



HAL
open science

Démarche de validation et la problématique de la construction en géométrie, dans l'espace mathématique francophone : une étude de cas au Cameroun

Eric Walter Ngodebo Ze

► To cite this version:

Eric Walter Ngodebo Ze. Démarche de validation et la problématique de la construction en géométrie, dans l'espace mathématique francophone : une étude de cas au Cameroun. Education. Université Paris Cité; Université de Yaoundé I, 2023. Français. NNT : 2023UNIP7361 . tel-04907010

HAL Id: tel-04907010

<https://theses.hal.science/tel-04907010v1>

Submitted on 22 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université Paris Cité
École Doctorale
« Savoir, Sciences, Education » (ED 623)
Laboratoire de Didactiques André Revuz (EA 4434)



En Cotutelle Avec l'Université De Yaoundé 1

**“ Démarche De Validation Et La Problématique De La Construction En Géométrie,
Dans l'Espace Mathématique Francophone : Etude de Cas au Cameroun ”**

Eric Walter NGODEBO ZE

Dirigée par :

Fabrice VANDEBROUCK

Codirigée par :

Nicolas Gabriel ANDJIGA

Présentée publiquement le 15 décembre 2023 pour obtenir le titre de :

Docteur de l'Université Paris Cité

Thèse de doctorat en Didactique des Disciplines - Mathématiques

Membres du jury :

Rapporteur : **Philippe R. RICHARD**, Professeur des Universités, Université de Montréal

Rapporteur : **Jana TRGALOVA**, Professeur Associé HDR, Haute École Pédagogique Lausanne.

Directeur : **Fabrice VANDEBROUCK**, Professeur des Universités, Université Paris Cité.

Codirecteur : **Nicolas Gabriel ANDJIGA**, Professeur des Universités, Université de Yaoundé 1.

Examineurs : **Lawrence DIFFO LAMBO**, Professeur des Universités, Ecole Normale Supérieure de Yaoundé 1.

Anne Cécile MATHE, Maîtresse de Conférences, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.

Invité : **Bernard PARZYSZ**, Professeur émérite, Université d'Orléans.

Dédicaces

À la mémoire de mon père, NGODEBO Jean Marc.

À ma mère, MENAMA Madeleine.

À mes enfants.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier les membres de l'équipe du LDAR et ARDM de l'Université Paris Cité, aussi bien les enseignants et les chercheurs que les doctorants réunis au sein du groupe « Jeunes Chercheurs », pour m'avoir accueilli durant mes années de thèse ainsi que durant mes études antérieures.

Je tiens à présenter mes vifs remerciements à mes directeurs, Fabrice VANDEBROUCK, Nicolas Gabriel ANDJIGA et Bernard PARZYSZ. Merci pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant de m'encadrer, pour les corrections très ponctuelles et les suggestions données au bon moment. Merci pour leur qualité humaine, d'écoute et de compréhension, pour leur disponibilité et les propos clairs par lesquels ils ont su reformuler mes idées imprécises. Ils ont su, tout au long de ce travail, réagir à mes choix sans pour autant imposer leur point de vue. Grâce à de nombreux échanges, au cours desquels ils m'ont fait part de leurs critiques constructives, ils m'ont initié au métier de chercheur. Tout cela restera présent pour le docteur que je suis et l'enseignant chercheur que je serai peut-être.

Je remercie vivement Fabrice VANDEBROUCK et Bernard PARZYSZ car ils ont toujours cru en mes capacités, ils m'ont toujours encouragé, et en premier ils m'ont transmis leur amour pour la recherche en didactique de mathématiques. C'est sûrement grâce à eux si je suis partie pour la France et si j'ai pu poursuivre jusqu'en thèse.

Je tiens à remercier Nicolas Gabriel ANDJIGA pour les échanges autour du contenu mathématique choisit pour ma recherche, la pratique de l'enseignement des mathématiques au Cameroun, et surtout pour la relecture attentive de mon manuscrit de thèse.

J'adresse aussi mes vifs et sincères remerciements à Cécile OUVRIER-BUFFET et Edith PETITFOUR pour l'énorme travail fait lors du démarrage de cette recherche, les suggestions données m'ont permis d'avancer et de mieux positionner mon thème de travail.

Merci à Philippe R. RICHARD et Jana TRGALOVA qui ont acceptés d'être rapporteurs de ma thèse. L'énorme travail fait pour les corrections, les suggestions données, très ponctuelles et pertinentes m'ont permis d'avancer dans la rédaction du manuscrit. Merci pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et surtout à la lecture attentive de mon manuscrit. Leurs remarques m'ont permis d'évoluer, d'enrichir mes réflexions et d'envisager mon travail sous un autre angle.

Je remercie Anne Cécile MATHE et Lawrence DIFFO LAMBO qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse, pour leur soutien tout au long de ma recherche et leurs conseils. Merci particulièrement à Lawrence DIFFO LAMBO pour les moments d'échanges autour de mes choix d'outils mathématiques, les orientations de ma problématique et la définition des perspectives de recherche. Pour les corrections apportées à la traduction en anglais du résumé de ma thèse.

Je voudrais remercier tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidé et soutenu dans la réalisation de ce travail de recherche. Je pense à :

- ~ La grande région d'île de France qui à travers sa bourse de mobilité pour les doctorants, a financé l'intégralité de mes expérimentations qui ont abouties aux résultats des analyses contenues dans cette thèse.
- ~ Tous les enseignants de l'école normale supérieur de Yaoundé 1, en particulier ceux du département de mathématiques pour leur participation active à ma formation académique, sociale et humaine. Je pense à Judith NJOMGANG, Bertrand TCHANTCHO, Fidel CIAKE et Issofa MOYOUWOU qui m'ont toujours encouragé à poursuivre.
- ~ Renée NKECK, chef de département de didactique des disciplines de l'Université de Yaoundé 1, pour le soutien et son amour sans faille, et surtout la force qu'elle a su me donner à travers ces précieux conseils pour affronter de nombreuses difficultés et défis.
- ~ Léopold Lucien POUOKAM, enseignant de mathématiques, qui a accepté de mettre en œuvre le modèle dans sa classe avec ses élèves.
- ~ Arthur DONGMO TSAMO qui m'a accompagné dans la réalisation des figures géométriques et dans la mise en forme de ce manuscrit. Merci pour le soutien moral et technique. Nos moments d'échanges autour des figures réalisées vont me manquer.
- ~ Justine NGO NYOBE, professeur de langue et littérature, pour les corrections de français apportées à mon manuscrit.
- ~ Tous les élèves des classes de première scientifique du lycée bilingue de YAOUNDE, d'EKOREZOK et du collège TSIMI EVOUNA qui ont acceptés de se soumettre aux tests. Merci aux trois enseignants de mathématiques Léopold, Sinclair et Alain qui m'ont permis de travailler avec leurs classes en apportant une contribution fondamentale au dispositif expérimentale.
- ~ Jean Pierre ADJABA, inspecteur-coordonnateur national de sciences, pour sa participation aux échanges lors desquels, par sa grande expérience, il m'a apporté des réflexions et des documents sur l'enseignement des isométries du plan au secondaire, et des documents officiels sur les différentes réformes qu'a connu l'enseignement secondaire, au Cameroun.

J'exprime ma reconnaissance à :

- ~ Ma famille, sans leur soutien moral je ne serai sûrement pas arrivé au bout de ce périple. Je remercie ma mère, Madeleine, et mon père, Jean Marc. Deux personnes que j'admire, qui ont toujours été présentes dans ma vie, m'ont toujours soutenues. Ils ont toujours cru en moi et m'ont toujours encouragé à aller au bout. Merci à mes frères et sœurs qui ont toujours été présents pendant mes moments de joies et de déprimés. Merci pour leur complicité et leur affection.
- ~ Mes enfants Nicolas et Lucas qui n'ont pas cessés de me donner le sourire après une longue journée de travail. C'est donc à eux, à ma famille présente et future que je dédie cette thèse.

Je remercie enfin tous ceux qui de près ou de loin m'ont apporté leurs soutiens et donc je n'ai pas fait mention ici. Sachez que ma gratitude à votre endroit est tellement grande et que je vous porte tous dans mon cœur.

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	xii
Liste des figures	xiii
Résumé	i
Abstract	ii
Introduction générale	1
1. Une Approche globale	1
2. Un contexte favorable à notre étude : le Cameroun, un pays de l’Espace Mathématique Francophone.....	2
3. Positionnement du problème abordé par la recherche	3
4. Des motivations à l’origine de cet axe de recherche.....	5
5. Les objectifs de la recherche.....	7
6. L’organisation générale de la thèse.....	8
PARTIE 1 : DES QUESTIONS GÉNÉRALES SUR LES TRANSFORMATIONS DU PLAN, LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE CONSTRUCTION ET LA VALIDATION MATHÉMATIQUE, AU SECONDAIRE	11
Introduction de la première partie	12
Chapitre 1 : Les transformations du plan dans l’enseignement des mathématiques, au Cameroun	14
1.1. Quelques notions et définitions fondamentales liées aux transformations du plan dans l’enseignement des mathématiques, au secondaire.....	14
1.1.1. Les éléments de géométrie affine euclidienne.....	15
1.1.2. Les notions de base sur les transformations du plan.....	16
1.1.3. La notion de transformation du plan.....	16
1.1.3.1. La notion d’application affine du plan.....	17
1.1.3.2. La notion de transformation du plan.....	18
1.1.3.3. La notion de transformation réciproque du plan.....	18
1.1.3.4. La notion de composée de deux transformations du plan.....	18
1.1.4. La notion de point invariant par une transformation du plan	19
1.2. Les transformations isométriques du plan	19

1.2.1. La notion d'isométrie du plan.....	19
1.2.2. Les propriétés fondamentales d'une isométrie du plan	20
1.3. Les transformations non isométriques du plan	20
1.3.1. La définition d'une homothétie du plan.....	21
1.3.2. Les propriétés d'une homothétie du plan.....	21
1.4. L'enseignement des transformations du plan, au secondaire	21
1.4.1. L'évolution de la notion de transformations du plan dans les programmes de mathématiques actuels	22
1.4.2. Les approches utilisées dans l'enseignement des transformations du plan, au secondaire	24
Chapitre 2 : Des éclairages sur la résolution des problèmes de construction, en géométrie, dans l'enseignement des mathématiques, au secondaire	28
2.1. L'étude épistémologique des problèmes de construction.....	28
2.2. L'étude des travaux didactiques portant sur la résolution des problèmes de construction dans l'enseignement des mathématiques	31
2.2.1. Les méthodes et théories de résolution des problèmes de construction, en géométrie	31
2.2.2. Les variables de l'énoncé : « la forme des données » dans l'énoncé d'un problème de construction.....	33
2.2.3. Les genres de tâche autour des problèmes de construction, en géométrie	35
2.2.4. Le contrat didactique dans la résolution des problèmes de construction.....	36
2.3. La résolution des problèmes de construction dans l'enseignement des mathématiques, en classe de Première Scientifique.....	38
2.3.1. Le Genre de tâche autour des problèmes de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique.....	38
2.3.2. La forme des données des énoncés dans la formulation des problèmes de construction sur les transformations de plan, en classe de Première Scientifique... ..	42
2.3.3. Le contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique ..	45
Chapitre 3 : Des éclairages didactiques et institutionnels sur la question de la validation dans l'enseignement des mathématiques, au secondaire	53
3.1. La validation dans les travaux en didactique de mathématiques.....	53
3.1.1. Le concept de validation et les contextes de validation.....	54
3.1.2. Le processus de recherche de validation	56
3.2. La validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique	64

3.2.1.L'importance de la validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique	65
3.2.1.1. La place de la validation dans la réforme de 1992	65
3.2.1.2. La place de la validation dans la réforme de 2014	67
3.2.1.3. Bilan sur la conception de la validation, du point de vue des programmes issus des deux dernières réformes de l'enseignement des mathématiques	68
3.2.2.La conception de la validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique.	69
3.2.2.1. La conception de la validation du point de vue des programmes actuels.....	69
3.2.2.2. La conception de la validation du point de vue des manuels	72
Chapitre 4 : Le cadre théorique, la problématique et la méthodologie Générale	76
4.1. L'élaboration du cadre théorique (EPP) : les Espaces de Travail Mathématique, les Paradigmes Géométriques et les Procédés de Construction	76
4.1.1.Les Espaces de Travail Mathématique (ETM)	76
4.1.1.1. Présentation du modèle des ETM.....	77
4.1.1.2. Les ETM mis en jeu dans le cadre théorique (EPP)	79
4.1.2.Les Paradigmes Géométriques	80
4.1.2.1. La notion de Paradigmes Géométriques	80
4.1.2.2. Les Paradigmes Géométriques mis en jeu dans le cadre théorique (EPP)	82
4.1.3.Les Procédés de Construction.....	83
4.1.3.1. La notion de Procédés de Construction	83
4.1.3.2. Les Procédés de Construction mis en jeu dans le cadre théorique (EPP).....	84
4.1.4.Le cadre théorique (EPP) : Un cadre fondé sur une approche semi-intégrative.....	85
4.1.4.1. Les modalités d'entrée dans la mise en œuvre de la forme d'organisation du travail mathématique	86
4.1.4.2. La structure de développement de la démarche de validation dans la forme d'organisation du travail mathématique	89
4.2. La problématique et la méthodologie générale	91
4.2.1.La formulation des questions de recherche	91
4.2.2.La formulation des hypothèses de recherche	94
4.2.3.Les objets d'étude : une délimitation de notre travail de recherche	95
4.2.4.La méthodologie générale de recherche	96
PARTIE 2 : LA FORME D'ORGANISATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET LA DÉMARCHE DE VALIDATION, DANS LES ETM IDOINES EN, CLASSE DE PREMIERE SCIENTIFIQUE	100

Introduction de La deuxième partie.....	101
Chapitre 5 : La forme d'organisation du travail mathématique développée dans les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique.....	103
5.1. La méthodologie d'analyse du travail mathématique d'organisation permettant de décrire l'activité de construction des objets géométriques	103
5.1.1.L'analyse des procédés de construction qui réalisent la construction de l'objet géométrique	105
5.1.2.L'analyse du travail mathématique qui réalise la construction de l'objet géométrique	105
5.1.3.L'analyse du discours de validation, qui accompagne le travail mathématique de réalisation de la construction de l'objet géométrique	105
5.2. La forme d'organisation du travail mathématique proposée, dans un ETM idoine potentiel, en classe Première Scientifique	106
5.3. La conclusion sur la recherche de la forme d'organisation du travail mathématique disponible dans les ETM idoines potentiels	115
Chapitre 6 : La forme d'organisation du travail mathématique développée dans les ETM idoines effectifs, en classes de Première Scientifique	118
6.1. La méthodologie particulière de recherche	119
6.1.1.L'échantillon d'enseignants, d'élèves et d'établissements	120
6.1.2.Les séquences de résolution observées.....	120
6.1.3.L'analyse du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet dans les séquences observées.....	122
6.1.3.1. L'analyse « à priori » du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, décrite dans la situation proposée.....	122
6.1.3.2. L'analyse du déroulement du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, décrit dans la situation proposée	123
6.1.4.L'analyse du discours de validation qui accompagne le travail mathématique permettant la réalisation de la construction de l'objet, décrite dans la situation proposée	123
6.1.5.L'analyse des procédés de construction qui réalisent la construction de l'objet, décrite dans la situation proposée	124
6.1.6.Les obstacles et contraintes du terrain	124
6.2. Les ETM idoines, en classes de Première Scientifique A et Première Scientifique B	125
6.2.1.L'analyse de l'ETM idoine Potentiel, en classes de Première Scientifique A et B	125
6.2.1.1. L'analyse de l'énoncé de la situation proposée	125

6.2.1.2. L'Analyse des procédés de construction du triangle (ABC) : une analyse fine d'une solution éventuelle de la situation proposée.....	128
6.3. L'Analyse du travail mathématique permettant la réalisation de la construction du triangle équilatéral (ABC) et du discours de validation qui accompagne ce travail.....	133
6.3.1.L'analyse de l'ETM idoine Effectif, en classe de Première Scientifique A	135
6.3.2.Le travail mathématique d'organisation élaboré dans l'ETM idoine Effectif, en classe de Première Scientifique A, pour développer la démarche de validation, chez les élèves	146
Chapitre 7 : Étude de la forme d'organisation du travail mathématique actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique : Analyse-Synthèse (A-S).....	150
7.1. L'Analyse et la Synthèse dans l'histoire des mathématiques.....	150
7.2. L'Analyse-Synthèse comme méthode de résolution des problèmes mathématiques .	153
7.2.1.L'Analyse-Synthèse comme méthode de raisonnement mathématique, en classe Première Scientifique.....	153
7.2.2.Un exemple de résolution d'un problème de construction par l'Analyse-Synthèse, en classe de Première Scientifique.....	154
7.3. L'Analyse-Synthèse comme forme d'organisation du travail mathématique élaborée, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction	157
7.4. L'Analyse-Synthèse (A-S) comme forme d'organisation du travail mathématique pour développer la démarche de validation, chez les élèves.....	159
7.4.1.La structure de développement de la démarche de validation	159
7.4.2.Les limites de « l'Analyse-Synthèse » dans le développement de la démarche de validation	163
Conclusion générale de la deuxième partie	165
PARTIE 3 : PROPOSITION D'UN MODÈLE DE FORME D'ORGANISATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE POUR DÉVELOPPER LA DÉMARCHE DE VALIDATION, CHEZ LES ÉLÈVES, DANS LES ETM IDOINES, EN CLASSE DE PREMIERE SCIENTIFIQUE	168
Introduction de la troisième partie	169
Chapitre 8 : Élaboration d'un modèle de forme d'organisation du travail mathématique pour mieux développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines	171
8.1. Le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique	172
8.1.1.Le principe de raffinage dans les industries pétrolières.....	172
8.1.2.La Transposition Didactique (Chevallard, 1985) : une extension (continuité) du principe de raffinage du pétrole ?	175

8.1.3. Notre conception de l'apprentissage en milieu scolaire	177
8.1.4. Le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique.....	179
8.2. L'élaboration d'un modèle de forme d'organisation du travail mathématique pour développer la démarche de validation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique	181
8.2.1. Une organisation du travail mathématique externe au problème de construction (A-A-C)	182
8.2.2. Une organisation du travail mathématique interne au problème de construction (P-A-P).....	183
8.2.3 Le modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré pour développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines.....	186
Chapitre 9 : Analyse descriptive de la forme d'organisation du travail mathématique : Appréhension-Analyse-Conception de la Solution / Problème-Actes de construction-Produit d'actes de construction (A-A-C / P-A-P), dans les ETM idoines	191
9.1. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) et le processus de résolution d'un problème de construction	192
9.1.1. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) et la caractérisation de l'objet géométrique à construire	193
9.1.2. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P), le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet à construire.....	195
9.1.3. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) et le processus de réalisation de la construction de l'objet géométrique	195
9.1.4. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) et la validation de l'objet géométrique à construire	196
9.2. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) : un modèle pour développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique	198
9.2.1. La caractérisation du modèle (A-A-C / P-A-P) dans le développement de la démarche de validation, chez les élèves	199
9.2.2. La structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P)	202
9.3. Etude comparative des modèles (A-A-C / P-A-P) et (A-S) dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique	204
Chapitre 10 : L'apport du modèle (A-A-C / P-A-P) dans le développement de la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique	209
10.1. La méthodologie particulière de recherche	210
10.1.1. L'échantillon d'enseignants, d'élèves et d'établissements	211

10.1.2. Les séquences de résolution observées	212
10.1.3. L'analyse du rôle de la forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P), dans les ETM idoines, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction.....	213
10.1.3.1. L'analyse « à priori » de la situation	213
10.1.3.2. L'analyse du déroulement de la mise en œuvre de la situation en salle.....	214
10.2.L'analyse de l'ETM idoine, en classe de Première Scientifique C	214
10.2.1. L'analyse de l'ETM idoine potentiel, en classe de Première Scientifique C....	214
10.2.1.1. Le travail mathématique d'organisation susceptible d'être fait à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) pour développer la démarche de validation, chez l'élève...	214
10.2.1.2. La formulation des hypothèses relatives au rôle du modèle (A-A-C / P-A-P), au niveau de l'enseignant, dans le développement de la démarche de validation du triangle équilatéral (ABC).....	225
10.2.2. L'analyse de l'ETM idoine effectif, en classe de Première Scientifique C	228
Chapitre 11 : Les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique	241
11.1.La méthodologie d'analyse des effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation par les élèves, dans les ETM idoines.....	242
11.1.1. L'échantillon des binômes d'élèves	244
11.1.2. Le déroulement de l'expérience	244
11.2.L'analyse des effets du modèle (A-A-C / P-A-P) dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique A, B et C	245
11.2.1. L'analyse à priori de la situation proposée	245
11.2.1.1. Analyse de l'énoncé de la situation proposée	245
11.2.1.2. Proposition d'une solution à priori de la situation proposée	247
11.2.1.3. Formulation des hypothèses relatives aux effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation	249
11.2.2. L'analyse des ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique A, B et C	251
11.2.2.1. L'analyse du succès dans la réussite de la solution du problème relativement au modèle utilisé, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique A, B et C	251
11.2.2.2. L'analyse du raisonnement mathématique ayant conduit au succès dans la réussite de la solution du problème dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique C.....	252
Conclusion générale de la troisième partie.....	262
Conclusion générale et perspectives	266

1. Des questions générales sur : les transformations du plan, les problèmes de construction et la validation mathématique, jusqu'à la construction de l'objet de notre recherche..	266
2. Des questions de recherche à la validation de nos hypothèses	268
3. Des résultats obtenus à nos éléments de réponse au problème traité.....	273
3.1. Le modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré	274
3.2. La caractérisation de la forme du travail mathématique d'organisation dans le modèle (A-A-C / P-A-P).....	275
3.3. La structure de développement de la démarche de validation adossé au modèle (A-A-C / P-A-P).....	278
4. De nos éléments de réponse aux limites de notre travail de recherche.....	280
4.1. Les limites liées à la méthodologie de recherche	280
4.2. Les limites liées au contexte de l'étude	282
4.3. Des limites identifiées aux perspectives de recherche.....	283
4.3.1. Le choix des axes de recherche	283
4.3.2. La taille des échantillons utilisés dans notre recherche	283
4.3.3. Dépasser les limites liées au contexte de notre recherche	283
Bibliographie	285
Annexe	291

Liste des tableaux

Tableau 1 : Données récoltées sur les genres de tâches (T1)	39
Tableau 2 : Bilan de l'étude sur les genres de tâches (T2).....	40
Tableau 3 : Données sur la forme des données des énoncés (T3).....	43
Tableau 4 : Bilan de l'étude sur la forme des données des énoncés (T4)	Error! Bookmark not defined.
Tableau 5 : Données sur les critères relatifs au contrat didactique lié à la réalisation de la solution d'un problème de construction (T5)	46
Tableau 6 : Bilan de l'étude sur la présence des étapes de résolution dans les solutions (T6).....	46
Tableau 7 : Bilan de l'étude sur le contrat didactique relatif à la réalisation de la solution (T7)	46
Tableau 8 : Les éléments des paradigmes G1 et G2 mis en jeu dans le cadre (EPP)	83
Tableau 9 : Les éléments des procédés de construction mis en jeu dans le cadre (EPP)	85
Tableau 10 : Données récoltées sur les formes de travail mathématique d'organisation développées par les enseignants P_A et P_B	121
Tableau 11 : Éléments étudiés dans le discours de validation	123
Tableau 12 : Caractérisation des procédés de construction d'un objet dans l'Analyse-Synthèse (A-S).....	158
Tableau 13 : Caractérisation du travail mathématique permettant la réalisation de la construction d'un objet dans l'Analyse-Synthèse (A-S)	158
Tableau 14 : Caractérisation du discours de validation qui accompagne le travail Mathématique dans l'Analyse-Synthèse (A-S)	159
Tableau 15 : Caractérisation des procédés de construction dans le modèle (A-A-C / P-A-P)	201
Tableau 16 : Caractérisation du travail mathématique permettant la réalisation de la construction dans le modèle (A-A-C / P-A-P)	201
Tableau 17 : Caractérisation du discours de validation qui accompagne le travail mathématique dans le modèle (A-A-C / P-A-P)	202
Tableau 18 : Données sur le succès dans la réussite de la solution du problème relativement au modèle utilisé (T21)	251
Tableau 19 : Bilan de l'étude sur le succès dans la réussite de la solution relativement au modèle utilisé (T22)	252
Tableau 20 : Données récoltées sur les productions des binômes ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P) (T23).....	253

Liste des figures

Figure 1: Diagramme de l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011).	78
Figure 2 : Les trois plans verticaux de l'ETM (Kuzniak et Nechache, 2014).....	78
Figure 3: Constructions instrumentées du triangle (ABC).....	132
Figure 4: Constructions instrumentées du triangle (ABC).....	132
Figure 5: Structure de développement de la démarche de validation, adossée à la forme d'organisation du travail mathématique (A-S).....	161
Figure 6 : Le principe de raffinage du pétrole brut : Extrait de la fiche pédagogique connaissance des énergies	174
Figure 7 : Transposition du savoir savant au savoir assimilé.....	175
Figure 8 : Transposition Didactique : schéma adapté de la version de Clerc et al. (2006, p.1)	176
Figure 9: Modèle de forme d'organisation (A-A-C/P-A-P).....	187
Figure 10 : Structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P).....	203
Figure 11: Brouillon du binôme B12 : E21/E13	256
Figure 12: Feuille de composition du binôme B12 : E21/E13	258

Résumé

Ce travail présente une analyse des difficultés rencontrées par les élèves du secondaire pour valider les résultats qu'ils obtiennent lorsqu'ils résolvent des problèmes mathématiques. L'hypothèse de départ est que l'institution peut aider les élèves à progresser, sans nécessairement recourir à des préalables relevant de la logique formelle, mais simplement en préconisant une approche permettant de les initier à la validation en même temps qu'ils étudient les contenus mathématiques prescrits dans les programmes. Nous commençons par situer les problèmes de construction dans l'enseignement des mathématiques, puis nous caractérisons plus particulièrement la validation dans la résolution des problèmes de construction. La littérature suggérant de développer la validation, chez les élèves, en les amenant à s'approprier les règles du débat mathématique à travers des situations d'enseignement de la démonstration, nous abordons ce problème dans le cadre de l'organisation des séquences consacrées à des problèmes de construction en exploitant l'entrée par les méthodes de résolution à partir d'une analyse du rapport liant le raffinement de la caractérisation des objets mathématiques au développement de la validation. Nous adoptons une approche semi-intégrative, fondée sur des apports coordonnés de trois cadres théoriques, dont un cadre principal : la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) ; dans laquelle nous distinguons les Paradigmes Géométriques et les Procédés de Construction. Cette approche, qui rend compte de la manière dont ces deux éléments s'imbriquent dans les ETM idoines pour développer la validation, chez les élèves, nous conduit à étudier la forme d'organisation du travail mathématique et nous donne un cadre pour étudier la manière dont on peut organiser la résolution d'un problème mathématique, pour développer les compétences relatives à la validation, chez les élèves. Ainsi, nous conduisons notre recherche à partir de deux sortes d'enquêtes. La première, exploratoire, vise à identifier la forme d'organisation du travail mathématique mise en œuvre actuellement dans les ETM idoines, en classe de Première scientifique, à décrire son fonctionnement et à dégager ses limites lors du développement de la validation. La deuxième, expérimentale, s'appuie sur les limites du modèle disponible, sur notre conception de l'apprentissage et sur le principe de raffinement d'un savoir mathématique, pour élaborer une forme d'organisation du travail mathématique, capable de mieux développer la validation, chez les élèves, car le traitement expérimental proposé pour la tester, au niveau des enseignants a illustré le rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la distinction des éléments sur lesquels ces derniers peuvent se référer pour valider les résultats qu'ils obtiennent. L'étude des données de ces enquêtes a permis d'établir que la manière d'organiser un problème mathématique donné, à travers la caractérisation des objets que décrit ce problème, raffine, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, une démarche de validation et fournit des moyens permettant de développer les compétences de validation, chez les élèves, de ce niveau d'enseignement.

Mots clés : Raffinement, Problème de construction, démarche de validation, forme d'organisation, raffinage, travail mathématique d'organisation, démonstration, contrôles, actes de construction, produit d'actes de construction, séquence de résolution.

Abstract

The validation process and the problem of construction in geometry in the French-speaking mathematical area : a case study in Cameroon.

This work investigates the difficulties encountered by secondary school students in validating achievements while solving construction problems in mathematics. The starting hypothesis is that the educational institution can well promote student progression, without necessarily resorting to prerequisites in formal logic. One may simply advocate an approach that initiates learners to validate self-achievements, while instruction contents stick to those prescribed in the curriculum. We first identify the challenges that litter the way for the teaching of problems on mathematical construction. Then, we proceed on by specifically characterizing those pertaining to validation issues. The literature suggests fostering validation skills for students by enabling them to internalize the rules of the mathematical discourse through learning in situations involving the need to prove. We implement that purpose by planning the teaching sequences on construction problems to use problem resolution methods as entry situations. We then come out with a Mathematical Workspace, which we call *Ideal Mathematical Workspace (IMWs)*. In French, we may write *Espace de travail Mathématique idoine* (shortly ETM idoine). Our framework is grounded by transposing the triptych theoretical framework that combines 1) a prime Theory of Mathematical organization of a Workspace, within which we have 2) Geometric Paradigms and 3) Construction Procedures. This approach, which accounts for how these two elements interlock in *IMWs*, is convenient for developing validation skills in students. It also leads us to the study of the organizational structure of mathematical work, and it provides a framework for studying how the resolution of a problem can be organized to foster student validation skills. Thus, our research has two types of inquiries. The first, which is exploratory, aims at identifying the kind of organization is implemented for mathematical work following our *IMWs* by the Mathematics Education system in force for general secondary schools. This inquiry aims at observing how it works and to take a good record of its limits when it comes to developing validation skills. In the second, which is experimental, we elaborate a Mathematical organization of work based on a few factors. These factors are 1) the limits of the *IMWs* model at hand, 2) our conception of learning, and 3) the refinement process of any knowledge item of the mathematical content. We thus develop a form of mathematical organization of work that better develops the student's validation skill. Indeed, the test used to experimentally verify what we have just stated illustrates, for the teacher, the benefit of guiding the learner through the stages of refinement. For the student, the test unveils guiding clues to refer to for validating the results that he obtains. The study of the data collected from these inquiries has made it possible to establish that in Form Sixth High School Science Studies, a true statement is as follows: when applied to organize a mathematical problem through the characterization of the mathematical objects that the problem describes, the *IMWs* model refines a validation process, thereby providing a way of developing student validation skills, at this level of education.

Keywords: Refinement, Construction Problem, Validation Approach, Organizational Structure, Refining, Mathematical Work Organization, Proof, Checks, Construction Actions, Product of Construction Actions, Resolution Sequence.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Notre recherche porte sur la question de la validation, dans l'Espace Mathématique Francophone. Nous voulons élaborer un modèle de forme d'organisation du travail mathématique permettant de développer des compétences relatives à la validation, chez les élèves de l'enseignement secondaire, en nous appuyant sur la structure et l'organisation de la résolution d'un problème de construction lié aux transformations du plan.

1. Une Approche globale

Dans une séquence de résolution d'un problème de construction, nous situons le lien entre le problème que l'on résout et le raisonnement mathématique qui est produit dans l'activité de construction. Nous interprétons ce lien comme étant un processus qui génère d'autres activités mathématiques¹ transversales comme par exemple : prouver, calculer, argumenter, justifier, mesurer, démontrer...etc. Nous le désignons par l'expression « *démarche de validation* ». Pour nous, *pratiquer la démarche de validation dans la résolution des problèmes mathématiques consiste à entreprendre de valider un résultat obtenu dans une activité mathématique*. La question de la validation étant une problématique majeure de l'enseignement des mathématiques au secondaire, nous centrons notre recherche sur l'apprentissage de la validation. Particulièrement, sur le développement de la capacité de valider chez les élèves de l'enseignement secondaire. En nous appuyant sur l'analyse et la description de la démarche de validation des résultats obtenus en classe lors de la résolution des problèmes de construction, nous explorons l'impact de la mise en œuvre de cette démarche, par un enseignant, sur le développement des compétences relatives à la validation, chez les élèves. Une hypothèse fondamentale qui sous-tend nos objectifs de recherche est que la démarche de validation est un savoir-faire qui ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution d'une tâche issue d'une catégorie de problèmes mathématiques donnée. Ainsi, dans la catégorie problèmes de construction géométrique, nous faisons une nette différence entre « la construction » et « le problème de construction » (nous y reviendrons plus loin). La preuve de la construction, les contrôles du problème et de l'acte de construire étant au centre du processus de réalisation de la construction de l'objet que décrit le problème, nous rattachons ces éléments à la caractérisation que l'élève a de cet objet. Nous pensons que cette caractérisation, liée à une conception d'une notion mathématique, peut mettre en évidence certains éléments auxquels l'élève peut se référer pour produire une démarche de validation. Ainsi, dans le développement de la capacité de valider, la question consiste à savoir comment amener les élèves à distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent se référer pour valider les résultats qu'ils obtiennent. Notre travail débute sur une problématique globale, centrée sur l'enseignement des savoirs notionnels « problème de construction » et « validation » pour se focaliser sur l'apprentissage du savoir-faire « démarche de validation ». De cette approche globale, nous prenons un cas particulier dans l'espace mathématique francophone.

¹ Ce sont quelques compétences travaillées au secondaire.

2. Un contexte favorable à notre étude : le Cameroun, un pays de l'Espace Mathématique Francophone

Plusieurs enseignants de mathématiques camerounais, interrogés dans le cadre des expérimentations conduites dans notre mémoire de DIPES 2² (Ngodebo, 2017) constatent que la majorité de leurs élèves sont incapables de valider les résultats qu'ils obtiennent lorsqu'ils résolvent des problèmes mathématiques. Pour un observateur averti, ce constat semble ne pas constituer un problème spécifique aux élèves camerounais, puisque Balacheff (1988) souligne, dans ses travaux de thèse, que les élèves français et américains éprouvent d'énormes difficultés à produire des démonstrations. Tanguay (2000) constate aussi au Canada, à travers les entretiens qu'il a conduits auprès de ses collègues, que : « *tout enseignant en mathématiques au collégial et à l'université est tôt ou tard préoccupé par les difficultés qu'éprouvent les étudiants à élaborer ou même comprendre les preuves* » (Tanguay, 2000, p.1). Or, dans le contexte camerounais il a existé dans les programmes de mathématiques du secondaire (avant la réforme de 1992), un chapitre consacré à la logique formelle. Ce chapitre avait pour but, d'une part, d'initier les élèves au raisonnement mathématique, et, d'autre part, de favoriser le développement de la capacité des élèves à prouver, démontrer et argumenter. C'était un cadre institutionnel et un outil d'apprentissage de la validation basé sur la pensée de Bolzano (1980) pour qui « *mathématiques, logique et philosophie sont étroitement liées* », et soutenue par l'idée de Durand-Guerrier (2009) qui pense que « *le langage mathématique développe la validation* ». De façon inattendue, la logique formelle a disparu de la liste des objets d'enseignement au moment de la réforme de 1992, qui a introduit de nouveaux programmes et une approche nouvelle, dite APO (Approche Par Objectifs, IGE-MINESEC, 1992). Certains mathématiciens (Andjiga (2000), Diffo (2017)) et didacticiens de mathématiques (Njomgang, 2013), camerounais pointent du doigt cette disparition comme étant à l'origine de cette incapacité des élèves à valider les résultats mathématiques que constatent les enseignants. En effet, pour eux, les concepts de logique sont devenus des objets très peu travaillés dans les classes mathématiques, comme le souligne d'ailleurs, Njomgang (2013) :

« *Au Cameroun, dans l'enseignement secondaire, les concepts de logique sont très peu explicités en classe de mathématiques, du fait que leur enseignement n'est pas prescrit par les nouveaux programmes officiels* » (Njomgang, 2013).

Ces chercheurs traduisent cette incapacité des élèves comme une difficulté liée, non seulement à la production des preuves, de l'argumentation et de la démonstration, mais aussi à la mauvaise appréhension du fonctionnement de ces raisonnements de validation, et aux contraintes liées à leurs exigences propres. Comme nous l'ont révélé les conclusions des entretiens de AIMS³-Cameroun menées avec les formateurs en mathématiques des Écoles Normales Supérieures du Cameroun (ENS) :

« *Une source importante de difficultés des élèves camerounais n'est pas spécifique à la géométrie, mais c'est dans ce domaine des mathématiques (la logique formelle) que les élèves*

² Diplôme de Professeurs de l'Enseignement Secondaire 2^{ème} grade.

³ African Institute for Mathematical Sciences.

rencontrent beaucoup de difficultés. La preuve et la démonstration constituent un véritable problème, chez les élèves. » (AIMS-Cameroun, 2020).

Pour eux, l'absence de cours sur la logique formelle constitue une lacune grave, au niveau des élèves, dans leur apprentissage de la validation et dans leur acquisition de la culture mathématique. C'est aussi un problème très sérieux pour les enseignants, dans la transmission des savoirs mathématiques, puisque Nechache souligne que : « *pour les formateurs de mathématiques dans les masters d'enseignement, ou pour les enseignants de mathématiques du secondaire, la démonstration, la preuve, ou la justification (des arguments) sont des modes de validation caractéristiques des mathématiques, des éléments clés dans l'enseignement et dans l'acquisition d'une culture mathématique* » (Nechache, 2016, p.10).

En conséquence, trouver des moyens pour y remédier constitue une préoccupation didactique actuelle. D'ailleurs, les débats qui sont menés dans la communauté mathématique tournent autour des questions liées à cette absence et à la recherche de solutions de remédiation. Les questions les plus récurrentes dans ces débats sont celles qui consistent à savoir comment amener les élèves à valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent en l'absence d'un cours préalable sur la logique formelle. Quel type d'approche doit-on adopter pour que l'apprentissage de la validation se fasse conjointement avec l'étude des objets mathématiques prescrits par les programmes ? La recherche que nous avons conduite vise à contribuer à la résolution de ce problème. Nous l'aborderons dans le cadre du développement de la capacité de l'élève à valider les résultats qu'il obtient, en nous basant sur l'analyse et la description de la démarche de validation des résultats obtenus en classe par l'enseignant, lors d'une séquence de résolution d'un problème de construction, à un niveau d'enseignement particulier.

Positionnement du problème abordé par la recherche

La question du développement de la capacité de valider chez des élèves du secondaire a fait l'objet de plusieurs recherches aux orientations variées. Nous pouvons regrouper ces recherches en au moins quatre catégories suivant la conception qu'elles ont de la validation et l'approche utilisée dans le processus de développement de cette validation :

- **Les travaux de Tanguay (2000)** partent du constat selon lequel l'apprentissage de la géométrie au secondaire pose plusieurs difficultés aux élèves, notamment en ce qui touche à l'idée de preuve. Ils traitent la preuve en géométrie suivant les sources de validation mobilisées pour mettre en place une typologie de preuves qui s'applique spécifiquement aux problèmes et exercices de géométrie, de manière à pouvoir les évaluer *a priori* selon des critères plus stables pour un niveau scolaire donné, tout en regardant la validation que ces problèmes sollicitent, ainsi que les types de preuve qu'ils mettent en jeu. Cette catégorie de recherche postule que chaque problème ou exercice de géométrie sollicite une certaine validation qui met en jeu un type de preuve.

- **Les travaux de Balacheff (1982, 1988)** mettent l'accent sur les aspects heuristiques et sociaux de la preuve, traitent la validation dans un contexte de résolution de problèmes. Ils établissent qu'une démonstration est une preuve pour la communauté mathématique, mais pas obligatoirement pour la communauté classe. Ces travaux établissent également un cheminement pour le développement de l'habileté du sujet (l'élève) à produire des validations. Pour l'auteur,

ce développement passe de l'explication à la démonstration, en dépassant le stade de la preuve. Il définit l'explication comme tout discours tenu par une personne visant à rendre intelligible à autrui la vérité d'un énoncé mathématique déjà acquis pour le locuteur (Balacheff, 1988, p. 28). Ce qui fait que, pour lui, la preuve est une explication reconnue et acceptée par une communauté, et la démonstration la seule preuve acceptée par la communauté des mathématiciens. Donc preuve et démonstration sont des processus de validation.

- Les travaux de Fuys, Geddes et Tishler (1984) constituent une synthèse des travaux de Van Hiele (1957, 1959) et traitent la validation selon la problématique des niveaux, en référence au modèle de Van Hiele (1986). Ce modèle décrit comment l'élève peut apprendre à raisonner en géométrie en partant du principe selon lequel, « *on ne peut s'attendre à ce que les étudiants démontrent des théorèmes géométriques tant qu'ils n'ont pas acquis une compréhension approfondie des systèmes de relations entre les idées géométriques* » (Van Hiele, 1959). Pour lui, ces systèmes ne peuvent pas être appris par cœur, mais doivent être développés par familiarité en expérimentant de nombreux exemples et contre-exemples relatifs aux diverses propriétés des figures géométriques, aux relations entre les propriétés et à la façon dont ces propriétés sont ordonnées. Ce modèle, qui décrit comment un élève peut progresser dans cette compréhension, se résume dans l'enseignement des mathématiques de la manière suivante : pour démontrer, il faut d'abord des propriétés et des théorèmes. Pour avoir ces propriétés, il faut d'abord des définitions. Pour avoir des définitions, il faut d'abord des objets à définir, et ces objets sont reconnaissables par leurs formes.

Les travaux d'Arsac et al. (1992) touchent à l'organisation du discours de validation et à son fonctionnement. Ils mettent en évidence la présence d'une organisation symbolique dans la démonstration. Qui peut être progressivement développée, chez l'élève, en l'amenant à s'approprier les règles du débat mathématiques préalablement énoncées. Ainsi, l'apprentissage de la validation passe par la résolution des situations modèles (qu'ils proposent) visant à initier progressivement les élèves à la démonstration. Ces travaux postulent que démontrer consiste, d'un point de vue cognitif, à transformer un énoncé donné au départ (ou plusieurs) en un énoncé-résultat par une ou plusieurs substitutions, conformément à des règles prédéfinies. Cette catégorie de recherches soutient qu'il faut établir une distinction entre une activité de validation et une activité de résolution de problèmes.

Dans le cadre de notre recherche, nous admettons le constat que fait Tanguay (2000), tout en nous éloignant de l'idée selon laquelle chaque problème ou exercice sollicite une certaine validation qui met en jeu un type de preuve. Nous admettons plutôt que chaque problème est résolu au sein d'une institution qui décrit au préalable la forme de validation attendue. Nous admettons également les résultats de Balacheff (1982, 1988), que nous enrichissons avec ceux de Margolinas (1993), Cabassut (2005) et Pedemonte (2002), pour mieux décrire le processus de recherche de validation à un niveau scolaire donné, tout en intégrant l'idée de Fuys *et al.* (1984), selon laquelle pour démontrer il faut d'abord des propriétés et des théorèmes. Pour avoir ces propriétés, il faut d'abord des définitions. Pour avoir des définitions, il faut d'abord des objets à définir et ces objets sont reconnaissables par leurs formes qui, pour nous, demandent des caractérisations liées à des concepts mathématiques. Ainsi, pour développer la démarche de validation chez les élèves, nous allons explorer la relation professeur-élève qui est mise en avant

dans ces travaux. Nous la mettrons en œuvre dans le cadre de l'approche par la problématique de la construction (Ngodebo, 2019), en exploitant l'entrée par les méthodes de résolution, à partir d'une analyse du rapport qui lie l'organisation d'un problème de construction et le développement de la validation. Il s'agira de mettre en évidence l'interaction entre la caractérisation des objets mathématiques et le développement de la distinction de certains éléments, sur lesquels les élèves peuvent se référer pour valider un résultat lors de la phase heuristique de recherche d'un problème de construction, en faisant varier les conditions relatives à l'organisation de la séquence de résolution et/ou au problème mathématique utilisé comme situation d'enseignement. Nous partons du fait que l'institution peut aider les élèves à progresser dans leurs difficultés à valider des résultats sans nécessairement recourir à des préalables relevant de la logique formelle, mais simplement en préconisant une approche qui permet de les initier à la validation, en même temps qu'ils étudient les contenus mathématiques prescrits dans les programmes. Cependant, les recherches énumérées plus haut semblent concevoir la démarche de validation comme un argumentaire qui prend la forme d'un discours élaboré à partir d'un jeu de substitutions d'énoncés, pour la séparer des énoncés mathématiques eux-mêmes (des définitions en particulier), et la présenter comme un processus qui exige des caractérisations des objets. Ainsi, si nous considérons que la caractérisation des objets mathématiques se fait d'une manière uniquement expliquée par les relations professeur-élève en vue d'une utilisation dans des entreprises de développement de la validation, nous pouvons admettre que la manière d'organiser un problème mathématique, au cours d'une séquence de résolution en classe, peut permettre de caractériser les objets que décrit ce problème et de donner à l'enseignant des moyens permettant de développer la capacité de valider chez les élèves. Et donc, nous pouvons ramener l'incapacité des élèves à valider à une étude de la manière dont on peut organiser une séquence de résolution d'un problème mathématique pour développer des compétences liées à la validation chez les élèves de l'ordre du secondaire. Ainsi, nous rejoignons la démarche d'Arsac *et al.* (1992) qui consiste, dans le développement de la capacité de valider chez les élèves, à se fixer un but et à se donner des moyens pour y parvenir. Dans notre recherche, le but visé est de « développer de la démarche de validation, chez les élèves ». Un moyen pour y parvenir est « la manière d'organiser la résolution d'un problème de construction ».

3. Des motivations à l'origine de cet axe de recherche

Notre motivation à étudier la manière dont on peut organiser un problème mathématique pour développer la capacité de valider des élèves en nous appuyant sur les problèmes de construction et en exploitant l'entrée par les méthodes de résolution, est liée à deux considérations :

- **Premièrement, notre connaissance des bienfaits des problèmes de construction dans l'apprentissage de la géométrie.** En effet, l'Inspection Des Sciences (au Cameroun) relève lors d'un séminaire⁴ de formation des enseignants que : « *La collection CIAM propose un enseignement de la géométrie basé sur des instruments traditionnels de ce champ des mathématiques (règle, compas, équerre, rapporteur) qui*

⁴ Le séminaire avait pour but de vulgariser et d'expliquer la nouvelle approche (Approche Par Objectifs : APO) et les programmes issus de la réforme de 1992, qui introduisaient de nouveaux manuels, la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM).

s'appuie essentiellement sur les problèmes de constructions géométriques » (IGEMINESEC, 1998). Cette approche⁵ n'est pas proposée que dans les manuels camerounais, puisque Celi et Bessot (2002) soulignent, en comparant les manuels français et italiens, que « *dans les manuels français, les constructions géométriques sont présentes partout. Conformément aux prescriptions officielles, des problèmes de construction sont très souvent proposés. Soit pour introduire et/ou réinvestir des connaissances, soit pour des « raisons d'ordre et de soin* » ». (Celi et Bessot, 2002, p.2-5). Ce qui signifie que les problèmes de construction sont des outils de construction des savoirs (ou savoir-faire) mathématiques dans bon nombre de systèmes d'enseignement de mathématiques. À ce titre, ils jouent un rôle et occupent une place capitale dans l'enseignement de la géométrie, comme le remarquent d'ailleurs ces mêmes chercheurs, lors des journées de l'APMEP 2002 : « *Les difficultés que les élèves peuvent rencontrer en géométrie ne sont pas sans relation avec la place et le rôle des constructions géométriques dans l'enseignement et dans la pratique des enseignants en France et à l'étranger* » (Céli et Bessot, 2002, p.3). Ainsi, la problématique de la construction est importante sur le plan didactique. Elle l'est d'autant plus que nos travaux de mémoire de master (Ngodebo, 2019) établissent que les problèmes de construction ont un statut de processus expérimental, et que le produit des constructions qui en découle a un statut de dispositif expérimental. Ce qui signifie que la résolution de cette catégorie de problèmes met en place un processus dans lequel « construire » est en interaction avec d'autres actions, comme proposer de nouvelles activités (formulation), prouver, démontrer, vérifier une hypothèse ou une conjecture, calculer et même valider. Ainsi, nous formulons cette motivation de la manière suivante : sans que nous sachions au départ comment définir « un problème de construction », nous considérons que cette catégorie de problèmes met en place, dans l'enseignement des mathématiques, un processus utile à la construction des savoirs (ou savoir-faire). En ce sens, nous pouvons voir en « la problématique de la construction », un aspect expérimental qui est mis en jeu dans l'activité d'enseignement de la géométrie, où les problèmes de construction constituent des outils. Ainsi, nous pouvons analyser, dans le processus de résolution de cette catégorie de problèmes, comment un enseignant peut développer, chez les élèves la manière d'établir la vérité de la conclusion sur le produit de toutes les constructions élémentaires qu'ils réalisent.

- **Deuxièmement, la différence que nous faisons entre « le traitement » et « la résolution », d'un problème mathématique, en milieu scolaire.** Par rapport à notre contexte, le terme « traitement » est vu sous l'angle de réponse à un problème (ou question) mathématique. Il est la solution que le sujet (enseignant ou élève) apporte à une question qui lui est posée en mathématique, en rapport avec ce qui a été enseigné en classe. Nous employons le terme « résolution » en lieu et place de celui de « traitement » pour désigner la prise en main d'un problème mathématique par un sujet, pour exécuter une procédure sur les objets mathématiques qui sont utilisés dans un

⁵ Nous l'avons désignée dans nos travaux de master (Ngodebo, 2019), par « Approche par la problématique de la construction ». Elle vise à construire les savoirs géométriques avec les élèves à l'aide des problèmes de construction.

espace de travail. La résolution est donc imbriquée à la validation car le discours élaboré au cours de la résolution d'un problème ne sépare pas le processus de résolution de celui de validation, et donc la résolution ne perd pas de vue la validation. Nous nous intéressons, particulièrement, aux situations d'apprentissage de la géométrie qui intègrent dans leur sein la résolution de problèmes de construction, dans l'optique d'atteindre un objectif pédagogique préalablement défini. Dans ce contexte particulier, nous employons le terme « résolution » pour trois raisons essentielles : d'abord parce qu'il met l'accent sur les éléments fonctionnels ou opératoires d'un problème de construction, ensuite parce qu'il permet de mettre en évidence le caractère opérationnel de cette catégorie de problèmes, et enfin parce qu'il se prête à une association avec la procédure. Ainsi, nous formulons cette motivation de la manière suivante : sans que nous ayons identifié et défini une caractéristique organisationnelle au départ, nous considérons une séquence de résolution d'un problème de construction, non pas comme la mise en place du fil d'une procédure mais comme un ensemble de décisions prises à tout moment, qui sont liées à des évaluations faites sur des phases de la caractéristique organisationnelle mise en œuvre dans lesquelles on se trouve au cours de la résolution. En ce sens, nous pouvons voir dans la résolution une organisation en des sous-tâches liées, soit à la séquence de résolution, soit au problème de construction, permettant d'amener progressivement les élèves à distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent se référer pour valider un résultat qu'ils obtiennent. Et donc, à développer leur capacité à valider.

4. Les objectifs de la recherche

Par rapport au contexte de la recherche et aux travaux énumérés plus haut, notre problématique se situe en amont, c'est-à-dire dans une approche globale. Ce qui nous intéresse, c'est la transmission du savoir-faire « démarche de validation ». En particulier, le développement de la capacité de valider, chez les élèves, au cours de la résolution d'un problème de construction. Nous tentons de répondre aux questions suivantes :

Questions de départ :

- Comment amener les élèves à valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent, en l'absence d'un cours préalable sur la logique formelle ?
- La manière d'organiser la résolution d'un problème mathématique, à un niveau d'enseignement donné, peut-elle favoriser le développement de la capacité de valider, chez les élèves de l'ordre du secondaire d'enseignement ?

Ainsi, notre travail n'est pas centré sur une problématique d'apprentissage de savoirs notionnels mais sur l'apprentissage du savoir-faire « démarche de validation ». Par conséquent :

- si nous partons du fait que, d'une part, le modèle de l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) propose, à travers le travail de validation, un cadre permettant de décrire la nature et la forme du travail mathématique produit, et que d'autre part, les Paradigmes Géométriques (Houdement et Kuzniak, 1999) donnent un statut à la validation, dans l'enseignement des mathématiques, au secondaire,

- si nous ajoutons à cela le fait que, les Procédés de construction (Chevallard et Jullien, 1992) fixent les modalités d'entrée dans la résolution d'un problème de construction et les conditions de réalisation effective de la construction de l'objet que décrit ce problème, nous pouvons adopter une approche semi-intégrative, fondée sur des apports coordonnés de ces trois théories didactiques. Cette approche nous apporte la notion de « forme d'organisation du travail mathématique » et nous donne un cadre pour traiter nos questions de recherche. Ainsi, nous faisons l'hypothèse fondamentale suivante :

Hypothèse fondamentale de travail :

La démarche de validation est un savoir-faire qui ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution d'une tâche issue d'une catégorie de problèmes mathématiques donnée. À ce titre, l'institution peut aider les élèves à progresser, sans nécessairement recourir à des préalables relevant de la logique formelle, mais simplement en préconisant une approche permettant de les initier à la validation, en même temps qu'ils étudient les contenus mathématiques prescrits dans les programmes. Nous suggérons l'approche par la résolution de problèmes dans laquelle la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique » peut être mise en œuvre. Car la manière d'organiser la résolution d'un problème mathématique donné, à travers la caractérisation des objets que décrit ce problème, peut mettre en évidence une démarche de validation et fournir des moyens permettant de développer la capacité de valider, chez les élèves en classes de mathématiques.

Les objectifs de la recherche :

Partant de l'hypothèse fondamentale précédente, l'objectif global est de mettre à l'épreuve des faits l'idée selon laquelle la manière d'organiser la résolution d'un problème mathématique donné, à travers la caractérisation des objets que décrit ce problème, met en évidence une démarche de validation et fournit des moyens permettant de développer la capacité de valider, chez les élèves en classe de mathématiques. Cela revient à déterminer des conditions épistémologiques et didactiques favorables au développement de la capacité des élèves à valider, ainsi que leur mise en pratique de la démarche de validation. Par conséquent, en plus d'élaborer un modèle de forme d'organisation du travail mathématique permettant de développer la validation chez les élèves, nous chercherons à montrer que le modèle élaboré contribue à la résolution du problème d'incapacité des élèves à valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent, causé par la sortie du cours sur la logique formelle des programmes d'enseignement des mathématiques, au Cameroun. Le modèle théorique que nous proposerons sera, par la suite, testé expérimentalement sur des enseignants et des élèves à l'aide d'une situation liée aux transformations du plan, que nous avons élaborée. Ce qui nous permettra d'illustrer l'apport de ce modèle à l'enseignement et à l'apprentissage de la validation.

5. L'organisation générale de la thèse

Ce travail se compose de trois parties, qui décrivent le cheminement que nous avons suivi pour répondre à nos questions de départ relatives à la manière dont on peut organiser un problème mathématique pour développer la capacité de valider chez les élèves.

- **La première partie**, intitulée **des questions générales sur les transformations du plan, la résolution des problèmes de construction et la validation mathématique au secondaire**, propose une étude épistémologique, didactique et institutionnelle sur les transformations du plan, la résolution des problèmes de construction et la validation, au secondaire. Elle est menée dans les chapitres 1, 2 et 3. Et, a pour but de récolter les éléments favorisant l'étude portant sur la manière dont on peut organiser un problème de construction, lié aux transformations du plan, pour développer les capacités de valider chez les élèves. Elle aboutit à la caractérisation de la validation attendue dans la résolution des problèmes de construction, en classe de première scientifique. Le chapitre 4 de cette partie élabore une approche théorique semi-intégrative, que nous désignons par **EPP**. Elle est fondée sur des apports coordonnés de trois cadres théoriques, dont un cadre principal : la Théorie des **Espaces de Travail Mathématique (ETM)**, dans laquelle nous distinguons les **Paradigmes Géométriques** et les **Procédés de Construction**. Cette approche, qui rend compte de la manière dont ces deux éléments s'imbriquent dans les ETM idoines pour développer la validation chez les élèves, nous sert de cadre didactique dans lequel nous insérons notre réflexion. Ce qui nous permet de reprendre et de reformuler nos questions de recherches. Ainsi, nous construisons nos hypothèses de recherche, puis nous définissons la méthodologie générale qui va être utilisée pour vérifier ces hypothèses.
- Dans la **deuxième partie**, qui a pour titre **la forme d'organisation du travail mathématique et la démarche de validation, dans les ETM idoines, en classe de première scientifique**, nous conduisons une enquête descriptive et exploratoire sur la pratique du développement de la démarche de validation, en classe de première scientifique, du point de vue des ressources mises à la disposition des élèves et de celui des enseignants. Elle est constituée des chapitres 5 et 6. En effet, nous déterminons la forme d'organisation du travail mathématique disponible dans les ETM idoines potentiels et celle que proposent les ETM idoines effectifs. À travers une étude comparative du travail d'organisation produit dans ces ETM, nous mettons en évidence la forme d'organisation du travail mathématique disponible actuellement dans les ETM idoines, en classe de première scientifique. Dans le chapitre 7, nous décrivons le fonctionnement de cette forme d'organisation identifiée, caractérisons la structure de développement de la démarche de validation qu'elle offre, et puis nous dégageons ses limites dans le processus de développement de la démarche de validation, que nous interprétons comme des faiblesses de ce modèle. Les conclusions de cette enquête indiquent une similitude dans le travail mathématique permettant de réaliser les constructions, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement ces constructions. Toutefois, nous relevons deux limites dans la structure de développement de la démarche de validation adossée à cette forme d'organisation : elle ne prend pas en charge le développement de l'appréhension de la situation et elle se limite à travailler sur la séquence de résolution sans prendre en compte le problème de construction, qui pourtant constitue un élément sur lequel une organisation peut également être effectuée pour définir une démarche de

validation sous-jacente et propre à cette catégorie de problèmes mathématiques en résolution.

- **La troisième partie**, intitulée **proposition d'un modèle de forme d'organisation du travail mathématique pour développer la démarche de validation chez les élèves, dans les ETM idoines, en classe de première scientifique**, a pour objectif, d'une part d'élaborer un modèle de forme d'organisation du travail mathématique susceptible de mieux développer la capacité de valider chez les élèves, et d'autre part d'illustrer son apport dans l'enseignement et l'apprentissage de la validation. En nous appuyant sur le principe de raffinement, que nous empruntons à l'industrie pétrolière, et sur la conception de l'apprentissage en milieu scolaire telle qu'explicitée par Arzac et al. (1992), nous définissons un principe nouveau : le raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique. Ce principe nous donne une manière d'organiser la résolution d'un problème mathématique, dans un ETM idoine. À partir des limites de la forme d'organisation du travail mathématique identifiée dans les ETM idoines, en classe de première scientifique, nous élaborons un modèle à deux articulations (A-A-C) et (P-A-P) noté (A-A-C / P-A-P) : (*Appréhension-Analyse-Conception de la solution / Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions*) qui peut s'étendre à la résolution de tout problème mathématique en prenant la forme : (A-A-C / \mathcal{B}) où \mathcal{B} représente une organisation sur le problème mathématique en résolution : la première organise la séquence de résolution, et la seconde le problème mathématique servant de situation d'enseignement de la validation. Le traitement expérimental, proposé par la suite pour tester ce modèle, illustre le rôle que jouent les dimensions de l'ETM, les paradigmes géométriques et les procédés de construction dans le raffinement de la caractérisation des objets mathématiques que décrit le problème, et dans le développement de la capacité des élèves à valider les résultats qu'ils obtiennent.

Notre recherche s'achève par des précisions sur le rôle que jouent les différents aspects de notre cadre théorique dans le raffinement de la démarche de validation, et leur influence sur le travail mathématique d'organisation que génère la structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle que nous avons élaboré. Par ailleurs, elle établit que la manière d'organiser la résolution d'un problème mathématique particulier, à travers la caractérisation des objets que décrit ce problème, raffine, dans les ETM idoines, une démarche de validation et fournit des moyens permettant de développer la capacité de valider des élèves dans les classes de mathématiques.

PARTIE 1

**DES QUESTIONS GÉNÉRALES SUR LES TRANSFORMATIONS DU PLAN,
LA RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE CONSTRUCTION ET LA
VALIDATION MATHÉMATIQUE AU SECONDAIRE**

Introduction de la première partie

Dans cette partie, nous indiquons notre cheminement vers l'étude de la manière dont on peut organiser la résolution d'un problème de construction lié aux transformations du plan pour développer la capacité de valider chez les élèves du secondaire. Pour cela, nous proposons quatre chapitres déterminants, qui nous permettent de centrer notre problématique, de préciser nos questions de recherche et de décrire notre méthodologie générale. Ainsi :

Dans **le chapitre 1**, nous situons les transformations du plan dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun, afin d'identifier le contenu mathématique nécessaire pour notre recherche et de nourrir l'analyse exploratoire des questions liées aux problèmes de construction sur les transformations du plan. Pour cela, nous effectuons une étude épistémologique qui donne des éclairages sur la notion de transformation du plan et ses fondements. Puis, nous faisons une lecture succincte des programmes d'enseignement de mathématiques du secondaire. Cette étude nous permet de graduer l'enseignement de cette notion par niveau scolaire et de mettre en évidence les différentes approches par lesquelles cette notion est abordée, afin de dégager celles qui sont présentes en classe de Première Scientifique.

Dans **le chapitre 2**, nous explorons les questions liées aux problèmes de construction et à leur résolution. Précisément, nous définissons « un problème de construction » et identifions quelques méthodes de résolution. Puis, nous recherchons « la forme des données » d'un problème de construction dans la formulation des énoncés des problèmes liés aux transformations du plan, les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction et le genre de tâche qui génère une activité de construction, en classe de Première Scientifique. Ce chapitre constitue pour nous une entrée dans la réflexion sur la validation dans la problématique de la construction et sur le choix des situations qui seront soumises à l'expérimentation.

Dans **le chapitre 3**, nous essayons de caractériser la validation dans la résolution des problèmes de construction. Pour cela, nous conduisons d'abord une enquête didactique à travers de nombreux travaux portant sur la question de la validation dans l'enseignement des mathématiques, ceci pour : préciser ce que nous entendons par validation, différencier les contextes de validation, et identifier les différentes formes de validation en fonction du type de raisonnement et de la qualité du discours mise en place. Ensuite, nous décrivons le sens que prend la validation dans la résolution des problèmes de construction en classe de Première Scientifique, à travers les textes officiels. Ce chapitre nous donne un outil méthodologique pour analyser la validation dans la problématique de la construction.

Dans **le chapitre 4**, nous élaborons une approche théorique, que nous qualifions de semi-intégrative car elle est constituée d'une organisation fondée sur les apports coordonnés de trois cadres théoriques, dont un cadre principal : la Théorie des **E**spaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011), autour duquel nous articulons la Théorie des **P**aradigmes Géométriques (Houdement et Kuzniak, 1999) et la Théorie des **P**rocédés de Construction (Chevallard et Julien, 1991), pour obtenir le cadre que nous notons (**EPP**). C'est dans ce cadre que nous insérons notre réflexion sur la manière dont on peut organiser la résolution d'un problème de construction pour développer la validation chez les élèves. Ce chapitre nous permet de reprendre et de formuler nos questions de recherche.

Chapitre 1

Les transformations du plan dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun

La notion de transformations du plan constitue l'outil mathématique sur lequel s'appuie notre recherche. Afin de l'utiliser dans la formulation des problèmes de construction qui seront traités dans le cadre de notre travail, nous avons jugé utile de faire une sorte de bilan en ce qui concerne l'enseignement de cet objet mathématique. La question est de savoir :

Comment est abordée la notion de transformation du plan, quelles sont ses utilisations et comment évolue-t-elle dans l'enseignement des mathématiques, au secondaire ?

Répondre à cette question consiste, d'une part, à identifier les différents niveaux scolaires dans lesquels cette notion est abordée et à relever les recommandations des programmes, en ce qui concerne sa transposition didactique (Chevallard, 1998) ; d'autre part, à observer l'évolution de son enseignement tout au long du secondaire, afin de repérer les différentes approches qui sont utilisées et de les graduer de manière à dégager celles qui sont spécifiques à la classe de Première Scientifique. Pour cela, nous revenons sur quelques notions et définitions fondamentales liées à cette notion, utilisées dans l'enseignement des mathématiques au secondaire en nous intéressant, d'abord aux éléments théoriques qui sont susceptibles d'intervenir dans les situations qui seront mises en jeu dans notre recherche, puis en procédant à une analyse succincte des programmes des sous-cycles d'observation et d'orientation, et à ceux des classes de Seconde, Première et Terminale. Notre cadre de référence est constitué

- des travaux en mathématiques : Euclide (Traduction de F. Peyrard, 1966 et Traduction de B. Vitrac, 1990), Klein (1972), Descartes (1933), Bombeli (1572), Lelong-Ferrand (1942),
- des travaux en histoire et didactique de mathématiques : Perrin (2000, 2007 et 2017), Perrin-Glorian (2014), Robert (2003 et 2012), Barbin (1989) et Parzys (1989)
- des ressources disponibles dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun : Manuel (CIAM, 1992 et 1999), les programmes de la sixième en terminale (1992, 2014, 2018 et 2020).

1.1. Quelques notions et définitions fondamentales liées aux transformations du plan dans l'enseignement des mathématiques au secondaire

Contrairement à beaucoup d'autres domaines de mathématiques enseignés au secondaire, comme par exemple les probabilités, la géométrie a la particularité de bénéficier d'un socle théorique stable et partagé, centré sur les *Éléments de Géométrie*⁶, puisque l'arrière-plan mathématique de toute géométrie enseignée au secondaire est constitué d'un système axiomatique construit totalement (ou en partie) à partir des *Éléments de Géométrie* d'Euclide. Comme le montre Lelong-Ferrand (1942), dans ses travaux où elle parle des géométries non

⁶ Les *Éléments de géométrie d'Euclide* constituent de nos jours un document de référence pour les recherches en géométrie, en histoire de la géométrie et en didactique de la géométrie. C'est à partir de ce document que sont nées les idées ayant abouti à la création des diverses géométries que nous connaissons aujourd'hui.

euclidiennes (hyperbolique et elliptique), en quantifiant avec humour leur rapport à la géométrie euclidienne :

« Après tout, on garde quatre axiomes sur cinq, alors la géométrie hyperbolique reste d'une certaine façon à 80% euclidienne. Et pour le cas de la géométrie elliptique disons que l'on enlève un axiome de plus, celui de l'infinitude (métrique) des droites, la géométrie elliptique n'est plus qu'à 60% euclidienne » (Lelong-Ferrand, 1942, p. 109).

Compte tenu du fait que Robert (2003) relève, dans ses niveaux de conceptualisation, que :

« Il est important de savoir, lors de l'enseignement de la géométrie, ce qu'on choisit comme axiomes, ce qu'on choisit comme définitions, ce qu'on peut démontrer et ce qu'on démontre effectivement. Et suivant les choix que l'on fait, certains domaines apparaîtront comme des propriétés ou comme des définitions. » (Robert, 2003),

Nous avons trouvé nécessaire de présenter les bases élémentaires des transformations du plan sur lesquelles s'appuiera notre travail. Ceci, dans le but de clarifier certaines définitions, propriétés et théorèmes que nous allons utiliser, afin d'éviter certaines ambiguïtés.

1.1.1. Les éléments de géométrie affine euclidienne

Dans toute la suite, E désignera un espace vectoriel sur un corps \mathbb{k} . Nous supposons que certaines notions relatives aux espaces vectoriels sont connues. Notamment, les notions de sous-espace vectoriel, famille libre ou génératrice, base, application linéaire et bilinéaire, espace vectoriel euclidien et application linéaire classique.

Un espace affine :

Un espace affine \mathcal{E} de direction E est la donnée d'une application φ qui, à tout couple (A, B) de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, associe un vecteur $\varphi(A, B)$ noté AB de sorte que :

- $\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, AB + BC = AC$.
- $\forall M \in \mathcal{E}, \forall U \in E, \exists ! N \in \mathcal{E} / U = MN$.

L'espace E est appelé espace directeur et les éléments de \mathcal{E} sont appelés des points.

Un espace euclidien :

Un espace affine euclidien (ou tout simplement espace euclidien), est un espace affine \mathcal{E} dont la direction E est un espace vectoriel euclidien, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire.

Un produit scalaire euclidien :

Un produit scalaire euclidien sur un espace vectoriel réel (de corps \mathbb{R}) de dimension finie est une application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui, à tout $(U, V) \in E \times E$, associe un scalaire $\phi(U, V)$, noté $U.V$, et qui est :

- bilinéaire (linéaire en U et linéaire en V),
- symétrique ($\phi(U, V) = \phi(V, U)$ pour tous vecteurs U et V de E),
- définie positive, c'est-à-dire, $\forall U \in E, \phi(U, U) \geq 0$ et
 $\phi(U, U) = 0 \Leftrightarrow U = 0$.

Ce produit scalaire permet de définir une distance sur E , appelée norme euclidienne.

La norme euclidienne

Pour tout vecteur U de E , on désigne par $\|U\|$ la racine carrée du carré scalaire de U , c'est-à-

dire $\sqrt{U \cdot U}$. La norme euclidienne sur E est l'application $U \mapsto \|U\|$, qui possède les trois propriétés suivantes :

- $\forall U \in E, \|U\| = 0 \Leftrightarrow U = 0$
- $\forall (\lambda, U) \in \mathbb{R} \times E, \|\lambda U\| = |\lambda| \cdot \|U\|$
- $\forall (U, V) \in E^2, \|U + V\| \leq \|U\| + \|V\|$.

Si M et N sont deux points de E , la longueur du segment $[MN]$, notée MN , est la norme euclidienne du vecteur MN , c'est-à-dire, en reprenant les notations précédentes, $\|MN\|$.

La dimension de l'espace affine est la dimension de son espace vectoriel. Dans cette recherche nous allons travailler dans un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

1.1.2. Les notions de base sur les transformations du plan

Les transformations du plan s'inscrivent dans le domaine de la géométrie des transformations qui utilise *la transformation*⁷ comme fondement théorique. Perrin (2000) et Barbin (1989) relèvent que cette théorie arrive dans l'enseignement des mathématiques au secondaire dès la période des mathématiques modernes (1960-1970), en référence au système euclidien dans le programme d'Erlangen⁸ (Klein, 1972). Cependant, dans l'enseignement des mathématiques, la géométrie des transformations correspond à une étude géométrique des objets, centrée sur les groupes de transformations géométriques ; et, à leurs propriétés, indépendamment des figures, considérées comme invariantes. Dans la plupart des programmes d'enseignement de la géométrie, on retrouve les transformations du plan dans la partie de la géométrie intitulée « géométrie du plan ». Pour Perrin (2017), l'étude de la géométrie du plan repose, en grande partie, sur l'étude des transformations. Et donc, la notion de « transformation » est un concept central dans l'étude des transformations du plan.

1.1.3. La notion de transformation du plan

Une image (photo, dessin, figure) peut être modifiée selon ce qu'on désire obtenir de celle-ci. Ainsi, nous pouvons effectuer, sur cette image, des agrandissements ou des réductions (Andjiga, 2021). Une réflexion, une rotation ou une translation d'une figure permet de modifier les dimensions de cette figure ou bien son orientation. La figure subit ainsi, des transformations géométriques. Dans ce processus, il s'agit de considérer une partie d'un ensemble géométrique dans lui-même et d'établir une action d'un groupe⁹ (Perrin, 2017). C'est-à-dire, pour chaque élément du groupe, se donner une permutation de l'ensemble de telle manière que toutes ces bijections se composent de façon compatible avec la loi du groupe. Ce qui permet d'établir des correspondances entre les figures et d'observer les configurations nouvelles que l'on obtient, ainsi que les différents changements que peuvent connaître les objets dans le plan. On définit ainsi des applications. Et donc, la notion d'application est également présente dans l'enseignement des transformations du plan. Elle est utilisée en *analyse*¹⁰ pour définir une

⁷ La transformation est à prendre dans le sens d'une théorie axée sur les notions d'action de groupe et d'invariant.

⁸ Le programme d'Erlangen ramène l'étude des différentes géométries à celle de leurs groupes de symétrie respectifs.

⁹ Une action d'un groupe sur un ensemble désigne une loi de composition externe sur l'ensemble, vérifiant des conditions supplémentaires.

¹⁰ L'analyse est un domaine de mathématiques comme la géométrie, les probabilités, l'algèbre...etc.

fonction. La notion d'application du plan constitue l'un des fondements de la notion de transformations du plan et se confond parfois avec le concept de transformation.

1.1.3.1. La notion d'application affine du plan

Une application

Soient E et F deux ensembles. On désigne par f la correspondance (ou relation) entre les éléments de E et ceux de F . f est une application, si à tout élément $x \in E$, f associe un élément et un seul $y \in F$. Dans ce cas on écrit : $f : E \rightarrow F$ ou $f : x \mapsto f(x)$, ou encore $f : E \rightarrow F, x \mapsto y = f(x)$.

L'ensemble E est appelé ensemble de départ de f et F l'ensemble d'arrivée de f .

$f(x)$ est appelé l'image de x par f , et x l'antécédent de $y = f(x)$ par f .

Une application f donnée peut être injective, surjective ou bijective. Nous ne développerons pas ce point ici.

Une application affine

Revenons en géométrie, désignons par \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines de directions respectives E et F (où E et F sont deux espaces vectoriels sur un corps \mathbb{k}), et considérons une application

$$f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}.$$

f est une application affine si et seulement s'il existe une application linéaire $\phi : E \rightarrow F$ telle que : $\forall M \in \mathcal{E}, \forall N \in \mathcal{E}, \overrightarrow{f(M)f(N)} = \phi(\overrightarrow{MN})$. L'application linéaire ϕ est unique et notée \vec{f} .

Rappelons qu'une application $g : E \rightarrow F$ est dite \mathbb{k} -linéaire si elle vérifie : $\forall (X, Y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{k}, g(X + Y) = g(X) + g(Y)$ et $g(\lambda X) = \lambda g(X)$.

Ainsi, si nous prenons $O \in \mathcal{E}$, un point fixé, alors $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine si et seulement si l'application $\phi : E \rightarrow F$, définie par $\phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ est linéaire.

Par ailleurs, si nous prenons $O \in \mathcal{E}, O' \in \mathcal{F}$ deux points fixés et $\phi : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors l'application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ définie par : $f(M) = O' + \phi(\overrightarrow{OM})$ est affine. Dans ce cas f est l'unique application affine d'application linéaire associée ϕ qui transforme O en O' .

Une application affine du plan

Reprenons l'application f définie précédemment. Et désignons par (\mathcal{P}) le plan affine euclidien. Considérons également que les ensembles \mathcal{E} et \mathcal{F} sont tels que : par $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{P}$. Et prenons M et M' deux points du plan (\mathcal{P}) . Alors, f est dans ces conditions une application affine du plan que l'on note :

$$f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' = f(M).$$

Remarque :

Une application affine envoie les droites, les plans et les espaces sur les droites, les plans et les espaces, tout en préservant la notion de parallélisme. Cela met en jeu la notion de transformation

qu'Euclide (Traduction Vitrac, 1990) appelle mouvement intemporel : « *qui ne fait pas intervenir le temps* » (Parzys, 2018), dans la démonstration des trois cas d'égalités de triangles.

1.1.3.2. La notion de transformation du plan

Considérons l'application affine f définie précédemment. L'application f est une transformation du plan, si f est une bijection du plan (\mathcal{P}) vers lui-même. Cela revient à dire que, tout point M' du plan (\mathcal{P}), est l'image d'un unique point M par f . Ou bien que, tout point M' du plan (\mathcal{P}) a un, et un seul antécédent par f .

Ainsi, une transformation géométrique est une bijection d'une partie d'un ensemble géométrique dans lui-même. Dans la pratique, une transformation géométrique consiste à déplacer une figure initiale ou à en changer les dimensions pour obtenir une figure image. Dans la géométrie des transformations, il existe des transformations géométriques isométriques et des transformations géométriques non isométriques (nous y reviendrons plus loin).

Exemple :

- Les isométries, les homothéties (de rapport différent de 0), les similitudes sont des transformations géométriques du plan.
- Les translations, les rotations, les symétries centrales et orthogonales, et les symétries glissées sont des transformations isométriques.
- Les homothéties et les similitudes (de rapport différent de -1 et 1) sont des transformations non isométriques.

Remarque :

Telles que définies précédemment, les transformations géométriques du plan sont des applications bijectives. On peut donc définir les transformations réciproques du plan qui leur sont associées, et procéder à des compositions de ces transformations.

1.1.3.3. La notion de transformation réciproque du plan

De manière générale, on appelle transformation réciproque de f , la transformation qui à tout point M du plan (\mathcal{P}) associe cet unique antécédent. Elle est notée f^{-1} .

On a : $f^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M' \mapsto M = f^{-1}(M').$$

1.1.3.4. La notion de composée de deux transformations du plan

Soient f et g deux transformations du plan définies de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl} f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} & \text{et} & g : \rightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' = f(M) & & M \mapsto M' = g(M) \end{array}$$

La composée de g par f est l'application ($f \circ g$) définie par :

$$\begin{array}{l} f \circ g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' = f[g(M)] \end{array}$$

Remarque :

- Si f , g et h sont trois transformations du plan alors, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- En général $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

1.1.4. La notion de point invariant par une transformation du plan

Image d'une figure par une transformation du plan

L'image d'une figure par une transformation du plan f est l'ensemble des images de tous les points de cette figure par f . C'est-à-dire, l'ensemble de tous les points de la forme $f(M)$ lorsque M décrit F : $f(F) = \{f(M), M \in F\}$. L'ensemble de tous les points images par f est noté $\text{Im}(f)$.

Points invariants par une transformation du plan

Un point M du plan (\mathcal{P}) est dit invariant (ou fixe) par une transformation f , si et seulement si $f(M) = M$. Ainsi, si nous désignons par F un ensemble de points quelconque (il peut s'agir d'une droite, un cercle, un carré, un triangle, ...etc.). Cet ensemble est dit invariant par la transformation f si et seulement si, pour tout point M de F , son image $M' = f(M)$ par f appartient aussi à F . Et donc, F est globalement invariant par la transformation f si et seulement si on a $f(F) = F$. L'ensemble des points invariants par f est noté $\text{Inv}(f)$.

1.2. Les transformations isométriques du plan

L'étude des isométries constitue une partie essentielle de la géométrie élémentaire. Cependant, il existe plusieurs façons d'aborder cette notion dont l'étude s'inscrit, au secondaire, dans la géométrie du plan. Cette étude consiste en l'analyse des configurations et des différentes transformations que peuvent connaître les objets dans le plan. Dans ce paragraphe, nous allons définir une isométrie, la caractériser à travers certaines propriétés et puis dégager certains de ses aspects (sur le plan fondamental) susceptibles de constituer un enjeu dans notre travail. Notamment la composition, la décomposition et la classification des isométries. Nous allons particulièrement nous intéresser à la composée de deux isométries du plan. Certaines de ces composées pouvant donner une homothétie ou une similitude particulière, nous allons brièvement présenter une homothétie (transformation en général non isométrique) et puis nous analyserons, d'une part, la composée d'une isométrie et d'une homothétie, et d'autre part, la composée de deux homothéties. Nous donnerons également quelques propriétés fondamentales sur les similitudes du plan considérées comme des composées de deux transformations du plan.

1.2.1. La notion d'isométrie du plan

Définition d'une isométrie du plan

Une isométrie du plan est une application du plan dans le plan qui conserve la distance. Ainsi, si nous prenons, M , N , M' et N' quatre points du plan (\mathcal{P}) et $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une application affine telle que : $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, alors f est une isométrie affine si et seulement si, $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme du plan.

Exemple et contre-exemple :

- Les translations, les symétries centrales et orthogonales, les rotations, et les symétries glissées sont des isométries du plan.
- Les homothéties de rapports différents de 1 et -1 ne sont pas des isométries.

1.2.2. Les propriétés fondamentales d'une isométrie du plan

Les propriétés d'une isométrie du plan

- Toute isométrie du plan f est une transformation du plan, c'est-à-dire une bijection du plan dans le plan.
- La réciproque d'une isométrie f est une isométrie du plan notée f^{-1} .

Image de figures simples par une isométrie

Toute isométrie f transforme :

- Une droite (D) en une droite (D'), un segment [MN] en un segment [$f(M)f(N)$], une demi-droite [MN) en une demi-droite [$f(M)f(N)$).
- Un point I milieu d'un segment [MN] en un point $f(I)$ milieu du segment [$f(M)f(N)$].
- Un cercle (C) de centre O et de rayon r en un cercle (C') de centre $f(O)$ et de même rayon.
- Dans le triangle MNP, l'angle \widehat{MPN} en angle $f(M)\widehat{f(P)}f(N)$ tel que :
 $\widehat{MPN} = f(M)\widehat{f(P)}f(N)$.

Les propriétés de conservation

Toute isométrie f conserve :

- Le produit scalaire : si $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.
- Le barycentre : si $G = \text{bar} \{ (A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \}$ alors $f(G) = \text{bar} \{ (f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \}$.
- Le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques, les aires des figures fermées.

De ces propriétés, il découle qu'une transformation isométrique est une transformation géométrique qui conserve les mesures des angles non orientés et les longueurs. Ainsi, pour une transformation isométrique donnée f , une figure et son image ont les mêmes formes et les mêmes dimensions. On dit qu'elles sont superposables (ou égales), éventuellement après retournement (isométries négatives). Cette définition d'une transformation isométrique établit des rapprochements entre chacune des transformations isométriques. Cependant, chaque isométrie présente des particularités. Nous avons présenté en ANNEXE N°1 les caractérisations de certaines transformations isométriques élémentaires.

1.3. Les transformations non isométriques du plan

Dans ce paragraphe nous n'allons pas nous intéresser à toutes les transformations non isométriques. Nous nous intéresserons uniquement aux homothéties de rapport différent de 0, -1 et 1.

1.3.1. La définition d'une homothétie du plan

Une homothétie de centre O est une transformation géométrique du plan qui multiplie la distance par un réel positif $|k|$ appelé rapport de l'homothétie telle que : $h(O) = O$. Ainsi, si nous prenons, M, N, M' et N' des points du plan (\mathcal{P}) ; k un nombre réel différent de 0, -1 et de 1 ; et $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une application affine telle que : $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$; alors, f est une homothétie affine si et seulement si, $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = |k| \|\overrightarrow{MN}\|$, et $f(O) = O$ où $\|\cdot\|$ est la norme du plan.

Remarque :

Pour $|k| \neq 1$ les homothéties sont des transformations géométriques non isométriques, car elles ne conservent pas les distances.

1.3.2. Les propriétés d'une homothétie du plan

Soit $h = h_{(O,k)}$ une homothétie de centre O et de rapport k non nul. M, N, N' et M' des points du plan. Alors : $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$.

- Les points O, M et $h(M)$ sont alignés.
- Si on a : $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$.
- L'homothétie h est une transformation du plan et sa réciproque est une homothétie notée h^{-1} de même centre et de rapport k^{-1} .
- L'homothétie h conserve : l'alignement, le milieu, le parallélisme, l'orthogonalité, le contact, le barycentre et les angles orientés.
- L'homothétie h multiplie les aires par k^2 .

1.4. L'enseignement des transformations du plan, au secondaire

L'objectif visé dans ce paragraphe est de mettre en évidence les différents niveaux scolaires dans lesquels intervient chacun des éléments théoriques que nous avons dégagés, et de relever les recommandations institutionnelles liées à leur transposition didactique (Chevallard, 1998). Puis d'identifier les approches qui sont utilisées à chaque niveau, dans la formulation des énoncés mathématiques et des problèmes liés à cette notion. Cela nous permettra de nourrir notre regard sur l'étude des questions liées aux « problèmes de construction » sur les transformations du plan qui vont suivre, et nous guidera dans la formulation, et dans le choix des situations qui feront l'objet de nos expérimentations dans la partie expérimentale de ce travail. Pour conduire cette étude, nous avons procédé à une analyse succincte des programmes d'enseignement de mathématiques, actuellement en vigueur au Cameroun, de la classe de sixième à la classe de Terminale. Il s'agit plus précisément des programmes issus de la dernière réforme de l'enseignement secondaire (MINESEC, 2014, 2018, 2020). Nous avons effectué cette analyse suivant l'organisation de l'enseignement secondaire, qui structure le sous-système francophone en deux cycles, dont le premier comporte deux sous-cycles : le sous-cycle d'observation constitué des classes de 6^e et 5^e (l'âge des élèves, 11 et 12 ans), le sous-cycle d'orientation composé des classes de 4^e et 3^e (l'âge des élèves, entre 13 et 15 ans) et le lycée qui comporte les classes de Seconde, Première et Terminale (l'âge des élèves, entre 16 et 18 ans).

1.4.1. L'évolution de la notion de transformations du plan dans les programmes de mathématiques actuels

Les nouveaux programmes de l'enseignement secondaire visent l'utilisation de l'approche par les compétences (APC), avec une entrée par des situations de vie. Cette entrée est obligatoire au collège et optionnelle au lycée. L'enseignement des mathématiques, au Cameroun, est centré sur l'apprentissage de nombreux savoirs : savoirs fondamentaux, savoir-être, savoir-faire, savoir-dire, ...etc. Dans cette recherche, nous allons nous intéresser au savoir-faire « démarche de validation ». Cet enseignement se fait essentiellement dans l'environnement papier-crayon. En effet, l'utilisation des outils numériques (ordinateurs, logiciels) reste en construction et constitue une perspective puisque ces outils restent très peu exploités, nonobstant le fait qu'ils soient visés par les nouveaux programmes.

Dans ces programmes, les objets d'enseignements sont organisés en modules. Les transformations du plan se situent dans le module intitulé « *Configurations et transformations élémentaires du plan* » (programmes du lycée et collège, 2014, 2018, 2020). Ce module s'inscrit dans le domaine de la géométrie du plan qui occupe, dans ces programmes (collège et lycée, 2018 et 2020), une place privilégiée.

« La géométrie plane occupe une place privilégiée dans le programme de mathématiques, de par les compétences qu'elle vise à développer. Sa contribution au développement de la technologie, de l'art, de la chimie, n'est plus à démontrer ; enfin les innombrables symétries que la nature offre dans la biologie et la physiologie végétale ou animale, font de ce module un des maillons essentiels dans plus d'un domaine d'apprentissage. » (MINESEC, 2020).

Avec Njomgang (2013) qui relève que : *« jusqu'en 1991, la notion de transformations du plan n'est pas abordée dans tous les programmes du secondaire, car la géométrie est totalement absente dans certains de ces programmes, particulièrement au début du collège »* (Njomgang, 2013), on peut constater que les transformations du plan n'étaient pas enseignées au collège. Mais, avec l'harmonisation des programmes de mathématiques (IRMA, 1992), issue des séminaires de IRMA¹¹ (1983, 1985, 1988, 1992) où vingt pays d'Afrique francophone ont adopté une Collection Inter Africaine de manuels de Mathématiques (CIAM) pour le secondaire, les transformations du plan sont devenues des objets mathématiques enseignés dès la classe de sixième. Cet enseignement s'étend tout au long du collège et, au lycée, en seconde, première et terminale, essentiellement dans les séries scientifiques (séries, C, D, E et TI). Notre lecture succincte de ces programmes (collège et lycée) nous amène à constater que les transformations du plan sont abordées de façon graduelle et suivant trois approches : affine, analytique et par les nombres complexes. Ainsi, les points suivants sont progressivement abordés :

¹¹Les séminaires organisés par l'IRMA (Institut de Recherche en Mathématiques d'Afrique) avaient pour but l'harmonisation des programmes de mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'océan Indien. Le dernier séminaire de 1992 a abouti à l'élaboration d'une Collection Inter Africaine de manuels de mathématique pour l'enseignement secondaire, provoquant ainsi des réformes dans les systèmes éducatifs des différents pays membres.

- **Sous-cycle d'observation**

Le programme du sous-cycle d'observation qui a été élaboré en 2014, à la suite de la dernière réforme, met, en arrière-plan mathématique de la géométrie enseignée, l'axiomatique d'Euclide. Ces programmes situent le travail mathématique dans la géométrie pratique (Robert, 2003) ou instrumentée (Perrin-Glorian, 2014). Bien que l'on continue de s'interroger sur ce qu'on voit, leur objectif est de pousser les élèves à utiliser les instruments qui matérialisent les propriétés. Deux transformations du plan sont enseignées : la symétrie centrale et la symétrie orthogonale. Cet enseignement est centré sur la reconnaissance d'une forme (ou d'un objet), d'une relation ou d'une propriété géométrique, transformée à l'aide des instruments. Cependant, les termes « application », « isométrie » et « transformation » ne sont pas du tout employés. Le terme « symétrie » n'est employé que pour indiquer le nom du savoir à enseigner. Les deux leçons portent les titres suivants : « *figures symétriques par rapport à un point* » et « *figures symétriques par rapport à une droite* ». Ceci pour désigner les symétries centrale et orthogonale. Les propriétés de conservation de distances des isométries sont enseignées et exploitées à l'aide des instruments et du mesurage. Puisqu'une propriété n'est vraie, à ce niveau, que lorsqu'on peut la contrôler avec un instrument.

- **Sous-cycle d'orientation**

Dans le sous-cycle d'orientation (programmes, 2018), on reste dans la géométrie euclidienne. Cependant, on constate une rupture avec la géométrie pratiquée au cycle d'observation. Bien que le travail mathématique puisse commencer par l'exploitation des instruments, les programmes amènent les élèves à travailler dans la géométrie déductive. Ici, l'on interroge ce qu'on établit ou bien ce qu'on démontre. La notion d'application est explicitée ; la symétrie orthogonale, la symétrie centrale et la translation sont définies à partir de leurs propriétés respectives. Ces transformations sont vues comme des applications du plan. En classe de Quatrième, l'accent est mis sur l'étude de la translation. Le but est de la reconnaître et d'utiliser ses propriétés pour justifier le parallélisme, l'orthogonalité, une égalité de distance ou une égalité angulaire. Dans la classe de Troisième, on étudie les homothéties. On s'intéresse à leurs éléments caractéristiques, en se limitant dans les applications, à des valeurs simples et positives, pour ce qui est du rapport. Le but est de dégager les propriétés d'agrandissement et de réduction pour commencer à marquer la différence avec une translation, une symétrie centrale et une symétrie orthogonale. Les termes « isométrie » et « transformation » ne sont pas employés dans ces programmes.

- **Au lycée**

Les programmes de lycée (2018, 2020) actuels gardent l'axiomatique d'Euclide en arrière-plan mathématique de la géométrie enseignée. Cette géométrie est essentiellement déductive. Les objets sont définis à travers leurs propriétés, bien qu'on puisse les dessiner pour les visualiser et faire des conjectures. N'est vrai ici que ce que l'on démontre.

En Seconde, la leçon est intitulée « transformation du plan ». Le terme « isométrie » n'est toujours pas utilisé à ce niveau (programmes de 2018). On réinvestit les propriétés des symétries centrales et orthogonales, des translations, ainsi que celles des homothéties qui sont présentées comme des transformations du plan, sans que la notion de « transformation » ne soit

explicitement définie. On introduit la rotation du plan qui est définie à partir de ses propriétés caractéristiques (conservation de distances et d'angles). L'accent est mis sur les éléments caractéristiques (angle et centre) de cette transformation. L'étude vise à amener les élèves à mobiliser les propriétés de ces transformations du plan pour résoudre des problèmes de construction, de recherche de lieux géométriques, de chemin minimum, d'alignement des points, de positions des droites.

En Première, le chapitre est intitulé « transformation affine du plan » (programme de 2020), il s'agit d'une sorte de bilan sur l'étude de toutes les transformations du plan, vues depuis la classe de Sixième. Une étude comparative est menée, visant à distinguer les isométries des homothéties, à travers les propriétés de conservation de distances et d'angles. Les notions de transformations du plan et d'isométries sont clairement définies. Le travail se focalise sur deux points essentiels : le premier consiste en l'étude de la composée de deux isométries, de la composée de deux homothéties, et de la composée d'une isométrie et d'une homothétie ; le second consiste en l'étude de toutes ces transformations du plan à partir de leurs expressions analytiques dans un repère donné. Ici, il s'agit spécifiquement de montrer d'abord qu'une application du plan dans lui-même est une transformation, ensuite qu'une application d'expression analytique connue est une transformation du plan, et enfin de définir analytiquement sa réciproque. Cette étude vise par ailleurs à dégager les expressions analytiques des transformations du plan usuelles. Ceci dans le but de déterminer l'expression analytique d'une composée de deux transformations quelconques données du plan. L'objectif principal est d'amener les élèves à résoudre les problèmes de construction, de démonstration des propriétés, de calcul d'aires et de volumes, de classification d'isométries, de composition et de décomposition d'isométries et de lieux géométriques. Cette résolution doit s'effectuer en utilisant, soit les expressions analytiques, soit les points ou les vecteurs du plan.

En Terminale, le chapitre est intitulé « Similitudes directes du plan » (programmes de 2020). Il s'agit d'étudier la composée d'une homothétie et d'une isométrie, qui n'était pas un objectif central en Première. Dans cette étude, on revient sur les différentes transformations du plan vues dans les classes antérieures pour déterminer leurs écritures complexes. Le but est d'étudier les transformations du plan avec les nombres complexes. On se focalise sur la similitude du plan, vue comme composée d'une isométrie et d'une homothétie, en dégageant ses éléments caractéristiques et en étudiant ses différentes propriétés. Tout ceci dans le but de résoudre les problèmes de construction, de déterminer certains lieux géométriques et de démonstration des propriétés, en utilisant soit les expressions analytiques, soit les expressions complexes, soit les points ou les vecteurs du plan. Tout ce travail géométrique s'effectue dans l'environnement papier-crayon.

1.4.2. Les approches utilisées dans l'enseignement des transformations du plan, au secondaire

Les programmes de mathématiques de collège (2014, 2018) et ceux de la classe de seconde (2020) abordent la notion de transformations du plan par une approche par des points du plan que nous désignons par « approche affine ». Cette approche propose une étude des transformations du plan selon une entrée par des points d'un même plan. Dans cette approche, un vecteur est obtenu à partir de deux points donnés. Un ensemble est défini comme la donnée

de plusieurs points vérifiant certaines propriétés. Des propriétés spécifiques permettant de parler d'alignement, de parallélisme et de perpendicularité, définissent des ensembles des points. Ainsi, une longueur est une distance entre deux points, et un angle est défini à partir de trois points. Et donc, une transformation du plan est définie comme une correspondance entre deux points d'un même plan donné. L'image d'un point est donc construite par retournement, avec ou sans glissement. Ainsi, on obtient les propriétés d'une configuration image par conservation de ses propriétés sur la configuration initiale.

Partant du point de vue de Descartes, selon lequel : « *un point, dans un plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) convenablement choisi, peut être déterminé par un couple de coordonnées (x, y)* », ces programmes définissent une transformation du plan en donnant, pour chaque point quelconque M de coordonnées (x, y) , les coordonnées (x', y') de son image, un point M' , pour définir l'approche par les expressions analytiques que nous désignons par « approche analytique ». L'approche analytique des transformations du plan est présente dans les programmes de la classe de Première (2020). Elle cohabite avec l'approche affine, et étudie une transformation du plan à partir de son expression analytique. Une transformation est définie comme une correspondance entre les coordonnées de deux points dans un repère préalablement choisi. Elle met en relation les coordonnées d'un point image et celles de son antécédent par une transformation du plan. Ici un ensemble de points est défini par une expression qui met en relation l'abscisse et l'ordonnée d'un point situé sur cet ensemble. Une longueur (ou distance) est la somme des carrés de la différence entre les abscisses et entre les ordonnées de deux points.

Par ailleurs, ce programme associe le plan affine à un plan complexe, et le munit d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Ainsi, on détermine un point M de coordonnées (x, y) par son affixe $z = x + iy$, pour définir une transformation du plan, en donnant pour chaque point M d'affixe z , l'affixe z' de son image, le point M' , définissant ainsi l'approche que nous désignons par « approche complexe ». L'approche complexe est introduite dans les programmes (2020) de Terminale. Dans ces programmes, cette approche cohabite avec les deux approches précédentes. L'approche par les nombres complexes, étudie une transformation du plan à partir de son expression complexe. Cette expression met en relation les affixes de deux points dans un plan complexe. Les points du plan sont définis dans un plan complexe à partir de leurs affixes. Un ensemble est défini par une expression mettant en relation les affixes des points appartenant à cet ensemble. Une transformation est définie comme une correspondance entre l'affixe z' d'un point image M' et celui de son antécédent z de M . Les angles, le parallélisme, l'orthogonalité et l'égalité sont bien définis. Une longueur (ou distance) est la valeur absolue de la différence entre les affixes de deux points du plan complexe.

Ce bilan de l'étude succincte des programmes établit que les transformations du plan sont abordées au secondaire de façon progressive suivant trois approches : affine, analytique et complexe. Ces approches sont introduites dans l'enseignement des mathématiques de façon graduée. La première s'étend de la classe de Sixième à la classe de Seconde, la deuxième en classe de Première et la troisième en classe de Terminale. La distinction entre les trois approches est bien perceptible dans ces programmes (2014, 2018 et 2020). Cependant, on observe une cohabitation entre ces approches dans certaines classes. En particulier, en Première et en Terminale.

Conclusion

Nous avons pour objectif de voir comment la notion de transformations du plan est abordée au Cameroun, son utilité et d'observer son évolution dans les différents niveaux d'enseignement des mathématiques au secondaire. Pour cela, nous avons mené une enquête exploratoire des travaux en mathématiques, en histoire et didactique de mathématiques, et dans les ressources disponibles dans l'enseignement des mathématiques (programmes et manuels), au Cameroun.

Cette enquête établit que la réforme des programmes de mathématiques de 1992, a introduit les transformations du plan dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun, dès la classe de Sixième. Cet enseignement s'étend de nos jours, tout au long du cycle secondaire, et se fait de façon progressive. Trois approches sont alors utilisées : l'approche affine (par les points et les vecteurs du plan), l'approche analytique (par les expressions analytiques) et l'approche complexe (par les nombres complexes). Par une approche affine, on commence par les symétries centrales et orthogonales au sous-cycle d'observation ; ensuite, les translations et les homothéties au sous-cycle d'orientation ; et enfin, les rotations dans la classe de Seconde. L'approche analytique est introduite en classe de Première, où elle cohabite avec l'approche affine. Ainsi, un bilan sur l'étude des transformations du plan, menée tout au long du collège et en classe de Seconde est fait, à travers une approche affine. Ce bilan vise à établir, d'une part la composition, la classification et la décomposition de ces différentes applications ; et d'autre part la distinction entre les transformations isométriques et les transformations non isométriques. L'approche par les expressions analytiques, constituant l'élément central dans l'étude de ces transformations, la reconnaissance d'une transformation du plan peut être faite à partir de son expression analytique. On peut ainsi écrire l'expression analytique d'une transformation, ainsi que celle de sa réciproque, et puis déterminer l'expression analytique de la composée de deux transformations. En Terminale, c'est l'approche par les nombres complexes qui est introduite. Cependant, on observe une cohabitation des trois approches (affine, analytique et complexe), puisqu'on essaie, à partir des points du plan, de passer à l'écriture vectorielle d'une transformation, à l'écriture analytique, et ensuite à l'écriture complexe et vice-versa. Les transformations du plan sont déterminées à partir de leurs expressions complexes. À ce niveau scolaire, on détermine l'écriture complexe de la composée de deux transformations, particulièrement celle d'une similitude. Et, on étudie leurs propriétés. Cependant, les transformations du plan constituent un outil (Douady, 1998) de résolution de problèmes géométriques. Elles sont utilisées pour résoudre plusieurs catégories de problèmes géométriques, clairement explicités dans les programmes (1992, 2014, 2018 et 2020). Notamment : les problèmes de lieux géométriques, les problèmes de calculs d'aires et de volumes, les problèmes de démonstration des propriétés, les problèmes de construction...etc.

Bilan

Nous retenons, pour la suite de notre recherche, que les symétries centrales, les symétries orthogonales, les translations, les rotations et les homothéties, ainsi que leurs composées, sont les transformations du plan qui sont abordées, en classe de Première Scientifique. Elles sont enseignées suivant l'approche affine et l'approche par les expressions analytiques, et sont utilisées pour résoudre plusieurs catégories de problèmes géométriques. Dans cette recherche,

nous allons nous intéresser à la catégorie, « problèmes de construction », avec un objectif à la clé, celui de voir comment développer la validation mathématique, chez les élèves, au cours d'une séquence de résolution de cette catégorie de problèmes, en classe. La question est de savoir :

Comment sont résolus les problèmes de construction liés aux transformations du plan, en classe de Première Scientifique au Cameroun ?

Chapitre 2

Des éclairages sur la résolution des problèmes de construction, en géométrie, dans l'enseignement des mathématiques au secondaire

Pour aller vers l'étude de la manière dont on peut organiser un problème mathématique pour développer la validation, chez les élèves, nous avons besoin de quelques éclairages épistémologiques, didactiques et institutionnels sur la résolution des problèmes de construction, dans l'enseignement des mathématiques. Car nous voulons aborder la question de la validation mathématique, dans le cadre de la problématique de la construction, en géométrie, à travers une entrée par les structures, les méthodes de résolution et l'organisation de la résolution d'un problème de construction lié aux transformations du plan. La question est de savoir : d'une part,

Comment sont résolus les problèmes de construction, en géométrie, dans l'enseignement des mathématiques, au secondaire au Cameroun ?

Et d'autre part,

Quels sont les genres de tâche qui génèrent une activité de construction, la structure des problèmes de construction et les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction, en classe de Première Scientifique ?

Pour répondre à ces questions, nous essayons, tout d'abord, de préciser le sens que nous donnons au concept de « problèmes de construction » et explicitons son utilité dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ensuite, nous décrivons la théorie qui soutient la résolution de cette catégorie de problèmes, afin d'exposer quelques méthodes de résolution que proposent les mathématiques. Enfin, nous conduisons une étude quantitative et qualitative, basée sur une enquête conduite sur les problèmes de construction résolus et non résolus dans la partie consacrée aux transformations du plan d'un manuel de la classe de Première Scientifique. Notre cadre de référence est constitué des travaux de Petersen (1866 et 1879), Chevallard (1991 et 1999), Brousseau (1985), Duval (1991), Aynard et Pintrand (2017). Et nous nous inspirons de nos travaux de master (Ngodebo, 2019) portant sur les problèmes de construction.

2.1. L'étude épistémologique des problèmes de construction

Dans ce premier paragraphe, nous essayons de situer les problèmes de construction dans l'enseignement et l'apprentissage des savoirs mathématiques.

En paraphrasant l'historien grec Hérodote (-484, -425) lorsqu'il remarque que « *la géométrie est un don du Nil* », Barbin (1988) rattache les origines des problèmes de construction à celles des constructions géométriques, qu'elle relie à la naissance de la géométrie. Puisqu'elle souligne que « *le Nil est le berceau des constructions géométriques. C'est avec les problèmes causés par le Nil que naissent les constructions géométriques, car ce sont les constructions*

géométriques qui sont au centre de la résolution des problèmes causés par les crues du Nil » (Barbin, 1988).

Ce qui signifie que les problèmes de construction sont nés et ont évolué dans le temps avec la Géométrie. De son côté, Petersen (1866) met au centre de la construction géométrique l'intérêt de la procédure de réalisation de la figure, considérée comme étant l'objet qui traduit graphiquement la solution d'un problème géométrique. Puisque, pour lui : « *On comprend bien mieux une figure et on se la rappelle bien plus facilement quand on l'a vue pendant la période de la construction* » (Petersen, 1866, p.1). En s'appuyant sur la double posture des propositions énoncées en géométrie, il met en évidence, à travers les verbes d'action : « construire » et « tracer », deux procédures de réalisation d'une figure, la première posant la question d'existence de l'objet (construire), et la seconde supposant que l'objet existe (tracer). Ainsi, il définit un problème de construction à partir de la différence qu'il fait entre un théorème et un problème mathématique (au sens d'une question et des instances), comme étant un problème qui consiste à demander la réalisation d'une figure vérifiant certaines conditions données. Car, pour lui :

« Les propositions de géométrie se présentent sous deux formes distinctes : ou bien elles expriment qu'une figure qui a été tracée d'une certaine manière, déterminée à l'avance, satisfait à certaines conditions. Ou bien elles demandent qu'on trace (qu'on construise) une figure de manière qu'elle remplisse certaines conditions données. Dans le premier cas on a le théorème ; dans le second, le problème » (Petersen, 1879, p.1).

De ce point de vue, nous définissons :

- Le terme « **tracer** » comme tout processus consistant, soit à réaliser une figure à main levée ou avec des instruments de tracé, en procédant parfois par essais et ajustements ; soit à exécuter une procédure de construction automatisée d'une figure. Ainsi, l'objectif du tracé est l'obtention d'une figure « exacte ». L'exactitude dépendant des exigences implicites et/ou explicites du contexte, elle renvoie à une problématique de « la précision » apportée par la perception (figure à main levée) ou par les instruments de tracé (figure instrumentée).
- Le terme « **construire** » comme tout processus consistant, d'une part à réaliser une suite d'actions, de décisions et d'opérations élémentaires, et d'autre part à prouver (vérifier pour s'assurer) que l'ensemble obtenu à la fin remplit les conditions imposées par le problème¹². Ainsi, l'objectif de « construire » est l'obtention d'une figure qui n'est plus seulement « exacte » mais aussi « valide ». « Exacte » au sens de sa conformité avec les données du problème et de la précision apportée par les instruments de tracé ; et « valide » au sens de la théorie puisque la suite d'actions, de décisions et d'opérations répond à une problématique de la conformité à la théorie qui règle le processus.

¹² Nous considérons qu'un problème est un couple (questions, instances) pour le différencier de l'énoncé du problème qui représente son habillage.

Nous parlerons ainsi d'une « activité de construction » pour désigner tout processus permettant de construire un objet géométrique vérifiant les conditions que fixe l'énoncé du problème. C'est-à-dire, un ensemble d'actions, de décisions, d'opérations et de preuves (Balacheff, 1989) qui visent la production d'un objet géométrique. Ainsi, une « construction » va désigner *le produit* d'une activité de construction, c'est-à-dire l'objet construit qui pourra être une figure (instrumentée ou non), un algorithme (ou programme) de construction ou bien les deux. C'est donc, une construction qui va marquer la fin d'une activité de construction. Au vu de ces considérations, et par rapport à la définition que donne Petersen (1866), nous définissons « un problème de construction » comme étant un problème dans lequel la tâche à accomplir, sous certaines contraintes, dans le cadre d'une activité, conduit à la réalisation d'une construction, réalisation normalement soutenue par un raisonnement qui justifie que la construction réalisée est exacte et valide. Ainsi, une activité de construction sera liée à un problème de construction pour désigner « la construction » comme *processus*. Dans notre travail, nous parlerons d'une activité de construction sur un problème de construction. Et dans ce contexte, la résolution d'un problème de construction sera théorique, philosophique, et utilisera des objets issus des caractérisations que fait le constructeur (élève ou enseignant), de ces objets. Ainsi, elle fera intervenir d'autres activités mathématiques transversales comme prouver, démontrer, calculer, justifier, expliquer, etc., permettant au constructeur de comprendre et de justifier les choix qu'il ferait et les actions qu'il mettrait en œuvre. Vus sous cet angle, les problèmes de construction, dans le cadre de la résolution, pourront jouer un rôle important dans l'enseignement et l'apprentissage des savoirs (et savoir-faire) mathématiques. D'ailleurs, dans les analyses conduites dans nos travaux de mémoires de master 2 (Ngodebo, 2019) nous avons établi que :

« Les problèmes de construction ont un statut de processus expérimental et le produit de l'activité de construction (dessin, figure, algorithme ou programme) qui en découle, a un statut de dispositif expérimental dans lequel le codage (dans le cas particulier d'une figure) apparaît comme un moyen de communication ». (Ngodebo, 2019, p.84).

Ainsi, cette catégorie de problèmes permet d'entrer dans des situations d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie ou de tout autre savoir-faire mathématique transversal, ne constituant pas forcément un objet d'enseignement, à l'exemple de la validation qui est l'un des objets de notre recherche. Par ailleurs, ces analyses ont révélé que :

« Les problèmes de construction géométriques constituent un lieu pour la mise en place des notions de géométrie ; l'analyse et la réalisation des figures, des algorithmes (ou programmes) de construction ; la mise en relation de propriétés ; et ainsi la démonstration » (Ngodebo, 2019, p.84).

Ce qui signifie que les problèmes de construction sont, en partie, utilisés dans l'enseignement des mathématiques comme des situations d'enseignement des savoirs (ou savoir-faire) mathématiques, d'où leur intérêt. C'est à ce titre que nous allons les utiliser dans le cadre de notre recherche, où nous voulons étudier comment on peut développer la validation mathématique chez les élèves à l'aide d'un problème de construction sur les transformations du plan. La question est de savoir : **comment sont résolus les problèmes de construction, en géométrie, dans l'enseignement des mathématiques au secondaire ?**

2.2. L'étude des travaux didactiques portant sur la résolution des problèmes de construction dans l'enseignement des mathématiques

Si les problèmes de construction se positionnent comme des situations d'enseignement et d'apprentissage des savoirs (et savoir-faire) mathématiques, c'est dans la résolution de cette catégorie de problèmes que se situe cet enjeu. C'est pourquoi nous proposons dans cette section une analyse succincte de divers travaux portant sur cet aspect, où certains éléments nécessaires pour obtenir une solution ont été mis en évidence, aussi bien du côté de l'enseignant que de celui de l'élève. Notamment, la forme des données dans la formulation des problèmes de construction, les genres de tâche qui génèrent une activité de construction et les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction. L'objectif étant d'explicitier ces éléments qui ont émergé comme des fondamentaux dans la résolution des problèmes de construction, nous commençons par explorer les méthodes et théories sur la résolution des problèmes de construction avec les travaux de Petersen (1866 et 1879) et d'Aynard et Pintrand (2017), pour montrer comment nous avons extrait ces éléments ; puis, nous nous référons aux travaux de l'ESPE de l'académie de Lyon (2013), Laborde (1990), Duval (1991) ; Brousseau (1985) et Chevallard (1999).

2.2.1. Les méthodes et théories de résolution des problèmes de construction, en géométrie

« ...Une méthode sagement conçue et judicieusement appliquée fournit aisément les moyens de vaincre des difficultés, dont souvent le hasard ou une sagacité innée pourraient seuls donner les clefs » (Petersen, 1866).

Dans « *Méthodes et Théories Pour la Résolution des Problèmes de Construction* », où le but est d'essayer d'apprendre aux élèves comment attaquer la résolution d'un problème de construction, Petersen (1879) ramène le processus de résolution à la recherche d'une construction satisfaisant aux conditions que fixe l'énoncé du problème. Prenant le cas particulier où la construction solution est une figure, il souligne que :

« Un problème est surabondamment déterminé, quand la figure cherchée est soumise à plus de conditions qu'il n'en faut pour la déterminer ; il est déterminé, quand il ne comporte qu'un nombre fini de solutions ; enfin il est indéterminé, quand il en admet un nombre infini » (Petersen, 1879, p.1).

Ceci pour mettre en évidence l'influence de la forme de l'énoncé (Ngodebo, 2017) et du genre de tâche (Chevallard, 1999), dans la résolution d'un problème de construction. Pour Petersen, la forme de l'énoncé renvoie à un type de problème dont la solution peut aboutir à un nombre fini ou infini de solutions. Et, le genre de tâches à un ensemble de types de tâches qui génère une activité de construction permettant de réaliser la construction d'un objet géométrique (la figure). La forme de l'énoncé et le genre de tâches, constituent donc deux éléments fondamentaux (des variables) dans la résolution des problèmes de construction. Par ailleurs, il décrit une théorie à partir de laquelle peuvent dériver les méthodes permettant de résoudre un problème de construction, qu'il soit déterminé ou indéterminé :

« Pour résoudre un problème déterminé, il faut :

- *Effectuer la construction,*
- *Démontrer qu'elle est exacte,*
- *La discuter, c'est-à-dire indiquer les limites entre lesquelles les données doivent être comprises pour que le problème admette 0, 1, 2, ...etc. solutions.*

Parmi les problèmes indéterminés, ceux qui deviendraient déterminés par adjonction d'une seule condition de plus, présentent un intérêt tout particulier. Quoiqu'un pareil problème ait une infinité de solutions, il n'y sera pas satisfait par une figure quelconque ; mais toutes ses solutions se regrouperont d'une certaine manière, déterminée par les conditions données. Ainsi, un point est déterminé quand il doit satisfaire à deux conditions données ; si on ne lui en impose qu'une seule, il devient indéterminé ; mais tous les points qui remplissent cette dernière condition se trouveront sur une ligne droite ou courbe. On lui a donné le nom de lieu géométrique des points qui satisfont à cette condition » (Petersen, 1866, p.2).

En effet, cette théorie qu'il décrit définit toute une démarche à suivre pour aboutir à la solution d'un problème de construction. Il met en évidence l'influence du contrat didactique (Brousseau, 1985) dans la résolution des problèmes de construction qui se positionne comme un autre élément fondamental dans la résolution de cette classe de problème. Ce contrat indique ce qui doit être fait pour aboutir à une solution acceptée, lors de la résolution d'un problème de construction. Dans cette théorie, Petersen (1879) identifie deux procédés par lesquels les méthodes de résolution peuvent être élaborées : les procédés algébriques et les procédés géométriques. Ainsi, par une entrée par les procédés géométriques, il dégage une méthode de résolution :

« Dans ces derniers, on tâche de trouver la solution du problème, en étudiant par la voie géométrique quelles sont les liaisons qui existent entre les éléments donnés de la figure et ceux qu'on cherche. Pour faciliter ces investigations, on commence dans tous les cas par dessiner la figure qui représente la solution cherchée et il ne s'agit plus alors que de l'étudier à l'aide des théorèmes connus de la Géométrie » (Petersen, 1879, p. 3).

Pour lui, la résolution d'un problème de construction, démarre par le tracé d'une figure que nous pouvons qualifier de figure « témoin », ainsi,

« De la figure tracée, on en déduira une autre dans laquelle la liaison entre les éléments donnés et ceux qu'on cherche ressortira plus commodément » (Petersen, 1879, p.4).

Cette figure « témoin » servira de support à la réalisation de la construction, à l'élaboration du raisonnement et à la recherche des arguments qui permettront de démontrer que la construction réalisée est exacte (au sens de la conformité avec la théorie), et surtout de discuter du nombre de solutions du problème. Cette méthode est celle que l'on désigne en mathématiques par l'expression « Analyse-Synthèse » qui met en œuvre le maniement des conditions nécessaires (« Analyse ») et des conditions suffisantes (« Synthèse ») (nous expliciterons plus loin ces termes). À noter que le plus difficile, dans ce raisonnement, est souvent de découvrir des propriétés, qu'elles soient nécessaires ou suffisantes, qui vont s'avérer pertinentes pour la construction demandée. Pour le pallier, Aynard et Pintrand (2017) proposent la « Méthode d'Abandon de Contraintes », en précisant que :

« On pourra expliciter une méthode consistant dans un premier temps à abandonner l'une des contraintes du problème pour faciliter la découverte de propriétés pertinentes pour la construction souhaitée, puis la reconsidérer à un moment donné, vers la fin de la résolution » (Aynard et Pintrand, 2017, p.14).

Ainsi, la démarche est donc celle qui consiste en l'abandon de certaines contraintes, au début de la résolution ; supposer le problème résolu, en se donnant une figure d'étude puis, rechercher de bonnes propriétés par examen de la figure supposée construite, et reconsidérer les contraintes abandonnées au départ. Ils font remarquer, à travers plusieurs exemples, qu'à l'aide de cette méthode :

« On « simplifie » le problème en enlevant une contrainte que doit vérifier la construction : la méthode d'abandon de contrainte apparaît ainsi comme une méthode heuristique aidant à la résolution de problèmes de construction même pas toujours simples » (Aynard et Pintrand, 2017, p.15).

Cette première analyse met en évidence la forme de l'énoncé, le genre de tâches et le contrat didactique comme des éléments fondamentaux dans la résolution des problèmes de construction. Elle décrit une théorie dans laquelle dérivent la plupart des méthodes permettant de résoudre n'importe quels types de problèmes de construction, et identifie « l'Analyse-Synthèse » et « l'Abandon de contrainte » comme deux méthodes mathématiques de résolution des problèmes de construction. Ainsi, nous admettons que les problèmes de construction sont résolus, au secondaire, à l'aide de méthodes fortement influencées par des règles du contrat didactique (Brousseau, 1985) fixées par l'institution. C'est ce contrat qui définit la façon dont sont abordés certains aspects de l'élaboration d'une solution, à un niveau scolaire donné.

Nous explicitons dans les paragraphes qui suivent notre conception, dans le cadre de ce travail, de la notion de « forme des données » de l'énoncé dans la formulation des problèmes de construction liés aux transformations du plan, du genre de tâches, et du contrat didactique, qui sont des éléments qui se sont avérés comme fondamentaux dans la résolution des problèmes de construction.

2.2.2. Les variables de l'énoncé : « la forme des données » dans l'énoncé d'un problème de construction

Dans les classes de mathématiques, les enseignants sont amenés à formuler d'une certaine manière les problèmes de construction qu'ils soumettent à la résolution aux élèves. Les énoncés de ces problèmes prennent des formes différentes pour constituer différentes structures. Or, la forme de l'énoncé, et son influence sur la stratégie de résolution employées par les élèves, ont fait l'objet de plusieurs recherches qui ont mis en évidence plusieurs caractéristiques des énoncés susceptibles de jouer un rôle perturbateur ou facilitateur dans l'élaboration de la solution par les élèves. Nous pouvons, à titre d'exemple, citer les travaux de :

- Vergnaud (1976 et 1984) où il montre l'influence de l'organisation rédactionnelle des problèmes additifs sur la compréhension du texte.
- De Corte (1988) et Bachor (1987) qui ont mis en évidence le degré d'explicitation entre les quantités données et les quantités inconnues.

- Fayol (1990), Neshet et Tribal (1975), qui ont montré le degré d'attraction de quelques expressions ou mots inducteurs comme *plus* ou *moins* (cités dans Laborde (1995)).

De son côté, Duval (1991), en étudiant les caractéristiques des textes mathématiques, fait remarquer que :

« *Certaines caractéristiques propres du texte peuvent modifier la situation de lecture et la nature de la tâche de compréhension puisque certaines « présentations » peuvent être plus complètes que d'autres ou qu'elles peuvent être plus adéquates aux démarches requises pour accéder au contenu traité* » (Duval, 1991, p. 164).

Il introduit la notion de « *variable rédactionnelle* » pour désigner les caractéristiques des énoncés dont la variation aboutit à un changement de stratégies de résolution adoptées par les élèves. Laborde (1995) définit ces variables rédactionnelles comme étant :

« *des caractéristiques linguistiques des énoncés des problèmes, susceptibles de prendre des valeurs différentes et tel qu'un changement de ces valeurs risque de modifier le traitement de l'énoncé par le lecteur* » (Laborde, 1995, p. 304).

Compte tenu du fait que l'une des spécificités des problèmes de construction formulés en géométrie est la présence de la figure dans certains énoncés de ces problèmes ; et, ajoutant à cela le fait que l'énoncé d'un problème est tout ce qui est donné aux élèves, nous identifions « la forme des données » dans l'énoncé d'un problème de construction comme étant l'une des caractéristiques de cette classe de problèmes.

Ainsi, cette caractéristique incluant la figure dans l'énoncé d'un problème de construction est une extension de la variable rédactionnelle. Nous l'utilisons, dans notre recherche, comme une transposition de la notion de variables didactiques (Brousseau, 1985) sur l'enseignant, dans la formulation des énoncés des problèmes de construction. Et donc, une valeur de cette caractéristique définit une structure d'un problème de construction. Or, dans nos travaux de master (Ngodebo, 2019), nous avons identifié quatre valeurs pour « la forme des données » de l'énoncé, dans la formulation d'un problème de construction au secondaire : un problème de construction peut être présenté sous la forme d'un simple discours (texte simple), d'un discours accompagné d'une figure codée (texte + figure codée), d'un discours accompagné d'une figure non codée (texte + figure non codée), ou d'une simple figure codée (figure codée).

Nous allons plus loin déterminer, parmi ces différentes valeurs, celles qui sont présentes dans la formulation des énoncés des problèmes de construction liées aux transformations du plan, en classe de Première Scientifique au Cameroun. La forme des données dans la formulation des problèmes de construction est importante dans notre travail, parce qu'elle va nous guider dans le choix des situations qui seront utilisées dans les expérimentations.

Compte tenu du fait que nous avons placé « l'activité de construction » au cœur de la problématique de la construction, il se pose une question liée à l'identification des genres de tâches autour des problèmes de construction qui génèrent une activité de construction, à savoir : **quels sont les genres de tâches qui génèrent une activité de construction dans la formulation des énoncés sur les problèmes de construction, au secondaire ?** En faisant l'hypothèse que beaucoup de tâches données en géométrie engendrent, chez les sujets (élèves

ou enseignant), des *activités* qui n'intègrent pas la problématique de la construction, nous cherchons, dans le paragraphe qui suit, à définir une tâche et à identifier les genres de tâches qui génèrent une activité de construction.

2.2.3. Les genres de tâche autour des problèmes de construction, en géométrie

Dans la littérature, nous identifions de nombreux travaux portant sur les tâches mathématiques comme : Sierpiska (2004), Robert (2007), Robert et Rogalski (2012), Chevallard (1999), Brousseau (1985) et Nechache (2016).

Dans ses travaux portant sur les tâches problématisées, Sierpiska (2004) parle de tâche mathématique, « *dans un sens large, pour se référer à n'importe quel type de problèmes mathématiques, dont les hypothèses et les questions sont clairement formulées, et dont on sait que les élèves peuvent les résoudre dans un temps que l'on peut prévoir* » (Sierpiska, 2004, p.10).

Une tâche est donc pour elle un problème défini et limité, imposé par autrui ou par soi-même, à exécuter dans certaines conditions. Cependant, dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), Chevallard (1999) met à la base de l'activité mathématique les notions de tâches, types de tâches et genres de tâches. Il les présente comme n'étant pas des données de la nature. Pour lui, ce sont :

« Des « artefacts », « des œuvres », des construits institutionnels dont la reconstruction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique » (Chevallard, 1999, p. 2).

Et donc, une tâche est un objet relativement précis. En faisant la différence entre le genre de tâches et le type de tâches, il met en exergue le fait qu'un genre de tâches est déterminé à partir d'un verbe, et le présente comme un ensemble de types de tâches, puisqu'il souligne que :

« Monter les escaliers est un type de tâches, mais monter, tout court, n'en n'est pas un. De même, calculer la valeur d'une fonction en un point est un type de tâche ; mais calculer, tout court, est ce qu'on appellera genre de tâches, qui appelle un déterminatif. Concrètement, un genre de tâche n'existe que sous la forme de différents types de tâches, dont le contenu est étroitement spécifié » (Ibid).

De ces points de vue, nous définissons une tâche mathématique comme étant un exercice, une question ou un problème réalisé dans un temps précis et dans un contexte donné. Les conditions de réalisation de cette tâche, et du travail mathématique qui en découlent, sont définies par le contexte et l'espace de travail dans lesquels la tâche est proposée. D'après cette définition, pour un sujet (élève ou enseignant) qui s'engage à résoudre une tâche, ce dernier agit comme un individu appartenant à une institution. Ainsi, les problèmes de construction sont des types de tâches (Chevallard, 1999) qui génèrent une activité de construction permettant de réaliser une construction (Ngodebo, 2019). La question est de savoir, quels sont les genres de tâches, en géométrie, qui génèrent ces types de tâches ?

En se référant au point de vue de Chevallard, les travaux de l'ESPE de l'académie de Lyon (2013), portant sur *l'introduction à la didactique de géométrie*, identifient dans les programmes

d'enseignement de mathématiques, en France, six verbes d'action, pour définir les genres de tâches, en géométrie, qui génèrent une activité de construction :

« *Nous identifions six verbes d'action dans ces programmes permettant de résumer les objectifs des problèmes en géométrie : reconnaître, décrire, reproduire, construire, tracer et représenter* » (ESPE de Lyon, 2013, p.6-7).

Cependant, Laborde (1990), mettant en évidence, dans ses travaux, l'existence des interactions entre les savoirs et les apprenants dans la résolution des problèmes géométriques, relève l'importance de ces interactions dans cette phase. Elle souligne qu'elles consistent à prendre appui sur la multiplicité des systèmes de signifiants utilisés en géométrie (les objets, les dessins et les textes). Ce qui lui permet de distinguer dans ces interactions des tâches généralement proposées dans l'enseignement qui, pour elle, sont énoncées par un texte et un dessin, mais où le dessin ne fait qu'illustrer l'énoncé discursif. Dans ces travaux, elle se fixe un objectif qui permet d'identifier, avec les idées de Chevallard (1999), les genres de tâches qui engendrent une activité de construction au secondaire :

« *Nous allons étudier les types de tâches proposées aux élèves pour l'apprentissage de la géométrie et qui portent sur les signifiants, Nous indiquerons ce faisant les difficultés que rencontrent les élèves. Ces types de tâches sont principalement : la reproduction d'un objet de l'espace physique ou de l'espace graphique, la représentation graphique ou langagière d'un objet de l'espace physique ou de l'espace graphique, la construction d'une figure de l'espace géométrique ou la rédaction d'un programme de construction de cette figure, la transformation d'un objet de l'espace physique ou de l'espace graphique.* » (Laborde, 1990).

À travers ces deux travaux, nous identifions finalement sept verbes d'action définissant les genres de tâches qui génèrent une activité de construction dans la formulation des problèmes de construction au secondaire : construire, reproduire, représenter, reconnaître, transformer, tracer et décrire.

Nous allons déterminer, parmi ces genres de tâches, ceux qui sont dominants dans la formulation des énoncés des problèmes de construction liés aux transformations du plan, en classe de Première Scientifique. La notion de genre de tâche est importante dans notre travail, car elle nous permettra de mieux choisir ou de construire les situations qui seront soumises à l'expérience. Cependant, comme nous avons mis le contrat didactique au centre de la résolution des problèmes de construction, il est important pour nous de savoir quels comportements doivent adopter les sujets (élèves ou enseignant) dans la résolution des problèmes de construction. Ainsi, la question qui se pose est celle qui consiste à savoir **quelles sont les règles du contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction.**

2.2.4. Le contrat didactique dans la résolution des problèmes de construction

Le concept de « contrat didactique » est introduit par Brousseau (1980), qui le définit comme « *l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant* » (Brousseau, 1980, p.127). Nous faisons appel à cette notion parce que nous nous plaçons dans le contexte de la classe, où la majorité des comportements des acteurs est soumis aux règles du contrat didactique. En effet,

ce contrat fixe ce que l'enseignant devrait faire et ce que l'élève devrait faire par rapport au savoir mathématique. Dans la résolution des problèmes de construction, le contrat didactique apparaît à travers un ensemble de règles explicites pour une petite part mais surtout implicites « *qui précisent comment doit être conduite la résolution d'un problème de construction et indique la forme d'une solution ou d'une construction solution, du problème de construction que l'on résout* » (Ngodebo, 2017, p. 20). Certaines règles du contrat didactique concernent la forme de la solution. Elles décrivent le type de construction à réaliser pour matérialiser la construction de l'objet et le raisonnement qui doit être utilisé pour établir l'exactitude de cette construction. Ces règles sont, en grande partie, implicites pour au moins deux raisons :

- C'est une caractéristique du savoir (ou savoir-faire) enseigné : par exemple à un certain niveau de l'enseignement, l'enseignant précise explicitement que résoudre un problème de construction ne se réduit pas à tracer une figure, alors qu'on retrouve toujours une ou plusieurs figures dans la plupart des solutions des problèmes de construction. « *La rédaction d'une solution officielle nécessite le recours à un discours de validation de la construction réalisée. Le problème pour l'élève est de partir d'une construction « témoin » pour extraire des arguments (propriétés) lui permettant de dégager une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et la réalisation effective de la construction demandée. Cette construction doit être un algorithme (ou programme) de construction, accompagné d'une construction instrumentée* » (Ngodebo, 2022). Or dans l'élaboration du discours de validation de la construction réalisée, doivent apparaître : le raisonnement mobilisé pour produire la validation de toutes les constructions élémentaires, les arguments employés dans l'argumentaire de validation de la construction et la mise en forme de l'argumentaire de validation des constructions. Ces éléments, qui sont parfois extraits de la figure « témoin », à travers des va-et-vient entre cette figure et le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2006), ne peuvent être transmis à l'élève que de façon implicite, en voyant la pratique de l'enseignant.
- Une deuxième raison, qui n'est pas liée au contenu du savoir et qui pourrait expliquer le caractère implicite du contrat didactique dans la résolution des problèmes de construction, est que ce dernier évolue sans cesse selon le niveau, selon l'enseignant et selon le type de problème de construction (la valeur de la forme des données) parce que les élèves progressent dans le savoir. « *Ces modifications ne peuvent être toutes explicites, elles sont en partie montrées, en partie installées par l'évolution, mais en restant implicites* » (Arsac, 1998).

Dans la pratique, la solution d'un problème de construction peut prendre la forme d'une figure, où la précision dans les tracés est exigée ou non. Comme nous l'avons vu, dans « *les Méthodes et Théorie de la résolution des problèmes de construction* », Petersen (1866) précise que :

« *Pour résoudre un problème déterminé, il faut :*

- *Effectuer la construction,*
- *Démontrer qu'elle est exacte,*
- *La discuter, c'est-à-dire indiquer les limites entre lesquelles les données doivent être comprises pour que le problème admette 0, 1, 2, ...etc. solutions. ».*

Il s'agit ici d'une autre description de la forme que peut prendre la solution d'un problème de construction. Dans cette description, nous identifions trois éléments essentiels : la procédure de construction, la construction et le raisonnement de validation de la construction. Ces éléments peuvent être mis en évidence, dans une solution, à travers la présence des étapes de la résolution, d'un algorithme (ou programme) de construction, d'une illustration de cet algorithme (construction instrumentée) et d'une démonstration de l'exactitude de la construction. Cette démonstration peut être identifiée à travers la mise en forme du discours de validation et la qualité des arguments utilisés dans ce discours. Ce qui signifie que la solution d'un problème de construction peut également être un texte.

Le contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction doit préciser la forme de la solution et présenter les éléments constitutifs de cette solution. Ce concept est important dans notre travail, parce qu'il pourra nous permettre de prévoir, en partie, le comportement des sujets (élèves ou enseignant) face à un problème de construction sur les transformations du plan. Nous allons déterminer les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction en classe de Première Scientifique. Tous ces éléments étant explicités, la question est de savoir **comment ils sont mis en fonctionnement dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique au Cameroun.**

2.3. La résolution des problèmes de construction dans l'enseignement des mathématiques, en classe de Première Scientifique

Compte tenu du fait que notre recherche étudie un cas, au Cameroun, centré sur la classe de Première Scientifique, nous essayons, dans ce paragraphe, de relever les attentes institutionnelles relativement aux éléments ont été dégagés comme des fondamentaux dans la résolution des problèmes de construction, notamment : la forme des données dans la formulation des énoncés des problèmes de construction, le genre de tâches qui génère une activité de construction, et les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction.

2.3.1. Le Genre de tâche autour des problèmes de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique

Une lecture attentive des programmes (MINESEC, 1992 et 2018) n'ayant pas permis d'identifier les genres de tâches prescrits sur les problèmes de construction à ce niveau scolaire, nous nous sommes dirigés vers une étude des manuels. Ainsi, pour déterminer le genre de tâche sur les problèmes de construction qui engendrent une activité de construction, afin d'identifier ou de mieux formuler les énoncés des problèmes de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique, nous analysons les exercices proposés dans les chapitres « Isométries du plan » et « Homothétie du plan » du manuel CIAM (1992). La notion de genres de tâches (Chevallard, 1999) que nous utilisons ici nous impose d'aller dans ces exercices, et de regarder minutieusement, dans les questions qui sont posées, les verbes qui sont utilisées. Ces verbes définissent des genres de tâches. Ayant identifié sept verbes d'action susceptibles de générer une activité de construction sur un problème de construction au

secondaire (Cf. sous-section 2.2.3), nous allons dégager, parmi ces genres de tâches, ceux qui sont dominants. Le tableau ci-dessous résume les données récoltées.

Chapitre, Page et Numéro	Type d'exercice	Genres de tâches qui génèrent une activité de construction						
		Reconnaître	Construire	Reproduire	Tracer	Décrire	Transformer	Représenter
Chap. 4		ISOMETRIES DU PLAN						
P 75	EC		1					
P76	EC		1					
P84 N°19	EA ₂		1					
P84 N°20	EA ₂		1					
P84 N°21	EA ₂		1					
P84 N°22	EA ₂		1					
P84 N°23	EA ₂		1					
P84 N°24	EA ₂		1					
P84 N°25	EA ₂		1					
P84 N°32	EA ₃		1					
P86 N°46	EA ₃		1					
P86 N°47	EA ₃		1					
P86 N°48	EA ₃		1					
P86 N°49	EA ₃				1			
P86 N°50	EA ₃		1					
Chap. 5		HOMOTHETIES DU PLAN						
P92 N°1	EC		1					
P92 N°2	EC		1					
P92 N°3	EC		1					
P92 N°4	EC		1					
P102 N°2a	EA ₁		1					
P102 N°2b	EA ₁		1					
P102 N°2c	EA ₁		1					
P103 N°6	EA ₂		1					
P103 N°7	EA ₂		1					
P103 N°8	EA ₂		1					
P103 N°9	EA ₂		1					
P103 N°10	EA ₂		1					
P103 N°11	EA ₂		1					
P103 N°12	EA ₂		1					
P104 N°25	EA ₃				1			
P104 N°26	EA ₃							1
P104 N°27	EA ₃				1			
P104 N°28	EA ₃		1					
P106 N°40	EA ₃							1
P106 N°45	EA ₃				1			

Tableau 1: Données récoltées sur les genres de tâches (T1)

Légende :

EC = Exercice Corrigé ;

EA₁ = Exercice d'Application ;

EA₂ = Exercice d'Apprentissage ;

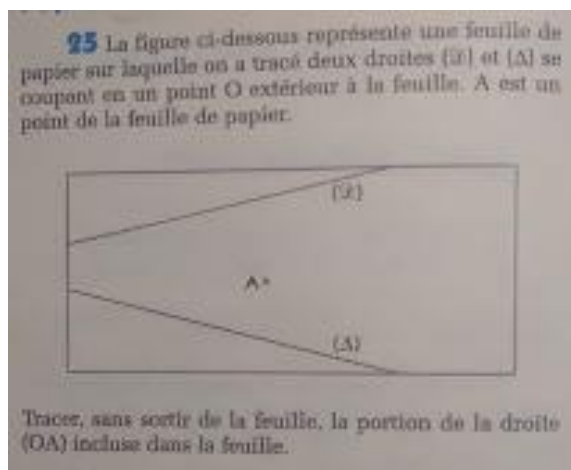
EA₃ = Exercice d'Approfondissement ; 1 = Tâche présente

À partir de ce tableau (T1) et suivant le nombre de genres de tâches rencontrés dans les exercices proposés sur les chapitres consacrés aux transformations du plan, en classe de Première Scientifique, nous pouvons dégager les résultats suivants que nous présentons sous forme d'un tableau.

Genre de Tâche	Reconnaître	Construire	Reproduire	Tracer	Décrire	Transformer	Représenter
Effectifs	0	29	0	4	0	0	2

Tableau 2: Bilan de l'étude sur les genres de tâches (T2)

Les résultats obtenus montrent l'absence des genres de tâches, « Reconnaître », « Reproduire » et « Transformer ». Une présence très faible des tâches « Tracer » et « Représenter », soit 4 cas et 2 cas respectivement. Et une très forte présence de la seule tâche « Construire », soit 29 cas. Nous supposons que l'absence des tâches « Reconnaître », « Reproduire », « Décrire » et « Transformer » est due au fait que ces tâches sont destinées au niveau du collège, et que les élèves de la classe de Première Scientifique sont supposés savoir reconnaître, décrire, reproduire et transformer une construction. Les genres de tâches « Tracer » et « Représenter » apparaissent essentiellement dans les problèmes de construction situés dans la partie « exercices d'approfondissement », que ce soit dans le chapitre « Isométries du plan » ou dans le chapitre « homothéties du plan ». Les exercices de cette partie visent à permettre aux élèves de prouver leur compétence et de voir s'ils peuvent aller au-delà de ce qui est attendu, ou de faire fonctionner certaines connaissances anciennes (Robert, 2008). Au vu de leur faible fréquence dans les exercices proposés, nous pouvons faire l'hypothèse que ces tâches ne relèvent pas directement des attentes institutionnelles à ce niveau scolaire. Seuls quatre exercices génèrent l'activité qui consiste à « tracer ». Un exemple de ce genre de tâche est le problème ci-dessous.



Source : Extrait du Manuel CIAM. 1992, classe de Première Scientifique, N°25 p.104

Parmi les 35 consignes identifiées, susceptibles de générer une activité de construction en Première Scientifique, 2 génèrent l'activité de construction qui consiste à « représenter » une construction. Un exemple de ce genre de tâche est le problème N°46 de la page 86 que nous présentons ci-dessous :

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un losange de centre O. Soit (D) la droite vérifiant : $S_{(BD)} \circ S_{(D)} = t_{\vec{AO}}$.

Représenter la droite (D).

Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique p.86

L'étude établit que les genres de tâches « Tracer » et « Représenter » ont sensiblement le même degré d'importance. Mais la fréquence d'apparition de ces genres de tâche dans les exercices proposés sur les transformations du plan est très faible par rapport à celui du genre de tâche « Construire ». On peut dire que celui-ci représente la tâche la plus importante sur les transformations du plan. C'est elle qui génère l'activité de construction autour des transformations du plan en classe de Première Scientifique. L'importance du genre de tâche « Construire » sur les transformations du plan pourrait provenir du fait qu'il génère beaucoup d'autres activités mathématiques transversales, comme les activités : d'argumentation, d'explication, de justification, de preuve...etc., favorisant ainsi le développement d'un des objectifs du programme de mathématique de la classe de Première Scientifique, l'apprentissage de la démonstration et du raisonnement déductif (MINESEC, 2018). Un exemple de ce genre de tâche est le problème ci-dessous.

50 I, J et K sont trois points non alignés.
 Construire un triangle ABC isocèle rectangle en A et de sens direct, tel que : $A \in (IJ)$, $B \in (JK)$ et $C \in (KI)$.
 (Il conviendra de distinguer le cas où le triangle IJK est rectangle en K, du cas où il ne l'est pas.)

Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique, N°50 p.86

Une étude plus large concernant l'importance de chaque genre de tâche aurait pu être menée sur tous les exercices sur les transformations du plan, mais ceci n'est pas l'objectif de notre travail qui se limite, comme nous l'avons précisé, à dégager le genre de tâche dominant autour des transformations de plan qui engendrent une activité de construction, chez les élèves, en classe de Première Scientifique.

L'étude du genre de tâches autour des problèmes de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique s'est faite à partir d'une analyse quantitative des verbes qui génèrent une activité de construction au secondaire, présents dans les questions formulées au niveau des exercices du manuel CIAM de cette classe. Cette étude nous a permis de constater la présence quasi exclusive du verbe d'action « Construire » dans la partie des exercices consacrée aux problèmes de construction, la très faible présence des tâches qui génèrent une activité de construction engendrée par « Tracer » et « Représenter », et une absence totale des verbes « Reproduire », « Reconnaître », « Décrire » et « Transformer ». Ainsi, nous admettons dans la suite de notre travail, qu'un problème de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique soit identifié ou formulé à partir du genre de tâche

« Construire ». Selon cette considération, on peut se poser la question de savoir **quelle est « la forme des données » utilisées dans la formulation d'un problème de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique.**

2.3.2. La forme des données des énoncés dans la formulation des problèmes de construction sur les transformations de plan, en classe de Première Scientifique

En se référant à la sous-section 2.2.2. de ce chapitre, nous désignons par « forme des données » de l'énoncé, dans la formulation d'un problème de construction, une caractéristique de l'énoncé d'un problème sur les transformations du plan incluant la figure, contenant le genre de tâche « Construire », et qui est susceptible de prendre des valeurs différentes, tel qu'un changement de cette valeur risque de modifier la forme de l'énoncé du problème. Ainsi, une « forme des données » de l'énoncé définit une structure, un type ou une forme de l'énoncé d'un problème de construction, relativement à la présence ou non et à la qualité de la figure (codée ou non) dans l'énoncé. Nous avons identifié (Cf. section 2.2) quatre structures susceptibles d'apparaître dans la formulation de l'énoncé d'un problème de construction sur les transformations du plan au secondaire. Nous adoptons les notations suivantes pour chaque structure : **FD_s** : Forme Discursive Simple ; **FD + F_s** : Forme Discursive accompagnée d'une Figure non codée ; **FD + F_c** : Forme Discursive accompagnée d'une Figure Codée ; **FFC_s** : Forme d'une simple Figure Codée.

Nous cherchons, par la suite, à étudier la présence de chacune de ces valeurs de la « forme des données », dans les énoncés des problèmes de construction sur les transformations du plan, proposés dans le manuel CIAM, en classe de Première Scientifique. Ceci nous permettra de déterminer les structures des problèmes de construction recommandées à ce niveau scolaire. Dans cette étude, nous nous intéressons uniquement aux problèmes de construction proposés dans les parties « Exercices » des chapitres « Isométries du plan » et « Homothéties du plan » de ce manuel. Nous avons écarté les problèmes de la partie « Cours » parce que dans certains de ces problèmes la figure accompagne en même temps l'énoncé du problème et la solution proposée, ce qui ne permet pas de conclure sur la structure. Les données récoltées sont consignées dans le tableau (T3) ci-dessous.

Chapitre, Page et Numéro	Type d'Exercice	FD _s	FD + F _s	FD + F _c	FFC _s
Chapitre 4	LES ISOMETRIES DU PLAN				
P 75	EC	1			
P 76	EC	1			
P84 N°19	EA ₂	1			
P84 N°20	EA ₂	1			
P84 N°21	EA ₂		1		
P84 N°22	EA ₂	1			
P84 N°23	EA ₂		1		
P84 N°24	EA ₂	1			
P84 N°25	EA ₂	1			
P84 N°32	EA ₃		1		
P84 N°46	EA ₃	1			
P84 N°47	EA ₃				
P84 N°48	EA ₃	1			

P84 N°50	EA ₃	1			
Chapitre 5	LES HOMOTHETIES DU PLAN				
P92 N°1	EC	1			
P92 N°2	EC			1	
P92 N°3	EC	1			
P92 N°4	EC			1	
P102 N°2a	EA ₁	1			
P102 N°2b	EA ₁			1	
P102 N°2c	EA ₁		1		
P103 N°6	EA ₂	1			
P103 N°7	EA ₂	1			
P103 N°8	EA ₂	1			
P103 N°9	EA ₂		1		
P103 N°10	EA ₂	1			
P103 N°11	EA ₂		1		
P103 N°12	EA ₂	1			
P104 N°25	EA ₃		1		
P104 N°26	EA ₃		1		
P104 N°27	EA ₃	1			
P104 N°28	EA ₃	1			
P104 N°40	EA ₃		1		
P104 N°45	EA ₃			1	

Tableau 3: Données sur la forme des données des énoncés (T3)

Légende :

EC = Exercice Corrigé ;

EA₁ = Exercice d'Application ;

EA₂ = Exercice d'Apprentissage ;

EA₃ = Exercice d'Approfondissement ; 1 = Forme Des Donnée Présente.

À partir de ce tableau (T3) et suivant le nombre des différentes valeurs accordées à la caractéristique « forme des données » de l'énoncé, dans la formulation des problèmes de construction sur les transformations du plan, rencontrés dans les exercices proposés sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique, nous pouvons dégager les résultats suivants que nous avons consignés dans le tableau ci-dessous :

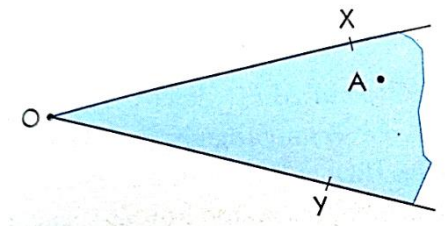
Forme des données	FD _s	FD + F _S	FD + F _C	FFC _S
Effectifs	21	10	4	0

Tableau 4 : Bilan de l'étude sur la forme des données des énoncés (T4)

L'étude montre une absence totale de la structure FFC_S (Forme d'une Figure Codée Simple) et une présence, avec des pourcentages différents des structures : FD_s, FD + F_S et FD + F_C. La structure FD + F_C est très faible (4 cas seulement sur 35), on peut dire que les énoncés des problèmes de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique, ne se présentent que très rarement sous la forme discursive accompagnée d'une figure codée. Dans 40% des problèmes de construction où la figure est donnée dans l'énoncé, seulement dans

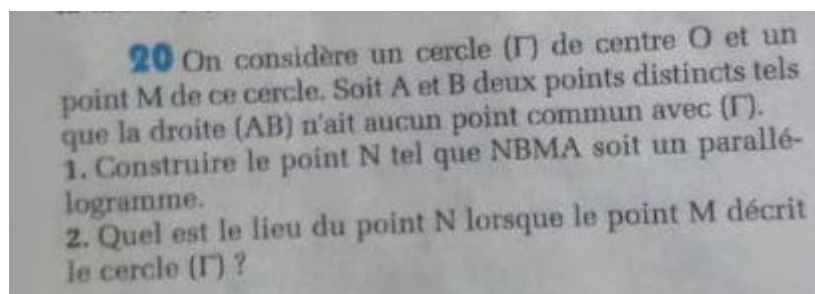
11% de cas où la figure est codée et dans 29% de cas où la figure est non codée ou bien où le codage est très faible. Ce qui signifie que les énoncés des problèmes de construction sur les transformations du plan prennent une forme discursive simple, éventuellement une forme discursive accompagnée d'une figure non codée ou faiblement codée. Ainsi, lors du choix des situations à soumettre à l'expérimentation, si nous optons pour une structure avec une figure dans l'énoncé, nous allons avoir recours à une figure non codée ou très faiblement codée. Un exemple qui illustre cette structure est le problème ci-dessous.

2. Sur la figure ci-contre, $[OX)$ et $[OY)$ sont deux demi-droites distinctes, A est un point situé dans la partie coloriée du plan, limitée par ces demi-droites. Construire un cercle passant par A et tangent à $[OX)$ et $[OY)$. Discuter, suivant la position du point A , le nombre de solutions.



Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique, N°2 p.93

Dans la plupart des énoncés des problèmes de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique, la structure dominante dans la formulation des énoncés est la forme FD_s . On peut dire que la structure la plus utilisée est la forme discursive simple. 21 problèmes sur les 35 du manuel sont présentés sous la forme d'un texte simple représentant l'énoncé du problème. Ainsi, lors du choix des situations à soumettre à l'expérimentation, nous allons adopter prioritairement la structure FD_s . Un exemple de problèmes de construction sur les transformations du plan relevant de cette structure est le problème ci-dessous.



Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique, N°20 p.84

Une étude plus large aurait pu être menée sur ces exercices concernant l'utilisation et les fonctions de la figure dans les énoncés des problèmes de construction, mais ceci n'est pas l'objectif de notre travail qui se limite, comme nous l'avons précisé, à dégager les différentes « formes des données » de l'énoncé, présentes dans la formulation des problèmes de construction sur les transformations du plan en classe de Première Scientifique.

L'étude sur la forme des énoncés des problèmes de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique, à travers « la forme des données » des énoncés dans la formulation des problèmes de construction, s'est faite à partir de l'analyse des exercices proposés dans le manuel CIAM de cette classe. Cette étude établit que, sur 35 problèmes de construction analysés, 21 sont formulés sous la Forme Discursive Simple, 11 sous Forme Discursive accompagnée d'une Figure non codée, 4 sous la Forme Discursive accompagnée

d'une Figure Codée et aucun n'est sous la Forme d'une Figure Codée simple. Les énoncés formulés sous la Forme d'une Figure Codée simple seraient absents parce que nous pensons qu'ils sont réservés aux niveaux inférieurs. Nous pouvons donc constater que tous les problèmes de construction proposés à ce niveau scolaire présentent *a priori* trois structures (ou formes) : FD_S , $FD + F_S$ et $FD + F_C$. Prioritairement, la structure FD_S est dominante. Cependant, ils peuvent prendre la structure $FD + F_S$ ou la structure $FD + F_S$ avec un codage très faible. Ce résultat nous permet de poursuivre la recherche, en se posant la question de savoir : **quelles sont les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique ?**

2.3.3. Le contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique

Un aspect du contrat didactique qui nous intéresse, dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique, est celui qui est relatif à la réalisation de la solution. Il est fortement implicite et décrit la forme d'une solution. Afin de dégager certaines règles de ce contrat, nous avons choisi de faire une étude quantitative des exercices résolus dans la section « Cours » des deux chapitres consacrés aux transformations du plan. En effet, le « Cours » représente le texte mathématique à enseigner. Nous nous sommes intéressés à analyser les solutions des activités d'approche, des exercices d'application et des exercices liés à l'utilisation des transformations du plan. Les problèmes analysés contiennent le genre de tâche « Construire ». Et ils sont formulés, soit sous la forme discursive simple (FD_S), soit sous la forme discursive accompagné d'une figure simple ($FD + F_S$) ou faiblement codée. Nous avons supposé avec Petersen (1879) que les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction, et les attentes implicites et explicites de l'institution liées aux différentes articulations de la solution d'un problème de construction, peuvent être identifiées à partir de la grille de critères ci-dessous, élaborée à partir des analyses faites dans la sous-section 2.2.4. Ainsi, pour chaque solution étudiée, nous avons cherché à vérifier si elle fait apparaître :

- Les étapes de la résolution
- Un algorithme (ou programme) de construction
- Une construction instrumentée
- Des arguments de validation
- Une mise en forme du discours de validation.

Soulignons que, le terme « validation » n'étant pas encore défini, nous l'avons pris au sens de Petersen (1879), tel qu'il est apparu dans « *Méthodes et Théories de résolution des problèmes de construction* ». Les données récoltées ont été consignées dans le tableau ci-dessous.

Chapitre, Page et Numéro	Type d'Exercice	Type de Problème					
			Etapes de résolution	Algorithme de Construction	Construction Instrumentée	Arguments de validation	Mise En Forme Du Discours
P 69	AP	PC		1	1	1	1
P70	EA ₁	PC	1	1	1	1	1
P75 N°1	EU	PC	1	1	1	1	1
P76 N° 2	EU	PC	1	1	1	1	1
P82 N°4	EU	PC	1	1	1	1	1
P92 N°1	EU	PC	1	1	1	1	1
P93 N°2	EU	PC	1	1	1	1	1
P97	EU	PC	1	1	1	1	1
P98	AP	PC		1	1	1	1
P101 N°	EA ₁	PC	1	1	1	1	1

Tableau 5 : Données sur les critères relatifs au contrat didactique lié à la réalisation de la solution d'un problème de construction (T5)

Légende :

PC = Problème de Construction ;

AP = Activité d'Approche ;

EA₁ = Exercice d'application ;

EU = Exercice lié à l'utilisation des PC ;

1 = Présent dans la solution ;

De ce tableau (T5), et suivant le nombre d'occurrences de chaque critère de la grille dans les solutions des problèmes de construction étudiés, nous pouvons extraire les résultats résumés dans les tableaux ci-dessous :

Etapes De Résolution	Présentes	Absentes
Effectifs	8	2

Tableau 6 : Bilan de l'étude sur la présence des étapes de résolution dans les solutions (T6)

Grille De Critères	Etapes De Résolution	Algorithme De Construction	Construction Instrumentée	Arguments De Validation	Mise En Forme Du Discours
Effectifs Par Exercice	2	10	10	10	10

Tableau 7 : Bilan de l'étude sur le contrat didactique relatif à la réalisation de la solution (T7)

D'une part, seulement 2 des 10 exercices étudiés ne présentent pas les étapes de résolution dans la solution, les 8 autres affichant toutes les étapes de résolution dans la solution, c'est-à-dire un algorithme de construction, une construction instrumentée, des arguments de validation et une mise en forme du discours de validation. Les deux solutions dans lesquelles les étapes de résolution ne sont pas explicitées sont celles des activités d'approche. Cela suppose que leur objectif n'est pas de mettre en évidence la technique de résolution d'un problème de construction, mais plutôt de mettre en avant une technique liée à la construction d'un élément

caractéristique d'une transformation du plan, ou à l'application d'une propriété. Prenons par exemple l'activité ci-dessous :

Composée de deux rotations de centres distincts :

Soit r et r' deux rotations de centre distincts O et O' , d'angles respectifs α et α' .

- Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}' \neq \widehat{0}$, alors $r'_{(O',\alpha')} \circ r_{(O,\alpha)}$ est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.

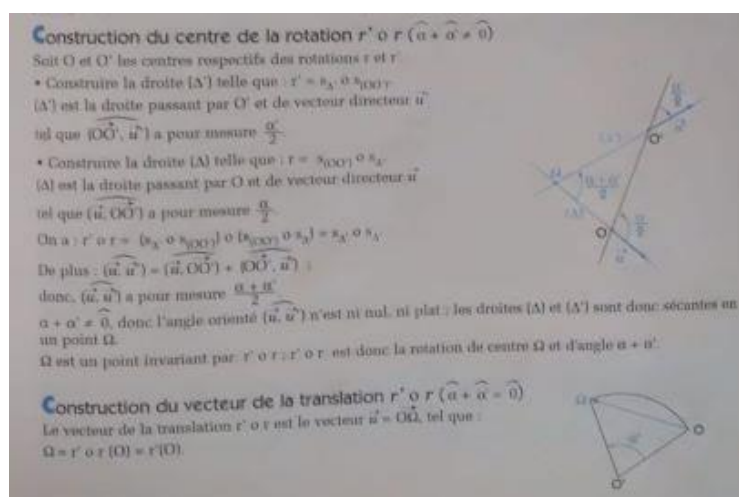
On a : $r'_{(O',\alpha')} \circ r_{(O,\alpha)} = r_{(\Omega, \alpha + \alpha')}$

- Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}' = \widehat{0}$, alors $r'_{(O',\alpha')} \circ r_{(O,\alpha)}$ est une translation.

On a : $r'_{(O',\alpha')} \circ r_{(O,\alpha)} = t_{\vec{u}}$.

Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique p.69

Cette activité porte sur les isométries du plan. Elle vise à démontrer que l'angle de la composée de deux rotations est la somme des angles de chacune des rotations. Lorsque cette somme est nulle, cette composée est une translation, sinon c'est une rotation. L'activité vise également à dégager une construction de l'angle de la rotation composée ou du vecteur de la translation issue de la composée. Nous nous sommes intéressés à la partie de cette solution qui vise la construction de l'angle et du vecteur de la composée, ce qui pour nous est un problème de construction, compte tenu du fait que le genre de tâche explicité est « Construire ».



Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique p.69

Dans cette solution, un algorithme définissant le processus qui permet de générer à chaque fois une construction instrumentée est donné.

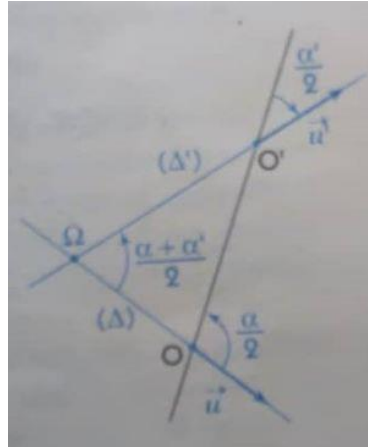
Soit O et O' les centres respectifs des rotations r et r' .

- Construire la droite (Δ') telle que : $r' = S_{\Delta'} \circ S_{(OO')}$. (Δ') est la droite passant par O' et de vecteur directeur \vec{u}' tel que (\vec{OO}', \vec{u}') a pour mesure $\frac{\alpha'}{2}$.
- Construire la droite (Δ) telle que : $r = S_{(OO')} \circ S_{\Delta}$. (Δ) est la droite passant par O et de vecteur directeur \vec{u} tel que (\vec{u}, \vec{OO}') a pour mesure $\frac{\alpha}{2}$.

Les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes en un point Ω qui est le centre de $r' \circ r$.

Algorithme correspondant à la solution précédente

L'exécution de cet algorithme permet à chaque fois d'obtenir une représentation graphique de l'objet. Ainsi, une construction instrumentée est réalisée pour illustrer l'algorithme élaboré. En effet, c'est une annexe, un moyen de contrôle rapide du programme de construction mis en place.



Construction instrumentée correspondant à la solution précédente

Ainsi, cette solution présente deux types de construction : un algorithme de construction et une construction instrumentée. Par ailleurs, des arguments (ou raisons) permettant de justifier l'exactitude de la construction sont présents et sont de type formel (ou théorique), puisqu'on peut lire :

« On a : $r' \circ r = (S_{\Delta'} \circ S_{(OO')}) \circ (S_{(OO')} \circ S_{\Delta}) = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$. De plus $(\widehat{u, u'}) = (\widehat{u, OO'}) + (\widehat{OO', u'})$ donc, $(\widehat{u, u'})$ a pour mesure $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$. $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' \neq \hat{\theta}$, donc l'angle orienté $(\widehat{u, u'})$ n'est ni nul, ni plat ; les droites (Δ) et (Δ') sont sécantes en un point Ω , Ω est un point invariant par $r' \circ r$; $r' \circ r$ est donc la rotation de centre Ω et d'angle $\alpha + \alpha'$ ».

Ainsi, le discours de validation de la construction est un argumentaire organisé sous la forme d'une démonstration (Petersen, 1879) qui opère par des substitutions et des interprétations des propriétés sur les angles orientés, les rotations, les lois sur la composition et la décomposition des rotations. La validation de la construction prend ainsi une forme démonstrative. Ce qui fait que le travail mathématique de construction et de validation s'effectue principalement dans la géométrie déductive, puisque le raisonnement s'appuie sur des connaissances géométriques et que les garanties du passage des données aux conclusions sont à chaque fois fondées sur les propriétés du référentiel et sur la déduction. Ce travail va ensuite glisser dans une cohabitation entre la géométrie instrumentée (Perrin-Glorian, 2014) et la géométrie déductive, puisqu'il faut passer de l'algorithme à la construction instrumentée. On a l'impression qu'il se stabilise dans la géométrie instrumentée puisqu'on constate que le raisonnement qui réalise la construction instrumentée s'appuie sur des vérifications et des contrôles, non plus à l'aide des propriétés, mais plutôt à l'aide des instruments géométriques. La validation est assurée par la précision apportée par les instruments. Or, ce type de validation, qui n'est pas attendu en classe de Première Scientifique, mais qui réapparaît ici, entraîne des malentendus sur la forme du travail de validation de la construction. Ce malentendu est vite levé puisque la construction

instrumentée n'est qu'une annexe, c'est-à-dire un moyen de vérification rapide de l'algorithme élaboré. Ainsi, on constate que cette solution se présente sous la forme d'un texte qui comporte un algorithme de construction, une construction instrumentée et une forme de validation de la construction réalisée qui est démonstrative. Cette forme de validation est explicitée par un argumentaire de type démonstratif qui emploie des arguments formels.

Nous pouvons faire l'hypothèse que les étapes de résolution ne figurent pas dans cette solution, simplement parce qu'elles ont été laissées à la charge du lecteur, puisque le but principal n'est pas de résoudre le problème de construction, où il faudrait mettre en avant toutes les articulations de la solution d'un problème de construction. Ici, le but est surtout de démontrer que l'angle de la rotation composée est la somme des angles de chaque rotation, qui donnera une translation lorsque cette somme est nulle.

Nous pouvons constater que la totalité des cinq critères fixés apparaissent dans huit solutions sur les dix étudiées. Prenons par exemple le problème ci-dessous.

Homothéties et problème de construction

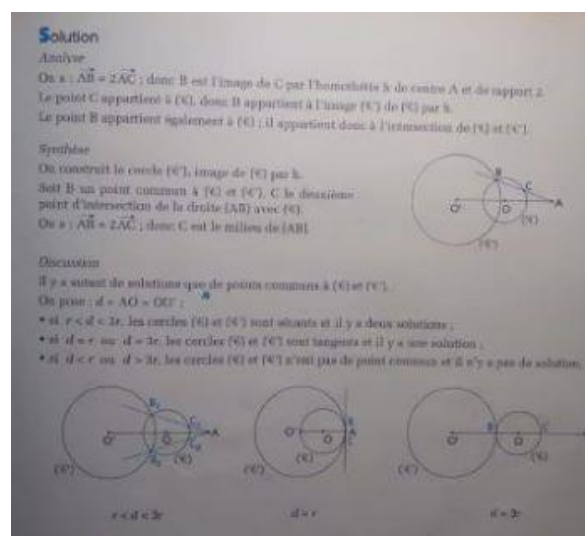
(C) est le cercle de O, A est un point extérieur à (C).

Construire une droite passant par A et coupant (C) en deux points B et C tels que C soit milieu du segment [AB].

Discuter, suivant la position de A par rapport à (C), le nombre de solutions.

Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique N°1 p.93

Cet exercice est lié à l'utilisation des homothéties (EU) pour résoudre les problèmes de construction. Il s'agit d'un problème de construction, car l'énoncé contient la tâche « Construire ». Il est donné sous la forme discursive simple. Ce problème vise à construire une droite passant par A et coupant le cercle (C) en deux points B et C de sorte que C soit milieu du segment [AB]. Tout ceci en utilisant les propriétés des homothéties. Voici la solution proposée dans le manuel :

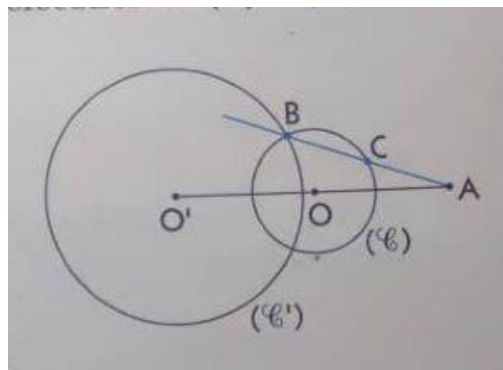


Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique N°1 p.93

Dans cette solution on voit clairement apparaître les étapes de résolution, puisqu'on peut lire au tout début « *Analyse* », ensuite « *Synthèse* » et enfin « *Discussion* ». Cependant, nous ne pouvons pas, dans le cadre de cet exercice, considérer la « *Discussion* » comme une étape, car l'énoncé demande de « *Discuter, suivant la position de A par rapport à (C), le nombre de solutions* ». Un algorithme de construction est présent :

« *Construire le cercle (C'), image de (C) par h. Soit B le point commun à (C) et (C'), C le deuxième point d'intersection de la droite (AB) avec (C). On a : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, donc C est le milieu de [AB]* ».

En parallèle, une construction instrumentée :



Construction instrumentée correspondant à la solution précédente

Les arguments qui justifient la construction sont formellement extraits des propriétés des homothéties, des vecteurs, du milieu d'un segment et de l'intersection d'un cercle et d'une droite, puisqu'on peut lire :

« $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, donc B est l'image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport 2. Le point C appartient à (C), donc B appartient à l'image (C') de (C) par h. Le point B appartient également à (C) : il appartient donc à l'intersection de (C) et (C'). $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, donc C est le milieu de [AB] ».

Ainsi, la mise en forme du discours de validation de la construction est bien présente. Elle est organisée sous la forme d'un argumentaire de type démonstratif. Et donc, la validation prend une forme démonstrative qui opère à travers des substitutions et des interprétations des relations vectorielles par des propriétés sur les homothéties du plan. Le travail de construction et de validation se fait dans une géométrie déductive et, dans une cohabitation entre la géométrie instrumentée et la géométrie déductive. Cependant, il commence dans une géométrie instrumentée pour formuler des conjectures et dégager les propriétés qui permettront l'élaboration de l'algorithme et la réalisation de la construction instrumentée. Ainsi, on constate que cette solution se présente sous la forme d'un texte constitué : des étapes de résolution, d'un algorithme de construction, d'une construction instrumentée, des arguments de validation de type formel, insérés dans un argumentaire de type démonstratif.

L'étude sur le contrat didactique, relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction en classe de Première Scientifique, s'est faite à travers l'analyse des exercices sur les transformations du plan résolus dans la partie « Cours » du manuel CIAM, à partir d'une

grille constituée de cinq critères que nous avons élaborés en référence aux travaux de Petersen (1866). Les cinq critères sont présents dans 8 solutions sur 10 du manuel, que nous avons analysées. On a constaté que les solutions dans lesquelles, la première étape de résolution était absente étaient celles des exercices d'approche qui ne visaient pas, prioritairement, à mettre en avant la technique de résolution d'un problème de construction cette articulation étant laissée à la charge du lecteur. Les solutions dans lesquelles les cinq critères étaient tous présents sont des exercices qui visent à montrer comment utiliser les transformations du plan pour résoudre les problèmes de construction. Ces solutions nous ont permis de constater que la résolution d'un problème de construction en classe de Première Scientifique est un texte constitué des étapes de résolution, d'un algorithme de construction, d'une construction instrumentée, des arguments de validation de type formels, insérés dans un argumentaire de type démonstratif.

Conclusion

Nous avons pour objectif de situer la notion de « problèmes de construction » dans l'enseignement des mathématiques au secondaire, d'identifier et d'explicitier certains éléments qui se positionnent comme des fondamentaux dans la résolution des problèmes de construction, afin de décrire comment cette catégorie de problèmes est résolue, puis de voir comment ces fondamentaux sont mis en fonctionnement en classe de Première Scientifique. Pour cela, nous avons conduit une enquête épistémologique dans les travaux de Barbin (1988), Petersen (1866 et 1879) et, Aynard et Pintrand (2017). Nous avons ensuite entrepris une analyse succincte des travaux en didactique portant sur la résolution des problèmes de construction, notamment ceux de l'ESPE de l'académie de Lyon (2013), Laborde (1990), Duval (1991) ; Brousseau (1985) et Chevallard (1999) ; et enfin, une enquête institutionnelle conduite dans les ressources disponibles en classe de Première Scientifique. Ces enquêtes nous ont permis :

- De définir **un problème de construction comme un problème dans lequel la tâche à accomplir, sous certaines contraintes, dans le cadre d'une activité de construction, conduit à la réalisation d'une construction, réalisation normalement soutenue par un raisonnement qui justifie que la construction réalisée est exacte et valide**. Cette catégorie de problèmes est utilisée au secondaire en tant que situations d'enseignement des savoirs (ou savoir-faire) mathématiques. La forme des données de l'énoncé, le genre de tâche et le contrat didactique, sont des éléments fondamentaux dans le processus de résolution. Cette résolution, qui se fait dans un contexte donné, à l'aide d'une méthode soutenue par des règles du contrat didactique, aboutit à une solution qui, selon le niveau scolaire, peut prendre la forme d'une figure ou d'un texte (Petersen, 1879).
- De constater qu'en classe de Première Scientifique, les problèmes de construction sont identifiés ou formulés prioritairement à partir du genre de tâche « construire ». Les énoncés prennent la forme discursive simple ou la forme discursive simple accompagnée d'une figure simple ou d'une figure faiblement codée. Leurs solutions prennent la forme d'un texte qui comporte les étapes de résolution, un algorithme de construction, une construction instrumentée et des arguments formels (ou théoriques) de validation de la construction, insérés dans un discours qui prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif.

Bilan

Nous retenons qu'un problème de construction lié aux transformations du plan, en classe de Première Scientifique, est formulé ou identifié à travers le genre de tâche « construire », genre de tâche dominant sur les transformations du plan, qui engendre une activité de construction. La forme des données dans la formulation des énoncés de ces problèmes prend prioritairement deux valeurs : la forme discursive simple et la forme discursive accompagnée d'une figure simple ou d'une figure faiblement codée. Une solution de cette catégorie de problèmes se présente sous la forme d'un texte qui ressort : les étapes de résolution, un algorithme de construction, une construction instrumentée et des arguments formels de validation de la construction, insérés dans un discours qui prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif.

Chapitre 3

Des éclairages didactiques et institutionnels sur la question de la validation dans l'enseignement des mathématiques au secondaire

Le développement de la démarche de validation constitue l'enjeu de notre recherche. Nous admettons que pratiquer « la démarche de validation » dans la problématique de la construction consiste à entreprendre de valider une construction réalisée au cours d'une activité de construction. Or, la validation fait partie des notions-outils de l'activité mathématique, qui ne sont pas perçues comme des objets mathématiques, mais plutôt comme des objets « *para mathématiques* » (Chevallard, 1991). Ce chapitre a pour objectif d'apporter des éclairages sur cette question de la validation dans l'enseignement des mathématiques, pour la caractériser dans la résolution des problèmes de construction. Nous voulons savoir :

Comment s'opère la validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique.

Répondre à cette question revient à caractériser la validation dans l'enseignement des mathématiques du point de vue didactique, à travers les travaux portant sur notre questionnement, ainsi que du point de vue institutionnel, à travers les ressources disponibles en classe de Première Scientifique. Pour cela, nous explorons d'abord le sens qui est donné à ce concept dans la littérature, nous différencions les contextes de validation et identifions les différentes formes de validation disponibles, en fonction du type de raisonnement et de la qualité du discours utilisée. Ensuite, nous menons une étude descriptive de la validation dans la résolution des problèmes géométriques en classe de Première Scientifique, pour mettre en évidence l'importance accordée à la validation et déterminer la conception de la validation véhiculée par cette institution. Enfin, nous identifions le type d'argument et d'argumentaire attendu dans le raisonnement de validation des constructions, le statut que prennent la validation et la forme de validation prescrite pour valider une construction à ce niveau scolaire.

3.1. La validation dans les travaux en didactique de mathématiques

Compte tenu du fait que nous voulons étudier comment développer la validation chez les élèves, à travers les interactions qui ont lieu au cours d'une séquence de résolution, entre ces derniers et l'enseignant, nous nous intéressons à la validation produite, tant par l'enseignant en interaction avec les élèves, que par les élèves et approuvée par l'enseignant. Nous admettons que la validation pratiquée est celle qui est institutionnalisée et décrite dans certains travaux en didactique de mathématiques. Et donc, pour aller vers la caractérisation de la validation dans la problématique de la construction, nous menons, dans ce premier paragraphe, des investigations dans quelques travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration dans le cadre scolaire. Ce point de vue didactique devrait nous permettre d'obtenir des éléments

d'analyse de la validation dans la résolution des problèmes de construction en classe de Première Scientifique.

3.1.1. Le concept de validation et les contextes de validation

En se plaçant dans la Théorie Des Situations Didactiques, (Brousseau, 1985), Margolinas (1993) estime que la validation est un élément déterminant de l'apprentissage en mathématiques. Pour elle, la validation est « *la possibilité qu'a le sujet de décider de la validité de ses propres actions* » (Margolinas, 1993, p.67). Balacheff (1988), en ajoutant que : « *la validation est d'abord liée à des fins pratiques* », pense « *qu'il s'agit de s'assurer les garanties nécessaires à un engagement dans l'action ; ici l'action de décider de la vérité d'une assertion* » (Balacheff, 1987, p.6). La validation désigne donc, pour lui, les raisonnements qui donnent les raisons (ou les arguments) écrites ou non, permettant d'assurer la vérité d'une assertion ou d'une décision. Il s'agit « *d'un processus qui est accepté par d'autres à un moment donné* » (Balacheff, in Arsac *et al.* 1992, p.6). À travers cette dernière précision, Balacheff assigne à la validation, d'une part un caractère social (c'est le seul processus qui est accepté dans la communauté où elle est mise en œuvre), et d'autre part une caractéristique sur la forme (elle respecte certaines règles reconnues et acceptées dans la communauté). Il assigne également un statut aux objets sur lesquels opère la validation : elle utilise des objets ayant un statut précis.

Cependant, dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD), à laquelle se réfèrent ces deux auteurs, on trouve les « situations de validation » qui donnent aux actants (Brousseau, 1998), des cadres d'ouverture du débat mathématique visant à établir la validité des connaissances caractéristiques mises en évidence par chaque situation. En effet, ces situations, qui constituent des moyens d'enseignement de la validation, définissent des contextes dans lesquels on peut investiguer, découvrir, ou explorer un concept mathématique. Ceci, à travers l'argumentation, l'explication ou la justification, qui sont des procédés que Balacheff (1988) qualifie de « processus de validation » lorsqu'il donne un sens aux termes : justifier, prouver et démontrer, dans ses *Processus de Preuve et Situations de validation*. Par ailleurs, la validation est considérée comme une phase dans la TSD, puisque Brousseau structure la résolution d'un problème mathématique dans le milieu scolaire en trois phases : l'action, la formulation et la validation. Et, Margolinas montre que, dans toute activité didactique il est inévitable qu'il y ait une phase de conclusion, au cours de laquelle l'élève reçoit des informations sur la validité de ses actions. Elle va situer la validation dans la conclusion, après avoir montré que cette phase de conclusion peut prendre deux formes différentes : l'évaluation, lorsque l'enseignant émet un jugement sur le travail de l'élève, qui nécessairement met fin au processus de résolution du problème ; et la validation, lorsque l'élève a la possibilité de décider par lui-même de la validité de ses actions, qui relance le processus de résolution de problème en cas d'invalidation. Elle souligne en effet que, dans la résolution d'un problème :

« *La phase de conclusion est une phase d'évaluation quand, dans cette phase, la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel [...] la phase de conclusion est une phase de validation si l'élève y décide lui-même de son travail* » (Margolinas, 1993, p.30).

Ainsi, en rejoignant Brousseau, elle situe la question de validation au-dessus de la recherche de la démonstration. Car, d'après Brousseau : « *un problème de validation est bien plus un problème de comparaison, d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration* » (Brousseau, 1998, p.127). Ce qui signifie que l'objectif de la phase de validation, dans la résolution de problèmes, est soit de décider, soit de convaincre, soit de savoir (comprendre), puisque Balacheff (2017), en considérant la preuve comme un régime de validation souligne que :

« *Nous distinguons trois types de situations qui appellent des processus de validation, voire la production de preuve. Ces situations peuvent être caractérisées par la fonction des preuves dans chacune d'elles : -Preuves pour décider, -Preuves pour convaincre, -Preuves pour savoir* » (Balacheff, 1988, p.10).

La validation peut donc aussi être perçue comme un moment de la résolution où le sujet est amené à évaluer son argumentaire et à prendre une décision sur la validité du résultat qu'il obtient. Résultat qui, en principe, sera évalué par le maître sous forme de jugement sans appel. Et donc, au-delà de la validation empirique de son action, le sujet, en situation de validation, construit des preuves qui lui permettent de valider la vérité des conclusions qu'il en tire et d'établir la pertinence de son modèle d'action. Ce qui signifie que l'objectif de la validation, pour le sujet en phase de résolution d'un problème, n'est pas de communiquer des informations qui ont permis d'aboutir au résultat, mais plutôt de chercher à se convaincre lui-même, de convaincre ses pairs et de convaincre le maître, tout en mettant en évidence un ensemble d'énoncés de référence qu'il organise sous forme d'argumentaire construite à travers un raisonnement constitué d'arguments qu'il enchaîne pas à pas. Le but est bien de « *prouver ce que l'on affirme autrement que par l'action* » (Douady, 1999, p. 5). Il est donc question de produire des justifications de la vérité sur les conclusions qui ont été arrêtées dans la phase d'action.

À travers cette analyse, nous constatons que valider revient à donner les raisons (Balacheff, 1988) mathématiques pour prouver, afin de se rassurer et convaincre autrui de la vérité de la conclusion sur les résultats obtenus au cours de la résolution. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, le terme de validation désigne tout raisonnement qui vise à établir la vérité d'une proposition, d'une solution ou d'une conclusion dans le but de s'assurer, se convaincre et convaincre autrui que le résultat obtenu vérifie les conditions que fixe l'énoncé du problème. La validation s'observe dans la problématique de la construction, sur une activité de construction, au cours d'une séquence de raisonnement, qui débute avec la tâche et se termine avec un résultat construit progressivement à l'aide des interprétations et substitutions des données du problème par des énoncés mathématiques validés, acceptés et reconnus par la communauté (Balacheff, 1987). Elle revêt un caractère social : c'est le seul processus qui est accepté dans la communauté des mathématiciens. Elle présente une caractéristique sur la forme : le respect d'un ensemble de règles logiques reconnues et acceptées par la communauté des mathématiciens. Et, elle assigne un statut aux objets sur lesquelles elle opère : l'utilisation des objets théoriques n'appartenant pas au monde sensible.

Cette analyse nous permet, par ailleurs, d'identifier différents aspects de la validation qui interviennent dans le processus de résolution d'un problème mathématique, à savoir : le but

(décider, convaincre et comprendre), sa double nature (produit et processus), les liens avec l'inférence¹³, les liens avec les formes de raisonnement (déductive, inductive ou abductive), ainsi que les liens avec plusieurs processus (conjecturer, contrôler, généraliser, exemplifier, prouver, argumenter, démontrer et justifier). Elle met aussi, en évidence les différents contextes où les sujets peuvent être amenés à produire une validation dans le cadre scolaire, à savoir : la découverte, l'explication et la justification. Ces contextes cadrent bien avec ceux qu'a identifiés Giaquinto (2005) lorsqu'il a décrit le travail global d'un mathématicien expert en fonction des objectifs à atteindre (dans Nechache, 2016, p.53-55). Il a établi que, dans le contexte de découverte, le mathématicien élabore, diffuse et s'approprie la connaissance ; dans le contexte d'explication qui, pour lui, est différent de celui de preuve (ou démonstration), le sujet s'investit à comprendre la connaissance mise en évidence ; et dans le contexte de justification, le sujet se donne des moyens pour établir la vérité d'une proposition. Dans ce dernier contexte, Nechache (2015) ajoute qu'ici l'objectif serait double : premièrement « *atteindre un certain degré de certitude relative à la vérité d'un théorème* » (Nechache, 2015, p.55), et deuxièmement « *atteindre un certain degré d'assurance relative à l'opportunité d'adopter cette définition* » (Nechache, 2015, p.55). Ainsi, la validation est associée à ces trois contextes, qu'elle soit produite à l'échelle scolaire ou à l'échelle du travail d'un mathématicien expert.

3.1.2. Le processus de recherche de validation

L'analyse précédente a établi que la didactique de mathématiques considère la validation comme un raisonnement mathématique qui prend une forme double : celle *d'un produit* et celle *d'un processus*. Cependant, le raisonnement est primordial dans ces deux formes et constitue le socle de chacune d'elles. C'est une activité qui occupe une grande place dans le travail du mathématicien au quotidien. L'élève, qui est un apprenti mathématicien, est initié à cette activité au cours de sa scolarité. Il la met en œuvre dans toute activité mathématique qu'il entreprend. Et donc, dans la résolution de problème. Or, le raisonnement est considéré en didactique de mathématiques comme « *une activité intellectuelle non complètement explicite de manipulation d'informations données ou acquises pour produire de nouvelles* » (Balacheff, 1988). Nous analysons les travaux de certains auteurs ayant travaillé sur cette question pour comprendre le fonctionnement du processus de recherche de validation, considéré comme un raisonnement mathématique. Ceci, dans le but de comprendre quelle « vérité » est établie dans ce processus et identifier les différentes formes de validation disponibles, afin de mieux situer la validation dans la problématique de la construction.

Les travaux de Cabassut :

Cabassut (2005, 2006) a développé un modèle de raisonnement mathématique axé sur le cadre de Toulmin¹⁴ (1993). Faisant remarquer, dans sa thèse, que la terminologie liée au raisonnement

¹³ L'inférence étant vue ici comme une opération mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie, en vertu de ses liens avec d'autres propositions.

¹⁴ Le cadre de Toulmin (1993) permet d'analyser la structure d'un argument. Ce cadre définit un argument comme étant un raisonnement élémentaire caractérisé par le triplet (données, règle d'inférence, conclusion). Et donc, un argument a une structure ternaire : l'énoncé ou conclusion qu'apporte l'interlocuteur (claim), un certain nombre de données justifiant l'énoncé (data), le permis d'inférer qui fournit une règle, un principe général capable de servir de fondement à cette inférence (warrant).

est très variable d'un auteur à l'autre, et d'un pays à un autre, il conclut de la nécessité de définir chacun des termes utilisés lorsqu'un écrit porte sur le raisonnement, ceci pour favoriser une bonne communication. Pour sa part,

« *Un raisonnement c'est d'abord une activité de l'esprit, une opération discursive par laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premiers : en ce sens c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet selon l'ordre du temps.* » (Cabassut, 2005, p.24).

D'après Cabassut, il existe deux types de raisonnement : les raisonnements de validation (ou simplement validation) qui visent à : « *établir la connaissance de la vérité d'une proposition, cette vérité peut être certaine, nécessaire, probable, plausible [...]* » (Cabassut, 2005, p.26) ; et les raisonnements qui ne valident pas la vérité d'une proposition mais qui visent plutôt : « *la connaissance d'une proposition suivant les critères de bien, de beau, de souhaitable ou autres* » (Cabassut, 2005, p.26). Ne faisant pas références aux mathématiques dans ces définitions, Cabassut situe sa réflexion à l'extérieur des mathématiques. Il classe parmi ces deux types de raisonnement, les raisonnements pour décider, pour persuader et pour découvrir. Toutefois, selon lui, cette réflexion est utile dans l'analyse des processus de validation mathématique (comme la démonstration) puisque l'idée de la recherche des raisons du « vrai » en fait partie. S'agissant des raisonnements de validation, l'auteur différencie deux types : le raisonnement de nécessité et le raisonnement de plausibilité. Le premier type est associé à la validation mathématique telle qu'on l'a définie précédemment, et le second serait inexistant dans les mathématiques savantes, car la plausibilité n'est pas définie. Le processus de recherche de validation consisterait donc à chercher à établir une vérité nécessaire (ou de nécessité), puisqu'il assimile la validation à un raisonnement de nécessité. Par ailleurs, pour étudier un raisonnement, Cabassut le décompose en arguments suivant le modèle de Toulmin (1993). Cette décomposition prend la forme de : données, permis d'inférer, conclusion. Ce qui lui permet d'enchaîner chacun des arguments selon un graphe auquel il associe les conditions institutionnelles dans lesquelles le raisonnement est élaboré. Ainsi, le processus de validation est rattaché à l'institution et vise à valider un énoncé construit *a priori*. Et donc, il est question pour le sujet (élève ou enseignant) de produire des raisons pour établir la vérité d'une assertion en utilisant les propriétés disponibles. En l'occurrence, il peut s'agir d'une construction réalisée au cours d'une activité de construction sur un problème de construction. Ainsi, le processus de validation, dans le modèle de Cabassut, vise une proposition cible. Il produit un travail mathématique et fait partie du travail de l'apprenti mathématicien, puisqu'au cours de la résolution d'un problème le sujet doit se convaincre, prendre des décisions et avancer, pour choisir ou ne pas choisir une propriété ou une action.

Cette analyse précise le sens de la vérité que cherche à établir le raisonnement de validation : *la vérité nécessaire* (ou de nécessité). Et explicite, à travers la décomposition de ce raisonnement, comment elle peut être élaborée. Cependant, Cabassut souligne qu'« *une validation pourra évoquer aussi bien une argumentation, une justification, une preuve ou une démonstration* » (Cabassut, 2005, p. 27-28). Or, ces processus de validation ont été explicités par Balacheff (1988), qui s'y est intéressé en se plaçant dans le contexte des situations de validation au collège (en France). Il est arrivé à la conclusion selon laquelle : « *un processus de*

validation est un raisonnement dont la finalité est de valider une proposition et éventuellement de produire une explication, une preuve ou une démonstration selon le cas » (Balacheff, 1988, p.37). C'est fort de cette conclusion que nous analysons ses travaux pour comprendre le fonctionnement des processus de validation, dont il s'accorde avec Cabassut (2005) pour les identifier comme des raisonnements de validation.

Travaux de Balacheff :

Balacheff (1982, 1987, 1988) a développé un modèle de raisonnement mathématique axé sur l'activité réelle des élèves (collège en France). Il se place dans le cadre de la TSD pour expliciter les procédés que nous avons identifiés avec Cabassut (2005) comme évoquant la validation, et qu'il qualifie de processus de validation. S'appuyant sur le raisonnement d'un individu (l'élève) en mathématique, Balacheff place au cœur de sa conception de la validation, la recherche de la « vérité » à travers « la logique ». Ainsi, il rejoint Cabassut (2005) en ce sens que « la vérité nécessaire » qui est mise en évidence dans le processus de recherche de validation est construite à partir de la logique. Il arrive à la conclusion selon laquelle « *le raisonnement est relatif, c'est un travail sur le texte, sur le langage, sur les images...etc. Ce qui veut dire que le raisonnement a un caractère situé, se fait en contexte et prend en compte les contraintes de ce contexte, donc contextualisé* » (Balacheff, 1987, p.34). Ce qui signifie qu'on peut trouver dans un raisonnement plusieurs types d'arguments : formels (ou théoriques), sémantiques, pragmatiques ou sémiotiques. Ainsi, il peut être assimilé aussi bien à l'organisation d'une proposition ou d'une action, à l'activité intellectuelle (ou pratique) non complètement explicite, à l'activité de manipulation d'informations données ou acquises, qu'à un processus mental permettant d'effectuer des inférences. Dans cette conception, Balacheff appelle **explication** : les « *discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées* » (Balacheff, 1987, p.2). Un discours ne pouvant être tenu que par une personne ou un groupe de personnes dans l'optique de communiquer à d'autres le caractère de vérité d'une proposition, l'explication vise d'abord à dégager les « raisons » d'un énoncé mathématique pour « répondre à la question du pourquoi ». En ce sens, elle renvoie aux significations, à la compréhension de la vérité (ou de la validité) d'un énoncé, au sens de la logique ayant guidé la construction de cet énoncé, et au sens de ses relations avec le corps des connaissances ayant favorisé cette construction. Ce qui veut dire que l'explication est produite dans le processus de validation pour communiquer et faire comprendre, et non pour établir la vérité mais pour convaincre. Et donc, toutes les explications ne visent pas à valider une proposition. Cependant, Balacheff fait remarquer que certaines explications peuvent être reçues pour preuves. Il définit **les preuves**, comme des « *explications acceptées par une communauté donnée à un moment donné* » (Balacheff, 1987, p. 148). Ici, il met en évidence trois notions : « le débat », « le consensus » et « la décision », au sein de la communauté à laquelle il fait allusion. Pour ce qui est de la décision, il précise que la « *décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs* » (Balacheff, 1987, p. 148). La question est de savoir comment déterminer, au sein de la communauté, un système de validation commun aux interlocuteurs. Pour lui, l'outil qui mettra d'accord les interlocuteurs sur le système de validation est le consensus à l'issue du débat. Le consensus, étant le reflet des choix d'une institution, permettra, au sein de la communauté, de définir un

système de validation relatif (ou une vérité relative) qui permettra d'accepter ou de réfuter une proposition. Ainsi, la finalité sera, soit de comprendre, soit de décider, soit de convaincre. Dans notre travail, nous allons adopter un point de vue anthropologique en définissant le système de validation (ou la vérité) relativement à une institution, et donc à une théorie, à une logique et à des contrats issus de cette institution. Ce qui signifie que, dans un problème de construction géométrique, le discours assurant la validité d'une construction (ou la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées) ne sera pas définitif. Il va être orienté par les paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006) dans lesquels le travail mathématique va s'effectuer, il pourra évoluer dans le temps avec le système axiomatique constituant l'arrière-plan mathématique de la géométrie utilisée et il dépendra de l'institution dans laquelle il est élaboré. Cependant, l'exactitude de la construction sera liée à l'adéquation entre les conditions que fixe l'énoncé du problème et la construction réalisée. Ainsi, nous parlerons d'une construction « exacte » et « valide ». Balacheff ajoute que :

*« Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuves que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons **démonstrations** ces preuves »* (Balacheff, 1987, p.30).

On peut constater que, pour Balacheff, la démonstration est un processus de validation qui se réfère à des connaissances théoriques reconnues, acceptées et institutionnalisées qui obéit à des règles de déduction, et utilise le formalisme dans lequel on retrouve la langue naturelle et le langage symbolique. Pour lui, la démonstration est une preuve particulière, dans laquelle l'interaction sociale occupe une place importante. Et, c'est cet élément (l'interaction sociale) qui sert de levier dans la production des arguments (raisons) qui permettent à un sujet d'établir la vérité nécessaire (Cabassut, 2005) pour se convaincre et convaincre autrui que le résultat obtenu vérifie bien les conditions que fixe l'énoncé du problème. Cependant, la démonstration est aussi, pour lui, un raisonnement qui prend nécessairement une forme strictement codifiée pour être acceptée dans la communauté mathématique. Pour les institutions de notre étude, Balacheff souligne que *« le type de démonstration qui est prescrit et accepté est le raisonnement déductif »* (Balacheff, 2017). Et donc, il s'agit d'une articulation de pas de déductions qui va des prémisses à la conclusion. Il rejoint à nouveau Cabassut sur ce point. Ainsi, la démonstration, dans son processus, utilise une suite de pas de déductions dont Cabassut a explicité la forme : *« un pas de déduction dans une démonstration a une structure ternaire, il est constitué des éléments suivants : les données, les règles de validation ou permis d'inférer et la conclusion cible »* (Cabassut, 2005, p.50-52).

Balacheff, appelle **argumentation** les *« explications qui visent à obtenir l'adhésion de l'interlocuteur »* (Balacheff, 1988), et reconnaît l'existence de ce processus dans la résolution de problèmes mathématiques., puisqu'il précise que *« la résolution de problèmes, dans laquelle je dirais volontiers que tous les coups sont permis, est le lieu où peuvent se développer des pratiques argumentatives »* (Balacheff, in Cabassut (2005, p.45)). Dans ce contexte, elle est une forme d'explication particulière organisée pour produire un résultat. Cette explication peut être

acceptée dans une institution¹⁵ à un moment donné. Et lorsqu'elle est acceptée par une communauté, elle prend le statut de preuve (Balacheff, 1987). Ainsi, l'argumentation peut être « *un discours écrit ou oral mené selon des règles communes et visant à parvenir à une conclusion mutuellement acceptable sur une déclaration dont le contenu ou la vérité fait l'objet de débats* » (Balacheff, 1987). L'auteur semble relever l'interaction sociale comme étant un élément qui rapproche la démonstration de l'argumentation qui pour lui, serait également « *constitutive des processus de validation engagés dans un contexte social* » (Balacheff, 1987, p.574). À ceci près qu'il situe la pratique de l'argumentation en contexte de découverte et celle de la démonstration en contexte de justification. Pour lui, l'argumentation ne viserait pas à établir la vérité d'une proposition indépendamment des interlocuteurs comme la démonstration, mais plutôt à obtenir l'adhésion de l'interlocuteur. Ce qui veut dire qu'il oppose les deux processus sur ce point, pour les différencier. Cette différence est plus perceptible lorsqu'il soutient que :

« *L'argumentation met en scène un objet, la validité d'un énoncé. Mais les sources de la compétence argumentative sont dans la langue naturelle et dans des pratiques dont les règles sont le plus souvent d'une nature profondément différente de celle que requièrent les mathématiques, et qui portent la marque profonde des interlocuteurs et des circonstances* » (Balacheff, 1988, p.7).

Et surtout lorsqu'il affirme :

« *[Qu']il n'y a pas d'argumentation mathématique au sens suggéré d'une pratique argumentative en mathématiques qui se caractériserait par le fait qu'elle échapperait à certaines des contraintes qui pèsent sur la démonstration* » (Balacheff, in Cabassut, 2005, p.45).

Cette analyse du raisonnement mathématique dans le modèle élaboré par Balacheff explicite le fonctionnement du raisonnement de validation à travers les définitions des termes : explication, preuve, démonstration et argumentation, considérés comme des processus de recherche de validation (Balacheff, 1988). Elle établit qu'un discours de validation peut être organisé sous la forme d'une démonstration structurée par des arguments formels (ou théoriques) ou en fonction du contenu sémantique élaboré à partir des arguments sémantiques¹⁶. Cependant, elle place au centre de la validation mathématique la démonstration comme le seul processus capable d'établir la vérité d'une proposition, d'une solution ou d'une conclusion, dans le but de s'assurer, se convaincre et convaincre autrui de la vérité de la conclusion sur le résultat obtenu au bout d'une séquence de résolution d'un problème. C'est une preuve particulière, et la seule acceptée dans la communauté mathématique. Cette analyse réduit l'argumentation à une explication qui vise à obtenir l'adhésion d'un interlocuteur, et donc n'établit pas une vérité nécessaire (Cabassut, 2005). Ceci met en évidence une distance cognitive radicale entre l'argumentation et la démonstration. Cependant cette distance, partagée par Cabassut (2005), est discutée par Pedemonte (2002).

¹⁵ Institution au sens de la Théorie Anthropologique du Didactique.

¹⁶ Ce sont des arguments qui ne sont pas formulés de manière formelle, mais qui s'appuient sur la signification ou le contenu des objets qu'ils mettent en jeu.

Travaux de Pedemonte :

Dans ses travaux, Pedemonte (2002) se pose une question : « *y a-t-il continuité ou distance cognitive entre argumentation et démonstration ?* » (Pedemonte, 2002, p.5). En effet, elle cherche à savoir ce qu'est une argumentation en mathématiques, et quel est son rapport avec la démonstration. Les analyses qu'elle conduit, en se référant aux recherches portant sur l'unité cognitive (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) et sur les rapports de l'argumentation et la démonstration (Duval, 1995), la conduisent à être en désaccord avec Balacheff (1988) et Cabassut (2005), en ce qui concerne la distance radicale qu'ils relèvent entre l'argumentation et la démonstration. Pedemonte pense que les raisonnements de validation en mathématiques :

« *Ne se réduisent pas seulement aux démonstrations. Il existe des raisonnements mathématiques, comme ceux de l'argumentation, qui ont pour objectif de fournir des « raisons » (ou « arguments ») pour accepter ou refuser certaines propositions* » (Pedemonte in Nechache, 2016, p.60). Pour elle, « les raisons » d'accepter ou de refuser certaines propositions sont toutes des permis d'inférer possibles qui composent l'argumentation, au regard de la structure d'un argument que donne Toulmin (1958). Et donc « *l'argumentation en mathématiques est avant tout une justification rationnelle* » (Pedemonte, 2002, p.24). Elle ajoute que l'argumentation ne se contente pas seulement de faire comprendre un énoncé, elle veut convaincre et établir la vérité de cet énoncé, par le biais de la rationalité qui, pour elle, se situe dans l'inférence qui met en relation la suite de propositions qui compose le raisonnement. Et donc :

« *L'objectif principal de l'argumentation en mathématique est la recherche de la vérité. En mathématique, on argumente quand on veut convaincre quelqu'un (soi-même ou un interlocuteur) de la vérité d'un énoncé. L'argumentation est alors un discours construit avec l'objectif de chercher le « vrai »* » (Pedemonte, 2002, p.30).

À travers cette affirmation, on constate que, pour Pedemonte, l'argumentation produite en mathématique fournit une justification rationnelle dans l'optique d'établir une vérité. Et sa finalité est de convaincre et de persuader un auditoire. Or, d'après Balacheff, « *la conviction vise à changer l'opinion ou les croyances par le biais de la rationalité et la persuasion cherche à obtenir l'adhésion de l'auditoire sans nécessairement convoquer la raison* » (Balacheff, 1988). Donc argumenter, pour Pedemonte, revient à convaincre un auditoire, et donc à le persuader. Cependant, elle pense que les raisonnements d'argumentation en mathématique sont des raisonnements logiques qui peuvent être décomposés en une succession de pas, et que chaque pas peut prendre la structure mise en place par Toulmin (1958) (données, permis d'inférer, conclusion), ceci pour faire le lien avec la démonstration. Qui, pour elle, a pour objectif « *d'établir la validité d'un résultat à l'intérieur d'un système théorique* » (Pedemonte, 2005, p.3). Elle établit que « *la démonstration et l'argumentation ont un objectif commun, celui de « la recherche des raisons du « vrai »* » (Pedemonte, 2002, p.44). Pour elle, d'une part, la démonstration cherche à « *valider un énoncé* », ce qui revient à « *attester la vérité à l'intérieur d'une théorie mathématique* » (Pedemonte, 2002, p.44) et, d'autre part, elle est « *élaborée à partir d'un raisonnement formulé par un langage et par des règles particulières* » (Pedemonte, 2002, p.44). Toutefois, elle souligne une différence fragile entre les deux procédés, due au fait que, contrairement à l'argumentation, les justifications qu'apporte la démonstration se situent

à l'intérieur d'un domaine théorique. Ce qui lui permet, en concluant « *qu'une démonstration n'est qu'une argumentation particulière* » (Pedemonte, 2002, p.45-46), de situer la démonstration dans la continuité de l'argumentation. Ainsi, il n'existe pas de rupture cognitive comme l'ont conclu Balacheff (1988) et Cabassut (2005), mais plutôt une continuité. La démonstration se développe à l'intérieur de l'argumentation, c'est une forme d'argumentaire de validation.

Cette analyse, qui interroge la distance cognitive existant entre la démonstration et l'argumentation, mise en relief par Balacheff (1988) et Cabassut (2005), positionne l'argumentation comme un processus de recherche de validation. Elle nous permet de constater que l'argumentation, dans la résolution de problèmes mathématiques, est un raisonnement qui recherche les raisons du « vrai » (Pedemonte, 2002), tout comme la démonstration mais par le biais de la rationalité : c'est une justification rationnelle. Toutefois, les justifications qu'elle produit ne sont pas nécessairement puisées à l'intérieur d'un domaine théorique comme dans la démonstration qui, elle, est une justification rationnelle à l'intérieur d'une théorie mathématique. La démonstration n'est donc qu'une argumentation limitée (ou particulière). Nous admettons cette continuité sur le plan théorique, dans le cadre de la résolution de problèmes mathématiques, et considérons la démonstration comme un cas particulier de l'argumentation dans laquelle la validation d'un énoncé est nécessaire ou certaine (Cabassut, 2005).

Synthèse sur les travaux de Cabassut, Balacheff et Pedemonte :

Ces travaux situent la validation dans l'action. Ramenée dans la résolution de problèmes mathématiques, ces auteurs considèrent la validation comme tout raisonnement mathématique qui vise à établir la vérité d'une proposition, d'une solution ou d'une conclusion dans le but de s'assurer, se convaincre et convaincre autrui que le résultat obtenu vérifie les conditions que fixe l'énoncé du problème. Et donc, la résolution d'un problème passe par la découverte, qui permet de produire un résultat, puis l'explication, pour accéder à la compréhension de ce résultat, et enfin la justification, qui met en place des moyens pour établir la vérité de la conclusion sur tous les résultats élémentaires obtenus.

Avec Cabassut (2005), nous avons constaté que la vérité mathématique à établir doit être une vérité nécessaire (ou de nécessité), pour que le raisonnement développé prenne le statut de raisonnement de validation (la démonstration). Toutefois, il reconnaît la vérité certaine (ou de certitude) qui met également en place un raisonnement de validation qui ne relève pas du domaine des mathématiques. Identifiant, la preuve, l'explication, l'argumentation et la démonstration comme des processus de validation, les travaux de Balacheff (1982, 1987, 1988) mettent en évidence les types d'arguments rencontrés dans un raisonnement (formel, sémantique, sémiotique et pragmatique). Ces travaux explicitent les processus de validation, considèrent la démonstration comme étant une preuve particulière qui est contenue dans l'explication, et mettent en évidence une distance cognitive entre la démonstration et l'argumentation, seuls procédés susceptibles d'établir une vérité de nécessité. Pedemonte (2002), s'opposant à cette idée, fait remarquer que l'objectif de la démonstration est d'établir la validité d'un résultat à l'intérieur d'un système théorique, et que celui de l'argumentation est de justifier un résultat par le biais de la rationalité. Elle conclut que la démonstration et

l'argumentation ont un objectif commun, celui de « la recherche des raisons du « vrai » ». Ce qui lui permet de soutenir la thèse d'une continuité cognitive entre les deux processus. Cette thèse semble justifiée sur le plan théorique puisqu'elle s'appuie sur la conduite du raisonnement et sur la mise en forme du discours de validation : « *les processus qui justifient un énoncé ne proviennent pas toujours d'une démonstration. Souvent, les justifications en mathématiques sont des argumentations* » (Pedemonte, 2002). Toutefois, cette thèse n'est peut-être pas adaptée aux situations de validation en salle de classe au niveau que nous considérons, où le terme argumentation n'est presque pas employé, comparativement à celui de démonstration.

Les implications didactiques :

Nous cherchons une première caractérisation de la validation (du point de vue didactique) pour disposer des éléments nous permettant de mieux la situer et de la décrire dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique. L'objectif est de savoir comment s'opère la validation dans la résolution des problèmes mathématiques. Pour cela, nous avons considéré que cette validation est celle qui est institutionnalisée et décrite dans certains travaux en didactique de mathématiques. Lesquels considèrent la validation comme étant une argumentation rationnelle utilisant le raisonnement dont le discours peut être organisé sous la forme d'une démonstration ou en fonction du contenu sémantique. Ce qui veut dire que la validation s'opère à l'aide des processus (de recherche de validation) qui génèrent un discours pouvant prendre une forme dépendant du contexte (découverte ou justification). Il s'agit *des argumentaires de validation* qui produisent des raisons (« argument ») visant à établir le (« vrai »), c'est-à-dire une vérité nécessaire (ou de nécessité). Ces argumentaires dépendent de la forme que prend le raisonnement dans le discours de validation élaboré. Cependant, Pedemonte (2002) relève que :

« Les validations pratiquées dans les classes mathématiques (au niveau secondaire) relèvent soit des raisonnements argumentatifs, soit des raisonnements démonstratifs. Cependant, lors de la résolution d'un problème, les raisonnements argumentatifs ou démonstratifs ne sont pas les seuls qui interviennent. En effet, ces deux raisonnements cités précédemment interviennent pour justifier un résultat qui a été conjecturé. Or la recherche du résultat d'un problème induit quelque part l'usage d'un raisonnement qui n'est certes pas celui de l'argumentation ou de la démonstration, mais plutôt un raisonnement qui conduit à un résultat qui est vraisemblablement vrai, et qui relève de l'induction ou de l'abduction » (Pedemonte, in Nechache, 2016, p.63).

Ce qui veut dire qu'en milieu scolaire le raisonnement de validation peut prendre ou non la forme d'une démonstration (Balacheff (1988) et Cabassut (2005)) et la forme que nous pouvons qualifier de certitude (ou de plausibilité). Ainsi, les raisonnements pratiqués en milieu scolaire peuvent être de type démonstratif, non démonstratif et de plausibilité (Cabassut, 2005). Les raisonnements démonstratif et non démonstratif sont liés au contexte de justification et visent à justifier un résultat, et les raisonnements de plausibilité qui sont pratiqués en situation de découverte visent à déterminer la certitude d'un résultat. Ces raisonnements utilisent des arguments qui peuvent être organisés sous la forme d'une démonstration ou en fonction du contenu sémantique. Nous pouvons dire que, convaincre de manière purement rationnelle, en milieu scolaire, revient à utiliser l'un de ces trois raisonnements. Et nous pouvons ainsi distinguer trois formes de validation dans la résolution de problèmes mathématiques en milieu

scolaire, qui diffèrent selon le contexte, l'objectif visé et la forme que prend le discours dans le processus de validation :

- **La forme démonstrative** : elle génère un argumentaire de type démonstratif, se déploie en contexte de justification pour établir une vérité nécessaire (Cabassut, 2005) par le biais de la logique mathématique. Le discours qui la structure est axé sur la déduction et organisé en enchaînement d'inférences (Balacheff, 1988).
- **La forme non démonstrative** : elle génère un argumentaire de type non démonstratif, se déploie en contexte de justification pour établir une vérité nécessaire (ou de nécessité) par le biais de la rationalité (Pedemonte, 2002). Le discours qui la structure n'est pas organisé sous la forme d'une démonstration (Balacheff (1988) et Cabassut (2005)).
- **La forme dite de plausibilité** : elle génère un argumentaire qualifié de plausibilité, se déploie en contexte de découverte pour établir une vérité certaine (Cabassut, 2005), c'est-à-dire la vraisemblance d'un résultat. Elle obéit à des règles de pertinence.

Ainsi, pour les travaux que nous avons analysés (Cabassut (2005), Balacheff (1987 et 1988), Pedemonte (2002)), la validation dans la résolution de problèmes, peut être caractérisée à travers des argumentaires de validation selon trois critères :

- **Son objectif** : selon qu'il justifie le résultat ou qu'il établit la certitude du résultat.
- **Sa mise en forme** : selon qu'il est organisé sous la forme d'une démonstration ou non, ou qu'il est organisé en fonction du contenu sémantique.
- **Son contexte** : selon qu'il fait découvrir ou qu'il justifie.

Nous allons nous appuyer sur ces critères pour décrire et caractériser la validation dans la résolution des problèmes de construction en classe de Première Scientifique, dans le paragraphe qui suit. La question est de savoir **quel sens prend la validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique.**

3.2. La validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique

Pour décrire la démarche de validation des constructions attendue dans l'institution « classe de Première Scientifique au Cameroun » que l'enseignant doit développer chez les élèves, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction, nous essayons de caractériser la validation du point de vue institutionnel. Afin de dégager le type d'argument et d'argumentaire attendus, le statut que prennent la validation et la forme de validation prescrites. Pour cela, nous engageons une double démarche :

- D'abord, nous cherchons l'importance de la validation dans la résolution de problèmes de construction en classe de Première Scientifique.
- Ensuite, nous déterminons la conception qu'a l'institution « classe de Première Scientifique au Cameroun », de la validation dans la résolution des problèmes de construction.

Pour atteindre cet objectif, nous conduisons une analyse épistémologique des programmes de mathématiques issus des deux dernières réformes (1992 et 2014) de l'enseignement secondaire, que nous complétons par une analyse de manuels de la classe de Première Scientifique.

3.2.1. L'importance de la validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique

Pour dégager l'importance de la validation dans la résolution des problèmes de construction en classe de Première Scientifique, nous déterminons la place que cette institution accorde à la validation dans l'enseignement de la géométrie, suivant la réforme de juin 1992, instituant l'Approche Par les Objectifs (APO) ; et la réforme de 2014, instituant l'Approche Par les Compétences (APC). Pour cela, nous analysons les rédactions et les formulations des textes des programmes traduisant la mise en œuvre de ces deux réformes, dans leurs parties consacrées à la géométrie. Ceci, dans le but de repérer les changements qui ont affectés les points de vue sur la validation mathématique, dans l'enseignement de la géométrie, d'une réforme à l'autre.

3.2.1.1. La place de la validation dans la réforme de 1992¹⁷

Dans les textes d'adoption de cette réforme, on retrouve trois objectifs majeurs dont l'un (le deuxième) est consacré à la validation. Il stipule que la réforme vise :

« L'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de la valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux méthodes mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion » (IRMA, cité dans CIAM, 1998, p.2).

Cet objectif positionne la validation comme un élément fondamental qui guide l'enseignement des mathématiques en général, et de la géométrie en particulier. La conjecture des hypothèses, l'argumentation, la justification, la preuve et la démonstration, en arrière-plan de cet objectif, transparaissent comme des raisonnements mathématiques qui doivent obligatoirement être pratiqués, pour présenter la validation comme le seul moyen qui permet de faire accepter les résultats obtenus. Dans la partie réservée aux recommandations, on peut lire que les programmes issus de cette réforme :

« Redonnent toute leur place (50% du volume) à la géométrie plane, discipline fondamentale pour l'apprentissage du raisonnement logique et l'initiation à la démarche scientifique, et de l'espace, monde des solides dans lequel nous vivons » (MINEDUC, 1998).

Ainsi, les enseignants doivent : *« mettre l'accent sur le rôle formateur des activités de résolution des problèmes »* (MINESEC, 1998), tout en précisant que : *« la résolution des problèmes issus de la géométrie demeure un objectif fondamental »* (MINESEC, 1998). Ici, la géométrie apparaît comme un lieu privilégié pour l'apprentissage de la validation. Un lieu dans lequel la résolution de problèmes est un outil essentiel. Or, la résolution de problèmes produit un discours qui met en place un raisonnement cohérent visant, non seulement à convaincre autrui et à comprendre, mais aussi à prendre des décisions. Et donc, l'enseignant doit, d'une part, *« organiser ses enseignements en privilégiant l'acquisition de méthodes et d'une démarche scientifique chez les élèves. Le cours de géométrie est avant tout un lieu de*

¹⁷ La réforme de juin 1992 est issue de l'idée d'harmonisation des programmes de mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. Cette idée émerge des séminaires organisés par l'IRMA entre 1983 et 1992, visant à instituer l'approche par les objectifs (APO) dans les systèmes éducatifs des pays membres (MINEDUC, 1992).

découverte, de réflexion et de débat » (MINESEC, 1998). Et, d'autre part, « *entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique en développant conjointement les capacités d'expérimentation, de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique* » (MINESEC, 1998). Ceci, pour, « *développer les capacités d'organisation et de communication, renforcer les objectifs d'acquisition de méthodes* » (MINESEC, 1998). Ce qui signifie que la validation contribue à l'acquisition des bases de la démarche et du débat scientifique. Les savoirs géométriques institutionnalisés doivent être construits et validés avec les élèves, exclusivement dans le cadre des règles du débat mathématique, que les élèves doivent s'approprier. Or, au cœur du débat mathématique se trouve la recherche des raisons du « vrai » d'un énoncé, dans le but de le valider. Et donc, la logique de ces programmes est d'amener les enseignants à intégrer, dans leurs approches d'enseignement de la géométrie, la validation, qui constitue une priorité. La pratique de l'argumentation pour juger de la pertinence des résultats et celle de la démonstration pour juger la vérité de ces résultats afin de convaincre autrui, demeurent les seules démarches que doivent mettre en œuvre les enseignants dans leurs pratiques. L'un des enjeux de cette réforme est de poursuivre le développement, chez les élèves, de la pensée mathématique initiée au collège. Ce développement : « *repose sur un ensemble de connaissances solides et sur des méthodes de résolution de problèmes et de modes de preuves (raisonnements déductifs et démonstrations spécifiques)* » (MINEDUC, 1994). Et donc, les programmes doivent : «- *assurer un enseignement d'excellence intégrant l'enseignement du raisonnement logique et permettre la poursuite d'études scientifiques tant au Cameroun qu'à l'extérieur ; - privilégier l'acquisition d'une démarche scientifique, tenant compte de la capacité d'intuition de chacun* » (MINESEC, 1998). Nous constatons que la validation est présentée ici, comme un outil favorisant l'acquisition des éléments de base de la pensée mathématique. Pour ces programmes, c'est un élément important qui assure la continuité et la poursuite des études scientifiques. Cependant, « *les éléments de raisonnement logique (notion de proposition, connecteurs, quantificateurs) ne feront pas l'objet d'un cours, mais seront introduits et réinvestis toutes les fois que le besoin se fera ressentir* » (MINESEC, 1998). Ce qui signifie que la logique formelle ne constitue plus un objet d'enseignement, comme cela l'a été dans les programmes (Programmes de 1982) précédant cette réforme. Toutefois, la validation reste centrale et constitue une priorité.

Nous constatons que la réforme de 1992 donne toute sa place à la validation mathématique dans l'enseignement de la géométrie. Les programmes (MINEDUC, 1994 et MINESEC, 1998) issus de cette réforme, accordent une très grande place à la validation dans l'enseignement de la géométrie, en classe de Première Scientifique. Ces programmes positionnent la validation comme le seul élément qui guide et structure l'enseignement de la géométrie. D'ailleurs, c'est le seul moyen que doivent utiliser les élèves pour comprendre, décider et faire accepter un résultat mathématique. Toutefois, cette réforme écarte des programmes le chapitre sur la logique formelle.

3.2.1.2. La place de la validation dans la réforme de 2014¹⁸

L'un des objectifs généraux de cette réforme, lié à l'enseignement des mathématiques, est d'amener les élèves à :

« *Utiliser les mathématiques en toute confiance pour résoudre des problèmes issus des différents domaines de vie ; communiquer et raisonner de manière rigoureuse, précise et logique* » (MINESEC, 2018).

Dans cette disposition, la validation qui y transparait constitue une attente et une exigence majeures. Elle est présentée comme étant capitale et fondamentale dans les approches qui vont être adoptées pour l'enseignement des mathématiques. Ici, la validation est présentée comme un argumentaire qui aide à convaincre l'autre de la validité d'une proposition, et à établir la vérité de la conclusion d'un résultat mathématique. Pour cette réforme, la validation peut prendre la forme : d'une explication pour préciser, d'une justification ou d'une preuve pour comprendre, décider et communiquer (Balacheff, 1988), ou d'une démonstration pour raisonner de manière rigoureuse et logique afin d'établir les résultats (Balacheff, 1987). Et donc, pour convaincre autrui. Une finalité des programmes de cette réforme est de : « *former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes dans le but de développer des compétences pour conduire un raisonnement : une démonstration* » (MINESEC, 2018). Ce qui signifie que la validation est l'outil qui favorise l'acquisition de la démarche scientifique. Elle prend la forme d'une démonstration pour développer cette démarche, et constitue le seul moyen par lequel les élèves peuvent faire accepter les différents résultats obtenus. Par ailleurs, les programmes issus de cette réforme précisent que l'élève doit être capable de « - *donner son point de vue, émettre un jugement argumenté, - développer des démarches de résolution des problèmes* » (MINESEC, 2018). Or, dans les démarches de résolution de problème, d'émission d'un jugement ou d'un point de vue, la validation se positionne comme un outil qui permet de comprendre, décider, communiquer et convaincre. Ce qui signifie qu'elle est un levier dans ces différents processus. Ainsi, une mission sociale est assignée aux enseignants dans cette réforme :

« *La formation intellectuelle des élèves, en développant progressivement les capacités d'expérimentation, de raisonnement logique, de créativité et d'analyse critique, afin de les rendre capables, dans les situations de vie, d'exercer pleinement leur citoyenneté* » (MINESEC, 2018).

Et, pour atteindre cette mission, les programmes précisent que :

« *La géométrie plane occupe une place privilégiée dans le programme de mathématiques, de par les compétences qu'elle vise à développer. Sa contribution au développement de la technologie, de l'art, de la chimie, ne sont plus à démontrer ; enfin les innombrables symétries*

¹⁸ La réforme de 2014 est issue de l'idée d'amélioration qualitative et quantitative de l'éducation au Cameroun. Elle vise à consolider les acquis de la vision de l'école camerounaise telle que définie dans la loi d'orientation de l'éducation au Cameroun et mise en œuvre à travers une Approche Par les Compétences (APC). Cette réforme traduit la volonté du Cameroun de s'arrimer aux orientations des deux documents de pilotage dont il s'est doté, en vue d'atteindre son émergence à l'horizon 2035. Il s'agit du Document de Stratégie pour la Croissance et l'Emploi (DSCE) et du Document de Stratégie du Secteur de l'Éducation et de la Formation (DSSEF), (MINESEC, 2018).

que la nature offre dans la biologie et la physiologie végétale ou animale font de ce module un des maillons essentiels dans plus d'un domaine d'apprentissage » (MINESEC, 2018).

Ici, comme dans la réforme de 1992 (Cf. paragraphe 3.2.1.1), la géométrie, à travers son imbrication dans différents domaines, se positionne comme un outil important pour l'apprentissage de la validation, considérée comme une compétence transversale ou un savoir-faire présent dans tous les autres domaines. Ainsi, de par ses aspects visuels et esthétiques, la géométrie donne lieu à plusieurs types de raisonnement permettant à :

« *L'apprenant de développer les compétences transversales suivantes : le sens de l'ordre, le sens de la rigueur et de la concision (en intégrant, dans le cadre d'une démarche scientifique, chacune des méthodes utilisées pour le traitement compétent des situations de vie), la pensée critique, le sens de l'initiative et de la créativité. Autant d'attitudes qui contribuent à la formation d'un citoyen autonome et responsable dans l'exercice de ses rôles sociaux.* » (MINESEC, 2018).

Ce qui signifie que la validation contribue à la formation du sens d'autonomie et de responsabilité chez le futur citoyen qu'est l'élève.

Contrairement à la réforme de 1992, nous constatons que, dans cette réforme, toute une partie est consacrée au « *Raisonnement logique* » dans laquelle il est précisé que :

« *Les élèves sont entraînés, sur des exemples, à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles* » (MINESEC, 2018).

Ce qui traduit un retour, sous une autre forme, du cours sur la logique formelle. Renforçant ainsi la place de la validation dans l'enseignement de la géométrie dans cette réforme, qui était déjà importante dans la réforme précédente. Les enseignants peuvent donc, à travers des exemples, entraîner les élèves à l'utilisation du langage mathématique qui, d'après Durrand-Guerrier (2005), nourrit la validation.

Nous constatons qu'avec le retour subtil du cours sur la logique formelle, la validation prend une place encore plus importante dans l'enseignement de la géométrie en classe de Première Scientifique. Les programmes (MINESEC, 2018) issus de cette réforme renforcent la place de la validation dans l'enseignement de la géométrie qui reste le seul moyen que doivent utiliser les élèves pour faire accepter les résultats qu'ils obtiennent.

3.2.1.3. Bilan sur la conception de la validation, du point de vue des programmes issus des deux dernières réformes de l'enseignement des mathématiques

L'étude de l'importance de la validation dans la résolution des problèmes de construction, à travers l'exploration de la place de la validation dans l'enseignement de la géométrie suivant les deux dernières réformes (1992 et 2014) de l'enseignement des mathématiques, établit que la validation a occupé une place importante dans la réforme de 1992, malgré la sortie du cours sur la logique formelle. Cette place a été renforcée dans la réforme de 2014, avec l'ouverture, dans les nouveaux programmes, d'une partie consacrée au « *Raisonnement formel* ». Dans laquelle il est recommandé aux enseignants d'entraîner les élèves, « *sur des exemples, à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles* » (MINESEC, 2018). Cette étude met en évidence l'invariance de la place qu'occupe la validation dans l'enseignement de la géométrie. Que ce soit dans l'approche par objectifs (1992) ou dans

l'approche par les compétences (2014), une place importante est accordée à la validation, qui est considérée, dans les deux réformes, comme la base fondamentale de l'enseignement de la géométrie, puisque, dans les deux cas, la géométrie contribue à la formation scientifique des élèves et permet de développer la démarche scientifique, la capacité de conjecturer, la prise de décisions et le sens de : compréhension, communication, argumentation et démonstration. De ce fait, un rôle important est accordé à la validation dans la résolution des problèmes de construction en classe de Première Scientifique, qui constitue un levier pour l'enseignement de la géométrie et la formation du futur citoyen. La validation permet à l'enseignant d'amener les élèves à comprendre, conjecturer, décider et communiquer un résultat, aussi bien en mathématiques que dans d'autres domaines. Notons qu'est maintenue l'exigence qu'il n'y ait pas de cours sur la logique formelle (implication, notion de réciproque, d'équivalence et leurs démonstrations). Cependant, si la validation est importante dans la résolution des problèmes de construction en classe de Première Scientifique : **quelle conception cette institution a-t-elle de la validation dans la résolution des problèmes de construction ?**

3.2.2. La conception de la validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique.

Pour déterminer la conception qu'a l'institution « classe de Première Scientifique » de la validation dans la résolution des problèmes de construction, nous déterminons la forme de validation mise en œuvre dans l'enseignement de la géométrie. Et pour cela, nous essayons de décrire le type de raisonnement de validation prescrit, à travers une analyse épistémologique des commentaires des programmes actuels (réforme 2014), portant sur la validation, dans la partie consacrée à la géométrie. La description de ce raisonnement va mettre en évidence le type d'argumentaire de validation attendu. Nous identifions cet argumentaire à partir de la grille ci-dessous, issue des résultats d'analyses des travaux en didactique de mathématiques (Cf. la section 3.1) :

- L'objectif du raisonnement ;
- Le contexte dans lequel ce raisonnement est déployé ;
- La mise en forme du discours.

3.2.2.1. La conception de la validation du point de vue des programmes actuels

Dans les programmes actuels (réforme de 2014), l'enseignement de la géométrie plane s'étend sur le module intitulé : « *Configurations et Transformations élémentaires du plan* ». Dans ce module deux familles de situation sont retenues :

« - *Représentations et transformations des configurations planes dans l'environnement* ; - *Utilisation des objets techniques dans la vie quotidienne* » (MINESEC, 2018).

Ces situations sont abordées suivant deux approches : l'approche affine et l'approche par les expressions analytiques (Cf. chapitre 1). Dans la mise en œuvre de ces approches, les élèves doivent pouvoir : « - *résoudre une situation problème* ; - *déployer un raisonnement mathématique* ; - *communiquer à l'aide du langage mathématique lorsque c'est nécessaire* » (MINESEC, 2018).

Pour l'enseignant à qui ces programmes s'adressent, il s'agit d'utiliser la résolution des problèmes géométriques pour amener les élèves à acquérir des connaissances à travers des

méthodes et des outils, puis leur apprendre à les utiliser pour produire des preuves (Balacheff, 1988), à l'aide d'un langage accepté dans la communauté mathématique. Le but du raisonnement qui est prescrit ici est de mettre en évidence un concept géométrique nouveau, le faire comprendre et faire accepter son exactitude. Deux contextes d'utilisation de ce raisonnement sont mis en exergue, la découverte et la justification. Ce raisonnement peut être organisé sous la forme d'une démonstration ou d'une argumentation, qui sont les seuls raisonnements que nous avons identifiés dans la résolution des problèmes mathématiques au secondaire (Pedemonte, 2002). Ici, une compétence à développer consiste à amener les élèves à : « *Résoudre des problèmes par : - le raisonnement, l'identification et la caractérisation des formes planes ; - les transformations élémentaires que sont les applications planes.* » (MINESEC, 2018).

Cela signifie que le raisonnement doit être formalisé et doit utiliser des arguments issus des énoncés mathématiques, ou des observations, faites sur des formes planes. Il s'agit donc d'extraire des arguments, de prendre des décisions et de communiquer des résultats. Ce qui veut dire que l'objectif du raisonnement est, soit d'établir la certitude d'un résultat, soit de le justifier. Par ailleurs, l'élève doit pouvoir :

« *Extraire des informations mathématiques de son niveau d'un document ou dans son environnement et les analyser, formuler un problème simple à partir d'observations faites et le modéliser, ordonner et structurer une solution, une conclusion ou un résultat.* » (MINESEC, 2018).

Et donc, l'utilisation des figures n'est qu'heuristique, juste pour découvrir, observer et émettre des conjectures. Ainsi, le raisonnement peut partir d'une observation faite sur une figure construite, se poursuivre par la découverte d'une propriété pertinente, s'enchaîner sur une formulation des conjectures, qui par la suite sont validées à travers une preuve qui prend la forme d'une démonstration ou d'une argumentation. Cette preuve opère par des substitutions et des interprétations des données. Les élèves doivent « *suivre un protocole mathématique simple, utiliser une calculatrice.* » (MINESEC, 2018) et « *décrire ou identifier des objets, réaliser des objets courants* » (Ibid). Ce qui veut dire que l'objectif du raisonnement est de donner les raisons du « vrai », c'est-à-dire de justifier un résultat, pour établir une vérité nécessaire (Cabassut, 2005). Ainsi, les arguments utilisés peuvent être de types formels, sémantiques ou sémiotiques, et organisés, soit sous la forme d'une démonstration, soit en fonction du contenu sémantique. Toutefois, les élèves doivent « *déployer un raisonnement mathématique (analogique, inductif et déductif)* » (MINESEC, 2018). Ainsi, le raisonnement à mettre en œuvre doit être construit progressivement suivant trois étapes : la première est la recherche des arguments (ou raisons), qui s'appuie sur un raisonnement analogique ; la deuxième est la production d'une preuve, qui s'appuie sur le raisonnement inductif ; et la troisième porte sur la mise en forme du discours de preuve, qui s'appuie sur le raisonnement déductif, soutenu par des propriétés institutionnalisées. Ce qui signifie que l'argumentaire de validation est une succession d'arguments, où un argument de validation est constitué des hypothèses, des propriétés et de la conclusion. Cela nous permet de constater qu'une démarche de validation dans la résolution de problèmes consiste en : la recherche des arguments, la production d'une preuve, et la mise en forme du discours de preuve.

Tout un arsenal issu de la logique formelle est mis en place dans ces programmes (MINESEC, 2018), à travers la partie consacrée au « *Raisonnement formel* », invitant les enseignants à entraîner les élèves sur des exemples :

« - à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ; - à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ; - à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ; - à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ; - à formuler la négation d'une proposition ; - à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ; - à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde, etc... » (MINESEC, 2018).

Ces éléments de logique formelle qui doivent être nourris, chez les élèves, ont pour rôle d'apporter de la rigueur et de la cohérence au raisonnement de validation, qui prend ainsi le statut de démonstration. Par ailleurs, cette cohérence et cette rigueur par le langage vont guider la mise en forme du discours, qui sera organisé sous la forme d'une démonstration. Le raisonnement doit donc être logique pour installer « *l'esprit critique, l'esprit de curiosité, le sens de l'ordre et de la méthode, le sens de la rigueur et de la concision* » (MINESEC, 2018) ; et favoriser « *le développement de la rigueur, de la créativité et de la pensée critique* » (MINESEC, 2018). Ainsi, l'argumentaire de validation prescrit est de type démonstratif. Il utilise des arguments formels (ou théoriques), se déploie en contexte de justification pour établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions élémentaires réalisées. Et donc, la forme de validation attendue est démonstrative.

Nous constatons que, dans la résolution des problèmes de construction, l'argumentaire de validation prescrit s'inscrit dans le contexte de justification. Il a pour objectif d'établir la vérité d'un résultat et doit être organisé sous la forme d'une démonstration. Cette forme s'articule avec l'une des approches prescrites (affine ou par les expressions analytiques), et est élaborée à partir de trois types de raisonnements qui s'emboîtent et s'articulent totalement : le premier est analogique, il permet la recherche d'arguments à partir des hypothèses ; le second est inductif, il permet de découvrir les propriétés pertinentes pour l'élaboration des conjectures ; le troisième est déductif, il permet la production du discours de validation pour établir la vérité des conclusions sur les constructions réalisées. Ainsi, la validation d'une construction dans les programmes, prend le statut d'une démonstration (ou preuve), considérée comme raisonnement de validation des constructions. Cette démonstration opère à travers des interprétations et des substitutions, des caractérisations des formes de l'objet à construire par des propriétés mathématiques de ces formes, prises comme des arguments (ou des raisons).

Ce point de vue des programmes, bien qu'il donne une conception de la validation dans la résolution des problèmes de construction, ne nous apporte pas de précisions sur toutes les articulations de la validation effectivement élaborées. C'est pourquoi nous complétons cette étude avec l'analyse du discours de validation, du point de vue de la pratique en classe.

3.2.2.2. La conception de la validation du point de vue des manuels

Pour décrire la validation des constructions du point de vue de la pratique en classe, nous avons fait le choix d'étudier le discours de validation élaboré dans la résolution d'un problème de construction proposé par les auteurs du manuel CIAM de la classe de Première Scientifique. Cette analyse est faite suivant la grille d'analyse élaborée dans le paragraphe précédent.

Voici l'énoncé du problème que nous analysons :

Activité :

Soit h une homothétie de rapport k différent de 1 et t une translation.
Construire le centre des homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$.

Source : Extrait du manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique p.98

Ce problème est donné dans la partie « Cours » du chapitre sur les homothéties du plan. C'est une activité de découverte, qui porte sur la composée d'une homothétie et d'une translation. Elle vise à construire le centre d'une homothétie issue de la composition d'une translation et d'une homothétie, qui constitue l'un des deux éléments caractéristiques de cette transformation.

Voici la solution que proposent les auteurs du manuel :

Démonstration

Pour démontrer que les transformations $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k , il suffit d'établir qu'elles en vérifient la propriété caractéristique.

Soit M et N deux points distincts, M_1 et N_1 leurs images respectives par t , M' et N' les images respectives de M_1 et N_1 par h .

On a : $\vec{M_1N_1} = \vec{MN}$, car t est une translation :

$$\vec{M_1N_1} = k \vec{M_1N_1}, \text{ car } h \text{ est une homothétie de rapport } k.$$

Donc : $\vec{MN} = k \vec{MN}$ et $h \circ t$ est une homothétie de rapport k .

On démontre de même que $t \circ h$ est une homothétie de rapport k .

Remarque

La droite (Ω) passant par le centre de l'homothétie h et dirigée par le vecteur de la translation t (si ce vecteur n'est pas nul), est globalement invariante par les transformations h et t . Par conséquent, les centres des homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$ appartiennent à (Ω) .

Cette remarque ne suffit pas pour déterminer les centres des homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$.

Construction du centre de l'homothétie $t \circ h$

- Choisir un point M n'appartenant pas à la droite (Ω) et construire le point M_1 image de M par t , le point M' image de M_1 par h .
- M' est l'image de M par l'homothétie $t \circ h$, donc le centre Ω de cette homothétie appartient à (MM') .

De plus : $\Omega \in (\Omega)$. Donc, Ω est le point d'intersection des droites (Ω) et (MM') .

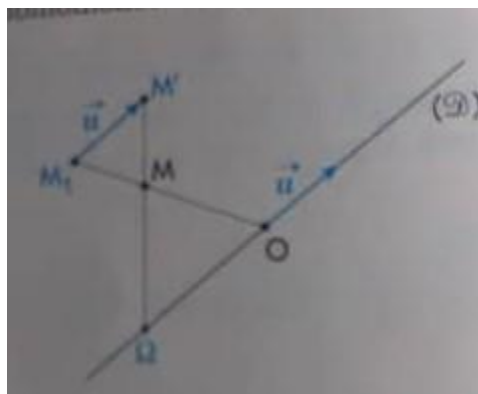
La construction du centre de l'homothétie $h \circ t$ est analogue à la construction précédente.

Source : Solution extraite du manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique p.98

Analyse de la solution :

Par analogie, les auteurs commencent par établir que les composées $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k . Pour dire que la composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie de rapport k . Toutefois, cela ne conclut pas sur la construction du centre de cette composée. S'engageant à réaliser la construction de ce centre, ils partent de deux hypothèses présentes dans l'énoncé du problème : « h une homothétie de rapport k différent de 1 » et « t une translation », qu'ils traduisent par : « soit M et N deux points distincts, M_1 et N_1 leurs images respectives par t , M' et N' les images respectives M_1 et N_1 par h ». Par interprétation, ils

observent qu'« on a : $\overrightarrow{M_1 N_1} = \overrightarrow{MN}$, car t est une translation ; $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{M_1 N_1}$, car h est une homothétie de rapport k . Donc, $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$ et $h \circ t$ est une homothétie de rapport k ». On constate que le contexte du raisonnement qu'ils conduisent est celui de la justification. Ce raisonnement est mené dans le but d'établir la vérité de la construction et utilise des arguments formels qui sont issus des propriétés sur les homothéties et les translations du plan. Dans l'optique de convaincre, ils font remarquer que « la droite (D) passant par le centre de l'homothétie h et dirigée par le vecteur de la translation t (si ce vecteur n'est pas nul), est globalement invariante par les transformations h et t . Par conséquent, les centres des homothéties $h \circ t$ et $t \circ h$ appartiennent à (D) ». Or, aucune droite (D) n'est donnée dans l'énoncé du problème, puisque cet énoncé est présenté sous la forme discursive simple (FD_s). Cela suppose que ces auteurs raisonnent à partir d'une figure qu'ils ont réalisée. Et donc, l'argument formulé dans la remarque est extrait d'une figure. C'est une conjecture induite. Ce qui signifie que le discours a démarré sur une figure pour s'articuler avec l'approche affine et s'organiser sous la forme d'une démonstration qui opère à l'aide des interprétations et substitutions des données par des propriétés sur les homothéties et les isométries institutionnalisées. Ainsi, la mise en forme du discours est organisée sous la forme d'une démonstration. Dans une sorte de synthèse de toutes les analyses qui ont été menées, un algorithme est déduit : « - Choisir un point M n'appartenant pas à la droite (D) et construire le point M_1 image de M par h , le point M' image de M_1 par t ; - M' est l'image de M par l'homothétie $t \circ h$, donc le centre Ω de cette homothétie appartient à (MM') . De plus : $\Omega \in (D)$. Donc, Ω est le point d'intersection des droites (D) et (MM') ». En effet, cet algorithme traduit une propriété permettant de générer à chaque fois une construction instrumentée du centre de la composée. Il est élaboré point par point à l'aide des propriétés institutionnalisées sur les deux transformations mises en jeu et suivant un enchaînement cohérent. Les différentes articulations de cet algorithme sont validées pas à pas pour anticiper sur la validation de la construction finale. En effet, il s'agit d'une validation qui prend la forme de contrôles (Balacheff et Margolinas, 2017) des constructions élémentaires. Les décisions qui sont prises, sont contrôlées par une conception de la notion d'image d'un point par une homothétie et par l'intersection de deux droites. Ainsi, l'argumentaire de validation de la construction du centre de l'homothétie est parti d'un raisonnement analogique pour chercher les arguments de construction. Il s'est enchaîné sur un raisonnement inductif pour formuler les conjectures. Et, s'est achevé par un raisonnement déductif qui prend la forme d'une démonstration, utilisant des arguments formels issus des propriétés institutionnalisées sur les homothéties. Par la suite, une construction instrumentée est élaborée. Elle illustre l'algorithme et cherche à convaincre de son exactitude et de sa validité. Cette construction est validée perceptivement à l'aide de la précision apportée par les instruments traditionnels de géométrie et par un contrôle des différentes étapes qui constituent l'algorithme.



Construction extraite de la solution précédente

Nous constatons que la conception de la validation du point de vue des manuels, rejoint celle des programmes. Cependant, cette analyse fait apparaître une étape supplémentaire dans le raisonnement élaboré. Cette étape qui fait prendre à la validation la forme de contrôles visant à valider pas à pas les différentes articulations de l’algorithme élaboré et les différents actes qui permettent la réalisation de la construction instrumentée. Ces contrôles visent à anticiper sur la validation de la construction finale de l’objet demandé.

Conclusion

L’étude de la manière dont s’opère la validation dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique, s’est faite à partir d’une enquête didactique menée dans les travaux en didactique de mathématiques, d’une exploration de l’importance de la validation dans l’enseignement de la géométrie et de la description de la conception qu’a l’institution, classe de Première Scientifique, de la validation dans la résolution des problèmes de construction. Cette étude établit que, dans la résolution des problèmes de construction, la validation joue un rôle important. Elle permet de comprendre, justifier, décider et communiquer un résultat obtenu. Elle opère à l’aide des argumentaires de validation qui dépendent du type de raisonnements mis en œuvre, et utilisent des arguments sémantiques, formels (ou théoriques) ou sémiotiques. Ces argumentaires, qui sont caractérisés selon le contexte, l’objectif visé et la forme que prend le discours dans le processus de validation, mettent en évidence une forme de validation qui peut être démonstrative, non démonstrative ou qualifiée de plausibilité. Ainsi, la mise en forme du discours peut être organisée sous la forme d’une démonstration ou non, ou bien en fonction du contenu sémantique.

Du point de vue des travaux en didactique et des ressources disponibles en classe de Première Scientifique, la validation prend le sens de moyens de contrôles d’actes de construction et de démonstrations (ou preuves), considérées comme raisonnements de validation des constructions qui opèrent à travers des substitutions et des interprétations des caractérisations des formes de l’objet à construire par leurs propriétés mathématiques. Et donc, valider une construction en classe de Première Scientifique, c’est prouver (pour se rassurer et convaincre), que la construction réalisée satisfait aux contraintes de l’énoncé du problème et qu’elle est exacte¹⁹. Ainsi, la validation à ce niveau scolaire est un raisonnement visant à établir la vérité

¹⁹ Au sens de l’axiomatique en arrière-plan de la géométrie manipulée.

de la conclusion sur toutes les constructions réalisées au cours d'une activité de construction. C'est-à-dire tout raisonnement qui produit les raisons (« arguments ») visant à établir l'exactitude et la validité ²⁰d'une construction réalisée. Elle se déploie dans un contexte de justification pour convaincre, utilise des arguments formels (ou théoriques) mis en œuvre dans un discours organisé sous la forme d'une démonstration faisant intervenir des contrôles. C'est un argumentaire de type démonstratif, qui prend la forme démonstrative. Toutefois, les contrôles ne constituent que des étapes dans l'argumentaire de validation.

Bilan

Il était important pour nous de savoir comment la validation est conçue dans l'institution « classe de Première Scientifique », et de déterminer la forme de validation prescrite et pratiquée à ce niveau scolaire afin d'envisager comment la développer, chez les élèves, à l'aide d'un problème de construction lié aux transformations du plan. Les différents travaux en didactique mentionnés dans ce chapitre, ainsi que les différentes ressources, disponibles en classe de Première Scientifique, que nous avons exploré, portent sur la pratique de validation mathématique dans le domaine de la résolution des problèmes en géométrie au secondaire. Les méthodologies mises en œuvre reposant, d'une part, sur les attentes institutionnelles (Programmes et Manuels) ; et, d'autre part, sur les productions d'élèves (Balacheff, Cabassut et Pedemonte), nous ont permis de recueillir des éléments qui permettent de faire avancer notre recherche. Ces éléments donnent un outil méthodologique sur lequel nous nous appuyerons pour analyser le discours de validation qui accompagnera le travail mathématique produit, qui permettra la réalisation de la construction demandée. Et, portent sur le fait que la démarche de validation des constructions, en classe de Première Scientifique, est mise en évidence à travers une forme de validation démonstrative. Cette forme de validation utilise des arguments formels (ou théoriques) dans un discours qui prend la forme d'une démonstration ; elle est liée à une stratégie de résolution développée dans un contexte de justification, à l'intérieur duquel s'effectue un travail mathématique visant à réaliser une construction et à établir que cette construction est exacte et valide. Ce qui signifie que le discours de validation d'une construction sera analysé à partir du raisonnement mobilisé, des arguments employés dans l'argumentaire de validation de la construction et de la mise en forme de l'argumentaire de validation. Ces informations nous aident à poursuivre nos analyses, que nous allons à présent insérer dans un cadre théorique afin de préciser nos questions et nos hypothèses de recherche.

²⁰ *Au sens de l'adéquation entre la construction réalisée et les données du problème.*

Chapitre 4

Le cadre théorique, la problématique et la méthodologie générale

Nous avons ramené l'incapacité des élèves à valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent à une étude de la manière dont on peut organiser un problème mathématique, au cours d'une séquence de résolution, pour développer la validation, chez les élèves. Ainsi, nous étudions comment le travail mathématique d'organisation effectué au cours de la résolution d'un problème de construction peut favoriser l'apprentissage de ce savoir-faire dans une classe de mathématiques. En considérant qu'une manière d'organiser le travail mathématique produit est « une forme d'organisation » de ce travail, nous admettons qu'une approche semi-intégrative²¹ nous donne un cadre permettant d'étudier cette caractéristique organisationnelle dans la problématique de la construction. À notre avis, « une forme d'organisation » est mise en place dans un espace de travail mathématique. Elle est dirigée par des paradigmes géométriques dans lesquels se déploient des procédés de construction permettant de réaliser la construction d'un objet géométrique, décrit à l'aide d'un problème de construction. Ce qui signifie que l'approche semi-intégrative à adopter, est celle qui est constituée d'une organisation fondée sur des apports coordonnés de trois cadres théoriques, dont un cadre principal : la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) ; autour duquel nous articulons : les Paradigmes Géométriques (Houdement et Kuzniak, 1999) et les Procédés de Construction (Chevallard et Julien, 1991). Dans ce chapitre, nous explorons ces trois théories et leurs spécificités afin d'extraire certains éléments nous permettant d'élaborer l'approche théorique (EPP) qui nous servira de cadre théorique. Ensuite, nous exposons les modalités d'entrée dans la mise en œuvre de la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique ». Et enfin, nous reformulons notre problématique pour expliciter nos hypothèses et la méthodologie générale que nous avons adoptée.

4.1. L'élaboration du cadre théorique (EPP) : les Espaces de Travail Mathématique, les Paradigmes Géométriques et les Procédés de Construction

Pour aller vers la précision des contours de notre recherche afin de la mener sereinement, nous avons trouvé nécessaire de présenter, d'abord, les références théoriques qui constituent les axes du cadre sur lequel nous nous sommes appuyés pour élaborer notre travail.

4.1.1. Les Espaces de Travail Mathématique (ETM)

D'après Nechache (2016) : « *l'espace de travail mathématique est un environnement (intellectuel) permettant, à travers, ses deux dimensions (épistémologique et cognitive) de réaliser une tâche mathématique* » (Nechache, 2016, p.77). Choisi comme théorie principale dans notre cadre, le modèle de l'Espace de Travail Mathématique de Kuzniak (2011) définit

²¹ Nous nommons approche « semi-intégrative » une organisation didactique qui se fonde sur les apports coordonnés de plusieurs cadres théoriques dont l'un occupe une place majeure.

l'espace dans lequel la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique » est mise en place ; présente comment le travail mathématique est effectué dans cette forme d'organisation ; et décrit la manière dont les sous-tâches liées à la séquence de résolution et/ou au problème de construction (mathématique) sont agencées. Le but, pour nous, étant de développer la validation chez les élèves, le travail mathématique d'organisation produit à l'intérieur d'une forme d'organisation va générer une forme du travail de réalisation et de validation de la construction. Ces deux formes de travail pourront être de nature sémiotique, instrumentale ou discursive, et même de nature sémiotique-discursive, ou instrumentale-discursive, ou encore sémiotique-instrumentale. Ce qui signifie que c'est au cœur du couple (forme d'organisation, forme de validation) que notre recherche prend place. Nous présentons ci-après les aspects de cette théorie qui seront mis en jeu dans notre cadre théorique.

4.1.1.1. Présentation du modèle des ETM

Tel qu'il a été conçu par Kuzniak (2011), le modèle des ETM vise à décrire et à analyser la nature du travail mathématique attendu ou produit par des sujets (élèves ou enseignants), au sein d'une institution scolaire donnée. De par cette conception et la manière dont il a été pensé, il offre des conditions de travail meilleures à son utilisateur et permet à ce dernier, à travers la forte articulation qu'il met en évidence entre les points de vue épistémologique et cognitif, de conduire et produire un discours mathématique cohérent. Ce discours peut être analysé à l'aide de certains outils prévus par l'ETM. Le modèle met en exergue trois composantes : le plan épistémologique, le plan cognitif et les genèses. Ce sont elles qui structurent l'espace et permettent de caractériser le travail mathématique pour donner un sens à la circulation de ce travail et au discours de validation qui l'accompagne. Ainsi :

- **Le plan épistémologique**, qui est composé de trois pôles : le représentamen, l'artefact et le référentiel théorique, permet de structurer le contenu mathématique.
- **Le plan cognitif**, composé de trois processus cognitifs : la visualisation, la construction et la preuve, vise à structurer l'ETM lorsqu'il est proposé à un individu dont l'intention est d'effectuer le travail mathématique. Ce plan rend compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace pendant l'activité de résolution d'une tâche.

Cependant, le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles :

- **La genèse sémiotique** donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires.
- **La genèse instrumentale** rend opératoires les artefacts dans le processus constructif.
- **La genèse discursive** permet de donner un sens aux propriétés pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique.

Ce sont ces genèses qui favorisent la circulation du travail mathématique entre les plans épistémologique et cognitif, en activant une articulation entre les composantes respectives des deux plans. L'étude de ces genèses passe par l'identification des dimensions associées (sémiotique, instrumentale, discursive). Et l'analyse des dimensions rend compte du développement du travail mathématique élaboré dans l'ETM. L'ensemble de toutes ces relations peut être visualisé par le diagramme ci-dessous :

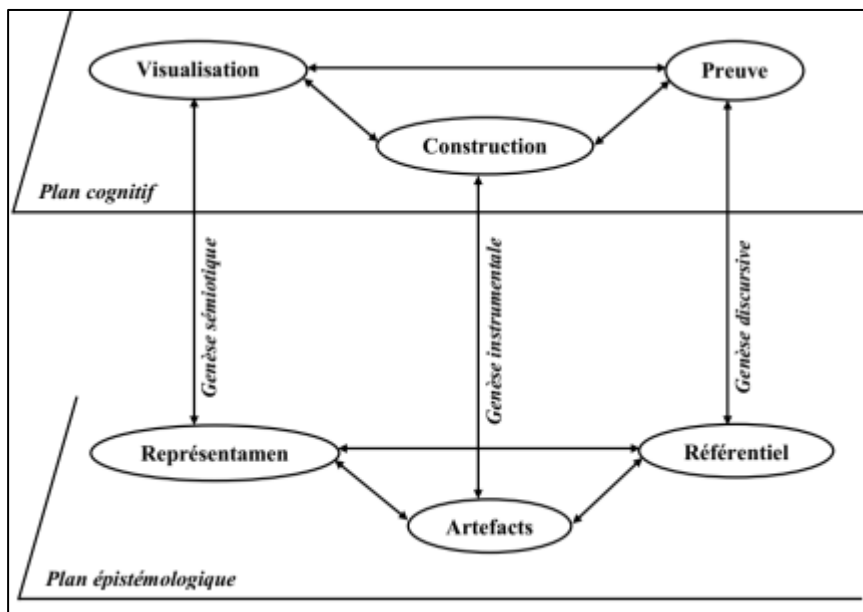


Figure 1: Diagramme de l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011).

L'articulation entre les différentes dimensions dans l'ETM est provoquée par la résolution des tâches. Cette résolution met en évidence une forme de travail mathématique et une forme de validation des résultats. L'exécution de ces tâches contribue à la circulation du travail mathématique dans l'ETM. Le diagramme de la figure 1 fait apparaître trois plans verticaux, décrits à partir des génèses qu'ils mettent en œuvre : Sémiotique-Instrumental ([Sem-Ins]), Instrumental-Discursif ([Ins-Dis]) et Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis]), comme l'indique le diagramme suivant :

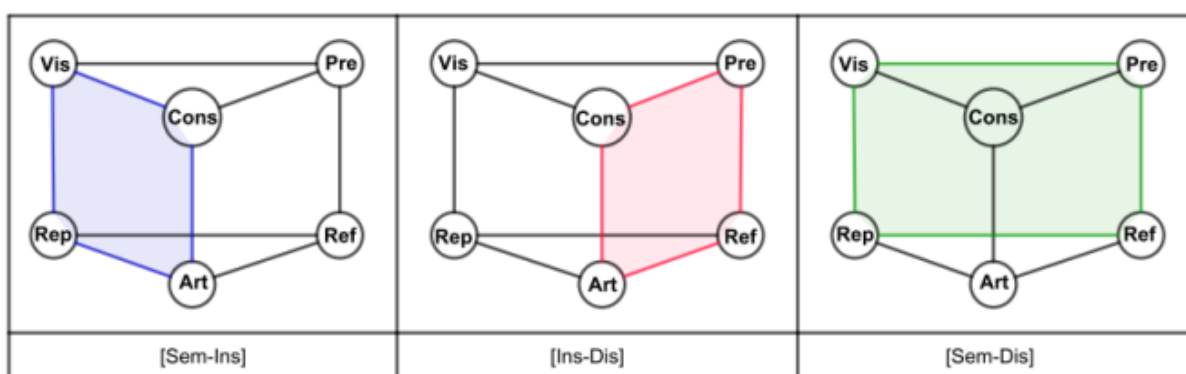


Figure 2 : Les trois plans verticaux de l'ETM (Kuzniak et Nechache, 2014)

Ces trois plans rendent compte des connexions entre les trois génèses et de la circulation du travail au sein de l'ETM. Et donc, l'analyse du travail mathématique à partir de ces trois plans verticaux permet d'identifier la manière dont les trois dimensions (sémiotique, instrumentale, discursive) interagissent afin de constituer un travail mathématique complet (au sens de Kuzniak et Nechache (2014)), c'est-à-dire, un travail faisant intervenir les trois plans ci-dessus. Par ailleurs, pour comprendre la nature et la circulation du travail mathématique à travers les plans verticaux de l'ETM, il est nécessaire d'examiner le rôle des outils sémiotique,

technologique et théorique du plan épistémologique (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016) associés à chacune des dimensions de l'ETM. Il est également important d'examiner la manière dont un sujet (élève ou enseignant) utilise et transforme ces outils en des instruments sémiotique, technologique et théorique du plan cognitif (Ibid, 2016). Or, dans le processus de transposition didactique, il existe trois principaux types d'ETM, au sein desquels peuvent se développer des formes d'organisation du travail mathématique permettant de décrire le travail mathématique effectué pour aboutir à des résultats mathématiques, produire un discours de validation qui accompagne ce travail, et mettre en œuvre des procédés permettant la réalisation effective de ces résultats mathématiques dans le cadre scolaire. Ils sont respectivement qualifiés d'ETM de référence, idoine et personnel (Kuzniak et al. 2016, p. 729 ou Kuzniak, 2010, p. 79)²². Donc, tout travail mathématique (d'organisation) attendu ou produit dans une institution scolaire est associé à l'un de ces trois niveaux de l'ETM. Nous présentons, dans le paragraphe qui suit, le niveau auquel nous avons associé le travail mathématique produit dans une forme d'organisation, pour le positionner dans notre cadre théorique et élaborer un modèle de forme d'organisation du travail mathématique susceptible de développer la validation chez les élèves.

4.1.1.2. Les ETM mis en jeu dans le cadre théorique (EPP)

Pour élaborer notre cadre théorique (EPP), nous avons choisi de nous polariser sur les ETM idoines. Car, l'objet mathématique à enseigner est la validation dont le sens est donné par l'institution pour se constituer en contenu mathématique à enseigner. Ce contenu mathématique constitue l'ETM de référence, qui est adapté et aménagé par l'enseignant en un ETM idoine, afin de permettre la mise en place effective de ce contenu dans les classes. Or, c'est dans les classes que nous nous plaçons pour développer la capacité de valider chez les élèves, à travers des séquences de résolution conduites par les enseignants. Remarquons que cet ETM idoine dépend de l'institution, mais également de l'enseignant chargé de leur mise en œuvre dans la classe. En outre, la réussite de l'enseignement d'un contenu qui dépend naturellement de l'enseignant, dépend aussi de l'élève. Et donc, un ETM idoine est un environnement organisé de telle manière qu'un sujet (élève ou enseignant) puisse s'engager dans la résolution d'un problème. Cet ETM doit, non seulement, permettre à l'élève un travail dans le paradigme (Cf. section 4.2.2) correspondant à la problématique visée, mais aussi avoir ses différentes composantes organisées de manière valide. On distingue deux types d'ETM idoines : potentiel et effectif. Les ETM idoines potentiels sont ceux qui sont construits au préalable pour être mis en place dans les classes. Il s'agit par exemple des ETM idoines construits par les auteurs des documents ressources ou des manuels scolaires mais aussi ceux construits par les enseignants à destination de leurs classes. Dans notre recherche, ils nous permettront de déterminer « la forme d'organisation du travail mathématique » disponible dans les ressources mises à la disposition des enseignants ou de prévoir l'attitude que ces derniers pourront adopter face à une situation que nous allons leur proposer en expérimentation. Les ETM idoines effectifs sont les ETM idoines potentiels effectivement mis en place dans les classes, par les enseignants. Ils nous

²² L'ETM de référence est celui de l'institution (documents officiels), l'ETM idoine est celui conçu et/ou mis en œuvre par l'enseignant (potentiel lorsqu'il n'est pas mis en œuvre en classe, et effectif lorsqu'il l'est), et l'ETM personnel est celui dans lequel travaille l'élève.

permettront de déterminer la forme d'organisation effectivement disponible, chez les enseignants ; d'illustrer le rôle de la caractéristique « forme d'organisation » dans l'enseignement de la validation ; et de mesurer les effets d'apprentissage de la validation, chez les élèves, à l'aide du modèle de forme d'organisation que nous allons élaborer. Ces deux articulations des ETM idoines prendront place dans notre cadre théorique pour décrire la caractéristique « forme d'organisation du travail mathématique » permettant de développer la démarche de validation des constructions, chez les élèves. Les ETM idoines nous permettront, dans le cadre théorique (**EPP**), de caractériser le travail mathématique d'organisation produit à l'intérieur d'une forme d'organisation pour réaliser et valider une construction géométrique décrite à l'aide d'un problème de construction donné sur les transformations du plan.

4.1.2. Les Paradigmes Géométriques

Dans notre travail, nous avons référé le rapport institutionnel à la géométrie, à un niveau scolaire, au concept de Paradigmes Géométriques. Ainsi, nous avons défini ce rapport institutionnel comme étant le(s) paradigme(s) géométrique(s) dans le(s)quel(s) l'apprentissage de la géométrie s'effectue, à un niveau d'enseignement. Et donc, ce(s) paradigme(s) donne(nt), d'une part, la manière de formuler et résoudre un problème de construction ; et d'autre part, la manière de réaliser et valider la construction de l'objet que décrit ce problème. Ainsi le travail d'organisation mis en place pour développer la validation est dirigé par le(s) paradigme(s) privilégié(s). Or, Houdement et Kuzniak (2006) soulignent que :

« Des paradigmes différents et cohérents sont englobés sous le terme unique de géométrie. L'existence de ces paradigmes explique en partie la rupture que l'on rencontre dans l'enseignement, entre les différents cycles d'enseignement » (Houdement et Kuzniak, 2006).

Ce qui signifie que le travail d'organisation se fait à un niveau d'enseignement et dépend des choix de l'institution, à ce niveau. Ces choix sont rattachés à l'espace de travail pour guider le travail effectué. Par ailleurs, les paradigmes géométriques constituent un cadre à dominante épistémologique. Ils peuvent donc s'articuler avec le modèle des ETM, pour donner une cohérence à la résolution de problèmes de construction et fixer une unité au travail mathématique produit, ainsi qu'au discours de validation qui accompagne ce travail, malgré les ruptures historiques. Ainsi, un axe important de notre cadre théorique (**EPP**) est la théorie des Paradigmes Géométriques (Houdement et Kuzniak, 1999). C'est elle qui va diriger le travail mathématique d'organisation produit à l'intérieur de la forme d'organisation mise en place dans un espace de travail mathématique, et fournir une manière cohérente de conduire ce travail pour, non seulement, développer la validation chez les élèves, mais aussi obtenir le sens exact de la validation, tel que prescrit par l'institution dans laquelle le problème de construction est posé. Pour nous, une forme d'organisation est élaborée au sein de(s) paradigme(s) géométrique(s) qui prend (-nent) en compte les attentes institutionnelles. Nous présentons les spécificités de cette théorie afin d'extraire certains de ses aspects qui vont s'insérer dans notre cadre théorique.

4.1.2.1. La notion de Paradigmes Géométriques

La notion de paradigmes géométriques établit une façon cohérente d'appréhender la géométrie. Telle qu'elle a été pensée par Houdement et Kuzniak (1999), cette théorie s'applique en particulier à la conception de la géométrie enseignée, à sa pratique dans l'enseignement et

surtout à la résolution des problèmes géométriques, tels que les problèmes de construction. Elle s'intéresse à la gestion, dans l'enseignement de la géométrie, des relations entre les objets matériels et les objets théoriques pour organiser le travail mathématique à effectuer et donner un sens à la validation des résultats obtenus. Le modèle propose de considérer la géométrie dans sa conception comme une théorisation organisée autour de trois composantes : l'espace support, le modèle théorique et les artefacts. Dans ce modèle, le mot « paradigme » est considéré dans son aspect global, comme désignant un ensemble de croyances, de techniques et de valeurs que partage un groupe scientifique. Et donc, dans un premier sens « *le paradigme fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème dans une institution* » (Houdement et Kuzniak, 2006). Et dans un second, « *il caractérise les exemples significatifs donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes unités constitutives du paradigme global* » (Kuhn, 1962). Conçu à partir des travaux de Kuhn (1962), le modèle met en évidence trois paradigmes géométriques :

- **La Géométrie I (G1)** est la géométrie naturelle. Sa source de validation est l'observation de la réalité, le sensible. Dans cette géométrie, la déduction est liée à une expérience mécanique et l'esprit se libère de la démonstration des choses évidentes. Elle s'exerce sur les objets issus de la réalité, et donne un horizon pratique et technologique au travail géométrique.
- **La Géométrie II (G2)** est la géométrie axiomatique naturelle. Elle a pour source de validation les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique qui est une formalisation du réel mais qui n'est pas formel, la syntaxe n'étant pas découplée de la sémantique qui renvoie à la réalité. Le système d'axiomes, aussi précis que possible, peut être incomplet. Elle s'exerce sur les objets théoriques. Le travail géométrique est fait sur un modèle qui rend compte de la réalité. Elle donne un horizon axiomatique et de modélisation au travail géométrique.
- **La Géométrie III (G3)** est la géométrie axiomatique formaliste dans laquelle le raisonnement logique l'emporte sur le sensible. Elle est constituée d'un système d'axiomes complet, s'exerce sur des objets idéaux et ses axiomes ne s'appuient pas sur le monde sensible. Contrairement à la Géométrie II, elle n'entretient pas nécessairement de liens avec la réalité. La validation s'appuie sur le raisonnement hypothético-déductif qui est le moteur et la source des connaissances nouvelles. Cette géométrie donne un horizon logico-formel et axiomatique au travail géométrique.

Ces paradigmes donnent un horizon au travail mathématique. Ils ne sont pas à priori hiérarchisés mais sont associés à des objets et à des modes de validation différents. La différence entre ces paradigmes se situe au niveau de leur rapport à la réalité. En arrière-plan de la pensée associée à chacun de ces paradigmes, on retrouve les idées de Gonseth (1945-1952) sur les différents modes de pensée que sont l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif. Ce qui signifie que les problèmes de construction sont posés et résolus différemment selon le(s) paradigme(s) géométrique(s) dans le(s)quel(s) ils sont posés. Et c'est (ce sont) ce(s) paradigme(s) qui donne(nt) une manière de les concevoir, les appréhender et les raisonner. Il(s) défini(ssen)t les objets qui sont utilisés et décri(ven)t comment s'opère la validation des constructions qui sont réalisées. Ainsi, les paradigmes géométriques prennent place dans la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique », pour

diriger le travail d'organisation permettant la réalisation et la validation des constructions réalisées dans un espace de travail mathématique.

4.1.2.2. Les Paradigmes Géométriques mis en jeu dans le cadre théorique (EPP)

Telle que la théorie a été conçue, la validation associée à chaque paradigme est clairement explicitée. Toutefois, la manière dont ces validations peuvent être développées chez les élèves demande à être précisée. C'est pourquoi nous interrogeons, dans notre recherche, la forme d'organisation du travail mathématique comme un moyen d'enseignement et d'apprentissage de la validation, dans l'ETM idoine dirigés par des paradigmes géométriques. Ainsi, notre étude se situe au niveau de l'enseignement secondaire. Or, à ce niveau scolaire, le travail mathématique s'effectue prioritairement dans les paradigmes G1 et G2, ou dans une cohabitation entre ces deux paradigmes (Parzysz, 2011). C'est pourquoi, pour élaborer notre cadre théorique (EPP), nous avons choisi de nous polariser sur les paradigmes G1 et G2. Cependant, nous admettons que le paradigme G3 va influencer les choix des enseignants dans leurs stratégies de résolution puisque ces derniers ont suivi une formation universitaire où le paradigme G3 guide le travail mathématique. Le tableau ci-dessous explicite le fonctionnement des éléments qui structurent les deux paradigmes guidant le travail mathématique au secondaire, tels qu'ils vont fonctionner dans notre cadre théorique.

	Le Paradigme G1	Le Paradigme G2
Les Objets utilisés	Matériels : Dessins tracés avec les instruments	Théoriques, Textuels : Figures géométriques
La validation	Perceptive : visuelle ou instrumentée. Elle croise la vérification instrumentée et le raisonnement. Elle est centrée sur la problématique de la précision.	Déductive : Repose exclusivement sur les raisonnements hypothético-déductifs. Elle est centrée sur la problématique de la conformité à la théorie.
Le statut du dessin	L'objet d'étude et de validation	L'outil d'heuristique, le support du raisonnement
Le statut des instruments	Licites pour obtenir des réponses et des résultats	Licites pour obtenir des conjectures
Le fonctionnement de la preuve	Par observation, expérimentation avec des instruments et par déduction partielle	Par déduction logique des définitions, propriétés et théorèmes
Le mesurage	Licite et producteur des connaissances. Les nombres décimaux pour prendre en compte les questions d'incertitude	Illicite pour la production et licite pour l'heuristique (conjecture, contrôle des résultats). Les nombres réels pour l'exactitude ou l'approximation contrôlée
La mesure	Empirique : renvoie des pratiques matérielles. Elle est en lien avec la modélisation	Théorique : mesure exacte de grandeur « idéale »

Tableau 8 : Les éléments des paradigmes G1 et G2 mis en jeu dans le cadre (EPP)

La caractérisation du travail mathématique produit dans une forme d'organisation mise en place dans un ETM idoine va nécessiter l'identification du (des) paradigme(s) fixé(s) au niveau de cet ETM.

4.1.3. Les Procédés de Construction

Dans notre recherche, nous avons établi que la solution d'un problème de construction est un texte (Cf. chapitre 2) qui met en évidence : les étapes de résolution, un algorithme de construction, une construction instrumentée et des arguments formels de validation de la construction, insérés dans un discours qui prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif. Ce qui nous amène à considérer la notion de « construction géométrique » comme un problème. Ceci pour mettre en évidence l'existence de certains préalables pour entrer dans la résolution de cette catégorie de problèmes en géométrie. C'est dans cette logique que vient se greffer, au modèle des ETM, la théorie des procédés de construction de Chevallard et Jullien (1991) qui apporte à notre cadre théorique (EPP), des éléments permettant de décrire les conditions de négociation d'entrée dans la résolution d'un problème de construction, et indique la manière dont l'objet géométrique que décrit ce problème peut être construit dans l'espace de travail mathématique. Notre objectif étant de voir comment développer la validation chez les élèves, à l'aide d'une forme d'organisation du travail mathématique, nous présentons les spécificités de cette théorie afin de dégager certains de ses aspects qui vont intégrer notre cadre théorique.

4.1.3.1. La notion de Procédés de Construction

Pour élaborer les procédés de construction d'un objet géométrique décrit à l'aide d'un problème de construction, Chevallard et Jullien (1991) abordent la notion de construction géométrique, en se situant en dehors de la problématique de l'enseignement, en classe. Ils s'appuient, tout d'abord, sur la notion préconstruite (naïve) de construction géométrique dans le plan, à la règle et au compas, sans préciser ce qu'on entend par là. Ce qui leur permet de considérer la notion de construction géométrique comme un type de problème, afin d'analyser l'articulation entre la notion de « constructibilité » et celle de « construction », dans la résolution des problèmes de construction. Sous cette considération, ils relèvent que le terme « construction », en plus de décrire l'objet ou la procédure ayant favorisée sa réalisation, pose la question d'existence de cet objet et celle de sa constructibilité à la règle et au compas. Ce qui leur permet de montrer que la notion de construction géométrique n'est pas aussi transparente que l'on pourrait penser. À l'aide des travaux de Lemoine (1903)²³, ils analysent les constructions dans *les Eléments* d'Euclide qui sont de simples algorithmes, considérées comme des solutions des problèmes de construction. Et, mettent en évidence, dans un premier sens, l'existence « *d'un décalage entre la simplicité apparente de la solution classique [...] à un problème de construction donné et la difficulté relative de la réalisation effective du procédé de construction contenu dans cette*

²³ Il s'agit de l'ouvrage « *La Géométrie ou Art des Constructions géométriques* », paru en 1903, où Lemoine expose une synthèse de ses différents travaux sur un domaine qu'il a introduit et développé en grande partie seul.

solution » (Chevallard et Jullien, 1991, p.62). Ainsi, ils établissent que ces solutions constituent davantage une preuve de constructibilité, à la règle et au compas, de l'objet que décrit ce problème plutôt qu'un « bon » algorithme de construction. Dans un autre sens, ils montrent que « *la donnée d'un algorithme de construction quel qu'il soit – pourvu, bien sûr, qu'il soit accompagné de la preuve qu'il donne bien ce qu'il prétend – fournit par la même occasion l'existence de l'objet et une preuve de constructibilité* » (Chevallard et Jullien, 1991, p.63-64). Ce qui leur permet de dire que : « *les problèmes de construction sont, pour les mathématiciens, des problèmes de constructibilité* » (Chevallard et Jullien, 1991, p.66). Et donc, l'entrée dans la résolution d'un problème de construction nécessite la vérification de l'existence de l'objet à construire et la production d'une preuve de constructibilité de cet objet pour que la solution soit un algorithme de construction. En analysant de près la Géométrie²⁴ de Lemoine (1903), ils constatent que cet « Art » s'intéresse aux procédés de construction d'un objet, eux-mêmes, en se proposant de les comparer afin de trouver les plus simples selon des critères déterminés, qui donnent la construction exacte de l'objet que décrit le problème. Et donc, l'algorithme n'est qu'un élément de la solution d'un problème de construction. Sur la base de ce constat, ils concluent qu'on peut « *analyser la solution d'un problème de construction géométrique selon quatre exigences : 1. Elle doit fournir une preuve de l'existence de « l'objet » à construire, 2. Elle doit fournir une preuve de sa constructibilité, 3. Elle doit fournir un algorithme de construction, 4. Eventuellement, elle peut fournir la construction géométrographique* » (Chevallard et Jullien, 1991, p.68). Cette conclusion fixe, d'une part, les conditions nécessaires et suffisantes d'une entrée dans la résolution d'un problème de construction, et d'autre part, décrit la manière dont la réalisation de la construction d'un objet défini à l'aide d'un problème de construction doit s'opérer dans un espace de travail mathématique pour que cette construction soit exacte et valide. Elle donne également la structure de la solution d'un problème de construction et se positionne comme un cadre d'analyse de la solution d'un problème de construction que l'on résout. On peut ainsi constater que les procédés de construction vont se déployer dans une forme d'organisation pour déclencher la circulation du travail mathématique d'organisation dans l'ETM idoine. Ils donnent la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet géométrique à construire, et décrivent la manière dont cet objet est effectivement construit dans l'espace de travail mathématique.

4.1.3.2. Les Procédés de Construction mis en jeu dans le cadre théorique (EPP)

La notion de procédés de construction, présentée précédemment, apporte à notre cadre un modèle théorique qui définit les modalités d'entrée dans la résolution des problèmes de construction et donne la forme d'une construction, solution du problème. Elle décrit la structure d'une solution et fixe les conditions d'analyse de cette solution, dans une forme d'organisation

²⁴ La Géométrie a un quadruple objet :

- Au moyen de certaines conventions, elle chiffre la simplicité et l'exactitude des constructions géométriques. Ce qui permettra leur comparaison.
- Elle trouve des procédés pour effectuer, le plus simplement possible, une construction déterminée indiquée par la Géométrie.
- Elle discute quand il y a lieu, une construction donnée pour en trouver une plus simple.
- Enfin, elle détermine parmi toutes les constructions possibles d'un même celle qui est la plus simple et que l'on nommera « LA CONSTRUCTION GEOMETROGRAPHIQUE ».

du travail mathématique élaborée pour développer la démarche de validation, chez les élèves, au sein d'un espace de travail mis en place par l'enseignant. Telle qu'elle a été conçue par Chevallard et Jullien (1991), elle décrit un schéma de résolution d'un problème de construction, en quatre étapes : (1) fournir une preuve de l'existence de « l'objet » à construire ; (2) fournir une preuve de sa constructibilité ; (3) fournir un algorithme de construction ; (4) éventuellement, fournir la construction géométrographique²⁵ (Lemoine, 1903). Or, d'après Lemoine (1903), la construction géométrographique est celle dont la simplicité²⁶ est maximale pour un coefficient minimal. Notre objectif n'étant pas de comparer toutes les constructions de l'objet afin de trouver celle qui est la plus simple, et ajouté à cela le fait que nous avons déjà intégré dans la forme d'organisation du travail mathématique, les règles du contrat didactique (Brousseau, 1985) relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction (Cf. chapitre 2), nous ne retenons pour notre cadre (**EPP**) que les éléments résumés dans le tableau ci-dessous :

Procédés de construction de l'objet
Preuve d'existence : établie à l'aide d'un raisonnement logique qui utilise des définitions, propriétés ou théorèmes.
Preuve de constructibilité : établie à l'aide d'un raisonnement logique qui utilise des définitions, propriétés ou théorèmes.
Construction : guidée par les règles du contrat didactique.

Tableau 9 : Les éléments des procédés de construction mis en jeu dans le cadre (**EPP**)

Ainsi, la caractérisation des procédés qui guident la réalisation de la construction d'un objet décrit à l'aide d'un problème de construction, dans une forme d'organisation du travail mathématique mise en place dans l'ETM idoine, va nécessiter l'identification des éléments des procédés de construction au niveau de cet ETM. Car ce sont ces procédés qui vont alimenter le travail mathématique et nourrir l'élaboration du discours de validation qui va accompagner le travail. Ces procédés, associés à l'espace de travail mathématique, lui-même guidé par les paradigmes géométriques, s'inscrivent de manière générale dans le cadre des institutions scolaires, où s'opèrent des choix et sont mises en œuvre des transpositions didactiques. Or, les processus de transposition didactique sont générés par des méthodes mathématiques. Et donc, ces procédés vont être associés à des méthodes mathématiques pour décrire un travail d'organisation complet permettant de développer une démarche de validation des constructions.

4.1.4. Le cadre théorique (EPP) : un cadre fondé sur une approche semi-intégrative

²⁵ La construction géométrographique est celle qui est la plus simple parmi toutes les constructions d'un objet. D'après la théorie de Lemoine (1903).

²⁶ Dans la « Géométrie ou Art des constructions géométriques », Lemoine conçoit le tracé géométrique comme l'exécution d'un algorithme de tracés successifs à la règle et au compas. Il code chacun des pas élémentaires de la construction pour évaluer le « coût » total. Ainsi, à toute construction complète est rattaché le symbole $(l_1R_1+l_2R_2+m_1c_1+m_2R_2)$. Le nombre $(l_1+l_2+m_1+m_2)$ est le coefficient de simplicité et le nombre (l_1+m_1) le coefficient d'exactitude. Le coefficient de simplicité de chaque construction permet de dégager le tracé géométrographique de la construction, celui dont la simplicité est maximale pour un coefficient minimal.

Chevallard et Jullien (1991) placent, au centre de la problématique de la construction, la notion de construction géométrique, pour décrire les procédés de construction de l'objet que définit un problème de construction donné. Nous adoptons ce point de vue en admettant que ces procédés se déploient au sein d'une activité de construction, dans un espace de travail mathématique (Kuzniak, 2011). Or, Houdement et Kuzniak (2006) situent l'activité de construction dans des paradigmes géométriques, qui fixent la manière correcte et cohérente de mener une activité de construction dans une institution scolaire donnée. Nous adoptons cet autre point de vue, pour admettre que ces paradigmes constituent des modèles mathématiques prédéfinis intégrant des modes de raisonnement dans un ETM idoine, pour faire fonctionner le travail de construction et celui de validation. C'est dans cette articulation que se trouve notre point d'ancrage de la forme d'organisation du travail mathématique comme outil de développement de la validation. Nous supposons que l'articulation de ces trois cadres révèle l'approche semi-intégrative (**EPP**) comme un espace adapté pour élaborer, analyser et caractériser la structure de développement de la démarche de validation dans une forme d'organisation du travail mathématique. Centrée sur le modèle des ETM, cette approche nous apporte un cadre qui permet de caractériser la structure du développement de la démarche de validation des constructions, dans une forme d'organisation du travail mathématique élaborée. Ce cadre décrit un environnement intellectuel composé des deux dimensions de l'ETM idoine (épistémologique et cognitive), des procédés de construction d'un objet et des deux paradigmes géométriques G1 et G2, entre lesquels nous ne fixons pas de frontière nette, mais plutôt des interconnexions. Car, nous admettons qu'on peut passer d'un paradigme à un autre au cours d'une même situation. Dans ce cas, nous parlerons de basculement de paradigme, de jeu G1-G2, ou d'émiettement de paradigmes (Kuzniak, 2011), ou encore de cohabitation entre G1 et G2 (Parzys, 2011). Nous supposons que ce jeu est, en partie, régulé par le contrat didactique (Brousseau, 1998), dépend de l'ETM et des relations entre enseignant-élève qui ont lieu au cours du développement de la démarche de validation, dans une séquence de résolution. La mise en fonctionnement de l'approche (**EPP**) est effectuée par le biais de la résolution du genre de tâche « construire » qui déclenche, chez le sujet (enseignant ou élève) en situation de résolution, un processus cognitif, active l'ETM idoine et met en place une méthode mathématique de résolution. Ainsi, cette approche se caractérise par des degrés de dévolutions à l'élève des éléments de la structure de développement de la démarche de validation, et des régularités dans la mise en œuvre du travail mathématique permettant la réalisation de la construction de l'objet, la mise en forme du discours de validation qui accompagne ce travail et l'exécution des procédés de construction qui réalisent effectivement cette construction, dans une forme d'organisation mathématique donnée.

4.1.4.1. Les modalités d'entrée dans la mise en œuvre de la forme d'organisation du travail mathématique

La forme d'organisation du travail mathématique vise à mettre sur pied une structure de développement de la démarche de validation, dans un ETM. Cette structure met en évidence certains éléments (nous y reviendrons plus loin) sur lesquels les élèves peuvent se référer pour produire la validation de la construction réalisée (ou du résultat obtenu). C'est en mettant en évidence l'identification de ces éléments que l'enseignant va développer la démarche de validation chez les élèves. Ainsi, l'entrée dans la mise en œuvre de la forme d'organisation

élaborée pour développer cette identification se fera par le biais du travail mathématique d'organisation produite. Ceci à travers le travail mathématique permettant la réalisation de la construction, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement cette construction.

- **Le travail mathématique permettant la réalisation de la construction**

Ce travail s'enclenche avec la tâche « construire », mobilise une méthode mathématique de résolution et s'active au niveau de l'articulation des trois genèses de l'ETM idoine fixées au cadre (EPP). Ce travail est dirigé, soit par le paradigme G1 ou G2, soit par la cohabitation de ces deux paradigmes, soit successivement par les paradigmes G1, G2 et le jeu G1-G2, soit suivant l'un des cycles : $(G1 \rightarrow G1-G2 \rightarrow G2)$, $(G2 \rightarrow G1-G2 \rightarrow G1)$, $(G1-G2 \rightarrow G1 \rightarrow G2)$, $(G1-G2 \rightarrow G2 \rightarrow G1)$. Il s'effectue au travers, soit de l'une des trois dimensions associées à chacune des trois genèses de l'ETM idoine (sémiotique, instrumentale, discursive), soit au travers de l'articulation de deux d'entre elles (sémiotique et instrumentale, sémiotique et discursive, ou discursive et instrumentale), et éventuellement, au travers de l'articulation des trois dimensions concurremment, qui lui assignent une nature. Ces articulations donnent lieu à trois plans verticaux qui peuvent être identifiés par les genèses auxquelles les dimensions sont associées. Dans la description qui va suivre, nous renvoyons le lecteur à la figure 2 qui illustre les différents plans de l'ETM idoine.

- **Le plan sémiotique-discursif ([Sem-Dis])**

L'entrée dans ce plan peut s'opérer : d'une part, à travers la dimension sémiotique. Ici, il est question de détailler les transformations et les décompositions qui ont été effectuées perceptivement sur les figures ou sur l'ensemble de signes. Et, d'autre part, à travers la dimension discursive. Ici, il s'agit d'interpréter le problème en s'appuyant sur le discours de preuve. Dans ce contexte, les figures et la visualisation ne jouent qu'un rôle simplement heuristique.

- **Le plan instrumental-discursif ([Ins-Dis])**

En entrant par la dimension instrumentale, on arrive à la production d'un discours de validation soutenu par l'expérience. Mais, si on entre par la dimension discursive, on aboutit à une démarche de validation de type discursif axée sur le référentiel théorique, qui justifie la technique de construction et permet ainsi l'usage des artefacts (Rabardel, 1995).

- **Le plan sémiotique-instrumental ([Sem-Ins])**

L'entrée dans ce plan se fait soit par la dimension sémiotique qui permet la construction des objets par le biais du respect de certaines contraintes que fixent les signes ; soit par l'entrée par la dimension instrumentale qui convoque l'exploration visuelle et sémiotique des données que portent les artefacts. Ce plan met en œuvre l'interaction entre les signes et les outils de réalisation de la construction.

L'analyse des modalités d'entrée dans le travail mathématique permettant de réaliser la construction sera singulièrement importante pour décrire, caractériser et organiser la structure de développement de la démarche de validation dans la forme d'organisation élaborée.

Effectuer cette analyse revient à déterminer : quelle(s) méthode(s) mathématique(s) sera(-ont) mobilisée(s), quel(s) paradigme(s) géométrique(s) sera(-ont) privilégié(s), quelle(s) dimension(s) particulière(s) sera(-ont) privilégiée(s) pour initier le travail permettant de réaliser la construction. Et même, il sera question de voir comment les trois plans interagissent pour produire un travail mathématique intégral à l'intérieur de la forme d'organisation.

- **Le discours de validation qui accompagne le travail mathématique**

À l'intérieur du travail d'organisation, le travail mathématique permettant la réalisation de la construction, dans une forme d'organisation donnée, va déclencher le travail de validation (Kuzniak, 2011) de cette construction. Les trois plans verticaux [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis] de l'ETM idoine fixé au cadre (EPP), se mettent en lien et s'articulent avec les paradigmes géométriques G1 et G2, pour favoriser l'élaboration du discours de validation. Ainsi, dans les différentes étapes de la forme d'organisation du travail mathématique élaborée pour réaliser la tâche « construire » et développer la démarche de validation chez les élèves, se mettent en place des raisonnements pour découvrir, expliquer ou justifier les constructions réalisées. Un premier raisonnement peut être élaboré pour réaliser la figure à l'aide des artefacts. Un second pour formuler des conjectures en s'appuyant sur l'exploration visuelle de la figure. Et, un troisième pour démontrer les conjectures et établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions réalisées. Ainsi, le raisonnement mobilisé pourra, soit être analogique, inductif ou déductif, soit articuler successivement deux des trois raisonnements (analogique-inductif, analogique-déductif, ou inductif-déductif), soit se faire successivement en trois phases : au départ, analogique ; ensuite, inductif ; et, enfin déductif. Ce raisonnement pourra utiliser des arguments extraits des figures ou issus du référentiel théorique, ou encore des interprétations des données. Et donc, le travail de validation pourra aussi bien s'effectuer dans le plan [Sem-Ins], pour produire un raisonnement conduisant à un résultat plausible utilisant des arguments sémantiques ou sémiotiques, que dans le plan [Ins-Dis] pour produire un raisonnement conduisant à un résultat vraisemblable utilisant des arguments sémiotiques, ou encore dans le plan [Sem-Dis] pour produire un raisonnement conduisant à un résultat de nécessité (Cabassut, 2005) utilisant des arguments formels (ou théoriques). La dimension discursive (Dis) assurant la communication du discours de validation, l'argumentaire de validation sera, soit de plausibilité, soit démonstratif, soit non démonstratif. Ceci selon le contexte, l'objectif visé et la forme que prend le discours dans le processus de validation. Cette forme peut être démonstrative, non démonstrative ou qualifiée de plausibilité. Et la mise en forme du discours peut être organisée sous la forme d'une démonstration ou non, ou bien en fonction du contenu sémantique.

L'analyse des modalités d'entrée dans le discours qui accompagne le travail mathématique permettant la réalisation de la construction sera particulièrement importante pour caractériser la structure de développement de la démarche de validation dans la forme d'organisation élaborée. Effectuer cette analyse revient à déterminer quel(s) raisonnement(s) sera(-ont) mobilisé(s), quel(s) types d'arguments sera(-ont) employé(s) dans l'argumentaire de validation de la construction, quelle(s) mises en forme de l'argumentaire sera(-ont) explicitée(s), et quelle(s) démarche(s) de validation sera(-ont) décrite(s), pour initier le discours de validation de la construction réalisée à l'intérieur de la forme d'organisation.

- **Les procédés de construction qui réalisent la construction de l'objet**

Pour développer la démarche de validation, l'intérêt de la résolution doit davantage porter sur la procédure de construction que sur le résultat. La mise en œuvre de la stratégie de résolution qui est générée par la méthode mathématique mobilisée va déclencher le travail mathématique d'organisation. Pour favoriser la circulation de ce travail, les trois plans verticaux [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis] de l'ETM idoine fixé au cadre (**EPP**), vont se mettre en lien, s'articuler avec les paradigmes géométriques G1 et G2, pour favoriser l'élaboration des procédés de construction. Suivant l'approche (affine ou par les expressions analytiques) par laquelle le problème de construction est posé, et suivant la forme des données de son énoncé (Cf. chapitre 2), des négociations d'entrée dans la résolution sont mises en place. Ces négociations intègrent une étape de la forme d'organisation élaborée. Et, consistent à prouver l'existence et la constructibilité de l'objet que définit le problème. Elles (ces négociations) sollicitent un raisonnement pour structurer la stratégie de résolution qui va guider l'ensemble du travail dans la forme d'organisation. Les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction, greffées à la forme d'organisation, auront une forte influence sur ces procédés de construction. L'un des enjeux va consister en l'exécution de ce contrat. Un aspect important à exécuter sera celui qui est lié à la réalisation effective de la construction de l'objet. Ainsi, le plan [Sem-Dis] sera fortement sollicité pour justifier les techniques de réalisation de la construction. Le travail sera alors orienté vers la dimension discursive (Dis) où il va rester clos. Ce travail mathématique va consister à communiquer l'algorithme représentant la construction de l'objet dans G2. Conformément au contrat didactique (cf. chapitre 2), un basculement de ce travail dans G1, va le positionner sur le plan [Sem-Ins], afin de permettre la réalisation d'une construction instrumentée (objet de G1) visant à illustrer l'algorithme élaboré. L'activation du jeu G1-G2 va favoriser l'ouverture de la discussion sur le nombre de constructions possibles, solutions du problème.

L'analyse des procédés de construction de l'objet sera importante pour caractériser la procédure qui réalise effectivement la construction de l'objet dans la forme d'organisation élaborée. Effectuer cette analyse revient à déterminer quelles seront les preuves d'existence et de constructibilité de l'objet, et quelle sera la forme de la construction qui va matérialiser l'objet, pour initier les procédés de construction dans la forme d'organisation du travail mathématique permettant de développer la validation.

4.1.4.2. La structure de développement de la démarche de validation dans la forme d'organisation du travail mathématique

La structure de développement de la démarche de validation est, dans un premier sens, l'organe qui génère l'ensemble des éléments auxquels les élèves peuvent se référer, dans une forme d'organisation du travail mathématique, pour produire la validation d'une construction. Dans un second sens, elle donne les éléments que doit développer l'enseignant, chez les élèves, à l'aide de la forme d'organisation, pour favoriser l'apprentissage de la validation mathématique. Dans ce cas, elle est développée par l'enseignant porteur du projet d'enseignement de la validation, et est caractérisée par des degrés de dévolution à l'élève des éléments de la structure de développement de la démarche de validation et des régularités dans la mise en œuvre du travail mathématique, du discours de validation qui accompagne ce travail et des procédés de

construction qui réalisent effectivement la construction de l'objet que décrit le problème de construction. Elle est analysée à l'aide du cadre didactique (**EPP**) que nous avons qualifié d'approche semi-intégrative. Qualificatif que nous avons utilisé pour mettre en évidence sa spécificité organisationnelle fondée sur l'apport coordonné de trois théories didactiques où les ETM constituent une théorie majeure. Dans ce cadre, les trois plans verticaux [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis] de l'ETM idoïne, s'articulent avec les paradigmes géométriques (G1 et G2) et les procédés de construction pour favoriser l'élaboration d'une structure de développement de la démarche de validation où le travail est organisé en phases. Ici, les plans se mettent en lien avec les différentes phases du travail mathématique produit dans chaque étape de la forme d'organisation pour réaliser la tâche « construire ». L'exécution progressive de ces phases de travail par un enseignant développe, de fait, la démarche de validation chez les élèves, considérée comme un savoir-faire mathématique cognitivement fondé sur la coordination des genèses de l'ETM idoïne, dans leur relation avec le plan épistémologique (Kuzniak et Richard, 2014, p.7). Ainsi, un pas de validation est un argument (ou raison) qui peut être tiré de l'interprétation d'un élément issu de la relation (genèse-plan épistémologique). Cet élément peut servir de référence aux élèves pour valider un résultat élémentaire, ou bien d'appui à l'enseignant pour nourrir le développement de la validation. Ce qui signifie que nous considérons que chaque travail élémentaire effectué dans chacune des articulations entre deux dimensions de l'ETM fixées au cadre (**EPP**), produit un élément de la structure de développement de la démarche de validation. Et donc, l'enchaînement du travail élémentaire dans plusieurs articulations de l'ETM constitue un cycle complet du travail mathématique d'organisation produit dans une forme d'organisation. Ainsi, dans une forme d'organisation, un élément de la structure de développement de la démarche de validation est généré par un travail mathématique fait sur l'un des plans [Sem-Ins], [Ins-Dis] ou [Sem-Dis], orienté suivant la dimension discursive, sémiotique, ou instrumentale. Ce travail peut être de nature discursive, sémiotique ou instrumentale. Et, dirigé soit par le paradigme G1 ou G2, soit par le jeu G1-G2, soit successivement par $(G1 \rightarrow G1-G2 \rightarrow G2)$, $(G2 \rightarrow G1-G2 \rightarrow G1)$, $(G1-G2 \rightarrow G1 \rightarrow G2)$, $(G1-G2 \rightarrow G2 \rightarrow G1)$. Il est mis en place à l'aide d'une procédure de construction qui constitue l'intérêt central de la résolution pour mieux développer la démarche de validation des constructions, chez les élèves.

La structure de développement de la démarche de validation est l'élément que mettra en place une forme d'organisation mathématique élaborée pour développer la démarche de validation des constructions. La déterminer ou l'analyser reviendra à distinguer les éléments sur lesquels un enseignant devra s'appuyer pour développer la validation, chez les élèves, à un niveau d'enseignement, au cours d'une séquence de résolution.

Nous avons construit l'approche théorique (**EPP**), pour étudier la manière dont on peut organiser un problème mathématique de construction pour développer la validation chez les élèves. Cette approche nous donne un cadre pour élaborer et caractériser une forme d'organisation du travail mathématique, par le biais de la structure de développement de la démarche de validation que met en évidence cette forme d'organisation. Le cadre (**EPP**) rend compte de la manière dont l'ETM idoïne, les deux paradigmes géométriques (G1 et G2) et les procédés de construction s'imbriquent dans le travail d'organisation pour développer la démarche de validation chez les élèves. Il est caractérisé par la régularité dans le travail

mathématique d'organisation et la dévolution à l'élève de la structure de développement de la démarche de validation. En effet, l'articulation des deux points de vue (épistémologique et cognitif) de l'ETM idoine fixé à ce cadre et les interrelations entre les trois dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) associées aux genèses, définissent trois plans verticaux qui confèrent à ce cadre un aspect dynamique. Par ailleurs, les paradigmes G1 et G2, auxquels s'ajoute le jeu G1-G2, apportent à ce cadre de la cohérence pour rendre la validation produite mathématique (géométrique). Les procédés de construction qui y sont associés permettent de formuler la procédure de résolution de problème par un discours. Ces procédés fixent les conditions de négociation d'entrée dans la résolution, et donnent les modalités de réalisation de la solution. Voilà quelques éléments qui justifient les-bien-fondés de notre cadre didactique dans sa capacité à étudier la manière d'organiser un problème de construction (ou mathématique). Ainsi, dans l'élaboration d'une forme d'organisation du travail mathématique, il sera particulièrement important de mettre en évidence la structure de développement de la démarche de validation, après avoir caractérisé la forme de travail mathématique d'organisation mise en œuvre. Cette forme de travail doit mettre en exergue le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet que décrivent le problème de construction, le discours de validation qui accompagne ce travail, et les procédés de construction qui permettent la réalisation effective de la construction de l'objet. Toutefois, la structure de développement de la démarche de validation devra illustrer la façon dont les éléments sur lesquels l'enseignant va s'appuyer pour développer la validation chez les élèves, à l'aide de la forme d'organisation élaborée, sont générés. Il sera donc question, pour l'enseignant, d'articuler la distinction de ces éléments avec les étapes de la forme d'organisation du travail mathématique dans une séquence de résolution, pour obtenir progressivement le sens de la validation attendu, tel que décrit par l'ETM de référence.

4.2. La problématique et la méthodologie générale

L'élaboration de notre cadre théorique (**EPP**) centralise notre réflexion. Cette centralisation nous permet de reprendre et de reformuler nos questions de recherche, dont les éléments ont été récoltés progressivement, tout au long des analyses menées dans les quatre chapitres précédents. Ainsi, dans ce paragraphe, nous formulons les questions auxquelles nous essayons de répondre dans cette recherche. Puis, nous décrivons la méthode générale qui nous permettra de répondre à ces questions. Nous rappelons, par ailleurs, que les ETM, les paradigmes géométriques et les procédés de construction qui seront évoqués dans la totalité de ce travail sont ceux qui sont fixés à notre cadre théorique, tels que nous les avons explicités.

4.2.1. La formulation des questions de recherche

Nous avons relevé, dans la littérature, qu'Arsac et al. (1992) suggèrent de développer la validation, chez les élèves, en les amenant à s'approprier les règles du débat mathématique, à partir de certaines situations d'enseignement de la démonstration qu'ils proposent. En se référant à ce point de vue, nous prenons comme situation d'enseignement de la validation, les problèmes de construction (ou mathématique), et comme moyen d'enseignement de cette validation, la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique ». Ainsi, en se plaçant dans notre cadre théorique (**EPP**), nous définissons une forme d'organisation comme étant une manière particulière d'agencer par étapes les sous-tâches

liées, à la séquence de résolution et / ou à un problème mathématique que l'on résout dans un ETM, pour développer la démarche de validation chez les élèves. Ce qui nous permet de postuler que :

La manière d'organiser la résolution d'un problème mathématique donné, à travers la caractérisation des objets que décrit ce problème, raffine, dans l'ETM idoine, une démarche de validation et fournit des moyens permettant de développer la capacité de valider, chez les élèves, dans les classes de mathématiques.

Ainsi, l'objectif de notre recherche est de voir comment on peut développer la validation mathématique chez les élèves, à l'aide d'une « forme d'organisation du travail mathématique » mise en place dans les ETM idoines, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction (ou mathématique), lié aux transformations du plan. La question générale de recherche consiste donc à savoir :

QGR :

Comment organiser la résolution d'un problème mathématique, dans l'ETM idoine, à un niveau d'enseignement donné, pour raffiner, chez les élèves, une manière de distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent se référer pour produire une « démarche de validation » des résultats qu'ils obtiennent ?

La définition de la forme d'organisation du travail mathématique que nous avons adoptée est élaborée en se plaçant du côté de l'enseignant, porteur du projet d'enseignement de la validation. D'un point de vue institutionnel, nous pensons que les ressources disponibles (les manuels et leurs corrigés) dans l'enseignement des transformations du plan, en classe de Première Scientifique, proposent une forme d'organisation du travail mathématique permettant à l'enseignant de développer la démarche de validation chez les élèves. Ainsi, notre question de recherche peut être reformulée de la manière suivante :

Q₁ : Quelle forme d'organisation du travail mathématique proposent les ETM idoines potentiels, dans la classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation chez les élèves ?

Compte tenu du fait que l'étude didactique et institutionnelle de la question de validation, en classe de Première Scientifique (Cf. chapitre 3), a établi que, comme les problèmes de construction, la validation ne constitue pas un objet d'enseignement dans les programmes mais un savoir-faire que l'enseignant doit développer chez les élèves, au cours de ses enseignements, alors la « forme d'organisation du travail mathématique », dans une séquence de résolution d'un problème mathématique, peut dépendre de l'ETM idoine effectif, être différente de celle que proposent les ETM idoines potentiels, et varier d'un ETM idoine effectif à un autre. Notre question de recherche peut donc aussi se décliner sous la forme suivante :

Q₂ : Quelles formes d'organisation du travail mathématique sont explicitées, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves ? Varient-elles d'un ETM idoine effectif à un autre ? Sont-elles différentes de celle que proposent les ETM potentiels ?

Si, malgré l'existence d'une forme d'organisation du travail mathématique, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, plusieurs enseignants de mathématiques continuent de constater que la majorité de leurs élèves sont incapables de valider les résultats qu'ils obtiennent, on peut faire l'hypothèse que la forme d'organisation disponible ne permet pas de développer la démarche de validation chez les élèves. Et, ainsi ramener cette incapacité des élèves à valider un résultat mathématique à une étude des limites de la forme d'organisation du travail mathématique actuellement disponible, pour centrer notre recherche sur l'élaboration d'un modèle de « forme d'organisation du travail mathématique » susceptible de développer la capacité de validation des élèves. Ainsi, notre question de recherche peut encore se décliner de la manière suivante :

Q_{3.1}: Quelle forme d'organisation du travail mathématique proposer, dans l'ETM idoine, pour développer la démarche de validation, chez des élèves, en classe de Première Scientifique ?

Compte tenu du fait qu'Arsac et al. (1992) identifient clairement les éléments qui constituent les règles du débat mathématique auxquelles les enseignants doivent se référer pour développer le raisonnement déductif chez les élèves, ajoutant à cela le fait que nous avons établi (Cf. chapitre 4) qu'une forme d'organisation doit mettre en évidence une structure de développement de la démarche de validation illustrant les éléments que doit développer l'enseignant chez les élèves, nous pensons que le modèle de forme d'organisation du travail mathématique proposé doit décrire certains éléments que l'enseignant doit raffiner chez les élèves, pour les amener à valider les constructions (ou résultats) qu'ils réalisent (ou obtiennent). Ainsi, notre question de recherche peut à nouveau être reformulée de la manière suivante :

Q_{3.2}: Avec le modèle de forme d'organisation du travail mathématique proposé, quels éléments doit raffiner un ETM idoine, en classe de Première Scientifique, pour développer une démarche de validation, chez les élèves ?

Cependant, l'élaboration d'un modèle de « forme d'organisation du travail mathématique » que nous mettons à la disposition de l'enseignant et des élèves, pose la question de son apport dans la réalisation d'un projet de développement de la démarche de validation au niveau de l'enseignant, ainsi que celle de son impact sur l'apprentissage de la validation au niveau des élèves. Ce qui fait que notre question de recherche peut encore se décliner en deux sous-questions, de la manière suivante :

Q_{4.1} : Quel rôle peut jouer la forme d'organisation du travail mathématique élaborée, au cours de la réalisation d'un projet de développement de la démarche de validation, chez les élèves, dans un ETM idoine effectif ?

Q_{4.2}: Peut-il exister une corrélation entre l'utilisation de la forme d'organisation du travail mathématique élaborée et la réussite dans la résolution d'un problème de construction, dans les ETM idoines effectifs en classe de Première Scientifique ?

Notre question générale de recherche se décline donc ainsi en six questions permettant d'explorer les effets de l'organisation d'un problème mathématique, sur l'enseignement et sur l'apprentissage de la validation au secondaire.

4.2.2. La formulation des hypothèses de recherche

Nous admettons que la démarche de validation, dans un ETM idoine, à un niveau d'enseignement donné, est un savoir-faire qui ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution de problèmes mathématiques. Ainsi, pour répondre à nos questions de recherche, nous avons construit une hypothèse pour chacune de ces questions. Ainsi, pour répondre à la question (Q_1) nous faisons l'hypothèse (H_1) formulée de la manière suivante :

H_1 : Les ETM idoines potentiels proposent une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes (Analyse-Synthèse) : d'abord une étude de la configuration, l'Analyse ; et puis la mise au point d'une procédure de construction, la Synthèse. Nous la notons (A-S).

Pour la question (Q_2) nous faisons l'hypothèse (H_2) suivante :

H_2 : Pour décrire le processus de construction d'un même objet géométrique défini à l'aide d'un même problème de construction, des ETM idoines effectifs différents développent la même forme d'organisation du travail mathématique qui est celle que proposent les ETM idoines potentiels : (A-S).

Pour répondre à la question ($Q_{3,1}$) nous partons d'une hypothèse fondamentale, qui consiste à dire qu'un modèle de forme d'organisation du travail mathématique, élaboré à partir des limites de la forme d'organisation « Analyse-Synthèse » (A-S) actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, développerait mieux la démarche de validation, chez les élèves. Ce qui nous permet de postuler avec l'hypothèse ($H_{3,1}$) que :

$H_{3,1}$: Nous proposons le modèle (A-A-C / P-A-P), de forme d'organisation du travail mathématique à deux articulations : *Appréhension-Analyse-Conception de la solution* (A-A-C) et *Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions* (P-A-P). La première articulation agence, par étapes, les sous-tâches liées à la séquence de résolution ; et la seconde celles liées au problème de construction. Les deux articulations s'imbriquent sur l'activité de construction. Elles s'emboîtent et s'articulent entre elles. Ce modèle peut s'adapter à la résolution de tout problème mathématique pour prendre la forme générale : (A-A-C / \mathcal{B}), où \mathcal{B} est une organisation faite sur le problème mathématique en résolution.

Notre hypothèse ($H_{3,2}$) relative à la question ($Q_{3,2}$) est que :

$H_{3,2}$: Les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, raffinent, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit de tous les actes de construction.

Pour la question ($Q_{4,1}$) nous faisons l'hypothèse ($H_{4,1}$) suivante :

$H_{4,1}$: Dans les ETM idoines effectifs, le modèle élaboré joue un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la manière de distinguer le processus de résolution, la caractérisation

de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit des actes de construction. Ce sont là les éléments auxquels les élèves peuvent se référer pour produire la démarche de validation des constructions qu'ils réalisent.

Pour la question ($Q_{4.2}$) nous postulons avec l'hypothèse ($H_{4.2}$) que :

$H_{4.2}$: Dans les ETM idoines effectifs, il existe une corrélation entre l'utilisation du modèle élaborée et la réussite dans la résolution du problème. En effet, le modèle donne, dans ces ETM, une manière de résoudre un problème de construction, caractériser l'objet, choisir et concevoir une transformation du plan liée à l'objet, choisir le type de construction à mettre en œuvre, décrire le processus de réalisation de la construction, et valider le produit des actes de construction. Des éléments que raffine ce modèle, au niveau des élèves, pour développer la démarche de validation.

4.2.3. Les objets d'étude : une délimitation de notre travail de recherche

Nous avons ramené le traitement de l'incapacité des élèves à valider un résultat mathématique qu'ils obtiennent, à l'étude du développement de la démarche de validation, à l'aide d'un problème mathématique (de construction). Autrement dit, au développement de la capacité des élèves à valider un résultat mathématique à travers la résolution d'un problème de construction. Ce qui veut dire que nous étudions le lien qui lie le processus de construction et la validation mathématique dans les ETM idoines. Il s'agit de voir comment développer la validation mathématique chez les élèves à l'aide d'une « forme d'organisation du travail mathématique » mise en place dans une séquence de résolution d'un problème de construction lié aux transformations du plan. Ainsi, notre recherche est centrée sur le couple (Construction, Validation) et porte sur l'étude de la manière dont on peut organiser²⁷ la résolution d'un problème de construction dans l'ETM idoine, au cours d'une séquence de résolution, pour amener les élèves à identifier les éléments sur lesquels ils peuvent prendre appui pour produire une démarche de validation de cette construction. De ce fait, nous avons décidé de limiter nos objets d'étude en considérant les points ci-dessous :

1. Nous avons restreint le processus de construction d'un objet géométrique à celui qui est pratiqué dans les ETM idoines en classe de Première Scientifique, à l'intérieur d'un problème de construction lié aux transformations du plan, en choisissant l'une des approches (affine ou analytique) par lesquelles les transformations du plan sont proposées dans l'ETM de référence à ce niveau scolaire.
2. Nous ne faisons pas de différence entre les termes preuve et démonstration. Car l'ETM de référence, en classe de Première Scientifique, confond les deux termes pour les considérer comme synonymes. Ainsi, la démarche de validation des constructions est réduite à l'argumentaire de validation inséré dans le raisonnement mathématique attendu, en classe de Première Scientifique. Cet argumentaire est de type démonstratif, élaboré dans un contexte de découverte et de justification, utilise des arguments formels

²⁷ *Agencer les tâches au cours d'une séquence de résolution d'un problème mathématique dans le but de développer un savoir ou un savoir-faire, au niveau des élèves.*

(ou théoriques) insérés dans un discours dont la mise en forme est organisée sous la forme d'une démonstration ou non, ou bien en fonction du contenu sémantique. La démarche de validation des constructions est donc celle produite en classe. Nous allons nous limiter à celle qui est écrite par les élèves et admise par l'enseignant, ainsi qu'à celle que produit l'enseignant au tableau.

3. Pour identifier la forme d'organisation du travail mathématique explicitée dans les ETM idoines effectifs, nous faisons des observations de classe, au cours desquelles nous sommes intéressés de voir comment les enseignants mettent en œuvre une situation que nous avons construite, en laissant la mise en œuvre à leur charge. Nous nous limitons à analyser le discours, les gestes et les échanges qu'auront les enseignants avec les élèves, visant à organiser, soit le problème de construction, soit la séquence de résolution, ou bien les deux à la fois.
4. Pour tester le modèle élaboré et dégager son rôle dans le développement de la démarche de validation chez les élèves, nous nous intéressons uniquement aux interactions entre l'enseignant et les élèves d'une part, et entre les élèves d'autre part, au cours d'une séquence de résolution d'une situation en classe. Compte tenu du fait que c'est l'enseignant qui est porteur du projet d'enseignement de la validation et que dans une phase de résolution de problèmes en classe, l'enseignant provoque, crée et anime les interactions entre lui et les élèves, puis entre les élèves, afin de conduire son projet d'enseignement, nous centrons cette étude, à ce niveau, sur un enseignant mettant en œuvre la forme d'organisation du travail mathématique que nous avons élaborée. Et nous prenons en charge l'organisation de la mise en œuvre de la situation en classe.
5. Pour évaluer les effets du modèle élaboré sur l'apprentissage de la validation chez les élèves, nous prenons un échantillon d'élèves et nous centrons l'étude sur leurs productions, en nous limitant, dans l'analyse de ces productions, au discours d'organisation du travail mathématique de réalisation de la construction et à celui de validation de la construction réalisée qu'ils auront rédigée, en utilisant le modèle que nous proposons.

Compte tenu du temps qui nous est accordé pour cette recherche, et de l'intérêt que pourraient avoir nos objets d'étude pour davantage la nourrir, nous sommes contraints de faire certains choix. Nous choisissons donc de limiter notre recherche à la manière d'organiser la résolution d'un problème de construction lié aux transformations du plan dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, pour développer la capacité de valider chez les élèves. Étude que nous allons, par la suite, étendre à toute autre catégorie de problème mathématique. Le processus de construction et la validation prenant le sens décrit dans l'ETM de référence tels que pratiqués dans les ETM idoines effectifs en classe de Première Scientifique, nous écartons, dans notre recherche, le point de vue des élèves sur ces deux objets. Cette délimitation de notre travail nous dirige vers l'élaboration d'une méthodologie générale qui va nous permettre de conduire notre recherche.

4.2.4. La méthodologie générale de recherche

Le traitement de notre question générale de recherche (**QGR**) se fait dans le cadre théorique (**EPP**). Cette question, qui s'est décomposée en sous-questions : **Q₁**, **Q₂**, **Q_{3.1}**, **Q_{3.2}**, **Q_{4.1}** et

Q_{4.2}, nous a conduit à la formulation des hypothèses de recherche : **H₁**, **H₂**, **H_{3.1}**, **H_{3.2}**, **H_{4.1}** et **H_{4.2}**, que nous cherchons à valider. Pour atteindre cet objectif, nous construisons une méthodologie qui suit les articulations ci-dessous :

M₁ : Afin de tester l'hypothèse **H₁** relative à la « forme d'organisation du travail mathématique » disponible dans les ETM idoines potentiels en classe de Première Scientifique, nous conduisons une étude qualitative des solutions de deux problèmes de construction résolus dans le manuel CIAM, situés dans sa partie consacrée à « *l'utilisation des transformations du plan* ». Puis nous mettons en évidence la forme de travail mathématique d'organisation ayant permis à ces auteurs de réaliser et de valider les constructions des objets présents dans ces solutions. Partant des règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction (Cf. chapitre 2), nous dégagons les étapes de résolution de ces problèmes que proposent ces auteurs dans ces solutions. En nous appuyant sur la méthode de résolution mise en évidence dans la partie « *Méthode* » du manuel, nous interprétons ces étapes comme étant la forme d'organisation du travail mathématique que propose leur ETM idoine potentiel. Ensuite, conformément à notre cadre théorique, nous analysons le fonctionnement et les caractéristiques de cette forme d'organisation, ce qui nous permet de dégager la structure de développement de la démarche de validation adossée à cette forme d'organisation.

M₂ : Pour tester l'hypothèse **H₂** relative, d'une part aux « formes d'organisation du travail mathématique » développées dans les ETM idoines effectifs en classe de Première Scientifique, et d'autre part à la comparaison de ces formes d'organisation entre elles, ainsi qu'à celle que proposent les ETM idoines potentiels, nous avons observé et filmé deux séquences de résolution d'une situation, conduites en classe par deux enseignants avec leurs élèves. Puis, nous avons transcrit ces séquences et procédé à leurs analyses. Dans ces analyses, nous nous sommes intéressés à toutes les indications proposées par l'enseignant, ayant trait à une organisation visant à aider les élèves à décrire le processus de réalisation et de validation des constructions de l'objet que décrit le problème. Ainsi, nous avons pris en compte les interactions qui ont eu lieu non seulement entre les enseignants et les élèves, mais aussi entre les élèves, pendant la séquence de résolution. Ce qui nous a permis de mettre en évidence la forme de travail mathématique d'organisation mise en œuvre par chaque enseignant pour réaliser la construction et développer la démarche de validation de cette construction, chez les élèves. En complétant nos analyses à l'aide des captures du discours d'organisation élaboré par l'enseignant, tel qu'il est apparu au tableau et sur sa fiche de préparation, nous avons dégagé les formes d'organisation du travail mathématique explicitées dans chaque ETM idoine effectif et réalisé la comparaison de ces formes d'organisation du travail mathématique entre elles, ainsi qu'à celle que propose les ETM idoines potentiels.

M_{3.1} : Pour tester l'hypothèse **H_{3.1}**, portant sur la manière dont on peut organiser un problème mathématique dans les ETM idoines pour développer la démarche de validation chez les élèves, nous avons élaboré un modèle de forme d'organisation du travail mathématique, en nous appuyant sur le principe de « raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) » mathématique, élaboré à partir de deux concepts : (1) : le principe de « raffinage », utilisé dans l'industrie pétrolière ; (2) : notre conception de l'enseignement et de l'apprentissage d'un savoir mathématique en milieu scolaire, que nous empruntons à Arsac et al. (1992). Nous avons transposé dans le

domaine de l'enseignement des mathématiques le principe du raffinage pétrolier, consistant à transformer le pétrole brut en trois étapes pour obtenir une matière plus légère, d'une plus grande valeur commerciale et causant moins de problèmes à l'environnement. Ensuite, nous avons illustré son application dans ce domaine à l'aide de la théorie de la Transposition Didactique (Chevallard, 1998). Ce qui nous a donné une manière d'organiser une séquence de résolution d'un problème mathématique dans les ETM idoines. Sur la base des limites identifiées du modèle « Analyse-Synthèse », nous avons élaboré notre modèle en complétant d'abord la forme d'organisation (A-S) à trois étapes, et puis en décomposant un problème de construction en trois parties. Nous avons ainsi obtenu le modèle de la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P), à deux articulations : l'une, externe au problème de construction (A-A-C), et l'autre, interne à cette catégorie de problème (P-A-P). Ces deux articulations s'imbriquent, s'enchevêtrent et s'emboîtent totalement dans l'activité de construction de l'objet que décrit le problème de construction. Pour élargir l'application de ce modèle à toute catégorie de problèmes mathématiques, nous avons relevé, dans sa conception, une démarche scientifique qui voudrait que tout problème issu de n'importe quel domaine des mathématiques soit traité au sein d'une séquence de résolution qui prend en compte la gestion de la séquence de résolution et de celle du problème. Ainsi, ce modèle organise la séquence de résolution et le problème mathématique en résolution. Ce qui nous a permis de le généraliser et obtenir la forme générale : (A-A-C / \mathcal{B}), où \mathcal{B} représente une organisation faite sur le problème mathématique en résolution qui sert de situation d'enseignement de la validation.

M_{3.2} : Pour tester l'hypothèse **H_{3.2}** relative à la distinction des éléments que doit raffiner le modèle (A-A-C / P-A-P) pour développer la démarche de validation chez les élèves, nous avons mené une étude descriptive de son fonctionnement, en nous plaçant dans le cadre théorique (**EPP**). Cette étude a mis en évidence les caractéristiques de cette forme d'organisation dans l'enseignement et l'apprentissage de la validation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Une étude comparative des caractéristiques de ce modèle et de celles du modèle (A-S) proposée par les manuels et pratiquée par les enseignants en classe, nous a permis de décrire le travail mathématique d'organisation qu'il produit, à travers les caractéristiques du travail mathématique permettant de réaliser la construction d'un objet que définit le problème de construction, du discours de validation qui accompagne ce travail et des procédés de construction qui permettent de réaliser effectivement la construction de cet objet. Ce qui nous a permis de dégager la structure de développement de la démarche de validation qu'il offre dans le processus d'apprentissage de la validation. Cette structure a mis en exergue les éléments que doivent raffiner les ETM idoines, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) pour développer la validation chez les élèves.

M_{4.1} : Pour tester l'hypothèse **H_{4.1}** relative au rôle du modèle (A-A-C / P-A-P) dans la réalisation d'un projet de développement de la démarche de validation chez les élèves, dans les ETM idoines, nous avons observé et filmé une séquence de résolution de la situation précédente, conduite en classe par un troisième enseignant en présence de ses élèves. Nous avons repris la même situation pour éviter de faire de nouvelles analyses *a priori*, afin de nous focaliser sur les effets que pourrait avoir le modèle sur l'enseignant. Les simulations faites avec cet enseignant ayant mis en évidence le fait que ce modèle joue un rôle d'aide au raffinement de la capacité des élèves à résoudre un problème de construction, nous avons transcrit la séquence de

résolution de cette situation et analysé le travail mathématique d'organisation produit, permettant à l'enseignant de décrire et de réaliser la construction de l'objet, et le travail mathématique d'organisation réalisé pour développer la démarche de validation chez les élèves. Cette analyse, qui a été ramenée à l'identification des différentes aides qu'apporte le modèle à l'enseignant lorsque ce dernier réalise et valide le processus de construction de l'objet que décrit le problème, a permis de dégager le rôle de la forme d'organisation du travail mathématique élaborée au niveau des enseignants.

M_{4.2} : Pour tester l'hypothèse **H_{4.2}** portant sur les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation par les élèves, nous avons fait travailler douze binômes d'élèves sur une nouvelle situation. Les binômes étant constitués d'élèves ayant participé aux différentes séquences de résolution précédentes, nous avons commencé par interpréter la réussite dans la résolution d'un problème de construction par le succès dans la réussite de la résolution du problème et la réussite dans le raisonnement mathématique qui réalise cette résolution. Et ensuite, nous avons procédé à une analyse des productions de ces binômes de deux manières différentes : d'abord une analyse de la fréquence de réussite des binômes relativement au modèle de forme d'organisation du travail mathématique utilisé, ceci pour vérifier la corrélation entre l'utilisation du modèle élaboré et la réussite du problème ; ensuite une analyse centrée sur les productions des binômes ayant suivi la séquence visant à mettre en œuvre le modèle (A-A-C / P-A-P), pour mesurer les effets d'utilisation de ce modèle sur l'apprentissage de la validation par les élèves. Cette deuxième analyse s'est faite à partir d'une grille que nous avons élaborée. Cette grille, qui est issue de notre cadre théorique (**EPP**), s'appuie sur le discours écrit du travail mathématique d'organisation mis en œuvre par chaque binôme pour décrire le processus de construction et de validation, de la construction tel qu'il a apparue sur la feuille de composition de chaque binôme.

Nous allons détailler la méthodologie liée à chaque hypothèse dans la rubrique où elle sera mise en œuvre.

PARTIE 2

**LA FORME D'ORGANISATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET
LA DÉMARCHE DE VALIDATION, DANS LES ETM IDOINES EN,
CLASSE DE PREMIERE SCIENTIFIQUE**

Introduction de La deuxième partie

L'objectif de notre recherche est de voir comment on peut développer la validation mathématique, chez les élèves, à l'aide des formes d'organisation du travail mathématique, mises en place au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction, liée aux transformations du plan, en classe de Première Scientifique. D'un point de vue institutionnel, nous considérons que les ressources disponibles (les manuels et leurs corrigés) dans l'enseignement des transformations du plan, peuvent proposer une forme d'organisation du travail mathématique, liée à la séquence de résolution et/ou au problème de construction, permettant de développer la démarche de validation, chez les élèves. Cette considération génère un questionnement qui peut être traduit par deux sous-questions consistant à savoir, d'une part :

Q₁ : Quelles formes d'organisation du travail mathématique proposent les ETM idoines potentiels, en classe Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves ?

Et d'autre part :

Q₂ : Quelles formes d'organisation du travail mathématique sont explicitées, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves ? Varient-elles d'un ETM effectif à un autre ? Sont-elles différentes de celles que proposent les ETM potentiels ?

Ces questions visent, d'une part, à déterminer la forme d'organisation du travail mathématique, proposée par les auteurs des manuels et celle que développent les enseignants, dans les salles de classe. D'autre part, elles visent à comparer les formes d'organisation disponibles, chez les enseignants entre elles ; et puis à celles que proposent les auteurs des manuels. Ceci dans le but de déterminer la forme d'organisation disponible actuellement, dans les ETM idoines, en classe de Première scientifique. Pour répondre à ces questions, nous conduisons une enquête institutionnelle en deux temps :

- D'abord dans les manuels, à travers une analyse qualitative des solutions de deux problèmes de construction ; ceci pour déterminer la forme d'organisation du travail mathématique que proposent les auteurs des manuels (voir **Chapitre 5**). Les ETM idoines fixés à notre cadre théorique (**EPP**), qui vont être étudiés, sont dits idoines potentiels.
- Ensuite au niveau des enseignants, à travers des observations de deux séquences de résolution d'une situation, en salle, que nous réalisons avec deux enseignants (voir **Chapitre 6**). Ce travail s'effectue dans des ETM idoines fixés à notre cadre théorique (**EPP**), qualifiés idoines effectifs.

Nous clôturons cette partie par une analyse descriptive de la forme d'organisation du travail mathématique que proposent les ETM idoines, en classe de Première Scientifique (voir **Chapitre 7**) pour développer la démarche de validation, chez les élèves. Cette analyse nous

permet, conformément à notre cadre théorique, de mettre en évidence, la structure de développement de la démarche de validation associée à la forme d'organisation du travail mathématique, actuellement présente dans l'ETM idoine, classe de Première Scientifique.

Chapitre 5

La forme d'organisation du travail mathématique développée dans les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique

Nous avons défini une forme d'organisation du travail mathématique comme étant une manière particulière d'agencer par étapes, les sous-tâches liées, à la séquence de résolution et/ou à un problème de construction (mathématique) que l'on résout dans un ETM, pour développer la démarche de validation, chez les élèves. Dans ce chapitre, nous voulons répondre à la sous-question (Q_1), formulée de la manière suivante :

Q_1 : Quelle forme d'organisation du travail mathématique, proposent les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves ?

À notre avis et conformément à notre cadre théorique (**EPP**), répondre à cette question revient à analyser le travail mathématique d'organisation fait dans une activité de construction, menée à l'intérieur de la solution d'un problème de construction, pour décrire le processus de construction et de validation de l'objet géométrique que définit ce problème, dans un ETM idoine potentiel. Nous supposons avec (H_1) que :

H_1 : L'ETM idoine potentiel propose une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches²⁸ liées à la séquence de résolution en deux étapes : l'Analyse et la Synthèse (A-S).

Pour tester cette hypothèse, nous étudions le processus de construction des objets géométriques que conduisent les auteurs des manuels, dans les solutions de quelques problèmes de construction liés aux transformations du plan. Particulièrement, nous nous intéressons au travail mathématique d'organisation ayant permis à ces auteurs de réaliser et de valider la construction des objets que décrivent ces problèmes de construction. Pour cela, nous explicitons notre méthodologie de recherche particulière, présentons nos analyses, et puis nous livrons nos conclusions.

5.1. La méthodologie d'analyse du travail mathématique d'organisation permettant de décrire l'activité de construction des objets géométriques

Pour déterminer la forme d'organisation que proposent les ETM idoines potentiels, nous avons décidé de décrire le travail mathématique d'organisation que font les auteurs des manuels, de la classe de Première Scientifique, dans les activités de construction des objets géométriques définis à l'aide des problèmes de construction qu'ils proposent. Pour cela, nous procédons à

²⁸ Ce qui doit être fait à chaque étape.

une analyse des solutions de quelques exercices corrigés dans un manuel de cette classe, dans sa partie consacrée aux transformations du plan. Notre méthodologie consiste à :

1. Choisir l'un des trois manuels proposés par la Commission du Choix des Manuels et retenu au moins une fois par le Conseil d'Agrément du Manuel Scolaire et du Matériel Didactique (CAMMD). Ce manuel doit avoir été utilisé par les élèves et les enseignants pendant une longue période.
2. Sélectionner les solutions des exercices situés dans la partie du manuel consacrée à la géométrie des transformations. Conformément à nos résultats d'analyses sur l'enseignement des transformations du plan et sur la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique (Cf. les chapitres, 1 et 2), le choix de chacune de ces solutions doit obéir à la grille de critères ci-dessous :
 - La solution doit être celle d'un problème situé dans l'un des deux chapitres, « Isométries du plan » ou « Homothéties du plan » ; puis, traiter le genre de tâche « Construire ».
 - Dans la formulation de l'énoncé du problème dont nous envisageons d'analyser la solution, la forme des données doit prendre l'une des valeurs suivantes : Forme Discursive Simple (FD_S), Forme Discursive Accompagnée d'une Figure Simple ($FD + F_S$) ou Forme Discursive Accompagnée d'une Figure Simple Faiblement Codée ($FD + F_{SFC}$).
 - La solution doit être conforme aux règles du contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction, en classe de Première Scientifique, telle que nous l'avons déterminée (Cf. chapitre 2). Et puis, elle doit permettre d'étudier le processus de construction et validation de l'objet géométrique construit, afin de dégager la forme d'organisation du travail mathématique produit par les auteurs, ayant permis de développer la validation, chez les élèves.
3. Analyser les procédés de construction qui ont permis aux auteurs du manuel, de réaliser effectivement la construction de l'objet géométrique demandé.
4. Analyser le travail mathématique ayant permis de réaliser la construction et le discours de validation de la construction réalisée, qui accompagnent ce travail mathématique.

Ainsi, notre travail consiste à interroger, dans les exercices corrigés du manuel, l'organisation et les caractéristiques du discours écrit, permettant d'aboutir à la réalisation et à la validation des constructions ; ainsi que les caractéristiques de leurs mises en forme, telles qu'elles sont présentées pour être implicitement dévolues aux élèves. Or, conformément à notre cadre d'analyse, le travail mathématique ayant permis de réaliser les constructions, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement ces constructions, se développent dans une organisation du travail mathématique qui prend une forme qu'on peut identifier à travers le discours écrit, oral, ou écrit et oral, que produit le constructeur. Cela signifie que la forme d'organisation du travail mathématique que proposent les ETM idoines potentiels est mise en évidence à partir de ces trois éléments. Nous précisons, dans les paragraphes qui suivent, comment nous allons procéder à l'analyse de chacun de ces trois éléments dans un exercice.

5.1.1. L'analyse des procédés de construction qui réalisent la construction de l'objet géométrique

Dans notre cadre d'analyse (**EPP**), les procédés de construction permettent de négocier les conditions d'entrée dans la résolution des problèmes de construction et de décrire la construction finale obtenue. Nous cherchons à travers l'analyse de ce premier élément, à voir si les auteurs des manuels produisent les preuves d'existence et de constructibilité des objets qu'ils construisent dans les solutions que nous analysons, et comment ces preuves sont établies. Ensuite, nous regardons comment ils décrivent l'activité de construction de ces objets et les constructions de ces objets qu'ils réalisent. Ce qui nous permet d'envisager le(s) paradigme(s) dans le(s)quel(s) se développe la forme d'organisation du travail mathématique permettant la réalisation et la validation de la construction de l'objet demandé, et puis de poursuivre l'analyse du point de vue des ETM fixés à notre cadre théorique.

5.1.2. L'analyse du travail mathématique qui réalise la construction de l'objet géométrique

À travers cette analyse, nous cherchons d'abord à déterminer la nature du travail mathématique ayant permis aux auteurs de réaliser la construction produite dans la solution du problème de construction que nous étudions ; puis, à caractériser ce travail mathématique. En effet, nous analysons en termes de paradigmes géométriques et de l'ETM (les genèses et les plans) liés à notre cadre d'analyse, les activités de construction menées dans quelques solutions d'exercices extraits du manuel. Les solutions de ces exercices sont proposées dans les ETM construits par les auteurs du manuel. Ces ETM sont qualifiés d'idoines potentiels. Ils sont ceux qui sont fixés à notre cadre théorique (**EPP**). Conformément à ce cadre, cette analyse de ce travail se base sur les points ci-dessous :

- La méthode mathématique mobilisée pour réaliser la construction.
- Le(s) paradigme(s) géométrique(s) qui dirige(-nt) le travail de description et de réalisation de la construction.
- La(les) dimension(s) privilégiée(s) dans le travail permettant de décrire et de réaliser la construction. Ici, nous analysons les dimensions sémiotique, discursive et instrumentale de ces ETM.
- La circulation du travail mathématique au sein des plans verticaux des ETM ayant permis de décrire et de réaliser la construction.

5.1.3. L'analyse du discours de validation, qui accompagne le travail mathématique de réalisation de la construction de l'objet géométrique

Nous analysons le discours de validation, qui accompagne le travail mathématique ayant permis de réaliser la construction, afin de comprendre comment l'exactitude et la validité de cette construction ont été établies. En effet, nous cherchons à décrire le fonctionnement de l'argumentaire de validation à l'intérieur de la forme d'organisation du travail mathématique élaborée pour conduire l'activité de construction de l'objet géométrique produit dans la solution du problème. Cet argumentaire se déploie dans les ETM idoines potentiels fixés à notre cadre théorique (**EPP**). Conformément à ce cadre, l'analyse du discours de validation met en évidence

la démarche de validation qui est adossée à la structure de développement de la démarche de validation des constructions qu'offre le modèle de forme d'organisation du travail mathématique mise en œuvre dans ces ETM. Et donc, l'analyse de ce discours de validation se fait à partir des points ci-dessous :

- Le raisonnement mobilisé pour produire la validation des constructions.
- Les arguments employés dans l'argumentaire de validation des constructions.
- La mise en forme de l'argumentaire de validation des constructions.

Ainsi, à partir de cette grille à trois niveaux qui a émergé de notre cadre théorique (**EPP**), nous analysons les solutions des problèmes de construction sélectionnés dans un manuel, pour décrire les degrés de dévolution aux élèves du travail mathématique d'organisation et caractériser la structure de développement de la démarche de validation des constructions. Ceci nous permet de mettre en évidence la forme d'organisation du travail mathématique ayant permis, d'une part, de réaliser et valider la construction de l'objet géométrique présent dans chacune des solutions, et d'autre part, de développer la validation, chez les élèves.

5.2. La forme d'organisation du travail mathématique proposée, dans un ETM idoine potentiel, en classe Première Scientifique

Pour déterminer la forme d'organisation du travail mathématique que proposent les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique, nous avons choisi d'analyser le travail mathématique d'organisation que font les auteurs de la collection des manuels CIAM²⁹, dans les activités de construction qu'ils mènent, dans deux solutions de deux problèmes de construction sur les « Isométries » et « Homothéties » du plan. Ce manuel répond à nos critères, puisqu'il est choisi et mis à la disposition des élèves depuis la réforme de 1992. Pour chaque solution que nous analysons, nous commençons par présenter l'énoncé du problème et la solution, tels qu'ils sont présentés dans le manuel, puis nous conduisons nos analyses.

1^{er} Cas : Problème N°1, extrait du manuel CIAM, 1992, Première SM, p.75

Enoncé du problème :

Soit (C) un cercle de centre O.
A et B deux points tels que O n'appartient pas à la droite (AB).
Construire, au compas, les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C).

Ce problème se situe dans le chapitre 4 : Isométries du plan. Il contient le genre de tâche « Construire », donné dans une approche affine. Dans sa formulation, la forme des données de l'énoncé prend la valeur, « Forme Discursive simple (FD_S) ». Ce problème se trouve dans la partie des exercices, intitulée « *Isométries et Problèmes de Construction* ». Ce qui suggère que ce problème de construction consiste à utiliser les isométries pour réaliser une construction demandée. En effet, les auteurs du manuel reformulent le problème n°110 de la Géométrie du compas développée par Mascheroni (1797) où il démontre que toute construction à la règle et au compas peut être réalisée au compas seul (Théorème de Mohr-Mascheroni). On peut donc

²⁹Collection Inter Africaine de Mathématiques, pour la classe de Première Scientifique.

comprendre pourquoi l'énoncé demande de construire uniquement au compas, les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C) sans faire allusion à l'utilisation de la règle.

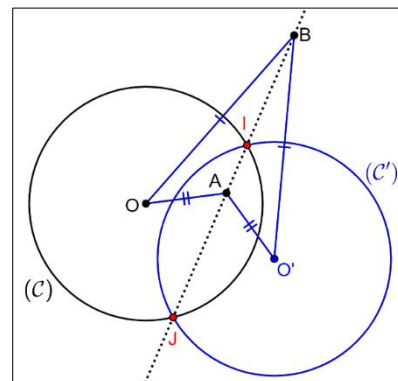
Solution proposée dans le manuel :

Solution

Si on considère le cercle (C') , l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (AB) , les points communs aux cercles (C) et (C') appartenant à la droite (AB) .

D'où la construction suivante :

- Construire le point O' , image de O par la symétrie orthogonale d'axe (AB) .
- Tracer le cercle (C') de centre O' et de même rayon que le cercle (C)
- I et J , points d'intersection des cercles (C) et (C') , sont les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C) .



Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique p.75.

Remarquons d'abord, pour entrer dans les analyses que cette solution est également celle que Mascheroni (1797) donne, sur ce même problème, pour discuter sur l'existence et la constructibilité des points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C) . Donc, bien qu'aucune preuve d'existence et de constructibilité « *des points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C)* » ne soit explicitement présentée à l'entrée de cette solution, ces objets sont supposés exister et être constructibles. Ainsi, nous pouvons lire : « *si nous considérons le cercle (C') , image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (AB) , les points communs aux cercles (C) et (C') appartiennent à la droite (AB)* ». Ce passage met en évidence l'existence d'un travail d'organisation fait en amont, consistant à admettre que le problème est résolu ; à réaliser au départ, sur la base des données de ce problème, une construction considérée comme solution ; et à dégager les propriétés qui peuvent permettre de décrire le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet demandé et de produire le discours de validation qui accompagne ce travail. Nous pensons que les auteurs sont partis d'une construction qu'ils ont réalisée pour visualiser la situation et extraire des propriétés leur permettant de résoudre le problème. Ils utilisent ainsi la méthode mathématique qui consiste à chercher les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pouvant leur permettre de construire effectivement les points d'intersections de la droite (AB) et du cercle (C) . Ces conditions sont mises en évidence à travers un raisonnement « assisté » par une « construction témoin »³⁰. Ainsi, le travail commence dans un va-et-vient entre les paradigmes G1 et G2. Ce problème étant lié aux isométries du plan, ils choisissent « *la symétrie orthogonale d'axe (AB)* » qui leur donne les moyens de réaliser la construction, d'anticiper sur sa validation, de contrôler le processus de construction et de valider effectivement la construction produite. Et donc, le travail mathématique est au départ, placé dans la dimension sémiotique visant l'utilisation des propriétés sur la symétrie axiale. Ce travail, qui se stabilise dans le paradigme G2, va circuler

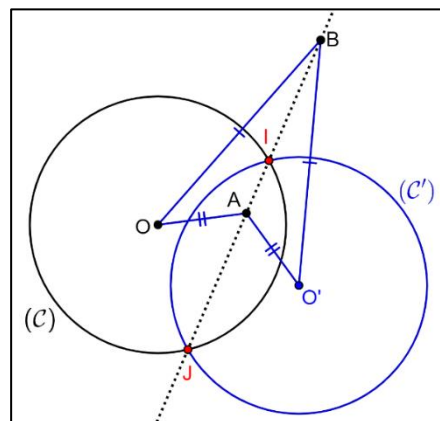
³⁰ Nous la qualifions ainsi, pour la distinguer de la construction définitive considérée comme objet géométrique construit.

dans le plan sémiotique-discursif [Sem-Dis], orienté vers la dimension discursive. L'énoncé demandant de « *construire au compas, les points d'intersections de la droite (AB) et du cercle (C)* », on s'attend à ce que le travail se stabilise sur la dimension instrumentale et que la solution soit une construction instrumentée simple. La mise en fonctionnement du contrat didactique (Cf. chapitre 2), va modifier ces attentes. Ainsi, la solution est un texte qui ressort, entre autres, les étapes de la résolution du problème, rendant ainsi le travail mathématique clos sur la dimension discursive. Donc, on peut dire que ce premier passage représente un résumé *d'analyse* de la situation qui n'est pas très détaillée car il s'agit d'une solution guidée. Par la suite nous pouvons lire :

« *D'où la construction suivante :*

- *Construire le point O' , image de O par la symétrie orthogonale d'axe (AB) ;*
- *Tracer le cercle (C') de centre O' et de même rayon que (C) ;*
- *I et J , points d'intersection des cercles (C) et (C') , sont les points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C) ».*

C'est la conséquence de l'analyse que nous traduisons comme une première synthèse. En effet, il s'agit d'un algorithme de construction chargé de générer, à chaque fois, une construction instrumentée. Il représente une construction des points d'intersections de la droite (AB) et du cercle (C) dans le paradigme G2. Cette construction est obtenue à partir d'un travail fait dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, mais qui s'est stabilisé dans G2 et qui est centré sur la dimension sémiotique, orienté sur la dimension discursive. Cet algorithme est d'ailleurs, accompagné de la construction instrumentée ci-dessous, qui traduit une deuxième synthèse.



Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique p.75

Cette deuxième construction peut être considérée, d'une part, comme un objet du paradigme G1, car elle est réalisée à l'aide des instruments matériels (compas et règle) et sur une feuille de papier ; et d'autre part, comme un objet du paradigme G2 si nous admettons qu'elle est réalisée à l'aide des instruments théoriques (les cercles (C) et (C'), les segments [OB], [O'B], [OA]...etc.) et donc une construction théorique. Elle est obtenue en exécutant point par point les différentes articulations de l'algorithme élaboré. Cette autre construction traduit non seulement un changement de point de vue sur les objets géométriques, mais aussi un changement de registre de représentation (Duval, 1995) puisque les auteurs sont passés du registre de langage mathématique au registre figural. Ce qui met en évidence un basculement

du travail sur le plan Sémiotique-Instrumental [Sem-Ins], orienté vers la dimension instrumentale privilégiant ainsi le paradigme G1. L'algorithme de construction et la construction instrumentée réalisés, représentent la construction demandée. La réalisation de ces deux éléments achève la séquence de résolution et clôture la solution, tout en définissant une autre étape de la résolution : la *synthèse* de toutes les analyses qui ont été effectuées. Pour ces auteurs, les procédés de construction des points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C) consistent à élaborer un algorithme décrivant la construction de ces points et à l'illustrer à travers une construction instrumentée. Dans leur argumentaire de validation, le raisonnement utilise les arguments formels (ou théoriques), issus des propriétés sur les cercles, l'intersection des cercles et des droites, et sur les symétries axiales. Il est développé dans un contexte de justification. Ce raisonnement consiste à chercher des arguments à partir de la construction « témoin » pour construire des hypothèses, à travers un raisonnement analogique ; ensuite formuler des conjectures à travers un raisonnement inductif, pour dégager une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation effective de la construction ; et enfin justifier et communiquer ces conjectures à travers un raisonnement déductif pour contrôler pas à pas les constructions élémentaires et établir la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées. Ce qui signifie que le discours de validation de la construction des points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C) construit, qui accompagne le travail mathématique, prend la forme d'une démonstration élaborée à partir des interprétations et des substitutions des caractérisations de ces points par les propriétés sur les symétries axiales. Ainsi, nous identifions deux phases : l'*Analyse et la Synthèse* qu'utilisent les auteurs du manuel CIAM pour organiser le travail mathématique, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement la construction des points d'intersection. Ces deux phases nous donnent la forme du travail mathématique d'organisation mise en place par ces auteurs pour conduire l'activité de construction des points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C).

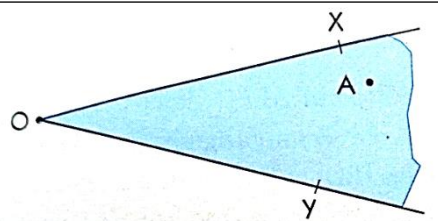
Ainsi, nous constatons que les auteurs du manuel décrivent les procédés de construction des « *points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C)* », le travail mathématique de réalisation de la construction de ces points et le discours de validation qui accompagnent ce travail, en organisant la séquence de résolution en deux étapes : l'*analyse*, pour rechercher les conditions nécessaires pour la réalisation de la construction des points d'intersection de la droite (AB) et du cercle (C) ; et la *synthèse*, pour s'assurer que ces conditions sont bien suffisantes pour l'existence et la construction effective de ces objets géométriques. Nous sommes tentés de penser que la forme d'organisation du travail mathématique disponible dans les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique, est celle qui organise la séquence de résolution en deux étapes, l'*Analyse et Synthèse*. Nous analysons une deuxième solution d'un problème de construction de ce manuel. Cette fois-ci, sur les homothéties du plan, pour observer à nouveau, comment les auteurs vont organiser le travail mathématique qui leur permet de conduire l'activité de construction d'un objet défini à l'aide d'un problème de construction.

2^e Cas : Problème N°2, extrait du manuel CIAM, 1992, Première SM, p.93

Enoncé du problème :

2. Sur la figure ci-contre, $[OX)$ et $[OY)$ sont deux demi-droites distinctes, A est un point situé dans la partie coloriée du plan, limitée par ces demi-droites.

Construire un cercle passant par A et tangent à $[OX)$ et $[OY)$. Discuter, suivant la position du point A , le nombre de solutions.



Ce problème est situé dans le chapitre 5 : Homothéties du plan. Il contient le genre de tâche « Construire » et est présenté aux élèves sous l'approche affine. Dans sa formulation, l'énoncé prend la valeur Forme Discursive simple accompagnée d'une figure faiblement codée (FD_5+ F_5 faiblement codée). Il se trouve dans la partie des exercices consacrés aux « Homothéties et Problèmes de construction ». Ce qui suggère que ce problème de construction vise à réaliser la construction d'un objet géométrique à l'aide des homothéties du plan.

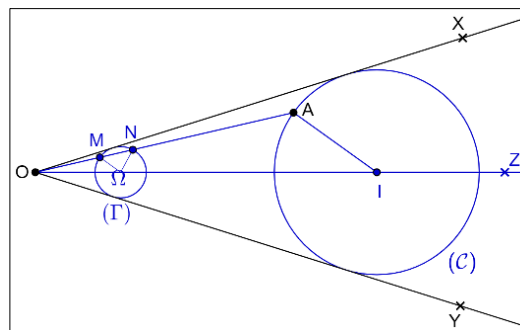
Solution proposée par le manuel :

Solution

Analyse

Le cercle (C) est tangent aux demi-droites $[OX)$ et $[OY)$; son centre I appartient donc à la bissectrice $[OZ)$ de l'angle \widehat{XOY} . Soit Ω un point de cette bissectrice et (Γ) le cercle de centre Ω , tangent aux deux demi-droites.

Il existe une homothétie h de centre O , transformant (Γ) en (C) . A a pour antécédent par h l'un des points d'intersection, M ou N , de la demi-droite $[OA)$ avec le cercle (Γ) .



Synthèse

- Construire la bissectrice $[OZ)$ de l'angle \widehat{XOY} .
- Choisir arbitrairement un point Ω ($\Omega \neq O$) de cette bissectrice.
- Construire le cercle (Γ) de centre Ω , tangent aux demi-droites $[OX)$ et $[OY)$.
- Tracer la demi-droite $[OA)$; soit M et N les points d'intersection de $[OA)$ avec le cercle (Γ) .

Les droites parallèles à (ΩM) et (ΩN) , passant par A , coupent (OZ) en deux points I et I' .

Les cercles (C) et (C') , passant par A et de centre respectifs I et I' , sont les deux cercles solutions du problème.

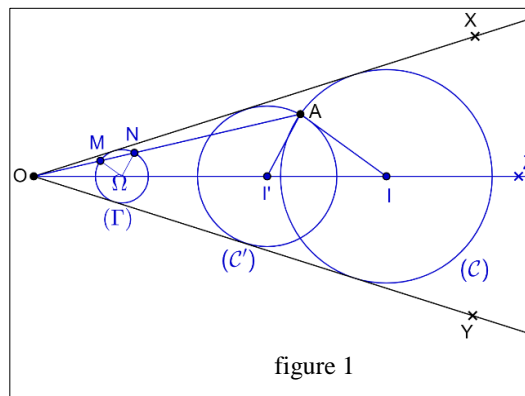


figure 1

Discussion

Il y a autant de solutions que de points d'intersection de (Γ) avec la demi-droite $[OA)$.

- Si A n'appartient à aucune des demi-droites $[OX)$ et $[OY)$, il y a deux solutions (figure 1)

En particulier si A appartient à la bissectrice $[OZ)$, les points I et I' seront construits en prenant un point intermédiaire, par exemple le point de contact S de (Γ) avec $[OX)$; les droites (AT) et (AT') sont parallèles respectivement à (MS) et (NS) (figure 2).

- Si A appartient à l'une des demi-droites $[OX)$ ou $[OY)$, il y a une seule solution (figure 3).

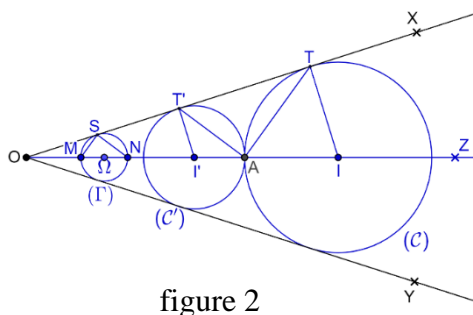


figure 2

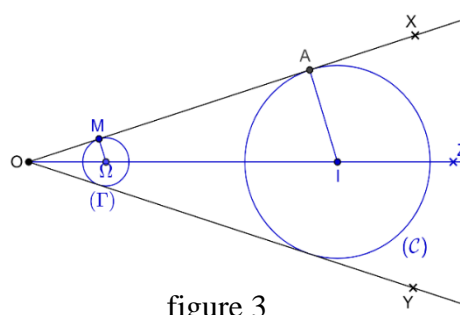


figure 3

Source : *Extraite du Manuel CIAM classe de Première Scientifique p.93*

Nous ne relevons aucune preuve d'existence et de constructibilité du « *cercle passant par A et tangent à $[OX)$ et $[OY)$* », fournie par les auteurs à l'entrée de cette solution. Le début de cette solution est marqué par la présence d'une construction traduisant les données du problème. C'est elle qui va servir de support pour conduire le travail mathématique permettant de réaliser la construction du cercle, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés qui réalisent la construction de ce cercle. En effet, les auteurs supposent le problème résolu et réalisent cette construction qui semble répondre à la question. Et c'est à partir de cette construction qu'ils dégagent les propriétés permettant d'élaborer la solution du problème. Ainsi, ils utilisent la méthode mathématique consistant à chercher les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour la construction du cercle. En se plaçant dans le paradigme G2, ils admettent que le cercle est tangent à $[OX)$ et $[OY)$ et donc son centre doit se trouver sur la bissectrice de l'angle \widehat{XOY} . En revanche, dans le paradigme G1, ils constatent que tout point de cette bissectrice ne répond pas au problème. Ils essayent de trouver une transformation du plan qui va leur permettre d'avancer. C'est ainsi, que nous relevons, d'une part, l'ajout de nouveaux points, M, N, I, Z et Ω , et d'autre part, l'ajout de nouveaux traits et de deux cercles (C) et (C') qui ne sont pas donnés dans la figure présente dans l'énoncé. Ce qui veut dire que ces éléments ont été ajoutés au fur et à mesure, selon l'apparition de nouvelles informations sur la construction. Le travail mathématique qui a démarré dans le paradigme G1 va se disperser et s'émietter dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2 en s'appuyant sur l'exploitation visuelle et sémiotique des informations fournies par la construction « témoin ». Ainsi, on peut lire : « *le cercle (C) est tangent aux deux demi-droites $[OX)$ et $[OY)$; son centre I appartient donc à la bissectrice $[OZ)$ de l'angle \widehat{XOY} . Soit Ω un point de cette bissectrice et (Γ) le cercle de centre Ω , tangent aux deux demi-droites* », ce qui met en évidence l'homothétie h de centre O comme la transformation du plan sur laquelle ils vont s'appuyer pour poursuivre l'activité de construction du cercle. Ainsi, le travail se place sur la dimension sémiotique et utilise cette homothétie

comme outil sémiotique. Car, ils soulignent que : « *il existe une homothétie h de centre O , transformant (Γ) en (C) . A a pour antécédent par h l'un des deux points d'intersections, M ou N , de la demi-droite $[OA)$ avec le cercle (Γ) ». Ceci stabilise le travail dans le paradigme G2, marqué par l'utilisation des propriétés sur les homothéties, faisant ainsi circuler le travail sur le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis]) privilégiant la dimension discursive. Un algorithme de construction du cercle est ainsi élaboré traduisant une première synthèse des analyses :*

« *-Construire la bissectrice $[OZ)$ de l'angle \widehat{XOY} . -Choisir arbitrairement un point Ω ($\Omega \neq O$) de cette bissectrice. -Construire le cercle (Γ) de centre Ω , tangent aux demi-droites $[OX)$ et $[OY)$. -Tracer la demi-droite $[OA)$, soit M et N les points d'intersections de $[OA)$ avec le cercle (Γ) ».*

C'est un objet de G2. Cet algorithme est accompagné d'une construction instrumentée qui est un objet de G1, représentant une deuxième synthèse des analyses. Cette dernière traduit un basculement du travail mathématique sur le plan Sémiotique-Instrumentale ([Sem-Ins]) orienté vers la dimension instrumentale. Ainsi, le procédé de construction du cercle consiste à élaborer un algorithme de construction et une construction instrumentée. Dans l'argumentaire de validation de la construction du cercle, le raisonnement commence par la réalisation d'une construction « témoin » pour chercher les propriétés pertinentes, se poursuit par une formulation des conjectures qui sont par la suite démontrées. Les auteurs utilisent donc simultanément trois types de raisonnement gradués de la façon suivante : analogique pour chercher les arguments, inductif pour élaborer des conjectures et déductif pour établir la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées. Car on peut lire : « *les droites parallèles à (ΩM) et (ΩN) , passant par A , coupent (OZ) en deux points I et I' . Les cercles (C) et (C') , passant par A et de centres respectifs I et I' , sont les deux solutions du problème ».* Les arguments sont formels (théoriques) et sont issus des propriétés sur les angles, de la bissectrice d'un angle, du parallélisme des droites, de la tangente à un cercle et des homothéties du plan. Le discours est construit sous la forme d'un argumentaire de type démonstratif, guidé par une démarche qui consiste à valider pas à pas la construction du cercle et puis à établir que le cercle construit est celui qui est décrit par l'énoncé. Dans cette solution, nous identifions trois phases qui organisent le travail mathématique permettant de réaliser la construction du cercle et le discours de validation qui accompagnent ce travail, puisqu'on peut lire au début du premier paragraphe : « *Analyse* », du second « *Synthèse* » et du troisième « *Discussion* ». Cependant, *la discussion* représente une phase qui n'a pas été identifiée dans la solution précédente. Nous pensons qu'elle y est présente, ici, parce que l'énoncé du problème demande de « *discuter, suivant la position du point A , le nombre de solution* ».

Ainsi, les auteurs du manuel développent des procédés de construction du « *cercle passant par A et tangent à $[OX)$ et $[OY)$ »), le travail mathématique de réalisation de cette construction et le discours de validation qui accompagnent ce travail, en organisant la séquence de résolution en deux étapes : *l'analyse*, pour rechercher les conditions nécessaires pour la réalisation de la construction du cercle passant par A et tangent à $[OX)$ et $[OY)$; et *la synthèse*, pour s'assurer que ces conditions sont bien suffisantes pour l'existence et la construction effective de cet objet géométrique.*

- **Les Procédés de Construction des objets construits par les auteurs dans les solutions analysées**

Dans les solutions des problèmes N°1 p.75 et N°2 p.93 du manuel CIAM que nous avons analysés, les auteurs ne justifient pas explicitement l'existence des objets qu'ils construisent. Ils ne fournissent pas non plus la preuve de constructibilité de chacun de ces objets. Nous pensons que cela est dû au fait que ces problèmes sont centrés sur un objectif du programme, celui qui consiste à ce que les élèves utilisent les transformations du plan pour résoudre les problèmes de construction. Ce qui fait que les preuves d'existence et de constructibilité des objets à construire ne sont pas attendues des élèves, elles ne font pas partie du contrat implicite. Seule une application des propriétés des transformations du plan pour construire ces objets géométriques est attendue. Et donc, pour eux, le fait que ces problèmes soient rattachés aux chapitres sur « les isométries du plan » et « les homothéties du plan », semble justifier l'existence des objets à construire et prouver que ces objets sont bien constructibles. Ainsi, les constructions des objets demandés sont décrites à travers un algorithme de construction et une construction instrumentée. Cependant, chaque solution ressortant, entre autres, les étapes de la résolution du problème, on peut constater que les procédés de construction des objets construits par les auteurs du manuel se déploient dans une forme d'organisation du travail mathématique qui structure la séquence de résolution en deux étapes : d'abord, une étude d'une configuration supposée être la solution du problème, l'*Analyse* ; puis la mise au point d'une procédure de construction, la *Synthèse*.

- **Le travail mathématique ayant permis aux auteurs de réaliser la construction des objets dans les solutions analysées**

Dans les solutions des problèmes N°1 p.97 et N°2 p.93 du manuel CIAM que nous avons analysés, les auteurs semblent plus porter l'intérêt de la construction sur la procédure et sur la mise en œuvre des règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction que sur la solution finale. Ce qui leur permet, dans l'activité de construction, de développer un travail mathématique. Dans ce travail, ils mettent en œuvre une méthode mathématique consistant à manier les conditions nécessaires et les conditions suffisantes, pour organiser les séquences de résolution en deux étapes : l'*analyse*, où ils recherchent les conditions nécessaires pour la conduite de l'activité de construction de l'objet ; et la *synthèse*, où ils s'assurent que ces conditions sont bien suffisantes pour l'existence et la réalisation effective de la construction de cet objet. Dans chacune des solutions, ils « supposent au départ le problème résolu », se donnent une construction d'étude et cherchent de bonnes propriétés par examen de l'objet supposé construit. De cette construction « témoin », ils choisissent une transformation du plan qu'ils utilisent comme outil sémiotique et définissent l'objet à construire relativement aux propriétés de cette transformation retenue. Ainsi, le travail mathématique permettant de réaliser la construction débute dans le paradigme G1. S'appuyant sur cette construction, ce travail va circuler suivant le plan sémiotique-instrumental ([Sem-Ins]) privilégiant la dimension sémiotique. La mise en œuvre du contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction va disperser ce travail dans la cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, puis le stabilise dans G2 afin de se conformer aux attendus des ETM de référence. Ce contrat didactique fait basculer le travail mathématique sur

le plan sémiotique-discursif ([Sem-Dis]) privilégiant la dimension discursive pour décrire le processus de construction de l'objet géométrique demandé. Ainsi, les auteurs vont caractériser l'objet à construire à l'aide d'une transformation du plan pour contrôler pas à pas l'activité de construction et établir progressivement la vérité dans la conclusion sur toutes les constructions réalisées. Ceci leur permet de structurer le discours dans l'activité de construction. Ainsi, le travail reste orienté vers la dimension discursive et privilégie l'usage des propriétés caractéristiques de la transformation du plan choisie comme outil discursif. L'élaboration d'une construction instrumentée qui va permettre d'illustrer l'algorithme élaboré, fait à nouveau basculer ce travail sur le plan Sémiotique-instrumental ([Sem-Ins]) privilégiant la dimension instrumentale. Ainsi, le travail mathématique que les auteurs produisent pour réaliser la construction d'un objet géométrique dans les solutions des problèmes N°1 p.75 et N°2 p.93 du manuel CIAM est d'abord de nature sémiotique. Il devient discursif pour décrire le processus de construction de l'objet, contrôler (Balacheff et Margolinas, 2017) pas à pas la réalisation de la construction de cet objet et établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions ayant permis de réaliser la construction de cet objet. La mise en œuvre d'un aspect du contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction rend ce travail instrumental pour permettre la réalisation d'une construction instrumentée. Chaque solution ressortant les étapes de résolution du problème, le travail mathématique permettant aux auteurs de réaliser la construction des objets dans la solution se développe à l'intérieur d'une structure de développement qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : d'abord une étude de la configuration, l'*Analyse* ; puis la mise au point d'une procédure de construction, la *Synthèse*.

- **Le discours de validation qui accompagne le travail mathématique ayant permis aux auteurs de réaliser la construction des objets dans les solutions analysées**

Dans notre cadre théorique, le discours de validation qui accompagne le travail mathématique ayant permis aux auteurs de réaliser la construction des objets a pour objectif de donner les raisons de la construction. Il vise à contrôler pas à pas la réalisation de la construction, à établir la vérité des conclusions sur toutes les constructions réalisées, afin de convaincre le lecteur de l'exactitude et de la validité de la construction produite.

Le discours de validation des objets construits produit par les auteurs, prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif. Les auteurs donnent des justifications et des explications sur la construction réalisée. Nous avons l'impression qu'ils ne font pas de différence entre la preuve et la démonstration, qui d'ailleurs leur permettent de valider le produit de toutes les constructions élémentaires réalisées. Ils utilisent des arguments formels (ou théorique) tirés de la construction « témoin » traduisant les données du problème ; les connaissances anciennes (Robert, 2012) vues dans les classes antérieures ; et les transformations du plan en lien avec les objets qu'ils veulent construire. Ils adoptent un raisonnement assisté par une construction « témoin ». Dans ce raisonnement, leur méthode consiste à compléter la construction « témoin » au fur et à mesure qu'apparaissent de nouvelles informations, en y ajoutant, lorsque cela est nécessaire, de nouveaux traits et en y plaçant des nouveaux points, nécessaires pour le raisonnement. À partir d'un raisonnement analogique, les auteurs recherchent des arguments pour construire des hypothèses. Ils formulent des conjectures, à travers un raisonnement

inductif, et cherchent, à travers un raisonnement déductif, à justifier et à communiquer ces conjectures. Ce qui signifie que les arguments qu'ils produisent sont formels (ou théoriques), issus des propriétés mathématiques, des interprétations et des substitutions de la caractérisation de l'objet à construire, par les propriétés issues de la transformation du plan retenue dans le processus de réalisation de la construction. Dans la démarche de validation des constructions qu'ils mettent en œuvre, la validation prend la forme de contrôles (Balacheff et Margolinas, 2017) pas à pas de l'activité de construction, puis la forme d'une démonstration (ou preuve) pour établir la vérité des conclusions sur les constructions réalisées. Le but est celui de convaincre le lecteur de l'exactitude de la construction réalisée, c'est donc une validation externe. Chaque solution ressortant les étapes de résolution du problème, le discours de validation qui accompagne le travail mathématique permettant aux auteurs de réaliser la construction des objets dans la solution, se développe à l'intérieur d'une structure de développement qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : d'abord une étude de la configuration, l'*Analyse* ; puis la mise au point d'une procédure de construction, la *Synthèse*.

L'analyse du travail mathématique, du discours de validation qui accompagnent ce travail et des procédés de construction qui réalisent les constructions des objets dans les solutions des problèmes N°1 p.75 et N°2 p.93 du manuel CIAM, décrivent un travail mathématique d'organisation qui prend une forme complète à travers un agencement des sous-tâches liées à la séquence de résolution, en deux étapes : *L'Analyse et la Synthèse*. Cette hypothèse semble être vérifiée, puisqu'en parcourant le manuel, juste en-dessous de la dernière solution, un point « *Méthode (M)* » est ouvert, dans lequel les auteurs précisent que : « *pour résoudre un problème de construction, on procède en deux étapes : Analyse et Synthèse* » (CIAM, p.75). Comme on peut le lire dans l'extrait ci-dessous :

M

Pour résoudre un problème de construction, on procède généralement en deux étapes : analyse et synthèse.

- L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
- La synthèse consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et, éventuellement, à discuter le nombre de solutions au problème.

Source : Extrait du Manuel CIAM, 1992, classe de Première Scientifique p.75.

Ce qui signifie que la forme d'organisation du travail mathématique que proposent les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves, au cours d'une séquence de résolution d'un problème mathématique, est celle qui organise la résolution en deux étapes : *Analyse* et *Synthèse* que nous désignons dans notre travail par (A-S).

5.3. La conclusion sur la recherche de la forme d'organisation du travail mathématique disponible dans les ETM idoines potentiels

La recherche de la forme d'organisation du travail mathématique que proposent les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique, s'est faite à partir de l'analyse du travail

mathématique d'organisation que font les auteurs du manuel CIAM, dans les solutions de deux problèmes de construction liés aux transformations du plan. Conformément à notre cadre théorique (**EPP**), nous avons analysé le travail mathématique ayant permis aux auteurs de réaliser les constructions des objets géométriques présents dans les solutions, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent ces constructions. L'ETM mis en œuvre est qualifié d'idoine potentiel. Il s'agit de l'ETM mis en place par les auteurs du manuel CIAM, de la classe de Première Scientifique. Cette étude établit que, les auteurs de manuels ne produisent pas les preuves d'existence et de constructibilité des objets qu'ils construisent. Car ces constructions sont adossées sur un objectif du programme : « *Utilisation des transformations du plan pour résoudre les problèmes de construction* » (MINESEC, 2018). Donc tout problème posé, à ce niveau scolaire, vise l'application des propriétés sur les transformations du plan pour réaliser et valider la construction de l'objet géométrique que décrit le problème. Cependant, par un maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, ils conduisent l'activité de construction des objets et décrivent des procédés de construction consistant à élaborer un algorithme de construction et une construction instrumentée, pour matérialiser les constructions des objets que définissent les problèmes de construction. Ainsi, le travail mathématique permettant de réaliser ces constructions, est au départ de nature sémiotique. Il devient discursif au moment de décrire le processus de construction de l'objet, contrôler pas à pas l'activité de construction et d'établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions élémentaires réalisées. Le contrat didactique va le rendre instrumental puisqu'il faut accompagner l'algorithme élaboré d'une construction instrumentée. Ainsi, le travail mathématique produit circule suivant le plan sémiotique-instrumental ([Sem-Ins]) privilégiant la dimension sémiotique ou discursive ; ensuite suivant le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis]) privilégiant la dimension discursive ; et enfin suivant le plan Sémiotique-instrumental ([Sem-Ins]) privilégiant la dimension instrumentale. Ce travail débute dans le paradigme G1, se disperse et s'émiette dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, pour se stabiliser dans G2 afin de se conformer à l'ETM de référence. Le discours de validation prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif qui opère par des interprétations et des substitutions de la caractérisation de l'objet à construire par les propriétés d'une transformation du plan choisie, en lien avec cet objet. Le raisonnement est successivement analogique, inductif et puis déductif, pour produire des arguments formels (ou théoriques). Ainsi, le travail mathématique ayant permis aux auteurs de réaliser les constructions des objets, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent ces constructions, se déploient dans une structure de développement de la démarche de validation qui génère une forme du travail mathématique d'organisation qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *L'Analyse et la Synthèse*. Dans le cadre de notre travail, nous admettons que ces deux étapes mettent en évidence la forme d'organisation du travail mathématique que proposent les ETM idoines potentiels, pour développer la démarche de validation, chez les élèves, en classe de Première Scientifique. Nous la désignons par A-S (*Analyse-Synthèse*). Cependant, nous pouvons constater que, bien que cette forme d'organisation (A-S) prenne en compte, dans ses différentes phases, les aspects particuliers d'un problème de construction dont l'un est l'élaboration d'un algorithme (ou programme) de construction, répondant à la demande de réalisation d'une construction instrumentée, satisfaisant à un ensemble de conditions que fixe l'énoncé du problème, elle peut être appliquée

à des séquences de résolution de tout problème mathématique donné. Ainsi, nous considérons que cette forme d'organisation est externe au problème de construction. Et, admettons qu'il peut exister une manière particulière d'organiser un problème de construction que l'on résout. Cette réflexion sera menée plus loin.

Bilan

L'ETM idoine potentiel, en classe de Première Scientifique, proposent une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches³¹ liées à la séquence de résolution en deux étapes : *l'Analyse* et *la Synthèse* (A-S), pour développer la démarche de validation, chez les élèves.

Compte tenu du fait que, comme les problèmes de construction et la validation, « la forme d'organisation du travail mathématique » ne constitue pas un objet d'enseignement dans les programmes. Plutôt, un outil qui peut être mis en place par les enseignants au cours d'une séquence de résolution pour développer un savoir (ou savoir-faire), chez les élèves. Nous admettons que la manière d'organiser un problème de construction et/ou la séquence de résolution peut dépendre de l'enseignant, et varier d'un enseignant à un autre, puis être différente de celle que proposent les auteurs des manuels. Ainsi, des questions relatives à l'identification et à la comparaison des formes d'organisation mises en place par les enseignants dans les classes peuvent se poser. Nous examinons ces questions dans le chapitre qui suit.

³¹ *Ce qui doit être fait à chaque étape.*

Chapitre 6

La forme d'organisation du travail mathématique développée dans les ETM idoines effectifs, en classes de Première Scientifique

L'étude faite dans le chapitre précédent établit que les ETM idoines potentiels, en classes de Première Scientifique, proposent une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution d'un problème mathématique, en deux étapes : *l'Analyse et la synthèse* (A-S), pour développer la démarche de validation, chez les élèves. Dans cet autre chapitre, nous interrogeons les formes d'organisation du travail mathématique développées dans les ETM idoines effectifs, à ce même niveau scolaire. En effet, nous cherchons à répondre à la question (Q_2) qui consiste à savoir :

Q_2 : Quelles formes d'organisation du travail mathématique sont explicitées, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves ? Varient-elles d'un ETM effectif à un autre ? Sont-elles différentes de celle que proposent les ETM potentiels ?

Selon nous, répondre à cette question revient à déterminer les formes d'organisation du travail mathématique qui guident l'activité de construction d'un objet géométrique défini à l'aide d'un problème de construction, au cours d'une séquence de résolution, dans des ETM idoines effectifs différents. Les comparer entre elles, puis à celle que proposent les ETM idoines potentiels. À travers l'hypothèse (H_2), nous supposons que :

H_2 : Pour décrire le processus de construction d'un même objet géométrique défini à l'aide d'un même problème de construction, des ETM idoines effectifs différents développent la même forme d'organisation du travail mathématique qui est celle que proposent les ETM idoines potentiels.

Pour tester cette hypothèse, nous construisons une situation traduisant un problème de construction. Nous la soumettons aux enseignants. Puis nous observons et filmons deux séquences de résolution de cette situation, conduites par deux enseignants, en salle avec des élèves. Chaque séquence est par la suite transcrite et analysée. Dans ces analyses, et conformément à notre cadre théorique (**EPP**), nous nous intéressons au travail mathématique d'organisation que font les enseignants dans chaque séquence de résolution pour développer la validation chez les élèves. Cela consiste à analyser le travail mathématique permettant aux enseignants de réaliser la construction de l'objet que définit le problème de construction, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de cet objet, afin de mettre en évidence la structure de développement de la démarche de validation des constructions adossée à ce modèle. En effet, nous interrogeons l'organisation et les caractéristiques du discours écrit, oral, ou écrit et oral, produit ayant permis d'aboutir à la réalisation et à la validation de la construction ; ainsi qu'à

leurs mises en forme, dans chaque ETM idoine effectif. Pour cela, nous commençons par décrire la méthodologie qui nous a permis de dégager les formes d'organisation développées dans les ETM idoines effectifs, en classes de Première Scientifique.

6.1. La méthodologie particulière de recherche

Pour étudier le travail mathématique d'organisation permettant de mener l'activité de construction d'un objet géométrique, décrit à l'aide d'un problème de construction, au cours d'une séquence de résolution, dans deux ETM idoines effectifs, en classes de Première Scientifique, nous avons choisi d'utiliser une méthodologie qui s'articule sur trois axes : la construction d'une situation, le sondage et l'observation des séquences de résolution de chaque situation, en salle. Dans la construction de la situation, nous mettons sur pied un problème de construction lié aux transformations du plan, répondant à nos besoins d'étude. Le sondage consiste à sélectionner un échantillon d'enseignants des classes de Première Scientifique, correspondant à nos exigences. Et l'observation consiste à observer et filmer chacune des deux séquences de résolution de la situation en salle, conduites par chaque enseignant. À partir de nos résultats d'étude sur la validation (Cf. chapitre 3) et sur les problèmes de construction (Cf. les chapitres, 1 et 2), en classe de Première Scientifique, nous avons construit une situation traduisant un problème de construction lié aux isométries du plan. Notre échantillon est composé de deux enseignants de deux classes de Première Scientifique, situées dans deux établissements différents. Dans cette étude, les enseignants sont désignés par : P_A et P_B . Les classes, par Première Scientifique A et Première Scientifique B. Ces enseignants et leurs élèves sont désignés par les couples, (P_A, E_n) et (P_B, E_p) . Conformément à notre cadre d'analyse, l'étude de la forme d'organisation du travail mathématique élaborée par un enseignant, pour décrire le processus de construction et de validation de l'objet géométrique que décrit le problème de construction, se fait à partir de la grille d'analyse ci-dessous :

- L'analyse des procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de l'objet se fait à travers :
 - Les preuves d'existence et de constructibilité de l'objet.
 - La construction de l'objet.
- L'analyse du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet se base sur les points ci-dessous :
 - La méthode mathématique mobilisée dans la réalisation de la construction.
 - Le(s) paradigme(s) géométrique(s) qui dirige (-nt) le travail mathématique.
 - La(les) dimension(s) privilégiée(s) dans le travail mathématique. En effet, nous analysons les dimensions sémiotique, discursive et instrumentale, de ces ETM.
 - La circulation du travail mathématique au sein des plans verticaux des dimensions des ETM permettant de réaliser la solution.
- L'analyse du discours de validation qui accompagne ce travail mathématique, quant à elle, est basée sur :
 - Le raisonnement mobilisé pour produire la validation des constructions.
 - Les arguments employés dans l'argumentaire de validation des constructions.
 - La mise en forme de l'argumentaire de validation des constructions.

La mise en œuvre de cette grille se fait à partir des interactions qui ont lieu entre les enseignants et les élèves d'une part, et puis entre les élèves d'autre part, pendant la séquence de résolution. Les indications proposées par les enseignants, ayant trait à une organisation visant à aider les élèves à décrire le processus de construction ou à produire une démarche de validation des constructions viendront soutenir nos analyses. Des photos du discours écrit visant à mettre en évidence la forme d'organisation du travail mathématique, que nous avons faites, telles que les enseignants l'ont produit au tableau, vont soutenir et enrichir nos analyses.

6.1.1. L'échantillon d'enseignants, d'élèves et d'établissements

Nous avons sélectionné les enseignants en fonction du cycle (collège ou lycée), de l'établissement, de la filière dans laquelle ils enseignent (Scientifique ou littéraire) et du niveau d'avancement dans la progression des programmes. Le fait que les enseignants soient issus des établissements différents, nous permettra d'obtenir des formes d'organisation du travail mathématique issu de deux projets d'établissements et d'enseignements différents. Le niveau de progression dans les programmes nous assure que l'outil « transformations du plan » est acquis par les élèves. Nous avons également pris en compte, dans le choix des enseignants, l'expérience professionnelle. Nous avons voulu travailler avec deux enseignants expérimentés³² (Robert et al, 2012) car, ils disposent d'une bonne maîtrise des programmes, connaissent mieux les difficultés des élèves, et ont développé une routine dans leur pratique de l'enseignement des mathématiques.

6.1.2. Les séquences de résolution observées

Nous avons observé, filmé et transcrit, deux séquences de résolution conduites par deux enseignants issus d'établissements différents. Quelques exigences liées à nos besoins d'étude ont guidé la construction de la situation. Nous nous sommes arrangés à ce que la situation proposée contienne le genre de tâche « Construire », pour qu'elle soit un problème de construction lié aux transformations du plan, en classe de Première Scientifique. Que son énoncé prenne la forme discursive simple et soit présenté suivant l'approche affine. Nous avons également voulu que cette situation présente et décrive clairement l'objet à construire. Et enfin que l'activité de construction qu'elle génère permette de décrire un processus de construction d'un objet géométrique existant et constructible. Nous avons laissé la mise en œuvre de cette situation en salle, à l'initiative de chaque enseignant afin d'augmenter l'effet de la variation du contrat didactique et les exigences de l'enseignant, au cours de la séquence de recherche. Cependant, nous avons débattu avec eux sur nos attentes et sur les difficultés *a priori* des élèves dans la réalisation de la tâche. Dans ces débats, nous n'avons pas demandé à ces enseignants d'organiser la séquence de résolution et/ou le problème de construction, afin d'observer le comportement qu'ils vont adopter pour amener les élèves à produire une démarche de validation répondant à leurs attentes. Ce qui, d'ailleurs, est le seul objectif que nous leur avons fixé. Pour une première analyse globale de ces deux séquences de résolution, nous avons récolté des données à l'issue des observations faites dans chaque classe, au cours des séquences de résolution. Ces données ont été consignées dans le tableau ci-dessous :

³² Selon Robert et al. (2012), c'est à partir de cinq ans d'expérience professionnelle que l'on considère qu'un professeur n'est plus un débutant.

Éléments Analysés	Éléments de la Grille	Enseignant P _A	Enseignant P _B
Procédés de construction de l'objet	Preuve d'existence	Non établie	Non établie
	Preuve de constructibilité	Non établie	Non établie
	Construction de l'objet	Algorithme + Construction instrumentée + Discussion	Algorithme + Construction instrumentée + Discussion
Travail Mathématique permettant la réalisation de la construction de l'objet	Méthode mathématique Mobilisée	Maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes. Utilisation d'une seule transformation du plan	Maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes. Utilisation d'une seule transformation du plan
	Paradigme(s) géométrique(s) privilégié(s)	G2 articulé avec l'approche affine	G2 articulé avec l'approche affine
	Dimension(s) privilégiée(s)	Discursive	Discursive
	Circulation du travail	[Ins-Sem] → Sem ou (Dis) [Sem-Dis] → Dis [Sem-Ins] → Ins	[Ins-Sem] → Sem ou (Dis) [Sem-Dis] → Dis [Sem-Ins] → Ins
Discours de validation qui accompagne le travail mathématique	Raisonnement mobilisé	Analogique → Inductif → Déductif	Analogique → Inductif → Déductif
	Arguments employés	Formels	Formels
	Mise en forme de l'argumentaire	Organisé sous la forme d'une démonstration (ou preuve).	Organisé sous la forme d'une démonstration (ou preuve).
	Démarche de validation	Justification Pas à Pas des constructions + Démonstration pour prouver l'exactitude et la validité de la Construction réalisée	Justification Pas à Pas des constructions + Démonstration Pour prouver l'exactitude et la validité de la Construction réalisée

Tableau 10: Données récoltées sur les formes de travail mathématique d'organisation développées par les enseignants P_A et P_B

Une première analyse globale des données de ce tableau (tableau 10) met en évidence une régularité dans la gestion de la séquence de résolution, nonobstant le fait que les enseignants soient issus des établissements différents. Ils ont produit la même forme de travail mathématique, mis en place le même discours de validation et déployé les mêmes procédés de construction. Ils ont, par ailleurs, utilisé la même stratégie de résolution, celle qui consiste à

manipuler, dans la construction de l'objet géométrique demandé, une seule transformation du plan ce qui a favorisé l'apprentissage de validation. Cette régularité serait liée à une exigence institutionnelle visant la mise en œuvre de l'Approche Par les Compétences (APC) dans son intégralité (MINESEC, 2018). Cette approche uniformise les pratiques d'enseignement et les méthodes de résolution des problèmes mathématiques, à un niveau scolaire donné. Elle serait également liée au fait que les problèmes de construction, en classe de Première Scientifique, constituent un outil d'enseignement de plusieurs autres savoirs transversaux, comme raisonner, calculer, expliquer, mesurer, etc. (Ngodebo, 2019). Ce qui fait que, dans les deux séances observées, les enseignants P_A et P_B ont eu tendance à reproduire le même schéma de résolution, à l'intérieur d'un même travail mathématique d'organisation, mettant ainsi en évidence la même forme d'organisation du travail mathématique, au cours de la réalisation de la construction que décrit la situation. C'est pourquoi nous avons décidé de centrer nos analyses visant à déterminer la forme d'organisation du travail mathématique développée par les enseignants, à la seule étude de la séquence de résolution de l'enseignant P_A observée et filmée. Écartant ainsi, l'analyse de la séquence de résolution de l'enseignant P_B , ainsi que les séquences d'entretiens directs avec ces enseignants que nous envisagions en complément. Ce qui fait que l'étude comparative entre les ETM idoines potentiels et les ETM idoines effectifs, s'est limitée à comparer les ETM idoines potentiels à l'ETM idoine effectif construit et mis en œuvre par l'enseignant P_A .

6.1.3. L'analyse du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet dans les séquences observées

Dans les deux séquences de résolution que nous avons observées, les enseignants traitent une même situation. Ils doivent décrire le processus de construction d'un même objet géométrique, au cours duquel l'apprentissage de la validation va se dérouler. Ce qui fait que nous serons intéressés à étudier les formes de travail mathématique d'organisation adossées aux structures de développement de la démarche de validation qu'ils mettront en place pour développer la validation, chez les élèves. Nous avons donc commencé par faire une analyse à priori du travail mathématique d'organisation pouvant permettre de décrire le processus de construction de l'objet qui va être produit. Ensuite, nous avons procédé à une analyse du déroulement de ce travail dans chacune des deux salles de classe.

6.1.3.1. L'analyse « à priori » du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, décrite dans la situation proposée

En termes de paradigmes géométriques, de procédés de construction et des ETM (les genèses et les plans) en jeu, nous avons analysé la situation construite, que chacun des deux enseignants était chargé de mettre en œuvre dans les séquences observées. La situation est tirée du manuel CIAM, de la classe de Première Scientifique. Cependant, nous avons apporté quelques modifications dans sa formulation de manière à faciliter l'appréhension et l'analyse du problème. Elle est proposée dans l'ETM idoine qualifié de potentiel, c'est-à-dire celui construit par les auteurs des manuels. Cette première analyse nous permet de caractériser le travail mathématique d'organisation permettant la réalisation de la construction de l'objet, décrit dans la situation proposée.

6.1.3.2. L'analyse du déroulement du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, décrit dans la situation proposée

Ici, nous analysons la mise en œuvre de l'ETM idoine par les enseignants en salle (l'ETM idoine effectif) à partir de l'ETM idoine potentiel du manuel. Le déroulement du travail mathématique permettant la réalisation de la construction de l'objet, produite, est analysée selon les genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) utilisées dans l'ETM idoine effectif fixé au cadre (EPP), articulé avec les paradigmes géométriques mis en œuvre. La caractérisation du travail mathématique d'organisation permettant la réalisation de la construction produite, dans l'ETM idoine effectif, est obtenue à partir de ce qui se dit, ce qui s'écrit et de ce qui est institutionnalisé, visant à décrire le processus de construction de l'objet géométrique demandé, au cours de la séquence de résolution de la situation, à travers une forme d'organisation du travail mathématique élaborée par les enseignants pour réaliser la construction de cet objet.

6.1.4. L'analyse du discours de validation qui accompagne le travail mathématique permettant la réalisation de la construction de l'objet, décrite dans la situation proposée

Nous analysons le discours de validation qui accompagne le travail mathématique produit, pour comprendre le schéma de la validation ayant permis d'établir l'exactitude et la validité de la construction. En effet, nous cherchons à comprendre le fonctionnement de l'argumentaire de validation dans la structure de développement de la démarche de validation adossée à la forme d'organisation mise en œuvre, au cours de l'activité de construction de l'objet, dans les ETM idoines. Le discours produit au cours de la séquence de résolution étant écrit, oral, ou écrit et oral ; et conformément à nos résultats sur la validation (Cf. chapitre 3), nous identifions les caractéristiques de l'argumentaire utilisées et institutionnalisées par les enseignants, en nous appuyant sur le raisonnement, l'argumentation et la démonstration, produits dans chaque séquence de résolution pour décrire le processus de construction de l'objet. Ainsi, nous complétons notre grille d'analyse du discours de validation qui accompagne le travail mathématique avec les éléments résumés dans le tableau ci-dessous. Ce sont ces éléments qui vont nous intéresser, pour ce qui est du raisonnement, de l'argumentation et de la démonstration, développés par les enseignants à l'oral comme à l'écrit ou bien à l'oral et à l'écrit.

Raisonnement	Argumentation	Démonstration
Le type d'arguments intervenant dans l'argumentaire de validation	Les explications qui visent à dégager le processus de construction	Les explications particulières qui visent à valider la construction
Le statut que prend la validation	Le raisonnement de nature dialogique qui vise à établir la construction	Le raisonnement de nature dialogique qui vise à établir la vérité sur chaque construction réalisée
La forme de l'argumentaire de validation	Les justifications rationnelles	Les justifications rationnelles à l'intérieur de la théorie sur la géométrie des transformations

Tableau 11: Éléments étudiés dans le discours de validation

Ainsi, pour ce qui est du discours de validation qui accompagne le travail mathématique permettant de réaliser la construction, notre étude sur la mise en forme de l'argumentaire de validation, pour caractériser la structure de développement de la démarche de validation, dans les ETM idoines personnels, va s'appuyer sur ces critères.

6.1.5. L'analyse des procédés de construction qui réalisent la construction de l'objet, décrite dans la situation proposée

Les procédés de construction étant ceux qui sont fixés à notre cadre théorique (EPP), ils permettent de négocier l'entrée dans la résolution du problème de construction constituant notre situation et de décrire la construction de l'objet réalisée. Leur analyse a pour but d'enrichir l'étude du travail mathématique, menée du point de vue des ETM et des paradigmes géométriques. Il s'agit donc, d'une part, de regarder comment les enseignants vont justifier l'existence de l'objet à construire et fournir une preuve de constructibilité ; et d'autre part, de regarder comment ces derniers vont décrire la construction de l'objet, demandée. En effet, en analysant comment les enseignants convoquent les énoncés mathématiques pour établir l'existence et la preuve de constructibilité de l'objet, ainsi que la manière dont ils décrivent la construction de l'objet, cela ajoute des informations sur la forme du travail mathématique d'organisation mise en œuvre, et laisse transparaître la structure de développement de la démarche de validation qui donne le schéma de validation ayant permis d'établir l'exactitude et la validité de la construction. Ces éléments complètent la description de la forme d'organisation mise en place, dans l'ETM, permettant de réaliser la construction.

6.1.6. Les obstacles et contraintes du terrain

Initialement, nous envisagions de faire des observations de classe, procéder à des enregistrements vidéo, conduire des entretiens directs avec des enseignants et récupérer les préparations faites par les enseignants sur les séquences de résolution que nous aurons observées. Toutes ces ressources devaient par la suite être analysées. Mais compte tenu des difficultés que nous avons rencontrées pour trouver les enseignants acceptant de nous accompagner dans la réalisation de ces expérimentations telles que nous les avons conçues, nous avons dû revoir notre approche expérimentale. En effet, sur dix enseignants que nous avons approchés, quatre acceptaient que les séquences soient observées et enregistrées, refusant par contre les entretiens directs et de nous produire leurs préparations. Les six autres ne nous ont pas fait de retour. Nous nous sommes donc limités à une analyse des séquences observées et filmées. Au cours de notre expérimentation, nous avons été confrontés à des obstacles de terrain liés aux enseignants participants et au matériel utilisé pour les enregistrements. En effet, la séance d'observation de l'enseignant P_A a été interrompue à seize minutes de la fin, parce qu'il devait assister à une réunion de préparation d'examens blancs qui se tenait ce jour-là. La séquence de l'enseignant P_B n'a été enregistrée que pendant trente minutes, suite à une panne technique constatée à la fin de la séquence. Ces obstacles et contraintes nous ont obligés à revoir notre expérimentation, sans toutefois influencer notre grille d'analyse et de comparaison. Ainsi nous nous sommes limités à analyser les transcriptions des séquences de résolution (très courte) et des préparations des enseignants.

6.2. Les ETM idoines, en classes de Première Scientifique A et Première Scientifique B

6.2.1. L'analyse de l'ETM idoine Potentiel, en classes de Première Scientifique A et B

Nous avons choisi, conformément aux articulations de notre cadre, d'organiser l'analyse à *priori* en trois séquences, d'abord l'analyse de l'énoncé de la situation qui est proposée, ensuite l'analyse des séquences du point de vue des Procédés de Construction (Chevallard et Jullien, 1991), et enfin, l'analyse de ces mêmes séquences du point de vue des ETM (Kuzniak et al. 2016) et des Paradigmes Géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006).

6.2.1.1. L'analyse de l'énoncé de la situation proposée

La situation porte sur « *les problèmes de construction et les isométries du plan* ». Il s'agit de voir comment utiliser une (ou plusieurs) isométrie(s) pour résoudre un problème de construction. Les enseignants doivent élaborer, au cours de la séquence, une forme d'organisation du travail mathématique pour développer la démarche de validation des constructions chez les élèves. Dans les programmes, la validation occupe une place importante dans la résolution des problèmes de construction (Cf. chapitre 3) et constitue un savoir-faire laissé à la charge des enseignants, puisqu'elle ne constitue pas un objet d'enseignement. Elle est présentée comme tout raisonnement visant à établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions élémentaires réalisées. Les auteurs des manuels proposent, *l'Analyse et la synthèse* (A-S) comme forme d'organisation du travail mathématique, pour développer la validation, chez les élèves. Ceci, à travers la recherche des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour mettre en évidence une condition nécessaire et suffisante de l'existence et de la réalisation effective d'un résultat (ou d'une construction). Pour identifier la forme d'organisation du travail mathématique, développée par les enseignants en salle, nous avons suggéré aux enseignants P_A et P_B la situation ci-dessous, qu'ils ont proposée à leurs élèves. Ces derniers doivent la résoudre tout au long de la séquence guidée par l'enseignant.

L'énoncé de la situation proposée :

On donne (L_1) , (L_2) et (L_3) trois droites distinctes et parallèles.
A un point du plan tel que : $A \in (L_1)$.
Construire un triangle équilatéral ABC vérifiant : $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$.

La situation décrit un problème de construction dont la tâche consiste à « *construire un triangle équilatéral* ». Cet exercice est extrait du manuel CIAM de la classe de Première Scientifique p.46. Il est donné à la fin du chapitre sur les isométries du plan, dans la partie intitulée : « *Problèmes de construction et Isométries* ». Cependant, nous avons apporté quelques modifications dans sa formulation pour les besoins de notre étude, et surtout pour faciliter son appréhension et son analyse. L'énoncé du problème tel qu'il est présenté, ne comporte pas de figure, ni de nombres, mais des symboles mathématiques. Donc, les informations favorisant sa résolution sont données sous la forme de langage mathématique (symbolique ou non). Ainsi, le registre utilisé est celui du langage. L'énoncé est donné sous la forme discursive simple (FD_S), il contient le genre de tâche « Construire » et il est formulé dans une approche affine (géométrie métrique). Il contient trois données que nous désignons par D_1 , D_2 et D_3 , que nous définissons ainsi :

D_1 : Trois droites (L_1) , (L_2) et (L_3) distinctes du plan.

D_2 : Les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) sont parallèles.

D_3 : A un point du plan tel que : $A \in (L_1)$.

Le travail mathématique commence par une commande (implicite) de réalisation d'une construction traduisant les données du problème. Cette construction devient une donnée supplémentaire pour la résolution de ce problème. La conclusion consiste à construire un triangle équilatéral ABC dont le sommet A est situé sur la droite (L_1) , le sommet B sur la droite (L_2) et le sommet C sur la droite (L_3) . Trois contraintes sont fixées pour une solution de ce problème. Nous les désignons par C_1 , C_2 et C_3 ; et, nous les définissons de la manière suivante :

C_1 : ABC doit être un triangle équilatéral.

C_2 : Les sommets du triangle ABC doivent être situés sur trois droites distinctes et parallèles (L_1) , (L_2) et (L_3) avec $A \in (L_1)$.

C_3 : Les sommets B et C du triangle ABC sont tels que : $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$.

Remarquons que la contrainte C_2 est différente de C_3 dans la mesure où elle donne la position relative des droites (L_1) , (L_2) et (L_3) et fixe le point A sur la droite (L_1) , pendant que C_3 précise les positions exactes des sommets B et C. Cette situation confronte les élèves aux positions relatives des objets dans le plan. Elle vise à générer une famille de configurations ayant trois côtés et trois angles. Cependant, la question géométrique limite les élèves à la famille des triangles équilatéraux ayant leurs sommets situés sur trois droites parallèles données. Ainsi, les élèves sont amenés à trouver une technique de construction d'un tel triangle. Cela suppose qu'ils seront tentés de privilégier les propriétés sur l'égalité des longueurs des côtés et des mesures des angles car elles sont les plus utilisées dans la pratique scolaire comme dans la société. Par rapport à cette centration des élèves sur ces propriétés courantes, le triangle équilatéral ABC sera défini, soit par rapport à l'égalité des longueurs des côtés, soit par rapport à l'égalité des mesures des angles, soit par rapport aux deux propriétés à la fois. Cette situation visant l'utilisation des propriétés sur les isométries dans le processus de construction de ce triangle, nous supposons que ces propriétés courantes permettront alors « d'inventer » une définition opérationnelle de la notion de triangle équilatéral.

Pour résoudre cette situation, les élèves doivent disposer, non seulement des connaissances relevant du géométrique (Petifour, 2015), mais aussi, des connaissances relevant du non géométrique (Petifour, 2015), également d'un certain nombre de compétences.

a. Les connaissances relevant du géométrique sont de trois types :

- **Les connaissances géométriques** : permettront aux élèves, de se remémorer la notion de « position relative des droites dans le plan » et les propriétés qui en découlent pour construire les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) ; de visualiser la forme : triangle équilatéral pour pouvoir le construire, se souvenir de ses propriétés géométriques et de le différencier des autres triangles disponibles dans le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016). Ils pourront définir le triangle équilatéral ABC en s'appuyant sur l'une des propriétés suivantes :

« $AB = AC = BC$ », « $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \frac{k\pi}{3}$ » ou « $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = \frac{k\pi}{3}$ » (avec, $k = 1$ ou $k = -1$).

- **Les connaissances techniques :** elles sont liées aux instruments à usage géométrique, permettent aux élèves de se rappeler des fonctions de chaque instrument et leurs règles d'utilisation en lien avec les objets géométriques. Ces connaissances vont établir une correspondance canonique entre les artefacts du paradigme G1 et ceux du paradigme G2, à l'exemple des passages : compas-cercle, règle-droite, graduation-longueur, rapporteur-angle (Parzisz, 1989). Cette correspondance sera fondamentale dans la résolution de cette situation puisqu'elle va permettre l'articulation en les paradigmes G1 et G2, et assurer les aller - retour entre l'un et l'autre au cours de la résolution. Ainsi les élèves doivent savoir choisir l'instrument à utiliser pour représenter chaque objet géométrique qui va constituer la construction instrumentée représentée, en soutien à l'algorithme de construction élaboré.
- **Les connaissances graphiques :** elles constituent un ensemble d'informations géométriquement signifiantes et pertinentes qui doivent être prélevées sur la construction « témoin » qui va soutenir la résolution et interprétées géométriquement par les élèves. Elles permettront aux élèves dans le jeu de conversion (Duval, 1994) de passer du registre figural à un autre registre de représentation (Duval, 1994) et vice-versa. Par exemple la propriété : « les côtés AB et AC ont la même longueur », pourra être représentée graphiquement par le codage traduisant l'égalité entre les distances AC et AB.

b. Les connaissances relevant du non géométrique sont de deux ordres :

- **Les connaissances relevant du langage :** permettront aux élèves de faire des conversions (Duval, 1994) pour changer de registre de représentation, par exemple dans la notation : « $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$ », les élèves doivent pouvoir décoder et comprendre ces ostensifs (Chevallard, 1998) pour pouvoir les interpréter.
- **Les connaissances mettant en avant l'aspect manipulateur des objets techniques :** les élèves doivent avoir une souplesse dans la manipulation des instruments, une organisation des gestes lors de la réalisation de la construction instrumentée et s'approprier en amont les instruments qui vont être utilisés.

Comme compétences, les élèves doivent disposer des compétences organisationnelles, visuo-spatiales, techniques et de contrôle (Balacheff et Margolinas, 2017) pour faire des anticipations sur la validation de l'objet à construire et réaliser pas à pas chaque construction élémentaire. Les isométries qui constituent un outil (Douady, 1988) pour la construction et la validation d'un triangle solution, sont des connaissances nouvelles (Robert, 2003) dont doivent disposer les élèves. La notion de « configurations et isométries du plan » disponible dans leur référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016), leur permet d'identifier l'(les) isométrie(s) qui permet (-tent) de construire un triangle équilatéral. Les propriétés de cette isométrie permettront de construire un triangle solution ABC, et puis d'envisager d'autres isométries qui permettront de construire

tous les autres triangles, solutions du problème. Ainsi trois domaines (Robert, 2003) interviennent dans la résolution : figural, numérique et, langage naturel et mathématique.

Cette analyse de l'énoncé de la situation met en évidence le problème à résoudre, liste les données et contraintes qui sont fixées, répertorie les connaissances et compétences nécessaires pour sa résolution, et permet d'envisager la manière dont une solution peut, *à priori*, être élaborée.

6.2.1.2. L'Analyse des procédés de construction du triangle ABC : une analyse fine d'une solution éventuelle de la situation proposée

Conformément à notre cadre d'analyse (EPP), nous donnons la preuve d'existence et de constructibilité du triangle ABC. Puis, nous élaborons, une solution *à priori* dans laquelle nous proposons une construction de ce triangle. Ce qui nous permettra d'envisager les méthodes mathématiques, les dimensions, les plans et les paradigmes géométriques, dans lesquels pourra se développer le travail mathématique d'organisation permettant à aux enseignants de réaliser et valider la construction demandée.

- **La preuve d'existence et de constructibilité du triangle équilatéral ABC**

La situation est centrée sur un objectif du programme : « *l'élève doit être capable d'utiliser des transformations du plan pour résoudre les problèmes de construction* » (MINESEC, 2018). Ce qui signifie que les preuves d'existence et de constructibilité ne sont pas attendues des élèves, elles ne font pas partie du contrat implicite, elles sont supposées établies. Seule une application des propriétés des transformations du plan pour construire un objet géométrique est attendue. Le travail mathématique est axé sur la résolution de problèmes de construction qui doit mettre en œuvre certaines règles du contrat didactique (Brousseau, 1999). La situation s'appuie sur le lien entre les configurations géométriques et les transformations du plan. Elle privilégie, d'une part, le travail de reconnaissance d'un « triangle équilatéral » à travers ses propriétés géométriques et met en jeu la caractérisation qu'ont les élèves de cet objet, c'est-à-dire, la manière dont ils le définissent et les procédures dont ils disposent pour sa construction. D'autre part, cette situation privilégie, le travail de reconnaissance d'une transformation du plan et l'utilisation de ses propriétés, pour mettre en jeu la conception qu'ont les élèves, de la notion de transformations du plan, c'est-à-dire, ce que les élèves ont construit comme connaissances par rapport aux transformations du plan. Il est donc question de voir comment ils choisissent une transformation du plan en lien avec la caractérisation qu'ils ont du triangle équilatéral. L'enjeu est donc de caractériser le triangle ABC et de choisir une transformation du plan. Or, le problème consiste à construire un triangle équilatéral, ce qui suggère que la transformation à retenir est l'une des deux rotations d'angle $\frac{k\pi}{3}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$) et de centre le point A, puisque le point A est le seul qui est donné. Cette considération sous-entend que le triangle équilatéral ABC sera caractérisé à partir des propriétés de conservation des angles et des distances, propres aux isométries. Ainsi, en prenant les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) distinctes et parallèles, et en considérant le point A quelconque sur la droite (L_1) , on peut construire une droite (Δ) de telle sorte que (Δ) soit l'image de l'une des droites (L_2) ou (L_3) par cette rotation, que nous notons $r_{(A, \frac{k\pi}{3})}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$) ou simplement r . Ainsi, on prendra :

- Le point B comme intersection de la droite (Δ) avec la droite (L_2), dans le cas où la droite (Δ) est l'image de (L_3) par la rotation r .
- Le point C comme intersection de la droite (Δ) avec la droite (L_3), dans le cas où la droite (Δ) est l'image de (L_2) par la rotation r .

Précisons que la construction de la droite (Δ) s'obtient en utilisant l'une des deux méthodes suivantes :

- Soit on construit les images M' et N' de deux points quelconques M et N situés sur la droite de départ ((L_2) ou (L_3)), par la rotation r et puis, en utilisant les propriétés sur les isométries du plan, on admet que (Δ) est la droite ($M'N'$). En effet, si $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$ alors $(M'N') = r[(MN)]$ car l'image d'une droite par une isométrie est une droite obtenue à partir des points images.
- Soit on prend, un point M sur la droite de départ ((L_2) ou (L_3)), on construit d'abord un point M' tel que $M' = r(M)$ et puis la parallèle à la droite de départ passant par M' . Ainsi, (Δ) est la droite passant par M' et formant un angle de mesure $\frac{k\pi}{3}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$) avec la parallèle à la droite de départ. Cette parallèle peut se construire dans le paradigme G1 à l'aide d'un instrument de mesure des angles, comme par exemple le rapporteur pour la mesure de l'angle, et la règle pour le tracé de la droite (Δ) passant par M' .

Cependant, le choix de l'une des droites (L_2) ou (L_3) dont (Δ) sera l'image est une variable dans cette situation. En effet, on peut décider de construire l'image de la droite (L_2) ou bien celle de (L_3) par la rotation r . Par ailleurs, observons que la donnée du point A sur la droite (L_1) est une donnée capitale dans la résolution de ce problème. Car, le choix de la position des droites (L_2) et (L_3) dépend de celle de (L_1) qui va, par conséquent, influencer la résolution du problème. Ce qui fait que la position de la droite (L_1) est une variable dans la résolution de ce problème. Un élève pourra essayer d'obtenir un triangle équilatéral en faisant varier les positions des droites (L_2) et (L_3) pour une position fixe de la droite (L_1) et du point A donnée. Le point A restant invariant, il est considéré comme un sommet donné du triangle. Trois positions de la droite (L_1) sont susceptibles d'apparaître lorsque nous les représentons par exemple dans une disposition spatiale où elles sont légèrement obliques : (L_1) est dans la bande située au-dessus des droites (L_2) et (L_3), (L_1) est dans la bande située en-dessous des droites (L_2) et (L_3), et (L_1) dans la bande comprise entre les droites (L_2) et (L_3) (Cf. figure 3 et 4). L'écart entre les droites pourra influencer la taille du triangle à construire. Mais aucune exigence n'est donnée sur cette taille même de façon implicite. Nous considérons que c'est une variable qui n'est pas prise en compte dans l'évaluation de la solution, puisque le but est tout simplement d'obtenir un triangle équilatéral. Cependant, un cas particulier en lien avec cette position des droites existe : le cas où l'une des droites est équidistante des deux autres. Pour ce cas, la solution est triviale puisque le triangle solution peut être construit, sans nécessairement utiliser une isométrie. Nous pensons que les enseignants vont essayer d'écarter ce cas lors de la résolution de ce problème. Compte tenu du fait que le processus de construction va être orienté en fonction de ce que l'enseignant voudra que les élèves utilisent comme outils (Douady, 1988), selon les exigences des programmes et les règles du contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction, en classe de Première Scientifique.

Un deuxième sommet étant construit (B ou C), celui qui est l'intersection de la droite (Δ) avec l'une des droites (L_2) ou (L_3), et le premier sommet A étant fixé sur la droite (L_1), il restera la construction du troisième sommet (B ou C) sur la troisième droite. Pour que le triangle ABC soit équilatéral, il faut et il suffit que le troisième sommet soit l'antécédent du deuxième par la rotation $r_{(A, \frac{k\pi}{3})}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$) car (Δ) est une droite image par la rotation r . Pour cela deux cas sont envisageables :

- Soit prendre le point C comme le deuxième sommet du triangle à construire et (Δ) l'image de (L_2) par la rotation r . Dans ce cas, le point C est l'intersection de la droite (Δ) avec la droite (L_3). Ainsi, le point B est construit de telle sorte que B soit l'antécédent du point C par rotation r . C'est-à-dire que $C = r(B)$.
- Soit prendre plutôt le point B comme le deuxième sommet du triangle à construire et (Δ) l'image de (L_3) par la rotation r . Alors le point B est l'intersection de la droite (Δ) avec la droite (L_2). Dans ce cas le point C est construit de telle sorte que C soit l'antécédent du point B par la rotation r . C'est-à-dire que $B = r(C)$.

Les isométries étant des applications bijectives, si nous considérons la rotation $r_{(A, \frac{\pi}{3})}$, c'est-à-dire que nous prenons $k = 1$ dans le raisonnement précédent, on va constater qu'on peut également utiliser la réciproque de cette rotation qui est la rotation r^{-1} de même centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, pour construire l'antécédent du point B ou du point C, selon le choix qu'on a effectué. Ainsi, le troisième sommet est l'image du deuxième par la rotation r^{-1} . On aura donc :

- Soit $B = r^{-1}(C)$, si le point C est le deuxième sommet considéré comme l'intersection des droites (L_3) et (Δ), c'est-à-dire que le point C est construit sur la droite (L_3).
- Soit $C = r^{-1}(B)$, si le point B est le deuxième sommet considéré comme l'intersection des droites (L_2) et (Δ), c'est-à-dire que le point B est construit sur la droite (L_2).

L'objectif des enseignants étant de développer la validation, chez les élèves, nous pensons qu'ils choisiront une seule transformation qu'ils utiliseront dans les processus de construction et de validation des points A, B et C, pour ne pas alourdir le raisonnement et favoriser l'apprentissage de la validation. Cependant, le triangle étant spécifié ABC, un sens de parcours lui est implicitement donné. En effet, les sommets sont construits l'un après l'autre suivant une certaine orientation du plan. Donc le sens d'orientation du triangle à construire est une variable. C'est une question qui se pose une fois que le point A est placé sur la droite (L_1). Cette variable suggère qu'il existe plusieurs triangles de sens différents, solutions du problème. Ainsi, suivant le sens de parcours des sommets A, B et C, nous aurons des triangles de sens direct ou indirect. Mais, une fois que l'angle de la rotation est choisi, un triangle est construit. Donc un sens d'orientation est choisi. Pour obtenir tous les triangles de sens contraire, on peut considérer les symétries orthogonales $S_{(D)}$, où (D) est la perpendiculaire aux droites parallèles (L_1), (L_2) et (L_3), et construire tous les triangles images du triangle construit. Car, les symétries orthogonales sont des antidéplacements.

Le choix de la position des droites (L_1), (L_2) et (L_3) à la fois, et celle du point A, puis le choix de l'angle de la rotation, constitue aussi une variable, puisque le choix d'une position de ces droites, induit une position du point A, et un choix de l'angle de la rotation. Ce qui signifie que

plusieurs triangles de mêmes sens sont solutions de ce problème. Ainsi, si on désigne par \vec{u} un vecteur directeur des droites (L_1) , (L_2) et (L_3) , alors, tous les autres vecteurs directeurs de ces droites sont sous la forme $k\vec{u}$ (avec $k \neq 0$). Ainsi, un triangle ABC solution du problème étant construit, les translations $t_{k\vec{u}}$, de vecteur $k\vec{u}$, permettent de construire tous les triangles solutions de mêmes sens car les translations sont des déplacements.

Les preuves d'existence et constructibilité du triangle équilatéral ABC étant établies, nous poursuivons, conformément à notre cadre, par la rédaction d'une solution, complète *à priori*.

- **Une solution à priori de la situation proposée**

Notre modèle de forme d'organisation du travail mathématique étant en construction, nous allons nous limiter à proposer une solution rédigée qui respecte les différentes articulations, des procédés de construction fixés à notre cadre théorique (**EPP**), afin de poursuivre nos analyses. Supposons que le triangle ABC qu'on veut construire est de sens direct. Le triangle ABC étant équilatéral, on a : $AB = AC = BC$ et $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$. De ces caractérisations, nous considérons la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ainsi :

1. Si nous prenons M et N deux points du plan situés sur la droite (L_2) , puis M' et N' deux points vérifiant : $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$. Alors on a : $(M'N') = r[(MN)]$, ce qui signifie que la droite $(M'N')$ est l'image de la droite (L_2) par la rotation r , et que la droite $(M'N')$ coupe (L_3) . Désignons par C le point d'intersection des droites $(M'N')$ et (L_3) , alors $C \in (L_3)$ et $C \in (M'N')$, et donc $C \in (L_3)$. Ainsi, on a : $A \in (L_1)$ et $C \in (L_3)$. Pour que le point $B \in (L_2)$, il faut et il suffit de construire B de manière à ce que $C = r(B)$. C'est-à-dire, que B soit l'antécédent du point C par la rotation r . Puisque la droite $(M'N')$ est l'image de (L_2) par la rotation r , alors tout point situé sur (L_2) est un antécédent d'un point situé sur $(M'N')$. Ainsi, B sera situé sur la droite (L_2) . On a donc $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$, d'une part ; $AB = AC$, (car les rotations conservent les longueurs) et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, d'autre part. Ainsi, ABC est un triangle isocèle dont la mesure de l'angle au sommet A est $\frac{\pi}{3}$. Ce qui implique que ABC est un triangle équilatéral.
2. Si nous prenons plutôt les points M et N sur la droite (L_3) , puis M' et N' deux points vérifiant : $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$. Un raisonnement analogue permet de construire la droite $(M'N')$ comme étant l'image de (L_3) par la rotation r . Par le même procédé, on arrive à la même conclusion.

- **Un algorithme de construction du triangle ABC**

D'après ce qui précède, pour construire un triangle ABC répondant au problème posé par cette situation, il suffit de suivre les étapes suivantes :

- Choisir une position du point A quelconque sur la droite (L_1) .
- Construire l'image (Δ) de la droite (L_2) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; la droite (Δ) coupe (L_3) en C.
- Construire le point B, antécédent du point C par la rotation r .

On peut remarquer, dans le programme précédent, qu'on pouvait aussi construire l'image (Δ') de la droite (L_3) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; dans ce cas la droite (Δ') va couper (L_2) en B . Il suffira donc de construire C , antécédent du point B par la rotation r .

- **Une construction instrumentée du triangle ABC**

Pour illustrer ce programme, nous avons choisi la disposition spatiale qui est celle où les droites (L_1), (L_2) et (L_3) sont dans une position légèrement oblique. De cette disposition nous avons envisagé toutes les constructions instrumentées possibles, en faisant varier la position de la droite (L_1) par rapport à celle des droites (L_2) et (L_3).

1^{er} cas : La droite ($M'N'$) est l'image de (L_2) par la rotation r .

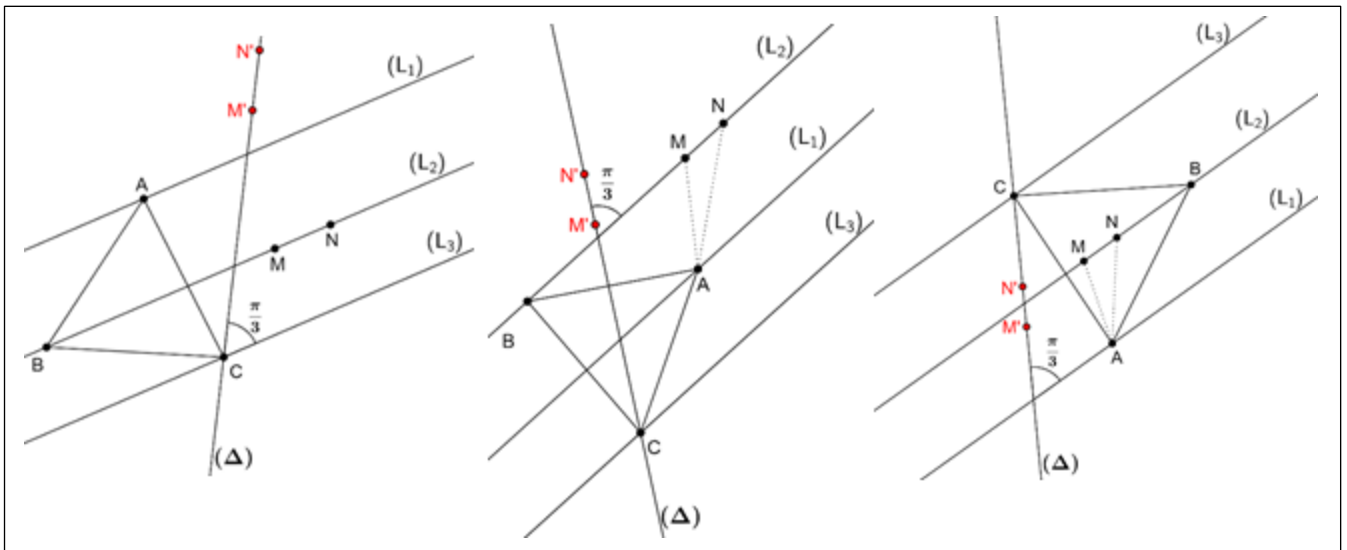


Figure 3: Constructions instrumentées du triangle ABC

2^{er} cas : La droite ($M'N'$) est l'image de (L_3) par la rotation r .

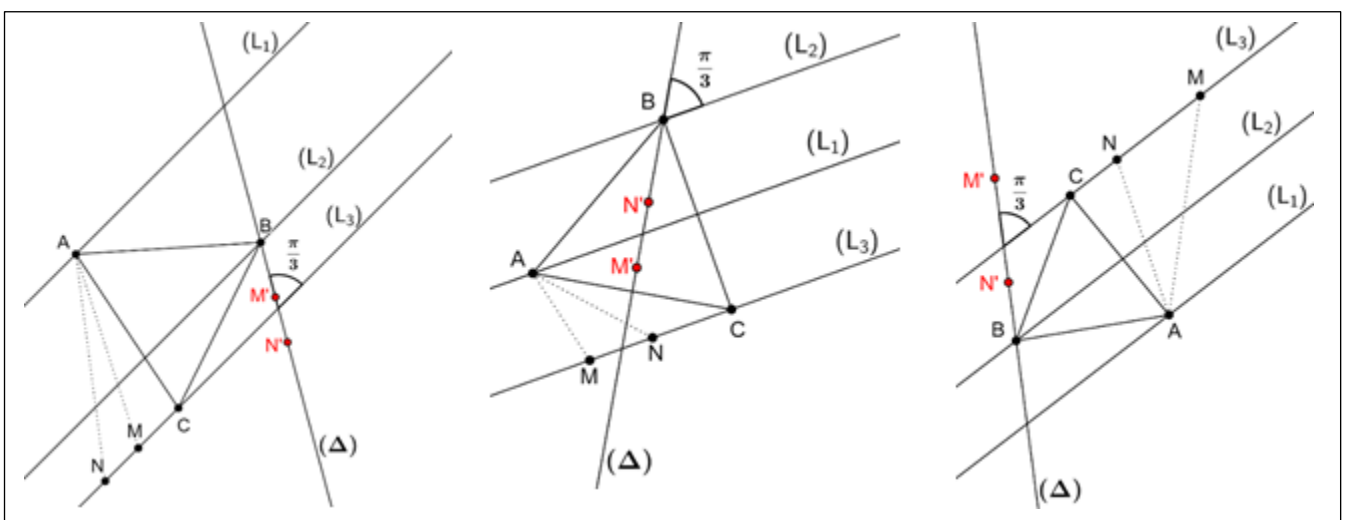


Figure 4: Constructions instrumentées du triangle ABC

Le problème a-t-il plusieurs solutions ?

Au cours de cette résolution, trois choix se sont présentés pour influencer la construction proposée précédemment :

- Le choix de la position du point A sur la droite (L_1) .
- Le choix de la position relative des droites (L_1) , (L_2) et (L_3) .
- Le choix du sens de parcours du triangle (ABC) , et donc de l'angle de la rotation r .

Prenons \vec{u} un vecteur directeur des droites (L_1) , (L_2) et (L_3) , et (D) une droite orthogonale aux droites (L_1) , (L_2) et (L_3) . Puisque nous avons construit un triangle ABC solution du problème, les translations de vecteur $k\vec{u}$ (avec $k \neq 0$) permettent de construire tous les triangles solutions de même sens et les symétries orthogonales $S_{(D)}$, permettent de construire tous les triangles solutions de sens contraire. Ainsi, le procédé de construction du triangle équilatéral ABC a consisté à élaborer un algorithme (ou programme) de construction, une construction instrumentée et une discussion sur le nombre éventuel de triangles solutions du problème.

6.3. L'Analyse du travail mathématique permettant la réalisation de la construction du triangle équilatéral ABC et du discours de validation qui accompagne ce travail

En nous appuyant sur la grille élaborée plus haut (Cf. section 6.1), nous décrivons, le travail mathématique et le discours de validation qui accompagnent ce travail, susceptibles de permettre la réalisation et la validation de la construction du triangle équilatéral ABC , pour mettre en évidence un travail mathématique d'organisation complet, *a priori*.

La situation commence par demander de construire trois droites distinctes et parallèles (L_1) , (L_2) et (L_3) , puis de prendre un point A quelconque sur la droite (L_1) . L'intention est d'amener les élèves à réaliser une construction traduisant les données du problème, sur laquelle ils pourront s'appuyer et s'en servir comme un support à l'intuition et au raisonnement. En effet, c'est un objet physique sur lequel les élèves vont réaliser d'autres constructions, avancer des conjectures et bâtir le discours de validation de la construction finale. Les auteurs voudraient que les élèves visualisent un triangle solution en supposant le problème résolu, pour envisager un triangle répondant au problème, et dégager les propriétés pouvant permettre sa construction théorique. Une méthode mathématique qui peut être utilisée, est celle qui consiste à chercher les conditions nécessaires et les conditions suffisantes, à partir desquelles va émerger une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation d'une construction du triangle ABC . Ainsi, le travail mathématique pourra débiter dans le paradigme G1, circuler dans le plan Instrumental-Sémiotique ([Ins-Sem]) orienté au départ dans la dimension sémiotique et puis instrumentale pour réaliser la construction « témoin ». Certaines contraintes liées aux conditions de réalisation d'une solution sont ensuite fixées (Cf. C_1 , C_2 et C_3). Elles visent trois choses : premièrement, la recherche d'une propriété pertinente considérée comme condition nécessaire et suffisante pour la réalisation effective de la construction du triangle ABC . Cette condition peut être obtenue à partir des propriétés extraites de la construction « témoin » et des propriétés disponibles dans le référentiel théorique (Kuzniak et al, 2016). Deuxièmement, elles permettent la vérification et la justification de la conformité entre la construction réalisée et les données du problème pour l'exactitude et la validité de la construction. Troisièmement, elles amènent les élèves à discuter, éventuellement, du nombre de solutions que peut avoir le

problème. Cela impose des va-et-vient entre la construction « témoin » et les propriétés sur les isométries du plan. Ainsi, le travail mathématique va se disperser et s'émietter dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, pour se stabiliser dans le paradigme G2, puisque les élèves doivent définir, à travers un algorithme de construction, une technique dans G2 qui sera un bon outil permettant d'obtenir à chaque fois, la construction du triangle équilatéral ABC dans G1. Ce travail va basculer sur la dimension sémiotique et circuler dans le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis] privilégiant la dimension discursive. Les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction vont positionner ce travail sur la dimension instrumentale, en le faisant circuler sur le plan Sémiotique-Instrumental ([Ins-Sem]) pour réaliser la construction instrumentée illustrant l'algorithme élaboré. Telle que la situation est conçue, les enseignants devront se référer aux propriétés sur les rotations du plan pour amener les élèves à décrire le processus de construction du triangle ABC. Il s'agira, pour eux, d'amener les élèves à utiliser : l'interprétation des données, les propriétés liées aux rotations du plan, une caractérisation du triangle équilatéral et une conception des différentes notions mathématiques convoquées au cours de la résolution, pour construire ce triangle. Ils vont donc privilégier le travail sur la caractérisation du triangle équilatéral ABC, le choix de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et une conception de cette rotation. Ce travail « de la technique » (au sens de Chevallard (1985)) va s'appuyer essentiellement sur l'exploitation visuelle et sémiotique des données fournies par la construction « témoin ». Cependant, le travail sur le discours écrit permettant de décrire non seulement le processus de construction mais aussi celui de validation, doit fortement être mis en avant car il constitue un attendu. Ainsi, les enseignants amèneront les élèves à mobiliser les éléments du référentiel théorique afin d'élaborer le discours permettant de construire un triangle et d'établir que ce triangle est le triangle ABC. Le discours de validation privilégié dans l'ETM idoine potentiel est celui qui est basé sur un raisonnement assisté par une construction « témoin », qui reste clos sur la dimension discursive. Dans l'argumentaire de validation, ce raisonnement sera d'abord analogique pour chercher des arguments (ou les propriétés) utiles pour la réalisation de la construction ; ensuite inductif pour construire une conjecture permettant d'obtenir une condition nécessaire et suffisante (ou propriété pertinente) pour construire le triangle ; et enfin déductif pour justifier les conjectures et donner les raisons mathématiques de la construction. Il va utiliser des arguments formels (ou théoriques), issus de la géométrie des transformations, précisément, du choix de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et de la substitution de la caractérisation du triangle équilatéral ABC par les propriétés de cette rotation. Ce discours prendra la forme d'un argumentaire de type démonstratif visant à convaincre autrui de la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées. Ainsi, dans la structure de développement de la démarche de validation, la validation prendra d'abord les allures d'une justification pour valider pas à pas toutes les constructions élémentaires ; ensuite, la forme d'une démonstration pour valider le triangle ABC construit. L'objectif central des enseignants étant de s'appuyer sur une forme d'organisation du travail mathématique pour réaliser la construction d'un triangle ABC afin de développer la démarche de validation, chez les élèves, les enseignants vont apprendre aux élèves à valider les constructions qu'ils réalisent et les entraîner à la manière d'identifier les éléments sur lesquels ils peuvent prendre appui pour produire une construction et un discours de validation de cette construction.

L'ETM idoine potentiel, tel qu'il est conçu dans cette situation, place le travail mathématique permettant la réalisation de la construction du triangle ABC dans la dimension sémiotique visant l'utilisation de la rotation du plan comme outil sémiotique. Ce travail bascule d'abord dans le plan [Sem-Dis], orienté vers la dimension discursive, car la demande de réalisation de la construction d'un triangle ABC sans exigence d'échelle laisse penser que les auteurs veulent amener les élèves à raisonner sur une construction « témoin » afin d'extraire les propriétés nécessaires pour décrire le processus de construction et produire l'argumentaire de validation de cette construction. Une exigence du contrat didactique relative à la réalisation de la solution d'un problème de construction fait à nouveau basculer ce travail dans le plan [Sem-Ins], orienté vers la dimension instrumentale car une construction instrumentée est attendue pour illustrer l'algorithme élaboré. Donc, le travail mathématique permettant la réalisation de construction du triangle ABC va privilégier la dimension discursive de l'ETM. Il va prioritairement être dirigé par le paradigme G2. La méthode sera celle qui consiste à manier les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour dégager une condition nécessaire et suffisante de l'existence et de la réalisation de construction effective du triangle ABC. Le discours de validation va utiliser un raisonnement qui suit une graduation en trois étapes : d'abord, analogique ; ensuite, inductif ; et enfin, déductif. Ce discours prendra la forme d'un argumentaire de type démonstratif utilisant des arguments formels issus des propriétés mathématiques institutionnalisées, des interprétations et des substitutions de la caractérisation du triangle équilatéral ABC à l'aide des propriétés de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Tout ceci dans une structure de la démarche de validation adossée à une forme d'organisation qui agence la séquence de résolution en deux phases : d'abord l'étude d'une configuration « triangle équilatéral » supposée être la solution du problème, à travers la recherche des conditions nécessaires pour la construction du triangle ABC, *l'Analyse* ; puis la mise au point d'une procédure de construction pour s'assurer que ces conditions sont bien suffisantes pour l'existence et la construction effectives de ce triangle, *la synthèse*.

Tels que nous avons analysé les procédés de construction du triangle ABC, le travail mathématique permettant de réaliser une construction de ce triangle et le discours de validation susceptible d'accompagner ce travail, montrent que la forme d'organisation du travail mathématique qui pourra être développée par les enseignants lors de la mise en œuvre de cette situation en salle, est celle qui organise par étapes les sous-tâches liées à la séquence de résolution. Cette forme d'organisation inscrit le travail mathématique d'organisation dans une structure limitée à deux étapes pour développer la démarche de validation, chez les élèves. Il s'agit de : *l'Analyse et la Synthèse*.

Nous analysons, dans le paragraphe qui suit, le déroulement de la séquence résolution de cette situation en salle, en classe de première Scientifique A, telle qu'elle a été conduite par l'enseignant P_A.

6.3.1. L'analyse de l'ETM idoine Effectif, en classe de Première Scientifique A

L'enseignant P_A avait laissé la situation à résoudre en devoir, la veille de notre passage. Le jour de l'observation, il avait apporté en salle, une règle graduée, un rapporteur, une équerre et un compas. Il a réécrit l'énoncé du problème au tableau. Puis il a demandé aux élèves s'ils avaient

eu des difficultés à résoudre la situation. Cette question a créé un grand bruit dans la salle. Une fois les élèves calmes, l'enseignant P_A reprend la parole :

Enseignant PA	Si vous êtes calmes ! On peut commencer. Dites-moi ! sur quelle leçon porte le problème ? (Preuve d'existence et de constructibilité) UN LONG SILENCE DANS LA SALLE	RESTITUTION DU TRAVAIL INDIVIDUEL
---------------	---	--

L'enseignant veut commencer par établir la preuve d'existence et de constructibilité du triangle ABC, en essayant de relier la situation à un contenu mathématique pour négocier l'entrée dans la résolution. Mais, il trouve un silence. Face à ce long silence, il essaye de s'assurer que les élèves ont pu identifier le problème mathématique à résoudre que pose la situation.

Enseignant PA	Qu'est-ce qu'il faut faire dans cet exercice ? OUI !!!! Charles !!!
Elève E1	Construire un triangle ABC isocèle.
Elève E2	Isocèle comment ? Toi aussi !!!!!
Enseignant PA	Lis au tableau !!!!! Vas-y ! Gérard (Absence d'appréhension du problème)
Elève E2	Non, Monsieur !! on a dit équilatéral avec les sommets sur les droites parallèles.
Enseignant PA	Et A appartenant ?
Elève E2	À la droite (L_1).
Elève E1	Aaah ! Pardon ! équilatéral. Les sommets sont sur (L_1), (L_2) et (L_3).

Les réactions des élèves E1 et E2, puis celle de l'enseignant P_A , établissent l'absence d'une étape capitale, non prise en charge par l'enseignant à l'entrée de cette séquence. Celle qui permet aux élèves d'appréhender la situation. Nous pensons qu'une insistance de l'enseignant sur la lecture publique de la situation visant à amener les élèves à parcourir finement les données de cette situation, aurait permis aux élèves de la situer dans un contexte et de séparer la question mathématique à résoudre de l'énoncé. Cela aurait permis aux élèves de mieux comprendre le problème mathématique à résoudre et de savoir que la résolution d'un problème mathématique commence par une bonne appréhension de la situation. Pour poursuivre, l'enseignant P_A a résumé le problème et il est reparti sur les échanges :

Enseignant PA	Maintenant qu'on sait qu'il faut construire un triangle ABC équilatéral ayant ses sommets sur trois droites parallèles. Comment avez-vous procédé ? (Méthode mathématique utilisée) UN CALME ABSOLU. PUIS TROIS ELEVES LEVENT LE DOIGT
Elève E3	Monsieur, je peux aller au tableau ?
Enseignant PA	OUI !!!!! Va nous montrer ce que tu as fait.

Cette question est liée à la méthode mathématique qui va être utilisée. C'est elle qui va structurer le travail mathématique et guider les échanges pour organiser ce qui va être dit et écrit au cours de la résolution. Elle doit générer une stratégie de résolution. L'élève E3 étant au tableau, l'enseignant est revenu sur sa question de départ qu'il a reformulée de la manière suivante :

Enseignant PA	Le problème que vous voulez résoudre porte sur quelle partie du cours ?
Elève E3	

Enseignant PA	Sur les translations, homothéties, symétries, rotations... Tous les trucs comme ça ! D'accord !!!!! Allons-y !! (Preuve d'existence et de constructibilité)
---------------	---

Il réussit par-là à justifier l'existence du triangle équilatéral ABC et à établir sa preuve de constructibilité. Ceci en reliant le problème à un objectif du programme pour ramener la résolution à une application des propriétés disponibles dans le référentiel théorique (Kuzniak et al., 2016) des élèves. L'élève, au tableau, a tracé à l'aide de la règle et de l'équerre trois droites parallèles sur lesquelles il a construit un triangle ABC qui pour lui était équilatéral. Face à cette réaction de l'élève, l'enseignant P_A relance les échanges :

Enseignant PA	Qu'est-ce qui prouve que le triangle là est équilatéral ? Est-ce que tu peux me dire comment tu as fait pour le construire ? IL Y A EU UN TRES GRAND BRUIT DANS LA SALLE. ON POUVAIT ENTENDRE : MONSIEUR J'AI AUSSI FAIT COMME LUI !!! IL N'A PAS UTILISÉ LE RAPPORTEUR POUR CONSTRUIRE L'ANGLE !!!!
Enseignant PA	Silence !!!! suivons votre camarade....
Elève E3	J'ai juste essayé de tracer !
Enseignant PA	En utilisant quelles propriétés ? (Non-respect du paradigme géométrique)
Elève E3	Je veux construire le triangle ! Monsieur.....
Enseignant PA	OUI, et c'est ta solution ?
Elève E3	OUI, Monsieur !
Enseignant PA	Et la justification est où ? (Absence du discours écrit de validation)
Elève E4	Où est-ce que tu as utilisé une transformation du plan ? Monsieur, on doit justifier la construction là ? Alors qu'on a tracé avec la règle !!!
Elève E3	Monsieur, moi je ne vois pas comment on va utiliser ça ici.
Enseignant PA	C'est toute ta solution qui est au tableau là ? (Non-respect du contrat didactique)
Elève E3	OUI, Monsieur !!!!
Enseignant PA	Qu'est-ce qui prouve que ta construction est exacte ?
Elève E3	J'ai tracé avec la règle.
Enseignant PA	As-tu donné le programme qui te permet de tracer ? Puisqu'on avait dit dans le cours que la construction doit être le programme et la figure. Et qu'on doit démontrer comment on a fait pour avoir les deux constructions.
Elève E5	Monsieur, il n'a pas fait son exercice à la maison.
Enseignant PA	Silence !!!!!!!! je vais te virer, si tu continues à troubler. Qui croit avoir fait mieux ? UN SILENCE ABSOLU DANS LA SALLE

Au vu de la solution que propose l'élève E3, l'enseignant se rend compte du non-respect, par les élèves, des règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction. Il essaye de les pousser à se remémorer car, pour lui, il est capital que ces règles soient appliquées puisqu'elles donnent la structure de la solution d'un problème de construction, en Première Scientifique. C'est en exécutant le contrat que les élèves pourront décrire le processus de construction du triangle ABC. Ce qui mettra en évidence le travail mathématique permettant de réaliser la construction du triangle et le discours de validation qui

accompagnent ce travail. Les élèves travaillent dans le paradigme G1. Ils utilisent les instruments traditionnels de géométrie pour réaliser la construction. Pour eux, une solution à un problème de construction donné est un dessin où le seul mode de validation est la précision apportée par les instruments. Ceci ne semble pas être attendu puisque l'enseignant P_A n'est pas d'accord avec cette solution. Après avoir essayé de les pousser, sans succès, dans G2, il fait face à un silence absolu dans la salle. À travers ce rendu du travail individuel des élèves, nous constatons que le problème d'incapacité des élèves à valider un résultat qu'ils obtiennent, que soulèvent les enseignants de mathématiques est profond. Face à ce silence des élèves, l'enseignant décide de reprendre la résolution de la situation avec eux. Il leur rappelle qu'il existe une méthode de résolution des problèmes de construction sur les transformations du plan qu'ils ont vues en cours et qu'il faudrait qu'elle soit appliquée dans cette situation. La classe restée très silencieuse, l'enseignant reprend la parole :

Enseignant PA	Il faudrait que vous preniez la peine de lire vos leçons avant de chercher vos exercices. Je crois avoir corrigé un exercice similaire dans le cours, avec vous !!! Quelle est la méthode à utiliser pour résoudre un problème de construction ? OUI !!! Claude !
Elève E5	Monsieur ! On doit commencer par expliquer et puis on construit.
Enseignant PA	Allons-y !!! je vais noter au tableau.
Elève E5	Monsieur !! il faut l'analyse et puis le résumé en utilisant une isométrie.
Enseignant PA	Il faut faire ???
Elève E5	L'analyse.
Enseignant PA	Et ???
Elève E5	Le résumé, Monsieur !!!!!
Enseignant PA	Nous avons appelé ce résumé la syn.....
Elève E4	La synthèse.
Enseignant PA	Très bien ! Et la synthèse. Donc, on procède par analyse et synthèse.

L'enseignant a écrit au tableau, comme on peut le lire sur sa fiche de préparation :

Pour résoudre ce problème nous allons procéder en deux étapes

- 1- L'analyse
- 2- La synthèse

En effet, il structure la séquence de résolution en deux étapes : l'analyse et la synthèse. La méthode mathématique institutionnalisée consiste donc à manier les conditions nécessaires et les conditions suffisantes afin de trouver une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation effective de la construction du triangle équilatéral ABC. L'enseignant a écrit au tableau « *étape n°1 : Analyse* », tout juste au-dessus de la construction qu'avait réalisé l'élève E3. Il a réajusté cette construction en la commentant et en procédant à la vérification de sa conformité avec les données du problème. Il a supposé que le triangle équilatéral ABC qui était tracé, est celui qu'on voulait construire. Cette construction est, par la suite, utilisée comme un outil Sémiotique. Ainsi, le travail mathématique démarre dans G1. Il circule suivant le plan

Instrumental-Sémiotique ([Ins-Sem]) orienté sur la dimension Sémiotique. La construction réalisée devient une donnée supplémentaire. Un objet à partir duquel le processus de construction et la démarche de validation vont être déduits. S'appuyant sur cette construction « témoin », il a relancé les échanges :

	Etape n°1 : Analyse : (Étude d'une configuration supposée solution)
Enseignant PA	Quand est-ce que ce triangle ABC est équilatéral ?
Elève E3	Si $AB = AC = BC$. (Définition 1)
Enseignant PA	Ou encore ?
Elève E6	Tous ses angles mesurent 60° (Définition 2)
Enseignant PA	Mais en plus de tout ce que vous avez dit, il faut que les points A, B et C, soient respectivement sur les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) . Comment faire ici ? OUI !!!!!!!!!!!!! Paul !!!!!!!!!!!!!!!
Elève E2	Il faut que $AB = AC$ et l'angle en \hat{A} soit 60° . (Argument formel)
Enseignant PA	OUI, mais donne la mesure de cet angle là en radian.
Elève E2	C'est $\frac{\pi}{3}$ Radian. Monsieur !!!!!
Enseignant PA	Ces deux relations : $AB = AC$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$, traduisent quelle isométrie ?
Elève E3	Monsieur, une symétrie !!! Pardon !!!! C'est la rotation. Je pense !!!
Enseignant PA	Laquelle ?
Elève E3	La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. (Choix d'une isométrie)

L'enseignant adopte un raisonnement « assisté » par une construction « témoin » réalisée à partir des données du problème pour faire fonctionner le jeu G1-G2. En faisant des va-et-vient entre cette construction « témoin », les propriétés sur les isométries et sur les triangles équilatéraux, il amène les élèves à faire fonctionner, le point central de la méthode mathématique adoptée, en cherchant les conditions nécessaires et les conditions suffisantes permettant la réalisation de la construction effective du triangle ABC, supposé construit. Ainsi, il part des propriétés géométriques d'un triangle équilatéral, et du fait que « $AB = AC$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$ », pour amener les élèves à dégager une définition opérationnelle du triangle ABC en lien avec une isométrie (la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$) qui applique les points B et C respectivement sur les droites (L_1) et (L_2) . Il utilise cette rotation comme un outil sémiotique et discursif, en faisant circuler le travail dans le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis]). Ce qui fait que le travail mathématique, tout en étant Sémiotique, va basculer sur la dimension discursive et circuler suivant le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis]), dirigé par une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2. De l'interprétation des données, du choix de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et de la conception de cette rotation qu'a nourri l'enseignant au niveau des élèves, il aboutit à une caractérisation du triangle équilatéral ABC qui lui donne des arguments formels (théoriques) mettant en exergue une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ABC soit équilatéral avec les sommets A, B et C sur les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) . Le travail va se stabiliser dans le paradigme G2 et clos sur la dimension discursive. Ainsi, l'enseignant pose une nouvelle question aux élèves :

Enseignant PA	Quelle sera la condition pour que le triangle ABC soit équilatéral avec ses sommets sur les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) ?
---------------	--

Elève E3	Monsieur !! Que B soit l'image de C par la rotation. (Argument formel)
Enseignant PA	Il faut préciser !!! Par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Très bien !!

L'élève E3 utilise dans sa réponse la notion « d'image d'un point par une rotation » qui a été développée par l'enseignant à l'aide d'un raisonnement gradué, qui part de la construction « témoin » pour chercher les arguments considérés comme des propriétés, se poursuit à travers une interaction entre les propriétés des rotations du plan et les propriétés caractéristiques des triangles équilatéraux, pour élaborer une condition nécessaire et suffisante qui est par la suite démontrée. L'enseignant fait à l'oral un résumé de tous les éléments récoltés, revient sur la construction « témoin », efface les points B et C, et pose une question liée à la notion « d'image d'une droite par une rotation ». Les élèves ne savent pas vraiment où cette question les amène puisque nous avons entendu dans la salle : « Monsieur ! C'est pour faire quoi encore ? » Et la réponse de l'enseignant est « Nous verrons !!!!! ». Il poursuit les échanges :

Enseignant PA	Je veux construire la droite (L'_2) image de (L_2) par notre rotation. Comment on fait ? Donnez-moi la méthode. UN SILENCE !!!!!!!!! PUIS UN ELEVE LEVE LE DOIGT.
Enseignant PA	OUI !!!!!
Elève E5	Monsieur, une droite passe par deux points.
Enseignant PA	OUI, mais moi je veux construire la droite.
Elève E5	On construit les images de deux points, Monsieur !!!!!
Enseignant PA	Ok ! Que signifie donc que M'est image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$?
Elève E6	$AM = AM'$ et $Mes \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. (Argument de la théorie de la géométrie des transformations)
Enseignant PA	Très bien !!!!! j'écris la même relation avec N et N'. Et (M'N') sera la droite (L'_2). D'accord !!!!!!!!!
	LE PROF A LUI-MEME TRACÉ (L'_2) SUR LA FIGURE.
Enseignant PA	Si je prends C l'intersection de (L'_2) et (L_3). (Argument de validation de B et C) Comment construire le point B ?
Elève E5	Monsieur ! On a dit que B est l'image de C par la rotation.
Enseignant PA	Et quelle est la condition pour que le triangle ABC soit équilatéral ?
Elève E5	Comme on a déjà C ! (Justification pas à pas de la construction des points B et C) Monsieur, je veux venir construire !!!!!
Enseignant PA	Dis-moi d'abord.
Elève E5	Comme on a déjà AC non !! je trace $AB = AC$ et B soit placé sur (L_2).
Enseignant PA	Restons sur notre rotation. B est l'antécédent de C qui sera effectivement sur (L_2) car C, est sur la droite image (L'_2).

L'enseignant construit un argumentaire constitué d'arguments formels qui lui permettent de valider pas à pas la construction des points A, B et C, et puis de valider la construction du triangle ABC. Ainsi, il amène les élèves à construire une droite (L'_2) image de (L_2) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ afin de construire les points C et B. Dans ce processus, il introduit la notion « d'antécédent d'un point par une rotation » qui sert d'outil sémiotique et

discursif. Cette notion lui permet de faire constater aux élèves, à partir de la construction « témoin » que les points B et C, qui ont été effacés peuvent être reconstruits en utilisant la rotation r , et que ABC est bien un triangle. Il va, par la suite, pousser les élèves à démontrer que ce triangle est équilatéral et qu'il répond aux contraintes de l'énoncé. Donc A, B et C sont des points du plan dans G1 et des images l'un de l'autre par la rotation r dans G2. Le raisonnement qui était analogique, devient donc inductif pour formuler une conjecture et puis déductif pour établir que le triangle construit est celui qui répond aux contraintes de l'énoncé. L'enseignant va poursuivre les échanges en posant cette autre question aux élèves :

Enseignant PA	Comment s'assurer que le triangle ABC est équilatéral ? SILENCE ABSOLU !!!!!!!
---------------	--

C'est une question qui vise à établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions réalisées. Il s'agit d'établir la preuve d'équilatéralité du triangle ABC. Mais, les élèves restent silencieux. Face au silence, l'enseignant revient sur un résultat obtenu précédemment :

Enseignant PA	On a obtenu ce résultat : $AC = AB$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Qui signifie que le triangle ABC est isocèle avec un angle de mesures $\frac{\pi}{3}$. Un tel triangle est équilatéral. (L'argumentaire prend la forme démonstrative) Donc, le triangle ABC que nous venons de construire est bien équilatéral.
---------------	--

Ici, l'enseignant amène les élèves à valider la construction du triangle ABC dont ils viennent de décrire le processus de construction. Il élabore ainsi un discours qui prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif qui opère, par des interprétations et des substitutions de la caractérisation du triangle équilatéral demandé, par les propriétés sur la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ en lien avec les propriétés caractéristiques d'un triangle équilatéral. Les arguments sont des propriétés qui caractérisent un triangle isocèle particulier (celui qui a un angle principal de mesure $\frac{\pi}{3}$). Cette propriété est sensée être disponible dans le référentiel théorique des élèves. Le travail est maintenu dans le paradigme G2 et reste orienté sur la dimension discursive. Dans cette partie du travail, la propriété sur le triangle isocèle particulier est utilisée non seulement comme un instrument sémiotique, mais aussi comme un argument de validation, qui va produire le discours permettant de valider la construction finale. Le travail reste clos sur la dimension discursive. À la fin de cette preuve, l'enseignant est interpellé par un élève :

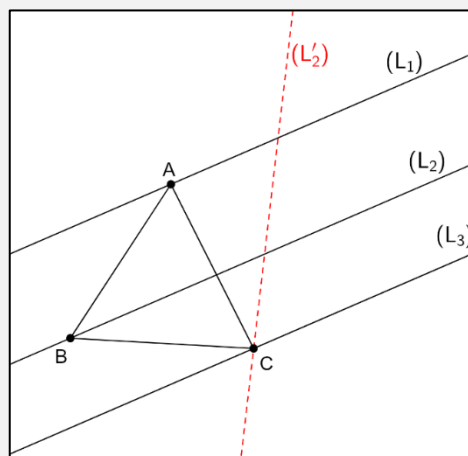
Elève E4	Monsieur, je ne comprends pas, ici, s'il vous plait !!!!!
Enseignant PA	Je reprends l'explication !!!! Un triangle isocèle dont l'angle principal est $\frac{\pi}{3}$, est équilatéral. On est d'accord avec cette propriété sur les triangles ? (Argument de validation)
Elève E4	OUI, Monsieur !!!!!
Enseignant PA	On a : $AC = AB$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$, donc le triangle ABC est bien équilatéral.
Elève E4	Ah !!!! D'accord Monsieur.

Les propriétés sur les triangles sont disponibles dans le référentiel théorique (Kuzniak et al, 2016) des élèves mais constituent des connaissances anciennes (Robert, 2012). D'où la difficulté des élèves à se remémorer rapidement. Nous proposons une capture du texte

constituant cette première étape tel qu'il a apparu dans le support de préparation de l'enseignant P_A et tel qu'il l'a reproduit au tableau.

ETAPE N°1 : ANALYSE

Supposons qu'on a cette figure où ABC est équilatéral



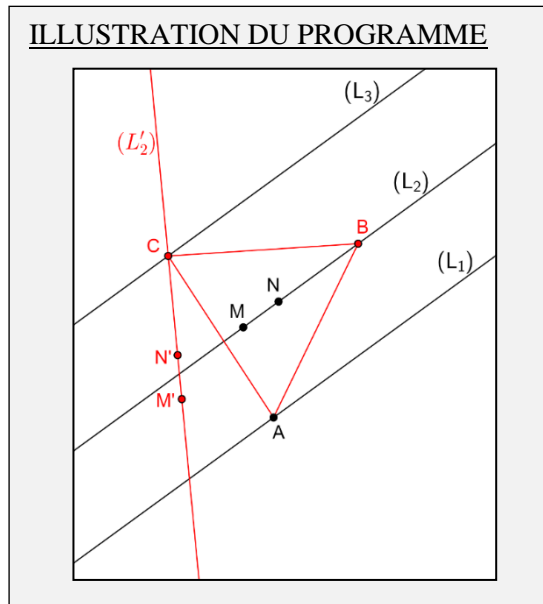
Si le triangle ABC est équilatéral de sens direct, $AB = AC = BC$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Ce qui se réduit à $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Prenons la rotation $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$. Soit $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$, alors $(M'N')$ est l'image de (L_2) lorsqu'on prend M et N sur (L_2) . $(L'_2) = (M'N')$, rencontre forcément (L_3) . C'est donc $(L'_2) \cap (L_3)$ sommet du triangle. Pour que ABC soit équilatéral il suffit que $C = r(B)$. C'est-à-dire que B soit l'antécédent de C. On va donc construire B tel qu'il soit l'antécédent de C par r . On obtient $B \in (L_2)$ puisque (L'_2) est l'image de (L_2) . Et le triangle ABC est équilatéral car $AB = AC$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.

Poursuivant la séquence de résolution, l'enseignant a écrit au tableau « étape n°2 : Synthèse ».

Enseignant PA	<p>Etape n°2 : La synthèse (Mise au point de la procédure de construction)</p> <p>Pour construire le triangle équilatéral ABC de sens direct on procède de la manière suivante : (Algorithme de construction)</p> <ul style="list-style-type: none"> - On prend A quelque part sur (L_1). - On construit (L'_2) image de (L_2) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le point C est l'intersection des droites (L'_2) et (L_3). - On construit B pour qu'il soit l'antécédent de C par la même rotation.
---------------	---

Dans cette étape, l'enseignant donne une construction du triangle ABC représentée par un algorithme de construction qu'il a expliqué et validé pas à pas. C'est une construction dans G2 qui est considérée comme une propriété permettant d'obtenir ce triangle dans G1. L'enseignant va accompagner cet algorithme de la construction instrumentée ci-dessous :

ILLUSTRATION DU PROGRAMME



Cette construction fait à nouveau basculer le travail mathématique dans le paradigme G1, puisqu'il utilise des instruments traditionnels de géométrie. Il circule sur le plan Sémiotique-Instrumental ([Sem-Dis]) orienté sur la dimension instrumentale. L'enseignant fait remarquer aux élèves qu'on pouvait choisir n'importe quelle disposition pour les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) . D'ailleurs, nous avons constaté qu'il avait adopté une disposition différente de celle de la construction « témoin ».

En posant la question de savoir si le problème a plusieurs solutions, la séquence a été interrompue par la sonnerie qui invitait les élèves à aller se mettre dans les rangs pour accueillir un responsable du ministère de l'éducation nationale qui avait été annoncé en visite. L'enseignant a pris la parole pour dire :

Enseignant PA	En devoir !!!!!
Elève E7	Toujours les devoirs !!! Monsieur !!!! Nous avons contrôle de français !!!!!
Enseignant PA	Oui, vous serez évalués sur cette partie la semaine prochaine. Vous allez refaire le même travail en utilisant la rotation d'angle $\frac{-\pi}{3}$. Et discuter sur le nombre de triangles solutions. Votre camarade a remarqué qu'on peut aussi utiliser la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

Compte tenu du fait que nous voulons déterminer la forme d'organisation du travail mathématique qui a permis à l'enseignant P_A de conduire l'activité de construction du triangle ABC, en nous plaçant dans le cadre théorique (EPP), nous présentons un bilan de nos analyses sur les aspects mettant en évidence le travail mathématique d'organisation produit tel qu'il est apparu tout au long de nos analyses du déroulement de la séquence de résolution, conduite par l'enseignant. Conformément à notre cadre, il se décline à travers le travail mathématique permettant de réaliser la construction du triangle ABC, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement cette construction.

- **Les procédés de construction du triangle équilatéral ABC**

L'enseignant P_A a établi l'existence et la preuve de constructibilité du triangle ABC, à l'entrée de la séquence de résolution, en poussant les élèves à rattacher le problème à résoudre à un contenu mathématique vu en cours (les isométries du plan). Ceci lui a permis d'établir que la situation était liée à un objectif du programme, ramenant ainsi la résolution du problème à une application des propriétés sur les isométries du plan, complètement disponibles dans le référentiel théorique des élèves. En s'appuyant sur les conditions nécessaires et les conditions suffisantes, il a amené les élèves à trouver une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation effective de la construction du triangle ABC. Ceci a permis à ces derniers de matérialiser la construction du triangle équilatéral ABC, solution du problème, à travers un algorithme de construction et une construction instrumentée, se conformant ainsi aux règles implicites du contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique. Les procédés de construction du triangle solution ont été développés dans une structure de développement de la démarche de validation adossée à une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : d'abord l'étude d'une configuration (*l'Analyse*), et ensuite la mise au point d'une procédure de construction, (*la Synthèse*).

- **Le Travail mathématique ayant permis de réaliser la construction du triangle équilatéral ABC**

L'enseignant P_A n'a pas pris en charge l'appréhension de la situation, qui devait pourtant permettre aux élèves de faire la différence entre l'énoncé de la situation et le problème mathématique posé qu'ils devaient résoudre. Cela semble être lié à une exigence de la méthode mathématique qu'il a utilisée. Pour lui, l'intérêt de la construction porte plus sur la procédure et sur le respect du contrat didactique que sur la construction finale. Ce qui lui a permis de développer la démarche de validation, chez les élèves. L'enseignant a mis en œuvre une méthode mathématique consistant à manier les conditions nécessaires et les conditions suffisantes, organisant ainsi la séquence de résolution en deux étapes : *l'analyse*, où les élèves devaient rechercher les conditions nécessaires pour la construction du triangle équilatéral ABC ; et *la synthèse*, où ils devaient s'assurer que ces conditions sont bien suffisantes pour l'existence et la construction effective de ce triangle. Il a « supposé au départ le problème résolu », pour amener les élèves à se donner une construction « témoin » leur permettant de chercher de bonnes propriétés par examens du triangle ABC, supposé construit. S'appuyant sur l'observation et l'expérimentation, il a amené les élèves à construire une définition opérationnelle du triangle équilatéral ABC utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ comme outil sémiotique. Ce qui a amené les élèves à conduire le travail mathématique dans le paradigme G1, au début de la résolution. Partant de cette construction, ce travail a circulé suivant le plan instrumental-sémiotique ([Ins-Sem]) privilégiant la dimension sémiotique. Les règles du contrat didactique exigeant que la construction soit un ensemble constitué d'un algorithme et d'une construction instrumentée, il a amené les élèves à conduire un raisonnement qui tend à justifier la construction de chacun des points A, B et C, sommets du triangle ABC tout en insistant, dans cette partie du travail, que chaque résultat soit justifié. Les élèves ont été tenus de travailler à ce niveau, dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, puis se

sont stabilisés dans G2 afin de se conformer à l'ETM de référence. La construction réalisée, au départ à partir des données du problème, a constitué une donnée supplémentaire. Ainsi, les arguments justificatifs de la construction finale ainsi utilisés, ont été puisés sur cette construction et dans le référentiel théorique (Kuzniak et al, 2016). Ce qui a fait basculer le travail mathématique sur le plan sémiotique-discursif ([Sem-Dis]) utilisant une caractérisation du triangle ABC liée à une conception de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, avec l'usage, d'une part, d'un raisonnement heuristique sur la construction « témoin » pour élaborer l'algorithme de construction ; et d'autre part, d'un raisonnement déductif pour mettre en forme le discours de validation qui accompagne ce travail de réalisation de la construction. Le travail est resté orienté vers la dimension discursive, et a privilégié l'usage des propriétés des rotations du plan, en tant qu'outil discursif. L'élaboration de la construction instrumentée, a de nouveau fait basculer ce travail sur plan Sémiotique-Instrumental ([Sem-Ins]) privilégiant la dimension instrumentale. Puisqu'à cette étape, les élèves ont généré une construction de G1 à partir d'une suite de propriétés de G2 qui constituent l'algorithme de construction.

Ainsi, pour produire le travail mathématique permettant de réaliser la construction du triangle ABC, l'enseignant P_A a utilisé une méthode mathématique consistant à manier les conditions nécessaires et les conditions suffisantes qui lui ont permis de dégager une condition nécessaire et suffisante. Ce travail a été prioritairement dirigé par le paradigme G2, privilégiant ainsi la dimension discursive de l'ETM. Il a circulé au départ suivant le plan Instrumental-Sémiotique ([Ins-Sem]) orienté sur la dimension Sémiotique ; a glissé sur le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis]) orienté sur le plan discursif où il s'est développé largement, tout en restant clos sur cette dimension ; puis a basculé sur le plan Sémiotique-Instrumental ([Sem-Ins]) orienté sur la dimension instrumentale. La structure de développement dans laquelle ce travail a été effectué est celle qui réalise la construction du triangle ABC dans une forme d'organisation du travail mathématique, qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *L'Analyse et la Synthèse*.

- **Le discours de validation qui a accompagné le travail ayant permis de réaliser la construction du triangle ABC**

L'enseignant P_A a élaboré, un discours de validation du triangle ABC qui prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif, justificatif et explicatif. Il ne fait pas de différence entre l'argumentation et la démonstration. En effet, nous avons relevé dans son discours deux catégories d'explications : une première qui vise à dégager et à établir le processus de construction, élaborée sous une forme de justification rationnelle ; et, une deuxième qui visent à établir la vérité de chaque construction élémentaire pour valider la construction réalisée, présentée sous une forme de justification rationnelle à l'intérieur de la théorie de la géométrie des transformations. Ainsi, nous avons noté des arguments tirés de la construction « témoin », des connaissances anciennes (Robert, 2012) et des rotations en liens avec les triangles équilatéraux. Pour structurer son discours, l'enseignant a adopté un raisonnement guidé par une construction. Sa méthode a consisté à inciter les élèves à compléter cette construction au fur et à mesure que les nouvelles informations apparaissaient. Ainsi, il y ajoutait des nouvelles droites « (L'_2) , $(M'N')$ » et des nouveaux points « M, N, M'et N' », non présents dans l'énoncé mais utiles pour raisonner. Il a amené les élèves à partir d'un raisonnement analogique pour

rechercher des arguments permettant de construire des hypothèses. Ceci lui a permis de formuler des conjectures, à l'aide d'un raisonnement inductif, puis chercher à travers un raisonnement déductif, à justifier et à communiquer ces conjectures. Ainsi, il a utilisé des arguments formels (ou théoriques), issus des interprétations et des substitutions, des caractérisations du triangle équilatéral ABC, par les propriétés issues de la conception de la notion de rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. La validation a pris la forme de contrôles (Balacheff et Margolinas, 2017) pour anticiper sur la validation de la construction finale et valider pas à pas les constructions élémentaires, puis la forme d'une démonstration (ou preuve) pour établir de façon rigoureuse la vérité des conclusions sur les constructions réalisées. Cette validation a donc d'abord été interne puisque l'enseignant a poussé les élèves à se convaincre, puis externe car ces derniers devaient également convaincre les autres de la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées. Tel qu'il a été élaboré, ce discours donne les raisons de la construction du triangle ABC. Dans son développement, l'enseignant a orienté les élèves sur la manière de : raisonner pour valider une construction, d'utiliser une construction « témoin » pour extraire des arguments, et d'enchaîner les arguments de validation d'une construction pour convaincre. Ce discours a occupé une place première dans cette séquence de résolution. En effet, l'enseignant a porté l'intérêt de la construction du triangle ABC un peu plus sur la procédure que sur le résultat final. Il a été élaboré à l'intérieur d'une structure de développement de la démarche de validation adossée sur une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *L'Analyse et la Synthèse*.

6.3.2. Le travail mathématique d'organisation élaboré dans l'ETM idoine Effectif, en classe de Première Scientifique A, pour développer la démarche de validation, chez les élèves

Nous avons ressenti au cours de cette séquence l'existence d'un implicite : le lien direct entre un triangle équilatéral et une isométrie du plan. Cependant, le fait que le triangle équilatéral ABC soit caractérisé et construit à partir des propriétés de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, nous a permis de constater que, dans le paradigme G1, les points B et C étaient situés respectivement sur les droites (L_2) et (L_3). Et dans le paradigme G2, que le point C était l'image de B par la rotation r . Nous avons constaté que l'enseignant P_A a légèrement modifié le travail mathématique permettant de réaliser et valider la construction du triangle ABC pour adapter l'ETM idoine. Ceci lui a permis de mieux structurer le travail mathématique d'organisation pour développer la validation chez les élèves. Cette modification a porté sur l'exigence de justification des résultats obtenus. Cette justification s'est appuyée à la fois, sur le référentiel théorique (Kuzniak et al, 2016), sur le statut de la construction réalisée au début de la résolution (la construction témoin) et sur les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction. Remarquons que la construction « témoin » a joué un rôle heuristique. Donc, pour asseoir l'ETM idoine et développer la validation, chez les élèves, l'enseignant a pris en charge le travail mathématique d'organisation, et a conduit une discussion sous forme de questions fermées avec les élèves. Ceci lui a permis d'orienter les réponses des élèves vers ses objectifs. Il a eu recours à des effets Topaze (Brousseau, 1998) pour faire avancer le travail mathématique, le discours qui accompagne ce travail et les procédés de construction au cours de la résolution. L'enseignant P_A a poussé les élèves à s'appuyer sur les

propriétés et méthodes vues en cours, présent dans leurs cahiers, pour décrire le processus de construction du triangle ABC, produire des justifications et construire des arguments, afin d'élaborer un discours de validation conforme et accepté. Il n'a pas laissé beaucoup d'initiatives aux élèves. Probablement parce que la situation avait été donnée en devoir bien avant. Dans cette séquence, nous avons constaté que les élèves travaillaient exclusivement dans le paradigme G1 et sur la dimension sémiotique que privilégie l'ETM idoine potentiel, mais qui n'est pas totalement privilégié par l'ETM adapté par l'enseignant. Dans cet ETM, il y a eu un glissement du travail vers la logique faisant perdre de vue l'objectif du problème. Nous avons eu l'impression que les élèves apprenaient à montrer « qu'un triangle isocèle d'angle principal $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral » ce qui a modifié la nature du travail mathématique, et en particulier le discours de validation qui accompagne ce travail de construction. Par ailleurs, dans cet ETM adapté qui privilégie la dimension discursive, la dimension sémiotique a été utilisée de manière heuristique pour produire le discours de validation de la construction du triangle ABC. La dimension instrumentale, quant à elle, a été utilisée pour se conformer aux règles du contrat didactique. Dans l'ETM idoine potentiel, ce discours est un argumentaire fondé exclusivement sur la construction du triangle équilatéral ABC qui va être réalisé, alors que dans l'ETM idoine adapté par l'enseignant, le discours de validation du triangle est un argumentaire constitué de deux arguments : l'un sur la géométrie des transformations et l'autre sur les triangles équilatéraux. Ce discours est organisé sous la forme d'une démonstration qui opère par des interprétations et des substitutions d'une caractérisation du triangle ABC par les propriétés issues des rotations en liens avec celles des triangles équilatéraux. Nous avons constaté que l'élaboration du travail mathématique d'organisation par les élèves, a nécessité des aides de l'enseignant pour qu'il soit mené à bien. Ces aides ont porté essentiellement sur la manière de : raisonner en géométrie, d'utiliser une construction « témoin » pour extraire des arguments, faire fonctionner le contrat didactique, décrire le processus de construction du triangle et bâtir le discours de validation de la construction. Lorsque les élèves étaient bloqués l'enseignant les référait aux propriétés, aux théorèmes et aux méthodes disponibles dans le référentiel théorique (cahier de cours).

Ainsi, le travail mathématique d'organisation a été au départ de nature sémiotique pour déterminer une définition opérationnelle du triangle ABC. Par la suite, il est devenu discursif pour contrôler pas à pas la réalisation de la construction et établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions élémentaires réalisées. Enfin, il a pris une nature instrumentale pour réaliser une construction instrumentée afin d'illustrer l'algorithme de construction élaboré. Cependant, il est resté prioritairement discursif et dirigé particulièrement par le paradigme G2. Au départ, ce travail a circulé suivant le plan Instrumental-Sémiotique ([Ins-Sem]) orienté sur la dimension Sémiotique. Il a ensuite basculé sur le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis]) orienté sur le plan discursif où il s'est largement développé en restant clos sur cette dimension. Enfin, il a de nouveau basculé sur le plan Sémiotique-Instrumental ([Sem-Ins]) orienté sur la dimension instrumentale. La méthode mathématique a consisté à rechercher les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour l'existence et la réalisation effective de la construction du triangle ABC. Ainsi, le raisonnement qui structure le discours de validation a été au départ analogique, ensuite inductif et enfin, déductif pour démontrer, justifier et expliquer l'exactitude et la validité de la construction réalisée. Ce discours a pris la forme d'un

argumentaire de type démonstratif, utilisant des arguments formels (ou théoriques). Les procédés de construction du triangle ABC ont consisté, d'une part, à établir la preuve d'existence et de constructibilité de ce triangle, en reliant le problème à un objectif du programme ramenant ainsi la résolution à l'application des propriétés vues en cours ; et d'autre part, à la réalisation effective de la construction du triangle ABC, à travers un algorithme de construction accompagné d'une construction instrumentée. Ainsi, la recherche des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour trouver une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation de la construction du triangle ABC a développé un travail mathématique d'organisation qui s'insère dans une structure de développement de la démarche de validation adossée à une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *L'Analyse et la Synthèse*. *L'analyse* consistant à étudier une configuration supposée être la solution du problème et *la Synthèse* conduisant à la mise au point d'une procédure de construction du triangle ABC.

Conclusion

Nous avons pour objectif, de déterminer les formes d'organisation du travail mathématique explicitées dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique A et B, de les comparer entre elles, puis à celles que proposent les ETM idoines potentiels. L'analyse globale des transcriptions des séquences de résolutions observées a mis en évidence une régularité dans la gestion de la séquence de résolution, nonobstant le fait que les enseignants P_A et P_B sont issus des établissements différents. Ils ont utilisé la même stratégie de résolution, décrit le même processus de construction et adopté la même démarche de validation de la construction du triangle ABC. Des investigations menées dans les textes d'accompagnement des programmes, à la suite de ce constat, nous ont permis de relever que ces enseignants sont soumis à la contrainte d'application de l'Approche Par les Compétences (APC) dans son intégralité. Cette approche prescrit une harmonisation des pratiques d'enseignement et des méthodes de résolution de problèmes, à un niveau scolaire donné. Ceci traduit la similitude dans la forme du travail mathématique d'organisation produit, dans les deux ETM idoines ; c'est-à-dire le fait que les deux enseignants avaient tendance à reproduire la même forme de travail mathématique d'organisation. Nous sommes donc arrivés à la conclusion selon laquelle : **deux ETM idoines effectifs différents qui décrivent le processus de construction d'un même objet géométrique défini par un même problème de construction, développent la même forme d'organisation du travail mathématique**. Ce constat nous a contraints de revoir notre méthodologie de recherche, en ramenant nos analyses à la seule séquence de résolution de l'enseignant P_A , qui est devenu le seul représentant de la classe des enseignants, abandonnant ainsi l'analyse de la séquence de résolution de l'enseignant P_B , ainsi que celle des entretiens directs que nous envisageons. Le même constat nous a conduit, au niveau de la comparaison des formes d'organisation explicitées dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique A et B, à nous limiter à la seule comparaison de la forme d'organisation mise en place dans l'ETM idoine effectif, en classe de Première Scientifique A, à celle que proposent les ETM idoines potentiels. Cependant, nous avons établi que l'enseignant P_A mettait en œuvre, dans sa méthode mathématique de résolution, le maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour trouver une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation de la construction du triangle ABC. Ceci lui a permis d'élaborer une structure de développement

de la démarche de validation qui décrit une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *l'analyse*, pour rechercher les conditions nécessaires permettant la réalisation de la construction du triangle ABC, à travers l'étude d'un triangle supposée être la solution du problème; et *la synthèse*, pour s'assurer que ces conditions sont bien suffisantes pour l'existence et la réalisation de la construction effective de ce triangle, afin de mettre au point une procédure de construction. De cet autre résultat, nous avons conclu que **la forme d'organisation du travail mathématique que propose l'ETM idoine effectif, pour développer la démarche de validation chez des élèves, en classe de Première Scientifique, est celle qui agence les sous-tâches d'une séquence de résolution d'un problème de construction en deux étapes : d'abord, l'Analyse pour étudier une configuration supposée être la solution du problème et ensuite la synthèse, pour la mise au point d'une procédure de construction.** On pouvait donc aisément constater que cette forme d'organisation du travail mathématique est aussi celle que proposent les ETM idoines potentiels et tirer la conclusion selon laquelle **pour décrire le processus de construction d'un même objet géométrique défini à l'aide d'un problème de construction, des ETM idoines effectifs différents développent la même forme d'organisation du travail mathématique qui est celle que proposent l'ETM idoine potentiel (A-S).**

Donc, la forme d'organisation du travail mathématique disponible dans l'ETM idoine, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves, est l'Analyse-Synthèse (A-S).

Cette conclusion pose des questions d'ordre épistémologique, mathématique et didactique, sur *l'Analyse – Synthèse* (A-S) comme forme d'organisation du travail mathématique dans le développement d'un savoir (ou savoir-faire), chez les élèves ; particulièrement, sur son fonctionnement comme méthode de raisonnement mathématique pour résoudre un problème de construction géométrique d'une part, et en tant qu'outil d'apprentissage de la validation en salle, d'autre part. Nous essayons de caractériser *l'Analyse-Synthèse* dans le chapitre qui suit.

Chapitre 7

Étude de la forme d'organisation du travail mathématique actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique : Analyse-Synthèse (A-S)

Les études précédentes ont mis en évidence l'*Analyse-Synthèse* (A-S) comme étant la forme d'organisation du travail mathématique, disponible actuellement, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Dans ce chapitre, nous nous proposons de l'examiner afin de la caractériser et décrire son fonctionnement pour mieux comprendre ses limites en tant qu'un outil d'enseignement et d'apprentissage de la validation. En nous appuyant sur l'histoire des mathématiques, nous allons observer les différents changements de points vus qui ont accompagné « l'Analyse » et « la Synthèse » dans le temps, afin d'avoir une idée claire et nette sur les différents sens dans lesquels ces mots, pris comme des concepts, sont employés en mathématiques. Cela nous permettra de comprendre l'utilisation qui est faite de nos jours et d'envisager leur impact sur le plan didactique, ceci afin de décrire le fonctionnement du concept d'Analyse-Synthèse et de dégager, conformément à notre cadre théorique, la structure de développement de la démarche de validation qu'offre ce concept en tant que forme d'organisation du travail mathématique. Notre cadre de référence est constitué des résultats obtenus dans les analyses précédentes et de certains travaux en mathématiques (Chasles (1852), Euclide (Traduction de F. Peyrard, 1966 et Traduction de B. Vitrac, 1990), Descartes (1596-1650), Kant (1801)) et en histoire de mathématiques (Delboeuf (1860)).

7.1. L'Analyse et la Synthèse dans l'histoire des mathématiques

Le mathématicien M. Chasles (1852) dans son œuvre, *Discours d'inauguration au cours de Géométrie Supérieure*, fait remarquer que : « ces deux mots, l'Analyse et la Synthèse, avaient alors (dans l'Antiquité)³³, en mathématiques, un sens parfaitement défini » (Chasles, in Delboeuf, 1860, p.105). Ce sens est celui que décrit Euclide dans le treizième livre des *Éléments*, de la manière suivante :

« Par l'analyse, on regarde comme vraie la proposition que l'on veut démontrer, ou comme résolu le problème proposé, et l'on marche, de conséquence en conséquence, jusqu'à ce qu'on arrive à quelque vérité connue, qui autorise à conclure que la chose admise comme vraie l'est réellement, ou qui comporte la construction du problème ou son insolubilité » (In Delboeuf, 1860, p. 105).

Et : « dans la synthèse, on part des vérités connues pour arriver, de conséquence en conséquence, à la proposition que l'on veut démontrer ou à la solution du problème proposé » (In Delboeuf, 1860, p. 105). Ce qui veut dire que « l'Analyse et la Synthèse » désignaient à cette époque, deux manières anciennes et uniques d'alimenter les méthodes mathématiques : l'emploi du calcul algébrique et le raisonnement sur la figure. Car, Delboeuf souligne que : « l'analyse caractérise

³³ L'Antiquité est la période de l'histoire qui commence avec la naissance de l'écriture vers 3500 Av. J-C et se termine en 476 avec la chute de l'empire Romain.

l'emploi du calcul algébrique et la synthèse la considération seule des propriétés d'une figure, au moyen du raisonnement naturel » (Delboeuf, 1860, p. 105). Cependant, « *les deux méthodes anciennes ne différaient, au fond, que dans le point de départ, les diverses opérations du raisonnement étant les mêmes dans l'une et dans l'autre, mais dans un ordre inverse* » (Delboeuf, 1860, p. 106). Ainsi, l'analyse et la synthèse fonctionnaient dans un raisonnement mathématique, comme un connecteur qui traduit une équivalence en logique mathématique : l'Analyse le premier sens et la Synthèse le deuxième, et vice-versa. D'ailleurs, Kant (1801) précise, à cette époque, que : « *l'analyse est la méthode régressive et la synthèse est la méthode progressive* » (Kant in Delboeuf, 1860, p.106). Donc, pendant l'Antiquité, l'analyse est utilisée en mathématique comme une méthode expérimentale de vérification a posteriori et la synthèse comme une méthode d'invention a priori. Puisque, d'après les définitions précédentes, l'analyse supposait l'existence d'une proposition connue en amont dont on cherche la démonstration ou un problème proposé. La synthèse suppose que, l'on se propose de trouver les solutions ou de construire le problème ou de démontrer son impossibilité. Ceci met en jeu, dans la synthèse, la découverte d'une vérité mathématique au départ inconnue. Les deux méthodes mises ensemble vont constituer ce qu'on a appelé à cette époque « *la méthode de recherche ou d'invention* » (Delboeuf, 1860, p.108).

Les temps modernes (1492 – 1792) sont marqués, pour « l'Analyse et la Synthèse », par l'arrivée de l'algèbre, considéré comme un instrument universel des mathématiques, puisque Delboeuf (1860) souligne que : « *après quelque considération sur les ouvrages des anciens et leurs méthodes particulières, Charles arrive aux temps modernes et à la découverte de l'algèbre* » (Delboeuf, 1860, p.106). Pendant cette période, l'algèbre facilite, en mathématiques, la mise en pratique de la méthode analytique de Platon. L'algèbre désigne alors l'analyse, qui signifie, emploi du calcul algébrique. Et, la géométrie, quant à elle, désigne la synthèse, puisqu'avec la géométrie, le raisonnement se fait directement sur les propriétés des figures sans faire usage des notations et des transformations algébriques. Ainsi, l'analyse et la synthèse désignent deux domaines mathématiques (l'algèbre et la géométrie) comme le précise Delboeuf (1860) :

« *On appelle exclusivement Synthèse la géométrie cultivée à la manière des anciens. Cependant, le terme Analyse s'emploie encore en mathématiques, dans un autre sens, qui, tout en se rattachant, comme l'Analyse de Viète³⁴, à la signification primitive de ce mot* » (Delboeuf, 1860, p. 107).

L'analyse est présentée comme :

« *La résolution ou la décomposition d'une chose à ses parties élémentaires et constitutives ; opération qui implique un examen attentif de la chose considérée en elle-même et de toutes ses propriétés* » (Delboeuf, 1860, p.107).

Cette définition, unie à la synthèse met en place « l'analyse et la synthèse » qui va constituer la méthode analytique, considérée à cette époque comme : « *la méthode de recherche et d'invention dans toutes les branches des connaissances humaines, en mathématiques comme dans les sciences physiques et philosophiques* » (Delboeuf, 1860, p.108). Descartes la prescrit dans toutes ses

³⁴ Viète (1601) considère l'Algèbre (logistique précieuse ou calcul des symboles) comme l'art de résoudre les problèmes. Du fait qu'elle facilitait merveilleusement la mise en pratique de la méthode analytique, elle désignait l'Analyse (in Delboeuf, 1860).

œuvres de la manière suivante : « *il faut ramener graduellement les propositions embarrassées et obscures à de plus simples, et ensuite partir de l'intuition de ces dernières pour arriver, par les mêmes degrés, à la connaissance des autres* » (Descartes in Delboeuf, 1860, p. 110).

À partir de l'époque contemporaine (dès le XIX^e siècle), plusieurs théories mathématiques vont voir le jour visant à améliorer les théories anciennes. En géométrie, par exemple, nous assistons à la naissance des géométries dites non Euclidiennes, favorisant une explosion du sens, en mathématiques, du concept de « l'Analyse et la Synthèse ». Pour M. Poincaré (1898) et Delboeuf (1860) :

« *Il y a Synthèse chaque fois qu'on cherche une formule, une relation, une équation, chaque fois qu'on attribue une qualité à un sujet en qui on ne voyait pas d'abord cette qualité, chaque fois qu'on augmente la somme de ses connaissances* » (in Delboeuf, 1860, P.111).

Et,

« *Il y a Analyse, sitôt que, cette vérité trouvée, possédée, on la démontre, c'est-à-dire qu'on fait revoir ses rapports à d'autres vérités déjà connues, quand on augmente la certitude de ses connaissances* » (in Delboeuf, 1860, P.111).

Les deux mis ensemble vont constituer ce que Delboeuf va appeler « *raisonnement par l'Analyse et la Synthèse* », dont il va étudier le fonctionnement en mathématiques et présenter comme étant une méthode mathématique de démonstration et de résolution de problèmes. Kant (1801), quant à lui, va définir à partir des termes : Analyse et Synthèse, « *la méthode analytique* » et « *la méthode synthétique* » qu'il décrit de la manière suivante : « *la méthode est analytique, chaque fois qu'on opère comme pour la démonstration d'une vérité, c'est-à-dire expérimentalement, que ce soit une vérité connue ou inconnue* » (Kant in Delboeuf, 1860, p.110). « *Il y a méthode synthétique quand on opère comme si l'on cherchait une relation, que cette relation soit connue ou non* » (Kant in Delboeuf, 1860, p.110).

De nos jours, l'Analyse constitue un domaine des mathématiques (un autre sens du mot « Analyse »). Celui qui étudie les ensembles de réels et les fonctions de variables réelles. C'est un domaine qui inclut des concepts comme les suites et leurs limites, la continuité, la dérivation, l'intégration et les suites de fonctions. On parle de « l'Analyse-Synthèse » en lieu et place de « l'Analyse et la Synthèse » comme dans l'Antiquité et dans les temps modernes. « L'Analyse-Synthèse » prend plusieurs sens, différents du sens unique qui était utilisé pendant l'Antiquité et les temps modernes. Ce sens dépend de l'usage que l'on en fait et du domaine mathématique dans lequel le concept est utilisé. Ceci traduit notre conception de « l'Analyse-Synthèse », identifiée dans les manuels et dans les pratiques des enseignants, en classe de Première Scientifique, comme une forme d'organisation du travail mathématique, dans le domaine de la didactique de mathématiques. Nous la concevons en nous plaçant du côté de l'enseignant, porteur du projet de développement de la démarche de validation, comme une manière particulière d'agencer par étapes les sous-tâches liées, à la séquence de résolution, dans un espace de travail mathématique. La question de départ qui peut se poser, est celle de savoir : **comment fonctionne « l'Analyse-Synthèse », en géométrie, dans la résolution des problèmes de construction, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique ?**

7.2. L'Analyse-Synthèse comme méthode de résolution des problèmes mathématiques

Nous avons effectué une recherche dans *l'Encyclopédie Libre de Wikipédia* (2022), en saisissant les termes « Analyse » et « Synthèse » pour avoir les sens du concept de « l'Analyse-Synthèse », dans la résolution des problèmes mathématiques. Cette recherche établit que « l'Analyse-Synthèse » est considérée en mathématique comme une méthode de raisonnement. C'est une méthode de détermination de l'ensemble des solutions d'un problème et de rédaction d'une démonstration de la résolution de ce problème. Donc, au sens mathématique actuel, « l'Analyse-Synthèse » met en œuvre le maniement des conditions nécessaires, « l'Analyse », et des conditions suffisantes, « la Synthèse ». De manière générale, le raisonnement par « l'Analyse-Synthèse » est conduit en deux étapes :

- L'Analyse : elle consiste à raisonner sur une hypothétique solution au problème et à accumuler des déductions des propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution.
- La Synthèse : elle vise à examiner tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées et à déterminer, parmi eux, ceux qui sont réellement des solutions.

Nous allons à présent décrire le fonctionnement de l'Analyse-Synthèse comme méthode de raisonnement mathématique dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique, en nous appuyant sur le point « Méthode » que propose le manuel CIAM dans la partie consacrée à « *l'Utilisation des Isométries* » (p.76) et puis nous allons illustrer ce fonctionnement à travers un exemple tiré de ce manuel.

7.2.1. L'Analyse-Synthèse comme méthode de raisonnement mathématique, en classe Première Scientifique

En classe de Première Scientifique, l'*Analyse-Synthèse*, est la méthode mathématique que suggèrent les auteurs du manuel CIAM, pour résoudre les problèmes de construction. Comme on peut le lire dans l'extrait ci-dessous :

M

Pour résoudre un problème de construction, on procède généralement en deux étapes : analyse et synthèse.

- L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
- La synthèse consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et, éventuellement, à discuter le nombre de solutions au problème.

Source : Extrait du point méthode du manuel CIAM, 1992, Première Scientifique p.75

« L'Analyse-Synthèse » est un raisonnement mathématique qui peut être explicité de la manière suivante : on désigne par (T) un objet géométrique à construire ; la réalisation de la construction d'un tel objet place l'élève dans une posture difficile puisque la situation donne souvent peu

d'informations. Pour lever la difficulté, l'élève doit procéder à une analyse, c'est-à-dire chercher les conditions que nécessairement l'objet (T) doit vérifier : l'intérêt est de découvrir de nouvelles propriétés qui lui permettront dans certains cas, de réaliser la construction effective de l'objet (T), dans d'autres cas, d'affirmer que l'objet (T) n'est pas constructible ou encore de trouver l'ensemble des objets répondant aux hypothèses de construction de l'objet (T). C'est ce qui se fait en synthèse : des conditions nécessaires découvertes, l'élève doit s'assurer qu'elles sont bien suffisantes pour l'existence de l'objet (T) et de sa construction effective. À l'inverse, l'élève peut d'abord trouver des conditions suffisantes pour l'existence de l'objet (T) et permettant sa construction, et ensuite examiner si ces conditions sont nécessairement vérifiées, cela permet souvent de déterminer l'ensemble de tous les objets semblables à (T) (ou solutions possibles). Le plus difficile est souvent de découvrir des propriétés, qu'elles soient nécessaires ou suffisantes, qui vont s'avérer pertinentes pour la construction de l'objet (T). Pour trouver de telles conditions pertinentes, l'élève doit « *supposer le problème résolu* » (p.76 du manuel), se donner une construction d'étude³⁵ qu'on peut appeler « construction témoin », et puis rechercher de bonnes propriétés par examen de la construction de l'objet (T) supposée réalisée. Il s'agit d'un raisonnement « assisté » par une construction traduisant les données du problème. Le but est de caractériser l'objet (T) à partir des propriétés d'un concept mathématique en lien avec cet objet. La construction de l'objet (T) est réalisée en tenant compte des règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction. Cependant, la réalisation de cette construction pose souvent la question d'unicité ou non de cette construction. Sur la base des choix qui se sont présentés au cours de la construction de l'objet (T), observés généralement dans la phase d'analyse, une discussion sur le nombre de solutions éventuelles du problème est souvent ouverte, permettant de déterminer l'ensemble de tous les objets (T) vérifiant les contraintes du problème. Nous illustrons à travers un exemple, le fonctionnement de l'Analyse-Synthèse comme méthode mathématique dans la résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique.

7.2.2. Un exemple de résolution d'un problème de construction par l'Analyse-Synthèse, en classe de Première Scientifique

Enoncé du problème : (extrait du manuel CIAM, 1992, Première SM, p.93)

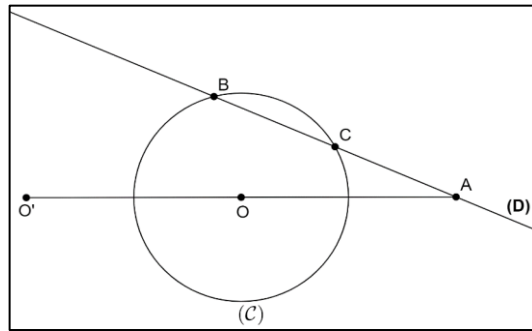
On donne (C) un cercle de centre O.
 Soit A un point extérieur au cercle (C).
 Construire une droite (D) passant par A et coupant (C) en deux points B et C tels que C soit le milieu du segment [AB].

Solution :

- **Analyse d'une construction répondant à la question :**

Donnons-nous la construction d'étude ci-dessous :

³⁵ Nous désignons par cette expression, la construction à partir de laquelle l'élève va s'appuyer pour bâtir son raisonnement, c'est un support à l'intuition et au raisonnement.

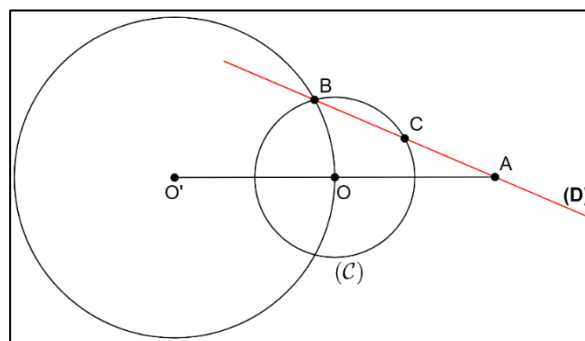


Supposons que la droite (D) est celle qui est construite sur la construction « témoin » ci-dessus, où (C) est le cercle de centre O et de rayon r. Le fait que C soit milieu du segment [AB] signifie que $\overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AC}$. Ce qui veut dire qu'il existe une homothétie h de centre A et de rapport 2 qui transforme C en B. Prenons donc h l'homothétie de centre A de rapport 2. On aura, $B = h(C)$ et donc, si C appartient au cercle (C), B va appartenir à l'image (C') du cercle (C) par l'homothétie h . Signalons que (C') est le cercle de centre $O' = h(O)$ et de rayon $2r$. Ainsi, B sera également sur le cercle (C) et donc B va appartenir à l'intersection de (C) et (C'). Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que la droite (D) passe par A et coupe le cercle (C) en deux points B et C tels que C soit milieu de [AB] est que : $B = h(C)$; c'est-à-dire que B soit l'image de C par h .

- **Synthèse : Construction de la droite (D)**

D'après ce qui précède, pour construire la droite (D) répondant à la question, il suffit de suivre les étapes suivantes :

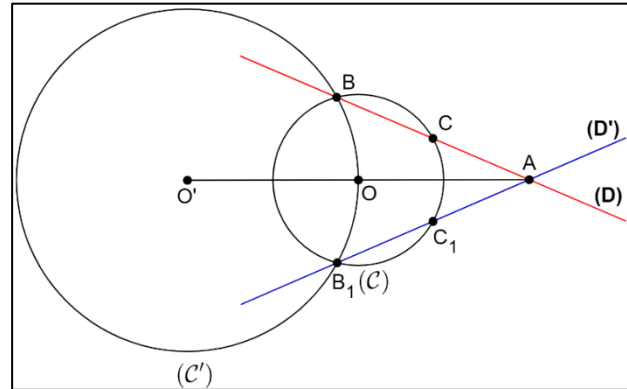
- Construire le cercle (C'), image de (C) par l'homothétie h .
- Prendre B, point d'intersection de (C') et (C), C' est le deuxième point d'intersection de la droite (AB) avec (C). On a : $\overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AC}$; donc C est le milieu de [AB].
- Tracer la droite (D) qui passe par les points B et C.



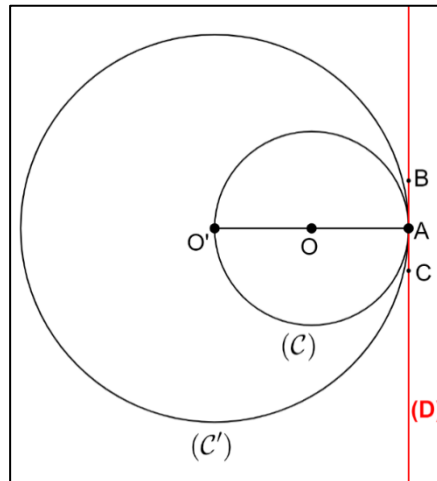
Discussion : le problème a-t-il plusieurs solutions ?

Cinq choix dépendant du nombre de points communs aux cercles (C) et (C'), se sont présentés au cours de la réalisation de la construction de la droite (D). Ce qui veut dire qu'il y a autant de droites que de points communs à ces deux cercles. Ainsi, posons : $d = AO = OO'$ et r le rayon du cercle (C). On aura : $d = r$, $d = 3r$, $d < r$, $d > 3r$ et $r < d < 3r$.

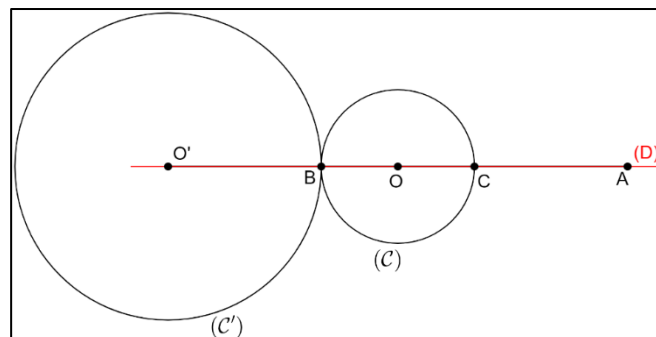
- Si $d < r$ ou $d > 3r$, les cercles (C) et (C') n'ont pas de points communs et donc il n'y a aucune droite solution.
- Si $r < d < 3r$, les cercles (C) et (C') sont sécants et il y a deux droites solutions : (D) et (D') .



- Si $d = r$, les cercles (C) et (C') sont tangents et il n'y a qu'une seule droite solution : (D) .



- Si $d = 3r$, les cercles (C) et (C') sont tangents et il n'y a qu'une seule droite solution : (D) .



De cette description du fonctionnement de « l'Analyse-Synthèse » comme méthode de raisonnement mathématique, telle que présentée par le manuel de la classe de Première Scientifique et appliquée dans l'exemple ci-dessus, on peut constater que l'intérêt de réalisation

d'une construction porte beaucoup plus sur la procédure utilisée que sur le résultat obtenu. En d'autres termes, l'Analyse-Synthèse vise à faire développer certains savoirs (ou savoir-faire) laissés à la charge de l'enseignant. Puisque la procédure développée produit des justifications, des contrôles, des explications, des calculs, la manipulation des instruments, la réalisation des constructions...etc., qui donnent l'occasion à l'enseignant, par exemple, d'apprendre aux élèves à raisonner, pour établir la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées (de démontrer). Cette étude descriptive de « l'Analyse-Synthèse » comme méthode de résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique, nous donne des pistes qui peuvent nous permettre de caractériser ce concept, lorsqu'il est mis en œuvre par un enseignant en salle, comme une forme d'organisation du travail mathématique dont le but est de structurer et d'agencer les sous-tâches liées à la séquence de résolution, au cours de la résolution d'un problème de construction, en deux étapes. La question consiste à savoir : **quelles sont les caractéristiques de « l'Analyse-Synthèse » comme forme d'organisation du travail mathématique, mise en place au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique ?**

7.3. L'Analyse-Synthèse comme forme d'organisation du travail mathématique élaborée, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction

La question de la forme d'organisation du travail mathématique est étudiée sous l'angle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) articulés avec les Paradigmes Géométriques (Hudement et Kuzniak, 2006) et les Procédés de Construction (Chevallard et Julien, 1991). Nous avons choisi d'interroger l'organisation (de la séquence de résolution ou du problème mathématique) et les caractéristiques du discours permettant d'aboutir à la réalisation et à la validation de la construction d'un objet géométrique décrit à l'aide d'un problème de construction, ainsi qu'à leurs mises en forme, pour observer leur impact sur l'apprentissage de validation. Ce qui signifie que nous étudions, dans le cadre théorique (EPP), le travail mathématique d'organisation qui permet de développer la démarche de validation, chez les élèves. Ce travail, qui est mis en œuvre au cours d'une activité de construction, se caractérise par le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet que décrivent le problème de construction, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de cet objet. Il est effectué à l'intérieur d'une structure de développement de la démarche de validation qui donne les éléments qu'on peut développer, chez les élèves, afin qu'ils puissent valider une construction qu'ils réalisent. Cette structure est adossée à une forme d'organisation du travail mathématique qui peut être analysé, à partir des modalités d'entrée dans la description du processus de construction de l'objet que décrit le problème de construction et l'organisation du travail qui permettent de réaliser cette construction dans sa globalité. Ceci permet de voir, à travers ces processus, comment on peut amener les élèves à distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent prendre appui pour valider une construction qu'ils réalisent. Cependant, l'étude de l'évolution du sens, en mathématiques, du concept de « l'Analyse-Synthèse » (Cf. Section 7.1), de l'Antiquité à nos jours, a établi que, de nos jours, plusieurs sens différents peuvent être donnés à ce concept, en fonction du domaine mathématique et de l'usage qu'on en fait. C'est ainsi que nous avons constaté que, du point de vue des mathématiciens, « l'Analyse-Synthèse » est une

méthode de raisonnement mathématique. Nous l'avons définie en didactique de mathématique comme une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à une séquence de résolution en deux phases : *l'analyse*, pour la recherche des conditions nécessaires pour la réalisation de la construction de l'objet géométrique, à partir de l'étude d'une configuration supposée constituer la solution du problème ; et *la synthèse*, pour s'assurer que ces conditions trouvées, sont bien suffisantes pour l'existence et la réalisation effective de cette construction. Elle permet, dans ce sens, de développer le savoir-faire, démarche de validation, chez les élèves. Puisque « l'Analyse-Synthèse », conçue dans le sens que nous avons décrit et pris dans un contexte de résolution de problèmes en salle, en se plaçant du côté de l'enseignant, se soumet aux règles du contrat didactique, pour développer la démarche de validation des constructions réalisées. Les trois tableaux ci-dessous résument les caractéristiques de cette forme d'organisation qui se sont dégagées tout au long des analyses menées (Cf. les chapitres 5 et 6).

Eléments d'analyse	Procédés de construction de l'objet
Preuve d'existence de l'objet	Relier à un objectif du programme
Preuve de constructibilité de l'objet	Relier à un objectif du programme
Construction de l'objet	Algorithme (ou programme) de construction + Construction Instrumentée + Discussion du nombre de solution

Tableau 12: Caractérisation des procédés de construction d'un objet dans l'Analyse-Synthèse (A-S)

Eléments D'analyse	Travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet
Méthode mathématique mobilisée	Maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes.
Paradigme privilégié	$G1 \leftrightarrow G2$ au départ. $G2$ articulé avec l'approche affine ou les expressions analytiques (géométrie métrique)
Dimension de l'ETM privilégiée	Discursive
Circulation du travail	[Ins-Sem] → Sem ou (Dis), [Sem-Dis] → Dis [Sem-Ins] → Ins

Tableau 13: Caractérisation du travail mathématique permettant la réalisation de la construction d'un objet dans l'Analyse-Synthèse (A-S)

Éléments d'Analyse	Discours de validation qui accompagne le travail mathématique
Raisonnement mobilisé	<ul style="list-style-type: none"> - Analogique pour rechercher les arguments - Inductif pour formuler des conjectures - Déductif pour contrôler, justifier, communiquer et établir la vérité de la conclusion.
Arguments employés dans l'argumentaire de validation	Formels (ou théoriques) Formels à l'intérieur de l'approche affine ou de l'approche par les expressions analytiques. Issus de propriétés mathématiques et des substitutions d'une caractérisation de l'objet à construire par les propriétés d'un concept mathématique.
Mise en forme de l'argumentaire	Organiser sous la forme d'une démonstration (ou preuve).
Démarche de validation	Justification pas à pas des constructions + Preuve pour valider la construction réalisée

Tableau 14 : Caractérisation du discours de validation qui accompagne le travail mathématique dans l'Analyse-Synthèse (A-S)

Cette caractérisation du travail mathématique d'organisation produit à l'intérieur du modèle (A-S) met en évidence l'activité de construction comme l'élément moteur dans l'apprentissage de la validation, où la procédure mise en œuvre et la justification des constructions réalisées, constituent des leviers dans le développement des capacités des élèves à résoudre un problème de construction. Le travail d'organisation donne une manière de décrire le processus de construction et de validation d'un objet défini à l'aide d'un problème de construction. À ce titre, il permet, sur le plan didactique, à un enseignant, porteur du projet d'enseignement de la validation, de faire développer une démarche de validation des constructions chez les élèves, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction. La question est de savoir :

Comment « l'Analyse-Synthèse » comme forme d'organisation du travail mathématique contribue-t-elle au développement de la démarche de validation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique ?

Nous analysons, dans le paragraphe qui suit, le processus de développement de la démarche de validation des constructions, chez les élèves, à l'aide de la forme d'organisation du travail mathématique Analyse-Synthèse (A-S).

7.4. L'Analyse-Synthèse (A-S) comme forme d'organisation du travail mathématique pour développer la démarche de validation, chez les élèves

7.4.1. La structure de développement de la démarche de validation

Conformément à notre cadre d'analyse (**EPP**), la structure de développement de la démarche de validation des constructions, adossé à une forme d'organisation du travail mathématique

décrit une démarche qui permet de mettre en évidence les éléments sur lesquels les élèves peuvent se référer pour valider une construction (ou résultat) qu'ils réalisent (ou obtiennent). C'est sur la distinction de ces éléments que se réfère l'enseignant pour développer la validation, chez les élèves. Décrire le processus de développement de la démarche de validation, à l'aide de la forme d'organisation du travail mathématique (A-S), revient à mettre en évidence la structure de développement de la démarche de validation qu'offre ce modèle. Or, dans notre recherche, cette structure est déterminée en se plaçant du côté de l'enseignant, porteur du projet d'enseignement de la validation. Les expériences réalisées dans les chapitres précédents (Cf. les chapitres 5 et 6), et l'étude descriptive des caractéristiques et du fonctionnement de l'Analyse-Synthèse comme modèle de forme d'organisation du travail mathématique, assignent au travail mathématique d'organisation produit à l'intérieur de ce modèle, une nature, une circulation, un (des) paradigme(s) géométrique (s) privilégié(s), ainsi que des procédés de construction permettant de réaliser la construction de l'objet. Le discours de validation qui accompagne ce travail, décrit un argumentaire qui consiste à justifier pas à pas les différentes constructions élémentaires réalisées et puis à valider la vérité de la conclusion sur toutes les constructions élémentaires. Ainsi, les deux phases que définit la forme d'organisation (A-S) permettent à l'enseignant d'amener les élèves à exécuter par étapes, l'une après l'autre, les sous-tâches liées à la séquence de résolution. Ce qui signifie que l'intérêt de la résolution à l'aide de ce modèle, pour un enseignant, porte plus sur la procédure de construction de l'objet que sur le résultat final. Ceci pour permettre un développement total de la démarche de validation, chez les élèves. Donc, la mise en œuvre du modèle (A-S) par un enseignant, déclenche l'apprentissage de la validation, par le biais du principe de résolution par étapes successives du problème. Ainsi, au cours de chaque étape, l'enseignant va développer, chez les élèves, une suite d'actes élémentaires à poser, des opérations à effectuer et des décisions à prendre afin d'aboutir à la construction de l'objet que décrit le problème de construction. La suite d'actes, les opérations et les décisions mises en exergue, sont validées et prouvées telles que prévus par l'ETM de référence, attendus et conçus par l'enseignant. Il s'agit d'établir, à la fin du processus, à travers une organisation du travail mathématique, que l'ensemble obtenu remplit les contraintes que fixe l'énoncé du problème. Ce processus étant conduit par l'enseignant, il va nourrir la validation, chez les élèves, participant à la séquence de résolution qu'il conduit. Puisque :

- Dans **la phase d'Analyse (A)**, l'enseignant suppose le problème résolu pour développer, au niveau des élèves, une manière d'étudier une configuration supposée être solution du problème. Pour cela, il réalise une construction « témoin », nourrit l'étude de cette construction, chez les élèves, de manière à les amener à dégager une définition opérationnelle de l'objet à construire. Cette définition, qui mettra en évidence une condition nécessaire et suffisante pour l'existence, et la réalisation effective de la construction demandée, sera traduite à l'aide des propriétés issues d'une transformation du plan. C'est à partir de ces propriétés que les élèves activeront le contrat didactique qui leur apportera des précisions et des éléments d'appui pour réaliser et valider la construction demandée.
- Dans **la phase de synthèse (S)**, l'enseignant s'assure que les conditions trouvées à la phase d'analyse, sont bien suffisantes pour l'existence et la réalisation effective de la

construction, pour développer, au niveau des élèves, une manière de mettre au point une procédure de réalisation de la construction de l'objet. Pour cela, il résume les éléments pertinents apparus à la phase d'analyse, ayant permis de décrire, justifier et valider le processus de construction de l'objet. Ce résumé prenant la forme d'un argumentaire de type démonstratif, contenant des arguments formels, l'enseignant développe, chez les élèves, non seulement la manière d'établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions réalisées, mais aussi, celle de bâtir le discours de validation de cette construction. Le problème pouvant avoir plusieurs solutions, l'enseignant va nourrir, chez les élèves, une manière de discuter sur le nombre de solutions du problème en cours de résolution.

Ces deux étapes du modèle développent un travail mathématique d'organisation alimenté par des éléments insérés dans une structure qui favorise le développement de la validation, chez les élèves. Nous synthétisons dans le schéma ci-dessous, la structure de développement de la démarche de validation adossée à la forme d'organisation du travail mathématique *Analyse-Synthèse* (A-S) telle qu'elle a été élaborée tout au long de nos différentes analyses :

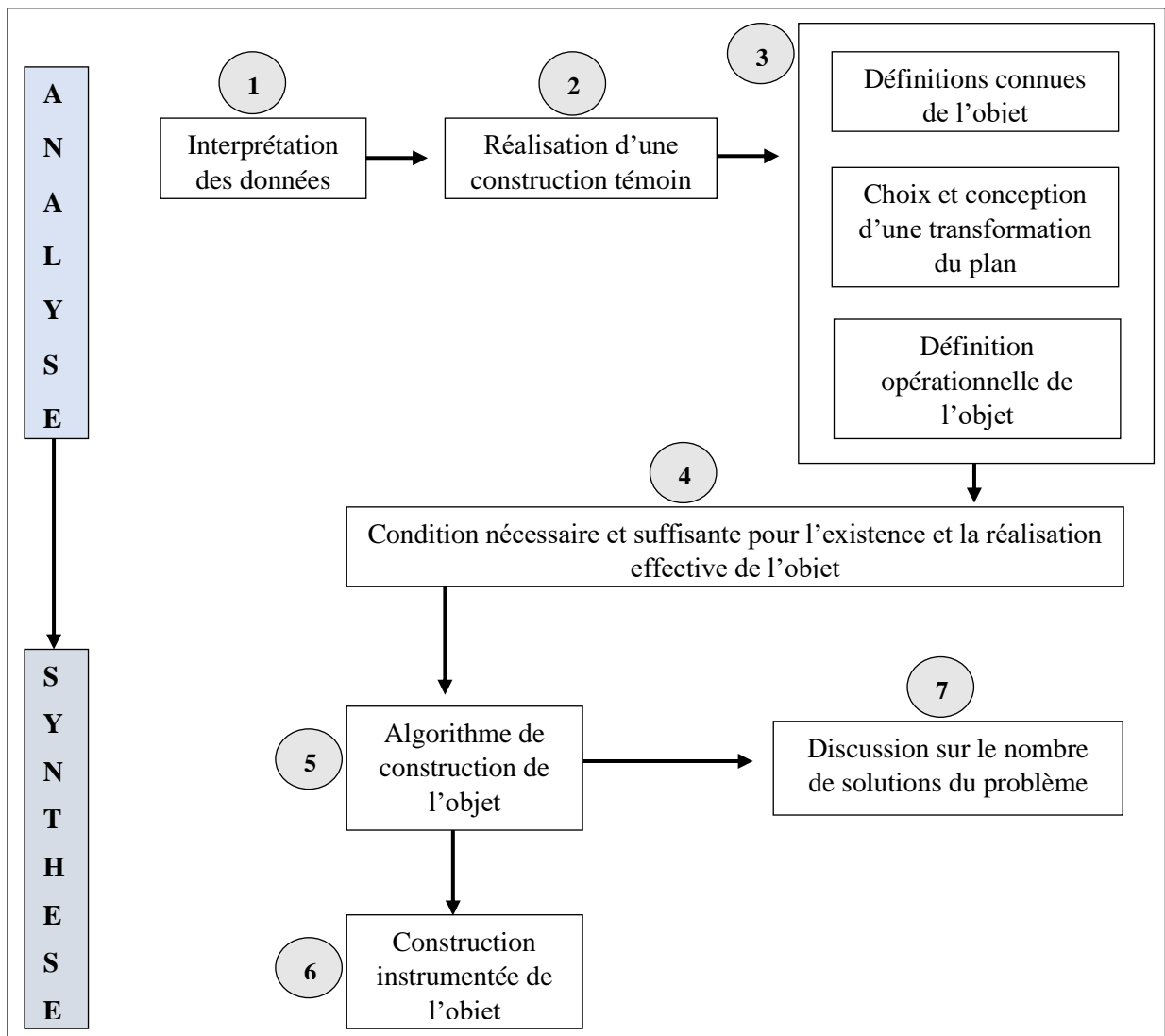


Figure 5: Structure de développement de la démarche de validation, adossée à la forme d'organisation du travail mathématique (A-S)

Dans cette structure, le bloc « *Analyse* » qui représente la première étape du modèle (A-S), est constitué des carrés (1), (2), (3) et (4) qui sont des éléments sur lesquels s'appuie l'enseignant pour développer l'étude d'une configuration susceptible d'être la solution du problème. Issu de la conversion des données du problème, l'élément (2) met en évidence un ensemble de propriétés considérées comme des moyens (raisons) qui vont permettre d'anticiper sur la validation de l'objet en construction. Cet élément, à travers le jeu G1-G2, nourri par les va-et-vient entre lui et le référentiel théorique, va activer le processus de construction, contrôler le raisonnement qui accompagne ce processus et favoriser l'élaboration du discours de validation de la construction, tout au long de la résolution. L'élément (3) favorise le développement, au niveau des élèves, d'une caractérisation de l'objet à construire, pour mettre en évidence une définition opérationnelle de cet objet. Cette caractérisation, qui va contrôler pas à pas la construction de l'objet, permet la validation de chaque construction élémentaire réalisée, puisque c'est à partir de cet élément qu'une propriété mathématique permettant la construction effective de l'objet va émerger. L'élément (4) permet de dégager une condition nécessaire et suffisante (une propriété pertinente) pour l'existence et la réalisation effective de la construction de l'objet. C'est elle qui valide la vérité de la conclusion sur toutes les constructions réalisées, pour établir l'exactitude et la validité de la construction. Le bloc « *Synthèse* » qui est la deuxième étape du modèle, est constitué des carrés (5), (6) et (7) qui sont des éléments que développe l'enseignant, au niveau des élèves, pour les amener à mettre au point une procédure de réalisation de la construction demandée. Il vise l'application des règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction, pour établir la différence entre cette solution et la construction, solution du problème. L'élément (5) est nourri chez les élèves par l'enseignant, à travers l'élément (4). Il décrit le processus de construction de l'objet tel qu'il a été mis en exergue dans la phase d'analyse. L'élément (6) vient de l'élément (5) articulé avec la précision apportée par les instruments. Il est une illustration de l'élément (5), c'est une annexe. L'élément (7) est développé à partir des choix qui se sont présentés lors de l'analyse du processus de construction de l'objet.

De cette description, on peut constater que dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, « l'Analyse-Synthèse » fonctionne à la fois comme une méthode de raisonnement mathématique permettant de résoudre les problèmes de construction, et comme une forme d'organisation du travail mathématique permettant de développer la validation, chez les élèves. Lorsqu'elle est employée comme une forme d'organisation du travail mathématique, mise en œuvre par un enseignant, elle favorise l'enseignement et l'apprentissage de la validation. C'est donc un outil qu'utilisent les enseignants pour développer la démarche de validation, au niveau des élèves. Cependant, malgré le fait qu'elle permette de développer la validation, chez les élèves, les enseignants de mathématiques continuent de relever une incapacité de la majeure partie de leurs élèves à valider les résultats qu'ils obtiennent. Ce qui signifie que cette forme d'organisation présente des limites dans le fonctionnement de sa structure de développement de la démarche de validation. Nous essayons d'identifier ces limites qui sont susceptibles de constituer une faiblesse de ce modèle dans sa capacité à développer pleinement la validation, chez les élèves.

7.4.2. Les limites de « l'Analyse-Synthèse » dans le développement de la démarche de validation

Le modèle de forme d'organisation du travail mathématique « Analyse-Synthèse » que proposent les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves, agence, dans le maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, les sous-tâches liées à une séquence de résolution d'un problème de construction en deux phases : l'une permettant l'étude d'une configuration considérée comme solution du problème, et l'autre conduisant à la mise au point d'une procédure de construction de l'objet géométrique que décrit le problème de construction. Comme méthode de raisonnement mathématique, « l'Analyse-Synthèse » consiste en la détermination de l'ensemble des solutions d'un problème et de rédaction d'une démonstration de la résolution de ce problème. Vue sous cet angle, elle ne s'applique pas qu'à une séquence de résolution des problèmes de construction, mais à toute séquence de résolution de n'importe quelle catégorie de problèmes en mathématiques. Ce qui signifie que « l'Analyse-Synthèse » est une forme d'organisation du travail mathématique qui peut être considérée comme externe au problème de construction, dans laquelle l'idée d'agencement des sous-tâches influant sur l'apprentissage des élèves, est étendue à l'enseignant. Elle soumet la séquence de résolution à une méthode pour la rendre fonctionnelle. Ainsi, une séquence de résolution devient une fonction de l'Analyse et de la Synthèse. Or, l'entrée dans la résolution de tout problème mathématique passe par une bonne appréhension du texte qui décrit ce problème. L'appréhension de la situation permet, entre autres, aux élèves d'extraire de l'énoncé du problème (le texte), qui est l'habillage, le problème, qui est la question mathématique à traiter ; ce qui leur permet de mieux comprendre et de cerner le problème à résoudre. Nos expérimentations nous ont permis de constater que dans le modèle (A-S), le développement de cette phase, au niveau des élèves, n'est pas pris en charge par l'enseignant, il est laissé à la charge des élèves. Cela constitue, de notre point de vue une limite (ou faiblesse) de la structure de développement de la démarche de validation adossée à la forme d'organisation du travail mathématique « Analyse-Synthèse » (A-S). Les enseignants ont tendance à engager les élèves dans la résolution d'un problème de construction en salle, sans au préalable les amener à identifier clairement le problème mathématique à résoudre et si possible à le reformuler. Par ailleurs, « l'analyse-Synthèse » étant une organisation externe au problème de construction, elle établit une différence entre la séquence de résolution et le problème de construction. Donc, une deuxième forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées au problème de construction qui décrit l'objet géométrique à construire pourra être associée à la forme d'organisation (A-S). Cette deuxième forme d'organisation pourra décrire une démarche de validation sous-jacente, liée directement à cette catégorie de problèmes mathématiques. L'absence d'une deuxième forme d'organisation liée au problème de construction et associée à la forme d'organisation (A-S) constitue une autre limite du modèle (A-S).

Nous relevons ainsi, deux limites dans la structure de développement de la démarche de validation adossée à la forme d'organisation du travail mathématique (A-S). La première viendrait du fait qu'elle ne développe pas assez l'appréhension de la situation ; et la deuxième, du fait qu'elle se limite à travailler sur la séquence de résolution sans prendre en compte le problème de construction qui constitue un élément sur lequel une organisation peut également

être effectuée pour définir une démarche de validation sous-jacente et propre à cette catégorie de problèmes mathématiques. Ces limites constituent, pour nous, une faiblesse de ce modèle dans le développement de la démarche de validation, chez les élèves.

Conclusion générale de la deuxième partie

Nous avons ramené l'incapacité des élèves à valider les résultats qu'ils obtiennent à une étude de la manière dont on peut organiser un problème de construction, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez les élèves. D'un point de vue institutionnel, nous avons considéré que les ressources disponibles (les manuels et leurs corrigés) dans l'enseignement des transformations du plan, peuvent proposer une forme d'organisation du travail mathématique permettant de développer la démarche de validation, chez les élèves. Cette considération nous a permis d'analyser les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique, à travers une étude qualitative des solutions de deux problèmes de construction tirés du manuel CIAM (Première SM, 1992). Cette analyse a établi que les ETM idoines potentiels proposent une forme d'organisation qui agence les sous-tâches d'une séquence de résolution en deux phases : *l'Analyse et la Synthèse (A-S)*. *L'Analyse*, pour étudier une configuration considérée comme solution du problème et *la Synthèse*, permettant la mise au point d'une procédure de réalisation de la construction de l'objet géométrique que décrit le problème de construction. La forme d'organisation du travail mathématique ne constituant pas un objet d'enseignement, nous avons estimé que les ETM idoines effectifs, pouvaient décrire des formes d'organisation, différentes entre elles, et de celles que proposent les ETM idoines potentiels. Ainsi, nous avons observé deux enseignants en situation de résolution d'un même problème de construction avec leurs élèves. Les analyses des transcriptions de ces observations ont établi que : la forme d'organisation développée par des ETM idoines effectifs différents est celle que proposent les ETM idoines potentiels. En effet, cette forme est restée stable au niveau de tous les enseignants que nous avons observés. Nous avons voulu par la suite, conformément à notre cadre d'analyse (**EPP**), mettre en évidence la structure de développement de la démarche de validation adossée à cette forme d'organisation, dégager ses caractéristiques, comprendre son fonctionnement et identifier les limites, à l'origine de l'incapacité des élèves à valider un résultat que constatent les enseignants et qui nous a conduit à mener cette recherche. Ainsi, l'étude de l'évolution du sens du concept de « l'Analyse et la Synthèse » dans l'histoire des mathématiques à travers les travaux de Delboeuf (1860), a établi que ce concept avait un sens unique bien défini dans l'Antiquité. Il désignait *la méthode de recherche ou d'invention*, la seule qui permettait de valider les résultats obtenus dans le domaine des mathématiques. Avec l'arrivée de l'Algèbre pendant les temps modernes (1492 – 1792), « l'Analyse et la synthèse » deviennent *la méthode de recherche et d'invention dans toutes les branches des connaissances humaines, en mathématiques comme dans les sciences physiques et philosophiques*. À partir de l'époque contemporaine (dès le XIX^e siècle), le concept de « l'analyse et la synthèse » va prendre plusieurs sens. Avec Delboeuf (1860) et Poincaré (1894), il devient un raisonnement en mathématiques qu'ils vont appeler « raisonnement par l'Analyse et la Synthèse ». Delboeuf (1860) va l'étudier et le décrire comme une méthode mathématique de démonstration et de résolution de problèmes. Avec Kant (1781), ces deux termes (l'analyse et la synthèse) vont être chacun à l'origine du fonctionnement d'une méthode de raisonnement en mathématiques : *l'Analyse* pour « la méthode analytique », et la *Synthèse* pour « la méthode synthétique ». De nos jours le concept de « l'Analyse et la

synthèse » devient « l'Analyse-Synthèse ». Il peut prendre plusieurs sens différents, qui dépendent de l'usage que l'on en fait et du domaine mathématique dans lequel, le concept est utilisé. Ainsi, dans le cadre de notre recherche : « l'Analyse-Synthèse » est une méthode de raisonnement mathématique, pour résoudre les problèmes de construction géométrique et une forme d'organisation du travail mathématique pour développer la validation, chez les élèves.

Comme raisonnement mathématique, « l'Analyse-Synthèse » est la méthode de résolution des problèmes de construction, en classe de Première Scientifique. Elle vise la détermination de l'ensemble des solutions d'un problème de construction et de rédaction d'une démonstration de la résolution de ce problème. Elle met en jeu le maniement des conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour dégager une condition nécessaire et suffisante permettant de décrire le processus de construction et de validation d'un objet géométrique défini à l'aide d'un problème de construction.

Comme forme d'organisation du travail mathématique, « l'Analyse-Synthèse » s'articule avec le contrat didactique relatif à la réalisation de la solution d'un problème de construction pour agencer les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux phases : *l'analyse*, pour la recherche des conditions nécessaires pour la réalisation de la construction de l'objet géométrique à travers l'étude d'une configuration considérée comme solution du problème ; et *la synthèse*, pour s'assurer que ces conditions trouvées, sont bien suffisantes pour l'existence et la construction effective de cet objet, afin de mettre au point une procédure de réalisation de la construction. Elle met en évidence un travail mathématique, un discours de validation qui accompagne ce travail, et des procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de l'objet. Ce travail est prioritairement de nature discursive et circule suivant les plans : [Ins-Sem] → Sem ou (Dis), [Sem-Dis] → Dis et [Sem-Ins] → Ins. Il est, au départ, dispersé et émietté dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, et se stabilise dans G2. Le discours de validation qui l'accompagne, mobilise simultanément un raisonnement analogique pour rechercher les arguments, inductif pour formuler des conjectures, et déductif pour contrôler, justifier, communiquer et établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions réalisées. Ce discours prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif, qui utilise des arguments formels (ou théoriques), issus des propriétés mathématiques, des interprétations et des substitutions de la caractérisation de l'objet à construire par les propriétés sur les transformations du plan en lien avec l'objet géométrique à construire. Ceci fait que la validation se développe en contexte de justification, pour prendre la forme d'une démonstration. Ainsi, la démarche de validation des constructions réalisées consiste donc à l'utilisation des justifications pour valider pas à pas les constructions élémentaires et la démonstration (ou preuve) pour établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions réalisées.

Comme forme d'organisation du travail mathématique pour développer la démarche de validation, chez les élèves, « l'Analyse-Synthèse » permet à l'enseignant de développer au niveau des élèves, une manière de gérer la séquence de résolution d'un problème mathématique. Elle structure la séquence de résolution en deux étapes (analyse et synthèse) permettant d'agencer les sous-tâches liées à cette séquence. Ceci dans le but d'amener les élèves à distinguer plus rapidement une caractérisation de l'objet à construire, le choix et une conception d'une transformation du plan en lien avec l'objet à construire, et une définition opérationnelle

de l'objet à construire, qui sont des éléments sur lesquels ces derniers peuvent prendre appui pour, justifier pas à pas le processus de réalisation de la construction et de valider toutes les constructions élémentaires réalisées. Cette forme d'organisation, lorsqu'elle est mise en œuvre en salle, ne contraint pas l'enseignant à nourrir l'appréhension de la situation, au niveau des élèves, elle ne propose pas non plus une organisation liée au problème de construction puisqu'elle distingue (implicitement) le problème de construction de la séquence de résolution. Ces deux limites relevées dans sa structure de développement de la démarche de validation constituent une faiblesse de ce modèle dans le développement de la démarche de validation, chez les élèves. La question est de savoir : **quelle forme d'organisation du travail mathématique, peut mieux développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique ?**

PARTIE 3

PROPOSITION D'UN MODÈLE DE FORME D'ORGANISATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE POUR DÉVELOPPER LA DÉMARCHE DE VALIDATION, CHEZ LES ÉLÈVES, DANS LES ETM IDOINES, EN CLASSE DE PREMIERE SCIENTIFIQUE

Introduction de la troisième partie

Dans cette partie, nous voulons répondre aux sous-questions qui consistent à savoir : d'une part, aux vues des limites de la forme d'organisation du travail mathématique (A-S), actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique :

Q_{3.1} : Quelle forme d'organisation du travail mathématique proposer, dans l'ETM idoine pour développer la démarche de validation, chez des élèves, en classe de Première Scientifique ?

Q_{3.2} : Avec le modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré, quels éléments doit raffiner un ETM idoine, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation, chez des élèves ?

D'autre part, étant donné que nous proposons un modèle de forme d'organisation du travail mathématique, susceptible de mieux développer la démarche de validation, chez les élèves :

Q_{4.1} : Quel rôle peut jouer la forme d'organisation du travail mathématique élaborée, au cours de la réalisation d'un projet de développement de la démarche de validation, chez des élèves, dans un ETM idoine effectif, en classe de Première Scientifique ?

Et aussi :

Q_{4.2} : Peut-il exister une corrélation entre l'utilisation de la forme d'organisation du travail mathématique élaborée et la réussite dans la résolution d'un problème mathématique, dans un ETM idoine effectif, en classe de Première Scientifique ?

Répondre à ces questions revient à élaborer un modèle de forme d'organisation du travail mathématique. Le tester au niveau des enseignants, pour illustrer le rôle qu'il peut jouer dans l'enseignement de la validation, puis mesurer les effets d'apprentissage de la validation à l'aide de ce modèle, au niveau des élèves. Ainsi, l'objectif de cette partie est de construire une forme de travail d'organisation de travail mathématique qui décrirait une structure de développement de la démarche de validation capable de mieux développer la validation, chez les élèves, dans les ETM idoines. L'hypothèse fondamentale qui sous-tend tout le travail que nous faisons dans cette partie est que :

Un modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré sur la base des limites de la forme d'organisation « Analyse-Synthèse » (A-S), actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, développerait mieux la démarche de validation, chez les élèves, dans ces ETM.

Ainsi cette partie comporte quatre chapitres :

- Dans **le chapitre 8**, nous construisons un cadre de référence nous permettant d'élaborer notre modèle de forme d'organisation du travail mathématique. En se plaçant dans ce cadre, nous élaborons un modèle à deux articulations, constituées chacune de trois

étapes. Nous l'adossons sur « le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) » mathématique, que nous explicitons.

- Dans **le chapitre 9**, nous décrivons le fonctionnement du modèle élaboré, nous le caractérisons, et puis nous dégageons la structure de développement qu'il offre dans l'enseignement et l'apprentissage de la validation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Puis, nous l'élargissons à la résolution de tout problème relevant de n'importe quel domaine des mathématiques.
- Dans **le chapitre 10**, nous illustrons à travers une expérimentation que nous réalisons avec un enseignant débutant (Robert, 1992) d'une classe de Première Scientifique, le rôle que peut jouer le modèle élaboré, dans l'enseignement de la validation à l'aide d'un problème de construction géométrique.
- Dans **le chapitre 11**, nous mesurons les effets du modèle sur l'apprentissage de la validation par les élèves à l'aide de ce nouveau modèle élaboré. Ceci, à travers une expérimentation que nous réalisons avec les élèves des classes de Première Scientifique A, B et C. Ici, nous faisons travailler douze binômes d'élèves sur une situation que nous avons construite. L'analyse des productions de ces binômes nous permet d'étudier la corrélation entre l'utilisation du modèle élaboré et la réussite des élèves dans la résolution d'un problème de construction, dans les ETM idoines effectifs.

Chapitre 8

Élaboration d'un modèle de forme d'organisation du travail mathématique pour mieux développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines

Nous avons ramené les limites (faiblesses) du modèle (A-S) actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, à l'élaboration d'une forme d'organisation du travail mathématique capable de mieux développer la démarche de validation, chez les élèves. Pour notre recherche, nous avons pris la définition suivante : *pratiquer « la démarche de validation », consiste à essayer de valider un résultat obtenu au cours d'une séquence de résolution d'un problème mathématique.* Cependant, l'étude du sens que prend la validation (Cf. Partie 1) dans la résolution des problèmes mathématiques, a mis en évidence le fait que la validation ne constitue pas un objet d'enseignement dans les ETM de référence, mais un savoir-faire que les enseignants doivent développer, chez les élèves. Ce qui nous a permis de prendre comme hypothèse fondamentale de recherche que : la « démarche de validation » est un savoir-faire qui ne peut s'apprendre qu'à travers sa pratique en situation de résolution d'un problème mathématique, en salle, à l'aide d'une forme d'organisation du travail mathématique, mise en place dans les ETM idoines. Dans ce chapitre, nous voulons répondre à la question qui consiste à savoir :

Q_{3.1} : Quelle forme d'organisation du travail mathématique proposer pour mieux développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique ?

Répondre à cette question, revient à élaborer un modèle de forme d'organisation du travail mathématique, qui prend appui sur les limites identifiées (Cf. chapitre 7) de la forme d'organisation « Analyse-Synthèse » (A-S), actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Pour le faire, nous partons du principe de raffinage du pétrole brut utilisé dans les industries pétrolières, que nous essayons d'élucider, pour le contextualiser dans l'enseignement des mathématiques, en nous appuyant sur le concept de la Transposition Didactique (Chevallard, 1985). Nous articulons ce principe avec notre conception de l'apprentissage d'un savoir mathématique, éclairée par les travaux d'Arsac et al. (1992). Ce qui nous permet de décrire un principe nouveau, permettant de raffiner³⁶ un savoir ou un savoir-faire mathématique, chez les élèves. Ce principe de raffinement, nous donne une manière d'organiser une séquence de résolution et un problème mathématique, dans les ETM idoines pour développer un savoir (ou savoir-faire), chez les élèves.

Notre cadre de référence est constitué de certains travaux en didactique de mathématiques (Arsac et al., (1992) ; Chevallard, (1985) ; Clerc et al., (2006)) et des travaux de deux grandes

³⁶ Développer progressivement un savoir ou un savoir-faire chez l'élève, à l'aide d'une méthode structurée par étapes.

associations des ingénieurs pétroliers (*Connaissance Des Energies*, et *Planète Energies une Initiative de Totalenergies Foundation*), disponibles sur le site internet de chacune de ces associations ([Les trois étapes du raffinage du pétrole | Planète Énergies \(planete-energies.com\)](#) et ([connaissancedesenergies.org](#))).

8.1. Le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique

8.1.1. Le principe de raffinage dans les industries pétrolières

La fiche pédagogique sur la *Connaissance Des Energies*, disponible sur le site ([connaissancedesenergies.org](#)), de la fondation CDE³⁷, définit le raffinage du pétrole comme un procédé industriel qui permet de transformer le pétrole brut en différents produits finis. Pour *Totalenergies Foundation*, c'est un ensemble de traitements et transformations que l'on fait subir au pétrole brut, afin d'en tirer le maximum de produits pétroliers à haute valeur commerciale. D'après les deux associations, il existe deux types de produits qu'on peut en tirer à l'issue de ce procédé : les produits énergétiques (l'essence, le diesel (gazole) et le fioul) et les produits non énergétiques (les lubrifiants, le bitume et le naphta utilisé en pétrochimie). Cependant, le pétrole brut n'est pas utilisable en l'état. C'est un mélange de différents produits hydrocarbonés. Il doit subir une série de traitements et de transformations pour être utilisable dans les moteurs à combustion et dans les différentes branches de l'industrie (pétrochimie, etc.). Ce qui signifie que la transformation du pétrole brut est une opération incontournable. Elle se fait uniquement dans des raffineries. Ainsi, les pétroles bruts qui arrivent dans les raffineries sont stockés dans de grands réservoirs et séparés selon leur teneur en soufre. Cette teneur en soufre détermine le procédé de raffinage à utiliser. Cependant, *Totalenergies Foundation* fait remarquer qu'il y a longtemps, le principe de raffinage se limitait à une seule opération, celle qui consistait en la séparation des différents hydrocarbures. La société était alors confrontée à de sérieux problèmes d'ordre écologique, environnemental, économique, etc. Pour y remédier, les raffineries ont dû revoir le principe de raffinage utilisé, en multipliant les opérations (étapes) de transformation, pour avoir des produits qui causent moins de problèmes à la société. Puisque, J-M. Roussel (2002) souligne que :

« Le raffinage ne se limite plus aujourd'hui à la séparation des différents hydrocarbures. Des procédés chimiques complexes sont également mis en œuvre afin d'optimiser les produits finaux. Les différentes coupes pétrolières peuvent ainsi subir des transformations, des améliorations et des mélanges pour obtenir des produits commercialisables et répondre notamment aux nouvelles normes environnementales » (Roussel, 2002).

De nos jours, quelle que soit la nature de brut qui arrive dans une raffinerie, le raffinage s'effectue suivant trois grandes opérations, comme le souligne J-M. Roussel³⁸ (2002) dans *Planète Energies une Initiative de Totalenergies Foundation* : *« dans une raffinerie, le brut est*

³⁷ CDE : *Connaissance Des Energies*.

³⁸ Jean-Marc ROUSSEL est Enseignant-Chercheur à l'Université Aix-Marseille, membre du groupe de recherche MNO. Et consultant indépendant qui aide les laboratoires industriels à développer et valider leurs méthodes analytiques. Son activité de conseil comprend également des cours et des formations liées à la chromatographie liquide (analytique et préparatoire), à la préparation d'échantillons et aux statistiques appliquées à la chimie analytique (validation, robustesse, incertitude, transfert de méthodes...etc.).

transformé en produits finis suivant des processus rigoureux appartenant à trois types principaux d'opérations : séparation, conversion et amélioration » ³⁹(J-M Roussel, 2002). La fiche pédagogique sur la *Connaissance Des Energies*, explicite chacune de ces opérations :

- La séparation : c'est la distillation du pétrole brut en vue d'obtenir les produits intermédiaires. Elle consiste à chauffer le pétrole brut à 350/400° C pour provoquer l'évaporation. Elle est réalisée en deux étapes : la première est la distillation atmosphérique qui permet de séparer les gaz, les essences et le naphtha (coupes légères), le kérosène et le gazole (coupes moyennes), et les coupes lourdes ; la deuxième est la distillation sous vide qui permet de séparer les produits lourds des résidus de produits moyens.
- La conversion : c'est la transformation et l'amélioration de la qualité des coupes au sein des différentes unités de raffinage. Elle est appliquée à 500°C et consiste à casser les molécules lourdes d'hydrocarbures restées lors de la séparation, en deux ou plusieurs molécules légères. Elle vise à répondre à la demande en produits légers sophistiqués. Ici, les coupes subissent un certain nombre de transformation et d'amélioration qui s'effectuent au sein de plusieurs unités de raffinage.
- L'amélioration : c'est la fabrication des produits. Elle consiste à réduire fortement ou éliminer les molécules corrosives ou néfastes à l'environnement, particulièrement le soufre. La désulfuration du gazole s'effectue à 370 °C. Elle vise, à partir de nouveaux mélanges effectués, à obtenir des produits finis répondant aux normes environnementales. Les produits issus de cette opération sont obtenus à l'aide de doseurs équipés de contrôleurs automatiques. Le document ci-dessous résume le principe de raffinage du pétrole brut dans une raffinerie.

³⁹ Ce propos de J-M Roussel est disponible sur le site de « [Les trois étapes du raffinage du pétrole / Planète Énergies \(planete-energies.com\)](http://www.planete-energies.com) ».

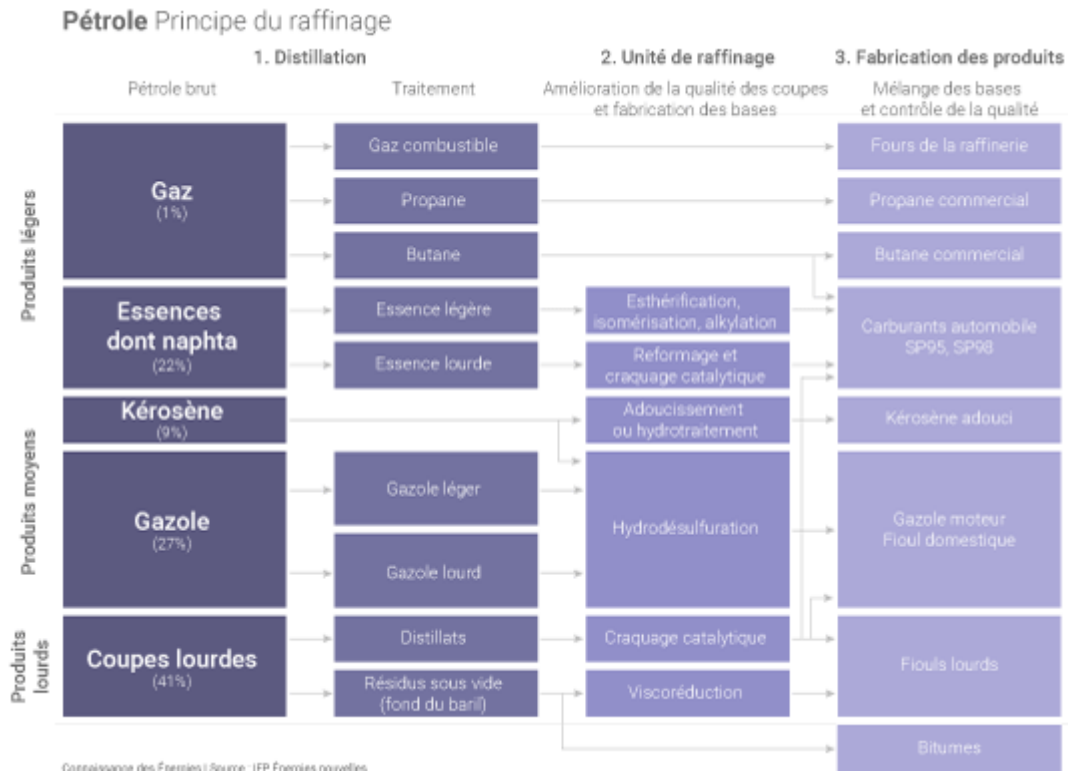


Figure 6 : Le principe de raffinage du pétrole brut : Extrait de la fiche pédagogique connaissance des énergies

De cette description, nous pouvons retenir que le pétrole brut est inutilisable. Par le principe de raffinage, ce pétrole devient utilisable. Le raffinage permet donc de traiter et transformer le pétrole brut de manière à obtenir une matière plus légère et donc facilement utilisable. Tel que décrit, le principe de raffinage met en jeu trois concepts fondamentaux : le but, l'organisation et la transformation. Le but est le produit final qu'on veut obtenir, l'organisation est l'ensemble des étapes successives que doit suivre le brut pour atteindre le but, et la transformation est l'ensemble de différents produits intermédiaires que l'on doit obtenir avant le produit final qui constitue le but. Ce qui fait que le principe de raffinage est axé sur le nombre d'étapes de transformation que doit traverser le pétrole brut pour obtenir le produit final. Le nombre d'étapes maximales est de trois, cependant chaque étape peut contenir des étapes intermédiaires. Plus le pétrole brut passe par plusieurs étapes, plus le produit final a une haute valeur commerciale.

Le raffinage exprime la liaison entre deux ou plusieurs états du pétrole. Il met en évidence le phénomène de « transformation » car il permet de transformer le pétrole brut. Le raffinage fonctionne à l'aide du principe de transformation par étapes. Il met en évidence une différence entre l'état initial et l'état final du pétrole. L'importance du raffinage réside en ce que le pétrole brut ne peut pas être utilisé tel qu'il est extrait des sous-sols. Dans chaque étape de transformation, le pétrole brut est renommé en des noms différents selon les étapes exprimant les états de transformation du pétrole brut. Pour obtenir un produit utilisable, léger et de plus grande valeur commerciale, le pétrole brut doit être raffiné suivant un principe de transformation à trois étapes : séparation, conversion et amélioration. Ce qui veut dire, pour

revenir à notre objectif, qu'un modèle de forme d'organisation du travail mathématique qui développerait mieux la démarche de validation, chez les élèves, peut être adossé à ce principe et être structuré en trois étapes. Avec pour produit à transformer le savoir-faire « démarche de validation ». La question est de savoir : **à travers quel concept didactique peut-on étendre (ou illustrer) le principe de raffinage pétrolier dans l'enseignement des mathématiques ?**

Nous analysons cette question dans le paragraphe qui suit, en essayant de voir si le concept de transposition didactique (Chevallard, 1985) n'est pas une extension du principe de raffinage du pétrole brut, dans l'enseignement des mathématiques.

8.1.2. La Transposition Didactique (Chevallard, 1985) : une extension (continuité) du principe de raffinage du pétrole ?

Dans les institutions d'enseignement des mathématiques, Chevallard (1988) parle du *savoir* pour désigner les objets mathématiques. Il définit trois types de savoirs : le savoir conçu par le mathématicien, *savoir savant* ; le savoir fixé par les programmes d'enseignement, *savoir à enseigner* ; et le savoir construit par les enseignants, *savoir enseigné*. Nous pouvons ajouter à ces savoirs, le savoir que construisent les élèves, *savoir assimilé*. Il relève que, tous les savoirs conçus par le mathématicien n'ont pas pour finalité de devenir des objets d'enseignement. Ce qui veut dire que l'institution scolaire fait des choix qui sont consignés dans les programmes d'enseignement. Ces choix traduisent *le savoir à enseigner* qui est appelé à devenir *le savoir enseigné* par les enseignants que les élèves vont travailler et devenir *le savoir assimilé*. Cela signifie que *le savoir savant* n'est pas directement « utilisable », il est « inutilisable », en l'état par les élèves, c'est-à-dire non assimilable. Un phénomène, utilisant différentes étapes de transformation, permet de mener ces savoirs aux apprentissages des élèves, donc pour les rendre « utilisables ». Voici, comment Chevallard le décrit :

« Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le travail qui est un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement appelé transposition didactique » (Chevallard, 1985).

Chevallard (1985) nomme « Transposition Didactique » le phénomène qui permet le passage d'un contenu de savoir précis à une version enseignable de cet objet de savoir. Il s'agit de la transformation du *savoir savant* en un *savoir enseigné*. La chaîne de transformation ci-dessous résume le passage entre *le savoir savant* et *le savoir enseigné*. Puis celui du *savoir enseigné* au *savoir assimilé*.

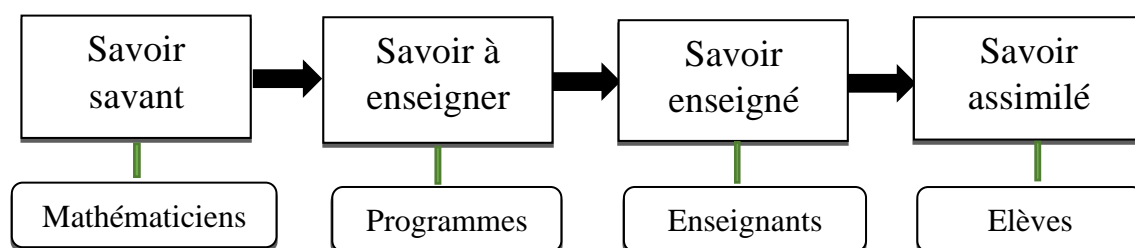


Figure 7 : Transposition du savoir savant au savoir assimilé

Cette chaîne met en exergue deux étapes de la transposition didactique que Chevallard (1985) désigne par : la transposition externe, celle qui permet de transformer *le savoir savant* en *savoir à enseigner* ; et la transposition interne, celle qui permet de transformer *le savoir à enseigner* en *savoir enseigné*. Une troisième étape qui n'est pas mise en évidence par Chevallard, est celle que Clerc et al. (2006) appellent *évaluation* qui permet aux élèves de transformer *le savoir enseigné* en *savoir assimilé*. Pour mieux l'illustrer, nous reprenons, dans le schéma ci-dessous, la chaîne de la transposition didactique proposée par Clerc et al. (2006).

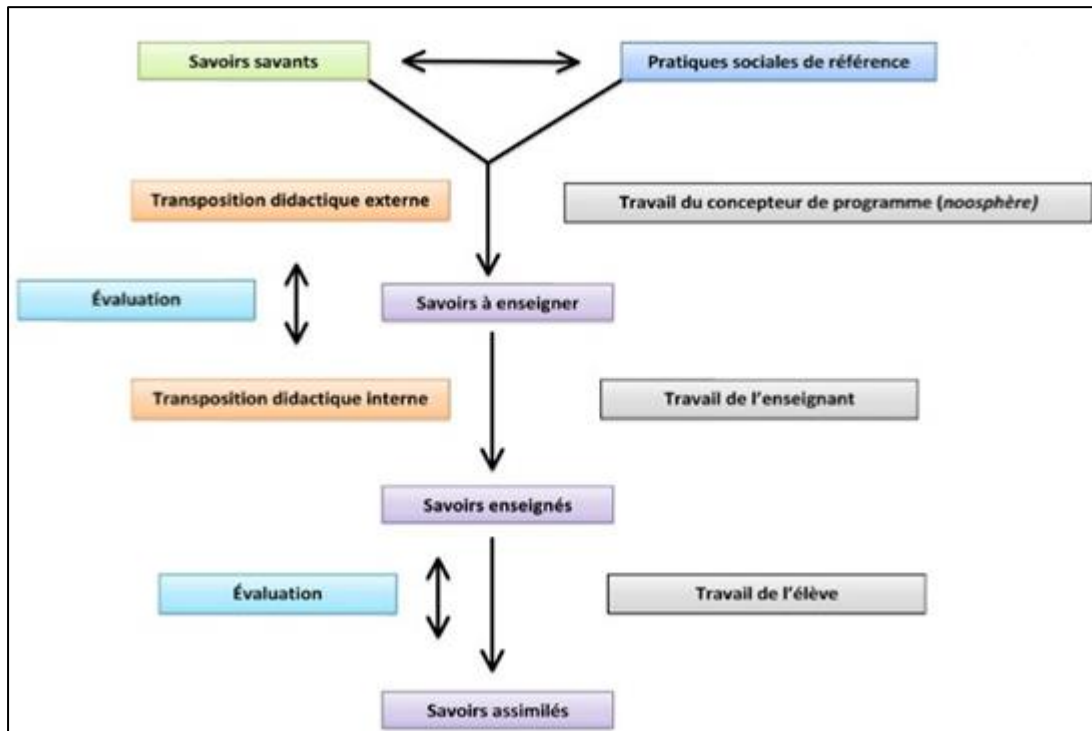


Figure 8 : Transposition Didactique : schéma adapté de la version de Clerc et al. (2006, p.1)

Le schéma ci-dessus nous permet de constater que la transposition didactique met en avant le phénomène de transformation : la transformation du savoir. Elle exprime la liaison entre deux ou plusieurs états du savoir. Elle fonctionne à l'aide du principe de transformation par étapes et met en évidence une différence entre l'état initial du savoir et l'état final. Son importance réside en ce que le savoir scientifique ne peut pas être dispensé tel qu'il émane de la recherche. Le savoir savant est renommé en des noms différents selon les différentes étapes de transformation qu'il traverse. Ainsi, *le savoir savant*, par le principe de la transposition didactique, subit de multiples transformations afin de se constituer en tant qu'un objet d'enseignement. Ces transformations qui se produisent dans le cadre du processus d'enseignement-apprentissage, opèrent dans les relations enseignant-élève face au savoir mathématique.

Contextualisation du « principe de raffinage » à l'enseignement des mathématiques

Notons tout d'abord que le principe de raffinage utilisé dans les industries pétrolières dépasse largement le champ de la Transposition Didactique (Chevallard, 1985). En effet, le raffinage pétrolier pose les questions d'obtention, non seulement de produits plus légers, mais aussi d'un nombre maximal de produits pétroliers à haute valeur commerciale qui posent moins de problèmes dans la société et dans l'environnement.

Dans les paragraphes précédents, nous avons relevé, d'une part, que dans le principe de raffinage, les pétroles bruts qui arrivent dans les raffineries sont inutilisables, mais par le principe de raffinage, ils deviennent utilisables ; et, d'autre part, que dans le principe de Transposition Didactique (Chevallard, 1985), le savoir scientifique (ou savant) ne peut pas être dispensé tel qu'il émane de la recherche, mais par la transposition didactique il est dispensé. Les deux principes mettent en avant le phénomène de « transformation » pour traiter *le pétrole* dans l'industrie pétrolière et *le savoir* dans l'enseignement des mathématiques. En observant les deux chaînes de transformation, nous pouvons constater que la transposition didactique exprime la liaison entre deux ou plusieurs états du savoir tout comme le raffinage exprime le lien entre deux ou plusieurs états du pétrole. Les deux principes fonctionnent à l'aide du phénomène de transformation par étapes, et mettent en évidence une différence entre l'état initial de la matière et son état final. Dans l'un comme dans l'autre, on retrouve une suite de maillons liés les uns aux autres qu'on peut appeler une chaîne. L'importance du raffinage réside en ce que le pétrole brut ne peut pas être utilisé tel qu'il est extrait des sous-sols ; tout comme l'importance de la transposition didactique réside en ce que le savoir scientifique ne peut pas être dispensé tel qu'il émane de la recherche car « *ce savoir savant, n'est pas transférable tel quel, mais il est transposable* » (Paun in Clerc et al. 2006, p.5).

Cette brève comparaison nous permet de dire que, bien que le principe de raffinage du pétrole dépasse largement le concept de « Transposition Didactique », ce concept émane, au moins, en partie, du principe de raffinage pétrolier. Cela signifie que la transposition didactique, à travers le phénomène de « transformation par étapes » qu'elle a en commun avec le principe de raffinage pétrolier, peut être considéré, non seulement, comme une extension de ce principe, dans l'enseignement des mathématiques, mais aussi comme une illustration de l'application du principe de raffinage dans l'enseignement des mathématiques. Donc, le raffinage pétrolier peut être utilisé dans une réflexion visant à développer un savoir (ou un savoir-faire) mathématique, chez les élèves. La « démarche de validation » que nous étudions, constituant un savoir-faire implicite et un attendu des programmes, subit le phénomène de transposition didactique pour être enseignée en salle par les enseignants et apprise par les élèves. La question est de savoir : **quelle conception de l'apprentissage, en milieu scolaire, peut être adossé au principe de raffinage pour décrire un principe nouveau, permettant de raffiner un savoir (ou un savoir-faire) mathématique, chez les élèves ?**

8.1.3. Notre conception de l'apprentissage en milieu scolaire

Pour décrire leur conception de l'apprentissage, Arsac et al. (1992) construisent quatre hypothèses qu'ils expliquent en se référant aux hypothèses constructivistes (Piaget, 1964), qu'ils étayent à l'aide de la métaphore ci-dessous :

« Imaginons un bricoleur confronté à un problème de bricolage qui est nouveau pour lui. Sa première réaction, face à ce problème, est d'ouvrir sa boîte à outil et d'essayer de trouver l'outil qui lui semble le plus adapté à sa situation. Si cet outil ne convient pas (c'est-à-dire s'il ne lui permet pas de résoudre son problème ou si l'utilisation de l'outil risque d'être très coûteuse en temps), il va alors en chercher un autre et l'essayer...C'est seulement après plusieurs tentatives infructueuses qu'il va prendre conscience que, dans sa boîte à outil, il n'y a pas l'outil adapté et qu'en conséquence il va falloir, pour

résoudre son problème, construire un outil nouveau, ou bien s'appropriier celui que lui proposera un ami ou un spécialiste » (Arsac et al., 1992, p.10).

Ils estiment, premièrement, que l'apprentissage d'un concept mathématique se fait à partir des conceptions ou représentations de l'élève relativement à ce concept. En effet, d'après eux : « *pour un concept donné, l'ensemble des connaissances que l'on attribue à l'élève et qui nous permettent de rendre compte des processus qu'il utilise, des réponses qu'il fournit, et de les expliquer, est appelé conception ou représentation* » (Arsac et al. 1992, p.10). Cette idée est construite à partir de cette hypothèse du constructivisme : « *la tête de l'élève n'est jamais vide de connaissances* », qu'ils expliquent par le fait que « *la boîte à outil du bricoleur n'est pas vide* ». Cela se justifie à travers une position de Bachelard qui pense que : « *quel que soit son âge, l'esprit n'est jamais vierge, table rase ou cire sans empreint* » (Bachelard, 1975) et que Arsac lui-même reprend dans cette construction. Ces chercheurs pensent, deuxièmement, que l'élève apprend un concept mathématique en procédant par des ruptures avec les conceptions qu'il a de ce concept. À leur avis, pour que l'apprentissage puisse s'effectuer, l'élève doit se rendre compte des insuffisances de ses conceptions. En effet, ils relèvent que :

« L'apprentissage d'une connaissance ne se fait ni par empilement, ni de manière linéaire : tant que l'élève, par rapport à une notion donnée, ne prend pas conscience de l'insuffisance de ses conceptions, il les garde. Même si on réussit à lui vendre un nouvel outil (même s'il donne l'impression de l'avoir acquis) il reviendra à l'ancienne plus économique pour lui (au sens de « plus sûr ») s'il n'a pas pris lui-même conscience de son insuffisance » (Arsac et al. 1992, p.11).

Troisièmement, ils relèvent que, pour que l'élève puisse apprendre un concept, il faudrait qu'il trouve en ce concept une nécessité. C'est-à-dire, pour que l'apprentissage puisse s'effectuer, il faudrait que le concept en cours d'apprentissage se présente comme un élément nécessaire à l'élève dans la résolution des problèmes dont il fera face. En effet, en comparant l'élève au « bricoleur », Arsac et al. (1992), précisent que :

« Le bricoleur (pardon l'élève) n'arrive véritablement à donner du sens à un outil (concept) que s'il lui apparaît nécessaire c'est-à-dire s'il lui apparaît d'abord comme un outil qui lui permet de résoudre un problème qu'il s'est approprié » (Arsac et al. 1992, p.11).

En reprenant un résultat des travaux de l'école genevoise de psychologie sociale génétique (Mugny, 1985) et en écartant la métaphore précédente, Arsac et al. (1992) mettent, quatrièmement, en avant le rôle important de ce qu'ils appellent « le conflit socio-cognitif » dans l'apprentissage. Pour eux, « *la mise en place de conflits, portant sur des connaissances, entre les élèves peut faciliter leur acquisition* » (Arsac et al. 1992, p.11). C'est-à-dire, que l'apprentissage peut se faire en confrontant les élèves entre eux face à la connaissance. Ils soulignent que ce conflit peut être mis en place, dans une classe mathématique, à travers le travail de groupe, dans lequel le débat entre les élèves, relativement à la connaissance pourra naître. Sur la base de ces quatre hypothèses et compte tenu du fait que : « *l'acquisition d'une connaissance passe, dans un premier temps, par la prise de conscience par l'élève de l'insuffisance de ses connaissances antérieures* » (Arsac et al. 1992, p.11), Arsac et al. (1992) suggèrent de proposer aux élèves des situations qui leur permettront d'utiliser leurs propres connaissances, de prendre conscience que ces connaissances sont insuffisantes et d'acquérir de connaissances

nouvelles mieux adaptées à la situation. Ainsi, les connaissances seront construites, soit par l'élève, soit apportées par l'enseignant. Ce qui veut dire que, pour eux :

L'apprentissage est la construction, par l'élève, d'une connaissance nouvelle, apportée par l'enseignant, relativement à la prise de conscience de l'élève des insuffisances des représentations qu'il a de cette connaissance.

Nous adoptons cette conception de l'apprentissage d'Arsac dans la suite de notre travail en la réadaptant, pour la centrer dans le principe de raffinement tel que nous l'avons contextualisé dans l'enseignement des mathématiques à l'aide du concept de transposition didactique (Chevallard, 1985). Nous admettons que dans le cadre du processus d'enseignement-apprentissage, au sein duquel se développent les relations enseignant-élève face au savoir mathématique, l'élève construit des connaissances, développe des capacités et des compétences ; et l'enseignant apporte des savoirs (ou savoir-faire). Ainsi,

Nous définissons l'apprentissage en milieu scolaire, comme étant la construction, par l'élève, d'une connaissance nouvelle, à partir d'un savoir (ou savoir-faire) apporté par l'enseignant, relativement à la prise de conscience par l'élève des insuffisances des représentations qu'il a de ce savoir (ou savoir-faire).

Cette définition peut s'intégrer dans le principe de raffinement pétrolier, comme on va le constater dans le paragraphe qui suit, et prend en compte notre conception de l'enseignement, selon laquelle : **l'enseignement est une interaction entre les savoirs qu'apporte un enseignant et les connaissances d'un (ou plusieurs) élève(s)**. Une conception dans laquelle prend place la forme d'organisation du travail mathématique pour développer un savoir (ou savoir-faire), chez les élèves, au cours de la résolution des problèmes mathématiques en classe. Pour notre recherche, nous parlons d'enseignement par la résolution de problèmes. La question est de savoir : **comment notre conception de l'apprentissage peut s'articuler avec le principe de raffinement pétrolier pour décrire le processus de développement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, chez les élèves ?**

8.1.4. Le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique

Considérant que l'enseignement est d'abord une interaction entre les savoirs (ou savoir-faire) qu'apporte un enseignant et les connaissances d'un (ou plusieurs) élève(s), nous avons admis avec Arsac et al. (1992), que l'acquisition d'un nouveau savoir (ou savoir-faire) mathématique par l'élève, passe par la prise de conscience de ce dernier des insuffisances de ses connaissances anciennes relativement à ce savoir (ou savoir-faire). Compte tenu de cette conclusion, nous avons défini l'apprentissage en milieu scolaire, comme étant la construction, par l'élève, d'une connaissance nouvelle, à partir d'un savoir (ou savoir-faire) apporté par l'enseignant, relativement à la prise de conscience par l'élève des insuffisances des représentations qu'il a de ce savoir (ou savoir-faire). La question est celle qui consiste à se demander : **comment amener l'élève à prendre conscience des insuffisances de ses connaissances antérieures pour acquérir un savoir (ou savoir-faire) nouveau ?**

Nous pensons que le principe de raffinement du pétrole que nous adosons à notre conception de l'enseignement et de l'apprentissage en milieu scolaire, peut permettre cette prise de conscience

et favoriser le développement d'un savoir (ou savoir-faire) nouveau, chez les élèves, lorsqu'il est mis en évidence par un enseignant dans une situation de résolution d'un problème mathématique, en salle. Il s'agit de l'enseignement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique à travers la résolution des problèmes mathématiques, pris comme des situations (Arsac et al. 1992) d'enseignement, utilisant comme moyen d'enseignement de ce savoir (ou savoir-faire), la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique ». En effet, comme le pétrole brut, l'élève a des connaissances anciennes (produit non utilisable), mais il a besoin d'une connaissance nouvelle pour résoudre des problèmes nouveaux. L'enseignant, porteur du projet d'enseignement de ce savoir (ou savoir-faire) nouveau, nécessaire à l'élève, peut organiser par étape la séquence de résolution ou bien le problème mathématique, tel qu'à un moment l'élève se rende compte de l'insuffisance de ses connaissances antérieures et accepte, à partir du savoir (savoir-faire) nouveau que lui apporte l'enseignant, de construire une connaissance nouvelle (produit utilisable) mieux adaptée aux nouvelles situations. Nous allons utiliser le terme « raffinement » en lieu et place de « raffinage » qui est mieux adapté au contexte d'enseignement (ou apprentissage), puisque le raffinage développé dans l'industrie pétrolière dépasse largement le champ de développement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique. Ainsi, comme le principe de raffinage du pétrole,

Le raffinement d'un savoir (ou savoir-faire), consiste à amener l'élève à transformer ses connaissances anciennes relativement au savoir (ou savoir-faire) qu'apporte l'enseignant, pour construire une connaissance nouvelle.

Ce qui signifie que le raffinement consiste à amener l'élève à utiliser ses connaissances anciennes, prendre conscience des insuffisances de ces connaissances et acquérir une connaissance nouvelle mieux adaptée (Arsac et al. 1992). Il s'agit d'une transformation des connaissances anciennes de l'élève en une connaissance nouvelle, qui est le savoir (ou savoir-faire) que lui apporte l'enseignant. Tel que décrit, le raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) par l'enseignant au niveau de l'élève, met en jeu trois principes fondamentaux : le but qui est le savoir (ou savoir-faire) qu'on veut faire acquérir à l'élève ; l'organisation qui est l'ensemble des étapes successives que doit mettre en place l'enseignant pour amener l'élève à prendre conscience des insuffisances de ses connaissances antérieures ; et la transformation qui est l'ensemble des formes que prendront les connaissances anciennes à chaque étape pour aller vers la connaissance nouvelle. Remarquons que le raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) est mis en œuvre par l'enseignant. Il est axé sur le phénomène de « transformation » qui met en place un certain nombre d'étapes que doivent traverser les connaissances anciennes de l'élève, pour qu'il construise une connaissance nouvelle. D'après le principe de raffinage du pétrole, plus les connaissances antérieures de l'élève passent par plusieurs étapes, mieux il construit la connaissance nouvelle. Et mieux l'enseignant raffine le savoir (savoir-faire) nouveau, chez l'élève. Ce principe fixe à trois, le nombre d'étapes de transformation des connaissances anciennes de l'élève. Cependant, chaque étape peut contenir des étapes intermédiaires. Ce qui veut dire qu'une forme d'organisation du travail mathématique qui développerait mieux la démarche de validation, chez les élèves, prenant appui sur le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) doit comporter trois étapes. Elle doit viser un but précis : celui de développer la démarche de validation ; présenter une organisation : celle qui consiste à ressortir les différentes interprétations pertinentes des données du problème, permettant de distinguer les

éléments sur lesquels les élèves peuvent se référer pour valider un résultat. Et enfin, elle doit décrire une manière de transformer les connaissances anciennes des élèves : celle qui consiste à mettre en place les différentes étapes qui permettent d'aller vers l'acquisition du savoir (ou savoir-faire) nouveau. Ainsi, le raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique est un principe qui est réalisé par l'enseignant, porteur du projet d'enseignement de ce savoir (ou savoir-faire). Il met en évidence, chez les élèves, le processus de construction d'une connaissance mathématique. Lorsque ce principe est mis en œuvre, dans les ETM idoines, au cours d'une séquence de résolution d'un problème mathématique, il met en exergue une forme d'organisation du travail mathématique permettant de décrire le processus de résolution de ce problème. Ainsi, il va définir, dans le cadre d'un problème de construction et conformément à notre cadre didactique (**EPP**), une forme de travail mathématique permettant de réaliser la construction d'un objet géométrique défini à l'aide d'un problème de construction, et mettre en place un discours de validation qui accompagne ce travail, pour décrire les procédés de construction (Chevallard et Julien, 1991) de l'objet. Cela signifie que ce principe nous donne une manière d'élaborer une forme d'organisation du travail mathématique permettant de développer la démarche de validation, chez les élèves.

Compte tenu du fait que la question qui guide notre travail dans ce chapitre est celle qui consiste à savoir, **quelle forme d'organisation du travail mathématique proposer pour développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines effectifs ?** Nous allons nous placer du côté de l'enseignant et dans le cadre d'un problème de construction pour élaborer, dans le paragraphe qui suit, un modèle de forme d'organisation du travail mathématique, permettant de développer la démarche de validation, chez les élèves, telle que cette validation est décrite dans les ETM de référence, en classe de Première Scientifique.

8.2. L'élaboration d'un modèle de forme d'organisation du travail mathématique pour développer la démarche de validation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique

Nous avons défini une forme d'organisation du travail mathématique comme étant une manière particulière d'agencer par étapes les sous-tâches liées à la séquence de résolution et/ou au problème mathématique que l'on résout dans un ETM idoine, pour développer la démarche de validation, chez les élèves. Notons que l'utilisation de l'expression « forme d'organisation » qui est faite ici, a pour objectif de montrer que l'idée d'agencement des tâches, influant sur l'apprentissage des élèves est étendue sur l'enseignant. Ce qui nous permet, non seulement, d'analyser l'impact de la caractéristique « forme d'organisation du travail mathématique » sur le développement de la démarche de validation, mais aussi, de soumettre la séquence de résolution à une méthode et de rendre fonctionnelle le problème mathématique que l'on veut résoudre. Cette considération permet de structurer et d'agencer par étapes les différentes sous-tâches qui découlent de ces deux éléments, dans le but d'accroître, développer et rentabiliser le fonctionnement du travail mathématique d'organisation que fait un enseignant, pour mieux observer son impact sur l'apprentissage de la validation, au niveau des élèves. Elle permet également de mettre en évidence, les éléments sur lesquels les élèves peuvent se référer pour produire une démarche de validation des résultats qu'ils obtiennent. Ainsi, pour élaborer notre modèle, nous avons pris le cas particulier d'un problème de construction. Nous avons élaboré

un modèle de forme d'organisation du travail mathématique à deux articulations, que nous avons adossé au principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique. Nous l'avons par la suite généralisé en adaptant la structure de ce modèle à la séquence de résolution de tout problème relevant de n'importe quel domaine des mathématiques. Compte tenu du fait que nous avons admis que « la démarche de validation » est un savoir-faire, nous nous sommes placés dans un cadre de référence constitué du principe de raffinement d'un savoir-faire mathématique, d'un problème mathématique relevant du domaine de la géométrie (problème de construction) et des limites de la forme d'organisation « Analyse-Synthèse » (A-S), disponible actuellement dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, que nous avons identifiées (Cf., Chapitre 7).

8.2.1. Une organisation du travail mathématique externe au problème de construction (A-A-C)

Dans les ETM idoines fixés au cadre didactique (EPP), une organisation du travail mathématique est dite externe à un problème de construction (ou mathématique) lorsqu'elle agence par étapes les sous-tâches liées à la séquence de résolution, pour développer une démarche de validation, chez les élèves. Cependant, bien qu'étant externe au problème de construction, elle s'applique à cette catégorie de problèmes et prend en compte, dans ses différentes étapes, les aspects particuliers d'un problème de construction, dont l'un est la production d'un algorithme (ou programme) de construction répondant à la demande de réalisation d'une construction satisfaisant à un ensemble de conditions que fixe l'énoncé du problème. Conformément à notre cadre de référence, elle doit compléter la forme d'organisation « Analyse-Synthèse » (A-S) pour agencer les sous-tâches liées à la séquence de résolution en trois étapes. Ainsi, la mise en œuvre en salle de la séquence de résolution d'un problème de construction, dans les ETM idoines, sera organisée en trois phases :

- **La phase d'appréhension de la situation (A)** : c'est la phase où les élèves sont amenés à découvrir les données de la situation, lire l'énoncé de la situation, se saisir intellectuellement de la situation et la situer dans un contexte (la situation peut être nouvelle, semblable à une situation déjà rencontrée ou une situation déjà rencontrée), puis établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet géométrique que décrit le problème.
- **La phase d'analyse de la situation (A)** : c'est la phase où les élèves sont amenés à s'appropriier la situation, la relier à un concept mathématique, identifier les propriétés pouvant être utilisées, étudier une solution pouvant répondre au problème que pose la situation pour dégager les propriétés permettant sa résolution et envisager des stratégies de résolution. Cette phase est centrée sur l'étude d'une configuration supposée être une solution du problème.
- **La phase de la conception de la solution (C)** : c'est la phase où les élèves sont amenés à réaliser des compromis nécessaires à l'obtention d'une stratégie de résolution qu'ils jugent la meilleure possible, l'adopter, organiser leur discours, construire la solution, engager des discussions sur le nombre de solutions et procéder à la mise en forme de la solution rédigée. Cette phase vise la mise au point d'une procédure de construction de l'objet demandé.

Nous obtenons, en complétant la forme d'organisation (A-S) à trois phases, la première articulation de notre modèle que nous désignons par : *Appréhension-Analyse-Conception de la solution* (A-A-C). Cette première articulation donne à la séquence de résolution, un contenu et une démarche permettant d'évoluer de façon méthodique vers la solution du problème. Elle vise à raffiner, chez les élèves une manière d'établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet dont on veut réaliser une construction, d'étudier une configuration supposée être la solution du problème, et de mettre sur pied une procédure de construction de l'objet demandé. Elle met en œuvre les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction telles que décrites par les ETM de référence. Cependant, bien qu'elle soit externe au problème de construction, elle fait le lien entre l'énoncé du problème et la séquence de résolution, pour enrichir l'intuition et raffiner, chez les élèves, une caractérisation de l'objet à construire, le choix et la conception d'une transformation du plan en lien avec l'objet à construire. Par ailleurs, elle nourrit une façon de réfléchir et d'organiser le travail mathématique, pour raffiner la capacité des élèves à résoudre un problème de construction. On peut constater qu'au cours de ce travail d'organisation de la séquence de résolution, plusieurs actions sont menées par l'enseignant dans chaque phase. Ces actions, qui permettent d'amener les élèves à saisir d'un coup la situation pour mieux la comprendre, l'analyser et produire une solution, donnent une trajectoire à la résolution et nourrissent l'inspiration des élèves, pour les amener vers l'acquisition du savoir-faire « démarche de validation ». Cependant, elle pose le problème de la distinction entre la séquence de résolution du problème et le problème de construction (ou mathématique) lui-même. Ce qui favorise la mise en place de la deuxième articulation de notre modèle, une organisation interne au problème de construction.

8.2.2. Une organisation du travail mathématique interne au problème de construction (P-A-P)

Dans les ETM idoines fixés au cadre didactique (**EPP**), une organisation du travail mathématique est dite interne au problème mathématique que l'on résout lorsqu'elle agence par étapes les sous-tâches liées à ce problème, pour développer, chez les élèves, la distinction de la démarche de validation sous-jacente au résultat à obtenir. Prise dans ce sens, ici, elle est particulière et propre à la catégorie problème de construction. Elle est interne à ce type de problème et émerge des éléments constitutifs d'un problème de construction. Ces éléments peuvent émaner de la définition et/ou de la décomposition d'un problème de construction. Conformément à notre cadre, elle doit comporter trois étapes et s'appuyer sur une limite de la forme d'organisation (A-S), pour raffiner une démarche de validation, chez les élèves.

En faisant la différence entre « une construction » et « un problème de construction » (Cf. chapitre 2), nous avons vu qu'une construction peut désigner *un processus* ou *un produit*. Dans notre travail, une construction est *un produit* : le produit d'une activité de construction sur un problème de construction. Ce qui nous a permis de placer au cœur de la pratique des problèmes de construction, « l'activité de construction » et d'identifier le genre de tâche « construire » comme celui qui génère une activité de construction. Ainsi, nous avons défini un problème de

construction comme étant un problème⁴⁰ dans lequel la tâche à accomplir, sous certaines contraintes, conduit à la réalisation d'une construction instrumentée (c'est-à-dire une figure géométrique (Parzysz, 1989)), réalisation précédée d'un algorithme (ou programme) de construction et soutenue par un raisonnement justifiant que l'algorithme considéré permet bien d'obtenir la construction demandée. C'est donc une situation (Arsac et al. 1992) qui engage les élèves dans une activité de construction ayant pour finalité l'obtention d'une construction et dont le processus d'obtention peut être reconstitué. Cette définition nous permet de décomposer un problème de construction en deux grandes parties : le problème et l'activité de construction. Pour nous :

- **Le problème** : le terme est pris au sens mathématique, il est distinct de l'énoncé de la situation. C'est la tâche à réaliser dans un temps précis et dans un contexte donné, et dont les conditions de réalisation de cette tâche et du travail mathématique qui en découlent, sont définies par le contexte et l'ETM (Kuzniak et al. 2016) dans lequel la tâche est proposée. Ici, le problème peut être modélisé comme étant un couple (q, i) (Giroud, 2011), où (q) est la question à laquelle on cherche à apporter une réponse et (i) les instances qui constituent les données mathématiques qui soutiennent la recherche de la réponse à la question.
- **L'activité de construction** : c'est l'ensemble d'actions à mener, d'opérations à effectuer et de décisions à prendre, visant à mettre en place une suite d'actes élémentaires permettant la réalisation de la construction, et d'établir que cette construction est exacte et valide. Ainsi, l'activité de construction est vue comme étant constituée de plusieurs activités (Robert et Rogalki, 2002) liées au genre de tâche « construire ». Elle décrit un processus constitué d'un ensemble d'opérations, de décisions et d'actions que mène un sujet (élève ou professeur) avant, pendant et après chaque acte posé au cours de la résolution d'un problème de construction. Ainsi, l'activité de construction est constituée d'une famille d'actes et d'un ensemble de constructions élémentaires définissant la construction demandée. Elle peut être modélisée par le couple (\mathcal{A}, a_p) , où \mathcal{A} désigne une famille d'actes et a_p une construction élémentaire.

Ainsi, nous considérons un problème de construction comme un problème au sein duquel se développe une activité de construction d'un objet géométrique. Or, cette conception de l'activité de construction, qui est la nôtre, nous permet de constater qu'elle est structurée, d'une part, par un ensemble d'actes réfléchis que pose le constructeur (élève ou professeur) visant à reproduire la représentation qu'il a de l'objet à construire, et d'autre part, par une démarche de l'esprit du constructeur, se rapportant à la ressemblance entre ce qu'il a produit comme résultat de l'activité de construction et ce qu'il a comme caractérisation de l'objet à construire, en lien avec la conception qu'il a d'une notion mathématique lié à cet objet, permettant sa construction. Cela met en exergue deux parties, représentant la décomposition d'une activité de construction : les actes de construction et le produit d'actes de construction. Ainsi, dans les ETM idoines, nous

⁴⁰ Nous considérons qu'un problème est un couple (questions, instances) pour le différencier de l'énoncé du problème qui représente son habillage.

décomposons un problème de construction en trois parties : le Problème (P), les Actes de construction (A) et le Produit d'actes de construction (P). Cette décomposition nous permet d'obtenir, la deuxième articulation de notre modèle que nous notons : *Problème-Actes de constructions-Produit d'actes de construction* (P-A-P).

- **Le Problème ou phase d'identification du problème** : c'est la phase où les élèves sont amenés à séparer le problème de l'énoncé de la situation. Elle intervient après l'appréhension de la situation, dans la phase d'analyse. Ici, les élèves identifient et listent les données nécessaires et utiles pour la résolution de la situation de manière à former un ensemble (I) constitué des instances. Puis ils dégagent la question mathématique à traiter. Cette question doit faire ressortir le contrat didactique relatif à la réalisation de la construction, solution du problème. Elle doit être issue de l'ensemble (Q) de toutes les questions qu'on peut formuler. Ainsi, nous pouvons modéliser le problème par le couple (q, i) (Giroud, 2011), un élément de l'ensemble (Q, I). Cette phase s'inscrit dans l'étude d'une configuration supposée être la solution du problème.
- **Les Actes de construction ou phase d'identification d'actes de construction** : c'est la phase où les élèves, à travers le contrat didactique, sont amenés à identifier les différents actes qui vont permettre la réalisation de la construction demandée. Elle intervient dans la phase d'analyse. Ici, les élèves rattachent d'abord chaque acte de construction à une théorie qui va permettre la réalisation de chaque construction élémentaire ; ensuite, ils définissent une progression permettant un enchaînement successif, logique et cohérent de ces actes, de manière à obtenir la construction ; et enfin, ils identifient les actions élémentaires à réaliser, les opérations à effectuer et les décisions à prendre dans chaque acte. Soulignons qu'une catégorie d'actes est constituée de plusieurs actions élémentaires, et donc l'ensemble de toutes les actions, opérations et décisions élémentaires, constitue le produit d'actes de construction qui est la construction finale. Ainsi, le processus de réalisation de la construction est la mise en œuvre de l'ensemble des actes de construction permettant d'obtenir une construction exacte et valide, au sens de l'ETM de référence et de la théorie en arrière-plan. Cette phase comme la précédente, vise à favoriser l'étude d'une configuration supposée solution du problème.
- **Le produit d'actes de construction ou phase de réalisation de la construction** : c'est la phase où les élèves sont amenés à matérialiser les différents actes de construction identifiés. Elle intervient dans la phase de conception de la solution et met en exergue un cas de construction parmi toutes celles qui se sont dégagées dans la phase d'analyse. Elle établit une différence entre la solution du problème de construction qu'on résolvait et l'objet géométrique construit. Elle met en exergue la technique de construction utilisée pour construire l'objet et la démarche de validation mise en place pour justifier les différents actes de constructions ayant permis la réalisation de l'objet construit. Ici, les élèves sont amenés à choisir un cas parmi les cas identifiés pendant l'analyse, mettre en œuvre les différents actes de construction identifiés et s'assurer du respect du contrat didactique. C'est la synthèse de tous les éléments récoltés pendant l'analyse, permettant la réalisation d'une construction exacte et valide. Cette phase s'inscrit dans la mise au point d'une procédure permettant la réalisation de la construction de l'objet demandé.

Cette deuxième articulation de notre modèle est spécifique à la catégorie problème de construction. Elle distingue, d'une part, la séquence de résolution du problème de construction, et d'autre part, l'énoncé de la situation du problème mathématique qu'il soulève. Elle donne un sens à l'activité de construction pour définir les différentes articulations d'un problème de construction sur lesquelles on peut prendre appui pour raisonner, construire et valider, puisqu'elle définit une organisation sous-jacente au travail de validation de la construction réalisée. Cette articulation permet d'isoler et de s'occuper de chaque élément d'un problème de construction, de façon à constituer un tout, cohérent et adapté à la caractérisation que l'on a de l'objet à construire, et à la conception qu'on a de la validation dans un problème de construction. Elle s'articule avec l'organisation de la séquence (A-A-C) pour proposer aux enseignants une manière de développer la validation, chez les élèves. Et aux élèves, une façon de procéder pour réussir à valider une construction qu'ils réalisent au cours de la résolution d'un problème de construction, dans les ETM idoines.

8.2.3 Le modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré pour développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines

Nous nous plaçons dans une séquence de résolution d'un problème de construction, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Nous admettons l'organisation faite sur la séquence de résolution et sur le problème de construction (Cf. les sous-sections 8.2.1 et 8.2.2). En articulant ces deux organisations du travail mathématique, nous élaborons le modèle (A-A-C / P-A-P) qui est une forme d'organisation du travail mathématique à deux articulations : *Appréhension-Analyse-Conception de la solution* (A-A-C) qui est externe au problème de construction et *Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions* (P-A-P) qui est interne à cette catégorie de problème. Les deux articulations s'imbriquent dans l'activité de construction, s'emboîtent et s'enchevêtrent totalement entre elles, pour agencer par étapes, les sous-tâches liées à la séquence de résolution, d'une part, et au problème mathématique en résolution, d'autre part. Le schéma ci-dessous illustre le modèle (A-A-C / P-A-P) élaboré :

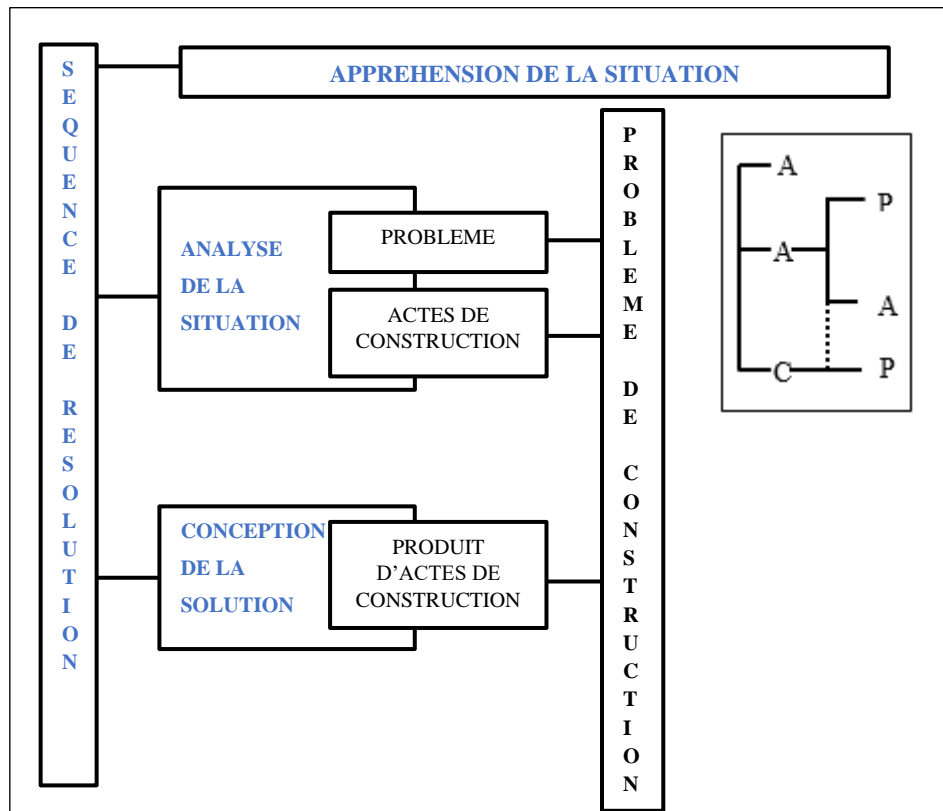


Figure 9: Modèle de forme d'organisation (A-A-C/P-A-P)

Ce modèle de forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P), adossé au principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) en milieu scolaire, a été élaboré dans le cas particulier d'une séquence de résolution d'un problème de construction. Le schéma ci-dessus met en évidence le fait que sa conception s'appuie sur une démarche scientifique qui voudrait qu'un problème issu de n'importe quel domaine des mathématiques (algèbre, analyse, probabilité ou en statistique) soit traité dans une séquence de résolution. C'est pourquoi il propose une organisation sur la séquence de résolution et une organisation sur le problème mathématique qui sert de situation d'enseignement de la validation. Donc, le modèle peut être adapté à une séquence de résolution de toute catégorie de problèmes issus de n'importe quel domaine des mathématiques, pour développer de façon méthodique la démarche de validation, chez les élèves. Ainsi, cette forme d'organisation du travail mathématique peut être généralisé de la manière suivante : **(A-A-C / B)** où **B** représente une organisation à trois étapes du problème mathématique en résolution, comme l'illustre le schéma simplifié ci-dessous :

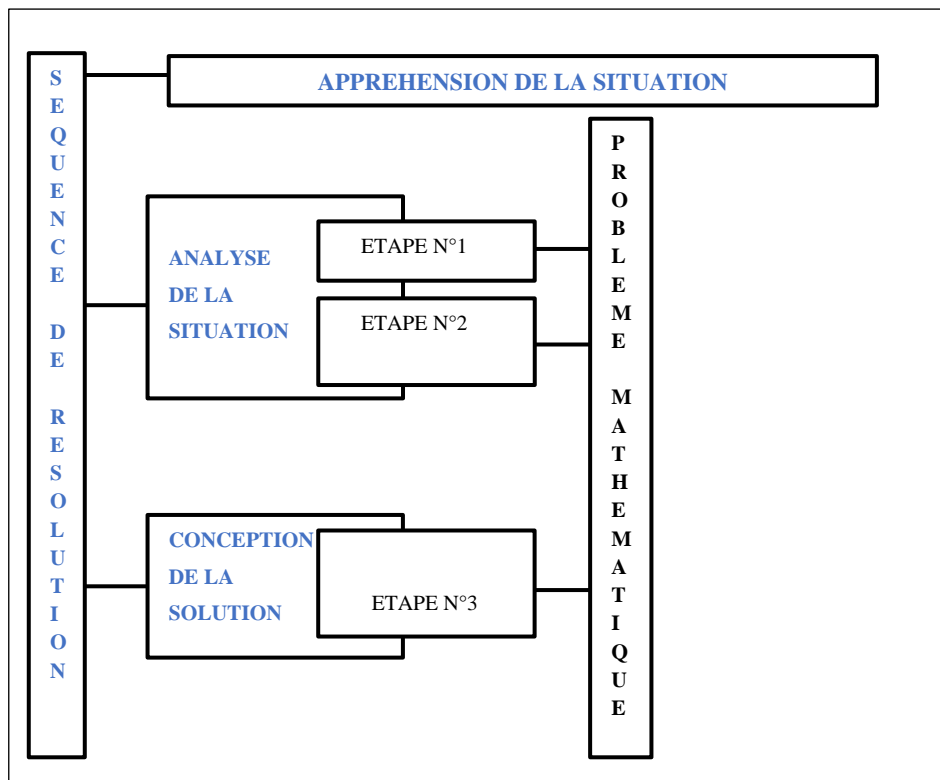


Figure 10 : Modèle généralisé de la forme d'organisation du travail Mathématique
(A-A-C/P-A-P)

Dans le cadre de nos analyses, nous avons opté pour des problèmes mathématiques relevant du domaine de la géométrie : les problèmes de construction. Ce qui signifie que : $\mathbf{B} = (\mathbf{P-A-P})$.

Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'élaborer un modèle de forme d'organisation du travail mathématique capable de mieux développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines. Dans la deuxième partie notre travail, nous avons identifié, l'Analyse-Synthèse (A-S) comme la forme d'organisation actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. L'étude de cette forme d'organisation a mis en exergue la non prise en charge de la phase d'appréhension de la situation par les enseignants et l'absence d'un travail d'organisation sur le problème de construction lui-même. Nous avons considéré ces deux limites comme une faiblesse de cette forme d'organisation. Et nous avons fait comme hypothèse qu'**un modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré à partir des limites de la forme d'organisation « Analyse-Synthèse » (A-S) dans les ETM idoines, développerait mieux la démarche de validation, chez les élèves, dans ces ETM.** Ainsi, dans notre recherche de la manière dont nous pouvons élaborer un modèle de forme d'organisation, nous avons, à partir des travaux de deux associations d'ingénieurs pétroliers (*Connaissance Des Energies et Totalenergies Foundation*), analysé le principe de raffinage du pétrole utilisé dans les industries pétrolières. Cette analyse a établi que le raffinage est centré sur le phénomène de

« transformation ». Une transformation qui s'opère par étapes et limitée à trois grandes étapes pouvant intégrer des étapes intermédiaires. Plus le nombre d'étapes est consistant, plus le produit final à une haute valeur commerciale, et moins il cause des problèmes à la société. Le raffinage met en évidence une différence entre l'état initial du pétrole et son état final. L'importance de ce principe réside en ce que le pétrole brut ne peut pas être utilisé tel qu'il est extrait des sous-sols, il doit subir un traitement par étape pour être utilisable. Dans chaque étape de transformation, le pétrole brut est renommé en de noms différents selon les étapes exprimant les états transformés du pétrole brut. Dans le souci de contextualiser ce principe dans l'enseignement de mathématiques, nous avons étudié le phénomène de la Transposition Didactique (Chevallard, 1985). Nous voulions voir si ce phénomène était une extension du principe de raffinage pétrolier. Cette étude a établi de fortes similitudes avec le principe de raffinage dans son fonctionnement et dans sa conception. Elle nous a permis de constater que la transposition didactique était une application du principe de raffinage du pétrole dans l'enseignement des mathématiques, où la matière à transformer est *le savoir*. Et donc, le raffinage, bien que dépassant largement le champ de l'enseignement des mathématiques, peut être appliqué en didactique de mathématiques. Ainsi, nous pouvons nous appuyer sur ce principe dans l'élaboration de notre forme d'organisation du travail mathématique.

Partant de la conception d'Arsac et al. (1992) de l'apprentissage d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, nous avons défini l'apprentissage comme étant la construction, par l'élève, d'une connaissance nouvelle, à partir d'un savoir (ou savoir-faire) apporté par l'enseignant, relativement à la prise de conscience de ce dernier des insuffisances des représentations qu'il a de ce savoir. En effet, pour nous, l'enseignement est d'abord une interaction entre le savoir (ou savoir-faire) d'un enseignant et les connaissances d'un (ou plusieurs) élève(s). La question était donc de savoir comment amener les élèves à prendre conscience des insuffisances de leurs connaissances antérieures ? Nous avons admis que le principe de raffinage du pétrole, peut permettre cette prise de conscience et favoriser le développement de la connaissance nouvelle, chez les élèves, lorsqu'il est mis en œuvre par un enseignant, en situation de résolution d'un problème mathématique, dans les ETM idoines. Ainsi, nous avons décrit le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, à partir du principe de raffinage et de notre conception de l'enseignement et l'apprentissage. Ce principe de raffinement nous a donné une manière d'élaborer un modèle de forme d'organisation capable de mieux développer la démarche de validation, dans les ETM idoines. En considérant **le raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique comme une démarche qui consiste à amener les élèves à transformer leurs connaissances anciennes relativement au savoir (ou savoir-faire) qu'apporte l'enseignant, pour construire une connaissance nouvelle**, ce principe nous a permis de fixer le nombre d'étapes de transformation des connaissances anciennes des élèves à trois afin de les amener vers la construction de la connaissance nouvelle. Ainsi, en nous appuyant sur les limites de la forme d'organisation (A-S) et sur le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, nous avons élaboré le modèle (A-A-C / P-A-P), de forme d'organisation du travail mathématique contenant deux articulations : *Appréhension-Analyse-Conception de la solution* (A-A-C) qui est externe au problème de construction et *Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions* (P-A-P) qui est interne au problème de construction. L'articulation (A-A-C) a été construite en ajoutant à la forme d'organisation (A-

S), actuellement disponible dans les ETM idoines, la phase d'appréhension de la situation, qui était absente. Cette phase complète (A-S) à trois étapes pour se conformer à notre cadre de référence. L'articulation (P-A-P) a été élaborée à partir de la définition et de la décomposition d'un problème de construction en trois parties. Elle met sur pied un travail mathématique d'organisation sur le problème de construction. Un travail qui était absent dans la forme d'organisation (A-S) que proposent les ETM idoines. Nous avons étendu ce modèle à la séquence de résolution de tout problème issu de n'importe quel domaine des mathématiques pour le généraliser de la manière suivante : **(A-A-C / B)** où **B** représente une organisation à trois étapes, faite sur le problème mathématique en résolution. Pour poursuivre nos analyses, nous prendrons **B = (P-A-P)**, afin de rester dans le cadre d'un problème de construction.

Bilan

Nous élaborons ainsi, dans le cas particulier d'un problème de construction, *Appréhension-Analyse-Conception de la solution / Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions* (A-A-C / P-A-P) comme modèle de forme d'organisation du travail mathématique permettant de développer la capacité de valider, chez les élèves, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Ce modèle peut s'étendre à tout problème mathématique en prenant la forme, **(A-A-C / B)** où **B** représente une organisation à trois étapes du problème mathématique en résolution.

Ce modèle étant adossé au principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, il vise à raffiner⁴¹ le savoir-faire « démarche de validation ». Or, d'après le principe de raffinement, le développement d'un savoir (ou savoir-faire) passe par le raffinement, chez les élèves, d'une manière de distinguer certains éléments sur lesquels ces derniers peuvent se référer pour produire la démarche de validation des constructions qu'ils réalisent. La question est de savoir : **quels éléments doit raffiner l'enseignant, chez les élèves, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) afin que ces derniers puissent produire une démarche de validation des résultats qu'ils obtiennent, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction géométrique ?**

⁴¹ Nous employons « raffiner » et « développer » comme deux termes synonymes.

Chapitre 9

Analyse descriptive de la forme d'organisation du travail mathématique : Appréhension-Analyse-Conception de la Solution / Problème-Actes de construction-Produit d'actes de construction (A-A-C / P-A-P), dans les ETM idoines

Dans le chapitre précédent, nous avons élaboré le modèle (A-A-C / P-A-P) comme forme d'organisation du travail mathématique, susceptible de mieux développer la validation, chez les élèves. Étant constitué de deux articulations, ce modèle développe, en deux phases de trois étapes chacune, le savoir-faire « démarche de validation », dans les ETM idoines. Cependant, le principe de raffinement d'un savoir adossé à la conception de ce modèle, impose à la structure de développement de la démarche de validation qu'il offre de raffiner, chez les élèves, une manière de distinguer certains éléments sur lesquels ils peuvent se référer pour produire la démarche de validation des constructions qu'ils réalisent. Dans ce chapitre, nous cherchons à savoir :

Q_{3.2} : Avec le modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré, quels éléments doivent raffiner les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique, pour développer une démarche de validation, chez les élèves ?

À travers l'hypothèse ($H_{3.2}$), nous pensons que :

Les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, raffinent, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) : le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit de tous les actes de construction.

Conformément à notre cadre d'analyse (EPP), répondre à la question (Q_{3.2}) revient à décrire le travail mathématique d'organisation qui peut être produit à l'intérieur du modèle (A-A-C / P-A-P) et le caractériser ; puis, décrire le fonctionnement de ce modèle pour mettre en évidence la structure de développement de la démarche de validation qu'il offre dans le processus de développement de la démarche de validation, chez les élèves. Pour cela, nous menons une étude descriptive de ce modèle pour dégager les modalités de réalisation d'une activité de construction d'un objet géométrique décrit à l'aide d'un problème de construction, afin de mettre en évidence l'organisation du travail mathématique permettant de réaliser et valider cette construction dans sa globalité. La mise en exergue du processus de construction de l'objet au cours de ce travail va décrire comment ce modèle peut aider un enseignant à amener les élèves à distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent prendre appui pour valider une construction qu'ils réalisent. Ainsi, nous allons interroger l'organisation et le discours, permettant d'aboutir à la réalisation et à la validation de la construction d'un objet géométrique décrit à l'aide d'un problème de construction ; ainsi qu'à leurs mises en forme. Ceci nous permettra de caractériser

le modèle (A-A-C / P-A-P) en décrivant le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de cet objet. Cette description se fera en deux temps : un premier en lien avec le processus de résolution, pour décrire le fonctionnement du modèle dans la caractérisation de l'objet à construire, le choix et la conception d'une transformation du plan permettant de réaliser la construction de l'objet ; le processus de construction de l'objet et la validation de la construction de l'objet. Un deuxième en lien avec le développement de la démarche de validation pour décrire le processus de développement de la démarche de validation, chez les élèves, et la structure de développement de cette démarche de validation.

9.1. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) et le processus de résolution d'un problème de construction

Nous partons du fait qu'en classe de Première Scientifique, le processus de résolution d'un problème de construction, conduit dans les ETM idoines fixés à notre cadre, est guidé par les règles du contrat didactique qui donnent la structure de la solution de cette catégorie de problèmes. Dans ce processus, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) a pour but, lorsqu'elle est mise en œuvre par un enseignant, de développer la capacité des élèves à valider les résultats qu'ils obtiennent. Plus précisément, il s'agit de développer le savoir-faire « démarche de validation », chez les élèves. Lorsque cette forme est mise en œuvre par un élève, elle a pour but de l'aider à réaliser une construction acceptée par la communauté (Balacheff, 1988). Elle est adossée à une structure de développement de la démarche de validation qui définit un ensemble d'étapes successives que doit suivre l'enseignant pour réaliser son projet d'enseignement de la validation. Elle déclenche un processus de transformation des données du problème en un ensemble de propriétés pertinentes (ou conditions nécessaires et conditions suffisantes) permettant d'aller progressivement vers la réalisation d'une construction vérifiant ces données et valide au sens de la théorie. La forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) qui fonctionne par étapes, met en évidence une différence entre les connaissances anciennes (Arsac et al. 1992) des élèves et le savoir (ou savoir-faire) que leur apporte l'enseignant (la connaissance nouvelle). Son importance réside en ce que, les élèves étant incapables de valider les résultats qu'ils obtiennent en utilisant la forme d'organisation (A-S), disponible actuellement, elle est élaborée à partir des limites de ce modèle pour mieux développer la validation chez les élèves. Ainsi, dans chaque étape de transformation des données du problème, une propriété mathématique visant à contribuer au raffinement d'une caractérisation de l'objet à construire est mise en exergue, de telle sorte qu'à un moment donné les élèves puissent dégager une propriété pertinente ou une condition nécessaire et suffisante, pour la réalisation de la construction de l'objet demandé. Ce qui veut dire que sur le plan de la méthode mathématique, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) peut utiliser soit la méthode par « l'Analyse-Synthèse », visant à chercher une condition nécessaire et suffisante pour la réalisation de la construction ; soit la méthode par « l'abandon (ou affaiblissement) de contrainte », consistant à abandonner l'une des contraintes du problème, au début de la résolution afin de faciliter la découverte des propriétés pertinentes pour la construction de l'objet demandée, soit les deux simultanément. Telle qu'elle est conçue, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) contient deux articulations : l'une (A-A-C) structure la séquence de résolution

en trois phases décrivant les différentes sous-tâches⁴² à accomplir pour appréhender la situation, l'analyser et concevoir la solution. L'autre (P-A-P) agence les sous-tâches liées au problème de construction (mathématique) en résolution, pour distinguer une démarche de validation sous-jacente au processus de construction de l'objet en un contrôle du problème mathématique qu'on résout, un contrôle d'actes de construction qu'on réalise, et puis en la validation du produit de tous les actes de construction qu'on aura réalisés. Ainsi, dans le processus de résolution d'un problème de construction, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) permet de structurer la séquence de résolution et le problème de construction qu'on résout, en une suite d'étapes à suivre, de manière à agencer les sous-tâches qui en découlent, afin de favoriser une résolution méthodique du problème mathématique que pose la situation. Compte tenu du fait que les deux articulations de cette forme d'organisation raffinent le savoir-faire démarche de validation au cours d'une séquence de résolution, elles raffinent la capacité des élèves à résoudre un problème de construction à travers le raffinement du processus de résolution, pour développer un travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, de produire un discours de validation qui accompagne ce travail et de décrire les procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de cet objet. Tel qu'il est présenté ici, ce processus de résolution vise à répondre à la demande de réalisation d'une construction exacte (au sens de l'ETM de référence) pour amener les élèves à produire un travail mathématique permettant de décrire ce processus. Or, pour nous, le processus de construction d'un objet est soutenu par la caractérisation de l'objet à construire, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet à construire, et par une démarche de validation des constructions réalisées. La question est de savoir, **comment fonctionne le modèle (A-A-C/ P-A-P), dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, pour raffiner chacun de ces éléments, chez les élèves, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction ?**

9.1.1. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) et la caractérisation de l'objet géométrique à construire

Dans notre cadre théorique, un problème de construction à résoudre décrit toujours un objet géométrique à construire. Le processus de construction de cet objet, dans les ETM idoines, met en jeu un ensemble d'actions à mener, d'opération à effectuer et de décisions à prendre. Ce processus doit être stable et présenter une cohérence dans son fonctionnement pour permettre la réalisation d'une construction exacte et acceptée par la communauté (Balacheff, 1988). Pour nous, cette cohérence est apportée par « la caractérisation » qu'un élève a de l'objet à construire en lien avec une transformation du plan, disponible dans son référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016). C'est cette caractérisation qui va régler les actions, les opérations et les décisions, pour guider l'activité de construction que mènera cet élève. C'est également elle qui va favoriser l'utilisation de la perception, de l'action manipulatoire des instruments, ainsi que la recherche des définitions et propriétés liées à la transformation du plan choisie. Des éléments qui vont être utilisés à la fois comme moyens de contrôle de l'activité de construction, de la validation et de support à l'intuition et à l'abstraction. Cela signifie que, dans ces ETM idoines, la caractérisation donne lieu, d'une part, à un ensemble de moyens de contrôle du processus de construction, et d'autre part, aux moyens de contrôle de la validation de l'objet à construire.

⁴² Ce qui doit être fait à chaque étape.

Ainsi, le processus de construction de l'objet, bien que dépendant prioritairement du (ou des) paradigme(s) géométrique(s) (Houdement et Kuzniak, 2006) dans lequel (ou lesquels) le travail mathématique permettant de réaliser la construction s'effectue et des procédés de construction (Chevallard et Julien, 1991) qui guident cette réalisation, dépend aussi de l'utilisation de l'interprétation des données, de certaines propriétés liées à la transformation du plan choisie et de la conception que l'élève a des différentes notions mathématiques qu'il convoque au cours de la résolution. Donc, le processus de construction est fondé sur « la caractérisation » de l'objet, dans le modèle (A-A-C/ P-A-P). Pour nous, la caractérisation d'un objet géométrique, dans les ETM idoines, peut-être la représentation que le constructeur (l'élève ou l'enseignant) a de l'objet à construire. Au niveau de l'élève, nous admettons que la caractérisation d'un objet peut aussi être une image mentale, un concept image (Tall et Vinner, 1981), un schème (Vergnaud, 1990) ou une conception de cet objet. Un élève peut traduire sa caractérisation d'un objet par une définition (de façon écrite ou oral ou bien orale et écrite), ou par une procédure (sous une forme opérationnelle). La caractérisation d'un objet insiste sur les éléments fonctionnels ou opératoires de la conception qu'a l'élève de l'objet à construire. Elle prend prioritairement en compte le caractère opérationnel d'une conception de l'objet à construire pour soumettre sa réalisation à une procédure.

Ainsi, dans le processus de caractérisation de l'objet à construire, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) va jouer un rôle important, à travers l'agencement par étapes des sous-tâches, qu'elle met en place. L'élève a une définition de l'objet à construire, celle qui est disponible dans son référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016), les différentes étapes de la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) lui permettront, à un moment donné, de prendre conscience des insuffisances de cette définition, pour réaliser la construction de l'objet demandée ; et d'accepter d'aller vers une définition qui prend en compte les contraintes du problème. La prise en compte et l'interprétation de ces contraintes vont raffiner une caractérisation de l'objet, en lien avec une transformation du plan liée à cet objet. Le raffinement de cette caractérisation, favorisé par les formes d'organisation (A-A-C / P-A-P), va permettre à l'élève de distinguer les éléments nécessaires pour la mise en place du processus de construction et de la démarche de validation des différentes constructions élémentaires. Ce qui lui permettra de disposer, d'une part, d'un ensemble de moyens de contrôle de la construction de l'objet solution du problème, et d'autre part, de disposer d'un ensemble de moyens de validation du produit des actes de construction. Ce raffinement de la caractérisation de l'objet à construire, va également nourrir l'opérationnalisation de la nouvelle définition de l'objet à construire, au niveau de l'élève.

Avec cette description, nous pouvons constater que, dans le travail mathématique d'organisation permettant de développer la démarche de validation, chez les élèves, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) va nourrir le raffinement de la caractérisation de l'objet à construire. En effet, les articulations de cette forme d'organisation permettront à l'enseignant de raffiner une caractérisation opérationnelle de l'objet, pour développer le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent la construction effective de cet objet.

9.1.2. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P), le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet à construire

Dans notre recherche, nous regardons la notion de « conception » sous l'angle d'un savoir mathématique en rapport avec l'objet à construire, dans les ETM idoines fixés à notre cadre. Ainsi, une conception de l'élève, dans ces ETM, est ce que ce dernier construit comme connaissance par rapport à un concept mathématique. Ceci signifie qu'au cours du raffinement de la caractérisation de l'objet à construire, nourri par la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P), l'élève enrichit son intuition de manière à pouvoir traduire sa caractérisation de l'objet à construire, à travers une définition qui n'est pas disponible dans son référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016), mais qui est liée à l'objet par une transformation du plan. C'est cette définition qui va décrire la procédure de construction de l'objet et mettre en exergue la forme opérationnelle de la caractérisation de l'objet pour dévoiler ce que l'élève a construit comme connaissance par rapport à la transformation du plan choisie. La forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) va donc nourrir l'intuition de l'élève de manière à l'amener à choisir, parmi toutes les transformations du plan disponibles, celle qui s'articule mieux avec les contraintes du problème et la définition caractéristique de l'objet à construire dont il dispose, pour définir une condition nécessaire et suffisante ou identifier une propriété pertinente, pour la réalisation de la construction de l'objet demandée. Le raffinement du choix et d'une conception de la transformation du plan, favorisé par la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P), à travers la caractérisation de l'objet à construire, va fournir des moyens à l'élève lui permettant de produire un travail mathématique complet permettant la réalisation de la construction, de bâtir le discours de validation qui accompagne ce travail et de décrire les procédés de construction qui réalisent la construction de cet objet.

Ainsi, dans le travail mathématique d'organisation permettant de développer la démarche de validation, chez les élèves, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) va nourrir le raffinement du choix et d'une conception d'une transformation du plan liée à l'objet. En effet, les articulations de cette forme d'organisation permettront à l'enseignant de raffiner, chez les élèves, le choix et une conception d'une transformation du plan, permettant de développer le travail mathématique qui permet de réaliser la construction de l'objet, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent la construction de cet objet.

9.1.3. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) et le processus de réalisation de la construction de l'objet géométrique

Dans notre cadre théorique (EPP), nous avons désigné par « construire » tout processus qui consiste, d'une part, à réaliser une suite d'actions, d'opérations et de décisions élémentaires ; et d'autre part, à prouver que l'ensemble obtenu à la fin de ce processus remplit les conditions imposées par le problème. Ainsi, « une activité de construction », conduite dans les ETM idoines, désigne le processus permettant de construire un objet géométrique. Donc, une « construction » désigne le produit d'une activité de construction qui est l'objet construit. Cet objet peut être, selon le contrat didactique, une construction instrumentée (ou une figure), un algorithme (ou programme) de construction, ou bien les deux. Cela signifie que l'activité de construction d'un objet, décrit par un problème de construction, peut aboutir à un ou plusieurs

type(s) de constructions. Une catégorie d'actes de construction, que nous désignons par (a_p) permet d'obtenir un type de constructions. Et ce sont ces actes qui réalisent la construction d'un objet dans les ETM idoines. Ainsi, une construction représente le produit de tous les actes de construction réalisée. Cependant, une catégorie d'actes est constituée de plusieurs actions, opérations et décisions élémentaires. Donc, l'ensemble de toutes les actions, opérations et décisions élémentaires constituent le produit d'actes de construction qui est la construction finale. Ainsi, le processus de construction, dans les ETM idoines, est l'ensemble d'actions, d'opérations et de décisions que prend l'élève au cours d'une activité de construction pour réaliser une construction exacte (au sens de l'institution) et valide. Vu sous cet angle, (a_p) peut être obtenu soit à partir des effets d'une théorie géométrique pour décrire la construction de l'objet dans le paradigme G2, soit à partir des effets des instruments de géométrie pour décrire la construction de l'objet dans le paradigme G1. Ainsi, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) va raffiner le choix du type de construction à réaliser. Ce raffinement va définir une catégorie d'actes de construction et donner lieu au raffinement des différentes actions à réaliser, opérations à effectuer et décisions à prendre, qui vont générer la construction. La caractérisation de l'objet à construire et la conception d'une transformation du plan en lien avec cet objet, raffinées par la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P), vont donner de la cohérence et apporter une stabilité locale au fonctionnement de l'activité de construction, conduite dans les ETM idoines. Elles vont régler les actes et organiser le processus de construction sous forme d'entités qui peuvent être soit de l'ordre mathématique, telles que les propriétés pour obtenir une définition opérationnelle de l'objet afin d'élaborer l'algorithme de construction, soit de l'ordre psychologique telle que, la disposition spatiale de la construction instrumentée, soit de l'ordre de l'action physique tel que, le maniement des instruments de géométrie à utiliser pour réaliser la construction instrumentée illustrant l'algorithme de construction. Le raffinement du processus de construction, par la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P), va développer le contrôle des actions de construction dans le but d'amener l'élève à représenter sa caractérisation de l'objet à construire. Donc, dans l'activité de construction que conduit l'enseignant, l'élève est amené à relever, non seulement sa caractérisation de l'objet à construire, mais aussi à mettre en place des moyens de contrôle du processus de construction de cet objet.

Ainsi, dans le travail mathématique d'organisation permettant de développer la démarche de validation, chez les élèves, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) va nourrir le raffinement de la représentation qu'a l'élève de l'objet à construire, l'objet qu'il a construit et qui correspond à sa représentation de l'objet géométrique à construire, et des moyens de contrôle à utiliser pendant la construction de l'objet géométrique. En effet les articulations de cette forme d'organisation permettront à l'enseignant de raffiner, chez les élèves, le processus de réalisation de la construction qui va permettre de développer le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de cet objet.

9.1.4. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) et la validation de l'objet géométrique à construire

Dans notre recherche, nous avons admis que *pratiquer « la démarche de validation des constructions, dans les ETM idoines fixés à notre cadre théorique, consiste à essayer de valider une*

construction réalisée, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction ». Ainsi, nous avons considéré que « valider » une construction, dans ces ETM, c'est prouver (pour se rassurer et convaincre), à travers un jeu de substitution et d'interprétation des caractérisations de l'objet à construire par des arguments (ou des raisons) mathématiques extraits de la conception d'une transformation du plan liée cet objet, que la construction réalisée satisfait aux contraintes de l'énoncé du problème. Donc, « la validation » d'une construction est tout raisonnement qui vise à établir la vérité de la conclusion sur les constructions élémentaires réalisées. Autrement dit, c'est tout raisonnement qui produit des raisons (arguments) visant à établir l'exactitude et la validité d'une construction. Dans ce processus, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P), à travers l'articulation (P-A-P) issue de la définition et de la décomposition d'un problème de construction, va faire dépendre la validation de certains éléments que l'élève peut distinguer. Elle va donc ainsi raffiner la distinction d'une démarche de validation sous-jacente au processus de construction de l'objet en un contrôle du problème mathématique à résoudre, un contrôle d'actes de construction à réaliser, et puis en la validation du produit de tous les actes de construction réalisés. Ce qui signifie que, dans les ETM idoines, la validation est soutenue, par une caractérisation de l'objet à construire. Or, cette caractérisation dérive du choix et d'une conception de la transformation du plan, raffinés par la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P). Donc, cette validation est directement liée à l'articulation (P-A-P) et s'appuie sur ses trois composantes. Ainsi, elle se compose : d'un contrôle du problème, pour anticiper sur la validation du produit ; d'un contrôle d'actes de construction, pour assurer une validation pas à pas des constructions élémentaires qui sont réalisées ; et d'une démonstration (ou preuve), considérée comme un raisonnement de validation de la vérité de la conclusion sur toutes les constructions élémentaires réalisées, pour assurer la validation de la construction finale. Par ailleurs, nous avons établi que la structure de caractérisation de l'objet à construire mise en place, à travers le raffinement du choix et de la conception d'une transformation du plan, raffinés par la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P), est soutenue par les propriétés issues de cette transformation du plan. Ce qui veut dire que la caractérisation de l'objet à construire est raffinée sous la forme de propriétés mathématiques. Donc, cette validation est bien une validation mathématique. La centration de la validation sur l'articulation (P-A-P), pendant le processus de résolution, raffine le développement des contrôles (Balacheff et Margolinas, 2017) et de la démonstration comme des régimes de validation (Balacheff, 2017) des constructions, chez les élèves. Ainsi, plus le raffinement de la caractérisation de l'objet à construire est nourri, plus les élèves vont distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent prendre appui pour valider la construction réalisée.

Ainsi, dans le travail mathématique d'organisation permettant de développer la démarche de validation, chez les élèves, la forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) va nourrir le raffinement de la distinction de « la démarche de validation des constructions » sous-jacente au processus de construction de l'objet en : un contrôle du problème mathématique que l'on résout, un contrôle d'actes de construction qui sont réalisés, et puis en la validation du produit de tous les actes de construction qui ont été réalisés. En effet, l'articulation (P-A-P) de cette forme d'organisation permet à l'enseignant de raffiner, chez les élèves, le contrôle du problème mathématique à résoudre et des actes de construction à réaliser, et la démonstration (ou preuve) comme raisonnement de validation de la construction, pour développer un travail mathématique

complet permettant de réaliser la construction de l'objet, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent la construction de cet objet.

Dans cette description, nous pouvons constater que le modèle (A-A-C / P-A-P) fonctionne bien à l'aide du principe de raffinement d'un savoir (ou un savoir-faire). Il raffine le savoir-faire « démarche de validation », chez les élèves, en transformant progressivement les données du problème en des propriétés mathématiques disponibles dans le référentiel théorique des élèves, afin de réaliser une construction de l'objet que décrit le problème de construction. Les différentes étapes de transformation qui structurent ce modèle, amènent l'élève à prendre conscience des insuffisances de ses connaissances antérieures (Arsac et al. 1992) sur l'objet que décrit le problème, et le pousser à aller vers la recherche de certains éléments sur lesquels il peut s'appuyer pour décrire le processus de construction de l'objet demandé. Cette description met en évidence la caractérisation de l'objet à construire, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le processus de réalisation de la construction de l'objet et la validation de l'objet construit, comme étant les éléments que raffine la structure de développement de la démarche de validation adossée à ce modèle. Ainsi, que ce soit le raffinement de la résolution, de la caractérisation de l'objet, du choix et d'une conception d'une transformation du plan, de la réalisation de la construction de l'objet ou de la validation sous-jacente à la construction ; tous ces éléments sont développés, chez les élèves par l'enseignant, dans un ETM particulier, pour raffiner un travail mathématique d'organisation dans lequel sont produits : un travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, un discours de validation qui accompagne ce travail et des procédés de construction qui réalisent la construction de cet objet. La question est de savoir, **quelles sont les caractéristiques des éléments qui réalisent le travail mathématique d'organisation permettant le raffinement de la démarche de validation, chez les élèves, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), dans les ETM idoines, en classe Première Scientifique ?**

9.2. La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) : un modèle pour développer la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique

Dans notre recherche, nous analysons la forme d'organisation du travail mathématique, à partir de l'activité de construction d'un objet géométrique décrit à l'aide d'un problème de construction lié aux transformations du plan, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Conformément à notre cadre d'analyse (EPP), nous caractérisons le modèle (A-A-C / P-A-P) à partir de la structure de développement de la démarche de validation qu'il offre, à l'aide du travail mathématique d'organisation produit. En particulier, nous décrivons à l'intérieur de ce modèle, le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de cet objet. Et c'est à partir de cette description que nous élaborons la structure de développement de la démarche de validation adossée à ce modèle. Notre grille d'analyse est celle qui consiste à :

1. Décrire les procédés de construction de l'objet, en s'appuyant sur les éléments suivants :
 - La preuve d'existence de l'objet à construire.

- La preuve de constructibilité de l'objet à construire.
 - La construction représentant l'objet.
2. Décrire le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, en se basant sur les points ci-dessous :
 - La méthode mathématique mobilisée pour réaliser la construction.
 - Le(s) paradigme(s) géométrique(s) privilégié(s) qui dirige (-nt) ce travail.
 - La(les) dimension(s) privilégiée(s) dans ce travail. En effet, nous analysons les dimensions : sémiotique, discursive et instrumentales, de ces ETM.
 - La circulation du travail mathématique au sein des plans verticaux des dimensions des ETM permettant de réaliser la construction.
 3. Décrire le discours de validation qui accompagne le travail mathématique, à partir des points ci-dessous :
 - Le raisonnement mobilisé pour produire la validation des constructions.
 - Les arguments employés dans l'argumentaire de validation des constructions.
 - La mise en forme de l'argumentaire de validation des constructions.

Dans la suite, nous commençons par caractériser les éléments (1), (2) et (3), tels qu'ils fonctionnent dans modèle (A-A-C / P-A-P). Ensuite, nous élaborons la structure de développement de la démarche de validation des constructions qu'offre ce modèle.

9.2.1. La caractérisation du modèle (A-A-C / P-A-P) dans le développement de la démarche de validation, chez les élèves

Les analyses menées précédemment, présentent l'activité de résolution d'un problème de construction comme un processus qui peut être raffiné, chez les élèves, à l'aide de la forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P). À ce titre, ce modèle développe la capacité des élèves à résoudre un problème de construction (ou mathématique). Ces analyses mettent en exergue le raffinement par cette forme d'organisation du processus de résolution, de la caractérisation de l'objet à construire, du choix et de la conception d'une transformation du plan liée à l'objet à construire, du processus de construction de l'objet et de la validation de l'objet construit. Donc, il raffine, au niveau des élèves, une validation mathématique qui dépend de la caractérisation que l'élève a de l'objet à construire. Cette validation s'appuie sur les propriétés issues de la géométrie des transformations. Ce qui signifie que le discours de validation qui permet d'établir la vérité de la construction réalisée prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif. Cette démonstration opère à travers des interprétations et des substitutions, de la caractérisation de l'objet géométrique à construire, par des propriétés mathématiques liées à une transformation du plan. Ainsi, les arguments utilisés dans cet argumentaire sont formels (ou théoriques) et disponibles dans le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016) des élèves. Afin de permettre à l'élève de prendre conscience des insuffisances de ses connaissances antérieures (Arsac et al., 1992) relativement à l'objet que décrit le problème de construction, le modèle est axé sur la transformation progressive (en plusieurs étapes) des données, à l'aide du principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, de telle sorte qu'à une étape donnée du modèle, l'élève accepte de renoncer aux connaissances anciennes (Robert, 2012) qu'il a de l'objet et construise une définition nouvelle (Arsac et al., 1992), opérationnelle. Ainsi, le raisonnement est progressif et structuré par étapes. Il peut

commencer par la réalisation d'une construction « témoin » pour raffiner progressivement, l'exactitude et la validité de la construction, solution du problème. Ainsi, ce raisonnement peut d'abord être analogique, pour rechercher les arguments (Balacheff, 1988), ensuite inductif, pour formuler des conjectures, et enfin déductif, pour contrôler (Balacheff et Margolinas, 2017), justifier, communiquer et établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions élémentaires réalisées. Le maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, pour dégager une condition nécessaire et suffisante, ou l'abandon de contrainte (ou affaiblissement de contrainte), pour laisser apparaître les propriétés pertinentes pour la réalisation effective de la construction de l'objet, ou bien les deux méthodes simultanément, sont trois méthodes mathématiques qui peuvent être utilisées dans la réalisation effective du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet. En effet, ces méthodes utilisent, dans leurs mises en œuvre, un raisonnement progressif. Donc, elles peuvent s'articuler avec les différentes étapes du modèle (A-A-C / P-A-P).

Par ailleurs, dans le raffinement des éléments sur lesquels les élèves peuvent se référer pour produire la démarche de validation des constructions, le travail peut commencer dans G1 avec la réalisation de la construction « témoin », pour rechercher les arguments, se disperser et s'émietter dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, pour formuler des conjectures, et puis se stabiliser dans le paradigme G2 pour se conformer à l'ETM de référence et élaborer le discours de validation qui accompagne ce travail. Ainsi, il peut donc être de type sémiotique au départ, pour établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet ; ensuite de type instrumental, pour réaliser la construction « témoin », redevenir sémiotique tout en étant discursif, pour dégager le problème mathématique à résoudre et caractériser l'objet à construire, puis rester discursif tout au long du processus, pour le choix et la conception d'une transformation du plan en lien avec l'objet demandé, ainsi que pour la description de la construction de cet objet. Il peut enfin, redevenir instrumental, pour réaliser une construction instrumentée, permettant d'illustrer l'algorithme de construction de l'objet. En d'autre terme ce travail peut circuler suivant, les plans [Dis-Sem]→Sem, [Ins-Sem]→Sem ou (Dis), [Sem-Dis]→Dis et [Sem-Ins]→Ins.

Cependant, les preuves d'existence et de constructibilité de l'objet peuvent être établies en reliant la question mathématique à résoudre à un contenu mathématique (ou un concept mathématique vu en cours) afin de ramener le travail mathématique de réalisation et de validation de la construction, à une application des propriétés, disponibles dans le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016) des élèves. Ainsi la construction réalisée sera celle qui est conforme aux règles du contrat, à savoir un algorithme (ou programme) de construction accompagnée d'une construction instrumentée. La démarche de validation consiste donc en : un contrôle du problème, pour anticiper sur la validation de la construction finale ; un contrôle d'actes de construction, pour valider pas à pas les constructions élémentaires ; et une démonstration, pour établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions élémentaires réalisées. La validation développée ici vise à se convaincre pour se rassurer de l'exactitude et de la validité de la construction réalisée, et puis à convaincre autrui que cette construction est exacte, et bien celle qui est attendue.

Nous résumons dans les trois tableaux ci-dessous les caractéristiques du travail mathématique d'organisation que génère la structure de développement de la démarche de validation adossé au modèle (A-A-P / P-A-P), telles qu'elles sont apparues tout au long de nos analyses.

Eléments d'analyse	Procédés de construction
Preuve d'existence	Relier à un objectif du programme
Preuve de constructibilité	Relier à un objectif du programme
La construction de l'objet	Algorithme (ou programme) de Construction + Construction Instrumentée + Discussions sur le nombre possible, de Constructions solutions

Tableau 15 : Caractérisation des procédés de construction dans le modèle (A-A-C / P-A-P)

Eléments d'analyse	Travail mathématique permettant la réalisation de la construction
Méthode mathématique mobilisée	Maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes et/ou Abandon de contraintes.
Paradigme(s) privilégié(s)	G1 et $G1 \leftrightarrow G2$ au départ. G2 tout au long, articulé avec l'approche affine ou les expressions analytiques (géométrie métrique)
Dimension(s) de l'ETM privilégiée(s)	Sémiotique et Discursive
Circulation du travail	[Dis-Sem] → Sem [Sem-Ins] → Ins (ou Sem) ou (clos Dis), [Sem-Dis] → Dis [Sem-Ins] → Ins

Tableau 16 : Caractérisation du travail mathématique permettant la réalisation de la construction dans le modèle (A-A-C / P-A-P)

Eléments d'Analyse	Discours de validation qui accompagne le travail mathématique
Raisonnement mobilisé	<ul style="list-style-type: none"> - Analogique pour rechercher les arguments - Inductif pour formuler des conjectures - Déductif pour contrôler, justifier, communiquer et établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions réalisées.
Arguments employés dans l'argumentaire de validation	Formels (ou théoriques) Formels à l'intérieur de l'approche affine ou de l'approche par les expressions analytiques. Issus de propriétés mathématiques et des substitutions de la caractérisation de l'objet à construire par les propriétés sur la transformation du plan liées à cet objet.

Mise en forme de l'argumentaire	Organisé sous la forme d'une démonstration (ou preuve).
Démarche de validation	<p style="text-align: center;"> Contrôle du Problème + Contrôle D'actes de Construction + Preuve pour Valider le Produit d' Actes de Construction </p>

Tableau 17 : Caractérisation du discours de validation qui accompagne le travail mathématique dans le modèle (A-A-C / P-A-P)

Cette caractérisation du travail mathématique d'organisation à l'intérieur du modèle (A-A-C / P-A-P), dans les ETM idoines fixés à notre cadre, permet de mettre en évidence la structure de développement de la démarche de validation des constructions adossée à ce modèle.

9.2.2. La structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P)

Le modèle (A-A-C / P-A-P), pour développer la démarche de validation, chez les élèves, est étudié en se plaçant du côté de l'enseignant, porteur de ce projet d'enseignement. Les résultats des analyses précédentes, assignent au travail mathématique d'organisation, une méthode mathématique, une nature, une circulation et des paradigmes géométriques privilégiés. La structure de développement de la démarche de validation adossée à ce modèle décrit un argumentaire de validation, dans lequel le discours met en place des contrôles du problème et d'actes de construction, et une démonstration pour valider le produit d'actes de construction. Cet argumentaire est conduit dans un contexte de justification et utilise des arguments formels (ou théorique). L'intérêt de réalisation de la construction portant plus sur la procédure que sur le résultat obtenu, le modèle a pour objectif central d'amener les élèves à distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent se référer pour valider les constructions qu'ils réalisent. Ces éléments sont raffinés à partir de la structure de développement de la démarche de validation représentée par le schéma ci-dessous :

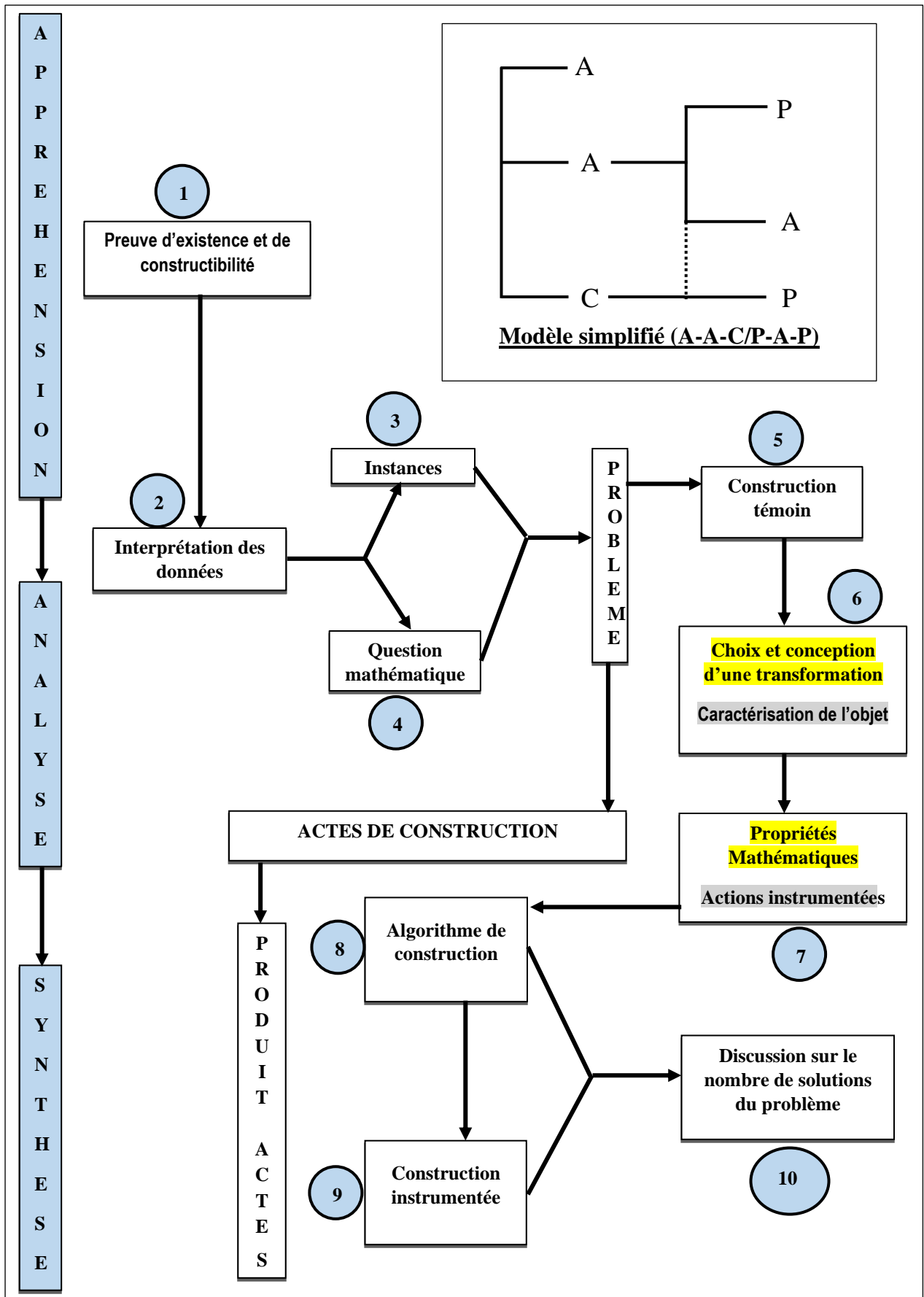


Figure 10 : Structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P)

Dans le schéma ci-dessus, l'articulation (A-A-C) est externe au problème de construction. Elle raffine la séquence de résolution. Dans ce processus, le bloc « Appréhension de la situation » qui prioritairement, permet de fixer la situation à résoudre dans un contexte, vise à travers l'élément (1) à établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet. Le bloc « Analyse de la situation » est constitué des carrés (2), (3), (4), (5), (6) et (7) ; à l'intérieur desquels viennent s'intégrer les deux premières étapes de l'article (P-A-P) (« identification du problème » (P) et « Actes de construction » (A)) pour, d'une part, produire des moyens de contrôle du problème permettant d'anticiper sur la validation de la construction, et d'autre part, produire des actes de construction permettant de valider pas à pas les constructions élémentaires. Ce bloc permet également la mise en œuvre de la démonstration qui permet d'établir l'exactitude de la construction. Les carrés (2), (3), (4) et (5) raffinent une caractérisation de l'objet à construire, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet. Le carré (7), quant à lui, raffine la distinction des actions, des opérations et des décisions qui vont constituer les actes de construction. Le bloc « Conception de la solution » pris comme la synthèse, est constitué des carrés (8), (9) et (10). Dans ce bloc vient se greffer la dernière étape « Produit d'actes de construction » (P) de l'articulation (P-A-P). Il raffine, non seulement, une technique permettant de matérialiser la construction de l'objet conformément aux règles du contrat didactique, mais aussi donne une manière correcte de discuter sur le nombre de solutions exactes que peut avoir le problème.

La mise en évidence des caractéristiques du travail mathématique d'organisation et de la structure de développement de la démarche de validation, du modèle (A-A-C / P-A-P), soulève des questions de différenciation entre ce modèle et la forme d'organisation du travail mathématique (A-S) actuellement disponible, à savoir : **dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique quelle différence existe-t-il , entre le modèle (A-S) et la forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) ?**

9.3. Etude comparative des modèles (A-A-C / P-A-P) et (A-S) dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique

Compte tenu du fait que le modèle (A-A-C / P-A-P) est élaboré à partir de la forme d'organisation (A-S), actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, il est évident que ces deux modèles aient beaucoup de points de similitude. Cependant, l'enjeu du nouveau modèle que nous avons élaboré, réside dans ses différences avec le modèle (A-S). C'est pourquoi l'étude comparative que nous conduisons consiste à illustrer les différences entre les deux modèles.

La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P), est élaborée sur la base des limites du modèle (A-S) et du principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire). Un principe qui est lui-même adossé sur l'articulation entre le principe de raffinement pétrolier et notre conception de l'enseignement et de l'apprentissage en milieu scolaire. Ceci signifie que les deux modèles présentent des différences sur certains points, liés soit à leur conception, soit à leur fonctionnement ou soit à leur structure de développement de la démarche de validation :

- **Sur le plan de leur conception** : bien que les deux raffinent le savoir-faire « démarche de validation des constructions », la forme d'organisation (A-S) est constituée de deux

étapes. Elle découle du raisonnement par l'analyse-synthèse considéré comme une méthode mathématique de résolution des problèmes de construction, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Le modèle (A-A-C / P-A-P) quant à lui contient six étapes organisées en deux articulations, contenant chacune trois étapes. Il est adossé au principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, qui vise à raffiner une manière de distinguer progressivement certains éléments pouvant permettre aux élèves de produire une démarche de validation des résultats mathématiques qu'ils obtiennent.

- **Sur le plan de leur fonctionnement** : dans les ETM idoines, la forme d'organisation (A-S) raffine uniquement la séquence de résolution sans qu'un travail d'organisation ne soit fait sur le problème mathématique (de construction) qu'on résout. Elle n'insiste pas sur l'appréhension de la situation par les élèves et se limite à développer à l'intérieur de sa structure de développement de la démarche de validation, un travail mathématique d'organisation qui ne mobilise qu'une seule méthode mathématique : le maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, pour dégager une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et la réalisation effective de la construction de l'objet. Elle privilégie la dimension discursive des ETM en jeu, et fixe prioritairement le travail mathématique dans le paradigme G2. Cette forme d'organisation (A-S), produit une validation qui consiste à démontrer pas à pas les constructions réalisées, pour s'assurer et convaincre autrui que la construction réalisée au bout est exacte et valide. Le modèle (A-A-C / P-A-P), quant à lui, raffine la séquence de résolution et le problème mathématique (de construction) que l'on résout. Il impose un raffinement de la phase d'appréhension de situation, au niveau des élèves, pour établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet. Il met en évidence une structure de développement de la démarche de validation dans laquelle le travail mathématique d'organisation peut mobiliser trois méthodes mathématiques : le maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, pour déterminer une condition nécessaire et suffisante, pour l'existence et la réalisation effective de la construction de l'objet ; ou l'abandon de contrainte (ou affaiblissement de contraintes) au départ de la résolution, pour permettre l'identification des propriétés pertinentes pour la construction effective de l'objet ; ou encore les deux simultanément. Il privilégie les dimensions sémiotique et discursive, des ETM en jeu, et fixe prioritairement le travail mathématique dans le paradigme G2 et dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2. Cette deuxième forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) développe une validation qui consiste à mettre en place des contrôles du problème, pour anticiper sur la validation de l'objet à construire ; des contrôles d'actes de construction, pour valider pas à pas toutes les constructions élémentaires ; et une démonstration pour établir la vérité de la conclusion sur l'exactitude et la valider de toutes les constructions élémentaires réalisées.
- **Sur le plan de leurs structures de développement de la démarche de validation** : la forme d'organisation (A-S) met en place une structure à deux étapes qui s'appuie sur la séquence de résolution, pour raffiner, à partir du choix et de la conception d'une transformation du plan, une caractérisation de l'objet à construire. Ce raffinement utilise une construction « témoin » pour dégager une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et la réalisation effective de l'objet. Dans le schéma de validation qu'elle

développe, elle met en évidence un seul régime de validation (Balacheff, 2017) qui est la démonstration, considérée comme raisonnement de validation des constructions. En revanche, le modèle (A-A-C / P-A-P) met en place une structure en six étapes qui prend appui sur la séquence de résolution et sur la décomposition d'un problème de construction, pour raffiner une manière d'établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet, de dégager le problème mathématique à résoudre, de caractériser l'objet à construire, de choisir et de concevoir une transformation du plan en lien avec l'objet à construire, et de décrire la construction de l'objet demandée. Le modèle met en exergue le principe de raffinement par étapes qui permet aux élèves de se rendre compte, à une étape donnée, des insuffisances des caractérisations qu'ils ont de l'objet à construire et d'accepter d'aller vers une caractérisation opérationnelle de cet objet. Ainsi, elle utilise une construction « témoin » pour dégager : soit une condition nécessaire et suffisante ; soit l'identification des propriétés pertinentes pour la réalisation de la construction, soit les deux simultanément. Dans son schéma de validation, le modèle (A-A-C / P-A-P) fait fonctionner deux régimes de validation (Balacheff, 2017) : les contrôles (Balacheff et Margolinas, 2017), pour anticiper sur la validation de la construction demandée et la validation pas à pas des constructions élémentaires, puis la démonstration, pour établir l'exactitude et validité de la construction réalisée.

Ces trois points énumérés précédemment, constituent l'enjeu du modèle (A-A-C / P-A-P), et établissent une nette différence avec le modèle (A-S), disponible actuellement dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Cette différence positionne la notion de « forme d'organisation du travail mathématique », au niveau d'un enseignant, comme une caractéristique du travail mathématique dont la variation aboutit à un changement de stratégie dans le développement de la démarche de validation, chez les élèves. Notre travail ne consistant pas à démontrer que « la forme d'organisation du travail mathématique » est une transposition de la notion de variable didactique (Brousseau, 1985) sur l'enseignant ou une extension de cette notion sur les élèves, nous ne nous intéressons pas à cet aspect dans cette recherche. Nous nous limitons à regarder comment on peut développer la démarche de validation chez les élèves, à l'aide d'une forme d'organisation du travail mathématique mise en place, dans les ETM idoines, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction lié aux transformations du plan.

Conclusion

L'objectif de ce chapitre consistait à déterminer les éléments que doivent raffiner les ETM idoines à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), pour développer la démarche de validation, chez les élèves. Pour le faire, nous avons conduit une analyse descriptive du fonctionnement du modèle (A-A-C / P-A-P) au cours d'une activité de construction d'un objet géométrique décrit à l'aide d'un problème de construction. Cela nous a permis de caractériser ce modèle, et de mettre en évidence la structure de développement qu'il offre.

Le modèle fonctionnant sur la base du principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, ces analyses établissent, *a priori*, qu'il développe les capacités des élèves à construire et à valider les objets géométriques qu'ils réalisent. Dans le développement de ces

capacités, il permet aux élèves : d'appréhender la situation à résoudre, pour établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet que décrit le problème de construction ; d'analyser la situation, pour étudier une configuration considérée au départ comme solution du problème, ceci à travers la mise en évidence du problème mathématique que soulève la situation et l'identification des actes de construction ; et enfin, de concevoir une solution de la situation, dans le cadre d'une synthèse visant à mettre au point une procédure permettant de réaliser la construction. Ainsi, ce modèle met en évidence la distinction de certains éléments que sont : le processus de résolution ; la caractérisation de l'objet ; le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet ; le choix du type de construction à mettre en œuvre ; et l'identification des différentes actions, opérations et décisions, qui fournissent aux élèves, d'une part, des moyens leur permettant de réaliser la construction de l'objet, et d'autre part, des moyens leur permettant de contrôler et de valider la construction qui va être réalisée. Ainsi, ce modèle raffine, chez les élèves : le processus de résolution, une caractérisation opérationnelle de l'objet à construire, le choix et la conception d'une transformation du plan, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de construction de l'objet, et la validation de la construction réalisée. Il prend en compte deux aspects de la situation à résoudre que néglige la forme d'organisation (A-S), actuellement disponible, à savoir : l'appréhension de la situation et l'organisation du problème mathématique en résolution. Ce sont des éléments que nous avons identifiés comme étant les limites de la forme d'organisation (A-S). Ainsi, le modèle (A-A-C / P-A-P) présente des caractéristiques et fonctionnement différents de la forme d'organisation (A-S) que proposent les ETM potentiels.

Compte tenu du fait que nous avons admis, qu'**un modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré à partir des limites de la forme d'organisation « Analyse-Synthèse » (A-S) développerait mieux la démarche de validation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique**, le modèle (A-A-C / P-A-P) se positionne comme la forme d'organisation du travail mathématique qui développerait mieux la démarche de validation des constructions, chez les élèves. Ce modèle produit des procédés de construction visant à établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet en reliant la situation à résoudre à un objectif du programme, pour décrire la construction de l'objet à travers un algorithme de construction accompagné d'une construction instrumentée. Il décrit un travail mathématique de réalisation de la construction d'un objet, qui peut mobiliser : soit le maniement des conditions nécessaires et des conditions suffisantes, soit l'abandon de contraintes (ou affaiblissement de contraintes) en début de résolution, soit les deux simultanément. Il privilégie deux dimensions des ETM : la sémiotique et la discursive. Et s'effectue prioritairement dans le paradigme G2 et dans la cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, tout en commençant dans le paradigme G1. Ce travail circule suivant les plans : [Dis-Sem] → Sem, [Ins-Sem] → Sem ou (Dis), [Sem-Dis] → Dis et [Sem-Ins] → Ins. Cependant, le discours de validation de la construction qui accompagne ce travail prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif, qui suit un schéma de validation qui consiste à mettre en place : des contrôles du problème, pour anticiper sur la validation de l'objet ; des contrôles d'actes de construction, pour valider pas à pas les constructions élémentaires ; et la démonstration, pour prouver et établir la vérité de la conclusion sur toutes les constructions réalisées. L'argumentaire utilise des arguments formels (ou théoriques) issus des interprétations et des substitutions, d'une caractérisation de l'objet à

construire, par les propriétés mathématiques liées à une transformation du plan disponible dans le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016) des élèves. Ce qui nous permet d'établir le bilan ci-dessous pour répondre à notre question de recherche.

Bilan

Pour développer la démarche de validation, chez les élèves, **les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, raffinent à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) : le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit des actes de construction.** Ce sont les éléments sur lesquels les élèves peuvent se référer pour valider une construction qu'ils réalisent.

De ce résultat, nous pensons que les ETM idoines qui développent la démarche de validation, chez les élèves, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), raffinent une manière de distinguer les éléments énumérés ci-dessous. Cela conduit à une variation des modalités de travail (mise en œuvre) relativement au modèle (A-S) actuellement disponible. Nous admettons que cette variation pourra avoir une influence sur le traitement d'un problème mathématique (de construction) par un enseignant, en salle, avec ses élèves, au cours de l'apprentissage de validation ; et, que cette influence pourra apparaître au niveau :

- Du processus de résolution de la situation.
- De la caractérisation de l'objet à construire,
- Du choix et de la conception d'une transformation du plan liée à l'objet,
- Du choix du type de construction à mettre en œuvre,
- De la description du processus de construction de l'objet,
- De la validation des constructions.

Cette influence pourra être perceptible, dans les ETM idoines effectifs à travers le travail mathématique d'organisation permettant de développer la démarche de validation. Ce travail se décline sous la forme du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, du discours de validation qui accompagne ce travail mathématique et des procédés de construction qui réalisent effectivement cette construction. La question est de savoir **quel impact peut avoir le modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'enseignement et sur l'apprentissage de la validation dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique ?**

Chapitre 10

L'apport du modèle (A-A-C / P-A-P) dans le développement de la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique

Dans ce chapitre, nous cherchons à illustrer l'apport du modèle (A-A-C / P-A-P) dans l'enseignement de la validation. Notre question consiste à savoir :

Q_{4.1} : Quels rôles peut jouer le modèle (A-A-C / P-A-P), au cours de la réalisation d'un projet de développement de la démarche de validation, chez les élèves, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique ?

À notre avis, répondre à cette question revient à étudier comment le modèle influe sur le développement de la démarche de validation, au sein des ETM idoines. Il s'agit d'observer la mise en œuvre de ce modèle dans une séquence de résolution et, d'analyser l'impact du travail mathématique d'organisation et de la forme du travail mathématique produit, sur le développement de la validation, chez les élèves, dans les ETM idoines effectifs. À travers l'hypothèse ($H_{4.1}$), nous postulons que :

Dans les ETM idoines effectifs, le modèle (A-A-C / P-A-P) joue un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la manière de distinguer : le processus de résolution, une caractérisation de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit de tous les actes de construction. Il s'agit là des éléments sur lesquels les élèves peuvent se référer pour produire la démarche de validation des constructions qu'ils réalisent.

Pour tester cette hypothèse, nous étudions l'apport de cette forme d'organisation au profit de l'enseignant. Que celui-ci soit en situation d'introduction d'une notion de géométrie par une approche par la problématique de la construction, qu'il soit confronté à une activité mathématique de résolution d'un problème de construction visant à développer un savoir (ou savoir-faire) ou qu'il soit en train de produire des explications visant à favoriser la compréhension d'un énoncé mathématique par ses élèves. Notre objectif consiste donc à illustrer le rôle que joue ce modèle, chez un enseignant, en situation d'enseignement de la validation. Pour atteindre cet objectif, nous observons et filmons une séquence de résolution d'un problème de construction, conduite en classe par un enseignant. Puis nous analysons la forme de travail mathématique d'organisation que met en œuvre cet enseignant pour développer la démarche de validation chez les élèves.

Nous commençons par expliciter la méthodologie adoptée pour illustrer le rôle du modèle (A-A-C / P-A-P) dans les ETM idoines. Ensuite, nous analysons le déroulement de la mise en œuvre d'une situation à l'aide de ce modèle, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction en classe.

10.1. La méthodologie particulière de recherche

Notre méthodologie consiste à :

- Reprendre la situation traitée dans la première expérimentation par les enseignants P_A et P_B . En effet, nous reprenons la même situation afin d'éliminer l'effet de la variation de l'énoncé du problème sur l'apprentissage de la validation et augmenter les effets du contrat didactique (Brousseau, 1998), de se focaliser sur les exigences du modèle (A-A-C / P-A-P) et sur l'observation de ses effets sur l'enseignement de la démarche de validation, et d'éviter de faire de nouvelles analyses *à priori* de la situation.
- Réaliser un sondage qui vise à sélectionner un échantillon d'enseignants des classes de Première Scientifique répondant à nos besoins d'étude.
- L'observation d'une séquence de résolution de la situation en classe : ici, nous observons, filmons et réalisons la transcription d'une séquence de résolution de la situation en classe, conduite par un enseignant avec ses élèves.

Notre échantillon est composé d'un enseignant d'une classe de Première Scientifique, située dans un établissement différent des établissements des enseignants P_A et P_B ayant pris part à la première expérimentation. Dans cette étude, l'enseignant que nous observons est désigné par P_C . La classe par Première Scientifique C. Cet enseignant et ses élèves sont désignés par le couple, (P_C, E_C) . Compte tenu du fait que nous cherchons à décrire l'influence du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'enseignant, porteur du projet de développement de la démarche de validation, nous allons à travers une séquence de résolution d'un problème de construction, nous intéresser à la forme de travail mathématique d'organisation qu'il produira à l'aide de ce modèle, d'abord pour décrire et réaliser la construction de l'objet, puis pour développer la démarche de validation chez les élèves. Ce qui signifie que, pour cette analyse, nous distinguons deux types d'organisation à l'intérieur du travail mathématique : l'un permettant de décrire et de réaliser la construction de l'objet, l'autre visant à développer la validation. L'ensemble constitue la forme de travail mathématique d'organisation. Conformément à notre cadre théorique (EPP), nous élaborons une nouvelle grille d'analyse à deux niveaux :

- **Niveau 1**

L'analyse du travail mathématique d'organisation produit permettant de décrire et réaliser la construction de l'objet se base sur l'étude du travail mathématique produit ayant permis de réaliser la construction de l'objet, et sur le discours de validation qui accompagne ce travail. Les éléments de cette analyse se déclinent à partir des points ci-dessous :

- La méthode mathématique mobilisée.
- Le(s) paradigme(s) géométrique(s) qui sous-tend(-ent) le travail effectué.
- La(les) dimension(s) privilégiée(s) dans le travail permettant de décrire et de réaliser la construction produite. Ici, nous analysons les dimensions sémiotique, discursive et instrumentale, des ETM.
- La circulation du travail mathématique au sein des plans verticaux des dimensions des ETM permettant de réaliser la construction.
- Le raisonnement mobilisé pour valider les constructions réalisées.
- Les arguments employés dans l'argumentaire de validation des constructions.

- La mise en forme de l'argumentaire de validation des constructions.

- **Niveau 2**

L'analyse du travail mathématique d'organisation réalisé par l'enseignant pour développer la démarche de validation est faite à partir de l'étude des procédés de construction et des éléments de la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle (A-A-C / P-A-P). Les éléments de cette étude se déclinent à travers les points ci-dessous :

- Le processus de résolution de la situation.
- La caractérisation de l'objet à construire.
- Le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet.
- Le choix du type de constructions à mettre en œuvre.
- La description du processus de construction.
- La validation des constructions.

Cette nouvelle grille est mise en fonctionnement dans les ETM idoines effectifs fixés à notre cadre théorique, à travers les interactions et les échanges qui ont lieu, d'une part entre l'enseignant P_C et ses élèves E_C , puis d'autre part entre les élèves, pendant la séquence de résolution de la situation en classe.

10.1.1. L'échantillon d'enseignants, d'élèves et d'établissements

Nous avons sélectionné un enseignant et ses élèves en fonction du cycle (collège ou lycée), de l'établissement et du niveau scolaire (Première Scientifique). Nous avons voulu qu'ils soient issus d'un établissement différent de ceux de la première expérimentation. Ceci, pour anticiper sur la composition de l'échantillon des élèves qui vont participer à la troisième expérimentation. Dans le choix de l'enseignant, nous avons pris en compte l'expérience professionnelle. Nous avons voulu travailler avec un enseignant qui découvre le métier d'enseignement et les pratiques enseignantes, qui est curieux de découvrir de nouvelles approches et éventuellement de les mettre en pratique. Compte tenu du fait que les enseignants expérimentés ont souvent des difficultés à sortir des pratiques qu'ils ont développées, nous avons choisi un enseignant débutant⁴³ (Robert et al. 2012) qui a deux années d'expérience. Cet enseignant n'a pas participé à la première expérimentation, ni aux débats que nous avons eus avec ceux qui ont participé à cette première expérimentation. Au moment où nous l'avons contacté, il avait fini les deux chapitres sur les transformations du plan et avait déjà fait trois séances de travaux dirigés avec ses élèves sur ces chapitres. La situation que nous proposons devait constituer une séance supplémentaire et s'inscrire dans la continuité de ses activités, afin que les élèves puissent trouver un intérêt à y participer. Cet enseignant connaît les problèmes de construction et les utilise dans ses pratiques d'enseignement de géométrie. La validation d'une construction réalisée est centrale pour lui, puisqu'elle constitue l'une des attentes dans la résolution d'un problème de construction en Première Scientifique, conformément à l'ETM de référence.

⁴³ Robert et al. (2012) établissent dans leurs travaux que c'est à partir de cinq années de service qu'un professeur peut être considéré comme n'étant plus un débutant.

10.1.2. Les séquences de résolution observées

Notre objectif consistant à administrer le modèle (A-A-C / P-A-P) à un enseignant, afin d'observer ses effets sur l'enseignement de la validation, nous avons observé, filmé et transcrit une séquence de résolution d'un problème de construction en classe, conduite par un enseignant mettant en œuvre ce modèle. La séquence porte sur la même situation que celle de la première expérimentation, mais dans des conditions nouvelles. En effet, contrairement aux premières expérimentations, nous avons pris en charge l'organisation de la mise en œuvre de la situation en salle. Ceci dans le but de réduire les exigences de l'enseignant et de mettre en avant celles du modèle. Nonobstant le fait que cette mise en œuvre pourra être influencée par le milieu (Brousseau, 1998), le contexte et les réactions des élèves lors du déroulement du jeu (Brousseau, 1998) de réalisation de la construction, nous sommes conscients que l'enseignant pourra faire des adaptations (Robert, 2012). Cependant, ces adaptations n'auront pas d'impact sur le modèle que nous testons, étant donné qu'elles seront liées à l'environnement de travail et aux exigences de l'enseignant que nous aurons déjà diminuées et adaptées à celles du modèle. Nous avons transmis à l'enseignant le document décrivant le fonctionnement des différentes phases du modèle (A-A-C / P-A-P) longtemps avant l'expérimentation, afin qu'il s'en imprègne. Puis une rencontre a été organisée visant à apporter des explications sur les caractéristiques et la structure du modèle, et à répondre éventuellement à certaines préoccupations du professeur relativement au fonctionnement du modèle et à nos attentes que nous lui avons explicitées. Nous avons effectué en amont deux simulations⁴⁴ (Parzysz, 2007) avec l'enseignant. Ces simulations visaient, non seulement à permettre à celui-ci de se saisir du modèle soumis à l'expérience, et aussi d'envisager le rôle que pourra jouer le modèle, au niveau de cet enseignant.

Les simulations faites, et la première analyse globale de la séquence observée, ont mis en évidence le fait que le modèle (A-A-C / P-A-P) joue, au niveau de l'enseignant, un rôle d'aide au raffinement de la capacité des élèves à résoudre un problème de construction, puisqu'il raffine, au niveau des élèves, une manière de construire et de valider la construction de l'objet géométrique que décrit le problème. Ainsi, l'analyse de la transcription de séquence a été ramenée à l'identification des différentes aides qu'apporte le modèle à l'enseignant, lorsque ce dernier décrit le processus de construction de l'objet géométrique que définit le problème de construction qu'il résout avec les élèves, avec pour objectif principal de développer la démarche de validation chez les élèves.

⁴⁴ La simulation est la méthode statistique permettant la reconstitution fictive de l'évolution d'un phénomène. C'est une expérimentation qui suppose la construction d'un modèle théorique présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le phénomène faisant l'objet de l'étude (Dodge, 1993, in Parzysz (2007, p. 32)).

10.1.3. L'analyse du rôle de la forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P), dans l'ETM idoine, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction

Pour identifier les différentes aides qu'apporte le modèle (A-A-C / P-A-P) à l'enseignant, nous avons choisi de décrire le travail mathématique d'organisation produit permettant à l'enseignant de décrire et réaliser la construction de l'objet, et le travail mathématique d'organisation que fait l'enseignant pour développer la démarche de validation chez les élèves. Le premier travail d'organisation étant guidé par les ETM et le(s) paradigme(s) géométrique(s) fixés à notre cadre, nous le décrivons à partir du travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet et du discours de validation qui accompagnent ce travail. Le deuxième travail d'organisation, quant à lui, est imposé par la structure de développement de la démarche de validation du modèle. Nous le décrivons à partir des caractéristiques de ce modèle, telles que nous les avons présentées à la section 10.1 de ce chapitre. Ainsi, nous avons commencé par effectuer une analyse *a priori* de la situation soumise à l'expérience, afin d'émettre des hypothèses relatives aux différentes aides. Ensuite, nous avons procédé à une analyse de la mise en œuvre de cette situation en classe. Cette dernière analyse vise à observer si les différentes aides identifiées dans l'analyse *a priori* sont similaires à celles qui se sont réellement réalisées dans l'ETM construit par l'enseignant.

10.1.3.1. L'analyse « a priori » de la situation

Compte tenu du fait que nous reprenons la situation traitée dans la première expérimentation, nous ne revenons plus sur la justification du choix et de l'intérêt de cette situation. L'analyse *a priori* que nous faisons consiste à décrire le scénario mettant en fonctionnement la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle, dans les ETM en jeu, les paradigmes géométriques et les procédés de construction, tel que nous l'avons présenté à l'enseignant chargé de sa mise en œuvre en classe. Cela signifie que c'est en termes d'organisation du travail, de paradigmes géométriques et des ETM (genèses et plans) en jeu, que nous analysons le rôle du modèle. Cependant, la situation est tirée du manuel CIAM de la classe de Première Scientifique. Elle est donc proposée dans un ETM idoine potentiel. Par ailleurs, le modèle (A-A-P / P-A-P), dans la description de son fonctionnement, est caractérisé à l'aide de notre cadre didactique (Cf. chapitre 9). Cette caractérisation décrite *a priori*, les procédés de construction de l'objet, le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet et le discours de validation qui accompagnent ce travail dans le modèle. Ainsi, nous avons fait le choix de ne pas présenter le scénario de mise en œuvre du travail mathématique d'organisation permettant de réaliser la construction de l'objet, mais de l'analyser directement dans l'ETM idoine effectif. Ce choix relève de notre objectif dans cette analyse *a priori*, qui vise à dégager les hypothèses relatives au rôle du modèle dans l'enseignement de la validation. Ces hypothèses ne peuvent émerger qu'à travers l'analyse de la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle. Cela signifie que l'analyse *a priori* va se focaliser sur le travail d'organisation que fait l'enseignant, à l'aide du modèle, pour développer la démarche de validation. Cette première analyse permet d'émettre des hypothèses liées aux différentes aides que le modèle (A-A-C / P-A-P) pourra apporter à l'enseignant.

10.1.3.2. L'analyse du déroulement de la mise en œuvre de la situation en classe

À partir de l'ETM idoine potentiel du manuel et de l'organisation du travail *a priori* qu'offre le modèle (A-A-C / P-A-P), nous analysons la mise en œuvre de la situation en classe. Il s'agit de décrire le déroulement de la mise en œuvre de la situation à l'aide du modèle dans l'ETM idoine effectif construit par l'enseignant. En termes de genèses utilisées dans l'ETM idoine effectif, articulées avec les paradigmes géométriques mis en œuvre et la grille définissant le travail mathématique d'organisation que fait l'enseignant pour développer la démarche de validation, nous décrivons la manière dont le travail mathématique d'organisation s'est déroulé au cours de la séquence de résolution de la situation, dans sa globalité. Le rôle du modèle (A-A-C / P-A-P) est mis en évidence, d'une part à travers les interactions et les échanges qui ont lieu entre l'enseignant et les élèves, et puis d'autre part entre les élèves pendant la séquence de résolution. Nous analysons ce qui se dit, ce qui s'écrit et ce qui est institutionnalisé, visant à aider l'enseignant à décrire le processus de construction de l'objet géométrique que décrit le problème de construction. Cette dernière analyse vise à observer si les différentes aides identifiées dans les l'ETM idoine potentiel (l'analyse *a priori*) sont similaires à celles qui se sont réellement réalisées dans l'ETM idoine effectif construit par l'enseignant.

10.2. L'analyse de l'ETM idoine, dans la classe de Première Scientifique C

10.2.1. L'analyse de l'ETM idoine potentiel

Nous reprenons la situation traitée dans la première expérimentation. Nous écartons la justification du choix et de l'intérêt de cette situation, pour renvoyer le lecteur au chapitre 6 (Cf. Partie 2). Ainsi, nous centrons notre analyse *a priori* sur la description du scénario mettant en fonctionnement la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle (A-A-C / P-A-P), en nous focalisant sur le travail mathématique d'organisation que pourra faire l'enseignant P_C à l'aide du modèle. Cela signifie que nous faisons fonctionner, dans l'analyse *a priori*, uniquement le deuxième niveau de notre grille d'analyse élaborée plus haut. Ce qui nous permet de formuler des hypothèses liées aux aides qu'apporterait le modèle (A-A-C / P-A-P) à l'enseignant. La situation que nous avons proposée à l'enseignant P_C de traiter avec ses élèves en classe porte sur « *les problèmes de construction et les isométries du plan* ». Elle est formulée de la manière suivante :

Énoncé de la situation proposée

On donne (L_1) , (L_2) et (L_3) trois droites distinctes et parallèles. A un point du plan tel que : $A \in (L_1)$. Construire un triangle équilatéral ABC vérifiant : $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$.

10.2.1.1. Le travail mathématique d'organisation susceptible d'être fait à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) pour développer la démarche de validation, chez l'élève

Les ETM idoines qui développent la démarche de validation à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), raffinent, chez les élèves, une manière de distinguer le processus de résolution, une caractérisation de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liés à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction

et la validation du produit de tous les actes de construction, qui sont les éléments sur lesquels les élèves peuvent se référer pour valider une construction qu'ils réalisent. Conformément au niveau 2 de notre grille d'analyse, nous analysons le fonctionnement des procédés permettant de construire le triangle ABC, ainsi que celui des éléments de la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle (A-A-C / P-A-P) pour valider la construction du triangle ABC, qui se déclinent à travers les éléments que raffine l'ETM idoine, énumérés précédemment.

a. Le modèle (A-A-C / P-A-P) et le processus de résolution de la situation

Le travail mathématique d'organisation est imposé par la structure du modèle (A-A-C / P-A-P). Il est perceptible dans la séquence de résolution de notre situation, à travers un certain nombre de gestes que fait l'enseignant, le discours écrit au tableau et le discours oral. Ces discours sont construits à partir d'un jeu de questions-réponses entre l'enseignant et ses élèves. Nous allons donc observer les gestes que fera l'enseignant P_C et analyser les différents discours qu'il va produire dans ses échanges avec les élèves et dans les échanges des élèves entre eux au cours de la mise en œuvre du modèle, dans une séquence de résolution de la situation. Ce qui nous permettra de dégager les aides que lui apportera le modèle. La forme d'organisation (A-A-C / P-A-P) est composée de deux articulations, constituées chacune de trois étapes pour les rendre fonctionnelles, la séquence de résolution et le problème de construction que l'enseignant résout, dans le but de raffiner la démarche de validation des constructions chez les élèves.

La phase d'appréhension de la situation (A) :

Dans cette première étape de l'articulation (A-A-C) du modèle, l'enseignant P_C va chercher à amener les élèves à appréhender la situation, pour établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet qu'elle décrit. Pour cela, il va désigner un élève qui fera une lecture publique de la situation. Par la suite, il fera lui-même une deuxième lecture, et puis il essaiera d'obtenir, à travers un jeu de questions-réponses, l'avis des élèves relativement à la situation découverte. Plus précisément, il va pousser les élèves à relier la situation découverte à un contexte pour la rattacher à un objectif du programme, ceci en les amenant à faire un bilan personnel sur les leçons déjà vues et les situations traitées dans le cadre des recherches individuelles en lien avec la situation qu'ils s'approprient à résoudre. L'expression « *construire un triangle équilatéral ABC* » constitue une variable rédactionnelle⁴⁵ de l'énoncé, qui permettra aux élèves de voir que la situation décrite s'inscrit dans la partie du cours consacrée aux « *Transformations du plan* », et qu'elle est similaire à une situation traitée en cours pour mettre en relation les transformations du plan et les configurations, afin d'illustrer « *l'utilisation des transformations du plan pour résoudre les problèmes de construction* ». Ce qui permettra à l'enseignant P_C de raffiner, au niveau des élèves, une manière d'établir la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet à construire que décrit la situation.

⁴⁵ Duval (1991) a introduit la notion de « variable rédactionnelle » pour désigner les caractéristiques des énoncés dont la variation aboutit à un changement de stratégies de résolutions adoptées par les élèves.

La phase d'analyse de la situation (A)

Cette étape est la deuxième de l'articulation (A-A-C) du modèle. Elle est déterminante dans le processus de résolution de la situation, car elle met en œuvre l'étude d'un triangle supposé au départ être solution du problème. L'enseignant va l'articuler avec les phases d'identification du problème (P) et d'actes de construction (A) de la deuxième articulation (P-A-P) du modèle, pour amener les élèves, soit à dégager une propriété pertinente pour la réalisation de la construction du triangle ABC, soit à définir une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et la réalisation effective de la construction de ce triangle. Ce qui lui permettra de raffiner, chez les élèves, l'identification des différents actes qui vont permettre la réalisation de la construction demandée et le choix du type de construction à mettre en œuvre. Ainsi, à l'aide du modèle, l'enseignant doit nourrir la réflexion et enrichir l'inspiration des élèves, pour activer le début de la rédaction de la solution du problème. C'est le moment d'amener les élèves à élaborer le discours écrit traduisant la stratégie arrêtée, d'une part pour la réalisation de la construction du triangle ABC, et d'autre part, pour la validation de cette construction. Pour cela, l'enseignant va commencer par amener les élèves à identifier et lister les données de la situation, nécessaires et utiles pour la résolution, ceci de la manière suivante :

D_1 : Trois droites (L_1) , (L_2) et (L_3) distinctes du plan.

D_2 : Les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) sont parallèles.

D_3 : A est un point du plan tel que : $A \in (L_1)$.

Ensuite, il va les pousser à construire l'ensemble $I = \{ D_1, D_2, D_3 \}$ constitué des instances. Puis, les amener à reformuler la tâche mathématique par une question prenant en compte le contrat didactique relatif à la réalisation de la construction d'un objet géométrique décrit à l'aide d'un problème de construction. (Q) : quel algorithme (ou programme) de construction permet d'obtenir la construction d'un triangle équilatéral ABC vérifiant $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$? Avec cette question (Q) et l'ensemble (I) des instances, l'enseignant raffine, au niveau des élèves, une manière d'extraire le problème mathématique à résoudre de l'énoncé de la situation. Ainsi,

Le Problème (P)

C'est le couple (Q, I) constitué des éléments définis précédemment. La détermination de ce problème permet à l'enseignant de raffiner l'identification de l'activité de construction qui consiste ici, à réaliser la construction d'un triangle équilatéral ABC conforme aux instances. Cette activité se traduit par le choix du type de construction à mettre à œuvre et vise à élaborer un algorithme de construction et une construction instrumentée du triangle ABC, vérifiant $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$, où (L_1) , (L_2) et (L_3) sont trois droites distinctes et parallèles.

Revenant sur la partie du cours à laquelle est relié le problème à résoudre, identifiée dans la phase d'appréhension de la situation, l'enseignant va essayer d'amener les élèves à identifier, à travers un jeu de questions-réponses, la famille des transformations isométriques comme étant celle qui leur donnera des moyens leur permettant de mettre sur pied le processus de construction et de validation du triangle ABC. Cependant, le triangle à construire étant équilatéral, il les amènera à retenir une rotation r , de centre A et d'angle $\frac{k\pi}{3}$ (avec $k = 1$ ou $k =$

-1), comme la transformation isométrique qui va leur permettre de définir les différentes actions à mener, opérations à effectuer et décisions à prendre, institutionnalisées et disponibles dans leur référentiel théorique (Kuzniak et al., 2016) sous forme de propriétés. Le raffinement du choix de cette isométrie par l'enseignant, chez les élèves, va raffiner une caractérisation du triangle ABC en lien avec les propriétés sur les images et les antécédents des points du plan par la rotation r . Ainsi, l'activité de construction du triangle ABC que doivent conduire les élèves va être ramenée à la recherche des stratégies permettant de construire les points B et C. L'enjeu étant la construction d'un premier point, une première chose que fera l'enseignant va consister à raffiner une manière de construire la droite (Δ), image de l'une des droites (L_2) ou (L_3) par la rotation r . Cette droite sera construite à partir des propriétés des isométries du plan. Ceci permettra à l'enseignant d'amener les élèves à considérer que ce premier point est l'intersection de la droite (Δ) avec (L_2), si (Δ) est l'image de la droite (L_3), ou avec (L_3), si (Δ) est l'image de la droite (L_2). Ainsi, les élèves pourront constater que le triangle ABC sera équilatéral si, et seulement si, le premier point est l'antécédent du deuxième par la rotation r , ou si le deuxième point est l'image du premier par la réciproque r^{-1} de la rotation r . L'objectif étant l'utilisation des isométries du plan pour construire un triangle équilatéral, le choix d'une stratégie de résolution va porter sur le nombre de rotations à utiliser dans la réalisation de la construction du triangle (ABC). Ainsi, l'enseignant va amener les élèves à identifier un ensemble (S) de stratégies de résolution constitué des stratégies élémentaires de résolution du problème, en raffinant à leur niveau, le processus de résolution. Ici, l'ensemble

$S = \{ S_1, S_2 \}$, avec S_1 et S_2 définies de la manière suivante :

- (S_1) est la stratégie qui définit la possibilité d'utiliser la rotation $r_{(A, \frac{k\pi}{3})}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$) et sa réciproque, la rotation r^{-1} , dans le processus de construction des sommets A, B et C d'un triangle solution, comme une condition pour que les trois sommets de ce triangle ABC soient situés respectivement sur les droites (L_1), (L_2) et (L_3). Elle utilise deux rotations.
- (S_2) est la stratégie qui définit la possibilité d'utiliser la seule rotation r dans le processus de construction d'un triangle solution, en fixant comme condition, pour que les sommets A, B et C soient situés respectivement sur les droites (L_1), (L_2) et (L_3), que l'un des points, (B ou C), soit l'antécédent de l'autre par la rotation r . Elle utilise donc une seule rotation.

L'ensemble des stratégies élémentaires étant construit, l'enseignant va pousser les élèves à retenir la stratégie (S_2) pour la résolution du problème, car c'est elle qui lui permet de se focaliser sur le développement de la démarche de validation, sans se disperser. Ce choix de stratégie va permettre de passer à l'identification des actes de construction du triangle ABC pour choisir le type de constructions à mettre en œuvre dans la réalisation de la construction de ce triangle.

Les actes de constructions (A) :

L'identification des actes de construction du triangle équilatéral ABC se réfère au contrat didactique. Cette étape raffine le choix du type de construction à mettre en œuvre pour matérialiser la construction du triangle. Conformément à ce contrat didactique, deux familles de constructions sont attendues des élèves : un algorithme de construction et une construction

instrumentée. Ainsi, l'enseignant va raffiner, au niveau des élèves, le choix de ces deux catégories d'actes de construction, pour obtenir une construction du triangle équilatéral ABC. Nous les désignons par (a_p) et (a_q) . Ici, l'enseignant va commencer par amener les élèves à définir un ensemble d'actions, d'opérations et décisions, qui résument chaque acte de construction qu'ils doivent matérialiser, leur permettant d'obtenir une représentation satisfaisant à l'ensemble des contraintes qui découlent des instances (I) et qui permettent la mise en œuvre de la stratégie visant à construire les points A, B et C. Pour cela, il va pousser les élèves à définir trois contraintes élémentaires C_1 , C_2 et C_3 , pour la vérification de la construction :

C_1 : ABC doit être un triangle équilatéral.

C_2 : Les sommets du triangle ABC doivent être situés sur trois droites distinctes et parallèles (L_1) , (L_2) et (L_3) .

C_3 : Les sommets B et C du triangle ABC sont tels que : $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$.

Ainsi, la première catégorie d'actes (a_p) sera obtenue à partir des effets de la géométrie des transformations en lien avec la configuration « triangle équilatéral ». Ces actes seront issus des propriétés des rotations du plan, en lien avec la configuration « triangle équilatéral ». Ainsi, l'enseignant va amener les élèves à mettre en fonctionnement les propriétés de conservation des angles orientés et des longueurs. En s'appuyant sur la construction des sommets du triangle ABC pris comme des points du plan, l'enseignant va raffiner, chez les élèves, l'utilisation des notions d'image et d'antécédent d'un point par la rotation r . Ceci pour pousser les élèves à mobiliser les propriétés de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{k\pi}{3}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$), afin qu'ils puissent matérialiser leur conception de cette transformation à partir de laquelle ils ont caractérisé le triangle ABC. Ceci permettra de construire les points A, B et C l'un après l'autre, à travers un algorithme (ou programme) de construction. Ici, tout se passe comme si l'enseignant amenait les élèves à trouver une technique de réalisation de la construction du triangle équilatéral ABC en utilisant, d'une part les propriétés, définitions et théorèmes sur les isométries du plan, disponibles dans leur référentiel théorique (Kuzniak et al., 2016), et d'autre part les propriétés caractéristiques du « triangle équilatéral », vues depuis le début du collège. Ces propriétés sont issues des connaissances que les élèves ont construites sur la notion de rotation, en lien avec la configuration « triangle équilatéral ».

La deuxième catégorie d'actes de construction (a_q) est obtenue à partir des effets des instruments de géométrie. La construction instrumentée du triangle ABC, qui vise à illustrer l'algorithme de construction de ce triangle est réalisée à partir de plusieurs actions instrumentées (Petitfour, 2015) élémentaires. Une action instrumentée élémentaire est obtenue en exécutant une articulation de l'algorithme de construction élaboré. L'enseignant va amener les élèves à exécuter point par point les différentes articulations de cet algorithme. Ainsi, il va les pousser à mettre en œuvre certaines connaissances dont ils disposent leur permettant de réaliser une construction instrumentée, à savoir : les connaissances relevant du géométrie (Petitfour, 2011) (les connaissances géométriques, techniques et graphiques), et les connaissances relevant du non géométrie (Petitfour, 2011) (le choix des instruments, la souplesse corporelle, une organisation dans la réalisation des tracés, la précision et la justesse

dans les tracés). Le raffinement du choix du type de constructions à mettre en œuvre et des actes de construction permet de passer à la dernière étape de la séquence de résolution et du problème de construction.

La phase de la conception de la solution (C)

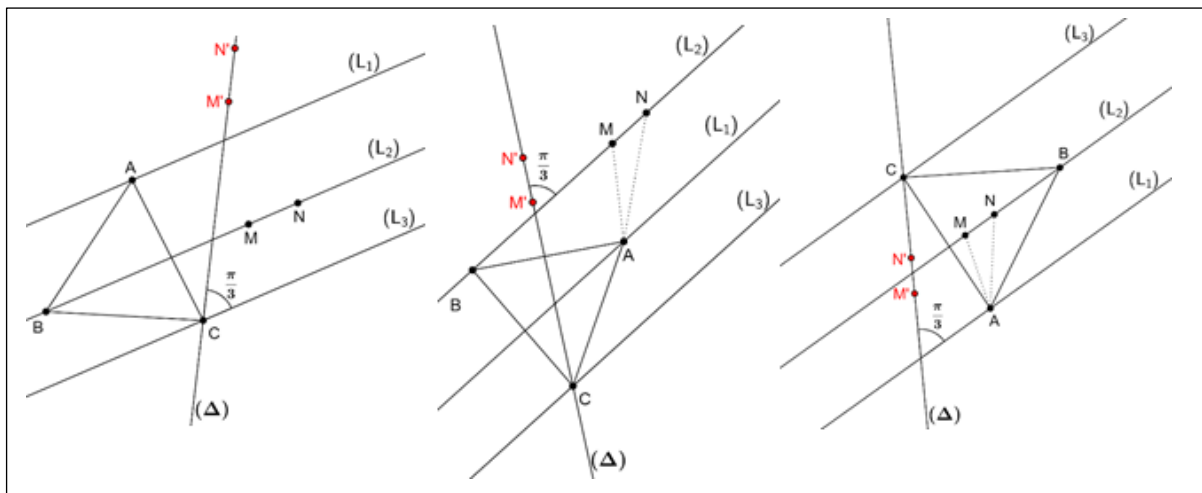
Cette étape est la troisième de l'articulation (A-A-C) du modèle. C'est le moment de synthèse de tout ce qui a été fait précédemment. Elle consiste en la mise au point de la procédure de construction d'un triangle équilatéral ABC solution du problème. Elle matérialise la construction de ce triangle, établit la différence entre la solution et la construction, et c'est elle qui achève la séquence de résolution. Dans cette phase intervient la dernière étape de l'articulation (P-A-P) du modèle : le produit d'actes de construction (P).

Le produit d'actes de construction (P)

Cette étape établit une différence entre la solution de la situation qu'on résolvait et le triangle équilatéral ABC construit. Elle met en exergue la technique de construction utilisée pour construire ce triangle. C'est un moment de vérification des règles du contrat didactique. Le produit d'actes de construction du triangle ABC étant un algorithme (ou programme) de construction et une construction instrumentée, l'enseignant va amener les élèves à rédiger cet algorithme et à l'illustrer par une construction instrumentée. Ainsi, il pourra amener les élèves à supposer que le triangle ABC à construire est de sens direct en prenant 1 comme valeur de k , c'est-à-dire à considérer que la rotation r est d'angle $\frac{\pi}{3}$. Pour la construction instrumentée, les élèves seront amenés à choisir une disposition spatiale de leur construction sur la feuille, par exemple celle où les droites (L_1), (L_2) et (L_3) sont dans une position légèrement oblique, et à faire varier la position de la droite (L_1) par rapport à celles des droites (L_2) et (L_3). Par ces considérations, ils vont obtenir un produit d'actes de construction dont le programme de construction et les constructions instrumentées, représentant le cas où le triangle ABC est de sens direct, sont donnés ci-dessous :

- Choisir une position du point A quelconque sur la droite (L_1).
- Construire l'image (Δ) de la droite (L_2) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; la droite (Δ) coupe (L_3) en C.
- Construire le point B, antécédent du point C par la rotation r .

(a) Algorithme de construction du triangle équilatéral ABC



(b) Construction instrumentée du triangle équilatéral ABC

(a) et (b) représentent la construction du triangle équilatéral ABC.

En restant dans la phase de conception de la solution, l'enseignant va amener les élèves à discuter sur le nombre de solutions du problème. Ici, il posera aux élèves la question de savoir si le problème peut avoir plusieurs solutions. Pour cela, il leur fera remarquer que certains choix se sont présentés à eux au cours de l'appréhension et de l'analyse de la situation, notamment : le choix de la position du point A sur la droite (L_1) ; le choix du sens de parcours du triangle ABC, donc de l'angle de la rotation r ; et le choix de la disposition spatiale des droites (L_1) , (L_2) et (L_3) . Ces choix traduisent l'existence d'une infinité de solutions. Les différentes positions du point A sur la droite (L_1) mettent en évidence l'existence de plusieurs triangles de même sens répondant aux contraintes, tandis que les deux rotations établissent l'existence de plusieurs triangles de sens directs et de sens indirects, toutes solutions du problème. Ainsi, en prenant un vecteur directeur \vec{u} des droites (L_1) , (L_2) et (L_3) ; (D) l'orthogonale à ces trois droites ; et, connaissant un triangle équilatéral ABC solution, les élèves seront amenés à constater que les translations de vecteur $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) permettent de construire tous les triangles solutions de même sens et les symétries orthogonales $S_{(D)}$ permettent de construire tous les triangles solutions de sens contraire.

Ainsi, dans le processus de résolution de cette situation, le modèle (A-A-C / P-A-P) va permettre à l'enseignant P_C de structurer la séquence de résolution et le problème de construction en une suite d'étapes que les élèves peuvent suivre, de manière à agencer les sous-tâches qui en découlent, afin qu'à un moment ils se rendent compte des insuffisances des méthodes dont ils disposent pour résoudre la situation et adopter la nouvelle démarche que l'enseignant met en œuvre, celle qui favorise une résolution méthodique du problème mathématique que pose l'énoncé de la situation. L'agencement des sous-tâches donnant un sens à la résolution de la situation, elle raffine chez les élèves, la séquence de résolution et l'organisation du problème de construction en résolution. Ce qui signifie que le modèle permettra à l'enseignant de développer le processus de résolution de ce problème de construction chez les élèves en raffinant leur capacité à résoudre un problème de construction.

Nous supposons que ce modèle va aider l'enseignant à raffiner chez les élèves un processus de résolution de la situation donnée.

b. Le modèle (A-A-C / P-A-P) et la caractérisation du triangle équilatéral ABC

Dans la situation proposée, les élèves doivent construire, de façon cohérente, un triangle équilatéral ABC ayant ses sommets sur trois droites parallèles, (L_1) , (L_2) et (L_3) . D'après la structure du modèle (A-A-C / P-A-P), la cohérence dans le processus de construction est apportée par la caractérisation que ces élèves ont du triangle qu'ils doivent construire. Et c'est cette cohérence qui va soutenir le processus de construction. Or, la caractérisation du triangle équilatéral ABC doit émerger de la définition que les élèves ont d'un triangle équilatéral en lien avec une « rotation du plan ». Si nous admettons qu'au niveau des élèves la caractérisation du triangle ABC peut être une image mentale, un concept image (Tall et Vinner, 1981), un schème (Vergnaud, 1990) ou une conception de cette configuration, et que la mise en œuvre des différentes étapes du modèle (A-A-C / P-A-P) va nourrir l'intuition des élèves, alors l'enseignant P_C doit d'abord amener les élèves à traduire la caractérisation qu'ils ont d'un triangle équilatéral relativement aux données D_1 , D_2 et D_3 du problème. Puis les amener à exprimer cette caractérisation sous une forme verbale dans laquelle ils vont décliner une définition opérationnelle du triangle ABC à construire. De façon ordinaire, les élèves vont définir un triangle solution du problème comme un triangle qui vérifie, d'une part, la relation « $AB = AC = BC$ ou $\text{Mes } \widehat{ABC} = \text{Mes } \widehat{BAC} = \text{Mes } \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ », et d'autre part, la contrainte « $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$ ». Ce qui leur permettra d'aboutir à la relation « $AB = AC$ et $\text{Mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ » qui caractérise un triangle isocèle de sommet principal A et dont l'angle à ce sommet mesure $\frac{\pi}{3}$. De cette nouvelle définition du triangle ABC, l'enseignant va raffiner l'inspiration des élèves, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), de manière à les amener à identifier, dans cette définition, une propriété de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ permettant de constater que « B est l'image du point C par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ ». Cette propriété traduit une caractérisation du triangle ABC sous une forme opérationnelle visant à décrire une procédure qui permet d'obtenir une construction de cet objet, puisque tout triangle isocèle dont un angle mesure $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral. Ainsi, l'enseignant va amener les élèves à constater qu'un triangle ABC solution du problème doit être construit en considérant la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, de telle sorte que le point B soit l'image C par la rotation r ou que le point C soit l'antécédent de B par la rotation r . Le raffinement de cette caractérisation chez les élèves par l'enseignant va permettre à ces derniers, d'une part de disposer des moyens de contrôle d'actes de construction et de validation du produit d'actes de construction du triangle ABC, et d'autre part de nourrir l'opérationnalisation de la nouvelle définition d'un triangle équilatéral qui consiste à voir le triangle équilatéral ABC comme un triangle dont le sommet C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Ainsi, dans la caractérisation du triangle ABC à construire, le modèle (A-A-C / P-A-P) va permettre à l'enseignant P_C d'amener les élèves à dégager une définition opérationnelle du triangle ABC traduite par : « B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle de mesure

$\frac{\pi}{3}$ », qui décrit une procédure qui permet de réaliser une construction du triangle ABC. Nous supposons que ce modèle va aider l'enseignant à raffiner cette caractérisation du triangle équilatéral ABC au niveau des élèves.

c. Le modèle (A-A-C / P-A-P), le choix et la conception d'une transformation du plan en lien avec le triangle équilatéral ABC

Nous avons constaté, d'une part, que la caractérisation du triangle ABC met en évidence une définition opérationnelle d'un triangle équilatéral qui n'est pas disponible chez les élèves, et d'autre part, que pour rendre mathématique la validation de la construction du triangle ABC, cette caractérisation doit utiliser les propriétés d'une transformation du plan liées à la configuration « triangle équilatéral », configuration que l'enseignant doit amener les élèves à choisir parmi celles qui sont disponibles dans leur référentiel théorique (Kuzniak et al., 2016). Le raffinement de la caractérisation du triangle équilatéral ABC par l'enseignant, à destination des élèves, est donc lié à celui du choix d'une transformation qui va donner un sens à la validation. Or, nous avons vu qu'en s'appuyant sur le modèle (A-A-C / P-A-P), l'enseignant va amener les élèves à caractériser un triangle solution du problème comme un triangle isocèle de sommet principal A, de mesure $\frac{\pi}{3}$ et dont le sommet C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Cela signifie que l'enseignant doit raffiner, au niveau des élèves, le choix d'une rotation du plan comme étant la transformation liée au triangle équilatéral, parmi toutes les transformations disponibles dans leur référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016), et plus particulièrement la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, qui permettra aux élèves de constater que le point C est l'image de B par cette rotation, et que cela signifie que « $AB = AC$ et $\text{Mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ ». Le raffinement, par l'enseignant P_C , du choix et de cette conception de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, favorisé par le modèle (A-A-C / P-A-P), à travers la caractérisation du triangle ABC, va fournir aux élèves des moyens leur permettant de décrire un processus de construction du triangle ABC et d'élaborer un argumentaire de validation de la construction réalisée.

Ainsi, dans les processus de caractérisation, construction et validation de la construction du triangle ABC, le modèle (A-A-C / P-A-P) va permettre à l'enseignant P_C d'amener les élèves à choisir la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ comme transformation du plan liée à la configuration « triangle équilatéral ». C'est à partir de ce choix qu'il les amènera à interpréter le fait « B est l'image du point C par la rotation de centre A et l'angle mesure $\frac{\pi}{3}$ » comme la relation « $AB = AC$ et $\text{Mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ ». Nous supposons que ce modèle va aider l'enseignant à raffiner, chez les élèves, ce choix et cette conception de la notion rotation r , pour construire et valider, le triangle équilatéral ABC.

d. Le modèle (A-A-C / P-A-P) et le processus de construction d'un triangle équilatéral (ABC)

La réalisation de la construction du triangle ABC doit obéir à un processus de construction stable et cohérent, qui consiste à décrire la construction des sommets de ce triangle l'un après

l'autre. Or, une construction du triangle ABC est représentée par un algorithme et une construction instrumentée. Ainsi, l'enseignant P_C va amener les élèves à faire deux choses : d'abord choisir le type de construction à mettre en œuvre pour matérialiser la construction du triangle ABC, et ensuite définir une suite d'actions, d'opérations et de décisions, stables et contrôlées par la caractérisation du triangle ABC raffinée à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P). Le processus de construction va consister à placer d'abord le point A sur la droite (L_1), tel que décrit dans l'énoncé. Ensuite, à travers la caractérisation du triangle ABC, consistant à définir ce triangle comme un triangle dont le point C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, l'enseignant va amener les élèves à construire les points B et C respectivement sur les droites (L_2) et (L_3). Les actes issus des effets des propriétés sur la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, qui relèvent des constructions théoriques, permettent d'élaborer l'algorithme de construction ; et les actes issus des effets des instruments, qui relèvent de plusieurs actions instrumentées (Petitfour, 2015), permettent d'obtenir une construction instrumentée. La cohérence et la stabilité locale dans le fonctionnement du processus de construction sont apportées par la caractérisation du triangle ABC orientée par le choix et la conception de la rotation r , que l'enseignant a raffiné au niveau des élèves. C'est elle qui va régler les actions à réaliser. Et c'est elle qui contraint l'enseignant à raffiner, chez les élèves, une organisation du processus de construction des points A, B et C sous forme d'entités qui sont, ici de trois ordres :

- D'abord d'ordre mathématique, tels que le parallélisme des droites distinctes (L_1), (L_2) et (L_3), l'appartenance des points A, B et C respectivement aux droites (L_1), (L_2) et (L_3), et les égalités « $AB = AC = BC$ » et « $\text{Mes } \widehat{ABC} = \text{Mes } \widehat{BAC} = \text{Mes } \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ », qui font émerger la caractérisation simplifiée « $AB = AC$ et $\text{Mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ ».
- Ensuite d'ordre psychologique, tels que la disposition spatiale (horizontale, verticale, oblique) des droites (L_1), (L_2) et (L_3), la position de la droite (L_1) relativement aux droites (L_2) et (L_3), et le sens de parcours du triangle ABC.
- Enfin, d'ordre de l'action physique, tels que la souplesse corporelle et le maniement des instruments de géométrie à utiliser pour réaliser la construction instrumentée illustrant l'algorithme de construction élaboré. Le raffinement, par l'enseignant P_C , du processus de construction d'un triangle ABC chez les élèves, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), développe le contrôle des actes de construction. Il amène les élèves à représenter la caractérisation qu'ils ont du triangle équilatéral ABC, solution du problème. Ce qui fait que, dans l'activité de construction que conduit l'enseignant, les élèves sont amenés à relever, non seulement leur caractérisation du triangle équilatéral à construire dans cette situation précise et à choisir le type de construction à mettre en œuvre, mais aussi à mettre en place des moyens de contrôle du processus de construction de ce triangle.

Ainsi, dans le processus de construction du triangle ABC, le modèle (A-A-C / P-A-P) va permettre à l'enseignant P_C d'amener les élèves à choisir, comme type de construction à mettre en œuvre pour réaliser la construction du triangle ABC, un algorithme de construction et une construction instrumentée, qu'ils vont matérialiser à travers des actes de construction issus des effets des propriétés sur la rotation r et des instruments de géométrie. Nous supposons que ce

modèle va aider l'enseignant à raffiner, chez les élèves, ce processus de construction du triangle équilatéral ABC.

e. Le modèle (A-A-C / P-A-P) et la validation de la construction du triangle ABC

L'articulation (P-A-P) du modèle élaboré définit, sur le problème de construction, une question mathématique à résoudre et une activité de construction qui va générer le produit d'actes de construction. La question mathématique consiste à savoir quel algorithme (ou programme) de construction permet d'obtenir un triangle équilatéral ABC vérifiant : $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$. Ce qui signifie que l'activité de construction vise à amener les élèves à construire un triangle équilatéral ABC ayant ses sommets situés sur les droites, (L_1) , (L_2) et (L_3) . Cette activité matérialise les actes de construction qui sont issus des effets des propriétés de la rotation r et des effets des instruments de géométrie. Elle matérialise également le produit d'actes de construction, qui est l'algorithme de construction du triangle ABC et une construction instrumentée de ce triangle. Or, le raffinement du processus de résolution du problème mathématique (Q, I) que pose la situation à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) développe la capacité des élèves à réaliser et à valider une construction du triangle ABC. Ce qui signifie que les actes de construction que vont réaliser les élèves doivent être issus d'actions, opérations et décisions réfléchies. Celles-ci sont rendues opérationnelles par la conception que les élèves ont de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, qui leur permet de reproduire une caractérisation du triangle ABC liée au choix et à la conception de cette rotation, telle que raffinée par l'enseignant à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P). Une démarche de l'esprit, se rapportant à la ressemblance entre le produit d'actes de construction (le triangle ABC construit) et la caractérisation du triangle ABC établie avant la réalisation de la construction, leur permet, d'une part de s'assurer que la construction de ce triangle réalisée est exacte, et d'autre part d'obtenir des arguments mathématiques permettant de convaincre quiconque de la vérité des conclusions sur toutes les constructions élémentaires réalisées. Ainsi, l'enseignant va pousser les élèves à établir pas à pas les raisons (Balacheff, 1989) de la construction puis, à valider la construction du triangle obtenue. Pour cela, il va les amener à définir le triangle ABC à l'aide des propriétés : « $AB = AC = BC$ » et « $\text{Mes } \widehat{ABC} = \text{Mes } \widehat{BAC} = \text{Mes } \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ », disponibles dans le référentiel théorique (Kuzniak et al., 2016) des élèves, pour raffiner la propriété : « $AB = AC$ et $\text{Mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ » qui relie la configuration « triangle équilatéral » à la rotation r , afin d'établir que « $B = r(C)$ » qui signifie que, « ABC est un triangle isocèle de sommet A dont l'angle à ce sommet mesure $\frac{\pi}{3}$ », permettant de constater que ce triangle est équilatéral. C'est un résultat qui permet aux élèves d'établir l'exactitude et la validité de la construction du triangle ABC. On peut remarquer que cette validation est bien mathématique, puisqu'elle utilise des propriétés mathématiques, et qu'elle décrit dans sa démarche un discours qui valide la construction du triangle ABC. Ce discours prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif. La démonstration, qui est utilisée comme mode de validation, met en œuvre les interprétations et les substitutions de la caractérisation du triangle équilatéral ABC par les propriétés issues de la rotation r . Ce qui signifie que l'enseignant raffine, chez les élèves, à l'aide de l'articulation (P-A-P), le contrôle du problème, celui des actes de construction et la preuve de l'exactitude de la construction du

triangle ABC réalisée. Ces éléments, qui sont sous-jacents au processus de construction, décrivent une démarche de validation de cette construction, solution du problème. Ils sont soutenus par la caractérisation du triangle ABC raffinée par l'enseignant chez les élèves. Ainsi, la démarche de validation élaborée s'articule autour des composantes (P), (A) et (P) du modèle. Elle se compose d'un contrôle du problème pour anticiper sur la validation de la construction du triangle (ABC), d'un contrôle d'actes de construction du triangle pour assurer une validation pas à pas des différentes constructions élémentaires, et d'une démonstration pour prouver l'exactitude de la construction du triangle, afin d'assurer la validation de la construction. Ainsi, plus le raffinement de la caractérisation du triangle ABC est nourri par l'enseignant à l'aide de l'articulation (P-A-P) du modèle, plus les élèves vont distinguer ces éléments, et mieux la construction réalisée sera acceptée.

Ainsi, dans le processus de validation du triangle ABC, le modèle (A-A-C / P-A-P) va permettre à l'enseignant P_C d'amener les élèves à distinguer dans « la démarche de validation » sous-jacente au processus de construction du triangle ABC, un contrôle du problème mathématique, un contrôle des actes de construction, ainsi que la validation du produit des actes de construction réalisés. Nous supposons que ce modèle va aider l'enseignant à raffiner, chez les élèves, le contrôle du problème mathématique à résoudre, celui des actes de construction à réaliser pour construire le triangle ABC, ainsi que la démonstration, pour prouver l'exactitude de la construction du triangle équilatéral ABC réalisée.

10.2.1.2. La formulation des hypothèses relatives au rôle du modèle (A-A-C / P-A-P), au niveau de l'enseignant, dans le développement de la démarche de validation du triangle équilatéral ABC

Dans cette partie, nous étudions le rôle du modèle (A-A-C / P-A-P), dans l'ETM idoine effectif, à partir du travail mathématique d'organisation produit pour réaliser la construction d'un triangle équilatéral ABC défini à l'aide d'un problème de construction lié aux isométries du plan, et du travail mathématique d'organisation que fait l'enseignant P_C , dans ce modèle pour développer la démarche de validation chez l'élève. Les analyses *a priori* précédentes permettent de constater que le modèle raffine la capacité des élèves à construire et à valider la construction du triangle équilatéral ABC en privilégiant la procédure de construction par rapport au résultat final. Ces analyses établissent que cette procédure est soutenue par le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit d'actes de construction. L'expression « forme d'organisation » que nous utilisons a pour objectif de montrer que l'idée d'agencement par étapes des sous-tâches, qui influe sur l'apprentissage de la démarche de validation chez les élèves, s'étend à l'enseignant, ce qui nous permet d'étudier l'impact de cette caractéristique sur l'enseignement de la validation. Compte tenu du fait que, dans cette expérimentation, nous organisons la mise en œuvre de la situation soumise à l'expérience pour l'ajuster aux exigences du modèle (A-A-C / P-A-P), et que ce modèle définit une variation des modalités de travail (mise en œuvre) qui ont une influence sur le traitement de la situation par un enseignant en classe, nous admettons que ces influences apparaîtront, au cours de la séquence de résolution, au niveau :

- Du processus de résolution de la situation.

- De la caractérisation de l'objet à construire,
- Du choix et de la conception d'une transformation du plan liée à l'objet,
- Du choix du type de construction à mettre en œuvre,
- De la description du processus de construction de l'objet,
- De la validation des constructions.

Ce qui nous permet d'émettre *a priori* les hypothèses suivantes, relativement au rôle du modèle (A-A-C / P-A-P) dans le développement de la démarche de validation, chez les élèves.

a. Hypothèse relative au processus de résolution de la situation

Nous supposons que, dans le cadre de cette expérimentation, le modèle (A-A-C / P-A-P) va aider l'enseignant P_c à nourrir le raffinement de la capacité des élèves à mettre sur pied un processus de résolution, permettant une résolution méthodique de la situation. Notre hypothèse relative au processus de résolution de cette situation est (H'_1) que nous formulons de la manière suivante :

H'_1 : La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) va jouer, au niveau de l'enseignant P_c , un rôle d'aide au raffinement du processus de résolution de la situation, chez les élèves.

b. Hypothèse relative à la caractérisation du triangle ABC

Nous supposons que le modèle (A-A-C / P-A-P) va aider l'enseignant P_c à nourrir le raffinement de la capacité des élèves à caractériser le triangle équilatéral ABC à construire. Et qu'il lui permettra d'amener les élèves à dégager une définition opérationnelle du triangle équilatéral (ABC), consistant à considérer qu'un triangle solution du problème est tel que le point C soit l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Une définition qui permet de fixer les points B et C respectivement sur les droites (L_2) et (L_3). Le point A étant déjà situé sur la droite (L_1). C'est une définition qui n'est pas disponible dans le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016) des élèves, mais qu'ils doivent pouvoir « inventer ». Notre hypothèse relative à la caractérisation du triangle équilatéral ABC est (H'_2) que nous formulons de la manière suivante :

H'_2 : La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) va jouer, au niveau de l'enseignant P_c , un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la caractérisation du triangle équilatéral (ABC) à l'aide de la rotation de centre A et d'angle $\frac{k\pi}{3}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$).

c. Hypothèse relative au choix et à la conception d'une transformation du plan

Nous supposons que le modèle (A-A-C / P-A-P) va aider l'enseignant P_c à nourrir le raffinement de la capacité des élèves à choisir la rotation r de centre A et d'angle $\frac{k\pi}{3}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$) comme transformation du plan liée à la configuration « triangle équilatéral », et qu'il lui permettra de raffiner, au niveau de ses élèves, une conception de cette rotation visant à considérer que « le point C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ » si, et

seulement si, « $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ ». Ceci leur permettra de constater que le triangle (ABC) est un triangle isocèle dont la mesure de l'angle au sommet principal A est $\frac{\pi}{3}$, et donc qu'un tel triangle isocèle est équilatéral. Notre hypothèse relative au choix et à la conception d'une transformation du plan liée au triangle équilatéral (ABC) est (H'_3), que nous formulons de la manière suivante :

H'_3 : La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) va jouer, au niveau de l'enseignant P_C , un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, du choix de la rotation de centre A et d'angle $\frac{k\pi}{3}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$) comme transformation du plan liée à la configuration « triangle équilatéral », qu'ils traduiront par : « le point C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ » si, et seulement si, « $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = \frac{k\pi}{3}$ ».

d. Hypothèse relative au processus de construction du triangle ABC

Nous supposons que le modèle (A-A-C / P-A-P) va aider l'enseignant P_C à nourrir le raffinement de la capacité des élèves à décrire le processus de construction du triangle équilatéral ABC, à travers l'élaboration d'un algorithme de construction et d'une construction instrumentée, choisis comme deux types de construction à mettre en œuvre pour matérialiser la construction de ce triangle. La résolution suivant les étapes de ce modèle va permettre à l'enseignant de nourrir le raffinement ; de la représentation qu'ont les élèves du triangle équilatéral ABC à construire, du triangle ABC qu'ils auront construit et qui correspond à leur représentation du triangle équilatéral ABC à construire ; et des moyens de contrôle à utiliser pendant la réalisation de la construction de ce triangle. Notre hypothèse relative au processus de construction du triangle équilatéral ABC est (H'_4) que nous formulons de la manière suivante :

H'_4 : La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) va jouer, au niveau de l'enseignant P_C , un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, du processus de construction du triangle équilatéral ABC et du choix d'élaborer un algorithme de construction accompagné d'une construction instrumentée illustrant cet algorithme, pour matérialiser la construction de cet objet.

e. Hypothèse relative à la validation du triangle ABC

Nous supposons que le modèle (A-A-C / P-A-P) va aider l'enseignant P_C à nourrir le raffinement de la capacité des élèves à valider toutes les constructions qu'ils vont réaliser, en raffinant à leur niveau, la distinction d'une « démarche de validation », sous-jacente au processus de construction du triangle ABC en des contrôles du problème mathématique qu'ils résolvent, des contrôles des actes de construction qu'ils réalisent, ainsi que de la démonstration pour prouver, afin de valider le produit des actes de construction qu'ils auront réalisés. Notre hypothèse relative à la validation des constructions qui réalisent le triangle équilatéral ABC est (H'_5), que nous formulons de la manière suivante :

H'_5 : La forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) va jouer, au niveau de l'enseignant P_C , un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la distinction

des contrôles (Balacheff et Margolinas, 2017) et de la démonstration comme deux régimes de validation (Balacheff, 2017) permettant d'établir l'exactitude et la validité de la construction du triangle équilatéral ABC.

Nous avons choisi, pour cette analyse *a priori*, de ne pas proposer le scénario de mise en œuvre du travail mathématique d'organisation permettant de réaliser la construction du triangle équilatéral ABC, et d'analyser directement la mise en œuvre du travail d'organisation à partir des éléments de la structure de développement de la démarche de validation des constructions qu'offre le modèle (A-A-C / P-A-P). La raison de ce choix relève de notre objectif, qui est de construire des hypothèses relatives aux différentes aides qu'apporterait le modèle dans l'enseignement de la validation. Ces hypothèses étant élaborées, nous allons, dans le paragraphe qui suit, analyser le rôle du modèle, dans l'ETM idoine construit et mis en œuvre par l'enseignant P_C . Notre intérêt va porter sur la capacité du modèle à soutenir la forme de travail mathématique d'organisation que fait cet enseignant dans la réalisation du projet de développement de la démarche de validation chez les élèves. Nous serons donc attentifs, à l'issue de cette analyse, à voir si les aides envisagées *a priori* sont celles qui se sont réalisées dans l'ETM idoine effectif.

10.2.2. L'analyse de l'ETM idoine effectif, dans la classe de Première Scientifique C

Pour l'analyse de l'ETM idoine effectif, nous faisons fonctionner les deux niveaux de la grille élaborée à la section 10.1 de ce chapitre. Ainsi, nous étudions le rôle du modèle (A-A-C / P-A-P), en analysant la forme de travail mathématique d'organisation que produit l'enseignant P_C à l'intérieur de la structure du modèle (A-A-C / P-A-P), pour développer la démarche de validation de la construction du triangle équilatéral ABC chez les élèves. En effet, nous rendons compte de l'apport du modèle dans l'enseignement de la validation tout au long d'une séquence de résolution de la situation, dans un ETM idoine effectif dans la classe de Première Scientifique C.

Déroulement de la séquence de résolution en salle

L'enseignant P_C avait donné la veille, aux élèves, la situation à résoudre. Cet exercice a donc été considéré comme un « devoir-maison ». Il a exigé que la situation soit traitée sur feuille par chaque élève. Compte tenu du fait que la séance se déroulait un samedi, il a promis de noter la présence en complément au devoir-maison que les élèves devaient lui rendre. Nous avons été surpris de trouver une salle pleine, comme lors des jours de classe ordinaires. Dès notre entrée en salle, l'enseignant a réécrit l'énoncé de situation au tableau. Puis la séquence a directement démarré par une lecture de l'énoncé, qui lui a permis d'établir la preuve d'existence et de constructibilité du triangle équilatéral ABC.

Preuve d'existence et de constructibilité :

Enseignant PC	Une première personne pour lire la situation.	Appréhension de la situation (A)
Elève E1	Oui !!! Stéphane !! Vous autres, vous suivez attentivement. UN ELEVE FAIT LA PREMIERE LECTURE	
Enseignant PC	Je refais la lecture ! Vous suivez attentivement au tableau !!!!	

	L'ENSEIGNANT FAIT LA DEUXIEME LECTURE ET PUIS RELANCE	
Enseignant PC Elève E2 Elève E3	Avons-nous déjà traité un tel exercice en cours ou en TD ? Non, moi je n'ai même pas pu trouver !! c'est très difficile !!!! Monsieur !!!!! mais ça ressemble quand même à un exercice du cours	
Enseignant PC Elève E1	Lequel ? L'exercice d'application, à la fin du cours, je viens de voir ça dans mon cahier !!!!!	
Enseignant PC Elève E4	Ça porte sur quelle partie du cours ? Les isométries et les problèmes de construction. C'est dans le cahier !!! Monsieur !!!!! (Situe la situation dans son contexte)	
Enseignant PC Elève E4 Elève E3	Ok ! Et qu'est-ce qu'il fallait faire dans cet exercice-là ? Construire un cercle !!! Monsieur !! Mais ici ! On veut plutôt le triangle équilatéral.	
Enseignant PC Elève E5 Enseignant PC	D'accord !!! L'exercice porte sur quelle notion ? Les isométries et la construction du triangle équilatéral. Notre exercice consiste à utiliser les isométries pour construire un triangle équilatéral. (Situation reliée à un objectif du programme) Je crois qu'on est d'accord avec ça !!!!!	
	LES ELEVES REPONDENT !! OUI !!!!!	

L'enseignant se situe à la première étape de l'articulation (A-A-C) du modèle : l'appréhension de la situation (A). Les élèves appréhendent la situation à travers l'insistance de l'enseignant, et la lecture publique répétée de la situation, pour la relier à un objectif du programme : « utilisation des transformations du plan pour résoudre les problèmes de construction ». Ceci dans le but de ramener le traitement de la situation à une application des propriétés vues en cours. Ici, le travail mathématique est clos sur la dimension discursive et circule dans le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis] → Dis), utilisant la découverte des données. En restant dans le paradigme G2, le raisonnement consiste à établir une analogie entre la situation à résoudre et les situations traitées en cours ou dans les recherches individuelles des élèves. Les élèves identifient, « les isométries et les problèmes de construction » comme étant la partie du cours à laquelle est rattachée la situation. Ceci permet à l'enseignant de raffiner chez les élèves, à l'aide du modèle, une manière d'établir la preuve de l'existence et de la constructibilité du triangle ABC à construire. Ainsi, le modèle apporte à l'enseignant, à travers le raffinement de l'appréhension de la situation au niveau des élèves, une aide au raffinement d'une manière d'établir la preuve d'existence et de constructibilité du triangle. Pour continuer la résolution, il relance les échanges pour identifier le problème mathématique à résoudre.

Instances, question mathématique et problème :

Enseignant PC Elève E4	Ok !!!!! qu'est-ce qu'on sait ? Oui !!! (Analyse de la situation)	Analyse de la situation (A)
Enseignant PC Elève E4	Monsieur ! Que (L_1), (L_2) et (L_3) sont les droites. (Donnée 1)	
Enseignant PC Elève E4	Et quoi d'autre ? (Donnée 2)	
Enseignant PC Elève E4	Que les droites sont distinctes et parallèles. (Donnée 2)	
Enseignant PC Elève E4	Répondez entièrement aux questions, les amis !!!!! (Donnée 3)	
Enseignant PC Elève E5	Et que A est sur la droite (L_1).	
Enseignant PC Elève E5 Enseignant PC	Qu'est-ce qu'on veut faire ? Construire un triangle équilatéral ABC. D'accord ! Oui !! Vas- y ! Hervé !!!!!	

Elève E6	Monsieur, A doit appartenir à (L_1) , B à (L_2) et C à (L_3) . (Contraintes)	
Enseignant PC	Donc, les sommets du triangle sont sur les droites parallèles !	
Elève E6	OUI, Monsieur !!!!!	
Enseignant PC	Merci ! Quelle est la question à traiter ici alors ? UN LONG SILENCE !!! LE PROFESSEUR REFORMULE !!! Ou alors, en quoi consiste l'activité de construction dans cet exercice ? (Définition de l'activité de construction)	
Elève E8	À donner la construction d'un triangle équilatéral ABC.	
Enseignant PC	Comment doit être cette construction ?	
Elève 7	Ça doit être un programme de construction ! (Choix du type de construction)	
Elève E8	Monsieur ! Et une figure !!!!!	
Enseignant PC	Ce qui signifie, qu'on doit donner le programme de construction du triangle !! Et tracer une.....	
Elève E7	La figure !!!!! (Choix d'actes de construction)	
Elève E8	Très fastoche !!!!!!	
Elève E7	Arrête tes jeux !! Eeehhh ! Tu me perturbes !!!!!	
Enseignant PC	Moins de bruit !!!!!!! Je demande le silence. Comment on peut reformuler la question à résoudre ? UN SILENCE !!!!! LE PROFESSEUR REFORMULE LUI-MÊME LA QUESTION	
Enseignant PC	Quel algorithme de construction permet d'obtenir un triangle équilatéral ABC vérifiant : $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$? (Question mathématique)	Identification du Problème (P)

L'enseignant est ici au début de l'Analyse de la situation, deuxième étape de l'articulation (A-A-C). Cette étape raffine l'identification du problème (P), première étape de l'articulation (P-A-P), et vise l'étude d'une configuration supposée être la solution du problème. Ici, le travail se poursuit dans le paradigme G2, clos sur la dimension discursive, et circulant sur le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis] → Dis). L'enseignant engage l'analyse de la situation avec les élèves, en utilisant l'interprétation des données comme outil discursif. Il les amène à extraire, de l'énoncé de la situation, le problème mathématique à résoudre, puis à identifier l'activité de construction qui va guider le travail. Ainsi, les élèves vont mettre en évidence le problème, à travers trois données (donnée 1,2 et 3) et la question mathématique à résoudre. L'activité de construction mise en exergue consistant à construire un triangle équilatéral ABC vérifiant ces données, les élèves vont choisir l'algorithme de construction et la construction instrumentée comme étant les types de construction qui vont matérialiser la construction du triangle ABC demandée. Ainsi, le modèle apporte à l'enseignant l'aide au raffinement, chez les élèves, du choix du type de construction à mettre en œuvre pour matérialiser la construction du triangle ABC. Poursuivant l'analyse de la situation, l'enseignant relance les échanges pour amener les élèves à caractériser le triangle équilatéral ABC et à choisir une transformation du plan qui est liée à ce triangle.

Caractérisation du triangle ABC et le choix et la conception d'une transformation du plan :

Enseignant PC	Que signifie ABC est un triangle équilatéral ?	Analyse de la situation (A)
Elève E10	Monsieur, ça signifie que $AB = AC = BC$!!!! (Définition 1)	
Enseignant PC	Oui ! une autre proposition ? Théo !!!!!	
Elève E11	Monsieur !! si $\text{Mes } \hat{A} = \text{Mes } \hat{B} = \text{Mes } \hat{C} = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}$. (Définition 2)	
Enseignant PC	Oui !!! Autre proposition ??? Clément !!!!	
Elève E12	$AB = AC$ et $\text{Mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. (Définition 3)	
Enseignant PC	Pourquoi ABC est équilatéral, avec ta définition ?	
Elève E9	Pardon !!! Monsieur !!! j'allais dire que ABC est isocèle.	
Enseignant PC	Ta réponse n'est pas fausse ! Explique seulement !	
Elève E9	Oui, Monsieur ! j'ai oublié la propriété.	
Enseignant PC	Laquelle ??? Sur les triangles isocèles ayant un angle de 60° ???	
Elève E9	Voilà !! Un triangle isocèle qui a un angle $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral.	
Enseignant PC	Très bien !!!! Faisons une figure pour voir ! (Construction « témoin »)	
Enseignant PC	Mais, dans cette figure, abandonnons l'hypothèse « $A \in (L_1)$ » qui n'est pas pertinente, traçons (L_2) et (L_3) . Distinctes et parallèles. Prenons A quelconque dans le plan, ni sur (L_2) , ni sur (L_3) . (Choix de la méthode mathématique)	
	LE PROFESSEUR REALISE UNE FIGURE REPRESENTANT LA SITUATION AU TABLEAU. RELANCE !!!!!	
Enseignant PC	On a dit que l'exercice porte sur l'utilisation des isométries pour construire un triangle équilatéral. Vous avez donné une définition d'un triangle équilatéral ABC. Dites-moi, quelle isométrie est liée à la configuration, triangle équilatéral ? UN SILENCE ABSOLU !!!! ET APRES DES DOIGTS !!!!!!!	
Elève E11	La symétrie orthogonale d'axe (L_2) !!!!!	
Enseignant PC	C'est ce qu'on avait vu en cours ? Fidèle !	
Elève E12	Non ! Monsieur !! C'est une rotation. (Choix de la transformation du plan)	
Enseignant PC	Oui, mais laquelle particulièrement ?	
Elève E12	Monsieur ! La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou bien $\frac{-\pi}{3}$. (Choix de l'angle)	
Enseignant PC	Très bien !!!!! Ce qui suppose qu'on va utiliser l'une des deux rotations !!!	
Enseignant PC	Oui, Monsieur !!!!!	
Elève E12		
Enseignant PC	Revenons sur la figure au tableau !! Le point A étant là, si je place B sur (L_2) , comment faire pour que C soit sur (L_3) ?	
Enseignant PC	Monsieur !!! B doit tourner de $\frac{-\pi}{3}$ autour de A.	
Elève E13		
Enseignant PC	OK !!!!! Et si je place plutôt C sur (L_3) , comment j'obtiens B sur (L_2) ?	
Elève E13	C doit tourner de $\frac{\pi}{3}$ autour de A.	
Enseignant PC	Donc la rotation est de centre A. (Choix du centre)	
Elève E13	Oui ! Monsieur !!!!!	
Elève E1	Mince !!!! Je vois maintenant. Le centre est donné !!! en fait !!!	
Enseignant PC	En principe ! Mais, à quelle condition j'aurai le triangle que je cherche ?	

Elève E1	Monsieur !!! Si C, est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. (Caractérisation du triangle ABC)	
Enseignant PC	Et quel sera le sens du triangle ABC ?	
Elève E13	ABC est de sens direct !	
Enseignant PC	Alors dire que C, est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Signifie quoi ? Oui ! Eliane !!! Tu n'as encore rien dit !!!	
Elève E14	Monsieur ! Que $AB = AC$ et $\text{Mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. (Définition opérationnelle)	
Enseignant PC	Très bien !!!!!!!	

L'enseignant se situe dans l'étape d'Analyse de la situation (A) articulée avec celle d'identification du Problème (P), première étape de l'articulation (P-A-P) pour étudier un triangle équilatéral supposé, solution du problème. Ici, le travail commence dans le paradigme G2 ; ensuite, il bascule dans le paradigme G1, pour enfin se concentrer dans la cohabitation entre les paradigmes G1 et G2. Il est au départ, orienté sur la dimension discursive ; il bascule sur la dimension instrumentale pour devenir sémiotique, et reste clos sur la dimension discursive, afin de caractériser le triangle équilatéral ABC. Ainsi, l'enseignant commence par amener les élèves à dévoiler les caractérisations de la configuration « triangle équilatéral » dont ils disposent. En interprétant les données de la situation, il va ensuite les amener à réaliser une construction « témoin ». Les élèves vont enfin utiliser l'interprétation des données de la situation comme outil sémiotique, et la construction « témoin » comme outil sémiotique et discursif. Le travail circulant sur le plan Sémiotique-discursif ([Sem-Dis] → Sem (clos Dis)), les élèves vont décliner trois définitions d'un triangle équilatéral (définitions 1, 2 et 3). Réalisant une construction « témoin » supposée être le triangle ABC, l'enseignant fait basculer le travail sur le plan Sémiotique-Instrumental, orienté vers la dimension instrumentale, clos sur la dimension sémiotique ([Sem-Ins] → Ins (clos sur Sem)), pour amener les élèves à extraire de la construction « témoin » une caractérisation du triangle équilatéral ABC qu'ils déclinent sous la forme d'une définition opérationnelle. Ceci ramène le travail sur plan Sémiotique-Discursif, orienté sur la dimension discursive ([Sem-Dis] → Dis) et le fait « naviguer » entre les paradigmes G1 et G2. Ainsi, les élèves sont amenés à faire des va-et-vient entre la construction « témoin » et le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016), ce qui leur permet de choisir la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ comme transformation du plan liée à la configuration « triangle équilatéral », et de considérer que « le point C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ » signifie « $AB = AC$ et $\text{Mes } \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ ». Et donc de caractériser le triangle équilatéral ABC comme un triangle isocèle dont la mesure de l'angle au sommet principal A est $\frac{\pi}{3}$. Ou encore, de considérer qu'un triangle dont le sommet C est l'image de B par la rotation r est un triangle solution du problème. Ainsi, l'enseignant reçoit du modèle une aide au raffinement, chez les élèves, d'une part du choix et d'une conception de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et d'autre part d'une caractérisation du triangle équilatéral (ABC) en lien avec cette rotation. Cependant, les élèves sont amenés à utiliser la méthode par « abandon de contrainte » au début de la résolution, puisque l'enseignant souligne : « abandonnons l'hypothèse « $A \in (L_1)$ » qui n'est pas pertinente ». Ceci permet d'utiliser dans le raisonnement des arguments formels (ou

théoriques) tirés du référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016) et des arguments sémiotiques tirés de la construction témoin. Ayant ramené la construction du triangle équilatéral (ABC) à la construction d'un triangle isocèle de sommet A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, l'enseignant relance les échanges, pour définir les actes de construction et décrire le processus de construction de ce triangle.

Processus de construction et de validation du triangle ABC :

Enseignant PC	On va donc supposer que le triangle ABC est de sens direct et prendre la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Que nous appelons <i>r</i> .	Analyse de la situation (A)
Enseignant PC Elève 10	Ce qui veut dire que le problème c'est de construire les points B et C. Comme faire ici ? (Construction des points B et C l'un après l'autre) Oui !!!!! Léon ! Monsieur ! On sait que C doit être sur l'image de la droite (L ₂). (Argument 1)	
Enseignant PC Elève 10	Et, Comment tu le sais ? Monsieur, parce que C, est l'image B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.	Actes de construction (A)
Enseignant PC Elève E10	D'accord !!!!! Et comment on fait alors ? On construit l'image de (L ₂) !!!! Monsieur. Qui sera une droite.	
Enseignant PC Elève E10	Ah !!!!! Et pourquoi une droite ? (Contrôle du problème) Monsieur ! l'image d'une droite par une rotation donne encore une droite !!!!! (Argument 2)	
Enseignant PC Elève E10	Tu peux venir construire au tableau ? Oui ! Monsieur !!!!!!!	
Enseignant PC Elève E10	ATTENTION !!!!!!!!!!! Explique un peu ta construction !!!!!	
Enseignant PC Elève E10	Je vais construire les images des points de (L ₂) par la rotation. Il y a une infinité de points, je pense !!!! Soit un peu plus précis !!!! Oui, Monsieur ! Je construis les images de deux points et je trace la droite qui passe par ces images. (Argument issu de la théorie de la géométrie des transformations)	
Enseignant PC	Très bien !!!!! vas-y alors !!!! L'ELEVE CONSTRUIT LES IMAGES ET TRACE LA DROITE. Appelons cette droite image !!!! (D). Et, prend C comme le point de rencontre de (L ₂) et (D). (Construction du sommet C)	
Enseignant PC Elève E2	Comment construire B ? UN LONG SILENCE DANS LA SALLE Monsieur, C, est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. (Argument 3)	
Enseignant PC Elève 2	Oui ! C'est bien ce qu'on a dit !!! Sauf qu'on a plutôt C ! Monsieur, ça veut dire que B est sur la droite des antécédents. (Argument 4)	
Enseignant PC Elève 10	Qui est..... ? Oui !!!!! Dis-nous !!! La droite (L ₂).	
Enseignant PC	Oui !!! Mais !! je n'ai pas toujours la réponse à ma question ! UN SILENCE PUIS UN AUTRE ELEVE	
Enseignant PC	Vas-y ! Raphael !!!!!!!!!!!	

Elève E14	Monsieur ! si B est sur la droite des antécédents, B doit être l'antécédent de C par la rotation r . (Construction du sommet B)	
Enseignant PC	Très bien !!!!!!! Essayons de résumer tout cela ! Mais avant !!!! Qu'est ce qui prouve que ce triangle est réellement équilatéral ? (Contrôle du problème)	
Elève E14	Monsieur, on a dit que tout triangle isocèle d'angle $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral !!!	
Enseignant PC	Oui !!!!! Et ? (Contrôle pas à pas de la construction réalisée)	
Elève 14	Or, ici !! B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. (Argument 5)	
Enseignant PC	D'accord !! Ce qui veut dire ????????????	
Elève E14	Ce qui veut dire que $AB = AC$ et $\text{Mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Le triangle ABC est équilatéral. (Validation du triangle ABC)	
Enseignant PC	Très bien !!!!!!! On peut donc reconsidérer l'hypothèse que nous avons abandonnée au départ. C'était quoi cette hypothèse ? Oui !!!!!	
Enseignant PC	« $A \in (L_1)$ » avec « $A \in (L_1)$ parallèle à (L_2) et à (L_3) » !!!!	
Elève E12	D'accord !!!	
Enseignant PC	Trace donc la droite qui passe par A et qui est parallèle à (L_2) et (L_3) !! (Reconsidération de l'hypothèse abandonnée)	
Enseignant PC	Merci, tu peux aller t'asseoir !!!!! LE PROFESSEUR TRACE LUI-MÊME LA DROITE	

Ici, l'enseignant articule, dans l'étape d'Analyse de la situation (A), le Problème (P) et les Actes de construction (A), qui sont deux étapes de l'articulation (P-A-P) du modèle (A-A-C / P-A-P), afin de poursuivre l'étude d'un triangle supposé être solution du problème. Le travail mathématique consiste, au départ, en une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, avec l'utilisation des va-et-vient entre la construction « témoin » et le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016). Cependant, il se recentre sur le paradigme G2 jusqu'à la fin, pour chercher des arguments formels (ou théoriques). Ainsi, à l'aide du modèle, l'enseignant amène les élèves à élaborer cinq arguments (arguments 1, 2, 3, 4 et 5) issus des propriétés de la rotation r et de la caractérisation du triangle ABC, raffinée à l'aide du modèle. Ces arguments vont leur permettre de définir et de contrôler les actes de construction, puis de valider le produit de tous ces actes qui va réaliser la construction du triangle équilatéral ABC. Les élèves identifient ainsi deux catégories d'actes de construction : ceux issus des effets des propriétés de la rotation r , qui vont permettre l'élaboration de l'algorithme de construction, et les actions instrumentées (Petifour, 2015), issues des effets des instruments de géométrie, qui vont permettre la réalisation de la construction instrumentée. Le travail reste discursif dans toute cette étape, pour amener les élèves à décrire le processus de construction du triangle ABC et à élaborer le discours de validation de la construction réalisée. Ce discours s'appuie sur la caractérisation du triangle équilatéral ABC. Il est structuré à l'aide d'un raisonnement à trois niveaux : analogique puisqu'il part d'une construction « témoin » pour chercher les arguments, ensuite inductif car il formule des conjectures sur la nature du triangle obtenu, et enfin déductif parce qu'il établit que le triangle isocèle ABC obtenu est bien équilatéral, et que les sommets A, B et C sont respectivement situés sur les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) . Le discours prend ainsi la forme d'un argumentaire démonstratif, visant à établir que le triangle ABC construit est un triangle isocèle

	DISCUSSION	
	(Discussion sur le nombre de solution)	
Enseignant PC	Quels sont les choix que nous avons eus pour construire le triangle (ABC) ?	
Elève E10	Monsieur !!!! Moi, je peux dire !!! le sens du triangle (ABC).	
Enseignant PC	Oui !!!!! C'est le seul ? Ralph dit quelque chose !!!!!!!	
Elève E16	La position de A sur la droite (L_1).	
Enseignant PC	Oui !!!! On peut aussi ajouter la position relative des droites (L_1), (L_2) et (L_3). Si nous avons fait ces choix, cela veut dire qu'il y a plusieurs triangles solutions. Lesquels d'après vous ?	
Elève E10	Monsieur !! Pour moi, il y a !!! les triangles de même sens et les triangles de sens contraires.	
Enseignant PC	Et comment obtenir tous ces triangles ?	
	UN SILENCE DANS LA SALLE !!!!!!!	
Enseignant PC	Voici comment on va faire. Suivez attentivement ! Soit \vec{u} un vecteur directeur des droites (L_1), (L_2) et (L_3). Prenons (D) la perpendiculaire à ces trois droites. Connaissant un triangle (ABC) solution. Les translations de vecteur $k\vec{u}$ (k non nul) permettent de construire tous les triangles solutions de même sens et les symétries orthogonales d'axe (D) permettent de construire tous les triangles de sens contraires.	

L'enseignant est à l'étape de Conception de la solution (C) (ou Synthèse), phase de l'articulation (A-A-C) qu'il relie au Produit d'Actes de construction (P), la dernière étape de l'articulation (P-A-P), ceci pour mettre au point une procédure de construction d'un triangle équilatéral ABC solution du problème. Le travail vise ici à matérialiser la construction du triangle équilatéral ABC, conforme, d'une part aux règles du contrat didactique (Brousseau, 1985), et d'autre part aux données du problème. L'enseignant amène les élèves à faire une synthèse de toutes les analyses réalisées. Le travail débute dans le paradigme G2 et circule, au départ, dans le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis] \rightarrow Dis), orienté sur la dimension discursive. L'enseignant va articuler ce travail avec le contrat didactique, pour que les élèves puissent différencier la solution de la situation et la construction du triangle ABC à réaliser. Ainsi, les élèves élaborent un algorithme de construction, mettant en œuvre le premier type d'actes de construction. Cet algorithme constitue le premier élément qui matérialise la construction du triangle équilatéral ABC. Ce travail va basculer vers le plan Sémiotique-Instrumental ([Sem-Ins] \rightarrow Ins), orienté sur la dimension instrumentale car les élèves vont réaliser une construction instrumentée, qui est une illustration de l'algorithme de construction élaboré. Pour ce dernier élément, qui constitue aussi la construction du triangle ABC, le travail se positionne dans le paradigme G1. Ainsi, les élèves matérialisent le dernier type d'actes de construction, raffinés à l'aide du modèle par l'enseignant, ce qui leur permet d'obtenir le produit des actes de construction, constitué de l'algorithme et de la construction instrumentée du triangle ABC. Ainsi, le modèle (A-A-C / P-A-P) apporte à l'enseignant une aide au raffinement du processus de réalisation d'une construction du triangle solution. Ouvrant une discussion sur le nombre de triangles solutions du problème, les élèves vont décrire une procédure, raffinée à

leur niveau par l'enseignant, leur permettant de décrire comment obtenir tous les triangles solutions. Ils seront amenés à considérer que les translations de vecteur $k \vec{u}$ (k non nul) permettent de construire tous les triangles solutions de même sens, et les symétries orthogonales d'axe (D) permettent de construire tous les triangles de sens contraires. Ce dernier aspect de la séquence permet à l'enseignant d'achever la résolution du problème. Remarquons que, pour conduire la résolution de cette situation, l'enseignant P_C a organisé par étapes les sous-tâches liées, d'une part à la séquence de résolution, et d'autre part au problème de construction, conformément au modèle qu'il mettait en œuvre. Ce qui a permis aux élèves de résoudre le problème de façon méthodique, en identifiant chacun des éléments auxquels ils devaient se référer pour réaliser une construction exacte et valide du triangle équilatéral ABC. Le modèle apporte ainsi à l'enseignant P_C une aide au raffinement du processus de résolution de la situation, au niveau des élèves.

Conclusion

Nous avons pour objectif, dans ce chapitre, de répondre à la question ($Q_{4.1}$). Pour cela, nous avons formulé l'hypothèse ($H_{4.1}$) et ramené le traitement de cette question à la vérification de cette hypothèse. Ainsi, nous avons observé un enseignant en situation de résolution d'un problème de construction dont nous avons organisé la mise en œuvre. Dans l'analyse *a priori* de cette situation, nous avons décrit le scénario de mise en œuvre du travail mathématique d'organisation que ferait cet enseignant à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) pour développer la validation, mettant de côté celui de réalisation de la construction du triangle équilatéral ABC. Ce qui nous a permis de nous placer dans la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle, et de décomposer l'hypothèse ($H_{4.1}$) en cinq sous-hypothèses visant à envisager les différentes aides qu'apporterait le modèle dans l'enseignement de la validation, dans un ETM idoine effectif, en classe de Première Scientifique. Ainsi, nous avons analysé la forme de travail mathématique d'organisation que produit l'enseignant P_C dans un ETM construit et mis en œuvre par lui-même, à l'intérieur de la structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P). Dans l'analyse du déroulement de la situation que nous avons proposée, notre intérêt s'est porté sur la gestion du travail mathématique d'organisation ayant permis à l'enseignant P_C , d'une part de réaliser et de valider la construction du triangle équilatéral ABC, et d'autre part de développer la démarche de validation chez les élèves. Ceci, afin de voir si les hypothèses formulées *a priori* sur les différentes aides qu'apporterait le modèle sont bien réalisées dans l'ETM idoine effectif. Compte tenu du fait que nous étudions les aides qu'apporte le modèle (A-A-C / P-A-P) à travers le travail mathématique permettant à l'enseignant P_C de réaliser une construction du triangle équilatéral ABC et le travail mathématique d'organisation qu'il fait à l'intérieur de la structure de développement de la démarche de validation qu'offre ce modèle, nous présentons un bilan des résultats sur chacun de ces deux aspects, tels qu'ils sont apparus tout au long de nos analyses.

- **Le travail mathématique d'organisation produit par l'enseignant P_C pour réaliser et valider la construction du triangle équilatéral ABC**

Pour mettre en œuvre la situation en classe, l'enseignant P_C a produit, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), une organisation du travail mathématique qui lui a permis de décrire le processus de construction du triangle équilatéral ABC et de valider la construction réalisée, afin de développer la démarche de validation chez les élèves. Cette organisation s'est déclinée à travers un travail mathématique permettant de réaliser la construction et un discours de validation qui accompagne ce travail. Ayant plus porté son intérêt pour la construction sur la procédure et le respect des règles du contrat didactique que sur la solution finale, au début de la résolution l'enseignant a amené les élèves à utiliser une méthode mathématique consistant à abandonner une contrainte du problème. Ainsi, le travail mathématique s'est effectué prioritairement dans le paradigme G2, et dans une cohabitation entre les paradigmes G1 et G2. Ce travail a été discursif au départ, pour établir la preuve d'existence et de constructibilité du triangle équilatéral ABC. Il est devenu instrumental, pour réaliser une construction « témoin » sur laquelle les élèves devaient visualiser la situation et la saisir pour extraire les propriétés pertinentes. Ce travail s'est par la suite transformé, pour être prioritairement sémiotique et discursif, où il est resté clos, pour décrire un processus de construction et une démarche de validation, du triangle ABC. Il a circulé suivant les plans : [Dis-Sem] \rightarrow Sem, [Sem-Ins] \rightarrow Ins (ou Sem) ou (clos Dis), [Sem-Dis] \rightarrow Dis et [Sem-Ins] \rightarrow Ins, dans lesquels il s'est articulé avec les règles du contrat didactique relatives à réalisation de la solution d'un problème de construction, pour décrire la procédure de construction d'un triangle solution du problème, à travers un algorithme de construction et une construction instrumentée. Ainsi, la construction de cet objet a été matérialisée par ces deux éléments. Le discours de validation qui accompagne ce travail a pris la forme d'un argumentaire de type démonstratif, consistant à caractériser le triangle équilatéral ABC par les propriétés mathématiques de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Les arguments ont donc été formels (ou théoriques) et tirés du référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016) des élèves, pour établir que le triangle ABC à construire est un triangle isocèle de sommet principal A et d'angle en A de mesure $\frac{\pi}{3}$. Afin d'établir la vérité des conclusions sur les constructions élémentaires réalisées, ce discours, dont la mise en forme est celle d'une démonstration, a été élaboré sur la base d'un raisonnement « assisté » par une construction « témoin » et gradué suivant trois niveaux : analogique pour rechercher les arguments sur la construction « témoin » ; inductif pour formuler des conjectures, et déductif pour valider les conjectures formulées. La validation a occupé une place première dans cette séquence de résolution, pour donner les raisons (Balacheff, 1989) de la construction du triangle équilatéral ABC. Ceci a permis à l'enseignant d'amener les élèves à s'assurer, pour se convaincre et convaincre autrui, de l'exactitude la construction réalisée. Le but de son élaboration a été d'orienter les élèves sur la manière de raisonner pour valider une construction, sur la manière d'utiliser les propriétés dont ils disposent pour extraire des arguments de validation sur une construction « témoin », et enfin sur la manière de rédiger le discours de validation d'une construction réalisée. Cependant, la validation de la construction du triangle ABC a consisté à utiliser deux régimes de validation (Balacheff et Margolinas, 2017) : les contrôles d'actes de construction, pour valider pas à pas les constructions élémentaires ; et la démonstration pour prouver, afin d'établir l'exactitude et la validité de la construction du triangle ABC réalisé. On peut constater que l'ETM construit et mis en œuvre par l'enseignant P_C sur cet aspect est bien celui qui est élaboré par le modèle (A-A-C / P-A-P). L'enseignant

n'ayant pas modifié cet ETM, nous allons le confronter au travail d'organisation qu'il a fait à l'intérieur de la structure de développement de la démarche de validation adossée à ce modèle, afin de voir si les aides envisagées dans les analyses *a priori* sont celles qui se sont réalisées dans l'ETM idoine effectif construit par l'enseignant P_C .

- **Le travail mathématique d'organisation fait par l'enseignant P_C à l'intérieur du modèle (A-A-C / P-A-P) pour développer la démarche de validation, chez les élèves**

Pour développer la démarche de validation chez les élèves, l'enseignant P_C a mis en œuvre la structure de développement de la démarche de validation offerte par le modèle (A-A-C / P-A-P). Dans ce processus, il s'est appuyé sur le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, adossé au fonctionnement de ce modèle. Ce qui lui a permis de raffiner, chez les élèves, la distinction des éléments auxquels ces derniers peuvent se référer pour valider la construction du triangle ABC. Ainsi, il a structuré les sous-tâches liées à la séquence de résolution et au problème de construction qu'il résolvait avec les élèves en six étapes. Ceci lui a permis de raffiner, chez les élèves, un processus de résolution de la situation, obtenant ainsi une aide au raffinement du processus de résolution du problème. Partant de l'appréhension de la situation (A), qui est la première étape de l'articulation (A-A-C) du modèle, les élèves ont établi la preuve de l'existence et de la constructibilité du triangle équilatéral ABC. Ceci a permis à l'enseignant de les amener à identifier les données pertinentes pour la résolution de la situation, l'activité construction et la question mathématique à traiter. Ces éléments ont mis en évidence le problème mathématique à résoudre, et permis aux élèves de réaliser une construction « témoin », qu'ils ont supposée être la solution du problème. L'enseignant a ainsi centré la démarche de validation de ce triangle sur cette construction. En articulant l'étape d'Analyse de la situation (A) avec celle d'identification du problème (P) issue de l'articulation (P-A-P) du modèle, l'enseignant a ainsi raffiné, au niveau des élèves, une caractérisation du triangle équilatéral ABC sous la forme d'une définition opérationnelle, le choix de la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$ comme étant la transformation du plan liée au triangle équilatéral ABC, et une conception de cette rotation liée à ce triangle. Ainsi, les élèves ont choisi un algorithme de construction et une construction instrumentée comme deux types de construction à mettre en œuvre pour matérialiser la construction d'un triangle ABC solution du problème. À ce niveau, l'enseignant a reçu du modèle une aide au raffinement, chez les élèves, de la caractérisation du triangle ABC, du choix et d'une conception de la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$, et du choix du type de construction à mettre en œuvre pour réaliser la construction de ce triangle. Restant dans la phase d'analyse (A), articulée avec celles d'identification du problème (P) et des actes de construction (A) (deuxième étape de l'articulation (P-A-P)), l'enseignant a amené les élèves à réduire la réalisation de la construction du triangle ABC à une construction point par point d'un triangle isocèle de sommet principal A, dans lequel le point B est l'image de C par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$; puis choisir l'action instrumentée (Petitfour, 2015) et les propriétés de la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$ comme des actes qui vont favoriser la réalisation de l'algorithme de construction et de la construction instrumentée du triangle équilatéral ABC. Terminant la résolution par la mise au point d'une procédure de construction de ce triangle, l'enseignant s'est placé dans les phases de conception de la solution (C) et du

produit d'actes de construction (P) pour matérialiser la construction du triangle ABC et amener les élèves à discuter sur le nombre éventuel de triangles solutions du problème. Ainsi, il a obtenu, du modèle (A-A-C / P-A-P), une aide au raffinement, chez les élèves, du choix des actes de construction et du processus de construction du triangle équilatéral ABC.

Nous résumons dans le tableau ci-dessous, la réalisation des hypothèses formulées dans l'analyse *a priori* menée dans l'ETM idoine potentiel, dans la classe de Première Scientifique C :

Hypothèse	H' ₁	H' ₂	H' ₃	H' ₄	H' ₅
Réalisée	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

La réalisation intégrale de ces hypothèses nous permet de conclure sur celle de l'hypothèse(H_{4.1}) à travers le bilan ci-dessous :

Bilan

Dans les ETM idoines effectifs, le modèle (A-A-C / P-A-P) joue un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la manière de distinguer le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit de tous les actes de construction. Des éléments auxquels les élèves peuvent se référer pour produire la démarche de validation des constructions qu'ils réalisent.

Ce résultat établit que le modèle de forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) favorise l'enseignement de la validation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique. Cependant, il soulève une question liée aux effets de ce modèle sur l'apprentissage de la validation par les élèves à l'aide de ce modèle, à savoir : **quels peuvent être les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation par les élèves ?**

Chapitre 11

Les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique

Dans ce chapitre nous voulons mesurer les effets d'enseignement de la validation sur les élèves, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P). Plus précisément, nous voulons illustrer l'impact du modèle sur l'apprentissage de la validation par les élèves, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique. En effet, nous cherchons à traiter la question de recherche ($Q_{4.2}$) que nous avons formulée de la manière suivante :

$Q_{4.2}$: Peut-il exister une corrélation entre l'utilisation de la forme d'organisation de travail élaborée et la réussite dans la résolution d'un problème de construction, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique ?

Dans notre travail, nous interprétons la réussite dans la résolution d'un problème de construction par le succès dans la réussite de la solution du problème et la réussite dans le raisonnement mathématique qui réalise cette solution. Ce qui signifie que répondre à cette question, revient, d'une part à étudier l'influence du modèle sur le succès dans la réussite de la solution d'un problème de construction que résolvent les élèves, et d'autre part à décrire comment le modèle a contribué à la réalisation et à la validation d'une construction de l'objet que décrit le problème, dans l'ETM idoine construit à l'intention des élèves. Ainsi, nous postulons à travers l'hypothèse ($H_{4.2}$), que :

$H_{4.2}$: Dans l'ETM idoine effectif, il existe une corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et la réussite dans la résolution d'un problème de construction par l'élève, car le modèle fournit, dans cet ETM, une manière de résoudre un problème de construction, de caractériser l'objet, de choisir une transformation du plan liée à l'objet, de choisir le type de construction à mettre en œuvre, de décrire le processus de réalisation de la construction de l'objet et de valider le produit des actes de construction. Il s'agit là des éléments que raffine le modèle au niveau des élèves, pour développer la démarche de validation.

Pour tester cette hypothèse, nous analysons les productions de douze binômes d'élèves. Dans ces analyses, nous étudions le succès des élèves dans la réussite de la résolution du problème de construction lié aux transformations du plan que nous leur proposons, relativement au modèle utilisé. Nous décrivons par la suite la forme de travail mathématique d'organisation ayant permis aux binômes qui ont utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P) de réaliser la construction de l'objet géométrique produit. Dans cette deuxième articulation, nous illustrons le bénéfice que les élèves ont pu tirer de la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle (A-A-C / P-A-P) pour mener à bien la validation de la construction de l'objet géométrique qu'ils ont réalisé.

Ainsi, nous commençons ce chapitre par la présentation de la méthodologie utilisée. Ensuite, nous dégagons ses effets à travers une analyse des productions d'élèves.

11.1. La méthodologie d'analyse des effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation par les élèves, dans les ETM idoines

Pour mesurer efficacement les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation par les élèves, nous avons décidé d'étudier le succès dans la réussite de la solution d'un problème de construction relativement à la forme d'organisation du travail mathématique, ainsi que la réussite dans le raisonnement mathématique qui réalise cette solution, dans l'ETM idoine construit à l'intention des élèves. Pour cela, nous avons adopté une méthodologie qui consiste à construire une situation répondant à nos besoins d'étude, mettre en place des binômes d'élèves, puis analyser les productions de ces binômes.

Dans la construction de la situation, nous avons mis sur pied un problème de construction lié aux isométries du plan, conforme à nos résultats d'analyse sur les transformations du plan, la résolution des problèmes de construction et la validation, en classe de Première Scientifique (Cf. partie 1). Nous avons mis en place douze binômes d'élèves issus de trois classes de Première Scientifique, situées dans trois établissements différents et enseignées par trois professeurs différents. Nous avons fait composer ces binômes sur la situation, sans nous intéresser aux éventuels échanges entre les membres de chaque binôme, et nous avons analysé les productions de ces binômes. Compte tenu du fait que nous voulions analyser la totalité du travail écrit, tel que produit par chaque binôme, nous avons analysé, sur chaque production, le brouillon et la feuille de composition. Notre échantillon est donc composé de douze binômes d'élèves des classes de Première Scientifique A, B et C. Ces binômes sont désignés par (B_n) avec $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$. Pour analyser les productions de ces binômes, nous avons procédé de deux manières différentes :

- L'analyse du succès dans la réussite de la solution de la situation proposée, par chaque binôme se fait à partir d'une étude quantitative du succès dans la réussite de la solution du problème. Elle vise à établir la corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et la réussite dans la solution du problème. Nous considérons le succès au sens institutionnel, tel qu'il est conçu par les enseignants en classe. Ici, nous confions les productions des binômes à un enseignant de mathématiques expérimenté (Robert, 2012), d'une classe de Première Scientifique n'ayant pas pris part à nos expérimentations. Ce dernier a évalué le travail des binômes à la suite d'une harmonisation du corrigé que nous avons réalisée avec lui, sans porter d'appréciations sur les productions, mais seulement le chiffre 1 lorsque le binôme a réussi dans la résolution de la situation conformément aux attentes institutionnelles, et le chiffre 0 sinon. Nous analysons, par la suite, la fréquence de réussite des binômes relativement au modèle de forme d'organisation du travail mathématique utilisé. Ceci doit nous permettre de vérifier la corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et le succès dans la réussite de la solution du problème.
- L'analyse de la réussite dans le raisonnement mathématique qui réalise la solution de la situation proposée se fait à partir de l'analyse de la forme de travail mathématique d'organisation que produisent les binômes à l'intérieur de la structure de développement

de la démarche de validation adossée au modèle utilisé par les binômes, pour réaliser et valider la construction de l'objet géométrique que décrit la situation. Elle vise à établir la corrélation entre les éléments auxquels les élèves se sont référés pour réaliser et valider la construction et les éléments que raffine la structure de développement de la démarche de validation du modèle (A-A-C / P-A-P). Ici, nous centrons l'étude sur les productions des binômes ayant utilisés le modèle (A-A-C / P-A-P). Nous identifions les éléments auxquels les élèves se sont référés pour réaliser et valider la construction de l'objet demandé. Puis nous comparons ces éléments aux éléments qu'offre le modèle pour raffiner la démarche de validation. Ceci nous permet de dégager les effets du modèle sur l'apprentissage de la validation par les élèves. Ainsi, conformément à notre cadre théorique (**EPP**) nous analysons, pour chaque binôme, le travail mathématique produit et le travail d'organisation associé mis en œuvre pour construire et valider l'objet que décrit la situation proposée, ce qui nous permet de reprendre la grille d'analyse à deux niveaux, conçue au chapitre précédent.

- **Niveau 1**

L'analyse du travail mathématique d'organisation produit par les élèves permettant de décrire et de réaliser la construction de l'objet que décrit le problème, se base sur l'étude du travail mathématique produit ayant permis à ces derniers de réaliser la construction de l'objet, et sur celle du discours de validation qui accompagne ce travail. L'étude de ces éléments se décline à partir des points ci-dessous :

- La méthode mathématique mobilisée.
- Le(s) paradigme(s) géométrique(s) qui dirige (-nt) le travail effectué.
- La(les) dimension(s) privilégiée(s) dans le travail permettant de décrire et réaliser la construction produite. Ici, nous analysons les dimensions sémiotique, discursive et instrumentale des ETM.
- La circulation du travail mathématique au sein des plans verticaux des dimensions des ETM permettant de réaliser la construction.
- Le raisonnement mobilisé pour valider les constructions réalisées.
- Les arguments employés dans l'argumentaire de validation des constructions.
- La mise en forme de l'argumentaire de validation des constructions.

- **Niveau 2**

L'analyse du travail mathématique d'organisation que font les élèves pour décrire la démarche de validation des constructions est faite à partir de l'étude des procédés de constructions qu'ils mobilisent et de celle des éléments de la structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P). L'étude de ces éléments se décline à travers les points ci-dessous :

- Le processus de résolution de la situation.
- La caractérisation de l'objet à construire.
- Le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet.
- Le choix du type de constructions à mettre en œuvre.
- La description du processus de construction de l'objet.
- La validation des constructions.

Cette grille est mise en fonctionnement, dans l'ETM idoine effectif, à travers le discours écrit visant à décrire le processus de construction et de validation de l'objet que produit chaque binôme sur sa feuille de composition.

11.1.1. L'échantillon des binômes d'élèves

Les élèves sont ceux qui ont pris part aux séquences de résolution conduites en classe par les enseignants P_A , P_B et P_C . Ils sont de ce fait sélectionnés en fonction du modèle de forme d'organisation du travail mathématique qui a été mis en œuvre au cours de la séquence suivie en classe (A-S ou A-A-C / P-A-P). Douze élèves ont été sélectionnés par les enseignants P_A et P_B , qui ont mis en œuvre le modèle (A-S), soit six de chaque groupe. Et douze élèves ont été proposés par l'enseignant P_C , qui a mis en œuvre le modèle (A-A-C / P-A-P). Nous avons ainsi constitué six binômes d'élèves issus du modèle (A-S) et six binômes issus du modèle (A-A-C / P-A-P). Nous avons laissé la sélection des élèves aux enseignants, parce que nous voulions avoir les meilleurs élèves connus des enseignants. Une condition qui leur avait été spécifiée.

11.1.2. Le déroulement de l'expérience

Les expérimentations réalisées avec les enseignants P_A , P_B et P_C , ayant respectivement eu lieu les 30/03/2022, 31/03/2022 et 01/04/2022, nous avons accordé cinq jours aux élèves pour se préparer sur le plan cognitif et psychologique, puisque les enseignants ont décidé de considérer le test que nous devions passer comme une évaluation de groupe. Pour nous, cette période accordée aux élèves avait pour but de mieux installer le modèle à leur niveau. D'ailleurs, à la fin des premières expérimentations, les enseignants avaient laissé comme travail à faire, de reprendre la situation traitée, en utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{3}$. Ainsi, les élèves ont révisé pour passer ce test, et donc le modèle devait être disponible. Par ailleurs, ces jours-là ces élèves n'étaient pas préoccupés par le passage d'un contrôle. Ces expériences ont eu lieu les 04/04/2022, 05/04/2022 et 06/04/2022. Nous avons commencé par remettre aux élèves les cahiers de composition que nous avons conçus à cet effet. Ces cahiers comportaient deux parties : une première réservée au brouillon et l'autre à la feuille de composition. Avant de distribuer les feuilles où figurait l'énoncé de la situation, nous avons pris le soin de numéroter de 1 à 12 les cahiers des binômes qui devaient être analysés. Nous avons commencé par préciser certains points :

- Le test est un devoir de groupe qui sera noté sur cinq points (exigence des enseignants).
- Les élèves ne doivent utiliser que le cahier de composition, dans lequel se trouvent un brouillon et la feuille de composition.
- Les élèves ne sont autorisés à n'utiliser qu'un stylo bleu même pour la réalisation des figures (s'il s'avère nécessaire d'en esquisser une).
- Les élèves n'ont pas le droit d'utiliser une gomme ou un correcteur. Dans le cas d'une faute, écrire à côté du mot « faux ».
- Le travail est fait en groupe, les élèves doivent se mettre d'accord sur ce qu'ils retiennent comme vrai.

Après la distribution du test, le temps de recherche en groupe a été de trente minutes. À la fin, nous avons remis les douze productions à un enseignant de mathématiques. Comme nous

l'avons dit, ce dernier était chargé d'évaluer les productions sans porter des appréciations, juste le chiffre (1) lorsque le binôme a réussi dans la résolution de la situation, conformément aux attentes institutionnelles, et le chiffre (0) sinon.

11.2. L'analyse des effets du modèle (A-A-C / P-A-P) dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique A, B et C

Pour mesurer les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation par les élèves, nous avons choisi d'étudier les productions de ces binômes de deux manières différentes : analyser le succès dans la réussite de la solution du problème relativement au modèle utilisé, pour établir la corrélation entre l'utilisation du modèle et la réussite de la résolution du problème ; ensuite, analyser le raisonnement mathématique qui réalise la solution, pour dégager les effets du modèle sur l'apprentissage de la validation dans les ETM idoines effectifs. Ainsi, nous avons proposé aux élèves la situation ci-dessous :

Énoncé de la situation proposée

On donne (D_1) , (D_2) et (D_3) trois droites distinctes et parallèles. Construire un triangle isocèle rectangle EFG vérifiant : $E \in (D_1)$, $F \in (D_2)$ et $G \in (D_3)$.

Compte tenu du fait que : le fonctionnement du modèle (A-A-C / P-A-P), ses caractéristiques et sa structure de développement de la démarche de validation, sont décrits dans des ETM idoines qualifiés de potentiels, nous avons décidé de ne pas nous étendre sur la description du scénario de mise en œuvre du travail mathématique produit et du travail mathématique d'organisation, que feraient les élèves pour construire et valider, le triangle EFG. Pour ces aspects, nous allons directement procéder aux analyses des productions. L'analyse *a priori* va consister à : analyser l'énoncé de la situation, proposer une solution de cette situation à priori, et formuler des hypothèses relativement aux effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation dans les ETM idoines effectifs.

11.2.1. L'analyse à priori de la situation proposée

11.2.1.1. Analyse de l'énoncé de la situation proposée

La situation porte sur la partie du cours consacré à « *l'utilisation des isométries du plan pour résoudre un problème de construction* ». Les élèves doivent la résoudre conformément aux règles du contrat didactique, en utilisant l'un des modèles de forme d'organisation du travail mathématique, (A-S) ou (A-A-C / P-A-P), afin que nous puissions décrire, dans la forme d'organisation du travail mathématique qu'ils utiliseront, le processus ayant permis de construire et de valider la construction de l'objet que décrit la situation. La situation décrit un problème de construction dont la tâche consiste à « *construire un triangle rectangle isocèle* ». C'est un exercice du manuel CIAM de la classe de Première Scientifique (p.46) à la formulation duquel nous avons apporté quelques modifications pour faciliter son appréhension et son analyse. Les informations qui favorisent sa résolution sont données sous la forme du langage mathématique (symbolique ou non). Le registre utilisé est celui du langage. Dans la formulation de l'énoncé de cette situation, la forme des données est la forme discursive simple (FD_S) puisque cet énoncé n'est pas accompagné d'une figure. La situation contient le genre de tâche

« Construire » et elle est donnée dans une approche affine (géométrie métrique). Dans cette situation, nous identifions deux données, que nous désignons par T_1 et T_2 , et que nous définissons de la manière suivante :

T_1 : Trois droites (D_1) , (D_2) et (D_3) distinctes du plan.

T_2 : Les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) sont parallèles.

La conclusion consiste à construire un triangle rectangle isocèle EFG dont le sommet E est situé sur la droite (D_1) , le sommet B sur la droite (D_2) et le sommet C sur la droite (D_3) . Cette situation fixe trois contraintes que doit vérifier une solution donnée. Nous les désignons par C_1 , C_2 et C_3 , nous les définissons ainsi :

C_1 : EFG doit être un triangle rectangle isocèle.

C_2 : Les sommets du triangle EFG doivent être situés sur trois droites distinctes et parallèles : (D_1) , (D_2) et (D_3) .

C_3 : $E \in (D_1)$, $F \in (D_2)$ et $G \in (D_3)$.

La question géométrique vise à amener les élèves à trouver une technique qui permet de construire un triangle rectangle isocèle en utilisant une transformation du plan. Ils devront donc choisir les rotations r' de centre E et d'angle $\frac{k\pi}{2}$ (avec $k = 1$ ou $k = -1$), en supposant que l'angle droit se situe en E. Ce qui leur permettra de caractériser le triangle rectangle isocèle EFG comme étant un triangle qui est tel que $F = r'(G)$. Qui signifie que « $EF = EG$ et $\text{Mes } \widehat{FEG} = \frac{k\pi}{2}$ » (avec $k = 1$ ou $k = -1$). Conformément aux règles du contrat didactique, les élèves devront choisir comme type de construction à mettre en œuvre, pour la réalisation de la construction du triangle rectangle isocèle EFG, un algorithme de construction et une construction instrumentée. Et donc deux types d'actes de construction : les actes issus des propriétés de la rotation r' , pour les différentes articulations de l'algorithme ; et les actes issus des instruments de géométrie, pour les actions instrumentées (Petitfour, 2015) élémentaires qui réalisent une construction instrumentée du triangle EFG. Cependant, pour résoudre cette situation, les élèves doivent disposer des connaissances relevant du géométrique et des connaissances relevant du non géométrique (Petitfour, 2015). Et disposer d'un certain nombre de compétences.

- **Les connaissances relevant du géométrique** sont de trois types :

- **Les connaissances géométriques** qui vont permettre aux élèves ; de se remémorer la notion de « position relative des droites dans le plan » et les propriétés qui en découlent pour construire les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) ; de visualiser la forme : triangle rectangle isocèle pour pouvoir le construire ; de se souvenir des propriétés géométriques du triangle rectangle isocèle ; et de le différencier des autres triangles disponibles dans le référentiel théorique (Kuzniak et al. 2016). Ils pourront définir le triangle rectangle isocèle EFG en s'appuyant sur l'une des propriétés suivantes : « $EF = EG$ et $\text{Mes } \widehat{EFG} = \text{Mes } \widehat{EGF} = \frac{k\pi}{4}$ et $\text{Mes } \widehat{FEG} = \frac{k\pi}{2}$ » ou « $EF = EG$ et $\text{Mes } \widehat{EGF} = \frac{k\pi}{2}$ » (avec $k = 1$ ou $k = -1$).
- **Les connaissances techniques** qui sont liées aux instruments à usage géométrique, permettant aux élèves de se rappeler les fonctions de chaque

instrument et leurs règles d'utilisation en lien avec les objets géométriques. Ces connaissances vont établir une correspondance canonique entre les artefacts du paradigme G1 et ceux du paradigme G2, comme les passages compas-cercle, règle-droite, graduation-longueur, rapporteur-angle (Parzysz, 1989). Cette correspondance sera fondamentale dans la résolution de cette situation puisqu'elle va permettre l'articulation entre les paradigmes G1 et G2, et assurer les allers-retours entre l'un et l'autre au cours de la résolution. Ainsi les élèves doivent savoir choisir l'instrument à utiliser pour représenter chaque objet géométrique qui va constituer la construction instrumentée du triangle EFG représentée en soutien de l'algorithme de construction élaboré.

- **Les connaissances graphiques**, qui constituent un ensemble d'informations géométriquement significatives et pertinentes devant être prélevées sur la figure qui va soutenir la résolution et être interprétées géométriquement par les élèves. Elles leur permettront dans le jeu de conversion (Duval, 1994) de passer du registre figural à un autre registre de représentation (Duval, 1994) et vice-versa. Par exemple la propriété : « les côtés EF et EG ont la même longueur », pourra être représentée graphiquement par le codage traduisant l'égalité entre les distances EG et EF.
- **Les connaissances relevant du non géométrique** sont de deux ordres :
 - **Les connaissances relevant du langage**, qui permettront aux élèves de faire des conversions (Duval, 1994) pour changer de registre de représentation, par exemple dans la notation : « $E \in (D_1)$, $F \in (D_2)$ et $G \in (D_3)$ », les élèves doivent pouvoir décoder et comprendre ces ostensifs (Chevallard, 1998) pour pouvoir les interpréter.
 - **Les connaissances mettant en avant l'aspect manipulateur des objets techniques**, où les élèves doivent avoir une souplesse dans la manipulation des instruments, une organisation des gestes lors de la réalisation de la construction instrumentée et s'appropriier en amont les instruments qui vont être utilisés.

Comme compétences, les élèves doivent disposer de compétences : organisationnelles, visuo-spatiales et techniques ; de compétences sur le fonctionnement de la démonstration et les contrôles (Balacheff et Margolinas, 2017), pour anticiper sur la validation du triangle à construire, valider pas à pas chaque construction élémentaire et valider le produit des actes de construction réalisés.

11.2.1.2. Proposition d'une solution à priori de la situation proposée

Plaçons le point E sur la droite (D_1) et supposons que le triangle EFG qu'on veut construire est de sens direct. Le triangle EFG étant rectangle isocèle, on a : $EF = EG$, $\text{Mes } \widehat{EFG} = \text{Mes } \widehat{EGF} = \frac{\pi}{4}$ et $\text{Mes } \widehat{FEG} = \frac{\pi}{2}$. De par cette caractérisation, nous considérons la rotation r' de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ainsi :

1. Si nous prenons M et N deux points du plan situés sur la droite (D_2) , puis M' et N' deux points vérifiant : $M' = r'(M)$ et $N' = r'(N)$. Alors on a : $(M'N') = r'[(MN)]$, ce qui signifie que la droite $(M'N')$ est l'image de la droite (D_2) par la rotation r' . Et que la droite

$(M'N')$ coupe (D_3) . Désignons par G le point d'intersection des droites $(M'N')$ et (D_3) , alors $G \in (D_3)$ et $G \in (M'N')$, et donc $G \in (D_3)$. Ainsi, on a : $E \in (D_1)$ et $G \in (D_3)$. Pour que le point F appartienne à (D_2) , il faut et il suffit de construire F de manière à ce que $G = r'(F)$. C'est-à-dire que, F soit l'antécédent du point G par la rotation r' . Puisque la droite $(M'N')$ est l'image de (D_2) par la rotation r' , alors tout point situé sur (D_2) est un antécédent d'un point situé sur $(M'N')$. Ainsi, F sera situé sur la droite (D_2) . On a donc $E \in (D_1)$, $F \in (D_2)$ et $G \in (D_3)$, d'une part. Et $EF = EG$, (car les rotations conservent les longueurs) et $\text{Mes } \widehat{FEG} = \frac{\pi}{2}$ qui signifie que $(EF) \perp (EG)$, d'autre part. Ainsi, EFG est un triangle isocèle dont la mesure de l'angle au sommet E est $\frac{\pi}{2}$. Ce qui implique que EFG est un triangle rectangle isocèle.

- Si nous prenons plutôt les points M et N sur la droite (D_3) , puis M' et N' deux points vérifiant : $M' = r'(M)$ et $N' = r'(N)$. Un raisonnement analogue permet de construire la droite $(M'N')$ comme étant l'image de (D_3) par la rotation r' . Par le même procédé, on arrive à la même conclusion.

Un algorithme de construction du triangle EFG

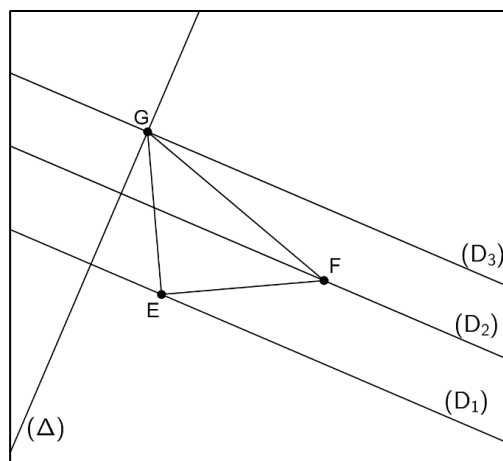
D'après ce qui précède, pour construire un triangle EFG répondant au problème posé par cette situation, il suffit de suivre les étapes suivantes :

- Choisir un point E quelconque sur la droite (D_1) .
- Construire l'image (Δ) de la droite (D_2) par la rotation r' de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$; la droite (Δ) coupe (D_3) en G .
- Construire le point F , antécédent du point G par la rotation r' .

On peut remarquer, dans le programme précédent, qu'on pouvait aussi construire l'image (Δ') de la droite (D_3) par la rotation r' de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$; dans ce cas la droite (Δ') coupe (D_2) en F . Il suffira donc de construire G , antécédent du point F par la rotation r' .

Une construction instrumentée du triangle EFG

Pour illustrer ce programme, nous avons choisi, sur la feuille, la disposition spatiale où les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) sont dans une position légèrement oblique. Dans cette disposition nous allons représenter une construction instrumentée du triangle EFG .



Le problème a-t-il plusieurs solutions ?

Au cours de cette résolution, deux choix se sont présentés pour influencer la construction proposée précédemment :

- Le choix du point E sur la droite (D_1) .
- Le choix du sens de parcours du triangle EFG, et donc de l'angle de la rotation r' .

Prenons \vec{v} un vecteur directeur des droites (D_1) , (D_2) et (D_3) ; et (D') une droite orthogonale aux droites (D_1) , (D_2) et (D_3) . Puisque nous avons construit un triangle EFG solution du problème, les translations de vecteur $k\vec{v}$ (avec $k \neq 0$) permettent de construire tous les triangles solutions de même sens et les symétries orthogonales $S_{(D')}$, permettent de construire tous les triangles solutions de sens contraire.

11.2.1.3. Formulation des hypothèses relatives aux effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation

Notre objectif est double pour établir la corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et la réussite dans la résolution de la situation proposée :

- Établir la corrélation entre le modèle et le succès dans la réussite de la solution du problème.
- Établir la corrélation entre les éléments auxquels se sont référés les élèves pour construire et valider le triangle rectangle isocèle EFG et les éléments que raffine le modèle pour développer la démarche de validation des constructions, dans les ETM idoines.

Pour la deuxième articulation de notre objectif, il s'agira d'analyser le travail d'organisation que font les binômes ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P) dans les ETM idoines, dans les classes de Première Scientifique A, B et C, entre la découverte de l'énoncé de la situation et l'obtention d'une solution au problème, ceci dans le but d'identifier les éléments auxquels ces élèves se sont référés pour construire et valider le triangle EFG, et de voir si ces éléments sont ceux que raffine le modèle (A-A-C / P-A-P). Une question fondamentale est donc de savoir : **quels sont les éléments sur lesquels les élèves pourront se référer pour construire et valider le triangle rectangle isocèle (EFG) ?**

En se plaçant dans notre cadre théorique (EPP), on peut constater que l'analyse de la situation proposée, articulée à celle de la solution *a priori* élaborée dans les deux sous-sections précédentes, nous permet d'identifier certains éléments sur lesquels les élèves pourront se référer pour construire et valider le triangle EFG. Il s'agit notamment de la méthode de résolution utilisée, de la caractérisation du triangle rectangle isocèle EFG, du choix et de la conception d'une transformation du plan liée à ce triangle, du choix du type de construction à mettre en œuvre pour réaliser cette construction, de la description du processus de réalisation de la construction, et de la validation du produit des actes de construction du triangle EFG. Ces éléments sont ceux qu'on retrouve dans la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle, et donc ceux que raffine ce modèle dans les ETM idoines pour

développer la démarche de validation chez les élèves. Compte tenu du fait que notre échantillon est constitué uniquement d'élèves des classes de Première scientifique ayant pris part aux premières expérimentations, nous supposons que chaque binôme d'élèves va utiliser l'une des formes d'organisation du travail mathématique, (A-S) ou (A-A-C / P-A-P), mises en œuvre par leur enseignant, P_A , P_B et P_C . Ainsi, ils vont organiser, par étapes, les sous-tâches liées, soit à la séquence de résolution seule, soit à la séquence de résolution et au problème de construction à la fois. Et donc, une stratégie de résolution de cette situation susceptible d'apparaître, chez les élèves, sera liée à l'utilisation de l'un des modèles, (A-S) ou (A-A-C / P-A-P). Nous définissons ainsi deux stratégies de résolution : (S_1) et (S_2), pour le traitement de la situation proposée, de la manière suivante :

- La stratégie (S_1) est liée à l'utilisation, par le binôme, du modèle (A-S).
- La stratégie (S_2) est liée à l'utilisation, par le binôme, du modèle (A-A-C / P-A-P).

Nous supposons que la variation des modalités de travail (mise en œuvre), liées à l'utilisation de l'une ou de l'autre stratégie, aura une influence sur le traitement du problème par le binôme. Ceci nous permet d'étudier le succès dans la réussite de la solution du problème par un binôme relativement au modèle utilisé au cours de la résolution de la situation, et de déduire la corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et le succès dans la réussite de la résolution du problème. Ainsi, nous formulons l'hypothèse (H''_1), liée à ce premier aspect, de la manière suivante :

H''_1 : Les binômes utilisant la stratégie (S_2) au cours de la résolution de la situation obtiennent plus de succès dans la réussite de la solution du problème que ceux qui utilisent la stratégie (S_1).

Nous admettons que le succès dans la réussite de la solution du problème implique la réussite dans le raisonnement mathématique qui réalise cette solution. Compte tenu de l'hypothèse (H''_1), nous supposons que les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation sont identifiables dans la forme de travail mathématique d'organisation produit par un binôme, à l'intérieur de la structure de développement de la démarche de validation qu'offre ce modèle, et plus précisément à travers l'identification des éléments auxquels les élèves se sont référés pour réaliser et valider la construction du triangle EFG. Nous supposons que ces éléments sont ceux que nous avons identifiés plus haut qui sont les éléments que raffine le modèle pour développer la démarche de validation, chez les élèves. Et donc, en analysant seulement le raisonnement mathématique qui réalise les solutions produites par les binômes ayant utilisés la stratégie (S_2), nous pourrions mettre en évidence les effets du modèle sur les élèves. Ainsi, d'une part en nous référant au fonctionnement, à la caractérisation et à la structure de développement de la démarche de validation qu'offre le modèle (A-A-C / P-A-P), et d'autre part en nous référant à l'analyse de la situation et à la proposition d'une solution *a priori* élaborées plus haut, nous postulons à travers l'hypothèse (H''_2), que :

H''_2 : Dans le raisonnement mathématique qui réalise les solutions produites par les binômes ayant utilisé la stratégie (S_2), le modèle (A-A-C / P-A-P) apporte aux élèves une aide à la distinction d'une manière de résoudre un problème de construction, de caractériser l'objet, de choisir et de concevoir une transformation du plan liée à l'objet,

de choisir le type de construction à mettre en œuvre, de décrire le processus de réalisation de la construction, et de valider le produit de tous les actes de construction. Des éléments que raffine le modèle pour développer la démarche de validation des constructions.

11.2.2. L'analyse des ETM idoines effectifs, dans les classes de Première Scientifique A, B et C

Pour étudier la corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et la réussite dans la résolution d'un problème de construction, afin de dégager les effets de ce modèle sur l'apprentissage de la validation par les élèves, nous avons scindé l'étude en deux parties : l'analyse du succès dans la réussite de la solution du problème relativement au modèle utilisé et la réussite dans le raisonnement mathématique qui réalise la solution.

11.2.2.1. L'analyse du succès dans la réussite de la solution du problème relativement au modèle utilisé

Afin de déterminer le succès dans la réussite de la solution du problème par les binômes, nous avons confié les productions des binômes à un enseignant de mathématique d'une classe de Première Scientifique, qui a évalué le travail de chaque binôme et nous a renvoyé les productions. Nous avons consigné, dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus par chaque binôme tels que fournis par l'enseignant correcteur :

Binômes	Forme d'organisation	Enseignant P_A	Enseignant P_B	Enseignant P_C	Réussite	Echec
B₁	AAC/PAP	Non	Non	Oui	1	0
B₂	AS	Oui	Non	Non	0	1
B₃	AS	Non	Oui	Non	0	1
B₄	AAC/PAP	Non	Non	Oui	1	0
B₅	AAC/PAP	Non	Non	Oui	1	0
B₆	AS	Oui	Non	Non	0	1
B₇	AS	Non	Oui	Non	1	0
B₈	AAC/PAP	Non	Non	Oui	1	0
B₉	AS	Non	Oui	Non	0	1
B₁₀	AAC/PAP	Non	Non	Oui	1	0
B₁₁	AS	Oui	Non	Non	0	1
B₁₂	AAC/PAP	Non	Non	Oui	1	0

Tableau 18 : Données sur le succès dans la réussite de la solution du problème relativement au modèle utilisé (T21)

À partir de ce tableau (T21) et suivant le modèle de forme d'organisation du travail mathématique utilisé par les binômes, nous avons dégagé les résultats suivants que nous présentons sous forme d'un tableau.

FORME D'ORGANISATION	(A-A-C/P-A-P)	(A-S)	Total
NOMBRE DE BINÔMES	6	1	7
POURCENTAGE DE REUSSITE	86%	14%	100%

Tableau 19 : Bilan de l'étude sur le succès dans la réussite de la solution relativement au modèle utilisé (T22)

Les résultats obtenus dans les tableaux (T21) et (T22) montrent que sur 12 binômes ayant pris part à l'expérimentation, 6 ont utilisé le modèle (A-S) et 6 ont utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P). 7 binômes sur 12 ont obtenu succès dans la réussite de la solution du problème. Sur les 7 qui ont obtenu succès, 6 ont utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P) et un seul a utilisé le modèle (A-S). Soit un pourcentage de (86%) de succès avec le modèle (A-A-C / P-A-P) contre (14%) avec le modèle (A-S). Ces résultats semblent confirmer le constat des enseignants des mathématiques sur l'incapacité des élèves à valider les résultats qu'ils obtiennent. Ils semblent positionner le modèle (A-A-C / P-A-P) comme une solution de remédiation à cette incapacité, puisque tous les binômes l'ayant utilisé ont obtenu succès.

Cette étude conforte clairement l'hypothèse (H''_1), puisqu'on peut constater que **les binômes ayant mis en œuvre la stratégie (S_2) au cours de la résolution de la situation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique A, B et C, ont eu plus de succès dans la réussite de la solution du problème que ceux qui ont utilisé la stratégie (S_1)**. Au vu de ce résultat, nous pouvons dire que l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) par les élèves, semble entraîner le succès dans la réussite de la résolution du problème, et donc qu'il existe une corrélation entre l'utilisation de ce modèle et le succès dans la réussite de la solution d'un problème de construction. Pour mieux comprendre les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation, nous approfondissons notre étude sur les productions des seuls binômes ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P).

11.2.2.2. L'analyse du raisonnement mathématique ayant conduit au succès dans la réussite de la solution du problème dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique C

L'analyse que nous menons dans ce paragraphe vise à dégager les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation par les élèves. Pour cela, nous analysons la forme de travail mathématique produit et le travail mathématique d'organisation que font les binômes, à l'aide de ce modèle, pour réaliser et valider une construction du triangle EFG. Précisément, nous essayons d'identifier les éléments auxquels les élèves se sont référés pour contrôler la réalisation de la construction de ce triangle et pour s'assurer qu'il est bien celui qui est demandé. Compte tenu du fait que cette analyse ressemble à une étude de cas, puisqu'elle se focalise sur les binômes ayant mis en œuvre le modèle (A-A-C / P-A-P), nous commençons par effectuer une analyse globale des productions des binômes $B_1, B_4, B_5, B_8, B_{10}$ et B_{12} , puis nous analysons de façon détaillée deux productions, celles des binômes B_4 et B_{12} . Car, nous considérons que, nonobstant le fait que ces binômes utilisent tous le modèle (A-A-C / P-A-P), le déroulement du travail ayant permis à chacun d'eux d'aboutir à la solution n'a pas été identique.

- **Analyse globale des productions des binômes ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P)**

Le tableau ci-dessous représente les données récoltées sur les productions des binômes $B_1, B_4, B_5, B_8, B_{10}$ et B_{12} , ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P).

Éléments Analysés	Éléments de la grille	B ₁	B ₄	B ₅	B ₈	B ₁₀	B ₁₂
Niveau 1	Méthode mathématique mobilisée	Conditions nécessaires suffisantes	Conditions nécessaires suffisantes	Conditions nécessaires suffisantes	Conditions nécessaires suffisantes	Conditions nécessaires suffisantes	Conditions nécessaires suffisantes
	Paradigme(s) géométrique(s)	G2	G2	G2	G2	G2	G2
	Dimension(s) privilégiée(s)	Sémiotique discursive	Sémiotique discursive	Sémiotique discursive	Sémiotique discursive	Sémiotique discursive	Sémiotique discursive
	Circulation du travail mathématique	Conforme au modèle	Conforme au modèle	Conforme au modèle	Conforme au modèle	Conforme au modèle	Conforme au modèle
	Raisonnement mobilisé	Inductif, analogique et déductif	Inductif, analogique et déductif	Inductif, analogique et déductif	Inductif, analogique et déductif	Inductif, analogique et déductif	Inductif, analogique et déductif
	Arguments employés	Formels	Formels	Formels	Formels	Formels	Formels
	Mise en forme du discours	Démonstration	Démonstration	Démonstration	Démonstration	Démonstration	Démonstration
Niveau 2	Processus de résolution	En six étapes	En six étapes	En six étapes	En six étapes	En six étapes	En six étapes
	Caractérisation de l'objet	Triangle isocèle d'angle $\frac{-\pi}{2}$	Triangle isocèle d'angle $\frac{\pi}{2}$	Triangle isocèle d'angle $\frac{-\pi}{2}$	Triangle isocèle d'angle $\frac{\pi}{2}$	Triangle isocèle d'angle $\frac{\pi}{2}$	Triangle isocèle d'angle $\frac{\pi}{2}$
	Choix et conception d'une transformation du plan	Rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$	Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$	Rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$	Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$	Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$	Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$
	Choix du type de constructions	Algorithme + Figure	Algorithme + Figure	Algorithme + Figure	Algorithme + Figure	Algorithme + Figure	Algorithme + Figure
	Description du processus de construction	Construit point par point	Construit point par point	Construit point par point	Construit point par point	Construit point par point	Construit point par point
	Validation des constructions.	Contrôle + preuve	Contrôle + preuve	Contrôle + preuve	Contrôle + preuve	Contrôle + preuve	Contrôle + preuve

Tableau 20: Données récoltées sur les productions des binômes ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P) (T23)

Le tableau (T23) met en évidence le fait que les binômes B_1 , B_4 , B_5 , B_8 , B_{10} et B_{12} ont mis en œuvre, étape par étape, les articulations du modèle (A-A-C / P-A-P). L'analyse globale des données recueillies laisse transparaître une régularité dans la forme de travail mathématique d'organisation produit par chaque binôme pour décrire le processus de construction du triangle EFG. La même régularité est observée dans le développement de la démarche de validation de ce triangle. Cette régularité est due à la stabilité de la structure de développement de la démarche de validation qu'offre ce modèle, qui leur a imposé un travail mathématique d'organisation qui prend en compte la séquence de résolution et le problème de construction qu'ils résolvent. En effet, chaque binôme a démarré le travail au brouillon, en reliant la situation à la partie du cours consacré à « l'utilisation des isométries du plan », afin de ramener le travail mathématique de construction et de validation à l'application des propriétés disponibles dans leur référentiel

théorique (Kuzniak et al. 2016). On peut, en effet, lire à la première ligne de chaque brouillon : « *Partie du cours : Utilisation des isométries* ».

En articulant les étapes du modèle telle que prévue par sa structure de développement de la démarche de validation, chaque binôme a identifié certains éléments auxquels il s'est référé pour résoudre la situation. Ce qui leur a permis de construire et de valider le triangle EFG. Ainsi, dans l'étape d'appréhension de la situation (A) qui est perceptible sur les brouillons, les élèves ont établi la preuve de l'existence et de la constructibilité du triangle EFG, en choisissant tous, dans l'étape d'analyse de la situation (A) articulée avec celle d'identification du problème (P), d'utiliser une méthode mathématique consistant à manier les conditions nécessaires et les conditions suffisantes. Ces binômes ont réalisé une construction « témoin » qui leur a permis de définir une condition nécessaire et suffisante pour que les sommets E, F et G soient respectivement fixés sur les droites (D₁), (D₂) et (D₃). Ils ont ainsi choisi les rotations comme étant les transformations du plan liées à la configuration « triangle rectangle isocèle ». Les binômes B₄, B₅, B₁₂ ont choisi la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$; les binômes B₁ et B₈, la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$; et le binôme B₁₀, la rotation de centre G et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. Ceci leur a permis de caractériser le triangle EFG comme étant un triangle qui est tel que : « F est l'image de G » (pour B₄, B₅ et B₁₂), « E est l'image de G » (pour B₁ et B₈) et « E est l'image de F » (pour B₁₀). La caractérisation du triangle, le choix et la conception de la rotation mises en évidence, ont conduit les élèves à identifier l'algorithme de construction et une construction instrumentée comme types de construction à mettre en œuvre pour matérialiser le triangle EFG. En mettant en œuvre l'étape d'analyse (A) articulée avec celle de l'identification du problème (P) et des actes de constructions (A), les binômes se sont appuyés sur les propriétés des rotations pour contrôler l'élaboration de l'algorithme de construction, et sur les instruments de géométrie pour contrôler la réalisation d'une construction instrumentée du triangle EFG illustrant l'algorithme. Ils ont ainsi matérialisé la construction de ce triangle dans l'étape de conception de la solution de la situation (C), articulée à celle du produit d'actes de construction (P) puis ouvert une discussion sur le nombre de triangles solutions de la situation. Dans toutes ces productions, le travail mathématique s'est fait prioritairement dans le paradigme G2 et dans la cohabitation entre les paradigmes G1 et G2, à travers les va-et-vient entre la construction « témoin » et le référentiel théorique. Ce travail est resté fortement sémiotique et discursif, pour construire un triangle dans lequel le point « F est l'image de G » par la rotation de centre E d'angle $\frac{\pi}{2}$ (binômes B₄, B₅ et B₁₂). Il a circulé sur tous les plans des ETM construits et mis en œuvre par les élèves de la classe de Première Scientifique C. Les binômes ont utilisé un raisonnement « assisté » par une construction « témoin » qu'ils ont eux-mêmes réalisée. De façon graduée, il a été : analogique pour rechercher les conditions nécessaires et les conditions suffisantes sur la construction « témoin », inductif pour établir une condition nécessaire et suffisante, pour la réalisation de la construction du triangle EFG, et déductif pour établir l'exactitude et la validité de la construction réalisée. Les arguments utilisés par chaque binôme sont formels (ou théoriques) puisqu'ils sont issus des propriétés sur les rotations de centre E, F ou G et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$ car certains binômes ont pris comme sommet de l'angle droit le point E, d'autres le point F et d'autres le point G. Ainsi, le discours de validation qui accompagne le travail ayant permis à chaque binôme de réaliser et de valider la construction du triangle EFG

a pris la forme d'un argumentaire de type démonstratif. Cet argumentaire opère à travers des substitutions et des interprétations de la caractérisation du triangle EFG par les propriétés issues des rotations mises en œuvre par chaque binôme. L'argumentaire de validation a permis à chaque binôme de se convaincre et de convaincre quiconque sur l'exactitude de la construction réalisée. Dans la démarche de validation développée, les élèves ont utilisé des contrôles liés aux propriétés et aux instruments de géométrie, pour valider tous les actes de constructions mis en œuvre, et la démonstration pour valider le produit de tous les actes de construction, ce qui leur a permis de prouver l'exactitude de la construction attendue.

Compte tenu du fait que cette première analyse des productions des binômes ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P), en classe de Première Scientifique C, ne nous donne pas assez d'informations sur la circulation du travail mathématique ayant permis de construire et de valider la construction du triangle EFG, nous nous proposons, dans le paragraphe qui suit, d'analyser de façon un peu plus détaillée l'une des productions de ces binômes, afin d'illustrer et d'identifier de façon précise les effets du modèle, tout en étant conscient du fait que le déroulement de ce travail n'a pas été identique pour chaque binôme.

- **Analyse de la production du binôme B₁₂ : E₂₁/ E₁₃ - P_C**

Dans la production du binôme B₁₂, les élèves commencent par donner la preuve d'existence et de constructibilité du triangle EFG, en reliant la situation à un contenu mathématique disponible dans leur référentiel théorique, comme on peut le constater dans le brouillon ci-dessous, où l'on peut lire, à la première ligne, « *Partie du cours : Utilisation des isométries* ».

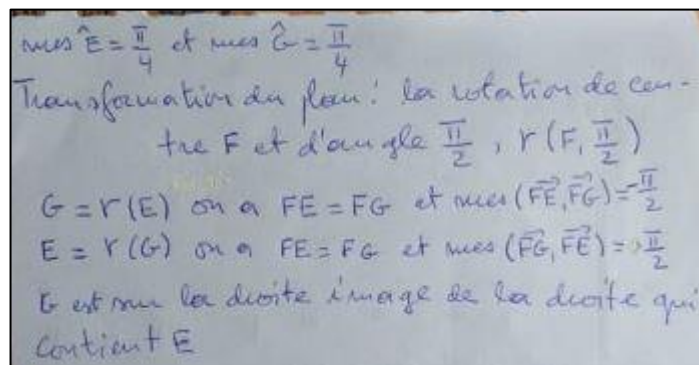
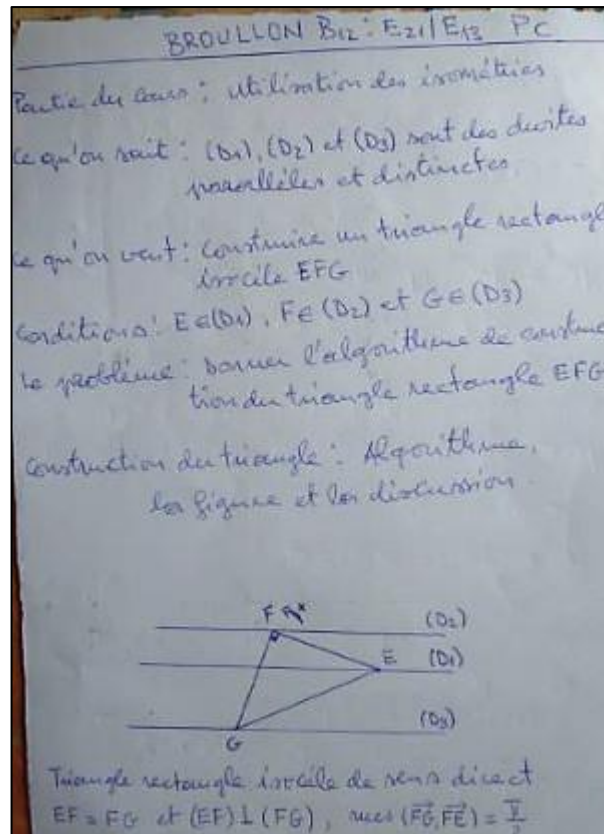


Figure 11: Brouillon du binôme B12 : E21/E13

Ceci nous permet de constater que ces élèves ont commencé le travail par l'étape d'appréhension de la situation (A). Ce binôme a noté sur le brouillon : « *Ce qu'on sait : (D_1) , (D_2) et (D_3) sont des droites parallèles et distinctes* », pour identifier les données pertinentes ; « *Ce qu'on veut : construire un triangle rectangle isocèle EFG* » et définir l'activité de construction. Il a aussi noté « *Conditions : $E \in (D_1)$, $F \in (D_2)$ et $G \in (D_3)$* » pour définir les contraintes que doit vérifier un triangle solution du problème. Ici, il est sur l'étape d'analyse de la situation (A). Le travail mathématique se fait dans le paradigme G2, circule dans le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis] \rightarrow Dis) orienté vers la dimension discursive et utilise l'identification des données pertinentes pour la résolution comme outil discursif. Ceci lui permet de distinguer le problème mathématique à résoudre de l'énoncé de la situation, puisqu'on lit sur cette production : « *Le problème à résoudre : donner l'algorithme de construction du triangle EFG* ». En articulant l'étape d'analyse de la situation (A) à l'étape

d'identification du problème (P), ces élèves choisissent le type de construction à mettre en œuvre pour réaliser la construction du triangle EFG, comme on peut le lire sur ce brouillon : « *construction du triangle : l'algorithme de construction, la figure et la discussion* ». À ce niveau, le modèle leur apporte une aide à la distinction du type de construction à mettre en œuvre. On constate un basculement du travail mathématique dans le paradigme G1, se positionnant sur la dimension instrumentale tout en restant clos sur la dimension sémiotique, car on relève la présence d'une construction traduisant les données du problème qui n'a pas été donnée dans l'énoncé de la situation, et que les élèves supposent être la construction demandée. En effet, il s'agit d'une construction « témoin » sur laquelle les élèves vont raisonner, et qui est devenue pour eux une donnée complémentaire. Le travail va alors circuler dans le plan Instrumental-Sémiotique ([Ins-Sem] → Sem), orienté vers la dimension sémiotique. Sur le brouillon du binôme B_{12} , on constate que les élèves définissent un triangle rectangle isocèle comme étant un triangle qui vérifie les relations : « $EF = EG$ et $(EF) \perp (EG)$ » ou « $FE = FG$ et $\text{Mes } \widehat{FEG} = \text{Mes } \widehat{EGF} = \frac{\pi}{4}$ et $\text{Mes } \widehat{EFG} = \frac{\pi}{2}$ ».

FEUILLE DE COMPOSITION B12

① On prend EFG rectangle isocèle en F et de sens direct. On construit $FE = FG$ et $\text{mes}(\vec{FG}, \vec{FE}) = \frac{\pi}{2}$. Soit r la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors $E = r(G)$. On veut que $E \in (D_1)$ et $G \in (D_3)$. Soit $[(L)] = r[(D_1)]$ alors $G \in [(L)] \cap (D_3)$. On obtient G sur (D_3) . E est sur (D_1) si il est l'image de G par r .

Procédure de construction

- choisir F sur la droite (D_2) .
- on construit (L) telle que $[(L)] = r[(D_1)]$. $G = (L) \cap (D_3)$.
- F est obtenu en construisant l'axe de symétrie de G qui sera sur (D_2) . Le triangle EFG est rectangle et isocèle car $E = r(G)$. $EF = FG$ et $(EF) \perp (FG)$.

La figure : (voir le dessin)

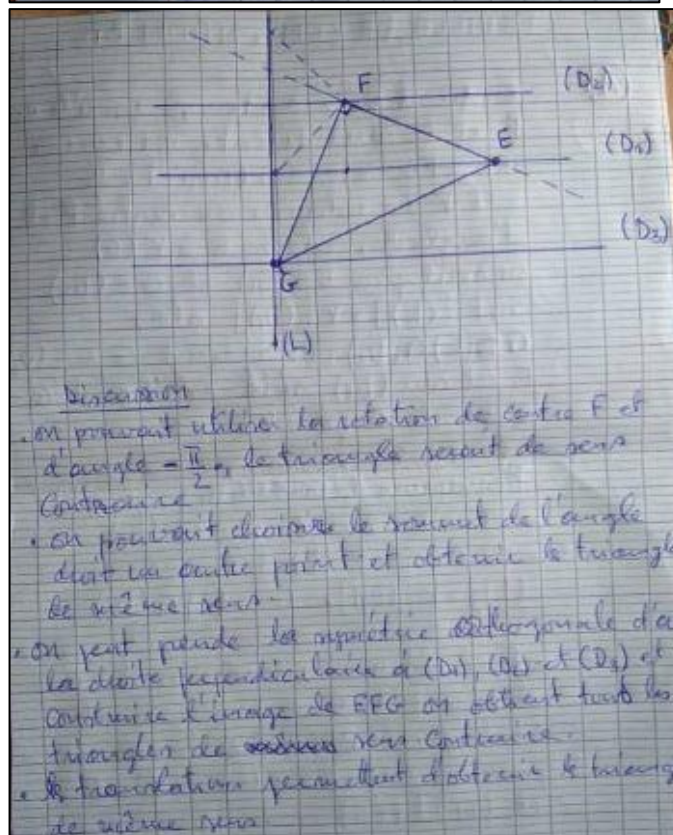


Figure 12: Feuille de composition du binôme B12 : E21/E13

En faisant des va-et-vient entre la construction « témoin » et les propriétés du triangle rectangle isocèle, ils cherchent une condition nécessaire et suffisante pour que les points E, F et G soient situés respectivement sur les droites (D₁), (D₂) et (D₃). On est à l'étape d'analyse de la situation (A), articulée à celle d'identification du problème (P). Ces élèves utilisent une méthode mathématique qui consiste à manier les conditions nécessaires et les conditions suffisantes. Ici, le travail se fait dans la cohabitation entre les paradigmes G1 et G2. Ce travail circule dans le plan Sémiotique-Discursif, orienté sur la sémiotique et clos sur la dimension discursive ([Sem-Dis] → Sem et (clos Dis)) ; il utilise l'interprétation des données comme outil sémiotique et discursif. Ainsi, le binôme B₁₂ va considérer que le triangle (EFG) est de sens direct, et le redéfinir comme étant un triangle qui est tel que : $EF = FG$ et $\text{Mes}(\widehat{FG}, \widehat{FE}) = \frac{\pi}{2}$, qui pour eux est une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une solution. Ils choisissent donc la rotation r de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$ comme la transformation du plan liée à la configuration triangle rectangle isocèle. Puis, ils admettent que « E est l'image de G par la rotation r » signifie « $EF = FG$ et $\text{Mes}(\widehat{FG}, \widehat{FE}) = \frac{\pi}{2}$ ». Ceci leur permet d'obtenir une caractérisation opérationnelle du triangle EFG. Ils définissent ce triangle comme étant un triangle dont $E = r(G)$. Le modèle apporte à ce binôme, d'une part une aide à la caractérisation du triangle rectangle isocèle (EFG), et d'autre part une aide au choix et à la conception de la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le travail est donc centré dans le paradigme G2, clos sur la dimension discursive, et circule dans le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis] → Dis). Un raisonnement assisté par une construction « témoin » permet à ces élèves de ramener la réalisation de la construction du triangle EFG à la construction successive des points E, F et G, et de contrôler la construction de chaque point à l'aide de la caractérisation qu'ils ont imaginée. Ainsi, ils placent F sur la droite (D₂), construisent une droite (L) image de (D₁) par r , à partir des images par r , de deux points situés sur la droite (D₂) ; puis ils prennent G comme l'intersection des droites (D₃) et (L). Et donc, pour eux, G est sur la droite (D₃). Pour construire E, ils cherchent l'antécédent G par r qui est sur la droite (D₁), puisqu'on peut lire sur le brouillon de ce binôme : « $E = r(G)$ on a : $EF = FG$ et $\text{Mes}(\widehat{FG}, \widehat{FE}) = \frac{\pi}{2}$ » et « $G = r(E)$ on a : $EF = FG$ et $\text{Mes}(\widehat{FE}, \widehat{FG}) = \frac{-\pi}{2}$ ». Les arguments sont donc formels (ou théoriques). Ils sont issus des propriétés de la rotation considérée. Le discours de validation prend la forme d'un argumentaire démonstratif consistant à établir que le triangle à construire est tel que « $FE = FG$ et $(FE) \perp (FG)$ ». Le raisonnement est gradué : analogique pour chercher les arguments sur la construction « témoin », inductif pour trouver la condition nécessaire et suffisante, et déductif pour établir que le triangle EFG est bien isocèle rectangle. Le travail reste clos dans le paradigme G2, positionné sur la dimension discursive et circule dans le plan Sémiotique-Discursif ([Sem-Dis] → Dis). À ce niveau, le modèle apporte aux élèves une aide à la validation de la construction du triangle EFG. Articulant l'étape de la conception de la solution (C) à celle du choix d'actes de construction (A) et du produit d'actes de construction (P), le binôme B₁₂ choisit, comme actes de construction, des actes issus des propriétés de la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$, ainsi que des instruments de géométrie, pour réaliser un ensemble d'actions instrumentées (Petitfour, 2015) élémentaires. Ce qui leur permet de matérialiser la construction du triangle EFG par un algorithme de construction et une construction instrumentée. Le modèle

apporte à ce binôme, d'une part une aide au choix d'actes de construction, et d'autre part une aide à la description du processus de construction du triangle EFG. La résolution de la situation s'achève, dans cette production, par une discussion sur le nombre de solutions. Cette discussion indique comment obtenir toutes les solutions du problème. Nous constatons que ce binôme a résolu de façon méthodique la situation proposée, en organisant par étapes la séquence de résolution et le problème de construction tels que les décrit la structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P). Ce modèle lui a apporté une aide à la résolution de la situation en lui procurant une manière de résoudre un problème de construction.

Ainsi, l'analyse globale de productions des binômes B_1 , B_4 , B_5 , B_8 , B_{10} et B_{12} , et l'analyse détaillée de la production du binôme B12, nous permettent de constater que les élèves se sont rapportés aux différents éléments que raffine le modèle (A-A-C / P-A-P) pour contrôler la réalisation de la construction du triangle EFG, et pour s'assurer que le triangle obtenu est bien celui qui est demandé. Ce qui nous permet de constater : **dans le raisonnement mathématique qui réalise les solutions produites par les binômes ayant utilisés la stratégie (S_2), au cours de la résolution de la situation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique A, B et C, le modèle (A-A-C / P-A-P) apporte aux élèves une aide à la distinction d'une manière de : résoudre un problème de construction, caractériser l'objet, choisir et concevoir une transformation du plan liée à l'objet, choisir le type de construction à mettre en œuvre, décrire le processus de réalisation de la construction, et valider le produit des actes de construction. Des éléments sur lesquels ces élèves prennent appui pour construire et valider toutes les constructions réalisées.**

Conclusion

Nous avons pour objectif, dans ce chapitre, de mesurer les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de la validation par les élèves, dans les ETM idoines. Pour le faire, nous avons fait travailler des élèves des classes de Première Scientifique A, B et C par binômes, sur une situation que nous avons conçue. Nous avons fait corriger les productions de douze binômes par un enseignant expérimenté n'ayant pas pris part à nos premières expérimentations. Puis nous avons analysé ces productions de deux manières différentes, puisque nous avons interprété la réussite dans la résolution d'un problème de construction comme la réussite de la solution du problème et la réussite dans le raisonnement mathématique qui réalise cette solution. Nous avons commencé par mener une étude quantitative de la réussite de la solution du problème par les élèves, relativement au modèle utilisé. Cette étude a établi que **les binômes ayant utilisé la stratégie (S_2) au cours de la résolution de la situation, ont obtenu plus de succès dans la réussite de la solution du problème que ceux qui ont utilisé la stratégie (S_1).** Ceci nous a permis de dire que l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) par les élèves, dans la résolution d'un problème de construction, entraîne la réussite de la résolution du problème, et donc qu'il existe une corrélation entre l'utilisation du modèle et la réussite de la résolution d'un problème de construction. Nous avons, par la suite, analysé les productions des binômes ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P) pour identifier les éléments auxquels ces élèves se sont référés pour construire et valider l'objet que décrit la situation proposée. Cette deuxième analyse a établi que les éléments auxquels se sont rapportés les élèves sont ceux que raffine le modèle (A-A-C

/P-A-P) dans le processus de développement de la démarche de validation, ce qui nous a permis de conclure que, **dans le raisonnement mathématique qui réalise les solutions produites par les binômes ayant utilisé la stratégie (S_2), au cours de la résolution de la situation, dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique A, B et C, le modèle (A-A-C / P-A-P) apporte aux élèves une aide à la distinction d'une manière de résoudre un problème de construction, de caractériser l'objet, de choisir une transformation du plan liée à l'objet, de choisir le type de construction à mettre en œuvre, de décrire le processus de réalisation de la construction et de valider le produit des actes de construction.**

Bilan

Ces deux résultats établissent que, **dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique, il existe une corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et la réussite dans la résolution d'un problème de construction par l'élève. Car le modèle fournit à l'élève, dans un tel ETM, une manière de résoudre un problème de construction, de caractériser l'objet à construire, de choisir une transformation du plan liée à l'objet à construire, de choisir le type de construction à mettre en œuvre, de décrire le processus de réalisation de la construction et de valider le produit des actes de construction. Des éléments auxquels l'élève se rapporte pour réaliser et valider la construction de l'objet que définit le problème.**

Conclusion générale de la troisième partie

L'objet de notre recherche était de voir comment développer la validation chez les élèves, à l'aide d'une forme d'organisation du travail mathématique mise en place dans un ETM, au cours de la résolution d'un problème de construction. Ayant constaté, à travers les résultats des expérimentations de la partie précédente, que la forme d'organisation du travail mathématique, *Analyse-Synthèse* (A-S), actuellement disponible dans les ETM idoines en classe de Première Scientifique, présente des limites qui font en sorte que cette forme ne développe pas efficacement la démarche de validation chez les élèves, nous avons entrepris, dans cette partie, de construire un modèle de forme d'organisation du travail mathématique qui serait plus efficace sur ce point, de le tester au niveau des enseignants, afin d'illustrer le rôle qu'il peut jouer dans l'enseignement de la validation mathématique, puis de mesurer ses effets sur l'apprentissage de la validation par les élèves. Nous avons sous-tendu l'ensemble du travail que nous avons fait dans cette partie par une hypothèse fondamentale, consistant à poser qu'**un modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré à partir des limites de la forme d'organisation « Analyse-Synthèse » (A-S), actuellement disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, développerait mieux la démarche de validation, chez les élèves, dans ces ETM.**

Ainsi, pour construire le modèle, nous avons commencé par expliciter le principe de « raffinage », que nous avons emprunté à l'industrie pétrolière. Ce principe a été, par la suite, contextualisé dans l'enseignement des mathématiques selon le concept de la Transposition Didactique (Chevallard, 1985). Cela nous a permis de montrer que, bien que le principe de raffinage dépasse largement le champ de la Didactique, ce concept est une extension du principe de raffinage pétrolier, qui peut ainsi être utilisé dans une réflexion en didactique de mathématiques. Nous nous sommes appuyés sur les travaux d'Arsac et al. (1992) pour expliciter notre conception de l'apprentissage en milieu scolaire, qui soutient ce principe. Ainsi, nous avons défini **l'apprentissage en milieu scolaire comme étant la construction, par l'élève, d'une connaissance nouvelle, à partir d'un savoir (ou savoir-faire) apporté par l'enseignant, relativement à la prise de conscience par l'apprenant des insuffisances des représentations qu'il a de ce savoir (ou savoir-faire), puisque pour nous l'enseignement est une interaction entre les savoirs qu'apporte un enseignant et les connaissances d'un (ou plusieurs) élève(s).** Cette conception de l'apprentissage, articulée au principe de raffinage, nous a permis de définir un principe nouveau, celui de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, qui **consiste à amener l'élève à transformer ses connaissances anciennes relativement au savoir (ou savoir-faire) qu'apporte l'enseignant, pour construire une connaissance nouvelle.** Ce principe nous a donné une manière de construire notre modèle de forme d'organisation du travail mathématique pour développer la démarche de validation chez les élèves. Ainsi, nous avons élaboré le modèle (A-A-C / P-A-P), à deux articulations : *Appréhension-Analyse-Conception de la solution* (A-A-C), qui est externe au problème de construction et agence en trois étapes les sous-tâches liées à la séquence résolution pour raffiner la capacité des élèves à organiser la séquence de résolution d'un problème mathématique dans l'ETM idoine. *Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions* (P-A-P), qui

est interne au problème de construction et agence les sous-tâches liées au problème de construction pour raffiner une validation sous-jacente à la construction de l'objet que décrit le problème.

Le modèle (A-A-C / P-A-P) étant adossé au principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, nous avons établi, à travers la mise en évidence de ses caractéristiques, la description de son fonctionnement et de la structure de développement de la démarche de validation que les **ETM idoines raffinent à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) : le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix et la conception d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit des actes de construction, des éléments auxquels peuvent se référer les élèves pour réaliser et valider la construction de l'objet que décrit le problème de construction qu'ils résolvent.**

Pour tester le modèle (A-A-C / P-A-P) chez les enseignants, et dégager son apport dans l'enseignement de la validation mathématique, nous avons observé et filmé deux séquences de résolution d'un problème de construction en classe, conduites par deux enseignants expérimentés dans leurs classes respectives avec leurs élèves. L'analyse des transcriptions de ces séquences a établi que, **dans un ETM idoine effectif, le modèle (A-A-C / P-A-P) joue un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la manière de distinguer le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction de l'objet et la validation du produit des actes de construction.**

Pour mesurer les effets du modèle (A-A-C / P-A-P) sur l'apprentissage de validation chez les élèves, nous avons ensuite fait travailler douze binômes d'élèves, de trois classes de Première Scientifique, sur une situation traduisant un problème de construction que nous avons conçu. L'analyse des productions de ces élèves a établi :

d'une part que **les binômes ayant utilisé ce modèle au cours de la résolution de la situation dans les ETM idoines ont obtenu plus de réussite dans la résolution du problème que ceux qui ont utilisé le modèle (A-S).** Et donc qu'il existe une corrélation entre l'utilisation du modèle et le succès dans la réussite de la solution d'un problème de construction donné. - et d'autre part que **dans le raisonnement mathématique qui réalise les solutions produites par les binômes ayant utilisés le modèle (A-A-C / P-A-P), au cours de la résolution de cette situation, ce modèle apporte aux élèves une aide à la distinction d'une manière de résoudre un problème de construction, de caractériser l'objet, choisir une transformation du plan liée à l'objet, de choisir le type de construction à mettre en œuvre, de décrire le processus de réalisation de la construction, et de valider le produit des actes de construction,** établissant ainsi la corrélation entre l'utilisation du modèle et la réussite dans le raisonnement qui réalise la solution d'un problème de construction donné. Ces deux résultats nous ont permis d'aboutir à la conclusion selon laquelle : **dans les ETM idoines effectifs, il existe une corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et la réussite dans la résolution d'un problème de construction par les élèves. Nous attribuons ce résultat au fait que le modèle fournit à l'élève, dans l'ETM idoine effectif, une manière de : résoudre un problème de construction, caractériser l'objet, choisir une transformation du plan liée à**

l'objet, choisir le type de construction à mettre en œuvre, décrire le processus de réalisation de la construction, et valider le produit de tous les actes de construction.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Conclusion générale et perspectives

La recherche conduite dans le cadre de cette thèse avait pour but de mettre à l'épreuve des faits, l'idée selon laquelle :

La manière d'organiser la résolution d'un problème mathématique donné, à travers la caractérisation des objets que décrit ce problème, raffine, dans l'ETM idoine, une démarche de validation et fournit des moyens permettant de développer la capacité de valider des élèves, dans les classes de mathématiques.

Ainsi, notre objectif a été de voir comment développer la validation chez les élèves à l'aide d'une forme d'organisation du travail mathématique élaborée dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, au cours de la résolution d'un problème de construction lié aux transformations du plan. Rendu à cette étape de notre de recherche, nous souhaitons résumer les éléments de réponse qui se sont dégagés tout au long de nos analyses. Nous abordons cette phase de conclusion en reprenant d'abord nos questions de recherche, afin de mieux présenter les résultats et nos éléments de réponse. Ensuite, nous élargissons notre réflexion en développant de nouvelles questions que nous inspirent les résultats que nous avons obtenus.

1. Des questions générales sur : les transformations du plan, les problèmes de construction et la validation mathématique, jusqu'à la construction de l'objet de notre recherche

Centrée au départ sur les questions liées à l'enseignement des transformations du plan et à la résolution des problèmes de construction, notre recherche a consisté à situer la problématique de la construction, et celle de la validation en géométrie, autour de l'activité de construction, qui s'est très vite positionnée comme étant l'élément autour duquel s'articulent la pratique des problèmes de construction et de la validation, dans l'enseignement des mathématiques au secondaire. Ainsi, à travers l'analyse de quelques notions fondamentales sur les transformations du plan et une enquête exploratoire conduite dans les ressources mises à la disposition des enseignants, nous avons pu dégager le contenu mathématique nécessaire pour notre recherche et graduer l'enseignement des différentes transformations du plan par niveau scolaire. Cette graduation a mis en évidence les différentes approches par lesquelles les transformations du plan sont abordées. Notamment l'approche affine, celle par les expressions analytiques et celle par les nombres complexes. Pour les classes de Première Scientifique, nous avons constaté que seules les deux premières sont utilisées. Par la suite, cette enquête va devenir descriptive et exploratoire, pour déterminer la forme des données dans la formulation des énoncés des problèmes liés aux transformations du plan, les règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un tel problème et le genre de tâche qui génère une activité de construction, en classe de Première Scientifique. Ainsi, nous avons identifié :

- Le genre de tâche « Construire », comme étant celui qui génère une activité de construction ;
- La forme discursive simple (FD_S) et la forme discursive accompagnée d'une figure simple ($FD_S + F_S$) ou faiblement codée, comme étant les valeurs dominantes de la forme

des données dans la formulation des énoncés des problèmes de construction sur les transformations du plan ;

- Une solution d'un problème de construction comme un texte qui comprend les étapes de résolution, un algorithme de construction, une construction instrumentée et des arguments formels (ou théoriques) de validation de la construction, insérés dans un discours qui prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif.

Une enquête menée dans les travaux en didactique de mathématiques (Balacheff (1987), Pedemonte (2002) et Cabassut (2005)), sur l'argumentation, l'explication, la preuve et la démonstration, couplée à une enquête institutionnelle sur la question de la validation dans l'enseignement de la géométrie en classe de Première Scientifique, nous ont permis de constater que le raisonnement est central dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun : en effet, il permet le développement de la culture mathématique chez les élèves (Programme de 1992). Ce raisonnement, qui vise à établir la connaissance de la vérité (certaine, nécessaire, plausible ou probable) d'une proposition, est enseigné dans le cadre de la découverte, de l'exploration et de l'investigation. Les problèmes de construction, constituant des cadres d'investigation, de découverte et d'explication des énoncés mathématiques, peuvent constituer des situations (Arsac et al. 1992) d'enseignement de la validation. Au Cameroun, le contexte de la validation est constitué de l'argumentation, de l'explication et de la vérification. Cette validation vise à prouver, justifier et démontrer un résultat. Les travaux en didactique de mathématiques considèrent la démonstration comme une preuve (Balacheff, 1989) particulière, et la preuve comme un cas particulier de la justification. Les programmes camerounais (MINESEC, 2018), quant à eux, considèrent la démonstration comme une argumentation particulière, en confondant les termes « preuve » et « démonstration » et en faisant des termes synonymes. Ainsi, un rôle important est accordé à la validation dans la résolution des problèmes de construction. Elle permet, dans ce contexte, de comprendre, justifier, décider et communiquer un résultat obtenu afin de se convaincre et convaincre quiconque de la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées. Cette validation prend le sens de moyens de contrôles d'actes de construction et de démonstration, elle est considérée comme raisonnement de validation du produit d'actes de construction. Elle opère à travers des interprétations et des substitutions des caractérisations de l'objet à construire par des arguments (ou des raisons) mathématiques extraits de la conception d'une notion mathématique liée à cet objet. La validation est donc un argumentaire de type démonstratif, elle utilise des arguments formels (ou théorique) dans un discours qui prend la forme d'une démonstration. Elle est liée à une stratégie de résolution développée dans un contexte de justification à l'intérieur duquel s'effectue un travail mathématique visant à réaliser une construction et à établir que cette construction est exacte et valide. Ainsi, pour ces programmes, valider une construction c'est prouver (pour se rassurer et convaincre) que la construction réalisée satisfait aux contraintes de l'énoncé du problème et qu'elle est exacte au sens de la théorie. Ceci positionne la validation d'une construction dans la problématique de construction, comme tout raisonnement visant à établir la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées, c'est-à-dire tout raisonnement qui produit les raisons (Balacheff, 1989) d'exactitude et de validité d'une construction. Ainsi, une démarche de validation des constructions, en classe de Première Scientifique, met en place des contrôles d'actes de constructions et une démonstration (ou preuve) qui prouvent la vérité de la conclusion sur les constructions réalisées.

Ces résultats, obtenus autour des questions générales sur les transformations du plan, les problèmes de construction et la validation mathématique, nous ont guidés progressivement vers

divers champs théoriques orientés vers la problématique du développement de la validation chez les élèves, à l'aide des situations (Arsac et al. 1992) d'enseignement. Ainsi, nous avons considéré les problèmes de construction comme des situations d'enseignement de la validation et la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique » comme moyen d'enseignement de cette validation. Sur cette base, nous avons élaboré un cadre théorique (**EPP**) dont l'organisation est fondée sur les apports coordonnés de trois théories didactiques. Au centre, la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) qui définit l'espace dans lequel la forme d'organisation du travail mathématique est mise en place et décrit la manière dont les sous-tâches liées à la séquence de résolution et/ou au problème de construction sont agencées, ainsi que la manière dont le travail mathématique est effectué. Autour de ce cadre général, nous avons articulé la Théorie des Paradigmes Géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006), qui est chargée de diriger le travail mathématique dans les ETM mis en œuvre et de donner une manière de conduire la validation, et la Théorie des Procédés de Construction (Chevallard et Jullien, 1991) qui donne des moyens permettant de négocier l'entrée dans la résolution d'un problème de construction et de décrire comment l'objet géométrique que décrit ce problème est effectivement construit dans l'espace de travail mathématique. La spécificité de ce cadre est de mettre en évidence la structure de développement de la démarche de validation à l'intérieur d'une forme d'organisation du travail mathématique élaborée. Le fait que ce cadre soit caractérisé par des degrés de dévolution à l'élève, des éléments qui lui permettent de valider une construction et de réguler la mise en œuvre du travail mathématique, du discours de validation qui accompagne ce travail et des procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de l'objet que décrit le problème de construction, nous a permis d'élaborer, de caractériser et d'analyser la forme du travail mathématique d'organisation produit à l'intérieur d'un modèle de forme d'organisation mis en place, au cours d'une séquence de résolution d'un problème de construction, pour développer la validation chez les élèves.

2. Des questions de recherche à la validation de nos hypothèses

Notre recherche s'est centrée sur l'étude de la manière dont on peut organiser un problème de construction dans un ETM idoine pour amener les élèves à identifier les éléments auxquels ils peuvent se référer pour produire une démarche de validation de la construction de l'objet que décrit un problème de construction donné sur les transformations du plan, en classe de Première Scientifique. L'approche semi-intégrative qui sous-tend notre cadre théorique a guidé l'élaboration d'un modèle de forme d'organisation du travail mathématique permettant, dans les ETM idoines, de mieux développer la démarche de validation chez les élèves. Elle a permis de mettre en relief le fonctionnement, les caractéristiques et la structure de développement de la démarche de validation qu'offre ce modèle. Les outils de ce cadre nous ont permis de tester ce modèle élaboré, d'une part, au niveau des enseignants, pour illustrer son apport dans l'enseignement de la validation, et d'autre part, au niveau des élèves, pour mesurer ses effets sur l'apprentissage de la validation. Ainsi, nous avons mené une enquête descriptive et exploratoire dans les manuels de mathématique de la classe de Première Scientifique, puis nous avons réalisé trois expérimentations : les deux premières avec les enseignants et la troisième avec les élèves. Ceci nous a permis de répondre à l'une de nos questions de recherche ci-dessous :

Q₁ : Quelle forme d'organisation du travail mathématique proposent les ETM idoines potentiels, en classes de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation chez les élèves ?

Q₂ : Quelles formes d'organisation du travail mathématique sont explicitées dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique, pour développer la démarche de validation chez les élèves ? Varient-elles d'un ETM idoine effectif à un autre ? Sont-elles différentes de celle que proposent les ETM potentiels ?

Q_{3.1} : Quelle forme d'organisation du travail mathématique proposer, dans l'ETM idoine pour développer la démarche de validation des élèves, en classe de Première Scientifique ?

Q_{3.2} : Avec le modèle de forme d'organisation du travail mathématique proposé, quels éléments doit raffiner un ETM idoine, en classe de Première Scientifique, pour développer une démarche de validation chez les élèves ?

Q_{4.1} : Quel rôle peut jouer la forme d'organisation du travail mathématique élaborée, au cours de la réalisation d'un projet de développement de la démarche de validation, dans un ETM idoine effectif ?

Q_{4.2} : Peut-il exister une corrélation entre l'utilisation de la forme d'organisation du travail mathématique élaborée et la réussite dans la résolution d'un problème mathématique, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique ?

Ces questions visaient à nourrir notre question générale de recherche, qui était centrée sur l'enseignement de la validation à l'aide d'une forme d'organisation du travail mathématique et consistait à savoir :

Comment organiser la résolution d'un problème mathématique, dans l'ETM idoine, en classe de Première Scientifique, pour raffiner chez les élèves une manière de distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent se référer pour produire une démarche de validation des résultats qu'ils obtiennent ?

Nous avons ramené le traitement de cette question à la vérification des hypothèses, H₁, H₂, H_{3.1}, H_{3.2}, H_{4.1} et H_{4.2}, liées respectivement aux questions, Q₁, Q₂, Q_{3.1}, Q_{3.2}, Q_{4.1} et Q_{4.2}. Ces hypothèses ont été formulées de la manière suivante :

H₁: Les ETM idoines potentiels proposent une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *l'Analyse* et *la Synthèse* (A-S).

H₂ : Pour décrire le processus de construction d'un même objet géométrique défini à l'aide d'un même problème de construction, des ETM idoines effectifs différents développent la même forme d'organisation du travail mathématique que celle que proposent les ETM idoines potentiels.

H_{3.1} : Nous proposons le modèle (A-A-C / P-A-P), de forme d'organisation du travail mathématique à deux articulations : *Appréhension-Analyse-Conception de la solution* (A-A-C) et *Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions* (P-A-P). La première articulation agence, par étapes, les sous-tâches liées à la séquence de résolution ; la seconde agence celles liées au problème de construction. Les deux articulations s'imbriquent dans

l'activité de construction, elles s'emboîtent et s'articulent entre elles. Ce modèle peut s'adapter à la résolution de tout problème mathématique, pour prendre la forme générale : (A-A-C / \mathcal{B}), où \mathcal{B} est une organisation faite sur le problème mathématique en résolution.

H_{3.2} : Les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, raffinent, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P), le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit de tous les actes de construction.

H_{4.1} : Dans les ETM idoines effectifs, le modèle élaboré joue un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la manière de distinguer le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit des actes de construction. Des éléments auxquels les élèves peuvent se référer pour produire la démarche de validation des constructions qu'ils réalisent.

H_{4.2} : Dans les ETM idoines effectifs, il existe une corrélation entre l'utilisation du modèle élaboré et la réussite dans la résolution d'un problème de construction. En effet, le modèle (A-A-C / P-A-P) donne, dans ces ETM, une manière de résoudre le problème, de caractériser l'objet, de choisir une transformation du plan liée à l'objet, de choisir le type de construction à mettre en œuvre, de décrire le processus de réalisation de la construction et de valider le produit des actes de construction. Ce sont des éléments que raffine ce modèle, au niveau des élèves, pour développer la démarche de validation des constructions.

Ainsi, nous avons validé l'hypothèse (H₁) en réalisant une enquête, descriptive et exploratoire, des solutions de deux problèmes de construction résolus dans le manuel CIAM, situés dans la partie consacrée aux transformations du plan. Selon une grille d'analyse conçue à partir de notre cadre théorique (**EPP**), nous avons étudié la forme de travail mathématique d'organisation ayant permis aux auteurs de ce manuel de réaliser et de valider les constructions des objets géométriques présents dans les solutions de ces problèmes. Dans cette étude, nous avons analysé le travail mathématique qui a permis de réaliser la construction de l'objet, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui ont permis de réaliser effectivement les constructions de ces objets. Ceci nous a permis de constater que les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique, proposent une forme d'organisation du travail mathématique qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *l'Analyse* et *la Synthèse* (A-S), pour développer la démarche de validation, chez les élèves.

Pour valider l'hypothèse (H₂), nous avons réalisé une expérimentation avec deux enseignants expérimentés, enseignant dans deux classes de Première Scientifique, situées dans deux établissements différents. Cette expérimentation consistait à observer et à filmer la séquence de résolution d'une même situation, conduite en salle par chaque enseignant en présence de ses élèves. Dans l'analyse des transcriptions de ces séquences de résolution, nous nous sommes intéressés à identifier la forme d'organisation du travail mathématique mise en œuvre par chaque enseignant, à les comparer entre-elles, puis à celle que proposent les ETM idoines potentiels. Une analyse globale de ces transcriptions ayant établi que les deux enseignants produisaient des formes d'organisation du travail mathématique similaires, nous avons ramené cette étude à l'analyse de la transcription de la séquence de résolution conduite par un seul

enseignant. Ainsi, nous avons analysé cette transcription à partir de la même grille d'analyse que celle construite dans l'analyse des solutions des problèmes de construction résolus dans le manuel CIAM. Cette analyse a mis en évidence le fait que des ETM idoines effectifs différents proposent une même forme d'organisation du travail mathématique, consistant à agencer les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *l'Analyse* et *la Synthèse* (A-S), pour développer la démarche de validation chez les élèves. Ces deux résultats nous ont permis d'arriver à la conclusion selon laquelle, pour décrire le processus de construction d'un même objet géométrique défini à l'aide d'un même problème de construction, des ETM idoines effectifs différents développent la même forme d'organisation du travail mathématique, à savoir celle que proposent les ETM idoines potentiels. Ceci nous a permis de valider l'hypothèse (H₂). Nous avons conclu que la forme d'organisation du travail mathématique disponible actuellement dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique est l'Analyse-Synthèse (A-S). Une étude du fonctionnement des caractéristiques et de la structure de développement de la démarche de validation qu'offre cette forme d'organisation a mis en évidence certaines limites de ce modèle : une première liée à la non prise en charge, par l'enseignant, de la phase d'appréhension de la situation, et une deuxième liée à l'absence d'une organisation au niveau du problème de construction en résolution.

Pour valider les hypothèses (H_{3.1}) et (H_{3.2}), nous avons élaboré, dans les ETM idoines, un modèle de forme d'organisation du travail mathématique susceptible de mieux développer la démarche de validation chez les élèves. Puis, nous avons conduit une étude descriptive du fonctionnement et des caractéristiques de ce modèle, pour mettre en évidence sa structure de développement de la démarche de validation.

Pour élaborer notre modèle, nous avons commencé par expliciter le principe de « raffinage » utilisé dans l'industrie pétrolière. Nous avons par la suite contextualisé ce principe dans l'enseignement des mathématiques à l'aide du concept de la Transposition Didactique (Chevallard, 1985), en montrant que, bien que le principe de raffinage pétrolier dépasse largement le champ de la Transposition Didactique, ce concept est une extension du principe de raffinage, qui peut donc être utilisé dans une réflexion en didactique de mathématiques. À partir du principe de raffinage et de notre conception de l'enseignement et de l'apprentissage en milieu scolaire, nous avons défini le principe de « raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) » mathématique. Ainsi, en prenant appui sur les limites de la forme d'organisation du travail mathématique (A-S), disponible actuellement dans les ETM idoines en classe de Première Scientifique, nous avons élaboré le modèle (A-A-C / P-A-P), de forme d'organisation du travail mathématique à deux articulations : *Appréhension-Analyse-Conception de la solution* (A-A-C) et *Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions* (P-A-P), que nous avons adossé au principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire). Dans ce modèle, la première articulation agence, par étapes, les sous-tâches liées à la séquence de résolution, et la seconde, celles liées au problème mathématique en résolution. Les deux articulations s'imbriquent dans l'activité de construction, elles s'emboîtent et s'articulent entre elles. Nous avons étendu ce modèle à la séquence de résolution de tout problème issu de n'importe quel domaine des mathématiques, pour le généraliser de la manière suivante : **(A-A-C / B)** où **B** représente l'organisation en trois étapes du problème mathématique en résolution. Et nous avons poursuivi notre recherche en prenant **B = (P-A-P)**, c'est-à-dire en restant dans le cadre d'un problème de construction.

Par la suite, nous avons mené une étude descriptive du fonctionnement et des caractéristiques du modèle (A-A-C / P-A-P). Cette étude nous a permis de mettre en évidence la structure de développement de la démarche de validation qu'offre ce modèle. L'analyse de cette structure a établi que les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, raffinent, à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P) le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit de tous les actes de construction.

Pour tester les hypothèses (H_{4.1}) et (H_{4.2}) nous avons réalisé deux expérimentations : une première avec un enseignant débutant, pour mettre en œuvre le modèle (A-A-C / P-A-P) dans une séquence de résolution en classe avec ses élèves, afin d'illustrer l'apport du modèle dans l'enseignement de la validation, et une deuxième avec les élèves des trois classes de Première Scientifiques ayant suivi les séquences de mise en œuvre des modèles (A-S) et (A-A-C / P-A-P), pour mesurer les effets d'apprentissage de la validation par les élèves, relativement au modèle utilisé.

Dans la première expérimentation, nous avons observé et filmé la séquence de résolution d'un problème de construction conduite par un enseignant n'ayant pas pris part aux deux premières expérimentations. L'analyse de la transcription de cette séquence s'est faite à partir d'une grille à deux niveaux, élaborée à partir de notre cadre didactique (**EPP**). Cette analyse visait à illustrer l'apport du modèle dans l'enseignement de la validation au secondaire, à travers l'étude du travail mathématique produit pour réaliser la construction de l'objet que décrit le problème de construction soumis à résolution, et du travail mathématique d'organisation que fait l'enseignant à l'aide du modèle pour développer la démarche de validation. Cette étude a établi que, dans les ETM idoines effectifs, en classe de Première scientifique, le modèle (A-A-C / P-A-P) joue un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la manière de distinguer : le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit de tous les actes de construction, des éléments qu'aide le modèle (A-A-C / P-A-P) à raffiner chez les élèves, et auxquels ces derniers peuvent se référer pour produire la démarche de validation des constructions qu'ils réalisent.

Dans la deuxième expérimentation, nous avons fait travailler douze binômes d'élèves sur un problème de construction, afin de mesurer les effets d'apprentissage de la validation par les élèves à l'aide du modèle. Ainsi, nous avons interprété la réussite dans la résolution d'un problème de construction par un élève comme étant la réussite de la résolution du problème et dans le raisonnement qui réalise cette solution. Ceci nous a permis de ramener la recherche à ce niveau, d'une part à l'étude de l'influence du modèle sur le succès des élèves dans la résolution du problème de construction qu'ils résolvent, et d'autre part à décrire comment le modèle contribue à la réalisation et à la validation de la construction de l'objet géométrique que décrit le problème, dans les ETM idoines dans lesquels travaillent les élèves. Ainsi, nous avons analysé les productions des binômes d'élèves de deux manières différentes : d'abord une étude quantitative de la réussite du problème par les binômes relativement au modèle utilisé, qui nous a permis d'établir la corrélation entre l'utilisation du modèle et le succès dans la réussite de la résolution du problème. Ensuite, une analyse des productions d'élèves ayant utilisé le modèle (A-A-C / P-A-P), qui nous a permis d'établir la corrélation entre l'utilisation du modèle et la réussite dans le raisonnement qui réalise la solution. Les deux résultats ont mis en évidence le

fait que, dans les ETM idoines effectifs en classe de Première Scientifique, il existe une corrélation entre l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P) et la réussite dans la résolution d'un problème de construction par l'élève. Ainsi, nous avons établi que le modèle donne aux élèves, dans ces ETM, une manière de résoudre un problème de construction, caractériser l'objet, choisir une transformation du plan liée à l'objet, choisir le type de construction à mettre en œuvre, décrire le processus de réalisation de la construction, et valider le produit de tous les actes de construction, des éléments sur lesquels ces derniers se rapportent pour construire et valider l'objet que décrit le problème de construction.

3. Des résultats obtenus à nos éléments de réponse au problème traité

Cette recherche avait pour objectif fondamental de contribuer à la résolution du problème d'incapacité des élèves à valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent, problème attribué à la disparition du cours sur la logique formelle des programmes d'enseignement des mathématiques, au Cameroun. Nous avons abordé ce problème en nous plaçant dans le cadre de l'approche par la problématique de la construction, en nous appuyant sur l'analyse du rapport qui lie l'organisation de la résolution d'un problème de construction et le développement de la validation mathématique. Ceci nous a permis de ramener cette incapacité des élèves à valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent à une étude de la manière dont on peut organiser un problème de construction (ou mathématique), dans un ETM idoine, pour développer la démarche de validation chez les élèves.

D'un point de vue institutionnel, nous avons considéré que les ressources disponibles (les manuels et leurs corrigés) dans l'enseignement des mathématiques peuvent proposer une forme d'organisation du travail mathématique permettant de développer la démarche de validation chez les élèves. Cette considération nous a permis de constater que : les ETM idoines potentiels, en classe de Première Scientifique, proposent une forme d'organisation qui agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution en deux étapes : *l'Analyse et la Synthèse* (A-S). *L'Analyse* permet d'étudier une configuration considérée comme solution du problème et *la Synthèse* permet la mise au point d'une procédure de construction permettant de réaliser une construction de l'objet géométrique que décrit le problème de construction. La forme d'organisation du travail mathématique ne constituant pas un objet d'enseignement, nous avons estimé que les ETM idoines effectifs, en classe de Première Scientifique, pouvaient décrire des formes d'organisation différentes entre elles, ainsi que de celle que proposent les ETM idoines potentiels. Les expérimentations réalisées avec les enseignants nous ont permis de constater que cette estimation n'était pas correcte, puisqu'elles ont mis en évidence le fait que la forme d'organisation développée par des ETM idoines effectifs différents, en classe de Première Scientifique, est celle que proposent les ETM idoines potentiels. En effet, cette forme est restée stable chez tous les enseignants que nous avons observés. Ainsi, nous avons conclu que le modèle de forme d'organisation du travail mathématique disponible actuellement dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique, est *l'Analyse-Synthèse* (A-S). Nous avons essayé de comprendre, à travers une étude des limites de *l'Analyse-Synthèse* considérée comme moyen d'enseignement et d'apprentissage de la validation, pourquoi, malgré l'existence de cette forme d'organisation, la majorité des élèves était toujours incapable de valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent. Cette étude a révélé des limites de ce modèle, que nous avons considérées comme une faiblesse dans l'enseignement et l'apprentissage de la validation. Ainsi, nous avons entrepris d'élaborer un autre modèle, capable de développer efficacement la démarche de validation chez les élèves.

3.1. Le modèle de forme d'organisation du travail mathématique élaboré

À partir des limites identifiées de l'Analyse-Synthèse (A-S), nous avons établi son inefficacité à développer la capacité de valider chez les élèves. En les articulant avec notre conception de l'enseignement et de l'apprentissage en milieu scolaire, et du « principe de raffinage pétrolier », nous avons défini un principe nouveau : le raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique. Ce principe nous a donné une manière d'organiser la séquence de résolution et le problème de construction que l'on résout. Ainsi, nous avons élaboré, dans les ETM idoines, le modèle de forme d'organisation (A-A-C / P-A-P), à deux articulations : *Appréhension-Analyse-Conception de la solution* (A-A-C) et *Problème-Actes de construction-Produit d'actes de constructions* (P-A-P), que nous avons adossé au principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique. Nous avons par la suite étendu ce modèle à la séquence de résolution de tout problème issu de n'importe quel domaine des mathématiques, ce qui nous a permis de le généraliser pour obtenir la forme d'organisation (**A-A-C / B**) où **B** est une organisation faite sur le problème mathématique qu'on résout. Poursuivant nos analyses, nous avons pris **B = (P-A-P)** et gardé le modèle (A-A-C / P-A-P), élaboré dans le cadre d'une séquence de résolution d'un problème de construction.

L'étude descriptive du fonctionnement de ce modèle nous a permis de mettre en évidence le fait que :

- Le modèle est axé sur le phénomène de transformation des données du problème, à l'aide d'interprétations et de substitutions, pour concevoir une caractérisation de l'objet géométrique à construire, utilisant les propriétés d'une transformation du plan liée à cet objet, disponibles dans le référentiel théorique des élèves.
- Le modèle fonctionne à l'aide du principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique, qui génère une forme de travail mathématique d'organisation et met en évidence une structure de développement de la démarche de validation. Ce principe structure chaque articulation de ce modèle en trois étapes, mettant en évidence une différence entre l'état initial des données du problème et l'état final. Le raffinement est conduit par l'enseignant de telle sorte qu'à une étape donnée les élèves puissent se rendre compte des insuffisances des connaissances antérieures dont ils disposent, et acceptent d'aller vers l'apprentissage d'une connaissance nouvelle que leur apporte l'enseignant.
- Le modèle exprime la liaison entre deux ou plusieurs états de transformation des données du problème, tels que les données transformées sont renommées en des termes différents selon les différentes étapes de transformation qu'elles traversent. Ces données, par le principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique adossé au modèle, subissent de multiples transformations afin de se constituer en une construction exacte et valide de l'objet géométrique que décrit le problème. Ainsi, à chaque étape de transformation de ces données un travail mathématique permettant la réalisation d'une construction élémentaire est effectué, un discours de validation qui accompagne ce travail est produit, et un ensemble de procédés de construction permettant la réalisation effective de cette construction élémentaire est mis en place.
- L'importance de ce modèle réside en ce que les données du problème ne permettent pas souvent de réaliser directement la construction de l'objet géométrique telles qu'elles

sont présentées dans l'énoncé de la situation. Donc la réalisation de la construction de l'objet décrit place l'élève dans une posture difficile, puisque la situation donne souvent peu d'informations. Pour lever la difficulté, l'élève doit procéder à une transformation (interprétation) de ces données, de manière à obtenir une caractérisation opérationnelle de l'objet à construire. L'objet pouvant être transformé par des propriétés apportées par un concept mathématique, cette caractérisation doit traduire une propriété pertinente, ou une condition nécessaire et suffisante, pour l'existence et la réalisation effectives de l'objet. Dans ce processus, l'enseignant doit, de façon progressive, amener l'élève à se rendre compte, à une étape du modèle, des insuffisances de la caractérisation qu'il a de l'objet à construire, et de la nécessité d'aller vers une caractérisation nouvelle, qui doit être sous la forme d'une définition opérationnelle.

Ces transformations des données du problème par étapes, que conduit l'enseignant se produisent dans le cadre du processus d'enseignement-apprentissage via l'utilisation du modèle (A-A-C / P-A-P), au cours d'une séquence de résolution en classe. Donc elles s'opèrent dans les relations enseignant-élève face au savoir-faire « démarche de validation », et mettent en évidence le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction et la validation du produit de tous les actes de construction. Ce sont ces éléments qu'aide le modèle (A-A-C / P-A-P) à raffiner, dans les ETM idoines, au cours d'une séquence de résolution pour développer la capacité des élèves à produire la démarche de validation de la construction réalisée.

3.2. La caractérisation de la forme du travail mathématique d'organisation dans le modèle (A-A-C / P-A-P)

L'analyse descriptive du fonctionnement du modèle (A-A-C / P-A-P) a mis en évidence la structure de développement de la démarche de validation qu'offre ce modèle. Les expérimentations réalisées ont établi que cette structure génère une forme de travail mathématique d'organisation stable et régulière permettant, d'une part à l'enseignant de développer la validation chez les élèves, et d'autre part aux élèves d'identifier les éléments auxquels ils peuvent se référer pour valider un résultat. Cette forme de travail est identifiable à travers le travail mathématique produit afin de réaliser la construction de l'objet que décrivent le problème de construction, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent la construction de cet objet. Elle est caractérisée, du point de vue des ETM, par le niveau de développement du référentiel théorique, le rôle de la dimension sémiotique et instrumentale, et par leurs articulations avec la genèse discursive. Ainsi, ce travail est prioritairement de nature discursive. Du point de vue des paradigmes géométriques, le travail mathématique d'organisation est effectué principalement dans le paradigme G2 et dans le jeu G1-G2, articulés avec l'approche par laquelle le problème est posé (affine ou par les expressions analytiques) pour développer, chez les élèves, une validation qui prend la forme d'un argumentaire de type démonstratif, dont les caractéristiques sont celles que décrivent les ETM de référence (Cf. chapitre 3). Le travail mathématique d'organisation est généré, dans les ETM idoines, par le genre de tâche « construire » ; il utilise une méthode mathématique pour définir une stratégie de résolution. Cette stratégie active la mise en place des procédés de construction qui déclenchent le processus de résolution du problème et guident la mise en œuvre des différentes étapes du modèle, tout au long de l'activité de construction.

- **Le rôle du référentiel théorique dans le raffinement de la démarche de validation et son influence sur le travail mathématique d'organisation**

Dans le modèle (A-A-C / P-A-P), le référentiel théorique développe la genèse discursive des ETM idoines, qui apporte au travail mathématique d'organisation une régularité et une stabilité dans le raffinement de la démarche de validation chez les élèves. Ce référentiel, suffisamment riche en termes de théorèmes, de propriétés et de formules, a un niveau de développement complet⁴⁶, stable, achevé et ancien⁴⁷ (bien que s'enrichissant progressivement au cours du temps avec l'évolution du niveau scolaire) permettant à ce modèle d'aider au raffinement d'une validation purement mathématique. Dans le travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet et le discours de validation qui accompagnent ce travail, ainsi que dans les procédés de construction qui réalisent effectivement la construction de cet objet, le référentiel théorique sert de source principale d'alimentation de la genèse discursive, enrichie par les dimensions sémiotique et instrumentale. Le fait que ce référentiel soit, au préalable, construit et justifié avec les élèves pendant le cours, permet de développer, à l'aide du modèle, un discours de validation qui prend une forme standard (celle que définissent les ETM de référence), et d'illustrer la capacité de ce modèle à faire produire progressivement des justifications acceptées dans chacune de ses articulations. Donc, dans la forme de travail mathématique d'organisation que développe le modèle (A-A-C / P-A-P), le référentiel théorique assure la mission de fournir des éléments théoriques à chaque étape de transformation des données du problème, pour favoriser une dévolution totale, aux élèves, des éléments de la structure de développement de la démarche de validation.

- **Le rôle de la dimension sémiotique dans le raffinement de la démarche de validation et son influence sur le travail mathématique d'organisation**

Nous avons noté qu'au démarrage du travail mathématique d'organisation la structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P) sollicite le référentiel théorique qui, à ce stade du processus de résolution, est lacunaire (Nechache, 2016). Pour le rendre complet et produire un travail discursif afin de raffiner la validation chez les élèves, ce référentiel doit être alimenté par des éléments provenant des autres dimensions (sémiotique ou instrumentale) que la dimension discursive. Ces éléments, qui vont devenir, au cours du raffinement, des outils théoriques, prendront place dans la genèse discursive. Le niveau du référentiel ayant atteint son état complet, le modèle va développer une démarche de validation qui utilise des propriétés purement mathématiques. Ainsi, dans l'élaboration du travail mathématique d'organisation, la dimension sémiotique est sollicitée pour enrichir et alimenter la genèse discursive. Les outils sémiotiques (figures, nombres, formules, points et traits) sont utilisés de façon heuristique pour nourrir l'inspiration et développer la réflexion, afin de décrire un cycle complet de raffinement de la démarche de validation. Ces outils, à la fois sémiotiques, technologiques et théoriques, et donc mathématiques, permettent d'élaborer un enchaînement cohérent des étapes de chaque articulation du modèle (A-A-C / P-A-P), en

⁴⁶ Le référentiel théorique étant riche en outils théoriques (théorèmes, propriétés et formules), permet de traduire la plupart des données du problème en ces outils. Ce qui met en évidence le raffinement d'une démarche de validation « propre ». C'est-à-dire élaborée à l'aide des justifications appuyées par des théorèmes et des propriétés mathématiques préalablement admis dans le cours, très souvent démontrés avec les élèves, avec leurs intérêts justifiés.

⁴⁷ Les mathématiques (la géométrie) sont introduites très tôt dans la scolarité de l'élève, il en résulte une utilisation ancienne des outils théoriques.

faisant émerger certaines propriétés pertinentes et utiles dans la mise en évidence des éléments qu'aide le modèle à raffiner chez les élèves pour développer la démarche de validation. Le contexte étant celui de la justification, le modèle sollicite les outils de la dimension sémiotique pour faciliter le raffinement d'un discours de validation qui utilise des arguments dont les garanties sont issues du référentiel théorique. À ce titre, les outils sémiotiques sont utilisés comme des variétés sémiotiques et des registres de représentation qui permettent un traitement mathématique des données du problème. Ils sont intégrés dans le travail mathématique d'organisation en qualité d'outils technologiques et théoriques. Donc, les constructions « témoin » ou instrumentées réalisées au cours de la mise en œuvre du modèle sont des outils mathématiques intégrés dans le travail mathématique d'organisation pour développer l'identification des éléments de la structure de développement adossée au modèle.

- **Le rôle de la dimension instrumentale dans le raffinement de la démarche de validation et son influence sur le travail mathématique d'organisation**

Nous avons relevé que la mise en œuvre du modèle (A-A-C / P-A-P) génère une forme de travail mathématique d'organisation dans laquelle des figures sont réalisées. Nous avons distingué deux catégories : les constructions « témoins » et la construction instrumentée. Les constructions « témoins » sont réalisées dans la phase d'analyse pour comprendre la situation, chercher et conjecturer des propriétés qui vont alimenter la genèse discursive. Ces constructions, qui servent de dispositif expérimental (Ngodebo, 2019), sont considérées comme des outils sémiotiques permettant de visualiser la situation et d'extraire de nouvelles données qui vont être exploitées dans la mise en œuvre des différentes étapes du modèle. Donc, les instruments utilisés dans la réalisation de ces constructions prennent le statut d'outils technologiques pour conjecturer, vérifier, contrôler ou illustrer les différents éléments de la structure de développement de la démarche de validation. Par ailleurs, ces instruments permettent de multiplier le nombre d'expériences à effectuer pour visualiser une construction supposée solution du problème, afin d'envisager un agencement cohérent des articulations du modèle. Ils servent de guide dans l'élaboration du discours de validation qui accompagne le travail mathématique produit pour réaliser la construction de l'objet que décrit le problème de construction. Ainsi, la dimension instrumentale est utilisée en contexte de découverte pour adapter les étapes du modèle au problème et organiser l'enchaînement de ces étapes en amont, afin de réaliser une construction supposée être celle qui est demandée, et qui sera par la suite étudiée à l'aide des outils théoriques issus du référentiel théorique. En phase de conception de la solution et de la mise en évidence du produit d'actes de construction, ces instruments contribuent à la réalisation de la construction instrumentée, qui est une annexe pour illustrer l'algorithme. Ainsi, dans le travail mathématique d'organisation, la dimension instrumentale a pour rôle principal de réaliser une configuration supposée être solution du problème, autour de laquelle va émerger une stratégie de résolution permettant de faire fonctionner les différentes articulations du modèle. Elle enrichit le référentiel théorique pour le rendre complet et disponible, afin de mieux alimenter la genèse discursive pour rendre complètement discursif le travail mathématique d'organisation produit à l'intérieur du modèle.

- **Le rôle des paradigmes G1, G2 et du jeu G1-G2 dans le raffinement de la démarche de validation, et leur influence sur le travail mathématique d'organisation**

Les expérimentations établissent que le travail mathématique d'organisation que génère le modèle (A-A-C / P-A-P) est très largement effectué dans le paradigme G2. Toutefois, ce travail

démarre dans G1 ou dans le jeu G1-G2, puis évolue dans une cohabitation entre G1 et G2, pour se stabiliser dans G2. Ces paradigmes donnent un horizon au travail mathématique d'organisation et le rendent cohérent, puisqu'ils assignent aux étapes du modèle un mode de pensée (l'intuition, l'expérience ou le raisonnement déductif) afin de développer la forme de validation attendue. À travers les modes de validation associés à chacun de ces paradigmes, ils orientent la conversion des données du problème qui est assurée par les registres de représentation, puisque chaque mode de validation est clairement explicité dans le paradigme en jeu. À travers l'interaction entre G1-G2, les objets technologiques, sémiotiques et théoriques sont transformés en des objets mathématiques disponibles dans le référentiel théorique. Ces objets assurent la cohérence dans le passage entre deux étapes du modèle. Ils assurent également la bonne exécution du contrat didactique, pour raffiner pas à pas des éléments qui permettent aux élèves de valider les constructions qu'ils réalisent.

- **Le rôle des procédés de construction dans le raffinement de la démarche de validation, et leur influence sur le travail mathématique d'organisation**

Nous avons constaté, avec les expérimentations réalisées, que la méthode mathématique définit la stratégie de résolution du problème à l'aide du modèle (A-A-C / P-A-P). La mise en œuvre de cette stratégie génère le travail mathématique d'organisation dans lequel les procédés de construction fixent les modalités d'entrée dans la résolution et les conditions de réalisation effectives de la construction de l'objet que décrit le problème de construction. À ce titre, ils nourrissent la circulation du travail dans les trois plans verticaux de l'ETM ([Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis]), donnent une unité au(x) paradigme(s) géométrique(s) privilégié(s) dans la forme de travail mathématique et une structure à la construction qui matérialise l'objet. Ainsi, les procédés de construction décrivent, dans le modèle, le schéma de résolution du problème, pour inscrire chaque pas de résolution dans une étape de ce modèle et chaque élément raffiné dans la structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle. Ils donnent, à travers les genèses de l'ETM qu'ils activent, une nature (sémiotique, discursive ou instrumentale) au travail mathématique d'organisation, à chaque articulation du modèle. Ainsi, ils favorisent un enchaînement cohérent des arguments qui guident la procédure de construction pour structurer le raffinement de l'argumentaire de validation à l'intérieur du modèle.

3.3. La structure de développement de la démarche de validation adossée au modèle (A-A-C / P-A-P)

Dans la forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P), la structure de développement de la démarche de validation donne la manière dont la distinction des éléments doit être raffinée, par l'enseignant, au niveau des élèves, puisque c'est à ces éléments que ceux-ci vont se référer pour valider les constructions qu'ils réalisent. Ainsi, un raffinement progressif des données du problème est mis en place par l'enseignant, suivant les étapes du modèle. Ce raffinement va produire un travail mathématique permettant de réaliser la construction de l'objet, un discours de validation qui accompagne ce travail, ainsi que des procédés de construction qui réalisent la construction de l'objet. Lesquels, à leur tour, mettront en évidence les éléments de la structure et favoriseront l'apprentissage de la validation. Donc le processus de raffinement des éléments de la structure de développement de la démarche de validation se fait dans un travail collaboratif entre l'enseignant et les élèves : l'enseignant assure l'apprentissage de la bonne identification de ces éléments tout en faisant adhérer les élèves à ce travail, puisque le but est que, à un moment donné, les élèves se rendent compte des

insuffisances des caractérisations qu'ils ont de l'objet à construire, et acceptent d'aller vers une caractérisation qui donne un sens à la validation telle que décrite dans les ETM de références, qui fournit des moyens de production de cette validation. Ainsi, telle une unité de raffinerie, l'enseignant va raffiner par étapes la séquence de résolution et le problème de construction pour développer la capacité des élèves à résoudre un problème de construction. Dans la phase d'appréhension de la situation, l'enseignant raffine chez les élèves la preuve d'existence et de constructibilité de l'objet. Il articule la phase d'analyse à celle d'identification du problème et celle d'actes de construction pour développer une manière de caractériser l'objet à construire, de choisir une transformation du plan liée à l'objet, de choisir le type de construction à mettre en œuvre. Ainsi, en mettant en lien la phase de conception de la solution à celle du produit d'actes de construction, il va raffiner le processus de réalisation de la construction de l'objet et la validation du produit des actes de construction.

Ce modèle se présente donc comme un outil qui permet d'enseigner la validation, puisque les expérimentations réalisées avec les enseignants ont permis d'illustrer le rôle important qu'il joue, au niveau de l'enseignant, dans le processus d'enseignement de la validation. À savoir un rôle d'aide au raffinement, chez les élèves, de la manière de distinguer le processus de résolution, la caractérisation de l'objet, le choix d'une transformation du plan liée à l'objet, le choix du type de construction à mettre en œuvre, le processus de réalisation de la construction, et la validation du produit de tous les actes de construction. Ainsi, il semble favoriser l'apprentissage de la validation, car les expérimentations réalisées avec les élèves ont établi l'existence d'une corrélation entre l'utilisation de ce modèle et la réussite dans la résolution d'un problème mathématique par l'élève. Il lui donne, en effet, dans l'ETM idoine, une manière de résoudre un problème de construction, caractériser l'objet, choisir une transformation du plan liée à l'objet, choisir le type de construction à mettre en œuvre, décrire le processus de réalisation de la construction, et valider le produit de tous les actes de construction. Ce modèle donne un sens à la validation ; aide au raffinement, chez les élèves, dans les ETM idoines, d'une démarche de validation des résultats qu'ils obtiennent ; il fournit des moyens favorisant l'enseignement et l'apprentissage de la validation, dans les classes mathématiques.

Compte tenu du fait que nous avons :

- Montré que la caractérisation qu'un sujet (élève ou professeur) a d'un objet mathématique, dans un ETM, donne un sens à la validation.
- Élaboré un modèle de forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P), à partir d'un problème de construction (que nous avons étendu à la séquence de résolution d'un problème issu de n'importe quel domaine des mathématiques) qui favorise l'enseignement et l'apprentissage de la validation dans les classes mathématiques.

Et, ajoutant à cela le fait que toutes nos hypothèses se sont réalisées, nous pouvons dire :

La manière d'organiser la résolution d'un problème mathématique donné, à travers la caractérisation des objets que décrit ce problème, raffine, dans l'ETM idoine, une démarche de validation et fournit des moyens permettant de développer la capacité de valider chez les élèves dans les classes de mathématiques.

Ainsi, à la question de savoir :

Comment organiser la résolution d'un problème mathématique, dans l'ETM idoine, à un niveau d'enseignement donné, pour raffiner, chez les élèves, une manière de distinguer les éléments sur lesquels ils peuvent se référer, pour produire une démarche de validation des résultats qu'ils obtiennent ?

Nous proposons le modèle de forme d'organisation du travail mathématique (**A-A-C / B**) à deux articulations : **Appréhension-Analyse-Conception de la solution (A-A-C)** et **B**, organisation à trois étapes du problème mathématique qui sert de situation d'enseignement de la validation. La première articulation agence les sous-tâches liées à la séquence de résolution et la seconde organise celles qui sont liées au problème mathématique à résoudre. Dans le cas particulier d'une séquence de résolution d'un problème de construction, **B = (P-A-P) : Problème – Actes de construction – Produit d'actes de construction**, et on a le modèle de forme d'organisation (**A-A-C / P-A-P**).

4. De nos éléments de réponse aux limites de notre travail de recherche

La réponse à notre question générale de recherche est le modèle de forme d'organisation du travail mathématique (**A-A-C / B**) que nous avons généralisé à partir d'un cas particulier : le modèle (**A-A-C / P-A-P**), issu des analyses que nous avons menées à l'aide d'un problème de construction (problème mathématique). Ce modèle est élaboré pour permettre aux enseignants de développer la capacité de valider chez les élèves, dans les classes de mathématiques. Il met en évidence les étapes que peut suivre un enseignant au cours d'une séquence de résolution d'un problème mathématique en classe, pour amener les élèves à distinguer les éléments auxquels ils peuvent se référer pour valider un résultat qu'ils obtiennent. Dans l'obtention de cette réponse, nous nous sommes heurtés à un certain nombre de limites que nous essayons de relever dans ce paragraphe, qui sont de plusieurs ordres. Celles que nous allons évoquer dans ce paragraphe sont, soit de l'ordre méthodologique, soit liées à la structure du modèle (**A-A-C / P-A-P**) à partir duquel nous avons déduit la forme d'organisation du travail mathématique que nous proposons comme alternative, soit encore liées au contexte dans lequel notre recherche a été menée.

4.1. Les limites liées à la méthodologie de recherche

Dans notre travail, nous avons opté pour une démarche qui a consisté à identifier le modèle de forme d'organisation du travail mathématique disponible dans les ETM idoines, en classe de Première Scientifique ; à étudier son fonctionnement pour dégager ses limites, afin de comprendre le pourquoi de l'incapacité des élèves à valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent (constatée par les enseignants) ; à élaborer un modèle de forme d'organisation capable de mieux développer la validation mathématique chez les élèves ; à le tester, non seulement au niveau des enseignants, mais aussi à celui des élèves. Dans cette démarche, notre méthodologie a porté principalement sur des études de cas à partir des pratiques des enseignants en classe, et sur un point de vue collectif, à partir d'une enquête exploratrice et descriptive des ressources disponibles (programmes, manuels et documents d'accompagnement), des observations de classe, ainsi que des analyses des productions de binômes d'élèves. Ces choix méthodologiques ont découlé de notre problématique de départ et des questions de recherche que nous nous sommes posées. Certains obstacles auxquels nous nous sommes heurtés, dans ces choix méthodologiques, nous amènent, tout au moins, en partie, à reconsidérer nos conclusions.

Tout d'abord, pour identifier la forme d'organisation du travail mathématique disponible dans les ETM idoines, en classe de Première scientifique, nous avons fait le choix d'analyser un échantillon de manuel restreint : un seul, sur les trois que propose la Commission du Choix des Manuels (CCM). Cela relativise la portée de ce travail, sur ce point précis, bien que le manuel analysé soit celui retenu par le Conseil d'Agrément du Manuel Scolaire et du Matériel Didactique (CAMMD), donc celui qui est effectivement utilisé par les élèves et les enseignants. La poursuite de l'analyse des deux autres manuels permettrait de confirmer ou d'infirmer notre résultat sur la forme d'organisation que proposent les ETM idoines potentiels, et même de l'enrichir. Par ailleurs, au Cameroun, les enseignants sont soumis à la contrainte d'application de l'Approche Par les Compétences (APC) dans son intégralité. Cette approche harmonise les pratiques d'enseignement et les méthodes de résolution des problèmes, à un niveau scolaire donné. Donc elle vise une mise en œuvre des choix méthodologiques opérés par les établissements, qui généralement rejoignent ceux du manuel mis à la disposition des élèves. Vue sous cet angle, la forme d'organisation du travail mathématique explicitée dans les ETM idoines effectifs ne devrait être que celle disponible dans les ETM idoines potentiels. Nous restons convaincus que nous n'avons pas déterminé la forme d'organisation que proposent véritablement les enseignants. Il serait utile de poursuivre les observations chez les enseignants, en les débarrassant de la contrainte d'harmonisation des méthodes de résolution, puisque la forme d'organisation du travail mathématique ne constitue pas un objectif d'enseignement. Des entretiens directs avec les enseignants permettraient d'obtenir leur point de vue, qui certainement pourrait varier d'un enseignant à un autre, et pourrait être différent de celui que proposent les ETM idoines potentiels.

Ensuite, dans l'élaboration de notre modèle de forme d'organisation du travail mathématique, nous avons adossé son fonctionnement au principe de raffinement d'un savoir (ou savoir-faire) mathématique. Nous l'avons élaboré à partir du principe de raffinage emprunté à l'industrie pétrolière, qui dépasse largement le domaine de l'enseignement des mathématiques. Nous aurons pu nous limiter à l'adosser à la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985) qui relève directement du domaine de l'enseignement des mathématiques, nonobstant le fait que nous ayons constaté qu'elle-même se présente, dans son fonctionnement, comme une extension (ou transposition) du principe de raffinage pétrolier. Par ailleurs, le principe de raffinage pétrolier fait intervenir des machines programmables dans le processus de raffinage du pétrole brut. On est donc toujours certain d'obtenir le résultat attendu à un pourcentage très élevé. Tandis que le principe de raffinement d'un savoir mathématique est mis en œuvre par des humains qui ne sont pas programmables, et donc le pourcentage de réussite dans la réalisation d'un projet de développement de la démarche de validation, chez les élèves, à l'aide du modèle reste relatif. En effet, il pourra dépendre de l'enseignant, de sa culture mathématique, de ses conceptions et de la manière dont il appréhende le modèle. Dans l'élaboration du modèle (A-A-C / P-A-P), nous nous sommes référés aux limites du modèle existant (A-S), au sens que prend la validation dans les ETM de référence et aux règles du contrat didactique relatives à la réalisation de la solution d'un problème de construction en géométrie. En aucun cas nous n'avons interrogé les enseignants sur leur conception des problèmes de construction géométrique, sur la place qu'ils accordent à la démarche de validation, ni abordé leur cursus d'études universitaires du point de vue du raisonnement mathématique, afin de comprendre leurs points de vue sur l'importance de la validation dans la résolution des problèmes mathématiques et sur la manière dont ils la transmettent aux élèves.

Par ailleurs, pour déterminer le modèle de forme d'organisation du travail mathématique disponible dans les ETM idoines effectifs et tester le modèle élaboré, nous avons été confrontés, dans notre choix du public de l'étude, à un problème lié à plusieurs facteurs d'ordre pratique. En effet, nous avons consacré beaucoup de temps à la recherche des enseignants prêts, non seulement à participer et à nous accueillir dans leurs classes, mais aussi disposés à s'investir dans le modèle élaboré afin de le mettre en œuvre dans une séquence de résolution en classe. Seuls trois des dix enseignants que nous avons contactés ont répondu positivement. Ainsi, nous nous sommes limités à une étude portant sur deux enseignants pour déterminer le modèle disponible, et sur un enseignant pour tester le modèle élaboré. Les trois enseignants enseignent dans des classes de Première Scientifique, situées dans trois établissements différents.

Enfin, pour tester le modèle, nous nous sommes limités à un seul niveau d'enseignement (Première Scientifique) sur les sept que compte l'enseignement secondaire. À quoi s'est ajouté le fait que, pour les élèves, nous avons choisi une tâche similaire à celle qui avait été traitée par les enseignants en classe. Cela constitue une limite, bien que nous cherchions juste à déterminer le rôle du modèle dans l'apprentissage de validation par les élèves. Nous aurions dû choisir une tâche totalement différente afin de nous assurer que les élèves ne récitent pas la solution élaborée avec l'enseignant. Par ailleurs, nous n'avons pas analysé la mise en œuvre individuelle du modèle par les élèves pour confirmer les résultats obtenus dans l'analyse des productions des binômes. Il serait utile de poursuivre cette étude par une analyse des productions individuelles des élèves, et aussi d'étendre ce travail aux autres niveaux d'enseignement, afin de s'assurer que la forme d'organisation du travail mathématique ne varie pas d'un niveau d'enseignement à un autre et d'envisager les adaptations à faire, par niveau, sur le modèle élaboré.

4.2. Les limites liées au contexte de l'étude

Notre recherche s'est positionnée comme une étude de cas, de « démarche de validation des constructions », au Cameroun, en classe de Première Scientifique. Elle s'est déroulée dans un contexte culturel exclusivement camerounais. Dans ce contexte, la didactique de mathématiques est très peu connue, les approches et les programmes d'enseignement restent stables sur des périodes très longues, favorisant ainsi une accoutumance aux problèmes scientifiques non résolus, à l'exemple des questions d'enseignement et d'apprentissage de la validation. Cette recherche est donc un compte rendu du travail effectué, du point de vue de la validation, dans des classes camerounaises, avec des élèves et des enseignants camerounais. Si la problématique de la validation est peu traitée, ou tardivement posée, dans l'enseignement secondaire au Cameroun, cela n'est pas le cas dans certains pays de l'Espace Mathématique Francophone (EMF). Dans d'autres pays membres, comme la France et le Canada, cette problématique est depuis des années traitée dans des travaux en didactique de mathématiques, avec des résultats qui permettent de mieux la cerner et de la maîtriser. Ainsi, avec les travaux de Balacheff (1982, 1988 et 1989), Cabassut (2005), Pedemonte (2002), Duval (1992, 1994 et 1995), Arsac et al. (1992) et Tanguay (1989), pour ne citer que ceux-là, le raisonnement, l'argumentation, l'explication, la preuve et la démonstration, ont été clairement explicités pour permettre de définir les contextes de validation et de donner un sens à la validation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au secondaire, dans ces pays. Ainsi, pour le cas particulier de la France, la validation est enseignée dès l'école élémentaire et se fait de façon perceptive à partir de ce que l'élève « voit ». Au début du collège (en classe de sixième et cinquième), elle se fait à l'aide de la précision apportée par les instruments. Dès la classe de

quatrième et tout au long du lycée, la validation se fait à l'aide des propriétés mathématiques et prend progressivement la forme de la démonstration.

4.3. Des limites identifiées aux perspectives de recherche

Dans la perspective de dépasser les limites identifiées précédemment et de prolonger ce travail, il est possible d'envisager de réorienter ce travail suivant d'autres axes de recherche, ou de reprendre certains aspects de notre étude, en adaptant par exemple notre méthodologie de recherche.

4.3.1. Le choix des axes de recherche

Par rapport au choix d'axes de recherche, nous pouvons envisager de reprendre ce travail en essayant de comparer la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique » à la notion de Variables Didactiques (Brousseau, 1985) pour voir si cette caractéristique est une transposition des variables didactiques sur l'enseignant. Notre idée serait de débarrasser les enseignants de la contrainte d'application de l'approche par les compétences, telle qu'elle est conçue au Cameroun, et d'explorer la variation de la caractéristique « forme d'organisation du travail mathématique », d'un enseignant à un autre, et même d'un niveau scolaire à un autre. Ce qui nous permettrait de mettre en évidence la variation du travail mathématique d'organisation et de la structure de développement de la démarche de validation à l'intérieur du modèle mis en œuvre par l'enseignant, au cours d'une séquence de résolution. Donc d'observer, à l'aide du cadre théorique (EPP) comment vont varier le travail mathématique permettant de réaliser une construction, le discours de validation qui accompagne ce travail et les procédés de construction qui réalisent cette construction.

4.3.2. La taille des échantillons utilisés dans notre recherche

Concernant la taille des échantillons utilisés, nous pouvons envisager, au niveau de l'identification du modèle disponible dans les ETM idoines potentiels, d'étendre l'étude aux deux autres manuels proposés par la Commission du Choix des Manuels (CCM), bien que ces manuels ne soient pas directement utilisés par les élèves. L'idée serait d'identifier les formes d'organisation qui sont disponibles et de les comparer à celle que propose le manuel des élèves (CIAM). Pour l'échantillon ayant permis de tester le modèle (A-A-C / P-A-P), il serait souhaitable de reprendre les expérimentations en augmentant le nombre d'établissements, d'enseignants et d'élèves, et en étendant le champ des observations aux classes de collège (4^e et 3^e), ainsi qu'aux classes de Seconde et Terminale des filières scientifiques. Ceci dans le but d'explorer l'influence de la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique » dans l'enseignement de la validation et de mettre en évidence le rôle du modèle (A-A-C / P-A-P) dans l'enseignement et l'apprentissage de la validation à chaque niveau scolaire.

4.3.3. Dépasser les limites liées au contexte de notre recherche

Cette recherche est menée dans le contexte culturel camerounais. Dépasser les limites liées à ce contexte constitue un autre enjeu de nos recherches à venir. Nous serons intéressés de poursuivre ce travail en nous ouvrant à d'autres cultures éducatives de l'espace mathématique francophone, à l'exemple de la France, où nous avons constaté que les questions de la validation étaient bien posées. Cependant, comme au Cameroun la validation ne constitue pas un objet d'enseignement, mais, un savoir-faire qui est laissé à la charge de l'enseignant, nous serions

intéressés de comprendre comment la validation est enseignée dans ce système, et de voir si la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique » est explorée dans le processus de développement de la validation chez les élèves. Ce qui nous permettrait de mener une étude comparative entre les modèles utilisés et le modèle (A-A-C / P-A-P) que nous avons élaboré.

En somme, nous pensons que l'originalité de notre recherche vient du fait que nous avons traité la question de développement de la validation mathématique chez les élèves en analysant la mise en place effective de la démonstration dans les classes de mathématiques à l'aide des formes d'organisation du travail mathématique. Ainsi, nous avons mis en évidence l'importance de la caractéristique organisationnelle « forme d'organisation du travail mathématique » dans l'enseignement de la validation. Ceci nous a permis d'élaborer un modèle de forme d'organisation du travail mathématique que nous avons testé, en observant le travail mathématique que font les enseignants en classe, au cours de la mise en œuvre d'une situation que nous avons élaborée. Notre travail de thèse est donc prioritairement descriptif et expérimental, et en partie exploratoire. Exploratoire, parce qu'il cherche au départ à comprendre le pourquoi de l'incapacité des élèves à valider les résultats mathématiques qu'ils obtiennent, malgré l'existence du modèle (A-S), en recherchant une solution alternative. Descriptif, parce qu'il décrit un modèle de forme d'organisation du travail mathématique capable de mieux développer la validation chez les élèves. Et expérimental, parce qu'il met en évidence la capacité du modèle (A-A-C / P-A-P) à contribuer à la résolution de cette incapacité dont la cause pourrait être la disparition du cours sur la logique formelle des programmes d'enseignement des mathématiques, au Cameroun. Bien que ce travail de recherche repose sur un nombre restreint de cas étudiés, les investigations dont nous avons rendu compte constituent pour nous une étape dans la réflexion sur l'enseignement de la validation mathématique au secondaire. Dans une autre perspective, un travail sur la formation des enseignants, en rapport avec l'utilisation du modèle de forme d'organisation du travail mathématique (A-A-C / P-A-P) élaboré dans cette thèse, est envisageable dans le cadre d'un travail de recherche.

BIBLIOGRAPHIE

- ARSAC, G. (1987) : l'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique, Recherches en Didactique des mathématiques, Vol. 8/3, éd. La pensée Sauvage, Grenoble, 267-312.
- ARSAC, G., CHAPIRON, G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y., MANTE M. (1992) : Initiation au raisonnement déductif au collège, une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique, I.R.M.E de Lyon, presses universitaires.
- BALACHEFF, N. (1982) : Preuve et démonstration en mathématiques au collège, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 3/3, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 261-304.
- BALACHEFF, N. (1988) : Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.
- BALACHEFF, N. (1987) : Processus de preuve et situations de validation, Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176.
- BALACHEFF, N. (1999) : L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat..., International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, <http://www.lettredelapreuve>
- BALACHEFF, N. (1995) : Conception, connaissance et concept, Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-95.
- BALACHEFF, N. (2000) : A modelling challenge : untangling learner's knowing, in Journées internationales d'Orsay sur les Sciences Cognitives.
- BALACHEFF, N. (2019) : Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In : Pilet J., Vendeira C. (eds.) Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018 (pp.423-456). Paris : ARDM et IREM de Paris-Université de Paris Diderot. Texte du séminaire prononcé le 18 novembre 2017.
- BARBIN, E. (1989) : Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie, La démonstration mathématique dans l'histoire, Actes du 7ème colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 57-79.
- BARBIN, E. (1995) : La notion de rectification de concept. La construction historique des concepts de courbe et de fonction, Séminaire de didactique des mathématiques, Pontificia Universidade de Sao Paulo.
- BARBIN, E., DUVAL, R., HOUEBINE, J., LABORDE, C. (1998) : Analyse de textes de démonstration dans des cadres théoriques différents. Institut de recherche mathématiques de Rennes, fascicule S4.

- BARBIN, E. (1988) : La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques. Bulletin de l'A.P.M.E.P., n° 36, décembre 88, pp. 591-620.
- BERTHELOT, R., SALIN, M.-H. (2001) : L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? Petit x n°56, pp. 5-34.
- BOERO, P. (1999) : argumentation et démonstration : une relation complexe, productive et inévitable en mathématique et dans l'enseignement des mathématiques, International Newsletter on the teaching and Learning of Mathematical Proof, <http://www.lettredelap>.
- BOLZANO, B. (1810) : Beiträge zu einer begründeteren Darstellung des Mathematik, Erste Lieferung, Prague ; rééd. (1926) sous le titre Philosophie der Mathematik, Paderborn.
- BROUSSEAU, G. (1983) : Étude de questions d'enseignement : un exemple en géométrie, séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université J. Fourier de Grenoble.
- BROUSSEAU, G. (1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 7.2, 33-115.
- BROUSSEAU, G. (1998) : Théorie des situations didactiques. Éditions La pensée sauvage, Paris.
- BROUSSEAU, G. (1975) : Études de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme. IREM de Bordeaux.
- CABASSUT, R. (2005) : Démonstration, Raisonnement et Validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne. Thèse de didactique de mathématiques, Université de Paris 7.
- CHAACHOUA, H. (1997) : Fonction du dessin dans l'enseignement de la géométrie de l'espace. Étude d'un cas : La vie des problèmes de construction et rapport des enseignants à ses problèmes. Thèse Grenoble, Université Joseph Fourier.
- CIAM Terminale SM (1998) : Livre de mathématiques au programme. Collection Inter Africaine de Mathématiques, EDICEF.
- COLMEZ, F., PARZYSZ, B. (1993) : Le vu et le su dans l'évolution des dessins de pyramides du CE2 à la 2nde, in BESSOT A., VERILLON P. et BALACHEFF N., Espaces graphiques et graphismes d'espaces, La pensée sauvage éditions, pp. 35-55.
- CHEVALLARD, Y., JULLIEN, M. (1992) : Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, Première partie, A-La géométrie et son enseignement comme problème, B-La notion de construction géométrique comme problème. Petit x 27.pp. 41-76.
- CHEVALLARD, Y., (1985) : La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné. La pensée sauvage – Recherche en didactique des mathématiques, Grenoble, 126 p.
- CHAVALLARD, Y. (1988) : Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation, IREM, Marseille.

- DURAND-GUERRIER, V. (2005) : Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski. Acte du colloque, Didactique : quelle référence épistémologique ?
- DUVAL, R., EGRET, M. A. (1993) : Introduction et l'apprentissage du raisonnement déductif. Repères IREM, 12, 114-140.
- DUVAL, R. (1992) : Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? Petit x n°31, pp. 37-61.
- DUVAL, R. (1988) : Graphiques et équations : l'articulation de deux registres, Annales de didactique et de sciences cognitives 1, 235-253.
- DUVAL, R. (1995) : Sémiosis et pensée humaine, Editions Peter Lang.
- FUY, D., GEDDES, D., et TISHLER., R. (1984) : English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre, M. van Hiele, prepared as part of the research project : An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Brooklyn, NY : Brooklyn college.
- GAUDIN, N. (2002) : Conceptions de fonction et registres de représentation : étude de cas au lycée, For the learning of Mathematics, Vol 22.2, 35-47.
- GONSETH, J.F., (1945) : La géométrie et le problème de l'espace, Neuchâtel, Edition du Griffon.
- GRIZE J.B. (1996) : Logique naturelle et communications, Paris, PUF
- HANNA, G. (1996) : The Ongoing Value of Proof. In L. Puig and A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematical Education, Valencia, vol.1, pp. 21-34.
- HANNA, G. (1995) : Challenges to the importance of proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), 42-49.
- HANNA, G. (2000) : Proof, explanation and exploration: an overview, Educational Studies in Mathematics 44 : 5-23.
- HILBERT, D. (1899) : Grundlagen der Geometrie, Leipzig, traduction (1971) : les fondements de la géométrie, édition du CNRS, Dunod.
- HOUEMENT, C., KUZNIAK, A. (1999a) : Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. Educational Studies in Mathematics, 40, 283-312.
- HOUEMENT, C., KUZNIAK, A. (1999b) : Géométrie et paradigmes géométriques. Petit x, 51, 5-21.
- HOUEMENT, C., et KUZNIAK, A. (2006) : Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annale de didactique et de sciences cognitives, 11 : 175-193 ;
- KESHESSA, B. (1992) : Preuves et résolutions de problèmes de lieux géométriques. Thèse, Grenoble, Université Joseph Fourier.

- LAKATOS, L. (1963-1964) : Preuves et Réfutations, Essai sur la Logique de la Découverte Mathématique, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts, Edition française de 1984.
- KUT, T. S. (1962) : The structure of scientific revolutions. Trad : La structure des résolutions scientifiques. Flammarion, Paris.
- KUZNIAK, A. (2006) : Paradigmes et espace de travail géométrique. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formations des enseignants en géométrie. Vol. 6.2, pp. 167-187.
- KUZNIAK, A. (2010) : Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. In annales de didactique et de sciences cognitives, Vol. 15 pp. 75-95. IREM de STRASBOURG.
- KUZNIAK, A. (2011a) : L'espace de Travail Mathématique et ses genèses, In Annales de didactiques et de sciences cognitives, Vol. 16, pp 9-24.
- KUZNIAK, A. (2011b) : La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique. Cahier du laboratoire de didactique André Revuz, Paris.
- KUZNIAK, A. et RICHARD, P. (2014) : Spaces for mathematical work : viewpoint and perspectives. Rlime, 17 (4.1) : 17-26.
- KUZNIAK, A. (2014) : Travail mathématique et domaine mathématique. In acte du troisième symposium ETM, Montréal.
- LABORDE, C. (1990) : L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, RDM n°9/3, pp 337-364.
- LABORDE, C. (1988) : L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 337-364.
- LABORDE, C., HOUDEBINE, J. (1998) : Variation sur des énoncés des problèmes de géométrie au collège. Repères IREM, 33, 37-58.
- LABORDE, C., CAPPONI, B. (1994) : Cabri-Géomètre, constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherche en didactique des mathématiques, vol. 14, n° 12, pp. 165-210.
- LAUTIER, F. (1999) : Ergotopiques, Sur les espaces des lieux de travail. Edition Octarès, Toulouse.
- MARGOLINAS, C. (1989) : Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.
- MARGOLINAS, C. (1992) : Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12/1, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 113-158.
- MARGOLINAS, C (1993) : De l'importance du vrai et du faux dans la classe, éd. La pensée Sauvage.

- MESQUITA, A. (1989) : L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie. Thèse, Strasbourg, Université Louis Pasteur.
- MINEDUC (1998) : Programme officiel des mathématiques du second cycle de l'enseignement général au Cameroun. WWW.edumathcamer.net
- MINEDUC (1998) : Programme de mathématiques pour le premier cycle de l'enseignement secondaire général.
- MINESEC (2020) : Programme de mathématiques des classes de Terminales C, D, E et TI
- NGODEBO, E.W. (2019) : Introduction des triangles égaux au Cycle 4 par la problématique de la construction. Mémoire de Master recherche Didactique des Mathématiques, Paris, Université Paris Diderot.
- NGODEBO, E.W. (2017) : L'influence du dessin sur les processus de résolution d'un problème lié aux isométries du plan par les élèves de 1^{ère} scientifiques, Mémoire de DIPES 2, Yaoundé, École Normale supérieure.
- OUVRIER-BUFFET, C. (2003) : Construction de définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1.
- PEDEMONTE, B. (2002) : Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble 1 et Université de Genova.
- PEDEMONTE, B. (2005) : Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 25/3, éd. La Pensée Sauvage, 313-348.
- PARZYSZ, B. (1988) : "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics, 19, 79-92.
- PARZYSZ, B. (1989) : Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée : contribution à l'étude de la relation voir/savoir. Thèse, Paris, Université Paris 7.
- PARZYSZ, B. (2009) : Des expériences au modèle, via la simulation. *Repères-IREM*, (74) : 91-103.
- PETERSEN, J. (o) : Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques
- ROBERT, A. et ROGALSKI, M. (2002) : Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, Petit x, n°60, éd. IREM de Grenoble, 6-35.
- ROBERT, A. et ROGALSKI, M. (2004) : Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée, Repères-IREM, n°54, éd. Topiques, 77-103.

- TANGUAY, D. (2005) : Apprentissage de la démonstration et graphes orientés, Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 10, éd. IREM de Strasbourg, Université L. Pasteur, 55-93.
- TANGUAY, D. (2006) : Comprendre la structure déductive en démonstration, Envol n°134.
- TANGUAY, D. (2007): Learning Proof : from Truth towards Validity, Proceedings of the Xth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME), San Diego State University, San Diego, Californie, (sur le web).
- THOM, R. (1974) : Mathématiques modernes et mathématiques de toujours, suivi de Les mathématiques « modernes », une erreur pédagogique et philosophique ? Dans Pourquoi la mathématique ? sous la dir. de Robert Jaulin, pp. 39-88. Éditions 10-18, Paris.
- TALL, D. et VINNER, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics, with a particular reference to limits and continuity. Education WStudies in Mathematics, 12, 151-169.
- THURSTON, W.P. (1994): On Proof and Progress in Mathematics. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 30, n° 2, pp. 161-177.

ANNEXE

Annexe 1

1.1. Quelques transformations isométriques usuelles du plan

Soit (\mathcal{P}) un plan affine, M, N, M' et N' des points donnés du plan (\mathcal{P}) . Et $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, une transformation isométrique du plan. Le tableau ci-dessous résume les différentes transformations élémentaires du plan.

Transformation du plan dans lui-même (f)	Définition et Représentation de l'image d'un segment	Caractérisation
Translation de vecteur \vec{u} : $t_{\vec{u}}$	$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ Une figure à faire	$t_{\vec{u}}(M) = M'$ $t_{\vec{u}}(N) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ Et donc $M'N' = MN$. -Toute translation conserve la distance.
Symétrie centrale de centre le point O : S_O	$S_O(M) = M' \Leftrightarrow O$ est le milieu du segment $[MM']$. Une figure à faire	$S_O(M) = M'$ $S_O(N) = N' \Leftrightarrow$ Les segments $[M'N']$ et $[MN]$ ont la même longueur. Et donc $M'N' = MN$. -Toute symétrie centrale conserve la distance.
Symétrie orthogonale d'axe la droite (D) : $S_{(D)}$	$S_{(D)}(M) = M' \Leftrightarrow (D)$ est la médiatrice du segment $[MM']$. Une figure à faire	$S_{(D)}(M) = M'$ $S_{(D)}(N) = N' \Leftrightarrow$ Les segments $[M'N']$ et $[MN]$ ont la même longueur. Et donc $M'N' = MN$. -Toute symétrie orthogonale conserve la distance.
O étant un point et α un réel Rotation r de centre O et d'angle de mesure α : $r_{(O,\alpha)}$	$r(M) = M' \Leftrightarrow (OM' = OM$ et $\text{Mes}(\widehat{OM, OM'}) = \alpha)$ Une figure à faire	$r(M) = M'$ $r(N) = N' \Leftrightarrow M'N' = MN$ et $\text{Mes}(\widehat{MN, M'N'}) = \alpha$ -Toute rotation conserve la distance.

1.2. La composition des transformations du plan

Une composition de transformations du plan est une suite de transformations. Le principe est le suivant : on part d'une figure, à laquelle on applique une transformation du plan ; à partir de l'image obtenue, on applique une nouvelle transformation ; à partir de la nouvelle image obtenue, on applique une autre transformation...etc. On peut appliquer 2, 3, 4...transformations

du plan à la suite. Dans notre présentation nous allons nous limiter à la composition de deux transformations du plan.

1.2.1. Composée de deux Translations

Soient $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteurs respectifs \vec{u} et \vec{v} . La composée des translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. On a : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$.

Remarque :

- Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. Donc, $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$. On dit que la composée des translations est commutative.
- Si $\vec{v} = -\vec{u}$, on obtient : $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = Id_{(\mathcal{P})}$.

1.2.2. Composée de deux symétries orthogonales

La composée de deux symétries orthogonales peut être envisagée suivant deux cas, un premier où les deux axes sont parallèles et un second où ces axes sont sécants.

- **Cas où les deux axes sont parallèles**

Soient $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ deux symétries orthogonales d'axes respectifs, les droites (D) et (D') telles que : (D) et (D') sont parallèles. O un point de la droite (D) et O' le projeté orthogonal du point O sur la droite (D'). Alors la composée de $S_{(D)}$ et de $S_{(D')}$ est une translation de vecteur $2\overline{OO'}$. On a : $S_{(D)} \circ S_{(D')} = t_{\overline{2OO'}}$

Cas Particulier :

Pour toute droite (D), la composée de la symétrie orthogonale d'axe (D), $S_{(D)}$, par elle-même est l'application identité du plan notée $Id_{(\mathcal{P})}$. On a : $S_{(D)} \circ S_{(D)} = Id_{(\mathcal{P})}$

Remarque :

Cette composition permet d'envisager une translation comme la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles. Ce qui signifie qu'une translation peut être décomposée.

- **Décomposition d'une translation :**

Propriété 1 :

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul \vec{u} , pour toute droite (D) de vecteur normal \vec{u} , il existe une unique droite (D') telle que : $t_{\vec{u}} = S_{(D')} \circ S_{(D)}$. Et donc la droite (D') est telle que : (D') = $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$.

Propriété 2 :

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul \vec{u} , pour toute droite (D) de vecteur normal \vec{u} , il existe une unique droite (D'') telle que : $t_{\vec{u}} = S_{(D)} \circ S_{(D'')}$. Et donc la droite (D'') est telle que : (D'') = $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$.

Remarque :

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul \vec{u} tel que : $t_{\vec{u}} = S_{(D'')} \circ S_{(D')}$.

- Si la droite (D') est donnée alors, $(D'') = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(D')$.
- Si la droite (D'') est donnée alors, $(D') = t_{\frac{-1}{2}\vec{u}}(D'')$.

Toute translation peut s'écrire comme composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.

- **Cas où les deux axes sont sécants**

Dans ce paragraphe le plan (\mathcal{P}) est orienté. Soient $S_{(D)}$ et $S_{(D')}$ deux symétries orthogonales d'axes respectifs, les droites (D) et (D') telles que : (D) et (D') sont sécantes en un point O. \vec{u} et \vec{v} les vecteurs directeurs respectifs des droites (D) et (D'). On pose $\theta = \text{Mes}(\vec{u}, \vec{v})$. La composée de $S_{(D)}$ et de $S_{(D')}$ est une rotation de centre O et d'angle de mesure 2θ .

On a : $S_{(D)} \circ S_{(D')} = r_{(O, 2\theta)}$

Cas Particulier :

Lorsque les droites (D) et (D') sont perpendiculaires en leur point de rencontre O, la composée de $S_{(D)}$ et de $S_{(D')}$ est la symétrie centrale de centre O. Et donc, $S_{(D)} \circ S_{(D')} = S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_O$. Car $\theta = \frac{1}{2}\pi$ et donc $S_{(D)} \circ S_{(D')} = r_{(O, 2\theta)} = r_{(O, \pi)}$ qui est la symétrie de centre O.

Remarque :

Cette composition permet d'envisager une rotation comme la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants. Et donc, une rotation peut être décomposée.

- **Décomposition d'une rotation :**

Propriété 1 :

Soit r la rotation de centre O et d'angle θ . Pour toute droite (D') passant par O, il existe une unique droite (D) telle que : $r = S_{(D)} \circ S_{(D')}$. La droite (D) est l'image de la droite (D') par la rotation de centre O et d'angle $\frac{1}{2}\theta$.

Propriété 2 :

Soit r la rotation de centre O et d'angle θ . Pour toute droite (D') passant par O, il existe une unique droite (D'') telle que : $r = S_{(D')} \circ S_{(D'')}$. (D'') est l'image de la droite (D') par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{1}{2}\theta$.

Remarque :

Soit r la rotation de centre O et d'angle θ telle que : $r_{(O, \theta)} = S_{(D'')} \circ S_{(D')}$.

- Si (D') est la droite donnée alors : $(D'') = r_{(O, \frac{1}{2}\theta)}(D')$.
- Si (D'') est la droite donnée alors : $(D') = r_{(O, -\frac{1}{2}\theta)}(D'')$.

Toute rotation peut s'écrire comme composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants.

1.2.3. Composée de deux rotations

Une rotation est caractérisée à partir de ses éléments caractéristiques : un centre et un angle. Cela signifie que ces deux éléments influencent sur la nature de la composée de deux rotations. Ainsi, nous envisageons la composée de deux rotations, suivantes qu'elles soient de même centre ou non, en s'appuyant sur leurs angles.

- **Cas de deux rotations de même centre**

Soient $r_{(O,\theta)}$ et $r'_{(O,\alpha)}$ deux rotations de centre O et d'angles respectifs θ et α . La composée des rotations $r_{(O,\theta)}$ et $r'_{(O,\alpha)}$ est la rotation de centre O et d'angle $\theta + \alpha$. On a : $r_{(O,\theta)} \circ r'_{(O,\alpha)} = r_{(O,\theta + \alpha)}$.

Cas particuliers

- Si $\hat{\theta} + \hat{\alpha} = \hat{0}$, alors $r_{(O,\theta)} \circ r'_{(O,\alpha)}$ est l'application identité du plan.

On a : $r_{(O,\theta)} \circ r'_{(O,\alpha)} = Id_{(\mathcal{P})}$.

- Si $\hat{\theta} + \hat{\alpha} = \hat{\pi}$, alors $r_{(O,\theta)} \circ r'_{(O,\alpha)}$ est la symétrie centrale de centre O.

On a : $r_{(O,\theta)} \circ r'_{(O,\alpha)} = r_{(O,\theta + \alpha)} = r_{(O,\pi)} = S_O$.

Remarque :

- Pour tout couple (θ, α) de nombres réels, on a : $\theta + \alpha = \alpha + \theta$.

Donc $r_{(O,\theta)} \circ r'_{(O,\alpha)} = r'_{(O,\alpha)} \circ r_{(O,\theta)}$. On dit que la composition des rotations de même centre est commutative.

- Si $\alpha = -\theta$, on obtient : $r_{(O,-\theta)} \circ r_{(O,\theta)} = r_{(O,\theta)} \circ r_{(O,-\theta)} = Id_{(\mathcal{P})}$.

- **Cas de deux rotations de centres distincts**

Soient $r_{(O,\theta)}$ et $r'_{(O',\alpha)}$ deux rotations de centre distincts O et O', d'angles respectifs θ et α .

- Si $\hat{\theta} + \hat{\alpha} \neq \hat{0}$, alors $r'_{(O',\alpha)} \circ r_{(O,\theta)}$ est une rotation d'angle $\theta + \alpha$.

On a : $r'_{(O',\alpha)} \circ r_{(O,\theta)} = r_{(\Omega, \theta + \alpha)}$

- Si $\hat{\theta} + \hat{\alpha} = \hat{0}$, alors $r'_{(O',\alpha)} \circ r_{(O,\theta)}$ est une translation. On a : $r'_{(O',\alpha)} \circ r_{(O,\theta)} = t_{\vec{u}}$.

La détermination du centre Ω ou du vecteur de translation \vec{u} de la composée des deux rotations $r_{(O,\theta)}$ et $r'_{(O',\alpha)}$ est généralement au centre de la préoccupation.

- **Détermination du centre Ω de la rotation $r_{(\Omega, \theta + \alpha)}$ composée $r'_{(O',\alpha)} \circ r_{(O,\theta)}$**

1^{er} cas : $\hat{\theta} + \hat{\alpha} \neq \hat{0}$.

Soient r et r' deux rotations de centre distincts O et O' , d'angles respectifs θ et α , vérifiant la condition : $\hat{\theta} + \hat{\alpha} \neq \hat{0}$. Nous voulons construire le centre Ω de la rotation composée de r et r' . La démarche consiste à décomposer les deux rotations de la manière suivante.

On construit la droite (D') telle que : $r' = S_{(D')} \circ S_{(OO')}$ avec (D') la droite passant par O' et de vecteur directeur \vec{u}' tel que : $\text{mes}(\widehat{OO', \vec{u}'}) = \frac{\alpha}{2}$. Ensuite on construit la droite (D) telle que :

$r = S_{(OO')} \circ S_{(D)}$ avec (D) est la droite passant par O et de vecteur directeur \vec{u} tel que : $\text{mes}(\widehat{\vec{u}, OO'}) = \frac{\theta}{2}$. Ainsi, on obtient : $r' \circ r = S_{(D')} \circ S_{(OO')} \circ S_{(OO')} \circ S_{(D)} = S_{(D')} \circ S_{(D)}$. De plus $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \widehat{(\vec{u}, OO')} + \widehat{(OO', \vec{u}')} = \frac{\theta + \alpha}{2}$. Comme, $\hat{\theta} + \hat{\alpha} \neq \hat{0}$, alors l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$ n'est ni nul, ni plat. Les droites (D) et (D') sont sécantes en un point Ω . Et le point Ω est un point invariant par $r'_{(O', \alpha)} \circ r_{(O, \theta)}$. Ainsi $r'_{(O', \alpha)} \circ r_{(O, \theta)}$ est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta + \alpha$. On a : $\Omega = (D) \cap (D')$. Ce qui donne la construction du point Ω cherchée.

- **Détermination du vecteur \vec{u} de la translation $t_{\vec{u}}$ composée $r'_{(O', \alpha)} \circ r_{(O, \theta)}$**

2^e cas : $\hat{\theta} + \hat{\alpha} = \hat{0}$

Soient $r'_{(O', \alpha)}$ et $r_{(O, \theta)}$ deux rotations de centre distincts O et O' , d'angles respectifs θ et α , tel que : $\hat{\theta} + \hat{\alpha} = \hat{0}$. Nous voulons construire le vecteur \vec{u} de la translation composée de r et r' . La démarche consiste à procéder à la construction de l'image d'un des deux centres par de la composée des deux rotations de la manière suivante. On construit le point Ω , tel que : $\Omega = r'_{(O', \alpha)} \circ r_{(O, \theta)}(O) = r'(O)$. Ainsi le vecteur de translation $t_{\vec{u}}$ composée $r'_{(O', \alpha)} \circ r_{(O, \theta)}$ est $\vec{u} = \overrightarrow{O\Omega}$.

Cas particulier :

Si $\hat{\theta} = \hat{\alpha} = \hat{\pi}$, alors $r_{(O, \theta)} = S_O$ et $r'_{(O', \alpha)} = S_{O'}$. De plus $\hat{\theta} + \hat{\alpha} = \hat{0}$, donc $r' \circ r$ est une translation. Si nous désignons par O'' , un point tel que : $O'' = S_{O'}(O)$;

On a : $S_{O'} \circ S_O(O) = O''$ et $\overrightarrow{OO''} = 2 \overrightarrow{OO'}$. Donc $r' \circ r = t_{\overrightarrow{2OO'}}$

La composée de deux symétries centrales est une translation. On a : $S_{O'} \circ S_O = t_{\overrightarrow{2OO'}}$.

Remarque :

Dans le cas particulier ci-dessus, on a : $r'_{(O', \alpha)} \circ r_{(O, \theta)} = t_{\overrightarrow{2OO'}}$ et $r_{(O, \alpha)} \circ r'_{(O', \theta)} = t_{\overrightarrow{2O'O}}$. Ce qui signifie que la composée de deux rotations de centres distincts n'est pas commutative.

1.2.4. Composée d'une translation et d'une rotation

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul \vec{u} , et r la rotation de centre O et d'angle non nul θ telle que : $r = r_{(O, \theta)}$. La composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la rotation r est une rotation de même angle non nul θ . On a : $t_{\vec{u}} \circ r_{(O, \theta)} = r_{(\Omega, \theta)}$.

L'une des préoccupations, réside dans la détermination du centre de la rotation issue de la composition de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la rotation r .

- **Détermination du centre Ω de la rotation $r_{(\Omega,\theta)}$ composée de $t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\theta)}$**

Nous voulons déterminer le centre Ω de la rotation composée, de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la rotation r . La méthode consiste à décomposer la translation $t_{\vec{u}}$ et la rotation r de la manière suivante : On construit deux droites, (D) et (D') telles que : $r_{(\Omega,\theta)} = S_{(D)} \circ S_{(O\Omega)}$ et $t_{\vec{u}} = S_{(D')} \circ S_{(D)}$. Ainsi, on a : $t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\theta)} = S_{(D')} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ S_{(O\Omega)} = S_{(D')} \circ S_{(O\Omega)}$. Les droites (D') et (O Ω) se coupent en Ω , donc $S_{(D')} \circ S_{(O\Omega)}$ est la rotation de centre Ω et d'angle non nul θ . En conclusion, $t_{\vec{u}} \circ r_{(O,\theta)} = r_{(\Omega,\theta)}$. Et le point $\Omega = (O\Omega) \cap (D')$.

Remarque :

- Si r est une rotation d'angle nul, alors $t_{\vec{u}} \circ r = t_{\vec{u}}$.
- Si r est une rotation d'angle non nul θ , alors $t_{\vec{u}} \circ r$ et $r \circ t_{\vec{u}}$ sont deux rotations d'angle θ .
- En général $t_{\vec{u}} \circ r \neq r \circ t_{\vec{u}}$.

1.2.5. Composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale

L'étude est faite en deux étapes, d'abord à travers l'étude de la symétrie glissée (cas particulier de cette composée) et puis nous la généralisons à travers l'étude de la composée d'une translation de vecteur quelconque et d'une symétrie orthogonale.

1.2.5.1. La symétrie glissée

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul \vec{u} et $S_{(D)}$ une symétrie orthogonale d'axe la droite (D) telle que la vecteur \vec{u} est un vecteur directeur à la droite (D). On note g une application du plan telle que : $g = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$. On appelle symétrie glissée d'axe (D) et de vecteur \vec{u} , l'application g , composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$. On a bien alors :

$$t_{\vec{u}} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}.$$

- **Quelques propriétés de la symétrie glissée :**

Soit $g = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$ une symétrie glissée, M et M' deux points du plan tel : $g(M) = M'$ et O le milieu du segment $[MM']$.

- Toute symétrie glissée n'admet pas de points invariants. On a : $\text{Inv}(g) = \{\emptyset\}$.
- Le point O appartient à la droite (D).

L'une des difficultés, consiste à déterminer la droite (D) et le vecteur de glissement \vec{u} .

- **Déterminer l'axe (D) et le vecteur \vec{u} de la symétrie glissée g :**

Soit g une symétrie glissée. Nous savons que $g = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$. Et nous voulons déterminer la droite (D) et le vecteur de glissement \vec{u} de la composée, de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$. Ces éléments peuvent être obtenus de la manière suivante : Nous prenons, M, N, N' et M' des points du plan tels que : $g(M) = M'$ et $g(N) = N'$. Alors :

- La droite (D) = (OO') avec O et O' les milieux respectifs des segments $[MM']$ et $[NN']$.

- Le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}\overline{AA''}$ avec $A'' = g \circ g(A)$, A un point donné du plan.

1.2.5.2. Composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul \vec{u} , $S_{(D)}$ une symétrie orthogonale d'axe la droite (D) et g une symétrie glissée. La composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ est :

- Une symétrie orthogonale d'axe (Δ) si le vecteur \vec{u} est normale à la droite (D).

On a : $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)}$

- Une symétrie glissée si le vecteur \vec{u} n'est pas normale à la droite (D). On a :
 $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = g$.

L'une des difficultés est de déterminer l'axe (Δ) de la symétrie orthogonale ou de la symétrie glissée. Nous essayons de déterminer ces éléments dans le paragraphe suivant.

1^{er} cas : $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = S_{(\Delta)}$

Si le vecteur \vec{u} est normale à la droite (D), $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$ sont deux symétries orthogonales. Alors le problème consiste à déterminer la droite (Δ) axe de la symétrie orthogonale $S_{(\Delta)}$ composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$. La démarche consiste à décomposer la translation $t_{\vec{u}}$ en utilisant la symétrie orthogonale $S_{(D)}$. Pour cela, on considère les droite (D') et (D'') telle que : (D') = $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}$ (D) et (D'') = $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}$ (D). Posons $g = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$ et $f = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$.

Alors $f = S_{(D')} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} = S_{(D')}$ et $g = S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D'')} = S_{(D'')}$. Dans ce cas la droite (Δ) sera, selon la composée, l'une des droites (D') ou (D'').

2^{eme} cas : $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} = g$

Si le vecteur \vec{u} n'est pas normale à la droite (D), $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$ sont deux symétries glissées. Alors le problème consiste à déterminer la symétrie glissée, composée de la translation $t_{\vec{u}}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$. La démarche consiste à décomposer le vecteur de translation \vec{u} en la somme de deux vecteurs non nuls dont l'un est normal à (D), noté \vec{n} , et l'autre un vecteur directeur de (D), noté \vec{m} . Ainsi, $\vec{u} = \vec{n} + \vec{m}$. Considérons les droites (D') et (D'') telles que : (D') = $t_{\frac{1}{2}\vec{n}}$ (D) et (D'') = $t_{-\frac{1}{2}\vec{n}}$ (D). Posons : $g = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}$ et $f = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$.

On sait que : $t_{\vec{u}} = t_{\vec{n} + \vec{m}} = t_{\vec{n}} \circ t_{\vec{m}}$ et que $t_{\vec{n}} \circ S_{(D)} = S_{(D')}$ et $S_{(D)} \circ t_{\vec{n}} = S_{(D'')}$.

Donc $f = t_{\vec{m}} \circ t_{\vec{n}} \circ S_{(D)}$ et $g = S_{(D)} \circ t_{\vec{n}} \circ t_{\vec{m}}$ par suite $f = t_{\vec{m}} \circ S_{(D')}$ et $g = S_{(D'')} \circ t_{\vec{m}}$.

Ainsi, f et g sont les deux symétries glissées. Selon la composée, on prendra g ou bien f .

Remarque :

En général $S_{(D)} \circ t_{\vec{u}} \neq t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}$.

1.2.6. Composée d'une symétrie orthogonale et d'une rotation

Soit $r_{(O,\theta)}$ la rotation de centre O et d'angle θ , $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe la droite (D) et g une symétrie glissée. La composée de la rotation $r_{(O,\theta)}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$ est :

- Une symétrie orthogonale si $O \in (D)$. On a : $r_{(O,\theta)} \circ S_{(D)} = S_{(\Delta)}$.
- Une symétrie glissée si $O \notin (D)$. On a : $r_{(O,\theta)} \circ S_{(D)} = g$.

Le problème consiste souvent à déterminer l'axe (Δ) de la symétrie orthogonale ou la symétrie glissée. Nous essayons de déterminer ces éléments dans le paragraphe suivant.

1^{er} cas : $r_{(O,\theta)} \circ S_{(D)} = S_{(\Delta)}$

Si $O \in (D)$, alors $S_{(D)} \circ r$ et $r \circ S_{(D)}$ sont deux symétries orthogonales. Nous voulons déterminer la droite (Δ), l'axe de la symétrie orthogonale, composée de la rotation $r_{(O,\theta)}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$. On sait que la rotation r est centre O et d'angle θ . Avec $O \in (D)$.

Posons $f = r \circ S_{(D)}$ et $g = S_{(D)} \circ r$. La démarche consiste souvent à décomposer la rotation r en utilisant la symétrie orthogonale $S_{(D)}$, d'axe la droite (D). Considérons les droites (D_1) et (D_2) telle que : (D_1) = $r_{(O, \frac{-1}{2}\theta)}$ (D) et (D_2) = $r_{(O, \frac{1}{2}\theta)}$ (D).

Ainsi on a : $r = S_{(D)} \circ S_{(D_1)} = S_{(D_2)} \circ S_{(D)}$. Et on obtient :

$f = S_{(D_2)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} = S_{(D_2)}$ et $g = S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ S_{(D_1)} = S_{(D_1)}$. Dans ce cas la droite (Δ) sera, selon la composée, l'une des droites (D_1) ou (D_2).

2^{eme} cas : $r_{(O,\theta)} \circ S_{(D)} = g$

Si $O \notin (D)$, alors $S_{(D)} \circ r$ et $r \circ S_{(D)}$ sont deux symétries glissées. Nous voulons déterminer la symétrie glissée, composée de la rotation $r_{(O,\theta)}$ et de la symétrie orthogonale $S_{(D)}$. On sait que la rotation r est centre O et d'angle θ . Avec $O \in (D)$. Posons $f = r \circ S_{(D)}$ et $g = S_{(D)} \circ r$. On considère le point H le projeté orthogonale du point O sur la droite (D). Soit la droite (D') la droite passant par O et parallèle à la droite (D). Prenons les droites (D_1) et (D_2) telles que : (D_1) = $r_{(O, \frac{-1}{2}\theta)}$ (D) et (D_2) = $r_{(O, \frac{1}{2}\theta)}$ (D). On obtient : $r = S_{(D')} \circ S_{(D_1)} = S_{(D_2)} \circ S_{(D')}$. Ainsi on aura bien $f = r \circ S_{(D)} = S_{(D_2)} \circ S_{(D')} \circ S_{(D)} = S_{(D_2)} \circ t_{2\overline{HO}}$. f est une symétrie glissée car le vecteur \overline{HO} n'est pas normal à la droite (D_2).

De même $g = S_{(D)} \circ r = S_{(D)} \circ S_{(D')} \circ S_{(D_1)} = t_{2\overline{OH}} \circ S_{(D_1)}$. g est une symétrie glissée car le vecteur \overline{OH} n'est pas normal à la droite (D_1).

Ainsi, f et g sont les deux symétries glissées. Selon la composée, on prendra g ou bien f .

Remarque :

En général $S_{(D)} \circ r \neq r \circ S_{(D)}$.

1.2.7. Composée de deux homothéties du plan

Nous distinguons deux cas :

1^{er} Cas : les deux homothéties sont de même centre

Soient $h_{(O,k)}$ et $h'_{(O,k')}$ deux homothéties de même centre O et de rapports respectifs k et k'. La composée des homothéties $h_{(O,k)}$ et $h'_{(O,k')}$ est une homothétie de centre O et de rapport kk' . On a : $h_{(O,k)} \circ h'_{(O,k')} = h_{(O,kk')}$.

En particulier :

- Si $kk' = 1$, alors $h_{(O,k)} \circ h'_{(O,k')}$ est l'application identité du plan. On a : $h_{(O,k)} \circ h'_{(O,k')} = Id_{(\mathcal{P})}$.
- Si $kk' = -1$, alors $h_{(O,k)} \circ h'_{(O,k')}$ est la symétrie centrale de centre O.

On a : $h_{(O,k)} \circ h'_{(O,k')} = S_O$.

Remarque :

Pour tout couple (k, k') de nombres réels, on a : $kk' = k'k$.

Donc $h_{(O,k)} \circ h'_{(O,k')} = h'_{(O,k')} \circ h_{(O,k)}$. On dit que pour tout point O, la composée des homothéties de centre O est commutative.

2^e Cas : les deux homothéties sont de centres distincts

Soient $h_{(O,k)}$ et $h'_{(O',k')}$ deux homothéties de centres distincts O et O'.

- Si $kk' \neq 1$, alors $h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')}$ est une homothétie de rapport kk' .

On a : $h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')} = h_{(\Omega, kk')}$.

- Si $kk' = 1$, alors $h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')}$ est une translation de vecteur \vec{u} .

On a : $h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')} = t_{\vec{u}}$.

Un problème lié à cette composée est la détermination du centre de l'homothétie ou du vecteur de translation, issu de la composition.

• Détermination du centre Ω et du vecteur \vec{u}

Remarquons tout d'abord que, la droite (OO') obtenue à partir des deux points O et O', centres des deux homothéties, reste globalement invariante par les homothéties $h_{(O,k)}$ et $h'_{(O',k')}$, elle est donc globalement invariante par la transformation $h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')}$. Ainsi :

- Si $h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')}$ est une homothétie de centre Ω , alors Ω appartient à la droite (OO').
- Si $h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')}$ est une translation de vecteur \vec{u} , alors \vec{u} est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

Cependant, cette remarque n'est pas suffisante pour déterminer le centre Ω de l'homothétie $h_{(\Omega, kk')} = h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')}$ ou le vecteur de la translation $t_{\vec{u}} = h_{(O,k)} \circ h'_{(O',k')}$.

Cas du centre Ω :

On a : $h'_{(O',k')} \circ h_{(O,k)} = h_{(\Omega, kk')}$ avec $kk' \neq 1$. Nous voulons déterminer le centre Ω de l'homothétie issue de la composition des homothéties $h_{(O,k)}$ et $h'_{(O',k')}$ de centres distincts. On prend un point quelconque M n'appartenant pas à la droite (OO') . Puis on construit deux points M_1 et M' telles que : $M_1 = h_{(O,k)}(M)$ et $M' = h'_{(O',k')}(M_1)$.

On obtient : $M' = h'_{(O',k')} \circ h_{(O,k)}(M)$. Et donc le centre Ω de cette homothétie appartient bien la droite (MM') . De plus Ω appartient à la droite (OO') . Donc Ω est le point d'intersection des droites (OO') et (MM') . On a donc : $\Omega = (OO') \cap (MM')$.

Cas du vecteur \vec{u} :

On a : $t_{\vec{u}} = h'_{(O',k')} \circ h_{(O,k)}$ avec $kk' = 1$. Nous voulons déterminer le vecteur \vec{u} de la translation issue de la composition des homothéties $h_{(O,k)}$ et $h'_{(O',k')}$ de centres distincts. On prend un point quelconque M n'appartenant pas à la droite (OO') . Puis on construit deux points M_1 et M' telles que : $M_1 = h_{(O,k)}(M)$ et $M' = h'_{(O',k')}(M_1)$. On obtient : $M' = h'_{(O',k')} \circ h_{(O,k)}(M)$. Et donc le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$. Ainsi, on a : $t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{MM'}}$.

Remarque :

La composée de deux homothéties de centres distincts n'est généralement pas commutative.

- **Composée d'une homothétie et d'une isométrie**

Pour cette composée nous partons de deux cas particuliers : la composée d'une homothétie et d'une translation, puis la composée d'une homothétie et d'une rotation, ce qui nous permettra de faire une généralisation. Nous dégagerons donc, la nature de cette composée, ainsi que ses éléments caractéristiques.

- **Composée d'une homothétie et d'une translation**

Soit $h_{(O,k)}$ une homothétie de centre o et de rapport $k \neq 1$, $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur \vec{u} .

La composée de $h_{(O,k)}$ et de $t_{\vec{u}}$ est une homothétie de centre Ω et de rapport k .

On a : $h_{(O,k)} \circ t_{\vec{u}} = h_{(\Omega,k)}$.

Un problème lié à cette composée est la détermination du centre Ω issue de la composition de ces deux transformations. Nous essayons de déterminer cet élément dans le paragraphe suivant.

Remarquons, avant de commencer que la droite (D) qui passe par le point O , centre de l'homothétie $h_{(O,k)}$ et dirigée par le vecteur \vec{u} de la translation $t_{\vec{u}}$, est globalement invariante par les transformations $h_{(O,k)}$ et $t_{\vec{u}}$. Donc, les centres des homothéties $h_{(O,k)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ h_{(O,k)}$ appartiennent à la droite (D) .

Cependant, cette remarque n'est pas suffisante pour déterminer les centres des homothéties $h_{(O,k)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ h_{(O,k)}$.

Détermination du centre Ω

On a : $h_{(\Omega,k)} = t_{\vec{u}} \circ h_{(O,k)}$ avec $k \neq 1$.

Nous voulons déterminer le point, Ω centre de l'homothétie issue de la composition de l'homothétie $h_{(O,k)}$ et de la translation $t_{\vec{u}}$.

On considère la droite (D) passe par le centre O de l'homothétie $h_{(O,k)}$ et dirigée par le vecteur \vec{u} de la translation $t_{\vec{u}}$. On prend un point quelconque M n'appartenant pas à la droite (D) . Puis on construit deux points M_1 et M' telles que : $M_1 = h_{(O,k)}(M)$ et $M' = t_{\vec{u}}(M_1)$.

On obtient : $M' = t_{\vec{u}} \circ h_{(O,k)}(M)$.

Donc, le centre Ω de cette homothétie appartient à la droite (MM') .

Par ailleurs, Ω appartient à la droite (D) . Donc Ω est le point d'intersection des droites (D) et (MM') . Ainsi, On a : $\Omega = (OO') \cap (MM')$.

La construction du centre de l'homothétie $h_{(O,k)} \circ t_{\vec{u}}$ est analogue à la construction précédente.

Nous venons d'établir dans ce paragraphe que la composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie. Nous allons étudier, à partir d'un deuxième cas, la composée d'une homothétie et d'une autre isométrie connue. Nous prenons le cas particulier d'une rotation.

1.2.8. Composée d'une homothétie et d'une rotation

Soit $h_{(O,k)}$ une homothétie de centre O et de rapport $k \neq 1$, $r_{(O,\theta)}$ la rotation de centre O et d'angle θ . Soient M , M_1 et M' trois points distincts du plan tel que : $r_{(O,\theta)}(M) = M_1$ et $h_{(O,k)}(M_1) = M'$. On a : $r_{(O,\theta)}(M) = M_1 \Leftrightarrow OM_1 = OM$ et $\text{Mes}(\widehat{OM, OM_1}) = \theta$.

Et $h_{(O,k)}(M_1) = M' \Leftrightarrow OM' = |k| \times OM_1 = |k| \times OM$. De plus $\text{Mes}(\widehat{OM, OM_1}) = \text{Mes}(\widehat{OM, OM'}) = \theta$. Le point M' est l'image du point M par la composée $h_{(O,k)} \circ r_{(O,\theta)}$. Et donc $h_{(O,k)} \circ r_{(O,\theta)}(M) = M' \Leftrightarrow OM' = |k| \times OM$ et $\text{Mes}(\widehat{OM, OM'}) = \theta$. Cette nouvelle transformation (composée $h_{(O,k)} \circ r_{(O,\theta)}$) est appelée, une similitude directe. Ainsi, la composée d'une homothétie $h_{(O,k)}$ et d'une rotation $r_{(O,\theta)}$ est une similitude directe i de centre O , d'angle θ et de rapport k . On a : $h_{(O,k)} \circ r_{(O,\theta)} = i(O, \theta, k)$. Nous généralisons ce résultat dans le paragraphe suivant.

- **Une généralisation sur la composée d'une homothétie et d'une isométrie**

Définition :

Soit $h_{(O,k)}$ une homothétie de centre O et de rapport k , et i une isométrie. La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude. On a : $h_{(O,k)} \circ i$ et $i \circ h_{(O,k)}$ sont des similitudes. Une similitude i est caractérisée par : son centre, son rapport et son angle. C'est trois éléments sont appelés les éléments caractéristiques de la similitude. L'isométrie pouvant être positive (un déplacement) ou négative (un antidéplacement), on aura :

- Si l'isométrie est un déplacement, alors, $h_{(O,k)} \circ i$ et $i \circ h_{(O,k)}$ sont des similitudes directes.
- Si l'isométrie est un antidéplacement, alors, $h_{(O,k)} \circ i$ et $i \circ h_{(O,k)}$ sont des similitudes indirectes.

Cas particuliers :

L'application identité du plan ($Id_{(\mathcal{P})}$) est à la fois une homothétie et une isométrie. On déduit que :

- Les déplacements et les homothéties sont des similitudes directes.
- Les antidéplacements sont des similitudes indirectes.
- **Quelques propriétés des similitudes :**
 - Les similitudes $h_{(O,k)} \circ i$ et $i \circ h_{(O,k)}$ multiplient les distances par un nombre $|k|$. Ce réel $|k|$ est appelé rapport des similitudes $h_{(O,k)} \circ i$ et $i \circ h_{(O,k)}$.
 - Les similitudes directes conservent les angles orientés.
 - Les similitudes indirectes transforment tout angle orienté en son opposé.

Remarque :

Les similitudes étant des composées d'homothéties et d'isométries, elles vérifient les propriétés communes à ces deux transformations à savoir : Les similitudes conservent :

- L'alignement, le milieu et le contact,
- Le parallélisme et l'orthogonalité.

Nous venons de présenter certains fondamentaux liés aux transformations du plan à partir des points du plan. Or, dans la pratique, on peut munir le plan (\mathcal{P}) d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , et repérer tout point M donné dans ce plan, par ses coordonnées (x, y) (Descartes, 1933) ou son affixe $z = x + iy$ (Bombelli, 1572). Ce qui signifie qu'on peut définir une transformation du plan à partir d'une expression analytique ou d'une expression complexe. Les notions d'expression analytique et d'expression complexe, sont également capitales en géométrie des transformations. Nous rappelons la définition d'une expression analytique et d'une expression complexe, et puis nous essayons de donner rapidement les expressions analytiques et les écritures complexes, de certaines transformations élémentaires du plan.

1.3. La notion d'expression analytique d'une transformation du plan

1.3.1. Définition

On muni le plan (\mathcal{P}) d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On peut donc écrire, tout point quelconque de ce plan en fonction de ses coordonnées (x, y) (Descartes, 1933). Ainsi, une expression analytique d'une transformation géométrique est un système d'équation donnant, en fonction des coordonnées x et y d'un point M du plan, les coordonnées x' et y' de son image M' par cette transformation. Ainsi, si on muni le plan (\mathcal{P}) d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Et on désigne par, $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une transformation quelconque du plan. $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . M (x, y) et M' (x', y') deux points du plan tel que : $f(M) = M'$.

$$\text{On a : } M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases} \text{ est l'expression analytique de } f.$$

Nous donnons dans la suite, quelques expressions analytiques des transformations élémentaires du plan.

1.3.2. Expressions analytiques de quelques transformations usuelles du plan

Le tableau ci-dessous résume les expressions analytiques de quelques transformations élémentaires du plan.

Transformation du plan dans lui-même	Caractérisation Vectorielle	Expression analytique
Translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$	$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \vec{u}$	$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$
Homothétie h de centre $O(a, b)$ et de rapport k	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overline{OM'} = k \overline{OM}$	$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b \end{cases}$
Symétrie centrale S_O de centre $O(a, b)$	$S_O(M) = M' \Leftrightarrow \overline{OM'} = -\overline{OM}$	$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$
Symétrie orthogonale $S_{(D)}$ d'axe $(D) : ax + by + c = 0$ de vecteur normale $\vec{u}(a, b)$	$S_{(D)}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \lambda \vec{u}$ $I = \text{mil } [MM'] \in (D)$	$\begin{cases} x' = x + \frac{-2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \\ y' = y + \frac{-2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \end{cases}$
Identité du plan $(Id_{(P)})$	$Id_{(P)}(M) = M' \Leftrightarrow M' = M$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
Rotation r de centre $O(a, b)$ et d'angle de mesure θ .	$r(M) = M' \Leftrightarrow (OM' = OM$ et $\text{Mes } (\overline{OM}, \overline{OM'}) = \theta)$	$\begin{cases} x' = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta + a \\ y' = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta + b \end{cases}$

1.4. La notion d'expression complexe d'une transformation du plan

1.4.1. Définition

On muni le plan (\mathcal{P}) d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . De la même façon qu'on identifie une droite munie d'un repère (O, \vec{u}) à l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , on peut identifier le plan muni du repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) à l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} (Bombelli, 1572). Donc, pour tout point M de coordonnées (x, y) est associé de manière unique au nombre complexe $z = x + iy$. Et réciproquement. Ainsi, toutes les applications f du plan dans lui-même, sont d'un point de vue complexe des fonctions de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , auxquelles on peut éventuellement donner une expression complexe. C'est cela qu'on appelle expression complexe d'une transformation du plan. Et donc, une expression complexe d'une transformation du plan est la donnée de la relation entre l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image M' . Cela signifie que, l'expression complexe d'une transformation du plan est celle d'une application affine sur le corps des nombres complexes. Ainsi, si nous prenons (\mathcal{P}) un plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , M et M' deux points d'affixes respectifs z et z' . Et $f: M(z) \mapsto M'(z')$ une transformation quelconque du plan. On a : $M' = f(M) \Leftrightarrow z' = az + b$ avec $a \neq 0$, est l'expression ou écriture complexe de f . Ainsi :

- Pour $a = 1$, f est la translation de vecteur \vec{u} d'affixe b .
- Pour $a \neq 1$, f a un unique point invariant Ω ($\frac{b}{1-a}$) et a peut-être un réel quelconque ou égal à -1 , a peut également être un nombre complexe $e^{i\theta}$.
- Lorsque a est un réel quelconque, f est l'homothétie de centre Ω et de rapport a .
- Lorsque $a = -1$, f est la symétrie centrale de centre Ω .
- Lorsque $a = e^{i\theta}$, f est une rotation de centre Ω et d'angle θ .

Nous donnons dans la suite, les expressions complexes de ces différentes transformations.

1.4.2. Ecriture complexe de quelques transformations usuelles du plan

Nous résumons dans le tableau ci-dessous, les écritures complexes de quelques transformations élémentaires du plan.

Transformation du plan dans lui-même	Caractérisation Vectorielle	Ecriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(b)$	$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
Homothétie h de centre O (z_0) et de rapport k	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$	$z' - z_0 = k(z - z_0)$
Symétrie centrale S_0 de centre O (z_0)	$S_0(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$	$z' - z_0 = -(z - z_0)$
Rotation r de centre O (z_0) et d'angle de mesure θ	$r(M) = M' \Leftrightarrow (OM' = OM$ et $\text{Mes}(\widehat{OM, OM'}) = \theta)$	$z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$

Symétrie orthogonale par rapport à l'axe (OI)	$S_{(OI)}(M) = M' \Leftrightarrow (OI)$ est la médiatrice du segment $[MM']$.	$z' = \bar{z}$
Symétrie orthogonale par rapport à l'axe (OJ)	$S_{(OJ)}(M) = M' \Leftrightarrow (OJ)$ est la médiatrice du segment $[MM']$.	$z' = -\bar{z}$

Les transformations du plan peuvent être identifiées, différenciées et classées en fonction du nombre de points qu'elles laissent invariants et selon qu'elles soient des déplacements ou des antidéplacements. Comme transformations usuelles du plan, nous avons identifié, les translations, les rotations, les symétries centrales et orthogonales, et les symétries glissées. Nous proposons une classification de ces transformations du plan.

1.5. Classification des transformations du plan

1.5.1. Ensemble de points invariants

Propriétés :

- Une transformation isométrique qui laisse invariant trois points non alignés est l'application identité du plan ($Id_{(\mathcal{P})}$).
- Une transformation isométrique du plan qui laisse invariant deux points distincts A et B et qui n'est pas l'application identité du plan, est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
- Une transformation isométrique du plan qui laisse invariant un seul point A est une rotation de centre A.
- Une transformation isométrique du plan qui ne laisse aucun point invariant est soit une translation, soit une symétrie glissée.

1.5.2. Déplacement et antidéplacement

• Définitions et propriétés

Définition :

Soit f une transformation isométrique quelconque.

A, B, C, D et A', B', C', D' sont des points du plan tels que : $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$.

- Un déplacement est une transformation isométrique qui conserve les angles orientés. On a : f est un déplacement si $\text{Mes}(\widehat{A'B', C'D'}) = \text{Mes}(\widehat{AB, CD})$.
- Un antidéplacement est une transformation isométrique qui transforme tout angle orienté en son opposé. On a : f est un déplacement si $\text{Mes}(\widehat{A'B', C'D'}) = -\text{Mes}(\widehat{AB, CD})$.

Propriétés :

- Toute transformation isométrique est un déplacement ou un antidéplacement.
- Tout déplacement est une translation ou une rotation.
- Tout antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée.
- La transformation réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La transformation réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Remarque :

L'application identité du plan est un déplacement : c'est donc la translation de vecteur nul ou une rotation d'angle nul.

- **Composition de déplacements et d'antidéplacements**

Propriétés :

- La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Nous récapitulons l'identification et la classification des transformations isométriques dans le tableau ci-dessous.

Ensemble des points invariants	Le plan (\mathcal{P})	La droite (D)	Le singleton $\{\Omega\}$	\emptyset
Déplacement	$Id_{\mathcal{P}}$		Rotation de centre Ω et D'angle non nul θ	Translation de Vecteur non nul.
Antidéplacement		Symétrie orthogonale D'axe (D) : $S_{(D)}$		Symétrie glissée

Nous avons classifié les transformations isométriques, suivantes qu'elles sont des déplacements ou des antidéplacements. Nous allons essayer de voir comment elles peuvent être déterminées suivant ces critères.

1.6. Détermination d'une transformation isométrique du plan

1.6.1. Détermination d'un déplacement

Propriété :

Le plan \mathcal{P} est orienté. A, B, A' et B' étant quatre points du plan tels que : $AB = A'B'$ et $A \neq B$, il existe un unique déplacement f transformant A en A' et B en B'.

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

- Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, alors f est la rotation d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$.

1.6.2. Détermination d'un antidéplacement

Propriété :

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $AB=A'B'$ et $A \neq B$. Il existe un unique antidéplacement g transformant A en A' et B en B'.

- Si les segments $[AA']$ et $[BB']$ ont la même médiatrice, la droite (D), alors g est la symétrie orthogonale d'axe (D).
- Si les segments $[AA']$ et $[BB']$ ont des médiatrices différentes, alors g est une symétrie glissée.

Ce premier paragraphe nous permet de disposer des éléments théoriques liés aux transformations du plan pour mettre en évidence le contenu mathématique nécessaire pour notre recherche. Dans le paragraphe qui suit, nous allons regarder comment vie et évolue la notion de transformation du plan, dans l'enseignement des mathématiques au Cameroun.

Annexe 2

Enseignant PA	<p>Si vous êtes calmes ! On peut commencer. Dites-moi ! sur quelle leçon porte le problème ?</p> <p style="text-align: center;">UN LONG SILENCE DANS LA SALLE</p>	RESTITUTION DU TRAVAIL INDIVIDUEL
---------------	--	--

Enseignant PA	Qu'est-ce qu'il faut faire dans cet exercice ? OUI !!!! Charles !!!	
Elève E1	Construire un triangle (ABC) isocèle.	
Elève E2	Isocèle comment ? Toi aussi !!!!!	
Enseignant PA	Lis au tableau !!!!! Vas-y! Gérard	
Elève E2	Non, Monsieur !! on a dit équilatéral avec les sommets sur les droites parallèles.	
Enseignant PA	Et A appartenant ??????????????????	
Elève E2	À la droite (L_1).	
Elève E1	Aaah ! Pardon ! équilatéral. Les sommets sont sur (L_1), (L_2) et (L_3).	

Enseignant PA	<p>Maintenant qu'on sait qu'il faut construire un triangle (ABC) équilatéral ayant ses sommets sur trois droites parallèles. Comment avez-vous procédé ?</p> <p style="text-align: center;">UN CALME ABSOLU. PUIS TROIS ELEVES LEVENT LE DOIGT</p>	
Elève E3	Monsieur, je peux aller au tableau ?	
Enseignant PA	OUI !!!!! va nous montrer ce que tu as fait.	

Enseignant PA	Le problème que vous voulez résoudre porte sur quelle partie du cours ?	
Elève E3	Sur les translations, homothéties, symétries, rotations... Tous les trucs comme ça !	
Enseignant PA	D'accord !!!!! Allons-y !!	

Enseignant PA	<p>Qu'est-ce qui prouve que le triangle là est équilatéral ? Est-ce que tu peux me dire comment tu as fait pour le construire ?</p> <p style="text-align: center;">IL Y A EU UN TRES GRAND BRUIT DANS LA SALLE. ON POUVAIT ENTENDRE : MONSIEUR J'AI AUSSI FAIT COMME LUI !!! IL N'A PAS UTILISÉ LE RAPPORTEUR POUR CONSTRUIRE L'ANGLE !!!!</p>	
Enseignant PA	Silence !!!! suivons votre camarade....	
Elève E3	J'ai juste essayé de tracer !	
Enseignant PA	En utilisant quelles propriétés ?	
Elève E3	Je veux construire le triangle ! Monsieur.....	
Enseignant PA	OUI, et c'est ta solution ?	

Elève E3	OUI, Monsieur !
Enseignant PA	Et la justification est où ? Où est-ce que tu as utilisé une transformation du plan ?
Elève E4	Monsieur, on doit justifier la construction là ? Alors qu'on a tracé avec la règle !!!
Elève E3	Monsieur, moi je ne vois pas comment on va utiliser ça ici.
Enseignant PA	C'est toute ta solution qui est au tableau là ?
Elève E3	OUI, Monsieur !!!!
Enseignant PA	Qu'est-ce qui prouve que ta construction est exacte ?
Elève E3	J'ai tracé avec la règle.
Enseignant PA	As-tu donné le programme qui te permet de tracer ? Puisqu'on avait dit dans le cours que la construction doit être le programme et la figure. Et qu'on doit démontrer comment on a fait pour avoir les deux constructions.
Elève E5	Monsieur, il n'a pas fait son exercice à la maison.
Enseignant PA	Silence !!!!!!! je vais te virer, si tu continues à troubler. Qui croit avoir fait mieux ? UN SILENCE ABSOLU DANS LA SALLE

Enseignant PA	Il faudrait que vous preniez la peine de lire vos leçons avant de chercher vos exercices. Je crois avoir corrigé un exercice similaire dans le cours, avec vous !!! Quelle est la méthode à utiliser pour résoudre un problème de construction ? OUI !!! Claude !
Elève E5	Monsieur ! On doit commencer par expliquer et puis on construit.
Enseignant PA	Allons-y !!! je vais noter au tableau.
Elève E5	Monsieur !! il faut l'analyse et puis le résumé en utilisant une isométrie.
Enseignant PA	Il faut faire ??????????
Elève E5	L'analyse.
Enseignant PA	Et ??????????
Elève E5	Le résumé, Monsieur !!!!
Enseignant PA	Nous avons appelé ce résumé la syn.....
Elève E4	La synthèse.
Enseignant PA	Très bien ! Et la synthèse. Donc, on procède par analyse et synthèse.

Pour résoudre ce problème nous allons procéder en deux étapes

- 1- L'analyse
- 2- La synthèse

	Etape n°1 : Analyse :
Enseignant PA	Quand est-ce que ce triangle (ABC) est équilatéral ?
Elève E3	Si $AB = AC = BC$.
Enseignant PA	Ou encore ?
Elève E6	Tous ses angles mesurent 60°
Enseignant PA	Mais en plus de tout ce que vous avez dit, il faut que les points A, B et C, soient respectivement sur les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) .
	Comment faire ici ? OUI !!!!!!!!!!!!! Paul !!!!!!!!!!!!!!!
Elève E2	Il faut que $AB = AC$ et l'angle en \hat{A} soit 60° .
Enseignant PA	OUI, mais donne la mesure de cet angle là en radian.
Elève E2	C'est $\frac{\pi}{3}$ Radian. Monsieur !!!!!
Enseignant PA	Ces deux relations : $AB = AC$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$, traduisent quelle isométrie ?
Elève E3	Monsieur, une symétrie !!! Pardon !!!! C'est la rotation. Je pense !!!
Enseignant PA	Laquelle ?
Elève E3	La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Enseignant PA	Quelle sera la condition pour que le triangle (ABC) soit équilatéral avec ses sommets sur les droites (L_1) , (L_2) et (L_3) ?
Elève E3	Monsieur !! Que B soit l'image de C par la rotation.
Enseignant PA	Il faut préciser !!! Par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Très bien !!

Enseignant PA	Je veux construire la droite (L'_2) image de (L_2) par notre rotation. Comment on fait ? Donnez-moi la méthode.
	UN SILENCE !!!!!!!!! PUIS UN ELEVE LEVE LE DOIGT.
Enseignant PA	OUI !!!!!
Elève E5	Monsieur, une droite passe par deux points.
Enseignant PA	OUI, mais moi je veux construire la droite.
Elève E5	On construit les images de deux points, Monsieur !!!!!
Enseignant PA	Ok ! Que signifie donc que M' est image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$?
Elève E6	$AM = AM'$ et $\text{Mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. (Argument de la théorie de la géométrie des transformations)
Enseignant PA	Très bien !!!!! j'écris la même relation avec N et N'. Et (M'N') sera la droite (L'_2). D'accord !!!!!!!!!
	LE PROF A LUI-MEME TRACÉ (L'_2) SUR LA FIGURE.
Enseignant PA	Si je prends C l'intersection de (L'_2) et (L_3). Comment construire le point B ?
Elève E5	Monsieur ! On a dit que B est l'image de C par la rotation.
Enseignant PA	Et quelle est la condition pour que le triangle (ABC) soit équilatéral ?
Elève E5	Comme on a déjà C ! Monsieur, je veux venir construire !!!!!
Enseignant PA	Dis-moi d'abord.
Elève E5	Comme on a déjà AC non !! je trace $AB = AC$ et B soit placé sur (L_2).
Enseignant PA	Restons sur notre rotation. B est l'antécédent de C qui sera effectivement sur (L_2) car C, est sur la droite image (L'_2).

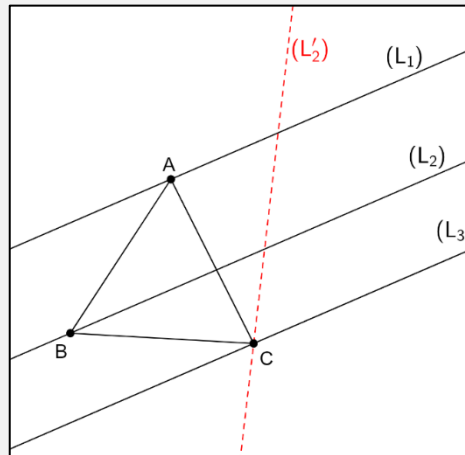
Enseignant PA	Comment s'assurer que le triangle (ABC) est équilatéral ? SILENCE ABSOLU !!!!!!!!!
---------------	--

Enseignant PA	On a obtenu ce résultat : $AC = AB$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Qui signifie que le triangle (ABC) est isocèle avec un angle de mesures $\frac{\pi}{3}$. Un tel triangle est équilatéral. (L'argumentaire prend la forme démonstrative) Donc, le triangle (ABC) que nous venons de construire est bien équilatéral.
---------------	---

Elève E4	Monsieur, je ne comprends pas, ici, s'il vous plaît !!!!!
Enseignant PA	Je reprends l'explication !!!!! Un triangle isocèle dont l'angle principal est $\frac{\pi}{3}$, est équilatéral. On est d'accord avec cette propriété sur les triangles ?
Elève E4	OUI, Monsieur !!!!!
Enseignant PA	On a : $AC = AB$ et $\text{mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$, donc le triangle (ABC) est bien équilatéral.
Elève E4	Ah !!!!! D'accord Monsieur.

ETAPE N°1 : ANALYSE

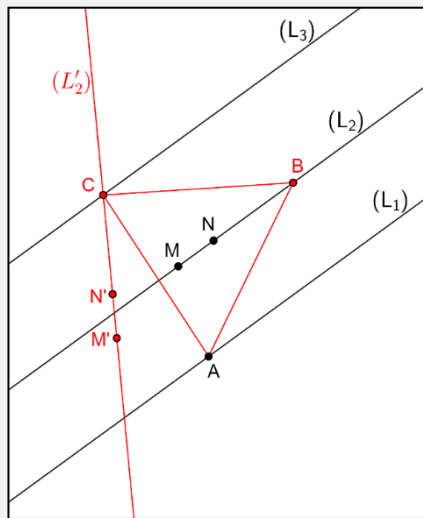
Supposons qu'on a cette figure où ABC est équilatéral



Si le triangle ABC est équilatéral de sens direct, $AB = AC = BC$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Ce qui se réduit à $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Prenons la rotation $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$. Soit $M' = r(M)$ et $N' = r(N)$, alors $(M'N')$ est l'image de (L_2) lorsqu'on prend M et N sur (L_2) . $(L'_2) = (M'N')$, rencontre forcément (L_3) . C'est donc $(L'_2) \cap (L_3)$ sommet du triangle. Pour que ABC soit équilatéral il suffit que $C = r(B)$. C'est-à-dire que B soit l'antécédent de C. On va donc construire B tel qu'il soit l'antécédent de C par r . On obtient $B \in (L_2)$ puisque (L'_2) est l'image de (L_2) . Et le triangle ABC est équilatéral car $AB = AC$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.

Enseignant PA	<p>Etape n°2 : La synthèse</p> <p>Pour construire le triangle équilatéral (ABC) de sens direct on procède de la manière suivante :</p> <ul style="list-style-type: none">- On prend A quelque part sur (L_1).- On construit (L'_2) image de (L_2) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Le point C est l'intersection des droites (L'_2) et (L_3).- On construit B pour qu'il soit l'antécédent de C par la même rotation.
---------------	--

ILLUSTRATION DU PROGRAMME



Enseignant PA	En devoir !!!!!
Elève E7	Toujours les devoirs !!! Monsieur !!!! Nous avons contrôle de français !!!!!
Enseignant PA	Oui, vous serez évalués sur cette partie la semaine prochaine. Vous allez refaire le même travail en utilisant la rotation d'angle $\frac{-\pi}{3}$. Et discuter sur le nombre de triangles solutions. Votre camarade a remarqué qu'on peut aussi utiliser la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

PROFESSEUR C

Enseignant PC	Une première personne pour lire la situation.	Appréhension de la situation (A)
Elève E1	Oui !!! Stéphane !! Vous autres, vous suivez attentivement. UN ELEVE FAIT LA PREMIERE LECTURE	
Enseignant PC	Je refais la lecture ! Vous suivez attentivement au tableau !!!! LE PROF FAIT LA DEUXIEME LECTURE ET PUIS RELANCE	
Enseignant PC	Avons-nous déjà traité un tel exercice en cours ou en TD ?	
Elève E2	Non, moi je n'ai même pas pu trouver !! c'est très difficile !!!!	
Elève E3	Monsieur !!!!! mais ça ressemble quand même à un exercice du cours	
Enseignant PC	Lequel ?	
Elève E1	L'exercice d'application, à la fin du cours, je viens de voir ça dans mon cahier !!!!!	
Enseignant PC	Ça porte sur quelle partie du cours ?	
Elève E4	Les isométries et les problèmes de construction. C'est dans le cahier !!! Monsieur !!!!!	
Enseignant PC	Ok ! Et qu'est-ce qu'il fallait faire dans cet exercice-là ?	
Elève E4	Construire un cercle !!!	
Elève E3	Monsieur !! Mais ici ! On veut plutôt le triangle équilatéral.	
Enseignant PC	D'accord !!! L'exercice porte sur quelle notion ?	
Elève E5	Les isométries et la construction du triangle équilatéral.	
Enseignant PC		

	<p>Notre exercice consiste à utiliser les isométries pour construire un triangle équilatéral.</p> <p>Je crois qu'on est d'accord avec ça !!!!</p> <p>LES ELEVES REPONDENT !! OUI !!!!!</p>	
--	---	--

<p>Enseignant PC</p> <p>Elève E4</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E4</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E4</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E5</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E6</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E6</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E8</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève 7</p> <p>Elève E8</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E7</p> <p>Elève E8</p> <p>Elève E7</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Enseignant PC</p>	<p>Ok !!!!! qu'est-ce qu'on sait ? Oui !!!</p> <p>Monsieur ! Que (L_1), (L_2) et (L_3) sont les droites.</p> <p>Et quoi d'autre ?</p> <p>Que les droites sont distinctes et parallèles.</p> <p>Répondez entièrement aux questions, les amis !!!!!</p> <p>Et que A est sur la droite (L_1).</p> <p>Qu'est-ce qu'on veut faire ?</p> <p>Construire un triangle équilatéral (ABC).</p> <p>D'accord ! Oui !! Vas- y ! Hervé !!!!</p> <p>Monsieur, A doit appartenir à (L_1), B à (L_2) et C à (L_3).</p> <p>(Contraintes)</p> <p>Donc, les sommets du triangle sont sur les droites parallèles !</p> <p>OUI, Monsieur !!!!!</p> <p>Merci ! Quelle est la question à traiter ici alors ?</p> <p>UN LONG SILENCE !!! LE PROF REFORMILE !!!</p> <p>Ou alors, en quoi consiste l'activité de construction dans cet exercice ?</p> <p>À donner la construction d'un triangle équilatéral (ABC).</p> <p>Comment doit être cette construction ?</p> <p>Ça doit être un programme de construction !</p> <p>Monsieur ! Et une figure !!!!!</p> <p>Ce qui signifie, qu'on doit donner le programme de construction du triangle !! Et tracer une.....</p> <p>La figure !!!!!</p> <p>Très fastoche !!!!!</p> <p>Arrête tes jeux !! Eeehhh ! Tu me perturbes !!!!!</p> <p>Moins de bruit !!!!!!! Je demande le silence.</p> <p>Comment on peut reformuler la question à résoudre ?</p> <p>UN SILENCE !!!!! LE PROF REFORMULE LUI-MÊME LA QUESTION</p> <p>Quel algorithme de construction permet d'obtenir un triangle équilatéral (ABC) vérifiant : $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$?</p>	<p>Analyse de la situation (A)</p> <p>Identification du Problème (P)</p>
---	---	--

<p>Enseignant PC</p> <p>Elève E10</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E11</p> <p>Enseignant PC</p> <p>Elève E12</p> <p>Enseignant PC</p>	<p>Que signifie (ABC) est un triangle équilatéral ?</p> <p>Monsieur, ça signifie que $AB = AC = BC$!!!!</p> <p>Oui ! une autre proposition ? Théo !!!!!</p> <p>Monsieur !! si $\text{Mes } \hat{A} = \text{Mes } \hat{B} = \text{Mes } \hat{C} = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}$.</p> <p>Oui !!! Autre proposition ??? Clément !!!!</p> <p>$AB = AC$ et $\text{Mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$.</p>	<p>Analyse de la situation (A)</p>
--	---	------------------------------------

Elève E9	Pourquoi (ABC) est équilatéral, avec ta définition ?	
	Pardon !!! Monsieur !!! j'allais dire que (ABC) est isocèle.	
Enseignant PC	Ta réponse n'est pas fausse ! Explique seulement !	
Elève E9	Oui, Monsieur ! j'ai oublié la propriété.	
Enseignant PC	Laquelle ???? Sur les triangles isocèles ayant un angle de 60° ???	
Elève E9	Voilà !! Un triangle isocèle qui a un angle $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral.	
Enseignant PC	Très bien !!!! Faisons une figure pour voir !!!!	
Enseignant PC	Mais, dans cette figure, abandonnons l'hypothèse « $A \in (L_1)$ » qui n'est pas pertinente, traçons (L_2) et (L_3) . Distinctes et parallèles. Prenons A quelconque dans le plan, ni sur (L_2) , ni sur (L_3) .	
	LE PROF REALISE UNE FIGURE REPRESENTANT LA SITUATION AU TABLEAU. RELANCE !!!!!	
Enseignant PC	On a dit que l'exercice porte sur l'utilisation des isométries pour construire un triangle équilatéral. Vous avez donné une définition d'un triangle équilatéral (ABC). Dites-moi, quelle isométrie est liée à la configuration, triangle équilatéral ?	
	UN SILENCE ABSOLU !!!! ET APRES DES DOIGTS !!!!!!!	
Elève E11	La symétrie orthogonale d'axe (L_2) !!!!	
Enseignant PC	C'est ce qu'on avait vu en cours ? Fidèle !	
Elève E12	Non ! Monsieur !! C'est une rotation.	
Enseignant PC	Oui, mais laquelle particulièrement ?	
Elève E12	Monsieur ! La rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou bien $-\frac{\pi}{3}$.	
Enseignant PC	Très bien !!!!! Ce qui suppose qu'on va utiliser l'une des deux rotations !!!	
Elève E12	Oui, Monsieur !!!!!!!	
Enseignant PC	Revenons sur la figure au tableau !! Le point A étant là, si je place B sur (L_2) , comment faire pour que C soit sur (L_3) ?	
Elève E13	Monsieur !!! B doit tourner de $-\frac{\pi}{3}$ autour de A.	
Enseignant PC	OK !!!!! Et si je place plutôt C sur (L_3) , comment j'obtiens B sur (L_2) ?	
Elève E13	C doit tourner de $\frac{\pi}{3}$ autour de A.	
Enseignant PC	Donc la rotation est de centre A.	
Elève E13	Oui ! Monsieur !!!!!	
Elève E1	Mince !!!! Je vois maintenant. Le centre est donné !!! en fait !!!	
Enseignant PC	En principe ! Mais, à quelle condition j'aurai le triangle que je cherche ?	
Elève E1	Monsieur !!! Si C, est l'image B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.	
Enseignant PC	Et quel sera le sens du triangle (ABC) ?	
Elève E13	(ABC) est de sens direct !	
Enseignant PC	Alors dire que C, est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Signifie quoi ? Oui ! Eliane !!! Tu n'as encore rien dit !!!	
Elève E14	Monsieur ! Que $AB = AC$ et $\text{Mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$.	
Enseignant PC		

	Très bien !!!!!!!	
--	-------------------	--

Enseignant PC	On va donc supposer que le triangle (ABC) est de sens direct et prendre la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Que nous appelons r .	Analyse de la situation (A)
Enseignant PC Elève 10	Ce qui veut dire que le problème c'est de construire les points B et C. Comme faire ici ? Oui !!!!! Léon ! Monsieur ! On sait que C doit être sur l'image de la droite (L_2).	
Enseignant PC Elève 10	Et, Comment tu le sais ? Monsieur, parce que C, est l'image B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.	Actes de construction (A)
Enseignant PC Elève E10	D'accord !!!!! Et comment on fait alors ? On construit l'image de (L_2) !!!! Monsieur. Qui sera une droite.	
Enseignant PC Elève E10	Ah !!!!! Et pourquoi une droite ? Monsieur ! l'image d'une droite par une rotation donne encore une droite !!!!!	
Enseignant PC Elève E10	Tu peux venir construire au tableau ? Oui ! Monsieur !!!!!!!	
Enseignant PC Elève E10	ATTENTION !!!!!!!!!!! Explique un peu ta construction !!!!!	
Enseignant PC Elève E10	Je vais construire les images des points de (L_2) par la rotation. Il y a une infinité de points, je pense !!!! Soit un peu plus précis !!!! Oui, Monsieur ! Je construis les images de deux points et je trace la droite qui passe par ces images. (Argument issu de la théorie de la géométrie des transformations)	
Enseignant PC	Très bien !!!!! vas-y alors !!!! L'ELEVE CONSTRUIT LES IMAGES ET TRACE LA DROITE.	
Enseignant PC	Appelons cette droite image !!!! (D). Et, prend C comme le point de rencontre de (L_2) et (D). Comment construire B ? UN LONG SILENCE DANS LA SALLE	
Elève E2	Monsieur, C, est l'image B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.	
Enseignant PC Elève 2	Oui ! C'est bien ce qu'on a dit !!! Sauf qu'on a plutôt C ! Monsieur, ça veut dire que B est sur la droite des antécédents. Qui est..... ? Oui !!!!! Dis-nous !!!	
Enseignant PC Elève 10	La droite (L_2). Oui !!! Mais !! je n'ai pas toujours la réponse à ma question !	
Enseignant PC	UN SILENCE PUIS UN AUTRE ELEVE Vas-y ! Raphael !!!!!!!	
Enseignant PC Elève E14	Monsieur ! si B est sur la droite des antécédents, B doit être l'antécédent de C par la rotation r . Très bien !!!!!!! Essayons de résumer tout cela !	
Enseignant PC	Mais avant !!!! Qu'est ce qui prouve que ce triangle est réellement équilatéral ?	

Elève E14	Monsieur, on a dit que tout triangle isocèle d'angle $\frac{\pi}{3}$ est équilatéral !!!	
Enseignant PC	Oui !!!!! Et ?	
Elève 14	Or, ici !! B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.	
Enseignant PC	D'accord !! Ce qui veut dire ??????????????	
Elève E14	Ce qui veut dire que $AB = AC$ et $\text{Mes } \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Le triangle (ABC) est équilatéral.	
Enseignant PC	Très bien !!!!!!! On peut donc reconsidérer l'hypothèse que nous avons abandonnée au départ. C'était quoi cette hypothèse ? Oui !!!!!	
Enseignant PC	« $A \in (L_1)$ » avec « $A \in (L_1)$ parallèle à (L_2) et à (L_3) » !!!!!	
Elève E12	D'accord !!!	
Enseignant PC	Trace donc la droite qui passe par A et qui est parallèle à (L_2) et (L_3) !! (Reconsidération de l'hypothèse abandonnée)	
Enseignant PC	Merci, tu peux aller t'asseoir !!!!! LE PROF TRACE LUI-MÊME LA DROITE	

Enseignant PC	<p style="text-align: center;">RESUME DES ANALYSES</p> <p>Soit (ABC) un triangle équilatéral, de sens direct, tel que : $A \in (L_1)$, $B \in (L_2)$ et $C \in (L_3)$. La configuration, triangle équilatéral, nous permet de considérer la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par laquelle le point B a pour image le point C.</p> <p>Le point C appartient à (L_3) et à l'image de (L_2) par r, le point B est l'antécédent de C par r.</p> <p>PROGRAMME DE CONSTRUCTION</p> <ul style="list-style-type: none"> - Choisir une position du point A sur la droite (L_1). - Construire la droite (D), image de (L_2) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, cette droite coupe la droite (L_3) en C. - Construire B, antécédent de C par r. <p>UNE CONSTRUCTION INSTRUMENTEE (Construction instrumentée)</p>	<p>Conception de la solution (C)</p> <p>Produit d'Actes de Construction (P)</p>

	DISCUSSION	
	(Discussion sur le nombre de solution)	
Enseignant PC	Quels sont les choix que nous avons eus pour construire le triangle (ABC) ?	
Elève E10	Monsieur !!!! Moi, je peux dire !!! le sens du triangle (ABC).	
Enseignant PC	Oui !!!!! C'est le seul ? Ralph dit quelque chose !!!!!	
Elève E16	La position de A sur la droite (L_1).	
Enseignant PC	Oui !!!! On peut aussi ajouter la position relative des droites (L_1), (L_2) et (L_3). Si nous avons fait ces choix, cela veut dire qu'il y a plusieurs triangles solutions. Lesquels d'après vous ?	
Elève E10	Monsieur !! Pour moi, il y a !!! les triangles de même sens et les triangles de sens contraires.	
Enseignant PC	Et comment obtenir tous ces triangles ?	
	UN SILENCE DANS LA SALLE !!!!!	
Enseignant PC	Voici comment on va faire. Suivez attentivement !	
Enseignant PC	Soit \vec{u} un vecteur directeur des droites (L_1), (L_2) et (L_3). Prenons (D) la perpendiculaire à ces trois droites. Connaissant un triangle (ABC) solution. Les translations de vecteur $k\vec{u}$ (k non nul) permettent de construire tous les triangles solutions de même sens et les symétries orthogonales d'axe (D) permettent de construire tous les triangles de sens contraires.	

Annexe 3

FEUILLE DE COMPOSITION B12

① On prend EFG rectangle isocèle en F et de sens direct, on choisit $FE = FG$ et $\text{mes}(\vec{FG}, \vec{FE}) = \frac{\pi}{2}$. Soit r la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors $E = r(G)$. On sait que $E \in (D_1)$ et $G \in (D_3)$. Soit $[(L)] = r[(D_1)]$ alors $G \in (L) \cap (D_3)$, on obtient G sur (D_3) . E est sur (D_1) mais est l'antécédent de G par r .

Programme de construction

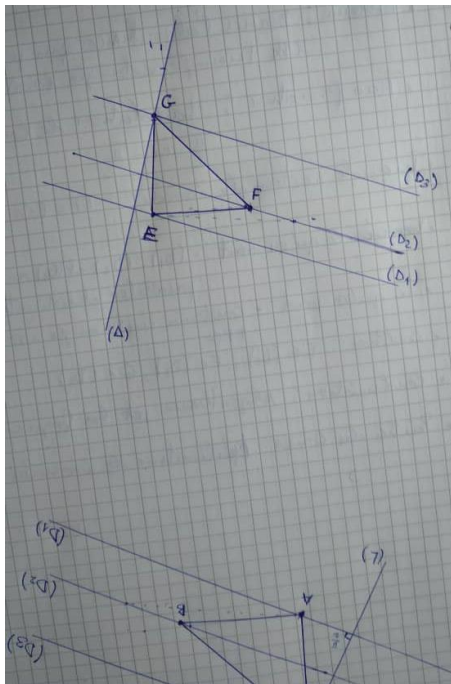
- choisir F sur la droite (D_2) .
- on construit (L) telle que $[(L)] = r[(D_1)]$, $G = (L) \cap (D_3)$.
- F est obtenu en construisant l'antécédent de G qui sera sur (D_1) .

Le triangle EFG est rectangle et isocèle car $E = r(G)$, $EF = FG$ et $(EF) \perp (FG)$.

La figure : (Voir le relevé)

Discussion

- on pourrait utiliser la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, le triangle serait de sens contraire.
- on pourrait choisir le sommet de l'angle droit un autre point et obtenir le triangle de même sens.
- on peut prendre les symétriques orthogonaux d'une droite perpendiculaire à (D_1) , (D_2) et (D_3) et construire l'image de EFG on obtient trois triangles de ~~même~~ sens contraire.
- les translations permettent d'obtenir le triangle de même sens.



BROUILLON B12 : E21/E13 PC

Partie du cours : utilisation des isométries

Ce qu'on sait : (D_1) , (D_2) et (D_3) sont des droites parallèles et distinctes.

Ce qu'on veut : Construire un triangle rectangle isocèle EFG

Conditions : $E \in (D_1)$, $F \in (D_2)$ et $G \in (D_3)$

le problème : donner l'algorithme de construction du triangle rectangle EFG

Construction du triangle : Algorithmique, la figure et la discussion.

Triangle rectangle isocèle de sens direct $EF = FG$ et $(EF) \perp (FG)$, $\text{mes}(\vec{FG}, \vec{FE}) = \frac{\pi}{2}$

$\text{mes} \hat{E} = \frac{\pi}{4}$ et $\text{mes} \hat{G} = \frac{\pi}{4}$

Transformation du plan : la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $r(F, \frac{\pi}{2})$

$G = r(E)$ on a $FE = FG$ et $\text{mes}(\vec{FE}, \vec{FG}) = \frac{\pi}{2}$

$E = r(G)$ on a $FE = FG$ et $\text{mes}(\vec{FG}, \vec{FE}) = \frac{\pi}{2}$

G est sur la droite l'image de la droite qui contient E