.21 – Comparaison des courbes relations de dispersion d'un guide d'onde monodimensionnel périodique. Courbes théoriques (lignes noires et rouges) et valeurs estimées sans respect de la périodicité (astérisques bleus et verts), [Ribeiro 2022].

Dimension 2

En dimension 2, le nombre d'onde peut varier selon la direction de propagation θ . Soient Δx et Δy les pas de discrétisation spatiale selon les directions x et y . On cherche à obtenir un ensemble de couples (k_x, k_y) ou un k_θ fonction de θ . Le noyau de convolution S pourra avoir

une des formes suivantes selon les hypothèses faites sur le problème :

$$S = \begin{array}{ccccc} a_{-n_x n_y} & \cdots & a_{0 n_y} & \cdots & a_{n_x n_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n_x 0} & \cdots & a_{0 0} & \cdots & a_{n_x 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n_x -n_y} & \cdots & a_{0 -n_y} & \cdots & a_{n_x -n_y} \end{array}. \quad (1.57)$$

Avec $a_{-i-j} = a_{ij}$. Certains coefficients a_{ij} peuvent a priori être nuls ou égaux entre eux. Une fois les coefficients du noyau de convolution déterminés par minimisation au sens des moindres carrés, $\lambda_x = e^{-ik_x \Delta x}$ et $\lambda_y = e^{-ik_y \Delta y}$ sont des solutions d'un polynôme à deux variables. Pour un noyau de convolution du type de Eqn. (1.57), le polynôme est Eqn. (1.58), multiplié par $\lambda_x^{n_x} \lambda_y^{n_y}$.

$$\sum_{l=-n_x}^{n_x} \sum_{m=-n_y}^{n_y} a_{lm} \lambda_x^l \lambda_y^m = 0. \quad (1.58)$$

L'ensemble des couples (k_x, k_y) tels que les (λ_x, λ_y) associés soient solutions de Eqn. (1.58) est appelé le k-space étendu.

Pour définir le k-space, l'ensemble des solutions du k-space étendu est restreint avec la condition suivante : (k_x, k_y) appartient au k-space s'il appartient à k-space étendu et si :

$$\exists k \in \mathbb{C}, \exists \theta \in \mathbb{R}, k_x = k \cos \theta, k_y = k \sin \theta. \quad (1.59)$$

Pour certaines directions de propagation, le polynôme Eqn. (1.58) peut-être ramené à un polynôme à une seule variable. Par exemple, pour $\theta = 0$, alors $\lambda_y = 1$ et le polynôme est remplacé par le polynôme à une variable suivant dont λ_x est racine :

$$\sum_{l=-n_x}^{n_x} \left(\sum_{m=-n_y}^{n_y} a_{lm} \right) \lambda^l = 0 \quad (1.60)$$

Pour estimer les nombres d'onde dans les autres directions, Boukadia propose d'utiliser une méthode de continuation paramétrée par l'angle dans le plan θ .

Les résultats obtenus en 2D par [Boukadia 2022], que ce soit en termes de parties réelles ou imaginaires, quelle que soit la direction, sont très prometteurs : Fig. 1.22 et Fig. 1.23.

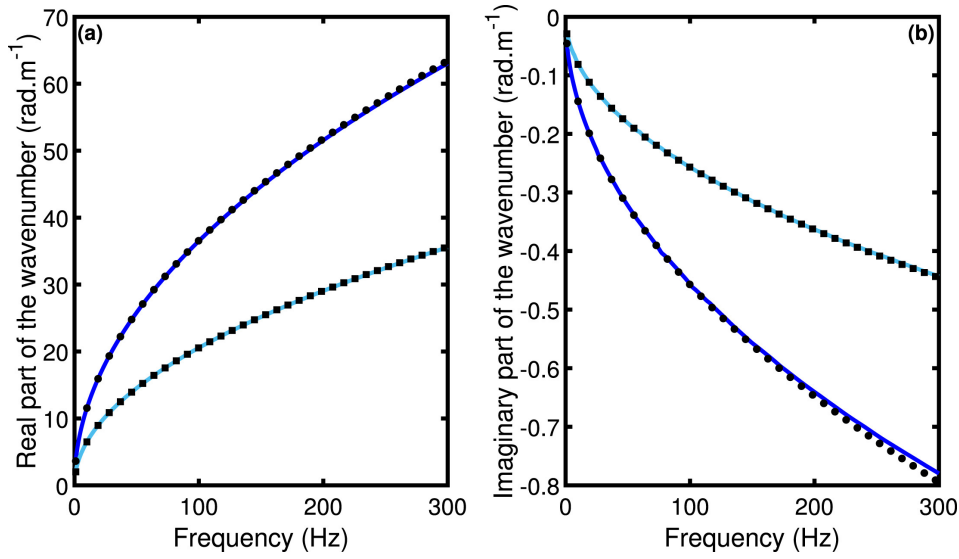


FIGURE 1.22 – Comparaison des parties réelles (a) et imaginaires (b) des nombres d'ondes dans les deux directions principales pour une plaque orthotrope par l'INCOME (trait plein) avec les valeurs obtenues par Shift-Cell Operator method (pointillés). Les lignes bleu foncé correspondent à la direction x et les bleu clair à la direction y, [Boukadia 2022].

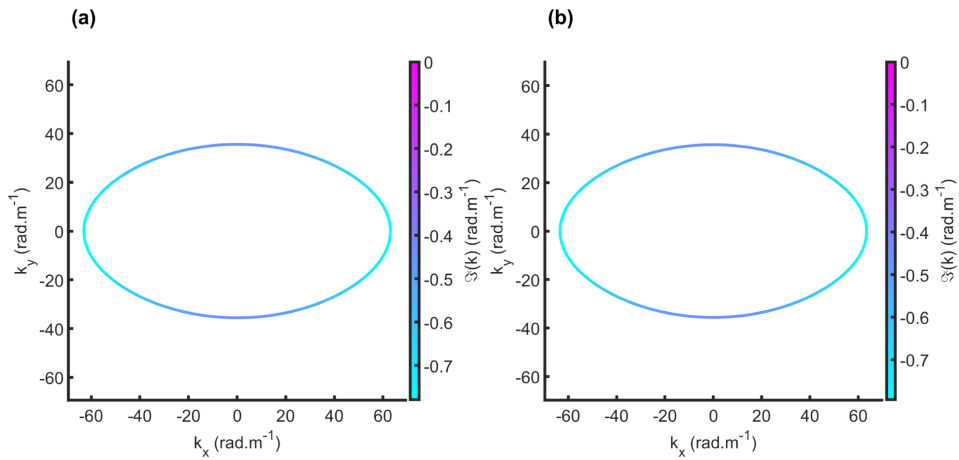


FIGURE 1.23 – Comparaison des parties réelles (a) et imaginaires (b) des nombres d'ondes dans les deux directions principales pour une plaque orthotrope par l'INCOME (trait plein) avec les valeurs obtenues par Shift-Cell Operator method (pointillés). Les lignes bleu foncé correspondent à la direction x et les bleu clair à la direction y, [Boukadia 2022].

La méthode INCOME est très efficace pour mesurer les nombres d'onde à partir d'un champ, que ce soit leur partie réelle ou imaginaire. Cette approche a l'avantage de pouvoir multiplier facilement le nombre d'angles considérés. Le calcul du noyau de convolution est indépendant de la direction. Cependant, cette méthode est très sensible au bruit et nécessite un maillage régulier devant respecter la périodicité de la structure.

1.3.4 Identification algébrique

Plus récemment, dans le but de développer une méthode de calcul des nombres d'onde précise et fonctionnant à basse fréquence, comme les méthodes basées sur l'approche de Prony, tout en étant résistante aux bruits et incertitudes, Li a proposé de se baser sur l'identification algébrique.

L'identification algébrique a été proposée par [Fliess 2000, Fliess 2008, Fliess 2003] dans le cadre de systèmes linéaires continus en temps. Cette procédure permet une estimation de paramètres robuste par rapport à des perturbations. [Pereira 2011, Beltrán-Carbajal 2013]. De nombreuses applications ont découlé de ces travaux, entre autres pour des systèmes vibrants [Pereira 2011, Beltrán-Carbajal 2013].

À partir d'un système d'équations différentielles linéaires en temporel et de connaissances sur ses solutions, la procédure permet une estimation robuste d'un ou plusieurs coefficients, indépendant du temps, du système.

La première étape consiste à appliquer la transformation de Laplace au système, le transformant en équations algébriques.

Ensuite, en se basant sur les opérations algébriques ainsi que des dérivations par rapport à la variable du domaine de Laplace, les équations sont modifiées pour supprimer les perturbations et construire une expression algébrique contenant les paramètres à estimer.

L'expression est alors divisée par la variable de Laplace de manière à ce qu'aucune dérivation ne soit présente en temporel, uniquement des intégrations et primitives successives. Puis l'expression est remise dans le domaine temporel en utilisant la transformée de Laplace inverse.

Enfin, les paramètres sont estimés à partir des estimations construites.

1.3.4.1 Algebraic Wavenumber Identification

En s'inspirant de l'identification algébrique, [Li 2023c, Li 2023b, Li 2023a] a proposé une nouvelle méthode d'estimation des nombres d'onde complexes pour des structures monodimensionnelles, nommée l'Algebraic Wavenumber Identification (AWI). Profitant des avantages de l'identification algébrique, cette approche est particulièrement résistante aux perturbations.

Un champ U est supposé formé d'une superposition de n_w ondes et est connu de manière discrète sur N points $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$.

$$U(x_n) = \sum_{m=1}^{n_w} A_m e^{ik_m x_n}. \quad (1.61)$$

Il s'agit du système "temporel", spatial dans le cas présent.

L'idée de la méthode est de construire un polynôme caractéristique, Eqn. (1.62), dont les racines sont les nombres d'onde.

$$P(k) = \sum_{j=0}^{n_w} \gamma(j) (ik)^{n_w - j}. \quad (1.62)$$

Les coefficients γ de ce polynôme sont estimés en résolvant le système, obtenu en suivant le processus d'identification algébrique et défini par Eqns. (1.63) et (1.64) pour tout x_n .

$$\sum_{j=0}^{n_w} \phi(j, x_n) \gamma(j) = 0, \quad (1.63)$$

$$\phi(j, x_n) = \sum_{r=0}^{n_w} \frac{(-1)^r (2n_w - r)! x_n^r}{(n_w - r)! r! (n_w + j - r)!} \int_0^{x_n} (x_n - \tau)^{n_w + j - r} U(\tau) d\tau. \quad (1.64)$$

La résolution du système est réalisée au sens des moindres carrés. Puis les nombres d'onde sont ensuite estimés par recherche des racines du polynôme Eqn. (1.62). Le choix a priori du nombre n_w de fonctions exponentielles dans la superposition d'ondes Eqn. (1.61) est basé sur le critère ESTER [Badeau 2006b], qui est aussi utilisé par l'HRWA.

L'efficacité et la robustesse de la méthode pour le calcul des nombres d'onde a été démontré expérimentalement par [Li 2023b], sur des exemples pour poutres en structures complexes tels que des poutres avec des matériaux viscoélastiques, une en composite sandwich en nid d'abeilles et une en métastructure.

1.3.4.2 Algebraic K-Space Identification

Une première extension de cette approche à l'identification de k-space de structures bi-dimensionnelles a été proposée par [Li 2023a], nommée l'Algebraic K-Space Identification (AKSI). Celle-ci se base, d'une manière similaire à la GFC, sur des mesures du champ en coordonnées cylindriques, le long de lignes partant du point source pour chaque angle voulu, illustrés Fig. 1.24.

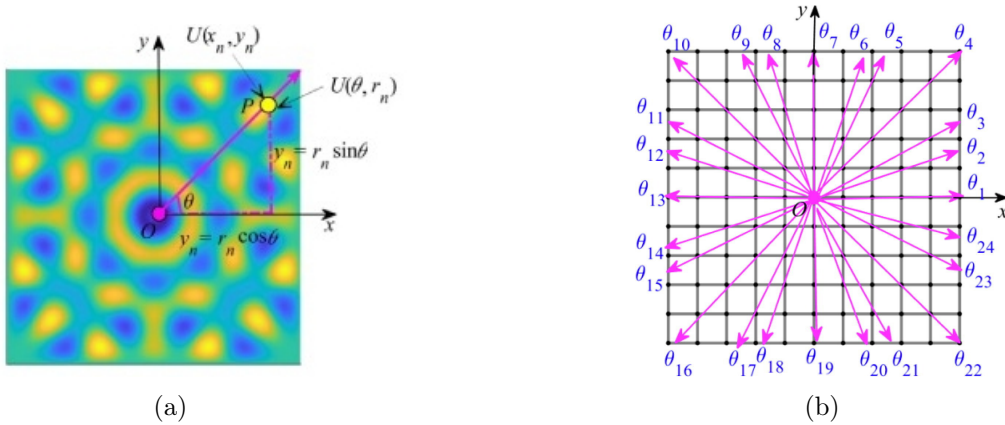


FIGURE 1.24 – (a) Transformation des coordonnées des points de mesure en coordonnées cylindriques. (b) Schématisation d'une solution pour utiliser une grille de points, [Li 2023a].

Les formules ont été obtenues d'une manière similaire à celles de l'AWI. Pour chaque direction de propagation, un polynôme caractéristique est défini, et dont les nombres d'onde sont racines. Les coefficients du polynôme caractéristique associé à la direction θ sont obtenus en résolvant le système défini par Eqns. (1.65) et (1.66) au sens des moindres carrés. Enfin, par recherche des racines du polynôme caractéristique Eqn. (1.67), les nombres d'onde sont calculés.

$$\sum_{i=0}^{n_w} \phi(i, \theta, r_n) \gamma_\theta(i) = 0, \quad (1.65)$$

$$\phi(i, \theta, r_n) = \sum_{j=i}^{n_w} \binom{n_w}{j} \binom{n_w-i}{n_w-j} \frac{(n_w-j)!}{(n_w+i-j)!} \int_0^{r_n} (r_n - \tau)^{n_w+i-j} (-\tau)^j U(\theta, \tau) d\tau, \quad (1.66)$$

$$P_\theta(k) = \sum_{j=0}^{n_w} \gamma_\theta(j) (ik)^{n_w-j}. \quad (1.67)$$

Cette approche a été testée pour le calcul des k-spaces réels sur plusieurs exemples dont celui d'une plaque isotrope en aluminium Fig. 1.25.

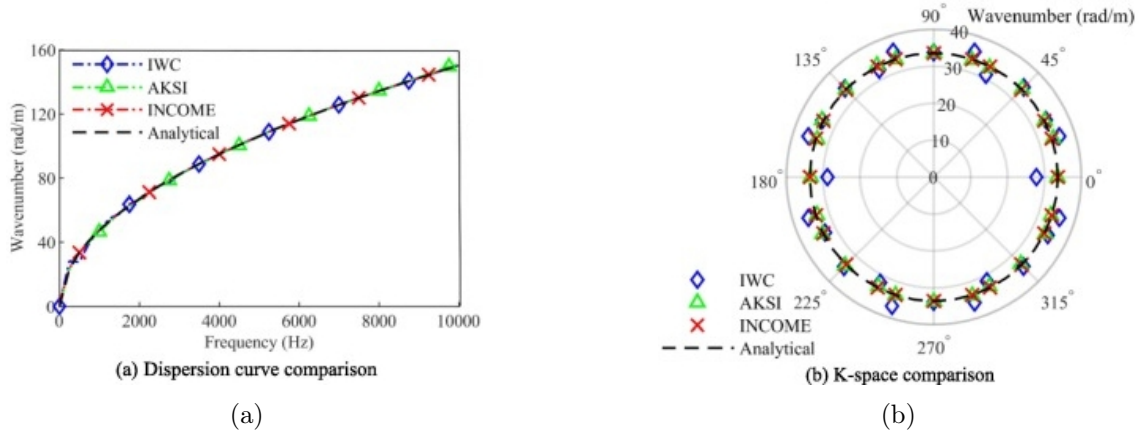


FIGURE 1.25 – Comparaison des relations de dispersion (a) et k-space à 500 Hz (b) obtenus par l'IWC, l'INCOME, et l'AKSI pour une plaque isotrope en aluminium dans des conditions parfaites, [Li 2023a].

Cette première extension de l'AWI aux problèmes bidimensionnels permet l'identification de k-spaces avec une bonne robustesse, mais est limitée aux k-spaces réels. Par ailleurs, du fait des discrétisations 1D, cette méthode est sensible à la présence des bords du domaine.

1.4 Conclusion intermédiaire

Ce chapitre permet de situer l'étude dans le contexte de la SHM et du contrôle non destructif. Il revient ensuite rapidement sur les matériaux composites et les structures périodiques et les difficultés qui y sont associées. Enfin, une revue des méthodes inverses existantes pour l'identification des k-spaces à partir de structures bidimensionnelles est présentée. Dans le prochain chapitre, le Chapitre. 2, plusieurs des techniques k-spaces présentées dans la section précédente sont comparées sur plusieurs cas tests.

Étude comparative des méthodes k-spaces

Ce chapitre a pour objectif de présenter les différentes techniques k-spaces pour les problèmes bidimensionnels, de décrire leurs implémentations sur des cas concrets, et enfin de mettre en lumière leurs limites respectives en les comparant sur une série de cas tests. Sept méthodes sont comparées : l'IWC, l'EIWC, l'IWC basé sur la fonction de Green de plaque isotrope, la GFC, une version modifiée de cette dernière, l'INCOME et l'AKSI. Des champs de déplacement isotropes et orthotropes, déterminés analytiquement et numériquement, permettent de mesurer leurs performances pour le calcul des k-spaces complexes à haute et basse fréquence, leur robustesse, l'impact des bords, de la position du point source et leur capacité à traiter des cas d'anisotropie.

Contents

2.1	Introduction	44
2.2	Présentation des méthodes k-spaces	44
2.2.1	Inhomogeneous Wave Correlation	45
2.2.2	Extended Inhomogeneous Wave Correlation	47
2.2.3	Corrélation basée sur une fonction de Green	47
2.2.4	Green Function Correlation	48
2.2.5	Green Function Correlation modifiée	49
2.2.6	INverse CONvolution METHod	50
2.3	Méthodes k-spaces pour des champs de plaques isotropes	54
2.3.1	Plaque isotrope	54
2.3.2	Plaque isotrope en domaine non borné	58
2.3.3	Plaque isotrope finie	64
2.3.4	Limitation aux basses fréquences	68
2.3.5	Limitation aux hautes fréquences	70
2.3.6	Robustesse aux bruits	72
2.4	Méthodes k-spaces pour des structures orthotropes	75
2.4.1	Orthotropie elliptique	75
2.4.2	Modèle numérique d'une paroi bi-raïdie	77
2.5	Conclusion intermédiaire	83

2.1 Introduction

La question de l'identification des propriétés de propagation, en particulier des nombres d'onde, a suscité de nombreuses recherches qui ont abouti au développement de nombreuses techniques d'identification des nombres d'onde. Parmi ces méthodes, certaines ont pu être étendues du cas monodimensionnel à des problèmes bidimensionnels. Ces techniques k-spaces proviennent majoritairement de la transformée de Fourier ou de la méthode de Prony. Celles dérivant de la transformée de Fourier présentent a priori une meilleure résistance au bruit et incertitudes alors que celles issues de la méthode de Prony ont tendance à être plus précises. Bien que la recherche des k-spaces réels soit réalisée par la plupart de ces méthodes, l'identification des k-spaces imaginaires, fortement lié à l'identification des propriétés d'amortissement, est encore aujourd'hui une question ouverte.

L'objectif de ce chapitre est de mesurer et comparer les limites de différentes méthodes k-spaces. Les techniques comparées peuvent être classées en trois sous-catégories selon leurs pré-requis en termes de discrétisation et selon s'il est nécessaire de connaître la position du point source.

- L'IWC et l'INCOME fonctionnant sur une grille de points et ne nécessitant pas une excitation en particulier.
- L'EIWC, la corrélation basée sur la fonction de Green isotrope et la version modifiée de la GFC, qui se basent sur la connaissance de la position du point source.
- La GFC et l'AKSI qui utilisent une discrétisation en ligne partant du point source.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante : la section. 2.2 rappelle les méthodes k-spaces comparées et leur implémentation. Ensuite, la section. 2.3 commence la comparaison des techniques k-spaces sur des champs issus de la résolution analytique de plaques isotropes. Les résultats sur des domaines infinis et finis sont comparés, l'impact de la localisation d'un point source est étudié et les limites aux hautes et basses fréquences et la robustesse aux bruits sont investiguées, Et enfin, section. 2.4 poursuit la comparaison entre les méthodes k-spaces sur des champs de déplacement associés à des plaques orthotropes dont un cas de structure hétérogène.

2.2 Présentation des méthodes k-spaces

Tous d'abord, dans cette section, les méthodes k-spaces sont rappelées brièvement et leur implémentation est présentée. Les méthodes étudiées dans ce chapitre sont l'IWC, ses variantes et améliorations, mais aussi l'INCOME, plus récemment développée et basée sur la méthode de Prony et enfin l'AKSI basée sur l'identification algébrique.

Dans la suite le champ u est considéré sur le domaine bidimensionnel Ω . Sauf mention contraire, le domaine est supposé rectangulaire de longueur de côté Lx et Ly . Le champ u est connu sur une grille régulière de $Nx \times Ny$ points, $\Delta x = \frac{Lx}{Nx - 1}$, (x_i, y_j) pour i allant de 1 à Nx et j de 1 à Ny , $\Delta y = \frac{Ly}{Ny - 1}$ et $U_{ij} = u(x_i, y_j)$.

2.2.1 Inhomogeneous Wave Correlation

L'IWC, [Berthaut 2004, Berthaut 2005], est une approche pour identifier les nombres d'ondes basée sur la transformée de Fourier [Fourier 1888]. Celle-ci se base sur la recherche du maximum d'une fonction de corrélation dans $L^2(\Omega)$ entre le champ d'onde étudié u et une fonction paramétrée par le nombres d'onde complexe $\sigma_{k,\gamma}$.

$$Corr(u, \sigma_{k,\gamma}) = \frac{|\langle u, \sigma_{k,\gamma} \rangle_{L^2(\Omega)}|}{\|u\|_{L^2(\Omega)} \|\sigma_{k,\gamma}\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (2.1)$$

L'IWC classique consiste à choisir, pour la fonction $\sigma_{k,\gamma}$, une onde plane inhomogène, en dimension 1 :

$$\sigma_{k,\gamma,\theta} = e^{-ik(1+i\gamma)x}. \quad (2.2)$$

et en dimension 2, dans la direction de propagation θ :

$$\sigma_{k,\gamma,\theta} = e^{-ik(1+i\gamma)(x \cos \theta + y \sin \theta)}. \quad (2.3)$$

Ce choix s'inspire de la transformée de Fourier. En dimension 2, la recherche de maximum doit être réalisée pour chaque direction de propagation θ . Les variations de l'IWC consistent à faire d'autres choix pour la fonction $\sigma_{k,\gamma}$. En effet, la première, l'Extended IWC (EIWC) prend en compte la distance au point source dans la définition de l'onde. Et les autres méthodes dérivées de l'IWC proposent de remplacer l'exponentielle de la fonction par le noyau de Green de l'équation de plaque de Kirchhoff-Love. Ces versions modifiées de l'IWC seront étudiées dans les sous-sections suivantes.

Par définition du produit scalaire et des normes dans $L^2(\Omega)$, Eqn. (2.1) s'écrit pour un problème monodimensionnel :

$$IWC_{1D}(k, \gamma) = \frac{\left| \int_{\Omega} u \cdot \sigma_{k,\gamma}^* dx \right|}{\sqrt{\int_{\Omega} |u|^2 dx \cdot \int_{\Omega} |\sigma_{k,\gamma}|^2 dx}}. \quad (2.4)$$

Et pour un problème bidimensionnel :

$$IWC(k, \gamma, \theta) = \frac{\left| \iint_{\Omega} u \cdot \sigma_{k,\gamma,\theta}^* dx dy \right|}{\sqrt{\iint_{\Omega} |u|^2 dx dy \cdot \iint_{\Omega} |\sigma_{k,\gamma,\theta}|^2 dx dy}}, \quad (2.5)$$

où \bullet^* désigne le conjugué. Ainsi, le nombre d'onde dans la direction θ , $k(\theta)(1+i\gamma(\theta))$ est estimé en recherchant les valeurs de k et γ , pour une direction du plan θ , qui maximisent Eqn. (2.5). Cependant, le terme $\|u\|_{L^2(\Omega)}$, ou $\sqrt{\iint_{\Omega} |u|^2 dx dy}$ en 2D, est indépendant de k , γ ou θ , c'est pourquoi il n'est pas nécessaire de le calculer. Ensuite, le champ n'étant connu que sur un sous-ensemble discret de Ω , les intégrations doivent être approximées numériquement. Si une information sur la qualité des mesures est connue, alors Berthaut [Berthaut 2004, Berthaut 2005] propose de s'en servir lors de l'approximation numérique des intégrales du produit scalaire et

de la norme. ρ_n est la cohérence de la mesure associée au morceau de surface S_n .

$$\iint_S \bullet \, dx dy \longleftrightarrow \sum_n \bullet \, \rho_n S_n. \quad (2.6)$$

Dans les cas tests qui seront présentés plus tard, la cohérence n'est pas supposée connue.

Le terme $\|\sigma_{k,\gamma}\|_{L^2(\Omega)}$ peut être calculé analytiquement, et ainsi réduire le temps de calcul. Premièrement, en revenant au cas monodimensionnel, $\tilde{\Omega} = [a, b]$, $L = b - a$, l'intégrale $\int_{\Omega} |\sigma_{k,\gamma}|^2 dx$ est calculable analytiquement :

$$\|\sigma_{k,\gamma}\|_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} \sqrt{L} \text{ si } \gamma = 0, \\ \sqrt{\frac{e^{2k\gamma a} (e^{2k\gamma L} - 1)}{2k\gamma}} \text{ sinon.} \end{cases} \quad (2.7)$$

En dimension 2 avec un domaine rectangulaire, par exemple $\Omega = [a_x, b_x] \times [a_y, b_y]$, avec $Lx = b_x - a_x$ et $Ly = b_y - a_y$, l'intégrale $\iint_{\Omega} |\sigma_{k,\gamma,\theta}|^2 dx dy$ est calculée en se basant sur le cas monodimensionnel :

$$\|\sigma_{k,\gamma,\theta}\|_{L^2(\Omega)} = \begin{cases} \sqrt{LxLy} \text{ si } \gamma = 0, \\ \sqrt{\frac{Lx e^{2k\gamma \sin \theta a_y} (e^{2k\gamma \sin \theta Ly} - 1)}{2k\gamma \sin \theta}} \text{ si } \cos \theta = 0, \\ \sqrt{\frac{Ly e^{2k\gamma \cos \theta a_x} (e^{2k\gamma \cos \theta Lx} - 1)}{2k\gamma \cos \theta}} \text{ si } \sin \theta = 0, \\ \sqrt{\frac{e^{2k\gamma(a_x \cos \theta + a_y \sin \theta)} [e^{2k\gamma \sin \theta Ly} - 1] [e^{2k\gamma \cos \theta Lx} - 1]}{4k^2 \gamma^2 \cos \theta \sin \theta}} \text{ sinon.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Ainsi, seule l'intégrale associée au produit scalaire nécessite d'être calculée numériquement.

$$\iint_{\Omega} u \cdot \sigma_{k,\gamma,\theta}^* dx dy \approx \sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} U_{ij} \sigma_{k,\gamma,\theta}^*(x_i, y_j) S_{ij}. \quad (2.9)$$

Finalement, la fonction à maximiser, approximant Eqn. (2.5), est la suivante :

$$IWC(k, \gamma, \theta) \approx \frac{\sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} U_{ij} \sigma_{k,\gamma,\theta}^*(x_i, y_j) S_{ij}}{\|\sigma_{k,\gamma,\theta}\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (2.10)$$

La recherche du maximum de la fonction IWC, Eqn. (2.10) s'effectue en deux étapes. Tout d'abord l'estimation de k si $\gamma = 0$ par évaluation de la fonction sur un grand nombre de valeurs pour k . Ensuite la recherche de (k, γ) maximisant Eqn. (2.8) est effectuée, k étant recherché à proximité de la valeur identifiée à la première étape.

2.2.2 Extended Inhomogeneous Wave Correlation

La première extension de l'IWC, l'EIWC pour Extended Inhomogeneous Wave Correlation, [Van Belle 2017] cherche à améliorer l'identification de l'amortissement lié aux nombres d'onde en incorporant la distance au point source dans la fonction σ . Cette version de l'IWC ne s'applique qu'à des champs issus d'une excitation d'un seul point source dont la position est connue précisément. Pour un problème monodimensionnel avec le point d'excitation situé en x_s , Eqn. (2.2) est remplacée par :

$$\hat{\sigma}_{k,\gamma}(x) = e^{-ik|x-x_s|} e^{-|k\gamma(x-x_s)|}, \quad (2.11)$$

et dans le cas bidimensionnel, si le point d'excitation est situé en (x_s, y_s) , alors Eqn. (2.3) est remplacée par :

$$\hat{\sigma}_{k,\gamma,\theta}(x, y) = e^{-ik|(x-x_s)\cos\theta+(y-y_s)\sin\theta|} e^{-|k\gamma((x-x_s)\cos\theta+(y-y_s)\sin\theta)|}. \quad (2.12)$$

Comme pour l'implémentation de l'IWC, il n'est pas nécessaire de calculer le terme $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ car celui-ci est indépendant de k et γ . De même, le terme $\|\sigma_{k,\gamma}\|_{L^2(\Omega)}$ peut être calculé analytiquement, bien que les formules soient plus longues que pour l'IWC classique. Si une valeur analytique est utilisée, alors la fonction à maximiser est de la même forme que précédemment, Eqn. (2.10), sinon elle sera Eqn. (2.13). La recherche du maximum de la fonction de corrélation se fait de la même manière que pour l'IWC classique.

$$EIWC(k, \gamma, \theta) \approx \frac{\sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} U_{ij} \sigma_{k,\gamma,\theta}^*(x_i, y_j) S_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} |\sigma_{k,\gamma,\theta}(x_i, y_j)|^2 S_{ij}}}. \quad (2.13)$$

2.2.3 Corrélation basée sur une fonction de Green

Tuffano, [Tuffano 2019, Tuffano 2020a], dans ses travaux de thèse, a proposé de remplacer l'onde inhomogène par une fonction de Green de l'équation de plaque isotrope de Kirchhoff-Love en domaine non borné, paramétré par le nombre complexe \hat{k} .

$$\sigma_{k,\gamma} = G_\infty(\hat{k}, r) = \frac{i}{8\hat{k}^2} \left(H_0^{(1)}(\hat{k}r) - H_0^{(1)}(i\hat{k}r) \right), \quad (2.14)$$

où r est la distance au point source et $H_0^{(1)}$ la fonction de Hankel du premier type à l'ordre 0 et $\hat{k} = k(1 + i\gamma)$. Si le point source est (x_s, y_s) alors $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$. La fonction théorique à maximiser est Eqn. (2.15).

$$\mathcal{F}(k, \gamma) = \frac{\left| \iint_{\Omega} \hat{u} \cdot G_\infty^*(k(1 + i\gamma), r) dx dy \right|}{\sqrt{\iint_{\Omega} |\hat{u}|^2 dx dy \cdot \iint_{\Omega} |G_\infty(k(1 + i\gamma), r)|^2 dx dy}}. \quad (2.15)$$

À l'inverse des deux précédentes versions de l'IWC présentées précédemment, celle-ci se limite aux plaques isotropes et estime une valeur du nombre d'onde complexe indépendante de la direction de propagation dans le plan. Ensuite, une valeur analytique de $\iint_{\Omega} |G_\infty^*(k(1 +$

$i\gamma), r)|^2 dx dy$ n'est pas obtainable simplement, celle-ci est calculée numériquement. Finalement, la fonction à maximiser est donnée Eqn.(2.16).

$$\mathcal{F}(k, \gamma) \approx \frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} U_{ij} G_{\infty}^*(k(1+i\gamma), r_{ij}) S_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} |G_{\infty}(k(1+i\gamma), r_{ij})|^2 S_{ij}}}. \quad (2.16)$$

Cette méthode sera testée avec les autres, mais uniquement sur les cas isotropes.

2.2.4 Green Function Correlation

[Bin Fazail Muhammad 2022, Fazail 2023a, Fazail 2023b] ont proposé une solution pour profiter des avantages liés aux fonctions de Green tout en étant capable de mesurer les nombres d'ondes dans toutes les directions pour des plaques anisotropes. Il s'agit de la GFC pour Green Function Correlation. La fonction $\sigma_{k,\gamma}$ est la même que celle donnée Eqn. (2.14). La grille de points régulière utilisée jusqu'à maintenant est remplacée par des lignes de points partant en rayons depuis le point source, illustrée Fig. 2.1. Pour chaque direction de propagation dans le plan θ considérée, un ensemble différent de points partant du point source est utilisé : $\tilde{U}_{\theta,i} = u(r_i, \theta)$ pour i allant de 1 à $N_r(\theta)$. Le nombre de point $N_r(\theta)$ dépendant de la direction.

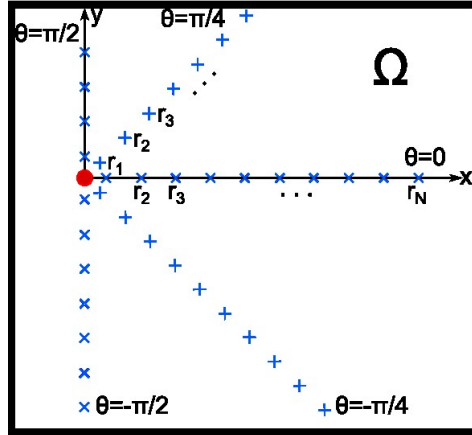


FIGURE 2.1 – Schéma de la discretisation utilisée par la GFC.

$$GFC(k, \gamma, \theta) = \frac{\left| \int_0^R u(r, \theta) \cdot G_{\infty}^*(k(1+i\gamma), r) dr \right|}{\sqrt{\int_0^R |u(r, \theta)|^2 dr \cdot \int_0^R |G_{\infty}^*(k(1+i\gamma), r)|^2 dr}}. \quad (2.17)$$

Eqn. (2.17) est la fonction de corrélation théorique. La fonction de corrélation à maximiser en pratique est donnée Eqn. (2.18).

$$GFC(k, \gamma, \theta) \approx \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \tilde{U}_{\theta,i} G_{\infty}^*(k(1+i\gamma), r_i) S_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_r} |G_{\infty}(k(1+i\gamma), r_i)|^2 S_i}}. \quad (2.18)$$

2.2.5 Green Function Correlation modifiée

Pour profiter des avantages liés à l'usage de fonction de Green sans être limité à un échantillonnage en rayons depuis la source mais tout en restant capable d'estimer les nombres d'ondes en fonction de la direction, il est possible de combiner les idées de la Green Function Correlation method avec celles de l'Extended Inhomogenous Wave Correlation et la corrélation proposée par Tufano. L'idée est de se baser sur une fonction de Green de l'équation de Kirchhoff-Love, comme le fait Tufano, mais de remplacer la distance r à la source par le terme $\tilde{r}(\theta) = |(x - x_s) \cos \theta + (y - y_s) \sin \theta|$, provenant de l'EIWC qui combine la distance à la source et la direction de propagation considérée. De plus, pour une direction donnée θ , la partie du champ dans cette direction par rapport au point source est la plus importante pour l'estimation du nombre d'onde dans cette direction. C'est pourquoi, une fonction poids, paramétrée par la direction θ est ajoutée à la fonction $\sigma_{k,\gamma,\theta}$. Cette fonction vaut 1 lorsque le vecteur entre la source et le point considéré est colinéaire au vecteur associé à direction de propagation θ , 0 lorsqu'ils sont orthogonaux. Soit $(r, \tilde{\theta})$ les coordonnées cylindriques ayant pour origine la position du point source. Un exemple de fonction poids est donné alors par $f_\theta(\tilde{\theta}) = \left| \cos(\theta - \tilde{\theta}) \right|^n$, où n est un entier naturel permettant de resserrer plus ou moins la fonction autour de la direction θ .

Une illustration de fonction, combinant une fonction de Green et la fonction poids dans une direction, utilisée dans la méthode proposée est présentée Fig. 2.2.

$$\sigma_{k,\gamma,\theta} = f_\theta G_\infty(k(1 + i\gamma), \tilde{r}(\theta)), \quad (2.19)$$

$$F(k, \gamma, \theta) = \frac{\left| \iint_{\Omega} \hat{u} \cdot G_\infty^*(k(1 + i\gamma), \tilde{r}(\theta)) dx dy \right|}{\sqrt{\iint_{\Omega} |\hat{u}|^2 dx dy \cdot \iint_{\Omega} |G_\infty^*(k(1 + i\gamma), \tilde{r}(\theta))|^2 dx dy}}. \quad (2.20)$$

Dans ce chapitre, cette approche sera nommée Green fonction corrélation modifiée, ou GFC modifiée.

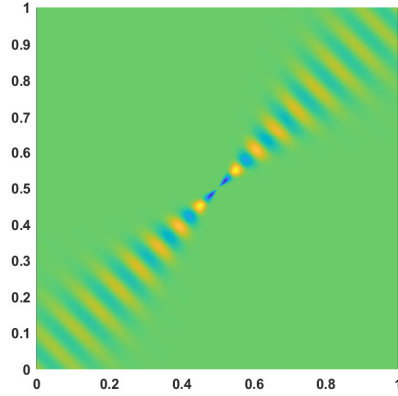


FIGURE 2.2 – Type de fonction avec laquelle le champ est corrélé lors de l'application de la GFC modifiée. Cette fonction est basée sur une fonction de Green fenêtrée dans la direction $\theta = \frac{\pi}{4}$ pour $k = (78.5 - 0.98i) \text{ rad m}^{-1}$.

2.2.6 INverse CONvolution METHod

L'INCOME développée par [Boukadia 2021, Boukadia 2022], est basée sur une autre approche que les méthodes de corrélation présentées juste avant. Celle-ci est basée sur la méthode de Prony. L'application de cette méthode se fait en deux étapes, tout d'abord estimer un noyau de convolution qui annule le champ discrétisé, puis en déduire le k-space. Pour un problème en dimension 2, le noyau de convolution a la forme générale Eqn. (2.21).

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_{-n_x n_y} & \dots & a_{0 n_y} & \dots & a_{n_x n_y} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{-n_x 0} & \dots & a_{00} & \dots & a_{n_x 0} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{-n_x -n_y} & \dots & a_{0 -n_y} & \dots & a_{n_x -n_y} \\ \hline \end{array}, \quad (2.21)$$

avec $a_{-i-j} = a_{ij}$. Cependant, selon la structure étudiée et selon combien d'ondes différentes sont présentes dans le champ, des simplifications sont réalisées. Par exemple, pour un champ associé à une plaque isotrope, le noyau de convolution est donné par Eqn. (2.22), si la structure est orthotrope, alors par Eqn. (2.23).

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & b & c \\ \hline b & a & b \\ \hline c & b & c \\ \hline \end{array}, \quad (2.22)$$

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ \hline 0 & d & c & d & 0 \\ \hline e & b & a & b & e \\ \hline 0 & d & c & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (2.23)$$

Les coefficients du noyau choisi sont déterminés tels que $u * S = 0$. En pratique, le problème est considéré au sens des moindres carrés et est résolu par décomposition en valeurs singulières.

$$S = \operatorname{argmin} \{ \|U * S\|_2, \|S\|_2 = 1 \}. \quad (2.24)$$

Par ailleurs, lors du calcul des coefficients du noyau de convolution, il est possible de considérer des points plus éloignés les uns des autres tant que l'écart reste constant. En particulier dans le cas d'une structure hétérogène périodique, [Ribeiro 2022] montre que les points considérés ensemble doivent être choisis en respectant la périodicité. Une fois les coefficients du noyau de convolution déterminés, le k-space est déduit. Pour cela, à partir des coefficients du noyau de convolution, le polynôme à deux variables Eqn. (2.25) est construit.

$$\sum_{l=-n_x}^{n_x} \sum_{m=-n_y}^{n_y} a_{lm} \lambda_x^l \lambda_y^m = 0, \quad (2.25)$$

où $\lambda_x = e^{-ik_x \Delta x}$ et $\lambda_y = e^{-ik_y \Delta y}$. Les éléments du k-spaces sont les racines (k_x, k_y) de cette équation vérifiant :

$$\exists k \in \mathbb{C}, \exists \theta \in \mathbb{R}, k_x = k \cos \theta, k_y = k \sin \theta. \quad (2.26)$$

Pour certaines directions de propagation θ , le polynôme Eqn. (2.25) peut-être ramené à un polynôme à une seule variable. Par exemple, si $\theta = 0$, alors $\lambda_y = 1$ et le polynôme est remplacé par le polynôme à une variable suivant dont λ_x est racine.

$$\sum_{l=-n_x}^{n_x} \left(\sum_{m=-n_y}^{n_y} a_{lm} \right) \lambda_x^l = 0. \quad (2.27)$$

Inversement pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_x = 1$.

$$\sum_{m=-n_y}^{n_y} \left(\sum_{l=-n_x}^{n_x} a_{lm} \right) \lambda_y^m = 0. \quad (2.28)$$

Enfin pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $k_x = k_y$ et donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$.

$$\sum_{m=-n_y}^{n_y} \sum_{l=-n_x}^{n_x} a_{lm} \lambda^{m+l} = 0. \quad (2.29)$$

Pour les autres valeurs de θ , le nombre d'onde est obtenu en recherchant la valeur de k mini-

misant Eqn. (2.30).

$$I(\theta, k) = \left| \sum_{l=-n_x}^{n_x} \sum_{m=-n_y}^{n_y} a_{lm} e^{-ik(l \sin \theta \Delta x + m \sin \theta \Delta y)} \right|. \quad (2.30)$$

Ainsi, le k-space peut être déterminé.

2.2.6.1 Exemple d'une plaque orthotrope en dimension 2

L'exemple de l'application de l'INCOME au cas d'une plaque orthotrope est présenté. Pour une telle plaque, le noyau de convolution recherché a la forme Eqn. (2.23) [Boukadia 2021]. Une fois les coefficients obtenus par décomposition en valeurs singulières, $\lambda_x = e^{-ik_x \Delta x}$ et $\lambda_y = e^{-ik_y \Delta y}$ sont solutions de l'équation Eqn. (2.31).

$$\begin{aligned} a + b \left(\lambda_x + \frac{1}{\lambda_x} \right) + c \left(\lambda_y + \frac{1}{\lambda_y} \right) + d \left(\lambda_x \lambda_y + \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} + \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \right) \\ + e \left(\lambda_x^2 + \frac{1}{\lambda_x^2} \right) + f \left(\lambda_y^2 + \frac{1}{\lambda_y^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Comme précédemment, les nombres d'ondes peuvent être obtenus de manière immédiate dans certaines directions où l'équation Eqn. (2.31) peut-être transformée en une équation à une seule variable. Si $\theta = 0$ alors $k_y = 0$ et $\lambda_y = 1$ donc $\mu = \lambda_x + \frac{1}{\lambda_x}$ est racine du polynôme suivant.

$$e\mu^2 + (b + 2d)\mu + a + 2(c + f - e) = 0. \quad (2.32)$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{--- } \mu &= \frac{-(b + 2d) + \sqrt{(b + 2d)^2 - 4e(a + 2(c + f - e))}}{2e} \text{ ou} \\ \text{--- } \mu &= \frac{-(b + 2d) - \sqrt{(b + 2d)^2 - 4e(a + 2(c + f - e))}}{2e}. \end{aligned}$$

Ce qui permet d'en déduire λ_x puis k_x . De la même manière, si $\theta = \pi/2$ alors $k_x = 0$ et $\lambda_x = 1$ donc $\mu = \lambda_y + \frac{1}{\lambda_y}$ est racine du polynôme suivant :

$$f\mu^2 + (c + 2d)\mu + a + 2(b + e - f) = 0, \quad (2.33)$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{--- } \mu &= \frac{-(c + 2d) + \sqrt{(c + 2d)^2 - 4e(a + 2(b + e - f))}}{2f} \text{ ou} \\ \text{--- } \mu &= \frac{-(c + 2d) - \sqrt{(c + 2d)^2 - 4e(a + 2(b + e - f))}}{2f}. \end{aligned}$$

Et si $\theta = \pi/4$ alors $k_x = k_y$ et $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ donc $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ est racine du polynôme suivant :

$$(d + e + f)\mu^2 + (b + c)\mu + a - 2(e + f) = 0, \quad (2.34)$$

d'où

$$\begin{aligned} - \mu &= \frac{-(b+c) + \sqrt{(b+c)^2 - 4(d+e+f)(a-2(e+f))}}{2(d+e+f)} \text{ ou} \\ - \mu &= \frac{-(b+c) - \sqrt{(b+c)^2 - 4(d+e+f)(a-2(e+f))}}{2(d+e+f)}. \end{aligned}$$

Dans ces trois directions particulières, (k_x, k_y) peuvent être calculés directement. Dans le cas général, les nombres d'ondes seront obtenus par minimisation, pour $k \in \mathbb{C}$, d'une fonctionnelle avec $\lambda_x(k, \theta) = e^{-ik \cos(\theta)\Delta x}$ et $\lambda_y(k, \theta) = e^{-ik \sin(\theta)\Delta y}$.

$$\begin{aligned} I(\theta, k) &= \left| a + b \left(\lambda_x + \frac{1}{\lambda_x} \right) + c \left(\lambda_y + \frac{1}{\lambda_y} \right) + d \left(\lambda_x \lambda_y + \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} + \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \right) \right. \\ &\quad \left. + e \left(\lambda_x^2 + \frac{1}{\lambda_x^2} \right) + f \left(\lambda_y^2 + \frac{1}{\lambda_y^2} \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ainsi, le k-space peut être calculé en entier. L'approche de l'INCOME a l'avantage de pouvoir multiplier facilement le nombre d'angles considérés. Le calcul du noyau de convolution est indépendant de la direction. Cependant, dans le cas d'une structure périodique hétérogène, les points de mesure considérés ensemble doivent se trouver aux mêmes positions dans la cellule de périodicité [Ribeiro 2022], ce qui peut forcer à utiliser des pas Δx et Δy trop larges.

2.2.6.2 Algebraic K-Space Identification

Enfin, l'AKSI, développée par [Li 2023a], est la dernière technique k-space comparée dans ce chapitre. Celle-ci se base sur l'identification algébrique [Fliess 2000, Fliess 2008, Fliess 2003]. Tout comme la GFC, cette méthode nécessite un échantillonnage particulier. Pour une direction donnée, une ligne de points dans cette direction et partant du point source est nécessaire. Ainsi, pour chaque direction de propagation dans le plan θ considérée, un ensemble différent de points partant du point source est utilisé : $\tilde{U}_{\theta, n} = u(r_n, \theta)$ pour i allant de 1 à $N_r(\theta)$.

Le calcul des nombres d'onde dans une direction θ s'effectue en trois étapes. Tout d'abord le calcul numérique des termes d'intégration du champ Eqn. (2.36) est effectué.

$$\phi(i, \theta, r_n) = \sum_{j=i}^{n_w} \binom{n_w}{j} \binom{n_w-i}{n_w-j} \frac{n_w-j}{n_w+i-j} \int_0^{r_n} (r_n - \tau)^{n_w+i-j} (-\tau)^j u(\tau, \theta) d\tau. \quad (2.36)$$

Ensuite, les coefficients γ_θ sont identifiés par résolution du système Eqn. (2.37) pour tout n .

$$\sum_{i=0}^{n_w} \phi(i, \theta, r_n) \gamma_\theta(i) = 0. \quad (2.37)$$

Pour résoudre ce système, ce dernier est mis sous forme matricielle $\mathbf{H}\mathbf{X} = 0$.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \phi(n_w, \theta, r_1) & \phi(n_w - 1, \theta, r_1) & \dots & \phi(0, \theta, r_1) \\ \phi(n_w, \theta, r_2) & \phi(n_w - 1, \theta, r_2) & \dots & \phi(0, \theta, r_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi(n_w, \theta, r_{N_r(\theta)}) & \phi(n_w - 1, \theta, r_{N_r(\theta)}) & \dots & \phi(0, \theta, r_{N_r(\theta)}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \gamma_\theta(n_w) \\ \gamma_\theta(n_w - 1) \\ \vdots \\ \gamma_\theta(0) \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

La résolution est faite au sens des moindres carrés en recherchant un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de $\mathbf{H}^*\mathbf{H}$. Ainsi $\mathbf{X} = \operatorname{argmin}\{x^*\mathbf{H}^*\mathbf{H}x\}$. Enfin, à partir des coefficients γ_θ , un polynôme est construit et dont les nombres d'ondes sont racines Eqn. (2.39).

$$P_\theta(k) = \sum_{j=0}^{n_w} \gamma_\theta(j)(ik)^{n_w-j}. \quad (2.39)$$

Pour s'affranchir du problème du choix de la valeur de n_w , dans les comparaisons qui vont suivre, les nombres d'onde sont estimés pour différentes valeurs de n_w et la valeur estimée la plus proche de la valeur théorique est conservée.

2.3 Méthodes k-spaces pour des champs de plaques isotropes

Les méthodes k-spaces, en particulier celles basées sur la méthode IWC ou l'INCOME sont testées dans cette partie sur des champs générés analytiquement. L'approche analytique permet de calculer rapidement des champs dont les caractéristiques sont bien contrôlées pour pouvoir tester différents aspects des méthodes. En particulier, ils permettront d'observer les limites en hautes et basses fréquences des différentes méthodes ainsi que leur résistance aux incertitudes de mesures et bruits. Pour comparer plus efficacement les différentes méthodes k-spaces, celles-ci sont regroupées en trois sous-catégories : tout d'abord les méthodes fonctionnant sur une grille de points sans connaissance a priori de la position du point d'excitation, l'IWC et l'INCOME, ensuite les méthodes fonctionnant sur le même type d'échantillonnage, mais se basant sur la connaissance de la position du point source, l'EIWC et les deux variantes de l'IWC basées sur les fonctions de Green et enfin les méthodes utilisant des mesures 1D en ligne depuis le point source, l'AKSI et la GFC.

2.3.1 Plaque isotrope

Premièrement, les champs de déplacement utilisés sont des champs de déplacement hors plan obtenus par résolution de l'équation du comportement en flexion d'une plaque isotrope de Kirchhoff-Love [Leissa 1969]. Il s'agit d'un des modèles de plaque le plus simple et est donné Eqn. (2.40)

$$D\Delta^2 u - \omega^2 \Lambda u = f, \quad (2.40)$$

ou

$$\Delta^2 u - k^4 \Lambda u = \frac{f}{D}, \quad (2.41)$$

avec $k^4 = \frac{\omega^2 \Lambda}{D}$.

La plaque est modélisée avec les paramètres mécaniques de l'aluminium résumé Table. 2.1

Paramètre :	Module de Young E	Coefficient de Poisson ν	Masse volumique ρ
Valeur :	69 GPa	0.3	2700 kg/m ³

TABLE 2.1 – Paramètres mécaniques de la plaque en aluminium.

De plus, un amortissement $\eta = 5\%$ est rajouté au module de Young $\tilde{E} = E(1 + i\eta)$. La plaque a une épaisseur de $d = 1$ mm. La longueur et la largeur varieront selon ce qui est à observer. $D = \frac{E(1 + i\mu)}{1 - \nu^2} \frac{d^3}{12}$ et $\Lambda = \rho d$.

Des champs obtenus par résolution de cette équation en domaine fini et infini vont être utilisés.

Pour résoudre ce type d'équation en domaine infini, les fonctions de Green associées sont utilisées. En domaine fini, les champs sont calculés par décomposition en séries de Fourier.

2.3.1.1 Fonctions de Green

Soit \mathcal{D} un opérateur différentiel linéaire, tel que le problème étudié ait une équation de la forme suivante sur un domaine Ω .

$$\mathcal{D}u = f. \quad (2.42)$$

Dans le cas de l'équation de Kirchhoff-Love, $\mathcal{D} = D\Delta^2 - \omega^2\Lambda$. Les solutions fondamentales, ou fonctions de Green sont les fonctions vérifiant l'équation suivante, au sens des distributions, sans prendre en compte les conditions aux limites, c'est-à-dire en considérant un domaine infini et une condition du type de celles de Sommerfeld

$$\mathcal{D}G = \delta. \quad (2.43)$$

Avec δ la distribution de Dirac.

La connaissance du noyau de Green permet de calculer une solution du problème en convoluant le noyau avec le terme source. Ainsi une solution de Eqn. (2.40) en domaine non borné est donnée par :

$$u = (G * f) = \int_{\Omega} G(\bullet - y)f(y)dy. \quad (2.44)$$

Dans le cas de Eqn. (2.40), la fonction de Green se construit à partir de fonction de Hankel [Toumi 1994].

$$G_0(\vec{r}, k) = -\frac{i}{8Dk^2} \left(H_0^{(1)}(k\|\vec{r}\|_2) - H_0^{(1)}(ik\|\vec{r}\|_2) \right). \quad (2.45)$$

Et la solution pour une source située en $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$G_K(\vec{r}, \vec{r}_0, k) = -\frac{i}{8Dk^2} \left(H_0^{(1)}(k\|\vec{r} - \vec{r}_0\|_2) - H_0^{(1)}(ik\|\vec{r} - \vec{r}_0\|_2) \right). \quad (2.46)$$

Il s'agit des fonctions utilisés dans les corrélations de certaines méthodes k-space, telles que la GFC. Ainsi, pour modéliser un champ sur une plaque infinie excitée ponctuellement, Eqn. (2.46) peut être utilisée. La source peut être considérée à l'intérieur comme à l'extérieur du domaine observé. De plus, rien n'empêche d'utiliser la linéarité de l'équation de Kirchhoff Love pour superposer les champs issus de plusieurs sources ponctuelles ou d'utiliser Eqn. (2.44). Cette

approche peut être généralisée à des structures type plaques orthotropes elliptiques en utilisant la fonction de Green associée proposée par Berthaut dans l'annexe de sa thèse [Berthaut 2004]. Dans la suite, les fonctions de Green sont utilisées pour modéliser des champs en domaines non bornés. Cependant la méthode des sources images [Gunda 1995, Cuenca 2012] permet de modéliser certaines conditions de bords en ajoutant d'autres sources sous la forme de fonctions de Green.

2.3.1.2 Décomposition en séries de Fourier

Pour obtenir des champs analytiques associés à des plaques finies, une autre approche est utilisée, la décomposition en séries de Fourier.

Soit l'équation aux dérivées partielles d'ordre 4 suivante :

$$D_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + a_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \omega^2 \Lambda u = f. \quad (2.47)$$

Il s'agit d'une forme plus générale d'équation de plaque orthotrope, dont l'équation de plaque de Kirchhoff-Love est un cas particulier. Si $D_x = D_y = D_{xy}$ et $a_x = a_y = 0$, Eqn. (2.47) devient $D\Delta^2 u - \omega^2 \Lambda u = f$. Pour se positionner dans un cas où il existe une solution analytique, le domaine considéré est supposé rectangulaire $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ avec des conditions aux limites en support. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ si } y = 0 \text{ ou } L_y, \\ u = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } L_x. \end{aligned} \quad (2.48)$$

La solution de Eqn. (2.47) est alors recherchée comme une décomposition sur la famille orthogonale de fonctions de la forme Eqn. (2.49).

$$\phi_{nm} : (x, y) \in \Omega \mapsto \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin \frac{n\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y}. \quad (2.49)$$

C'est-à-dire sous la forme :

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} A_{nm} \phi_{nm}(x, y). \quad (2.50)$$

Les A_{nm} étant à déterminer. Eqn. (2.50) est remplacée dans Eqn. (2.47), l'égalité est multipliée par ϕ_{ij} puis intégrée sur Ω . En remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_{nm}}{\partial x^2}(x, y) &= - \left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 \phi_{nm}(x, y), \\ \frac{\partial^2 \phi_{nm}}{\partial y^2}(x, y) &= - \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \phi_{nm}(x, y), \end{aligned} \quad (2.51)$$

et

$$\int_{\Omega} \phi_{nm}(x, y) \phi_{ij}(x, y) dx dy = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \text{ et } m = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.52)$$

Il vient pour tout $m, n \in \mathbb{N}$:

$$A_{nm} = \frac{\int_{\Omega} f \phi_{nm} dx dy}{D_x \left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^4 + 2D_{xy} \left(\frac{nm\pi^2}{L_x L_y} \right)^2 + D_y \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^4 + a_x \left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 + a_y \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 - \omega^2 \Lambda}. \quad (2.53)$$

Le champ est obtenu en utilisant Eqn. (2.50) avec les valeurs données par Eqn. (2.53). La formule Eqn. (2.53) peut être simplifiée si la plaque est supposée isotrope, comme ça sera le cas parfois dans la suite. Dans ce cas $D_x = D_y = D_{xy} = D$, $a_x = a_y = 0$ et Eqn. (2.53) devient :

$$A_{nm} = \frac{\int_{\Omega} f \phi_{nm} dx dy}{D \left(\left(\frac{n\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y} \right)^2 \right)^2 - \omega^2 \Lambda}. \quad (2.54)$$

Le terme $\int_{\Omega} f \phi_{nm}$ dépend du chargement choisi. Si une force ponctuelle est appliquée en un point $(x_s, y_s) \in \Omega$:

$$\int_{\Omega} f \phi_{nm} dx dy = f \int_{\Omega} \delta_{x_s, y_s} \phi_{nm} dx dy = f \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin \frac{n\pi x_s}{L_x} \sin \frac{m\pi y_s}{L_y}. \quad (2.55)$$

D'autre part, si un chargement uniforme est appliqué sur le domaine, alors f est constant et :

$$\int_{\Omega} f \phi_{nm} dx dy = f \int_{\Omega} \phi_{nm} dx dy = f \frac{2\sqrt{L_x L_y}}{nm\pi^2} (1 - \cos n\pi) (1 - \cos m\pi). \quad (2.56)$$

Dans ce cas, $\int_{\Omega} f \phi_{nm} dx dy = 0$ si n ou m est pair.

La décomposition en séries de Fourier permet de définir, pour un grand nombre de fréquences, des champs modélisant une plaque isotrope ou orthotrope.

2.3.1.3 Relation de dispersion analytique

À partir de la forme de l'équation Eqn. (2.47), il est possible de déterminer une formule analytique de la relation de dispersion. Soit U une onde harmonique se propageant dans la direction $\vec{n}_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et d'expression : $U(x, y) = e^{ik_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta)}$. En remplaçant cette onde harmonique dans Eqn. (2.47) sans terme source, il vient la relation suivante reliant le nombre d'onde aux caractéristiques de l'équation :

$$k_{\theta}^4 (D_x \cos^4 \theta + 2D_{xy} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + D_y \sin^4 \theta) - k_{\theta}^2 (a_x \cos^2 \theta + a_y \sin^2 \theta) - \omega^2 \Lambda = 0. \quad (2.57)$$

Le nombre d'onde est une racine de ce polynôme. Si $a_x = a_y = 0$, alors la relation est directe :

$$k_{\theta}^4 = \frac{\omega^2 \Lambda}{D_x \cos^4 \theta + 2D_{xy} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + D_y \sin^4 \theta}. \quad \text{La connaissance de la relation de dispersion}$$

analytique permet de comparer les résultats des méthodes k-spaces.

2.3.2 Plaque isotrope en domaine non borné

Tout d'abord, les techniques k-spaces sont comparées sur des champs de déplacement en domaine infini, calculées en utilisant la fonction de Green. Ainsi l'effet éventuel des conditions aux limites est complètement supprimé. Deux cas sont considérés, l'un avec le point source au centre du domaine observé, l'autre avec la source hors du domaine.

2.3.2.1 Point source au centre du domaine observé

Le domaine observé fait 3 m de côté et est connu sur une grille régulière de 180 par 180 points. Les fréquences vont de 100 Hz à 1500 Hz. Des champs à deux fréquences sont présentés Fig. 2.3. Fig. 2.4 présente les relations de dispersion, réelles comme imaginaires, dans la direction 0 rad, calculées par les différentes méthodes. Les k-spaces mesurés à 100 Hz et 1500 Hz sont présentés Fig. 2.5

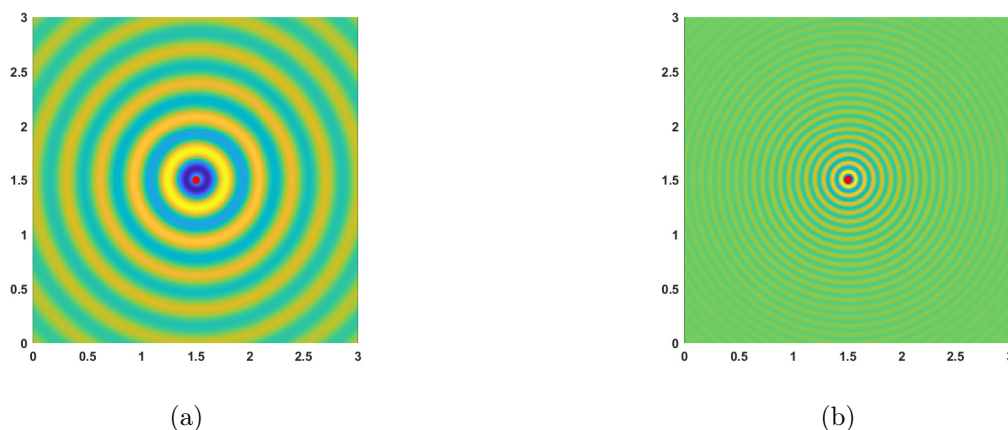


FIGURE 2.3 – Champs de déplacement pour une plaque en aluminium en domaine non borné à 100 Hz et 1500 Hz, position du chargement ponctuel (\bullet).

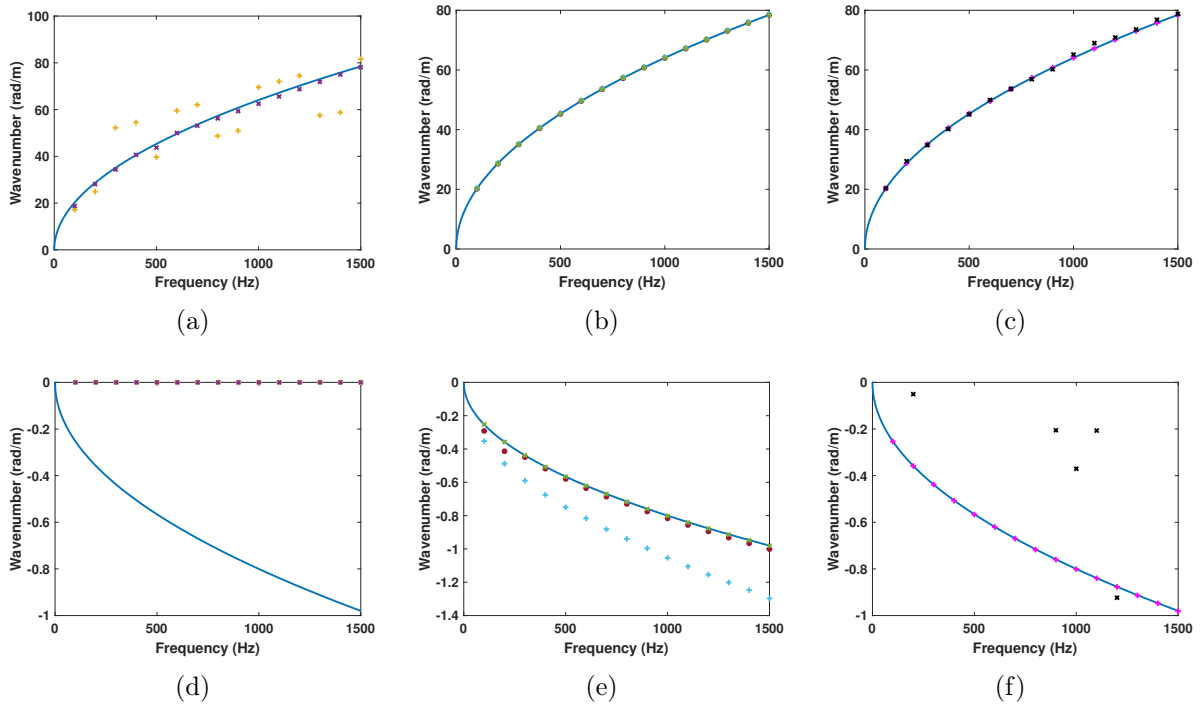


FIGURE 2.4 – Relations de dispersion mesurées sur une plaque infinie soumise à un chargement ponctuel au centre du domaine observé, calculées dans la direction $\theta = 0$ rad, valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (d) partie imaginaire calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×). (b) partie réelle et (e) partie imaginaire calculées par l'EIWC (•), l'IWC Green isotrope (×) et la GFC modifiée (+). (c) partie réelle et (f) partie imaginaire calculées par la GFC (+) et l'AKSI (×).

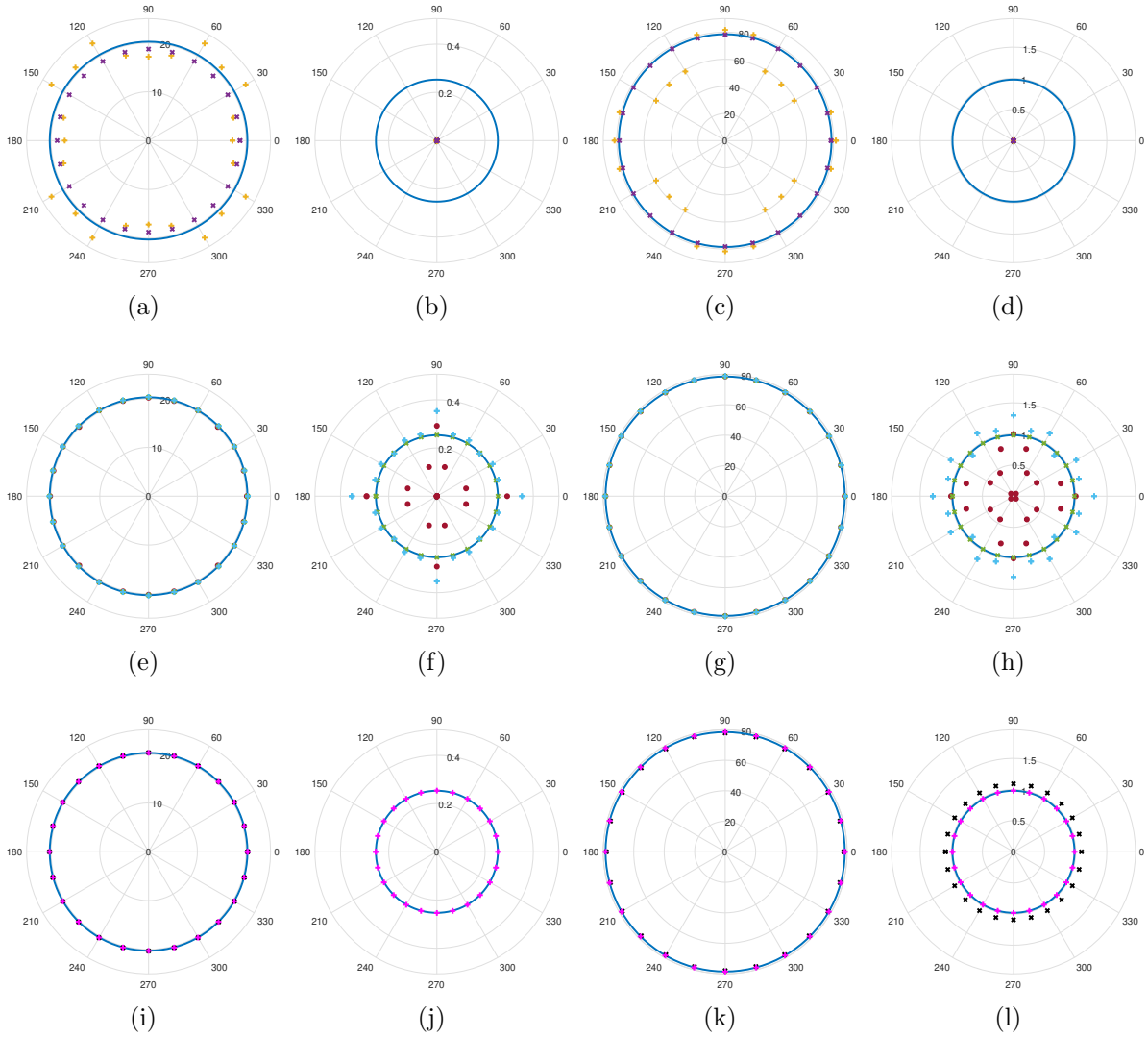


FIGURE 2.5 – k-spaces mesurés sur une plaque infinie soumise à un chargement ponctuel au centre du domaine, calculés à deux fréquences : 100 Hz et 1500 Hz. Valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (b) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (c) partie réelle et (d) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×). (e) partie réelle et (f) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (g) partie réelle et (h) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l'EIWC (●), l'IWC Green isotrope (×) et la GFC modifiée (+). (i) partie réelle et (j) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (k) partie réelle et (l) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par la GFC (+) et l'AKSI (×).

Plusieurs observations peuvent déjà être faites à partir de ce cas test. Tout d'abord, la présence de la singularité au centre du champ observé perturbe l'application de l'INCOME et de l'IWC. La partie réelle mesurée par l'INCOME est dans ce cas la moins acceptable de toutes, Fig. 2.4a. Ensuite les parties imaginaires calculées par l'INCOME et l'IWC sont à zéro, Fig. 2.4d.

En ce qui concerne l'EIWC et la GFC modifiée, ces méthodes sont impeccables pour la partie réelle, Fig. 2.4b. Pour la partie imaginaire, d'après Fig. 2.4e, la GFC modifiée semble surestimer, en valeur absolue, la partie imaginaire dans la direction 0 rad, à l'inverse de l'EIWC.

Cependant, en s'intéressant aux k-spaces imaginaires, Figs. 2.5f et 2.5h, il apparaît que bien que la GFC modifiée surestime en effet la partie imaginaire dans les directions $0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$ rad, en considérant les autres directions, elle semble meilleure que l'EIWC.

Ensuite, ce type de champ de déplacement semble être idéal pour les méthodes utilisant un échantillonnage 1D, à savoir la GFC et l'AKSI, comme visible Figs. 2.4c et 2.4f. Cependant, l'AKSI ne semble pas fiable pour estimer les k-spaces imaginaires, même dans ce cas idéal. Enfin, l'IWC basée sur une fonction de Green, pour champs isotropes, donne des résultats quasiment parfaits, que ce soit pour la partie réelle comme pour la partie imaginaire. En effet, la fonction servant à la corrélation est exactement la même que celle ayant permis de générer les champs de déplacement. Elle n'est limitée que par les implémentations numériques et la discrétisation.

2.3.2.2 Point source à l'extérieur domaine observé

La même étude que précédemment est réalisée, mais lorsque la source se situe hors du domaine d'observation. De plus, les dimensions du domaine observé ont été réduites à un carré de 1 m de côté avec une grille de 60 par 60 points.

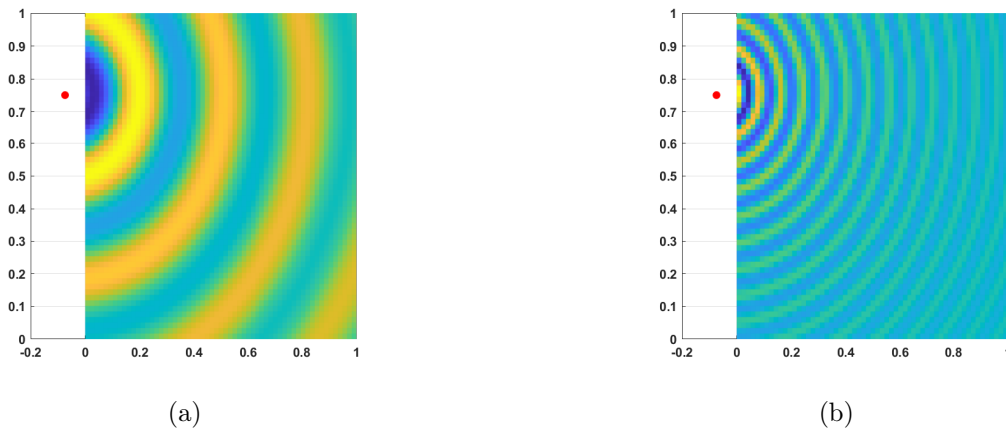


FIGURE 2.6 – Champs de déplacement pour une plaque en aluminium en domaine non borné à 100 Hz et 1500 Hz, position du chargement ponctuel (•).

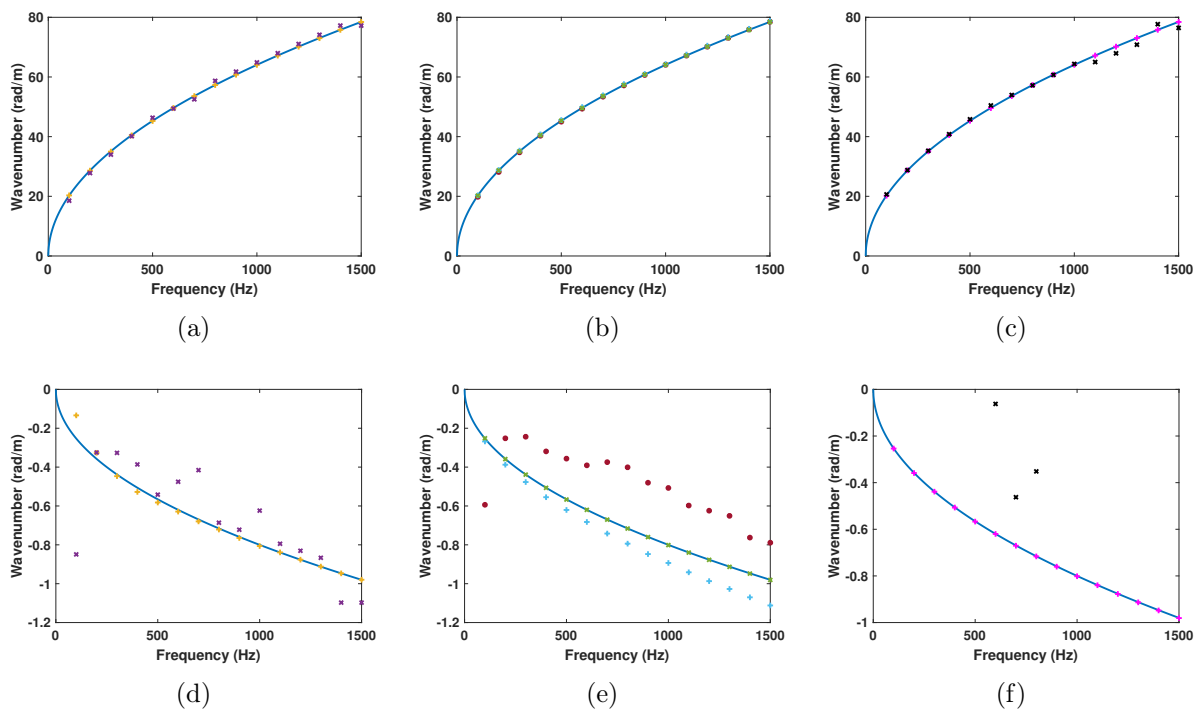


FIGURE 2.7 – Relations de dispersion mesurées sur une plaque infinie soumise à un chargement ponctuel hors du domaine observé, calculées dans la direction $\theta = 0$ rad, valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (d) partie imaginaire calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×). (b) partie réelle et (e) partie imaginaire calculées par l'EIWC (•), l'IWC Green isotrope (×) et la GFC modifiée (+). (c) partie réelle et (f) partie imaginaire calculées par la GFC (+) et l'AKSI (×).

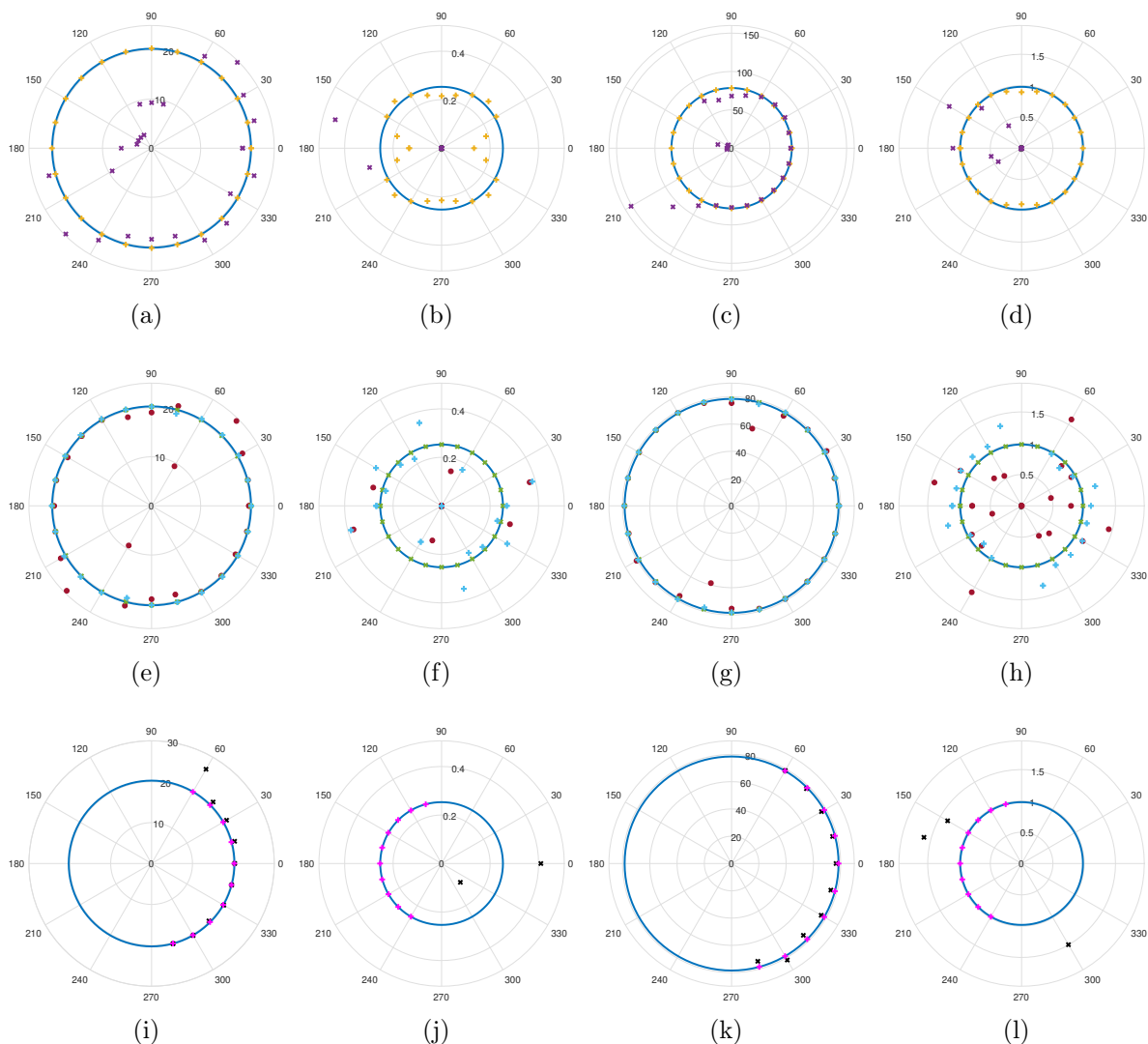


FIGURE 2.8 – k-spaces mesurés sur une plaque infinie soumise à un chargement ponctuel hors du domaine observé, calculés à deux fréquences : 100 Hz et 1500 Hz. Valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (b) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (c) partie réelle et (d) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (\times). (e) partie réelle et (f) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (g) partie réelle et (h) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l'EIWC (\bullet), l'IWC Green isotrope (\times) et la GFC modifiée (+). (i) partie réelle et (j) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (k) partie réelle et (l) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par la GFC (+) et l'AKSI (\times).

Comparativement aux observations de la sous-section précédente, lorsque le point source est hors du domaine observé, l'INCOME donne de bien meilleurs résultats pour le calcul des k-spaces complexes. De même pour l'IWC, Fig. 2.7d, les parties imaginaires sont bien meilleures que précédemment. Cependant, sur les k-spaces, Figs. 2.8a et b, dans les directions pour lesquelles le champ partant de la source n'est pas visible Fig. 2.6, les nombres d'onde ne sont pas ou sont mal calculés. Un problème similaire apparaît pour l'EIWC et la GFC modifiée, Figs. 2.8c, d, g et h, bien que l'EIWC semble plus affectée, surtout sur les parties imaginaires.

Comme précédemment, et pour les mêmes raisons, la variante de l'IWC pour champs iso-

tropes basée sur une fonction de Green donne des résultats quasiment parfait.

Enfin, à l'inverse du cas précédent, à cause de la position de la fenêtre d'observation par rapport à la position du point source, les méthodes GFC et AKSI ne sont utilisables que dans certaines directions.

2.3.3 Plaque isotrope finie

Maintenant les méthodes k-spaces sont comparées sur des champs issus d'une plaque finie. Les champs proviennent d'une résolution par décomposition en séries de Fourier et sont illustrés Fig. 2.9. Les relations de dispersion sont présentées Fig. 2.10 et les k-spaces à deux fréquences Fig. 2.11.

2.3.3.1 Chargement ponctuel

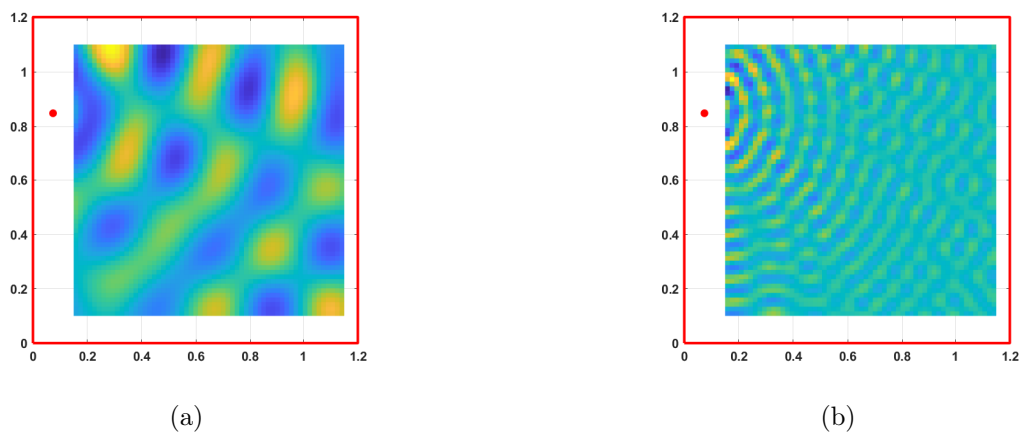


FIGURE 2.9 – Champs de déplacement pour une plaque en aluminium en domaine borné à 100 Hz et 1500 Hz, position du chargement ponctuel (•) et bords de la plaque (—).

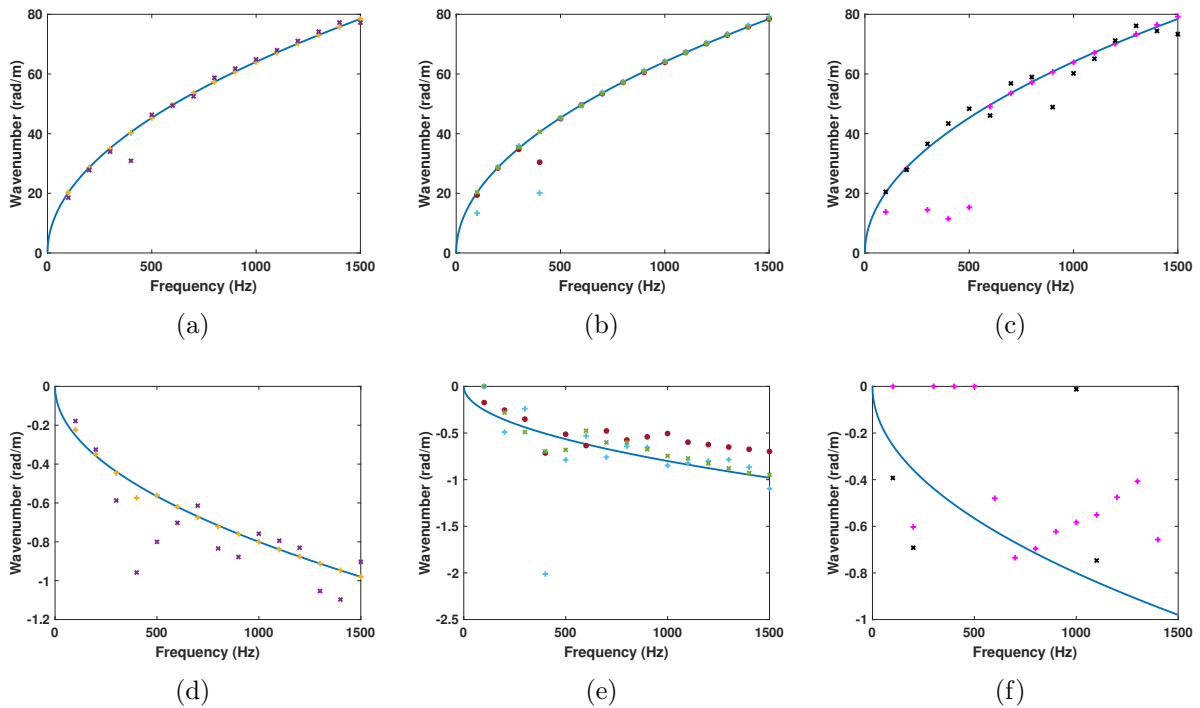


FIGURE 2.10 – Relations de dispersion mesurées sur une plaque finie soumise à un chargement ponctuel hors du domaine observé, calculées dans la direction $\theta = 0$ rad, valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (d) partie imaginaire calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×). (b) partie réelle et (e) partie imaginaire calculées par l'EIWC (•), l'IWC Green isotrope (×) et la GFC modifiée (+). (c) partie réelle et (f) partie imaginaire calculées par la GFC (+) et l'AKSI (×).

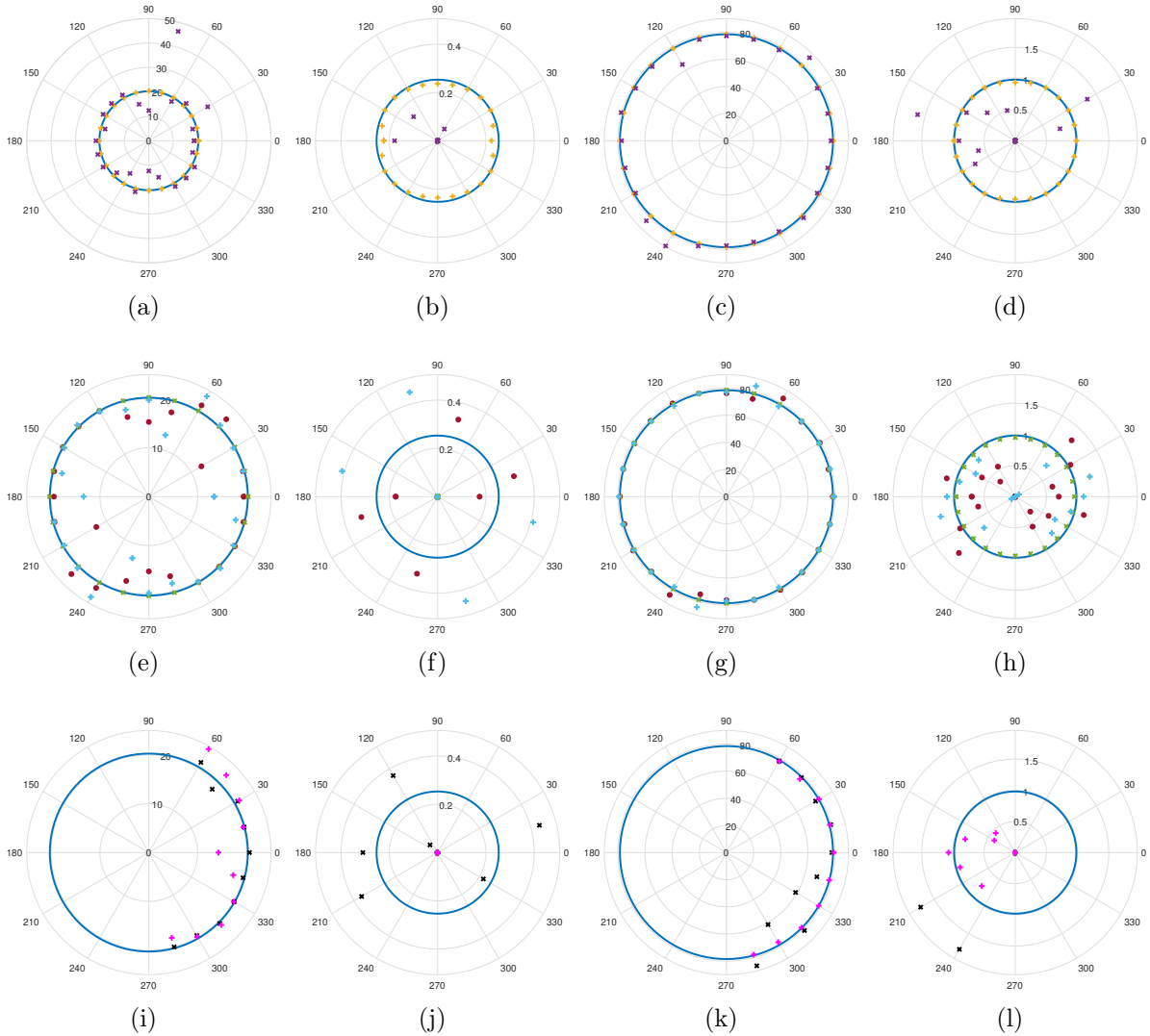


FIGURE 2.11 – k-spaces mesurés sur une plaque finie soumise à un chargement ponctuel hors du domaine observé, calculés à deux fréquences : 100 Hz et 1500 Hz. Valeurs analytiques (–), (a) partie réelle et (b) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (c) partie réelle et (d) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×). (e) partie réelle et (f) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (g) partie réelle et (h) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l'EIWC (•), l'IWC Green isotrope (×) et la GFC modifiée (+). (i) partie réelle et (j) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (k) partie réelle et (l) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par la GFC (+) et l'AKSI (×).

En comparaison avec le cas précédent d'une plaque infinie avec source hors du domaine observé, les résultats de l'INCOME et de l'IWC sont légèrement meilleurs, cela est dû à l'enrichissement du champ par les réflexions aux bords. Cependant, ce sont ces mêmes réflexions qui rendent les méthodes basées sur la connaissance de la position du point source légèrement moins efficaces. Bien qu'elles restent quand même meilleures que l'IWC de base. L'impact de la complexification des champs est remarquable pour l'AKSI et la GFC. Les parties imaginaires calculées par la GFC sont bien moins bonnes que dans le cas précédent infini. De plus, les parties réelles de ces deux méthodes perdent aussi grandement en qualité. Les techniques

k-space nécessitant des mesures 1D semblent particulièrement impactées par la présence des bords. Elles nécessitent donc, pour être efficaces, soit un domaine très large, soit d'être dans des configurations avec un amortissement suffisamment élevé.

2.3.3.2 Chargement uniforme

Le chargement ponctuel est remplacé par un chargement uniforme, le terme source Eqn. (2.56) est utilisé. Comme il n'y a pas de point source, seul l'IWC et l'INCOME sont utilisables dans ce cas. Figs. 2.13 et 2.14 présentent les relations de dispersions dans la direction $\theta = 0$ rad et les k-spaces complexes à deux fréquences. D'après ces figures, il apparaît que pour ce type de champs, l'INCOME donne une estimation très précise des k-spaces complexes. L'IWC permet d'estimer les k-spaces réels, mais reste limité selon les directions pour les parties imaginaires.

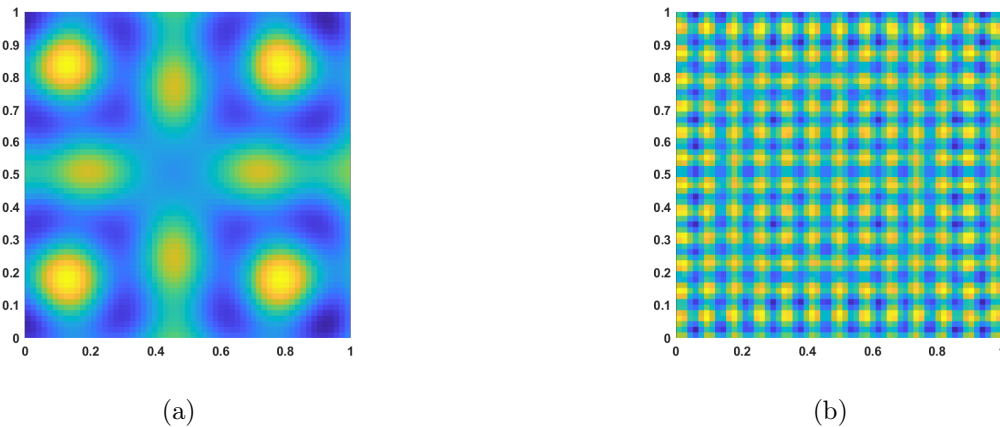


FIGURE 2.12 – Champs de déplacement pour une plaque en aluminium en domaine borné à 100 Hz et 1500 Hz, soumise à un chargement uniforme (•).

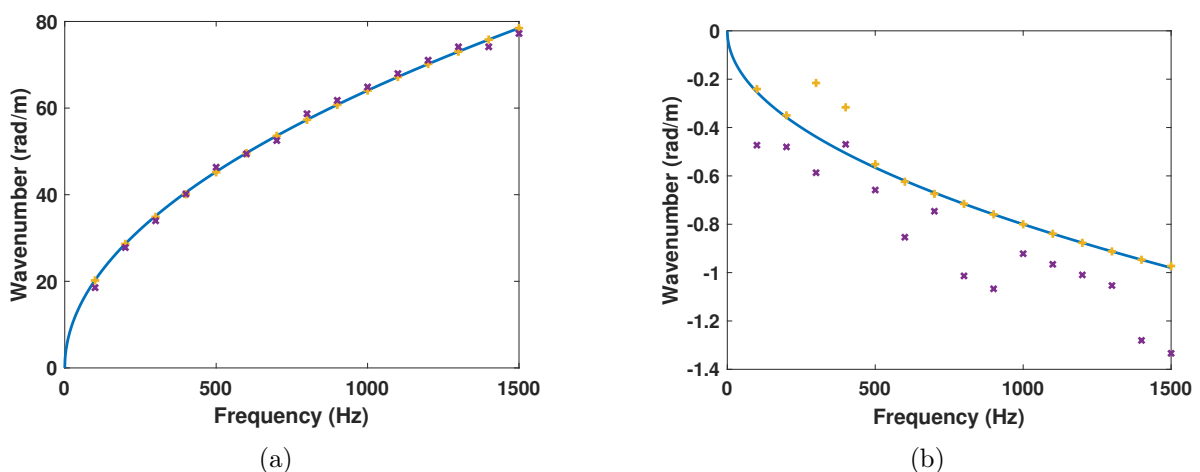


FIGURE 2.13 – Relations de dispersion mesurées sur une plaque finie soumise à un chargement uniforme, calculée dans la direction $\theta = 0$ rad, valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (d) partie imaginaire calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×).

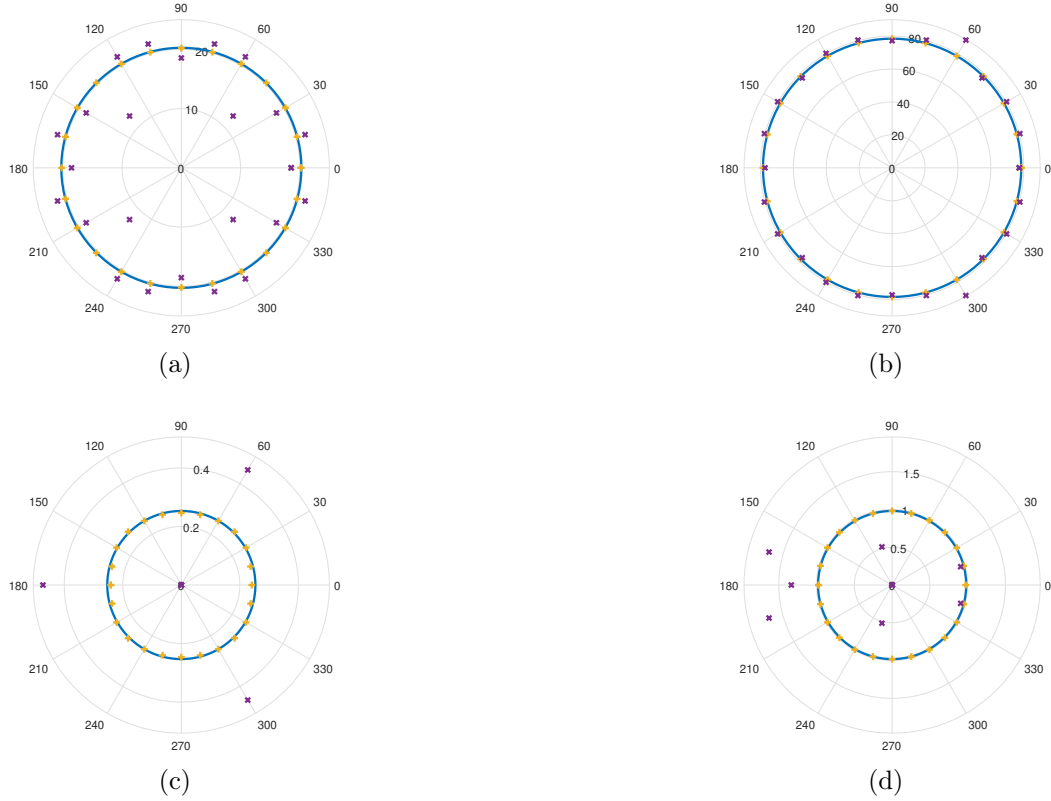


FIGURE 2.14 – k-spaces mesurés sur une plaque finie soumise à un chargement ponctuel hors du domaine observé, calculés à deux fréquences : 100 Hz et 1500 Hz. Valeurs analytiques (–), (a) partie réelle et (c) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (b) partie réelle et (d) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l’INCOME (+) et l’IWC (×).

2.3.4 Limitation aux basses fréquences

Dans cette sous-section, la limite basse fréquence des méthodes k-spaces est étudiée, c’est-à-dire leur capacité à donner de bons résultats lorsque la taille du domaine n’est pas très grande devant les longueurs d’onde. Pour cela, les k-spaces sont calculés sur des champs de déplacement ayant des tailles de domaines différentes. La fréquence, 200 Hz et le pas de discrétisation 0.0145 m restant inchangés. Pour chaque taille de domaine, une mesure d’écart relatif est calculée entre les nombres d’onde mesurés par les différentes méthodes et la valeur analytique des nombres d’onde Eqn. (2.58). Les écarts sont calculés en termes de parties réelles et parties imaginaires et sont présentés Fig.2.16.

$$\begin{aligned}
 Ecart_{reel} &= \frac{|\Re(k_{analytique}) - \Re(k_{mesure})|}{|\Re(k_{analytique})|}, \\
 Ecart_{imag} &= \frac{|\Im(k_{analytique}) - \Im(k_{mesure})|}{|\Im(k_{analytique})|}.
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

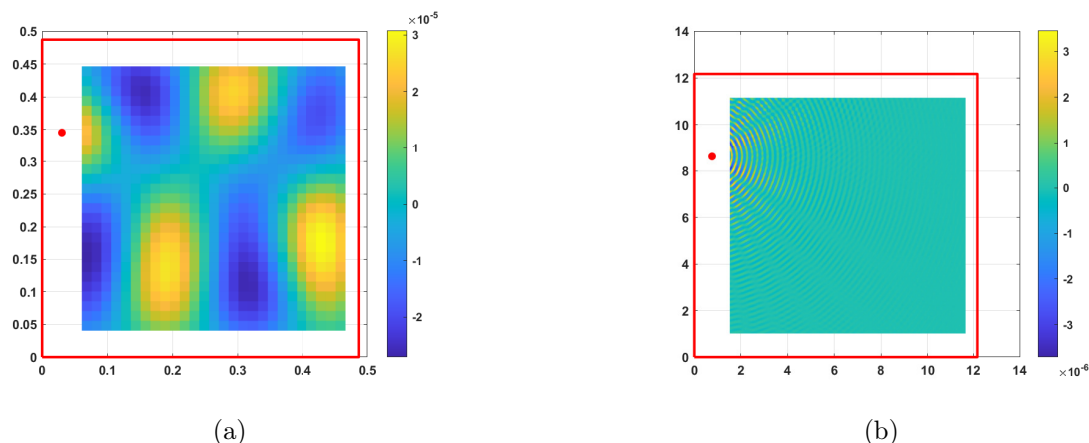


FIGURE 2.15 – Champs de déplacement pour une plaque en aluminium en domaine borné à 200 Hz, position du chargement ponctuel (\bullet), (a) $L = 0.4$ m et (b) $L = 10$ m.

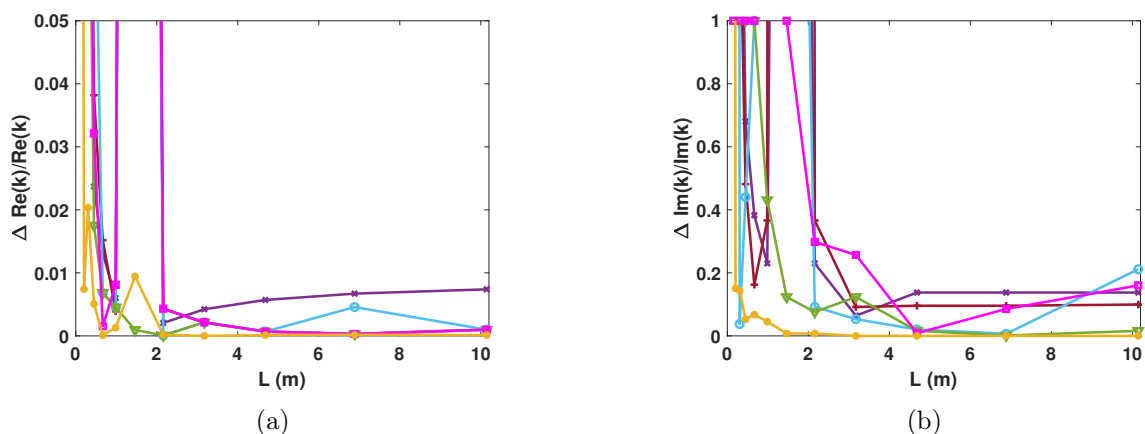


FIGURE 2.16 – Erreur relative sur les nombres d'onde calculés par les différentes méthodes k-spaces à 200 Hz, en fonction de la taille du domaine observé. (a) erreur relative sur la partie réelle des nombres d'ondes et (b) erreur relative sur la partie imaginaire des nombres d'ondes. Nombres d'onde calculés par l'INCOME (\bullet), l'IWC (\times), l'EIWC ($+$), l'IWC Green isotrope (∇), la GFC modifiée (\circ) et la GFC (\square).

Sur la Fig. 2.16, comme attendu, il est nécessaire que la taille du domaine soit suffisamment grande devant la longueur d'onde pour que l'erreur commise par les techniques k-spaces soit fiable. Pour les méthodes type IWC, à 200 Hz pour la structure considérée, les écarts deviennent faibles lorsque la taille de la fenêtre dépasse $L = 2$ m. Cependant, pour l'INCOME, la limite est beaucoup plus basse. Sur l'exemple considéré, les écarts sont faibles dès que L dépasse 0.2 m. Ainsi, une des grandes forces de l'INCOME par rapport aux autres méthodes k-spaces est son efficacité à bien plus basses fréquences.

2.3.5 Limitation aux hautes fréquences

Ensuite, la limite haute fréquence des méthodes est comparée, c'est-à-dire lorsque le pas de discrétisation n'est plus très petit par rapport à la longueur d'onde. Pour cela, à taille de domaine et fréquence fixées, l'écart relatif des nombres d'ondes mesuré est calculé pour différentes tailles de pas de discrétisation. Le cas considéré est une plaque de taille 3.6 m avec un domaine observé $L = 3$ m à 2200 Hz. Les écarts sont calculés en termes de parties réelles et parties imaginaires et sont présentés Fig.2.18.

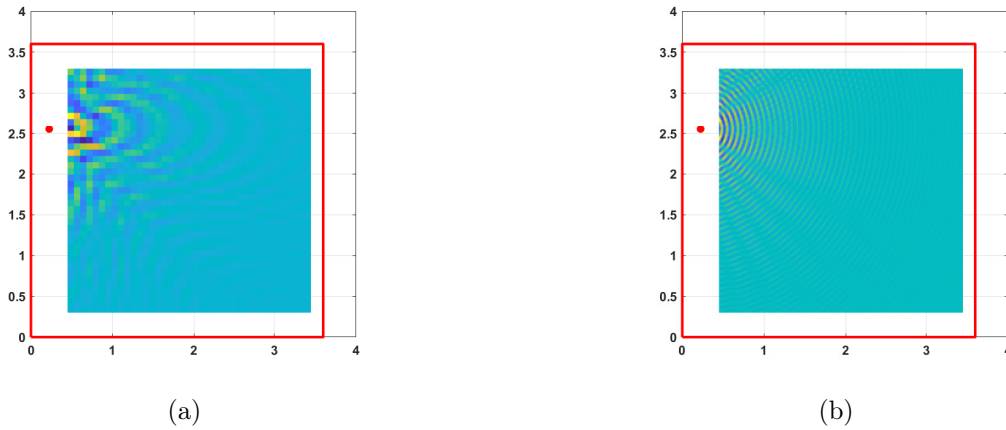


FIGURE 2.17 – Champs de déplacement pour une plaque en aluminium en domaine borné à 2200 Hz, position du chargement ponctuel (●), (a) 40 par 40 points et (b) 200 par 200 points.

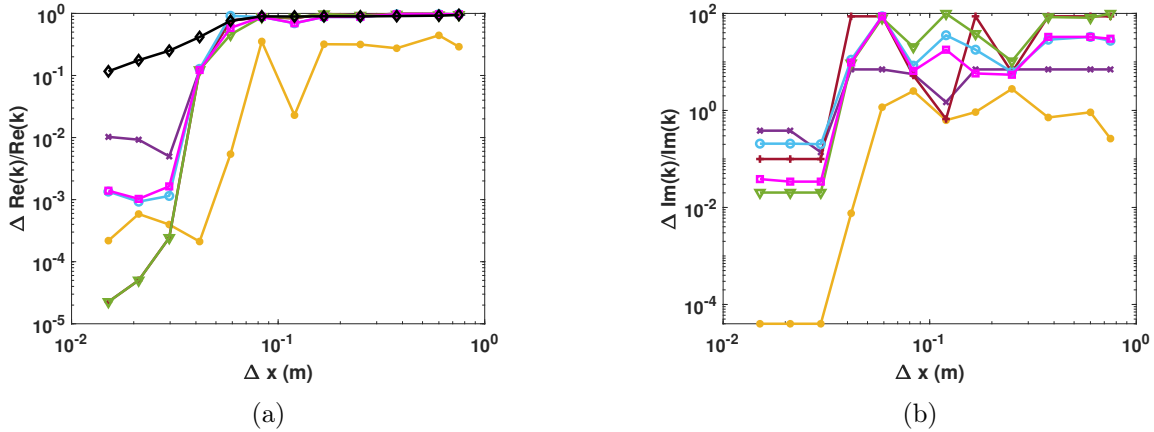


FIGURE 2.18 – Erreur relative sur les nombres d'onde calculés par les différentes méthodes k-spaces à 2200 Hz, en fonction du pas de discrétisation. (a) erreur relative sur la partie réelle des nombres d'ondes et (b) erreur relative sur la partie imaginaire des nombres d'ondes. Nombres d'onde calculés par l'INCOME (●), l'IWC (×), l'EIWC (+), l'IWC Green isotrope (▽), la GFC modifiée (○), la GFC (□), et l'AKSI (◇).

Sur ces figures, les méthodes basées sur l'IWC ont toutes un comportement similaire, les erreurs relatives croissent brutalement lorsque le pas de discrétisation Δx dépasse 3 cm et ce,

pour les parties réelles et les parties imaginaires. Au-delà de cette valeur seuil, les erreurs tendent rapidement vers 1 (10^0 sur les figures) pour les parties réelles, c'est-à-dire que les méthodes ne sont plus capables de mesurer les k-spaces. Pour les parties imaginaires, dès que $\Delta x > 3$ cm, les écarts relatifs dépassent 1, les erreurs sont aberrantes. Par comparaison, l'INCOME permet d'obtenir des résultats décents avec un pas de discrétisation plus grossier, les résultats restent acceptables pour les parties réelles jusqu'à $\Delta x \approx 6$ cm et pour les parties imaginaires jusqu'à environ $\Delta x \approx 4$ cm.

Pour comprendre la limitation en hautes fréquences pour les méthodes basées sur l'IWC, Fig. 2.19 illustre les fonctions de corrélation à maximiser pour chaque méthode, en fonction de la fréquence et du nombre d'onde réel.

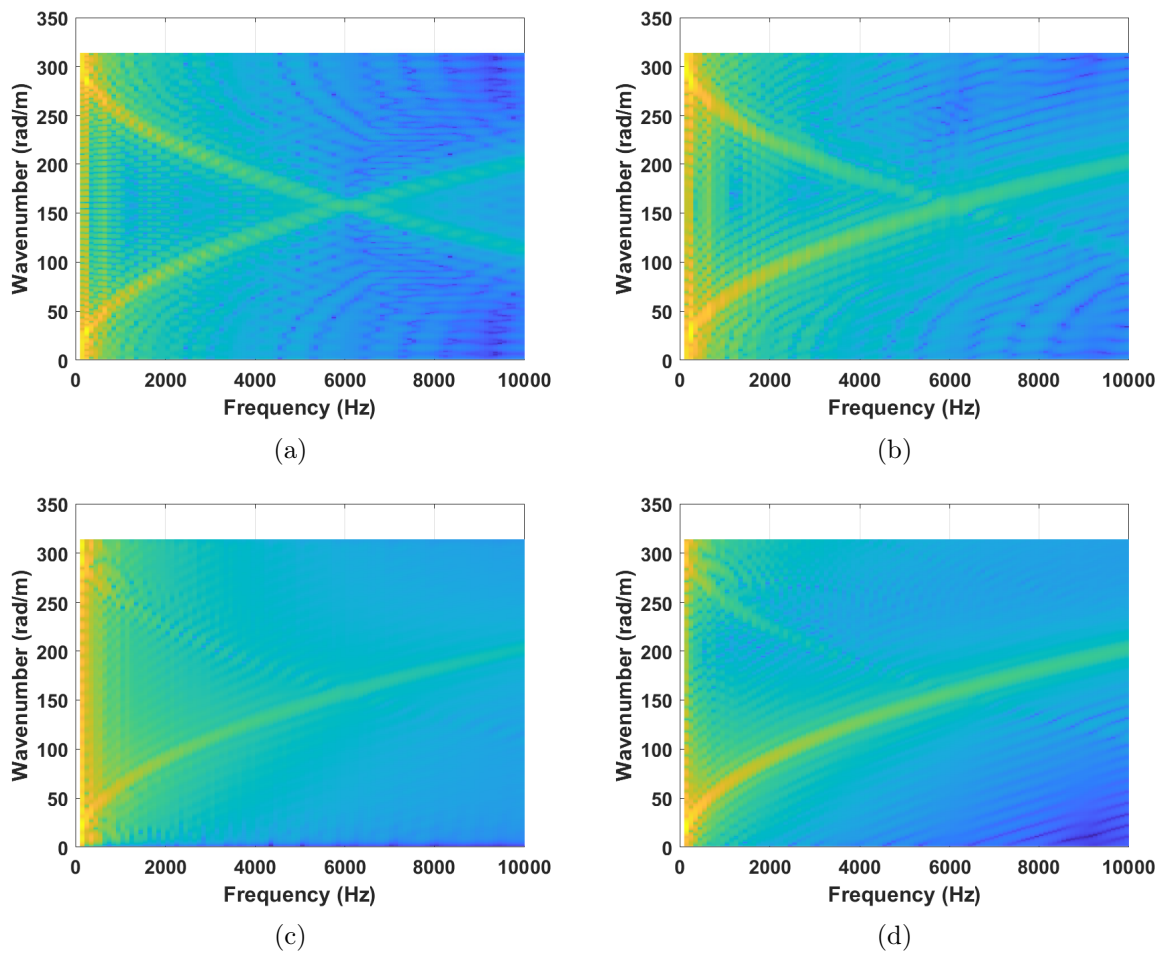


FIGURE 2.19 – Logarithme des fonctions de corrélation (Eqns. (2.10), (2.13), (2.16) et (2.20)), pour des champs analytiques d'une plaque de 3 m de côté, connus sur une grille de 151 par 151 points, en fonction de la fréquence et de k pour $\theta = 0$ et $\gamma = 0$. (a) IWC classique, (b) EIWC, (c) IWC basée sur une fonction de Green et (d) GFC modifiée.

Fig. 2.19 présente les logarithmes des fonctions de corrélation pour les quatre méthodes IWC. À chaque fréquence, le nombre d'onde associé se trouve au maximum de ces fonctions

de corrélation. Les champs ont été considérés avec une discrétisation $\Delta x = 2$ cm. Ainsi dans la direction $\theta = 0$, la limite $\frac{\pi}{\Delta x}$ vaut 157 rad m^{-1} . Dans les autres directions, elle sera différente. Pour l'IWC et l'EIWC Figs. 2.19a et 2.19b, les surfaces semblent présenter une symétrie d'axe $k = \frac{\pi}{\Delta x}$. Lorsque le nombre d'onde recherché est supérieur à cette limite, la méthode risque de donner une mauvaise valeur. Pour l'IWC et l'EIWC, avec cette discrétisation, il sera compliqué de déterminer les nombres d'onde lorsque la fréquence dépasse 6000 Hz. Pour les méthodes IWC basées sur des noyaux de Green (isotrope et la GFC modifiée), Fig. 2.19c et 2.19d, cette symétrie est moins présente. Ces méthodes peuvent donc, selon les cas, probablement fonctionner à un peu plus hautes fréquences sans raffiner le maillage, en tout cas pour la partie réelle.

2.3.6 Robustesse aux bruits

Maintenant la résistance des différentes méthodes k-spaces aux bruits de mesure est étudiée. Pour cela, du bruit plus ou moins fort est rajouté aux champs de déplacements.

Les champs sans bruit ont été choisis selon les méthodes k-spaces. Pour l'INCOME et l'IWC classique, un champ de déplacement d'une plaque finie avec source ponctuelle à l'extérieur de la fenêtre d'observation est utilisé. Pour les méthodes nécessitant la connaissance de la position du point de chargement, la source se situe au centre de la plaque. Les champs ont été calculés par décomposition en séries de Fourier, pour une fréquence de 1000 Hz, sur une plaque 3.6 m de côté, et un domaine observé de 3 m de côté. Pour les méthodes utilisant un échantillonnage monodimensionnel partant du point source, le champ d'une plaque infinie est considéré et est mesuré le long d'une ligne de 1.5 m partant de la source.

Pour un champ parfait u et un bruit ε . Le Signal-to-Noise Ratio (SNR), est défini par :

$$SNR = \frac{\|u\|_{L^2}}{\|\varepsilon\|_{L^2}}. \quad (2.59)$$

Le bruit ajouté sur les champs suit une loi uniforme

$$\tilde{u}(x_n, y_m) = u(x_n, y_m) + \varepsilon_{n,m}, \quad (2.60)$$

avec $\varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{U}(-a, a)$, et a choisi tel que $SNR = \frac{\|u\|_{L^2}}{\|\varepsilon\|_{L^2}} = 20$.

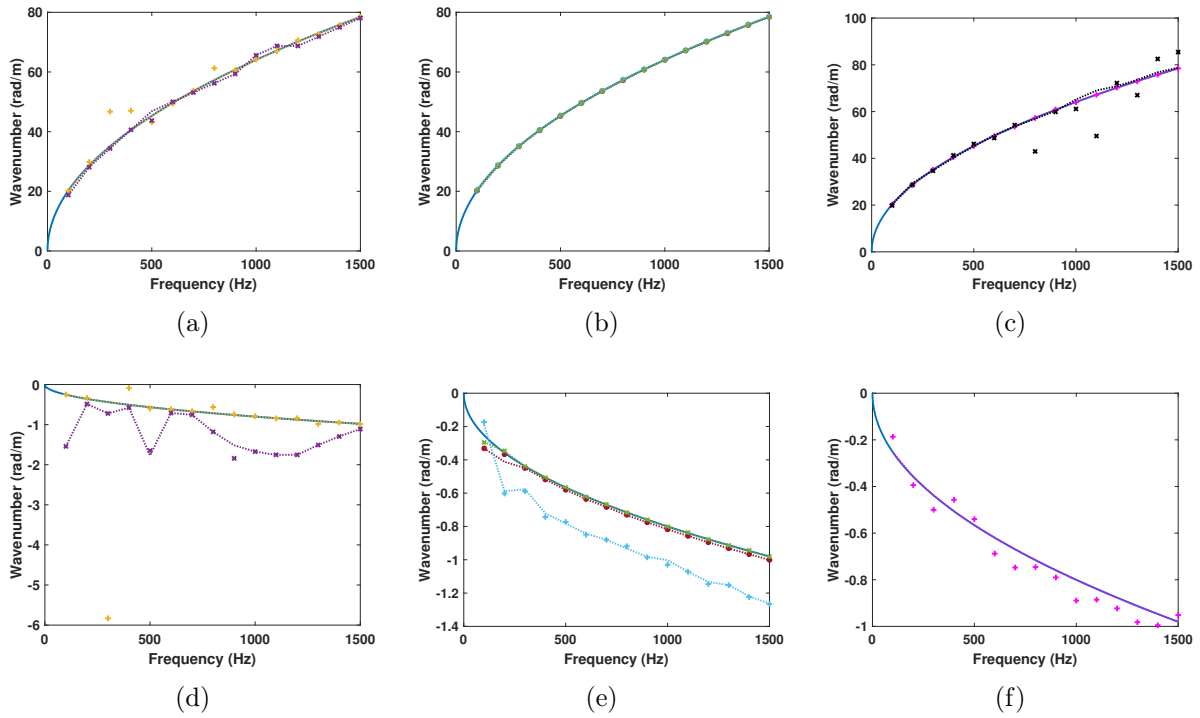


FIGURE 2.20 – Relations de dispersion mesurées sur une plaque finie avec et sans bruit ($SNR = 5$), calculées dans la direction $\theta = 0$ rad. Les nombres d’ondes identifiés à partir des champs parfaits sont en pointillé et ceux avec les champs bruités sont affichés avec des marqueurs. Valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (d) partie imaginaire calculées par l’INCOME (+) et l’IWC (×). (b) partie réelle et (e) partie imaginaire calculées par l’EIWC (•), l’IWC Green isotrope (×) et la GFC modifiée (+). (c) partie réelle et (f) partie imaginaire calculées par la GFC (+) et l’AKSI (×).

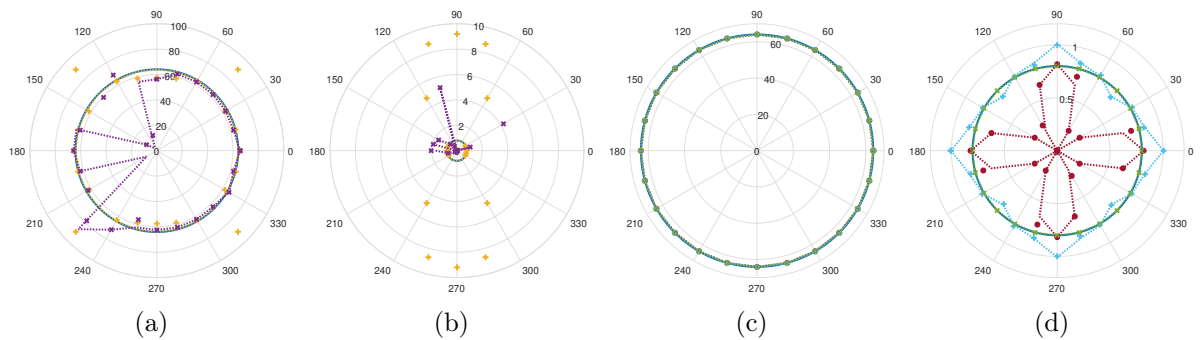


FIGURE 2.21 – k-spaces mesurés sur une plaque finie, avec et sans bruit ($SNR = 5$), à fréquence 1000 Hz. Les nombres d’ondes identifiés à partir des champs parfaits sont en pointillé et ceux avec les champs bruités sont affichés avec des marqueurs. Valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (b) partie imaginaire du k-space calculé par l’INCOME (+) et l’IWC (×). (c) partie réelle et (d) partie imaginaire du k-space calculé par l’EIWC (•), l’IWC Green isotrope (×) et la GFC modifiée (+).

Figs.2.20 et 2.21 comparent les relations de dispersion et k-spaces à 1000 Hz en conditions idéales et avec du bruit rajouté. Les nombres d’onde calculés à partir des champs parfaits sont en lignes pointillées tandis que ceux estimés avec la même méthode à partir des champs

bruités sont affichés avec des marqueurs de la même couleur. Ces figures montrent que le bruit a surtout un impact sur l'INCOME et les méthodes 1D, en particulier l'AKSI même réelle. L'IWC et ses variations, sauf la GFC qui est basée sur des mesures 1D, présentent une grande résistance aux bruits ajoutés.

Pour continuer cette étude, plusieurs valeurs de SNR sont testées, et pour chaque valeur de SNR, plusieurs tirages de distribution du bruit sont considérés. Pour chaque valeur de SNR et chaque tirage, le k-space est estimé, dans 12 directions, par chaque méthode et un écart relatif au k-space analytique est calculé. Cet écart est défini comme la moyenne sur les directions θ du plan de l'écart relatif entre les nombres d'onde analytique et les nombres d'ondes calculés par les différentes techniques k-spaces. Un écart est défini pour les parties réelles et un écart pour les parties imaginaires Eqn. (2.61).

$$Ecart_{reel} = \frac{1}{N_\theta} \sum_{n=1}^{N_\theta} \frac{|\Re(k_{analytique}(\theta_n)) - \Re(k_{mesure}(\theta_n))|}{|\Re(k_{analytique}(\theta_n))|},$$

$$Ecart_{imag} = \frac{1}{N_\theta} \sum_{n=1}^{N_\theta} \frac{|\Im(k_{analytique}(\theta_n)) - \Im(k_{mesure}(\theta_n))|}{|\Im(k_{analytique}(\theta_n))|}.$$
(2.61)

La moyenne est faite sur des angles entre $-\frac{\pi}{2}$ rad et $\frac{\pi}{2}$ rad de manière à ne pas désavantager l'IWC.

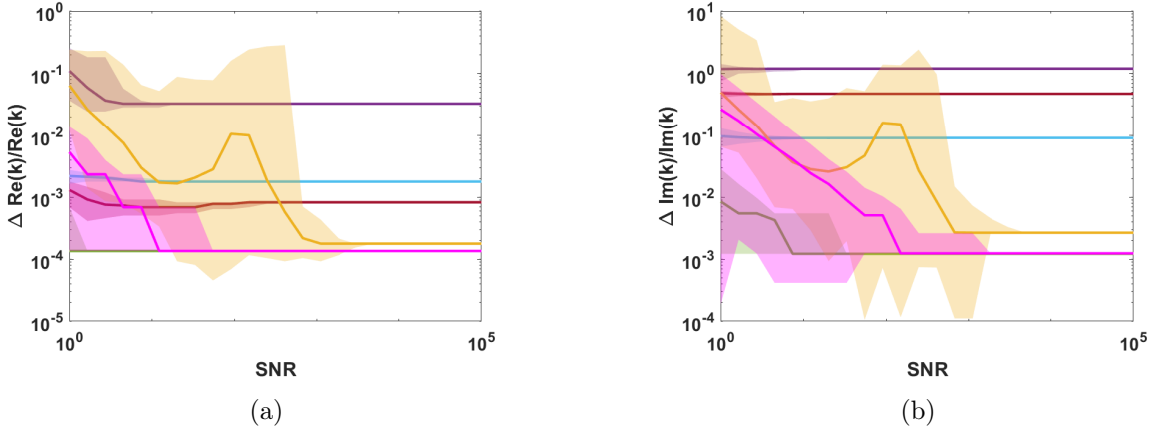


FIGURE 2.22 – Erreur relative d'identification des k-spaces en fonction du SNR. Comparaison entre l'IWC (—), l'INCOME (—), l'EIWC (—), l'IWC Green isotrope (—), la GFC modifiée (—), et la GFC (—) : (a) parties réelles, (b) parties imaginaires. Les aires sont colorées entre la plus haute et la plus basse valeur d'erreur relative pour chaque SNR. La ligne pleine est la médiane des erreurs relatives à chaque SNR.

Plusieurs observations peuvent être faites à partir de la Fig. 2.22. Tout d'abord, l'INCOME, en jaune sur la figure, est de loin la méthode la plus sensible au bruit. Pour être sûr que l'estimation du k-space soit fiable, il est nécessaire que le SNR soit supérieur à 10^3 , en particulier pour la partie imaginaire. À l'inverse, les méthodes basées sur l'IWC sont beaucoup plus ré-

sistantes, et ne sont impactées par le bruit que lorsque le SNR se rapproche de 1. Et encore, l'erreur relative reste alors proche de l'erreur sans bruit. La GFC, en rose sur la figure, fait cependant exception, cette approche est un peu plus sensible à la présence du bruit que les autres méthodes basées sur l'IWC, probablement à cause de l'échantillonnage monodimensionnel.

2.4 Méthodes k-spaces pour des structures orthotropes

Jusqu'à présent, les méthodes k-spaces n'ont été testées que sur des champs de déplacement isotropes, cependant, l'intérêt d'un k-space est de présenter les nombres d'onde en fonction de la direction de propagation, lorsque la structure étudiée est anisotrope. C'est pourquoi, dans cette sous-section, les champs isotropes sont remplacés par des champs orthotropes. Le premier exemple s'inspire des cas tests isotropes présentés précédemment, une orthotropie elliptique est ajoutée en modifiant les valeurs des raideurs des résolutions analytiques de Eqn. (2.47). Ensuite un exemple de métastucture périodique, une paroi bi-raïdie est étudié. Cette structure donne un autre exemple d'orthotropie et permet d'étudier l'effet d'un champ de déplacement issu d'une structure hétérogène sur les méthodes k-spaces.

2.4.1 Orthotropie elliptique

Tout d'abord, des champs présentant une orthotropie sont calculés par décomposition en séries de Fourier. En se basant sur le formalisme de Eqn. (2.47), et en conservant les mêmes valeurs pour D et Λ que précédemment, le cas suivant d'orthotropie elliptique est considéré : $D_x = D$, $D_y = 2D$ et $D_{xy} = \sqrt{D_x D_y}$. Les champs de déplacement tests à 500 Hz sont représentés Fig. 2.23.

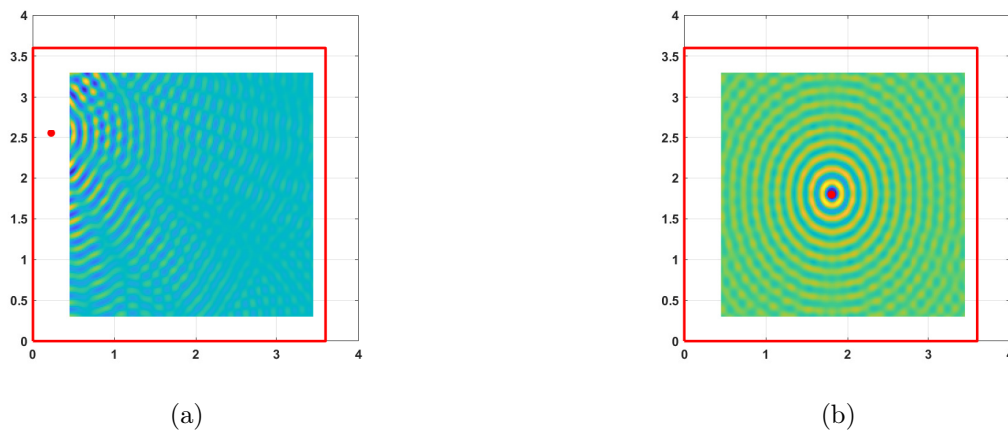


FIGURE 2.23 – Champs de déplacement pour une plaque en aluminium en domaine borné à 500 Hz, position du chargement ponctuel (●), (a) point source hors de la fenêtre et (b) point source au centre.

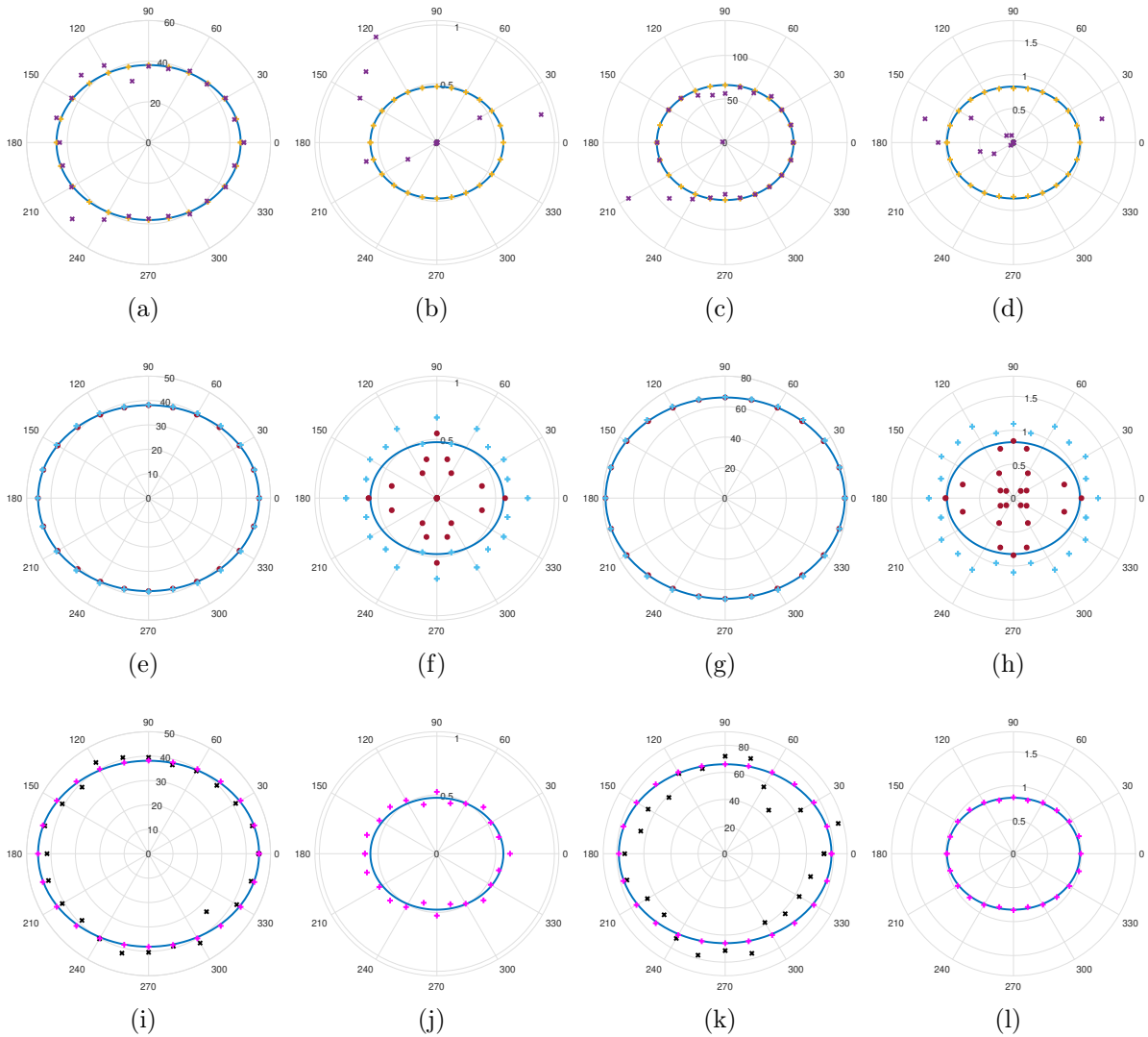


FIGURE 2.24 – k-spaces mesurés sur une plaque finie suivant un comportement orthotropique elliptique, calculés à deux fréquences : 500 Hz et 1500 Hz. Valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (b) partie imaginaire du k-space à 500 Hz, (c) partie réelle et (d) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×) avec un point source hors du domaine observé. (e) partie réelle et (f) partie imaginaire du k-space à 500 Hz, (g) partie réelle et (h) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par l'EIWC (•) et la GFC modifiée (+) avec un point source dans le domaine observé. (i) partie réelle et (j) partie imaginaire du k-space à 100 Hz, (k) partie réelle et (l) partie imaginaire du k-space à 1500 Hz calculées par la GFC (+) et l'AKSI (×).

Sur cet exemple d'orthotropie simple, les k-spaces complexes ont été calculés aux fréquences 500 Hz et 1500 Hz et présenté Fig. 2.24. L'IWC et l'INCOME ont été testées lorsque la source est hors de la fenêtre, Fig. 2.23a et l'EIWC et la GFC modifiée lorsque la source est au centre Fig. 2.23b. Toutes les méthodes sont capables d'estimer les k-spaces réels dans cet exemple orthotrope. L'INCOME reste la plus efficace pour le k-space imaginaire suivie de très près par la GFC. À l'inverse, l'IWC et l'AKSI ne permettent pas de la calculer précisément. L'EIWC estime assez bien les parties imaginaires dans les directions $0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$ rad mais mal dans les autres

directions. La GFC modifiée est un peu meilleure, mais a tendance à surestimer les parties imaginaires.

2.4.2 Modèle numérique d'une paroi bi-raïdie

Une plaque bi-raïdie est une structure périodique, illustrée Fig. 2.25. Elle est composée d'une plaque sur laquelle deux rangées perpendiculaires de raidisseurs ont été ajoutées. Comme la grille des raidisseurs est censée être plus rigide que les plaques placées entre eux, la dynamique des raidisseurs est dominante dans la structure. C'est pourquoi cette métastructure présente une dynamique multi-échelle. Il existe un modèle homogénéisé de ce type de structure, présenté juste après. Ainsi cette structure permet de s'intéresser à un autre exemple d'orthotropie en considérant le modèle homogénéisé. Puis de comparer les performances des méthodes k-spaces sur une structure hétérogène, en étudiant le modèle complet.

2.4.2.1 Présentation du modèle homogénéisé

[Boutin 2020] fournit un modèle analytique du comportement en flexion de ce type de structure qui servira de référence. Il s'agit d'un modèle de plaque orthotrope équivalente obtenu à partir d'un processus d'homogénéisation asymptotique.

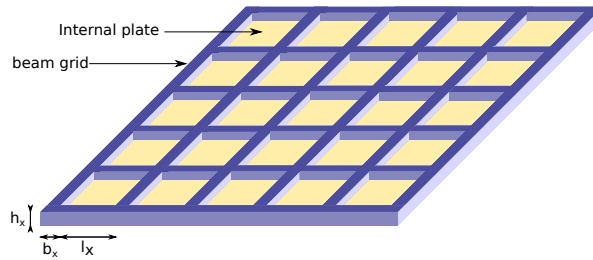


FIGURE 2.25 – Exemple d'une paroi raidie dans les directions x et y de 5 par 5 cellules.

Ce modèle est une équation aux dérivées partielles d'ordre 4 provenant de l'enrichissement d'une plaque orthotrope équivalente à une grille de poutres, car les raidisseurs sont dominants par rapport aux plaques dans la dynamique globale.

Soit h_j et b_j respectivement la hauteur et la largeur des raidisseurs de la direction j . j étant x ou y . l_j est la longueur de contact des raidisseurs avec une plaque interne. En ce qui concerne les propriétés mécaniques des raidisseurs : E_j , ν_j et ρ_j sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique. De plus un ratio d'amortissement $\eta = 0.05$ est ajouté au modules de Young sous la forme d'une partie imaginaire, $\tilde{E}_j = E_j (1 + i\eta)$. À partir de ces paramètres, certaines quantités importantes peuvent être déduites : l'inertie de flexion $I_j = \frac{b_j h_j^3}{12}$, le module de torsion $G_j = \frac{\tilde{E}_j}{2(1 + \nu_j)}$, l'inertie de torsion $\mathcal{I}_j = \frac{b_j}{2} \left(\frac{h_j}{2} \right)^3 \left(\frac{16}{3} - 3.36 \frac{h_j}{b_j} \left(1 - \frac{h_j^4}{12b_j^4} \right) \right)$, la masse linéique $\Lambda_j = \rho_j b_j h_j$ et la constante de torsion $\rho_j J_j = \rho_j h_j b_j \frac{b_j^2 + h_j^2}{12}$. L'inertie de torsion d'une poutre de section rectangulaire pro-

vient de [Young 2012]. En plus de ces paramètres, les propriétés des plaques internes doivent être définies. Toutes les plaques ont les mêmes propriétés et sont fixées à la grille de poutres. l_x , l_y sont les longueurs des côtés et d est l'épaisseur. E_p est le module de Young, ν_p le coefficient de Poisson et ρ_p la masse volumique. À partir de ces paramètres, les grandeurs suivantes sont déduites : la masse surfacique $\Lambda'_p = \rho_p d$, l'inertie de flexion $I_p = \frac{d^3}{12}$ module de Young modifié $E'_p = \frac{E_p(1+i\eta)}{1-\nu_p^2}$.

Avec ces paramètres, l'équation du modèle d'une plaque orthotrope équivalente à une plaque bi-raïdie proposée est Eqn. (2.62).

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_x I_x}{l_y} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tilde{E}_y I_y}{l_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ + \left(K_{\omega_x}^{bc} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{\omega_y}^{bc} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right) u. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Les différents termes de cette équation peuvent être interprétés. Des termes de rigidité en flexion des raidisseurs dans les deux directions $\frac{\tilde{E}_x I_x}{l_y} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ et $\frac{\tilde{E}_y I_y}{l_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$, un terme de rigidité en torsion $\left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, un terme d'inertie de rotation $\omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$. De plus il y a un terme de couple non conventionnel $\left(K_{\omega_x}^{bc} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{\omega_y}^{bc} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ mais celui-ci n'apparaît pas, car les plaques sont fixées sur la grille de la poutre. Enfin, il y a un terme d'inertie $\omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right) u$. Ce dernier terme ajoute à la masse de la grille de poutre un terme de masse ajoutée $\Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle$ qui prend en compte l'effet de la dynamique des plaques internes. Le terme non conventionnel $\langle \phi_\omega^{bc} \rangle$ est la moyenne du déplacement hors du plan sur une plaque interne avec un déplacement unitaire à ses bords. Il s'agit d'un terme dépendant de la fréquence et qui varie selon les conditions aux limites des plaques internes.

Dans le cas de plaques carrées ($l_x = l_y = l$) encastrées à tous leurs côtés, il n'existe pas de formule analytique. C'est pourquoi la plaque carrée est approximée par une plaque circulaire de rayon r à déterminer. Avec cette approximation :

$$\langle \phi_\omega^{CCCC} \rangle = \frac{4}{\delta r} \frac{I_1(\delta r) J_1(\delta r)}{I_1(\delta r) J_0(\delta r) + I_0(\delta r) J_1(\delta r)}, \quad (2.63)$$

où $\delta^4 = \frac{\omega^2 \Lambda_p}{E'_p I_p} = (2\pi f)^2 \frac{\Lambda_p (1 - \nu_p^2)}{E_p (1 + i\eta) I_p}$, J_0 , J_1 sont les fonctions de Bessel du premier type, I_0 , I_1 sont les fonctions de Bessel modifiées du premier type et $r = 0.532 l$. À partir de l'équation Eqn. (2.62), la relation de dispersion analytique est définie en remplaçant la solution u par une

Paramètres :	h_x, h_y	b_x, b_y	E_x, E_y	ν_x, ν_y	ρ_x, ρ_y	η
Valeurs :	0.01 m	0.01 m	69 GPa	0.3	2700 kg/m ³	0.05

TABLE 2.2 – Propriétés géométriques et mécaniques de la grille de raidisseurs.

Paramètres :	l_x, l_y	d	E_p	ν_p	ρ_p
Valeurs :	0.1 m	0.001 m	3 GPa	0.3	1200 kg/m ³

TABLE 2.3 – Propriétés géométriques et mécaniques des plaques internes.

onde plane dans la direction θ , $U(x, y) = e^{ik_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta)}$:

$$\begin{aligned}
& k_\theta^4 \left(\frac{\tilde{E}_x I_x}{l_y} \cos^4 \theta + \frac{\tilde{E}_y I_y}{l_x} \sin^4 \theta + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \\
& - k_\theta^2 \omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \cos^2 \theta + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \sin^2 \theta \right) = \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Les raidisseurs sont censés être identiques dans les directions x et y et sont fabriqués en aluminium et les plaques sont en plexiglas. De plus, un amortissement de $\eta = 5\%$ est ajouté dans la partie imaginaire des modules de Young. Table. 2.2 reprend les propriétés des raidisseurs et Table. 2.3 celles des plaques internes.

2.4.2.2 Champs de déplacement issus de la résolution du modèle homogénéisé

Une structure de 20 par 20 cellules est considérée, avec une longueur totale de $L = 2.21$ m. Les extrémités sont encastées et un chargement ponctuel est appliquée au centre de la structure. Les champs de déplacement sont calculés en résolvant Eqn. (2.62) à l'aide d'un logiciel d'éléments finis. Les champs sont connus sur une grille de 91 par 91 points régulièrement espacés situés sur une fenêtre de côté $L_w = 1.808$ m centrée dans le domaine total. Les fréquences vont de 5 Hz à 500 Hz. Fig. 2.26 illustre les champs de déplacements, issu du modèle homogénéisé, utilisés dans cette sous-section. Il s'agit d'un exemple à plus basse fréquence que le précédent.

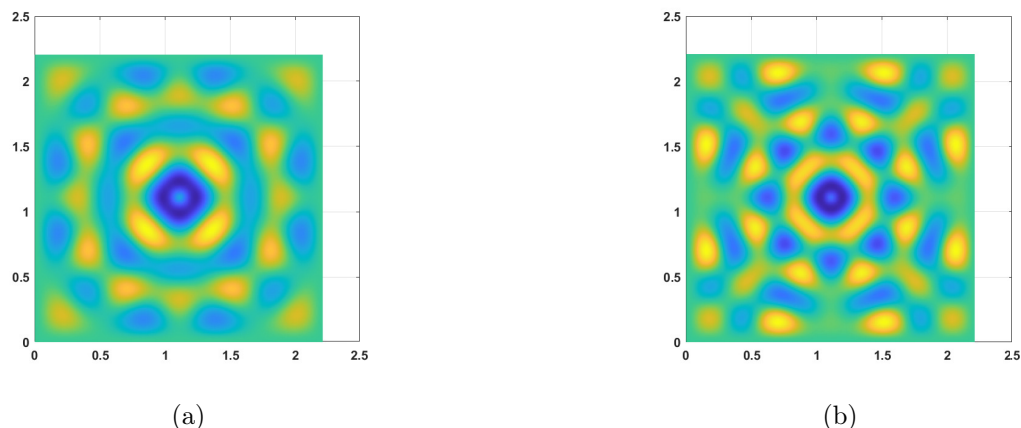


FIGURE 2.26 – Champs de déplacements calculés numériquement par éléments finis pour le modèle de paroi bi-raïdie homogénéisé à trois fréquences : (a) 250 Hz et (b) 450 Hz.

Ces champs sont utilisés pour tester les différentes techniques k-spaces et comparer les résultats au modèle analytique.

L'INCOME et l'IWC n'ont été appliquées qu'à une portion du domaine de manière à éviter les effets liés à la singularité produite par le point source.

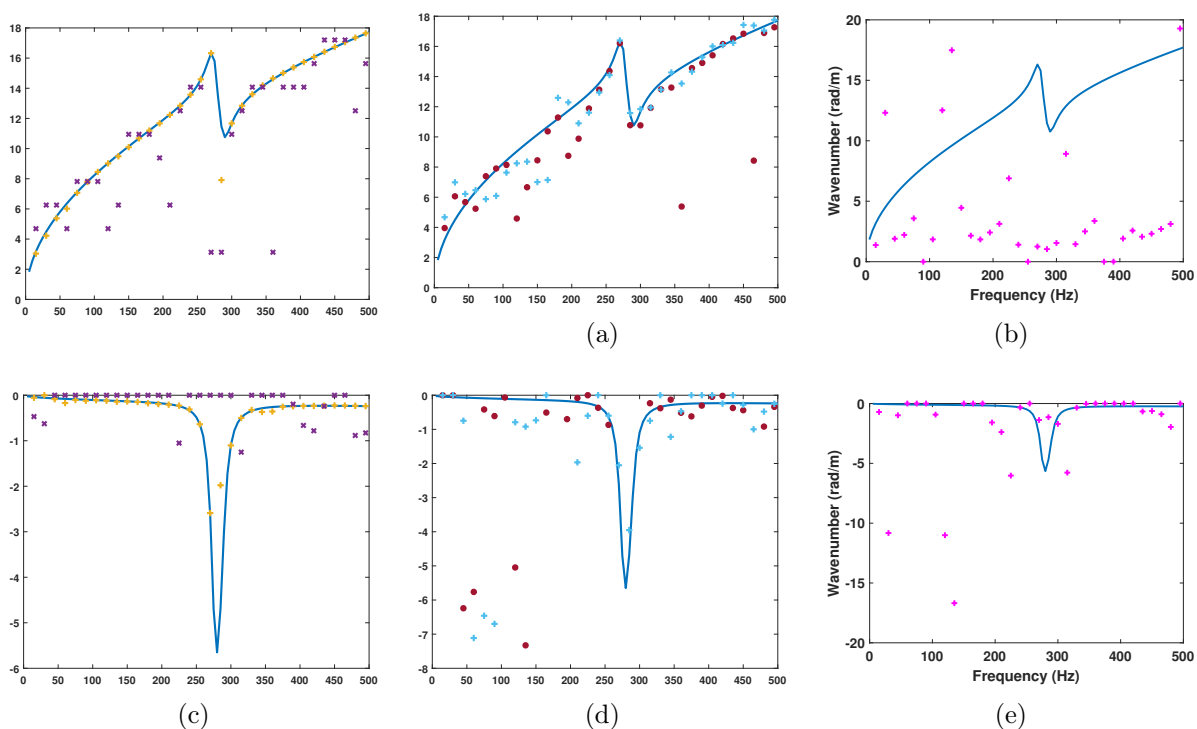


FIGURE 2.27 – Relations de dispersion mesurées sur le modèle homogénéisé de paroi raidie, calculées dans la direction $\theta = 0$ rad. Valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (d) partie imaginaire calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×). (b) partie réelle et (e) partie imaginaire calculées par l'EIWC (•) et la GFC modifiée (+). (c) partie réelle et (f) partie imaginaire calculées par la GFC (+) et l'AKSI (×).

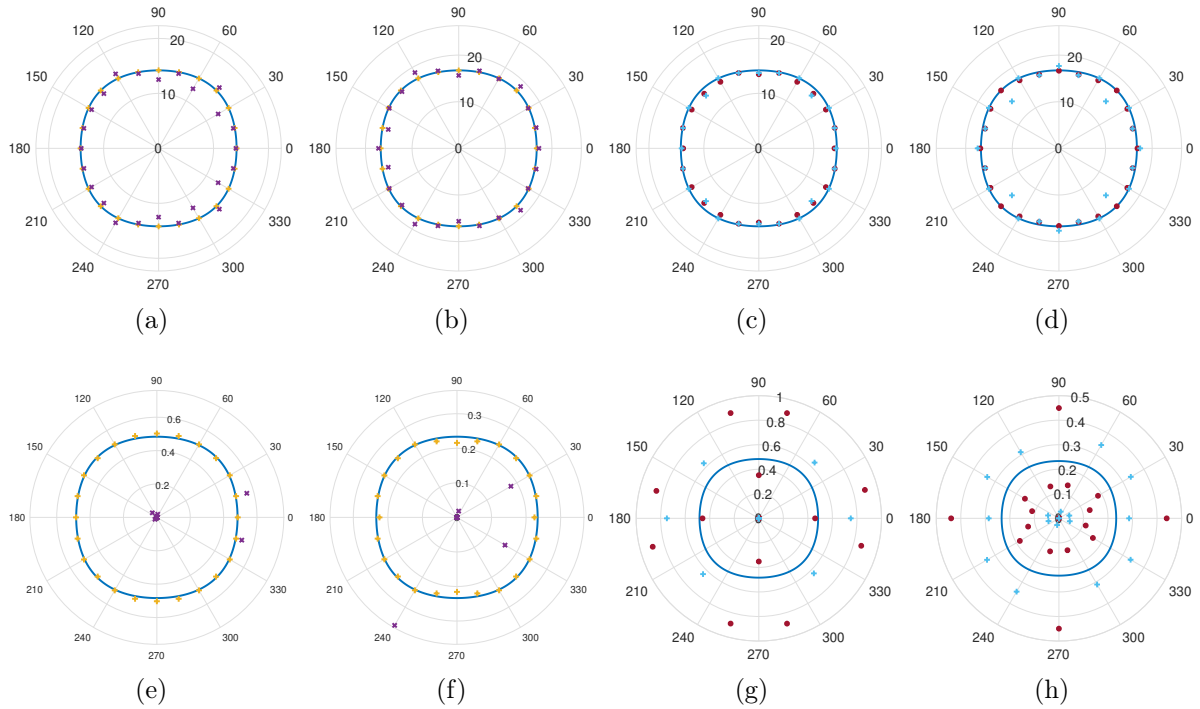


FIGURE 2.28 – k-spaces complexes mesurés sur le modèle homogénéisé de paroi bi-raïdée, calculés à deux fréquences : 250 Hz et 450 Hz. Valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (e) partie imaginaire du k-space à 50 Hz, (b) partie réelle et (f) partie imaginaire du k-space à 450 Hz calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×). (c) partie réelle et (g) partie imaginaire du k-space à 250 Hz, (d) partie réelle et (h) partie imaginaire du k-space à 450 Hz calculées par l'EIWC (•) et la GFC modifiée (+).

Fig. 2.27 et 2.28 montrent que les différentes méthodes k-spaces n'ont pas la même efficacité. Tout d'abord, la GFC ne donne pas de résultats satisfaisants, probablement à cause d'une taille de domaine trop petite par rapport à la longueur d'onde ainsi que de l'effet des réflexions aux bords. Ensuite, l'IWC estime à peu près la partie réelle, mais pas du tout la partie imaginaire. Les techniques EIWC et GFC modifiée estiment bien les parties réelles. Les parties imaginaires calculées par l'EIWC semblent moins bonnes que celles calculées par l'autre méthode, mais la qualité des valeurs calculées est très dépendante de la direction, et les deux méthodes semblent limitées aux plus basses fréquences. De plus, la GFC modifiée arrive à identifier l'effet des résonances internes, près de 275 Hz, sur les parties imaginaires dans la direction $\theta = 0$ rad, à l'inverse de l'EIWC. Enfin, l'INCOME est parfaitement adaptée pour calculer les k-spaces complexes sur cet exemple et dans cette bande de fréquences.

2.4.2.3 Champs de déplacement issus de la résolution du modèle hétérogène

Les méthodes ont montré leurs efficacités respectives pour le calcul des k-spaces à partir de champs de déplacement issus de la résolution numérique du modèle homogénéisé. Maintenant, celles-ci sont testées sur des champs de déplacement issus de la résolution éléments finis du modèle hétérogène, faisant apparaître les raidisseurs et les plaques internes. Une paroi bi-raïdée avec les mêmes dimensions, 20 par 20 cellules, est considérée. Fig. 2.29 illustre les champs obtenus aux deux mêmes fréquences que pour le modèle homogénéisé Fig. 2.26.

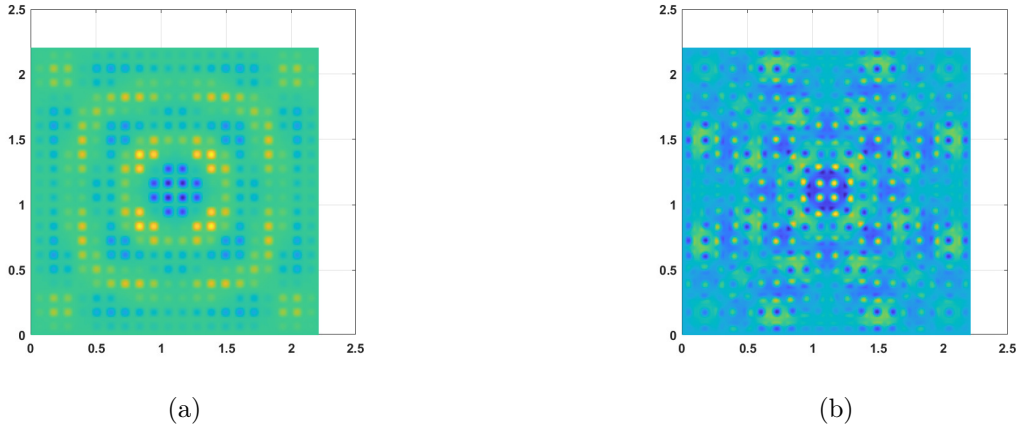


FIGURE 2.29 – Champs de déplacements calculés numériquement par éléments finis pour le modèle de paroi bi-raïdie hétérogène à trois fréquences : (a) 250 Hz et (b) 450 Hz.

De la même manière que pour le modèle homogénéisé, une grille de 91 par 91 points régulièrement espacés situés sur une fenêtre de côté $L_w = 1.808$ m centrée dans le domaine total est considérée. Les fréquences vont de 5 Hz à 500 Hz. Pour ce cas hétérogène, il est nécessaire de prendre en compte la périodicité de la structure dans la mise en place de l'INCOME.

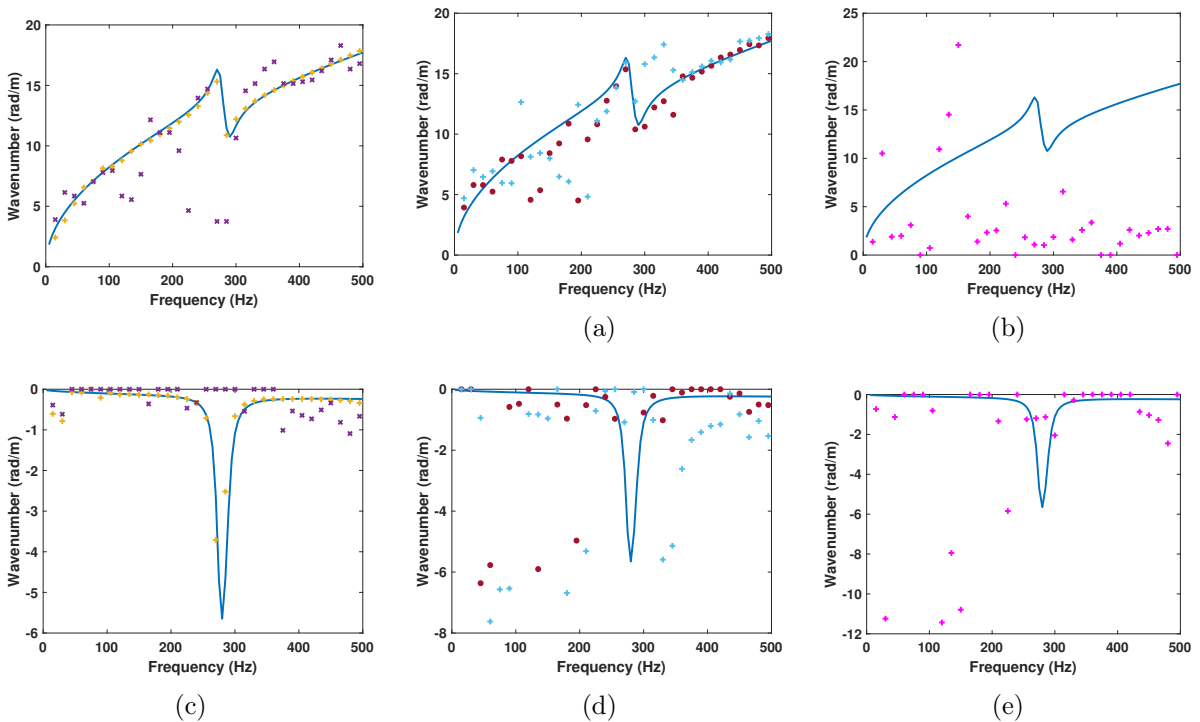


FIGURE 2.30 – Relations de dispersion mesurées sur la paroi raidie, calculées dans la direction $\theta = 0$ rad. Valeurs analytiques (—), (a) partie réelle et (d) partie imaginaire calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (×). (b) partie réelle et (e) partie imaginaire calculées par l'EIWC (•) et la GFC modifiée (+). (c) partie réelle et (f) partie imaginaire calculées par la GFC (+) et l'AKSI (×).

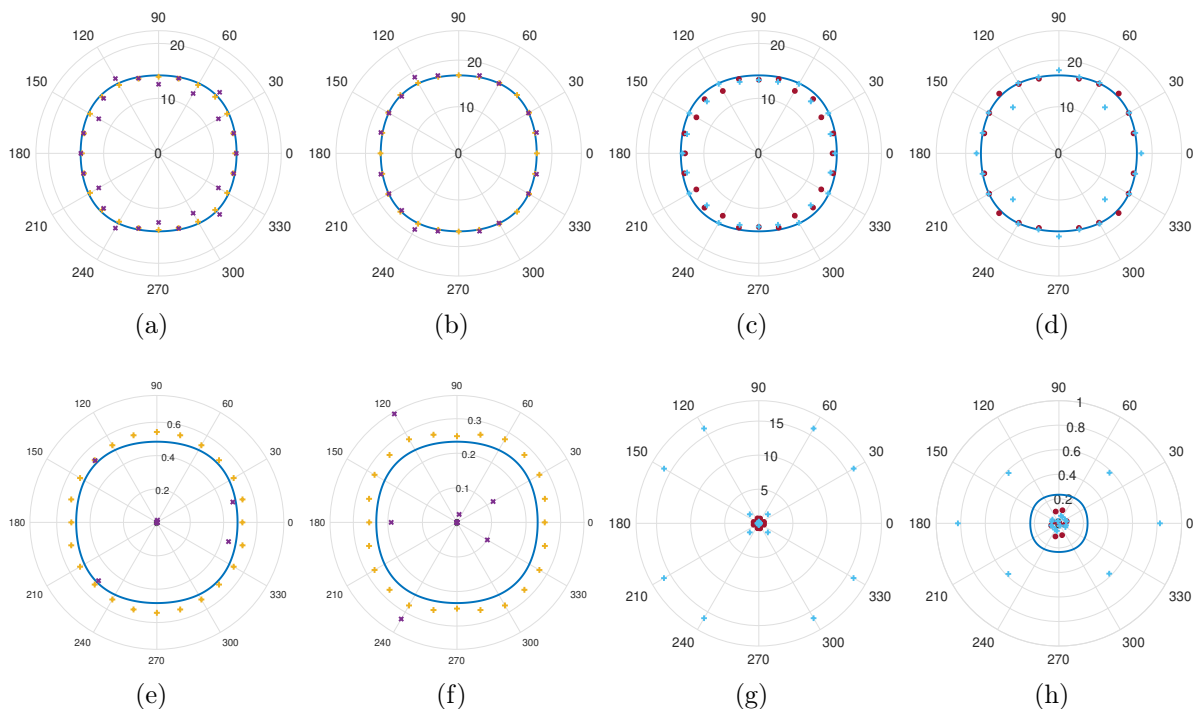


FIGURE 2.31 – k -spaces complexes mesurés sur la paroi bi-raïdie, calculés à deux fréquences : 250 Hz et 450 Hz. Valeurs analytiques ($-$), (a) partie réelle et (e) partie imaginaire du k -space à 50 Hz, (b) partie réelle et (f) partie imaginaire du k -space à 450 Hz calculées par l'INCOME (+) et l'IWC (\times). (c) partie réelle et (g) partie imaginaire du k -space à 250 Hz, (d) partie réelle et (h) partie imaginaire du k -space à 450 Hz calculées par l'EIWC (\bullet) et la GFC modifiée ($+$).

Il apparaît Figs. 2.30 et 2.31, et par comparaison, avec le cas homogénéisé, que les k -spaces complexes sont plus difficiles à estimer lorsque la structure est hétérogène. Seul l'INCOME permet de les extraire précisément pour la plupart des fréquences. Aucune des autres techniques n'est en capacité à estimer les k -spaces imaginaires. l'EIWC et la GFC modifiée donnent des k -spaces réels satisfaisants, ceux calculés par l'IWC sont très chahutés. Et comme dans le cas homogène, la GFC n'est pas adaptée à ce cas test.

2.5 Conclusion intermédiaire

Ce chapitre a permis de comparer les différentes méthodes k -spaces sur une batterie de cas, ce qui a permis de tester leurs avantages et limitations respectifs.

En résumé, l'IWC, une méthode classique basée sur la transformée de Fourier, permet de mesurer les k -spaces réels, mais rencontre des difficultés pour les parties imaginaires et à basse fréquence. Cependant, cette méthode présente une bonne résistance aux bruits sur les champs et ne nécessite pas d'hypothèse a priori sur le champ ou le chargement appliqué. Plusieurs améliorations de l'IWC ont été proposées pour tenter de pallier certaines de ses limites. La première, l'EIWC prend en compte la position du point source. Par conséquent, les cas étudiables se limitent à des structures excitées uniquement par un point source dont la position est connue précisément. En contrepartie, cette variante améliore la précision des

résultats, en particulier des parties imaginaires des k-spaces. Les prochaines variations de l'IWC remplacent l'onde inhomogène par une fonction de Green pour mieux prendre en compte la décroissance spatiale de l'amplitude du champ. Tout d'abord, l'IWC basée sur les fonctions de Green pour plaques isotropes améliore grandement la précision des k-spaces complexes mesurés tout en conservant les propriétés de robustesses aux bruits. Cependant, comme son nom l'indique, cette technique est limitée aux cas isotrope uniquement. Par ailleurs, bien qu'idéale lorsque la structure étudiée est infinie ou très grande, elle est affectée négativement par la présence des réflexions et de la complexification du champ provoquées par la présence des bords du domaine. Pour tenter de conserver les avantages de la méthode précédente tout en ayant la possibilité d'étudier des cas anisotrope, la GFC a été développée. À la différence des autres différentes variantes de l'IWC, cette approche nécessite une discrétisation particulière, en ligne provenant du point d'excitation. Ce type de discrétisation permet d'étudier l'effet de la direction, mais en revanche, rend la méthode plus sensible aux bruits et à la présence des bords que les autres IWC.

La dernière méthode issue de l'IWC, la GFC modifiée, basée sur les fonctions de Green appliquée à des cas anisotropes, tente de combiner les idées et avantages de l'EIWC, l'IWC avec fonction de Green et la GFC. Elle améliore légèrement le calcul des k-spaces imaginaires par rapport à l'EIWC, conserve la possibilité d'utiliser une discrétisation plus quelconque que la GFC et permet d'étudier des structures anisotropes à l'inverse de l'IWC par fonction de Green isotrope.

En comparaisons avec les méthodes précédentes, l'INCOME, basée sur l'approche de Prony, est une méthode calculant les k-spaces complexes avec beaucoup plus de précision, même pour des structures orthotropes hétérogènes. Elle est bien plus efficace à basse fréquence, et a une marge un peu plus large en termes de discrétisation pour les hautes fréquences. De plus, il s'agit d'une méthode efficace ayant de loin le temps de calcul le plus faible des méthodes se basant sur une discrétisation du champ total. En contrepartie de ses nombreux avantages, elle nécessite une grille 2D périodique respectant la périodicité de la structure, et c'est une technique bien plus sensible au bruit que les autres.

Enfin l'AKSI, basée sur l'identification algébrique, est à mettre en parallèle avec la GFC, leurs discrétisations étant similaires. Cette méthode est capable d'identifier la partie réelle des k-spaces mais est limitée en ce qui concerne la partie imaginaire.

La méthode idéale dépend de la situation et du problème étudié. En croisant les performances de toutes ces méthodes k-spaces, il apparaît qu'il n'y a pas d'approche permettant d'estimer les k-spaces complexes à basse fréquence en présence de bruit ou d'incertitudes. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

Méthodes :	INCOME	IWC	EIWC	IWC Green isotrope	GFC modifiée	GFC	AKSI
Limitation de l'échantillonnage :	Grille 2D périodique	Non	Non	Non	Non	1D partant du point source	1D partant du point source
Anisotropie :	Oui	Oui	Oui	Non	Oui	Oui	Oui
Point source obligatoire :	Non	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Hypothèse sur la complexité du champ :	Oui	Non	Non	Non	Non	Non	Oui
Partie imaginaire :	Bonne	Mauvaise	Moyenne	Bonne	Moyenne	Moyenne	Mauvaise
Robustesse au bruit et incertitudes :	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non
Basses fréquences :	Oui	Non	Non	Non	Non	Non	Oui
Effet des réflexions aux bords :	Positif	Positif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif	Négatif
Temps de calcul :	Court	Long	Long	Long	Long	Court	Court

TABLE 2.4 – Résumé des propriétés et performances des méthodes k-spaces.

Développement d'une méthode k-space : Algebraic K-Space Identification 2D

Une méthode inverse robuste pour l'extraction de l'espace des nombres d'onde complexes (k-space complexe) est essentielle pour l'analyse du comportement vibratoire et de l'amortissement des structures bidimensionnelles. La plupart des méthodes existantes ne sont pas suffisantes pour extraire les k-spaces complexes de manière fiable, pour des plaques en présence d'incertitudes, en particulier lorsque les propriétés d'amortissement des plaques sont faibles. Dans cette optique, ce chapitre présente une nouvelle méthode d'extraction des caractéristiques de dispersion et d'amortissement des structures périodiques bidimensionnelles en se basant sur la connaissance des champs de déplacement. La méthode proposée, la technique Algebraic K-Space Identification 2D (AKSI 2D), est une extension de la technique Algebraic Wavenumber Identification pour résoudre les problèmes bidimensionnels. Les formules optimisées ont été développées basées sur l'identification algébrique, ce qui permet d'extraire simultanément toutes les propriétés des k-spaces complexes. La méthode proposée est validée numériquement et expérimentalement, et ses performances sont comparées à d'autres méthodes populaires d'identification de k-space dans différentes conditions d'incertitude. Les cas d'études comprennent des champs isotropes résolus analytiquement, des champs orthotropes résolus numériquement et, enfin, des mesures expérimentales. Les résultats prometteurs démontrent que la méthode proposée est un outil robuste pour caractériser la propagation des ondes des structures bidimensionnelles dans des conditions stochastiques.

Une grande partie du travail présenté dans ce chapitre fait l'objet d'un article en cours de révision.

Contents

3.1	Introduction	88
3.2	Algebraic Wavenumber Identification technique	91
3.2.1	Formules de l'AWI	92
3.2.2	Relations de dispersion calculées par l'AWI	93
3.3	Algebraic K-Space Identification 2D	95
3.3.1	Présentation des formules	96
3.3.2	Démonstration des formules	96
3.3.3	Implémentation numérique	101
3.3.4	Cas particuliers	103
3.4	Validations de la méthode	105

3.4.1	Validation sur des champs de déplacement analytiques	106
3.4.2	Modèle numérique d'une paroi bi-raïdie	120
3.4.3	Validation expérimentale	126
3.5	Conclusion intermédiaire	133

3.1 Introduction

Avec les développements rapides dans le domaine des métastructures et des structures composites vient une demande croissante d'approches fiables pour la caractérisation de la propagation des ondes dans ces structures complexes, et ce, même en présence d'incertitudes réalistes. L'estimation précise de la propagation des ondes peut fournir des informations importantes pour la détection de défaut [Tian 2021] ou l'identification des matériaux [Santoni 2017].

Les métastructures, et en particulier les métastructures périodiques, sont constituées de motifs spatialement périodiques d'assemblages de matériaux homogènes ou hétérogènes. Le contraste entre les matériaux et la périodicité géométrique permet d'obtenir des propriétés inhabituelles, telles que des bandes interdites pour l'atténuation des ondes [Claeys 2013]. Le nombre d'onde complexe est un paramètre important pour caractériser la propagation des ondes et le comportement dynamique des structures. Pour les structures bidimensionnelles, en particulier pour les structures anisotropes, la propagation des ondes dépend de la direction. L'ensemble des nombres d'onde pour toutes les directions du plan est appelé le k-space. La partie réelle du k-space décrit la variation spatiale de phase, tandis que la partie imaginaire du k-space est étroitement liée à la propagation de l'énergie, à l'amortissement. Les théorèmes de Floquet et de Bloch [Floquet 1883, Bloch 1928, Collet 2011] garantissent une définition des nombres d'onde et des k-spaces pour les métastructures périodiques.

Dans la littérature, il existe déjà de nombreuses méthodes inverses pour extraire les k-spaces des réponses vibratoires de structures en différentes dimensions. Une première catégorie de méthodes, non linéaires, est constituée par les approches basées sur la transformée de Fourier. En particulier, la plus classique est la transformée de Fourier elle-même [Fourier 1888, Heckbert 1995, Hambric 2018], le nombre d'onde étant l'équivalent spatial de la pulsation. Il s'agit d'une transformation intégrale qui à une fonction temporelle ou spatiale associe son équivalent dans le domaine réciproque. La transformée de Fourier rapide (FFT) est un algorithme qui permet un calcul efficace de la transformée de Fourier. Cependant, elle n'est pas adaptée pour extraire la partie imaginaire du k-space qui est un paramètre important pour traduire la propagation de l'énergie dans la structure. En outre, la transformée de Fourier serait idéale pour des domaines infinis. Mais dans la pratique, les domaines sont finis, ce qui entraîne des effets de fuite spectrale. Une solution pour réduire cet effet consiste à remplacer la fonction de fenêtrage rectangulaire par une autre, comme une fonction de fenêtrage de Hanning ou de Hamming [Chen 2010, Podder 2014]. Certaines méthodes basées sur la transformée de Fourier ont été développées pour améliorer le calcul des k-spaces. Une méthode remarquable basée sur le principe de la transformée de Fourier est la méthode Inhomogeneous Wave Correlation method (IWC), proposée par Berthaut et al. [Berthaut 2005] et largement utilisée dans une gamme variée d'applications [Ichchou 2008a, Cherif 2015]. Le principe de cette méthode est de

rechercher le nombre d'onde complexe qui maximise la fonction de corrélation entre le champ de déplacement et un champ d'onde inhomogène. Pour les structures bidimensionnelles, la fonction de corrélation de l'IWC dépend de la direction, ainsi l'extraction du k-space nécessite de répéter la méthode pour chaque direction considérée. Il s'agit d'une approche robuste au bruit sur le signal et aux perturbations de mesure. Par ailleurs [Tufano 2020b] a prouvé son efficacité sur des métastructures et sur des structures courbées. Cependant, l'IWC est une méthode non exacte qui converge avec un biais. En outre, ses performances sont limitées à basses fréquences, car un grand nombre de longueurs d'onde dans le champ de déplacement sont nécessaires pour obtenir une estimation précise. En outre, un champ d'ondes non planes réduit aussi la précision de la méthode d'extraction de la partie imaginaire du nombre d'ondes [Rak 2008]. Au cours des dernières décennies, des versions modifiées de l'IWC ont été développées afin d'améliorer ses performances, en particulier en ce qui concerne l'extraction de la partie imaginaire des k-spaces. Dans [Van Belle 2017], les auteurs proposent une modification de l'onde inhomogène paramétrée qui prend en compte la position du point de chargement. L'onde inhomogène est alors une fonction de la distance au point de chargement. La méthode améliorée est appelée la méthode Extended Inhomogeneous Wave Correlation (EIWC). [Lajili 2018, Lajili 2022] propose d'améliorer la version classique de l'IWC en ajoutant à l'onde inhomogène une onde dans la direction opposée. Cette méthode est appelée méthode Inhomogeneous Wave Correlation Variant (IWC-V). Bien que cette amélioration permette un meilleur calcul des k-spaces complexes, elle souffre toujours des mêmes limitations à basses fréquences que la méthode IWC classique. Récemment, dans ses travaux de thèse, Tufano [Tufano 2020a] remplace l'onde inhomogène dans la corrélation par une fonction de Green de l'équation de Kirchhoff-Love dans le but d'améliorer l'estimation de l'amortissement. Cette idée est combinée avec la méthode des sources d'images [Gunda 1995] par Fazil dans sa thèse [Fazail 2023a] dans le cas d'une plaque rectangulaire avec des conditions aux limites spécifiques. Avec suffisamment de sources d'images, la corrélation permet une identification presque parfaite du ratio d'amortissement, même à basse fréquence et avec un faible amortissement. Elle reste cependant limitée aux cas isotropes. Pour étendre les avantages associés aux fonctions de Green aux structures anisotropes, [Fazail 2023b] propose la Green Function Correlation (GFC) method. La corrélation se fait direction par direction, sur des parties monodimensionnelles du domaine, entre la fonction de Green et le champ. Cette dernière méthode fait preuve d'une grande précision pour l'estimation des k-spaces complexes et de l'amortissement dans des structures composites avec un amortissement modéré ou élevé. Cependant, comme la plupart des méthodes IWC, elle souffre encore aux basses fréquences. il est à noter que toutes les méthodes de corrélation basées sur la fonction de Green nécessitent une connaissance précise de la position du point de chargement.

La méthode Spatial Laplace Transform for COmplex Wavenumber (SLaTCoW) de [Geslain 2016], est une autre technique de calcul des nombre d'ondes. L'idée est de minimiser la norme L^2 de la différence, dans le domaine de Laplace, entre le signal mesuré et un champ d'ondes planes paramétré par les nombres d'ondes complexes. Cette méthode a été développée pour trouver les nombres d'ondes de champs monodimensionnels. Une extension aux champs bidimensionnels, limitée au cas des ondes se propageant dans une seule direction, a été proposée par Cebrecos et al. [Cebrecos 2019]. SLaTCoW est efficace pour l'estimation des caractéristiques de dispersion complexes dans des métastructures monodimensionnelles [Schwan 2017, Yan 2021].

Une autre catégorie de méthodes regroupe les approches basées sur la méthode de Prony

[de Prony 1795, Kumaresan 1984, Sacchini 1993, Casar-Corredera 1985]. Par rapport aux méthodes inverses basées sur la transformée de Fourier, cette catégorie de méthodes inverses présente une résolution élevée dans des conditions parfaites et de bonnes performances aux basses fréquences. Dans [Margerit 2019], la méthode High Resolution Wavevector Analysis (HRWA) a été proposée par Margerit, pour extraire les k-spaces et surfaces de dispersion de structures composites. Cependant, les performances de cette méthode sont limitées par la précision de l'estimation de l'ordre du modèle (estimation a priori de combien d'ondes sont présentes). Une méthode inverse intéressante basée sur Prony est l'INverse CONvolution MEmod (INCOME) proposée dans [Boukadia 2022] par Boukadia et al. Cette méthode permet un calcul très précis des k-spaces complexes. La méthode est basée sur la recherche d'un noyau de convolution à partir duquel les k-spaces sont déduits. Par rapport aux méthodes basées sur la transformée de Fourier, cette méthode est plus précise et peut fonctionner à plus basse fréquence. Cependant, cette approche est très sensible au bruit et aux incertitudes en raison des limitations inhérentes à la méthode de Prony. Par ailleurs, elle nécessite un échantillonnage périodique du champ en entrée. Et lorsqu'une structure périodique est étudiée, sa périodicité doit être prise en compte dans l'échantillonnage comme expliqué dans [Ribeiro 2022]. De plus, le type de structure doit être connu a priori pour choisir à l'avance le noyau de convolution.

D'autres méthodes intéressantes, autres que celles basées sur Fourier et Prony, peuvent être citées. La méthode des sources images proposée par [Gunda 1995] permet de reconstruire un champ harmonique d'une plaque rectangulaire excitée par une charge ponctuelle à l'aide d'une somme de fonctions de Hankel. Cette technique a été étendue aux plaques polygonales convexes avec des conditions aux limites arbitraires par [Cuenca 2012]. [Roozen 2017b] propose de rechercher le nombre d'ondes en ajustant le champ obtenu par la méthode des sources images au champ mesuré. Cette technique est limitée aux plaques polygonales convexes et le chargement ponctuel doit être connue avec précision, mais elle permet une identification précise du nombre d'onde. Une autre idée est proposée par [Ablitzer 2017] dans le cas d'une structure orthotrope. Les dérivées partielles du champ harmonique sont estimées par différences finies pour en déduire les directions d'orthotropie, puis les propriétés de rigidité en flexion et les nombres d'onde. Les méthodes précédentes sont basées sur des champs dans le domaine fréquentiel, mais [Morandi 2022] utilise des méthodes appliquées à des mesures temporelles pour estimer les caractéristiques de dispersion. La vitesse de phase de l'onde est estimée à partir du temps de parcours qui est calculé à partir du pic maximal, de la corrélation croisée ou du kurtosis. Par contre, les approches temporelles sont principalement réservées aux hautes fréquences.

Bien que de nombreuses méthodes inverses soient disponibles dans la littérature, l'identification des k-spaces complexes à basse fréquence ou avec des données bruitées, en particulier pour la partie imaginaire des k-spaces, reste un problème difficile. C'est encore plus problématique dans le cas bidimensionnel. Récemment, une nouvelle approche a été proposée par [Li 2023c], la technique Algebraic Wavenumber Identification (AWI) pour les structures monodimensionnelles. Cette méthode d'identification algébrique a été développée à partir de l'estimateur algébrique des paramètres pour les systèmes linéaires continus invariants dans le temps [Fliess 2000, Fliess 2008, Fliess 2003] qui a déjà été appliqué à des systèmes mécaniques vibrants [Pereira 2011, Beltrán-Carbajal 2013]. Cette méthode d'identification des nombres d'onde montre des performances très intéressantes, même dans des conditions incertaines, et a

été testée sur des poutres périodiques. Pour résoudre le problème d'extraction des k-spaces, une autre méthode a été proposée, à savoir la technique Algebraic K-Space Identification (AKSI) [LI 2024]. Cette méthode a été la première à appliquer une procédure d'identification proposée à une série de plaques. Bien que cette méthode soit capable d'extraire les k-spaces dans une certaine mesure, elle est fortement limitée, car nécessite un échantillonnage monodimensionnel particulier basé sur des lignes partant du point d'excitation. Cette méthode d'échantillonnage peut directement entraîner des difficultés dans l'extraction précise de la partie imaginaire des k-spaces, en particulier pour les plaques avec un amortissement faible. Ceci est principalement dû au fait que le champ de déplacement échantillonné ainsi manque d'informations sur les ondes provenant de chaque direction.

Pour surmonter les difficultés de la version actuelle de l'AKSI, ce chapitre étend l'AWI aux cas bidimensionnels en utilisant un champ de déplacement bidimensionnel en entrée. La nouvelle méthode proposée est notée AKSI 2D. D'un point de vue mathématique, cette méthode introduit deux variables associées aux nombres d'onde dans la formule et les extrait d'un polynôme caractéristique défini en prenant en compte les composantes de nombre d'onde k_x et k_y . Cette méthode prometteuse contribuera au développement des méthodes inverses actuelles, en tenant compte des aspects suivants :

- La méthode proposée montre son efficacité et sa robustesse pour le calcul des k-spaces complexes dans des conditions réalistes : basse fréquence, bruit dans le signal et incertitudes sur la position des points d'échantillonnage.
- La méthode proposée permet d'extraire les k-spaces complexes même pour les plaques à faible amortissement.
- La méthode proposée permet d'étendre efficacement l'AKSI et offre la possibilité de résoudre d'autres problèmes inverses en vibroacoustique tels que l'estimation des paramètres mécaniques.

Ce chapitre est structuré de la manière suivante. La section. 3.2 présente la méthode AWI, méthode de calcul des nombres d'onde pour des structures monodimensionnelles, et de laquelle l'AKSI 2D est une extension au cas bidimensionnel. Ensuite, la section. 3.3 présente les formules de la méthode AKSI 2D ainsi que les développements qui y mènent. Puis, la méthode présentée est validée section. 3.4 sur des champs de déplacement de plaques isotropes calculés analytiquement, sur des champs de déplacement calculés numériquement d'un modèle homogénéisé et d'un modèle hétérogène d'une métastructure bidimensionnelle orthotrope : une paroi bi-raïdie et enfin, sur des champs de déplacement mesurés expérimentalement sur des plaques en acier, en aluminium et composite stratifié.

3.2 Algebraic Wavenumber Identification technique

Cette première partie présente l'AWI, pour Algebraic Wavenumber Identification. Il s'agit d'une méthode de calcul des nombres d'onde complexes pour des structures monodimensionnelles proposée par Li lors de ses travaux de thèse [Li 2023c, Li 2023b, Li 2023a]. Cette approche est basée sur l'identification algébrique et permet une estimation des nombres d'onde complexes avec une bonne résistance au bruit et aux incertitudes. Les formules de l'AWI sont présentées, suivies de quelques illustrations de l'efficacité de cette méthode.

3.2.1 Formules de l'AWI

Soit U donné un champ de déplacement mesuré sur une structure monodimensionnelle avec une discrétisation $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$. Une des hypothèses principales de cette méthode est d'approximer le champ U par une superposition de n_w ondes :

$$U(x_n) = \sum_{m=1}^{n_w} A_m e^{ik_m x_n}. \quad (3.1)$$

3.2.1.1 Cas d'une seule onde

Si $n_w = 1$, lorsqu'une seule onde se propage, les formules à utiliser sont les suivantes. Pour tous les points de mesures x_n , les intégrales multiples Eqn. (3.2) sont à calculer numériquement, par exemple par méthode des trapèzes.

$$\begin{aligned} \phi(1, x_n) &= \int_0^{x_n} \int_0^{\tau_1} \tau_2 U(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1, \\ \phi(0, x_n) &= \int_0^{x_n} \int_0^{\tau_1} U(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 - \int_0^{x_n} \tau_1 U(\tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ces coefficients sont utilisés pour estimer deux valeurs, $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ telles que :

$$\gamma(1)\phi(1, x_n) - \gamma(0)\phi(0, x_n) = 0, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3.3)$$

La résolution du $\mathbf{H}_1 \mathbf{X}_1 = 0$ est faite au sens des moindres carrés en recherchant un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de $\mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_1$ et dont le nombre d'onde est déduit.

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \phi(1, x_1) & \phi(0, x_1) \\ \phi(1, x_2) & \phi(0, x_2) \\ \vdots & \vdots \\ \phi(1, x_N) & \phi(0, x_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(0) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Ainsi $\mathbf{X}_1 = \operatorname{argmin}\{x^* \mathbf{H}_1^* \mathbf{H}_1 x\}$ et le nombre d'onde est donné par $k = -i \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}$.

3.2.1.2 Cas général

Dans le cas général, avec n_w ondes superposées, l'idée de la méthode est de construire un polynôme caractéristique P Eqn. (3.5) dont les nombres d'onde sont racines.

$$P(k) = \sum_{j=0}^{n_w} \gamma(j) (ik)^{n_w-j}. \quad (3.5)$$

Le polynôme caractéristique, combiné à la transformation de Laplace de la forme du champ Eqn. (3.1) permet de construire une équation différentielle contenant les coefficients du polynôme P et dont U est solution. Ainsi, à partir du champ U et des coefficients de cette équation différentielle, il est possible de calculer les coefficients γ du polynôme P puis d'en déduire les

nombre d'onde. Le détail des démonstrations permettant de construire les formules qui vont suivre se trouve dans l'article [Li 2023c].

Pour estimer les coefficients γ du polynôme, les quantités Eqn. (3.6) sont à calculer pour tous les points x_n et pour $0 \leq j \leq n_w$.

$$\phi(j, x_n) = \sum_{r=0}^{n_w} \frac{(-1)^r (2n_w - r)! x_n^r}{(n_w - r)! r! (n_w + j - r)!} \int_0^{x_n} (x_n - \tau)^{n_w + j - r} U(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Comme pour le cas d'une seule onde, ces quantités sont utilisées pour déduire les coefficients γ tels que :

$$\sum_{j=0}^{n_w} \phi(j, x_n) \gamma(j) = 0. \quad (3.7)$$

Le calcul est réalisé au sens des moindres carrés de la même manière que dans le cas d'une seule onde. Cependant, à l'inverse du cas précédent, les nombres d'onde sont ensuite obtenus par recherche de racine du polynôme P Eqn. (3.5).

3.2.2 Relations de dispersion calculées par l'AWI

Cette méthode a déjà été utilisée pour retrouver les nombres d'onde complexes pour différents types de poutres et sous diverses conditions ambiantes. En particulier, elle a été comparée à des méthodes plus classiques telles que l'IWC et l'INCOME. Fig. 3.1 montre que dans le cas d'une poutre homogène, schématisée Fig. 3.1, avec des données non bruitées, AWI fonctionne aussi bien que les autres méthodes aussi bien pour retrouver les parties réelles qu'imaginaires des nombres d'onde.

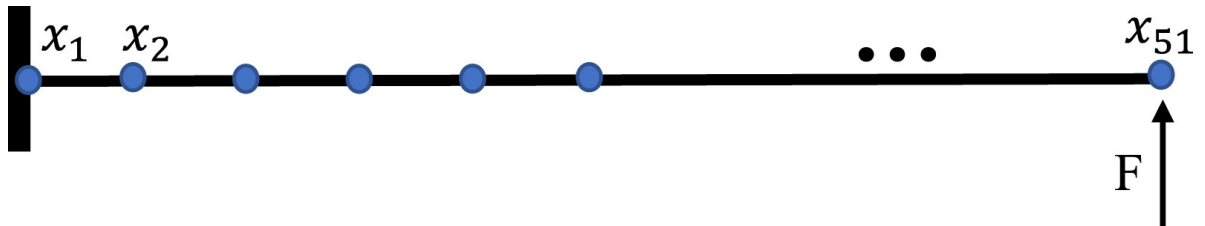


FIGURE 3.1 – Schéma de la poutre homogène utilisée dans [Li 2023c].

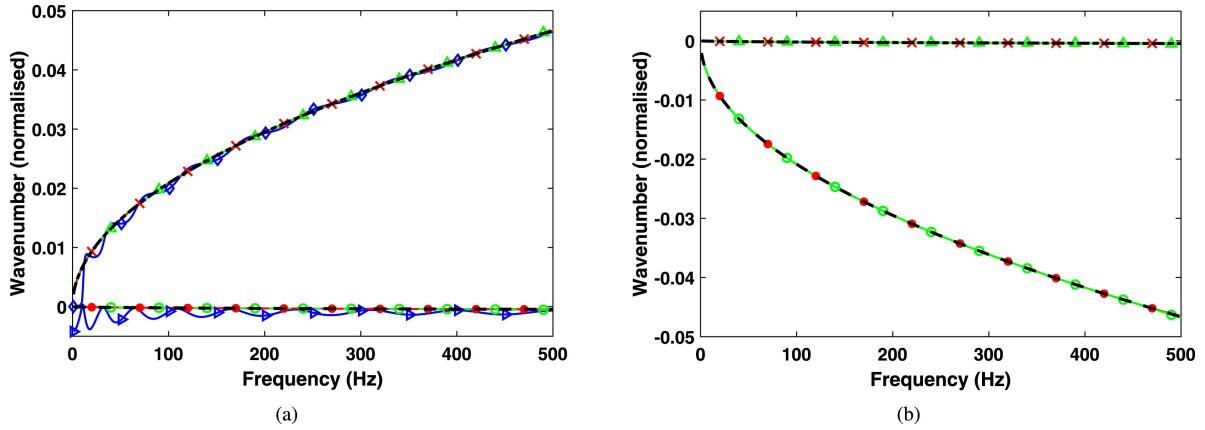


FIGURE 3.2 – (a) Comparaison des nombres d'onde propagatifs obtenus par l'IWC, l'INCOME et AWI pour une poutre homogène (b) Comparaison des nombres d'onde évanescents obtenus par l'IWC, l'INCOME et AWI pour une poutre homogène. (\diamond) parties réelles des nombres d'onde obtenus par l'IWC, (\triangleright) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par l'IWC, (\times) parties réelles des nombres d'onde obtenus par l'INCOME, (\bullet) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par l'INCOME, (\triangle) parties réelles des nombres d'onde obtenus par AWI, (\square) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par AWI, (---) parties réelles des nombres d'onde obtenus par Wave Finite Element Method (WFEM), (-.-) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par WFEM, [Li 2023c].

Ensuite Fig. 3.3 démontre une meilleure robustesse aux bruits de la part d'AWI que l'INCOME.

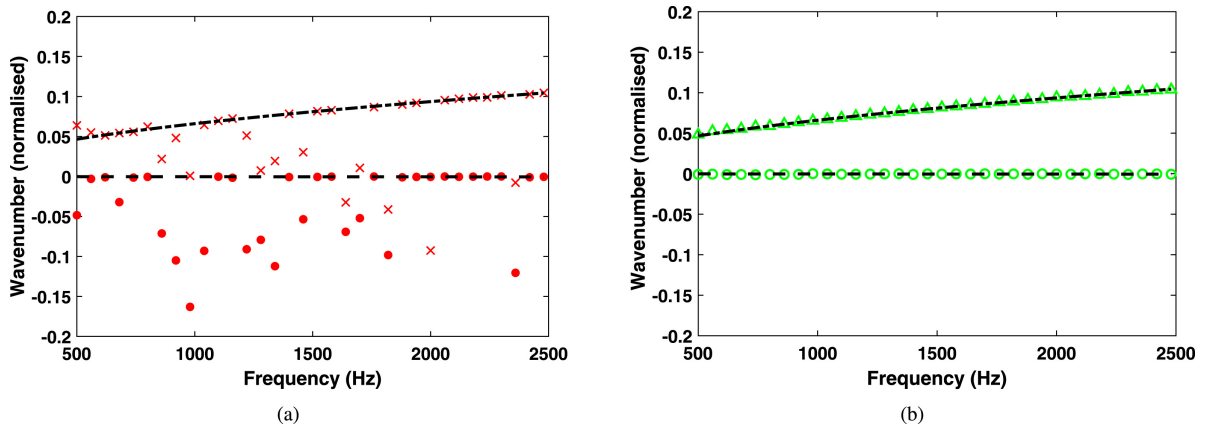


FIGURE 3.3 – Comparaison des relations de dispersion pour une poutre homogène avec bruit sur les données (SNR = 25) : (a) INCOME et WFEM, (b) AWI et WFEM. (\times) parties réelles des nombres d'onde obtenus par l'INCOME, (\bullet) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par l'INCOME, (\triangle) parties réelles des nombres d'onde obtenus par AWI, (\circ) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par AWI, (---) parties réelles des nombres d'onde obtenus WFEM, (-.-) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par WFEM, [Li 2023c].

Et enfin Fig. 3.5 démontre la capacité d'AWI de pouvoir calculer les nombre d'onde pour des poutres périodiques hétérogènes.

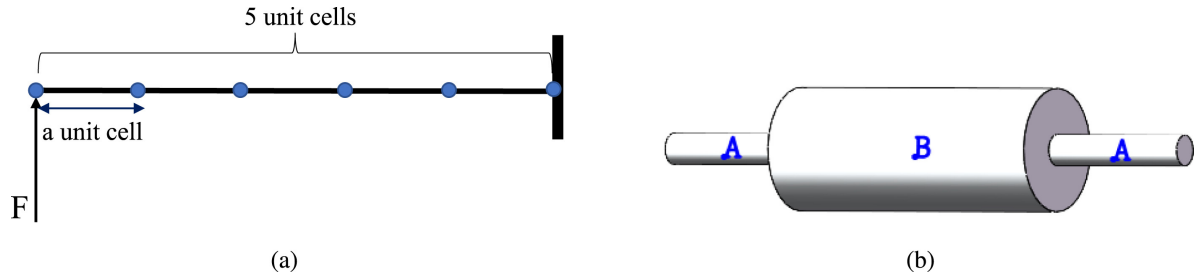


FIGURE 3.4 – (a) Schéma de la poutre périodique à deux matériaux. (b) Cellule unité, [Li 2023c].

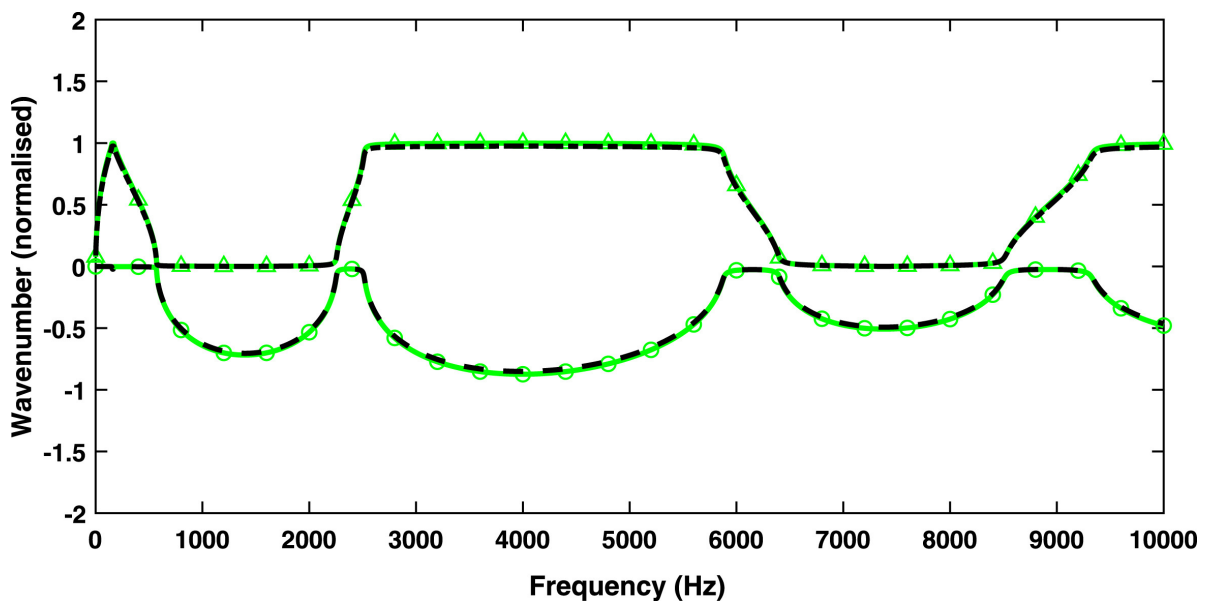


FIGURE 3.5 – Comparaison des relations de dispersion par AWI et WFEM pour une poutre périodique hétérogène (schéma Fig. 3.4) sans connaissance a priori de la taille de la cellule unité. (\triangle) parties réelles des nombres d'onde obtenus par AWI, (\circ) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par AWI, (---) parties réelles des nombres d'onde obtenus par WFEM, (---) parties imaginaires des nombres d'onde obtenus par WFEM, [Li 2023c].

C'est cette méthode monodimensionnelle, très prometteuse, qui est étendue au cas bidimensionnel dans ce chapitre.

3.3 Algebraic K-Space Identification 2D

Cette section présente les formulations de l'AKSI 2D pour le calcul des k-spaces pour des problèmes bi-dimensionnels. La sous-section 3.3.1 présente les formules à utiliser pour implémenter simplement la méthode, suivie de l'explication détaillée permettant d'obtenir ces formules, présentée sous-section 3.3.2. La théorie derrière elles provient majoritairement de la méthode monodimensionnelle proposée par [Li 2023c].

3.3.1 Présentation des formules

Soit U un champ de déplacement sur un domaine bidimensionnel borné Ω . En particulier, $\Omega \subset [0, L_x] \times [0, L_y]$, $L_x, L_y \in \mathbb{R}_+^*$. Le champ est supposé connu sur un ensemble de points d'un sous domaine Ω_w de Ω . Le cas le plus simple étant celui d'un champ connu sur une grille rectangulaire régulière de $\Omega_w : (x_i, y_j)$ pour i allant de 1 à N_x et j de 1 à N_y . À partir de ces champs de déplacement, la méthode AKSI 2D fournit le calcul des nombres d'onde dans différentes directions. La première étape consiste à calculer les coefficients γ en résolvant le système donné par Eqn. (3.8) pour un grand nombre de paires de couples de la grille : (x_0, y_0) et (x, y) tels que $x_0 < x$ et $y_0 < y$. Le système est résolu au sens des moindres carrés. La formule des coefficients ϕ_{ik} utilisée dans cette équation est présentée Eqn. (3.9). Dans ces formules, n_w est le nombre de types d'onde planes présentes sans le champ Eqn. (3.11). Le calcul des ϕ_{ik} nécessite des calculs d'intégrales réalisés numériquement, par exemple en utilisant la méthode des trapèzes. Leur implémentation numérique est expliquée dans la sous-section 3.3.3.

$$\sum_{i=0}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) \phi_{ik}(x_0, y_0, x, y) = 0, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ik}(x_0, y_0, x, y) = & \sum_{j=0}^{n_w} \sum_{l=0}^{n_w} \frac{(-1)^{j+l} (n_w + j)! (n_w + l)! (x - x_0)^{n_w - j} (y - y_0)^{n_w - l}}{j! (i + j)! (n_w - j)! l! (k + l)! (n_w - l)!} \\ & \times \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (y - y_1)^{k+l} (x - x_1)^{i+j} U(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

À partir de la connaissance des valeurs des coefficients γ , le nombre d'onde est calculé comme une racine du polynôme Eqn. (3.10). Pour chaque direction θ , le nombre d'onde nécessite une recherche de racines de Eqn. (3.10) mais avec les mêmes coefficients γ .

$$\Psi(K_\theta) = \sum_{l=0}^{2n_w} (-iK_\theta)^l \left(\sum_{m=\max(0, l-n_w)}^{\min(l, n_w)} \gamma(n_w - l + m, n_w - m) \cos^{l-m} \theta \sin^m \theta \right). \quad (3.10)$$

Ces formules sont expliquées dans la prochaine sous-section. Elle sont ensuite validées section. 3.4 pour le calcul des k-spaces complexes à partir de champs de déplacement analytiques, numériques et expérimentaux.

3.3.2 Démonstration des formules

Premièrement, le champ U est approximé par une somme de n_w ondes planes ayant différents nombres d'onde $(k_l)_{1 \leq l \leq n_w}$ et différentes directions $(\theta_l)_{1 \leq l \leq n_w}$.

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{n_w} A_m e^{-ik_m(x \cos \theta_m + y \sin \theta_m)}. \quad (3.11)$$

La transformée de Laplace 2D est appliquée ce champ de la forme et est notée \mathcal{U} .

$$\mathcal{U}(s_x, s_y) = \mathcal{L}_y \mathcal{L}_x [U(x, y)](s_x, s_y) = \sum_{m=1}^{n_w} \frac{A_m}{(s_x + ik_m \cos \theta_m)(s_y + ik_m \sin \theta_m)}. \quad (3.12)$$

L'objectif est d'obtenir une équation aux dérivées partielles dans le domaine de Laplace. C'est pourquoi, le polynôme caractéristique à deux variables Eqn. (3.13) est multiplié par \mathcal{U} , ce qui conduit à l'équation suivante Eqn. (3.14).

$$\Psi(s_x, s_y) = \prod_{m=1}^{n_w} (s_x + ik_m \cos \theta_m)(s_y + ik_m \sin \theta_m) = \sum_{i=0}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) s_x^{n_w-i} s_y^{n_w-k}, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{U}\Psi(s_x, s_y) = \sum_{m=1}^{n_w} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{n_w} (s_x + ik_l \cos \theta_l)(s_y + ik_l \sin \theta_l). \quad (3.14)$$

Eqn. (3.14) est un polynôme à deux variables de degré au plus $n_w - 1$ dans s_x et dans s_y . Par conséquent, l'égalité suivante est vérifiée pour tous s_x et s_y .

$$\frac{\partial^{2n_w} [\mathcal{U}\Psi]}{\partial s_x^{n_w} \partial s_y^{n_w}}(s_x, s_y) = 0. \quad (3.15)$$

Maintenant qu'une équation différentielle partielle linéaire est connue, celle-ci va être développée avant que la transformée de Laplace inverse ne lui soit appliquée. Tout d'abord le polynôme caractéristique Ψ est développé en utilisant Eqn. (3.13) dans Eqn. (3.15) :

$$\frac{\partial^{2n_w} [\mathcal{U}\Psi]}{\partial s_x^{n_w} \partial s_y^{n_w}}(s_x, s_y) = \sum_{i=0}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) \frac{\partial^{2n_w}}{\partial s_x^{n_w} \partial s_y^{n_w}} [\mathcal{U} s_x^{n_w-i} s_y^{n_w-k}] = 0. \quad (3.16)$$

La formule de Leibniz est ensuite utilisée deux fois sur le terme $\frac{\partial^{2n_w}}{\partial s_x^{n_w} \partial s_y^{n_w}} [\mathcal{U} s_x^{n_w-i} s_y^{n_w-k}]$. Pour un $i \in \llbracket 0, n_w \rrbracket$ donné, la formule de Leibniz donne :

$$\frac{\partial^{n_w} [\mathcal{U} s_x^{n_w-i}]}{\partial s_x^{n_w}} = \sum_{j=i}^{n_w} \binom{n_w}{j} \binom{n_w-i}{n_w-j} (n_w-j)! s_x^{j-i} \frac{\partial^j \mathcal{U}}{\partial s_x^j}. \quad (3.17)$$

Et donc, pour $i, k \in \llbracket 0, n_w \rrbracket$:

$$\frac{\partial^{2n_w} [\mathcal{U} s_x^{n_w-i} s_y^{n_w-k}]}{\partial s_x^{n_w} \partial s_y^{n_w}} = \sum_{j=i}^{n_w} \sum_{l=k}^{n_w} N_{i,j} N_{k,l} s_x^{j-i} s_y^{l-k} \frac{\partial^{j+l} \mathcal{U}}{\partial s_x^j \partial s_y^l}, \quad (3.18)$$

avec $N_{i,j} = \binom{n_w}{j} \binom{n_w-i}{n_w-j} (n_w-j)!$. À partir de cette expression, Eqn. (3.16) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) \sum_{j=i}^{n_w} \sum_{l=k}^{n_w} N_{i,j} N_{k,l} s_x^{j-i} s_y^{l-k} \frac{\partial^{j+l} \mathcal{U}}{\partial s_x^j \partial s_y^l} = 0. \quad (3.19)$$

Cette égalité est ensuite divisée par $s_x^{n_w+1}s_y^{n_w+1}$ puis la transformée de Laplace inverse va lui être appliquée.

Avant de l'appliquer, quelques propriétés de la transformée de Laplace sont à rappeler. Soit D l'opérateur de dérivation, s'il est utilisé avec un exposant positif, et l'opérateur de primitivation, s'il est utilisé avec un exposant négatif, alors :

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s), \quad (3.20)$$

avec $-\alpha \in \mathbb{N}$ et

$$\mathcal{L}\left[(-t)^\beta f(t)\right](s) = \frac{d^\beta}{ds^\beta} \mathcal{L}[f(t)](s), \quad (3.21)$$

et $\beta \in \mathbb{N}$. En combinant les deux précédentes propriétés, Eqn. (3.22) est déduite.

$$\mathcal{L}\left[D^\alpha \left((-t)^\beta f(t)\right)\right](s) = s^\alpha \frac{d^\beta}{ds^\beta} \mathcal{L}[f(t)](s). \quad (3.22)$$

Ainsi, l'expression Eqn. 3.19 est divisée par $s_x^{n_w+1}s_y^{n_w+1}$ puis Eqn. (3.22) lui est appliquée successivement dans les directions x et y . De cette manière, la transformée inverse produit uniquement des intégrations et aucune dérivée. Et en définissant

$\int_x^{(p)} f(x_p) = \int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{p-1}} f(x_p) dx_p \dots dx_2 dx_1$ les intégrations successives, Eqn. (3.19) devient :

$$\sum_{i=0}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) \phi_{ik}(x, y) = 0, \quad (3.23)$$

avec ϕ_{ik} tel que :

$$\phi_{ik}(x, y) = \sum_{j=i}^{n_w} \sum_{l=k}^{n_w} N_{i,j} N_{k,l} \int_y^{(n_w+1+k-l)} \int_x^{(n_w+1+i-j)} (-1)^{j+l} x_p^j y_p^l U(x_p, y_p). \quad (3.24)$$

Ensuite, ces formules sont simplifiées. Pour éviter le calcul d'intégrations successives, les relations suivantes sont présentées.

$$\int^{(q)} (x_n)^j f(x_n) = \sum_{m=0}^j (-1)^m \binom{m+q-1}{q-1} \binom{j}{m} m! x^{j-m} \int^{(m+q)} f(x_n), \quad (3.25)$$

$$\int^{(q)} f(x_n) = \frac{1}{(q-1)!} \int_0^x (x-x_1)^{q-1} f(x_1) dx_1. \quad (3.26)$$

Ces deux formules sont combinées pour générer Eqn. (3.27).

$$\int^{(q)} (x_n)^j f(x_n) = \sum_{r=0}^{n_w} \binom{j}{r} \frac{x^r (-1)^{j-r}}{(q-1)!} \int_0^x (x-x_1)^{j-r+q-1} f(x_1) dx_1. \quad (3.27)$$

En particulier, dans Eqn. (3.27), la somme de r allant de 0 à j peut être remplacée par la somme de 0 à n_w car $j \leq n_w$ et $\binom{j}{r} = 0$ lorsque $r > j$. En remplaçant les intégrations multiples

de Eqn. (3.24) par Eqn. (3.27), la formule Eqn. (3.28) est obtenue.

$$\begin{aligned} \phi_{ik}(x, y) &= \sum_{j=i}^{n_w} \sum_{l=k}^{n_w} \sum_{r=0}^{n_w} \sum_{n=0}^{n_w} M_{i,j,r} M_{k,l,n} x^r y^n \\ &\times \int_0^y \int_0^x (y - y_1)^{n_w+k-n} (x - x_1)^{n_w+i-r} U(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec $M_{i,j,r} = N_{i,j} \binom{j}{r} \frac{(-1)^r}{(n_w + i - j)!}$. Les sommations peuvent être interverties dans Eqn. (3.28), de sorte que $\sum_{j=i}^{n_w} M_{i,j,r}$ et $\sum_{l=k}^{n_w} M_{k,l,n}$ puissent être simplifiées.

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{n_w} M_{i,j,r} &= \sum_{j=i}^{n_w} \binom{n_w}{j} \binom{n_w - i}{n_w - j} (n_w - j)! \binom{j}{r} \frac{(-1)^r}{(n_w + i - j)!} \\ &= \frac{(-1)^r n_w!}{r! (n_w + i - r)!} \sum_{j=i}^{n_w} \binom{n_w - i}{n_w - j} \binom{n_w + i - r}{n_w + i - j} \\ &= \frac{(-1)^r n_w!}{r! (n_w + i - r)!} \frac{(2n_w - r)!}{(n_w - r)! n_w!} \\ &= \frac{(-1)^r (2n_w - r)!}{r! (n_w + i - r)! (n_w - r)!} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\sum_{j=i}^{n_w} M_{i,j,r} = \frac{(-1)^r (2n_w - r)!}{r! (n_w + i - r)! (n_w - r)!}. \quad (3.30)$$

En utilisant ces simplifications, Eqn. (3.28) devient Eqn. (3.31)

$$\begin{aligned} \phi_{ik}(x, y) &= \sum_{r=0}^{n_w} \sum_{n=0}^{n_w} \frac{(-1)^{r+n} (2n_w - r)! (2n_w - n)! x^r y^n}{r! (n_w + i - r)! (n_w - r)! n! (n_w + k - n)! (n_w - n)!} \\ &\times \int_0^y \int_0^x (y - y_1)^{n_w+k-n} (x - x_1)^{n_w+i-r} U(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \end{aligned} \quad (3.31)$$

et avec les deux changements d'index $j = n_w - r$ et $l = n_w - n$, cela donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \phi_{ik}(x, y) &= \sum_{j=0}^{n_w} \sum_{l=0}^{n_w} \frac{(-1)^{j+l} (n_w + j)! (n_w + l)! x^{n_w-j} y^{n_w-l}}{j! (i + j)! (n_w - j)! l! (k + l)! (n_w - l)!} \\ &\times \int_0^y \int_0^x (y - y_1)^{k+l} (x - x_1)^{i+j} U(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Jusqu'à présent, les coefficients ϕ_{ik} sont calculés pour chaque point (x, y) , ces points étant la fin de chaque intégration. Cependant, tous les calculs précédents restent valables avec le changement de coordonnées $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$ et le champ d'ondes planes \tilde{U} défini par $\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = U(\tilde{x} + x_0, \tilde{y} + y_0)$. Par conséquent, une définition des termes ϕ_{ik} qui prend en compte des points de départ pour des intégrations autres que $(0, 0)$, peut remplacer Eqn. (3.32). Pour

tous les (x_0, y_0) et (x, y) dans Ω , tels que $x_0 < x$ et $y_0 < y$, $\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y)$ est défini Eqn. (3.33).

$$\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y) = \sum_{j=0}^{n_w} \sum_{l=0}^{n_w} \frac{(-1)^{j+l} (n_w + j)! (n_w + l)! (x - x_0)^{n_w - j} (y - y_0)^{n_w - l}}{j! (i + j)! (n_w - j)! l! (k + l)! (n_w - l)!} \times \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (y - y_1)^{k+l} (x - x_1)^{i+j} U(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (3.33)$$

Et Eqn. (3.23) est valide pour chaque paire de couples (x_0, y_0) et (x, y) tels que $x_0 < x$ et $y_0 < y$:

$$\sum_{i=0}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) \phi_{ik}(x_0, y_0, x, y) = 0. \quad (3.34)$$

Ces deux formules correspondent aux Eqns. (3.8) et (3.9). Ainsi, la quantité de données pour le calcul des coefficients γ est considérablement augmentée et l'importance de chaque point du domaine est rééquilibrée. Les coefficients γ sont une solution non nulle d'un système linéaire. Pour chaque point du maillage, Eqn. (3.34) est évaluée. Si le maillage est rectangulaire, le système est le suivant :

$$\mathbf{HX} = \mathbf{0}, \quad (3.35)$$

avec

$$\mathbf{H}_p = \begin{bmatrix} \phi_{0p}(x_1, y_1, x_2, y_2) & \dots & \phi_{n_w p}(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ \phi_{0p}(x_1, y_1, x_3, y_2) & \dots & \phi_{n_w p}(x_1, y_1, x_3, y_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{0p}(x_1, y_1, x_{N_x}, y_2) & \dots & \phi_{n_w p}(x_1, y_1, x_{N_x}, y_2) \\ \phi_{0p}(x_1, y_1, x_2, y_3) & \dots & \phi_{n_w p}(x_1, y_1, x_2, y_3) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{0p}(x_1, y_1, x_{N_x}, y_{N_y}) & \dots & \phi_{n_w p}(x_1, y_1, x_{N_x}, y_{N_y}) \\ \phi_{0p}(x_2, y_1, x_3, y_2) & \dots & \phi_{n_w p}(x_2, y_1, x_3, y_2) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{0p}(x_{N_x-1}, y_{N_y-1}, x_{N_x}, y_{N_y}) & \dots & \phi_{n_w p}(x_{N_x-1}, y_{N_y-1}, x_{N_x}, y_{N_y}) \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_0 \quad \mathbf{H}_1 \quad \dots \quad \mathbf{H}_{n_w}], \quad (3.37)$$

et

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \gamma(0, 0) \\ \gamma(1, 0) \\ \vdots \\ \gamma(n_w, 0) \\ \gamma(0, 1) \\ \vdots \\ \gamma(n_w, n_w) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Ce système est résolu au sens des moindres carrés Eqn. (3.39).

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{n_w^2}} \mathbf{Y}^* \mathbf{H}^* \mathbf{H} \mathbf{Y}, \\ \|\mathbf{X}\|_2 = 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

•* est la transposée hermitienne. $\mathbf{H}^* \mathbf{H}$ est une matrice hermitienne, donc d'après le principe min-max de Fischer-Courant [Schmüdgen 2012], le minimum de $\mathbf{Y}^* \mathbf{H}^* \mathbf{H} \mathbf{Y}$ avec $\|\mathbf{Y}\|_2 = 1$ est la plus petite valeur propre de $\mathbf{H}^* \mathbf{H}$. Par conséquent, \mathbf{X} est calculé comme une approximation numérique d'un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de $\mathbf{H}^* \mathbf{H}$.

Finalement, à partir de la connaissance des coefficients γ , le polynôme caractéristique est reconstruit. Afin d'obtenir un polynôme à une variable, un changement de variables est utilisé K_θ étant l'indéterminé et θ la direction d'étude choisie.

$$\begin{aligned} s_x &= -iK_\theta \cos \theta, \\ s_y &= -iK_\theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Par conséquent, Eqn. (3.13) devient :

$$\begin{aligned} \Psi(K_\theta) &= \sum_{i=0}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) (-iK_\theta)^{2n_w-k-i} \cos^{n_w-i} \theta \sin^{n_w-k} \theta \\ &= \sum_{l=0}^{2n_w} (-iK_\theta)^l \left(\sum_{m=\max(0, l-n_w)}^{\min(l, n_w)} \gamma(n_w-l+m, n_w-m) \cos^{l-m} \theta \sin^m \theta \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Cette formule correspond à Eqn. (3.10). Le nombre d'onde complexe dans la direction θ est une racine de ce polynôme. Afin d'obtenir le k-space, la recherche de racines est effectuée pour chaque valeur d'angle θ .

3.3.3 Implémentation numérique

L'implémentation de la méthode comporte trois grandes étapes.

- Calcul des quantités $\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y)$ en utilisant Eqn. (3.9).
- Dédution des coefficients γ en utilisant Eqn. (3.8) par résolution au sens des moindres carrés.
- Calcul des k-spaces par résolution polynomiale de l'Eqn. (3.10).

La première étape est de loin la plus coûteuse en temps de calcul, mais peut être légèrement optimisée. Pour tous les couples de points (x_0, y_0) , (x, y) et pour i et k de 0 à n_w , $\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y)$ doit être calculé. Eqn. (3.8) est rappelée juste en dessous.

$$\begin{aligned} \phi_{ik}(x_0, y_0, x, y) &= \sum_{j=0}^{n_w} \sum_{l=0}^{n_w} \frac{(-1)^{j+l} (n_w+j)! (n_w+l)! (x-x_0)^{n_w-j} (y-y_0)^{n_w-l}}{j!(i+j)! (n_w-j)! l!(k+l)! (n_w-l)!} \\ &\quad \times \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (y-y_1)^{k+l} (x-x_1)^{i+j} U(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \end{aligned}$$

S'il est effectué directement, le calcul de tous les coefficients $\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y)$ a une complexité de l'ordre de $O(n_w^5 N_x^3 N_y^3)$. Cependant, certaines intégrales sont calculées plus d'une fois et certaines peuvent être facilement déduites d'autres. Cette sous-section explique comment les calculs ont été effectués lorsque le champ de déplacement est connu sur une grille de N_x par N_y points. Tout d'abord, quelques quantités intermédiaires sont définies :

$$J_n(x_0, x, y) = \int_{x_0}^x (x - x_1)^n U(x_1, y) dx_1, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} I_{nm}(x_0, x, y_0, y) &= \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (y - y_1)^m (x - x_1)^n U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \\ &= \int_{y_0}^y (y - y_1)^m J_n(x_0, x, y_1) dy_1, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$A_{ij} = \frac{(-1)^j (n_w + j)!}{j!(i+j)!(n_w - j)!}. \quad (3.44)$$

Ainsi, $\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y) = \sum_{j=0}^{n_w} \sum_{l=0}^{n_w} A_{ij} A_{kl} (x - x_0)^{n_w - j} (y - y_0)^{n_w - l} I_{i+j, k+l}(x_0, x, y_0, y)$. Les quantités sont calculées pas à pas. Tout d'abord les quantités A_{ij} et les intégrales J_n nécessaires, puis toutes les intégrales I_{nm} nécessaires. Enfin, les $\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y)$ sont calculés.

3.3.3.1 Calcul des J_n

Premièrement, toutes les intégrales J_n sont calculées. L'approximation des intégrales se base sur la méthode des trapèzes. Soit x_0 et x les abscisses de la grille de points telles que $x_0 < x$. Et Δx est la distance à la prochaine abscisse de la grille. y est une ordonnée de la grille et n va de 0 à $2n_w$. Le calcul de $J_n(x_0, x + \Delta x, y)$ peut être simplifié en utilisant la connaissance des $J_m(x_0, x, y)$ à la position x précédente $\forall m \leq n$.

$$\begin{aligned} J_0(x_0, x + \Delta x, y) &= \int_{x_0}^x U(x_1, y) dx_1 + \int_x^{x+\Delta x} U(x_1, y) dx_1 \\ &\approx J_0(x_0, x, y) + \Delta x \frac{U(x, y) + U(x + \Delta x, y)}{2}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} J_n(x_0, x + \Delta x, y) &= \int_{x_0}^x (x + \Delta x - x_1)^n U(x_1, y) dx_1 + \int_x^{x+\Delta x} (x + \Delta x - x_1)^n U(x_1, y) dx_1 \\ &\approx \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \Delta x^{n-l} J_l(x_0, x, y) + \Delta x^{n+1} \frac{U(x, y)}{2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En utilisant Eqns. (3.45) et (3.46), toutes les intégrales J_n sont calculées. En pratique, les quantités sont stockées dans une matrice à 3 dimensions. La première dimension pour tous les couples (x_0, x) , la seconde pour toutes les ordonnées y et la troisième pour toutes les valeurs de n .

3.3.3.2 Calcul des I_{nm}

L'étape suivante consiste à déduire les quantités I_{nm} des J_n . Soit y_0 et y deux ordonnées de la grille de points tels que $y_0 < y$. Et Δy est le pas de discrétisation en ordonnée.

$$\begin{aligned} I_{n0}(x_0, x, y_0, y + \Delta y) &= \int_{y_0}^y J_n(x_0, x, y_1) dy_1 + \int_y^{y+\Delta y} J_n(x_0, x, y_1) dy_1 \\ &\approx I_{n0}(x_0, x, y_0, y) + \Delta y \frac{J_n(x_0, x, y) + J_n(x_0, x, y + \Delta y)}{2}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} I_{nm}(x_0, x, y_0, y + \Delta y) &= \int_{y_0}^y (y + \Delta y - y_1)^m J_n(x_0, x, y_1) dy_1 + \int_y^{y+\Delta y} (y + \Delta y - y_1)^m J_n(x_0, x, y_1) dy_1 \\ &\approx \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \Delta y^{m-l} I_{nl}(x_0, x, y_0, y) + \Delta y^{m+1} \frac{J_n(x_0, x, y)}{2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

En utilisant Eqns. (3.47) et (3.48), les quantités I_{nm} sont calculées et stockées. En pratique, les quantités sont stockées dans une matrice à quatre dimensions. La première dimension pour tous les couples d'abscisses (x_0, x) , la deuxième pour tous les couples d'ordonnées (y_0, y) , la troisième pour toutes les valeurs de n et la quatrième pour toutes les valeurs de m .

3.3.3.3 Calcul des A_{ij}

Les coefficients A_{ij} sont indépendants des coordonnées spatiales, ils doivent donc être calculés une seule fois, stockés dans une matrice, puis réutilisés.

3.3.3.4 Calcul des ϕ_{ik}

Enfin, les quantités $\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y)$ sont calculées en se basant sur toutes les étapes précédentes.

$$\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y) = \sum_{j=0}^{n_w} \sum_{l=0}^{n_w} A_{ij} A_{kl} (x - x_0)^{n_w-j} (y - y_0)^{n_w-l} I_{i+j, k+l}(x_0, x, y_0, y). \quad (3.49)$$

La complexité est en prenant en compte cette optimisation de l'ordre de $O(n_w^5 N_x^2 N_y^2)$. Celle-ci a été diminuée d'un ordre en N_x et d'un en N_y .

3.3.4 Cas particuliers

En pratique, dans certaines situations spécifiques, l'implémentation de la méthode peut être modifiée pour gagner en précision ou en efficacité.

3.3.4.1 Symétrie du k-space

Premièrement, les k-spaces présentent certaines symétries et certains coefficients ne sont pas nécessairement à prendre en compte. Tout d'abord, pour un θ :

$$k_\theta = k_{\pi+\theta}. \quad (3.50)$$

Eqn. (3.41) dans la direction $\pi + \theta$ devient :

$$\Psi(K_{\pi+\theta}) = \sum_{i=0}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) (-iK_{\pi+\theta})^{2n_w-k-i} (-1)^{2n_w-k-i} \cos^{n_w-i} \theta \sin^{n_w-k} \theta. \quad (3.51)$$

Et en ajoutant Eqn. (3.41) à Eqn. (3.51) et Eqn. (3.50), le polynôme caractéristique devient :

$$\begin{aligned} \Psi(K_\theta) &= \sum_{\substack{i=0 \\ \text{i et k de même parité}}}^{n_w} \sum_{k=0}^{n_w} \gamma(i, k) (-iK_\theta)^{2n_w-k-i} \cos^{n_w-i} \theta \sin^{n_w-k} \theta \\ &= \sum_{l=0}^{n_w} (-K_\theta^2)^l \left(\sum_{m=\max(0, 2l-n_w)}^{\min(2l, n_w)} \gamma(n_w - 2l + m, n_w - m) \cos^{2l-m} \theta \sin^m \theta \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Cela signifie que $\gamma(i, k)$ n'est pas pris en compte si i et k ne sont pas de même parité. Ensuite, si le champ étudié est supposé orthotrope, d'autres symétries peuvent être rajoutées.

$$k_\theta = k_{\pi+\theta} = k_{-\theta} = k_{\pi-\theta}. \quad (3.53)$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, dans ces conditions, $\gamma(i, k)$ n'est pas considéré si $n_w - i$ ou $n_w - k$ est impair. Le polynôme caractéristique Eqn. (3.10) est remplacé par Eqn. (3.54).

$$\begin{aligned} \Psi(K_\theta) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_w}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_w}{2} \rfloor} \gamma(n_w - 2i, n_w - 2k) (-K_\theta^2)^{k+i} \cos^{2i} \theta \sin^{2k} \theta \\ &= \sum_{l=0}^{n_w} (-K_\theta^2)^l \left(\sum_{m=\max(0, l-\lfloor \frac{n_w}{2} \rfloor)}^{\min(l, \lfloor \frac{n_w}{2} \rfloor)} \gamma(n_w - 2(l-m), n_w - 2m) \cos^{2(l-m)} \theta \sin^{2m} \theta \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Et Eqn. (3.8) est remplacé par Eqn. (3.55).

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_w}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_w}{2} \rfloor} \gamma(n_w - 2i, n_w - 2k) \phi_{n_w-2i, n_w-2k}(x_0, y_0, x, y) = 0. \quad (3.55)$$

Les résultats obtenus avec les symétries prises en compte semblent meilleurs et rendent la méthode plus robuste.

3.3.4.2 Présence d'une singularité

Si le champ présente une singularité dont la position est connue, comme un chargement ponctuel, les résultats de la méthode pour le calcul des k-spaces peuvent être perturbés. En particulier en ce qui concerne les parties imaginaires. Pour résoudre ce problème, les points les plus proches de la singularité ne doivent pas être utilisés dans le calcul des coefficients ϕ_{ik} . Soit Ω_M un sous-domaine « masque » de Ω centré sur la singularité. Si ce sous-domaine se superpose avec l'aire d'intégration entre (x_0, y_0) et (x, y) (donc si l'Eqn. (3.56) est vérifiée), alors $\phi_{ik}(x_0, y_0, x, y)$ n'est pas pris en compte.

$$[x_0, x] \times [y_0, y] \cap \Omega_m \neq \emptyset. \quad (3.56)$$

Ainsi, l'effet de la singularité sur le calcul des nombres d'onde est limité. La sous-section. 3.4.1.4 compare des k-spaces calculés par l'AKSI 2D en présence d'une source ponctuelle dans le domaine avec et sans masque.

3.3.4.3 Problèmes en grande dimension

Dans le cas d'un problème à grande échelle, le temps de calcul peut être élevé, surtout avec tous les points de mesure d'une grille bidimensionnelle de grande taille en données d'entrée. Cependant, comme expliqué, l'AKSI 2D peut avoir un coût réduit selon le nombre de mesures utilisées. Pour les plaques à grande échelle, trois solutions peuvent être appliquées pour réduire le temps de calcul :

- Il n'est pas nécessaire d'utiliser tous les 4-uplets possibles (x_0, x, y_0, y) , et une grille bidimensionnelle réduite peut être envisagée en entrée. En particulier, à basse fréquence, avec de grandes longueurs d'onde, une grille plus grossière peut suffire pour un calcul précis des k-spaces. Inversement, à haute fréquence, avec de petites longueurs d'onde, la taille totale peut parfois être réduite.
- Le calcul de Eqn. (3.9) peut être optimisé, comme expliqué dans la sous-section. 3.3.3, en se basant sur les calculs précédents pour simplifier les suivants et ainsi réduire le temps de calcul total.
- En utilisant seulement les points éloignés de l'excitation et des frontières, cela peut à la fois réduire l'influence des ondes évanescentes, mais aussi le temps de calcul pour l'AKSI 2D.

3.4 Validations de la méthode

Pour valider la méthode et mesurer son efficacité, celle-ci est testée pour le calcul de k-spaces à partir de champs de déplacement de différents types. Premièrement des champs de déplacement issus d'une résolution analytique de l'équation de plaque isotrope de Kirchhoff Love sont considérés, ensuite des champs de plaques plus orthotropes issus d'une résolution

numérique par méthode des éléments finis et enfin des champs mesurés expérimentalement sont testés. Chaque approche permettant d'évaluer différents aspects de l'AKSI 2D.

3.4.1 Validation sur des champs de déplacement analytiques

Lorsque c'est possible, l'usage de champs de déplacement analytique permet de maîtriser parfaitement les champs utilisés en entrée. Dans cette sous-section, les champs de déplacement analytiques permettent une première validation de l'AKSI 2D ainsi qu'une comparaison avec deux méthodes déjà existantes pour l'estimation des k-spaces à savoir l'IWC [Berthaut 2005] et l'INCOME [Boukadia 2022]. De plus, la facilité de générer des champs de déplacement analytiquement permet d'investiguer d'autres aspects. L'efficacité d'AKSI 2D sera étudiée et comparée aux autres méthodes en présence de bruit sur les champs ou d'incertitudes sur les positions des points de mesures. L'effet de la présence d'une singularité dans le domaine d'observation, masquée ou non comme expliquée sous-section. 3.3.4.2 sur le k-spaces mesuré est illustré. Par ailleurs, une discussion sur la quantité de paires de couples (x_0, y_0) , (x, y) à considérer pour limiter le temps de calcul et l'espace mémoire, est présentée. Enfin, une étude sur le paramètre n_w représentant combien d'ondes sont considérées dans l'approximation de somme d'onde planes est réalisée.

3.4.1.1 Définitions des solutions analytiques et du ratio d'amortissement

Dans cette partie, les champs analytiques représentent des champs de déplacement de plaques isotropes. Ceux-ci sont solutions de l'équation de plaque isotrope de Kirchhoff Love Eqn. (3.57) [Leissa 1969].

$$D\Delta^2u - \omega^2\Lambda u = f \tag{3.57}$$

Où D est le terme de rigidité, Λ la masse surfacique, ω la pulsation et f le terme de chargement. Par souci de simplicité, pour pouvoir calculer des solutions analytiques de cette équation, des cas simples sont considérés. Le domaine est choisi rectangulaire avec des conditions aux limites en support simple. La solution est calculée par décomposition en série de Fourier.

$$u_{analytique}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \int_{\Omega} \left[f(\tilde{x}, \tilde{y}) \sin\left(\frac{n\pi \tilde{x}}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi \tilde{y}}{L_y}\right) \right] d\tilde{x}d\tilde{y}}{L_x L_y \left(D \left(\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 \right)^2 - \omega^2 \Lambda \right)}. \tag{3.58}$$

Dans le cas d'un chargement ponctuel unitaire en un point (x_s, y_s) (« $f = \delta_{x_s, y_s}$ »), la solution prend la forme suivante :

$$u_{analytique}(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi x_s}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y_s}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)}{L_x L_y \left(D \left(\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 \right)^2 - \omega^2 \Lambda \right)}. \tag{3.59}$$

Et donc les champs de déplacement sont obtenus en évaluant cette formule sur une grille de points rectangulaire. De plus le nombre d'onde k associé à Eqn. (3.57) est tel que :

$$k^4 = \omega^2 \frac{\Lambda}{D}. \quad (3.60)$$

À partir des caractéristiques de dispersion d'un champ de déplacement, il est possible de déduire la vitesse de groupe $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial \Re(k)}$ et la vitesse de phase $c_\varphi = \frac{\omega}{\Re(k)}$. Par conséquent, le ratio d'amortissement peut être estimé en fonction de la pulsation et de la direction, [Fazail 2023b, Lyon 1995, Marchetti 2020] :

$$\eta(\omega, \theta) = -2 \frac{\Im(k_\theta) c_g}{\Re(k_\theta) c_\varphi}, \quad (3.61)$$

[Manconi 2010] proposent une définition du ratio d'amortissement moyen, basé sur la densité modale angulaire pour considérer les cas non isotropes. La densité modale est donnée par Eqn. (3.62), où S est la surface de la structure et le ratio d'amortissement moyen est donné par Eqn. (3.63).

$$n(\omega, \theta) = \frac{S \Re(k_\theta(\omega))}{\pi^2 c_g(\omega, \theta)}, \quad (3.62)$$

$$\bar{\eta}(\omega) = \frac{\int_0^{2\pi} \eta(\omega, \theta) n(\omega, \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} n(\omega, \theta) d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} \eta(\omega, \theta) \frac{\Re(k_\theta(\omega))}{c_g(\omega, \theta)} d\theta}{\int_0^{2\pi} \frac{\Re(k_\theta(\omega))}{c_g(\omega, \theta)} d\theta}. \quad (3.63)$$

Étant donné que le calcul de la vitesse de groupe nécessite une approximation d'une dérivée, un lissage est appliqué aux nombres d'ondes dans la procédure d'estimation du ratio d'amortissement.

3.4.1.2 Modèle analytique d'une plaque isotrope

La première plaque est une plaque isotrope suivant l'équation de Kirchhoff Love avec les propriétés mécaniques de l'acier. En particulier, les propriétés géométriques de cette plaque sont choisies de manière à correspondre au cas expérimental présenté dans la section 3.4.3.

La plaque d'acier a les propriétés suivantes : module de Young $E = 210$ GPa, masse volumique $\rho = 7900$ kg/m³ et coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. Un ratio d'amortissement de $\eta = 2\%$ est ajouté au module de Young $\tilde{E} = E(1 + \eta i)$. Le ratio d'amortissement de l'acier étant trop faible pour avoir une mesure claire de la partie imaginaire des nombres d'onde, la valeur choisie dans le modèle analytique est plus élevée : à 2%. Mais il s'agit toujours d'un cas de faible amortissement.

La plaque est rectangulaire, $L_x = 0.95$ m, $L_y = 0.6$ m avec une épaisseur $d = 2$ mm. Les quantités suivantes découlent des précédentes : la masse surfacique $\Lambda = d\rho$, le module d'inertie en flexion $I = \frac{d^3}{12}$, la rigidité en flexion $D = \frac{\tilde{E}}{1 - \nu^2} I$. La plaque d'acier est soumise à un chargement ponctuel en (x_s, y_s) et à des conditions aux limites en support simple. La solution

analytique calculée par décomposition modale dans ce cas est la suivante Eqn. (3.59). Fig. 3.7 illustre les champs de déplacement obtenus dans cet exemple à trois fréquences : 250 Hz, 1250 Hz et 2500 Hz.

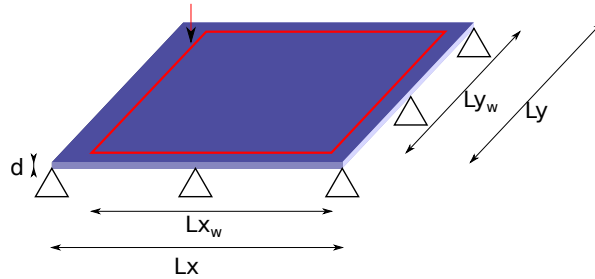


FIGURE 3.6 – Schéma de la plaque.

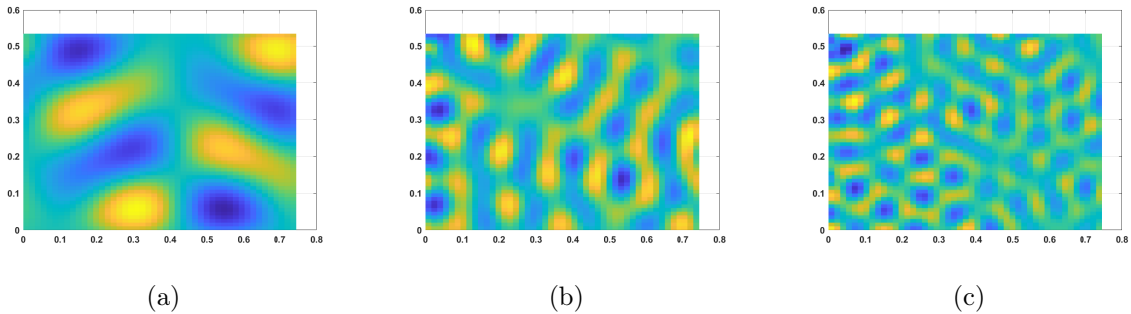


FIGURE 3.7 – Formes des champs de déplacement calculés analytiquement pour la plaque en acier schématisé Fig. 3.6, à trois fréquences : (a) 250 Hz, (b) 1250 Hz et (c) 2500 Hz.

Les méthodes k-spaces sont testées et comparées à la solution analytique donnée Eqn. (3.60) dans ce cas sur une bande de fréquence allant de 3.125 Hz à 2500 Hz. Une structure isotrope étant un cas particulier d'orthotropie, la méthode AKSI 2D adaptée à une structure orthotrope et basée sur les formules Eqns. (3.9), (3.55) et (3.54), est utilisée. Les relations de dispersion sont présentées Fig. 3.8 ainsi que les k-spaces aux fréquences 250 Hz, 1250 Hz et 2500 Hz Fig. 3.9. De plus, en utilisant les Eqns. (3.61) et (3.63), le ratio d'amortissement moyen est estimée et comparée à la valeur initiale de 0,02%.

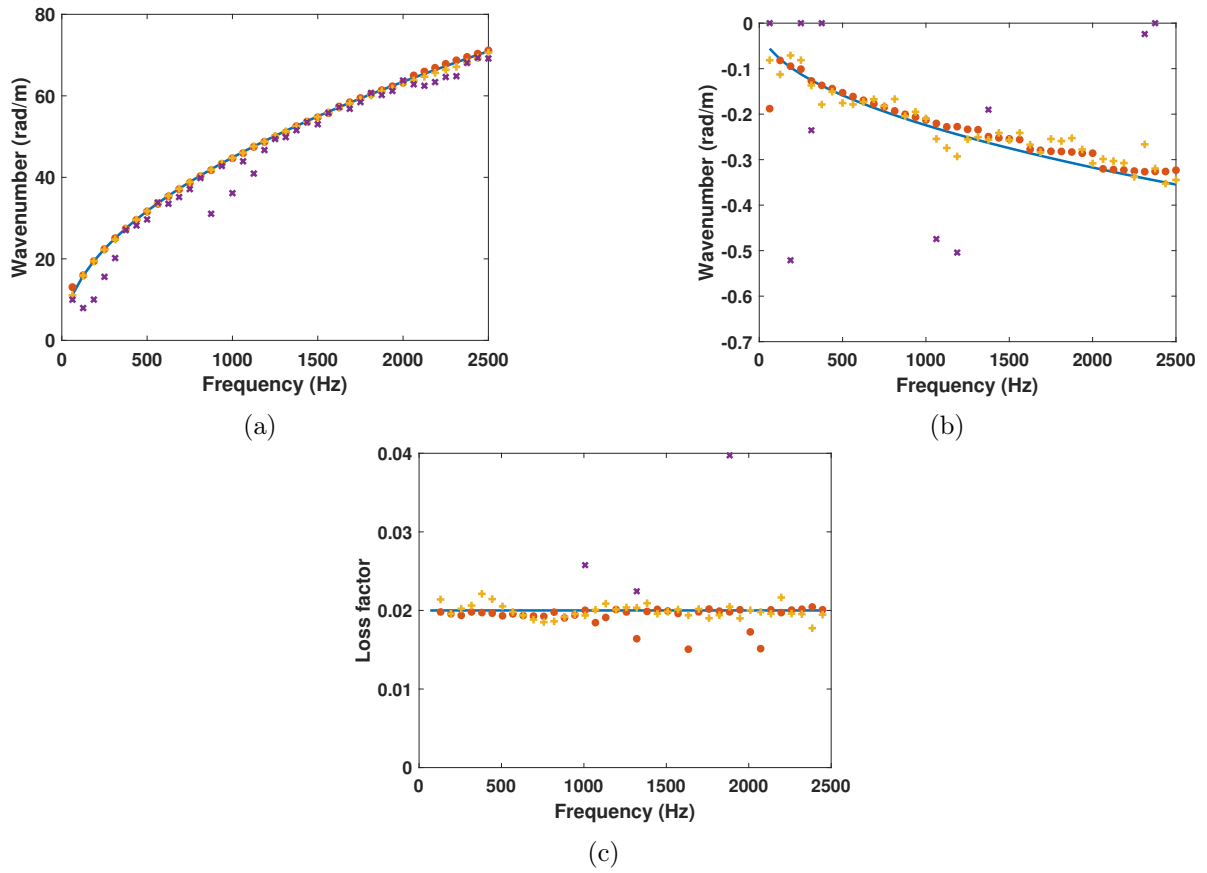


FIGURE 3.8 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad de la plaque en acier : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire et (c) ratio d'amortissement moyen. Solution analytique (—), AKSI 2D (●) INCOME (+) et IWC (x).

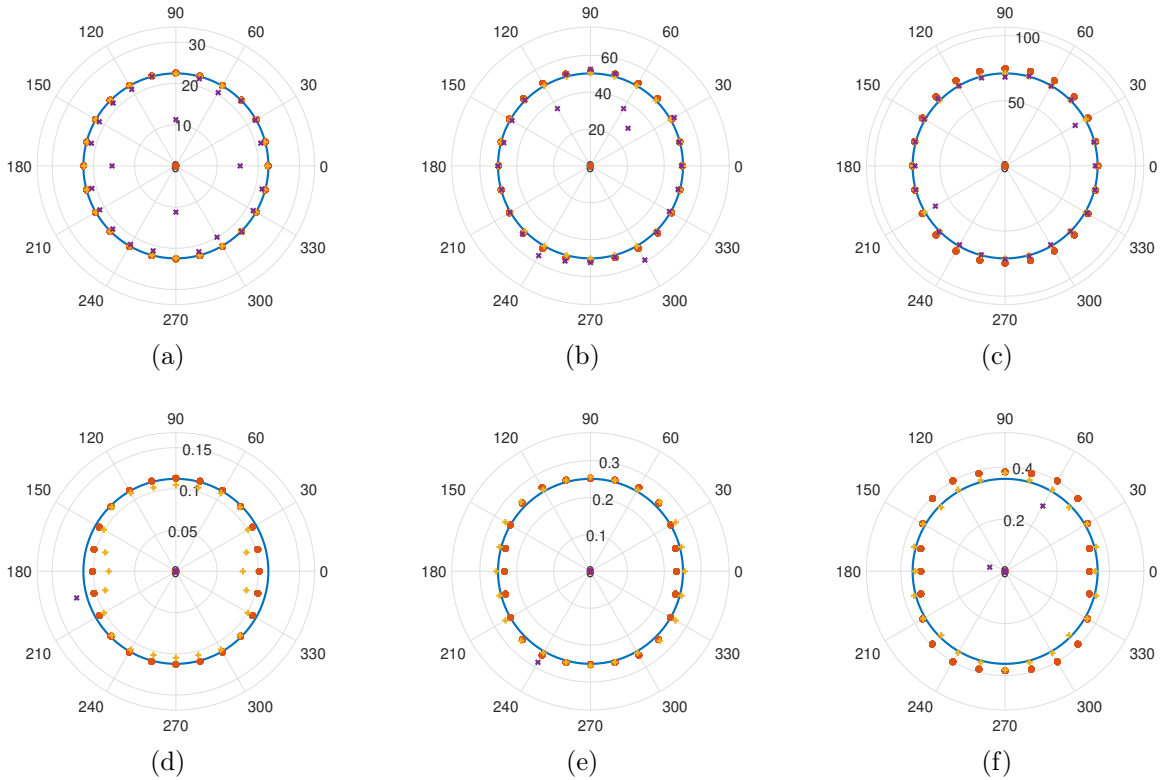


FIGURE 3.9 – Parties réelles et imaginaires des k-spaces de la plaque en acier à 3 fréquences. Solution analytique (—), AKSI 2D (●), INCOME (+) et IWC (×). (a) Partie réelle à 250 Hz, (b) partie réelle à 1250 Hz, (c) partie réelle à 2500 Hz, (d) partie imaginaire à 250 Hz, (e) partie imaginaire à 1250 Hz et (f) partie imaginaire à 2500 Hz.

Les trois méthodes, l'IWC, l'INCOME et l'AKSI 2D, calculent une partie réelle des nombres d'onde de bonne qualité à chaque fréquence et direction Figs. 3.8a, 3.9a, 3.9b et 3.9c. Toutefois, pour les parties imaginaires, l'AKSI 2D semble être aussi efficace que l'INCOME et bien meilleur que l'IWC dans cette gamme de fréquences Figs. 3.8b, 3.9d, 3.9e et 3.9f. Et en ce qui concerne le ratio d'amortissement, Fig. 3.8c, les valeurs estimées à partir de l'AKSI 2D sont presque aussi précises que celles basées sur l'INCOME, sauf pour quelques fréquences.

En termes d'efficacité et temps de calcul, l'INCOME est de loin la meilleure des trois méthodes. Il s'agit d'un algorithme très rapide basé sur la méthode de Prony qui ne nécessite que la résolution de plusieurs équations linéaires. L'ensemble du processus ne demande pas le calcul des intégrales des signaux. Les deux autres méthodes, l'IWC et l'AKSI 2D, sont plus coûteuses en temps. L'IWC est une méthode itérative non linéaire qui vise à rechercher la valeur optimale qui maximise la corrélation entre un modèle d'onde inhomogène défini et le champ mesuré, par le biais d'un processus itératif. La recherche du maximum est effectuée dans un ensemble 2D, par évaluation ou par un processus itératif sachant que chaque évaluation nécessite le calcul d'une intégrale. Le calcul fastidieux de l'AKSI 2D résulte également du calcul d'intégrations du signal. Celles-ci sont données par Eqn. (3.9), où les paires de coordonnées (x_0, y_0) et (x, y) déterminent le nombre de points de mesure impliqués dans cette intégration. Ainsi, le coût de calcul de l'AKSI 2D dépend du nombre de points utilisés dans l'équation

ci-dessus. Cependant, l'AKSI 2D dispose d'une certaine flexibilité dans le nombre de points de mesure pris en compte, comme expliqué dans la sous-section. 3.3.4.3.

3.4.1.3 Robustesse en présence de bruit ou d'incertitudes sur les positions

Afin de poursuivre la comparaison entre la méthode AKSI 2D et les autres méthodes, leur robustesse est étudiée. Les cas tests sont les mêmes que précédemment, à savoir un modèle analytique de plaque en acier. Un cas avec bruit ajouté et un autre cas avec des incertitudes sur les positions sont considérés. Le bruit est ajouté aux champs calculés avec Eqn. (3.59) et il suit une loi uniforme.

$$\tilde{u}(x_n, y_m) = u(x_n, y_m) + \varepsilon_{n,m}, \quad (3.64)$$

avec $\varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{U}(-a, a)$, et a tel que $SNR = \frac{\|u\|_{L^2}}{\|\varepsilon\|_{L^2}} = 20$. Les relations de dispersion et les k-spaces à trois fréquences sont présentés Figs. 3.10 et 3.11. Ces figures montrent que même si les parties réelles des nombres d'onde sont bien calculées dans la plupart des cas par les trois méthodes, la méthode AKSI 2D est en mesure de fournir les meilleurs résultats pour la partie imaginaire et le ratio d'amortissement lorsque du bruit est ajouté. En comparant les parties imaginaires et ratios d'amortissement calculées par l'AKSI 2D à partir de champs avec bruit ajouté Fig. 3.10 et à partir de champs parfaits Fig. 3.8, il apparaît que le bruit a un impact sur les calculs. Cependant, la tendance reste correcte. Il en est de même pour la partie imaginaire des k-spaces Figs. 3.9 et 3.11. La partie imaginaire du k-space calculée avec l'AKSI 2D avec bruit présente une plus grande variabilité en fonction de la direction que sans bruit, mais les valeurs restent proches des valeurs analytiques.

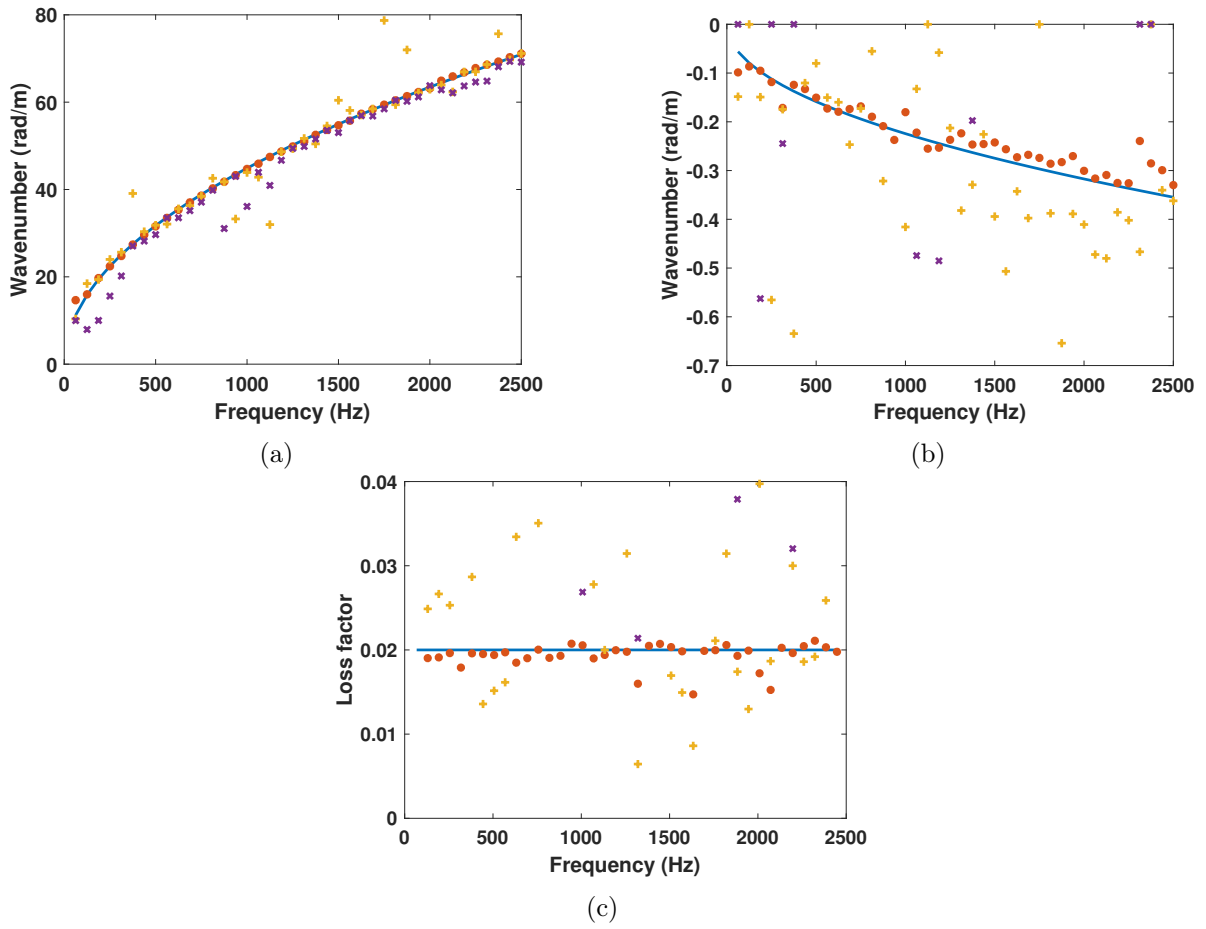


FIGURE 3.10 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad de la plaque en acier avec bruit rajouté, $SNR = 20$: (a) partie réelle, (b) partie imaginaire et (c) ratio d'amortissement moyen. Solution analytique (—), AKSI 2D (●) INCOME (+) et IWC (×).

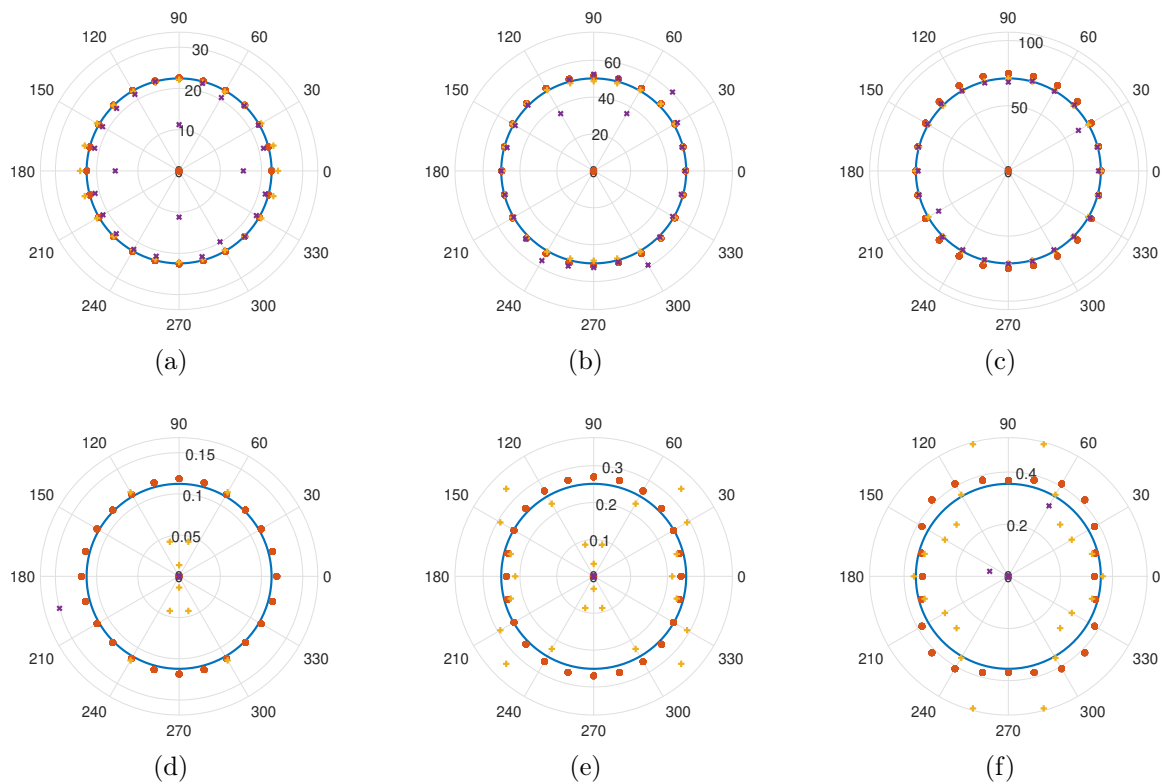


FIGURE 3.11 – Parties réelles et imaginaires des k-spaces de la plaque en acier à 3 fréquences avec bruit rajouté $SNR = 20$. Solution analytique (—), AKSI 2D (•), INCOME (+) et IWC (×). (a) Partie réelle à 250 Hz, (b) partie réelle à 1250 Hz, (c) partie réelle à 2500 Hz, (d) partie imaginaire à 250 Hz, (e) partie imaginaire à 1250 Hz et (f) partie imaginaire à 2500 Hz.

Pour comparer plus en détail l'effet du bruit sur le calcul des k-spaces, une étude des variations de l'erreur relative sur les parties réelles et imaginaires des k-spaces en fonction du SNR est présentée Fig. 3.12. Le champ de déplacement test est la solution analytique de l'équation de Kirchhoff-Love à la fréquence 250 Hz. Chaque valeur de SNR a été testée 48 fois avec un bruit aléatoire différent. Cette figure montre que l'IWC est la méthode la moins précise, mais qu'elle est très peu affectée par le bruit. Les comportements des mesures effectuées par l'AKSI 2D et l'INCOME sont très différents. Même pour une valeur fixe de SNR , l'impact sur l'INCOME est très variable. Pour les valeurs de bruit les plus faibles, donc les valeurs de SNR les plus élevées présentées, beaucoup de k-spaces estimés par l'INCOME ont une erreur relative supérieure à 0.1 pour la partie réelle et supérieure à 1 pour la partie imaginaire. Pour observer une diminution de l'erreur relative avec cette méthode, le SNR doit être beaucoup plus élevé. À l'inverse, l'AKSI 2D semble être beaucoup plus robuste. Les résultats de cette méthode montrent une diminution de l'erreur relative lorsque le SNR augmente. L'erreur relative basée sur l'AKSI 2D à très haut bruit est meilleure que celles basées sur l'INCOME et l'IWC pour la partie réelle. Pour la partie imaginaire, l'erreur relative devient acceptable bien avant les autres méthodes. De plus, un bruit de SNR supérieur à 30 n'a pratiquement aucun effet sur le calcul de la partie réelle de k-space par l'AKSI 2D. Pour la partie imaginaire, cette limite se situe autour de 100.

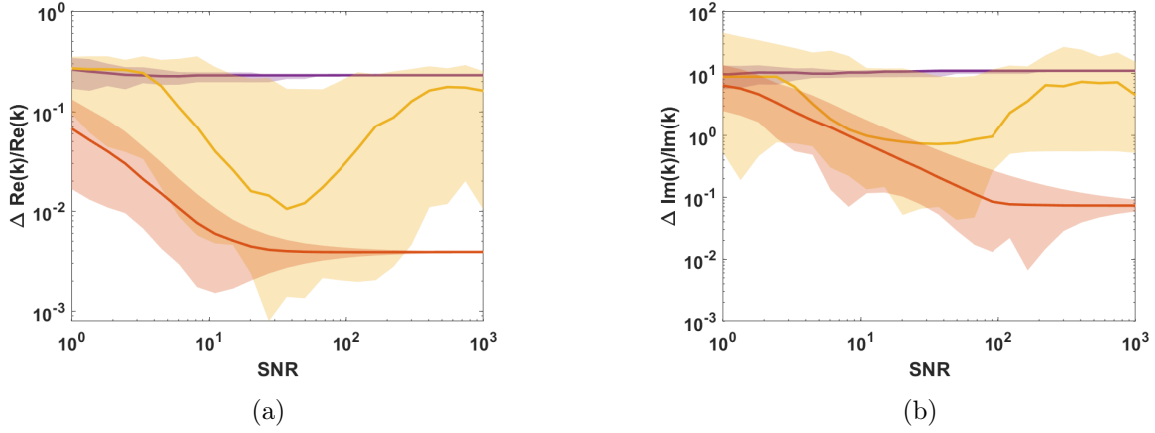


FIGURE 3.12 – Erreur relative dans l'identification des k-spaces en fonction du SNR. Comparaison entre l'IWC (—), l'INCOME (—) et l'AKSI 2D (—) : (a) parties réelles, (b) parties imaginaires. Les aires sont colorées entre la plus haute et la plus basse valeur d'erreur relative pour chaque SNR. La ligne pleine est la médiane des erreurs relatives à chaque SNR.

Le même type d'étude est réalisé avec des incertitudes sur les positions des points. Le champ est généré de telle sorte que :

$$\bar{u}(x_n, y_m) = u(x_n + \delta x_{n,m}, y_m + \delta y_{n,m}). \quad (3.65)$$

δx et δy suivent des lois uniformes : $\delta x \rightsquigarrow \mathcal{U}\left(-\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta x}{4}\right)$ et $\delta y \rightsquigarrow \mathcal{U}\left(-\frac{\Delta y}{4}, \frac{\Delta y}{4}\right)$ où Δx et Δy sont les pas de discrétisation spatiaux dans les directions x et y , dans le cas parfait. Eqn. (3.59) est utilisée pour calculer \bar{u} .

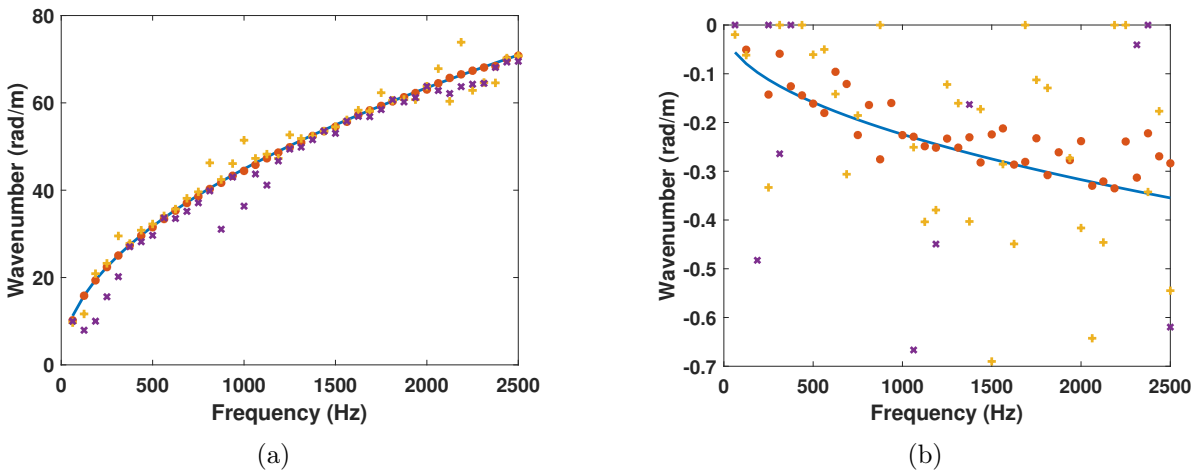


FIGURE 3.13 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad de la plaque en acier avec incertitude sur les positions : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Solution analytique (—), AKSI 2D (●) INCOME (+) et IWC (x).

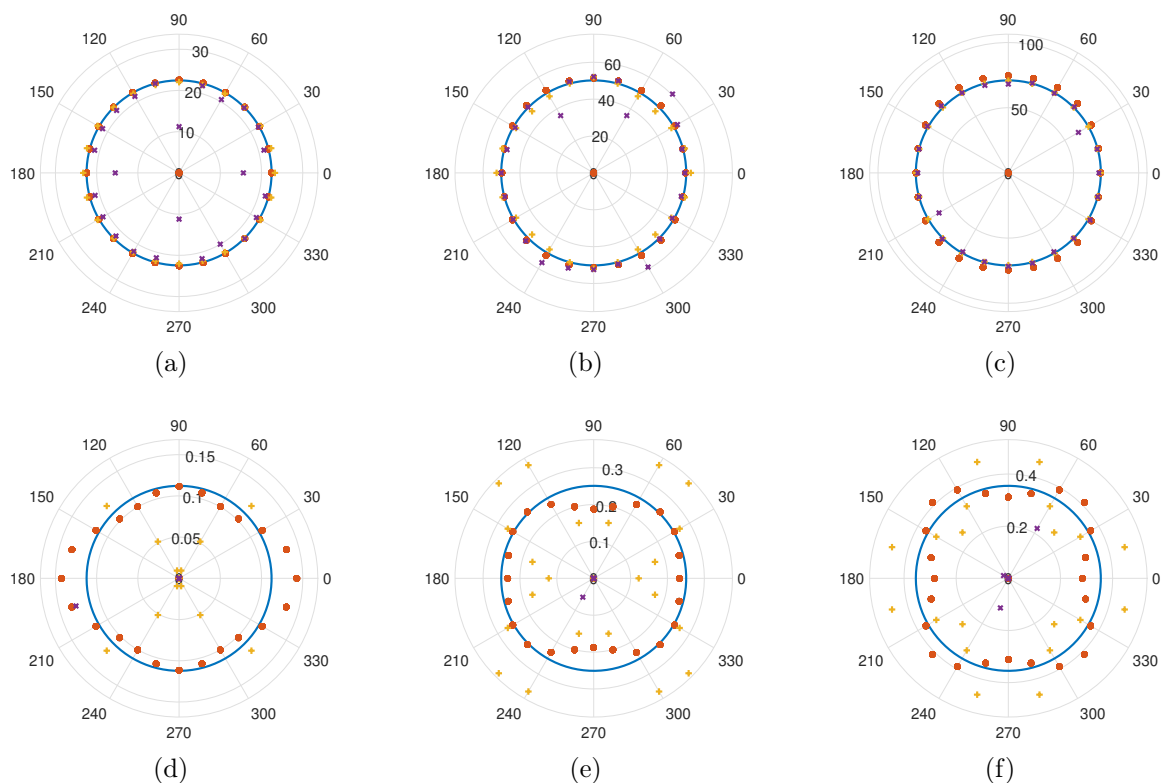


FIGURE 3.14 – Parties réelles et imaginaires des k-spaces de la plaque en acier à trois fréquences avec incertitude sur les positions. Solution analytique (—), AKSI 2D (•), INCOME (+) et IWC (×). (a) Partie réelle à 250 Hz, (b) partie réelle à 1250 Hz, (c) partie réelle à 2500 Hz, (d) partie imaginaire à 250 Hz, (e) partie imaginaire à 1250 Hz et (f) partie imaginaire à 2500 Hz.

Les conclusions des figures Figs. 3.13 et 3.14 pour l'extraction des nombres d'onde à partir des champs avec des incertitudes sur la position des points de mesures sont les mêmes qu'avec du bruit ajouté. Les parties réelles calculées par l'AKSI 2D sont au moins aussi bonnes que celles calculées avec d'autres méthodes et sont proches des valeurs analytiques. Les parties imaginaires des nombres d'onde calculées par l'AKSI 2D sont un peu perturbées, mais restent proches des valeurs analytiques, à l'inverse des résultats d'INCOME et d'IWC qui en sont éloignés.

3.4.1.4 Effet de la présence d'une singularité

Comme précisé sous-section. 3.3.4.2, la présence d'une singularité dans le champ de déplacement peut avoir un impact sur les nombres d'onde calculés par l'AKSI 2D, surtout sur la partie imaginaire. En particulier, si les champs sont excités par une source ponctuelle présente au sein du domaine observé, celle-ci va avoir un impact négatif sur la qualité des k-spaces mesurés. Pour éviter ce problème et améliorer la qualité des k-spaces calculés, un masque est défini sur le domaine mesuré. Un exemple de plaque en acier avec les mêmes propriétés que précédemment, résolue analytiquement est utilisé. Cependant, le chargement est déplacé au centre du domaine. La méthode AKSI 2D est utilisée sur ces champs calculés, avec et sans

masque autour du point source. Le masque est un carré de côté 0.19 m centré autour du point source.

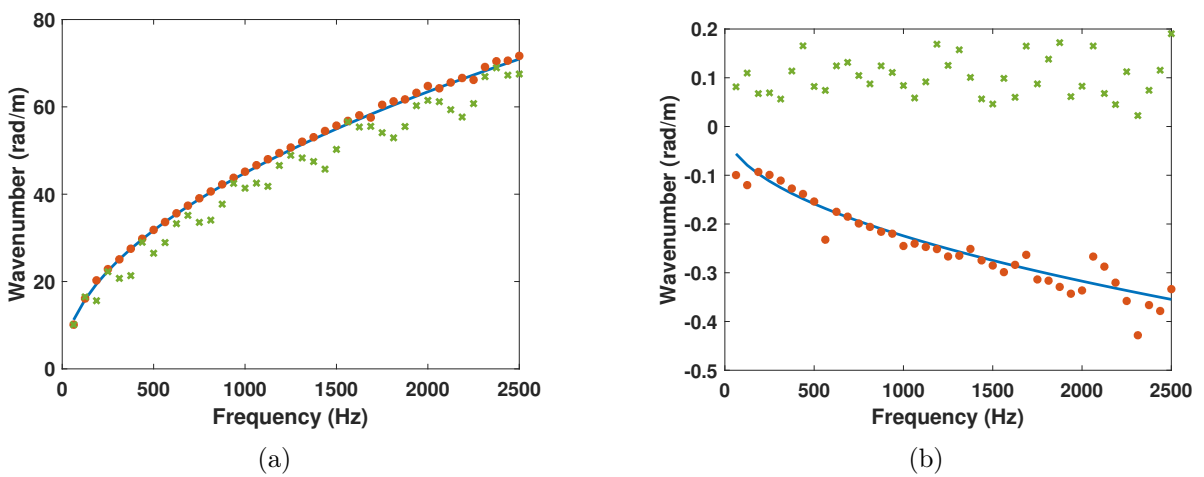


FIGURE 3.15 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad de la plaque en acier : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Solution analytique (—), AKSI 2D avec point source masqué (●) et AKSI 2D avec point source non masqué (x).

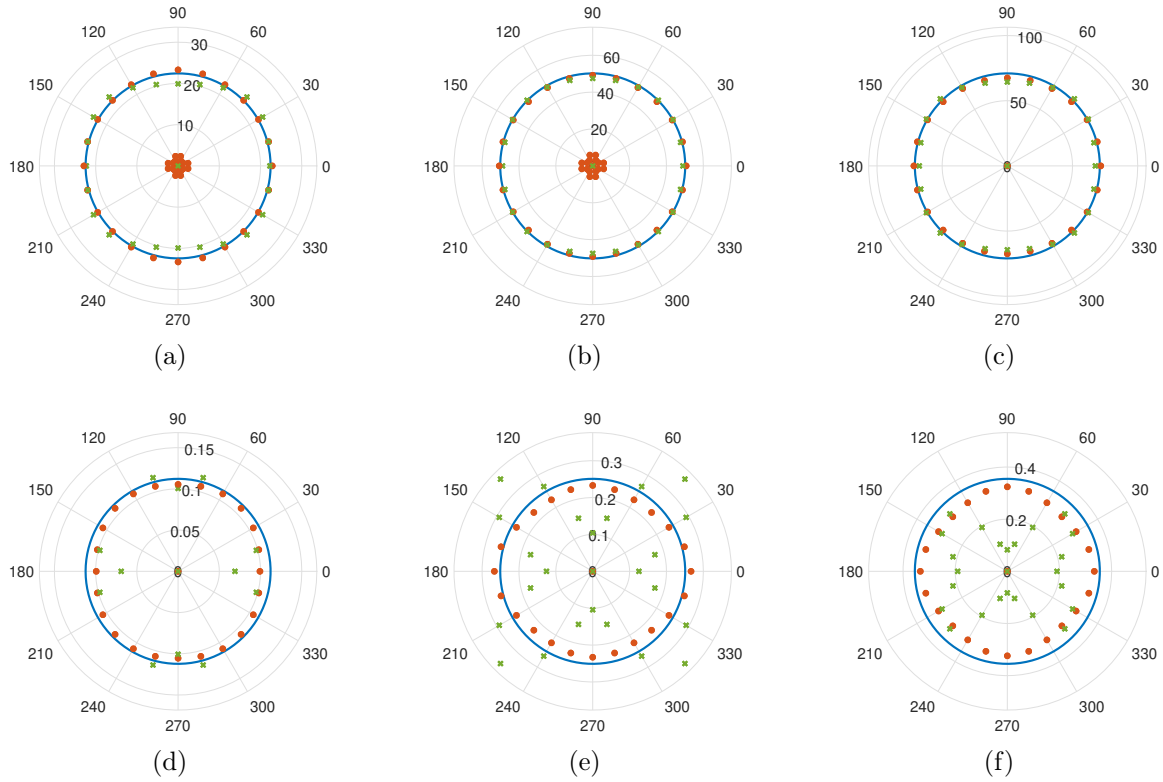


FIGURE 3.16 – Parties réelles et imaginaires des k-spaces de la plaque en acier à 3 fréquences. Solution analytique (—), AKSI 2D avec point source masqué (●) et AKSI 2D avec point source non masqué (×). (a) Partie réelle à 250 Hz, (b) partie réelle à 1250 Hz, (c) partie réelle à 2500 Hz, (d) partie imaginaire à 250 Hz, (e) partie imaginaire à 1250 Hz et (f) partie imaginaire à 2500 Hz.

Il apparaît Figs. 3.15 et 3.16 que lorsque le point source se situe dans le domaine observé, les parties réelles des nombres d'onde mesurées par l'AKSI 2D sont légèrement chaotiques et les parties imaginaires prennent des valeurs parfois positives, très éloignées de la référence analytique. En ne prenant pas en compte les points autour du point source, les k-spaces calculés par l'AKSI 2D gagnent grandement en qualité, pour les parties réelles, mais surtout pour les parties imaginaires. C'est pourquoi lorsque la position du point source se situe dans le domaine, celui-ci sera masqué.

3.4.1.5 Discussion sur les paires de couples considérées pour le calcul des ϕ_{ik}

Comme expliqué sous-sections. 3.3.3 et 3.3.4.3, si les coefficients ϕ_{ik} sont calculés pour toutes les paires de couples (x_0, y_0) , (x, y) telles que $x_0 < x$ et $y_0 < y$, le temps de calcul peut s'avérer problématique, de même que la quantité de stockage mémoire utilisée. En effet, si le champ de déplacement est connu sur une grille de N_x par N_y points, alors c'est pour $\frac{N_x(N_x - 1)N_y(N_y - 1)}{4}$ paires de couples que les coefficients ϕ_{ik} sont à calculer. Et la matrice \mathbf{H} présentée sous-section. 3.3.2 aura $\frac{N_x(N_x - 1)N_y(N_y - 1)}{4}$ lignes. C'est pourquoi il n'est pas forcément viable de considérer toutes les paires de couples.

Le choix des paires (x_0, y_0) , (x, y) à considérer ou à éliminer dans le calcul des ϕ_{ik} n'est pas évident. Un nombre défini a priori de paires de couples peut être tiré aléatoirement. Cependant, comme présenté dans la sous-section. 3.3.3 sur l'implémentation numérique, certains calculs peuvent être simplifiés en s'appuyant sur des valeurs calculées pour des paires de couples précédentes.

Une alternative peut être de considérer les paires (x_0, y_0) , (x, y) telles que $a < x - x_0 < b$ et $a < y - y_0 < b$ et ainsi minorer et majorer la taille des rectangles sur lesquels les intégrations nécessaires pour calculer les coefficients ϕ_{ik} sont réalisées. Dans ce cas, il est à noter qu'à basses fréquences, les longueurs d'onde sont plutôt grandes et par conséquent les tailles des rectangles sur lesquels les intégrations sont faites devront être suffisamment grandes et inversement à hautes fréquences, les longueurs d'onde sont plus petites et par conséquent les rectangles devront être plutôt petits pour capter les phénomènes.

3.4.1.6 Discussion sur n_w

Le choix de la valeur de n_w est très important et dépend du cas considéré. Dans la plupart des cas étudiés, les valeurs $n_w = 2, 3$ ou 4 se révèlent les plus pertinentes. Il est tout d'abord possible de montrer que $n_w \neq 1$. Si $n_w = 1$, le polynôme caractéristique donné par Eqn. (3.13) deviendrait :

$$\Psi(s_x, s_y) = \gamma(0, 0)s_x s_y + \gamma(1, 0)s_y + \gamma(0, 1)s_x + \gamma(1, 1), \quad (3.66)$$

ou

$$\Psi(K_\theta) = -K_\theta^2 \gamma(0, 0) \cos \theta \sin \theta - iK_\theta (\gamma(1, 0) \sin \theta + \gamma(0, 1) \cos \theta) + \gamma(1, 1). \quad (3.67)$$

En observant dans les directions θ et $\pi + \theta$ la recherche des racines donnerait :

$$\begin{aligned} -K_\theta^2 \gamma(0, 0) \cos \theta \sin \theta - iK_\theta (\gamma(1, 0) \sin \theta + \gamma(0, 1) \cos \theta) + \gamma(1, 1) &= 0, \\ -K_{\pi+\theta}^2 \gamma(0, 0) \cos \theta \sin \theta + iK_{\pi+\theta} (\gamma(1, 0) \sin \theta + \gamma(0, 1) \cos \theta) + \gamma(1, 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

En particulier dans les directions 0 rad et π :

$$\begin{aligned} -iK_0 \gamma(0, 1) + \gamma(1, 1) &= 0, \\ +iK_\pi \gamma(0, 1) + \gamma(1, 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Et donc $K_0 = -K_\pi$. Or, dans les cas simples, par exemple celui d'une plaque isotrope, $K_\theta = K_{\pi+\theta}$. Ainsi, il faut que $n_w > 1$. Les calculs de k-spaces par l'AKSI 2D pour les cas $n_w = 2, 3, 4$ et 5 sont testés sur les champs de déplacement provenant de la résolution analytique de l'équation de plaque isotrope de Kirchhoff-Love présentés sous-section 3.4.1.2.

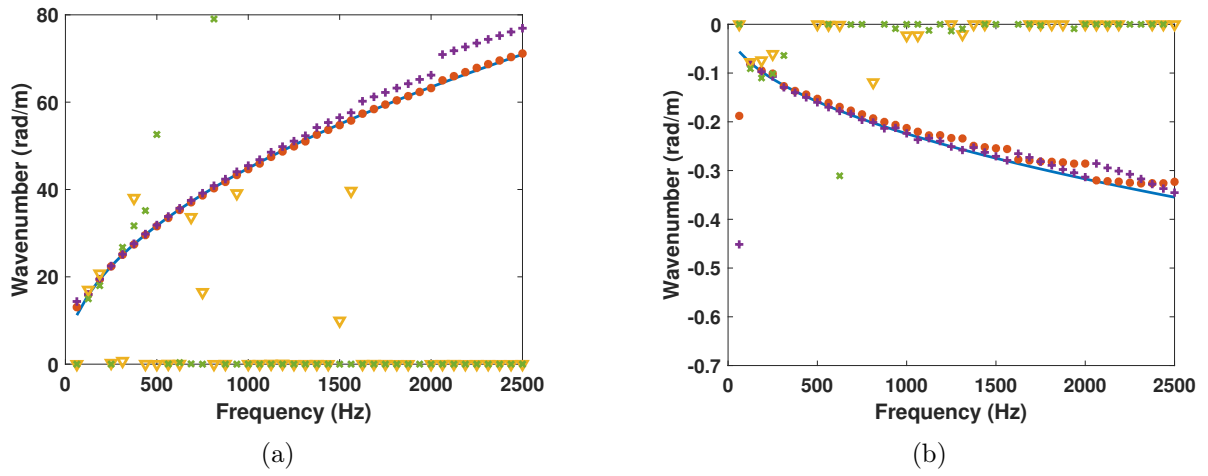


FIGURE 3.17 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad de la plaque en acier : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Solution analytique (—), AKSI 2D $n_w = 2$ (●), $n_w = 3$ (+) $n_w = 4$ (x) et $n_w = 5$ (▽).

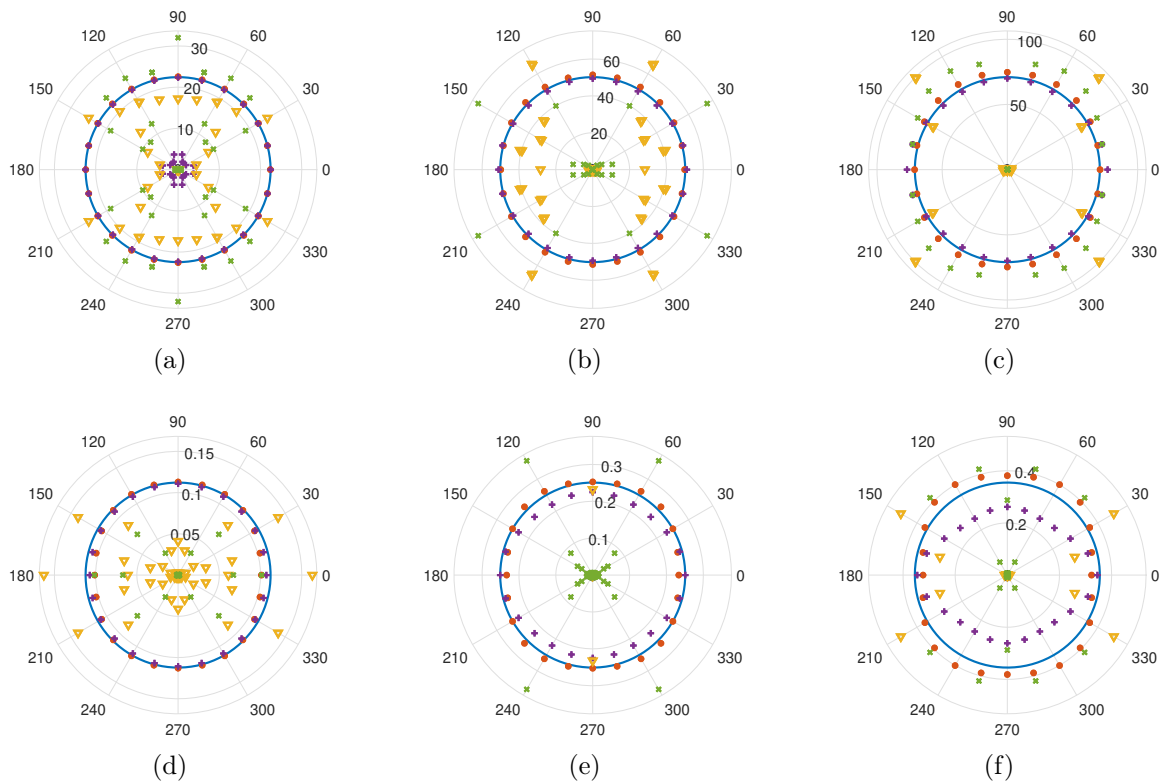


FIGURE 3.18 – Parties réelles et imaginaires des k-spaces de la plaque en acier à 3 fréquences. Solution analytique (—), AKSI 2D $n_w = 2$ (●), $n_w = 3$ (+) $n_w = 4$ (x) et $n_w = 5$ (▽). (a) Partie réelle à 250 Hz, (b) partie réelle à 1250 Hz, (c) partie réelle à 2500 Hz, (d) partie imaginaire à 250 Hz, (e) partie imaginaire à 1250 Hz et (f) partie imaginaire à 2500 Hz.

Figs. 3.17 et 3.18 montrent que seuls les k-spaces calculés par l’AKSI 2D avec $n_w = 2$

et $n_w = 3$ donnent des valeurs proches des valeurs analytiques, avec des résultats légèrement meilleurs pour $n_w = 2$. À l'inverse pour $n_w = 4$ et $n_w = 5$ les nombres d'onde mesurés par l'AKSI 2D en sont très éloignés.

Maintenant que les performances de la méthode AKSI 2D ont été étudiées sur des cas isotropes, un cas de structure orthotrope est présenté.

3.4.2 Modèle numérique d'une paroi bi-raïdie

La structure orthotrope étudiée est une paroi bi-raïdie. Cette structure périodique, est composée d'un assemblage de plaque et de raidisseurs. Cette exemple a déjà été présenté dans la section. 2.4.2 du Chapitre. 2. La Fig. 2.25 illustre un exemple de paroi bi-raïdie. La méthode AKSI 2D est testée sur ce type de structure afin de vérifier son efficacité sur des structures complexes.

3.4.2.1 Rappel du modèle homogénéisé

[Boutin 2020] ont fourni un modèle analytique du comportement en flexion de ce type de structure. Ce modèle, présenté dans la sous-section. 2.4.2.1 du Chapitre. 2 est rappelé. Il s'agit d'un modèle de plaque orthotrope équivalente obtenu à partir d'un processus d'homogénéisation asymptotique.

Avec ces paramètres, l'équation du modèle d'une plaque orthotrope équivalente à une plaque bi-raïdie proposée est Eqn. (3.70).

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_x I_x}{l_y} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tilde{E}_y I_y}{l_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ + \left(K_{\omega_x}^{bc} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{\omega_y}^{bc} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda_p' \langle \phi_{\omega}^{bc} \rangle \right) u, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\langle \phi_{\omega}^{CCCC} \rangle = \frac{4}{\delta r} \frac{I_1(\delta r) J_1(\delta r)}{I_1(\delta r) J_0(\delta r) + I_0(\delta r) J_1(\delta r)}. \quad (3.71)$$

Avec \tilde{E}_x et \tilde{E}_y les modules de Young complexes et $\delta^4 = \frac{\omega^2 \Lambda_p}{E_p' I_p} = (2\pi f)^2 \frac{\Lambda_p (1 - \nu_p^2)}{E_p (1 + i\eta) I_p}$, $r = 0.532 l_x$. Dans l'exemple considéré, les termes d'ordre 1 n'interviennent pas. $K_{\omega_x}^{bc} = K_{\omega_y}^{bc} = 0$ car les plaques internes sont encastées au niveau des raidisseurs. La relation de dispersion associée à Eqn. (3.70) est donnée Eqn. (3.72).

$$\begin{aligned} k_{\theta}^4 \left(\frac{E_x I_x}{l_y} \cos^4 \theta + \frac{E_y I_y}{l_x} \sin^4 \theta + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \\ - k_{\theta}^2 \omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \cos^2 \theta + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \sin^2 \theta \right) = \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda_p' \langle \phi_{\omega}^{bc} \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Les propriétés des raidisseurs sont rappelées Table. 3.1 et celles des plaques internes sont données Table. 3.2 celles des plaques internes.

Paramètres :	h_x, h_y	b_x, b_y	E_x, E_y	ν_x, ν_y	ρ_x, ρ_y	η
Valeurs :	0.01 m	0.01 m	69 GPa	0.3	2700 kg/m ³	0.05

TABLE 3.1 – Propriétés géométriques et mécaniques de la grille de raidisseurs.

Paramètres :	l_x, l_y	d	E_p	ν_p	ρ_p
Valeurs :	0.1 m	0.001 m	3 GPa	0.3	1200 kg/m ³

TABLE 3.2 – Propriétés géométriques et mécaniques des plaques internes.

3.4.2.2 Champs de déplacement issus de la résolution du modèle homogénéisé

Une structure de 20 par 20 cellules est considérée, avec une longueur totale de $L = 2.21$ m. Les extrémités sont encastées et un chargement ponctuel est appliqué au centre de la structure. Les champs de déplacement sont calculés en résolvant Eqn. (3.70) à l'aide d'un logiciel éléments finis. Les champs sont connus sur une grille de 91 par 91 points régulièrement espacés situés sur une fenêtre de côté $L_w = 1.808$ m centrée dans le domaine total. Les fréquences vont de 5 Hz à 500 Hz. Fig. 3.19 illustre les champs de déplacement issus du modèle homogénéisé utilisés dans cette sous-section.

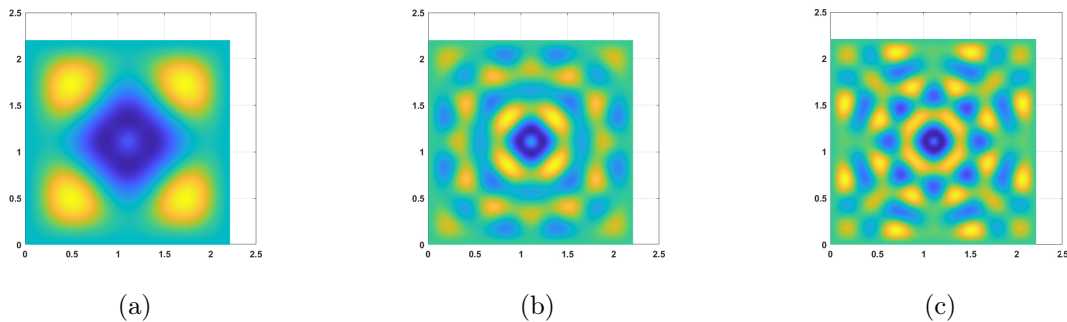


FIGURE 3.19 – Champs de déplacement calculés numériquement par éléments finis pour le modèle de paroi bi-raïdée homogénéisée à trois fréquences : (a) 50 Hz, (b) 250 Hz et (c) 450 Hz.

La méthode AKSI 2D est utilisée sur ces champs pour en extraire les nombres d'onde et les comparer au modèle analytique.

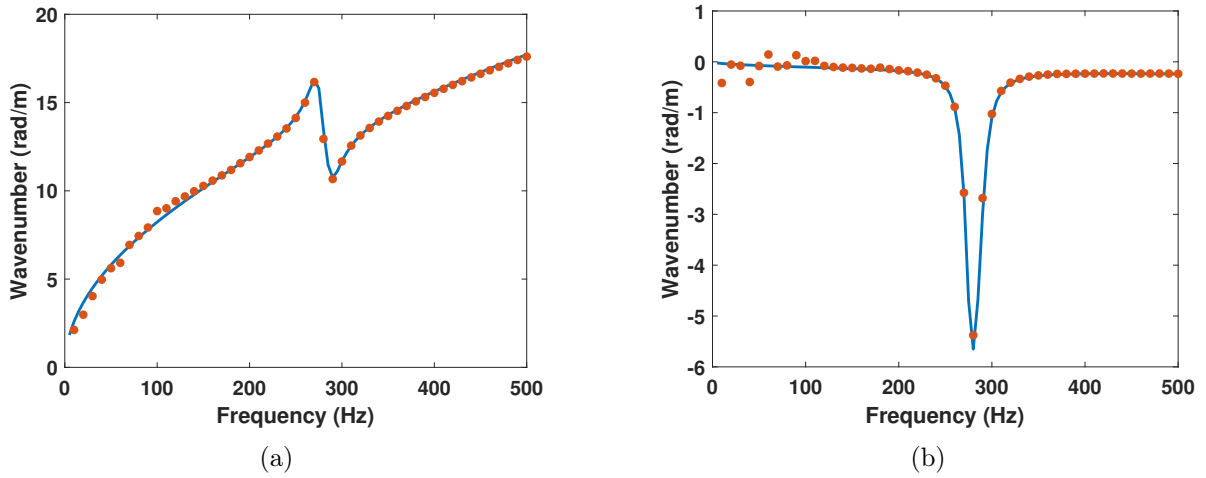


FIGURE 3.20 – Relation de dispersion dans la direction 0rad du modèle homogénéisé de la paroi bi-raïdie : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Modèle analytique (—) et nombres d'onde calculés par l'AKSI 2D (●).

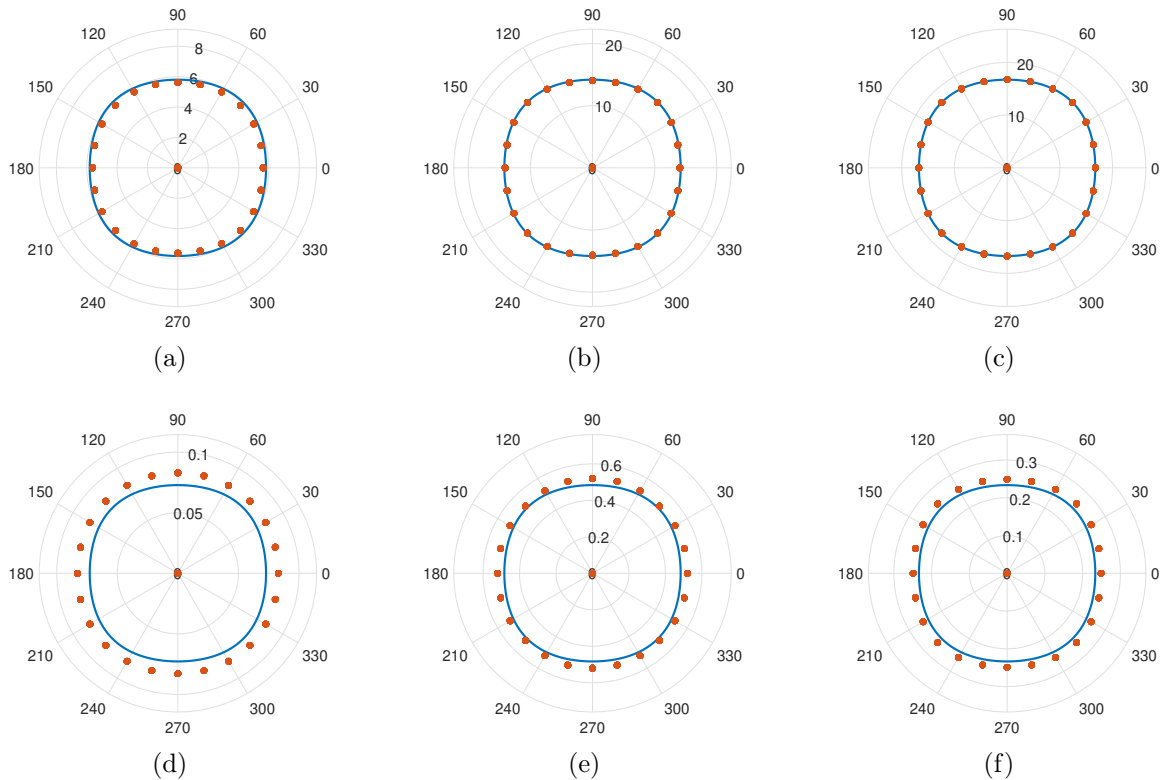


FIGURE 3.21 – Parties réelles et imaginaires des k-spaces du modèle homogénéisé de paroi bi-raïdie à trois fréquences. Modèle analytique (—) et nombres d'onde calculés par l'AKSI 2D (●). (a) Partie réelle à 50 Hz, (b) partie réelle à 250 Hz, (c) partie réelle à 450 Hz, (d) partie imaginaire à 50 Hz, (e) partie imaginaire à 250 Hz et (f) partie imaginaire à 450 Hz.

Fig. 3.20 et 3.21 montrent que les nombres d'onde sont bien calculés et correspondent pour

la plupart des fréquences et des directions à ceux du modèle de plaque orthotrope équivalente. La résonance interne à 275 Hz est même retrouvée pour les parties réelles et imaginaires.

3.4.2.3 Champs de déplacement issus de la résolution du modèle hétérogène

La méthode AKSI 2D a montré son efficacité pour le calcul des k-spaces à partir de champs de déplacement issus de la résolution numérique du modèle homogénéisé. Maintenant, celle-ci est testée sur des champs de déplacement issus de la résolution éléments finis du modèle hétérogène, faisant apparaître les raidisseurs et les plaques internes. Une paroi bi-raïdie avec les mêmes dimensions, 20 par 20 cellules, est considérée. Fig. 3.22 illustre les champs obtenus aux trois mêmes fréquences que pour le modèle homogénéisé Fig. 3.19.

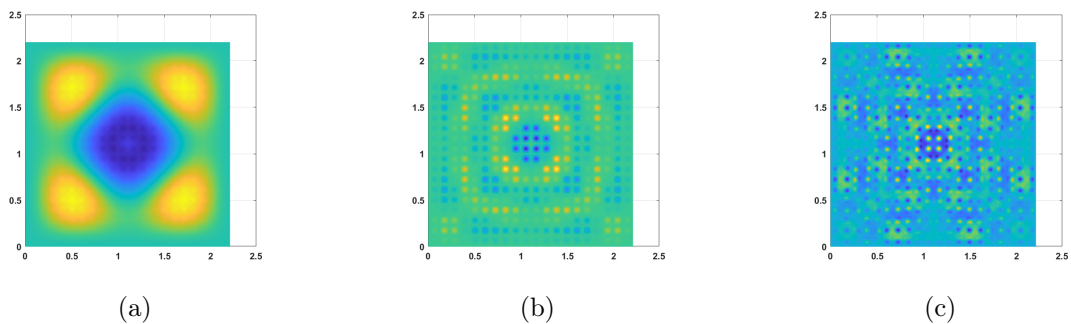


FIGURE 3.22 – Champs de déplacement calculés numériquement par éléments finis pour le modèle de paroi bi-raïdie hétérogène à trois fréquences : (a) 50 Hz, (b) 250 Hz et (c) 450 Hz.

De la même manière que pour le modèle homogénéisé, une grille de 91 par 91 points régulièrement espacés situés sur une fenêtre de côté $L_w = 1.808$ m centrée dans le domaine total est considérée. Les fréquences vont de 5 Hz à 500 Hz.

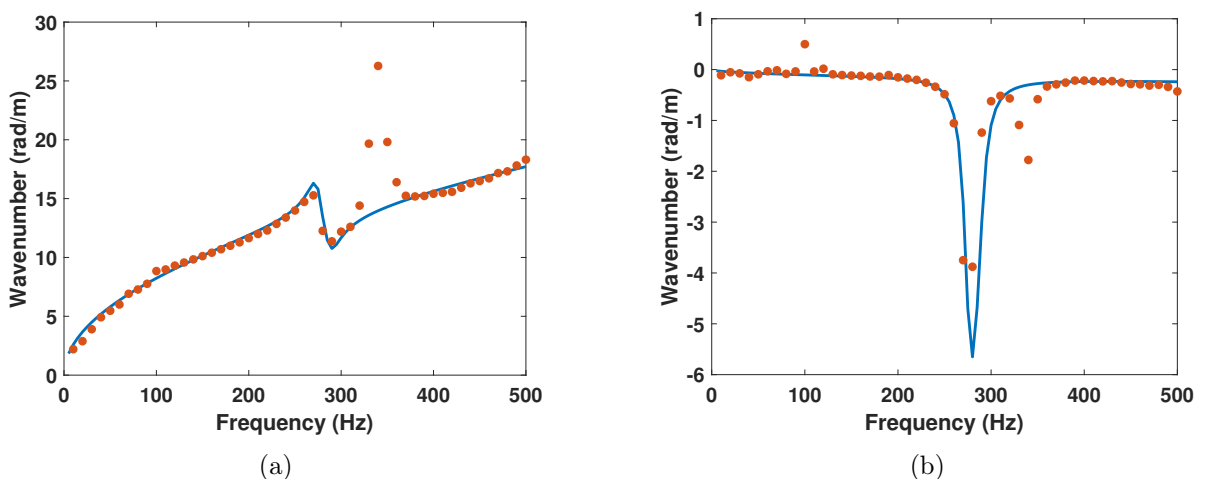


FIGURE 3.23 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad pour la paroi bi-raïdie : (a) partie réelle , (b) partie imaginaire. Modèle analytique (—) et nombres d'onde calculés par l'AKSI 2D (•).

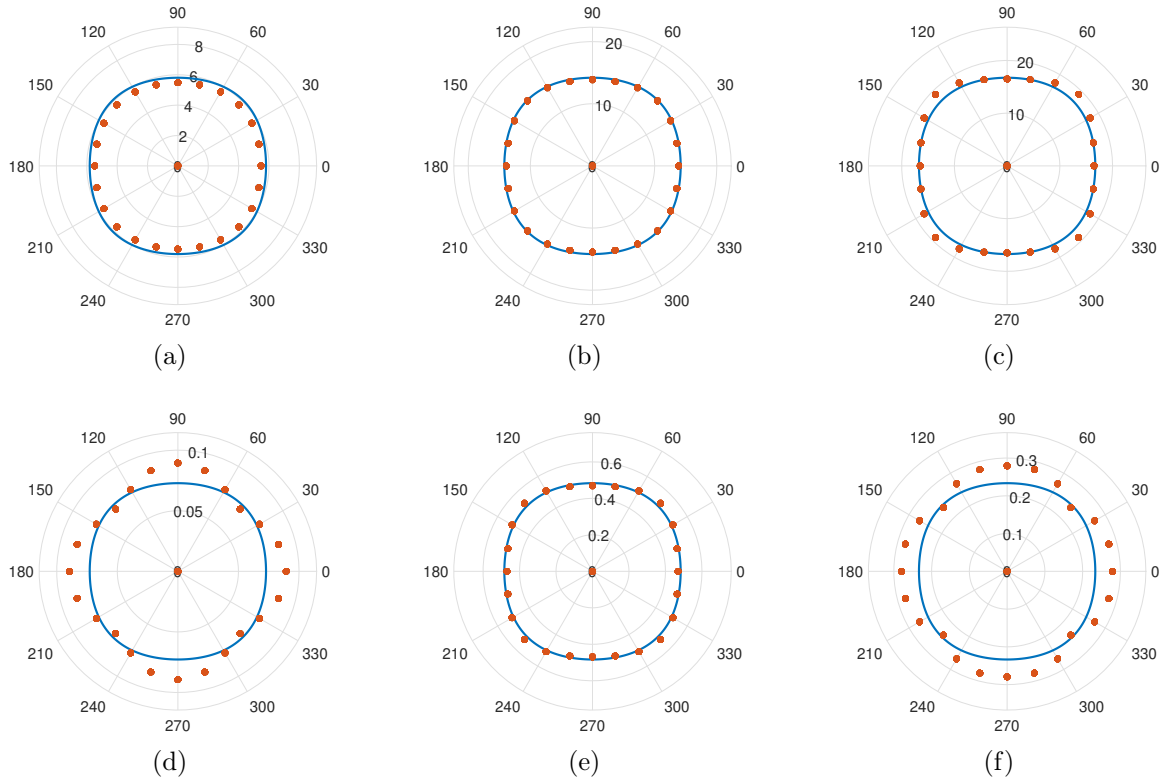


FIGURE 3.24 – Parties réelles et imaginaires des k-spaces de la paroi bi-raïdée à trois fréquences. Modèle analytique (—) et nombres d'onde calculés par l'AKSI 2D (•). (a) Partie réelle à 50 Hz, (b) partie réelle à 250 Hz, (c) partie réelle à 450 Hz, (d) partie imaginaire à 50 Hz, (e) partie imaginaire à 250 Hz et (f) partie imaginaire à 450 Hz.

Il apparaît Figs. 3.23 et 3.24 que la méthode AKSI 2D permet d'extraire précisément les k-spaces complexes à partir d'une structure hétérogène pour la plupart des fréquences. Cependant, un pic apparaît sur ces mêmes figures aux alentours de 350 Hz sur les parties réelles comme imaginaires. Comme ce pic n'apparaît pas lorsque les champs sont issus du modèle homogénéisé Fig. 3.20, il est probablement lié à l'aspect hétérogène de la structure. La méthode AKSI 2D perçoit d'autres nombres d'onde, tels ceux liés à la périodicité de la structure, qui viennent parasiter le calcul. Pour éviter que les longueurs d'onde associées à la périodicité de la paroi ne viennent perturber les mesures de k-spaces, la périodicité peut être prise en compte dans la méthode AKSI 2D.

3.4.2.4 Prise en compte de la périodicité

Pour ce faire, de la même manière que dans [Ribeiro 2022] pour le cas de la méthode de Prony, la périodicité est prise en compte. Tout d'abord, la grille de points doit être choisie telle que la taille d'une cellule de périodicité soit un multiple des pas de discrétisation de la grille. Soit $(U_{ij})_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y}$ la discrétisation du champ sur une grille régulière $(x_i, y_j)_{1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y}$ de N_x par N_y points de pas de discrétisation Δ_x et Δ_y . p_x et p_y sont la longueur et la largeur de la cellule de périodicité, supposée dans ce cas rectangulaire (Dans le cas de la paroi bi-raïdée présentée dans cette section, $p_x = l_x + b_x$ et $p_y = l_y + b_y$). Alors, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n\Delta_x =$

p_x et $m\Delta_y = p_y$. Ensuite la grille est séparée en un ensemble de $n \times m$ sous grilles de points ayant la même position dans les cellules de périodicité $(x_{i_0+ni}, y_{j_0+mj})_{1 \leq i \leq \lfloor \frac{N_x-i_0}{n} \rfloor, 1 \leq j \leq \lfloor \frac{N_y-j_0}{m} \rfloor}$ avec $0 \leq i_0 \leq n-1$ et $0 \leq j_0 \leq m-1$. Pour chacune de ces sous grilles, les pas de discrétisation deviennent p_x et p_y . Fig. 3.25 schématise la position des points d'une sous grille.

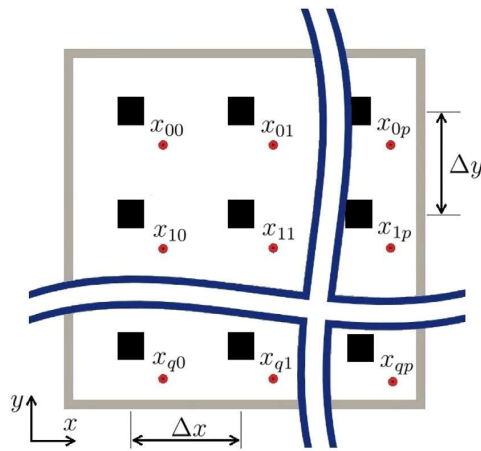


FIGURE 3.25 – Schéma du choix des points d'une sous-grille respectant la périodicité pour une structure orthotrope, [Ribeiro 2022].

Puis les matrices \mathbf{H} présentées sous-section. 3.3.2 contenant les coefficients $\phi_{i,k}$ sont calculées pour chacun des sous-champs avant d'être concaténées entre elles, les unes au-dessus des autres. Et c'est sur cette matrice H obtenue que la résolution aux moindres carrés est réalisée. Les relations de dispersion obtenues en utilisant cette approche sont présentées Fig. 3.26. Sur cette figure, les nombres d'onde apparaissent plus chaotiques que précédemment, mais le pic à 350 Hz n'est plus présent. En prenant en compte la périodicité comme expliqué ci-dessus, les mesures de k-spaces perdent un peu en qualité, mais ces dernières ne sont pas parasitées par la longueur d'onde associée à la périodicité de la structure.

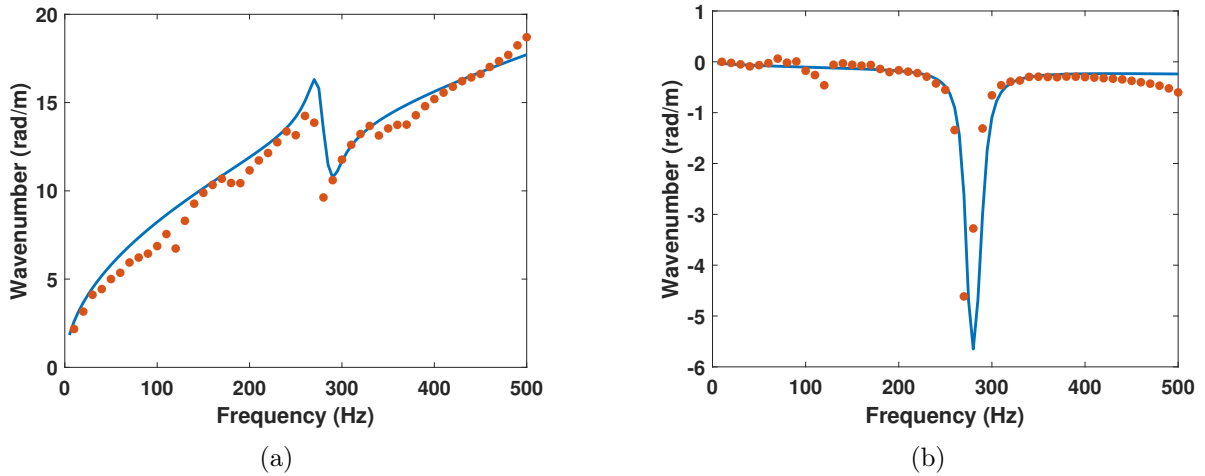


FIGURE 3.26 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad pour la paroi bi-raïdie : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Modèle analytique (—) et nombres d'onde calculés par l'AKSI 2D en prenant en compte la périodicité de la structure (●).

Ainsi, la méthode AKSI 2D permet de mesurer les k-spaces complexes à partir de structures périodiques orthotropes, éventuellement hétérogènes, mais cela nécessite dans certains cas de prendre en compte la périodicité de la structure dans les calculs.

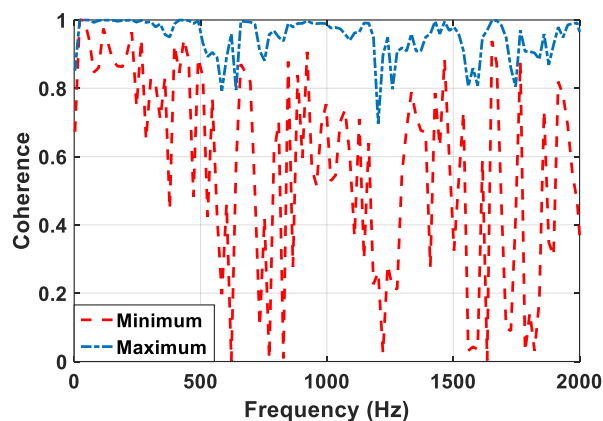
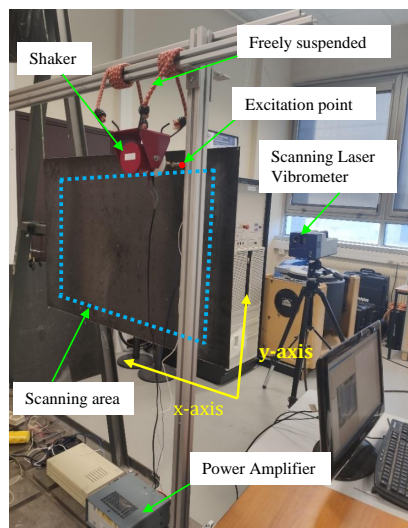
3.4.3 Validation expérimentale

Enfin, pour terminer la validation, la méthode AKSI 2D, celle-ci est utilisée pour calculer des k-spaces à partir de champ de déplacements mesurés expérimentalement. Cette section présente l'application de l'AKSI 2D sur des champs de déplacement expérimentaux.

3.4.3.1 Champs de déplacement expérimentaux d'une plaque isotrope en acier suspendue

La première étude expérimentale utilise des mesures réalisées sur une grande plaque d'acier excitée ponctuellement dans un environnement bruyant. La plaque mesure 0.95 m par 0.6 m, avec une épaisseur de 2 mm. Cette plaque d'acier a les mêmes propriétés géométriques que le modèle analytique de la section 3.4.1.2. L'essai expérimental est réalisé à l'aide d'un vibromètre laser Doppler à balayage (SLDV). La Fig. 3.27a montre le dispositif expérimental dans lequel la plaque a été suspendue au cadre fixe à l'aide de filaments d'acide polylactique pour simuler des conditions limites libres. Un agitateur électrodynamique (Brüel & kJær, 4810) a été utilisé pour générer une force mécanique ponctuelle au point rouge indiqué sur la Fig. 3.27a. L'agitateur a été fixé à la structure à l'aide d'une tête d'impédance et piloté par un signal type bruit blanc dans une gamme de fréquences allant de 0 Hz à 2500 Hz. Un vibromètre à balayage Polytec (PSV-400) a été utilisé pour mesurer le champ vibratoire complet sur une maille de 48×55 (pas d'échantillonnage $\Delta x = 1.59$ cm et $\Delta y = 0.99$ cm). La zone de balayage mesure 0.747 m par 0.535 m et est représentée par le rectangle en pointillés bleus de la Fig. 3.27a. Enfin, les champs de déplacement sont acquis par un analyseur de Fourier installé dans l'équipement de mesure. Les mesures ont été réalisées par Li et utilisé dans sa thèse [Li 2023a]. Les k-spaces

de référence ont été estimés en considérant les propriétés usuelles de l'acier : $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$, et $\rho = 7900$ kg/m³.



(a)

(b)

FIGURE 3.27 – (a) Photographie du montage expérimental, (b) Fonction de cohérence des mesures expérimentales.

Fig. 3.27b montre l'enveloppe de la fonction de cohérence mesurée sur tous les points de mesure. Les valeurs basses de la fonction de cohérence à certaines fréquences indiquent la présence d'un niveau élevé de bruit. Dans ces conditions, la comparaison des nombres d'onde complexes extraits par l'AKSI 2D, l'INCOME et l'IWC est illustrée Fig. 3.28. Sur la Fig. 3.28a, qui représente la partie réelle extraite du nombre d'onde, il apparaît que l'AKSI 2D fournit une courbe de dispersion plus précise sur l'ensemble de la gamme de fréquences. Toutefois, il convient de noter que la partie imaginaire des nombres d'onde extraite par ces trois méthodes n'est pas acceptable. Cela peut s'expliquer principalement par le fait que cette plaque de faible épaisseur a un amortissement très faible. Par conséquent, les champs de déplacement sont complexifiés par la présence d'un grand nombre d'ondes propagatives et réfléchies. Par conséquent, les champs de déplacement dans cette plaque ne peuvent pas être représentés par une somme des fonctions exponentielles, ce qui est contraire au modèle supposé pour ces trois méthodes.

La comparaison des k-spaces à différentes fréquences est illustrée Fig. 3.29 où Fig. 3.29a montre la partie réelle du k-space à une fréquence à laquelle la cohérence est faible, tandis que Fig. 3.29b la montre à une fréquence où la cohérence est élevée. Il apparaît que les deux k-spaces extraits par l'AKSI 2D concordent bien avec les résultats analytiques, sans être influencés par le bruit et la faible résolution à 621 Hz. La fiabilité des performances de l'AKSI 2D se révèle être un avantage par rapport à l'INCOME et l'IWC dans des cas avec une faible cohérence ou dans un environnement bruyant, ce qui en fait un bon candidat pour l'extraction de la partie réelle des k-spaces dans des situations expérimentales.

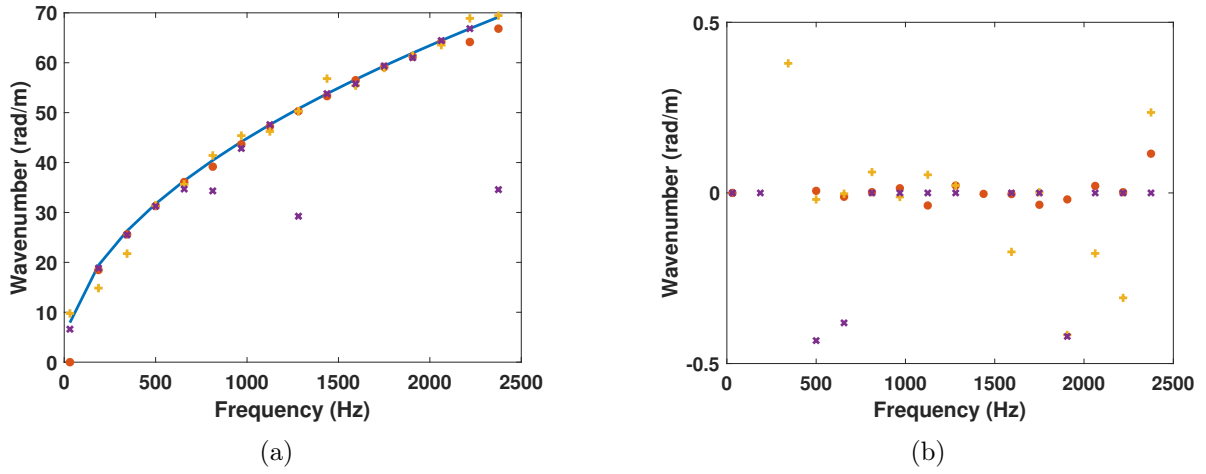


FIGURE 3.28 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad pour la plaque expérimentale en acier : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Modèle analytique (—) et nombres d’onde calculés par l’AKSI 2D (●) l’INCOME (+) et l’IWC (x).

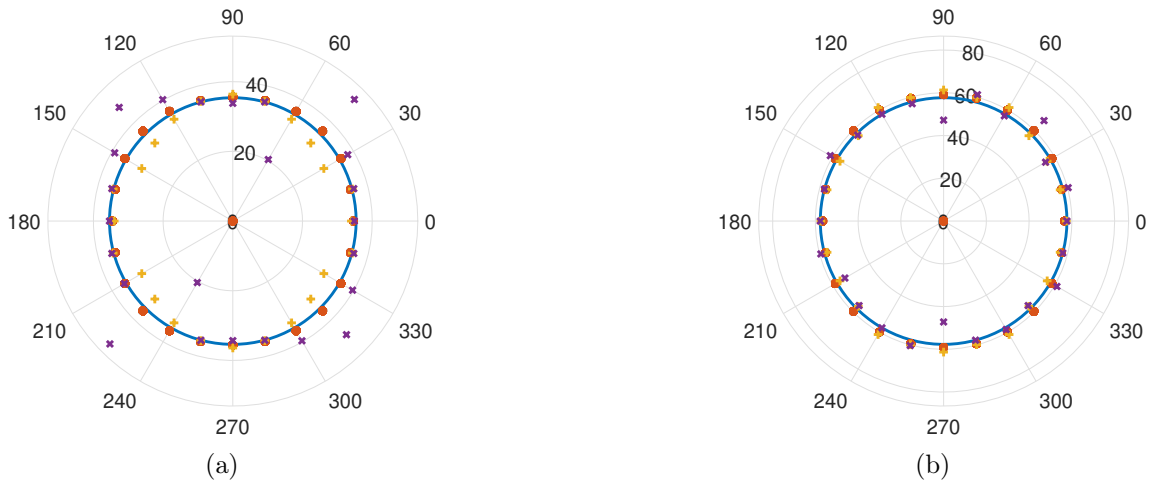


FIGURE 3.29 – Parties réelles des k-spaces de la plaque expérimentale en acier à deux fréquences. Solution analytique (—), AKSI 2D (●) INCOME (+) et IWC (x). (a) à 621 Hz, une cohérence basse Fig. 3.27b et (b) à 1653 Hz une cohérence haute Fig. 3.27b.

3.4.3.2 Champs de déplacement expérimentaux mesurés sur des plaques encastrees

Un second jeu de données expérimentales est utilisée pour tester plus en profondeur la méthode AKSI 2D en situation réelle. Encore une fois, celle-ci est comparée aux méthodes IWC et INCOME. Ces données expérimentales ont été fournies par Allah Tavakoli. Celles-ci ont été utilisées dans ses articles et son travail de thèse [AllahTavakoli 2023]. Les champs de déplacement de trois plaques ont été mesurés, deux plaques isotropes et une plaque composite. Une des plaques isotropes est en aluminium et l’autre en acier. La plaque composite est une plaque stratifiée. À l’inverse du cas précédent, les plaques ont été encastrees à leurs bords.

Paramètres :	E	ν	ρ	d
Aluminium :	70 GPa	0.33	2648 kg/m ³	3 mm
Acier :	210 GPa	0.29	7769 kg/m ³	0.85 mm

TABLE 3.3 – Propriétés mécaniques et géométriques des plaques en aluminium et en acier. Valeurs provenant de [AllahTavakoli 2023].

Paramètres :	D_{11}	D_{22}	$D_{12} + 2D_{66}$	M
Valeurs :	259 N m	136 N m	189 N m	9.45 kg/m ²

TABLE 3.4 – Propriétés de la plaque stratifiée. Valeurs provenant de [AllahTavakoli 2023].

Les trois plaques sont rectangulaires et mesurent 42 cm par 62 cm. L'expérience a été réalisée dans une chambre semi-anéchoïque. Les mesures ont été réalisées au vibromètre laser sur une grille régulière de 39 par 60 points. $\Delta x = \Delta y = 1$ cm. Une force ponctuelle appliquée en $x_0 = 29.2$ cm, and $y_0 = 9.9$ cm par un pot vibrant a permis d'exciter la structure.

Les propriétés géométriques et mécaniques des plaques sont données par [AllahTavakoli 2023]. Les modules de Young E , les coefficients de Poisson ν , les masses volumiques ρ et les épaisseurs d des plaques isotropes sont rappelés Table. 3.3. Pour ces plaques, les valeurs analytiques sont basées sur le modèle de plaque de Kirchhoff-Love. La plaque stratifiée est composée de l'assemblage de 25 couches de CFRP (Carbon-Fiber-Reinforced Polymer) [(+45/ - 45/0/ + 90/0/ + 45/ - 45/0/ + 90/0/ + 45/ - 45)20]S. La plaque stratifiée est un cas de plaque orthotrope. Celle-ci peut être modélisée par l'équation d'ordre 4 suivante Eqn. (3.73).

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(t, x, y). \quad (3.73)$$

Et relation de dispersion associée étant Eqn. (3.74). Celle-ci servant de référence pour comparer les nombres d'onde calculés sur cette plaque. Pour les calculs de k-spaces par l'AKSI 2D, les cas isotropes sont traités avec le paramètre $n_w = 2$ et le cas du stratifié est traité avec $n_w = 3$. Les relations de dispersions sont présentées avec les k-spaces à 2500 Hz et 7500 Hz.

$$k_\theta^4 = \frac{M\omega^2}{D_{11} \cos^4 \theta + 2(D_{12} + 2D_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + D_{22} \sin^4 \theta}. \quad (3.74)$$

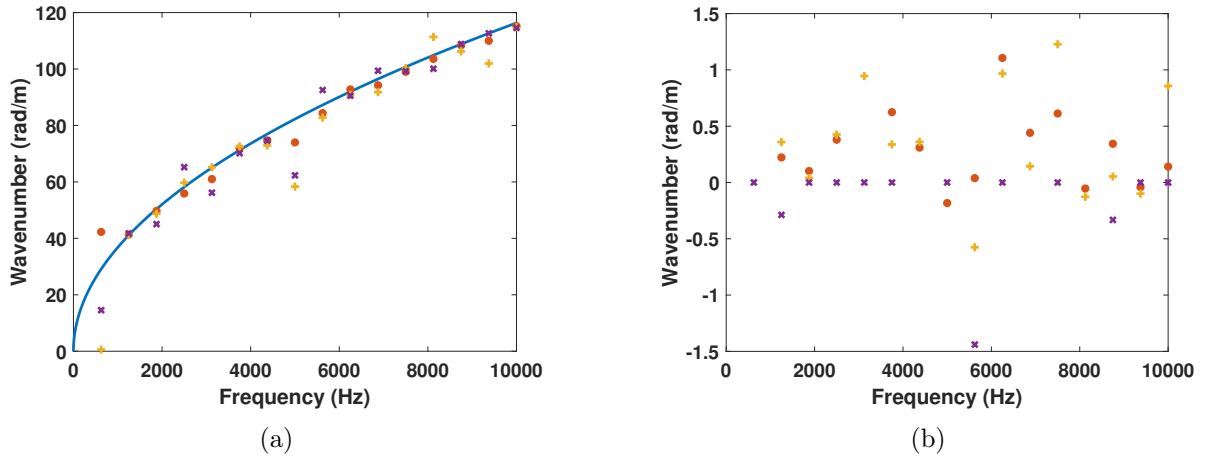


FIGURE 3.30 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad pour la plaque expérimentale en aluminium : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Modèle analytique (—) et nombres d'onde calculés par l'AKSI 2D (●) l'INCOME (+) et l'IWC (x).

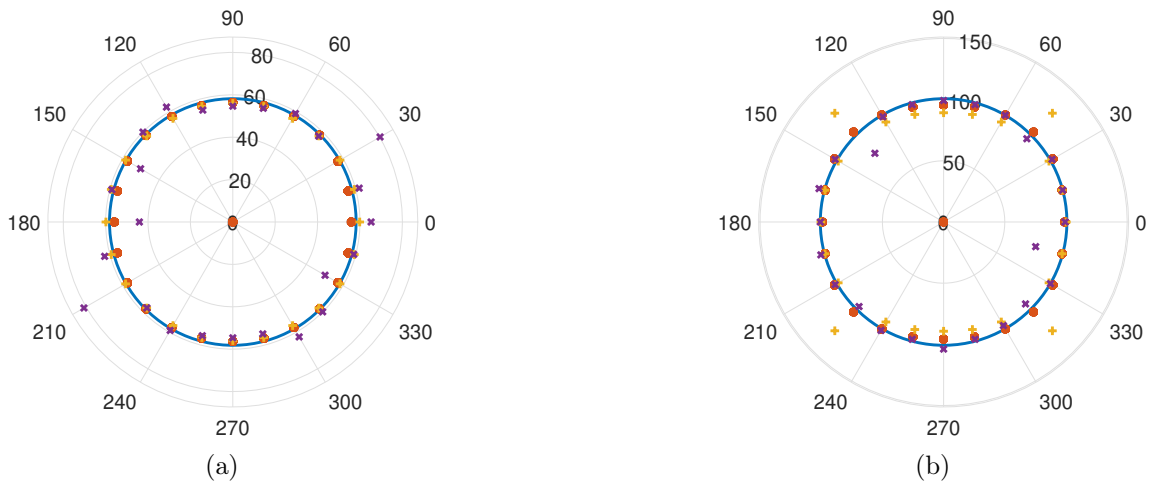


FIGURE 3.31 – Parties réelles des k-spaces de la plaque expérimentale en acier à deux fréquences. Solution analytique (—), AKSI 2D (●) INCOME (+) et IWC (x). (a) à 2500 Hz, et (b) à 7500 Hz.

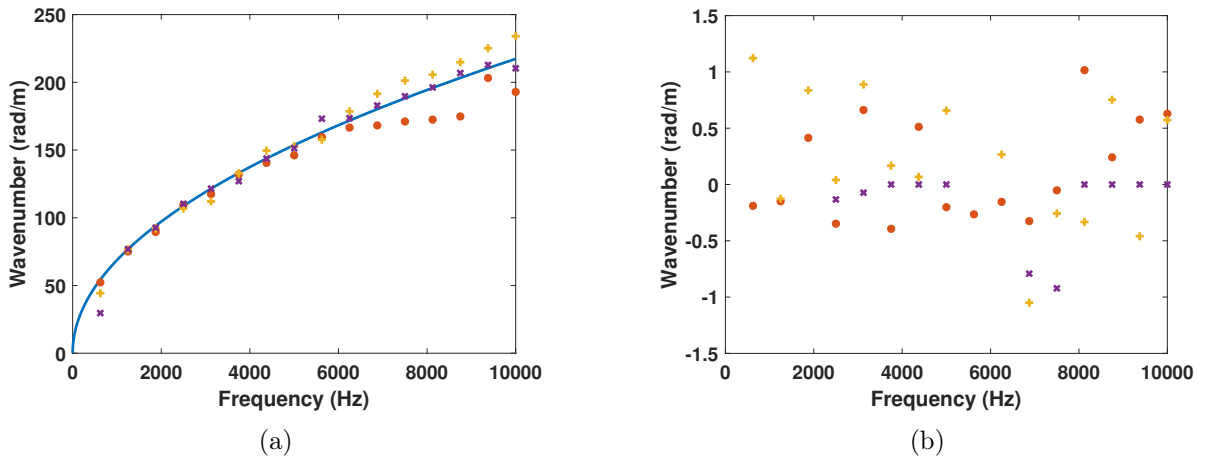


FIGURE 3.32 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad pour la plaque expérimentale en acier : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Modèle analytique (—) et nombres d’onde calculés par l’AKSI 2D (●) l’INCOME (+) et l’IWC (x).

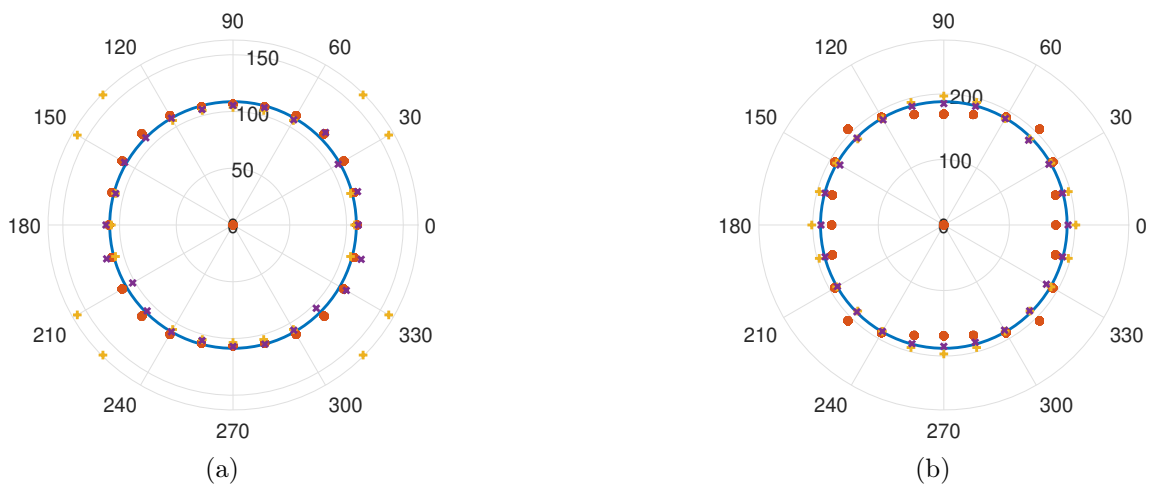


FIGURE 3.33 – Parties réelles des k-spaces de la plaque expérimentale en acier à deux fréquences. Solution analytique (—), AKSI 2D (●) INCOME (+) et IWC (x). (a) à 2500 Hz, et (b) à 7500 Hz.

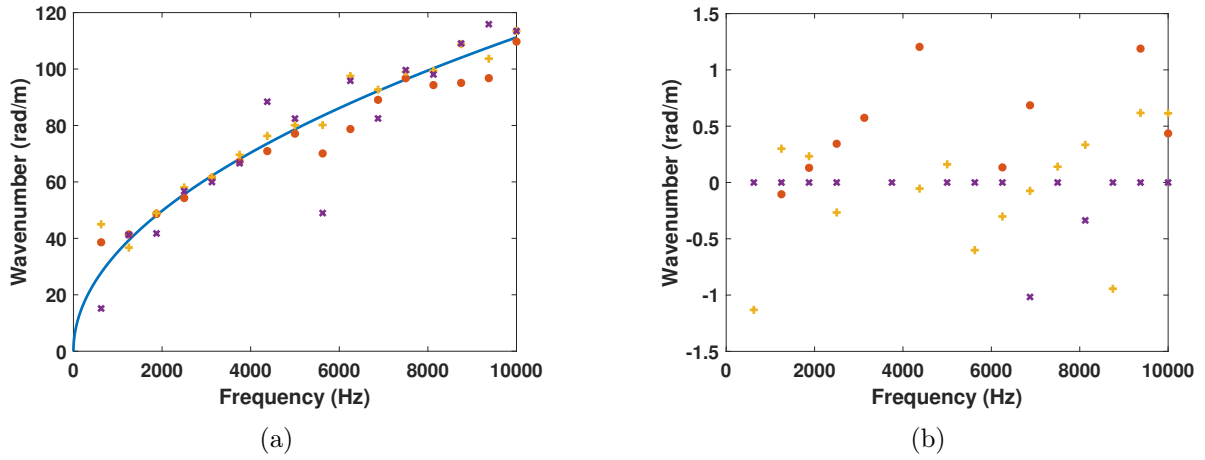


FIGURE 3.34 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad pour la plaque expérimentale en composite stratifié : (a) partie réelle, (b) partie imaginaire. Modèle analytique (—) et nombres d'onde calculés par l'AKSI 2D (●) l'INCOME (+) et l'IWC (x).

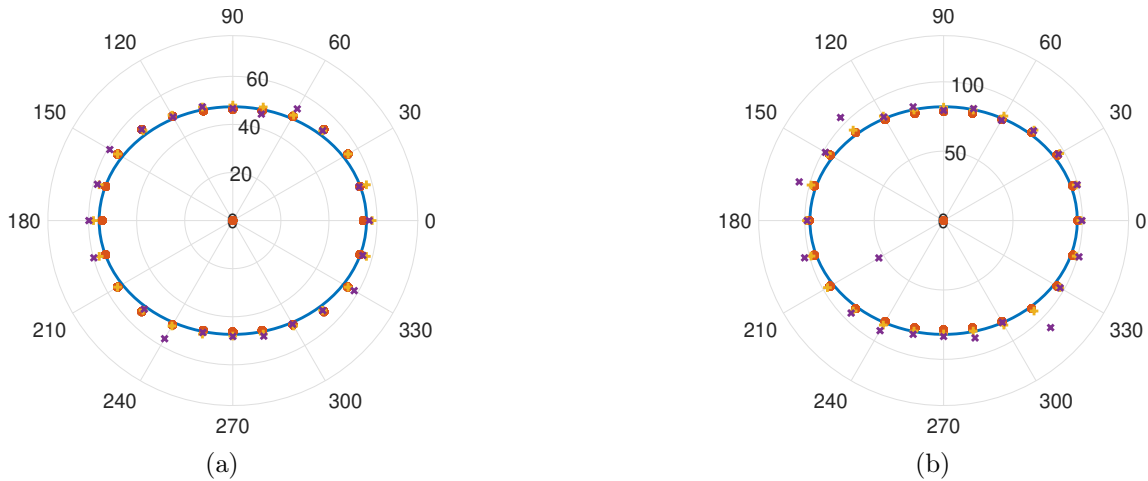


FIGURE 3.35 – Parties réelles des k-spaces de la plaque expérimentale en stratifié à deux fréquences. Solution analytique (—), AKSI 2D (●) INCOME (+) et IWC (x). (a) à 2500 Hz, et (b) à 7500 Hz.

Les Figs. 3.30, 3.31, 3.32 et 3.33, illustrant les courbes de dispersions et k-spaces calculés pour les plaques isotropes, montrent que l'AKSI 2D permet de mesurer précisément les parties réelles des nombres d'onde dans ces conditions expérimentales. En comparant les courbes de dispersion de la plaque en acier Fig. 3.32 avec celles de la précédente expérience Fig. 3.28a, on remarque que les valeurs calculées sur les données de la seconde expérience semblent légèrement moins bonnes. Cependant, il est à noter que les mesures de la seconde expérience montent à des fréquences beaucoup plus hautes. Et aux fréquences où l'AKSI 2D donne des résultats s'éloignant des valeurs analytiques (6000 Hz – 10 kHz), les valeurs calculées par l'INCOME s'en écartent légèrement aussi. À l'inverse, les mesures de l'IWC sont très bonnes à ces fréquences. En effet, l'IWC est une méthode nécessitant un grand nombre de longueurs d'onde dans le domaine pour fonctionner au mieux, et par conséquent cela nécessite de travailler à plus haute

fréquence. La force de l'AKSI 2D est sa meilleure efficacité et sa robustesse à plus basses fréquences.

Enfin, les figures Figs. 3.34 et 3.35 permettent de conclure l'étude basée sur des données expérimentales. Celles-ci présentent les k-spaces et relations de dispersions calculées à partir des champs de déplacement mesurés expérimentalement sur la plaque composite stratifié. Elles illustrent la capacité de l'AKSI 2D à retrouver précisément les parties réelles des nombres d'onde même lorsque la structure n'est pas isotrope.

3.5 Conclusion intermédiaire

Ce chapitre présente une nouvelle méthode inverse pour le calcul des k-spaces à partir de champs de déplacement bidimensionnels : Algebraic K-Space Identification 2D (AKSI 2D). Par rapport à d'autres techniques k-spaces classiques 2D, comme l'IWC et l'INCOME, celle-ci montre des performances intéressantes telles que sa robustesse dans le calcul des k-spaces complexes même à des fréquences relativement basses et en présence de bruit ou d'incertitudes sur les positions.

Tout d'abord, les formulations de l'AKSI 2D, basées sur la technique d'identification algébrique, ont été présentées et détaillées. Ensuite, la méthode proposée est validée en la comparant à d'autres méthodes inverses, en incluant des exemples analytiques, numériques et expérimentaux. Dans la validation analytique, la méthode proposée est appliquée à une plaque d'acier simplement supportée dans des conditions parfaites et dans des conditions stochastiques, telles que du bruit sur les signaux et des perturbations des positions. La théorie de plaques de Kirchhoff-Love est utilisée pour générer les champs de déplacement. Les résultats sont comparés à ceux extraits par l'IWC et l'INCOME, ce qui prouve la capacité de la méthode à estimer des k-spaces complexes dans des conditions réalistes avec une meilleure robustesse que les autres méthodes courantes. La validation numérique est basée sur les champs de déplacement issus de la résolution par éléments finis d'un modèle homogénéisé et d'un modèle hétérogène de plaque bi-raïdie. Cette étude valide l'efficacité de l'AKSI 2D pour l'extraction des k-spaces complexes pour les structures orthotropes. Enfin, la validation expérimentale a été effectuée avec des plaques en acier, aluminium et composite stratifié. Ce cas valide la capacité de l'AKSI 2D à extraire des k-spaces à partir de données réelles et bruitées provenant de plaques isotropes, mais aussi orthotropes.

Cette nouvelle méthode fournit des résultats intéressants pour les calculs des k-spaces dans des conditions qui sortent du champ d'application des méthodes déjà existantes, en surmontant certaines de leurs limites et en étant efficace et robuste pour le calcul de k-spaces complexes. Cependant, en contrepartie, l'AKSI 2D est plus coûteuse en temps que l'INCOME lorsque de nombreux points de mesures sont pris en compte.

Cette méthode peut être utilisée dans le domaine vibroacoustique, pour caractériser les propriétés des matériaux et structures ou affiner des modèles, comme on le verra au chapitre suivant.

Identification d'équations aux dérivées partielles par analyse k-space

Ce chapitre présente une méthode permettant d'identifier les paramètres d'équations de propagation d'ondes à l'aide des caractéristiques de dispersion (k-space) sur des domaines bidimensionnels. L'approche proposée se base sur la minimisation de la différence entre une formulation analytique de la relation de dispersion et les nombres d'onde calculés à partir des champs de solution. L'identification des coefficients est testée sur des champs de solution calculés par éléments finis pour certaines équations d'ordre 2, 4 et 6. Elle a ensuite été appliquée à un exemple de métastucture : une paroi raidie dont il existe un modèle homogénéisé de plaque orthotrope équivalente, et enfin à des champs plaques mesurés expérimentalement. Dans les limites du pas de discrétisation spatial et de la taille du domaine, le processus permet une récupération précise d'un ou plusieurs paramètres des équations de propagation d'ondes.

Une grande partie du travail présenté dans ce chapitre a été publié dans [Brion 2023].

Contents

4.1	Introduction	136
4.2	Processus d'identification	138
4.2.1	Types d'équation	138
4.2.2	Méthodologie	139
4.3	Validation de la procédure avec des solutions numériques d'EDP	141
4.3.1	Équations d'ordre 2	142
4.3.2	Équations d'ordre 4	146
4.3.3	Équations d'ordre 6	149
4.4	Application de l'identification de paramètres pour l'amélioration d'un modèle de plaque orthotrope homogénéisé équivalent à une paroi bi-raidie	151
4.4.1	Rappel du modèle homogénéisé	152
4.4.2	Identification de paramètres à partir de champ solution du modèle homogénéisé	153
4.4.3	Identification de paramètres à partir de la résolution du modèle complet	155
4.5	Identification de paramètres à partir de champs de déplacements expérimentaux	158
4.5.1	Plaques isotropes expérimentales	159
4.5.2	Plaque composite expérimentale, identification simultanée de deux paramètres	160
4.6	Conclusion intermédiaire	162

4.1 Introduction

Les structures composites et les métamatériaux sont utilisés dans un large éventail d'applications. Ces structures peuvent présenter des propriétés exotiques impossibles à atteindre avec des matériaux classiques [Del Vescovo 2014, Mukhopadhyay 2017]. Elles peuvent même être construites de manière à obtenir des propriétés originales dans d'autres domaines, comme des propriétés acoustiques, diélectriques ou optiques. Les matériaux composites sont constitués de l'assemblage d'au moins deux composants non miscibles et sont par conséquent des structures hétérogènes. Les métamatériaux sont des structures principalement constituées de motifs périodiques répétés spatialement d'assemblages de différents matériaux. Le contraste entre les composants est souvent à l'origine des propriétés originales. Le comportement mécanique de ce type de structure peut être dominé par l'un de ses composants, en fonction du test ou de l'observation effectuée. Pour ces raisons, ce type de structure nécessite des formulations non classiques. Du fait de leur complexité, leur modélisation peut faire appel à des modèles coûteux en temps de calcul. De plus, en raison des forts contrastes présents entre les composants, une précision insuffisante dans la résolution du modèle peut conduire à passer sous silence l'effet de certaines contributions dans le comportement total. Cependant, pour ce type de structures, les phénomènes peuvent parfois être modélisés à l'aide de formulations équivalentes [Timoshenko 1959] ou des formulations analytiques non classiques construites par un processus d'homogénéisation [Panasenko 2005, Hans 2008, Boutin 1996]. Ces approches analytiques nécessitent la connaissance de paramètres équivalents qui ne peuvent pas toujours être calculés directement. Les rigidités, le module de Young dans une direction et la masse apparente peuvent entre autres être cités.

En mécanique des structures, les équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement sont nécessaires pour toute étude, analyse ou conception. C'est un point très important encore aujourd'hui, surtout en ce qui concerne les nouveaux matériaux et métastructures. Un grand nombre d'équations du mouvement sont utilisées dans l'ingénierie. Ces EDP se basent sur un comportement unidimensionnel, bidimensionnel ou même tridimensionnel. Les modèles d'Euler-Bernoulli, de Timoshenko et de Kirchhoff sont probablement les plus classiques et les plus utilisés. Toutes correspondent des simplifications de la théorie élastodynamique 3D dans des cas particuliers. Ces simplifications peuvent conduire à des erreurs ou des imprécisions lorsque les fréquences augmentent ou pour certains matériaux particuliers. C'est un problème délicat pour les métamatériaux et métastructures, pour lesquels l'hétérogénéité est un facteur clé. Deux solutions sont envisageables. La première fait appel à des théories d'homogénéisation multi-échelles pour obtenir l'EDP représentant le milieu. La seconde solution est étudiée dans ce chapitre : utiliser une technique inverse pour identifier les paramètres principaux de l'EDP.

De nombreux travaux ont déjà été réalisés dans le domaine de l'identification et de la caractérisation des matériaux et des structures à partir de mesures. La méthode de la poutre d'Oberst [Renault 2011, Wojtowicki 2004] peut être citée pour les poutres afin de retrouver les valeurs des paramètres, mais seulement aux fréquences de résonance. Certaines techniques de calcul ou d'estimation des paramètres élastiques dans le cas des matériaux poreux sont présentées dans [Jaouen 2008], souvent le module de Young ou les propriétés d'amortissement. À partir d'une mesure de champ complet, cinq méthodes sont présentées dans [Avril 2008] : finite element model updating method, constitutive equation gap method, virtual fields method,

equilibrium gap method et reciprocity gap method. Dans [Shirota 2003], un module de Young dépendant de l'espace est identifié, basé sur la connaissance des efforts de traction à la surface et calculé avec une méthode adjointe. En outre, certaines approches utilisent la propagation des ondes pour extraire des informations de différents types de structures. [Every 1990] utilise des mesures de vitesse de groupe pour estimer les constantes élastiques dans des structures anisotropes. Les propriétés élastiques sont identifiées à partir d'un champ de déplacement en transitoire, connu sur un ensemble de points, dans [Liu 2001, Liu 2002]. [Liu 2001] s'intéresse aux matériaux à gradient fonctionnel et [Liu 2002] à des composites stratifiés, mais améliore la recherche des valeurs optimales grâce à un algorithme génétique. [Deng 2007] propose une approche non linéaire basée sur les ondes de Lamb pour caractériser des plaques. Dans [Sale 2011], une identification des constantes élastiques est proposée, basée sur la vitesse de phase des ondes guidées et utilise une formulation éléments finis semi-analytiques. Et dans le cas des composites stratifiés, dans [Chronopoulos 2017], les paramètres sont identifiés par comparaison des temps de vol à partir des mesures et des résolutions wave finite element.

Les caractéristiques de propagation des ondes fournissent beaucoup d'informations sur le comportement d'une structure [Leissa 1969]. Elles sont déjà utilisées dans de nombreuses autres applications : le temps de vol des ondes ultrasoniques pour les essais non destructifs. [Chien 1993] ou la propagation des ondes de Lamb pour la détection des dommages dans les matériaux composites stratifiés [Kessler 2002, Su 2006]. En particulier, les nombres d'onde peuvent être étudiés. Les nombres d'onde sont des quantités complexes qui caractérisent la propagation des ondes dans une structure. Ils peuvent être interprétés comme une pulsation spatiale et peuvent être liés à la fréquence et aux paramètres géométriques et mécaniques de la structure par la relation de dispersion. Dans le cas de structures bidimensionnelles telles qu'une plaque ou un panneau, les nombres d'onde sont fonctions de la direction de propagation. L'ensemble des nombres d'onde dans toutes les directions est le k-space. Un k-space fournit beaucoup d'informations sur le comportement vibratoire de la structure. Il existe des méthodes pour obtenir le k-space à partir d'un champ de déplacement. Comme il s'agit de fréquences spatiales, l'un des outils le plus classique pour les étudier est la transformée de Fourier [Heckbert 1995]. Elle peut être utilisée pour obtenir les nombres d'onde, mais elle est limitée aux nombres d'onde réels, de sorte que la partie imaginaire est négligée. Elle est idéale pour un domaine infini. De plus, dans le cas discret, le pas d'échantillonnage spatial doit être suffisamment inférieur à la longueur d'onde étudiée (théorème de Nyquist-Shannon). C'est pourquoi d'autres méthodes doivent être utilisées comme la méthode Inhomogeneous Wave Correlation (IWC) ou INverse CONvolution MEmethod (INCOME). La méthode IWC, [Berthaut 2005, Ichchou 2008a] est basée sur la maximisation d'une fonction de corrélation en utilisant une onde inhomogène. En deux dimensions, cette onde est paramétrée par l'angle et le nombre d'onde pour cet angle. L'INCOME, [Boukadia 2021, Boukadia 2022] est une autre méthode permettant d'extraire le k-space à partir d'un champ de déplacement. L'objectif de la méthode est de trouver un noyau de convolution tel que la convolution entre celui-ci et le champ discret soit minimisée. La forme du noyau est déterminée par la dimension du champ et les hypothèses du problème. Après avoir trouvé les coefficients du noyau de convolution, le nombre d'onde dans une direction provient de la résolution d'une équation polynomiale composée des coefficients du noyau de convolution.

Le but de ce chapitre est d'utiliser les caractéristiques de propagation pour identifier les coefficients d'une équation aux dérivées partielles à partir d'un champ solution. Le proces-

sus présenté est adapté à la recherche d'informations pour des équations de type propagation d'ondes à partir de champs solutions sur des domaines en dimension 2. Il repose sur la comparaison entre des formulations analytiques et des k-spaces extraits de champs solutions à différentes fréquences. Cette méthode pourrait s'avérer très utile pour déterminer des paramètres de modèles équivalents, tels que des modèles homogénéisés, et simplifier ainsi les résolutions de problèmes type métastructures. En particulier, ce procédé peut fournir des valeurs de paramètres équivalents en fonction de la fréquence.

Ce chapitre présente un processus d'identification de coefficient d'EDP pour des équations de propagation d'ondes sur des domaines en 2 dimensions, basé sur la comparaison entre formulations analytiques et k-spaces de référence extraits des champs solutions à différentes fréquences. La méthode d'identification a été testée sur des plaques et des membranes dans des cas isotropes et non isotropes, y compris un cas présentant une dynamique multi-échelles.

Le chapitre est structuré comme suit. La section. 4.2 présente la méthode d'identification. Cette méthode est ensuite testée section. 4.3 sur des champs de déplacement issus de la résolution numérique de plusieurs exemples d'EDP. Suite à cela, section. 4.4, la méthode d'identification est appliquée à un exemple de structure périodique : une paroi bi-raïdie, dans le but d'affiner un modèle déjà existant de plaque orthotrope équivalente issue d'un processus d'homogénéisation asymptotique [Boutin 2020]. Enfin, la section. 4.5 termine la validation en appliquant le procédé d'identification de paramètres à des champs de déplacement issus de mesures expérimentales faites sur des plaques en acier, aluminium et composite stratifié.

4.2 Processus d'identification

Une méthode d'identification de paramètre pour des équations aux dérivées partielles sur des domaines en dimension 2, basée sur l'analyse des nombres d'onde est présentée. L'idée est d'utiliser les k-spaces extraits de champs de déplacement comme références et de les comparer avec la formulation analytique de la relation de dispersion provenant de l'équation du modèle. Avec cette approche, une valeur de paramètre, en fonction de la fréquence, peut être obtenue.

4.2.1 Types d'équation

Cette méthode utilise une formulation analytique de la relation de dispersion, ou au moins, nécessite de pouvoir estimer la relation de dispersion à partir du coefficient qui doit être identifié. Elle fonctionne pour les équations aux dérivées partielles linéaires associées à de la propagation d'onde, dans le domaine fréquentiel sur des domaines bidimensionnels. Les équations sont de la forme Eqn. (4.1).

$$\sum_{m=1}^N \sum_{l=0}^m \left(a_{l,m-l} \frac{\partial^m u}{\partial x^l \partial y^{m-l}} \right) + \omega^2 a_0 u = 0. \quad (4.1)$$

Pour ce type d'équation, la relation dispersion analytique peut être obtenue comme racine de l'équation polynomiale suivante, fonction de la direction θ dans le domaine.

$$\sum_{m=1}^N \left((ik_\theta)^m \sum_{l=0}^m a_{l,m-l} \cos^l \theta \sin^{m-l} \theta \right) = -\omega^2 a_0. \quad (4.2)$$

Pour obtenir Eqn. (4.2) à partir de Eqn. (4.1), une onde harmonique de direction de propagation $\vec{n}_\theta = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$ est considérée : $u(x, y) = e^{ik_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta)}$.

En particulier, dans ce qui suit, seuls les termes dérivés d'ordre pair sont considérés. L'ordre de l'équation N est donc un nombre pair. Pour que la solution des équations soit liée à des phénomènes de propagation d'onde utilisables, les coefficients d'ordre maximal sont supposés positifs (si certains d'entre eux sont complexes, alors au moins leur partie réelle est positive) : $a_{l,N-l} \geq 0$ et le terme a_0 , le plus souvent lié à la masse ou à l'inertie, est supposé du signe $(-1)^{N/2+1}$.

4.2.2 Méthodologie

À partir de champs solutions donnés, l'objectif est de retrouver un coefficient de l'équation, qui peut avoir une signification physique. La méthode présentée utilise les informations données par les nombres d'onde pour approximer un ou plusieurs coefficients lorsque les autres sont connus. Ainsi pour chaque fréquence à laquelle un champ de déplacement a été calculé ou mesuré, une valeur de coefficient est estimée. Les étapes du processus d'identification sont présentées ci-dessous et résumées Fig. 4.1. La toute première étape consiste à déterminer la forme de l'équation, son ordre, quels coefficients sont connus, inconnus, lesquels sont nuls ou liés entre eux. À partir de la forme de l'équation, la relation de dispersion analytique ou équation polynomiale peut être définie en utilisant Eqn. (4.2). Elle est fonction des coefficients de l'équation, en particulier du coefficient manquant, mais aussi de la fréquence et de la direction.

Dans un second temps, les nombres d'onde doivent être extraits des champs solutions en utilisant une technique k-space. Les méthodes utilisées dans la suite sont l'INCOME ainsi que l'AKSI 2D présentée dans le chapitre précédent. Pour chaque champ solution, un ensemble de n_θ nombres d'onde est calculé dans différentes directions θ_i : $k_{ref}(f, \theta_i)$. Maintenant, l'identification peut être effectuée. La valeur du paramètre inconnu, noté p , est recherchée de telle sorte que les nombres d'onde calculés à partir de la relation de dispersion analytique soient aussi proches que possible de ceux extraits du champ solution, dans chaque direction. C'est pourquoi, à une fréquence donnée f , l'identification de la valeur du paramètre recherché du modèle utilise la résolution du problème de minimisation des moindres carrés suivant sur toutes les directions calculées : Eqn. (4.3).

$$J_f(p) = \frac{1}{n_\theta} \sum_{i=1}^{n_\theta} |k_{ref}(f, \theta_i) - k_{modele}(f, \theta_i, p)|^2. \quad (4.3)$$

Le coefficient est ainsi identifié. Si certaines informations sur le paramètre recherché sont connues a priori, l'intervalle de recherche peut être réduit en conséquence. Dans la suite, la recherche de minimum a été effectuée majoritairement par évaluation, mais d'autres méthodes de recherche d'extremum peuvent être utilisées.

Dans certaines conditions, plusieurs paramètres peuvent être identifiés simultanément, dans ce cas la recherche peut encore être réalisée par évaluation. Le n-uplet minimisant la fonction

coût est recherché.

Par ailleurs, lorsque la relation de dispersion est directe, c'est-à-dire qu'elle ne nécessite pas de résolution polynomiale, le gradient de Eqn. (4.3) peut être calculé. L'équation du modèle est alors de la forme Eqn. (4.4) et la relation de dispersion est donnée par Eqn. (4.5). Ainsi, des méthodes du type descente de gradient ou descente de gradient à pas optimal peuvent être utilisées. Ce type de méthode s'avère intéressant lorsque plusieurs paramètres sont à identifier simultanément. En effet, la recherche par évaluation s'avère coûteuse en temps de calcul lorsque la dimension de l'espace de recherche augmente.

$$\sum_{l=0}^N \left(a_{l,N-l} \frac{\partial^N u}{\partial x^l \partial y^{N-l}} \right) + \omega^2 a_0 u = 0, \quad (4.4)$$

$$k_\theta^N = - \frac{(-i)^N \omega^2 a_0}{\sum_{l=0}^m (a_{l,m-l} \cos^l \theta \sin^{m-l} \theta)}. \quad (4.5)$$

Enfin si le coefficient identifié est indépendant de la fréquence, la méthode peut tout de même être utilisée. Un champ solution à une seule fréquence est nécessaire, cependant se servir de champs solutions à différentes fréquences puis considérant la moyenne ou la médiane des valeurs obtenues à chaque fréquence permet de robustifier l'approche.

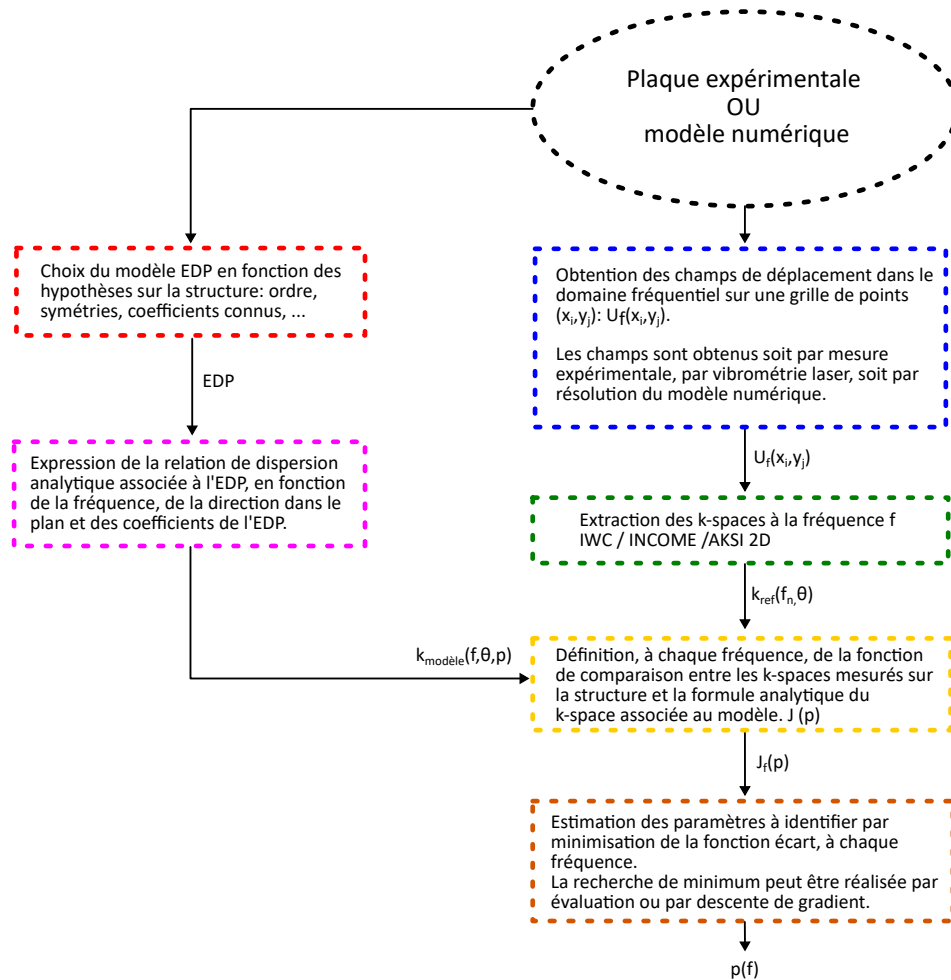


FIGURE 4.1 – Schéma de la procédure d'identification.

La procédure a été testée en premier lieu sur des champs solutions numériques d'équations. Ensuite, elle est utilisée pour améliorer un modèle homogénéisé associé à un type de structure hétérogène orthotrope périodique, à partir de champs de déplacement issus de la résolution numérique du modèle complet. Et enfin, des champs de déplacement mesurés expérimentalement sur des plaques isotropes et orthotropes permettent de valider la méthode proposée sur des cas réels.

4.3 Validation de la procédure avec des solutions numériques d'EDP

La première étape de validation présente des cas d'équations d'ordre 2, 4 et 6. Les champs solutions proviennent de la résolution de ces équations à différentes fréquences à l'aide d'un solveur éléments finis. Ainsi, les modèles, les équations, correspondent parfaitement aux champs. Il s'agit d'un cadre idéal pour faire de l'identification.

4.3.1 Équations d'ordre 2

Pour débiter, des champs solutions d'équation du second ordre de la forme suivante sont considérés :

$$a_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \omega^2 a_0 u = 0. \tag{4.6}$$

Dans ce cas, l'obtention de la relation de dispersion analytique est immédiate :

$$k_\theta^2 = \frac{\omega^2 a_0}{a_x \cos^2 \theta + a_y \sin^2 \theta + a_{xy} \cos \theta \sin \theta}. \tag{4.7}$$

Cette équation est résolue sur un domaine carré de côté de longueur $L = 1$ m et avec des conditions aux limites de Dirichlet, ou des conditions aux limites fixes si l'équation est interprétée comme modélisant le comportement d'une membrane élastique. Un chargement ponctuel unitaire est placée au centre du domaine. Les fréquences vont de 1 Hz à 50 Hz. Les coefficients a_x , a_y , a_{xy} et a_0 sont testés dans différentes configurations. Les champs sont connus sur une grille régulière de 400 par 400 points.

Les k-spaces sont calculés par l'INCOME. Pour ce type d'équation, l'INCOME est utilisée avec un noyau de convolution ayant au moins la forme suivante. Le choix du noyau provient de [Boukadia 2021].

e	c	d
b	a	b
d	c	e

$$\tag{4.8}$$

Trois configurations pour les coefficients a_x , a_y , a_{xy} et a_0 sont testées. Le premier cas peut s'interpréter comme la modélisation du comportement d'une membrane isotrope : $a_x = 1$, $a_y = 1$, $a_{xy} = 0$ et $a_0 = 1$. Cette équation est symétrique entre les directions x et y , $a_x = a_y = a$. Dans ce cas, l'équation du modèle, Eqn. (4.6) peut être réécrite :

$$a\Delta u + a_0\omega^2 u = 0. \tag{4.9}$$

En utilisant l'INCOME avec le noyau de convolution Eqn. (4.8), les nombres d'onde sont calculés dans différentes directions, mais en raison du caractère isotrope de cette configuration, les nombres d'onde sont a priori censés être indépendants de la direction.

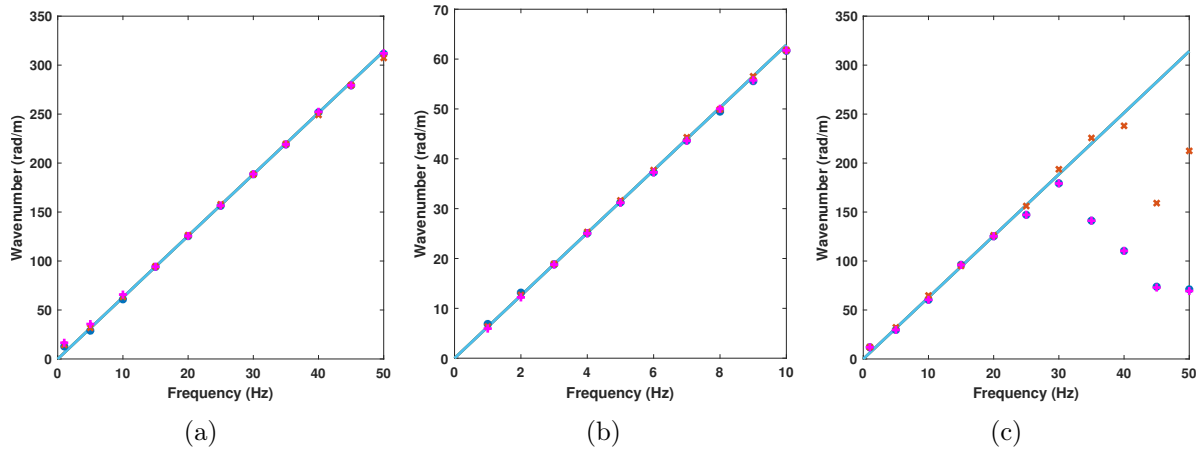


FIGURE 4.2 – Relation de dispersion, analytique et calculé par l'INCOME pour une équation du second ordre avec $a_x = 1$, $a_y = 1$, $a_{xy} = 0$ et $a_0 = 1$: relation de dispersion analytique (—), nombres d'onde calculés par l'INCOME dans la direction 0 rad (\bullet), $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (\times) et $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ($+$). (a) : $L = 1 \text{ m}$ sur une grille de 400 par 400 points, (b) : $L = 5 \text{ m}$ sur une grille de 400 par 400 points et (c) : $L = 1 \text{ m}$ sur une grille de 400 par 60 par 60 points.

Dans ce cas simple, sur la figure Fig. 4.2a, les nombres d'onde calculés sont très proches des nombres d'onde analytiques, sauf aux basses fréquences. Cela s'explique par le fait qu'à ces fréquences, la taille du domaine n'est pas assez grande par rapport aux longueurs d'onde. Pour chaque fréquence, les nombres d'onde sont calculés pour 100 angles entre 0 rad et $\pi \text{ rad}$. La méthode d'identification de paramètre est ensuite utilisée pour retrouver un paramètre lorsque les autres sont connus. Les valeurs sont comparées à celles utilisées pour la résolution numérique. Les paramètres a_0 et a_x ont été identifiés. Figs. 4.3a et 4.3b montrent que lorsque la fréquence est supérieure 10 Hz, alors les résultats d'identification de a_x et de a_0 sont proches des valeurs exactes.

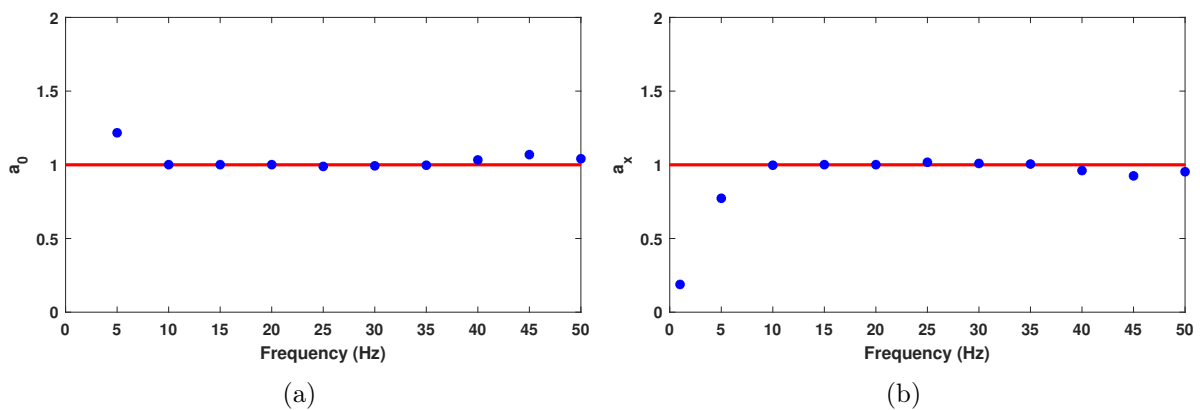


FIGURE 4.3 – Valeurs identifiées, dans le cas de la membrane isotrope, de a_0 (a) et a_x (b), en utilisant la méthode d'identification sur les champs solutions à différentes fréquences, valeurs exactes (—) et valeurs identifiées (\bullet).

Les mauvaises valeurs à basse fréquence proviennent de la taille du domaine qui n'est pas

assez grande par rapport à la longueur d'onde. Afin de vérifier ça, l'équation a été résolue à basse fréquence sur un domaine plus grand : $L = 5$ m au lieu de 1 m, toutes choses restant égales par ailleurs, même le nombre de points sur grille. Les nombres d'onde sont extraits de la même manière que précédemment Fig. 4.2b. Ensuite, a_x et a_0 sont identifiés à partir de ces nouveaux champs solution Figs. 4.4b et 4.4a.

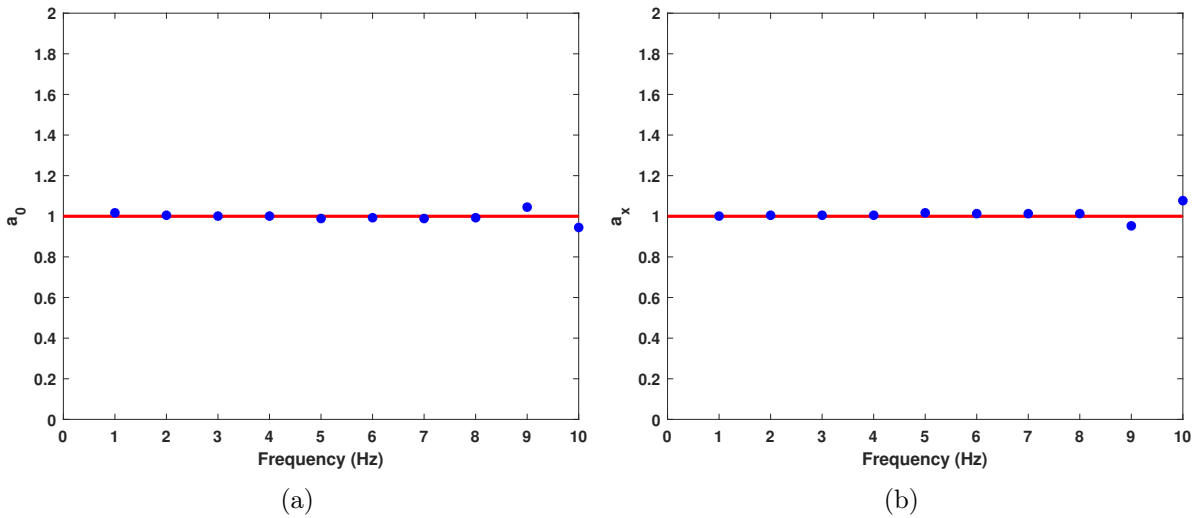


FIGURE 4.4 – Valeurs identifiées, dans le cas de la membrane isotrope, de a_0 (a) et a_x (b), en utilisant la méthode d'identification sur les champs solutions pour des fréquences entre 1 Hz et 10 Hz, pour $L = 5$ m, valeurs exactes (—) et valeurs identifiées (●).

Il en ressort que les valeurs trouvées aux basses fréquences sont bien meilleures qu'avec un domaine de côté $L = 1$ m, à la fois en termes de coefficients identifiés qu'en termes de nombres d'onde. La figure 4.2c montre la relation de dispersion lorsque l'INCOME est utilisée avec une grille de 60 par 60 points, soit un pas d'échantillonnage beaucoup plus grossier. Pour les fréquences supérieures à 30 Hz, les nombres d'onde calculés ne correspondent pas aux valeurs analytiques, de sorte que le processus d'identification ne fonctionne pas. La limite à hautes fréquences provient de la finesse de l'échantillonnage spatial. Pour le deuxième exemple, $a_x = 1$, $a_y = 0.5$, $a_{xy} = 0$ et $a_0 = 1$. a_y est la moitié de a_x . Ainsi, le problème n'est plus symétrique ni isotrope. Il peut être interprété comme la modélisation du comportement d'une membrane orthotrope. Les nombres d'onde sont calculés par l'INCOME avec le même noyau de convolution Eqn. (4.8).

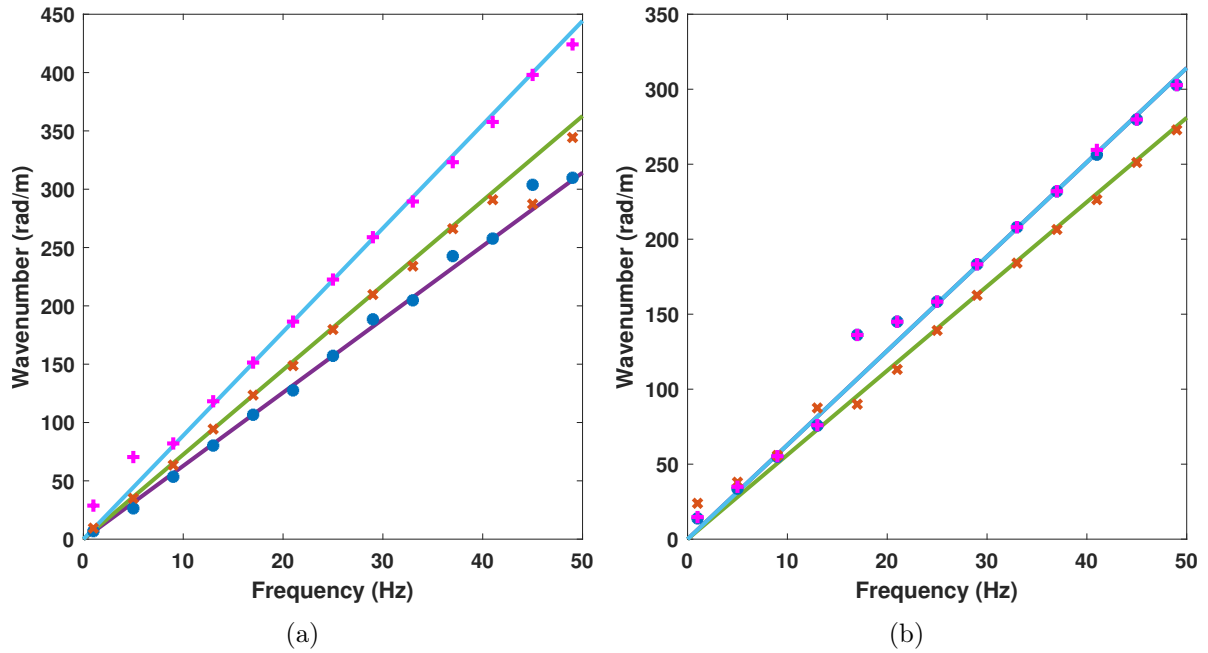


FIGURE 4.5 – Relation de dispersion, analytique et calculé par l'INCOME pour une équation du second ordre dans les directions 0 rad , $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$: relation de dispersion analytique à 0 rad (—), $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (—), $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ (—), nombres d'onde calculés par l'INCOME à 0 rad (●), $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (×) et $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ (+). (a) : $a_x = 1$, $a_y = 0.5$, $a_{xy} = 0$, $a_0 = 1$ et (b) : $a_x = 1$, $a_y = 1$, $a_{xy} = 0.5$, $a_0 = 1$.

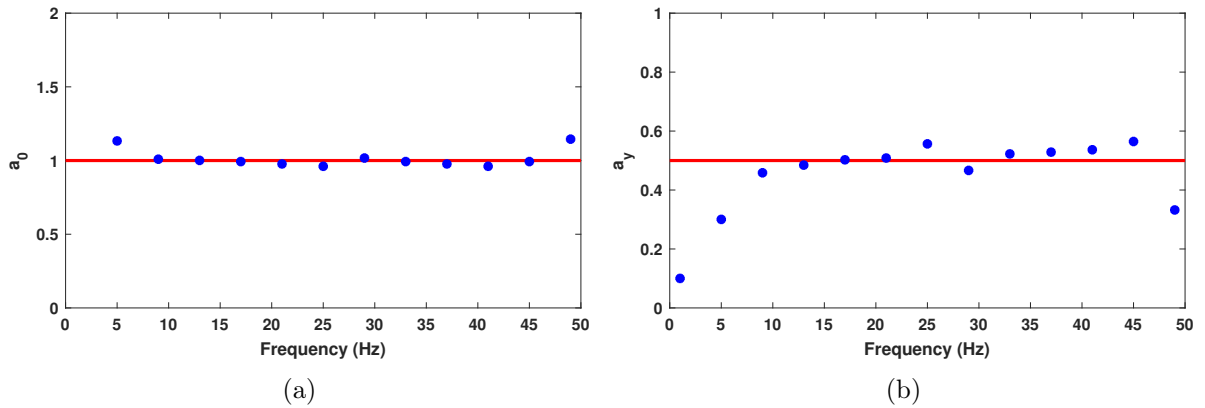


FIGURE 4.6 – Valeurs identifiées, dans le cas de la membrane orthotrope, de a_0 (a) et a_y (b), en utilisant la méthode d'identification sur les champs solutions à différentes fréquences, valeurs exactes (—) et valeurs identifiées (●).

Contrairement au cas précédent, les valeurs ne sont pas les mêmes selon la direction dans le plan considérée. Sur la Fig. 4.5a, dans chaque direction, les nombres d'onde calculés sont très proches des nombres d'onde analytiques, sauf aux basses fréquences. Là encore, la méthode d'identification de paramètre est utilisée pour retrouver un paramètre lorsque les autres sont connus. C'est ce qui est fait pour le paramètre a_0 Fig. 4.6a et a_y Fig. 4.6b. Sur ces figures, comme

dans le cas précédent, lorsque la fréquence est supérieure à 10 Hz, les résultats identifiés de a_y et de a_0 sont proches des valeurs utilisées pour la génération numérique des champs solutions. La dernière équation d'ordre 2 testée ajoute le terme a_{xy} associé à un terme de dérivée croisée. $a_x = 1$, $a_y = 1$, $a_{xy} = 0.5$ et $a_0 = 1$. Les nombres d'onde sont calculés avec le même noyau de convolution Eqn. (4.8) dans différentes directions et sont présentés sur la Fig. 4.5b. Dans ce cas également, les nombres d'onde dépendent de l'angle, mais les valeurs aux angles 0 rad et $\frac{\pi}{2}$ rad sont les mêmes. À part aux basses fréquences, les nombres d'onde calculés sont proches des valeurs attendues, même si les valeurs calculées à 0 rad et $\frac{\pi}{2}$ rad ne sont pas exactement les mêmes. Les paramètres a_0 et a_{xy} sont identifiés à l'aide de la méthode.

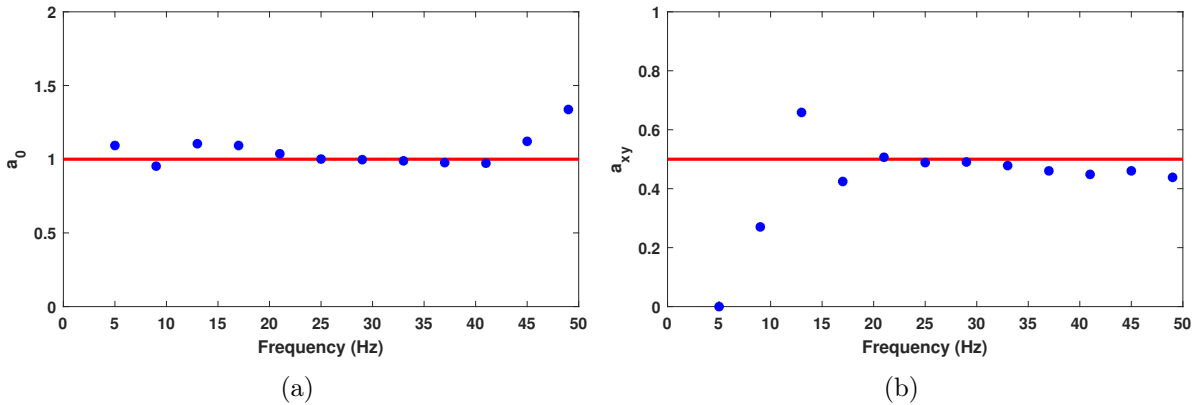


FIGURE 4.7 – Valeurs identifiées, dans le cas de l'équation d'ordre 2 avec un terme de dérivée croisée, de a_0 (a) et a_{xy} (b), en utilisant la méthode d'identification sur les champs solutions à différentes fréquences, valeurs exactes (—) et valeurs identifiées (•).

Les valeurs identifiées pour a_0 Fig. 4.7a correspondent très bien, mais l'erreur est plus grande pour l'identification de a_{xy} même à des fréquences plus élevées, Fig. 4.7b.

4.3.2 Équations d'ordre 4

Dans cette sous-section, des équations d'ordre 4 sont étudiées. Elles ont la forme suivante :

$$D_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + D_{xy} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + a_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \omega^2 a_0 u = 0. \quad (4.10)$$

La relation de dispersion est la solution de l'équation polynomiale Eqn. (4.11).

$$k_\theta^4 (D_x \cos^4 \theta + D_y \sin^4 \theta + D_{xy} \cos^2 \theta \sin^2 \theta) - k_\theta^2 (a_x \cos^2 \theta + a_y \sin^2 \theta) = \omega^2 a_0. \quad (4.11)$$

Comme pour les cas d'ordre 2, les équations ont été résolues numériquement sur un domaine carré unitaire, avec un chargement ponctuel unitaire au centre. Les conditions aux limites sont en support simple, une condition sur la solution et ses dérivées secondes. Afin d'obtenir des nombres d'onde suffisamment élevés par rapport aux dimensions du domaine, les fréquences vont jusqu'à 20 kHz. Deux configurations sont étudiées, une isotrope et une orthotrope.

La première équation est un cas d'équation de plaque de Kirchhoff Love qui modélise la flexion dans une plaque isotrope. $D_x = 1$, $D_y = 1$, $D_{xy} = 2$, $a_x = 0$, $a_y = 0$ et $a_0 = 1$. Dans ce cas, $D_x = D_y = \frac{D_{xy}}{2} = D$. L'équation peut être simplifiée pour faire apparaître un bilaplacien.

$$D\Delta^2 u = \omega^2 a_0 u. \quad (4.12)$$

De Eqn. (4.12), la relation de dispersion est une relation directe.

$$k^4 = \omega^2 \frac{a_0}{D}. \quad (4.13)$$

Avec, dans ce cas particulier, a_0 et D ayant des valeurs unitaires. D'après [Boukadia 2021], un autre noyau de convolution doit être utilisé pour appliquer l'INCOME à ce type d'équation afin d'en obtenir les nombres d'onde.

		f		
	d	c	d	
e	b	a	b	e
	d	c	d	
		f		

(4.14)

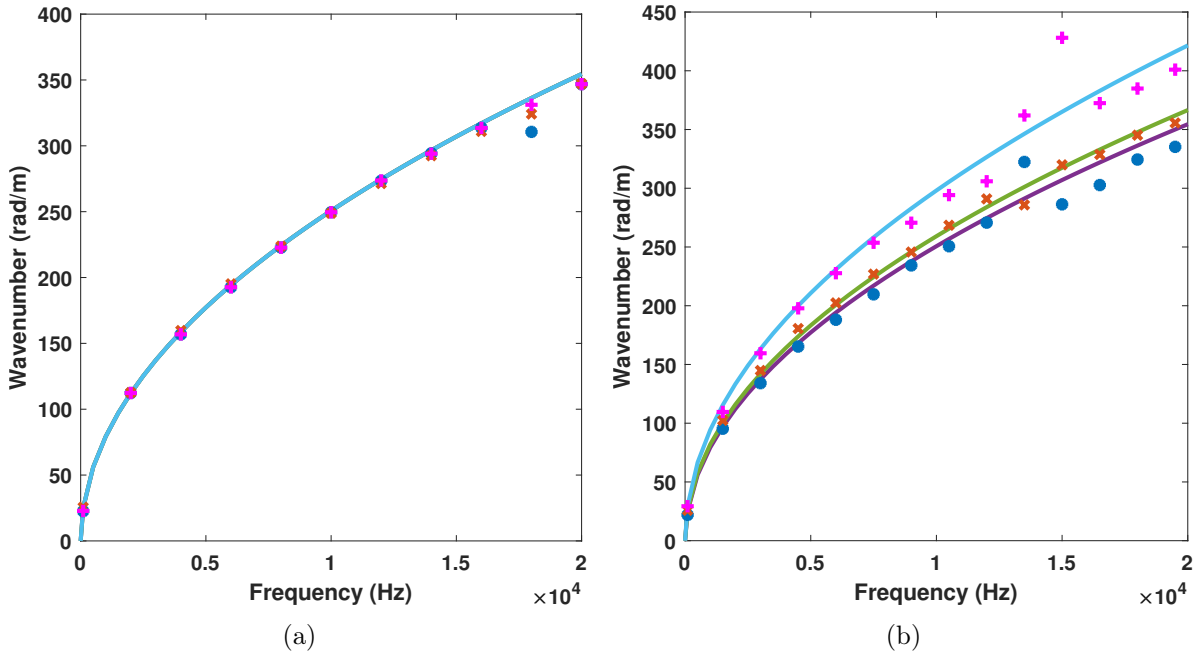


FIGURE 4.8 – Relation de dispersion, analytique et calculé par l'INCOME pour une équation du quatrième ordre dans les directions 0 rad, $\frac{\pi}{4}$ rad et $\frac{\pi}{2}$ rad : relation de dispersion analytique à 0 rad (—), $\frac{\pi}{4}$ rad (---), $\frac{\pi}{2}$ rad (···), nombres d'onde calculés par l'INCOME à 0 rad (●), $\frac{\pi}{4}$ rad (×) et $\frac{\pi}{2}$ rad (+). (a) : $D_x = 1$, $D_y = 1$, $D_{xy} = 2$, $a_x = 0$, $a_y = 0$, $a_0 = 1$ et (b) : $D_x = 1$, $D_y = 0.5$, $D_{xy} = 2$, $a_x = 0$, $a_y = 1$ et $a_0 = 1$.

Eqn. (4.12) est l'équation d'une plaque isotrope, c'est pourquoi il n'y a pas de variation des nombres d'onde avec la direction Fig. 4.8a. Les nombres d'onde calculés sont très proches des valeurs analytiques. Pour l'équation d'ordre 4, le nombre d'onde n'est pas une fonction linéaire de la fréquence, mais une fonction en racine carrée.

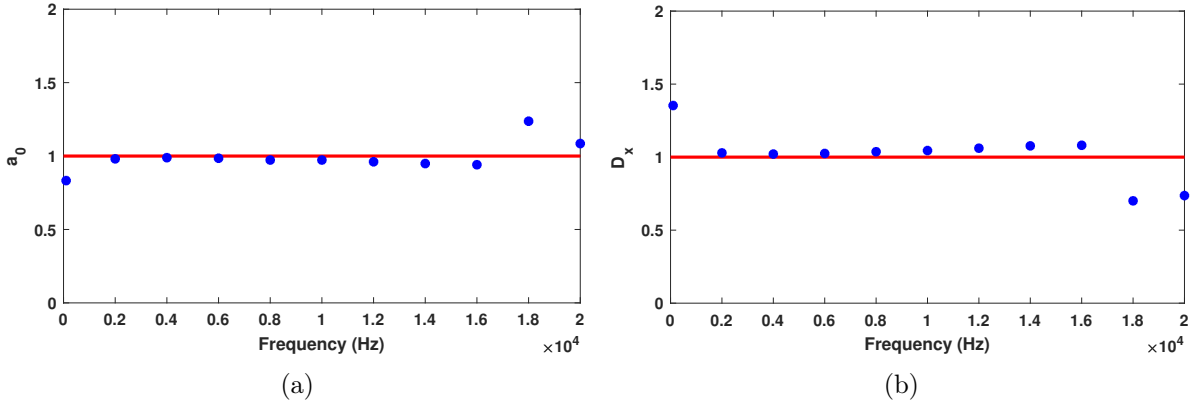


FIGURE 4.9 – Valeurs identifiées, dans le cas de l'équation de plaque isotrope, de a_0 (a) et D_x (b), en utilisant la méthode d'identification sur les champs solutions à différentes fréquences, valeurs exactes (–) et valeurs identifiées (•).

Les résultats de l'identification pour a_0 et D_x sont présentés dans les Figs. 4.9a et 4.9b. Elles montrent une bonne correspondance avec les valeurs attendues.

Le jeu de valeurs suivant est $D_x = 1$, $D_y = 0.5$, $D_{xy} = 2$, $a_x = 0$, $a_y = 1$ et $a_0 = 1$. Il ajoute un terme d'orthotropie et un terme d'ordre 2. De cette façon, le problème n'est plus symétrique et la relation de dispersion nécessite une résolution polynomiale. Les nombres d'onde sont calculés avec le même noyau Eqn. (4.14).

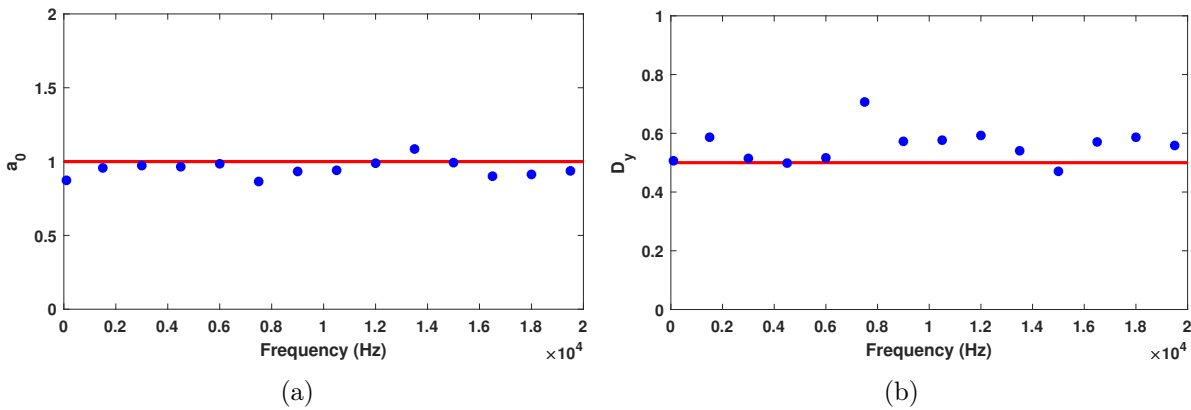


FIGURE 4.10 – Valeurs identifiées, dans le cas de l'équation de plaque orthotrope, de a_0 (a) et D_y (b), en utilisant la méthode d'identification sur les champs solutions à différentes fréquences, valeurs exactes (–) et valeurs identifiées (•).

Même si les nombres d'onde sont un peu plus éloignés des valeurs attendues sur la Fig. 4.8b que dans le cas précédent Fig. 4.8a, les résultats d'identification des termes a_0 et D_y présentés

Figs. 4.10a et 4.10b sont encore très proches des valeurs exactes. Cela montre que le processus d'identification semble bien fonctionner.

4.3.3 Équations d'ordre 6

Pour tester un peu plus loin la méthode d'identification, celle-ci est testée pour s'assurer qu'elle fonctionne pour des équations d'ordre 6. Il s'agit d'équations un peu moins courantes que celles d'ordre 2 ou 4. Les équations ont la forme suivante.

$$\begin{aligned} & a_{6,0} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + a_{4,2} \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + a_{2,4} \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + a_{0,6} \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + a_{4,0} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ & + a_{2,2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{0,4} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + a_{2,0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{0,2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \omega^2 a_0 u = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La relation de dispersion est la solution du polynôme Eqn. (4.16).

$$\begin{aligned} & -k_\theta^6 (a_{6,0} \cos^6 \theta + a_{4,2} \cos^4 \theta \sin^2 \theta + a_{2,4} \cos^2 \theta \sin^4 \theta + a_{0,6} \sin^6 \theta) \\ & + k_\theta^4 (a_{4,0} \cos^4 \theta + a_{2,2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + a_{0,4} \sin^4 \theta) \\ & - k_\theta^2 (a_{2,0} \cos^2 \theta + a_{0,2} \sin^2 \theta) + \omega^2 a_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dans la suite, les termes d'ordre 2 et 4 ne sont pas pris en compte. Par conséquent, la relation de dispersion est directe.

$$k_\theta^6 = \frac{\omega^2 a_0}{(a_{6,0} \cos^6 \theta + a_{4,2} \cos^4 \theta \sin^2 \theta + a_{2,4} \cos^2 \theta \sin^4 \theta + a_{0,6} \sin^6 \theta)}. \quad (4.17)$$

Les équations du 6ème ordre ont été résolues numériquement sur un domaine carré unitaire, avec une source ponctuelle unitaire au centre. Les conditions aux limites sont une condition homogène sur la solution et ses dérivées secondes et quatrième. Le champ de déplacement est connu sur une grille régulière de 50 par 50 points. Afin d'obtenir des nombres d'onde suffisamment élevés par rapport aux dimensions du domaine, les fréquences vont jusqu'à 100 kHz. Pour ce type d'équation, la relation de dispersion est une fonction racine cubique de la fréquence. Deux configurations sont étudiées. Le cas le plus simple d'équation d'ordre 6 est celui de l'équation isotrope. Les coefficients de cette équation sont de la forme $a_{6,0} = a_{0,6} = \frac{a_{4,2}}{3} = \frac{a_{2,4}}{3} = D$. Donc Eqn. (4.15) peut être simplifiée :

$$D\Delta^3 u + \omega^2 a_0 u = 0. \quad (4.18)$$

Pour l'exemple $D = 1$ et $a_0 = 1$. Ensuite, le second cas test est celui d'une équation d'ordre 6 orthotrope. Les valeurs des coefficients sont $a_{6,0} = 1$, $a_{4,2} = 3\frac{8}{9}$, $a_{2,4} = 3\left(\frac{8}{9}\right)^2$, $a_{0,6} = \left(\frac{8}{9}\right)^3$ et $a_0 = 1$. Les relations de dispersion mesurées par l'INCOME sont présentées Fig. 4.11. Le noyau de convolution utilisé est le même que pour les exemples d'équation d'ordre 4 Eqn. (4.14).

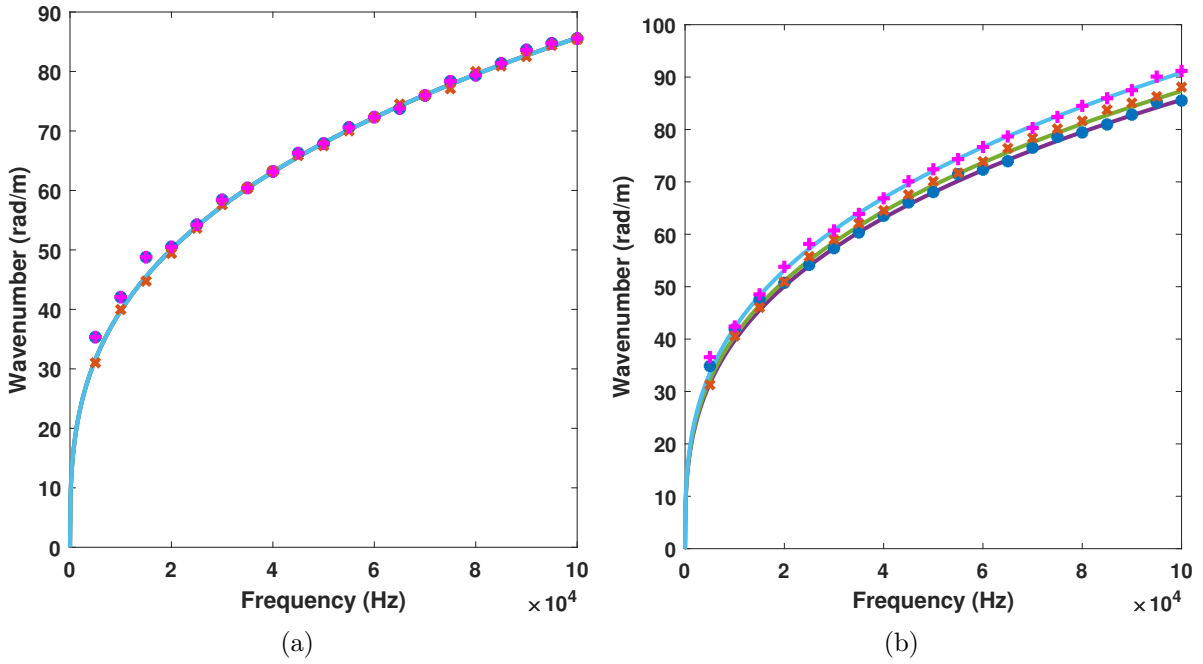


FIGURE 4.11 – Relation de dispersion, analytique et calculé par l'INCOME pour une équation du sixième ordre dans les directions 0 rad , $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$: relation de dispersion analytique à 0 rad (—), $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (---), $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ (---), nombres d'onde calculés par l'INCOME à 0 rad (\bullet), $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (\times) et $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ($+$). (a) : $a_{6,0} = 1$, $a_{4,2} = 3$, $a_{2,4} = 3$, $a_{0,6} = 1$, $a_0 = 1$ et (b) : $a_{6,0} = 1$, $a_{4,2} = 3\frac{8}{9}$, $a_{2,4} = 3\left(\frac{8}{9}\right)^2$, $a_{0,6} = \left(\frac{8}{9}\right)^3$ et $a_0 = 1$.

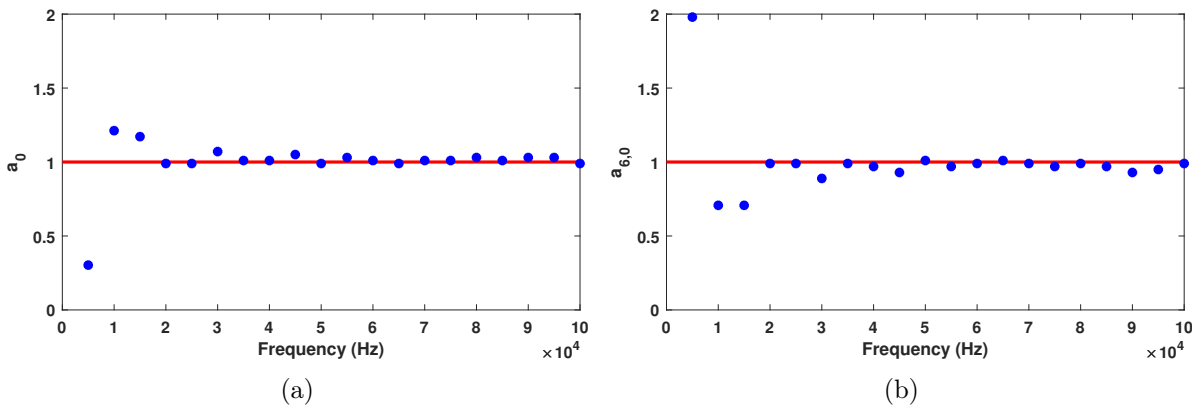


FIGURE 4.12 – Valeurs identifiées, dans le cas de l'équation du sixième ordre isotrope, de a_0 (a) et $a_{6,0}$ (b), en utilisant la méthode d'identification sur les champs solutions à différentes fréquences, valeurs exactes (—) et valeurs identifiées (\bullet).

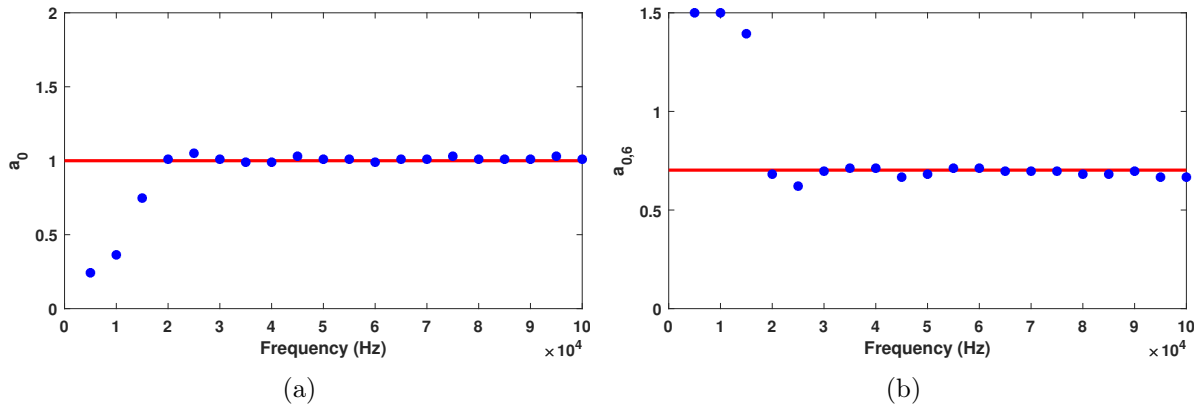


FIGURE 4.13 – Valeurs identifiées, dans le cas de l'équation du sixième ordre orthotrope, de a_0 (a) et $a_{6,0}$ (b), en utilisant la méthode d'identification sur les champs solutions à différentes fréquences, valeurs exactes (—) et valeurs identifiées (•).

Figs. 4.12 et 4.13 illustrent les résultats d'identification sur le cas isotrope et le cas anisotrope. Il apparaît que l'identification est tout aussi efficace sur ces exemples d'équations à l'ordre 6 que sur les exemples précédents aux ordres 2 et 4. À part aux fréquences les plus basses, les valeurs identifiées sont très proches des valeurs exactes.

Cette section a présenté des exemples d'identification de coefficient d'équation lorsque les modèles correspondent a priori parfaitement aux champs de déplacement. Ces derniers ayant été obtenus par résolution numérique des équations dont un coefficient est ensuite réidentifié. Ainsi, cette section a permis de montrer, sur des exemples d'équations de plus en plus complexes, le bon fonctionnement de la méthode d'identification lorsque le modèle correspond aux données, ainsi que ses premières limites. La méthode reste limitée par l'identification des k-spaces de références. À basse fréquence, la taille du domaine est limitante alors qu'il s'agit de la finesse de l'échantillonnage spatial qui limite à haute fréquence. Tous les cas tests ci-dessus concernent des domaines carrés car l'INCOME nécessite d'une grille rectangulaire de points. Cependant, pour d'autres géométries, si le domaine est suffisamment régulier, un ou plusieurs sous-domaines rectangulaires peuvent être définis. L'extraction des nombres d'onde est alors effectuée sur ces sous-domaines. Ces sous-domaines doivent par contre être suffisamment grands par rapport aux plus grandes longueurs d'onde considérées pour obtenir des résultats acceptables.

4.4 Application de l'identification de paramètres pour l'amélioration d'un modèle de plaque orthotrope homogénéisé équivalent à une paroi bi-raïdie

Cette section propose d'appliquer la méthode d'identification à un exemple de structure, une paroi bi-raïdie, pour en améliorer un modèle équivalent. Cette structure et le modèle homogène équivalent ont déjà été présentés section. 2.4.2 du Chapitre. 2 puis réutilisés section. 3.4.2 du Chapitre. 3.

Tout d'abord, la structure et le modèle homogénéisé sont rappelés. Ensuite, l'identification de paramètres par méthode k-space est testée sur des champs issus de la résolution numérique

de l'équation homogénéisée. Enfin, un terme du modèle, associé à la prise en compte de phénomènes dynamiques, est identifié à partir de champs issus de la résolution numérique du modèle complet de la structure, c'est-à-dire prenant en compte son hétérogénéité.

4.4.1 Rappel du modèle homogénéisé

Un modèle analytique de plaque orthotrope équivalente au comportement en flexion d'une paroi bi-raïdie a été définie par homogénéisation asymptotique par [Boutin 2020]. Ce modèle, présenté dans la sous-section. 2.4.2.1 du Chapitre. 2 est rappelé Eqn. (4.19).

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_x I_x}{l_y} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tilde{E}_y I_y}{l_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ + \left(K_{\omega_x}^{bc} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{\omega_y}^{bc} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right) u, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\langle \phi_\omega^{CCCC} \rangle = \frac{4}{\delta r} \frac{I_1(\delta r) J_1(\delta r)}{I_1(\delta r) J_0(\delta r) + I_0(\delta r) J_1(\delta r)}, \quad (4.20)$$

$$\delta^4 = \frac{\omega^2 \Lambda_p}{E'_p I_p} = (2\pi f)^2 \frac{\Lambda_p (1 - \nu_p^2)}{E_p (1 + i\eta) I_p}. \quad (4.21)$$

$r = 0.532 l_x$ et $K_{\omega_x}^{bc} = K_{\omega_y}^{bc} = 0$. La relation de dispersion associée à Eqn. (4.19) est donnée Eqn. (4.22).

$$\begin{aligned} k_\theta^4 \left(\frac{E_x I_x}{l_y} \cos^4 \theta + \frac{E_y I_y}{l_x} \sin^4 \theta + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \\ - k_\theta^2 \omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \cos^2 \theta + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \sin^2 \theta \right) = \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Les propriétés des raidisseurs sont rappelées Table. 4.1 et celles des plaques internes sont données Table. 4.2 celles des plaques internes.

Paramètres :	h_x, h_y	b_x, b_y	E_x, E_y	ν_x, ν_y ,	ρ_x, ρ_y	η
Valeurs :	0.01 m	0.01 m	69 GPa	0.3	2700 kg/m ³	0.05

TABLE 4.1 – Propriétés géométriques et mécaniques de la grille de raidisseurs.

Paramètres :	l_x, l_y	d	E_p	ν_p	ρ_p
Valeurs :	0.1 m	0.001 m	3 GPa	0.3	1200 kg/m ³

TABLE 4.2 – Propriétés géométriques et mécaniques des plaques internes.

L'équation Eqn. (4.19) peut être mise sous le même formalisme que dans la section précédente.

$$D_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + D_{xy} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \omega^2 a_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega^2 a_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \omega^2 a_0(\omega) u = 0. \quad (4.23)$$

Mais le terme a_0 dépend de la fréquence et a_x, a_y sont remplacés par $\omega^2 a_x$ et $\omega^2 a_y$. $a_0(\omega) = \Lambda' + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{CCCC} \rangle (\delta(\omega)r)$ où $\Lambda' = \frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x}$. Les valeurs de l'aluminium sont choisies pour les raidisseurs et celles du plexiglas pour les plaques internes. Les raidisseurs sont supposés être les mêmes dans les directions x et y .

D'après les valeurs des Tables. 4.1 et 4.2, la valeur des coefficients de l'équation Eqn. (4.23) peut être déterminée (voir Tables. 4.3 et 4.4).

D_x	D_y	D_{xy}	a_x	a_y
$(575 + 28.75i) \text{ J}$	$(575 + 28.75i) \text{ J}$	$(747.5 + 37.375i) \text{ J}$	0.045 g	0.045 g

TABLE 4.3 – Valeurs des coefficients de Eqn. (4.23).

Λ'	Λ'_p	$\frac{\Lambda'_p(1 - \nu_p^2)}{E_p((1 + i\eta) I_p)}$	r
5.4 kg/m ²	1.2 kg/m ²	$(4.3571 - 0.21786i) \text{ s}^2/\text{m}^4$	0.0532 m

TABLE 4.4 – Valeurs des paramètres intervenant dans le calcul de a_0 .

4.4.2 Identification de paramètres à partir de champ solution du modèle homogénéisé

L'équation est résolue sur un domaine carré de 1 m de côté, avec des conditions aux bords en support simple et un chargement unitaire au centre. Les fréquences vont jusqu'à 10 kHz. La méthode **INCOME** est utilisée sur une grille de 600 par 600 points. Les paramètres sont identifiés à l'aide des nombres d'onde. Par exemple D_x ou $a_0(\omega)$. En particulier, c'est le terme $a_0(\omega)$ qui sera identifié dans la sous-section. 4.4.3, à partir de champs issus d'un modèle hétérogène dans le but d'améliorer la prise en compte de la dynamique interne.

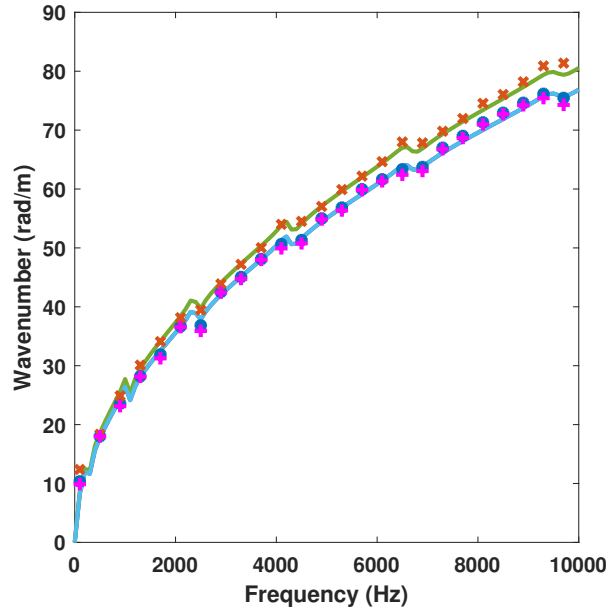


FIGURE 4.14 – Relation de dispersion, analytique et calculé par l'INCOME de l'équation Eqn. (4.23) dans les directions 0 rad , $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ et $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$: relation de dispersion analytique à 0 rad (—), $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (—), $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ (—), nombres d'onde calculés par l'INCOME à 0 rad (\bullet), $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ (\times) and $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ($+$).

Sur la relation de dispersion, il apparaît que même si la tendance semble suivre une fonction de racine carrée, le terme $a_0(\omega)$ apporte un effet de résonance (voir Fig. 4.14). Les fréquences de résonance interne peuvent être interprétées comme les fréquences des modes à moyenne non nulle d'une plaque interne. Elles peuvent être calculées comme les zéros du dénominateur de Eqn. (4.20). Les premières sont à 275 Hz, 1070 Hz, 2398 Hz, 4256 Hz, 6648 Hz et 9570 Hz, ce qui est en accord avec la courbe de dispersion. Le terme dépendant de la fréquence a_0 et un autre indépendant, D_x , sont identifiés et comparés à leurs valeurs analytiques.

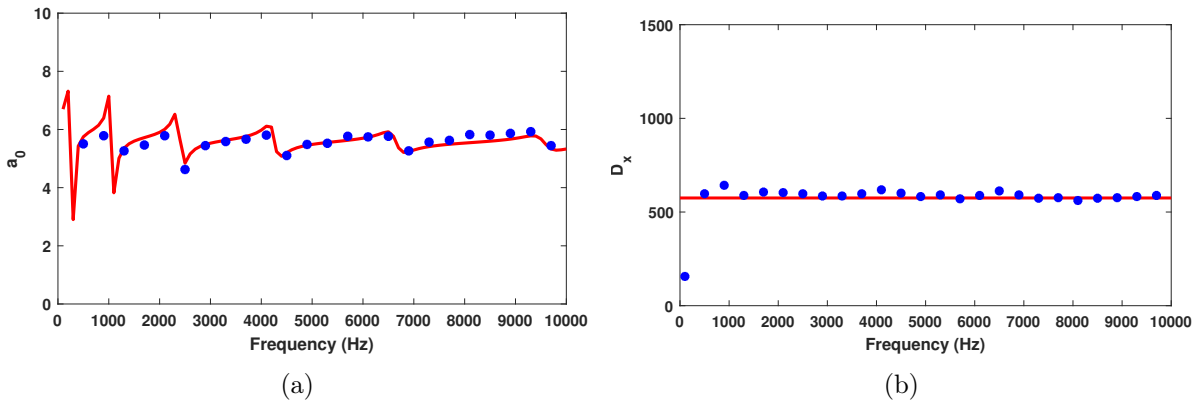


FIGURE 4.15 – Valeurs identifiées pour a_0 (a) et D_x (b) calculées en utilisant l'identification basée sur les k-spaces sur des champs solutions de Eqn. (4.23) pour des fréquences inférieures à 10 kHz, valeurs exactes (—) et valeurs identifiées (\bullet).

Pour l'identification, sur Figs. 4.15a et 4.15b les valeurs calculées sont proches des valeurs attendues. Cependant, c'est à proximité des fréquences de résonance interne que l'identification de D_x est la moins précise. La méthode d'identification fonctionne également pour ce modèle plus original. C'est pourquoi elle va être utilisée pour améliorer la correspondance du modèle à un modèle de structure plus proche de la réalité.

4.4.3 Identification de paramètres à partir de la résolution du modèle complet

Jusqu'à présent, les exemples d'identifications identifiaient des valeurs pour des paramètres qui étaient ensuite comparés aux valeurs choisies en entrée. Ces étapes, nécessaires, ont permis de valider la méthode d'identification. Dans cette sous-section, la méthode est utilisée pour identifier en fonction de la fréquence un paramètre qui n'est pas totalement connu a priori. De cette manière, le modèle de plaque bi-raïdie homogénéisé présenté précédemment peut être amélioré. En effet, le modèle présenté dans la sous-section précédente fait une approximation au niveau des effets de la dynamique des plaques internes, dans le terme de masse apparente, en particulier dans le terme $\langle \phi_\omega^{CCC} \rangle (\delta(\omega)r)$. Ce coefficient représente la moyenne du déplacement hors plan d'une plaque interne soumis à un déplacement d'encastrement unitaire à ses quatre bords. Or dans le modèle, le déplacement sur une plaque interne est approximé par celui d'une plaque circulaire dont il est plus simple d'obtenir une formulation analytique. Le rayon de cette plaque $r = 0.532 l$ a été choisi tel que la première résonance de la plaque circulaire corresponde à celle d'une plaque interne, carré. Ainsi, la prise en compte de la dynamique interne dans le modèle n'est correcte que pour des basses fréquences. Lorsque les fréquences atteignent la seconde résonance interne, l'approximation n'est plus valide. La limite se situe aux environs 500 Hz pour l'exemple choisi. Cette sous-section, propose d'identifier le terme de masse $a_0 = \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right)$ du modèle homogénéisé de plaque orthotrope équivalent à une paroi bi-raïdie Eqn. (4.19), en fonction de la fréquence, pour étendre la validité du modèle. C'est pourquoi, dans cette sous-section, les champs de déplacements dont les k-spaces de référence seront calculés, sont issus de la résolution éléments finis d'un modèle de paroi bi-raïdie plus complet, modélisant l'hétérogénéité de cette structure. Deux difficultés apparaissent par rapport aux exemples précédents. Premièrement, la structure n'est plus homogène, par conséquent le calcul des k-spaces est plus délicat. Selon la méthode k-space utilisée, la périodicité doit être prise en compte. Et ensuite, le paramètre identifié est a priori inconnu à partir d'environ 500 Hz.

L'identification est faite à partir de champs de déplacement issus d'un modèle éléments finis modélisant les différences entre plaques et raidisseurs. La structure contient 20 par 20 cellules et possède les propriétés données dans la sous-section précédente et résumées Tables. 4.1 et 4.2. La paroi est en support sur ses quatre bords et une excitation ponctuelle est appliquée au centre. Les k-spaces de référence sont calculés par l'INCOME. Comme la structure est périodique et hétérogène, la périodicité doit être prise en compte lors de l'utilisation de l'INCOME comme expliqué par Ribeiro et al dans [Ribeiro 2022]. Ainsi, la discrétisation est liée à la périodicité. Une grille de 222 par 222 points est utilisée. En particulier, chaque cellule a la même grille de 11 par 11 points. Cependant, le calcul des nombres d'onde est réalisé en utilisant la partie

de la grille sur la moitié haute de la structure. Ainsi le point source ne se trouve pas dans le domaine.

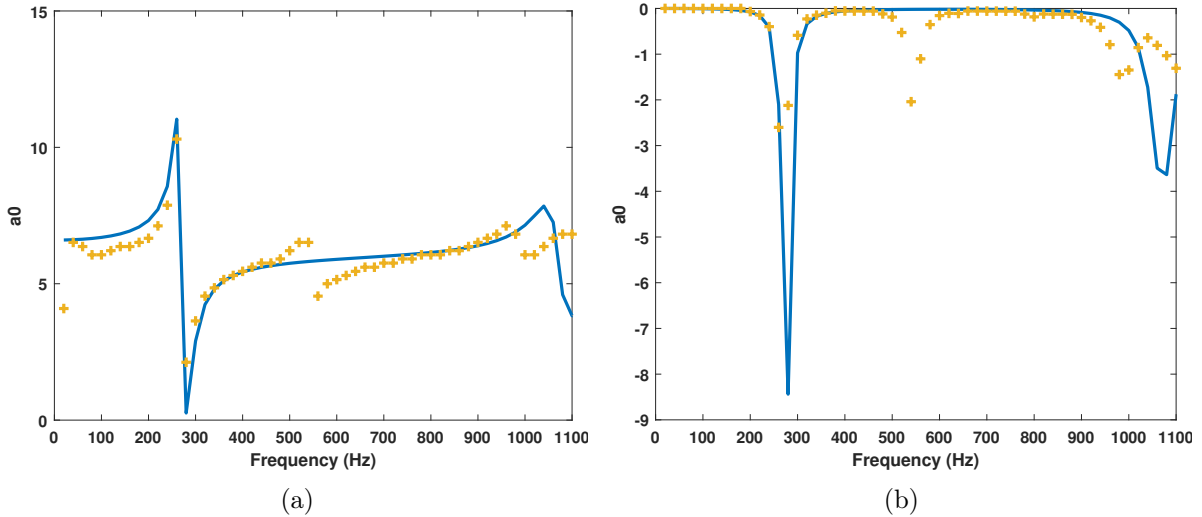


FIGURE 4.16 – Valeurs identifiées pour le terme de masse $a_0 = \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right)$ (a) partie réelle et (b) partie imaginaire, calculées par identification basée sur les k-spaces pour des fréquences allant jusqu'à 1100 Hz, valeurs analytiques (—) et valeurs identifiées (+).

Pour cette identification, la formule de relation de dispersion Eqn. (4.23) est utilisée. La grandeur identifiée dans cette section étant potentiellement complexe, deux paramètres sont identifiés simultanément, la partie réelle du terme de masse et sa partie imaginaire. La recherche de minimum est faite par évaluation sur le couple de partie réelle et de partie imaginaire permettant de minimiser Eqn. (4.3), la fonction d'écart aux k-spaces mesurés. Les valeurs identifiées sont présentées Fig. 4.16. Comme attendu, les valeurs identifiées correspondent aux valeurs du modèle jusqu'à 400 Hz - 500 Hz mais s'en écartent à l'apparition de la seconde résonance interne, vers 500 Hz - 600 Hz. En utilisant les valeurs identifiées dans le modèle, celles-ci vont permettre d'en étendre la limite de validité. Le terme de masse, calculé précédemment analytiquement en utilisant Eqn. (4.20) est remplacé à chaque fréquence par la valeur identifiée. Fig. 4.17 présente les courbes de dispersion dans la direction 0 rad, du modèle analytique initial et recalé ainsi que les nombres d'onde calculés avec l'INCOME sur la structure hétérogène modélisée numériquement. Puisque l'identification est basée sur les nombres d'onde, les nombres d'onde analytiques du modèle analytique recalé correspondent aux valeurs mesurées sur la structure. Pour s'assurer que le modèle est bien amélioré, il faut se servir d'une autre métrique.

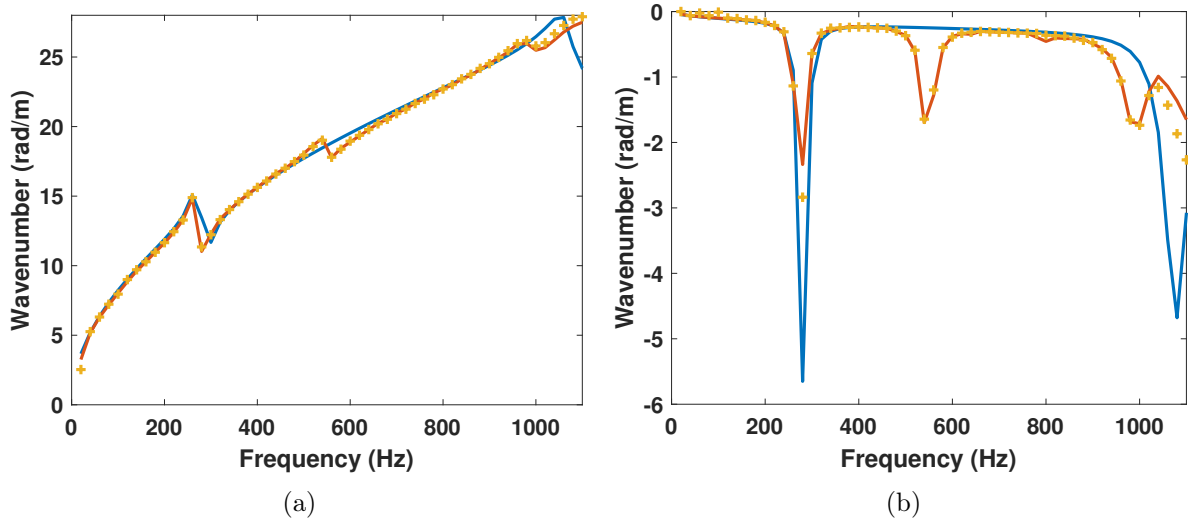


FIGURE 4.17 – Relation de dispersion de la paroi raidie hétérogène (–) analytique du modèle, (+) calculée et (-) analytique avec le terme de masse recalé.

Une paroi bi-raïdie plus petite, mais conservant la même cellule unitaire est considérée. Celle-ci est composée de 5 par 5 cellules. Aux bords de la structure, les conditions de supports simples sont remplacées par des encastremets. De plus, le point source est déplacé tout en restant sur un raidisseur. Pour évaluer l'amélioration induite par le nouveau terme de masse identifié sur le modèle, des fonctions de réponse en fréquence (FRF) issues des trois modèles sont comparées. Les trois modèles étant : le modèle éléments finis de la structure hétérogène, le modèle homogénéisé de plaque équivalente initial et le modèle homogénéisé de plaque équivalente dont le terme de masse a été identifié. Une force unitaire est appliquée et les déplacements sont mesurés en deux points. La structure ainsi que la position du point source et des points de mesure sont illustrées Fig. 4.18.

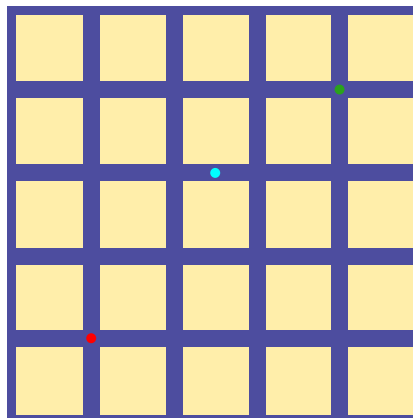


FIGURE 4.18 – Schéma de la paroi bi-raïdie utilisée pour valider les résultats de la procédure d'identification. Position du point source (●), position du point de mesure 1 (●) et position du point de mesure 2 (●).

De par la nature du modèle homogénéisé, il est nécessaire que le point source ainsi que les

points observés se trouvent sur des raidisseurs.

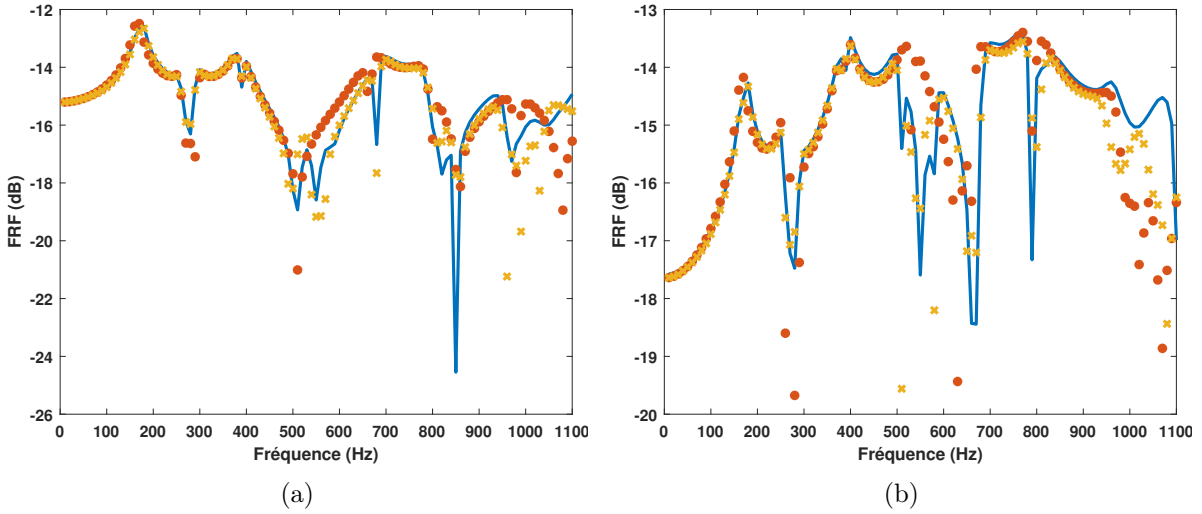


FIGURE 4.19 – Comparaison des fonctions de réponse en fréquence (a) au point 1 illustré par (●) sur la Fig. 4.18 et (b) au point 2 illustré par (●) sur la Fig. 4.18. Modèle hétérogène de référence (—), modèle homogénéisé sans identification (●) et modèle homogénéisé identifié (×).

Fig. 4.19 illustre les logarithmes des modules des déplacements en fonction de la fréquence. Il apparaît sur cette figure, premièrement, que comme attendu, les deux modèles homogénéisés correspondent au modèle hétérogène jusqu'à environ 500 Hz. À plus hautes fréquences, les résultats du modèle homogénéisé après identification de paramètres correspondent beaucoup mieux à ceux du modèle hétérogène, en particulier entre 500 et 600 Hz où apparaissent des effets de la dynamique interne.

Et à encore plus haute fréquence, à partir d'environ 1000 Hz le calcul des k-spaces devient limitant dans la méthode d'identification. En effet, en notant $\Delta L = 0.11$ m la taille d'un côté de la cellule de périodicité, alors $\frac{\pi}{\Delta L} \approx 28 \text{ rad m}^{-1}$. La méthode INCOME prenant en compte la périodicité de la structure, les nombres d'onde mesurés ne sont plus valables lorsqu'ils atteignent cette valeur.

En conclusion, la méthode d'identification par méthode k-space permet d'identifier, en fonction de la fréquence, des paramètres à partir de structures périodiques hétérogènes. Cette approche a été utilisée avec succès pour améliorer un modèle de plaque équivalente existant.

4.5 Identification de paramètres à partir de champs de déplacements expérimentaux

Enfin, le processus d'identification est utilisé pour retrouver des paramètres mécaniques de plaques réelles. Les plaques et modèles ont déjà été présentés dans la section 3.4.3 du Chapitre. 3.

Les plaques considérées sont les suivantes : une plaque isotrope en acier suspendue, une plaque isotrope en aluminium encadrée et une plaque en composite stratifié encadrée. Les

Paramètres :	E	ν	ρ	d
Acier :	210 GPa	0.29	7900 kg/m ³	2 mm
Aluminium :	70 GPa	0.33	2648 kg/m ³	3 mm

TABLE 4.5 – Propriétés mécaniques et géométriques de référence des plaques en acier et en aluminium. Valeurs provenant de [AllahTavakoli 2023] pour l'aluminium et propriétés mécaniques classiques pour l'acier.

champs considérés dans cette section sont mesurés expérimentalement, par conséquent, ils sont sujets aux bruits de mesure qui peuvent avoir un impact non négligeable sur l'identification. En particulier, la partie la plus critique concerne le calcul des k-spaces, l'INCOME est une technique k-space très précise, mais très sensible au bruit. C'est pourquoi, pour chaque cas considéré dans cette section, le processus d'identification sera réalisé une fois basée sur l'INCOME et une fois basée sur l'AKSI 2D, plus robuste au bruit.

4.5.1 Plaques isotropes expérimentales

La méthode d'identification basée sur les k-spaces est utilisée pour retrouver un paramètre mécanique et un paramètre géométrique. Premièrement, le module de Young est identifié puis comparé aux valeurs usuelles de l'acier et de l'aluminium. Ensuite, l'épaisseur des plaques est identifiée. À chaque fois, un seul paramètre est identifié à la fois. Les propriétés des plaques sont rappelées Table. 4.5. Les propriétés mécanique de la plaque en aluminium proviennent de l'article d'Allah Tavakoli et al, présentant cette plaque. pour les propriétés mécaniques de la plaque en acier, les valeurs usuelles de l'acier ont été choisies. Les relations de dispersion et k-spaces mesurés sur ces plaques par l'INCOME et en particulier par l'AKSI 2D font l'objet de la section. 3.4.3. Les valeurs identifiées en fonction de la fréquence sont présentées Fig. 4.20 pour la plaque en acier et Fig. 4.21 pour celle en aluminium. Les valeurs identifiées à partir de la technique k-space AKSI 2D sont à chaque fois très proches des valeurs de référence. En revanche, celles identifiées à partir de l'INCOME sont légèrement plus chahutées. Le choix de la méthode k-space à utiliser dans le processus d'identification est un point très important.

L'épaisseur et le module de Young pouvant être supposés constants dans les bandes de fréquences considérées, obtenir une valeur par fréquence n'est pas nécessaire. Pour prendre en compte les informations associées à chaque fréquence, la médiane de l'ensemble des valeurs identifiées est prise. Les valeurs identifiées indépendamment de la fréquence sont présentées Table. 4.6 et se révèlent être très proches des valeurs usuelles ou de référence.

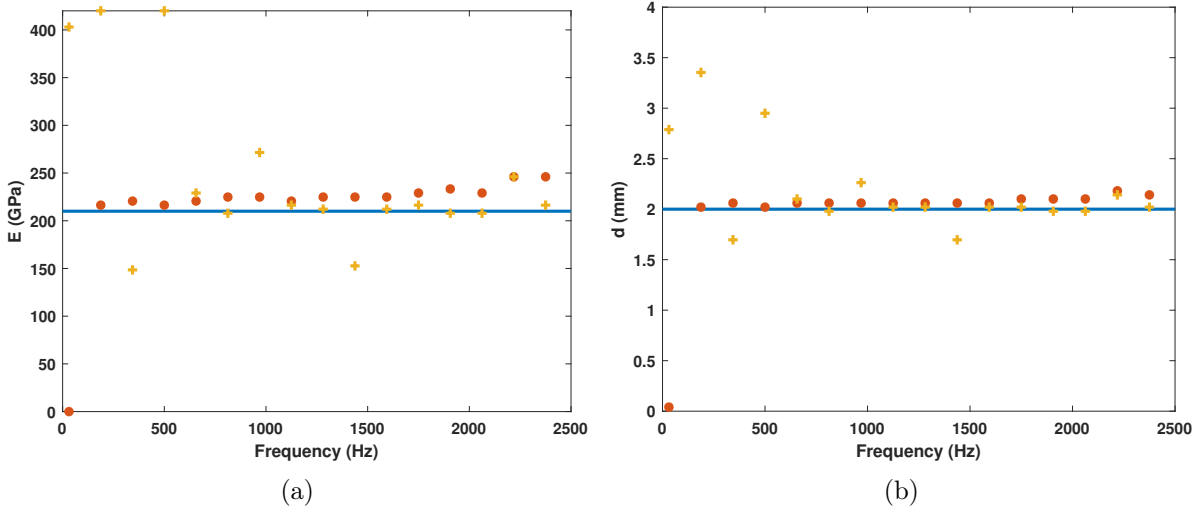


FIGURE 4.20 – Valeurs identifiées, pour la plaque expérimentale en acier suspendue, du module de Young E (a) et de l'épaisseur de la plaque d (b). Valeur usuelle de l'acier ou mesuré directement sur la plaque (–) et valeurs identifiées par l'INCOME (+) et par l'AKSI 2D (•).

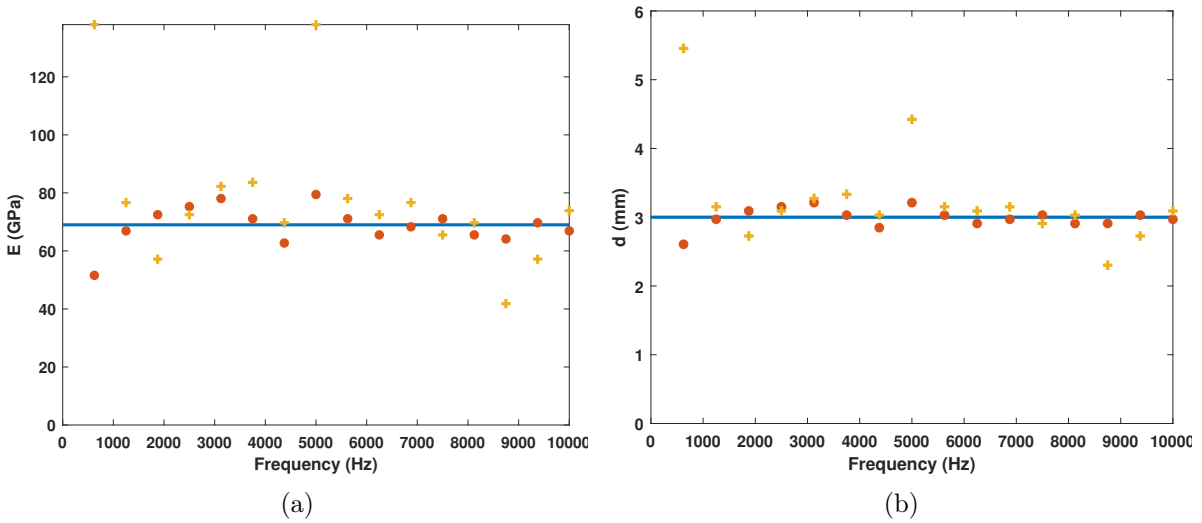


FIGURE 4.21 – Valeurs identifiées, pour la plaque expérimentale en aluminium encadrée, du module de Young E (a) et de l'épaisseur de la plaque d (b). Valeurs de référence provenant de [AllahTavakoli 2023] (–) et valeurs identifiées par l'INCOME (+) et par l'AKSI 2D (•).

4.5.2 Plaque composite expérimentale, identification simultanée de deux paramètres

Enfin, un exemple de plaque en composite stratifié expérimental est utilisé pour terminer cette étude. Ce cas combine les aspects expérimental et anisotrope (orthotrope dans le cas présent). Le modèle associé à cette plaque est rappelé Eqn. (4.24) et les valeurs de références des coefficients sont rappelées Table. 4.7. À l'inverse des cas précédents, deux coefficients sont

Paramètres :	E acier	d acier	E aluminium	d aluminium
Références :	210 GPa	2 mm	70 GPa	3 mm
INCOME :	216 GPa	2 mm	73 GPa	3.1 mm
AKSI 2D :	225 GPa	2.1 mm	69 GPa	3 mm

TABLE 4.6 – Comparaison des valeurs médianes identifiées par l'INCOME et l'AKSI 2D aux valeurs de référence, pour le module de Young et l'épaisseur de la plaque, pour la plaque en acier suspendue et la plaque en aluminium encastree.

Paramètres :	D_{11}	D_{22}	$D_{12} + 2D_{66}$	M
Valeurs :	259 N m	136 N m	189 N m	9.45 kg/m ²

TABLE 4.7 – Propriétés de la plaque stratifiée. Valeurs provenant de [AllahTavakoli 2023].

identifiés simultanément, D_{11} et D_{22} sont identifiés en connaissant $D_{12} + 2D_{66}$ et M . La recherche du minium de la fonction coût Eqn. (4.3) n'est pas réalisée par évaluation, mais par descente de gradient à pas optimal. Les résultats obtenus en fonction de la fréquence sont présentés Fig. 4.22 et leurs médianes, en supposant les coefficients indépendants de la fréquence, Table. 4.8. Les identifications basées sur les k-spaces mesurés par l'INCOME ou par l'AKSI 2D donnent des valeurs sensiblement similaires, elles sont très proches des valeurs de références, mais proposent des valeurs légèrement inférieures à ces dernières.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(t, x, y). \quad (4.24)$$

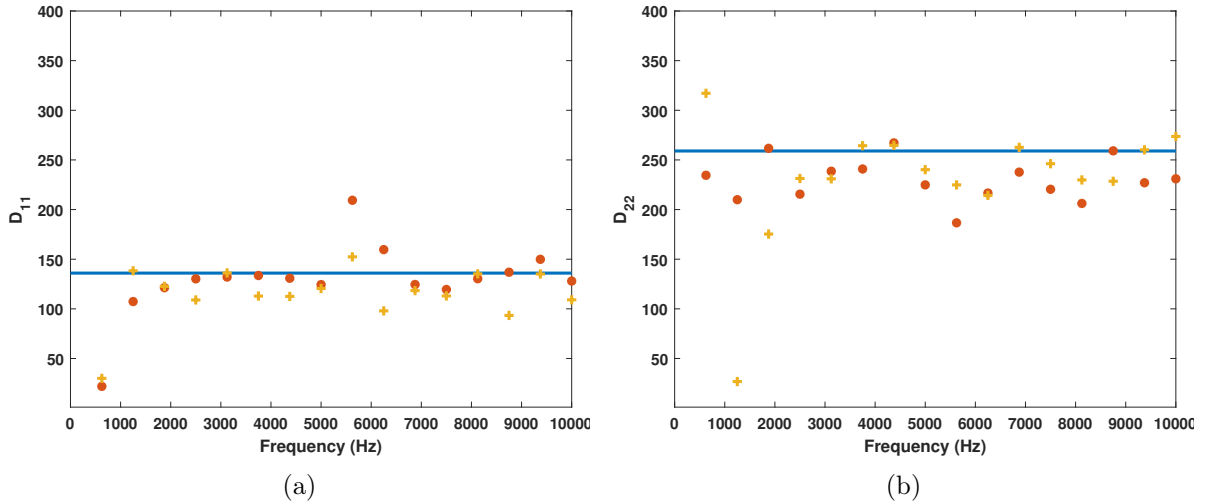


FIGURE 4.22 – Valeurs identifiées, pour la plaque expérimentale en composite stratifié encastree, des raideurs D_{11} (a) et D_{22} (b), mesuré simultanément. Valeurs de référence provenant de [AllahTavakoli 2023] (—) et valeurs identifiées par l'INCOME (+) et par l'AKSI 2D (•).

Cette section a permis de terminer la validation de la méthode d'identification basée sur l'analyse des k-spaces en montrant son bon fonctionnement même à partir de données expéri-

Méthodes :	Référence	INCOME	AKSI 2D
D_{11} :	136	120	130
D_{22} :	259	245	236

TABLE 4.8 – Valeurs identifiées, pour la plaque expérimentale en composite stratifié. Valeurs de référence provenant de [AllahTavakoli 2023].

mentales. En plus des exemples expérimentaux isotropes, un cas orthotrope a été étudié. Par ailleurs, à partir des mesures expérimentales de la plaque orthotrope, la méthode d'identification s'est révélée capable d'identifier plusieurs paramètres simultanément.

4.6 Conclusion intermédiaire

Dans ce chapitre, une méthode d'identification des coefficients pour les équations aux dérivées partielles, basée sur une approche originale, a été décrite. Cette méthode est adaptée aux équations aux dérivées partielles en dimension 2 en mécanique des structures, comme les équations de plaques ou de membranes, et fournit une identification dépendante de la fréquence. L'approche est basée sur la comparaison entre des k-spaces analytiques et des k-spaces de référence, extraits des champs de déplacement à l'aide des méthodes INCOME et AKSI 2D.

La méthodologie de l'identification et en particulier la méthode d'extraction des k-spaces et la définition des relations de dispersion analytiques ont été décrites et testées.

La première validation du processus d'identification est basée sur des champs solutions numériques d'équations d'ordre 2, 4 et 6. Il s'agit de cas pour lesquels la forme de l'équation aux dérivées partielles convient parfaitement aux champs en entrée. Parmi eux, trois cas d'équations du second ordre, déformation de membranes isotropes et orthotropes, deux cas d'équations du quatrième ordre, flexion de plaques isotropes et orthotropes et deux cas d'équations du sixième ordre ont été testés. Dans tous ces exemples, les coefficients sont correctement retrouvés. Ensuite, le procédé d'identification a été appliqué à un exemple de métamatériau, une paroi bi-raïdiée pour identifier, à partir des champs de déplacement numérique de la structure complète, un coefficient du modèle homogénéisé et ainsi étendre le domaine de validité d'un modèle de plaque orthotrope équivalente. Enfin, la méthode s'est révélée capable retrouver avec succès des paramètres à partir de données expérimentales. De plus, il a été montré qu'il est possible d'identifier plusieurs coefficients simultanément. La principale limitation de la méthode provient de la procédure d'extraction du nombre d'onde. Elle est limitée en basse fréquence par la taille du domaine et en haute fréquence par le pas de discrétisation spatial.

Cette méthode a été développée afin d'extraire des informations de structures à partir de champs de déplacement mesurés expérimentalement. Elle peut être utilisée pour caractériser une plaque de matériau inconnu. Mais elle se révèle surtout intéressante pour la modélisation de méta structures, dans des situations dans lesquelles les coefficients des équations sont inconnus et ne peuvent pas être facilement estimés. De cette manière, des paramètres équivalents peuvent être calculés et réduire considérablement le temps de calcul des simulations de la structure. Outre les cas de parois raidies, le processus d'identification pourrait être appliqué à des structures telles que les métamatériaux pantographiques [Ciallella 2022, Dell'Isola 2019] qui

sont un autre type de structures avec une dynamique multi-échelle pour lesquelles des modèles 2D homogénéisés sont souvent utilisés.

Détection de défauts dans des structures mono et bidimensionnelles par analyse k-spaces

Ce chapitre propose d'étudier la possibilité de se baser sur la variation des k-spaces pour détecter la présence de défauts dans les structures mono et bidimensionnelles. Bien que la présence d'une singularité n'ait probablement qu'un impact limité sur la partie réelle des k-spaces, la partie imaginaire est différente. Celle-ci est plus sensible et est liée à l'amortissement, à la dissipation de l'énergie et aux ondes évanescentes qui peuvent être liées à un défaut. Les nombres d'onde sont calculés en utilisant des méthodes inverses présentées précédemment, sur les champs de déplacement, à différentes fréquences. Les k-spaces et nombres d'onde calculés sont comparés à des références, majoritairement des formulations analytiques de la relation de dispersion. En 1D, une valeur de nombre d'onde est calculée pour chaque fréquence, tandis qu'en 2D, les nombres d'onde sont calculés à chaque fréquence et pour différentes directions. Les structures étudiées comprennent des modèles de poutres analytiques avec une entaille, des modèles numériques de plaques isotropes et des exemples de plaques orthotropes. L'approche présentée tente de repérer la présence d'entrailles dans les poutres et de trous ou de variations d'épaisseur dans les plaques.

Contents

5.1	Introduction	166
5.2	Détection de défauts dans des structures type poutres	166
5.2.1	Modélisation d'une poutre avec une entaille	167
5.2.2	Courbes de dispersion	168
5.2.3	Robustesse aux bruits et aux incertitudes de position	169
5.2.4	Fonction d'endommagement	170
5.3	Détection de défauts dans des structures type plaques	177
5.3.1	Effet d'un défaut sur les k-spaces mesurés	177
5.3.2	Localisation de défauts par approche k-space	180
5.3.3	Validation de la procédure de localisation	183
5.4	Conclusion intermédiaire	192

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les nombres d'onde et k-spaces se sont révélés être des outils efficaces pour faire de l'identification de paramètres. Dans les Chapitres. 2 et 3, il a été observé que la présence d'une singularité dans un champ, si elle n'est pas prise en compte a priori, pouvait avoir un impact sur la qualité des k-spaces calculés. Cet impact étant d'autant plus fort sur la composante complexe des k-spaces. Dans ces chapitres, la singularité était liée à la présence du point de chargement, mais une singularité peut être liée à la présence d'un défaut dans une structure. C'est pourquoi ce dernier chapitre propose d'étudier l'impact de défauts dans des structures sur les mesures de k-spaces. Et par conséquent, d'essayer d'en détecter par cette approche. En particulier, l'impact sur les parties imaginaires est exploré. En effet, la partie imaginaire du k-space est liée aux ondes évanescentes, l'atténuation, l'amortissement et par conséquent à une singularité. Or les méthodes k-spaces très récemment développées, dont l'AKSI 2D présentée dans ce manuscrit, permettent enfin une estimation fiable de cette partie imaginaire.

Dans ce contexte, ce chapitre propose d'étudier dans des structures monodimensionnelles et bidimensionnelles isotropes et orthotropes la présence de défauts modélisés simplement. En dimension 1, une entaille est modélisée analytiquement. Et en dimension 2, les défauts sont modélisés par des discontinuités dans le domaine. L'idée de base étant que la présence d'un défaut va altérer le comportement vibratoire de la structure. Et cet impact est observé sur les k-spaces complexes. L'impact est étudié séparément sur les parties réelles et imaginaires.

Le chapitre est structuré de la manière suivante, La section 2 s'intéresse aux structures monodimensionnelles. À partir d'un modèle analytique de poutre avec une entaille, les nombres d'onde complexes extraits par trois méthodes de calculs des nombres d'onde sont comparés. Suite à cela, un indicateur pour quantifier la sévérité de l'entaille est défini. Ensuite, la section 3 commence par une étude similaire transposée aux structures bidimensionnelles. Les champs de déplacement avec défauts sont calculés numériquement. Enfin, une procédure de localisation d'anomalies, basée sur les mesures de k-spaces, est présentée et testée sur des exemples de plaques isotrope et orthotrope avec des défauts simples.

5.2 Détection de défauts dans des structures type poutres

Pour des structures monodimensionnelles, [Chondros 1998] propose un modèle pour le comportement en flexion d'une poutre avec une entaille. Cette modélisation analytique permet de pouvoir aisément générer des champs de déplacement et de facilement modifier certains paramètres tels que la position ou la sévérité de l'entaille et d'en étudier l'effet sur les caractéristiques de dispersion des ondes.

Tout d'abord, le modèle de poutre avec un défaut est présenté. Celui-ci permet de tester sur un exemple l'impact d'une entaille sur les relations de dispersion mesurées et de faire un premier tri sur les méthodes inverses utilisables et sous quelles conditions. Ensuite, une mesure, un index de défaut est défini, basé sur la mesure des nombres d'ondes.

5.2.1 Modélisation d'une poutre avec une entaille

[Chondros 1998] propose de modéliser une poutre avec un défaut en $x = x_{defaut}$ par deux poutres d'Euler Bernoulli P1 et P2, dont l'équation est rappelée Eqn. (5.1). La poutre P1 pour $x \in [0, x_{defaut}]$ et la poutre P2 pour $x \in [x_{defaut}, L]$. Le défaut lui-même est modélisé par un ressort de torsion entre les deux poutres en $x = x_{defaut}$.

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \omega^2 \Lambda u = f. \quad (5.1)$$

u_1 est le déplacement sur la poutre P1 et u_2 sur la poutre P2. u_1 et u_2 sont des solutions de Eqn. (5.1), leurs formes sont par conséquent connues :

$$\begin{aligned} u_1(x) &= A_1 \sin kx + B_1 \cos kx + C_1 \sinh kx + D_1 \cosh kx, \text{ pour } x < x_{defect}, \\ u_2(x) &= A_2 \sin kx + B_2 \cos kx + C_2 \sinh kx + D_2 \cosh kx, \text{ pour } x > x_{defect}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

avec k le nombre d'onde. Les constantes sont calculées avec les conditions aux limites et les conditions de continuité à la position du défaut.

Par exemple, si l'extrémité $x = 0$, un déplacement d'encastrement unitaire est appliqué tandis que l'autre extrémité, en $x = L$, est libre, alors :

$$\begin{cases} u_1|_0 = 1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}|_0 = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}|_L = 0, \\ \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}|_L = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

D'autres conditions aux limites peuvent être prises en compte. En $x = x_{defect}$ les conditions de continuité sont les suivantes :

$$\begin{aligned} u_1|_{x_{defect}} &= u_2|_{x_{defect}}, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}|_{x_{defect}} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}|_{x_{defect}}, \\ \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}|_{x_{defect}} &= \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}|_{x_{defect}}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x_{defect}} - \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x_{defect}} &= (EIc/L)L \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}|_{x_{defect}}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

avec $c = \frac{6\pi(1 - \nu^2)h\Phi(a/h)}{EI}$ et :

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= 0,63845\alpha^2 - 1,03508\alpha^3 + 3,72015\alpha^4 - 5,17738\alpha^5 + 7,55301\alpha^6 \\ &\quad - 7,33244\alpha^7 + 2,49091\alpha^8 - 2,3391\alpha^9 + 2,55976\alpha^{10} \\ &\quad - 9,7367\alpha^{11} + 6,93036\alpha^{12} + 5,42308\alpha^{16}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'exemple de poutre choisi présente les propriétés mécaniques de l'aluminium : Module de Young $E = 69$ GPa, masse volumique $\rho = 2700$ kg/m³ et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. Un taux d'amortissement de $\eta = 5\%$ est ajouté au module de Young. Les propriétés géométriques sont les suivantes : une longueur $L = 1$ m et une section carrée de côté $b = h = 0.01$ m. Les quantités suivantes proviennent des précédentes : la masse linéique $\Lambda = bh\rho$, le module d'inertie en flexion $I = \frac{bh^3}{12}$ et le nombre d'onde k tel que $k^4 = \omega^2 \frac{\Lambda}{EI}$. Le champ est supposé connu sur 100 points régulièrement espacés ($\Delta x = \frac{L}{N-1} = 10.1$ mm).

Paramètre :	E	ν	ρ	L	b, h
Value :	(69 + 3.45i) GPa	0.3	2700 kg/m ³	1 m	0.01 m

TABLE 5.1 – Propriétés mécaniques et géométriques de la poutre.

À partir de ce modèle, les nombres d'onde ont été calculés avec les trois approches, l'IWC [Berthaut 2004, Berthaut 2005], l'INCOME [Boukadia 2022] et l'AWI [Li 2023b, Li 2023c]. La fissure est localisée en $x = L/2$, deux profondeurs de fissure sont testées : $a = h/4$, $a = h/2$ et le cas $a = 0$ sert de référence. Les champs sont calculés pour des fréquences allant de 50 Hz à 1000 Hz avec un pas de 50 Hz, sur 100 points régulièrement espacés ($\Delta x = 10$ mm).

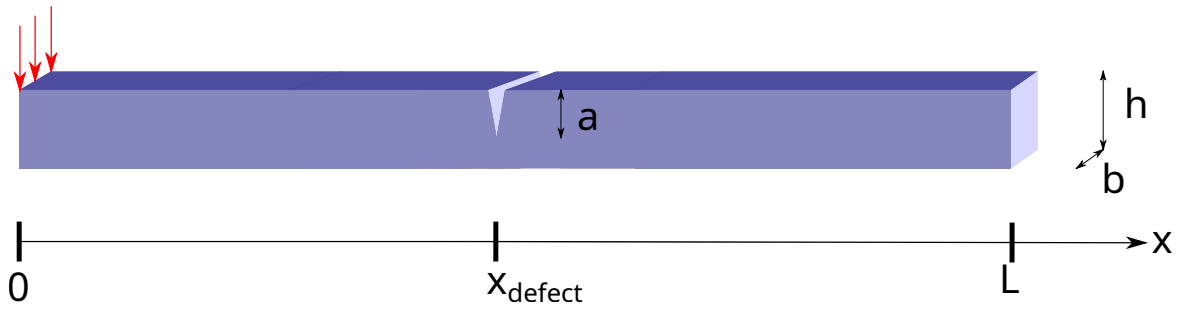


FIGURE 5.1 – Schéma de la poutre avec une entaille.

5.2.2 Courbes de dispersion

Les courbes de dispersion sont calculées à partir des champs de déplacement résolus analytiquement du modèle de poutre sans défaut et avec les deux tailles de défaut. Les nombres d'onde sont calculés par l'IWC, l'INCOME et l'AWI et sont comparés à la relation de dispersion analytique.

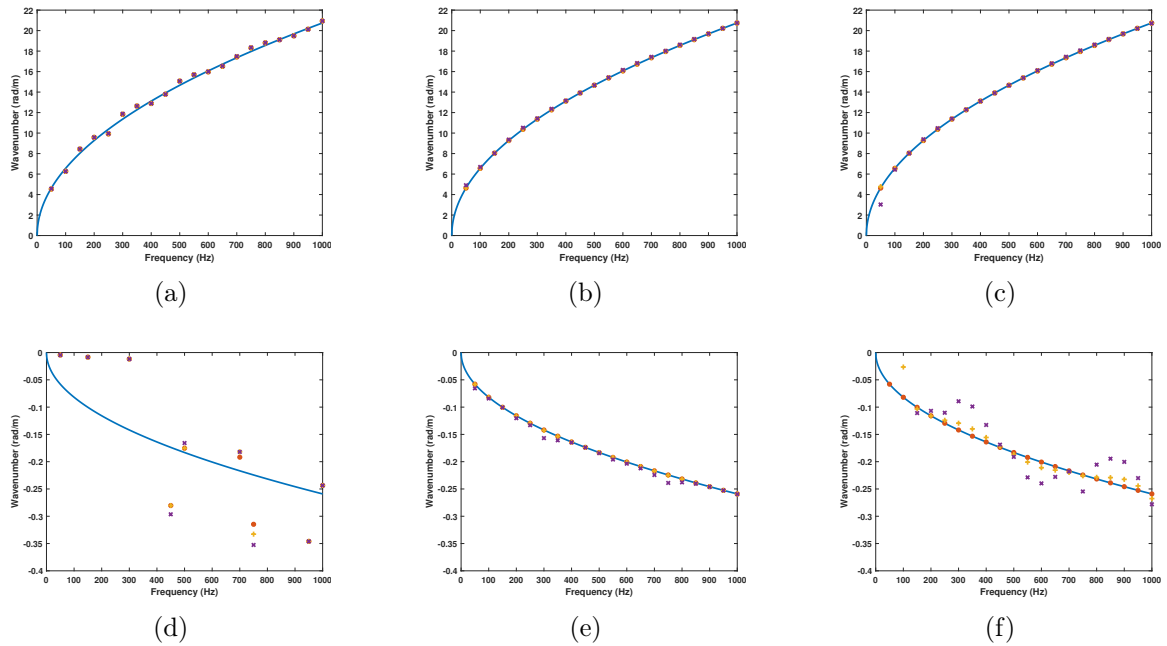


FIGURE 5.2 – Relation de dispersion de la poutre : relation de dispersion analytique (—), nombres d’onde calculés sans défaut (\bullet), avec une profondeur de défaut de $a = h/10$ ($+$) et avec une profondeur de défaut de $a = h/5$ (\times). (a) partie réelle calculée avec l’IWC, (b) partie réelle calculée avec l’INCOME, (c) partie réelle calculée avec l’AWI, (d) partie imaginaire calculée avec l’IWC (e) partie imaginaire calculée avec l’INCOME et (f) partie imaginaire calculée avec l’AWI.

Tout d’abord, il apparaît que les parties réelles sont toujours proches des valeurs analytiques pour toutes les méthodes ou tailles de défaut Figs. 5.2a, 5.2b et 5.2c. Pour les parties imaginaires, Fig. 5.2d, la méthode IWC n’est pas assez précise dans cette bande de fréquences pour qu’une différence provoquée par un défaut soit observable. À l’inverse, pour les méthodes INCOME et AWI, Figs. 5.2e et 5.2f, lorsque la structure est sans défaut, la partie imaginaire de la relation de dispersion est très proche de la relation analytique. Lorsqu’il y a un défaut, l’écart se creuse avec l’augmentation de la sévérité du défaut. Cette tendance est plus prononcée dans le cas de l’AWI. La partie imaginaire des nombres d’onde calculés par l’IWC ne peut donc pas être utilisée pour déduire la présence d’un défaut.

5.2.3 Robustesse aux bruits et aux incertitudes de position

La présence de défauts semble affecter les nombres d’ondes, en particulier leurs parties imaginaires. Cependant, l’effet produit par un défaut doit être comparé à celui d’un peu de bruit sur le signal mesuré, pour vérifier dans quelle mesure ces deux phénomènes peuvent être séparés. Ainsi, la robustesse de cette approche est étudiée dans des conditions non parfaites. Pour cela, du bruit est rajouté.

Le bruit est ajouté aux champs calculés avec le modèle de Chondros, suivant une loi uniforme.

$$\tilde{u}(x_n, y_m) = u(x_n, y_m) + \varepsilon_{n,m}, \quad (5.7)$$

avec $\varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{U}(-\alpha, \alpha)$, et α choisi de telle sorte que $SNR = \frac{\|u\|_{L^2}}{\|\varepsilon\|_{L^2}} = 100$.

L'objectif est de vérifier la pertinence de cette approche basée sur les nombres d'onde pour la détection de défauts dans le cas de données non parfaites.

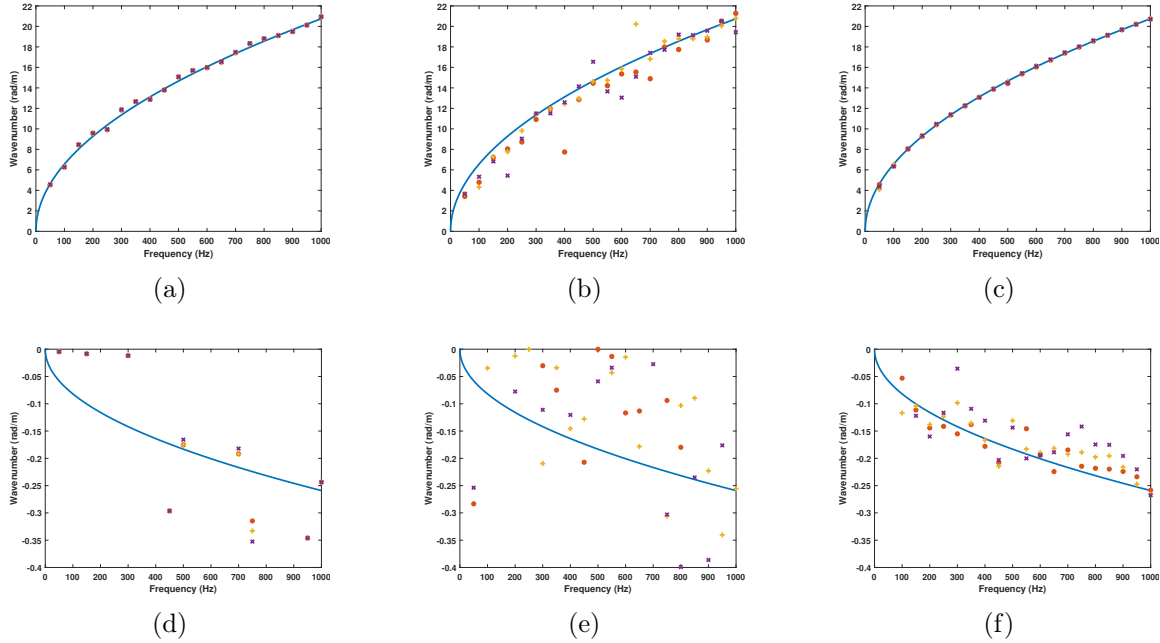


FIGURE 5.3 – Courbes de dispersion de la poutre avec ajout de bruit ($SNR=100$) : courbe de dispersion analytique (—), nombres d'onde calculés sans défaut (\bullet), avec une profondeur de défaut de $a = h/10$ ($+$) et avec une profondeur de défaut de $a = h/5$. (\times). (a) partie réelle calculée avec l'IWC, (b) partie réelle calculée avec l'INCOME, (c) partie réelle calculée avec l'AWI, (d) partie imaginaire calculée avec l'IWC (e) partie imaginaire calculée avec l'INCOME et (f) partie imaginaire calculée avec l'AWI.

Avec un rapport signal-bruit $SNR = 100$, les nombres d'onde mesurés sont plus bruités. Les parties réelles restent pratiquement inchangées et proches des valeurs analytiques Figs. 5.3a, 5.3b et 5.3c. En revanche, les parties imaginaires sont plus impactées. Celles calculées par l'INCOME Fig. 5.3e, sur un champ sans défaut sont trop perturbées pour que cette approche puisse être utilisée. Celles calculées par l'AWI, Fig. 5.3f, sont moins affectées, de sorte que le défaut a un effet remarquable.

En résumé, il semble possible de pouvoir se baser sur les parties imaginaires des nombres d'onde mesurés par l'AWI. Celles calculées par l'INCOME peuvent être exploitables, mais seulement lorsque les mesures de champs sont très peu bruitées.

5.2.4 Fonction d'endommagement

Afin de quantifier l'impact d'un défaut sur le calcul des nombres d'ondes, une mesure d'écart est définie. Les nombres d'onde calculés à partir de la structure à N_f différentes fréquences sont comparés à une référence. La référence peut être une formulation analytique ou des nombres d'onde mesurés à partir d'une structure saine. Cet écart se base sur les parties réelles ou

imaginaires des nombres d'ondes.

$$Dq_g(k_{measure}, k_{ref}) = \sqrt{\frac{1}{N_f} \sum_{n=1}^{N_f} \left| \frac{g(k_{measure}(f_n)) - g(k_{ref}(f_n))}{g(k_{ref}(f_n))} \right|^2}. \quad (5.8)$$

g est une fonction qui peut être appliquée aux nombres d'ondes, dans ce qui suit, g est la fonction partie réelle ou partie imaginaire.

Les variations de Eqn. (5.8) en fonction de la profondeur relative de la fissure a/h sont étudiées. La profondeur va de 0% à 20% de l'épaisseur. Les nombres d'onde sont calculés avec l'IWC, l'INCOME et l'AWI pour 21 fréquences régulièrement espacées entre 200 Hz et 1000 Hz. La comparaison avec le nombre d'onde analytique est effectuée d'une part sur la base des parties réelles ($g = \Re \mathbf{e}$) et d'autre part sur la base des parties imaginaires ($g = \Im \mathbf{m}$).

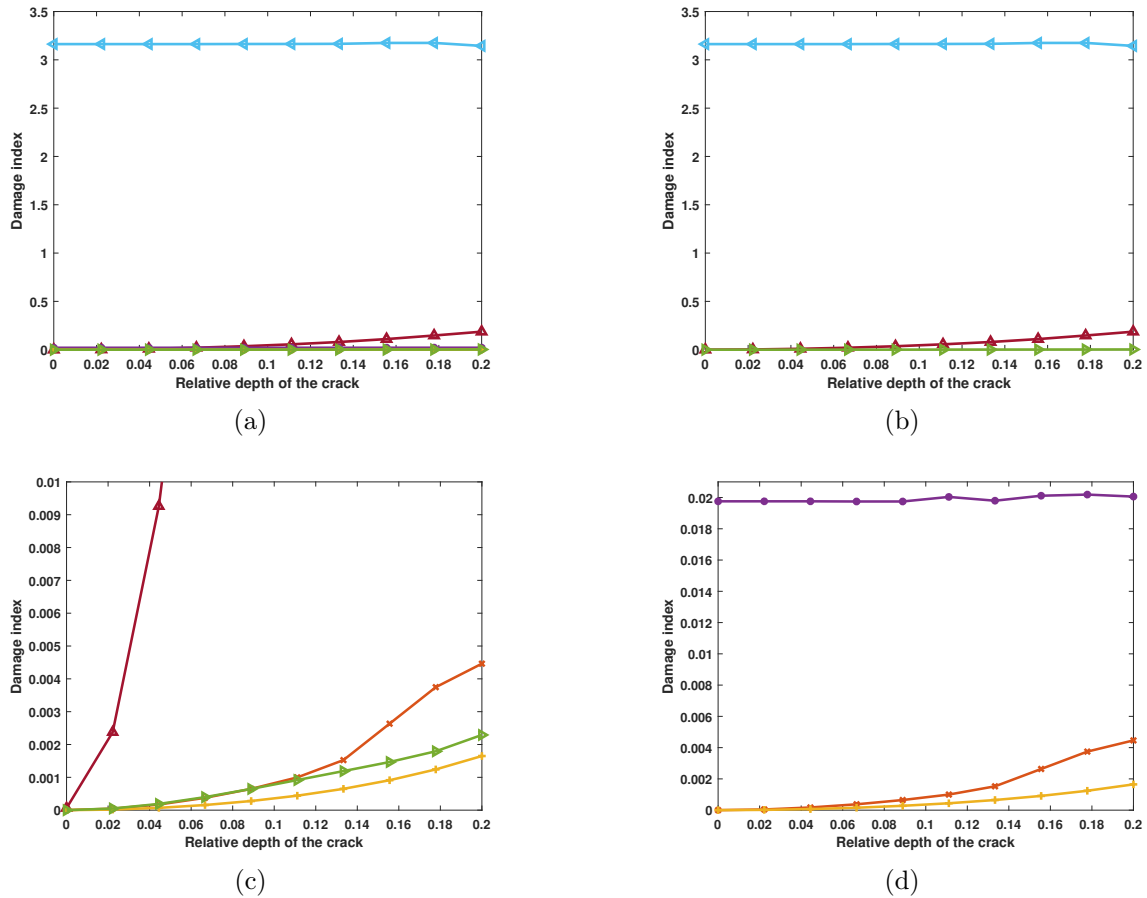


FIGURE 5.4 – Fonction d’endommagement calculée avec Eqn. (5.8) en fonction de la profondeur de la fissure. Nombres d’onde calculés par l’AWI, comparaison sur les parties réelles ($- \times$), nombres d’onde calculés par l’AWI, comparaison sur les parties imaginaires ($- \triangle$), nombres d’onde calculés par l’IWC, comparaison sur les parties réelles ($- \bullet$), nombres d’onde calculés par l’IWC, comparaison sur les parties imaginaires ($- \triangleleft$), nombres d’onde calculés par l’INCOME, comparaison sur les parties réelles ($- +$) et nombres d’onde calculés par l’INCOME, comparaison sur les parties imaginaires ($- \triangleright$). (a) figure complète, (b) figure avec uniquement la fonction d’endommagement basée sur les parties imaginaires, (c) zoom de la fig (a) et (d) figure avec seulement la fonction d’endommagement basée sur les parties réelles.

Tout d’abord, comme observé précédemment, l’IWC peut être écartée. Il apparaît, Fig. 5.4 que les nombres d’onde calculés avec l’IWC ne sont pas influencés par la présence d’un défaut. La courbe est constante. En revanche, les fonctions d’endommagement utilisant les nombres d’onde calculés par l’INCOME et l’AWI, basés sur la partie imaginaire ou réelle semblent plus prometteuses. En effet, lorsque la taille du défaut augmente, alors la fonction d’endommagement augmente également.

Cependant, l’augmentation de la fonction d’endommagement dépend de la méthode utilisée pour calculer les nombres d’ondes, l’AWI ou l’INCOME, et si la comparaison est basée sur la partie réelle ou imaginaire. Lorsque l’indicateur est basé sur la partie imaginaire, l’augmentation semble être plus importante que pour la partie réelle et lorsque les nombres d’onde sont calculés avec l’AWI, l’augmentation est plus importante qu’avec l’INCOME.

La figure suivante, Fig. 5.5, présente le cas où du bruit a été rajouté au champ. Le ratio signal sur bruit vaut $SNR = 100$.

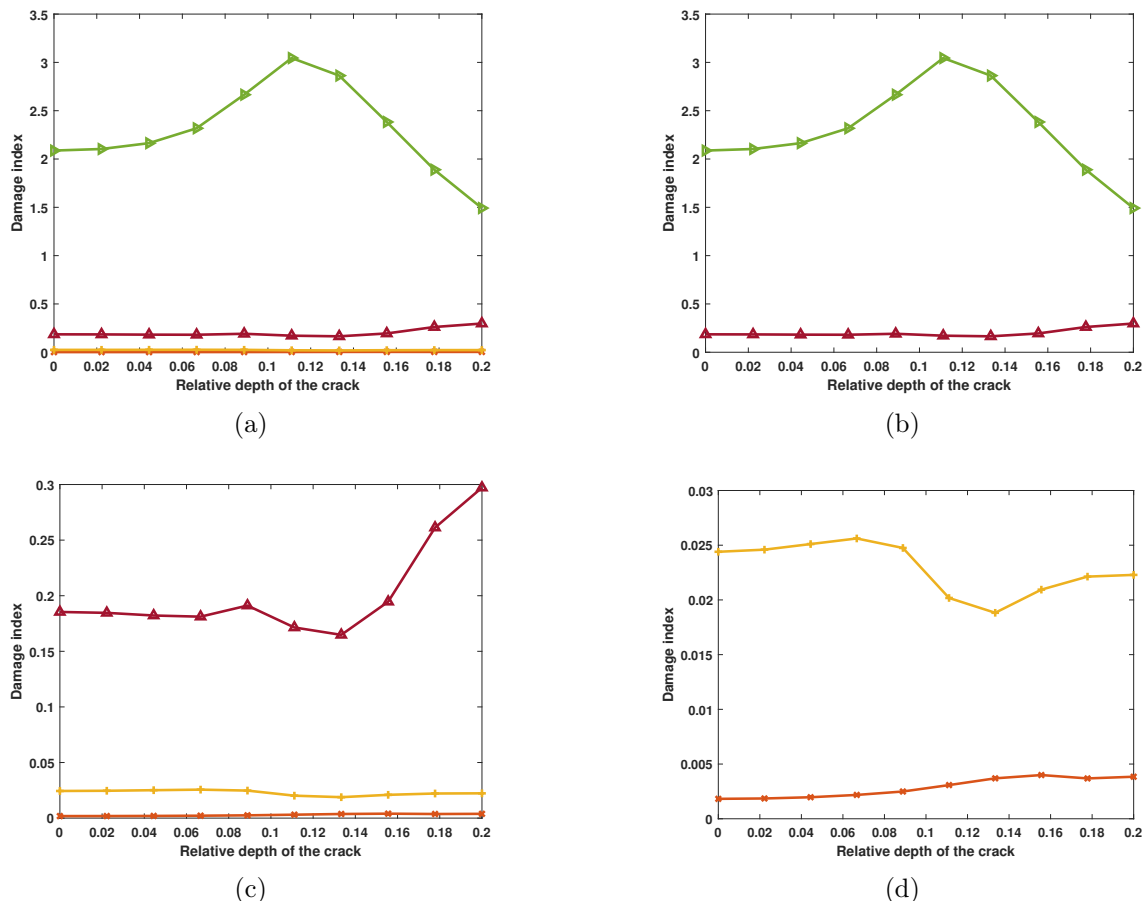


FIGURE 5.5 – Fonction d’endommagement calculée avec Eqn. (5.8) en fonction de la profondeur de la fissure, dans le cas où du bruit a été ajouté au champ de déplacement. Nombres d’onde calculés par l’AWI, comparaison des parties réelles ($-\times$), nombres d’onde calculés par l’AWI, comparaison des parties imaginaires ($-\triangle$), nombres d’onde calculés par l’IWC, comparaison des parties réelles ($-\bullet$), nombres d’onde calculés par l’IWC, comparaison des parties imaginaires ($-\triangleleft$), nombres d’onde calculés par l’INCOME, comparaison des parties réelles ($-\oplus$) et nombres d’onde calculés par l’INCOME, comparaison des parties imaginaires ($-\triangleright$). (a) figure complète, (b) figure avec seulement la fonction d’endommagement basée sur les parties imaginaires, (c) zoom de la fig (a) et (d) figure avec seulement la fonction d’endommagement basée sur les parties réelles.

Sur la Fig. 5.5, les fonctions basées sur l’INCOME ne sont plus des fonctions clairement croissantes, car cette méthode est très sensible au bruit. En particulier, toutes les valeurs de la fonction d’endommagement avec bruit sont supérieures au maximum de la fonction en conditions parfaites. Cela signifie que la présence du défaut est noyée dans le bruit. D’un autre côté, les fonctions basées sur l’AWI restent à peu près croissantes, au moins à partir d’une certaine valeur. La présence du défaut reste noyée dans le bruit pour les plus petits défauts, mais des défauts plus importants peuvent être identifiés.

5.2.4.1 Position du défaut

Ensuite, l'effet de la position du défaut sur les fonctions d'endommagement est investigué. Cinq positions sont considérées : $x_{defect} = 0.1L, 0.25L, 0.5L, 0.75L$ et $0.9L$ et sont illustrées Fig. 5.6.

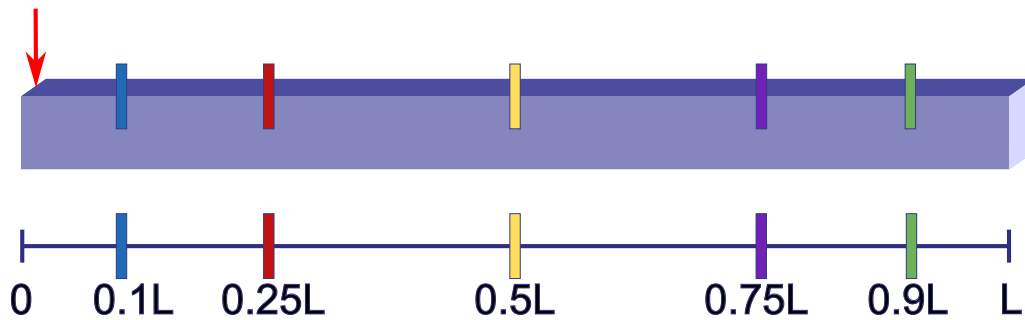


FIGURE 5.6 – Schéma de la poutre avec les positions successives de l'entaille.

Une étude du même type que précédemment est réalisée. Les écarts relatifs entre les nombres d'onde mesurés et analytiques sont calculés en fonction de la profondeur du défaut pour les cinq positions. Les nombres d'onde sont mesurés par l'AWI et l'INCOME. Les comparaisons sont basées d'une part sur les parties réelles et d'autre part sur les parties imaginaires des nombres d'onde.

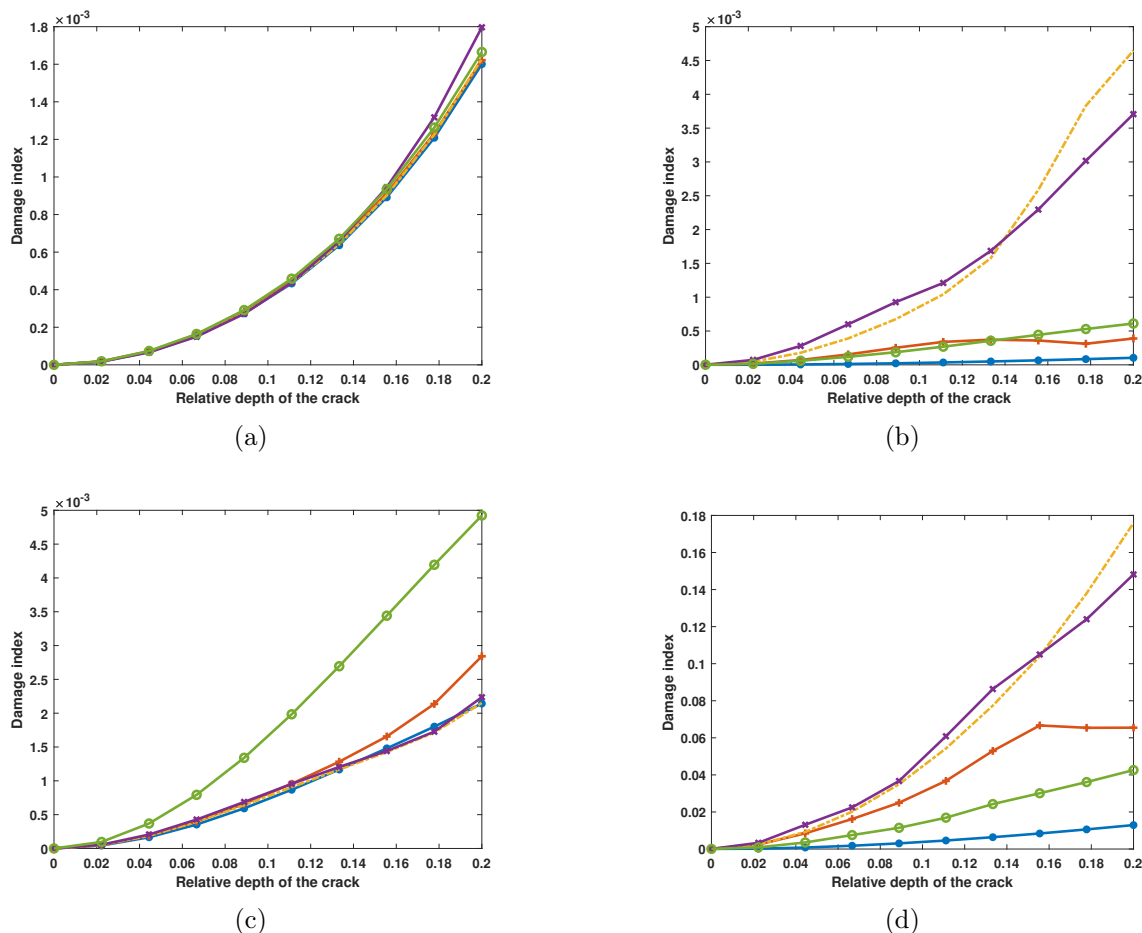


FIGURE 5.7 – Fonction d’endommagement calculée avec Eqn. (5.8) en fonction de la profondeur de la fissure calculée pour différentes positions du défaut. Position de l’entaille : $0.1L$ ($-●$), $0.25L$ ($-+$), $0.5L$ ($-.$), $0.75L$ ($-×$) et $0.9L$ ($-○$). Les nombres d’onde calculés avec (a) l’INCOME comparaison sur les parties réelles, (b) l’AWI comparaison sur les parties réelles, (c) l’INCOME comparaison sur les parties imaginaires et (d) l’AWI comparaison sur les parties imaginaires.

Sur la Fig. 5.7a, il apparaît que la position du défaut ne semble pas avoir une grande importance lorsque la partie réelle des nombres d’onde calculés par l’INCOME sont utilisés. Lorsque la partie imaginaire est utilisée, Fig. 5.7c, seul le défaut positionné en $0.9L$, soit près de l’extrémité opposée à la source, diffère légèrement des autres. À l’inverse, les indicateurs basés sur l’AWI Figs. 5.7b et 5.7d semblent plus efficaces pour repérer des défauts lorsqu’ils sont au centre de la poutre, $0.5L$ et $0.75L$.

5.2.4.2 Amortissement et quantification de l’endommagement

Dans cette sous-section, l’impact d’une modification de l’amortissement sur la fonction d’endommagement est étudié. Le ratio d’amortissement η dans les modèles analytiques de poutre prend les valeurs successives suivantes : 0.001, 0.005, 0.02, 0.05, 0.1 et 0.2. Ces valeurs ont été choisies pour tester la fonction d’endommagement, même si certaines valeurs sont beaucoup trop élevées ou faibles pour correspondre à de l’aluminium.

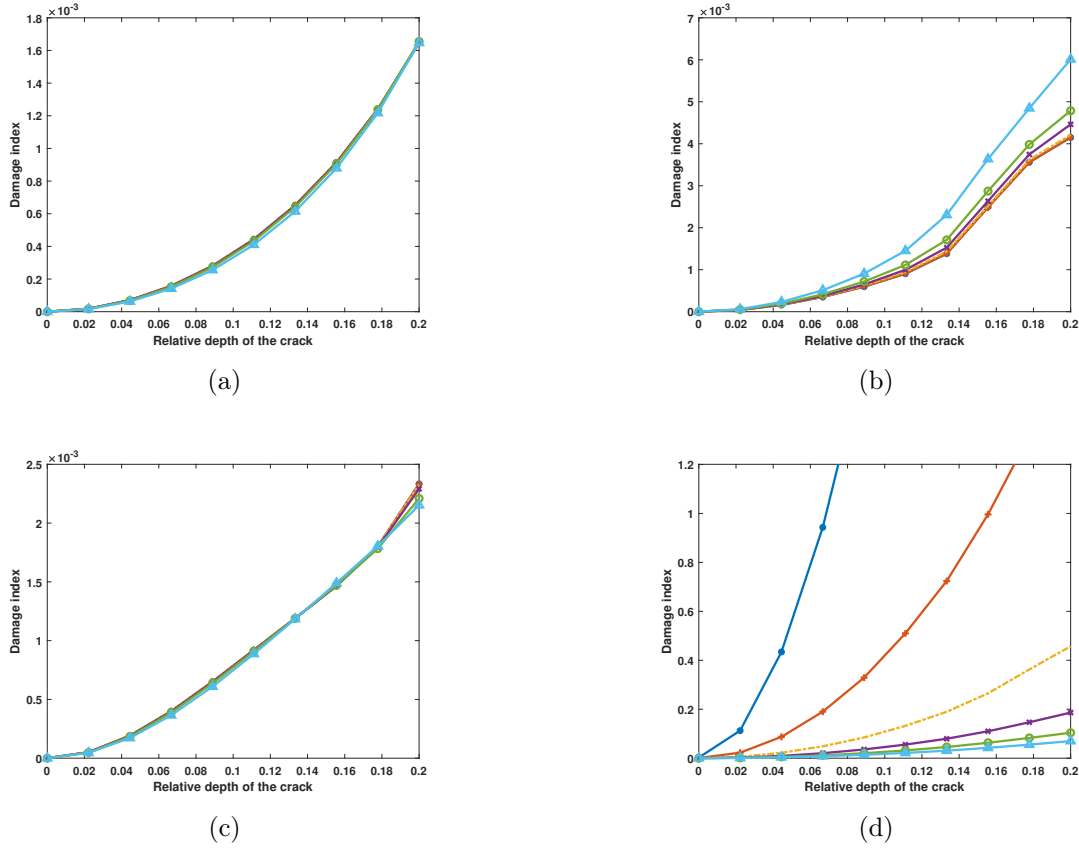


FIGURE 5.8 – Fonction d’endommagement calculée avec Eqn. (5.8) en fonction de la profondeur de la fissure calculée avec différentes techniques de calcul de nombres d’onde et pour plusieurs valeurs de ratio d’amortissement. Cas d’une poutre avec un ratio d’amortissement de : 0.001 ($-●$), 0.005 ($-+$), 0.02 ($-.$), 0.05 ($-×$), 0.1 ($-o$) et 0.2 ($-△$). Les nombres d’onde calculés avec (a) l’INCOME comparaison sur les parties réelles, (b) l’AWI comparaison sur les parties réelles, (c) l’INCOME comparaison sur les parties imaginaires et (d) l’AWI comparaison sur les parties imaginaires.

Figs. 5.8a et 5.8c montrent que l’amortissement n’a pas un impact important sur la fonction d’endommagement lorsque les nombres d’onde sont calculés avec l’INCOME. Figs. 5.8b et 5.8d traitent de l’AWI. Avec l’AWI, la modification de l’amortissement a un impact sur la fonction d’endommagement. Lorsque l’amortissement augmente, la fonction d’endommagement basée sur la partie imaginaire calculée par l’AWI diminue, tandis que celle basée sur la partie réelle calculée par l’AWI augmente très légèrement. Cependant, dans tous les cas lorsque la sévérité de l’entaille augmente, la fonction d’endommagement augmente. Selon la technique utilisé et l’amortissement de la structure, la définition d’une valeur seuil de la fonction au delà de laquelle un défaut est probablement présent sera différente.

En conclusion, l’approche nombres d’onde semble être utilisable pour repérer la présence de défauts dans des poutres tout en restant à des fréquences relativement basses. En particulier, les parties imaginaires des nombres d’onde sont les plus sensibles à la présence d’une anomalie. En théorie, les parties réelles semblent également utilisables. Cependant, les très faibles variations subies par ces dernières risquent de faire défaut à l’approche sur des cas plus réalistes. La

méthode **INCOME** est utilisable lorsque les données sont de très bonne qualité. Lorsque ces dernières sont légèrement bruitées, seul l'**AWI** reste utilisable. Maintenant que la possibilité d'utiliser la mesure des nombres d'onde pour repérer la présence de défauts a été montrée pour des structures monodimensionnelles, dans la section suivante, l'utilisation des k-spaces pour la détection de défauts dans des structures bidimensionnelles est étudiée.

5.3 Détection de défauts dans des structures type plaques

Pour des structures bidimensionnelles, la détection des défauts par approche k-space est plus compliquée. Tout d'abord, les nombres d'onde dépendent de la direction. Ensuite, le calcul de leur partie imaginaire est plus difficile car la décroissance des amplitudes n'est plus seulement liée à l'amortissement du matériau, mais est combinée à l'effet de l'atténuation spatiale. Dans cette section, tout d'abord, sur un exemple de plaque isotrope, des relations de dispersion et k-spaces issus de champs avec différentes sévérités de défauts sont présentés. Ensuite, une approche de localisation d'anomalies est présentée. Celle-ci est basée sur la mesure de k-spaces sur des sous domaines. Elle est appliquée à un exemple de plaque isotrope et à un autre de structure orthotrope homogène.

5.3.1 Effet d'un défaut sur les k-spaces mesurés

Tout d'abord, l'effet de la présence d'un défaut sur la mesure des caractéristiques de dispersion des ondes est observé. Pour cela, un exemple de plaque isotrope avec un défaut est considéré. Les méthodes **AKSI 2D** (Chapitre. 3) et **INCOME** [Boukadia 2022] sont utilisées pour l'extraction de k-spaces.

Afin de simuler une plaque présentant un défaut, un modèle numérique par éléments finis a été implémenté.

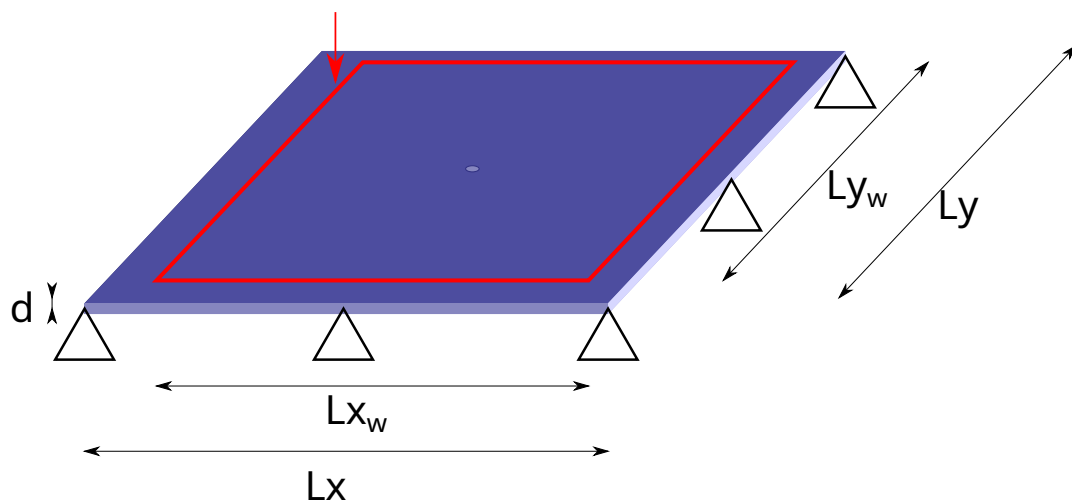


FIGURE 5.9 – Schéma de la plaque isotrope avec un défaut au centre.

La plaque a les mêmes propriétés que celle utilisée dans la section. 3.4.1 du Chapitre. 3. Celle-ci a les propriétés mécaniques de l'aluminium. Il s'agit d'une plaque rectangulaire repré-

sentée Fig. 5.9, de dimensions $L_x = 0.95$ m, $L_y = 0.6$ m avec une épaisseur $d = 0.002$ m. Le champ de déplacement est connu sur une grille régulière de 44×55 points à l'intérieur d'un sous domaine de la plaque de dimensions $L_{x_w} = 0.682$ m et $L_{y_w} = 0.536$ m. Elle est en support simple à ses bords. Le défaut est modélisé par un trou dans le domaine. Le trou est situé près du centre de la plaque, légèrement déplacé afin d'éviter d'avoir un point de mesure dans le trou. Il a une forme circulaire et quatre tailles ont été considérées. Le défaut a les diamètres suivants : 1.2 mm, 2.4 mm, 6 mm et 12 mm. Les fréquences vont de 50 Hz à 1000 Hz avec un pas de 50 Hz.

À partir des champs de déplacement sans défaut et pour chaque taille de défaut, les k-spaces sont calculés et comparés à chaque fréquence. Les méthodes [INCOME](#) et [AKSI 2D](#) sont utilisées. Fig. 5.10 montrent les relations de dispersion, parties réelles et imaginaires, calculées avec les deux techniques k-spaces, avec et sans défaut. Fig 5.11 montre le k-space à 1000 Hz. Il apparaît que les résultats de chaque cas et de chaque technique sont proches des valeurs analytiques. Cependant, lorsque la taille du défaut augmente, une légère différence commence à apparaître pour certaines valeurs de la partie imaginaire. Les k-spaces semblent donc pouvoir être utilisés comme un indicateur pour détecter des anomalies.

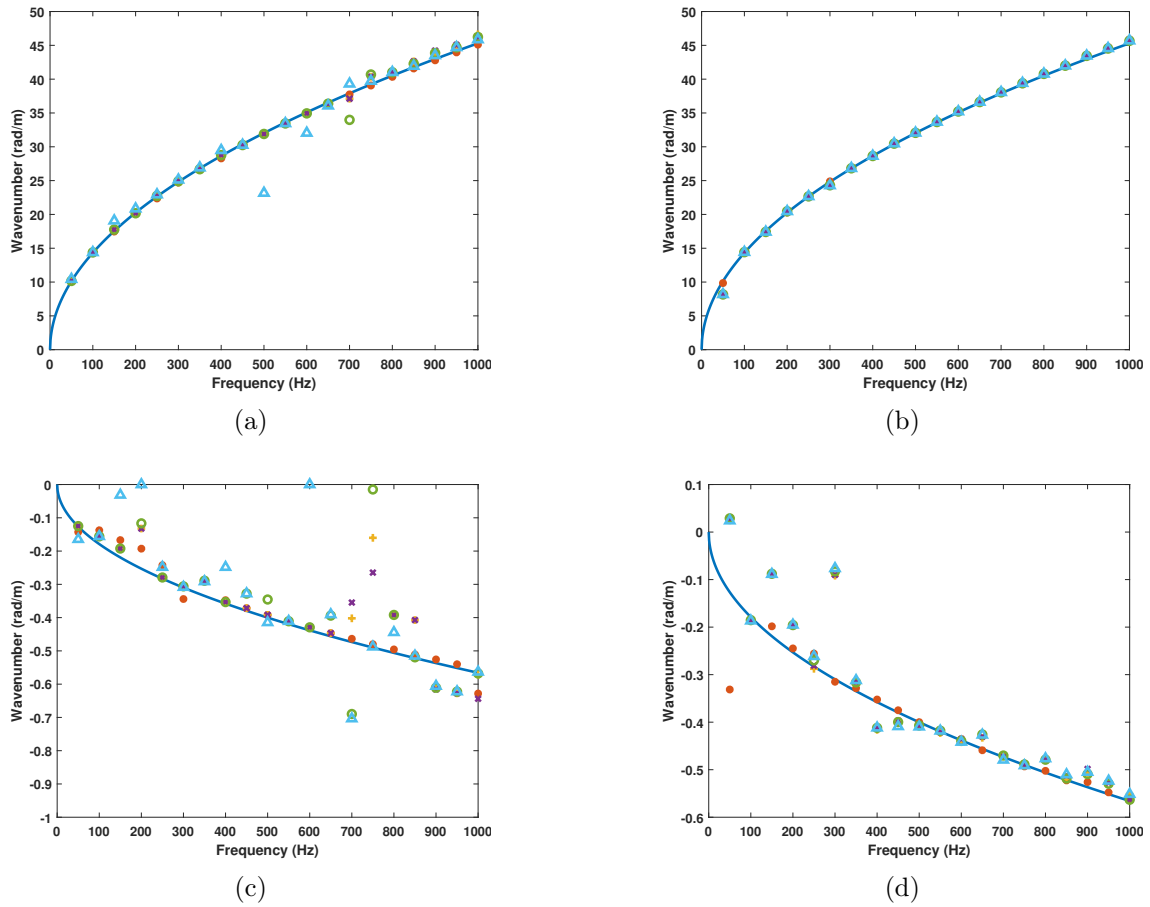


FIGURE 5.10 – Relation de dispersion dans la direction 0 rad de la plaque isotrope : relation de dispersion analytique (—), nombres d’onde calculés sans défaut (•), avec un défaut de diamètre 1.2 mm (+), avec un défaut de diamètre 2.4 mm (x), avec un défaut de diamètre 6 mm (—o) et avec un défaut de diamètre 12 mm (—△). (a) partie réelle calculée par l’INCOME, (b) partie réelle calculée par l’AKSI 2D, (c) partie imaginaire calculée par l’INCOME et (d) partie imaginaire calculée par l’AKSI 2D.

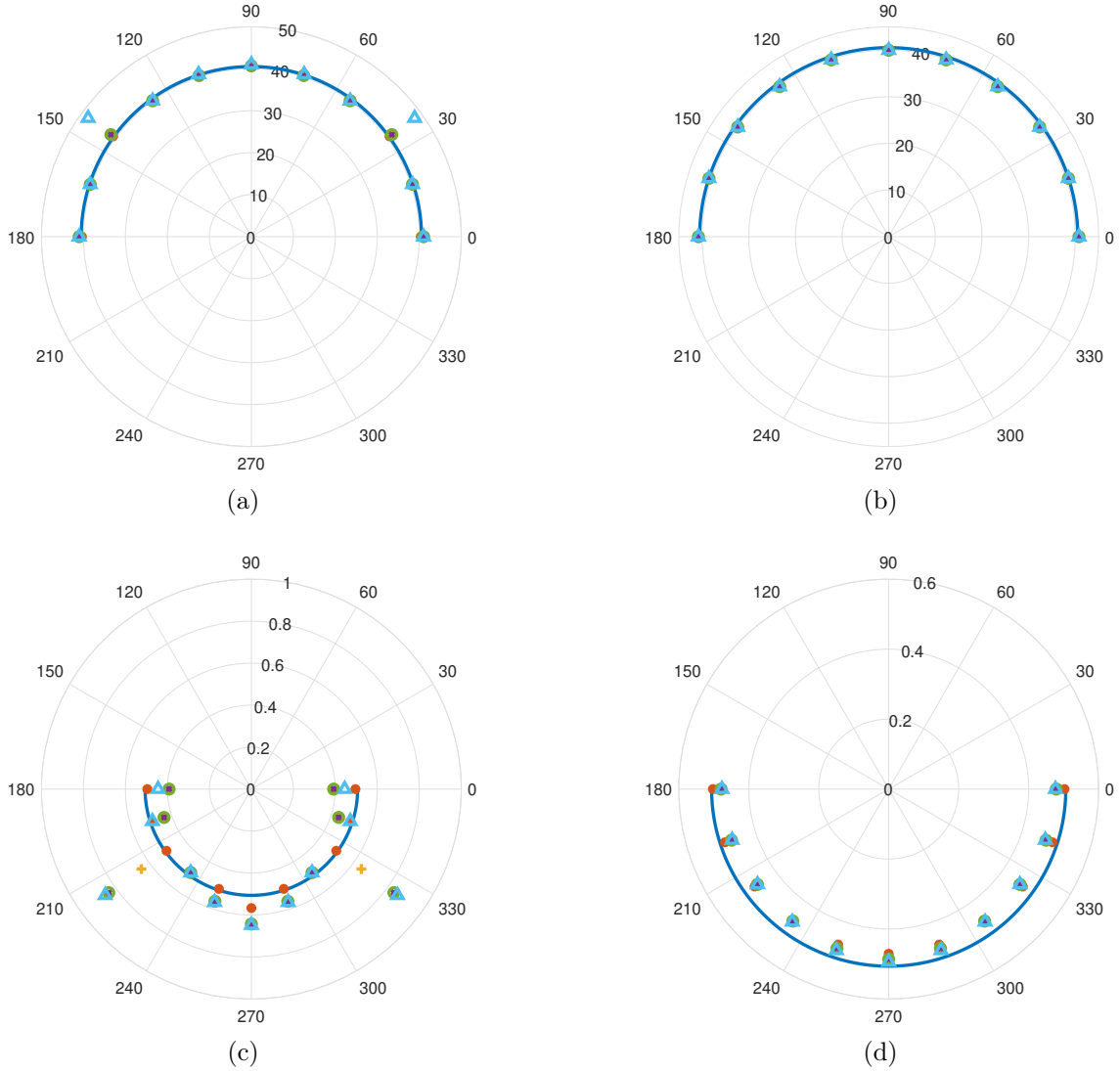


FIGURE 5.11 – k-spaces à 1000 Hz de la plaque isotrope : relation de dispersion analytique (—), nombres d’onde calculés sans défaut (●), avec un défaut de diamètre 1.2 mm (+), avec un défaut de diamètre 2.4 mm (x), avec un défaut de diamètre 6 mm (○) et avec un défaut de diamètre 12 mm (△). (a) partie réelle calculée par l’INCOME, (b) partie réelle calculée par l’AKSI 2D, (c) partie imaginaire calculée par l’INCOME et (d) partie imaginaire calculée par l’AKSI 2D.

5.3.2 Localisation de défauts par approche k-space

Comme dans le cas monodimensionnel, pour quantifier l’impact de la présence d’un défaut sur le calcul des k-spaces, une quantité similaire à Eqn. (5.8) peut-être définie. Toutefois, à l’inverse du cas monodimensionnel, les nombres d’onde sont calculés dans différentes directions, de sorte que la fonction d’endommagement devient Eqn. (5.9).

$$Dq_g(k_{measure}, k_{ref}) = \sqrt{\frac{1}{N_f N_\theta} \sum_{n=1}^{N_f} \sum_{l=1}^{N_\theta} \left| \frac{g(k_{measure}(f_n, \theta_l)) - g(k_{ref}(f_n, \theta_l))}{g(k_{ref}(f_n, \theta_l))} \right|^2}, \quad (5.9)$$

où N_f est le nombre de fréquences, N_θ le nombre de directions. Dans la suite $g = \Re$ ou $g = \Im$. En appliquant cette fonction à des sous domaines, il est possible d'estimer les régions du domaine où les k-spaces mesurés sont les plus éloignés des références. En suivant ce principe, une procédure de localisation de défauts est présentée. Celle-ci se base sur la mesure des k-spaces sur des sous domaines. L'idée étant que l'écart entre les k-spaces mesurés et de référence est plus élevé lorsqu'un défaut est présent dans le sous domaine.

5.3.2.1 Procédure de localisation d'anomalies par sous domaines

La procédure de localisation se découpe en quatre grandes étapes.

Définition des sous domaines

Tout d'abord, le champ est supposé connu sur une grille régulière $(x_n, y_m)_{1 \leq n \leq N_x, 1 \leq m \leq N_y}$. Soit N_w le nombre de points dans un sous domaine dans la direction x ou y . Les sous domaines sont définis de telle sorte que :

$$\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+N_w-1}] \times [y_j, y_{j+N_w-1}], \quad (5.10)$$

pour i allant de 1 à $N_x - N_w + 1$ et j allant de 1 à $N_y - N_w + 1$. Il est à noter qu'il ne s'agit pas d'une partition du domaine, les sous domaines se chevauchent. N_w , lié à la taille des sous domaines, doit être suffisamment grand pour que les calculs des k-spaces soient suffisamment précis. La taille des sous domaines devant être grande par rapport aux longueurs d'onde.

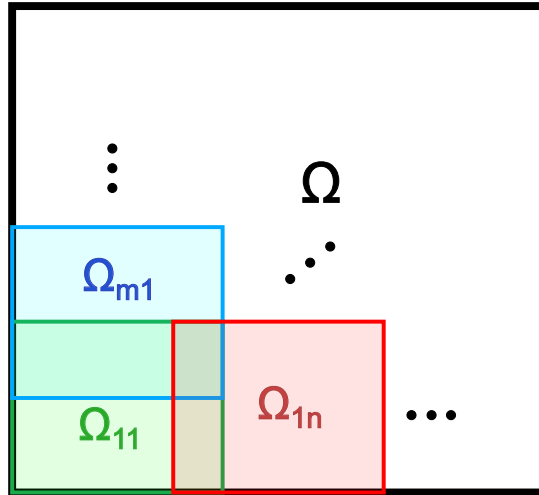


FIGURE 5.12 – Découpage du domaine Ω en sous domaines.

Sur chaque sous domaine, les k-spaces sont calculés. Si la méthode AKSI 2D est utilisée, alors son implémentation peut être optimisée en mettant en commun les grandeurs intermédiaires nécessaires aux calculs des k-spaces de plusieurs sous domaines et ainsi réduire considérablement le temps de calcul.

Choix des k-spaces de référence

Une fois que tous les k-spaces, à toutes les fréquences, dans toutes les directions, pour tous les sous domaines sont calculés, l'étape suivante consiste à les comparer à une référence. Il existe plusieurs possibilités pour définir les valeurs de référence :

- Une formulation analytique du k-space si une formule est connue.
- Les k-spaces calculés sur le domaine total.
- Une valeur dérivée des k-spaces calculés, par exemple la valeur moyenne ou médiane des k-spaces sur tous les sous domaines.

Comparaison entre les k-spaces de référence et les k-spaces calculés dans chaque sous domaine

Ensuite, la différence entre les k-spaces mesurés sur un sous domaine et les références peut être calculée à l'aide de Eqn. (5.9). Mais d'autres mesures sont envisageables.

À la fin de cette étape, pour chaque sous domaine Ω_{ij} , une valeur α_{ij} a été calculée et caractérise la distance des k-spaces de ce sous domaine à ceux de référence.

Damage Index

Enfin, pour chaque point (x_n, y_m) du maillage, il est possible de définir une valeur en combinant toutes les valeurs d'écart α_{ij} associées à tous les sous domaines contenant le point, $(x_n, y_m) \in \Omega_{ij}$. Cette combinaison peut être une moyenne ou une moyenne pondérée. Dans la suite, une moyenne pondérée est appliquée de manière à donner plus de contribution aux points les plus proches du centre du sous domaine.

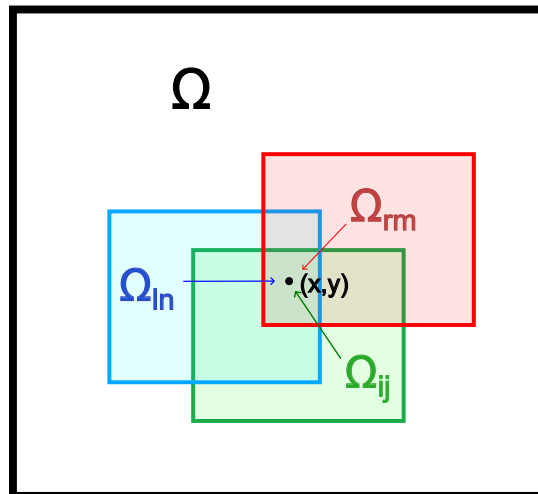


FIGURE 5.13 – Définition du Damage Index.

Ainsi, une surface de damage index est obtenue. Les zones ayant des valeurs plus élevées

correspondent aux régions où les calculs des k-spaces sont potentiellement affecté par une anomalie, telle qu'un défaut. Le schéma Fig. 5.14 résume la procédure de localisation.

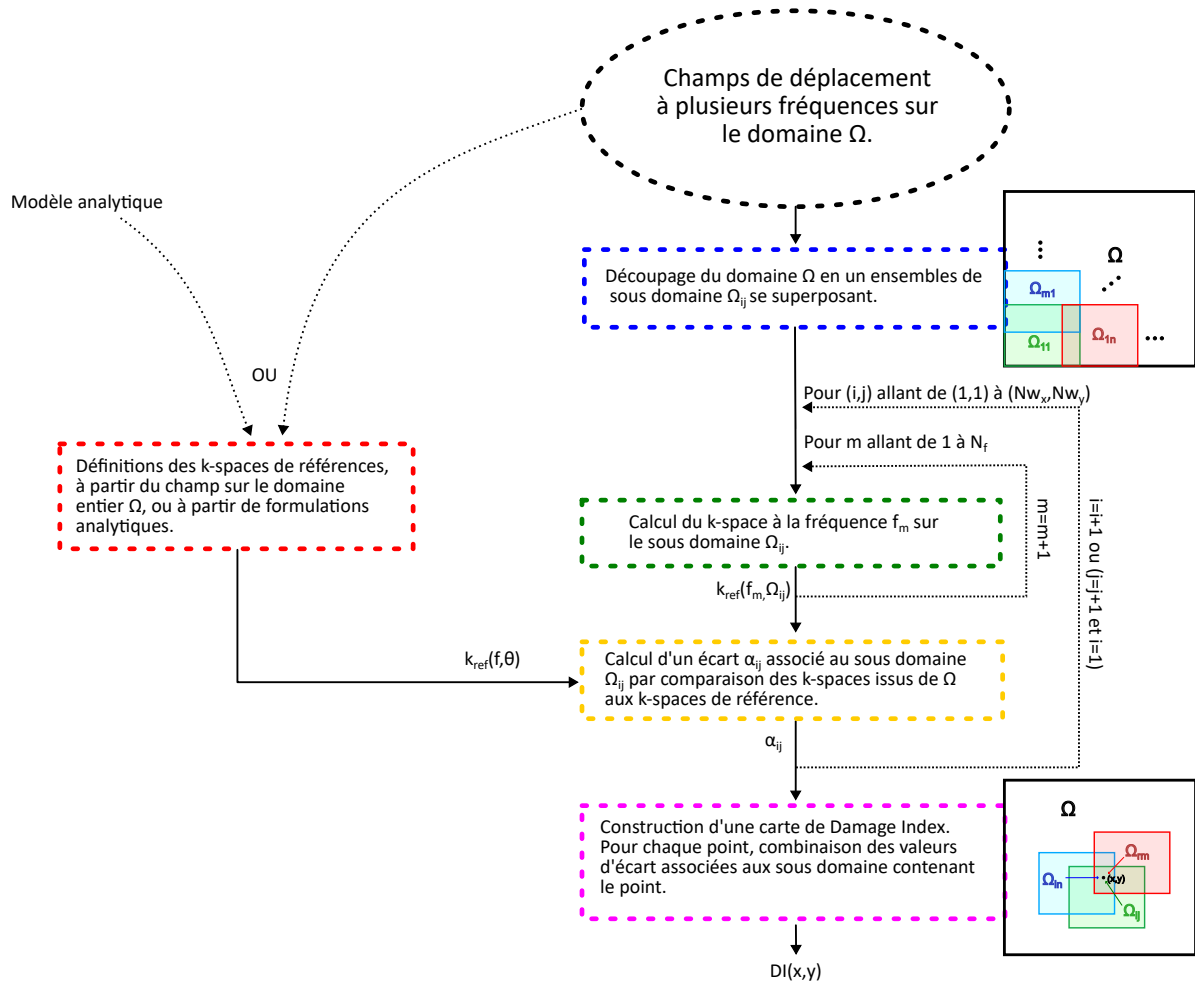


FIGURE 5.14 – Schéma de la procédure de localisation de défauts par approche k-space.

5.3.3 Validation de la procédure de localisation

La procédure de localisation est appliquée à l'exemple de plaque isotrope en acier et à un exemple de plaque orthotrope homogène équivalente à une structure bi-raïdiée.

5.3.3.1 Validation sur un cas de plaque isotrope

Tout d'abord, l'exemple simple de la plaque isotrope en aluminium, résolue numériquement et schématisée Fig. 5.9 est utilisé. Les champs sont connus sur une grille de 53×55 points dans un rectangle de dimensions $L_{x_w} = 0.843$ m et $L_{y_w} = 0.536$ m ($\Delta x = 1.59$ cm et $\Delta y = 0.99$ cm). Soit une grille légèrement plus étendue que précédemment qui englobe la position du point de chargement.

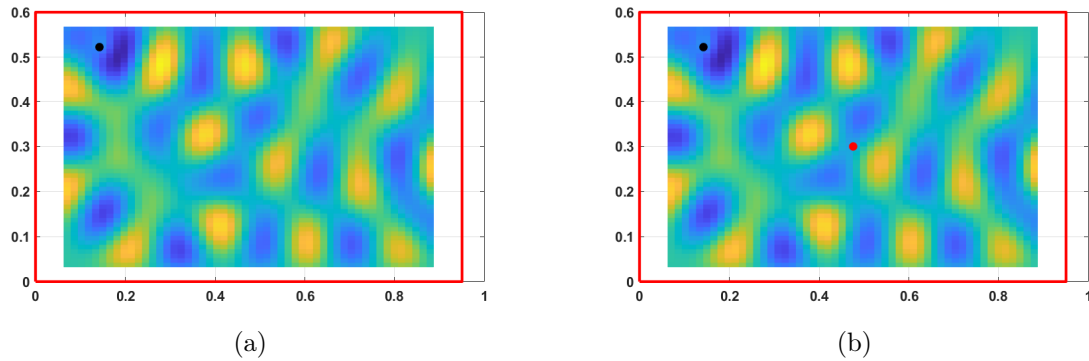


FIGURE 5.15 – Champ de déplacement à 700 Hz du modèle de plaque isotrope. Bords de la plaque - et position du chargement ponctuel (•). (a) sans défaut et (b) avec un défaut (•).

Fig. 5.15 illustre les champs de déplacement de la plaque isotrope à 700 Hz, avec et sans défaut. Les champs de déplacement sont trop similaires pour distinguer à l'œil nu l'effet du défaut. La procédure de localisation de défauts est testée sur ces champs de déplacement. Les sous domaines donnés par des grilles de $N_w = 20$ points de côté. Ainsi, ils mesurent 0.318 m par 0.198 m. Il y a donc 25×36 sous domaines. Les fréquences vont de 50 Hz 1000 Hz. Les illustrations suivantes sont basées sur des k-spaces calculés par l'INCOME. Le choix de la référence s'est porté sur les valeurs analytiques données par $k^4 = \frac{\omega^2 \rho d (1 - \nu^2)}{EI}$.

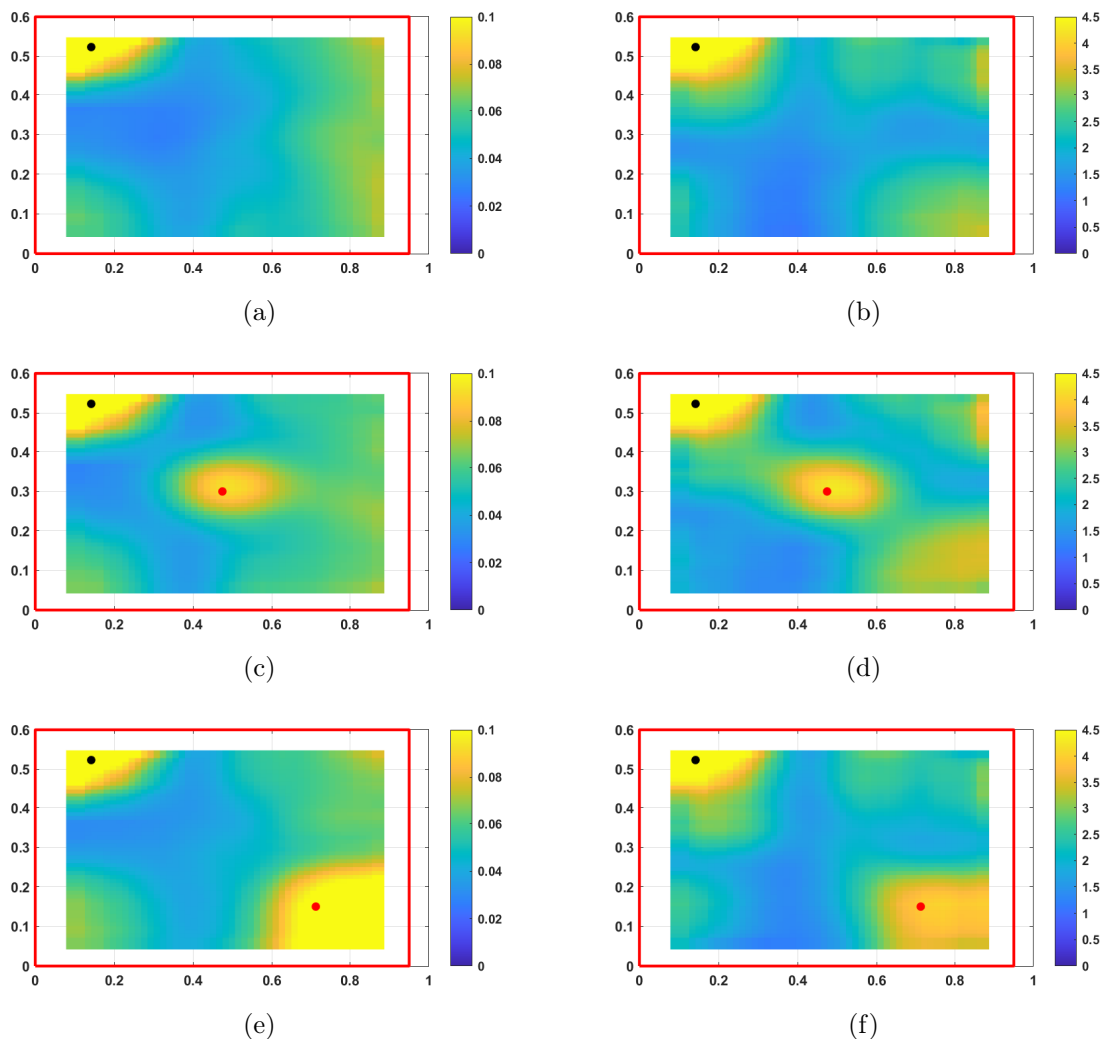


FIGURE 5.16 – Surface de l'indice calculé avec Eqn. (5.9) pour la plaque isotrope de bords -, avec un défaut de diamètre 12mm et situé à (\bullet) . La charge ponctuelle est située à (\bullet) . (a) et (b) sont sans défaut et (c), (d), (e) et (f) avec un défaut. (a), (c) et (e) sont basés sur la partie réelle des nombres d'onde et (b), (d) et (f) sur la partie imaginaire.

Fig. 5.16 présente le cas sans défaut servant de référence et deux cas avec défaut à deux positions différentes. Les comparaisons basées sur la partie réelle et imaginaire des k -spaces sont présentées. Tout d'abord, sur ces figures, il apparaît que le champ proche associé au point d'excitation perturbe le calcul des k -spaces. Par conséquent, les défauts ne peuvent pas être repérés s'ils sont trop proches du point d'excitation. Ailleurs, les défauts peuvent être détectés avec les deux indicateurs, car la valeur du damage index augmente à proximité des défauts et prend des valeurs supérieures à la valeur maximale du cas sans défaut (excepté à proximité du point source). L'ordre de grandeur des valeurs prises par le Damage Index est plus élevé s'il est basé sur les parties imaginaires plutôt que sur les parties réelles.

Ensuite, la procédure est testée avec un autre type de défaut. Au lieu d'un vide dans le domaine, un changement local d'épaisseur est considéré. Le défaut a toujours une forme

de disque, mais à l'inverse du cas précédent, ayant une épaisseur locale de 0, celui-ci prend successivement les épaisseurs $0.25d$, $0.5d$, et $0.75d$. d étant l'épaisseur sans défaut de la plaque. Les résultats sont présentés Fig. 5.17. Sur cette figure, il apparaît que lorsque l'épaisseur augmente (donc le défaut est réduit), le défaut devient moins visible, jusqu'à ce que la valeur de l'indicateur d'endommagement atteigne la valeur maximale du cas sans défaut.

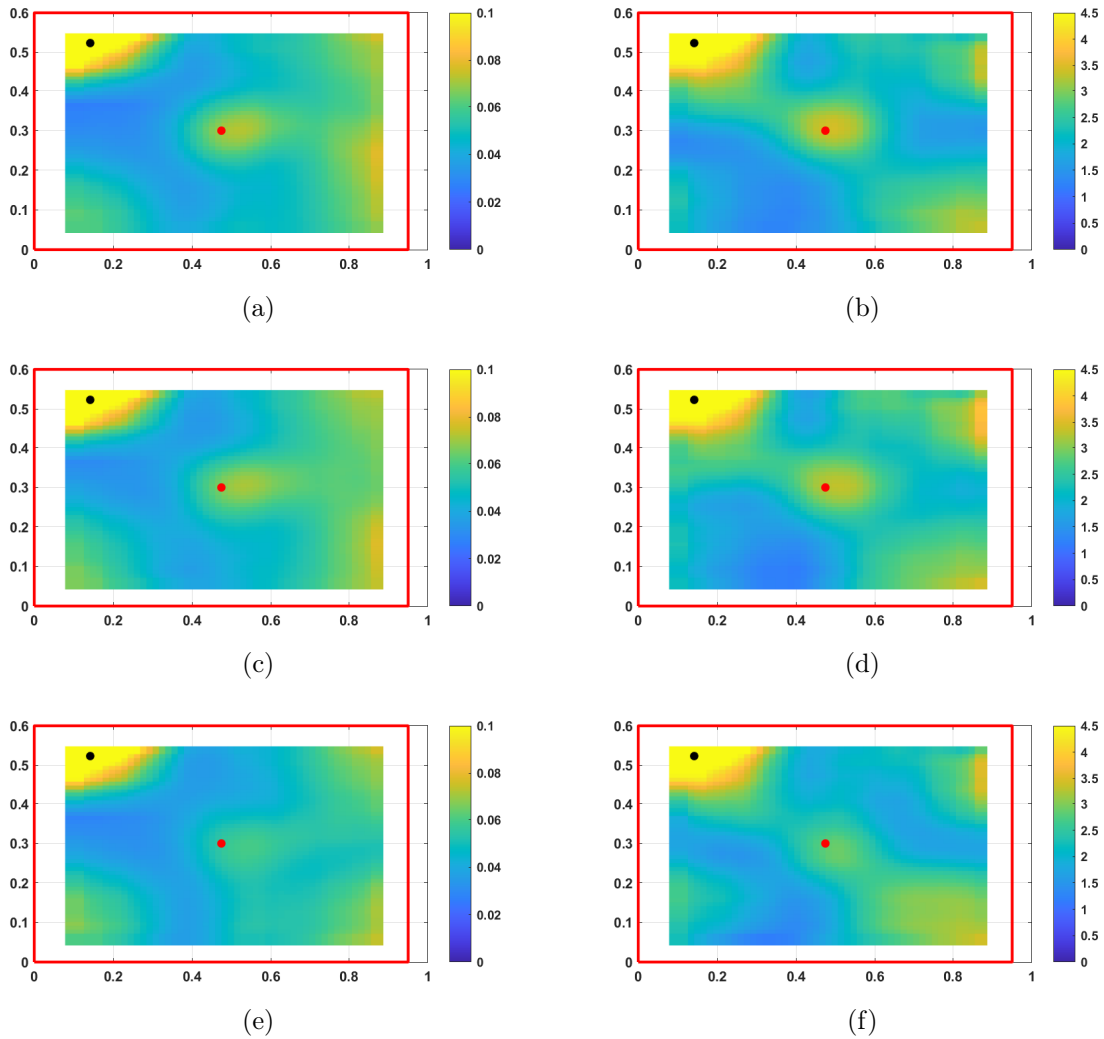


FIGURE 5.17 – Surface de l'indicateur calculé avec Eqn. (5.9) pour la plaque isotrope de bords -, avec un défaut de diamètre 12 mm et situé en (\bullet) . La charge ponctuelle est située en (\bullet) . (a) et (b) avec une épaisseur locale de $0.25d$, (c) et (d) avec une épaisseur locale de $0.5d$ et (e) et (f) avec une épaisseur locale de $0.75d$. (a), (c) et (e) sont basés sur la partie réelle des nombres d'onde et (b), (d) et (f) sur la partie imaginaire.

Ainsi, la procédure de localisation est capable de repérer approximativement la position du défaut quand il y en a un. Cependant, le défaut doit être suffisamment sévère pour que son impact sur les k-spaces calculés ressorte par rapport aux erreurs commises par les méthodes k-spaces de manière générale. De plus, les défauts ne peuvent pas être détectés à proximité du point d'excitation, en effet, le point source agit lui-même comme une singularité, ce qui altère

Paramètres :	h_x, h_y	b_x, b_y	E_x, E_y	ν_x, ν_y ,	ρ_x, ρ_y	η
Valeurs :	0.01 m	0.01 m	69 GPa	0.3	2700 kg/m ³	0.05

TABLE 5.2 – Propriétés géométriques et mécaniques de la grille de raidisseurs.

Paramètres :	l_x, l_y	d	E_p	ν_p	ρ_p
Valeurs :	0.1 m	0.001 m	3 GPa	0.3	1200 kg/m ³

TABLE 5.3 – Propriétés géométriques et mécaniques des plaques internes.

les k-spaces mesurés à proximité.

5.3.3.2 Application de la localisation à un exemple de plaque orthotrope homogène

La procédure est maintenant testée sur des champs liés à des structures orthotropes homogènes. Les champs sont issus de la résolution du modèle homogénéisé de plaque orthotrope équivalente au comportement en flexion d'une paroi bi-raidie, déjà utilisé dans les chapitres précédents et présenté plus en détail section. 2.4.2.1. L'équation est rappelée Eqn. (5.11).

$$\begin{aligned}
& \frac{E_x I_x}{l_y} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{E_y I_y}{l_x} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& + \omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left(K_{\omega_x}^{bc} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{\omega_y}^{bc} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
& = \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right) u,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

avec

$$\langle \phi_\omega^{CCCC} \rangle = \frac{4}{\delta r} \frac{I_1(\delta r) J_1(\delta r)}{I_1(\delta r) J_0(\delta r) + I_0(\delta r) J_1(\delta r)}, \tag{5.12}$$

où $\delta^4 = \frac{\omega^2 \Lambda_p}{E'_p I_p} = (2\pi f)^2 \frac{\Lambda_p (1 - \nu_p^2)}{E_p I_p}$, J_0, J_1 sont les fonctions de Bessel du premier type, I_0, I_1 sont les fonctions de Bessel modifiées du premier type et $r = 0.532 l$. La relation de dispersion analytique associée à cette équation est la suivante :

$$\begin{aligned}
& k_\theta^4 \left(\frac{E_x I_x}{l_y} \cos^4 \theta + \frac{E_y I_y}{l_x} \sin^4 \theta + \left(\frac{G_x \mathcal{I}_x}{l_y} + \frac{G_y \mathcal{I}_y}{l_x} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \\
& - k_\theta^2 \omega^2 \left(\frac{\rho_y J_y}{l_x} \cos^2 \theta + \frac{\rho_x J_x}{l_y} \sin^2 \theta \right) = \omega^2 \left(\frac{\Lambda_x}{l_y} + \frac{\Lambda_y}{l_x} + \Lambda'_p \langle \phi_\omega^{bc} \rangle \right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Les paramètres mécaniques et géométriques sont rappelés dans les Tables. 5.2 et 5.3, il s'agit des mêmes valeurs que précédemment. La plaque est équivalente à une structure de 10 par 10 cellules. Le domaine est donc un carré de côté $L = 1.11$ m. Aux bords, une condition de bords en supports simples est appliquée. Le défaut est modélisé par un trou dans le domaine. Au niveau des bords associés au défaut, une condition aux limites libre est modélisée. L'équation

a été résolue par éléments finis pour des fréquences allant de 50 Hz à 1000 Hz avec un pas de 50 Hz.

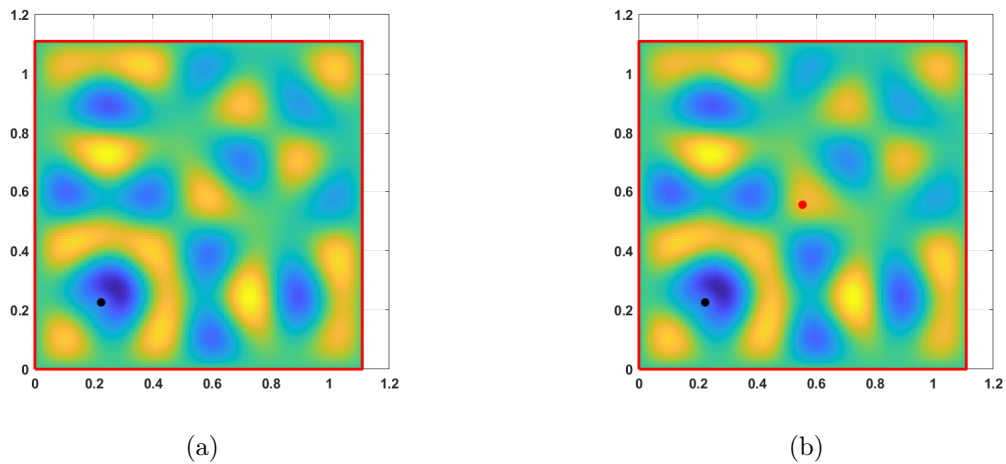


FIGURE 5.18 – Champ de déplacement à 700 Hz obtenu par résolution éléments finis du modèle de plaque orthotrope équivalente à une paroi bi-raïdie. Bords de la plaque - et position du chargement ponctuel (●). (a) sans défaut et (b) avec un défaut (●).

Fig. 5.18 illustre les champs de déplacement de la structure orthotrope à 700 Hz, avec et sans défaut. Les champs sont encore une fois très similaires.

La procédure est appliquée sur ces champs. Soit basée sur l'INCOME soit sur l'AKSI 2D. Tout d'abord, les k-spaces sont calculés par l'INCOME. Les sous domaines sont des grilles de $N_w = 20$ points de côté, c'est-à-dire des carrés de côté 0.19 m.

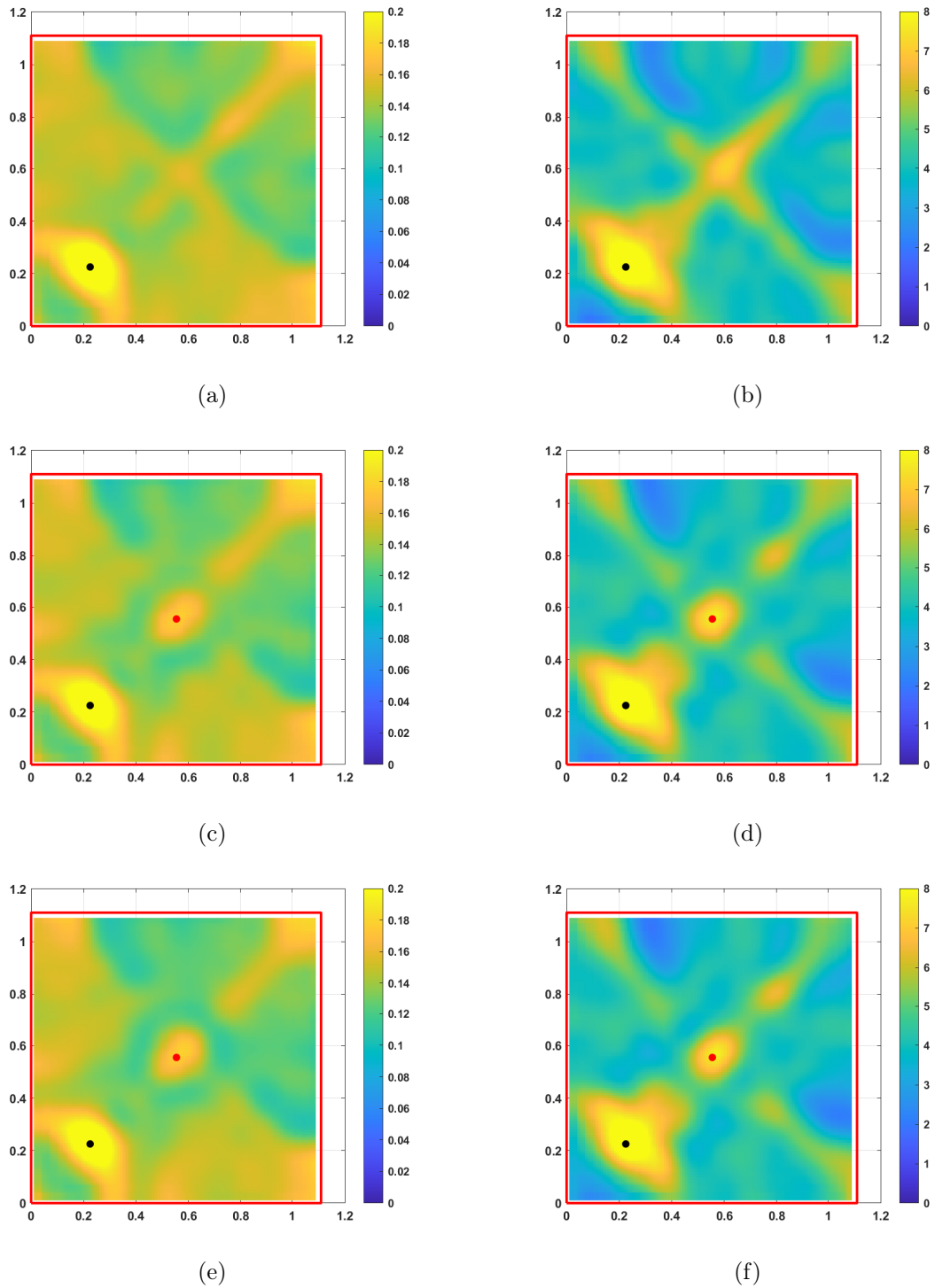


FIGURE 5.19 – Localisation de défauts dans le cas d’une structure orthotrope homogène, k-spaces calculés par l’INCOME. Bords de la plaque -, position du défaut (●) et position de chargement ponctuel (●). (a) et (b) sans défaut, (c) et (d) avec un défaut de diamètre 6 mm et (e) et (f) avec un défaut de diamètre 12 mm. (a), (c) et (e) sont basés sur la partie réelle des nombres d’onde et (b), (d) et (f) sur la partie imaginaire.

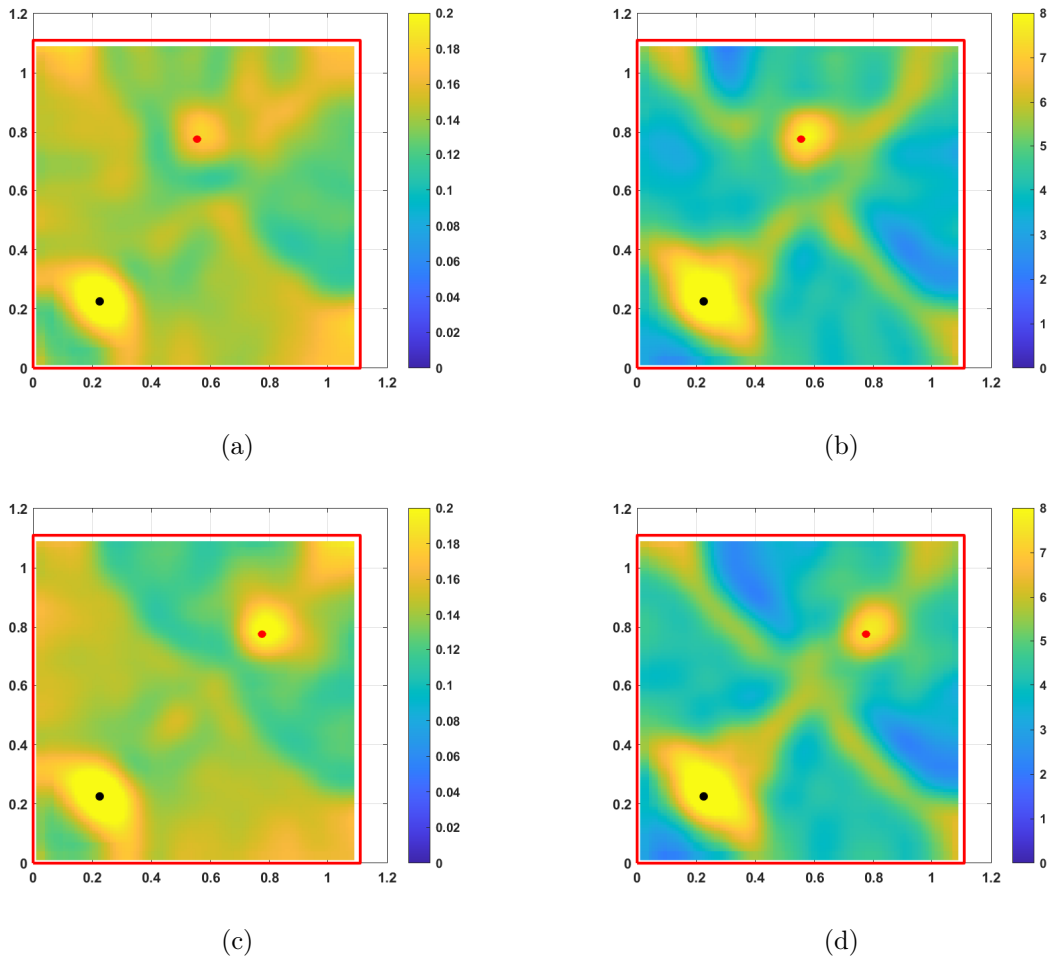


FIGURE 5.20 – Localisation de défauts dans le cas d’une structure orthotrope homogène, k-spaces calculés par l’INCOME. Bords de la plaque -, pour position du défaut (●) et position du chargement ponctuel (●). Avec un défaut de diamètre 12 mm. (a) et (c) sont basés sur la partie réelle des nombres d’onde et (b) et (d) sur la partie imaginaire.

Sur les Figs. 5.19 et 5.20, la zone autour du point source est celle qui ressort le plus. Les zones autour des défauts sont visibles aussi. Cependant, lorsque la localisation se base sur les parties réelles calculées par l’INCOME, la valeur de l’indicateur ne ressort quasiment pas par rapport à certaines autres zones du domaine, ou par rapport au cas sans défaut. À l’inverse, l’indicateur basé sur les parties imaginaires permet d’identifier de manière plus marquée la présence du défaut.

Lorsque les k-spaces sont calculés par l’AKSI 2D, les résultats sont un peu différents. Déjà, la méthode AKSI 2D nécessitant une taille de domaine plus grande que l’INCOME, augmenter la taille des sous domaines améliore les résultats. $N_w = 30$, soit des carrés de côté 0.29 m. De plus, les points du maillage proches du point de chargement ont été masqués dans le calcul des k-spaces par l’AKSI 2D. Ainsi, la présence du point de chargement a moins d’impact sur la localisation.

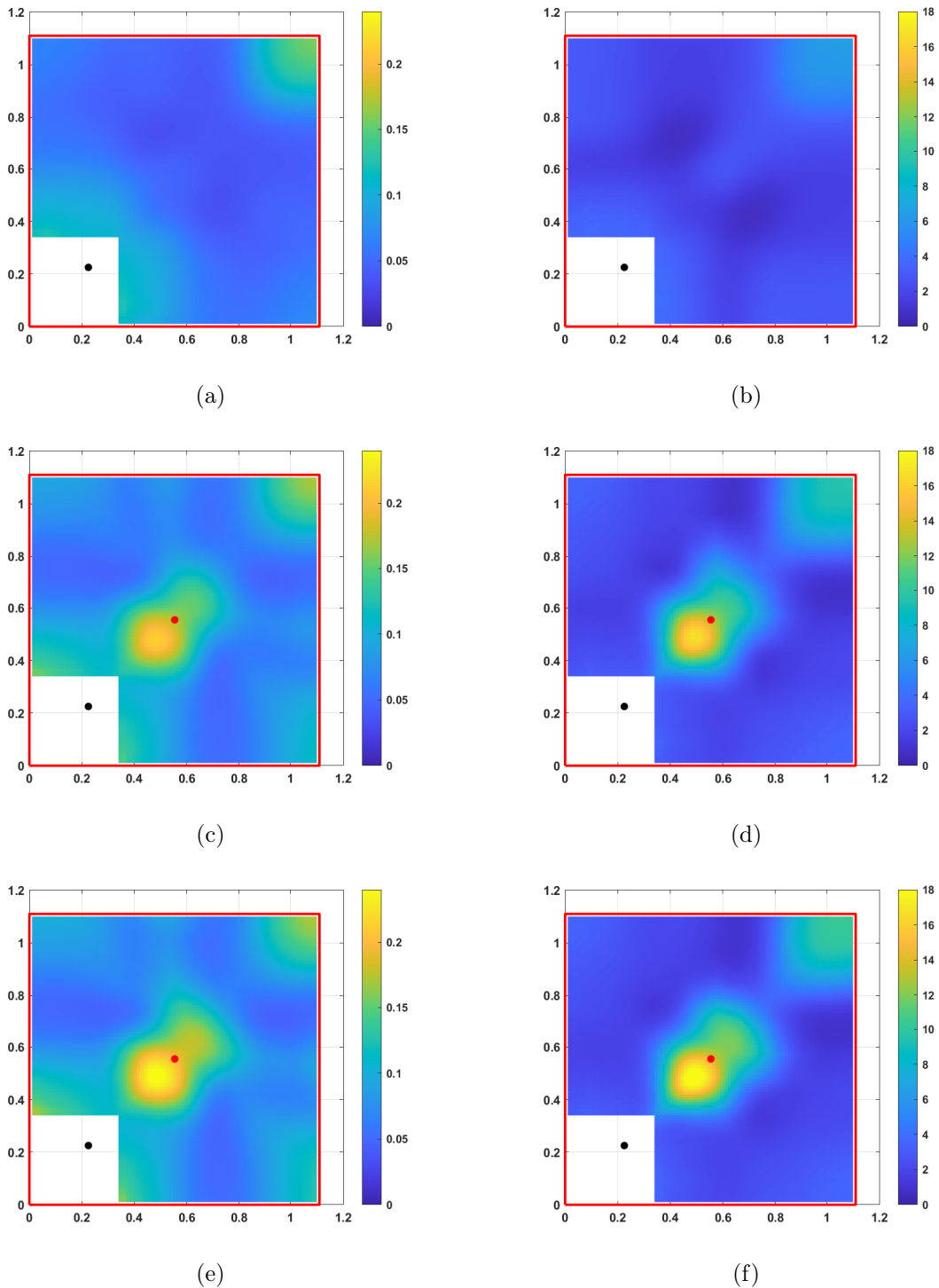


FIGURE 5.21 – Localisation de défauts dans le cas d’une structure orthotrope homogène, k-spaces calculés par l’AKSI 2D. Bords de la plaque -, position du défaut (●) et position du chargement ponctuel (●). (a) et (b) sans défaut, (c) et (d) avec un défaut de diamètre 6 mm et (e) et (f) avec un défaut de diamètre 12 mm. (a), (c) et (e) sont basés sur la partie réelle des nombres d’onde et (b), (d) et (f) sur la partie imaginaire.

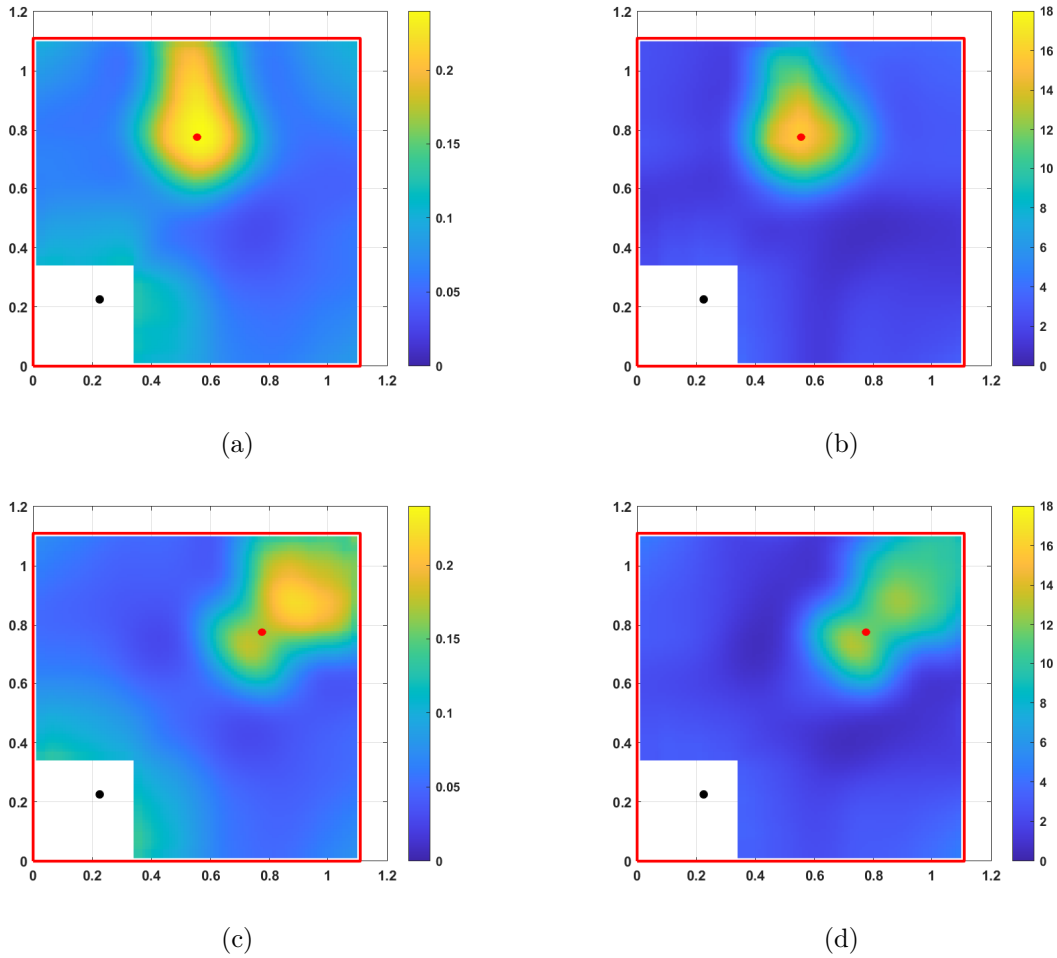


FIGURE 5.22 – Localisation de défauts dans le cas d’une structure orthotrope homogène, k-spaces calculés par l’AKSI 2D. Bords de la plaque -, pour position du défaut (●) et position du chargement ponctuel (●). Avec un défaut de diamètre 12 mm. (a) et (c) sont basés sur la partie réelle des nombres d’onde et (b) et (d) sur la partie imaginaire.

Sur les Figs. 5.21 et 5.22, les défauts apparaissent encore plus clairement que lorsque les k-spaces sont calculés par l’INCOME. Dans ce type de cas, la méthode k-space AKSI 2D permet de statuer avec plus de certitude sur la présence d’un défaut.

5.4 Conclusion intermédiaire

Ce chapitre conclut le manuscrit en proposant d’appliquer les mesures des caractéristiques de dispersion complexes à la détection de défaut. Cette idée a d’abord été appliquée à un exemple de poutre avec une entaille, puis à des exemples de plaques isotropes et orthotropes homogènes présentant des défauts simples.

Dans le cas monodimensionnel, l’étude a montré que pour ce problème l’AWI est la méthode la plus pertinente. L’INCOME est cependant utilisable dans certaines situations idéales. La présence du défaut a un impact très limité sur les relations de dispersion réelles, mais l’effet

est visible sur les relations de dispersion imaginaires. Une fonction d'endommagement basée sur les nombres d'onde mesurés à plusieurs fréquences a été définie et testée avec succès en fonction de la sévérité des défauts.

Pour les structures bidimensionnelles, des résultats similaires ont été obtenus. Ce qui a permis de définir une procédure de localisation de défauts basée sur les mesures de k-spaces. Des exemples de champs de déplacement dans des plaques isotropes et orthotropes ont permis de valider cette procédure.

Conclusion générale

6.1 Conclusion

Les travaux présentés dans cette étude ont consisté à s'intéresser aux différentes méthodes d'extraction des k -spaces à partir de champs bidimensionnels, puis à s'en servir. Tout d'abord, l'analyse k -space a permis de développer une approche pour l'identification de paramètres pour des équations aux dérivées partielles basées sur la propagation d'ondes. Et ensuite, elle a permis de proposer une méthode pour détecter et localiser la présence de défauts.

La détection de défauts rentre dans les domaines de la SHM et du CND. La SHM regroupe toutes les techniques visant à surveiller à différents instants l'état et la santé des structures. C'est un domaine très vaste qui va du contrôle de pièces à la surveillance en temps réel des ouvrages d'art. D'autre part, le contrôle non destructif regroupe les approches et techniques permettant de contrôler à un instant donné l'état d'une pièce sans avoir à la détruire. Les différentes approches de contrôle non destructif font usage de phénomènes basés sur de nombreux domaines de la physique. L'étude présentée est restreinte à la détection de défauts dans des poutres, mais surtout dans des plaques, isotropes ou périodiques. Elle se base sur le comportement dynamique des structures, en particulier sur la propagation des ondes, en supposant que la présence d'un défaut va altérer la propagation des ondes. Les variations dans la propagation des ondes sont mesurées en se servant de la mesure des k -spaces complexes à partir des champs de déplacement dans le domaine fréquentiel. En effet, l'analyse des caractéristiques de dispersion s'est révélée un outil utile et puissant pour étudier le comportement dynamique des structures bidimensionnelles périodiques. L'étude de la partie réelle des nombres d'onde, regroupés en k -spaces, renseigne sur les variations spatiales de la phase, tandis que les parties imaginaires sont liées à la propagation de l'énergie et aux phénomènes d'atténuation qui sont impactés en présence d'anomalies. Il existe de nombreuses techniques pour l'identification des nombres d'onde et des k -spaces. La plupart de ces techniques sont basées sur la transformée de Fourier ou la méthode de Prony, et ont été améliorées au fil des travaux.

Le deuxième chapitre a proposé une comparaison de plusieurs des méthodes k -spaces existantes sur différents cas tests pour observer leurs forces et limitations respectives. En résumé, les méthodes basées sur la transformée de Fourier, c'est-à-dire la méthode IWC, puis ses extensions successives, sont de manière générale des méthodes robustes, mais limitées dans leurs performances à basses fréquences. En comparaison, l'INCOME, basée sur l'approche de Prony, est une méthode calculant les k -spaces complexes avec beaucoup plus de précision, même pour des structures orthotropes hétérogènes. L'INCOME est bien plus efficace à basse fréquence et a une marge un peu plus large en termes de discrétisation pour les hautes fréquences. De plus, il s'agit d'une méthode efficace ayant de loin le temps de calcul le plus faible des méthodes se basant sur une discrétisation du champ total. En contrepartie de ses nombreux avantages,

elle nécessite une grille 2D périodique respectant la périodicité de la structure, et c'est une technique bien plus sensible aux bruits que les autres. Ainsi, la méthode idéale dépend de la situation et du problème étudié. En croisant les performances de toutes ces méthodes k-spaces, il apparaît qu'il n'y a pas d'approche permettant d'estimer les k-spaces complexes à basse fréquence en présence de bruits ou d'incertitudes.

C'est pourquoi le troisième chapitre a présenté une nouvelle méthode inverse pour le calcul des k-spaces à partir de champs de déplacement bidimensionnels : la méthode Algebraic K-Space Identification 2D (AKSI 2D). Cette méthode montre des performances intéressantes telles que sa robustesse dans le calcul des k-spaces complexes même à des fréquences relativement basses et en présence de bruits ou d'incertitudes sur les positions. Les formulations de l'AKSI 2D, ont été présentées et détaillées. Ensuite, la méthode proposée a été validée en la comparant à d'autres méthodes inverses, en incluant des exemples analytiques, numériques et expérimentaux, permettant d'étudier des cas isotropes, orthotropes, dans des conditions parfaites et dans des conditions incertaines. Cette nouvelle méthode fournit des résultats intéressants pour les calculs des k-spaces dans des conditions qui sortent du champ d'application des méthodes déjà existantes, en surmontant certaines de leurs limites et en étant efficace et robuste pour le calcul de k-spaces complexes.

Grâce aux outils k-spaces étudiés au deuxième chapitre et développés au troisième, le quatrième chapitre a proposé une application à l'identification de paramètres pour des équations aux dérivées partielles et le cinquième à la détection de défauts. La méthode d'identification est adaptée aux équations aux dérivées partielles en dimension 2 en mécanique des structures, comme les équations de plaques ou de membranes, et fournit une identification dépendante de la fréquence. L'approche est basée sur la comparaison entre des k-spaces analytiques et des k-spaces de référence, extraits des champs de déplacement à l'aide des méthodes INCOME et AKSI 2D. La méthodologie de l'identification et en particulier la méthode d'extraction des k-spaces et la définition des relations de dispersion analytiques ont été décrites et testées. Cette approche a été développée afin d'extraire des informations de structures à partir de champs de déplacement mesurés expérimentalement. Elle peut être utilisée pour caractériser une plaque de matériau inconnu. Mais elle se révèle surtout intéressante pour la modélisation de métastructures, dans des situations dans lesquelles les coefficients des équations sont inconnus et ne peuvent pas être facilement estimés. De cette manière, des paramètres équivalents peuvent être calculés et réduire considérablement le temps de calcul des simulations de la structure.

À l'inverse de la procédure d'identification de paramètres, les effets sur les parties réelles et imaginaires sont séparés pour la détection de défauts. De fait, les effets sont plus prononcés sur la partie imaginaire des k-spaces. L'application à la détection de défauts des mesures des caractéristiques de dispersion des ondes complexes a d'abord été étudiée sur un exemple de poutre avec une entaille, puis sur des exemples de plaques isotropes et orthotropes homogènes présentant des défauts simples. Dans le cas monodimensionnel, l'étude a montré la pertinence de cette approche et a conclu que pour cette application, la méthode AWI est la plus pertinente pour l'identification des nombres d'ondes. De plus, la présence du défaut a un impact très limité sur les relations de dispersion réelles, mais l'effet est visible sur les relations de dispersion imaginaires. Une fonction d'endommagement basée sur les nombres d'onde mesurés à plusieurs fréquences a été définie et testée avec succès en fonction de la sévérité des défauts. Pour les structures bidimensionnelles, des résultats similaires ont été obtenus. Ce qui a permis de

définir une procédure de localisation de défauts basée sur les mesures de k-spaces obtenues par différentes méthodes qui a ensuite été validée sur des cas tests numériques isotropes et orthotropes.

6.2 Perspectives

L'identification des caractéristiques de dispersion des ondes est encore une question importante en dynamique des structures qui conduit à de nombreuses applications. La méthode k-space proposée dans cette thèse, l'AKSI 2D, répond à plusieurs des limitations des méthodes préalablement existantes. Elle peut cependant être encore améliorée. En particulier, elle peut encore être optimisée en termes de temps de calcul. Elle pourrait aussi être étendue à des géométries plus complexes, telles que des géométries non planes par exemple, voire à des problèmes à plus de deux dimensions.

Ensuite, la procédure d'identification de paramètres basée sur les mesures k-spaces peut aussi être améliorée, en effet, dans les travaux présentés, la forme du modèle doit être connue a priori. Cependant, les allures des relations de dispersion et des k-spaces mesurés peuvent donner des indications sur l'ordre de l'équation et sur les coefficients, permettant de simplifier le problème, de généraliser la procédure et de pouvoir traiter des structures complexes pour lesquelles le choix du modèle n'est pas évident.

Les problématiques de détection de défauts dans des structures périodiques sont toujours ouvertes, en effet, les procédures de détection et de localisation proposées peuvent être améliorées, optimisées et adaptées à des structures présentant une hétérogénéité plus marquée. En particulier, les phénomènes liés aux parties imaginaires des nombres d'onde et k-spaces se sont révélés une piste prometteuse.

De manière générale, cette thèse a permis de développer des outils applicables à l'étude et à la modélisation du comportement vibratoire des structures enrichies. Ainsi, l'étude des structures fortement contrastées constitue une perspective intéressante. Ces structures présentent un grand intérêt et de grandes difficultés de par les interactions complexes entre leurs différents composants.

D'un autre côté, une autre perspective concerne les structures fortement amorties. Celles-ci présentent, elles aussi, des comportements difficilement modélisables, mais ayant de nombreux domaines applicatifs en réduction des vibrations, par exemple pour les transports ou la réduction du bruit. L'étude de leur amortissement constitue une problématique principale de ces structures et pourrait être facilitée par les méthodes développées.

La construction de lois de comportement pour ces structures et pour les métamatériaux en général, du fait de leur complexité et de leur comportement exotique, nécessite d'aller au-delà des méthodologies classiques. Une solution rudimentaire consiste à identifier des paramètres tels qu'un modèle correspond au comportement d'un exemple de structure. Cependant, une modélisation et surtout une compréhension plus fine des phénomènes dans ces structures nécessitera un travail théorique à l'interface des domaines des vibrations, de l'homogénéisation asymptotique et des métamatériaux.

Bibliographie

- [Ablitzer 2017] Frédéric Ablitzer, Charles Pézerat, Bertrand Lascoup et Julien Brocaïl. *Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions*. Journal of Sound and Vibration, vol. 404, pages 31–46, 2017. (Cité en pages 14 et 90.)
- [Ali 2017] Kharudin Bin Ali, Ahmed N Abdalla, Damhuji Rifai et Moneer A Faraj. *Review on system development in eddy current testing and technique for defect classification and characterization*. IET Circuits, Devices & Systems, vol. 11, no. 4, pages 338–351, 2017. (Cité en page 4.)
- [AllahTavakoli 2023] Y AllahTavakoli, MN Ichchou, C Marquis-Favre et N Hamzaoui. *On a hybrid updating method for modeling vibroacoustic behaviors of composite panels*. Journal of Sound and Vibration, vol. 565, page 117902, 2023. (Cité en pages 13, 128, 129, 159, 160, 161 et 162.)
- [Apalowo 2018] RK Apalowo, Dimitrios Chronopoulos et Gregor Tanner. *Wave interaction with defects in pressurised composite structures*. Journal of Nondestructive Evaluation, vol. 37, pages 1–19, 2018. (Cité en page 7.)
- [Arumugam 2011] V Arumugam, C Suresh Kumar, Carlo Santulli, Fabrizio Sarasini et A Joseph Stanley. *A global method for the identification of failure modes in fiberglass using acoustic emission*. Journal of Testing and Evaluation, vol. 39, no. 5, pages 954–966, 2011. (Cité en page 4.)
- [Auriault 1985] JL Auriault et G Bonnet. *Dynamique des composites élastiques périodiques*. Arch. Mech, vol. 37, no. 4-5, pages 269–284, 1985. (Cité en page 12.)
- [Avril 2008] Stéphane Avril, Marc Bonnet, Anne-Sophie Bretelle, Michel Gr diac, François Hild, Patrick Ienny, Félix Latourte, Didier Lemosse, Stéphane Pagano, Emmanuel Pagnacco et al. *Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements*. Experimental Mechanics, vol. 48, no. 4, pages 381–402, 2008. (Cité en page 136.)
- [Badeau 2006a] Roland Badeau, Bertrand David et Ga l Richard. *High-resolution spectral analysis of mixtures of complex exponentials modulated by polynomials*. IEEE transactions on signal processing, vol. 54, no. 4, pages 1341–1350, 2006. (Cité en page 28.)
- [Badeau 2006b] Roland Badeau, Bertrand David et Ga l Richard. *A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 54, no. 2, pages 450–458, 2006. (Cité en pages 29 et 40.)
- [Barreto 2021] Lucas S Barreto, Marcela R Machado, Juliana C Santos, Braion B de Moura et Leila Khalij. *Damage indices evaluation for one-dimensional guided wave-based structural health monitoring*. Latin American Journal of Solids and Structures, vol. 18, page e354, 2021. (Cité en page 6.)
- [Beltrán-Carbajal 2013] F Beltrán-Carbajal et G Silva-Navarro. *Adaptive-Like Vibration Control in Mechanical Systems with Unknown Parameters and Signals*. Asian Journal of Control, vol. 15, no. 6, pages 1613–1626, 2013. (Cité en pages 39 et 90.)

- [Bensoussan 2011] Alain Bensoussan, Jacques-Louis Lions et George Papanicolaou. Asymptotic analysis for periodic structures, volume 374. American Mathematical Soc., 2011. (Cité en page 12.)
- [Berthaut 2004] Julien Berthaut. *Contribution à l'identification large bande des structures anisotropes : Application aux tables d'harmonie des pianos*. PhD thesis, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2004. (Cité en pages 16, 18, 45, 56 et 168.)
- [Berthaut 2005] J Berthaut, MN Ichchou et L Jezequel. *K-space identification of apparent structural behaviour*. Journal of Sound Vibration, vol. 280, no. 3-5, pages 1125–1131, 2005. (Cité en pages 16, 19, 20, 21, 45, 88, 106, 137 et 168.)
- [Berthelot 2012] JEAN-MARIE Berthelot. *Matériaux composites (5e éd.)*, 2012. (Cité en page 10.)
- [Betz 2006] Daniel C Betz, Wieslaw J Staszewski, Graham Thursby et Brian Culshaw. *Structural damage identification using multifunctional Bragg grating sensors : II. Damage detection results and analysis*. Smart Materials and Structures, vol. 15, no. 5, page 1313, 2006. (Cité en page 6.)
- [Bin Fazail Muhammad 2022] Najib Bin Fazail Muhammad, Jean-Daniel Chazot, Gautier Lefebvre et Nouredine Atalla. *Identification of the dispersion curves and the damping loss factor using green's function-based model of non-isotropic structures*. The 28th International Congress on Sound and Vibration (ICSV28), 2022. (Cité en pages 24, 25 et 48.)
- [Bloch 1928] F Bloch. *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, Z. Phys, vol. 52, page 555, 1928. (Cité en pages 11, 13 et 88.)
- [Bossi 2015] RH Bossi et Victor Giurgiutiu. *Nondestructive testing of damage in aerospace composites*. In Polymer composites in the aerospace industry, pages 413–448. Elsevier, 2015. (Cité en page 4.)
- [Boukadia 2021] Réégis Boukadia. *Vibroacoustics of periodic structures : model order reduction, characterization, optimization*. PhD thesis, Université de Lyon, 2021. (Cité en pages 17, 33, 50, 52, 137, 142 et 147.)
- [Boukadia 2022] Régis Fabien Boukadia, Claus Claeys, Christophe Droz, Mohamed Ichchou, Wim Desmet et Elke Deckers. *An inverse CONvolution METHOD for wavenumber extraction (INCOME) : Formulations and applications*. Journal of Sound and Vibration, vol. 520, page 116586, 2022. (Cité en pages 33, 35, 37, 38, 50, 90, 106, 137, 168 et 177.)
- [Boutin 1996] Claude Boutin. *Microstructural effects in elastic composites*. International Journal of Solids and Structures, vol. 33, no. 7, pages 1023–1051, 1996. (Cité en page 136.)
- [Boutin 2020] Claude Boutin, Pascal Fossat, Christophe Droz et Mohamed Ichchou. *Dynamics of ribbed plates with inner resonance : Analytical homogenized models and experimental validation*. European Journal of Mechanics-A/Solids, vol. 79, page 103838, 2020. (Cité en pages 12, 77, 120, 138 et 152.)
- [Bragg 1915] William Henry Bragg. *IX. Bakerian Lecture.—X-rays and crystal structure*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, vol. 215, no. 523-537, pages 253–274, 1915. (Cité en page 12.)

- [Brion 2023] Thomas Brion, Pascal Fossat, Mohamed Ichchou, Olivier Bareille, Abdel-Malek Zine et Christophe Droz. *Identification of partial differential equations in structural mechanics theory through k-space analysis and design*. Composite Structures, vol. 304, page 116297, 2023. (Cité en page 135.)
- [Bückmann 2014] Tiemo Bückmann, Robert Schittny, Michael Thiel, Muamer Kadic, Graeme W Milton et Martin Wegener. *On three-dimensional dilational elastic metamaterials*. New journal of physics, vol. 16, no. 3, page 033032, 2014. (Cité en page 11.)
- [Cai 2011] Jian Cai, Lihua Shi, Shenfang Yuan et Zhixue Shao. *High spatial resolution imaging for structural health monitoring based on virtual time reversal*. Smart Materials and Structures, vol. 20, no. 5, page 055018, 2011. (Cité en page 6.)
- [Cao 2014] Maosen Cao, Maciej Radzieński, Wei Xu et Wiesław Ostachowicz. *Identification of multiple damage in beams based on robust curvature mode shapes*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 46, no. 2, pages 468–480, 2014. (Cité en page 8.)
- [Casar-Corredera 1985] J Casar-Corredera, J Alcazar-Fernandez et L Hernandez-Gomez. *On 2-D prony methods*. In ICASSP'85. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, volume 10, pages 796–799. IEEE, 1985. (Cité en pages 28, 33 et 90.)
- [Cebrecos 2019] Alejandro Cebrecos, Vicente Romero-García et Jean Philippe Groby. *Complex dispersion relation recovery from 2D periodic resonant systems of finite size*. Applied Sciences, vol. 9, no. 3, page 478, 2019. (Cité en pages 25 et 89.)
- [Chen 2010] Kui Fu Chen et Shu Li Mei. *Composite interpolated fast Fourier transform with the Hanning window*. IEEE Transactions on instrumentation and measurement, vol. 59, no. 6, pages 1571–1579, 2010. (Cité en pages 16 et 88.)
- [Cherif 2015] Raef Cherif, Jean-Daniel Chazot et Noureddine Atalla. *Damping loss factor estimation of two-dimensional orthotropic structures from a displacement field measurement*. Journal of sound and vibration, vol. 356, pages 61–71, 2015. (Cité en page 88.)
- [Chien 1993] Hual-Te Chien, Shuh-Haw Sheen et Apostolos C Raptis. *An acousto-ultrasonic nde technique for monitoring material anisotropy*. In Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, pages 1225–1232. Springer, 1993. (Cité en pages 5 et 137.)
- [Chondros 1998] TG Chondros, AD Dimarogonas et J Yao. *A continuous cracked beam vibration theory*. Journal of sound and vibration, vol. 215, no. 1, pages 17–34, 1998. (Cité en pages 166 et 167.)
- [Chronopoulos 2017] Dimitrios Chronopoulos, C Droz, R Apalowo, M Ichchou et WJ Yan. *Accurate structural identification for layered composite structures, through a wave and finite element scheme*. Composite Structures, vol. 182, pages 566–578, 2017. (Cité en page 137.)
- [Ciallella 2022] Alessandro Ciallella, Ivan Giorgio, Simon R Eugster, Nicola L Rizzi et Francesco dell'Isola. *Generalized beam model for the analysis of wave propagation with a symmetric pattern of deformation in planar pantographic sheets*. Wave Motion, vol. 113, page 102986, 2022. (Cité en page 162.)

- [Claeys 2013] Claus C Claeys, Karel Vergote, Paul Sas et Wim Desmet. *On the potential of tuned resonators to obtain low-frequency vibrational stop bands in periodic panels*. Journal of Sound and Vibration, vol. 332, no. 6, pages 1418–1436, 2013. (Cité en pages 12, 13 et 88.)
- [Clarke 2011] T Clarke et P Cawley. *Enhancing the defect localization capability of a guided wave SHM system applied to a complex structure*. Structural Health Monitoring, vol. 10, no. 3, pages 247–259, 2011. (Cité en page 6.)
- [Collet 2011] Manuel Collet, Morvan Ouisse, Massimo Ruzzene et MN Ichchou. *Floquet–Bloch decomposition for the computation of dispersion of two-dimensional periodic, damped mechanical systems*. International Journal of Solids and Structures, vol. 48, no. 20, pages 2837–2848, 2011. (Cité en pages 11, 13 et 88.)
- [Cuenca 2012] Jacques Cuenca, François Gautier et Laurent Simon. *Harmonic Green’s functions for flexural waves in semi-infinite plates with arbitrary boundary conditions and high-frequency approximation for convex polygonal plates*. Journal of sound and vibration, vol. 331, no. 6, pages 1426–1440, 2012. (Cité en pages 14, 56 et 90.)
- [de Prony 1795] Gaspard Riche de Prony. *Essai experimental et analytique : sur les lois de la dilatabilité des fluides elastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l’eau et de la vapeur de l’alkool, a differentes temperatures*. Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait a l’Ecole Centrale des Travaux Publics, 1795. (Cité en pages 14, 27, 28, 33 et 90.)
- [Del Vescovo 2014] Dionisio Del Vescovo et Ivan Giorgio. *Dynamic problems for metamaterials : review of existing models and ideas for further research*. International Journal of Engineering Science, vol. 80, pages 153–172, 2014. (Cité en pages 10 et 136.)
- [Dell’Isola 2019] Francesco Dell’Isola, Pierre Seppecher, Jean Jacques Alibert, Tomasz Lekszycki, Roman Grygoruk, Marek Pawlikowski, David Steigmann, Ivan Giorgio, Ugo Andreaus, Emilio Turco, Maciej Gołaszewskiet al. *Pantographic metamaterials : an example of mathematically driven design and of its technological challenges*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol. 31, no. 4, pages 851–884, 2019. (Cité en page 162.)
- [Deng 2007] Ming-Xi Deng et Jun Yang. *Characterization of elastic anisotropy of a solid plate using nonlinear Lamb wave approach*. Journal of Sound and Vibration, vol. 308, no. 1-2, pages 201–211, 2007. (Cité en page 137.)
- [Devendra 2015] M Devendra et K Manjunathachari. *DOA estimation of a system using MUSIC method*. In 2015 International Conference on Signal Processing and Communication Engineering Systems, pages 309–313. IEEE, 2015. (Cité en page 28.)
- [Druet 2017] Tom Druet, Jean-Loup Tastet, Bastien Chapuis et Emmanuel Moulin. *Guided wave tomography for corrosion monitoring in planar structures*. In Structural Health Monitoring 2017. DEStech Publications, Inc., 2017. (Cité en pages 6 et 7.)
- [Emiya 2007] Valentin Emiya, Bertrand David et Roland Badeau. *A parametric method for pitch estimation of piano tones*. In 2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing-ICASSP’07, volume 1, pages I–249. IEEE, 2007. (Cité en page 28.)

- [Every 1990] AG Every et Wolfgang Sachse. *Determination of the elastic constants of anisotropic solids from acoustic-wave group-velocity measurements*. Physical Review B, vol. 42, no. 13, page 8196, 1990. (Cité en page 137.)
- [Fazail 2023a] Muhammad Najib Bin Fazail. *Damping loss factor characterization of complex structures using correlation method*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne (France) ; Université de Sherbrooke, Québec (Canada), 2023. (Cité en pages 22, 23, 24, 48 et 89.)
- [Fazail 2023b] Muhammad Najib Bin Fazail, Jean-Daniel Chazot, Gautier Lefebvre et Nouredine Atalla. *Damping loss factor characterization of complex structures using a Green's function-based model*. Journal of Sound and Vibration, vol. 552, page 117642, 2023. (Cité en pages 13, 24, 48, 89 et 107.)
- [Fliess 2000] Michel Fliess et Richard Marquez. *Continuous-time linear predictive control and flatness : a module-theoretic setting with examples*. International journal of control, vol. 73, no. 7, pages 606–623, 2000. (Cité en pages 39, 53 et 90.)
- [Fliess 2003] Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramírez. *An algebraic framework for linear identification*. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, vol. 9, pages 151–168, 2003. (Cité en pages 39, 53 et 90.)
- [Fliess 2008] Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramirez. *Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques*. Identification of Continuous-time Models from sampled Data, pages 363–391, 2008. (Cité en pages 39, 53 et 90.)
- [Floquet 1883] Gaston Floquet. *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*. In Annales scientifiques de l'École normale supérieure, volume 12, pages 47–88, 1883. (Cité en pages 11, 13 et 88.)
- [Flynn 2013] Eric B Flynn, See Yenn Chong, Gregory J Jarmer et Jung-Ryul Lee. *Structural imaging through local wavenumber estimation of guided waves*. Ndt & E International, vol. 59, pages 1–10, 2013. (Cité en page 8.)
- [Fourier 1888] Jean Baptiste Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*, volume 1. Gauthier-Villars, 1888. (Cité en pages 14, 45 et 88.)
- [Friedlander 1990] Benjamin Friedlander. *A sensitivity analysis of the MUSIC algorithm*. IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing, vol. 38, no. 10, pages 1740–1751, 1990. (Cité en page 28.)
- [Gay 2005] Daniel Gay. *Matériaux composites, 5e édition révisée*. Lavoisier, Paris, 2005. (Cité en page 10.)
- [Geslain 2016] A Geslain, Samuel Raetz, M Hiraiwa, M Abi Ghanem, SP Wallen, A Khanolkar, N Boechler, Jérôme Laurent, C Prada, Aroune Duclos et al. *Spatial Laplace transform for complex wavenumber recovery and its application to the analysis of attenuation in acoustic systems*. Journal of Applied Physics, vol. 120, no. 13, 2016. (Cité en pages 25, 27 et 89.)
- [Gholizadeh 2016] Samira Gholizadeh. *A review of non-destructive testing methods of composite materials*. Procedia structural integrity, vol. 1, pages 50–57, 2016. (Cité en page 4.)

- [Golan 1980] S Golan, Laszlo Adler, KV Cook, RK Nanstad et TK Bolland. *Ultrasonic diffraction technique for characterization of fatigue cracks*. Journal of Nondestructive Evaluation, vol. 1, pages 11–19, 1980. (Cité en page 5.)
- [Grosh 1993] Karl Grosh et Earl G Williams. *Complex wave-number decomposition of structural vibrations*. The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 93, no. 2, pages 836–848, 1993. (Cité en page 27.)
- [Gunda 1995] R Gunda, SM Vijayakar et R Singh. *Method of images for the harmonic response of beams and rectangular plates*. Journal of Sound and vibration, vol. 185, no. 5, pages 791–808, 1995. (Cité en pages 14, 23, 56, 89 et 90.)
- [Hall 2014] James S Hall, Paul Fromme et Jennifer E Michaels. *Guided wave damage characterization via minimum variance imaging with a distributed array of ultrasonic sensors*. Journal of Nondestructive Evaluation, vol. 33, pages 299–308, 2014. (Cité en page 6.)
- [Hambric 2018] Stephen Hambric et Andrew Barnard. *Tutorial on wavenumber transforms of structural vibration fields*. In INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings, volume 258, pages 1–12. Institute of Noise Control Engineering, 2018. (Cité en pages 15 et 88.)
- [Hans 2008] Stephane Hans et Claude Boutin. *Dynamics of discrete framed structures : a unified homogenized description*. Journal of Mechanics of Materials and Structures, vol. 3, no. 9, pages 1709–1739, 2008. (Cité en pages 12 et 136.)
- [Heckbert 1995] Paul Heckbert. *Fourier transforms and the fast Fourier transform (FFT) algorithm*. Computer Graphics, vol. 2, pages 15–463, 1995. (Cité en pages 16, 88 et 137.)
- [Hervin 2021] F Hervin, L Maio et P Fromme. *Guided wave scattering at a delamination in a quasi-isotropic composite laminate : Experiment and simulation*. Composite Structures, vol. 275, page 114406, 2021. (Cité en page 8.)
- [Hua 1990] Yingbo Hua et Tapan K Sarkar. *Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 38, no. 5, pages 814–824, 1990. (Cité en page 28.)
- [Hung 2013] YY Hung, LX Yang et YH Huang. *Non-destructive evaluation (NDE) of composites : digital shearography*. Non-Destructive Evaluation (NDE) of Polymer Matrix Composites, pages 84–115, 2013. (Cité en page 4.)
- [Ichchou 2008a] MN Ichchou, O Bareille et J Berthaut. *Identification of effective sandwich structural properties via an inverse wave approach*. Engineering Structures, vol. 30, no. 10, pages 2591–2604, 2008. (Cité en pages 21, 88 et 137.)
- [Ichchou 2008b] MN Ichchou, J Berthaut et M Collet. *Multi-mode wave propagation in ribbed plates : Part I, wavenumber-space characteristics*. International Journal of Solids and Structures, vol. 45, no. 5, pages 1179–1195, 2008. (Cité en pages 16 et 21.)
- [Jaouen 2008] Luc Jaouen, Am lie Renault et Mickael Deverge. *Elastic and damping characterizations of acoustical porous materials : Available experimental methods and applications to a melamine foam*. Applied acoustics, vol. 69, no. 12, pages 1129–1140, 2008. (Cité en page 136.)

- [Jeon 2017] Jun Young Jeon, Sehyeok Gang, Gyuhae Park, Eric Flynn, To Kang et Soonwoo Han. *Damage detection on composite structures with standing wave excitation and wavenumber analysis*. *Advanced Composite Materials*, vol. 26, no. sup1, pages 53–65, 2017. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Jeon 2020] Jun Young Jeon, Duhwan Kim, Gyuhae Park, Eric Flynn, To Kang et Soonwoo Han. *2D-wavelet wavenumber filtering for structural damage detection using full steady-state wavefield laser scanning*. *NDT & E International*, vol. 116, page 102343, 2020. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Juarez 2015] Peter D Juarez et Cara AC Leckey. *Multi-frequency local wavenumber analysis and ply correlation of delamination damage*. *Ultrasonics*, vol. 62, pages 56–65, 2015. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Kadic 2013] Muamer Kadic, Tiemo Bückmann, Robert Schittny et Martin Wegener. *Metamaterials beyond electromagnetism*. *Reports on Progress in physics*, vol. 76, no. 12, page 126501, 2013. (Cité en page 11.)
- [Kaiser 1990] James F Kaiser. *On a simple algorithm to calculate the 'energy' of a signal*. In *International conference on acoustics, speech, and signal processing*, pages 381–384. IEEE, 1990. (Cité en page 8.)
- [Kalinichenko 2013] NP Kalinichenko, AN Kalinichenko, IS Lobanova et SS Borisov. *Methods for the manufacture of nonmetallic reference specimens for liquid-penetrant inspection*. *Russian journal of nondestructive testing*, vol. 49, pages 668–672, 2013. (Cité en page 4.)
- [Kessler 2002] Seth S Kessler, S Mark Spearing et Constantinos Soutis. *Damage detection in composite materials using Lamb wave methods*. *Smart materials and structures*, vol. 11, no. 2, page 269, 2002. (Cité en page 137.)
- [Kieback 2003] B Kieback, A Neubrand et H Riedel. *Processing techniques for functionally graded materials*. *Materials Science and Engineering : A*, vol. 362, no. 1-2, pages 81–106, 2003. (Cité en page 5.)
- [Kudela 2015] Paweł Kudela, Maciej Radziński et Wiesław Ostachowicz. *Identification of cracks in thin-walled structures by means of wavenumber filtering*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 50, pages 456–466, 2015. (Cité en page 8.)
- [Kudela 2018] Paweł Kudela, Maciej Radziński et Wiesław Ostachowicz. *Impact induced damage assessment by means of Lamb wave image processing*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 102, pages 23–36, 2018. (Cité en page 8.)
- [Kulakovskiy 2019] A Kulakovskiy, O Mesnil, A Lhémery, B Chapuis et O d'Almeida. *Defect imaging in layered composite plates and honeycomb sandwich structures using sparse piezoelectric transducers network*. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 1184, page 012001. IOP Publishing, 2019. (Cité en page 6.)
- [Kulakovskiy 2021] Andrii Kulakovskiy, Olivier Mesnil, Bastien Chapuis, Oscar d'Almeida et Alain Lhémery. *Statistical analysis of guided wave imaging algorithms performance illustrated by a simple structural health monitoring configuration*. *Journal of Nondestructive Evaluation, Diagnostics and Prognostics of Engineering Systems*, vol. 4, no. 3, page 031001, 2021. (Cité en pages 6 et 7.)

- [Kumaresan 1984] Ramdas Kumaresan, Donald W Tufts et Loues L Scharf. *A Prony method for noisy data : Choosing the signal components and selecting the order in exponential signal models*. Proceedings of the IEEE, vol. 72, no. 2, pages 230–233, 1984. (Cité en pages 27, 33 et 90.)
- [Lajili 2018] Ramzi Lajili, Olivier Bareille, Mohamed Lamjed Bouazizi, Mohamed Ichchou et Nouredine Bouhaddi. *Composite beam identification using a variant of the inhomogeneous wave correlation method in presence of uncertainties*. Engineering Computations, vol. 35, no. 6, pages 2126–2164, 2018. (Cité en pages 21 et 89.)
- [Lajili 2022] Ramzi Lajili, Khaoula Chikhaoui, Zakaria Zergoune, M-L Bouazizi et M-N Ichchou. *Impact of the vibration measurement points geometric coordinates uncertainties on two-dimensional k-space identification : Application to a sandwich plate with honeycomb core*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 167, page 108509, 2022. (Cité en pages 14, 21 et 89.)
- [Lamb 1917] Horace Lamb. *On waves in an elastic plate*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character, vol. 93, no. 648, pages 114–128, 1917. (Cité en page 8.)
- [Leissa 1969] Arthur W Leissa. *Vibration of plates*, volume 160. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969. (Cité en pages 13, 54, 106 et 137.)
- [Lendrum 2015] Peter Lendrum, Lin Ye et Chunhui Yang. *Numerical investigation of elastic wave propagation in functionally graded materials*. In Proceedings 8th International Structural Engineering and Construction Conference : Implementing Innovative Ideas in Structural Engineering and Project Management, ISEC 2015, Sydney, Australia, 23–28 November 2015, pages 499–504, 2015. (Cité en page 5.)
- [Lhémery 2010] A Lhémery, V Baronian, K Jezzine et A-S Bonnet-BenDhia. *Simulation of inspections of elastic waveguides of arbitrary section containing arbitrary local discontinuities or defects*. In AIP Conference Proceedings, volume 1211, pages 145–152. American Institute of Physics, 2010. (Cité en page 7.)
- [Li 2023a] Xuefeng Li. *Algebraic identification technique for wave propagation characterization of complex structures under stochastic condition*. PhD thesis, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2023. (Cité en pages 39, 40, 41, 53, 91 et 126.)
- [Li 2023b] Xuefeng Li, Mohamed Ichchou, Abdel-Malek Zine, Nouredine Bouhaddi et Pascal Fossat. *Wavenumber identification of 1D complex structures using Algebraic Wavenumber Identification (AWI) technique under complex conditions*. Journal of Sound and Vibration, vol. 548, page 117524, 2023. (Cité en pages 39, 40, 91 et 168.)
- [Li 2023c] Xuefeng Li, Mohamed Ichchou, Abdel-Malek Zine, Christophe Droz et Nouredine Bouhaddi. *An Algebraic Wavenumber Identification (AWI) technique under stochastic conditions*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 188, page 109983, 2023. (Cité en pages 39, 90, 91, 93, 94, 95 et 168.)
- [LI 2024] Xuefeng LI, Abdel-Malek ZINE, Mohamed ICHCHOU, Nouredine BOUHADDI et Pascal FOSSAT. *An inverse method for characterization of dynamic response of 2D*

- structures under stochastic conditions*. Chinese Journal of Aeronautics, 2024. (Cité en page 91.)
- [Liu 2000] Zhengyou Liu, Xixiang Zhang, Yiwei Mao, Yan Yang Zhu, Zhiyu Yang, Che Ting Chan et Ping Sheng. *Locally resonant sonic materials*. science, vol. 289, no. 5485, pages 1734–1736, 2000. (Cité en page 12.)
- [Liu 2001] GR Liu, X Han et KY Lam. *Material characterization of FGM plates using elastic waves and an inverse procedure*. Journal of Composite Materials, vol. 35, no. 11, pages 954–971, 2001. (Cité en page 137.)
- [Liu 2002] GR Liu, WB Ma et X Han. *An inverse procedure for determination of material constants of composite laminates using elastic waves*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, no. 33, pages 3543–3554, 2002. (Cité en page 137.)
- [Liu 2014] Ping Liu, Roger M Groves et Rinze Benedictus. *3D monitoring of delamination growth in a wind turbine blade composite using optical coherence tomography*. Ndt & E International, vol. 64, pages 52–58, 2014. (Cité en page 4.)
- [Lugovtsova 2021] Yevgeniya Lugovtsova, Jannis Bulling, Olivier Mesnil, Jens Prager, Dirk Gohlke et Christian Boller. *Damage quantification in an aluminium-CFRP composite structure using guided wave wavenumber mapping : Comparison of instantaneous and local wavenumber analyses*. NDT & E International, vol. 122, page 102472, 2021. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Lyon 1995] Richard H. Lyon, Richard G. DeJong et Manfred Heckl. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Second Edition*. The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 98, no. 6, pages 3021–3021, 12 1995. (Cité en pages 13 et 107.)
- [Madeo 2014] Angela Madeo, Luca Placidi et Giuseppe Rosi. *Towards the design of metamaterials with enhanced damage sensitivity : second gradient porous materials*. Research in Nondestructive Evaluation, vol. 25, no. 2, pages 99–124, 2014. (Cité en page 7.)
- [Manconi 2010] Elisabetta Manconi et Brian R Mace. *Estimation of the loss factor of viscoelastic laminated panels from finite element analysis*. Journal of Sound and Vibration, vol. 329, no. 19, pages 3928–3939, 2010. (Cité en pages 13 et 107.)
- [Marchetti 2020] Fabien Marchetti, Kerem Ege, Quentin Leclère et Nicolaas Bernardus Roozen. *On the structural dynamics of laminated composite plates and sandwich structures ; a new perspective on damping identification*. Journal of Sound and Vibration, vol. 474, page 115256, 2020. (Cité en pages 13 et 107.)
- [Margerit 2018] Pierre Margerit, Arthur Lebée, Jean-François Caron et Xavier Boutillon. *High Resolution Wavenumber Analysis (HRWA) for the mechanical characterisation of viscoelastic beams*. Journal of Sound and Vibration, vol. 433, pages 198–211, 2018. (Cité en pages 29 et 31.)
- [Margerit 2019] Pierre Margerit, Arthur Lebée, Jean-François Caron, Kerem Ege et Xavier Boutillon. *The high-resolution wavevector analysis for the characterization of the dynamic response of composite plates*. Journal of Sound and Vibration, vol. 458, pages 177–196, 2019. (Cité en pages 29, 31, 33 et 90.)

- [Masserey 2009] B Masserey et P Fromme. *Surface defect detection in stiffened plate structures using Rayleigh-like waves*. Ndt & E International, vol. 42, no. 6, pages 564–572, 2009. (Cité en page 5.)
- [Masson 2011] Patrice Masson, Nicolas Quaegebeur, Gabriel Vézina, Adrien Brunel, Philippe Micheau et Nezih Mrad. *Assessment of a novel imaging technique for commercial structural health monitoring and NDT systems*. In Proceedings of International Workshop Smart Materials, Structures & NDT in Aerospace-Canada, 2011. (Cité en page 6.)
- [McDaniel 2000a] J Gregory McDaniel, Pierre Dupont et Liming Salvino. *A wave approach to estimating frequency-dependent damping under transient loading*. Journal of sound and vibration, vol. 231, no. 2, pages 433–449, 2000. (Cité en page 14.)
- [McDaniel 2000b] J Gregory McDaniel et W Steve Shepard Jr. *Estimation of structural wave numbers from spatially sparse response measurements*. The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 108, no. 4, pages 1674–1682, 2000. (Cité en page 14.)
- [Mesnil 2014a] Olivier Mesnil, Cara AC Leckey et Massimo Ruzzene. *Instantaneous wavenumber estimation for damage quantification in layered plate structures*. In Health Monitoring of Structural and Biological Systems 2014, volume 9064, page 90640D. International Society for Optics and Photonics, 2014. (Cité en page 9.)
- [Mesnil 2014b] Olivier Mesnil, Hao Yan, Massimo Ruzzene, Kamran Paynabar et Jianjun Shi. *Frequency domain instantaneous wavenumber estimation for damage quantification in layered plate structures*. In EWSHM-7th European workshop on structural health monitoring, 2014. (Cité en page 9.)
- [Mesnil 2015] Olivier Mesnil, Cara AC Leckey et Massimo Ruzzene. *Instantaneous and local wavenumber estimations for damage quantification in composites*. Structural Health Monitoring, vol. 14, no. 3, pages 193–204, 2015. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Mesnil 2016a] Olivier Mesnil et Massimo Ruzzene. *Sparse wavefield reconstruction and source detection using compressed sensing*. Ultrasonics, vol. 67, pages 94–104, 2016. (Cité en page 9.)
- [Mesnil 2016b] Olivier Mesnil, Hao Yan, Massimo Ruzzene, Kamran Paynabar et Jianjun Shi. *Fast wavenumber measurement for accurate and automatic location and quantification of defect in composite*. Structural Health Monitoring, vol. 15, no. 2, pages 223–234, 2016. (Cité en page 9.)
- [Michaels 2008] Jennifer E Michaels. *Detection, localization and characterization of damage in plates with an in situ array of spatially distributed ultrasonic sensors*. Smart Materials and Structures, vol. 17, no. 3, page 035035, 2008. (Cité en page 6.)
- [Miorelli 2021] Roberto Miorelli, Clément Fisher, Andrii Kulakovskiy, Bastien Chapuis, Olivier Mesnil et Oscar D'almeida. *Defect sizing in guided wave imaging structural health monitoring using convolutional neural networks*. NDT & E International, vol. 122, page 102480, 2021. (Cité en page 6.)
- [Montgomery 2020] S Macrae Montgomery, Xiao Kuang, Connor D Armstrong et H Jerry Qi. *Recent advances in additive manufacturing of active mechanical metamaterials*. Current Opinion in Solid State and Materials Science, vol. 24, no. 5, page 100869, 2020. (Cité en page 11.)

- [Moon 2018] Seongin Moon, To Kang, Soon-Woo Han, Jun-Young Jeon et Gyuhae Park. *Optimization of excitation frequency and guided wave mode in acoustic wavenumber spectroscopy for shallow wall-thinning defect detection*. Journal of Mechanical Science and Technology, vol. 32, no. 11, pages 5213–5221, 2018. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Morandi 2019] Federica Morandi, Olivier Robin, Luca Barbaresi, Massimo Garai, Noureddine Atalla, Nicolas Quaegebeur, Patrice Masson *et al.* Benchmarking of methods for the identification of flexural wavenumbers in wooden plates. Universitätsbibliothek der RWTH Aachen, 2019. (Cité en page 28.)
- [Morandi 2022] Federica Morandi, A Santoni, P Fausti et M Garai. *Determination of the dispersion relation in cross-laminated timber plates : Benchmarking of time-and frequency-domain methods*. Applied Acoustics, vol. 185, page 108400, 2022. (Cité en pages 14 et 90.)
- [Mukhopadhyay 2017] T Mukhopadhyay et S Adhikari. *Stochastic mechanics of metamaterials*. Composite Structures, vol. 162, pages 85–97, 2017. (Cité en pages 10 et 136.)
- [Panasenکو 2005] Grigorii Petrovich Panasenکو. Multi-scale modelling for structures and composites, volume 615. Springer, 2005. (Cité en page 136.)
- [Paulraj 1985] Arogyaswami Paulraj, Richard Roy et Thomas Kailath. *Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques-ESPRIT*. In Nineteenth Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, 1985., pages 83–89. IEEE, 1985. (Cité en page 28.)
- [Pereira 2011] Emiliano Pereira, Juan R Trapero, Ivan M Diaz et Vicente Feliu. *Algebraic identification of the first two natural frequencies of flexible-beam-like structures*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 25, no. 7, pages 2324–2335, 2011. (Cité en pages 39 et 90.)
- [Podder 2014] Prajoy Podder, Tanvir Zaman Khan, Mamdudul Haque Khan et M Muktadir Rahman. *Comparative performance analysis of hamming, hanning and blackman window*. International Journal of Computer Applications, vol. 96, no. 18, pages 1–7, 2014. (Cité en pages 16 et 88.)
- [Quaegebeur 2011] N Quaegebeur, P Masson, D Langlois-Demers et P Micheau. *Dispersion-based imaging for structural health monitoring using sparse and compact arrays*. Smart Materials and Structures, vol. 20, no. 2, page 025005, 2011. (Cité en page 6.)
- [Rak 2008] Michał Rak, Mohamed Ichchou et Jan Holnicki-Szulc. *Identification of structural loss factor from spatially distributed measurements on beams with viscoelastic layer*. Journal of Sound and Vibration, vol. 310, no. 4-5, pages 801–811, 2008. (Cité en pages 21 et 89.)
- [Renault 2011] A Renault, L Jaouen et F Sgard. *Characterization of elastic parameters of acoustical porous materials from beam bending vibrations*. Journal of Sound and Vibration, vol. 330, no. 9, pages 1950–1963, 2011. (Cité en page 136.)
- [Ribeiro 2022] LHMS Ribeiro, VF Dal Poggetto, BN Huallpa et JRF Arruda. *Bloch wavenumber identification of periodic structures using Prony’s method*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 178, page 109242, 2022. (Cité en pages 35, 36, 51, 53, 90, 124, 125 et 155.)

- [Rizzo 2006] Piervincenzo Rizzo et Francesco Lanza di Scalea. *Feature extraction for defect detection in strands by guided ultrasonic waves*. Structural Health Monitoring, vol. 5, no. 3, pages 297–308, 2006. (Cité en page 6.)
- [Rogge 2013] Matthew D Rogge et Cara AC Leckey. *Characterization of impact damage in composite laminates using guided wavefield imaging and local wavenumber domain analysis*. Ultrasonics, vol. 53, no. 7, pages 1217–1226, 2013. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Roozen 2017a] NB Roozen, Ludovic Labelle, Quentin Leclere, Kerem Ege et Salvador Alvarado. *Non-contact experimental assessment of apparent dynamic stiffness of constrained-layer damping sandwich plates in a broad frequency range using a Nd : YAG pump laser and a laser Doppler vibrometer*. Journal of Sound and Vibration, vol. 395, pages 90–101, 2017. (Cité en page 28.)
- [Roozen 2017b] NB Roozen, Quentin Leclere, Kerem Ege et Youssef Gerges. *Estimation of plate material properties by means of a complex wavenumber fit using Hankel’s functions and the image source method*. Journal of Sound and Vibration, vol. 390, pages 257–271, 2017. (Cité en pages 14 et 90.)
- [Rose 2002] Joseph L Rose. *A baseline and vision of ultrasonic guided wave inspection potential*. J. Pressure Vessel Technol., vol. 124, no. 3, pages 273–282, 2002. (Cité en page 5.)
- [Rouquette 2001] Stephanie Rouquette et Mohamed Najim. *Estimation of frequencies and damping factors by two-dimensional ESPRIT type methods*. IEEE Transactions on signal processing, vol. 49, no. 1, pages 237–245, 2001. (Cité en page 29.)
- [Roy 1986] Richard Roy, A Paulraj et Thomas Kailath. *Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques-ESPRIT*. In MILCOM 1986-IEEE Military Communications Conference : Communications-Computers : Teamed for the 90’s, volume 3, pages 41–6. IEEE, 1986. (Cité en page 28.)
- [Sacchini 1993] Joseph J Sacchini, William M Steedly et Randolph L Moses. *Two-dimensional Prony modeling and parameter estimation*. IEEE Transactions on signal processing, vol. 41, no. 11, pages 3127–3137, 1993. (Cité en pages 28, 33 et 90.)
- [Sale 2011] Michele Sale, Piervincenzo Rizzo et Alessandro Marzani. *Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 25, no. 6, pages 2241–2256, 2011. (Cité en page 137.)
- [Santoni 2017] Andrea Santoni, Stefan Schoenwald, Bart Van Damme et Patrizio Fausti. *Determination of the elastic and stiffness characteristics of cross-laminated timber plates from flexural wave velocity measurements*. Journal of Sound and Vibration, vol. 400, pages 387–401, 2017. (Cité en pages 13 et 88.)
- [Sattarifar 2019] Afshin Sattarifar et Tamara Nestorović. *Frequency-bounded Delay and Sum : A modified Damage Detection Method in thin-walled Plates*. PAMM, vol. 19, no. 1, page e201900368, 2019. (Cité en page 6.)
- [Schmidt 1986] Ralph Schmidt. *Multiple emitter location and signal parameter estimation*. IEEE transactions on antennas and propagation, vol. 34, no. 3, pages 276–280, 1986. (Cité en page 28.)

- [Schmüdgen 2012] Konrad Schmüdgen et Konrad Schmüdgen. *Discrete spectra of self-adjoint operators*. Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space, pages 265–280, 2012. (Cité en page 101.)
- [Schwan 2017] Logan Schwan, Alan Geslain, Vicente Romero-García et Jean-Philippe Groby. *Complex dispersion relation of surface acoustic waves at a lossy metasurface*. Applied Physics Letters, vol. 110, no. 5, 2017. (Cité en pages 27 et 89.)
- [Shahbazpanahi 2001] Shahram Shahbazpanahi, Shahrokh Valaee et Mohammad Hasan Bastani. *Distributed source localization using ESPRIT algorithm*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, no. 10, pages 2169–2178, 2001. (Cité en page 28.)
- [Shannon 1949] Claude Elwood Shannon. *Communication in the presence of noise*. Proceedings of the IRE, vol. 37, no. 1, pages 10–21, 1949. (Cité en page 16.)
- [Shirota 2003] Kenji Shirota. *Adjoint Method for the Problem of Coefficient Identification in Linear Elastic wave Equation*. In Inverse Problems in Engineering Mechanics IV, pages 353–360. Elsevier, 2003. (Cité en page 137.)
- [Silveira 2009] Joaquim Silveira, Manuel João Oliveira Ferreira, Cristina Santos et Teresa Martins. *Computer vision techniques applied to the quality control of ceramic plates*. 2009. (Cité en page 4.)
- [Staszewski 2007] W J Staszewski, B C Lee et R Traynor. *Fatigue crack detection in metallic structures with Lamb waves and 3D laser vibrometry*. Measurement Science and Technology, vol. 18, no. 3, page 727, jan 2007. (Cité en page 8.)
- [Su 2006] Zhongqing Su, Lin Ye et Ye Lu. *Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures : A review*. Journal of sound and vibration, vol. 295, no. 3-5, pages 753–780, 2006. (Cité en page 137.)
- [Su 2009] Zhongqing Su et Lin Ye. *Identification of damage using lamb waves : from fundamentals to applications*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2009. (Cité en page 6.)
- [Tan 2011] Kwek Tze Tan, N Watanabe et Y Iwahori. *X-ray radiography and micro-computed tomography examination of damage characteristics in stitched composites subjected to impact loading*. Composites Part B : Engineering, vol. 42, no. 4, pages 874–884, 2011. (Cité en page 4.)
- [Teager 1983] Herbert M Teager et Shushan M Teager. *A phenomenological model for vowel production in the vocal tract*. Speech Science : Recent Advances, pages 73–109, 1983. (Cité en page 8.)
- [Tian 2021] Zhenhua Tian, Wenfeng Xiao, Zhaoyun Ma et Lingyu Yu. *Dispersion curve regression-assisted wideband local wavenumber analysis for characterizing three-dimensional (3D) profile of hidden corrosion damage*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 150, page 107347, 2021. (Cité en pages 13 et 88.)
- [Timoshenko 1959] Stephen Timoshenko, Sergius Woinowsky-Krieger et al. *Theory of plates and shells*, volume 2. McGraw-hill New York, 1959. (Cité en page 136.)
- [Toumi 1994] Kamel Toumi. *Analyse statique et dynamique des structures mécano-soudées par la méthode des équation intégrales de frontière*. PhD thesis, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 1994. (Cité en page 55.)

- [Tufano 2019] Giovanni Tufano, Christophe Droz, Mohamed Ichchou, Olivier Bareille, A-M Zine, Wim Desmet et Bert Pluymers. *On the structural characterization through k -space methods : assessments and validations*. In 9th ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials, 2019. (Cité en pages 23 et 47.)
- [Tufano 2020a] Giovanni Tufano. *K -space analysis of complex large-scale periodic structures*. PhD thesis, Université de Lyon (France) ; Katholieke universiteit te Leuven (Belgium), 2020. (Cité en pages 23, 47 et 89.)
- [Tufano 2020b] Giovanni Tufano, Fabrizio Errico, Olivier Robin, Christophe Droz, Mohamed Ichchou, Bert Pluymers, Wim Desmet et Nouredine Atalla. *K -space analysis of complex large-scale meta-structures using the Inhomogeneous Wave Correlation method*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 135, page 106407, 2020. (Cité en pages 21 et 89.)
- [Van Belle 2017] Lucas Van Belle, Claus Claeys, Elke Deckers et Wim Desmet. *On the impact of damping on the dispersion curves of a locally resonant metamaterial : Modelling and experimental validation*. Journal of Sound and Vibration, vol. 409, pages 1–23, 2017. (Cité en pages 21, 47 et 89.)
- [Van Damme 2018a] Bart Van Damme et Armin Zemp. *Energy distribution and exchange between spatial harmonics in bending wave phononic crystals*. Physical Review Applied, vol. 10, no. 1, page 014001, 2018. (Cité en page 18.)
- [Van Damme 2018b] Bart Van Damme et Armin Zemp. *Measuring dispersion curves for bending waves in beams : a comparison of spatial fourier transform and inhomogeneous wave correlation*. Acta Acustica united with Acustica, vol. 104, no. 2, pages 228–234, 2018. (Cité en page 18.)
- [Vavilov 2015a] VP Vavilov, ON Budadin et AA Kulkov. *Infrared thermographic evaluation of large composite grid parts subjected to axial loading*. Polymer Testing, vol. 41, pages 55–62, 2015. (Cité en page 4.)
- [Vavilov 2015b] VP Vavilov, AV Plesovskikh, AO Chulkov et DA Nesteruk. *A complex approach to the development of the method and equipment for thermal nondestructive testing of CFRP cylindrical parts*. Composites Part B : Engineering, vol. 68, pages 375–384, 2015. (Cité en page 4.)
- [Wang 2003] CH Wang et LRF Rose. *Plate-wave diffraction tomography for structural health monitoring*. In AIP Conference Proceedings, volume 657, pages 1615–1622, 2003. (Cité en page 8.)
- [Wang 2004] Gang Wang, Xisen Wen, Jihong Wen, Lihui Shao et Yaozong Liu. *Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures*. Physical review letters, vol. 93, no. 15, page 154302, 2004. (Cité en page 12.)
- [Wojtowicki 2004] Jean-Luc Wojtowicki, Luc Jaouen et Raymond Panneton. *New approach for the measurement of damping properties of materials using the Oberst beam*. Review of scientific instruments, vol. 75, no. 8, pages 2569–2574, 2004. (Cité en page 136.)
- [Xu 2015] Wei Xu, Maosen Cao, Wiesław Ostachowicz, Maciej Radzieński et Ning Xia. *Two-dimensional curvature mode shape method based on wavelets and Teager energy for*

- damage detection in plates*. Journal of Sound and Vibration, vol. 347, pages 266–278, 2015. (Cité en page 8.)
- [Yan 2020] Wang-Ji Yan, Dimitrios Chronopoulos, Costas Papadimitriou, Sergio Cantero-Chinchilla et Guo-Shu Zhu. *Bayesian inference for damage identification based on analytical probabilistic model of scattering coefficient estimators and ultrafast wave scattering simulation scheme*. Journal of Sound and Vibration, vol. 468, page 115083, 2020. (Cité en page 7.)
- [Yan 2021] Guqi Yan, Samuel Raetz, Jean-Philippe Groby, Aroune Duclos, Alan Geslain, Nikolay Chigarev, Vitalyi E Gusev et Vincent Tournat. *Estimation via laser ultrasonics of the ultrasonic attenuation in a polycrystalline aluminum thin plate using complex wavenumber recovery in the vicinity of a zero-group-velocity Lamb mode*. Applied Sciences, vol. 11, no. 15, page 6924, 2021. (Cité en pages 27 et 89.)
- [Yan 2022] Wang-Ji Yan, Dimitrios Chronopoulos, Ka-Veng Yuen et Yi-Chen Zhu. *Structural anomaly detection based on probabilistic distance measures of transmissibility function and statistical threshold selection scheme*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 162, page 108009, 2022. (Cité en pages 7 et 8.)
- [Yang 2013] Seung-Hwan Yang, Ki-Bok Kim, Hyun Geun Oh et Jin-Seob Kang. *Non-contact detection of impact damage in CFRP composites using millimeter-wave reflection and considering carbon fiber direction*. NDT & E International, vol. 57, pages 45–51, 2013. (Cité en page 4.)
- [Yang 2016] Zhi-Bo Yang, Maciej Radzienski, Pawel Kudela et Wieslaw Ostachowicz. *Two-dimensional modal curvature estimation via Fourier spectral method for damage detection*. Composite Structures, vol. 148, pages 155–167, 2016. (Cité en page 8.)
- [Young 2012] Warren C Young, Richard G Budynas et Ali M Sadegh. *Roark’s formulas for stress and strain*. McGraw-Hill Education, 2012. (Cité en page 78.)
- [Zheng 2023] Kaihong Zheng, Jueyong Zhu, Jiyue Chen, Muhammad Saqib Hameed, Jianlin Chen et Zheng Li. *Damage detection method based on defect mode for orthogonal grid stiffened panels*. Engineering Structures, vol. 279, page 115636, 2023. (Cité en page 8.)
- [Zhou 2011] Chao Zhou, Zhongqing Su et Li Cheng. *Quantitative evaluation of orientation-specific damage using elastic waves and probability-based diagnostic imaging*. Mechanical systems and signal processing, vol. 25, no. 6, pages 2135–2156, 2011. (Cité en page 6.)

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016 modifié par l'arrêté du 26 août 2022,

Vu la demande des directeurs de thèse

Messieurs O. BAREILLE, A. ZINE, M. ICHCHOU

et les rapports de

M. N. ATALLA

Professeur - Université de Sherbrook - Dépt. De Génie Mécanique - 2500, boul. de l'Université
Sherbrooke (Québec) J1K 2R1 - Canada

et de

M. A. KAWANO

Associate Professor MS5-2 - Escola Politécnica da USP - Universidade de São Paulo
Av Prof. Luciano Gualberto Trav Do - Politecnico, 380 - 05508-010 Sao Paulo - Brésil

Monsieur BRION Thomas

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 14 octobre 2024

Pour le directeur de l'École Centrale de Lyon
Le directeur de la recherche



Christophe CORRE