



THÈSE EN COTUTELLE PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ET DE L'UNIVERSITÉ DE TUNIS EL MANAR

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE,

SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LA MATIÈRE

Mathématiques appliquées et calcul scientifique

Par **Lotfi Thabouti**

Estimées de Carleman L^p globales

Sous la direction de Belhassen Dehman et Sylvain Ervedoza

Soutenue le mercredi 18 décembre 2024.

Membres du jury :

M. GMATI Nabil	Professeur des universités	Université de Tunis El Manar	Président
Mme. SAKJI BHOURI Imen	Professeure des universités	Université de Monastir	Examinatrice
M. DEHMAN Belhassen	Professeur des universités	Université de Tunis El Manar	Directeur
M. DOS SANTOS FERREIRA David	Professeur des universités	Université de Lorraine	Rapporteur
M. ERVEDOZA Sylvain	Directeur de recherche CNRS	Université de Bordeaux	Directeur
M. LAURENT Camille	Directeur de recherche CNRS	Université de Reims	Rapporteur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à mes chers directeurs de thèse, les Professeurs Belhassen Dehman et Sylvain Ervedoza. Nos discussions mathématiques ont toujours été riches et passionnantes, et j'ai énormément appris à leurs côtés. Je suis particulièrement reconnaissant envers Belhassen, avec qui j'ai entamé un véritable voyage dans le monde de l'analyse microlocale dès mon mémoire de master. Je remercie également Sylvain pour son soutien indéfectible, qu'il s'agisse de m'aider avec mes documents administratifs, de m'envoyer des invitations quand nécessaire, ou encore pour son accueil chaleureux dès mon arrivée à l'aéroport. Je ne l'oublierais jamais. Tous deux ont su m'écouter, m'aider et m'encourager, même lorsque mes idées étaient encore confuses ou parfois un peu farfelues. Merci mille fois, chers professeurs, pour votre patience, vos conseils avisés et votre aide précieuse. Je suis immensément fier d'avoir été votre élève et je n'oublierai jamais tout ce que vous avez fait pour moi.

J'ai eu le privilège d'avoir les Professeurs David Dos Santos Ferreira et Camille Laurent comme rapporteurs de ma thèse. Je vous remercie chaleureusement pour votre lecture attentive, ainsi que pour vos avis et commentaires, dont l'enthousiasme m'a profondément touché. Je tiens également à exprimer ma gratitude aux Professeurs Nabil Gmati et Imen Sakji Bhouri pour avoir accepté d'être membres du jury de ma thèse. C'est un immense honneur pour moi de défendre ce travail devant vous.

Je souhaite également profiter de cette occasion pour remercier tous les professeurs qui ont marqué ma scolarité et éveillé en moi une véritable passion pour les mathématiques. Un remerciement tout particulier à Mourad Bellasoeud, qui m'a transmis son intérêt pour les estimées de Carleman lors d'un cours de M2. J'ai eu la chance de suivre un master international, où j'ai bénéficié de cours exceptionnels. De l'Université d'Orsay, le cours d'analyse microlocale de Nicolas Burq et Claude Zuily, ainsi que celui de Patrick Gérard et Julien Sabin, furent particulièrement enrichissants. De l'Université Cadi Ayyad, j'ai beaucoup appris grâce aux cours donnés par Lahcen Maniar et Khalil Ezzinbi. Merci à vous tous. Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Nader Masmoudi et Tarek M. Elgindi pour les différentes présentations et cours qu'ils ont donnés à la Faculté des Sciences de Tunis, où j'ai énormément appris sur les fluides. J'en profite aussi pour remercier encore Sylvain et Jasmin Raissy pour leur geste lors de mon dernier déménagement, et tout particulièrement Sylvain pour son aide précieuse dans la gestion de mes logements. Merci également à Armand Koenig, qui a assisté aux répétitions avec Sylvain et m'a toujours offert des remarques constructives. Merci à Lauri Oksanen et Yavar Kian pour leur récente invitation à un workshop à Rouen, qui fut une expérience particulièrement enrichissante.

Je tiens également à remercier les membres permanents de l'Université de Tunis El Manar avec qui j'ai eu de nombreux échanges enrichissants, notamment Mourad Bellasoued, Lassaad Aloui, Moncef Mahjoub et Maher Moakher. Mes remerciements s'adressent également aux membres de l'IMB, entre autres : Vincent Bruneau, El Maati Ouhabaz, Kévin Le Balc'h (ancien membre de l'IMB), Mouez Dimassi et Jean-François Bonny.

Je tiens à remercier chaleureusement mes amis et collègues du LAMSIN, en particulier Anis, Hatem et Anoir, pour le partage de logement et tous les moments précieux que nous avons vécus ensemble. Un immense merci également à mes amis et collègues de l'IMB pour tous les moments partagés qui ont enrichi mon parcours, tant sur le plan professionnel que personnel. À Bilel, Issa, Chadi et Khaoula, merci pour les sorties, les échanges inspirants et tous ces instants inoubliables. À mes anciens camarades de l'IMB, Badreddine Benhellal, Jiacheng Zhang, Raul Kazan da Cunha Araujo et Pei Su, je suis profondément reconnaissant pour votre amitié et votre soutien indéfectible. À Jiacheng, Chadi, Adrien, Tom et Audrey, merci pour les moments de complicité et de bienveillance partagés au sein de notre bureau. Je tiens également à exprimer ma gratitude envers les membres des groupes de travail, Nacer Aarach, Magalie Bénéfice, Florent Noisette, Matthieu Pauron, Thomas Normand, Adrien Tendani-Soler et Pero Jaramillo, pour leur enthousiasme communicatif. Étudier et découvrir de nouvelles perspectives à vos côtés a été un véritable plaisir. À Saber (Sabroch), Bahaeddine (Behjoujma) et Najem Ddine, mes chers amis, cela fait longtemps que nous ne nous sommes pas rencontrés. À vous tous, un immense merci d'avoir transformé ce parcours en une expérience si riche et inoubliable.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du personnel administratif du LAMSIN, en particulier à Raoudha et Abd Elwahed, pour leur soutien constant et leur disponibilité. Mes remerciements vont également à l'équipe administrative de l'IMB, et tout particulièrement à Karine, Catherine, Nadia et Ida, pour leur efficacité remarquable et leur aide précieuse. Un immense merci à l'équipe de la cellule info, notamment à Thomas, pour leur réactivité exemplaire face aux diverses problématiques rencontrées par les doctorants, ainsi qu'à Sylvain, dont l'assistance a été précieuse lors de la création de ma page web. Je suis également très reconnaissant envers Cyril Mauvillain, qui m'a aidé à plusieurs reprises à obtenir des articles et des ouvrages difficiles à trouver. Je lui suis particulièrement redevable pour avoir retrouvé les cinq pages de l'article original de Carleman de 1939, grâce à sa persévérance et à ses démarches minutieuses auprès de différentes bibliothèques.

Je ne pourrais conclure sans exprimer ma profonde gratitude envers ma famille, à qui je dois tout. À mes parents, Najia (Najnouja) et Mohamed Elarbi (Arbouch), un immense merci pour le soutien moral et la motivation que vous m'avez apportés tout au long de mon parcours académique. Votre appui infaillible m'a permis de surmonter les défis de ces longues années d'études. À mes frères et à ma sœur, merci d'avoir toujours été mes piliers, sur qui je pouvais compter à chaque étape. À ma femme, my Paulinka, merci d'avoir bouleversé ma vie d'une manière si extraordinaire. Tu remplis chaque jour de ma vie de joie et de bonheur. Merci pour ta patience (les 10 mois!) et ta capacité à me faire sourire même dans les périodes les plus éprouvantes. Je vous aime infiniment! Enfin, je remercie Dieu (Al Rahman, Al Rahim) d'avoir rendu tout cela possible. Et ma réussite ne dépend que de Lui.

Résumé

Dans cette thèse, on étudie des inégalités de Carleman L^p pour des problèmes elliptiques et leurs applications à la quantification du prolongement unique par rapport aux perturbations du laplacien.

On s'intéresse d'abord aux inégalités de Carleman L^p sur une bande de \mathbb{R}^d ($d \geq 3$), notée $\mathcal{S} := (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$, pour le Laplacien. Grâce à la transformée de Fourier et une factorisation de l'opérateur conjugué, nous réduisons la démonstration de ces inégalités à la construction d'une paramétrice pour le problème du Laplacien avec des conditions au bord. En utilisant cette paramétrice, on redémontre d'abord des inégalités classiques de Carleman L^2 pour le Laplacien. Ensuite, en appliquant des techniques d'analyse harmonique, notamment le théorème de restriction de Fourier pour établir des résultats de continuité de type $L^p - L^q$, on obtient des estimations $L^p - L^q$ sur cette paramétrice.

On applique ensuite ces méthodes au cas qui nous intéresse, à savoir les inégalités de Carleman L^p pour le Laplacien défini sur Ω , un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^d ($d \geq 3$), avec un second membre $f_2 + f_{2*'} + \operatorname{div} F$, $f_2 \in L^2(\Omega)$, $f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$, $F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et une condition de Dirichlet $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. On montre deux estimations de Carleman globales : une sur la norme H^1 de la solution et une sur sa norme $L^{\frac{2d}{d-2}}$, en termes de normes L^2 à poids de f_2 et F , de la norme $L^{\frac{2d}{d+2}}$ de $f_{2*'}$ et de la norme $H^{\frac{1}{2}}$ de g . Cela nous permet, par exemple, d'obtenir une quantification du prolongement unique pour les solutions de $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ en fonction des normes de V dans $L^{q_0}(\Omega)$, de W_1 dans $L^{q_1}(\Omega)$ et de W_2 dans $L^{q_2}(\Omega)$ pour $q_0 \in (d/2, \infty]$ et q_1 et q_2 satisfaisant soit $q_1, q_2 > (3d-2)/2$ et $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 4(1 - \frac{1}{d})/(3d-2)$, soit $q_1, q_2 > 3d/2$.

Dans une troisième partie, on étudie une quantification du prolongement unique des solutions de l'équation $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ mais avec des potentiels d'ordre un plus singuliers dans la classe limite d'intégrabilité. En particulier, on considère le cas $W_1 \in L^{q_1}$ et $W_2 \in L^{q_2}$, avec $q_1 > d$ et $q_2 > d$. En utilisant le lemme de T. Wolff sur les mesures euclidiennes et une version raffinée des estimations de Carleman, on obtient des résultats de quantification du prolongement unique pour les solutions u de $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ en fonction des normes des potentiels.

Mots clés : Estimations de Carleman, problème aux limites, équations elliptiques, théorèmes de restriction de Fourier, multiplicateur de Fourier.

Abstract

In this thesis, we study L^p Carleman inequalities for elliptic problems and their applications to the quantification of unique continuation with respect to perturbations of the Laplacian.

We first focus on L^p Carleman inequalities on a strip of \mathbb{R}^d ($d \geq 3$), denoted $\mathcal{S} := (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$, for the Laplacian. Using the Fourier transform and a factorisation of the conjugate operator, we reduce the proof of these inequalities to the construction of a parametrix for the Laplacian problem with boundary conditions. Utilising this parametrix, we first reprove classical L^2 Carleman inequalities for the Laplacian. Then, applying harmonic analysis techniques, particularly the Fourier restriction theorem to establish $L^p - L^q$ type continuity results, we obtain $L^p - L^q$ estimates for this parametrix.

We then apply these methods to the case of interest, namely L^p Carleman inequalities for the Laplacian defined on Ω , a bounded and regular open subset of \mathbb{R}^d ($d \geq 3$), with a right-hand side $f_2 + f_{2*'} + \operatorname{div} F$, $f_2 \in L^2(\Omega)$, $f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$, $F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$, and a Dirichlet condition $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. We establish two global Carleman estimates : one on the H^1 norm of the solution and another on its $L^{\frac{2d}{d-2}}$ norm, in terms of weighted L^2 norms of f_2 and F , the $L^{\frac{2d}{d+2}}$ norm of $f_{2*'}$, and the $H^{\frac{1}{2}}$ norm of g . This allows us, for example, to obtain a quantification of unique continuation for solutions of $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ in terms of the norms of V in $L^{q_0}(\Omega)$, W_1 in $L^{q_1}(\Omega)$, and W_2 in $L^{q_2}(\Omega)$ for $q_0 \in (d/2, \infty]$ and q_1 and q_2 satisfying either $q_1, q_2 > (3d-2)/2$ and $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 4(1 - \frac{1}{d})/(3d-2)$, or $q_1, q_2 > 3d/2$.

In the third part, we study a quantification of unique continuation for solutions of the equation $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ but with first-order potentials that are more singular in the limit integrability class. In particular, we consider the case where $W_1 \in L^{q_1}$ and $W_2 \in L^{q_2}$, with $q_1 > d$ and $q_2 > d$. Using T. Wolff's lemma on Euclidean measures and a refined version of Carleman estimates, we obtain unique continuation quantification results for solutions u of $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ in terms of the norms of the potentials.

Keywords : Carleman estimates, boundary value problem, elliptic equations, Fourier restriction theorems, Fourier multiplier.

Table des matières

Publications	10
1 Introduction	11
1.1 Cadre général	11
1.1.1 Prolongement unique	12
1.1.2 Estimations de Carleman, cadre Hilbertien	13
1.1.3 Estimations de Carleman L^p	18
1.1.4 Espaces L^p optimaux pour le prolongement unique.	22
1.2 Principaux résultats de la thèse, partie I	23
1.2.1 Estimations de Carleman L^p globales pour l'opérateur Laplacien	23
1.2.2 Quantification du prolongement unique	25
1.2.3 Stratégie de preuve	26
1.3 Principaux résultats de la thèse, partie II	30
1.3.1 Quantification du prolongement unique avec des potentiels d'ordre un dans des classes presque optimales	30
1.3.2 Ingrédients	32
1.3.3 Estimations de Carleman L^p améliorées	34
1.3.4 Stratégie de preuve	35
1.4 Problèmes ouverts et perspectives	37
1.5 Organisation de la thèse	39
2 Estimées de Carleman elliptiques sur une bande	41
2.1 Introduction	41
2.1.1 Notations	42
2.2 Inégalité de Carleman L^2	42
2.2.1 Estimation <i>a priori</i>	42
2.2.2 Inégalité de Carleman avec un poids linéaire	45
2.2.3 Optimalité	52
2.2.4 Inégalité de Carleman avec un poids strictement convexe.	53
2.2.5 Optimalité	61
2.3 Inégalité de Carleman H^{-1}	62
2.3.1 Estimation <i>a priori</i>	62
2.3.2 Inégalité de Carleman avec un poids linéaire	64
2.4 Théorème de restriction et le multiplicateur de Fourier	66
2.4.1 Théorème de restriction Stein-Tomas	66
2.4.2 Multiplicateurs radiaux de Fourier	68
2.5 Inégalité de Carleman L^p	70

2.5.1	Estimation <i>a priori</i> $L^p - L^{p'}$	70
2.5.2	Inégalité de Carleman L^p avec un poids linéaire	72
2.5.3	Application au prolongement unique	79
2.5.4	Inégalité de Carleman L^p avec un poids strictement convexe	81
3	Estimées de Carleman L^p globales	95
3.1	Introduction	96
3.2	Estimation de Carleman dans une bande	103
3.3	Construction de la paramétrice dans le cas d'une bande	105
3.4	Estimations Hilbertiennes	108
3.5	Théorèmes de restriction de Fourier et applications	113
3.5.1	Théorèmes de restriction de Fourier	114
3.5.2	Les multiplicateurs de Fourier	119
3.6	Estimations de L^p sur la paramétrice et preuves du théorème 3.2.1 et du théorème 3.2.4	122
3.6.1	Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,0}$ dans (3.28)–(3.30)	122
3.6.2	Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,1}$	132
3.6.3	Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,j}$ pour $j \geq 2$	133
3.6.4	Estimations sur l'opérateur G_τ dans (3.33)–(3.34)	134
3.6.5	Estimations sur l'opérateur R_τ dans (3.29)	136
3.7	Preuve du théorème 3.1.1 : cas général	136
3.7.1	Estimations locales	136
3.7.2	Preuve du lemme 3.7.1 : Un changement de coordonnées adapté	137
3.7.3	Fin de la preuve du Théorème 3.1.1 : Un argument de recollement	142
3.8	Preuve du théorème 3.1.3 : Prolongement unique quantitatif	146
3.9	Appendice	150
3.9.1	Rappel de quelques résultats classiques en analyse harmonique	150
3.9.2	Preuve du lemme 3.7.2	151
4	Quantification du prolongement unique pour l'opérateur de Laplace avec des potentiels irréguliers	153
4.1	Introduction	154
4.2	Résultats auxiliaires	157
4.2.1	Lemme de Wolff	157
4.2.2	Estimations de Carleman	158
4.3	Estimations de Carleman améliorées : Preuve du théorème 4.2.4	160
4.3.1	Étape principale : Estimations de Carleman pour les solutions dans une bande	161
4.3.2	Preuve du théorème 4.2.4	173
4.4	Un cadre géométrique spécifique	179
4.5	Autres géométries et preuve du théorème 4.1.1	187
4.5.1	Une boule observée depuis un voisinage de sa frontière	187
4.5.2	Une estimation de trois boules	188
4.5.3	Le cas général : Preuve du théorème 4.1.1	190
4.6	Appendice	192
4.6.1	À propos de transformation de Kelvin	192

Publications

1. L^p Carleman estimates for elliptic boundary value problems and applications to the quantification of unique continuation, avec Belhassen Dehman et Sylvain Ervedoza, Preprint- 2 juillet 2023 [[HAL](#)], à paraître dans Annales Henri Lebesgue.
2. Quantification of unique continuation for the Laplace operator with rough potentials, avec Pedro Caro et Sylvain Ervedoza, Preprint- 27 novembre 2023 [[HAL](#)].

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre présente les motivations de la thèse et donne un aperçu général des objectifs et des résultats.

Contents

1.1	Cadre général	11
1.1.1	Prolongement unique	12
1.1.2	Estimations de Carleman, cadre Hilbertien	13
1.1.2.1	Estimations de Carleman locales	13
1.1.2.2	Estimations de Carleman globales	16
1.1.3	Estimations de Carleman L^p	18
1.1.3.1	Estimations de Carleman L^p à partir de l'inégalité Hilbertienne	18
1.1.3.2	Estimations de Carleman L^p , approche directe	20
1.1.4	Espaces L^p optimaux pour le prolongement unique.	22
1.2	Principaux résultats de la thèse, partie I	23
1.2.1	Estimations de Carleman L^p globales pour l'opérateur Laplacien	23
1.2.2	Quantification du prolongement unique	25
1.2.3	Stratégie de preuve	26
1.3	Principaux résultats de la thèse, partie II	30
1.3.1	Quantification du prolongement unique avec des potentiels d'ordre un dans des classes presque optimales	30
1.3.2	Ingrédients	32
1.3.2.1	Lemme de Wolff	32
1.3.3	Estimations de Carleman L^p améliorées	34
1.3.4	Stratégie de preuve	35
1.4	Problèmes ouverts et perspectives	37
1.5	Organisation de la thèse	39

1.1 Cadre général

L'objectif principal de cette thèse consiste à établir des *inégalités de Carleman L^p* pour des équations elliptiques, y compris avec des conditions au bord non homogènes, afin d'en déduire des résultats de quantification de la *propriété du prolongement unique* pour le Laplacien perturbé par des potentiels d'ordre un et zéro dans des classes d'intégrabilité - de type L^p - optimales.

1.1.1 Prolongement unique

Considérons un ouvert connexe Ω de \mathbb{R}^d , P un opérateur différentiel défini sur Ω et ω un sous-ensemble non vide et ouvert de Ω .

La *propriété de prolongement unique* est définie comme suit :

Définition 1.1.1 (Prolongement Unique). *On dit que P vérifie la propriété de prolongement unique (faible) sur un espace fonctionnel E si, pour tout $u \in E$, on a*

$$\begin{cases} Pu = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ dans } \omega \end{cases} \Rightarrow u = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (1.1)$$

Dans les cas où (1.1) est obtenue, il est intéressant de quantifier ce prolongement unique, c'est-à-dire de la mesurer ou l'évaluer, plus précisément on souhaiterait avoir la propriété suivante :

$$\text{Si } Pu \text{ est "petit" dans } \Omega, \text{ et } u \text{ est "petit" dans } \omega, \text{ alors } u \text{ est "petit" dans } \Omega. \quad (1.2)$$

Analytiquement, cette dernière se traduit par une inégalité "uniforme" de type

$$\|u\|_{\Omega} \leq f(\|Pu\|_{\Omega}, \|u\|_{\omega}), \quad (1.3)$$

pour une certaine fonction f à déterminer, et où les normes $\|\cdot\|_{\Omega}$, $\|\cdot\|_{\omega}$ sont également à préciser.

La quantification est dite *globale* lorsqu'on peut estimer la solution u sur tout le domaine Ω . C'est le cas de l'inégalité (1.3) ci-dessus. Parfois, cette estimation peut être difficile à atteindre et on s'intéresse alors à l'estimation de u sur un sous-domaine $\mathcal{O} \subsetneq \Omega$. Dans ce cas, on dit que la quantification est *locale*.

Cette propriété peut se comprendre aussi comme un résultat de stabilité dans le sens suivant

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de $Pu = 0$ dans Ω et proches dans $\omega \subset \Omega$, alors elles sont également proches dans Ω .

Conformément à la terminologie de la théorie du contrôle, l'inégalité (1.3) est appelée estimation d'observabilité. Cela signifie que l'on peut estimer u dans Ω en l'observant dans un ensemble restreint $\omega \subset \Omega$.

Il existe aussi d'autres notions de prolongements uniques, notamment le prolongement unique fort. Brièvement on a :

Définition 1.1.2 (Prolongement unique fort). *On dit que P vérifie la propriété du prolongement unique fort sur un espace fonctionnel E si, pour tout $u \in E$, on a*

$$\begin{cases} Pu = 0 \text{ dans } \Omega \\ \exists x_0 \in \Omega \text{ tel que } u \text{ s'annule d'ordre infini en } x_0, \end{cases} \Rightarrow u = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (1.4)$$

Ici, u s'annule d'ordre infini en x_0 signifie qu'il existe $R > 0$ tel que, pour chaque entier N , il existe c_n tel que

$$\forall r \in (0, R), \quad \int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx \leq c_N r^N.$$

Cas d'opérateurs à coefficients analytiques.

Supposons que P un opérateur différentiel elliptique à coefficients analytiques et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution. Si Pu est analytique, alors u est analytique, voir [Hö63, Théorème 7.5.1]. Ainsi, dans ce cas, la propriété du prolongement unique découle simplement d'arguments d'analyse complexe. Pour des opérateurs plus généraux, voir également le théorème d'Holmgren [Hö63, Théorème 5.3.1].

1.1.2 Estimations de Carleman, cadre Hilbertien

Le premier résultat qui s'affranchit de l'hypothèse d'analyticité a été obtenu par Carleman [Car39] en 1939, qui a démontré le prolongement unique pour une équation elliptique bidimensionnelle. La technique qu'il a introduite, maintenant connue sous le nom d'*inégalité de Carleman*, est devenue un outil efficace pour établir ce prolongement.

Avant d'explorer ces inégalités, il est important de mentionner d'autres approches permettant d'obtenir ce résultat sans recourir aux estimations de Carleman, telles que la méthode de la *fonction monotone* introduite par Garofalo et Lin en 1986, cf [GL86].

1.1.2.1 Estimations de Carleman locales

L'idée de Carleman repose sur des inégalités à poids de la forme

$$\tau^\gamma \|e^{\tau\varphi} u\|_{X(\Omega)} \leq C \|e^{\tau\varphi} Pu\|_{Y(\Omega)}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall \tau \text{ assez grand}, \quad (1.5)$$

où P est un opérateur différentiel linéaire, φ est une fonction à valeurs réelles bien choisie, appelée fonction poids, γ et C sont des constantes indépendantes de τ et u et Ω est un domaine de \mathbb{R}^d , et les normes $\|\cdot\|_{X(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{Y(\Omega)}$ sont, respectivement, des normes sur des espaces fonctionnels $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sur Ω . On dira qu'il s'agit d'un cadre Hilbertien lorsque les espaces $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert. Le fait que τ puisse être pris arbitrairement grand est une caractéristique importante des inégalités de Carleman (locales et globales) et permet notamment de propager la zone d'annulation des solutions de $Pu = 0$ dans la direction de $-\nabla\varphi$.

Carleman a prouvé une telle estimation avec $\gamma = 0$ lorsque P est un système du premier ordre à deux variables. Cette méthode, désormais connue sous le nom d'inégalité de Carleman, a permis de démontrer le prolongement unique sous certaines conditions de *pseudo-convexité* (détaillées ultérieurement), grâce aux contributions de nombreux mathématiciens. On citera en autres auteurs C. Müller [Mü54], N. Aronszajn [Aro56], A.-P. Calderón [Cal58], L. Hörmander [Hö58, Hö59, Hö63], V. Isakov [Isa93], F. Trèves [Tre70], et A. Plis [Pli63], K. Miller [Mil74], et S. Alinhac [Ali83] pour des résultats de non prolongement unique. On renvoie aussi à l'article de J. Le Rousseau et G. Lebeau [LRL12], qui constitue une introduction pédagogique aux inégalités de Carleman elliptiques et aux manuels de D. Tataru [Tat99], N. Lerner [Ler19], C. Laurent, M. Léautaud [LL23], J. Le Rousseau, G. Lebeau et L. Robbiano [LRLR22a, LRLR22b].

Idée générale de preuve de ces inégalités.

Pour mieux comprendre ces estimées L^2 , on se met dans le cas simple où $P = \Delta$. Comme il est difficile de prouver une estimation avec un poids, il est plus pratique d'abord d'éliminer le poids exponentiel $e^{\tau\varphi}$, en introduisant la fonction $v := e^{\tau\varphi}u$ et l'opérateur conjugué,

$$P_\varphi := e^{\tau\varphi} \Delta e^{-\tau\varphi},$$

ce qui revient alors à montrer

$$\tau^\gamma \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|P_\varphi v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \forall \tau \text{ assez grand},$$

À première vue, une telle inégalité peut sembler être une estimation standard. Cependant, on note que même si le Laplacien est un opérateur elliptique, le conjugué ne l'est plus. Par conséquent, il n'est pas immédiatement évident d'obtenir les bornes inférieures souhaitées. Pour comprendre l'origine de ces bornes, on sépare les parties symétriques et antisymétriques de l'opérateur conjugué P_φ . En effet, un calcul simple montre que

$$P_\varphi = \Delta - 2\tau \nabla \varphi \cdot \nabla + \tau^2 |\nabla \varphi|^2 - \tau \Delta \varphi.$$

Son symbole principal, en identifiant le paramètre τ à une dérivée (cela peut être rendu rigoureux à l'aide de l'analyse semi-classique, cf [LRL12]), est donné par

$$p_\varphi(x, \xi) = -|\xi|^2 + \tau^2 |\nabla \varphi|^2 - 2i\tau \nabla \varphi \cdot \xi. \quad (1.6)$$

Si $p_\varphi = 0$, alors $\xi \perp \nabla \varphi$ et $|\xi|^2 = \tau^2 |\nabla \varphi|^2$. Ainsi p_φ s'annule sur l'ensemble caractéristique

$$\Sigma_\tau = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad \nabla \varphi \cdot \xi = 0, \quad |\xi|^2 = \tau^2 |\nabla \varphi|^2\}. \quad (1.7)$$

La première condition signifie que ξ se trouve sur un plan perpendiculaire à $\nabla \varphi$, et la deuxième condition signifie que ξ se trouve sur une sphère. Cependant, l'intersection d'une sphère avec un plan passant par l'origine n'est pas triviale. Ainsi, P_φ n'est pas elliptique. Ensuite, on définit les parties symétriques et antisymétriques respectivement données par

$$S = \Delta + \tau^2 |\nabla \varphi|^2, \quad A = -2\tau \nabla \varphi \cdot \nabla - \tau \Delta \varphi.$$

En calculant la norme $\|P_\varphi v\|_{L^2(\Omega)}^2$, on obtient

$$\|P_\varphi v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|Sv\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|Av\|_{L^2(\Omega)}^2 + ([S, A]v, v)_{L^2(\Omega)}. \quad (1.8)$$

où le commutateur $[S, A] = SA - AS$. La seule contribution qui pourrait être non positive, ne peut provenir que du commutateur $[S, A]$. On cherche alors à garantir que le symbole principal de $[S, A]$ soit positif, pour τ grand, lorsque les symboles principaux $s(x, \xi)$ et $a(x, \xi)$, respectivement de S et A , s'annulent. Ici $s(x, \xi)$ et $a(x, \xi)$ sont donnés par

$$s(x, \xi) = -|\xi|^2 + \tau^2 |\nabla \varphi(x)|^2, \quad a(x, \xi) = -2i\tau \nabla \varphi(x) \cdot \xi.$$

En terme symbolique, via l'inégalité de Gårding [Tay81, Théorème 8.1], l'identité (1.8) ramène à l'étude de la positivité du symbole

$$s(x, \xi)^2 + a(x, \xi)^2 + \frac{1}{i} \{s, a\}(x, \xi),$$

où $\{s, a\}$ désigne le crochet de Poisson de s et de a (donné par $\{p, q\}(x, \xi) = \nabla_\xi p(x, \xi) \cdot \nabla_x q(x, \xi) - \nabla_x p(x, \xi) \cdot \nabla_\xi q(x, \xi)$), ce qui donne ici

$$\frac{1}{i} \{s, a\}(x, \xi) = 4 \left(\tau^3 (\text{Hess}(\varphi)) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \tau (\text{Hess}(\varphi)) \xi \cdot \xi \right), \quad (1.9)$$

et correspond au symbole principal de l'opérateur $[S, A]$.

En fait, pour être tout à fait précis, et pour remettre les opérateurs à la même échelle semi-classique, il s'agit plutôt d'étudier la positivité du symbole

$$\frac{1}{\tau} \left(s(x, \xi)^2 + a(x, \xi)^2 \right) + \frac{1}{i} \{s, a\}(x, \xi).$$

Quoiqu'il en soit, cela impose que lorsque les symboles s et a s'annulent, le crochet $\frac{1}{i} \{s, a\}(x, \xi)$ doit être positif, ce qui requière dans notre cas l'existence d'une constance $c_* > 0$ telle que :

$$\forall \tau \geq 1, \forall (x, \xi) \in \Sigma_\tau, \quad \tau^3 (\text{Hess}(\varphi)) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \tau (\text{Hess}(\varphi)) \xi \cdot \xi \geq c_* (\tau^3 + |\xi|^3). \quad (1.10)$$

En posant $\zeta = \xi/\tau$, cette condition est donc équivalente à la suivante : Il existe $c_* > 0$ tel que

$$\forall (x, \zeta) \in \Sigma, \quad ((\text{Hess}(\varphi)) \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + (\text{Hess}(\varphi)) \zeta \cdot \zeta) \geq c_* (1 + |\nabla \varphi|^3), \quad (1.11)$$

avec

$$\Sigma = \{(x, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid |\zeta|^2 = |\nabla \varphi|^2, \nabla \varphi \cdot \zeta = 0\}.$$

Cette condition est une condition nécessaire et suffisante (voir [LRLR22a]) pour obtenir l'inégalité de Carleman locale suivante : Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$, pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\tau^3 \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|e^{\tau\varphi} \Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.12)$$

Cette condition est appelée *condition de sous-ellipticité de Hörmander par rapport à l'opérateur Laplacien*, et nous allons l'utiliser dans la suite de notre travail, dans les chapitres 3 et 4.

Une autre façon d'écrire cette condition est la suivante :

Définition 1.1.3 (Sous-ellipticité de Hörmander). *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d . On dit que la fonction poids $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ satisfait l'hypothèse de sous-ellipticité sur Ω pour le laplacien si $|\nabla \varphi| > 0$ sur $\bar{\Omega}$ et si*

$$\forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^d, \forall \tau \geq 1, \quad p_\varphi(x, \xi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\tau^3} \{\text{Re } p_\varphi, \text{Im } p_\varphi\}(x, \xi) > 0, \quad (1.13)$$

où p_φ est le symbole principal de l'opérateur conjugué $e^{\tau\varphi} \Delta (e^{-\tau\varphi} \cdot)$ défini en (1.6).

Remarque 1.1.4. • La forme (1.13) permet la généralisation à des opérateurs elliptiques P d'ordre deux plus généraux que le Laplacien. Ainsi, la condition de sous-ellipticité d'Hörmander ci-dessus, convenablement modifiée en remplaçant p_φ par le symbole semi-classique de l'opérateur $e^{\tau\varphi} P(e^{-\tau\varphi} \cdot)$, est également une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une inégalité de Carleman locale de la forme (1.12), cf [LRLR22a].

- Il n'est pas difficile de vérifier l'existence d'une fonction φ satisfaisant la condition (1.13) pour un opérateur p elliptique. Il suffit, par exemple, de définir $\varphi = e^{\lambda\phi}$, avec $|\nabla \phi| > 0$ sur $\bar{\Omega}$ et $\lambda > 0$ choisi suffisamment grand. Ce processus est souvent appelé *convexification*.
- Si on cherche φ sous la forme $\varphi = \varphi(x_1)$, la condition de sous-ellipticité pour le Laplacien (1.9) se réécrit

$$\varphi''(x_1) \left((\varphi'(x_1))^2 + \xi_1^2 \right) \geq c > 0, \quad \{\xi_1 \varphi'(x_1) = 0\} \cap \{|\xi|^2 = \tau^2 |\varphi'(x_1)|^2\}.$$

Il suffit alors de choisir φ'' strictement positive et φ' ne s'annulant pas.

- Lorsque la condition de sous-ellipticité dégénère, on peut encore récupérer une inégalité de Carleman, mais avec des puissances du paramètre τ plus petites. Un tel exemple a été utilisé en particulier dans les travaux de Kenig et al. [KSU07], qui ont introduit la notion de poids Carleman limite (en anglais, *limiting Carleman weights*), qui satisfont la propriété suivante :

$$\forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad p_\varphi(x, \xi) = 0 \Rightarrow \{\operatorname{Re} p_\varphi, \operatorname{Im} p_\varphi\}(x, \xi) = 0.$$

Une caractéristique importante de cette propriété est que si φ est un poids limite pour P , alors $-\varphi$ l'est également. On renvoie à [DSFKSU09] et [LRLR22a, Chapitre 4, section 4.2.] pour plus de détails.

1.1.2.2 Estimations de Carleman globales

Dans les années 90, motivées par des applications en théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles, les inégalités de Carleman dans L^2 ont été utilisées pour quantifier les propriétés de prolongement unique dans des domaines bornés. Des travaux décisifs, tels que ceux de Lebeau et Robbiano en 1995 [LR95] ainsi que de Fursikov et Imanuvilov en 1996 [FI96], ont étudié les propriétés de contrôlabilité de l'équation de la chaleur. Dans tous ces travaux, la difficulté réside dans le développement des inégalités de Carleman près des bords d'un domaine. Contrairement aux inégalités de Carleman locales mentionnées précédemment pour obtenir des propriétés de prolongement unique, ces inégalités seront appelées *inégalités de Carleman globales* dans la suite. De plus, *globale* signifie ici que ces inégalités peuvent être appliquées aux fonctions définies sur l'ensemble du domaine, y compris sur la frontière. Essentiellement, ces inégalités sont de la forme

$$\tau^\gamma \|e^{\tau\varphi} u\|_{X(\Omega)} \leq C \|e^{\tau\varphi} P u\|_{Y(\Omega)} + \underbrace{\|e^{\tau\varphi} u\|_{X_{obs}(\omega)}}_{\text{terme d'observation}} + \underbrace{\|e^{\tau\varphi} B u\|_{Y_\partial(\partial\Omega)}}_{\text{termes de bord}}, \quad \forall u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \forall \tau \gg 1, \quad (1.14)$$

Ici, ω est un sous-ouvert non-vide de Ω , et les normes $\|\cdot\|_{X(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{Y(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{X_{obs}(\omega)}$, $\|\cdot\|_{Y_\partial(\partial\Omega)}$ sont, respectivement, des normes sur des espaces fonctionnels $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sur Ω , $X_{obs}(\omega)$ sur ω et $Y_\partial(\partial\Omega)$ sur $\partial\Omega$.

On remarque la présence des termes d'observation et des termes de bord dans cette inégalité globale, qui sont absents dans les versions locales, cf (1.5).

Sous cette forme, le lien avec le prolongement unique apparaît clairement : En effet, si u est une solution de $P u = 0$ dans Ω satisfaisant $B u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $u = 0$ dans ω , alors $u = 0$ dans Ω .

Dans le cas de l'opérateur Laplacien, Imanuvilov et Puel ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 1.1.5 (Imanuvilov et Puel [IP03]). *Soit Ω un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d , et ω un sous ouvert non-vide de Ω . Soit $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ tel que $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$, $\psi(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, et $|\nabla\psi(x)| > 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \omega$ (de telles fonctions existent), et posons $\varphi = e^{\lambda\psi(x)}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Alors il existe des constantes $C > 0$, $\lambda \geq 1$ et $\tau_0 \geq 1$ telles que $\forall \tau \geq \tau_0$, toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta u = f + \operatorname{div} F & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$f \in L^2(\Omega), \quad F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad g \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

satisfait

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \tau^2 \int_{\Omega} |u|^2 e^{2\tau\varphi} dx \leq C \left(\tau^{\frac{1}{2}} e^{2\tau} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} |f|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \sum_{j=1}^d \tau \int_{\Omega} |F_j|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \int_{\omega} (|\nabla u|^2 + \tau^2 |u|^2) e^{2\tau\varphi} dx \right). \quad (1.15)$$

Il ne s'agit ici que d'un exemple d'une inégalité de Carleman globale pour le Laplacien et des conditions au bord de type Dirichlet. De nombreux travaux utilisent des inégalités de Carleman globales pour le Laplacien ou d'autres opérateurs, conditions au bord, etc. On peut par exemple citer :

- Dans le contexte de la théorie du contrôle, outre les travaux de Lebeau et Robbiano [LR95], et de Fursikov et Imanuvilov [FI96] sur la nulle-contrôlabilité de la chaleur, les résultats de contrôlabilité aux trajectoires pour la chaleur semi-linéaire [FCZ00, Bar00]), pour les équations de Navier-Stokes incompressibles par Fernández-Cara, Guerrero, Imanuvilov et Puel [FCGIP04], ou encore pour l'équation de la chaleur en présence d'une interface par Le Rousseau et Robbiano [LRR11].
- Dans le contexte de la stabilisation de l'équation des ondes amorties (sans contrôle géométrique), les travaux de Lebeau [Leb96], Robbiano [LR97], et Burq [Bur98].
- En problèmes inverses, pour obtenir des estimations de stabilité de la quantité inconnue recherchée (par exemple, un coefficient ou un terme source) en fonction de mesures effectuées sur la solution de l'EDP, voir par exemple [Isa98, IY98, IY01, IY05, BDBE13].

Notons que l'inégalité de Carleman présentée dans le Théorème 1.1.5 permet non seulement d'établir la propriété de prolongement unique

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u = 0 & \text{dans } \omega \end{cases} \Rightarrow u = 0 \text{ dans } \Omega,$$

mais aussi d'établir une quantification globale de cette propriété de prolongement unique. A ce titre, ce sera l'outil de prédilection que l'on choisira dans la suite de cette thèse pour établir des résultats de quantification de prolongement unique.

Un point important des inégalités de Carleman est le fait que le paramètre τ puisse être pris arbitrairement grand. En particulier, cela permet d'absorber des termes d'ordre inférieur facilement. Ainsi, si on considère $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.16)$$

pour $V \in L^\infty(\Omega)$, $W_1 \in L^\infty(\Omega)$ et $W_2 \in L^\infty(\Omega)$, on peut poser $f = Vu + W_1 \cdot \nabla u$, $F = W_2 u$ et appliquer l'inégalité de Carleman (1.15). On obtient alors que pour C et λ bien choisis, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \tau^2 \int_{\Omega} |u|^2 e^{2\tau\varphi} dx \leq C \left(\frac{1}{\tau} \|V\|_\infty^2 \int_{\Omega} |u|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \frac{1}{\tau} \|W_1\|_\infty^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \sum_{j=1}^d \tau \|W_2\|_\infty^2 \int_{\Omega} |u|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \int_{\omega} (|\nabla u|^2 + \tau^2 |u|^2) e^{2\tau\varphi} dx \right). \quad (1.17)$$

En particulier, en prenant τ suffisamment grand pour avoir

$$\tau^3 \gg \|V\|_\infty^2, \quad \tau \gg \|W_1\|_\infty^2, \quad \tau \gg \|W_2\|_\infty^2,$$

les termes de droite de l'inégalité (1.17) contenant les normes des potentiels V , W_1 , et W_2 , peuvent être absorbés par le membre de gauche de l'inégalité (1.17) et on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \tau^2 \int_\Omega |u|^2 e^{2\tau\varphi} dx \leq C \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \tau^2 |u|^2) e^{2\tau\varphi} dx \right). \quad (1.18)$$

On obtient alors, en bornant le poids Carleman $e^{2\tau\varphi}$ et en choisissant τ de l'ordre de $C(\|V\|_\infty^{2/3} + \|W_1\|_\infty^2 + \|W_2\|_\infty^2)$ l'inégalité suivante : u solution de (1.16) satisfait l'inégalité

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \exp(C(\|V\|_\infty^{2/3} + \|W_1\|_\infty^2 + \|W_2\|_\infty^2)) \|u\|_{H^1(\omega)}. \quad (1.19)$$

C'est ce type d'inégalités qu'on appellera dans la suite quantification du prolongement unique pour les solutions d'une équation elliptique par rapport aux termes d'ordre inférieur.

Une question naturelle au vu de l'inégalité (1.16) est l'optimalité de la classe des potentiels d'ordre 0 et 1 considérés dans (1.19). En effet, il est bien connu que l'opérateur Laplacien, muni des conditions au bord de Dirichlet sur un domaine borné régulier, est un isomorphisme entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$. En conséquence, il est naturel de considérer des termes d'ordre inférieurs tel que l'opérateur

$$u \mapsto Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$$

est compact en tant qu'opérateur de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. En dimension $d \geq 3$, en utilisant les injections de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$ et $L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, on voit qu'il est naturel de considérer les potentiels V , W_1 et W_2 dans les classes

$$V \in L^{q_0}(\Omega), \text{ avec } q_0 > \frac{d}{2}, \quad W_1 \in L^{q_1}(\Omega), \text{ avec } q_1 > d, \quad W_2 \in L^{q_2}(\Omega), \text{ avec } q_2 > d. \quad (1.20)$$

Problématique générale de la thèse.

Cette thèse part de la remarque qu'à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de quantification du prolongement unique de la forme (1.19) pour les solutions de (1.16) pour des potentiels V , W_1 , et W_2 dans les classes limites d'intégrabilité présentées dans (1.20), et il s'agit de l'objectif principal poursuivi dans cette thèse.

1.1.3 Estimations de Carleman L^p

1.1.3.1 Estimations de Carleman L^p à partir de l'inégalité Hilbertienne

Une première remarque est que, en utilisant le Théorème 1.1.5 et en jouant avec les injections de Sobolev, on peut traiter une classe légèrement plus grande de potentiels V , correspondant à $L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > 2d/3$.

D'une part, le membre de gauche de (1.15) et l'injection de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}$ donne

$$\|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \|e^{\tau\varphi} u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\tau \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + C \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.21)$$

D'autre part, si on prend $f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$, pour $\tau > 0$, on peut résoudre

$$\begin{cases} -\Delta z_\tau = e^{\tau\varphi} f_{2*'} & \text{dans } \Omega, \\ z_\tau = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et on a, par la propriété d'isomorphisme du Laplacien entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, et l'injection de Sobolev $L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, on obtient

$$\|\nabla z_\tau\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}.$$

En conséquence, en écrivant

$$f_{2*'} = e^{-\tau\varphi} \operatorname{div}(\nabla z_\tau) = \operatorname{div}(e^{-\tau\varphi} \nabla z_\tau) + \tau e^{-\tau\varphi} \nabla\varphi \cdot \nabla z_\tau,$$

on déduit du Théorème 1.1.5 la propriété suivante :

Pour $d \geq 3$, il existe des constantes $C > 0$, et $\tau_0 \geq 1$ telles que $\forall \tau \geq \tau_0$, toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta u = f_{2*'} + f + \operatorname{div} F & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \quad F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad g \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

satisfait

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \tau^2 \int_{\Omega} |u|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\tau^{\frac{1}{2}} e^{2\tau} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} |f|^2 e^{2\tau\varphi} dx + \sum_{j=1}^d \tau \int_{\Omega} |F_j|^2 e^{2\tau\varphi} dx \right. \\ & \quad \left. + \tau \|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \int_{\omega} (|\nabla u|^2 + \tau^2 |u|^2) e^{2\tau\varphi} dx \right). \quad (1.22) \end{aligned}$$

Montrons comment une telle inégalité permet d'établir le prolongement unique pour les solutions u de (1.16) avec $V \in L^{q_0}(\Omega)$ pour $q_0 > \frac{2d}{3}$ et, pour simplifier $W_1 = 0$ et $W_2 = 0$.

Dans ce cas, l'estimée (1.22) donne alors, en écrivant $V = V_\infty + V_{d/2}$ avec $V_\infty \in L^\infty(\Omega)$ et $V_{d/2} \in L^{d/2}(\Omega)$, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} \tau \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} & \leq \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2}}} \|e^{\tau\varphi} V_\infty u\|_{L^2(\Omega)} + C \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} V_{d/2} u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + C \tau \|e^{\tau\varphi} u\|_{H^1(\omega)}. \\ & \leq \frac{C \|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)}}{\tau^{\frac{1}{2}}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + C \tau^{\frac{1}{2}} \|V_{d/2}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + C \tau \|e^{\tau\varphi} u\|_{H^1(\omega)}. \end{aligned}$$

En particulier, pour

$$\tau^{\frac{3}{2}} \gg \|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{et} \quad \tau^{\frac{1}{2}} \|V_{d/2}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \lll 1, \quad (1.23)$$

on pourra absorber les termes faisant intervenir les potentiels V_∞ et $V_{d/2}$ par le membre de gauche.

Pour faire cela, on choisit

$$\lambda = \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)} \tau^{\frac{d}{q_0}}, \quad \text{and} \quad V_\infty = V 1_{|V| \leq \lambda}, \quad V_{d/2} = V 1_{|V| > \lambda},$$

si bien que les conditions (1.23) deviennent

$$\tau^{\frac{3}{2} - \frac{d}{q_0}} \gg \gg \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)},$$

qui ne peuvent être satisfaites que si $q_0 > \frac{2d}{3}$.

Cela donne notamment le prolongement unique pour l'opérateur $-\Delta + V$ avec des potentiels dans $L^{q_0}(\Omega)$, avec $q_0 > \frac{2d}{3}$ et une quantification du prolongement unique global en

$$C \exp \left(C \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\frac{2}{3 - \frac{2d}{q_0}}} \right).$$

Remarquons aussi qu'on peut adapter l'argument présenté ci-dessus à partir de (1.22) pour obtenir le prolongement unique pour l'opérateur $-\Delta + V + W_1 \cdot \nabla \cdot + \operatorname{div}(W_2 \cdot)$ pour des potentiels $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega)$, et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega)$, avec $q_0 > \frac{2d}{3}$, $q_1 > 2d$, $q_2 > 2d$, et on obtient une quantification du prolongement unique global en

$$C \exp \left(C \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\frac{2}{3 - \frac{2d}{q_0}}} + C \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{2}{1 - \frac{2d}{q_1}}} + C \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{2}{1 - \frac{2d}{q_2}}} \right).$$

Ce résultat correspond au seuil d'intégrabilité obtenu par des arguments similaires dans l'article de Saut et Scheurer [SS82] pour le prolongement unique en utilisant des inégalités de Carleman Hilbertiennes couplées avec des arguments d'interpolation. Ce résultat ne permet néanmoins pas d'atteindre l'intégrabilité limite $q_0 > \frac{d}{2}$, $q_1, q_2 > d$ que l'on attendrait. Pourtant, il est connu que les puissances du paramètre τ en face de chaque terme de l'estimée (1.15) sont optimales, cf [LRLR22a, Chapitre 4].

Dès lors, il est naturel de se tourner vers des inégalités de Carleman plus générales, dans des classes d'intégrabilité L^p appropriées.

1.1.3.2 Estimations de Carleman L^p , approche directe

Comme nous l'avons vu précédemment, les estimées de Carleman dans un cadre Hilbertien ne semblent pas permettre de considérer des termes d'ordre inférieur dans des classes d'intégrabilité optimales.

Ce problème a été étudié en particulier pour les questions de prolongement unique et prolongement unique fort pour l'opérateur Laplacien. Amrein, Berthier et Georgescu (1981) [ABG81] ont prouvé le prolongement unique fort pour $-\Delta + V(x)$, lorsque $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > d/2$, pour $d = 2, 3, 4$ (cela a été amélioré à $p = d/2$, $d = 3, 4$ par E.T. Sawyer [Saw84]), tandis que pour des d plus grands, les meilleurs résultats étaient ceux de L. Hörmander (1983) [Hö83], qui a établi le prolongement unique pour $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > 4d - 2/7$, $d > 4$.

Ensuite, les estimations de Carleman L^p locales suivantes ont été introduites par D. Jerison et C. E. Kenig en 1985.

Théorème 1.1.6 (Jerison-Kenig [JK85]). *Soit $d \geq 3$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau > 0$, $\operatorname{dist}(\tau; \mathbb{N} + \frac{d-2}{2}) = \frac{1}{2}$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$*

$$\| |x|^{-\tau} u \|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)} \leq C \| |x|^{-\tau} \Delta u \|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.24)$$

Notons tout de suite que le Théorème 1.1.6 permet d'obtenir le prolongement unique fort pour l'opérateur $-\Delta + V$ avec $V \in L_{loc}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$.

L'estimation (1.24) correspond à la fonction poids suivante

$$\varphi(x) = -\ln|x|,$$

qui satisfait une condition de sous-ellipticité dégénérée, et qui est invariante par changement d'échelle. Il est intéressant de comparer cette estimée à l'estimée (1.22), qui donne pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega \setminus \omega)$, et pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C\tau^{\frac{1}{2}}\|e^{\tau\varphi}\Delta u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}. \quad (1.25)$$

On constate en particulier les différences de puissance de τ dans l'estimée (1.24) et (1.25). C'est précisément cette différence qui fait que l'estimée (1.24) permet d'obtenir un résultat de prolongement unique pour l'opérateur $-\Delta + V$ avec $V \in L^{\frac{d}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

La démonstration de l'estimation (1.24) constitue une grande avancée de D. Jerison et C. Kenig ; leur argument initial était basé sur une analyse précise des normes L^p des fonctions de Bessel sur la sphère. Une autre approche, basée sur la construction d'une paramétrice de l'opérateur conjugué $|x|^{-\tau}\Delta(|x|^\tau \cdot)$ et les estimées sur les projecteurs spectraux du Laplacien sphérique, est donné dans [Sog17, Chapitre 5], voir aussi [Sog88]. En fait, on s'inspirera plutôt dans cette dernière approche dans notre travail.

En raffinant ces estimées de Carleman L^p , Barcelo-Kenig-Ruiz-Sogge [BKRS88] arrive à démontrer le prolongement unique pour l'opérateur $-\Delta + V + W_1 \cdot \nabla$ avec $V \in L^{\frac{d}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $W_1 \in L^{\frac{3d-2}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^d)$. De plus, [BKRS88] démontre également qu'une méthode basée simplement sur les estimations de Carleman ne peut pas permettre d'obtenir des résultats de prolongement unique pour des potentiels d'ordre 1 $W_1 \in L^{q_1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ avec $q_1 < \frac{3d-2}{2}$.

Pour atteindre des résultats de prolongement unique pour des potentiels d'ordre 1 dans des classes d'intégrabilité plus faibles, T. Wolff a introduit un argument supplémentaire sur des propriétés de concentration de mesures, qui ont permis d'atteindre la classe optimale, cf [Wol92], voir Lemme 1.3.2 ci-après.

En revisitant l'approche de Wolff et les inégalités de Carleman L^p , le résultat de prolongement unique fort le plus abouti pour les opérateurs elliptiques est le suivant :

Théorème 1.1.7 (Koch-Tataru [KT01]). *Soit P un opérateur différentiel elliptique de la forme*

$$Pu = \operatorname{div}(g(x)\nabla u) + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u) + Vu,$$

où les coefficients g, W_i, V sont définis dans une boule $B = B(x_0, R)$. Supposons que g^{ij} satisfait la condition d'ellipticité uniforme

$$c|\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq d} g^{ij} \xi_i \xi_j \leq C|\xi|^2 \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

et que $g^{ij} \in W^{1,\infty}(B)$, $W_i \in L^d(B)$ et $V \in L^{\frac{d}{2}}(B)$. Alors P a la propriété de prolongement unique fort (1.4) sur H^1 .

Solution fondamentale et paramétrice

Les estimées de Carleman L^p sont basées sur des estimées d'une paramétrice de l'opérateur conjugué $P_\varphi = e^{\tau\varphi} P e^{-\tau\varphi}$,

Pour être plus précis, rappelons qu'une paramétrice pour l'opérateur Q sur Ω est une distribution $E = E(x, y)$ définie pour $x, y \in \Omega$ telle que

$$Q(x, D)E(\cdot, y) = \delta_y + h_y, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (1.26)$$

où h_y est une fonction régulière. Si $E(\cdot, y)$ vérifie (1.26) avec $h \equiv 0$, alors E est une *solution fondamentale* de Q . On peut obtenir beaucoup d'informations sur les solutions de $Qu = f$, dès qu'une solution fondamentale ou paramétrice est connue. En effet, dans le cas où E est une solution fondamentale, on obtient qu'une solution u de $Qu = f$ est donnée (formellement) par $u(x) = \int_{y \in \Omega} E(x, y)f(y) dy$, et on peut donc obtenir des informations précises sur les solutions u de $Qu = f$ si connaît bien la solution fondamentale. Bien entendu, cette approche s'adapte dans le cas où on connaît seulement une approximation de la solution fondamentale, donc notamment dans le cas d'une paramétrice. On verra par la suite que beaucoup de nos travaux font intervenir de façon explicite une paramétrice.

1.1.4 Espaces L^p optimaux pour le prolongement unique.

Comme nous l'avons vu, le prolongement unique pour l'opérateur $P = -\Delta + V + W_1 \cdot \nabla \cdot + \text{div}(W_2 \cdot)$ est valable pour $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, avec $q_0 \geq d/2$, $q_1 \geq d$ et $q_2 \geq d$ (voir [Wol93]). De plus, le prolongement unique fort a même été prouvé dans les cas où $q_0 \geq d/2$, $q_1 \geq d$ et $q_2 \geq d$ (voir [KT01]). Ces classes d'intégrabilité pour les potentiels sont optimales.

En effet en dimension $d \geq 3$, pour $p < \frac{d}{2}$ et $q < d$, le travail de Koch-Tataru [KT02] construit des potentiels et des solutions non triviales à support compact pour l'équation

$$\Delta u = Vu \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad (1.27)$$

avec $V \in L^p$ et pour l'équation

$$\Delta u = W \cdot \nabla u \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad (1.28)$$

avec $W \in L^q$.

Cela fait suite à des travaux antérieurs, par exemple [KN00] et [Man02], certains aussi valides en dimension $d = 2$.

	A	W	V	Outils
Holmgren [Hol01]	analytique	analytique	analytique	Analyticité de u
Carleman [Car39], Hörmander [Hö63]	$W^{1,\infty}$	L^∞	L^∞	$L^2 - L^2$ Carleman
Jerison et Kenig [JK85]	Id	0	$L^{\frac{d}{2}}$	$L^p - L^{p'}$ -Carleman
Barcelo-Kenig-Ruiz-Sogge [BKRS88]	Id	$L^{\frac{3d-2}{2}}$	$L^{\frac{d}{2}}$	$L^p - L^{p'}$ -Carleman
Thomas Wolff [Wol92]	Id	L^d	$L^{\frac{d}{2}}$	$L^p - L^{p'}$ -Carleman +
Koch et Tataru [KT01]	$W^{1,\infty}$	L^d	$L^{\frac{d}{2}}$	argument de Wolff
$V \in L^{\frac{d}{2}}$ et $W \in (L^d)^d$ sont les espaces optimaux pour obtenir le prolongement unique.				
Pliš [Plí63] Miller [Mil74]	$C^s, s < 1$	0	0	Produit Weierstrass Solution fondamentale
Kenig-Nadirashvili [KN00]	Id	$L^q, q < 2$	L^1	
Koch-Tataru [KT02]	Id	$L^q, q < d$	$L^p, p < \frac{d}{2}$	

TABLE 1.1 – Bilan des résultats de prolongement unique pour l'opérateur $P = -\operatorname{div}(A\nabla\cdot) + V + W \cdot \nabla\cdot$.

1.2 Principaux résultats de la thèse, partie I

1.2.1 Estimations de Carleman L^p globales pour l'opérateur Laplacien

Dans la première partie de cette thèse, on établit des estimations de Carleman globales L^p pour l'opérateur de Laplace plat dans un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d ($d \geq 3$), avec une fonction poids générale satisfaisant les conditions strictes de sous-ellipticité de Hörmander. En application, nous montrerons comment celles-ci peuvent être utilisées pour obtenir des résultats de quantification du prolongement unique pour les solutions d'équations elliptiques, par rapport aux normes des potentiels.

Théorème 1.2.1 (Dehman-Ervedoza-Thabouti [DET23]). *Soit $d \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné de classe C^3 , et ω un sous-ensemble ouvert non vide de Ω avec $\bar{\omega} \subset \Omega$. Soit $\varphi \in C^3(\bar{\Omega})$ tel que*

$$\forall x \in \partial\Omega, \varphi(x) = 0 \text{ et } \partial_n \varphi(x) < 0, \quad (1.29)$$

et il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\inf_{\Omega \setminus \omega} |\nabla \varphi| > \alpha, \quad (1.30)$$

et

$$\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ avec } |\nabla \varphi(x)| = |\xi| \text{ et } \nabla \varphi(x) \cdot \xi = 0, \\ (\operatorname{Hess} \varphi(x)) \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \varphi(x) + (\operatorname{Hess} \varphi(x)) \xi \cdot \xi \geq \beta |\nabla \varphi(x)|^2, \quad (1.31)$$

où $\operatorname{Hess} \varphi$ désigne la matrice hessienne de φ . Soit ω_1 un sous-ensemble ouvert de Ω tel que $\bar{\omega} \subset \omega_1$ et $\bar{\omega}_1 \subset \Omega$, et $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ radiale, non négative s'annulant à l'extérieur du disque de rayon 1 et égale à un dans le disque de rayon $\frac{1}{2}$.

Alors, il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ (dépendants uniquement de $\alpha, \beta, \|\varphi\|_{C^3(\bar{\Omega})}, \eta$ et de la configuration géométrique Ω, ω et ω_1) tels que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f_2 + f_{2*'} + \operatorname{div} F & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.32)$$

avec

$$f_2 \in L^2(\Omega), \quad f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{et } g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

on a, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau \|e^{\tau\varphi} F\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\omega_1)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_1)} \right), \end{aligned} \quad (1.33)$$

et

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau \|e^{\tau\varphi} F\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\omega_1)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_1)} \right). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ici, les normes $\|\cdot\|_{L^p_{\eta,\tau}(\Omega)}$ sont définies pour $p \in [1, \infty]$ et $f \in L^p(\Omega)$ par la formule

$$\|f\|_{L^p_{\eta,\tau}(\Omega)}^2 = \tau^{\frac{d}{3}} \int_{x_0 \in \Omega} \|\eta(\tau^{\frac{1}{3}}(\cdot - x_0))f(\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^2 dx_0.$$

Remarque 1.2.2. Les notations $2*$ et $2*'$ découlent de l'injection de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L^{2*}(\Omega)$, avec $2* = 2d/(d-2)$ et $L^{2*'}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, avec $2*' = 2d/(d+2)$.

L'estimation de Carleman (1.33) coïncide avec celle obtenue dans (1.15) de [IP03] à l'exception des termes impliquant la norme $L^{\frac{2d}{d+2}}_{\eta,\tau}(\Omega)$. Ce terme et l'estimation (3.6) sur u dans $L^{\frac{2d}{d-2}}_{\eta,\tau}(\Omega)$ sont les principales nouveautés de notre résultat et nous permettent de quantifier efficacement les propriétés de prolongement unique pour les solutions d'équations elliptiques par rapport aux normes des potentiels en $L^p(\Omega)$.

Pour mieux comprendre les normes $L^p_{\eta,\tau}(\Omega)$, il est intéressant de pointer les deux estimées suivantes : Pour $p > 2$, il existe C telle que

$$\forall f \in L^p(\Omega), \quad \frac{1}{C} \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p_{\eta,\tau}(\Omega)} \leq C \tau^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\frac{d}{3}} \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

et pour $p < 2$, il existe C tel que

$$\forall f \in L^p(\Omega), \quad \frac{\tau^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\frac{d}{3}}}{C} \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p_{\eta,\tau}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Il est intéressant de comparer (1.22) avec les estimées (1.33)–(1.34) : les puissances du paramètre τ devant les normes $L^{\frac{2d}{d+2}}_{\eta,\tau}(\Omega)$ sont plus petites dans (1.33) ($\tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}}$) que dans (1.22) (τ après multiplication par τ de (1.22)). Ce gain est dû à des estimées plus précises sur les projecteurs spectraux du Laplacien tangentiel (on verra plus tard précisément en quel sens), et permet notamment d'obtenir des résultats de quantification du prolongement unique pour des potentiels $V \in L^{q_0}(\Omega)$ pour $q_0 > d/2$.

Soulignons également que le Théorème 1.2.1 présente des estimations de Carleman globales dans L^p , valables pour des fonctions u ayant éventuellement une trace non nulle sur le bord. À notre connaissance, ceci est nouveau, car toutes les estimations de Carleman L^p avec $p \neq 2$ qu'on a rencontrées dans la littérature sont valables pour des fonctions à support compact.

1.2.2 Quantification du prolongement unique

Comme conséquence des estimations de Carleman du théorème 1.2.1, nous prouverons dans la Section 3.8 le résultat suivant :

Théorème 1.2.3 (Dehman-Ervedoza-Thabouti [DET23]). *Soit $d \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné de classe C^3 et ω un sous-ensemble ouvert non vide de Ω avec $\bar{\omega} \subset \Omega$. Alors il existe une constante $C = C(\Omega, \omega) > 0$ telle que pour toute solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de*

$$\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u) \quad \text{dans } \Omega,$$

avec

$$V \in L^{q_0}(\Omega), \quad W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

on a :

1. Si $q_0 \in (\frac{d}{2}, \infty]$, $q_1 \in (\frac{3d-2}{2}, \infty]$ et $q_2 \in (\frac{3d-2}{2}, \infty]$ et

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 4 \left(\frac{1 - \frac{1}{d}}{3d-2} \right),$$

la fonction u satisfait

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} + (\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)})^{\rho(q_1, q_2)} \right)} \|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}, \quad (1.35)$$

avec

$$\gamma(q) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{d}{2q} \right) + \frac{1}{2q}} & \text{si } q \geq d, \\ \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2d} \right) \left(2 - \frac{d}{q} \right)} & \text{si } q \in \left(\frac{d}{2}, d \right], \end{cases} \quad \delta(q) = \frac{2}{1 - \frac{3d-2}{2q}}, \quad \rho(q_1, q_2) = \frac{1}{1 - \frac{1}{d} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2d} \right) \left(\frac{d}{q_1} + \frac{d}{q_2} \right)}.$$

2. Si $q_0 \in (\frac{d}{2}, \infty]$, $q_1 \in (\frac{3d}{2}, \infty]$ et $q_2 \in (\frac{3d}{2}, \infty]$, la fonction u satisfait

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\tilde{\delta}(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\tilde{\delta}(q_2)} \right)} \|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}, \quad (1.36)$$

avec

$$\tilde{\delta}(q) = \frac{2}{1 - \frac{3d}{2q}}.$$

Plusieurs remarques s'imposent.

D'abord, le prolongement unique est connu pour être valide pour des potentiels $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ lorsque $q_0 \geq d/2$, $q_1 \geq d$ et $q_2 \geq d$, voir les travaux [Wol93] et [KT01] où même le prolongement unique fort est prouvé pour $q_0 > d/2$, $q_1 > d$ et $q_2 > d$. (Ces classes d'intégrabilité pour les potentiels sont optimales, voir [KT02].)

Ces résultats de prolongement unique nécessitent l'utilisation d'une estimation de Carleman et d'un délicat argument d'analyse harmonique inspiré par [Wol92], voir aussi [KT01].

Dans cet argument, la fonction poids dans l'estimation de Carleman dépend de la solution, ce qui rend difficile le suivi de la quantification du prolongement unique par rapport aux normes des potentiels. Un autre résultat connexe est l'article [MV12], qui quantifie les propriétés de prolongement unique pour l'opérateur laplacien avec des termes d'ordre inférieur dans la classe d'intégrabilité optimale, mais pas par rapport aux normes des potentiels. En fait, puisque ce travail est basé sur [KT01], comme mentionné ci-dessus, il n'est pas clair comment la preuve dans [MV12] peut être rendue quantitative par rapport aux normes des potentiels.

Par conséquent, lorsqu'on essaie de quantifier la propriété de prolongement unique par rapport aux normes des termes d'ordre inférieur, il n'est pas clair que l'on puisse atteindre les mêmes échelles d'intégrabilité critiques pour les termes d'ordre inférieur. En fait, les résultats connus reposent uniquement sur l'utilisation d'une estimation de Carleman, ce qui, comme indiqué dans [BKRS88], ne permet pas d'aller au-delà de $W_1 \in L^{\frac{3d-2}{2}}(\Omega)$. Cela correspond à ce qui est fait dans [DZ19, Dav20] en utilisant une estimation de Carleman L^p . Mais les résultats de [DZ19] décrivant l'ordre maximal d'annulation des solutions des équations elliptiques nécessitent respectivement $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > \frac{d}{2}(3d-2)/(5d-2)$ et $W_1 \in L^{q_1}(\Omega)$ avec $q_1 > (3d-2)/2$, et $W_2 = 0$. Notons également que le théorème 1 de [Dav20], qui s'applique lorsque $W_1 = W_2 = 0$, présente la même dépendance par rapport à la norme $L^{q_0}(\Omega)$ de V que dans le Théorème 1.2.3.

Notons enfin que nous ne savons quelle est la dépendance optimale de la constante d'observabilité par rapport aux normes des potentiels dans le cadre général. On sait juste que lorsque le potentiel $V \in L^\infty(\Omega)$ et $W_1 = W_2 = 0$, la constante d'observabilité est nécessairement en $\exp(C\|V\|_{L^\infty(\Omega)}^{2/3})$, cf [Mes91] et [DZZ08], ce qui correspond à notre résultat.

1.2.3 Stratégie de preuve

Pour démontrer le théorème 1.2.1, on commence par le cas géométrique simple d'une bande verticale, avec une fonction poids linéaire $x \mapsto x_1$, et un opérateur du second ordre de la forme $\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$, voir la section 3.2 pour les énoncés.

Bien que cela puisse sembler être un cas très spécifique, on montrera dans la section 3.7 que ce n'est pas le cas, notamment en raison des deux faits suivants :

- Premièrement, si on localise les fonctions dans une boule de rayon suffisamment petit, on peut effectuer un changement de variables (dans l'esprit des coordonnées géodésiques normales), de telle sorte que l'opérateur conjugué $e^{\tau\varphi} \Delta (e^{-\tau\varphi} \cdot)$ peut être reformulé en un problème dans la bande avec un opérateur de la forme $\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$ et la fonction poids linéaire $x \mapsto x_1$.
- Deuxièmement, on peut recoller les estimations de Carleman locales et sur le bord obtenues de cette manière, et les termes de localisation introduits par les troncatures peuvent être absorbés par ce processus si la localisation n'est pas trop forte.

Par conséquent, nous devons équilibrer les deux processus et choisir le taux de localisation de manière appropriée. Il s'avère qu'une localisation dans des boules de taille $\tau^{-\frac{1}{3}}$ fonctionne.

En conséquence, la majeure partie du Chapitre 3 se concentre en fait sur la preuve d'une estimation de Carleman dans la bande pour un opérateur de la forme $\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$ avec une fonction poids linéaire $x \mapsto x_1$.

Ainsi, on considère le cas d'une bande de la forme

$$\Omega = (X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \tag{1.37}$$

et le problème elliptique suivant

$$\begin{cases} \Delta v - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2 v = f_2 + f_{2*'} + \operatorname{div} F & \text{dans } \Omega, \\ v(X_0, x') = g(x'), & \text{pour } x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ v(X_1, x') = 0, & \text{pour } x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \end{cases} \quad (1.38)$$

où

$$f_2 \in L^2(\Omega), \quad f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{et} \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}). \quad (1.39)$$

Pour pouvoir résoudre le problème elliptique (1.38), nous supposons la coercivité de l'opérateur $-\Delta + x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$ dans Ω , c'est-à-dire que

$$\exists c_0 > 0, \quad \forall x_1 \in [X_0, X_1], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{c_0^2} |\xi|^2 \leq \sum_{j=1}^d (1 - x_1 \lambda_j) |\xi_j|^2 \leq c_0^2 |\xi|^2, \quad (1.40)$$

où on a posé $\lambda_1 = 0$ pour plus de commodité. Sous la condition (1.40) et les hypothèses d'intégrabilité et de régularité (1.39), le problème (1.38) admet une solution unique $v \in H^1(\Omega)$.

Pour estimer cette solution, en raison du cadre géométrique spécifique, il est utile d'utiliser une transformation de Fourier dans les variables tangentielles (qui sont transverses au gradient de la fonction poids, c'est-à-dire à la direction e_1), et construire explicitement une paramétrice, voir la section 3.3. En fait, cette approche est inspirée par [Sog89, KT01] et par les travaux récents sur les estimations de Carleman pour l'opérateur de Laplace avec des conductivités discontinues, par exemple [LRL13].

En effet, si $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ est le paramètre de Fourier correspondant à la variable tangentielle $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, le problème (1.38) fait intervenir l'opérateur

$$(\partial_1 - \tau)^2 - \sum_{j=2}^d (1 - x_1 \lambda_j) \xi_j^2 = (\partial_1 - \tau - \psi(x_1, \xi')) (\partial_1 - \tau + \psi(x_1, \xi')) - \partial_1 \psi(x_1, \xi'), \quad (1.41)$$

où

$$\psi(x_1, \xi') = \sqrt{\sum_{j=2}^d (1 - x_1 \lambda_j) \xi_j^2}, \quad x_1 \in [X_0, X_1], \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad (1.42)$$

Il est dès lors facile de résoudre

$$(\partial_1 - \tau - \psi(x_1, \xi')) (\partial_1 - \tau + \psi(x_1, \xi')),$$

ce qui permet de construire une paramétrice explicite pour l'opérateur (1.38) : cette paramétrice est naturellement donnée sous la forme

$$v = K_{\tau,0}(f_2 + f_{2*'}) + K_{\tau,1}(F_1) + \sum_{j=2}^d K_{\tau,j}(F_j) + R_\tau(v) + G_\tau(g) + H_\tau((\partial_1 v - F_1)(X_1, \cdot)),$$

où les opérateurs $K_{\tau,j}$, R_τ , G_τ et H_τ sont des multiplicateurs de Fourier dans la variable ξ' et des opérateurs à noyau dans la première variable. Par exemple, on aura que les opérateurs $K_{\tau,j}$, pour $j \in \{0, \dots, d\}$ sont formellement définis pour f dépendant de $(x_1, x') \in \Omega$, par

$$\widehat{K_{\tau,j} f}(x_1, \xi') = \int_{y_1 \in (X_0, X_1)} k_{\tau,j}(x_1, y_1, \xi') \widehat{f}(y_1, \xi') dy_1, \quad (x_1, \xi') \in \Omega, \quad (1.43)$$

pour un noyau $k_{\tau,j}$.

Au vu de l'équation (1.41), il est naturel de décomposer l'espace des $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ en

$$\xi' \in \mathbb{R}^{d-1} \mapsto \left(\psi(x_1, \xi'), \frac{\xi'}{\psi(x_1, \xi')} \right) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma_{x_1},$$

où Σ_{x_1} est l'ellipsoïde donné par $\Sigma_{x_1} = \{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \psi(x_1, \xi') = 1\}$. Cette décomposition va nous permettre d'utiliser les estimées de Stein Tomas (voir [Tom75], [SM93, theorem 2, page 352], ou [Sog17, Corollary 2.2.2]) pour obtenir des estimées $L^p - L^q$ sur ces opérateurs.

Théorèmes de Restriction et applications.

Commençons par rappeler le théorème classique de Stein Tomas sur la restriction de Fourier :

Théorème 1.2.4 ([Tom75], voir aussi [SM93, Théorème 2, page 352]). *Soit $n \geq 2$, et \mathbb{S}^{n-1} la sphère unité de \mathbb{R}^n .*

Alors l'application

$$\begin{cases} L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \\ f \mapsto \widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \end{cases}$$

peut être prolongée par continuité à $L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$, et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Il est bien connu que ce théorème de restriction peut être prolongé à toute hypersurface de courbure gaussienne non nulle, voir par exemple [Sog17, Corollaire 2.2.2].

En considérant les formules (1.43) et la forme des multiplicateurs de Fourier que nous devons estimer, il est intéressant pour nous d'analyser les théorèmes de restriction de Fourier sur la famille de surfaces

$$\Sigma_a = \{\xi \in \mathbb{R}^n, \psi(a, \xi) = 1\}, \quad a \in [X_0, X_1], \quad (1.44)$$

où par analogie avec la fonction ψ dans (1.42) et les conditions (1.40), on a défini

$$\psi(a, \xi) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (1 - a\lambda_j)\xi_j^2}, \quad a \in [X_0, X_1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.45)$$

où la famille de coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ satisfait à la condition

$$\exists c_0 > 0, \quad \forall a \in [X_0, X_1], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{c_0} |\xi|^2 \leq \sum_{j=1}^n (1 - a\lambda_j) |\xi_j|^2 \leq c_0 |\xi|^2. \quad (1.46)$$

Remarquons qu'en vertu de la condition (1.46), pour tout $a \in [X_0, X_1]$, la surface Σ_a est un ellipsoïde et donc [Sog17, Corollaire 2.2.2] s'applique et garantit que l'application $f \mapsto \widehat{f}|_{\Sigma_a}$ envoie $L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\Sigma_a)$.

En fait, pour le présent travail, on a besoin d'une version légèrement plus raffinée de ce résultat, garantissant que la norme de cette application est indépendante de $a \in [X_0, X_1]$.

Théorème 1.2.5. *Soit $n \geq 2$. Supposons que la famille de coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ satisfait (1.46) pour un certain $c_0 > 0$. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendante uniquement de c_0 (et de n) telle que pour tout $a \in [X_0, X_1]$, pour tout $f \in L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\Sigma_a)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.47)$$

En conséquence, cela permet d'obtenir des estimations sur certaines familles de multiplicateurs de Fourier. Pour être plus précis, pour $X_0 < X_1$ et des coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ satisfaisant (1.46), on définit ψ comme dans (1.45) et Σ_a l'ellipsoïde défini pour $a \in [X_0, X_1]$ par (1.44).

Pour $a \in [X_0, X_1]$ et $k \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Sigma_a))$, on considère des opérateurs donnés comme suit :

$$K_{a,k} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \text{ donné par } \widehat{K_{a,k}(f)}(\xi) = k\left(\psi(a, \xi), \frac{\xi}{\psi(a, \xi)}\right) \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.48)$$

On montre le résultat suivant :

Proposition 1.2.6. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soient $X_0 < X_1$, et les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ satisfaisant (1.46). Pour $a \in [X_0, X_1]$, soit ψ et Σ_a comme dans (1.44)–(1.45). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $a \in [X_0, X_1]$, pour tout $k \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Sigma_a))$, on a*

- *Le multiplicateur de Fourier $K_{a,k}$ dans (1.48) applique $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et*

$$\|K_{a,k}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Sigma_a))}. \quad (1.49)$$

- *Si de plus k satisfait*

$$\int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)} \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} d\lambda < \infty,$$

alors le multiplicateur de Fourier $K_{a,k}$ dans (1.48) appartient à $\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))$ et

$$\|K_{a,k}\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} \leq C \int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)} \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} d\lambda. \quad (1.50)$$

- *Si k satisfait*

$$\int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)}^2 \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} d\lambda < \infty,$$

alors le multiplicateur de Fourier $K_{a,k}$ dans (1.48) appartient à

$$\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n)),$$

et

$$\|K_{a,k}\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C \sqrt{\int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)}^2 \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} d\lambda}, \quad (1.51)$$

$$\|K_{a,k}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} \leq C \sqrt{\int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)}^2 \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} d\lambda}. \quad (1.52)$$

Dans la preuve, on utilisera ensuite Proposition 1.2.6 et les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev en dimension un d'espace pour estimer les normes de chacun des opérateurs $K_{\tau,j}$, R_τ , G_τ et H_τ . On renvoie au Chapitre 3 pour plus de détails.

1.3 Principaux résultats de la thèse, partie II

Dans la deuxième partie de cette thèse, on s'intéresse à traiter le cas avec des potentiels d'ordre un dans des espaces plus singuliers. Plus précisément, notre objectif principal est de prouver le résultat quantitatif de prolongement unique suivant.

1.3.1 Quantification du prolongement unique avec des potentiels d'ordre un dans des classes presque optimales

Théorème 1.3.1 (Caro-Ervedoza-Thabouti [CET24]). *Soit $d \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, et ω et \mathcal{O} des sous-ensembles ouverts non vides de Ω avec $\omega \subset \bar{\omega} \subset \mathcal{O} \subset \bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Supposons en outre la condition géométrique suivante :*

(GC) *Pour tout $y \in \bar{\mathcal{O}}$, il existe $x_0 \in \omega$, $r_y > 0$ et un chemin lisse γ_y de longueur finie tel que $\gamma_y(0) = x_0$, $\gamma_y(1) = y$, et $\cup_{s \in [0,1]} B_{\gamma_y(s)}(r_y) \subset \Omega$, où $B_{\gamma_y(s)}(r_y)$ est la boule centrée en $\gamma_y(s)$ et de rayon r_y .*

Alors, il existe des constantes $C = C(\omega, \mathcal{O}, \Omega) > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ dépendant uniquement de ω , \mathcal{O} et Ω telles que pour toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de

$$\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (1.53)$$

où

$$V \in L^{q_0}(\Omega), \quad W_j \in L^{q_j}(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{avec } q_0 \in \left(\frac{d}{2}, \infty \right], \quad q_j \in (d, \infty], \quad \text{pour } j \in \{1, 2\}, \quad (1.54)$$

nous avons

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} \right)} \|u\|_{H^1(\omega)}^\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad (1.55)$$

avec

$$\gamma(q) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{d}{2q}\right) + \frac{1}{2q}} & \text{si } q \geq d, \\ \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}\right) \left(2 - \frac{d}{q}\right)} & \text{si } q \in \left(\frac{d}{2}, d\right], \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta(q) = \frac{2}{1 - \frac{d}{q}}, \quad \text{si } q > d. \quad (1.56)$$

Notons que la condition géométrique **(GC)** supposée dans le théorème 1.3.1 est une condition technique très légère. Cette condition peut être violée dans certains ensembles de type fractal, mais elle est certainement satisfaite pour la plupart des configurations géométriques. En particulier, cette condition géométrique **(GC)** est satisfaite lorsque ω , \mathcal{O} et Ω sont des boules concentriques, cas dans lequel (1.55) se réduit à l'estimation habituelle de type 3-boules, avec une quantification explicite par rapport aux termes d'ordre inférieur.

Bien sûr, une application directe du théorème 1.3.1 permet d'obtenir la propriété de prolongement unique suivante pour l'opérateur de Laplace : Si $u \in H^1(\Omega)$ satisfait (1.53) avec les potentiels V , W_1 et W_2 comme dans (1.54) et $u = 0$ dans ω , alors $u = 0$ dans tout ensemble \mathcal{O} satisfaisant $\mathcal{O} \Subset \Omega$ et **(GC)**. Le théorème 1.3.1 est une quantification de cette propriété car il stipule que, si $u \in H^1(\Omega)$ est petit dans ω et satisfait (1.53) avec les

potentiels V , W_1 et W_2 comme dans (1.54), alors u est petit dans \mathcal{O} , avec une quantification précise en fonction des normes des potentiels.

Il est bien connu que le prolongement unique est valide pour des potentiels généraux $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, où $q_0 \geq d/2$, $q_1 \geq d$, et $q_2 \geq d$ (voir [Wol93]). De plus, un prolongement unique forte a même été prouvée dans les cas où $q_0 > d/2$, $q_1 > d$, et $q_2 > d$ (voir [KT01]). Ces classes d'intégrabilité pour les potentiels sont optimales, comme le montre [KT02]. Cependant, établir des résultats de prolongement unique nécessite l'utilisation d'une estimation de Carleman et un argument délicat dû à T. Wolff, voir [Wol92], comme discuté également dans [KT01]. Cet argument nécessite de choisir une fonction poids dans l'estimation de Carleman dépendant de la solution u elle-même. La question de quantifier la propriété de prolongement unique en fonction des normes des potentiels est donc assez délicate, et c'est la principale nouveauté de notre travail.

Nous mentionnons également le travail [MV12], qui quantifie les propriétés de prolongement unique pour l'opérateur de Laplace avec des termes d'ordre inférieur dans la classe d'intégrabilité optimale. Cependant, il ne fournit pas de quantification explicite en fonction des normes des potentiels. Encore une fois, étant donné que ce travail s'appuie sur [KT01], comme mentionné précédemment, il reste incertain comment la preuve dans [MV12] peut être rendue quantitative en fonction des normes des potentiels.

Lors de la tentative de quantification de la propriété de prolongement unique en fonction des normes des termes d'ordre inférieur, les résultats connus reposent uniquement sur l'utilisation d'une estimation de Carleman telle que celle présentée dans la première partie 1.2, cf (1.2.1), qui, comme le souligne [BKRS88], ne permet pas de dépasser $W_1 \in L^{\frac{3d-2}{2}}(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Cela correspond à ce qui est fait dans [DZ19, Dav20, DET23] en utilisant des estimations de Carleman L^p . Les résultats de [DZ19] décrivant l'ordre maximal d'annulation des solutions d'équations elliptiques nécessitent que V et W_1 soient respectivement dans $L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > d(3d-2)/(5d-2)$ et dans $L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ avec $q_1 > (3d-2)/2$, et $W_2 = 0$. Ceci a été amélioré dans [DET23] (voir Théorème 1.2.3 et sa preuve au Chapitre 3) en utilisant de nouvelles estimations de Carleman L^p permettant de traiter V et W_1 respectivement dans $L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > d/2$ et dans $L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ avec $q_1 > (3d-2)/2$, montrant la même dépendance en $\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}$ que dans [Dav20], qui était limité au cas $W_1 = W_2 = 0$.

Nous soulignons également que les estimations de Carleman L^2 ne permettent pas d'atteindre la classe d'intégrabilité optimale pour les potentiels et les termes d'ordre inférieur, voir par exemple [SS82] où il est montré qu'on peut obtenir des résultats de prolongement unique quantifiés pour des potentiels $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > 2d/3$. En fait, même en utilisant des estimations de Carleman L^p , on peut obtenir des résultats de prolongement unique pour des potentiels V dans la classe d'intégrabilité optimale ($V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > d/2$), mais sous des conditions d'intégrabilité restrictives sur W_1 et W_2 , voir par exemple [BKRS88] et [Wol93].

Le théorème 1.3.1 constitue une amélioration du Théorème 1.2.3 présenté dans la partie 1.2. Le théorème 1.3.1 autorise des termes d'ordre inférieur non triviaux $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ avec $q_1 > d$ et $q_2 > d$, tandis que le Théorème 1.2.3 est limité à des classes d'intégrabilité plus élevées. En effet, le Théorème 1.2.3 affirme que si $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ avec $q_1 > (3d-2)/2$, $q_2 > (3d-2)/2$ et $1/q_1 + 1/q_2 < 4(1-1/d)/(3d-2)$, alors toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de (1.53) satisfait

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C e^{C\left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}}^{\tilde{\delta}(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}}^{\tilde{\delta}(q_2)} + (\|W_1\|_{L^{q_1}} \|W_2\|_{L^{q_2}})^{\rho(q_1, q_2)}\right)} \|u\|_{H^1(\omega)}^\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad (1.57)$$

avec

$$\tilde{\delta}(q) = \frac{2}{\left(1 - \frac{3d-2}{2q}\right)} \quad \text{et} \quad \rho(q_1, q_2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{d}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}\right)\left(\frac{d}{q_1} + \frac{d}{q_2}\right)}.$$

En conséquence, la dépendance en fonction des normes des potentiels W_1 et W_2 est également plus faible dans (1.55) que dans (1.57), puisque δ donnée par (1.56) est plus petite que $\tilde{\delta}$, même pour $q > (3d - 2)/2$.

En fait, cela suggère également d'analyser l'optimalité des coefficients γ et δ dans (1.56), mais cette question est, à notre connaissance, entièrement ouverte, sauf dans le cas où $W_1 = W_2 = 0$ et $V \in L^\infty(\Omega)$. En effet, dans ce cas, il est connu que la dépendance de la constante dans la quantification du prolongement unique est de la forme $C \exp(C\|V\|_{L^\infty}^{\frac{2}{3}})$, voir [Mes91, DZZ08]. Cela coïncide avec notre estimation puisque $\gamma(\infty) = 2/3$.

Notre preuve ne permet pas d'obtenir une estimation jusqu'à la frontière de Ω . Cela est dû à un fait technique, venant d'une part de l'utilisation de l'argument de Wolff et d'autre part de l'utilisation de l'estimation de Carleman dans [DET23]. En effet, comme nous le verrons, en gros, l'argument de Wolff nécessite la possibilité de manipuler (le gradient de) la fonction poids dans l'estimation de Carleman. Mais l'estimation de Carleman dans [DET23] (présentée au Théorème 3.1.1), que nous utiliserons et revisiterons dans ce travail, exige que la frontière du domaine soit un ensemble de niveau de la fonction poids. Ces deux conditions sont donc incompatibles et posent problème lorsqu'on travaille dans un voisinage de la frontière.

Nous souhaitons également souligner que les opérateurs de Schrödinger dans (1.53) incluent également la considération de potentiels $V \in W^{-1, d+\epsilon}(\Omega)$, où $\epsilon > 0$. En effet, tout potentiel de ce type peut être représenté sous la forme $V \equiv V_0 + \operatorname{div}(W)$, avec $V_0 \in L^{d+\epsilon}(\Omega) \subset L^{\frac{d}{2}+\epsilon}(\Omega)$ et $W \in L^{d+\epsilon}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ (voir, par exemple, [AF03, Théorème 3.9]). Par conséquent, on peut réécrire Vu sous la forme $Vu = V_0u + \operatorname{div}(Wu) - W \cdot \nabla u$.

1.3.2 Ingrédients

1.3.2.1 Lemme de Wolff

L'argument de T. Wolff [Wol92, Lemme 1] est une technique purement issue de l'analyse harmonique. Associé aux estimations de Carleman, il est utilisé pour établir la propriété de prolongement unique pour l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + W \cdot \nabla$, y compris dans le cas du terme de potentiel de gradient dans l'espace invariant d'échelle $W \in L^d$. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Lemme 1.3.2. *Supposons que μ est une mesure positive dans \mathbb{R}^d qui décroît plus vite qu'exponentiellement au sens suivant :*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \log(\mu\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \geq T\}) = -\infty. \quad (1.58)$$

Pour $k \in \mathbb{R}^d$, définissons une mesure μ_k par $d\mu_k(x) = e^{k \cdot x} d\mu(x)$. Supposons que $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ soit un ensemble convexe compact. Alors il existe une suite $\{k_j\} \subset \mathcal{C}$ et des ensembles convexes

disjoints $\{E_{k_j}\} \subset \mathbb{R}^d$ tels que les mesures $d\mu_{k_j}$ soient concentrées dans E_{k_j} ,

$$\mu_{k_j}(\mathbb{R}^d \setminus (1+T)E_{k_j}) \leq \frac{1}{2}e^{-T/C_W} \|\mu_{k_j}\|, \quad \forall T \geq 0. \quad (1.59)$$

et tel que

$$\sum_j |E_{k_j}|^{-1} \geq C_W^{-1} |\mathcal{C}|, \quad (1.60)$$

où C_W est une constante positive dépendant uniquement de d , et $(1+T)E_{k_j}$ est la dilatation de E_{k_j} autour de son barycentre par un facteur de $1+T$.

Remarque 1.3.3. La propriété (1.59) signifie que pour tout $\gamma \geq \gamma_0 \geq 1$, il existe un $T_\gamma \geq 1$ tel que pour tout $T \geq T_\gamma$, nous avons

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d, |x| \geq T\}) \leq e^{-\gamma T}.$$

La propriété (1.60) peut être remplacée par $\sum_j |E_{k_j} \cap \mathcal{C}|^{-1} \geq C_W^{-1} |\mathcal{C}|$, comme présenté dans [Wol93, Théorème 3.1], ce qui donne un résultat légèrement plus fort.

Exemple 1.3.1. Pour illustrer le Lemme 1.3.2, on considère le cas des mesures Gaussiennes, correspondant à $d\mu(x) = e^{-|x|^2/2} dx$. Alors, pour $k \in \mathbb{R}^d$, la famille

$$d\mu_k(x) = e^{k \cdot x} e^{-|x|^2/2} dx = e^{\frac{1}{2}k^2} e^{-|x-k|^2/2} dx,$$

se composent des gaussiennes translatées centrées en k , et la majeure partie de la masse de μ_k est concentrée près de k . En particulier, si $E_k = B(k, 1)$, alors

$$\mu_k(\mathbb{R}^d) \leq C \mu_k(E_k), \quad (1.61)$$

pour une constante C indépendante de k . Si $|k_1 - k_2| > 2$, alors les E_{k_1} et E_{k_2} sont des ensembles disjoints. Ainsi, si nous nous limitons aux vecteurs k tels que $|k| \in [M, 2M]$, nous pouvons obtenir un ensemble d'indices J , des $(k_j)_{j \in J}$ dans $[M, 2M]$, tel que les ensembles disjoints $E_{k_j} = B(k_j, 1)$ satisfont (1.61), et tels que $|J| \simeq |M|^d$, si bien que

$$\sum_{j=1}^{|J|} |E_{k_j}|^{-1} \gtrsim M^d.$$

Note que cette discussion concerne le cas $T = 0$ dans (1.59), mais que la discussion ci-dessus s'applique bien sûr également dans le cas $T > 0$.

L'idée de Wolff.

Si on vise à établir un résultat quantitatif de prolongement unique avec des potentiels $W_1 \in L^{q_1}$ et $W_2 \in L^{q_2}$, où $d < q_1 \leq \frac{3d-2}{2}$ et $d < q_2 \leq \frac{3d-2}{2}$, on sait, d'après les résultats de prolongement unique, qu'atteindre cet objectif uniquement à travers des estimations de Carleman n'est pas possible. En effet, pour appliquer la méthode de Carleman comme précédemment, il faudrait développer une estimation de Carleman pour le terme gradient ∇u de la forme, pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ et pour tout τ suffisamment grand

$$\|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^r(\Omega)} \leq C \|e^{\tau\varphi} \Delta u\|_{L^{p'}(\Omega)}, \quad (1.62)$$

où $\frac{1}{p'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$. Jerison [Jer86, Proposition 1 et Proposition 2] et Barcelo-Kenig-Ruiz-Sogge [BKRS88, Théorème 2] ont observé que cette stratégie rencontre des problèmes lorsque q rapproche de l'exposant optimal d . Ils ont montré qu'aucune estimation de Carleman avec gradient ne peut être obtenue avec des poids linéaires φ à moins que $r \leq p'$, en particulier $r = p' = 2$. En d'autres termes, il n'y a aucun gain en exposant. En revanche, ils ont prouvé le prolongement unique pour $A \in L^{\frac{3d-2}{2}}$ et $V \in L^{\frac{d}{2}}$ en établissant une estimation de Carleman avec le poids convexe $\varphi = x_1 + x_1^2$. De plus, ils ont démontré que pour toute fonction poids régulière $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, l'estimation (1.62) ne peut pas être satisfaite uniformément en τ et u sauf si $\frac{1}{p'} - \frac{1}{r} \leq \frac{2}{3d-2}$.

L'idée de Wolff est de dire que pour certains choix de paramètres, ou de fonctions poids, le terme source $\exp(\tau\varphi)\Delta u$ se concentre sur un ensemble de mesure petit. On peut alors utiliser des inégalités de Carleman raffinées (voir Théorème 1.3.4 ci-après) pour utiliser que ce terme est essentiellement concentré sur un ensemble de mesure petit.

1.3.3 Estimations de Carleman L^p améliorées

Pour appliquer l'argument de Wolff et obtenir le Théorème 1.2.3, nous prouvons une version raffinée du Théorème 1.2.1, dont la démonstration sera donnée dans la Section 4.3.

Théorème 1.3.4 (Caro-Ervedoza-Thabouti [CET24], cf Theorem 4.2.4 au Chapitre 3). *Soit $d \geq 3$. Considérons un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et des sous-ensembles ouverts non vides ω_0 et ω de Ω avec $\omega_0 \Subset \omega \Subset \Omega$. Soit $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$ satisfaisant les conditions (1.30)–(1.31).*

Alors, pour tout sous-ensemble compact K de Ω , il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ (dépendant uniquement de $\alpha, \beta, \|\varphi\|_{C^3(\overline{\Omega})}$, et de la configuration géométrique de Ω, ω , et K) tels que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant $\text{supp } u \subset K$ et (1.32) avec $(f_2, f_{2'}, F = F_2 + F_{2*'})$ satisfaisant*

$$f_2 \in L^2(\Omega), \quad f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F_2 \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{and} \quad F_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad (1.63)$$

on a, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|e^{\tau\varphi} F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|e^{\tau\varphi} F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{H^1(\omega)} \right), \quad (1.64) \end{aligned}$$

et, pour tout ensemble mesurable E de Ω ,

$$\begin{aligned} &\tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau |E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(E)} + \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(E)} \right) \\ &\leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|e^{\tau\varphi} F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \|F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{H^1(\omega)} \right). \quad (1.65) \end{aligned}$$

Remarque 1.3.2. *Le théorème 1.3.4 présente plusieurs nouvelles caractéristiques par rapport au théorème 1.2.1 :*

- *L'une des principales différences entre le théorème 1.3.4 et le théorème 1.2.1 est que le théorème 1.3.4 permet un terme source de la forme $\text{div}(F_{2*'})$ avec $F_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et quantifie l'estimation sur la solution u de (1.32) en fonction de la norme*

$L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ de F_{2*} . Notons que la norme $L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ de F_{2*} apparaissant dans les membres de droite de (1.64)–(1.65) apparaît avec une puissance du paramètre de Carleman qui est strictement inférieure à celle apparaissant pour les normes $L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ de F_2 . En quelque sorte, pour F_{2*} , la perte d'ellipticité de l'opérateur de Laplace conjugué $e^{\tau\varphi}\Delta(e^{-\tau\varphi}\cdot)$ apparaît dans la norme $L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ de F_{2*} et non dans sa norme $L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$.

- L'estimation (1.65) présente également une estimation de la norme H^1 de u sur des ensembles mesurables E . Des améliorations similaires apparaissent dans le travail [Wol92, Section 6]. Notons que ces estimations sont particulièrement pertinentes lorsque $|E| \lesssim \tau^{-d}$, c'est-à-dire sur des sous-ensembles mesurables petits, pour lesquels on obtient de (1.65) une estimation sur $\tau^{\frac{7}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^2(E)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}\nabla u\|_{L^2(E)}$ - au lieu de l'estimée sur $\tau^{\frac{3}{2}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}}\|e^{\tau\varphi}\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ donnée par (1.64). Cette estimation est raisonnable et doit être comparée au terme $\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}$ car, d'après l'estimation de Hölder,

$$\tau^{\frac{7}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^2(E)} \leq \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(E)} (\tau|E|^{\frac{1}{d}}) \lesssim \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}.$$

Cependant, notons que pour les grands ensembles E , l'estimation dans (1.65) de la norme L^2 de $e^{\tau\varphi}u$ est pire que l'estimation donnée par (1.64).

- Concernant les termes d'observation, c'est-à-dire les termes impliquant des normes sur ω , les estimations (1.64) et (1.65) impliquent la norme $H^1(\omega)$ de u au lieu de normes plus faibles comme dans (1.33) et (1.34). En fait, nous l'écrivons pour plus de commodité, car cela n'aura aucun impact sur le résultat énoncé dans le théorème 1.3.1.
- Dans ce travail, nous nous concentrons sur la dérivation d'estimations locales de Carleman (en d'autres termes, nous considérons uniquement des fonctions u à support compact). Néanmoins, il convient de noter que, suivant la démonstration du théorème 1.2.1 (en particulier la sous-section 6.4), le théorème 1.3.4 peut être étendu aux fonctions $u \in H^1(\Omega)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet possiblement non homogènes.

1.3.4 Stratégie de preuve

Dans cette section, on présente une esquisse de preuve du Théorème 1.2.3. La preuve complète se trouve dans le Chapitre 4. La preuve repose sur les estimations de Carleman présentées au Théorème 1.3.4 et le lemme de Wolff (lemme 1.3.2). L'essentiel du travail consiste à prouver le théorème 1.2.3 dans un cadre géométrique spécifique impliquant une boule de rayon $R > 0$ (rappelons que $B_0(r)$ désigne la boule centrée en 0 et de rayon r). Dans ce contexte, nous visons à prouver le lemme suivant sur le prolongement unique quantitatif, comme présenté dans le Théorème 1.2.3.

Lemma 1.3.3. *Soit $R > 0$ et $d \geq 3$. Nous considérons le cadre géométrique suivant (voir Figure 1.1) :*

$$\Omega = B_0(2R) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{4} \right\}, \quad \mathcal{O} = B_0\left(\frac{3R}{2}\right) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{3} \right\}, \quad \text{et } \omega = (B_0(2R) \setminus B_0(R)) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{4} \right\},$$

Il existe des constantes $C = C(R, d) > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ dépendant seulement de R et d de sorte que toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de (1.53) avec (V, W_1, W_2) comme dans (1.54) satisfait l'estimation de continuité unique quantitative (1.35) avec γ et δ comme dans (1.56).

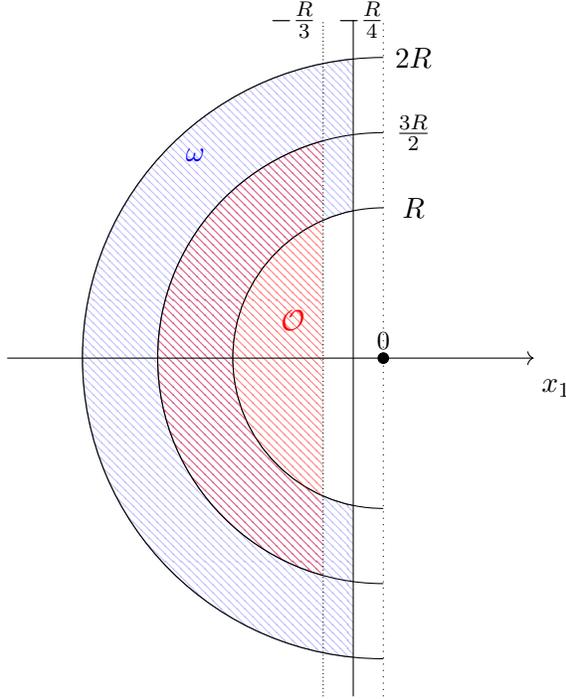


FIGURE 1.1 – Le cadre géométrique du Lemme 1.3.3 : Propagation de la petitesse de gauche à droite.

Notre objectif est d'expliquer comment nous pouvons combiner les estimations de Carleman établies dans le théorème 1.3.4 et l'argument de Wolff (Lemme 1.3.2) afin d'obtenir l'estimation de prolongement unique quantitatif (1.35).

Une remarque clé est que le lemme de Wolff s'applique à des fonctions poids linéaires de la forme $y \mapsto k \cdot y$ pour $k \in \mathbb{R}^d$, tandis que nos estimations de Carleman sont valables sous des conditions de sous-ellipticité appropriées sur la fonction poids ((1.30)–(1.31)), alors que le paramètre τ est un nombre réel positif.

Pour utiliser simultanément les deux outils, nous construisons une famille de fonctions poids qui satisfont uniformément aux conditions de sous-ellipticité (1.30)–(1.31) et à l'argument de Wolff.

Lemma 1.3.4. *Dans le cadre géométrique du Lemme 1.3.3, pour $k \in \mathbb{R}^d$, nous posons*

$$\varphi_k(x) = k_1 x_1^2 + k' \cdot x', \quad x \in \Omega. \quad (1.66)$$

Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que

1. Pour tout $k \in B_{e_1}(\epsilon)$, la fonction φ_k satisfait (1.30) et (1.31) avec certaines constantes positives $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ indépendantes de $k \in B_{e_1}(\epsilon)$, et sa norme C^3 sur $\bar{\Omega}$ est bornée indépendamment de $k \in B_{e_1}(\epsilon)$.
2. Il existe $\rho > 0$ tel que

$$\inf_{k \in B_{e_1}(\epsilon)} \inf_{x \in \mathcal{O}} \{\varphi_k(x)\} \geq (1 + \rho) \sup_{k \in B_{e_1}(\epsilon)} \left\{ \sup_{x \in \Omega \cap \{x_1 \in (-\frac{7R}{24}, -\frac{R}{4})\}} \{\varphi_k(x)\} \right\}. \quad (1.67)$$

3. En posant $\Sigma_\epsilon = \{k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \text{ tel que } |k/|k| - e_1| \leq \epsilon\}$, la famille $(\varphi_k)_{k \in \Sigma_\epsilon}$ satisfait la propriété suivante : Si f est une fonction positive à support compact dans Ω , nous définissons la famille $d\mu_k(x) = e^{\varphi_k(x)} f(x) dx$, alors pour $\mathcal{C} \subset \Sigma_\epsilon$ il existe une famille $(k_j)_{j \in J}$ d'éléments de \mathcal{C} et des ensembles disjoints deux à deux $(E_{k_j})_{j \in J}$ inclus dans Ω de sorte que les mesures $d\mu_{k_j}$ satisfont (1.59) avec $T = 0$ et la famille $(E_{k_j})_{j \in J}$ satisfait (1.60) avec C_W une constante positive dépendant uniquement de d et Ω .

Dans la preuve, on utilisera ensuite Lemme 1.3.3 pour montrer l'estimation de quantification 1.36 dans un cadre géométrique impliquant une boule observée depuis un voisinage de sa frontière, puis une estimation de trois boules. Enfin, on utilisera ce dernier pour établir le cas général et terminer la preuve du Théorème 1.3.1. On renvoie au Chapitre 4 pour plus de détails.

1.4 Problèmes ouverts et perspectives

Nous fournissons ci-après quelques problèmes ouverts liés à cette thèse.

- **Quantification globale du prolongement unique** : Le Théorème 1.3.1 permet de quantifier le prolongement unique *local* pour des opérateurs elliptiques de la forme $\Delta + V \cdot + W_1 \cdot \nabla + \text{div}(W_2 \cdot)$ pour des classes quasi-optimales de potentiels V , W_1 et W_2 . Toutefois, nous ne sommes pas en mesure de dominer entièrement la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$, c'est-à-dire d'estimer u jusqu'au bord de Ω . La difficulté vient de la combinaison délicate de l'argument de Wolff et des estimations de Carleman (Lemme 1.3.2 et Théorème 1.3.4), qui requièrent des conditions différentes sur le poids : d'une part, le Théorème 1.3.4 requiert que le bord du domaine soit une ligne de niveau du poids ; d'autre part, le Lemme 1.3.2 demande de jouer avec la fonction poids, en autorisant notamment des modifications de son gradient $\nabla\varphi$. Il serait intéressant de réussir à contourner ces deux exigences contradictoires, afin d'obtenir une quantification *globale* du prolongement unique.

- **Optimalité des coefficients γ et δ** . Une question importante et entièrement ouverte, sauf en des cas particuliers, est concernant l'optimalité des coefficients γ et δ dans (1.56). En effet, dans le cas $W_1 = W_2 = 0$ et $V \in L^\infty(\Omega)$, il est connu que la dépendance de la constante dans la quantification du prolongement unique est de la forme $C \exp(C\|V\|_{L^\infty}^{\frac{2}{3}})$, voir [Mes91]. Cela coïncide avec notre estimation car $\gamma(\infty) = 2/3$.

- **Prolongement unique : cas d'une métrique $W^{1,d}$** . Soit $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n} \in W^{1,d}(\Omega, M_{d \times d})$ uniformément elliptique¹. Considérons l'équation suivante

$$\text{div}(A(x)\nabla u) = 0, \quad \text{dans } \Omega.$$

Lorsque A est isotrope, c'est-à-dire lorsque $A(x) = a(x)I_{d \times d}$, avec a une fonction réelle strictement positive, l'équation ci-dessus se réécrit sous la forme

$$\Delta u + W \cdot \nabla u = 0, \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.68}$$

avec $W := \nabla \log(a)$. En particulier, si $a \in W^{1,d}$ et est elliptique, $W \in L^d$ et les résultats classiques de prolongement unique (par exemple [Wol92]) s'appliquent (le nôtre également si $a \in W^{1,d^+}$).

1. Il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et tout $x \in \Omega$, $\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$.

Grâce au résultat de T. Wolff en 1992 [Wol92], le prolongement unique est alors valide pour cette équation pour $W \in L^d(\Omega)$.

On aimerait développer la machinerie développée dans le cadre de la thèse pour le Laplacien dans le cadre de métriques $A = A(x) \in W^{1,d}$ elliptiques plus générales, par exemple dans le cadre $W^{1,\infty}$ correspondant au cadre classique pour les inégalités de Carleman Hilbertiennes (voir [IP03]), voire des métriques plus singulières dans $W^{1,d}$ comme dans le travail [KRS16].

• **Prolongement unique pour le problème de Stokes stationnaire.** La propriété de prolongement unique est bien établie pour l'opérateur de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta u + a \cdot \nabla u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u) = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, lorsque $a \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d)$, cf Fabre et Lebeau en 1996 [FL96]. Au vu des résultats sur le prolongement unique et le prolongement unique fort, il est naturel de conjecturer que le prolongement unique pour l'opérateur de Stokes est aussi vrai lorsque $a \in L^d(\Omega; \mathbb{C}^d)$ (ou $a \in L^{d^+}(\Omega; \mathbb{C}^d)$), comme conjecturé par exemple dans [Ler19, Conjecture 11.28].

• **Contrôlabilité de la chaleur avec des potentiels singuliers.** Tout d'abord, énonçons un résultat concernant la contrôlabilité de la chaleur avec des potentiels singuliers. Une application de nos estimations de Carleman L^p elliptiques globales dans le travail [DET23] est la contrôlabilité de la chaleur avec des potentiels indépendants du temps. En suivant la stratégie de Lebeau-Robiano [LR95], il est possible de montrer que, pour $V \in L^{\frac{d+1}{2}}(\Omega)$, le système

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + V(x)u(t, x) = 1_\omega f, & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.69)$$

est contrôlable à zéro.

Parmi les problèmes ouverts, on peut se demander si le système (1.69) perturbé avec des opérateurs d'ordre un $u \mapsto W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ est contrôlable à zéro lorsque :

- W_1 et W_2 ne dépendent que de l'espace et sont dans une classe $L^q(\Omega)$ avec $q \in (d, 2d]$. En effet, si W_1 et W_2 sont dans $L_t^\infty((0, T); L^{2d^+}(\Omega))$, les estimées de Carleman globales de [IY03] permettent de conclure. Notons également que l'approche de Lebeau-Robiano dans [LR95] s'applique difficilement lorsque l'opérateur Δ est perturbé avec un opérateur non autoadjoint de la forme $W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ (on rappelle l'article [Léa10], qui montre que cela marche en dimension un et deux d'espace, mais pas au-delà).
- les potentiels V , W_1 et W_2 dépendent du temps et de l'espace et sont des classes optimales $L_t^q L_x^p$ pour le prolongement unique, comme dans [KT09]. Pour cela, on sera amené à développer des inégalités de Carleman $L_t^q L_x^p$ globales dans un cadre parabolique.

• **Une métrique Lipschitz présentant des sauts à une interface.** Une question intéressante serait d'obtenir des résultats de prolongement unique pour des opérateurs elliptiques du second ordre plus généraux, de la forme

$$\mathcal{L}(x, \partial) := \operatorname{div}(A(x)\nabla), \quad (1.70)$$

dans un domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^d , où A est une matrice dont les coefficients présentent un saut à travers une interface, et dont les coefficients sont réguliers de part et d'autres de l'interface.

Un tel modèle a été étudié dans les travaux récents [LRR10, LRL13] à l'aide d'inégalités de Carleman dans un cadre Hilbertien. Nous souhaiterions développer des inégalités de Carleman L^p pour ce type de modèles, dans l'espoir de démontrer des résultats de prolongement unique quantifié dans des classes quasi-optimales d'intégrabilité des potentiels. Pour cela, on peut également citer l'approche développée dans [DCFL⁺17], basée sur des calculs assez similaires à ceux que nous faisons, en particulier utilisant une approche purement Fourier et une factorisation de l'opérateur conjugué construisant une paramétrice, voir aussi [FLVW16] pour les applications au prolongement unique quantifié.

• ***L'équation de Schrödinger et l'équation des ondes avec des potentiels singuliers.*** On peut aussi considérer respectivement l'équation de Schrödinger et l'équation des ondes

$$\mathcal{L}_S := i\partial_t u + \Delta u, \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \quad (1.71)$$

$$\mathcal{L}_o := \partial_t^2 u - \Delta u, \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \quad (1.72)$$

où des questions similaires se posent :

- ***Prolongement unique avec des potentiels singuliers d'ordre un.*** La propriété de prolongement unique sous des conditions géométriques bien précisées est bien établie pour ces deux opérateurs perturbés avec des opérateurs d'ordre zéro $u \mapsto V(t, x)u$, pour $V \in L^{\frac{d+1}{2}}((0, T) \times \Omega)$ dans le cas d'équation de Schrödinger et pour $V \in L^{\frac{d+2}{2}}((0, T) \times \Omega)$ dans le cas d'équation des ondes, voir, e.g., [Sog92, KS88, IK04, DSF05, KT05a]. Une question naturelle (et probablement très difficile) serait d'adapter l'argument de Wolff [Wol92] et de démontrer le prolongement unique en perturbant ces opérateur \mathcal{L}_S et \mathcal{L}_o avec des opérateurs d'ordre un $u \mapsto W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$, pour W_1 et $W_2 \in L^{d+1}((0, T) \times \Omega; \mathbb{C}^d)$ dans le cas d'équation de Schrödinger et pour W_1 et $W_2 \in L^{d+2}((0, T) \times \Omega; \mathbb{C}^d)$ dans le cas de l'équation des ondes.
- ***Contrôlabilité avec des potentiels singuliers.*** Une réponse satisfaisante à la question précédente amènerait naturellement des résultats de contrôlabilité pour les équations de Schrödinger et des ondes dans des cadres géométriques convenables, en présence de potentiels d'ordre 0 et 1 dépendant du temps et de l'espace.

1.5 Organisation de la thèse

Le reste de la thèse s'organise autour de trois parties qui peuvent être lues de manière indépendante.

- Dans le chapitre 2, on établit des inégalités de Carleman pour le Laplacien dans la bande $\mathcal{S} = (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$ avec un poids qui ne dépend que de x_1 , d'abord dans le cadre hilbertien L^2 , puis dans le cadre L^p pour certains exposants p bien choisis.
- Dans le chapitre 3 on établit les estimations de Carleman L^p globales présentées dans le Théorème 1.2.1 et on fournit une application de quantification du prolongement unique, cf Théorème 1.2.3. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Belhassen Dehman et Sylvain Ervedoza [DET23].

- Le Chapitre 4 étudie la quantification du prolongement unique pour le Laplacien perturbé par des potentiels dans des espaces L^p optimaux, et établit le Théorème 1.3.1. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Pedro Caro et Sylvain Ervedoza [CET24].

Chapitre 2

Estimées de Carleman elliptiques L^p sur une bande de \mathbb{R}^d

Contents

2.1	Introduction	41
2.1.1	Notations	42
2.2	Inégalité de Carleman L^2	42
2.2.1	Estimation <i>a priori</i>	42
2.2.2	Inégalité de Carleman avec un poids linéaire	45
2.2.3	Optimalité	52
2.2.4	Inégalité de Carleman avec un poids strictement convexe	53
2.2.5	Optimalité	61
2.3	Inégalité de Carleman H^{-1}	62
2.3.1	Estimation <i>a priori</i>	62
2.3.2	Inégalité de Carleman avec un poids linéaire	64
2.4	Théorème de restriction et le multiplicateur de Fourier	66
2.4.1	Théorème de restriction Stein-Tomas	66
2.4.2	Multiplicateurs radiaux de Fourier	68
2.5	Inégalité de Carleman L^p	70
2.5.1	Estimation <i>a priori</i> $L^p - L^{p'}$	70
2.5.2	Inégalité de Carleman L^p avec un poids linéaire	72
2.5.3	Application au prolongement unique	79
2.5.4	Inégalité de Carleman L^p avec un poids strictement convexe	81

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les inégalités de Carleman pour le Laplacien sur la bande $\mathcal{S} = (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$ avec un poids ne dépendant que de la variable x_1 , d'abord dans le cadre hilbertien L^2 , puis dans le cadre L^p pour certains exposants p bien choisis. Les inégalités de Carleman elliptiques (en particulier celles du Laplacien) sont à présent bien comprises dans le cadre hilbertien. L'objectif de ce travail est d'introduire une méthode pouvant être adaptée au cadre L^p . Les méthodes classiques, notamment celles basées sur les intégrations par parties ou les techniques d'analyse microlocale basées sur l'étude du commutateur des parties symétriques et antisymétriques de l'opérateur conjugué et l'inégalité de Gårding, ne

peuvent pas être appliquées dans un cadre non-hilbertien. Nous suivons donc une approche différente en nous inspirant des travaux [JK85, Sog89, KT01, Sog90] et ceux plus récents [LRL13, DCFL⁺17, DE22]. Nous construisons une paramétrice pour le Laplacien conjugué par le poids $\Delta_\varphi := e^{-\tau\varphi}\Delta e^{\tau\varphi}$ où φ est une fonction qui ne dépend que de la variable normale $x_1 \in (0, 1)$. Pour ce faire, suivant une idée de A.-P. Calderón [Cal58], on factorise l'opérateur conjugué en un produit de deux opérateurs d'ordre un. Ensuite, en exploitant la structure particulière de ces opérateurs, on construit la paramétrice en appliquant la transformée de Fourier sur les variables verticales. Ensuite, on démontre les estimations souhaitées sur ces formules exactes. Dans le cadre hilbertien, on utilise l'identité de Plancherel et estime les noyaux de la paramétrice. Dans un cadre non hilbertien, on revisite le théorème de restriction de Fourier pour établir des estimations sur des opérateurs de multiplication de Fourier, et on les combine avec le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev pour démontrer des estimations de Carleman L^p .

2.1.1 Notations

On commence par fixer les notations. On notera par $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) = (x_1, x')$ le point courant de \mathbb{R}^d et pour une fonction f définie sur \mathbb{R}^d telle que $f(x_1, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^{d-1})$, on définit la transformation de Fourier partielle par

$$\widehat{f}(x_1, \xi') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} f(x_1, x') dx', \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.1)$$

On a la formule d'inversion de Fourier

$$f(x_1, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{ix' \cdot \xi'} \widehat{f}(x_1, \xi') d\xi', \quad f(x_1, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Ainsi, on montre que la transformée de Fourier réalise un isomorphisme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$. Par dualité, elle réalise aussi un isomorphisme sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous désignons par \mathcal{S} une bande de \mathbb{R}^d , définie comme $(0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$.

2.2 Inégalité de Carleman L^2

2.2.1 Estimation *a priori*

Notre point de départ est l'estimation *a priori* suivante

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où u est la solution de l'équation de Laplace $\Delta u = f$ sur un ouvert Ω borné (dans une direction au moins), avec une condition au bord Dirichlet homogène. Cette estimation est classique et sa démonstration bien connue. Notre objectif ici est de fournir une preuve qui utilise une formule explicite de la solution u en fonction de la source f , obtenue à l'aide d'une paramétrice du Laplacien. Le théorème que nous obtenons est le suivant :

Théorème 2.2.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathcal{S})$, le système*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \mathcal{S}, \\ u(0, \cdot) = u(1, \cdot) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \end{cases} \quad (2.2)$$

admet une unique solution $u \in H^2(\mathcal{S})$ vérifiant

$$\|u\|_{H^2(\mathcal{S})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathcal{S})}. \quad (2.3)$$

Démonstration. On commence par décomposer le Laplacien sous la forme suivante

$$\Delta u = \partial_{11}u + \Delta' u \quad \text{sur} \quad \mathcal{S} = (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

En appliquant alors la transformée de Fourier partielle à l'équation (2.2), nous obtenons :

$$\begin{cases} \partial_{11}\widehat{u}(x_1, \xi') - |\xi'|^2\widehat{u}(x_1, \xi') = \widehat{f}(x_1, \xi') & (x_1, \xi') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \\ \widehat{u}(0, \xi') = 0 = \widehat{u}(1, \xi') & \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (2.4)$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, nous obtenons formellement une formule explicite de \widehat{u} ,

$$\widehat{u}(x_1, \xi') = \int_0^{x_1} G_1(x_1 - y_1, |\xi'|)\widehat{f}(y_1, \xi') dy_1 - \int_0^1 G_2(x_1, y_1, |\xi'|)\widehat{f}(y_1, \xi') dy_1, \quad (2.5)$$

où les fonctions G_1 et G_2 sont données par

$$G_1(x_1, \mu) = \frac{\sinh(x_1\mu)}{\mu}; \quad G_2(x_1, y_1, \mu) = \frac{\sinh(x_1\mu) \sinh((1 - y_1)\mu)}{\mu \sinh(\mu)}, \quad (\mu, x_1, y_1) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 1)^2.$$

On souhaite démontrer que si $f \in L^2(\mathcal{S})$, alors $u \in H^2(\mathcal{S})$ et satisfait l'inégalité (2.3). Pour commencer, démontrons d'abord l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2((0,1);H^2(\mathbb{R}^{d-1}))} \leq C\|f\|_{L^2(\mathcal{S})}. \quad (2.6)$$

Cela découlera de l'inégalité suivante

$$(1 + |\xi'|^2)\|\widehat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq C\|\widehat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad (2.7)$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de ξ' .

Pour établir l'estimée (2.7), nous allons examiner deux cas distincts. Dans un premier temps, nous allons démontrer que pour les basses fréquences (lorsque $|\xi'|$ est borné), la norme $L^2(0, 1)$ de $\widehat{u}(\cdot, \xi')$ est contrôlée par celle de $\widehat{f}(\cdot, \xi')$. Ensuite, pour les hautes fréquences, on établit l'inégalité suivante

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{|\xi'|^2} \|\widehat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.8)$$

Dans le cas où $0 \leq |\xi'| \leq 1$, en utilisant l'inégalité $x \leq \sinh(x) \leq \sinh(1)x$ pour tout $x \in [0, 1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\widehat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \\ & \leq \left\| \int_0^{x_1} G_1(x_1 - y_1, |\xi'|)\widehat{f}(y_1, \xi') dy_1 \right\|_{L_{x_1}^2(0,1)} + \left\| \int_0^1 G_2(x_1, y_1, |\xi'|)\widehat{f}(y_1, \xi') dy_1 \right\|_{L_{x_1}^2(0,1)} \\ & \leq C \left(\left\| \int_0^{x_1} (x_1 - y_1)|\widehat{f}(y_1, \xi')| dy_1 \right\|_{L_{x_1}^2(0,1)} + \left\| \int_0^1 x_1(1 - y_1)|\widehat{f}(y_1, \xi')| dy_1 \right\|_{L_{x_1}^2(0,1)} \right) \\ & \leq C\|\widehat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Lorsque $|\xi'| \geq 1$, nous allons démontrer (2.8). Pour ce faire, nous réécrivons $\hat{u}(\cdot, \xi')$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{u}(x_1, \xi') &= - \int_{x_1}^1 G_2(x_1, y_1, |\xi'|) \hat{f}(y_1, \xi') dy_1 \\ &\quad + \int_0^{x_1} (G_1(x_1 - y_1, |\xi'|) - G_2(x_1, y_1, |\xi'|)) \hat{f}(y_1, \xi') dy_1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nous allons estimer la norme $L^2(0, 1)$ du premier terme du membre de droite de (2.10). Nous avons

$$\left\| \int_{x_1}^1 G_2(x_1, y_1, |\xi'|) \hat{f}(y_1, \xi') dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} \leq \frac{e^{|\xi'|}}{|\xi'| \sinh(|\xi'|)} \left\| \int_{x_1}^1 e^{-|y_1 - x_1||\xi'|} |\hat{f}(y_1, \xi')| dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)}.$$

L'intégrale dans la norme du membre de droite dans l'inégalité précédente peut être majorée par un produit de convolution

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^1 e^{-|y_1 - x_1||\xi'|} |\hat{f}(y_1, \xi')| dy_1 &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[x_1, 1]}(y_1) |\hat{f}(y_1, \xi')| 1_{[0, 1]}(|y_1 - x_1|) e^{-|y_1 - x_1||\xi'|} dy_1 \\ &\leq \left(1_{[0, 1]}(\cdot) |\hat{f}(\cdot, \xi')| * 1_{[0, 1]}(|\cdot|) e^{-|\cdot||\xi'|} \right) (x_1). \end{aligned}$$

En utilisant ensuite l'inégalité de convolution de Young, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \int_{x_1}^1 G_2(x_1, y_1, |\xi'|) \hat{f}(y_1, \xi') dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} &\leq \frac{C e^{|\xi'|}}{|\xi'| \sinh(|\xi'|)} \|e^{-x_1|\xi'}\|_{L^1_{x_1}(0,1)} \|\hat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \frac{C}{|\xi'|^2} \|\hat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Poursuivons avec le deuxième terme de (2.10). De manière similaire, l'idée consiste à utiliser l'inégalité de Young. Nous commençons par majorer le deuxième terme du membre de droite de (2.10) par une convolution

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{x_1} (G_1(x_1 - y_1, |\xi'|) - G_2(x_1, y_1, |\xi'|)) \hat{f}(y_1, \xi') dy_1 \right| \\ &= \left| \int_0^{x_1} \frac{4 \left[(e^{(1-y_1-x_1)|\xi'|} + e^{-(1-y_1-x_1)|\xi'|} - e^{(1+y_1-x_1)|\xi'|} - e^{-(1+y_1-x_1)|\xi'|}) \right]}{\sinh(|\xi'|)} \frac{\hat{f}(y_1, \xi')}{|\xi'|} dy_1 \right| \\ &= \left| \int_0^{x_1} \frac{4 \left[(e^{-(1-x_1)|\xi'|} - e^{(1-x_1)|\xi'}) (e^{y_1|\xi'|} - e^{-y_1|\xi'}) \right]}{\sinh(|\xi'|)} \frac{\hat{f}(y_1, \xi')}{|\xi'|} dy_1 \right| \\ &\leq \frac{C e^{|\xi'|}}{|\xi'| \sinh(|\xi'|)} \int_0^{x_1} e^{-|x_1 - y_1||\xi'|} |\hat{f}(y_1, \xi')| dy_1. \end{aligned}$$

En appliquant ensuite l'inégalité de Young, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{x_1} (G_1(x_1 - y_1, |\xi'|) - G_2(x_1, y_1, |\xi'|)) \hat{f}(y_1, \xi') dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} \\ \leq \frac{C e^{|\xi'|}}{|\xi'| \sinh(|\xi'|)} \|e^{-x_1|\xi'}\|_{L^1_{x_1}(0,1)} \|\hat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{|\xi'|^2} \|\hat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

À partir des estimations de ces deux termes, nous pouvons déduire l'inégalité (2.8) pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $|\xi'| \geq 1$. En combinant (2.8) avec (2.9), nous obtenons (2.7). Par conséquent, nous parvenons à l'inégalité (2.6).

Maintenant, on multiplie (2.4) par \hat{u} et on intègre sur $[0, 1]$; on obtient alors pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$:

$$\int_0^1 |\partial_1 \hat{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 + |\xi'|^2 \int_0^1 |\hat{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 = - \int_0^1 \hat{f}(x_1, \xi') \hat{u}(x_1, \xi') dx_1.$$

On multiplie cette égalité par $(1 + |\xi'|^2)$ puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} (1 + |\xi'|^2) \|\partial_1 \hat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq C \left(\|\hat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 + (1 + |\xi'|^2)^2 \|\hat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\ &\leq C \|\hat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

ce qui implique en utilisant l'identité de Parseval que

$$\partial_1 u \in L^2((0, 1); H^1(\mathbb{R}^{d-1})). \quad (2.11)$$

D'autre part, on a par (2.4)

$$\begin{aligned} \|\partial_{11} \hat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq C \left(\|\hat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 + |\xi'|^4 \|\hat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 \right) \\ &\leq C \|\hat{f}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

De (2.11) et (2.12) on a

$$\partial_{1i} u \in L^2(\mathcal{S}), \quad \forall i \in \{1, \dots, d\},$$

ce qui implique le résultat voulu. \square

2.2.2 Inégalité de Carleman avec un poids linéaire

L'objectif de cette section est d'utiliser la méthode élaborée dans la sous-section précédente pour démontrer des inégalités de Carleman de type L^2 avec un poids linéaire de la forme $x \mapsto -x_1$.

Théorème 2.2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute $f \in L^2(\mathcal{S})$, la solution $u \in H^2(\mathcal{S}) \cap H_0^1(\mathcal{S})$ du problème (2.2) vérifie, pour tout $\tau \geq 1$, l'inégalité de Carleman suivante*

$$\tau \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|e^{-\tau x_1} \nabla u\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \left(\|e^{-\tau x_1} f\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{-\theta} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^\theta(\mathbb{R}^{d-1})} \right), \quad (2.13)$$

avec $\theta \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$.

On peut également avoir une estimée sur les dérivées d'ordre deux de u : Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned} \tau \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|e^{-\tau x_1} \nabla u\|_{L^2(\mathcal{S})} + \frac{1}{\tau} \|e^{-\tau x_1} D^2 u\|_{L^2(\mathcal{S})} \\ \leq C \left(\|e^{-\tau x_1} f\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{-\frac{1}{2}} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Remarque 2.2.3. *Il est classique que l'application trace normale $u \mapsto \partial_n u$ est bien définie sur l'ensemble $\{u \in H^1(\Omega), \text{ with } \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, où la dérivée normale est à interpréter dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Il est donc naturel, pour estimer u dans $H^1(\Omega)$ de considérer $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $\partial_n u \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, correspondant à l'inégalité (2.13) avec $\theta = -1/2$ (mais bien entendu les cas correspondants à $\theta > -1/2$ sont aussi admissibles).*

Toutefois, pour récupérer une estimée sur u dans $H^2(\Omega)$, il est naturel, au vu du théorème de trace affirmant le caractère continu et surjectif de $u \in H^2(\Omega) \mapsto \partial_n u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ de considérer $\partial_n u$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Démonstration. Construction d'une paramétrice de l'opérateur conjugué. Pour $(x_1, x') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$, on définit les fonctions conjuguées

$$\begin{cases} U(x_1, x') = e^{-\tau x_1} u(x_1, x'), \\ F(x_1, x') = e^{-\tau x_1} f(x_1, x'). \end{cases}$$

On note aussi Δ_τ le conjugué du Laplacien par la fonction poids qui est donné par

$$\Delta_\tau := e^{-\tau x_1} \Delta e^{\tau x_1} = e^{-\tau x_1} (\partial_{11} + \Delta') e^{\tau x_1} = \partial_{11} + 2\tau \partial_1 + \tau^2 + \Delta'.$$

On a alors le système d' équations suivant

$$\begin{cases} \partial_{11} U + 2\tau \partial_1 U + \tau^2 U + \Delta' U = F & \text{dans } \mathcal{S}, \\ U(0, x') = 0 = U(1, x') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \\ \partial_1 U(0, x') = g_N(x') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Ici, nous avons ajouté la troisième équation qui décrit la trace de la dérivée normale notée par g_N . L'idée est d'exprimer la solution U en fonction de la donnée F et de g_N . On applique la transformation de Fourier partielle en x' pour passer à la résolution d'un système d'équations différentielles. En notant \hat{U} la transformée de Fourier de U , on obtient alors

$$\begin{cases} ((\partial_1 + \tau)^2 - |\xi'|^2) \hat{U} = \hat{F} & \text{dans } \mathcal{S}, \\ \hat{U}(0, x') = 0 = \hat{u}(1, \xi') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \\ \partial_1 \hat{U}(0, \xi') = \hat{g}_N(\xi') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (2.16)$$

On factorise alors cet opérateur de la façon suivante :

$$((\partial_1 + \tau)^2 - |\xi'|^2) = (\partial_1 + \tau + |\xi'|)(\partial_1 + \tau - |\xi'|).$$

Ainsi, on introduit la fonction \widehat{W} donnée par

$$\widehat{W}(x_1, \xi') = (\partial_1 + \tau - |\xi'|) \hat{U}(x_1, \xi') \quad \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

On parvient ainsi à un système d'équations d'ordre un, avec des conditions aux bords

$$\begin{cases} (\partial_1 + \tau - |\xi'|) \hat{U} = \widehat{W} & \text{dans } \mathcal{S}, \\ (\partial_1 + \tau + |\xi'|) \widehat{W} = \hat{F} & \text{dans } \mathcal{S}, \\ \hat{U}(0, \xi') = 0 = \hat{U}(1, \xi') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \\ \widehat{W}(0, \xi') = \hat{g}_N(\xi') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases}$$

Soit ξ' fixé dans \mathbb{R}^{d-1} . On commence par résoudre le système formé par la deuxième et la quatrième équation. En utilisant la formule de Duhamel, on obtient explicitement

$$\widehat{W}(x_1, \xi') = \widehat{g}_N(\xi') e^{-(|\xi'|+\tau)x_1} + \int_0^{x_1} \widehat{F}(\tilde{x}_1, \xi') e^{-(|\xi'|+\tau)(x_1-\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1.$$

On considère ensuite le système

$$\begin{cases} (\partial_1 + \tau - |\xi'|)\widehat{U}(\cdot, \xi') = \widehat{W}(\cdot, \xi') & \text{dans } (0, 1), \\ \widehat{U}(0, \xi') = 0 = \widehat{U}(1, \xi'). \end{cases} \quad (2.17)$$

C'est une équation différentielle d'ordre un avec une donnée au bord sur chaque côté de l'intervalle $(0, 1)$. On peut donc la résoudre de deux façons a priori différentes, soit en utilisant la condition au bord $\widehat{U}(0, \xi') = 0$, soit en utilisant la condition au bord $\widehat{U}(1, \xi') = 0$ (les deux formules donnent le même résultat car il y a des données de compatibilités cachées dans l'information $\Delta u \in L^2(\Omega)$).

On déterminera la formule que l'on utilisera en regardant le signe de $\tau - |\xi'|$, c'est-à-dire que l'on va utiliser des formules différentes en fonction de la fréquence $|\xi'|$ par rapport au paramètre de Carleman τ .

Les basses fréquences : si $|\xi'| \leq \tau$. L'équation (2.17) est « bien posée » en résolvant de gauche à droite, au sens où la formule de résolution ne fait intervenir que des exponentielles plus petites que un. Cela donne

$$\begin{aligned} \widehat{U}(x_1, \xi') &= \int_0^{x_1} \widehat{W}(\tilde{x}_1, \xi') e^{-(\tau-|\xi'|)(x_1-\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1 \\ &= \widehat{g}_N(\xi') e^{-(\tau-|\xi'|)x_1} \int_0^{x_1} e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 + \int_0^{x_1} \int_0^{\tilde{x}_1} \widehat{F}(y_1, \xi') e^{|\xi'|(x_1+y_1-2\tilde{x}_1)-\tau(x_1-y_1)} dy_1 d\tilde{x}_1 \\ &= \widehat{g}_N(\xi') e^{-(\tau-|\xi'|)x_1} \int_0^{x_1} e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 + \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi') e^{-(\tau-|\xi'|)(x_1-y_1)} \int_{y_1}^{x_1} e^{-2|\xi'|(\tilde{x}_1-y_1)} d\tilde{x}_1 dy_1 \\ &= \widehat{g}_N(\xi') k_{1,\tau}(x_1, |\xi'|) + \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi') k_{1,\tau}(x_1 - y_1, |\xi'|) dy_1, \end{aligned} \quad (2.18)$$

où la fonction k_1 est définie par

$$k_{1,\tau}(x_1, |\xi'|) = e^{-\tau x_1} \frac{\sinh(x_1 |\xi'|)}{|\xi'|}, \quad (x_1, \xi') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.19)$$

Les hautes fréquences : si $|\xi'| > \tau$. L'équation (2.17) est « bien posée » lorsqu'on la résout de droite à gauche. Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{U}(x_1, \xi') &= - \int_{x_1}^1 \widehat{W}(\tilde{x}_1, \xi') e^{-(\tau-|\xi'|)(x_1-\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1 \\ &= -\widehat{g}_N(\xi') e^{-(\tau-|\xi'|)x_1} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 - \int_{x_1}^1 \int_0^{\tilde{x}_1} \widehat{F}(y_1, \xi') e^{-2|\xi'|(\tilde{x}_1-y_1)} e^{-(\tau-|\xi'|)(x_1-y_1)} dy_1 d\tilde{x}_1 \\ &= -\widehat{g}_N(\xi') e^{-(\tau-|\xi'|)x_1} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 - \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi') e^{-\tau(x_1-y_1)} \int_{\max\{x_1, y_1\}}^1 e^{-|\xi'|(2\tilde{x}_1-y_1-x_1)} d\tilde{x}_1 dy_1 \\ &= -\widehat{g}_N(\xi') k_{2,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) - \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi') k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1, \end{aligned} \quad (2.20)$$

où la fonction k_2 est donnée par

$$k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) = e^{-\tau(x_1 - y_1) - |\xi'| |x_1 - y_1|} \left(\frac{1 - e^{-2|\xi'| (1 - \max\{x_1, y_1\})}}{2|\xi'|} \right),$$

$$\forall (x_1, y_1, \xi') \in (0, 1)^2 \times \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.21)$$

Estimation sur la paramétrice : On cherche à établir des estimations $L^2 - L^2$ sur la paramétrice. En utilisant l'identité de Plancherel, nous allons d'abord travailler dans l'espace $L^2_{\xi'}(\mathbb{R}^{d-1}; L^2_{x_1}(0, 1))$ pour ensuite déduire cette estimation dans $L^2(\mathcal{S})$.

Estimation sur la partie de la paramétrice impliquant le terme d'observation \hat{g}_N . On commence par estimer le noyau k_1 dans $L^2_{x_1}(0, 1)$. Pour cela, on discute selon la fréquence.

Cas 1.a : $|\xi'| \leq 1$. Dans ce cas, en utilisant l'inégalité $\sinh(\mu) \leq \sinh(1)\mu$ pour tout $\mu \in [0, 1]$, il est facile de montrer qu'il existe C indépendant de ξ' et τ tel que

$$\int_0^1 |k_{1,\tau}(x_1, |\xi'|)|^2 dx_1 = \int_0^1 \frac{e^{-2\tau x_1} \sinh^2(x_1 |\xi'|)}{|\xi'|^2} dx_1 \leq C \int_0^1 e^{-2\tau x_1} x_1^2 dx_1 \leq \frac{C}{\tau^3}.$$

Cas 1.b : $1 \leq |\xi'| \leq \tau$. On décompose l'intégrale $\int_0^1 = \int_0^{|\xi'|^{-1}} + \int_{|\xi'|^{-1}}^1$. En utilisant à nouveau l'inégalité $\sinh(\mu) \leq \sinh(1)\mu$ pour tout $\mu \in [0, 1]$, et l'inégalité $\sinh(\mu) \leq e^\mu$ pour $\mu > 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 |k_{1,\tau}(x_1, |\xi'|)|^2 dx_1 &\leq \left(\int_0^{|\xi'|^{-1}} e^{-2\tau x_1} x_1^2 dx_1 + \int_{|\xi'|^{-1}}^1 \frac{e^{-2(\tau - |\xi'|)x_1}}{|\xi'|^2} dx_1 \right) \\ &\leq \frac{C}{\tau^3} + C \int_{|\xi'|^{-1}}^1 \frac{e^{-2(\tau - |\xi'|)x_1}}{|\xi'|^2} dx_1. \end{aligned}$$

Cette deuxième intégrale est majorée ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{|\xi'|^{-1}}^1 \frac{e^{-2(\tau - |\xi'|)x_1}}{|\xi'|^2} dx_1 &\leq C \frac{e^{-2\tau/|\xi'|}}{|\xi'|^2} \int_0^{1 - |\xi'|^{-1}} e^{-2(\tau - |\xi'|)x_1} dx_1 \\ &\leq C \frac{e^{-2\tau/|\xi'|}}{|\xi'|^2} \min \left\{ 1, \frac{1}{\tau - |\xi'|} \right\} \\ &\leq \frac{C}{\tau^3} \left(\frac{\tau}{|\xi'|} \right)^2 e^{-2\tau/|\xi'|} \min \left\{ \tau, \frac{1}{1 - |\xi'|/\tau} \right\} \\ &\leq \frac{C}{\tau^3} \min \left\{ \tau, \frac{1}{1 - |\xi'|/\tau} \right\} \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|k_1(\cdot, |\xi'|)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{C}{\tau^3} \min \left\{ \tau, \frac{1}{1 - |\xi'|/\tau} \right\}. \quad (2.22)$$

Cas 2 : $|\xi'| > \tau$. Dans ce cas, il est facile de montrer qu'il existe $C > 0$ (indépendant de τ et ξ') tel que

$$\|k_{2,\tau}(\cdot, 0, |\xi'|)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{C}{|\xi'|^2(\tau + |\xi'|)}.$$

Ensuite, on définit une fonction $\xi' \mapsto a(\xi')$ donnée par

$$a(\xi') = \begin{cases} \|k_1(\cdot, |\xi'|)\|_{L^2(0,1)} & |\xi'| \leq \tau, \\ \|k_{2,\tau}(\cdot, 0, \xi')\|_{L^2(0,1)} & |\xi'| > \tau, \end{cases}$$

pour laquelle nous avons d'après les estimées précédentes

$$a(\xi')^2 \leq C \begin{cases} \frac{1}{\tau^3} \min \left\{ \tau, \frac{1}{1 - |\xi'|/\tau} \right\} & |\xi'| \leq \tau, \\ \frac{1}{|\xi'|^2(\tau + |\xi'|)} & |\xi'| > \tau. \end{cases} \quad (2.23)$$

Puis, pour $\theta \in \{-1/2, 0, 1/2\}$, on pose

$$C_\theta(\tau) = \sup_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} a_\theta(\xi'), \quad \text{et } a_\theta(\xi') := (1 + |\xi'|^2)^{-\theta/2} a(\xi').$$

Un analyse simple montre qu'il existe $C > 0$ indépendant de τ , tel que

$$C_{-1/2}(\tau) = \frac{C}{\sqrt{\tau}}, \quad C_0(\tau) = \frac{C}{\tau}, \quad C_{1/2}(\tau) = \frac{C}{\tau^{\frac{3}{2}}}.$$

En particulier, on en déduit que le terme au bord dans les deux formules (2.18) et (2.20) est estimé par

$$\left\| \widehat{g}_N(\xi') \left(k_1(\cdot, |\xi'|) 1_{|\xi'| \leq \tau} - k_{2,\tau}(\cdot, 0, |\xi'|) 1_{|\xi'| > \tau} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C_\theta(\tau) \|g_N\|_{H^\theta(\mathbb{R}^{d-1})}. \quad (2.24)$$

Estimation sur la partie de la paramétrice impliquant le terme source \widehat{F} . On commence par estimer le deuxième terme dans la formule (2.18), en utilisant l'inégalité de Young, ce qui donne

$$\left\| \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi') k_{1,\tau}(x_1 - y_1, |\xi'|) dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} \leq C \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \|k_{1,\tau}(\cdot, |\xi'|)\|_{L^1(0,1)}.$$

Comme le cas avec la norme L^2 , par un calcul explicite, il existe $C > 0$ (indépendant de τ et ξ') tel que pour tout ξ' avec $|\xi'| \leq \tau$,

$$\|k_{1,\tau}(\cdot, |\xi'|)\|_{L^1(0,1)} \leq \frac{C}{\tau^2} \min \left\{ \tau, \frac{1}{1 - |\xi'|/\tau} \right\},$$

D'autre part, dans les hautes fréquences $|\xi'| > \tau$, pour estimer le deuxième terme dans (2.20), il existe $C \geq 0$ tel que

$$|k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|)| \leq C \frac{e^{-(|\xi'| - \tau)|x_1 - y_1|}}{2|\xi'|}.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Young, on obtient, pour $\xi' > \tau$,

$$\begin{aligned} \left\| - \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi') k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} &\leq \frac{C}{|\xi'|} \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \|e^{-(|\xi'| - \tau)x_1}\|_{L^1_{x_1}(-2,2)} \\ &\leq C \min \left\{ \frac{1}{|\xi'|}, \frac{1}{(|\xi'| - \tau)|\xi'|} \right\} \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

On définit alors une fonction $\xi' \mapsto \tilde{a}(\xi')$ donnée par

$$\tilde{a}(\xi') = C \begin{cases} \frac{1}{\tau^2} \min \left\{ \tau, \frac{1}{1 - |\xi'|/\tau} \right\} & |\xi'| \leq \tau, \\ \min \left\{ \frac{1}{(|\xi'| - \tau)|\xi'|}, \frac{1}{|\xi'|} \right\} & |\xi'| > \tau. \end{cases} \quad (2.25)$$

On en déduit que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\begin{aligned} \left\| 1_{|\xi'| \leq \tau} \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi') k_{1,\tau}(x_1 - y_1, |\xi'|) dy_1 - 1_{|\xi'| > \tau} \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi') k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1 \right\|_{L^2(S)} \\ \leq \sup_{\zeta'} \{\tilde{a}(\zeta')\} \|\widehat{F}\|_{L^2(S)} \leq \frac{C}{\tau} \|\widehat{F}\|_{L^2(S)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Estimation de U . En utilisant les estimées (2.24), (2.26), les formules (2.18) et (2.20) et l'identité de Plancherel, on obtient pour $\theta \in \{-1/2, 0, 1/2\}$, et pour tout $\tau > 1$,

$$\tau \|U\|_{L^2(S)} \leq C \left(\tau^{-\theta} \|g_N\|_{H^\theta(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(S)} \right). \quad (2.27)$$

Estimée de $\|\nabla U\|_{L^2}$. En multipliant (2.15)₁ par U et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$-\|\nabla U\|_{L^2(S)}^2 + \tau^2 \|U\|_{L^2(S)}^2 = \int_S F(x)U(x) dx.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hölder et (2.27), on obtient

$$\|\nabla U\|_{L^2(S)} \leq C \left(\tau \|U\|_{L^2(S)} + \frac{1}{\tau} \|F\|_{L^2(S)} \right) \leq C \left(\tau^{-\theta} \|g_N\|_{H^\theta(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(S)} \right). \quad (2.28)$$

Ceci conclut la preuve de la première inégalité du théorème (2.13).

Estimée de $\|D^2 U\|_{L^2}$ lorsque $g_N \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$. On passe maintenant à la deuxième inégalité (2.14). Pour ce faire, il suffit de démontrer

$$\tau^{-1} \|D^2 U\|_{L^2(S)} \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{2}} \|g_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(S)} \right). \quad (2.29)$$

Pour cela, on commence par remarquer que les formules (2.18) et (2.20) et les définitions de a et \tilde{a} dans (2.23) et (2.25) donnent, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2a(\xi')^2 |\widehat{g}_N(\xi')|^2 + 2\tilde{a}(\xi')^2 \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2.$$

En conséquence

$$\begin{aligned} (1 + |\xi'|^2)^2 \|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq 2a(\xi')^2 (1 + |\xi'|^2)^{\frac{3}{2}} \left((1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} |\widehat{g}_N(\xi')|^2 \right) \\ &\quad + 2(1 + |\xi'|^2)^2 \tilde{a}(\xi')^2 \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

On vérifie alors que

$$\sup_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} \left\{ a(\xi')^2 (1 + |\xi'|^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \leq C\tau, \quad \text{et} \quad \sup_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} \left\{ (1 + |\xi'|^2)^2 \tilde{a}(\xi')^2 \right\} \leq C\tau^2,$$

si bien qu'on obtient, pour tout $\tau \geq 1$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$(1 + |\xi'|^2)^2 \|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C\tau \left((1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} |\widehat{g}_N(\xi')|^2 \right) + C\tau^2 \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}. \quad (2.30)$$

Par Plancherel, on obtient

$$\|U\|_{L^2((0,1), H^2(\mathbb{R}^{d-1}))} \leq C \left(\sqrt{\tau} \|g_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau \|F\|_{L^2(\mathcal{S})} \right).$$

En particulier, on obtient que pour tout $i, j \in \{2, \dots, d\}$,

$$\tau^{-1} \|\partial_{ij} U\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{2}} \|g_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(\mathcal{S})} \right).$$

Maintenant, on va estimer $\partial_{11} U$ dans $L^2(\mathcal{S})$. Pour commencer, on rappelle (cf (2.15)) que

$$\partial_{11} U + 2\tau \partial_1 U + \tau^2 U + \Delta' U = F \quad \text{dans } \mathcal{S}.$$

On en déduit

$$\tau^{-1} \|\partial_{11} U\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \left(\tau \|U\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|\partial_1 U\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{-1} \|U\|_{L^2((0,1), H^2(\mathbb{R}^{d-1}))} + \|F\|_{L^2(\mathcal{S})} \right).$$

En utilisant (2.27), et (2.28), on obtient

$$\tau^{-1} \|\partial_{11} U\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{2}} \|g_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(\mathcal{S})} \right).$$

Pour déduire (2.29), il reste à démontrer que pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$

$$\tau^{-1} \|\partial_{1j} U\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{2}} \|g_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(\mathcal{S})} \right).$$

Pour cela, il suffit de prouver que

$$(1 + |\xi'|) \|\partial_1 \widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\tau^{\frac{1}{2}} (1 + |\xi'|^{\frac{1}{2}}) |\widehat{g}_N(\xi')| + \tau \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \right). \quad (2.31)$$

En multipliant (2.16) par \widehat{U} et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\partial_1 \widehat{U}(x_1, \xi')|^2 dx_1 + \tau^2 \int_0^1 |\widehat{U}(x_1, \xi')|^2 dx_1 - |\xi'|^2 \int_0^1 |\widehat{U}(x_1, \xi')|^2 \\ = \int_0^1 \widehat{F}(x_1, \xi') \widehat{U}(x_1, \xi') dx_1, \end{aligned}$$

en multipliant par $(1 + |\xi'|^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} (1 + |\xi'|^2) \int_0^1 |\partial_1 \widehat{U}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ \leq (1 + |\xi'|^2) (|\xi'|^2 - \tau^2) \int_0^1 |\widehat{U}(x_1, \xi')|^2 dx_1 + (1 + |\xi'|^2) \left| \int_0^1 \widehat{F}(x_1, \xi') \widehat{U}(x_1, \xi') dx_1 \right| \\ \leq \left((1 + |\xi'|^2) (|\xi'|^2 - \tau^2) + (1 + |\xi'|^2)^2 \right) \int_0^1 |\widehat{U}(x_1, \xi')|^2 dx_1 + \int_0^1 |\widehat{F}(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ \leq C(1 + |\xi'|^2)^2 \int_0^1 |\widehat{U}(x_1, \xi')|^2 dx_1 + \int_0^1 |\widehat{F}(x_1, \xi')|^2 dx_1. \end{aligned}$$

On déduit alors l'inégalité (2.31) de (2.30), ce qui conclut la démonstration du théorème. \square

2.2.3 Optimalité

L'objectif de cette partie est de démontrer l'optimalité des puissances du facteur τ qui apparaissent dans l'inégalité de Carleman L^2 (2.13). Plus précisément, on montre qu'on ne peut pas avoir τ^β devant le premier terme de l'inégalité (2.13) avec $\beta > 1$.

Proposition 2.2.4. *Soit $\beta \in \mathbb{R}$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$ et tout $u \in H_0^2(\mathcal{S})$ on ait*

$$\tau^\beta \|ue^{-\tau x_1}\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \|e^{-\tau x_1} \Delta u\|_{L^2(\mathcal{S})}, \quad (2.32)$$

alors $\beta \leq 1$.

Démonstration. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau \geq 1$ et tout $u \in H_0^2(\mathcal{S})$, l'estimation (2.32) est vraie. Notons que $\widehat{U}(x_1, \xi') = e^{-\tau x_1} \widehat{u}(x_1, \xi')$ vérifie

$$(\partial_{11} + 2\tau\partial_1 + \tau^2 - |\xi'|^2)\widehat{U}(x_1, \xi') = \widehat{F}(x_1, \xi') \quad \text{dans } \mathcal{S},$$

avec $F(x_1, x') = e^{-\tau x_1} \Delta u(x_1, x')$. Pour $\eta \in H_0^2(0, 1)$ et $\epsilon > 0$ introduisons U_ϵ tel que

$$\widehat{U}_\epsilon(x_1, \xi') = \eta(x_1) e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \widehat{F}_\epsilon(x_1, \xi') &= (\partial_{11} + 2\tau\partial_1 + \tau^2 - |\xi'|^2)\widehat{U}_\epsilon \\ &= \left(\partial_{11}\eta(x_1) + 2\tau\partial_1\eta(x_1) + \eta(x_1)(\tau^2 - |\xi'|^2) \right) e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}. \end{aligned}$$

En injectant U_ϵ dans l'inégalité (2.32), il vient

$$\tau^{2\beta} \|\eta\|_{L^2(0,1)}^2 \|e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2 \leq C \left\| \left(\partial_{11}\eta + 2\tau\partial_1\eta + \eta(\tau^2 - |\xi'|^2) \right) e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}} \right\|_{L^2(\mathcal{S})}^2.$$

Ensuite, on en déduit

$$\tau^{2\beta} \|\eta\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \left(\|\partial_{11}\eta + 2\tau\partial_1\eta\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\eta\|_{L^2(0,1)}^2 \frac{\|(\tau^2 - |\xi'|^2)e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2}{\|e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2} \right).$$

On va montrer que le dernier terme à droite tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Pour cela, on va calculer l'intégrale en coordonnées sphériques et faire le changement de variable $\mu = \frac{(\lambda^2 - \tau^2)}{\sqrt{\epsilon}}$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \|(\tau^2 - |\xi'|^2)e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2 &= |\mathbb{S}_{d-2}| \int_0^\infty (\tau^2 - \lambda^2)^2 e^{-2\frac{(\tau^2 - \lambda^2)^2}{\epsilon}} \lambda^{d-2} d\lambda \\ &= |\mathbb{S}_{d-2}| \int_{-\frac{\tau}{\sqrt{\epsilon}}}^\infty (\mu\sqrt{\epsilon})^2 e^{-2\mu^2} \sqrt{\epsilon} 2^{-1} (\mu\sqrt{\epsilon} + \tau^2)^{\frac{d-3}{2}} d\mu \\ &\underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} |\mathbb{S}_{d-2}| \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}} \tau^{d-4}}{2} \int_{-\infty}^\infty \mu^2 e^{-2\mu^2} d\mu, \end{aligned}$$

où $\underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim}$ désigne l'équivalence entre deux normes ou voisinage $\epsilon = 0$. De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} \|e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2 &= |\mathbb{S}_{d-2}| \int_{\frac{-\tau^2}{\sqrt{\epsilon}}}^{\infty} e^{-2\mu^2} \sqrt{\epsilon} 2^{-1} (\mu\sqrt{\epsilon} + \tau^2)^{\frac{d-3}{2}} d\mu \\ &\underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} |\mathbb{S}_{d-2}| \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} \tau^{d-4}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\mu^2} d\mu. \end{aligned}$$

En passant à la limite $\epsilon \rightarrow 0$, on en déduit que

$$\frac{\|(\tau^2 - |\xi'|^2) e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2}{\|e^{-\frac{(|\xi'|^2 - \tau^2)^2}{\epsilon}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

On constate alors qu'il existe une constante positive C telle que pour tout $\tau \geq 1$ et tout $\eta \in H_0^2(0, 1)$,

$$\tau^{2\beta} \|\eta\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \|\partial_{11}\eta + 2\tau\partial_1\eta\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C\tau^2 \|\eta\|_{H^2(0,1)}^2.$$

Pour terminer, en prenant $\eta \neq 0$ et en faisant tendre τ vers $+\infty$, on obtient nécessairement que $\beta \leq 1$. \square

2.2.4 Inégalité de Carleman avec un poids strictement convexe.

L'objectif de cette section est de démontrer des inégalités de Carleman de type L^2 avec un poids strictement convexe qui ne dépend que de la variable normale x_1 . Plus précisément, le théorème que l'on obtient est le suivant :

Théorème 2.2.5. *Soit φ une fonction dans $C^2([0, 1])$, strictement décroissante et strictement convexe, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que*

$$\sup_{x_1 \in [0,1]} \varphi'(x_1) \leq -\alpha, \quad \inf_{x_1 \in [0,1]} \varphi''(x_1) \geq \beta \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$ et tout $u \in H^2(\mathcal{S})$ vérifiant $u(1, \cdot) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi(x_1)} u\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi(x_1)} \nabla u\|_{L^2(\mathcal{S})} &\leq C \left(\|e^{\tau\varphi(x_1)} \Delta u\|_{L^2(\mathcal{S})} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{\frac{3}{4}} \|u(0, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau^{\frac{1}{4}-s'} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{s'}(\mathbb{R}^{d-1})} \right), \quad (2.33) \end{aligned}$$

avec $s' \in \{0, -\frac{1}{2}\}$.

Remarque 2.2.6. *Pour une fonction $u \in H^2(\mathcal{S})$ vérifiant $u(1, \cdot) = 0$ et de plus $\partial_1 u(0, \cdot) = 0$, en choisissant $s = \frac{1}{2}$, on obtient la même puissance de τ devant le terme $\|u(0, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}$ que celle trouvée dans le travail d'Imanuïlov et Puel [IP03].*

Notons que notre approche peut également s'adapter pour traiter le cas des fonctions $u \in H^2(\mathcal{S})$ qui ne s'annulent pas en $\{x_1 = 1\}$. Dans ce cas, nous obtenons, comme Imanuïlov et Puel [IP03], qu'il faut modifier (2.33) en ajoutant un terme $C\tau^{-\frac{3}{4}} \|u(1, \cdot) e^{\tau\varphi(1)}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}$ dans le membre de droite de (2.33).

Démonstration. Factorisation de l'opérateur et construction d'une paramétrice. On va construire une paramétrice pour l'opérateur conjugué $\Delta_\tau := e^{\tau\varphi(x_1)}\Delta e^{-\tau\varphi(x_1)}$. En posant $F = e^{\tau\varphi(x_1)}\Delta u$ dans \mathcal{S} , la fonction conjuguée $U(x_1, x') = e^{\tau\varphi(x_1)}u(x_1, x')$ vérifie

$$((\partial_1 - \tau\varphi')^2 + \Delta')U = \tilde{F}, \quad \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}. \quad (2.34)$$

En appliquant la transformée de Fourier partielle en x' , elle devient

$$((\partial_1 - \tau\varphi')^2 - |\xi'|^2)\widehat{U}(x_1, \xi') = \widehat{\tilde{F}}(x_1, \xi'), \quad (x_1, \xi') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

On factorise notre opérateur

$$((\partial_1 - \tau\varphi')^2 - |\xi'|^2) = (\partial_1 - \tau\varphi'(x_1) + |\xi'|)(\partial_1 - \tau\varphi'(x_1) - |\xi'|) + \tau\varphi''.$$

Puis, on introduit les fonctions suivantes

$$\widehat{W} = (\partial_1 - \tau\varphi' - |\xi'|)\widehat{U}, \quad U_0 = U(0, \cdot), \quad \widehat{W}_0 = \partial_1\widehat{U}(0, \cdot) - (\tau\varphi'(0) + |\xi'|)\widehat{U}_0.$$

On a alors le système d'équations

$$\begin{cases} (\partial_1 - \tau\varphi' - |\xi'|)\widehat{U} = \widehat{W} & \text{dans } \mathcal{S}, \\ (\partial_1 - \tau\varphi' + |\xi'|)\widehat{W} = \widehat{F} & \text{dans } \mathcal{S}, \\ \widehat{U}(0, \xi') = \widehat{U}_0(\xi'), \quad \widehat{U}(1, \xi') = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \\ \widehat{W}(0, \xi') = \widehat{W}_0(\xi') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \end{cases} \quad (2.35)$$

avec $\widehat{F} := \widehat{\tilde{F}} + \tau\varphi''\widehat{U}$, c'est-à-dire $F = \tilde{F} + \tau\varphi(x_1)U$.

Soit ξ' fixé \mathbb{R}^{d-1} . On résout d'abord le système

$$\begin{cases} (\partial_1 - \tau\varphi'(x_1) + |\xi'|)\widehat{W}(\cdot, \xi') = \widehat{F}(\cdot, \xi') & \text{dans } (0, 1), \\ \widehat{W}(0, \xi') = \widehat{W}_0(\xi'). \end{cases}$$

Par la formule de Duhamel, on obtient

$$\widehat{W}(x_1, \xi') = \widehat{W}_0(\xi')e^{(\tau\varphi(x_1) - |\xi'|x_1)} + \int_0^{x_1} \widehat{F}(\tilde{x}_1, \xi')e^{(\tau\varphi(x_1) - |\xi'|x_1) - (\tau\varphi(\tilde{x}_1) - |\xi'|\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1. \quad (2.36)$$

On résout ensuite, pour ξ' fixé dans \mathbb{R}^{d-1} , le système

$$\begin{cases} (\partial_1 - \tau\varphi'(x_1) - |\xi'|)\widehat{U}(\cdot, \xi') = \widehat{W}(\cdot, \xi') & \text{dans } (0, 1), \\ \widehat{U}(0, \xi') = \widehat{U}_0(\xi'), \quad \widehat{U}(1, \xi') = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

C'est une équation différentielle d'ordre un avec des données aux bords des deux côtés de l'intervalle de l'intervalle $(0, 1)$. Comme précédemment, on peut donc construire deux formules pour retrouver \widehat{U} , soit en faisant le choix de résoudre en utilisant la condition au bord $\widehat{U}(0, \xi') = \widehat{U}_0(\xi')$, soit en faisant le choix de résoudre en utilisation la condition au bord $\widehat{U}(1, \xi') = 0$.

Pour faire ce choix, on va utiliser que le terme

$$\partial_1(\tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1) = \tau\varphi'(x_1) + |\xi'|$$

s'annule au plus une fois dans $(0, 1)$, en changeant alors de signe. On examine la situation en comparant la fréquence $|\xi'|$ avec le paramètre de Carleman τ et on distingue 3 cas.

i) Pour tout $x_1 \in [0, 1]$ tel que $|\xi'| \leq -\tau\varphi'(x_1)$. Le système d'équation (2.37) est « bien posée » en résolvant de la gauche vers la droite, et on a la formule

$$\begin{aligned}\widehat{U}(x_1, \xi') &= e^{\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1}\widehat{U}_0(\xi') + \int_0^{x_1} \widehat{W}(\tilde{x}_1, \xi')e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)-(\tau\varphi(\tilde{x}_1)+|\xi'|\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1 \\ &= e^{\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1}\widehat{U}_0(\xi') + \widehat{W}_0(\xi') \int_0^{x_1} e^{(\tau\varphi(\tilde{x}_1)-|\xi'|\tilde{x}_1)} e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)-(\tau\varphi(\tilde{x}_1)+|\xi'|\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1 \\ &\quad + \int_0^{x_1} e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)-(\tau\varphi(\tilde{x}_1)+|\xi'|\tilde{x}_1)} \int_0^{\tilde{x}_1} \widehat{F}(y_1, \xi')e^{(\tau\varphi(\tilde{x}_1)-|\xi'|\tilde{x}_1)-(\tau\varphi(y_1)-|\xi'|y_1)} dy_1 d\tilde{x}_1.\end{aligned}$$

Ensuite, par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\widehat{U}(x_1, \xi') &= e^{\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1}\widehat{U}_0(\xi') + \widehat{W}_0(\xi')e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)} \int_0^{x_1} e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 \\ &\quad + \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi')e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)-(\tau\varphi(y_1)+|\xi'|y_1)} \int_{y_1}^{x_1} e^{-2|\xi'|(\tilde{x}_1-y_1)} d\tilde{x}_1 dy_1 \\ &= e^{\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1}\widehat{U}_0(\xi') + \widehat{W}_0(\xi')k_{1,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) + \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi')k_{1,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1, \quad (2.38)\end{aligned}$$

où le noyau k_1 est donné par, pour tout x_1, y_1 tel que $0 \leq y_1 \leq x_1 \leq 1$ et tout $\mu \geq 0$,

$$k_{1,\tau}(x_1, y_1, \mu) = e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(y_1))} \frac{\sinh(\mu(x_1 - y_1))}{\mu}. \quad (2.39)$$

ii) Pour tout $x_1 \in [0, 1]$ tel que $|\xi'| > -\tau\varphi'(x_1)$. Dans ce cas, on résout l'équation (2.37) de la droite vers la gauche, et on a alors

$$\begin{aligned}\widehat{U}(x_1, \xi') &= - \int_{x_1}^1 \widehat{W}(\tilde{x}_1, \xi')e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)-(\tau\varphi(\tilde{x}_1)+|\xi'|\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1 \\ &= -\widehat{W}_0(\xi')e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 \\ &\quad - \int_{x_1}^1 \int_0^{\tilde{x}_1} \widehat{F}(y_1, \xi')e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)-(\tau\varphi(y_1)-|\xi'|y_1)} dy_1 d\tilde{x}_1.\end{aligned}$$

Ensuite, par le théorème de Fubini, on a

$$\widehat{U}(x_1, \xi') = -\widehat{W}_0(\xi')e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 - \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi')k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1, \quad (2.40)$$

où le noyau k_2 est donné par, pour tout $x_1, y_1 \in [0, 1]$ et tout $\mu \geq 0$,

$$k_{2,\tau}(x_1, y_1, \mu) = e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(y_1))-\mu|x_1-y_1|} \int_0^{1-\max\{x_1, y_1\}} e^{-2\mu\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1. \quad (2.41)$$

iii) Jonction des deux solutions. En vertu de la convexité de la fonction $x_1 \mapsto \tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1$, il existe au plus un unique point $x_{\xi'} \in [0, 1]$ tel que $|\xi'| = -\tau\varphi'(x_{\xi'})$. Les formules (2.38) et (2.40) sont alors utilisées respectivement d'un côté et de l'autre de ce point $x_{\xi'}$. Plus précisément, pour $(x_1, \xi') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$, la formule explicite de \widehat{U} est donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{U}(x_1, \xi') &= 1_{[0, x_{\xi'}]}(x_1) \left(e^{\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1}\widehat{U}_0(\xi') + \widehat{W}_0(\xi')k_{1,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi')k_{1,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1 \right) + 1_{[x_{\xi'}, 1]}(x_1) \left(-\widehat{W}_0(\xi')e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi')k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1 \right). \quad (2.42)\end{aligned}$$

Maintenant, à l'aide de cette formule, on va démontrer une inégalité $L^2 - L^2$ pour la fonction $\widehat{U}(\cdot, \xi')$, puis on en déduit une inégalité pour U . L'idée est d'obtenir des estimations sur $\widehat{U}(\cdot, \xi')$ séparément dans les hautes fréquences, les basses fréquences et près de la variété caractéristique

$$\Sigma_{x_1}^\tau = \left\{ \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \tau\varphi'(x_1) + |\xi'| = 0 \right\},$$

avec $x_1 \in [0, 1]$, et $\tau \geq 1$. Dans la suite, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 2.2.7. *Soit $h \in C^2([0, 1])$ une fonction strictement convexe i.e $h'' \geq \beta > 0$, alors pour tout $x_1, y_1 \in [0, 1]$, on a*

$$h(x_1) - h(y_1) \leq h'(x_1)(x_1 - y_1) - \frac{\beta}{2}|x_1 - y_1|^2. \quad (2.43)$$

On va utiliser le premier terme du membre droite dans cette inégalité pour estimer les hautes et les basses fréquences. En revanche, près de la variété caractéristique, on utilisera le terme $-\beta|x_1 - y_1|^2/2$ dans l'inégalité (2.43).

Démonstration du lemme 2.2.7. Soit $h \in C^2([0, 1])$ tel que $h'' \geq \beta > 0$ et soit $x_1 \in [0, 1]$ fixé, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient pour tout $y_1 \in [0, 1]$

$$h(y_1) = h(x_1) + h'(x_1)(y_1 - x_1) + \int_{x_1}^{y_1} h''(t)(y_1 - t) dt.$$

Ce qui implique

$$h(x_1) - h(y_1) = h'(x_1)(x_1 - y_1) - \int_{x_1}^{y_1} h''(t)(y_1 - t) dt.$$

On discute les deux cas suivants : Si $y_1 \leq x_1$, on a alors

$$\begin{aligned} h(x_1) - h(y_1) &= h'(x_1)(x_1 - y_1) - \int_{y_1}^{x_1} h''(t)(t - y_1) dt \\ &\leq h'(x_1)(x_1 - y_1) - \beta \int_{y_1}^{x_1} (t - y_1) dt \\ &= h'(x_1)(x_1 - y_1) - \beta/2(x_1 - y_1)^2. \end{aligned}$$

Si $x_1 \leq y_1$, on a alors

$$\begin{aligned} h(x_1) - h(y_1) &= h'(x_1)(x_1 - y_1) - \int_{x_1}^{y_1} h''(t)(y_1 - t) dt \\ &\leq h'(x_1)(x_1 - y_1) - \beta \int_{x_1}^{y_1} (y_1 - t) dt \\ &= h'(x_1)(x_1 - y_1) - \beta/2(x_1 - y_1)^2. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du Lemme 2.2.7. □

Estimation dans les basses fréquences $|\xi'| \leq \frac{\tau\alpha}{2}$. On commence par estimer le noyau k_1 . Comme $\sup \varphi' \leq -\alpha$, on a alors pour $0 \leq y_1 \leq x_1 \leq 1$ et pour $\mu \geq 0$,

$$\begin{aligned} k_{1,\tau}(x_1, y_1, \mu) &= e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \frac{\sinh(\mu(x_1 - y_1))}{\mu} \\ &\leq e^{-\alpha(x_1 - y_1)\tau} \frac{\sinh((x_1 - y_1)\mu)}{\mu} =: \tilde{k}_{1,\tau}(x_1 - y_1, \mu). \end{aligned} \quad (2.44)$$

En utilisant cette estimation, il existe $C > 0$ (indépendant de ξ' et τ) tel que, pour $|\xi'| \leq \frac{\tau\alpha}{2}$,

$$\|\tilde{k}_1(\cdot, |\xi'|)\|_{L^2(0,1)} \leq C\tau^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.45)$$

$$\|\tilde{k}_1(\cdot, |\xi'|)\|_{L^1(0,1)} \leq C\tau^{-2}. \quad (2.46)$$

En utilisant l'inégalité de Young et ces estimées, il existe $C > 0$ (indépendant de ξ' et τ) tel que pour $|\xi'| \leq \frac{\tau\alpha}{2}$,

$$\begin{aligned} & \|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2_{x_1}(0,1)} \\ &= \left\| e^{\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1}\widehat{U}_0(\xi') + \widehat{W}_0(\xi')k_{1,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) + \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi')k_{1,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} \\ &\leq C \left(\frac{|\widehat{U}_0(\xi')|}{(\alpha\tau - |\xi'|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{|\widehat{W}_0(\xi')|}{\tau^{3/2}} + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{\tau^2} \right) \\ &\leq C \left(\frac{|\widehat{U}_0(\xi')|}{\tau^{\frac{1}{2}}} + \frac{|\partial_1\widehat{u}(0, \xi')|}{\tau^{3/2}} + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{\tau^2} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

où nous avons utilisé que $(\partial_1\widehat{U} - \tau\varphi'(0)\widehat{U})(0, \xi') = \partial_1\widehat{u}(0, \xi') = \widehat{W}_0 + |\xi'|\widehat{U}_0$.

Estimation dans hautes fréquences $|\xi'| \geq 2\tau\alpha'$, où $\alpha' = \sup_{[0,1]} |\varphi'|$. On va estimer le premier terme en (2.40). Pour ce faire, on vérifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $|\xi'| \geq 2\tau\alpha'$ et pour tout $x_1 \in (0, 1)$,

$$e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 \leq \frac{C}{|\xi'|} e^{-(\tau\alpha+|\xi'|)x_1} \leq \frac{C}{|\xi'|} e^{-|\xi'|x_1},$$

on en déduit alors, pour $|\xi'| \geq 2\tau\alpha'$,

$$\left\| \widehat{W}_0(\xi') e^{(\tau\varphi(x_1)+|\xi'|x_1)} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} \leq C \frac{|\widehat{W}_0(\xi')|}{|\xi'|(|\xi'| + \tau\alpha)^{\frac{1}{2}}} \leq C \frac{|\widehat{W}_0(\xi')|}{|\xi'|^{\frac{3}{2}}}.$$

Ensuite, pour $|\xi'| \geq 2\tau\alpha'$, on peut majorer le deuxième terme de (2.40) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi') k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} &\leq \frac{1}{|\xi'|} \left\| \int_0^{x_1} |\widehat{F}(y_1, \xi')| e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(y_1))-|\xi'|\|x_1-y_1\|} dy_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_1}^1 |\widehat{F}(y_1, \xi')| e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(y_1))-|\xi'|\|x_1-y_1\|} dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)}. \end{aligned}$$

Comme $-\alpha' \leq \varphi' \leq -\alpha$, il existe $\alpha'' > 0$ tel que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $|\xi'| \geq 2\tau\alpha'$,

$$\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1)) - |\xi'|\|x_1 - y_1\| \leq -(\alpha\tau + |\xi'|)\|x_1 - y_1\| \leq -\alpha''|\xi'|\|x_1 - y_1\|, \quad y_1 \leq x_1,$$

$$\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1)) - |\xi'|\|x_1 - y_1\| \leq -(|\xi'| - \tau\alpha')\|x_1 - y_1\| \leq -\alpha''|\xi'|\|x_1 - y_1\|, \quad x_1 \leq y_1.$$

En utilisant les inégalités précédentes, puis en appliquant l'inégalité de Young, il existe $C > 0$ (indépendant de ξ' et τ) tel que, pour $|\xi'| \geq 2\tau\alpha'$,

$$\left\| \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi') k_{2,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0,1)} \leq C \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{|\xi'|^2} \leq C \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{\tau^2}.$$

On a alors, pour $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $|\xi'| \geq 2\tau\alpha'$,

$$\begin{aligned} \|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} &\leq C \left(\frac{|\widehat{W}_0(\xi')|}{|\xi'|^{\frac{3}{2}}} + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{|\xi'|^2} \right) \\ &\leq C \left(\frac{|\partial_1 \widehat{u}(0, \xi')|}{|\xi'|^{\frac{3}{2}}} + \frac{|\widehat{u}(0, \xi')|}{|\xi'|^{\frac{1}{2}}} + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{|\xi'|^2} \right), \end{aligned} \quad (2.48)$$

où nous avons utilisé que $\partial_1 \widehat{u}(0, \xi') = \widehat{W}_0 + |\xi'| \widehat{u}(0, \xi')$.

Estimations près de la variété caractéristique $\Sigma_{x_1}^\tau$: $\frac{\tau\alpha}{2} \leq |\xi'| \leq 2\tau\alpha'$. Pour $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, si $|\xi'| \in [\tau\alpha, \tau\alpha']$, alors il existe un unique $x_{\xi'} \in [0, 1]$ tel que $|\xi'| = -\tau\varphi'(x_{\xi'})$, si $|\xi'| \in [\tau\alpha/2, \tau\alpha]$, on pose $x_{\xi'} = 1$, et si $|\xi'| \in [\tau\alpha', 2\tau\alpha']$, on pose $x_{\xi'} = 0$.

Par construction, on a, pour tout $x_1 \in [0, x_{\xi'}]$, $\tau\varphi'(x_1) + |\xi'| \leq 0$. Comme l'application $x_1 \mapsto \tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1$ est convexe, en utilisant le lemme 2.2.7, on a pour $0 \leq y_1 \leq x_1 \leq x_{\xi'} \leq 1$

$$\begin{aligned} (\tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1) - (\tau\varphi(y_1) + |\xi'|y_1) \\ \leq (x_1 - y_1)(\tau\varphi'(x_1) + |\xi'|) - \frac{\tau\beta}{2}(x_1 - y_1)^2 \leq -\frac{\tau\beta}{2}(x_1 - y_1)^2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

On a alors pour $0 \leq y_1 \leq x_1 \leq x_{\xi'} \leq 1$,

$$k_{1,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) = e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \frac{\sinh(|\xi'|(x_1 - y_1))}{|\xi'|} \leq \frac{e^{-\tau\beta/2(x_1 - y_1)^2}}{|\xi'|} =: \widetilde{k}_{1,\tau}(x_1 - y_1, |\xi'|). \quad (2.50)$$

En utilisant cette estimation, il existe $C > 0$ (indépendant de ξ' et τ) tel que, pour $|\xi'| \in [\frac{\tau\alpha}{2}, 2\tau\alpha']$,

$$\|\widetilde{k}_{1,\tau}(\cdot, |\xi'|)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{C}{|\xi'| \tau^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{5}{4}}}, \quad (2.51)$$

$$\|\widetilde{k}_{1,\tau}(\cdot, |\xi'|)\|_{L^1(0,1)} \leq \frac{C}{|\xi'| \tau^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.52)$$

$$\|e^{\tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1}\|_{L^2_{x_1}(0,1)} \leq C\tau^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.53)$$

En utilisant ces estimées et l'inégalité de Young, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau > 1$ et tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $\frac{\tau\alpha}{2} \leq |\xi'| \leq 2\tau\alpha'$,

$$\begin{aligned} \left\| e^{\tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1} \widehat{U}_0(\xi') + \widehat{W}_0(\xi') k_{1,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) + \int_0^{x_1} \widehat{F}(y_1, \xi') k_{1,\tau}(x_1, y_1, |\xi'|) dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(0, x_{\xi'})} \\ \leq C \left(\frac{|\widehat{U}_0(\xi')|}{\tau^{\frac{1}{4}}} + \frac{|\widehat{W}_0(\xi')|}{\tau^{\frac{5}{4}}} + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{\tau^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

D'autre part, il existe $C > 0$ (indépendant de τ et ξ') tel que, pour $x_1 \in [x_{\xi'}, 1]$,

$$e^{(\tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1)} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\widetilde{x}_1} d\widetilde{x}_1 \leq C \frac{e^{-(\alpha\tau + |\xi'|)x_1}}{|\xi'|} \leq C \frac{e^{-\alpha\tau x_1}}{\tau},$$

on en déduit

$$\left\| \widehat{W}_0(\xi') e^{(\tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1)} \int_{x_1}^1 e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 \right\|_{L^2_{x_1}(x_{\xi'}, 1)} \leq C \frac{|\widehat{W}_0(\xi')|}{\tau^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.55)$$

Passons au deuxième terme, on a pour tout $x_1 \in [x_{\xi'}, 1]$, $\tau\varphi'(x_1) + |\xi'| \geq 0$. Comme l'application $x_1 \mapsto \tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1$ est convexe, en utilisant le lemme 2.2.7, on a pour $0 \leq x_{\xi'} \leq x_1 \leq y_1 \leq 1$

$$(\tau\varphi(x_1) + |\xi'|x_1) - (\tau\varphi(y_1) + |\xi'|y_1) \leq (x_1 - y_1)(\tau\varphi'(x_1) + |\xi'|) - \frac{\tau\beta}{2}(x_1 - y_1)^2 \quad (2.56)$$

$$\leq -\frac{\tau\beta}{2}(x_1 - y_1)^2. \quad (2.57)$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^1 \widehat{F}(y_1, \xi') e^{(\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1)) - |\xi'|\|x_1 - y_1\|)} \int_0^{1 - \max\{x_1, y_1\}} e^{-2|\xi'|\tilde{x}_1} d\tilde{x}_1 dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(x_{\xi'}, 1)} \\ & \leq \frac{1}{|\xi'|} \left\| \int_0^{x_1} |\widehat{F}(y_1, \xi')| e^{(\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1)) - |\xi'|\|x_1 - y_1\|)} dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(x_{\xi'}, 1)} \\ & \quad + \frac{1}{|\xi'|} \left\| \int_{x_1}^1 |\widehat{F}(y_1, \xi')| e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1)) - |\xi'|\|x_1 - y_1\|} dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(x_{\xi'}, 1)} \\ & \leq \frac{C}{|\xi'|} \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \left(\|e^{-(|\xi'| + \tau\alpha)x_1}\|_{L^1_{x_1}(x_{\xi'}, 1)} + \|e^{-\frac{\tau\beta}{2}x_1^2}\|_{L^1_{x_1}(x_{\xi'}, 1)} \right) \\ & \leq C \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{|\xi'|\tau^{\frac{1}{2}}} \leq C \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{\tau^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

En combinant (2.55) et (2.58), on obtient alors, pour tout $\tau > 1$ et tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $\frac{\tau\alpha}{2} \leq |\xi'| \leq 2\tau\alpha'$,

$$\|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(x_{\xi'}, 1)} \leq C \left(\frac{|\widehat{W}_0(\xi')|}{\tau^{\frac{3}{2}}} + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{\tau^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (2.59)$$

En conclusion de cette partie concernant les fréquences intermédiaires, on a obtenu, pour $|\xi'| \in [\frac{\tau\alpha}{2}, 2\tau\alpha']$,

$$\|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\frac{|\widehat{u}(0, \xi')|}{\tau^{\frac{1}{4}}} + \frac{|\partial_1 \widehat{u}(0, \xi')|}{\tau^{\frac{5}{4}}} + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{\tau^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (2.60)$$

Finalement, en combinant les estimées (2.47), (2.48), et (2.60), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau > 1$

$$\tau^{\frac{3}{2}} \|U\|_{L^2(S)} \leq C \left(\tau^{\frac{3}{4}} \|u(0, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau^{\frac{1}{4} - s'} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{s'}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(S)} \right),$$

avec $s' \in \{0, -\frac{1}{2}\}$.

Estimation du gradient $\|\nabla U\|_{L^2(S)}$. L'idée est d'utiliser les inégalités qu'on a montrées pour U sur les trois différentes régions de fréquences.

Pour $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $|\xi'| \leq \frac{\tau\alpha}{2}$, on déduit de l'inégalité (2.47)

$$\begin{aligned} & (\tau^2 + |\xi'|^2) \|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq C \left((1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(0, \xi')|^2 + \tau^{-1-2s'} (1 + |\xi'|^2)^{s'} |\partial_1 \widehat{u}(0, \xi')|^2 + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2}{\tau^2} \right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Pour $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $|\xi'| \geq 2\tau\alpha'$, on déduit de l'inégalité (2.48)

$$\begin{aligned} & (\tau^2 + |\xi'|^2) \|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq C \left((1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(0, \xi')|^2 + \tau^{-1-2s'} (1 + |\xi'|^2)^{s'} |\partial_1 \widehat{u}(0, \xi')|^2 + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2}{\tau^2} \right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Enfin, pour $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $|\xi'| \in [\frac{\tau\alpha}{2}, 2\tau\alpha']$, on déduit de l'inégalité (2.60)

$$\begin{aligned} & (\tau^2 + |\xi'|^2) \|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \leq \left(\tau^{\frac{1}{2}} (1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(0, \xi')|^2 + \tau^{-\frac{1}{2}-2s'} (1 + |\xi'|^2)^{s'} |\partial_1 \widehat{u}(0, \xi')|^2 + \frac{\|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}^2}{\tau} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

En utilisant ces trois dernières estimées, on obtient pour tout $i \in \{2, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|U\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\partial_i U\|_{L^2(\mathcal{S})} \\ & \leq C \left(\tau^{\frac{3}{4}} \|u(0, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau^{\frac{1}{4}-s'} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{s'}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(\mathcal{S})} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Pour terminer la preuve du théorème, il reste à montrer une estimation sur le terme $\partial_1 U$. Pour cela, on utilise (2.35)₁, et on obtient que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\tau^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 \widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\tau^{\frac{3}{2}} \|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\xi' \widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\widehat{W}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \right).$$

De plus, à partir de la formule explicite (2.36) de W , on obtient facilement que

$$\begin{aligned} \|\widehat{W}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} & \leq \frac{C}{(\tau + |\xi'|)^{\frac{1}{2}}} |\widehat{W}_0(\xi')| + \frac{C}{\tau + |\xi'|} \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}. \\ & \leq \frac{C}{(\tau + |\xi'|)^{\frac{1}{2}}} |\partial_1 \widehat{u}(0, \xi')| + \frac{C|\xi'|}{(\tau + |\xi'|)^{\frac{1}{2}}} |\widehat{u}(0, \xi')| + \frac{C}{\tau + |\xi'|} \|\widehat{F}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

On déduit alors de ces deux dernières estimées et des estimées (2.61)–(2.62)–(2.63), que

$$\tau^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 U\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \left(\tau^{\frac{3}{4}} \|u(0, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau^{\frac{1}{4}-s'} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{s'}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F\|_{L^2(\mathcal{S})} \right).$$

Pour conclure, il suffit de rappeler que $e^{\tau\varphi} u = U$, $e^{\tau\varphi} \nabla u = \nabla U - \tau \nabla \varphi U$, et que $F = e^{\tau\varphi} \Delta u + \tau \varphi e^{\tau\varphi} u$. On conclut la démonstration du théorème en absorbant le terme $\tau \varphi e^{\tau\varphi} u$ par le membre de gauche de (2.64). \square

2.2.5 Optimalité

Dans cette partie, nous allons montrer l'optimalité de certaines puissances du facteur τ qui apparaissent dans l'inégalité de Carleman L^2 (2.33). Plus précisément, on va montrer qu'on ne peut pas avoir τ^β devant le premier terme de l'inégalité (2.33) avec $\beta > 3/2$.

Proposition 2.2.8. *Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\tau \geq 1$ et pour tout $u \in H_0^2(\mathcal{S})$, on a*

$$\tau^\beta \|ue^{\tau\varphi(x_1)}\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \|e^{\tau\varphi(x_1)}\Delta u\|_{L^2(\mathcal{S})}. \quad (2.65)$$

Alors on a nécessairement $\beta \leq 3/2$.

Démonstration de la proposition 2.2.8. On commence par choisir une fonction $\eta \in C_c^\infty((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ non nulle. Pour $\tau > 0$, on teste l'inégalité (2.65) avec

$$\hat{u}_{\tau,\alpha,\varepsilon}(x_1, \xi') = e^{-\tau\varphi(x_1)} \eta\left(\tau^\alpha \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(|\xi'|^2 - \mu^2)\right), \text{ avec } \mu = \tau \left|\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)\right|,$$

pour des paramètres $\alpha \geq 0$, $\tau \geq 1$ grand et $\varepsilon > 0$ petit, et on lui associe $U_{\tau,\alpha,\varepsilon}$ la fonction donnée par

$$U_{\tau,\alpha,\varepsilon}(x_1, x') = e^{-\tau\varphi(x_1)} u_{\tau,\alpha,\varepsilon}(x_1, x').$$

On obtient d'une part que

$$\tau^\beta \|u_{\tau,\alpha,\varepsilon} e^{\tau\varphi(x_1)}\|_{L^2(\mathcal{S})} = \tau^{\beta - \frac{\alpha}{2}} \|\eta\|_{L^2(0,1)} \left\| \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(|\xi'|^2 - \mu^2)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})},$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned} & \|e^{\tau\varphi(x_1)} \Delta u_{\tau,\alpha,\varepsilon}\|_{L^2(\mathcal{S})} \\ & \leq \|\partial_{11} \hat{U}_{\tau,\alpha,\varepsilon}\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|2\tau\varphi' \partial_1 \hat{U}_{\tau,\alpha,\varepsilon}\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|\tau\varphi'' \hat{U}_{\tau,\alpha,\varepsilon}\|_{L^2(\mathcal{S})} \\ & \quad + \|\tau^2(\varphi'(x_1)^2 - \varphi'(1/2)^2) \hat{U}_{\tau,\alpha,\varepsilon}\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|(\mu^2 - |\xi'|^2) \hat{U}_{\tau,\alpha,\varepsilon}\|_{L^2(\mathcal{S})}. \\ & = \left\| \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(|\xi'|^2 - \mu^2)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2 \left(\|\partial_{11} \eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)} + \|2\tau\varphi' \partial_1 \eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)} \right. \\ & \quad \left. + \|\tau\varphi'' \eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)} + \|\tau^2(\varphi'(x_1)^2 - \varphi'(1/2)^2) \eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)} \right) \\ & \quad + \left\| (\mu^2 - |\xi'|^2) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(|\xi'|^2 - \mu^2)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \|\eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

où nous avons noté $\eta_{\tau,\alpha}$ la fonction définie par

$$\eta_{\tau,\alpha}(x_1) = \eta\left(\tau^\alpha \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Comme dans la preuve de la Proposition 2.2.4, on remarque que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left\| (\mu^2 - |\xi'|^2) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(|\xi'|^2 - \mu^2)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}}{\left\| \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}(|\xi'|^2 - \mu^2)\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}} = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \tau^{\beta - \frac{\alpha}{2}} \|\eta\|_{L^2(0,1)} \\ & \leq C \left(\|\partial_{11}\eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)} + \|2\tau\varphi'\partial_1\eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)} + \|\tau\varphi''\eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)} + \|\tau^2(\varphi'(x_1)^2 - \varphi'(1/2)^2)\eta_{\tau,\alpha}\|_{L^2(0,1)} \right). \end{aligned}$$

En utilisant alors que $|\varphi'(x_1)^2 - \varphi'(1/2)^2| \leq C|x_1 - 1/2|$, on déduit alors que l'inégalité

$$\tau^{\beta - \frac{\alpha}{2}} \leq C \left(\tau^{\frac{3\alpha}{2}} + \tau^{1 + \frac{\alpha}{2}} + \tau^{1 - \frac{\alpha}{2}} + \tau^{2 - \frac{3\alpha}{2}} \right)$$

doit être vérifiée pour tout τ grand. On en déduit que pour tout $\alpha \geq 0$,

$$\beta \leq \max\{2\alpha, 1 + \alpha, 2 - \alpha\}.$$

Il est facile de voir qu'en prenant $\alpha = 1/2$, cela implique que $\beta \leq 3/2$ comme annoncé. \square

2.3 Inégalité de Carleman H^{-1}

Dans cette section, on établit une estimation de Carleman avec un terme source dans H^{-1} . On utilise la méthode développée dans les sections précédentes, essentiellement basée sur la factorisation de l'opérateur conjugué.

Nous commençons d'abord par rappeler un résultat de décomposition d'une fonction de l'espace de Sobolev H^{-m} en termes des dérivées des fonctions de l'espace L^2 .

Théorème 2.3.1 (Théorème 12.1, page 71 [LM12]). *Soient $m \in \mathbb{N}$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . Alors tout élément f de $H^{-m}(\Omega)$ peut se représenter, de façon non unique, par*

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha \text{ avec } f_\alpha \in L^2(\Omega).$$

De plus, sur cet espace H^{-m} , on a la norme suivante

$$\|f\|_{H^{-m}(\Omega)} = \inf \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.66)$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble de toutes les familles $\{f_\alpha\}_\alpha$ telles que $f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha$.

Remarque 2.3.2. *On note que nous avons une caractérisation similaire pour les éléments de l'espace $W^{-m,p}(\Omega)$, voir par exemple [AF03, Theorem 3.9] ou [BF12, Theorem III.2.24].*

2.3.1 Estimation *a priori*

On commence par une simple estimation *a priori* pour la solution du Laplacien avec un terme source dans H^{-1} afin de mieux comprendre la construction et les estimations de la solution de l'opérateur conjugué dans le contexte des estimations de Carleman.

Théorème 2.3.3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in H^{-1}(\mathcal{S})$, le système*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \mathcal{S}, \\ u(0, \cdot) = 0 = u(1, \cdot) & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (2.67)$$

admet une unique solution $u \in H_0^1(\mathcal{S})$ vérifiant

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{S})} \leq C \left(\|(\partial_1 u(0, \cdot) + f_1(0, \cdot))\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|f_0\|_{L^2(\mathcal{S})} + \sum_{j=1}^{j=d} \|f_j\|_{L^2(\mathcal{S})} \right), \quad (2.68)$$

avec $f_0 + \sum_{j=1}^{j=d} \partial_j f_j = f$ et $f_j \in L^2(\mathcal{S})$ pour tout $j \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Remarque 2.3.4. 1. On rappelle que par le théorème de Lax-Milgram, le problème de Cauchy (2.67) admet une unique solution $u \in H_0^1(\mathcal{S})$ vérifiant

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\mathcal{S})}.$$

Cette dernière inégalité est évidemment plus forte que l'inégalité (2.68) qui fait intervenir la dérivée normale de u (ou plutôt la norme de $\partial_1 u(0, \cdot) + f_1(0, \cdot)$). Toutefois, la preuve que nous présentons ci-dessous du Théorème 2.3.3 nous semble instructive car la preuve des inégalités de Carleman que nous ferons ensuite en sera directement inspirée.

2. Dans l'estimation (2.68), le terme $\partial_1 u(0, \cdot) + f_1(0, \cdot)$ est bien dans $H^{-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ en vertu du résultat classique suivant :

Si $R \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $\operatorname{div} R \in L^2(\Omega)$, alors $R \cdot n$ est bien défini en tant qu'élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, voir [BF12, Theorem III.2.43].

Démonstration. En appliquant la transformée de Fourier, l'équation (2.67) devient

$$\begin{cases} (\partial_1 - |\xi'|^2)\widehat{u}(x_1, \xi') = -\widehat{f}_0 - \partial_1 \widehat{f}_1 - i \sum_{j=2}^{j=d} \xi_j \widehat{f}_j & (x_1, \xi') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \\ \widehat{u}(0, \xi') = 0 = \widehat{u}(1, \xi') & \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (2.69)$$

On factorise l'opérateur comme suit

$$(\partial_{11} - |\xi'|^2) = (\partial_1 + |\xi'|)(\partial_1 - |\xi'|).$$

On pose alors $\widehat{w} = (\partial_1 - |\xi'|)\widehat{u}$,

$$\begin{cases} (\partial_1 - |\xi'|)\widehat{u}(x_1, \xi') = \widehat{w}(x_1, \xi') & (x_1, \xi') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \\ (\partial_1 + |\xi'|)(\widehat{w}(x_1, \xi') + \widehat{f}_1) = |\xi'| \widehat{f}_1 - \widehat{f}_0 - i \sum_{j=2}^{j=d} \xi_j \widehat{f}_j & (x_1, \xi') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \\ \widehat{u}(0, \xi') = 0 = \widehat{u}(1, \xi') & \xi' \in \mathbb{R}^{d-1} \\ (\widehat{w}(0, \xi') + \widehat{f}_1(0, \xi)) = \widehat{g}_N(\xi'). \end{cases} \quad (2.70)$$

Par la formule de Duhamel, en résolvant l'équation (2.70)₂ et (2.70)₄, on a

$$\begin{aligned} \widehat{w}(x_1, \xi') + \widehat{f}_1(x_1, \xi') &= \widehat{g}_N(\xi') e^{-|\xi'|x_1} \\ &+ \int_0^{x_1} \left(|\xi'| \widehat{f}_1(\tilde{x}_1, \xi') - \widehat{f}_0(\tilde{x}_1, \xi') - \left(\sum_{j=2}^{j=d} i \xi_j \widehat{f}_j(\tilde{x}_1, \xi') \right) \right) e^{-|\xi'|(x_1 - \tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1. \end{aligned}$$

Puis, en résolvant l'équation (2.70)₁ et (2.70)₃, on a

$$\widehat{u}(x_1, \xi') = - \int_{x_1}^1 \widehat{w}(x_1, \xi') e^{-|\xi'|(\widetilde{x}_1 - x_1)} d\widetilde{x}_1.$$

Les deux formules ne contiennent que des exponentielles décroissantes. En utilisant l'inégalité de Young, on peut alors en déduire

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{C}{(1 + |\xi'|)} \|\widehat{w}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \frac{C}{(1 + |\xi'|)} \left(\|\widehat{f}_1(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} + \frac{|\widehat{g}_N(\xi')|}{(1 + |\xi'|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{|\xi'|}{1 + |\xi'|} \|\widehat{f}_1(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\|\widehat{f}_0(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{(1 + |\xi'|)} + \sum_{j=2}^{j=d} \frac{|\xi_j| \|\widehat{f}_j(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{(1 + |\xi'|)} \right). \end{aligned}$$

Cela implique

$$(1 + |\xi'|) \|\widehat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\frac{|\widehat{g}_N(\xi')|}{(1 + |\xi'|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\|\widehat{f}_0(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{(1 + |\xi'|)} + \sum_{j=1}^{j=d} \|\widehat{f}_j(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \right).$$

On conclut alors

$$\|u\|_{L^2((0,1); H^1(\mathbb{R}^{d-1}))} \leq C \left(\|g_N\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|f_0\|_{L^2((0,1); H^{-1}(\mathbb{R}^{d-1}))} + \sum_{j=1}^{j=d} \|f_j\|_{L^2(\mathcal{S})} \right). \quad (2.71)$$

Pour terminer la preuve de (2.68), il suffit d'estimer $\partial_1 u$ dans L^2 . Pour cela, on utilise l'équation (2.69) pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\partial_1 \widehat{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 + |\xi'|^2 \int_0^1 |\widehat{u}(x_1, \xi')|^2 dx_1 &= \int_0^1 \widehat{f}_0(x_1, \xi') \widehat{u}(x_1, \xi') dx_1 \\ &\quad - \int_0^1 \widehat{f}_1(x_1, \xi') \partial_1 \widehat{u}(x_1, \xi') dx_1 + i \sum_{j=2}^{j=d} \int_0^1 \xi_j \widehat{f}_j(x_1, \xi') \widehat{u}(x_1, \xi') dx_1. \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Hölder et (2.71), et on déduit

$$\|\partial_1 \widehat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\frac{\|\widehat{f}_0(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{(1 + |\xi'|)} + (1 + |\xi'|) \|\widehat{u}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} + \sum_{j=1}^{j=d} \|\widehat{f}_j(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \right),$$

ce qui implique le résultat voulu. \square

2.3.2 Inégalité de Carleman avec un poids linéaire

On montre ici notre résultat concernant l'inégalité de Carleman de type H^{-1} avec un poids linéaire sous la forme $e^{-\tau x_1}$, où $\tau \geq 1$.

Théorème 2.3.5. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in H^{-1}(\mathcal{S})$, la solution $u \in H_0^1(\mathcal{S})$ du problème (2.67), vérifie, pour tout $\tau \geq 1$, l'inégalité de Carleman suivante*

$$\begin{aligned} \tau \|ue^{-\tau x_1}\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|e^{-\tau x_1} \nabla u\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 \\ \leq C \left(\sqrt{\tau} \|(\partial_1 u(0, \cdot) + f_1(0, \cdot))\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|e^{-\tau x_1} f_0\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau \sum_{j=1}^d \|e^{-\tau x_1} f_j\|_{L^2(\mathcal{S})} \right), \quad (2.72) \end{aligned}$$

avec $f = f_0 + \sum_{j=1}^{j=d} \partial_j f_j$ et $f_j \in L^2(\mathcal{S})$ pour tout $j \in \{0, 1, \dots, d\}$.

Démonstration. Notons tout d'abord les fonctions conjuguées

$$\begin{cases} U(x_1, x') = e^{-\tau x_1} u(x_1, x'), \\ F_j(x_1, x') = e^{-\tau x_1} f_j(x_1, x'), \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, d\}. \end{cases}$$

Si u vérifie (2.67), alors U vérifie

$$\begin{cases} \partial_{11}U + 2\tau\partial_1U + \tau^2U + \Delta'U = -F_0 - (\partial_1 + \tau)F_1 - \sum_{j=2}^{j=d} \partial_j F_j & \text{dans } \mathcal{S}, \\ U(0, x') = 0 = U(1, x') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \end{cases} \quad (2.73)$$

On applique la transformée de Fourier partielle en x' , puis on factorise l'opérateur sous la forme $((\partial_1 + \tau)^2 - |\xi'|^2) = (\partial_1 + \tau + |\xi'|)(\partial_1 + \tau - |\xi'|)$. De la même façon que dans les sections précédentes, en utilisant la formule de Duhamel, on retrouve la formule explicite de \hat{U}

$$\begin{aligned} \hat{U}(x_1, \xi') &= 1_{|\xi'| \leq \tau} \left((\partial_1 \hat{U}(0, \xi') + \hat{F}_1(0, \xi')) k_{1,\tau}(x_1, \xi') - \int_0^{x_1} \hat{F}_1(\tilde{x}_1, \xi') e^{-(\tau - |\xi'|)(x_1 - \tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{x_1} \left(|\xi'| \hat{F}_1(\tilde{x}_1, \xi') - \hat{F}_0(\tilde{x}_1, \xi') - \sum_{j=2}^{j=d} i\xi_j \hat{F}_j(\tilde{x}_1, \xi') \right) k_{1,\tau}(x_1 - \tilde{x}_1, \xi') d\tilde{x}_1 \right) \\ &\quad - 1_{|\xi'| > \tau} \left((\partial_1 \hat{U}(0, \xi') + \hat{F}_1(0, \xi')) k_{2,\tau}(x_1, 0, \xi') - \int_{x_1}^1 \hat{F}_1(\tilde{x}_1, \xi') e^{-(\tau - |\xi'|)(x_1 - \tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \left(|\xi'| \hat{F}_1(\tilde{x}_1, \xi') - \hat{F}_0(\tilde{x}_1, \xi') - \sum_{j=2}^{j=d} i\xi_j \hat{F}_j(\tilde{x}_1, \xi') \right) k_{2,\tau}(x_1, \tilde{x}_1, \xi') d\tilde{x}_1 \right), \end{aligned} \quad (2.74)$$

où les noyaux k_1 et k_2 sont définis respectivement dans (2.19) et (2.21).

Notre objectif maintenant est de démontrer les estimations sur cette formule explicite.

i) Cas $|\xi'| \leq \tau$. En utilisant l'inégalité de Young, il existe $C > 0$ (indépendant de ξ' et τ) tel que, pour $|\xi'| \leq \tau$,

$$\begin{aligned} \|\hat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} &\leq C \left(|\partial_1 \hat{U}(0, \xi') + \hat{F}_1(0, \xi')| \|k_{1,\tau}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} + \frac{\|\hat{F}_1(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)}}{(1 + \tau - |\xi'|)} \right. \\ &\quad \left. + \| |\xi'| \hat{F}_1(\cdot, \xi') - \hat{F}_0(\cdot, \xi') - \sum_{j=2}^{j=d} i\xi_j \hat{F}_j(\cdot, \xi') \|_{L^2(0,1)} \|k_{1,\tau}(\cdot, \xi')\|_{L^1(0,1)} \right), \end{aligned}$$

Or, il existe $C > 0$ tel pour tout $|\xi'| \leq \tau$,

$$\begin{aligned} \|k_{1,\tau}(\cdot, \xi')\|_{L^1(0,1)} &\leq \tilde{a}(\xi') \leq C\tau^{-1}, \\ \|k_{1,\tau}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} &\leq a(\xi') \leq C\tau^{-1}. \end{aligned}$$

avec $\xi' \mapsto a(\xi')$ défini par (2.23), $\xi' \mapsto \tilde{a}(\xi')$ défini par (2.25). On en déduit, pour tout $|\xi'| \leq \tau$,

$$\|\hat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\tau^{-1} |\partial_1 \hat{U}(0, \xi') + \hat{F}_1(0, \xi')| + \tau^{-1} \|\hat{F}_0(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} + \left\| \sum_{j=1}^{j=d} \hat{F}_j(\cdot, \xi') \right\|_{L^2(0,1)} \right).$$

ii) Cas $|\xi'| > \tau$. En utilisant l'inégalité de Young, on obtient de la même de façon, pour tout $|\xi'| > \tau$.

$$\|\widehat{U}(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \leq C \left(\tau^{-1} |\partial_1 \widehat{U}(0, \xi') + \widehat{F}_1(0, \xi')| + \tau^{-1} \|\widehat{F}_0(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} + |\xi'| \sum_{j=1}^{j=d} \|\widehat{F}_j(\cdot, \xi')\|_{L^2(0,1)} \right).$$

On déduit des estimées obtenues dans le cas $|\xi'| \leq \tau$ et $|\xi'| > \tau$ et de l'identité de Plancherel, que

$$\tau \|U\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \left(\tau^{\frac{1}{2}} \|\partial_1 U(0, \cdot) + F_1(0, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \|F_0\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau \sum_{j=1}^{j=d} \|F_j\|_{L^2(\mathcal{S})} \right). \quad (2.75)$$

Maintenant, on va estimer la norme L^2 de ∇U , pour cela, on multiplie l'équation (2.73) par U , en intégrant par partie, on a

$$-\|\nabla U\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 + \tau^2 \|U\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 = -\int_{\mathcal{S}} F_0(x)U(x) dx - \tau \int_{\mathcal{S}} F_1(x)U(x) dx + \sum_{j=1}^{j=d} \int_{\mathcal{S}} F_j(x)\partial_j U(x) dx.$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young ($ab < \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{cb^2}{2}$), on obtient

$$\|\nabla U\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 \leq C \left(\tau^2 \|U\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 + \frac{1}{\tau^2} \|F_0\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 + \sum_{j=1}^{j=d} \|F_j\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 \right) + \frac{1}{2} \|\nabla U\|_{L^2(\mathcal{S})}^2.$$

Ainsi par (2.75), on a

$$\|\nabla U\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 \leq C \left(\tau \|\partial_1 U(0, \cdot) + F_1(0, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}^2 + \|F_0\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 + \tau^2 \sum_{j=1}^{j=d} \|F_j\|_{L^2(\mathcal{S})}^2 \right).$$

Ceci termine la preuve de l'inégalité (2.72). \square

2.4 Théorème de restriction et le multiplicateur de Fourier

Dans cette section, nous étudions les opérateurs donnés par multiplication en Fourier, que nous appellerons multiplicateurs, en particulier lorsque le facteur multiplicatif est radial. On commence par rappeler le théorème de restriction de la transformée de Fourier sur la sphère unité (Stein-Tomas 1975), puis on applique ce théorème pour montrer des résultats de continuité du type $L^p - L^{p'}$ pour ce type de multiplicateurs. Dans toute cette section, on note $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.¹

2.4.1 Théorème de restriction Stein-Tomas

Commençons par rappeler des propriétés basiques pour la transformée de Fourier. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors la transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par la formule

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

1. Dans cette section, la dimension courante est notée n , parce qu'elle correspondra ensuite à $d = n + 1$ dans les autres sections.

On a d'abord que \widehat{f} appartient à l'espace $C_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues qui tendent vers zéro à l'infini, qui est un sous-espace de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet, d'après l'inégalité triangulaire, il est évident que

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors le théorème de Plancherel nous dit que nous avons l'identité

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour cette raison, on peut prolonger de manière unique la transformée de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par abus de notation, on continue de noter cette extension de la transformée de Fourier par $f \mapsto \widehat{f}$. Grâce à ces inégalités et au théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, on obtient également l'inégalité de Hausdorff-Young

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

pour tout $1 \leq p \leq 2$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, où $2 \leq p' \leq \infty$ est l'exposant dual de p , défini par la formule usuelle $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. En conséquence, la transformée de Fourier peut également être prolongée de manière unique en tant qu'application linéaire continue de $L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Le problème de restriction consiste à déterminer, pour un exposant donné $1 \leq p \leq 2$ et un sous-ensemble S de \mathbb{R}^n , s'il est possible de restreindre de manière significative la transformée de Fourier \widehat{f} d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ à l'ensemble S . Si S a une mesure de Lebesgue positive, la réponse est affirmative, car \widehat{f} appartient à $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et peut donc être restreinte à S (à des ensembles de mesure nulle près). Mais qu'en est-il si S a une mesure nulle ?

Si $p = 1$, alors $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ est continue et peut donc être restreinte à tout ensemble S . À l'autre extrême, si $p = 2$ et f est une fonction quelconque dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors d'après le théorème de Plancherel, \widehat{f} est également une fonction quelconque dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et n'a donc pas de restriction bien définie à un ensemble S de mesure nulle.

Elias M. Stein a observé que pour certains sous-ensembles de mesure nulle S de \mathbb{R}^n , tels que la sphère $\mathbb{S}^{n-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$, on peut donner du sens à la trace sur \mathbb{S}^{n-1} des transformées de Fourier des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour certains p compris entre 1 et 2.

Théorème 2.4.1 ([Tom75] et [SM93]). *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.76)$$

Remarque 2.4.2. 1. *Ce théorème nous dit qu'on peut prolonger de manière unique l'opérateur de restriction $T : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ en tant qu'opérateur borné de $L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$.*

2. *L'espace $L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}$ est l'espace critique, dans le sens où l'estimation (2.76) échoue si on prend $p > \frac{2(n+1)}{n+3}$ au lieu de $\frac{2(n+1)}{n+3}$; Même si l'on peut définir la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^p$, avec $p \in [1, 2]$, en général, on ne peut pas restreindre sa transformée de Fourier à n'importe quel ensemble S de mesure nulle.*

En particulier, la transformée de Fourier d'une fonction dans L^p pour $p > 1$ ne peut pas être restreinte à un hyperplan.

3. Les estimations de restriction ont plusieurs applications ; En effet, elles peuvent être efficacement appliquées pour obtenir des estimations de type Strichartz pour des solutions de certaines équations aux dérivées partielles, (voir par exemple [Str77]), ainsi que pour obtenir des inégalités de Sobolev [KRS87]. Pour un cadre plus général sur ces estimations, voir [Tao04].

Ensuite, pour $\lambda > 0$, E_λ la restriction de Fourier sur la sphère de rayon λ est définie sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ par, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$E_\lambda f(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\delta(|\xi| - \lambda) \widehat{f}(\xi) \right) (x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\xi|=\lambda} e^{i(x-\tilde{x}) \cdot \xi} dS_\lambda(\xi) f(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (2.77)$$

Corollaire 2.4.3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soient $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$ et $p' = \frac{2(n+1)}{n-1}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, l'opérateur E_λ défini dans (2.77) vérifie

$$\|E_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \leq C \lambda^{1 - \frac{2}{n+1}}. \quad (2.78)$$

Démonstration. Nous prouverons ce Corollaire en travaillant sur E_1 et en utilisant un argument de scaling. Tout d'abord, remarquons que $E_1 = T^* T$, où $T : f \mapsto \widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$, est l'opérateur de restriction sur la sphère unité, dont le conjugué T^* est défini par

$$T^* : L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \mapsto L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(\mathbb{R}^n), \quad T^* g(x) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{ix \cdot \omega} g(\omega) d\omega.$$

On déduit alors du théorème 2.4.1 que E_1 est borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ à $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Enfin, on écrit que pour tout $\lambda > 0$,

$$E_\lambda f(x) = \lambda^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\xi|=1} e^{i\lambda(x-\tilde{x}) \cdot \xi} dS_1(\xi) f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\xi|=1} e^{i(\lambda x - \tilde{x}) \cdot \xi} dS_1(\xi) f(\tilde{x}/\lambda) d\tilde{x},$$

de sorte que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$E_\lambda f \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} E_1 \left(f \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \right).$$

À partir de cette identité, nous déduisons facilement que

$$\|E_\lambda\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \leq \|E_1\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \lambda^{n/p - n/p' - 1} \leq \|E_1\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \lambda^{1 - 2/(n+1)},$$

ce qui implique l'estimation (2.78). \square

2.4.2 Multiplicateurs radiaux de Fourier

Notre objectif dans cette partie est d'étudier les opérateurs de multiplication de Fourier donnés en Fourier par un facteur multiplicatif dépendant uniquement de $|\xi|$.

Plus précisément pour $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on note M_ρ l'opérateur défini par

$$M_\rho f(x) = \int_0^\infty \rho(\lambda) E_\lambda f(x) d\lambda, \quad (2.79)$$

dont on vérifie facilement qu'il agit en Fourier de la façon suivante :

$$\widehat{M_\rho f}(\xi) = \rho(|\xi|) \widehat{f}(\xi), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

On va étudier des propriétés de continuité de type $L^p - L^q$ de ces opérateurs pour $(p, q) \in \left\{ (2, 2), \left(\frac{2(n+1)}{n+3}, \frac{2(n+1)}{n-1} \right), \left(\frac{2(n+1)}{n+3}, 2 \right), \left(2, \frac{2(n+1)}{n-1} \right) \right\}$.

Corollaire 2.4.4. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soient $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$ et $p' = \frac{2(n+1)}{n-1}$. L'opérateur M_ρ défini dans (2.79) vérifie les estimations suivantes

$$\|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}, \quad (2.80)$$

$$\|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^d), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \leq C \int_0^\infty |\rho(\lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda, \quad (2.81)$$

$$\|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} = \|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \leq C \left(\int_0^\infty |\rho(\lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.82)$$

Dans les deux dernières estimations, on suppose implicitement que le membre de droite est fini.

Démonstration du Corollaire 2.4.4. L'estimation (2.80) est triviale par définition de l'opérateur M_ρ en Fourier et l'utilisation de Plancherel.

L'estimation (2.81) découle immédiatement du corollaire 2.

On vérifie alors facilement que l'opérateur $M_\rho^* = M_{\bar{\rho}}$ et $M_\rho^* M_\rho = M_\rho M_\rho^* = M_{|\rho|^2}$. Donc Si ρ est une fonction telle que

$$\int_0^\infty |\rho(\lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda < \infty,$$

en vertu de (2.81), $M_{|\rho|^2}$ est continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \|M_\rho f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} M_\rho^* M_\rho f f dx = \int_{\mathbb{R}^n} M_{|\rho|^2} f f dx \\ &\leq \|M_{|\rho|^2} f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \int_0^\infty |\rho(\lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Par densité de $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, on en déduit que M_ρ est continu de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec l'estimation suivante

$$\|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C \left(\int_0^\infty |\rho(\lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, par dualité, on peut écrire

$$\|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))} = \|M_{\bar{\rho}}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^{p'}(\mathbb{R}^n))}.$$

□

On en déduit par interpolation les trois résultats suivants.

Corollaire 2.4.5. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soient $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$ et $p' = \frac{2(n+1)}{n-1}$. On a les estimations suivantes :

1. Pour $\theta \in [0, 1]$ et $(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{\alpha_\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}) + (1-\theta)(\frac{1}{2}, 1)$, on a

$$\|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^{p_\theta}(\mathbb{R}^d), L^{p'}(\mathbb{R}^n))} \leq C_\theta \|\rho\|_{L^{\alpha_\theta}((0, \infty), \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda)}. \quad (2.83)$$

2. Pour $\theta \in [0, 1]$ et $(\frac{1}{p'_\theta}, \frac{1}{\alpha_\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\frac{1}{p'}, \frac{1}{2}) + (1-\theta)(\frac{1}{2}, 0)$, on a

$$\|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^{p'_\theta}(\mathbb{R}^n))} \leq C_\theta \|\rho\|_{L^{\alpha_\theta}((0, \infty), \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda)}. \quad (2.84)$$

3. Pour $\theta \in [0, 1]$ et $(\frac{1}{p\theta}, \frac{1}{p'\theta}, \frac{1}{\alpha\theta}) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}, \frac{1}{2}) + (1-\theta)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, on a

$$\|M_\rho\|_{\mathcal{L}(L^{p\theta}(\mathbb{R}^n), L^{p'\theta}(\mathbb{R}^n))} \leq C_\theta \|\rho\|_{L^{\alpha\theta}((0, \infty), \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda)}.$$

Démonstration du Corollaire 2.4.4. On se limite à la preuve de la première inégalité, les deux autres étant similaires.

On utilise pour cela le théorème d'interpolation multilinéaire [BL12, théorème 4.4.1]. On note $M : (\rho, f) \rightarrow M_\rho f$, avec

$$\begin{aligned} M : L^1(\mathbb{R}_+, \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda) \times L^p(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n), \\ M : L^2(\mathbb{R}_+, \lambda^{1-\frac{2}{n+1}} d\lambda) \times L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Cet opérateur est bilinéaire et continu. Le théorème d'interpolation multilinéaire permet alors de conclure. \square

2.5 Inégalité de Carleman L^p

L'objectif de cette partie est de montrer une inégalité de Carleman L^p toujours sur la bande $\mathcal{S} = (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$ avec un poids linéaire. Les estimations qu'on a montrées dans la section précédente constituent le principal ingrédient technique dont nous avons besoin. On utilise ces résultats dans un premier temps pour redémontrer une estimation *a priori* $L^p - L^{p'}$ pour le Laplacien. Ensuite, on montrera les inégalités de Carleman de type $L^p - L^{p'}$ pour le Laplacien avec un poids linéaire dans la section suivante.

2.5.1 Estimation *a priori* $L^p - L^{p'}$

Théorème 2.5.1. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 3$ et soit $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$. Le système suivant

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \mathcal{S}, \\ u(0, \cdot) = 0 = u(1, x') & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \end{cases} \quad (2.85)$$

admet une unique solution $u \in L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$. De plus, il existe une constante C telle que pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$, la solution u de l'équation ci-dessus satisfait

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{L^{p'}(\mathcal{S})}. \quad (2.86)$$

Il existe différentes façons de prouver ce théorème. On peut, par exemple, utiliser les injections de Sobolev pour dire que si $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$, alors $f \in H^{-1}(\Omega)$, ce qui implique que $u \in H_0^1(\Omega)$ et donc $u \in L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$. Cependant, dans le but de montrer des estimations de Carleman affinées dans le contexte L^p , nous souhaitons développer une démonstration de l'estimation (2.86) en contournant l'utilisation des espaces de Hilbert, et en nous basant sur la formule explicite de u donnée dans (2.5).

Démonstration. Nous rappelons d'abord la formule explicite de u obtenue dans le paragraphe 2.2.1. En appliquant la transformée de Fourier inverse, formellement, nous avons

$$u(x_1, x') = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} k(x_1, x', y_1, y') f(y_1, y') dy_1 dy', \quad (2.87)$$

où le noyau k_τ est donné par

$$\begin{aligned} k(x_1, x', y_1, y') &= 1_{y_1 > x_1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\xi' \cdot (x' - y')} \frac{\sinh(|\xi'| x_1) \sinh(|\xi'| (1 - y_1))}{\sinh(|\xi'|)} \frac{1}{|\xi'|} d\xi' \\ &+ 1_{y_1 < x_1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\xi' \cdot (x' - y')} \left(-\sinh(|\xi'| (x_1 - y_1)) + \frac{\sinh(|\xi'| x_1) \sinh(|\xi'| (1 - y_1))}{\sinh(|\xi'|)} \right) \frac{1}{|\xi'|} d\xi'. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Pour appliquer les résultats du corollaire 2.4.4, en faisant l'identification de $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ avec ρw , $\rho > 0$, $w \in \mathbb{S}^{d-2}$, on ré-écrit cette formule sous la forme

$$u(x_1, x') = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{k}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda) E_\lambda [f(\tilde{x}_1, \cdot)](x') d\tilde{x}_1 d\lambda \quad (2.89)$$

où E_λ est l'opérateur défini dans (2.77) en dimension $n = d - 1$, et le noyau \tilde{k} est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{k}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda) &= 1_{\tilde{x}_1 > x_1} \frac{\sinh(\lambda(1 - \tilde{x}_1)) \sinh(x_1 \lambda)}{\sinh(\lambda)} \frac{1}{\lambda} \\ &+ 1_{\tilde{x}_1 < x_1} \left(-\sinh(\lambda(x_1 - \tilde{x}_1)) + \frac{\sinh(\lambda(1 - \tilde{x}_1)) \sinh(x_1 \lambda)}{\sinh(\lambda)} \right) \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Pour tout $x_1 \in [0, 1]$, la norme $L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})$ de $u(x_1, \cdot)$ est majorée par

$$\begin{aligned} \|u(x_1, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} |\tilde{k}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)| \|E_\lambda [f(\tilde{x}_1, \cdot)](\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} d\lambda d\tilde{x}_1 \\ &\leq C \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} |\tilde{k}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} \|f(\tilde{x}_1, \cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1})} d\lambda d\tilde{x}_1 \\ &\leq C \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}_+} |\tilde{k}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right) \|f(\tilde{x}_1, \cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1})} d\tilde{x}_1. \end{aligned}$$

En utilisant ensuite l'estimation que pour tout $\lambda > 0$ et $x_1, \tilde{x}_1 \in (0, 1)$,

$$|\tilde{k}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)| \leq C \frac{e^{-\lambda|x_1 - \tilde{x}_1|}}{\lambda},$$

on obtient que pour tout $x_1, \tilde{x}_1 \in (0, 1)$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\tilde{k}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}}.$$

Par conséquent, pour tout $x_1 \in (0, 1)$,

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \int_0^1 |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}} \|f(\tilde{x}_1, \cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1})} d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_1.$$

Le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev [Sog17, Théorème 0.3.2] implique alors que

$$\left\| \|u(x_1, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L^p((0,1))} \leq C \left\| \|f(x_1, \cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L^{p'}((0,1))},$$

ce qui, bien sûr, coïncide avec l'estimation (2.86). \square

2.5.2 Inégalité de Carleman L^p avec un poids linéaire

On démontre ici les inégalités de Carleman de type $L^p - L^{p'}$ avec un poids linéaire pour le laplacien dans la bande $\mathcal{S} = (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}$.

Théorème 2.5.2. *Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 3$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$ et tout $u \in H_0^1 \cap H^2 \cap W^{2, \frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$, on a*

$$\begin{aligned} \tau \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \\ \leq C \left(\|e^{-\tau x_1} \Delta u\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right), \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \\ \leq C \left(\|e^{-\tau x_1} \Delta u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right). \end{aligned} \quad (2.91)$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$ et tout $u \in W^{2, \frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}) \cap H^2(\mathcal{S})$ vérifiant $u(0, \cdot) = 0$ on a

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{d}} \|e^{-\tau x_1} f_2\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|e^{-\tau x_1} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})} \right. \\ \left. + \tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau^{\frac{1}{d}} \|e^{-\tau} u(1, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right), \end{aligned} \quad (2.92)$$

avec $\Delta u = f_2 + f_{2*'}$ et $f_2 \in L^2(\mathcal{S})$ et $f_{2*'}$ $\in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$.

Remarque 2.5.3. *L'estimée sur la norme $L^2(\mathcal{S})$ de $e^{-\tau x_1} u$ dans (2.90) a déjà été démontrée dans l'inégalité (2.13) avec une approche purement Fourier.*

Remarque 2.5.4. *Avant de commencer la preuve, rappelons que l'espace $W^{2, \frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$ s'injecte dans l'espace $H^1(\mathcal{S})$.*

Démonstration. La démonstration suit toujours l'approche que nous avons développée dans les sections précédentes. Étant donné que nous devons prouver des estimations sur $e^{-\tau x_1} u(x_1, x')$ en fonction de $e^{-\tau x_1} \Delta u$, il sera pratique de noter

$$U(x_1, x') = e^{-\tau x_1} u(x_1, x'), \quad F = e^{-\tau x_1} \Delta u, \quad u_1(x') = e^{-\tau} u(1, x') \quad \text{et} \quad g_N(x') = \partial_1 u(0, x').$$

En utilisant la section 2.2.2, on a la formule explicite

$$U(x_1, x') = K_\tau[F](x_1, x') + G_\tau[g_N](x_1, x') + G'_\tau[u_1](x_1, x'), \quad (2.93)$$

où les opérateurs K, G et G' sont donnés par

$$\begin{aligned} K_\tau[F](x_1, x') = \int_0^{x_1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} F(\tilde{x}_1, \tilde{x}') \int_{|\xi'| \leq \tau} e^{i(x' - \tilde{x}') \cdot \xi'} k_{1, \tau}(x_1 - \tilde{x}_1, |\xi'|) d\xi' d\tilde{x}_1 d\tilde{x}' \\ - \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} F(\tilde{x}_1, \tilde{x}') \int_{|\xi'| > \tau} e^{i(x' - \tilde{x}') \cdot \xi'} k_{2, \tau}(x_1, \tilde{x}_1, |\xi'|) d\xi' d\tilde{x}_1 d\tilde{x}', \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$G_\tau[g_N](x_1, x') = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g_N(\tilde{x}') \left(\int_{|\xi'| \leq \tau} e^{i(x' - \tilde{x}') \cdot \xi'} k_{1,\tau}(x_1, |\xi'|) d\xi' - \int_{|\xi'| > \tau} e^{i(x' - \tilde{x}') \cdot \xi'} k_{2,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) d\xi' \right) d\tilde{x}', \quad (2.95)$$

et

$$G'_\tau[u_1](x_1, x') = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_1(\tilde{x}') \int_{|\xi'| > \tau} e^{i(x' - \tilde{x}') \cdot \xi'} e^{-(|\xi'| - \tau)(1 - x_1)} d\xi' d\tilde{x}', \quad (2.96)$$

avec les noyaux $k_{1,\tau}$ et $k_{2,\tau}$ sont données respectivement par les formules (2.19) et (2.21).

Nous avons les estimations suivantes.

Lemme 2.5.5. *Sous les conditions énoncées dans le théorème 2.5.2, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\tau \geq 1$, l'opérateur K_τ satisfait les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \|K_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} &\leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})}, & \forall f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), \\ \|K_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} &\leq \frac{C}{\tau} \|f\|_{L^2(\mathcal{S})}, & \forall f \in L^2(\mathcal{S}), \\ \|K_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} &\leq \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}}} \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})}, & \forall f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), \\ \|K_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} &\leq \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}}} \|f\|_{L^2(\mathcal{S})}, & \forall f \in L^2(\mathcal{S}). \end{aligned}$$

Lemme 2.5.6. *Sous les conditions énoncées dans le théorème 2.5.2, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\tau \geq 1$, l'opérateur G_τ satisfait les estimations suivantes :*

$$\tau \|G_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{1}{2}} \|G_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \tau^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}, \quad \forall f \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Lemme 2.5.7. *Sous les conditions énoncées dans le théorème 2.5.2, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\tau \geq 1$, l'opérateur G'_τ satisfait :*

$$\tau^{\frac{1}{2}} \|G'_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} + \|G'_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}, \quad \forall f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Nous admettons temporairement ces estimations, qui seront prouvées plus loin dans ce paragraphe, et nous terminons la preuve du Théorème 2.5.2. Pour cela, il suffit d'utiliser la formule explicite de la solution U , donnée par (2.93), et les trois précédents lemmes 2.5.5, 2.5.6, et 2.5.7. \square

Preuves des lemmes 2.5.5, 2.5.6, et 2.5.7

Démonstration du lemme 2.5.5. Pour appliquer le corollaire 2.4.4, on réécrit l'opérateur K_τ en fonction de l'opérateur E_λ :

$$K_\tau[f](x_1, x') = \int_0^1 \int_0^\infty k_\tau(x_1, \tilde{x}_1, \lambda) E_\lambda[f(\tilde{x}_1, \cdot)] d\lambda d\tilde{x}_1,$$

avec

$$k_\tau(x_1, \tilde{x}_1, \lambda) = 1_{\tilde{x}_1 < x_1} 1_{\lambda \leq \tau} k_{1,\tau}(x_1 - \tilde{x}_1, \lambda) - 1_{\lambda > \tau} k_{2,\tau}(x_1, \tilde{x}_1, |\xi'|).$$

Il est facile de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, \tilde{x}_1) \in [0, 1]^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$|k_\tau(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)| \leq \frac{C}{\lambda} e^{-|\lambda-\tau||x_1-\tilde{x}_1|}.$$

En appliquant (2.81), on obtient alors pour tout $x_1 \in [0, 1]$,

$$\|K_\tau[f](x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \int_0^1 \int_0^\infty e^{-|\lambda-\tau||x_1-\tilde{x}_1|} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \|f(\tilde{x}_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} d\tilde{x}_1.$$

On va montrer l'estimée, valable pour tout x_1 et \tilde{x}_1 dans $[0, 1]$,

$$\int_0^\infty e^{-|\lambda-\tau||x_1-\tilde{x}_1|} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}}, \quad (2.97)$$

En effet, on a d'une part

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{-(\tau-\lambda)|x_1-\tilde{x}_1|} \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{2}{d}}} &= e^{-\tau|x_1-\tilde{x}_1|} \int_0^\tau e^{\lambda|x_1-\tilde{x}_1|} e^{\mu \frac{d\mu}{2}} |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}} \\ &\leq C |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}}, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \int_\tau^\infty e^{-(\lambda-\tau)|x_1-\tilde{x}_1|} \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{2}{d}}} &= \int_0^\infty e^{-\mu} \frac{d\mu}{(\mu + \tau |x_1 - \tilde{x}_1|)^{\frac{2}{d}}} |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty e^{-\mu} \frac{d\mu}{\mu^{\frac{2}{d}}} \right) |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}} = C |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

On a donc que pour tout $x_1 \in [0, 1]$,

$$\|K_\tau[f](x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \int_0^1 |x_1 - \tilde{x}_1|^{-1+\frac{2}{d}} \|f(\tilde{x}_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} d\tilde{x}_1.$$

Le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev donne donc

$$\|K_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})}.$$

Pour montrer l'estimation de la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{S}))$ de K_τ , on écrit

$$k_\tau(x_1, \tilde{x}_1, \lambda) = 1_{\tilde{x}_1 < x_1} \frac{\sinh(\lambda(x_1 - \tilde{x}_1))}{\lambda} e^{-\tau(x_1 - \tilde{x}_1)} \quad \text{pour } \lambda < \tau,$$

et

$$|k_\tau(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)| \leq \frac{1}{\lambda} e^{-(\lambda-\tau)|x_1-\tilde{x}_1|} \quad \text{pour } \lambda > \tau.$$

On vérifie facilement que pour tout $(x_1, \tilde{x}_1) \in [0, 1]^2$ et tout $\tau \geq 1$,

$$\|K_\tau(x_1, \tilde{x}_1, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{C}{\tau}.$$

Finalement, on obtient l'estimation $L^2 - L^2$: il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau \geq 1$,

$$\|K_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq \frac{C}{\tau} \|f\|_{L^2(\mathcal{S})}.$$

Nous dérivons maintenant des estimations sur K_τ comme un opérateur de $L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour ce faire, on estime

$$\left(\int_0^\infty |k_\tau(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{1/2}$$

En particulier, on va montrer ci-après qu'il existe $C > 0$ (indépendant de τ) tel que pour tout $x_1, \tilde{x}_1 \in (0, 1)$

$$\left(\int_0^\infty |k_\tau(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{1/2} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}} \sqrt{|x_1 - \tilde{x}_1|}}. \quad (2.98)$$

On obtient alors : pour tout $x_1 \in (0, 1)$,

$$\|K_\tau[f](x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x_1 - \tilde{x}_1|}} \|F(\tilde{x}_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} d\tilde{x}_1.$$

Finalement, l'inégalité de Young implique

$$\|K_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}}} \left\| \frac{1}{\sqrt{|x_1 - \tilde{x}_1|}} \right\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(0,1)} \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}}} \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})}.$$

L'estimation sur la norme de K_τ dans $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{S}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ est exactement similaire et est laissée au lecteur.

Preuve de (2.98). Pour ce faire, on décompose $(0, \infty)$ en $(0, \tau]$ et (τ, ∞) . D'une part, sur l'intervalle $(0, \tau]$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\tau |k_{1,\tau}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda &= e^{-2\tau|x_1-\tilde{x}_1|} \int_0^{\tau|x_1-\tilde{x}_1|} \sinh(\mu)^2 \frac{d\mu}{\mu^{1+\frac{2}{d}}} |x_1 - \tilde{x}_1|^{\frac{2}{d}} \\ &\leq \begin{cases} C |x_1 - \tilde{x}_1|^{\frac{2}{d}}, & \text{si } \tau|x_1 - \tilde{x}_1| \leq 2, \\ e^{-2\tau|x_1-\tilde{x}_1|} |x_1 - \tilde{x}_1|^{\frac{2}{d}} \left(\int_0^{\tau|x_1-\tilde{x}_1|/2} \frac{\sinh(\mu)^2 d\mu}{\mu^{1+\frac{2}{d}}} + \int_{\tau|x_1-\tilde{x}_1|/2}^{\tau|x_1-\tilde{x}_1|} \frac{e^{2\mu} d\mu}{\mu^{1+\frac{2}{d}}} \right), & \text{si } \tau|x_1 - \tilde{x}_1| \geq 2, \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} C |x_1 - \tilde{x}_1|^{\frac{2}{d}}, & \text{si } \tau|x_1 - \tilde{x}_1| \leq 2, \\ e^{-2\tau|x_1-\tilde{x}_1|} |x_1 - \tilde{x}_1|^{\frac{2}{d}} \left(C + e^{\tau|x_1-\tilde{x}_1|} + \frac{e^{2\tau|x_1-\tilde{x}_1|}}{(\tau|x_1 - \tilde{x}_1|)^{1+\frac{2}{d}}} \right), & \text{si } \tau|x_1 - \tilde{x}_1| \geq 2, \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} C |x_1 - \tilde{x}_1|^{\frac{2}{d}}, & \text{si } \tau|x_1 - \tilde{x}_1| \leq 2, \\ \frac{C}{\tau^{1+\frac{2}{d}} |x_1 - \tilde{x}_1|}, & \text{si } \tau|x_1 - \tilde{x}_1| \geq 2, \end{cases} \\ &\leq \frac{C}{\tau^{1+\frac{2}{d}} |x_1 - \tilde{x}_1|}. \end{aligned}$$

D'autre part, sur (τ, ∞) , on a

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} |k_{2,\tau}(x_1, \tilde{x}_1, \lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda &\leq \int_{\tau}^{\infty} e^{-2(\lambda-\tau)|x_1-\tilde{x}_1|} \frac{d\lambda}{\lambda^{1+\frac{2}{d}}} \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-2\mu} \frac{d\mu}{(\mu + \tau|x_1 - \tilde{x}_1|)^{1+\frac{2}{d}}} |x_1 - \tilde{x}_1|^{\frac{2}{d}} \\ &\leq \frac{|x_1 - \tilde{x}_1|^{\frac{2}{d}}}{(\tau|x_1 - \tilde{x}_1|)^{1+\frac{2}{d}}} = \frac{1}{\tau^{1+\frac{2}{d}}|x_1 - \tilde{x}_1|}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de l'estimée (2.98). \square

Démonstration du lemme 2.5.6 : Estimée de l'opérateur G_{τ} défini en (2.95). On rappelle que le résultat (2.13) donne déjà que, pour tout $\tau > 1$,

$$\tau \|G_{\tau}[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C\tau^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}, \quad \forall f \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}),$$

Il reste donc à démontrer l'estimée sur la norme $\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$. Pour cela, on réécrit l'opérateur G_{τ} en fonction de l'opérateur E_{λ} ,

$$G_{\tau}[f](x_1, x') = \int_0^{\infty} (1_{\lambda \leq \tau} k_{1,\tau}(x_1, \lambda) - 1_{\lambda > \tau} k_2(x_1, 0, \lambda)) E_{\lambda}(f)(x') d\lambda.$$

Il n'est pas très commode d'estimer cet opérateur directement en tant qu'opérateur de $\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$. Pour cela, on va utiliser « l'argument TT^* »². On préfère estimer l'opérateur \tilde{G}_{τ} , défini pour $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ par

$$\tilde{G}_{\tau}[\tilde{f}](x_1, x') = \int_0^{\infty} (1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} (1_{\lambda \leq \tau} k_{1,\tau}(x_1, \lambda) - 1_{\lambda > \tau} k_2(x_1, 0, \lambda)) E_{\lambda}(\tilde{f})(x') d\lambda,$$

dans la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$, puisque

$$G_{\tau}[f] = \tilde{G}_{\tau}[\tilde{f}] \text{ pour } \hat{f}(\xi') = \frac{1}{(1 + |\xi'|)^{\frac{1}{2}}} \tilde{f}(\xi'), \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Maintenant, on calcule \tilde{G}_{τ}^* , dont on sait que la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$ est égale à la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ de \tilde{G}_{τ} . Ainsi, on a que la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ de $\tilde{G}_{\tau}\tilde{G}_{\tau}^*$ est le carré de la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ de \tilde{G}_{τ} .

Par Plancherel on voit facilement que, puisque k_1 et k_2 sont à valeurs réelles, que

$$\tilde{G}_{\tau}^*[\tilde{g}](x') = \int_{x_1 \in (0,1)} \int_0^{\infty} (1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} (1_{\lambda \leq \tau} k_{1,\tau}(x_1, \lambda) - 1_{\lambda > \tau} k_2(x_1, 0, \lambda)) E_{\lambda}(\tilde{g}(x_1, \cdot)) d\lambda dx_1,$$

On en déduit que

$$\tilde{G}_{\tau}\tilde{G}_{\tau}^*[\tilde{g}](x_1, x') = \int_{y_1 \in (0,1)} \int_{\lambda} \tilde{k}_{\tau}(x_1, \lambda) \tilde{k}(y_1, \lambda) E_{\lambda}(\tilde{g}(y_1, \cdot)) d\lambda dy_1,$$

2. L'idée du TT^* est ancienne! Elle est utilisée par exemple comme première étape dans la preuve du théorème de restriction de Fourier Stein-Tomas en 1975 [Tom75], puis comme un outil puissant dans la preuve des estimations de Type Strichartz (voir [GV95, KT98]).

avec

$$\tilde{k}_\tau(x_1, \lambda) = (1 + \lambda)^{\frac{1}{2}} (1_{\lambda \leq \tau} k_{1,\tau}(x_1, \lambda) - 1_{\lambda > \tau} k_2(x_1, 0, \lambda)).$$

On en déduit que, pour tout $x_1 \in (0, 1)$,

$$\left\| \tilde{G}_\tau \tilde{G}_\tau^* [\tilde{g}](x_1, \cdot) \right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \int_{y_1 \in (0,1)} \rho_\tau(x_1, y_1) \|\tilde{g}(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1,$$

avec

$$\rho_\tau(x_1, y_1) = \int_{\lambda \in (0, \infty)} |\tilde{k}_\tau(x_1, \lambda) \tilde{k}(y_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda.$$

La fin de la preuve consiste donc essentiellement à estimer ρ_τ , pour lequel on va démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (x_1, y_1) \in (0, 1)^2, \quad \rho_\tau(x_1, y_1) \leq C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \quad (2.99)$$

On aura alors pour conséquence immédiate que $\tilde{G}_\tau \tilde{G}_\tau^*$ a une norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ bornée indépendamment de τ , et donc l'existence d'une constante C telle que pour tout $\tau \geq 1$,

$$\tau^{\frac{1}{2}} \|G_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \tau^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}, \quad \forall f \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Démontrons donc l'estimée (2.99). Aux hautes fréquences, on a

$$\begin{aligned} \rho_{\tau,hf}(x_1, y_1) &= \int_{\lambda > \tau} |\tilde{k}_\tau(x_1, \lambda) \tilde{k}(y_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C \int_{\lambda > \tau} |k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) k_{2,\tau}(y_1, 0, \lambda)| \lambda^{2-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C \int_{\lambda > \tau} e^{-(\lambda-\tau)(|x_1|+|y_1|)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C \int_0^\infty e^{-\mu(\mu + \tau(|x_1| + |y_1|))} \mu^{-\frac{2}{d}} d\mu (|x_1| + |y_1|)^{-1+\frac{2}{d}} \\ &\leq C (|x_1| + |y_1|)^{-1+\frac{2}{d}} \leq C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Aux basses fréquences, on a

$$\begin{aligned} \rho_{\tau,bf}(x_1, y_1) &= \int_0^\tau |\tilde{k}_\tau(x_1, \lambda) \tilde{k}(y_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C \int_0^\tau |k_{1,\tau}(x_1, \lambda) k_{2,\tau}(y_1, \lambda)| (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C \int_0^\tau e^{-\tau(|x_1|+|y_1|)} \sinh(\lambda x_1) \sinh(\lambda y_1) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda. \end{aligned}$$

Par symétrie de ρ_τ (et $\rho_{\tau,bf}$), dans la suite on suppose sans perte de généralité que $0 < x_1 \leq y_1 < 1$, et on distingue les cas $\tau x_1 < 2$ et $\tau x_1 > 1$.

Si $\tau x_1 < 2$, on a

$$\begin{aligned} \rho_{\tau,bf}(x_1, y_1) &\leq C x_1 \int_0^\tau e^{-\tau|y_1|} e^{\lambda y_1} (1 + \lambda) \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C x_1 \min \left\{ \frac{\tau^{1-\frac{2}{d}}}{y_1}, \tau^{2-\frac{2}{d}} \right\} \leq C \tau^{1-\frac{2}{d}} \leq C x_1^{-1+\frac{2}{d}} \leq C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Si $\tau x_1 > 2$, on a

$$\begin{aligned}
& \rho_{\tau,bf}(x_1, y_1) \\
& \leq C x_1 \int_0^{1/x_1} e^{-\tau(x_1+y_1)} e^{\lambda y_1} (1+\lambda) \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda + C \int_{1/x_1}^{\tau} e^{-\tau(x_1+y_1)} e^{\lambda(x_1+y_1)} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C x_1 e^{-\tau(x_1+y_1)} \int_0^{1/x_1} e^{\lambda y_1} (1+\lambda) \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda + C \frac{1}{x_1+y_1} \tau^{-1-\frac{2}{d}} \\
& \leq C x_1 e^{-\tau(x_1+y_1)} e^{y_1/x_1} \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2-\frac{2}{d}} + C \frac{1}{x_1+y_1} \tau^{-1-\frac{2}{d}} \\
& \leq C x_1^{-1+\frac{2}{d}} e^{-\tau x_1} + C \frac{1}{x_1+y_1} \tau^{-1-\frac{2}{d}} \leq C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}.
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve de l'estimée (2.99). \square

Démonstration du Lemme 2.5.7. Estimée de l'opérateur $G'_\tau : H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^2(\mathcal{S})$ défini en (2.96). On écrit

$$\widehat{G'_\tau f}(x_1, \xi') = 1_{|\xi'| > \tau} e^{-(|\xi'|-\tau)(1-x_1)} \widehat{f}(\xi'), \quad (x_1, \xi') \in \mathcal{S},$$

si bien que pour tout $x_1 \in (0, 1)$,

$$\int_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} |\widehat{G'_\tau f}(x_1, \xi')|^2 d\xi' \leq \frac{C}{\tau} \int_{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}} (1+|\xi'|) |\widehat{f}(\xi')|^2 d\xi'.$$

Intégration par rapport à x_1 implique que, pour tout $\tau \geq 1$ et $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$,

$$\tau^{\frac{1}{2}} \|G'_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Estimée de l'opérateur $G'_\tau : H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$ défini en (2.96). On veut montrer que l'opérateur $G'_\tau : H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$ est continu. Pour $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$, on introduit $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ tel que $\widehat{\tilde{f}}(\xi') = (1+|\xi'|)^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\xi')$, et on remarque que $G'_\tau f = \tilde{G}'_\tau \tilde{f}$, où \tilde{G}'_τ est donné par

$$\widehat{\tilde{G}'_\tau \tilde{f}}(x_1, \xi') = 1_{|\xi'| > \tau} \frac{e^{-(|\xi'|-\tau)(1-x_1)}}{(1+|\xi'|)^{\frac{1}{2}}} \widehat{\tilde{f}}(\xi'), \quad (x_1, \xi') \in \mathcal{S},$$

Il est clair que la norme $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de G'_τ coïncide avec la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de \tilde{G}'_τ . Maintenant, on calcule $\tilde{G}'_\tau{}^*$, dont on sait que la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$ est égale à la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ de \tilde{G}'_τ . Ainsi, on a que la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ de $\tilde{G}'_\tau \tilde{G}'_\tau{}^*$ est le carré de la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ de \tilde{G}'_τ . Pour $f \in L^2(\mathcal{S})$, on a

$$\widehat{\tilde{G}'_\tau{}^* f}(\xi') = \int_{x_1 \in (0,1)} 1_{|\xi'| > \tau} \frac{e^{-(|\xi'|-\tau)(1-x_1)}}{(1+|\xi'|)^{\frac{1}{2}}} \widehat{f}(x_1, \xi') dx_1, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

En conséquence, pour $f \in L^2(\mathcal{S})$, on a

$$\widehat{\tilde{G}'_\tau \tilde{G}'_\tau{}^* f}(x_1, \xi') = \int_{y_1 \in (0,1)} 1_{|\xi'| > \tau} \frac{e^{-(|\xi'|-\tau)(2-x_1-y_1)}}{(1+|\xi'|)} \widehat{f}(y_1, \xi') dy_1, \quad (x_1, \xi') \in \mathcal{S}.$$

Notre prochain objectif est de vérifier que l'opérateur $\tilde{G}'_\tau \tilde{G}'_\tau{}^*$ appartient effectivement à $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$. Pour cela, on réécrit $\tilde{G}'_\tau \tilde{G}'_\tau{}^*$ en fonction de l'opérateur E_λ , sous la forme suivante

$$\tilde{G}'_\tau \tilde{G}'_\tau{}^* f(x_1, x') = \int_{y_1 \in (0,1)} \int_0^\infty \tilde{g}_\tau(x_1, y_1, \lambda) E_\lambda(\tilde{f}(y_1, \cdot))(x') d\lambda dy_1,$$

où

$$\tilde{g}_\tau(x_1, y_1, \lambda) = 1_{\lambda > \tau} \frac{e^{-(\lambda-\tau)(2-x_1-y_1)}}{(1+\lambda)}.$$

Ensuite, comme précédemment, en appliquant (2.81), on obtient alors pour tout $x_1 \in (0, 1)$,

$$\left\| \tilde{G}'_\tau \tilde{G}'_\tau{}^* f(x_1, \cdot)(x_1, \cdot) \right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \int_0^1 \int_\tau^\infty e^{-(\lambda-\tau)(2-x_1-y_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1.$$

Or on a, pour tout x_1 et y_1 dans $(0, 1)$,

$$\int_\tau^\infty e^{-(\lambda-\tau)(2-x_1-y_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \quad (2.100)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_\tau^\infty e^{-(\lambda-\tau)(2-x_1-y_1)} \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{2}{d}}} &= \int_0^\infty e^{-\mu} \frac{d\mu}{(\mu + \tau(2-x_1-y_1))^{\frac{2}{d}}} (2-x_1-y_1)^{-1+\frac{2}{d}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty e^{-\mu} \frac{d\mu}{\mu^{\frac{2}{d}}} \right) |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}} = C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $x_1 \in (0, 1)$, on obtient

$$\left\| \tilde{G}'_\tau \tilde{G}'_\tau{}^* f(x_1, \cdot) \right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \int_{y_1 \in (0,1)} |y_1 - x_1|^{-1+\frac{2}{d}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1,$$

et ensuite le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev implique que

$$\left\| \tilde{G}'_\tau \tilde{G}'_\tau{}^* f \right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}.$$

Il s'ensuit que la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de \tilde{G}'_τ est bornée par une constante indépendante de τ comme annoncé, et donc c'est aussi le cas pour la norme $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de G'_τ . \square

2.5.3 Application au prolongement unique

Le corollaire suivant présente un résultat de prolongement unique pour l'opérateur $\Delta + V$, où V appartient à L^r pour $r \in (\frac{d}{2}, d]$. Ce résultat est connu depuis les travaux de Jerison et Kenig [JK85].

Corollaire 2.5.8. *Soit $V \in L^r(\mathcal{S})$, $r \in (\frac{d}{2}, d]$. Alors toute fonction $u \in W^{2, \frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$ solution du système*

$$\begin{cases} \Delta u = Vu & \text{dans } \mathcal{S}, \\ u(0, \cdot) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^d, \\ \partial_1 u(0, \cdot) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

satisfait $u = 0$ dans \mathcal{S} .

Remarque 2.5.9. *En fait, le Theorème 2.5.2 permet d'obtenir un résultat de prolongement unique également dans le cas d'un potentiel $V \in L^r(\mathcal{S})$ pour $r > d$, en décomposant le potentiel V sous la forme $V = V_d + V_\infty$ avec $V_d = V1_{|V|>\lambda}$ et $V_\infty = V1_{|V|\leq\lambda}$, et en jouant avec le paramètre λ par rapport au paramètre τ . De telles preuves seront faites dans les Chapitres suivants, et nous les omettons pour le moment par souci de simplicité.*

On rappelle également ici que le cas d'un potentiel $V \in L^r(\mathcal{S})$ pour $r > \frac{2d}{3}$ peut être traité à l'aide des inégalités de Carleman L^2 standard, voir l'introduction du manuscrit.

Démonstration. Pour $p \in [2, \frac{2d}{d-2}]$, $\tau \geq 1$ et $u \in L^2 \cap L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$, on utilise l'inégalité d'interpolation

$$\|e^{-\tau x_1} u\|_{L^p(\mathcal{S})} \leq C \tau^{-\theta_p(\frac{1}{2} + \frac{1}{d})} (\tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^2(\mathcal{S})})^{\theta_p} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})}^{1-\theta_p},$$

avec $\theta_p \in [0, 1]$ tel que

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta_p}{2} + (1 - \theta_p) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d} \right).$$

Ainsi, l'inégalité de Carleman (2.92) donne pour tout $u \in W^{2, \frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}) \cap H^2(\mathcal{S})$ vérifiant $u(0, \cdot) = 0$, $\tau \geq 1$ et $p \in [2, \frac{2d}{d-2}]$, on a

$$\begin{aligned} & \tau^{\alpha_p} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^p(\mathcal{S})} \\ & \leq C \left(\|e^{-\tau x_1} \Delta u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau^{\frac{1}{d}} \|e^{-\tau} u(1, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right), \end{aligned} \quad (2.101)$$

avec $\alpha_p = \theta_p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d} \right)$.

En conséquence si on considère u comme dans le Corollaire 2.5.8, on obtient, pour tout $\tau \geq 1$ et p donné par $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{d} - \frac{1}{r}$ (notons que $p \in [2, \frac{2d}{d-2}]$, car $r \in (d/2, d]$),

$$\tau^{\alpha_p} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^p(\mathcal{S})} \leq C \left(\|e^{-\tau x_1} V u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{1}{d}} \|e^{-\tau} u(1, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right).$$

On utilise alors l'inégalité de Hölder

$$\|e^{-\tau x_1} V u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})} \leq \|V\|_{L^r(\mathcal{S})} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^p(\mathcal{S})},$$

et on choisit $\tau \geq 1$ suffisamment grand pour avoir $\tau^{\alpha_p} \gg \|V\|_{L^r(\mathcal{S})}$. On obtient donc que pour tout τ assez grand,

$$\tau^{\alpha_p} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^p(\mathcal{S})} \leq C \tau^{\frac{1}{d}} \|e^{-\tau} u(1, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Ensuite, pour tout $0 \leq a < 1$ et tout $\tau \geq 1$, nous avons

$$\tau^{\alpha_p} e^{-\tau a} \|u\|_{L^p((0,a) \times \mathbb{R}^{d-1})} \leq \tau^{\alpha_p} \|e^{-\tau x_1} u\|_{L^p((0,a) \times \mathbb{R}^{d-1})} \leq C \tau^{\alpha_p} e^{-\tau} \|u(1, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Puis, en faisant tendre τ vers $+\infty$, nous obtenons alors pour tout $a < 1$

$$\|u\|_{L^p((0,a) \times \mathbb{R}^{d-1})} = 0.$$

On en déduit que $u = 0$ sur \mathcal{S} . □

2.5.4 Inégalité de Carleman L^p avec un poids strictement convexe

Dans cette partie, on démontre des estimations de Carleman toujours de type L^p , mais avec une fonction poids strictement convexe. On considère l'équation elliptique suivante

$$-\Delta u = f_2 + f_{2*'} \quad \text{dans } \mathcal{S}, \quad (2.102)$$

avec $f_2 \in L^2(\mathcal{S})$ et $f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$. Notre résultat principal alors dans cette partie est :

Théorème 2.5.10. *Soit φ une fonction dans $C^2([0, 1])$, strictement décroissante et strictement convexe, c'est-à-dire qu'il existe $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ tels que*

$$\sup_{x_1 \in [0, 1]} \varphi'(x_1) \leq -\beta_1, \quad \inf_{x_1 \in [0, 1]} \varphi''(x_1) \geq 2\beta_2 \quad \text{et } \varphi(0) = 0. \quad (2.103)$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$ et tout $u \in H^2 \cap W^{2, \frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$ solution de l'équation (2.102) vérifiant $u(1, \cdot) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C & \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})} \right. \\ & \left. + \tau^{\frac{3}{4}} \|u(0, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau^{\frac{3}{4}} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right), \end{aligned} \quad (2.104)$$

et

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C & \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})} \right. \\ & \left. + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|u(0, \cdot)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|\partial_1 u(0, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Remarque 2.5.11. *Dans le cadre hilbertien, il est bien connu qu'on obtient de meilleures estimations avec des poids convexes, qu'avec des poids linéaires. Pour le cas « limite » $L^{\frac{2d}{d+2}} - L^{\frac{2d}{d-2}}$ pour le Laplacien, il n'y a aucune différence entre les deux poids. En revanche, l'amélioration se manifeste au niveau des estimations $L^2 - L^{\frac{2d}{d-2}}$ et $L^{\frac{2d}{d+2}} - L^2$, et bien sûr $L^2 - L^2$.*

Remarque 2.5.12. *On verra dans la suite du manuscrit (voir Théorème 3.2.1) que les estimées (2.104) et (2.105) peuvent être complétées d'une estimée sur $e^{\tau\varphi} \nabla u$ dans $L^2(\mathcal{S})$.*

Le Théorème 3.2.1 permet également de considérer des conditions au bord non-homogènes sur le bord $\{1\} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Nous renvoyons vers le Théorème 3.2.1 pour plus de détails.

Démonstration du théorème 2.5.10. De la section 2.2.4, en posant $F_2 = e^{\tau\varphi} f_2$ et $F_{2*'} = e^{\tau\varphi} f_{2*'}$, on rappelle que $U = e^{\tau\varphi} u$ qui s'écrit sous la forme

$$U = K_\tau[F_2 + F_{2*'}] + G'_\tau[U'_0] + G_\tau[U_0] + R_\tau(U), \quad (2.106)$$

où l'opérateur $K_\tau = K_{1,\tau} + K_{2,\tau}$ est défini formellement pour toute fonction $f(x_1, x')$, par

$$K_{1,\tau}[f](x_1, x') = \int_0^{x_1} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} k_{1,\tau}(x_1, y_1, \lambda) E_\lambda[f(y_1, \cdot)](x') \, d\lambda \, dy_1, \quad (2.107)$$

$$K_{2,\tau}[f](x_1, x') = - \int_0^1 \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} k_{2,\tau}(x_1, y_1, \lambda) E_\lambda[f(y_1, \cdot)](x') \, d\lambda \, dy_1. \quad (2.108)$$

Ici les noyaux $k_{1,\tau}$ et $k_{2,\tau}$ sont donnés respectivement par (2.39) et (2.41) et l'opérateur $G'_\tau = G'_{1,\tau} + G'_{2,\tau}$ est défini formellement pour toute fonction $g(x')$ par

$$G'_{1,\tau}[g](x_1, x') = \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} k_{1,\tau}(x_1, 0, \lambda) E_\lambda[g](x') d\lambda, \quad (2.109)$$

$$G'_{2,\tau}[g](x_1, x') = - \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) E_\lambda[g](x') d\lambda, \quad (2.110)$$

l'opérateur G_τ est défini par

$$G_\tau[g](x_1, x') = \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} e^{\tau\varphi(x_1) + \lambda x_1} E_\lambda[g](x') d\lambda, \quad (2.111)$$

et l'opérateur $R_\tau[U] := K_\tau[\tau\varphi''(x_1)U]$.

Nous avons donc construit une solution fondamentale de l'opérateur conjugué. Pour prouver les inégalités énoncées dans le Théorème 2.5.10, il suffit d'estimer précisément les trois opérateurs K_τ , G'_τ et G_τ . Nous avons alors les estimations suivantes :

Proposition 2.5.13. *Sous les conditions énoncées dans le théorème 2.5.10, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\tau \geq 1$, l'opérateur K_τ satisfait les estimations suivantes, $\forall f \in L^2(\mathcal{S})$,*

$$\tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|K_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{3}{2}} \|K_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathcal{S})}, \quad (2.112)$$

et pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$

$$\|K_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|K_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})}. \quad (2.113)$$

Proposition 2.5.14. *Sous les conditions énoncées dans le théorème 2.5.10, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$, on a, pour tout $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$,*

$$\|G'_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{3}{4}} \|G'_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}. \quad (2.114)$$

Proposition 2.5.15. *Sous les conditions énoncées dans le théorème 2.5.10, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$ et tout $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$, on a*

$$\|G_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{3}{4}} \|G_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}. \quad (2.115)$$

Remarque 2.5.16. *Dans le cadre hilbertien, les puissances de τ dans les deux premiers termes du membre de gauche de (2.115) ont été obtenues par Imanuvilov et Puel [IP03] et sont optimales. On verra plus tard au chapitre 3 que nous pouvons également obtenir $\|\nabla' G_\tau\|_{\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))} \leq \frac{C}{\tau}$. L'estimée que nous avons sur la norme $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ est donc meilleure d'un facteur $\tau^{\frac{1}{4}}$ par rapport à ce que donnerait le simple injection de Sobolev $H^1(\mathcal{S}) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$.*

Nous admettons temporairement ces estimations, qui seront prouvées plus loin dans ce paragraphe, et nous terminons la preuve du Théorème 2.5.2. Pour cela, il suffit d'utiliser la

formule explicite de la solution U , donnée par (2.106), et les trois propositions précédentes 2.5.13, 2.5.13, et 2.5.15. Comme $R_\tau(U) = K_\tau(\tau\varphi''U)$, la proposition 2.5.13 montre que

$$\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|R_\tau[U]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} + \tau^{\frac{3}{2}} \|R_\tau[U]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq C\tau \|U\|_{L^2(\mathcal{S})},$$

si bien que le terme $R_\tau(U)$ peut être absorbée en prenant le paramètre τ suffisamment grand et ne perturbe pas l'estimée. \square

Pour montrer ces propositions 2.5.13, 2.5.13, et 2.5.15, nous allons utiliser les propriétés de continuité de l'opérateur E_ρ établies dans la section précédente. Nous allons alors commencer par estimer les noyaux de chacun de ces opérateurs dans les normes $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $L^r(\mathbb{R}_+, \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda)$ avec $r \in \{1, 2\}$. Plus précisément, nous avons :

Lemme 2.5.17. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau \geq 1$, et tout $(x_1, y_1) \in [0, 1]^2$ tel que $y_1 \leq x_1$ on a*

$$\|k_{1,\tau}(x_1, y_1, \cdot)\|_{L^\infty_\lambda([0, -\tau\varphi'(x_1)])} \leq \frac{C}{\tau} e^{-\tau\beta_2(x_1-y_1)^2}, \quad (2.116)$$

et pour $r \in \{1, 2\}$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} |k_{1,\tau}(x_1, y_1, \lambda)|^r \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C \begin{cases} \tau^{2-\frac{2}{d}} |x_1 - y_1|^r & \text{si } -\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1| \leq 2, \\ e^{-r\tau\beta_2(x_1-y_1)^2} \tau^{1-r-\frac{2}{d}} |x_1 - y_1|^{-1} & \text{si } -\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1| \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Lemme 2.5.18. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tau \geq 1$, et tout $(x_1, y_1) \in [0, 1]^2$ on ait*

$$\|k_{2,\tau}(x_1, y_1, \cdot)\|_{L^\infty_\lambda(]-\tau\varphi'(x_1), +\infty])} \leq \frac{C}{\tau} e^{-\tau\beta_2(x_1-y_1)^2},$$

et pour $r \in \{1, 2\}$, on a

$$\int_{-\tau\varphi'(x_1)}^\infty |k_{2,\tau}(x_1, y_1, \lambda)|^r \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C \begin{cases} e^{-\beta_2\tau(x_1-y_1)^2} |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}} & \text{si } r = 1, \\ e^{-2\tau\beta_2(x_1-y_1)^2} \tau^{-1-\frac{2}{d}} |x_1 - y_1|^{-1} & \text{si } r = 2. \end{cases}$$

Pour démontrer ces deux lemmes, on va utiliser le caractère strictement convexe de la fonction poids Lemme 2.2.7.

Nous allons maintenant prouver les deux lemmes 2.5.17 et 2.5.18.

Démonstration du Lemme 2.5.17. Soient x_1 et y_1 dans $[0, 1]$ tel que $y_1 \leq x_1$. On commence par remarquer que la fonction $\lambda \mapsto \frac{\sinh(\lambda(x_1-y_1))}{\lambda}$ est croissante sur $[0, -\tau\varphi'(x_1)]$. Ensuite, on écrit simplement

$$\begin{aligned} \|k_{\tau,1}(x_1, y_1, \lambda)\|_{L^\infty_\lambda([0, -\tau\varphi'(x_1)])} &= e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(y_1))} \left\| \frac{\sinh(\lambda(x_1-y_1))}{\lambda} \right\|_{L^\infty_\lambda([0, -\tau\varphi'(x_1)])} \\ &\leq e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(y_1))} \frac{\sinh(-\tau\varphi'(x_1)(x_1-y_1))}{-\tau\varphi'_1(x_1)} \\ &\leq \frac{C}{\tau} e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(y_1)-\varphi'(x_1)(x_1-y_1))}. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le lemme 2.2.7, on obtient (2.116).

Passons au deuxième point, en faisant le changement de variable $\mu = \lambda(x_1 - y_1)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} |k_{1,\tau}(x_1, y_1, \lambda)|^r \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda &= e^{\tau r(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} \sinh^r(\lambda(x_1 - y_1)) \lambda^{1-r-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &= e^{\tau r(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|} \sinh^r(\mu) \frac{d\mu}{\mu^{r-1+\frac{2}{d}}} |x_1 - y_1|^{r-2+\frac{2}{d}}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Ensuite, afin d'obtenir une estimation précise du dernier terme, examinons les deux cas suivants :

Si $-\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1| \leq 2$, en utilisant le fait que $\sinh^r(\mu) \leq C\mu^r$ pour tout $\mu \in (0, 2)$, on obtient

$$\begin{aligned} (2.117) &\leq C e^{\tau r(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|} \frac{d\mu}{\mu^{-1+\frac{2}{d}}} |x_1 - y_1|^{r-2+\frac{2}{d}} \\ &\leq C e^{\tau r(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} |x_1 - y_1|^r \tau^{2-\frac{2}{d}} \leq C |x_1 - y_1|^r \tau^{2-\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Si $-\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1| \geq 2$, on a

$$(2.117) \leq e^{\tau r(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \left(\int_0^1 \sinh^r(\mu) \frac{d\mu}{\mu^{r-1+\frac{2}{d}}} + \int_1^{-\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|} e^\mu \frac{d\mu}{\mu^{r-1+\frac{2}{d}}} \right) |x_1 - y_1|^{r-2+\frac{2}{d}}.$$

Ensuite, en utilisant le fait que

$$\exists C \geq 0, \forall A \geq 1 \quad \int_1^A \frac{e^\mu}{\mu^\alpha} d\mu \leq C \frac{e^A}{A^\alpha},$$

puis le lemme 2.2.7, il suit que

$$\begin{aligned} (2.117) &\leq e^{\tau r(\varphi'(x_1)|x_1 - y_1| - \beta_2|x_1 - y_1|^2)} \left(C + \frac{e^{-r\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|}}{(-\frac{\tau}{r}\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|)^{r-1+\frac{2}{d}}} \right) |x_1 - y_1|^{r-2+\frac{2}{d}} \\ &\leq C \frac{e^{-r\tau\beta_2(x_1 - y_1)^2}}{\tau^{r-1+\frac{2}{d}}|x_1 - y_1|}. \end{aligned}$$

Cela termine la preuve du Lemme 2.5.17. □

Démonstration du Lemme 2.5.18. Soit $(x_1, y_1) \in (0, 1)^2$, on a

$$\begin{aligned} \|k_{2,\tau}(x_1, y_1, \cdot)\|_{L_\lambda^\infty([-\tau\varphi'(x_1), +\infty])} &\leq C e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \left\| \frac{e^{-\lambda|x_1 - y_1|}}{\lambda} \right\|_{L_\lambda^\infty([-\tau\varphi'(x_1), +\infty])} \\ &\leq \frac{C}{\tau} e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1) + \varphi'(x_1)|x_1 - y_1|)}. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant le lemme 2.2.7 et le fait que $\varphi' \leq 0$, on obtient pour tout $x_1 \geq y_1$

$$\begin{aligned} \tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1) + \varphi'(x_1)|x_1 - y_1|) &\leq \tau(2\varphi'(x_1)(x_1 - y_1) - \beta_2(x_1 - y_1)^2) \\ &\leq -\tau\beta_2(x_1 - y_1)^2, \end{aligned}$$

et pour tout $x_1 \leq y_1$,

$$\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1) + \varphi'(x_1)|x_1 - y_1|) \leq -\tau\beta_2(x_1 - y_1)^2.$$

On en déduit alors qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, y_1) \in (0, 1)^2$ et tout $\tau \geq 1$

$$\|k_{2,\tau}(x_1, y_1, \cdot)\|_{L^\infty(-\tau\varphi'(x_1), +\infty)} \leq \frac{C}{\tau} e^{-\tau\beta_2(x_1 - y_1)^2}.$$

Passons à la deuxième estimée, on a

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} |k_{2,\tau}(x_1, y_1, \lambda)|^r \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &= e^{r\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} e^{-r\lambda|x_1 - y_1|} \left(\frac{1 - e^{-2\lambda(1 - \max\{x_1, y_1\})}}{2} \right)^r \lambda^{1-r-\frac{2}{d}} d\lambda. \end{aligned}$$

On va distinguer le cas $r = 1$ et le cas $r = 2$. Pour $r = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} |k_{2,\tau}(x_1, y_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &= e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} e^{-\lambda|x_1 - y_1|} \left(\frac{1 - e^{-2\lambda(1 - \max\{x_1, y_1\})}}{2} \right) \frac{d\lambda}{\lambda^{\frac{2}{d}}} \\ &\leq C e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \int_{-\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|}^{+\infty} e^{-\mu} \frac{d\mu}{\mu^{\frac{2}{d}}} |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}} \\ &\leq C e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1)) + \tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|} \frac{1}{(1 + \tau|x_1 - y_1|)^{\frac{2}{d}}} |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}} \\ &\leq C e^{-\beta_2\tau(x_1 - y_1)^2/2} \frac{1}{(1 + \tau|x_1 - y_1|)^{\frac{2}{d}}} |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $A \geq 0$,

$$\int_A^\infty e^{-\mu} \frac{d\mu}{\mu^{\frac{2}{d}}} \leq \frac{C e^{-A}}{(1 + A)^{\frac{2}{d}}}.$$

Pour le cas $r = 2$,

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} |k_{2,\tau}(x_1, y_1, \lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq e^{2\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} e^{-2\lambda|x_1 - y_1|} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C e^{2\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1))} \int_{-\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|}^{+\infty} e^{-2\mu} \frac{d\mu}{\mu^{1+\frac{2}{d}}} |x_1 - y_1|^{\frac{2}{d}} \\ &\leq C e^{2\tau(\varphi(x_1) - \varphi(y_1)) + 2\tau\varphi'(x_1)|x_1 - y_1|} \frac{1}{\tau^{\frac{2}{d}}(1 + \tau|x_1 - y_1|)} \\ &\leq C e^{-2\tau\beta_2|x_1 - y_1|^2} \frac{1}{\tau^{\frac{2}{d}}(1 + \tau|x_1 - y_1|)} \leq C e^{-2\tau\beta_2|x_1 - y_1|^2} \frac{1}{\tau^{1+\frac{2}{d}}|x_1 - y_1|}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $A \geq 0$,

$$\int_A^\infty e^{-2\mu} \frac{d\mu}{\mu^{1+\frac{2}{d}}} \leq \frac{C e^{-2A}}{A^{\frac{2}{d}}(1 + A)}.$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 2.5.18. □

Estimée de l'opérateur K_τ . On rappelle que K_τ est donné par (2.107) et (2.108).

Démonstration de la proposition 2.5.13. On commence par estimer l'opérateur $K_{1,\tau}$

$$K_{1,\tau}[f](x_1, x') = \int_0^{x_1} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} k_{1,\tau}(x_1, y_1, \lambda) E_\lambda[f(y_1, \cdot)](x') d\lambda dy_1.$$

Estimation $L^2 - L^2$: Grâce au lemme 2.5.17, on a une estimation sur le noyau $k_{1,\tau}$ dans L^∞ . Il suffit alors d'utiliser (2.80), pour obtenir

$$\begin{aligned} \|K_{1,\tau}[f](x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq \int_0^{x_1} \|k_{1,\tau}(x_1, y_1, \cdot)\|_{L^\infty([0, -\tau\varphi'(x_1)])} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \\ &\leq \frac{C}{\tau} \int_0^1 e^{-\tau\beta_2(x_1-y_1)^2} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité de Young permet de conclure

$$\|K_{1,\tau}[f]\|_{L^2(S)} \leq \frac{C}{\tau} \int_0^1 e^{-\tau\beta_2 x_1^2} dx_1 \|f\|_{L^2(S)} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{3}{2}}} \|f\|_{L^2(S)}.$$

Estimation $L^{\frac{2d}{d+2}} - L^{\frac{2d}{d-2}}$: De la même façon, en utilisant l'inégalité (2.81), on obtient

$$\|K_{1,\tau}[f](x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \int_0^{x_1} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} |k_{1,\tau}(x_1, y_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1.$$

Du lemme 2.5.17, on peut montrer facilement qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x_1, y_1 \in (0, 1)$, on a

$$\int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} |k_{1,\tau}(x_1, y_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C|x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}.$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev [Sog17, Théorème 0.3.2], on conclut que

$$\|K_{1,\tau}[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(S)} \leq C\|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(S)}.$$

Estimation $L^{\frac{2d}{d+2}} - L^2$ et $L^2 - L^{\frac{2d}{d-2}}$: On va montrer une estimation sur

$$\left(\int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} |k_{1,\tau}(x_1, y_1, \lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Du lemme 2.5.17, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} |k_{1,\tau}(x_1, y_1, \lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \tilde{k}_{\tau,0}(x_1 - y_1), \\ \text{avec } \tilde{k}_{\tau,1} &\in L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}) \text{ satisfaisant } \|\tilde{k}_{\tau,1}\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \leq C\tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}}. \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\tilde{k}_{\tau,1}(z_1) = 1_{-\tau z_1 < 1} \tau^{1-\frac{1}{d}} |z_1| + 1_{\tau z_1 > 1} e^{-\tau\beta_2 z_1^2} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{d}} |z_1|^{-\frac{1}{2}},$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{k}_{\tau,1}\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})}^{\frac{d}{d-1}} &\leq C\tau \int_0^{\frac{1}{\tau}} |z_1|^{\frac{d}{d-1}} dz_1 + C \left(\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{d}}\right)^{\frac{d}{d-1}} \left(\int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\sqrt{\tau}}} |z_1|^{-\frac{d}{2(d-1)}} dz_1 + \int_{\frac{1}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\beta_2\tau z_1^2} |z_1|^{-\frac{d}{2(d-1)}} dz_1 \right) \\
&\leq C\tau^{-1+\frac{1}{d-1}} + C \left(\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{d}}\right)^{\frac{d}{d-1}} \left(\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{d}{4(d-1)}} + \tau^{\frac{d}{4(d-1)}-\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq C \left(\tau^{-1+\frac{2}{d}} + \tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \right)^{\frac{d}{d-1}} \leq C \left(\tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \right)^{\frac{d}{d-1}}
\end{aligned}$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Young, on déduit qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\|K_{1,\tau}[f]\|_{L^2(S)} &\leq \frac{C}{\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}} \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(S)}, \\
\|K_{1,\tau}[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(S)} &\leq \frac{C}{\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}} \|f\|_{L^2(S)}.
\end{aligned}$$

Passons maintenant aux estimations concernant l'opérateur $K_{2,\tau}$

$$K_{2,\tau}[f](x_1, x') = - \int_0^1 \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} k_{2,\tau}(x_1, y_1, \lambda) E_\lambda[f(y_1, \cdot)](x') d\lambda dy_1.$$

Estimation $L^2 - L^2$: Grâce au lemme 2.5.18, on a une estimation sur le noyau $k_{2,\tau}$ dans L^∞ . Il suffit alors d'utiliser (2.80), pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|K_{2,\tau}[f](x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq \int_0^1 \|k_{2,\tau}(x_1, y_1, \cdot)\|_{L^\infty([-\tau\varphi'(x_1), +\infty])} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \\
&\leq \frac{C}{\tau} \int_0^1 e^{-\tau\beta_2(x_1-y_1)^2} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Young permet d'écrire

$$\|K_{2,\tau}[f]\|_{L^2(S)} \leq \frac{C}{\tau} \int_0^1 e^{-\tau\beta_2 x_1^2} dx_1 \|f\|_{L^2(S)} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{3}{2}}} \|f\|_{L^2(S)}.$$

Estimation $L^{\frac{2d}{d+2}} - L^{\frac{2d}{d-2}}$: En utilisant l'inégalité (2.81) et le lemme 2.5.18, on obtient

$$\begin{aligned}
\|K_{2,\tau}[f](x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq C \int_0^1 \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} |k_{2,\tau}(x_1, y_1, \lambda)| \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \\
&\leq C \int_0^1 |x_1 - y_1|^{-\frac{d-2}{d}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1.
\end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité Hardy-Littlewood-Sobolev implique

$$\|K_{2,\tau}[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(S)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(S)}.$$

Estimation $L^{\frac{2d}{d+2}} - L^2$ et $L^2 - L^{\frac{2d}{d-2}}$: De manière similaire, en utilisant l'inégalité (2.81) et le lemme 2.5.18, on obtient

$$\begin{aligned}
\|K_{2,\tau}[f](x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq C \int_0^1 \left(\int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} |k_{2,\tau}(x_1, y_1, \lambda)|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \\
&\leq C \int_0^1 \frac{e^{-\tau\beta_2(x_1-y_1)^2}}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}} |x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1.
\end{aligned}$$

On utilise ici l'inégalité de Young, et on obtient :

$$\|K_{2,\tau}[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \left\| \frac{e^{-\tau\beta_2 x_1^2}}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}} x_1^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L_{x_1}^{\frac{d}{d-1}}(0,1)} \|f\|_{L^2(\mathcal{S})},$$

La fonction $x_1 \rightarrow h(x_1) = \frac{e^{-\tau\beta_2 x_1^2}}{x_1^{\frac{1}{2}}}$ appartient à l'espace $L^{\frac{d}{d-1}}(0,1)$ pour tout $d > 2$. Pour estimer cette fonction, effectuons le changement de variable $z_1 = \sqrt{\tau}x_1$, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^{\frac{d}{d-1}}} &= \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}}} \left(\int_0^{\sqrt{\tau}} \frac{e^{-\frac{\beta_2 dz_1^2}{d-1}}}{z_1^{\frac{d}{2(d-1)}} \tau^{\frac{d}{4(d-1)}-\frac{1}{2}}} dz_1 \right)^{\frac{d-1}{d}} \\ &\leq \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}}} \frac{1}{\tau^{\frac{d-2}{4d}}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\beta_2 dz_1^2}{d-1}}}{z_1^{\frac{d}{2(d-1)}}} dz_1 \right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}}. \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration de la proposition 2.5.13. \square

Estimée de l'opérateur G'_τ . On rappelle que G'_τ est donné par (2.109) et (2.110).

Démonstration de la Proposition 2.5.14. Les estimées Hilbertiennes sont déjà démontrées dans la preuve du Théorème 2.2.5. On se concentre donc sur l'estimée de G'_τ vu comme un opérateur de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$.

Preuve de l'estimation (2.114) de G'_τ comme un opérateur de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$. Pour ce faire, on va utiliser « l'argument TT^* ». Notre objectif est de démontrer que G'_τ est continu de $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$ dans $L^{\frac{2d}{d-2}}((0,1) \times \mathbb{R}^{d-1})$, et on rappelle que G'_τ est donné par la formule suivante

$$\begin{aligned} G'_\tau[f](x_1, x') &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(1_{\{|\xi'| \leq -\tau\varphi'(x_1)\}} k_{1,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) \right. \\ &\quad \left. - 1_{\{|\xi'| > -\tau\varphi'(x_1)\}} k_{2,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) \right) e^{i(x'-y') \cdot \xi'} f(y') d\xi' dy', \end{aligned}$$

pour tout $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$.

Notons tout de suite que cet opérateur s'écrit en Fourier sous la forme

$$\widehat{G'_\tau[f]}(x_1, \xi') = \left(1_{\{|\xi'| \leq -\tau\varphi'(x_1)\}} k_{1,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) - 1_{\{|\xi'| > -\tau\varphi'(x_1)\}} k_{2,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) \right) \widehat{f}(\xi').$$

On note par $(I + |D_{x'}|)^{\frac{1}{2}}$ l'opérateur de multiplication de Fourier par $(1 + |\xi'|)^{\frac{1}{2}}$, et on introduit l'opérateur \widetilde{G}'_τ donné par

$$\widetilde{G}'_\tau[f](x_1, x') = \left(G'_\tau \circ (I + |D_{x'}|)^{\frac{1}{2}} \right) [f](x_1, x'), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^{d-1}), (x_1, x') \in (0,1) \times \mathbb{R}^{d-1},$$

si bien que

$$\widehat{\widetilde{G}'_\tau[f]}(x_1, \xi') = (1 + |\xi'|)^{\frac{1}{2}} \left(1_{\{|\xi'| \leq -\tau\varphi'(x_1)\}} k_{1,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) - 1_{\{|\xi'| > -\tau\varphi'(x_1)\}} k_{2,\tau}(x_1, 0, |\xi'|) \right) \widehat{f}(\xi').$$

L'objectif de cette modification est de démontrer la continuité de $\tilde{G}'_\tau : L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$, plutôt que celle de $G'_\tau : H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$.

En fait, on va plutôt étudier la norme de $\tilde{G}'_\tau(\tilde{G}'_\tau)^*$ vu comme un opérateur de $L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$ dans $L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$, car on a par dualité que la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$ de $(\tilde{G}'_\tau)^*$ coïncide avec la norme de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ de \tilde{G}'_τ , et avec la racine de la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S}))$ de $\tilde{G}'_\tau(\tilde{G}'_\tau)^*$.

Au vu des formules ci-dessus, un calcul facile montre que l'opérateur $\tilde{G}'_\tau(\tilde{G}'_\tau)^*$ s'écrit en fait

$$\begin{aligned} \tilde{G}'_\tau(\tilde{G}'_\tau)^*v(x_1, x') &= \int_0^1 \int_0^{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(x_1, 0, \lambda)k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda)(1 + \lambda)E_\lambda[v(x_1, \cdot)](x') d\lambda dz_1 \\ &- \int_0^1 \int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda)k_{2,\tau}(z_1, 0, \lambda)(1 + \lambda)E_\lambda[v(x_1, \cdot)](x') d\lambda dz_1 \\ &- \int_0^1 \int_{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(\max\{x_1, z_1\}, 0, \lambda)k_{2,\tau}(\min\{x_1, z_1\}, 0, \lambda)(1 + \lambda)E_\lambda[v(x_1, \cdot)](x') d\lambda dz_1. \end{aligned} \quad (2.118)$$

On démontre alors le lemme suivant :

Lemme 2.5.19. *Soit $d \geq 3$. Il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\tilde{G}'_\tau(\tilde{G}'_\tau)^*$ défini par (2.118) satisfait l'inégalité suivante pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$ et $\tau \geq 1$,*

$$\|\tilde{G}'_\tau(\tilde{G}'_\tau)^*[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C\|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})}. \quad (2.119)$$

Démonstration. En utilisant alors (2.81), on obtient pour tout $x_1 \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &\|\tilde{G}'_\tau(\tilde{G}'_\tau)^*[v(x_1, \cdot)]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \\ &\leq C \left| \int_0^1 \int_0^{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(x_1, 0, \lambda)k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda)(1 + \lambda)\lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right. \\ &\quad + \int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda)k_{2,\tau}(z_1, 0, \lambda)(1 + \lambda)\lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\quad \left. + \int_{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(\max\{x_1, z_1\}, 0, \lambda)k_{2,\tau}(\min\{x_1, z_1\}, 0, \lambda)(1 + \lambda)\lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \\ &\quad \times \|v(z_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dz_1. \end{aligned}$$

Ensuite, on va démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x_1, z_1 \in (0, 1)$, on a

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(x_1, 0, \lambda)k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda)(1 + \lambda)\lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right. \\ &\quad + \int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda)k_{2,\tau}(z_1, 0, \lambda)(1 + \lambda)\lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\quad \left. + \int_{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(\max\{x_1, z_1\}, 0, \lambda)k_{2,\tau}(\min\{x_1, z_1\}, 0, \lambda)(1 + \lambda)\lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \\ &\leq \frac{C}{|x_1 - z_1|^{1-\frac{2}{d}}}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Une fois que l'estimée (2.120) sera démontrée, on déduira immédiatement l'estimée (2.119) en utilisant l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Preuve de (2.120). Sans perdre de généralité et en utilisant la symétrie du noyau en (x_1, z_1) , on va supposer que $1 > x_1 > z_1 > 0$, et on va distinguer les parties correspondantes aux basses fréquences $\lambda \leq -\tau\varphi'(x_1)$, aux hautes fréquences $\lambda \geq -\tau\varphi'(z_1)$ et aux fréquences intermédiaires $-\tau\varphi'(x_1) \leq \lambda \leq -\tau\varphi'(z_1)$.

Basses fréquences $\lambda \leq -\tau\varphi'(x_1)$. Comme φ' est croissante, on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(x_1, 0, \lambda) k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \\ &= e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} \sinh(x_1\lambda) \sinh(z_1\lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda. \end{aligned}$$

Si $-\tau\varphi'(x_1)x_1 \leq 1$. Dans ce cas-là, on a tout simplement

$$\begin{aligned} & e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} \sinh(x_1\lambda) \sinh(z_1\lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda x_1 z_1 \leq C x_1 z_1 \tau^{3-\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Si $-\tau\varphi'(x_1)x_1 \geq 1$. En décomposant l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} & e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} \int_0^{-\tau\varphi'(x_1)} \sinh(x_1\lambda) \sinh(z_1\lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} \int_0^{\frac{1}{x_1}} \sinh(x_1\lambda) \sinh(z_1\lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \quad + e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} \int_{\frac{1}{x_1}}^{-\tau\varphi'(x_1)} \sinh(x_1\lambda) \sinh(z_1\lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} x_1 z_1 \int_0^{\frac{1}{x_1}} (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \quad + C e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} \int_{\frac{1}{x_1}}^{-\tau\varphi'(x_1)} \sinh(x_1\lambda) \sinh(z_1\lambda) \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C x_1^{-2+\frac{2}{d}} z_1 + C e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} \int_{\frac{1}{x_1}}^{-\tau\varphi'(x_1)} e^{(x_1+z_1)\lambda} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C x_1^{-1+\frac{2}{d}} + C e^{\tau(\varphi(x_1)+\varphi(z_1))} |x_1 + z_1|^{-1+\frac{2}{d}} e^{-(x_1+z_1)\tau\varphi'(x_1)} \leq C x_1^{-1+\frac{2}{d}} + C |x_1 + z_1|^{-1+\frac{2}{d}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme 2.2.7 et le fait que φ' est croissante pour avoir

$$\varphi(x_1) + \varphi(z_1) \leq \varphi'(x_1)(x_1 + z_1).$$

En utilisant le fait que $\tau \leq Cx_1^{-1}$, $\tau \leq Cz_1^{-1}$, $\tau \leq C|x_1 - z_1|^{-1}$, et $|z_1 - x_1| \leq |z_1 + x_1|$ car z_1 et x_1 sont tout deux positifs, on en déduit que

$$\left| \int_0^{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(x_1, 0, \lambda) k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \leq C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}$$

Hautes fréquences $\lambda \geq -\tau\varphi'(z_1)$. On cherche maintenant à démontrer

$$\left| \int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) k_{2,\tau}(z_1, 0, \lambda) \lambda^{2-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \leq \frac{C}{|x_1 - z_1|^{1-\frac{2}{d}}}.$$

Pour cela, en utilisant que φ' est croissante, on a

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) k_{2,\tau}(z_1, 0, \lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \\
& \leq C e^{\tau(\varphi(x_1) + \varphi(z_1))} \int_{-\tau \varphi'(z_1)}^{\infty} e^{-\lambda(x_1 + z_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C e^{\tau(\varphi(x_1) + \varphi(z_1))} \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda (x_1 + z_1)^{-1 + \frac{2}{d}} \\
& \leq C |x_1 - z_1|^{-1 + \frac{2}{d}}.
\end{aligned}$$

Fréquences intermédiaires $-\tau \varphi'(x_1) \leq \lambda \leq -\tau \varphi'(z_1)$. Enfin, on a

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda) k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \\
& \leq C e^{\tau(\varphi(x_1) + \varphi(z_1))} \int_{-\tau \varphi'(x_1)}^{-\tau \varphi'(z_1)} \sinh(z_1 \lambda) e^{-\lambda x_1} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda.
\end{aligned}$$

Si $\tau x_1 \leq 2$,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda) k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \\
& \leq C \int_{-\tau \varphi'(x_1)}^{-\tau \varphi'(z_1)} z_1 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C z_1 \tau^{2-\frac{2}{d}} \leq C x_1^{-1 + \frac{2}{d}}.
\end{aligned}$$

Si $\tau x_1 \geq 2$ et $\tau z_1 \leq 1$,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda) k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \\
& \leq C e^{\tau \varphi(x_1)} \int_{-\tau \varphi'(x_1)}^{-\tau \varphi'(z_1)} z_1 \lambda^{1-\frac{2}{d}} e^{-\lambda x_1} d\lambda \\
& \leq C z_1 x_1^{-2 + \frac{2}{d}} e^{\tau \varphi(x_1)} \int_{-\tau \varphi'(x_1) x_1}^{-\tau \varphi'(z_1) x_1} \lambda^{1-\frac{2}{d}} e^{-\lambda} d\lambda \\
& \leq C z_1 x_1^{-2 + \frac{2}{d}} (\tau x_1)^{1-\frac{2}{d}} \leq C (\tau z_1)^{1-\frac{2}{d}} z_1^{\frac{2}{d}} x_1^{-1} \leq C x_1^{-1 + \frac{2}{d}}.
\end{aligned}$$

Si $\tau x_1 \geq 2$ et $\tau z_1 > 1$,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda) k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \\
& \leq C e^{\tau \varphi(x_1) + \tau \varphi(z_1)} \int_{-\tau \varphi'(x_1)}^{-\tau \varphi'(z_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} e^{-\lambda(x_1 - z_1)} d\lambda \\
& \leq C |x_1 - z_1|^{-1 + \frac{2}{d}} e^{\tau \varphi(x_1) + \tau \varphi(z_1)} \int_{-\tau \varphi'(x_1)(x_1 - z_1)}^{-\tau \varphi'(z_1)(x_1 - z_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} e^{-\lambda} d\lambda.
\end{aligned}$$

On vérifie alors que si $\tau |x_1 - z_1| \leq 1$,

$$\int_{-\tau \varphi'(x_1)(x_1 - z_1)}^{-\tau \varphi'(z_1)(x_1 - z_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} e^{-\lambda} d\lambda \leq C \tau (x_1 - z_1)^2 (\tau (x_1 - z_1))^{-\frac{2}{d}} \leq C \tau^{1-\frac{2}{d}} (x_1 - z_1)^{2-\frac{2}{d}} \leq C,$$

et que si $\tau(x_1 - z_1) \geq 1$ (en utilisant le lemme 2.2.7)

$$\begin{aligned} e^{\tau\varphi(x_1)+\tau\varphi(z_1)} \int_{-\tau\varphi'(x_1)(x_1-z_1)}^{-\tau\varphi'(z_1)(x_1-z_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} e^{-\lambda} d\lambda &\leq e^{\tau\varphi(x_1)+\tau\varphi(z_1)} (\tau(x_1 - z_1))^{-\frac{2}{d}} e^{\tau\varphi'(x_1)(x_1-z_1)} \\ &\leq C(\tau(x_1 - z_1))^{-\frac{2}{d}} \leq C. \end{aligned}$$

Ceci permet donc de conclure que, dans toutes les situations, on a

$$\left| \int_{-\tau \max\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}} k_{1,\tau}(z_1, 0, \lambda) k_{2,\tau}(x_1, 0, \lambda) (1 + \lambda) \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right| \leq C|x_1 - z_1|^{-1+\frac{2}{d}}.$$

On déduit l'inégalité (2.120), et la preuve du Lemme 2.5.19 est complète. \square

Cela conclut la démonstration de la proposition 2.5.14. \square

Estimée de l'opérateur G_τ . On rappelle que G_τ est donné par (2.111).

Démonstration de la Proposition 2.5.15. Estimation de $\|G_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})}$. Soit $x_1 \in (0, 1)$ fixé, en utilisant (2.80) du corollaire 2.4.4, on obtient

$$\|G_\tau[f](x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \left\| \frac{e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(1))-\lambda(1-x_1)}}{(1+\lambda)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L_\lambda^\infty(-\tau\varphi'(x_1), \infty)} \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

La fonction $\lambda \rightarrow \frac{e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(1))-\lambda(1-x_1)}}{(1+\lambda)^{\frac{1}{2}}}$ est décroissante sur $[-\tau\varphi'(x_1), \infty)$ pour tout $\tau \geq 1$. Par conséquent, en utilisant le lemme 2.2.7, on obtient

$$\left\| \frac{e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(1))-\lambda(1-x_1)}}{(1+\lambda)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L_\lambda^\infty(-\tau\varphi'(x_1), \infty)} \leq C \frac{e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(1))+\tau\varphi'(x_1)(1-x_1)}}{(1-\tau\varphi'(x_1))^{\frac{1}{2}}} \leq C \frac{e^{-\tau(1-x_1)^2}}{\tau^{\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite, en prenant la norme $L_{x_1}^2(0, 1)$ et en faisant le changement de variable $\mu = \sqrt{\tau}(1 - x_1)$, on a

$$\|G_\tau[f]\|_{L^2(\mathcal{S})} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{3}{4}}} \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}. \quad (2.121)$$

Estimation $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) - L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$. Pour ce faire, on va à nouveau utiliser « l'argument TT^* ». Notre objectif est de démontrer que G_τ est continu de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$ dans $L^{\frac{2d}{d-2}}((0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1})$. On rappelle que G_τ est donné par la formule suivante

$$G_\tau[f](x_1, x') = \int_{\mathbb{R}_{y'}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}_{\xi'}^{d-1}} \mathbf{1}_{\{|\xi'| \geq -\tau\varphi'(x_1)\}} e^{\tau(\varphi(x_1)-\varphi(1))-|\xi'|(1-x_1)} e^{i(x'-y') \cdot \xi'} f(y') d\xi' dy',$$

pour tout $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$. On note par $|D_{x'}|^{-\frac{1}{2}}$ l'opérateur de multiplication de Fourier par $|\xi'|^{-\frac{1}{2}}$, et on introduit l'opérateur \tilde{G}_τ donné par

$$\tilde{G}_\tau[f](x_1, x') = \left(G_\tau \circ |D_{x'}|^{-\frac{1}{2}} \right) [f](x_1, x'), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^{d-1}), (x_1, x') \in (0, 1) \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

L'objectif de cette modification est de se ramener à démontrer que $\tilde{G}_\tau : L^2(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$ est continu, plutôt que de montrer la continuité de $G_\tau : H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \rightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})$. On écrit alors que \tilde{G}_τ est donné en Fourier de la façon suivante :

$$\mathcal{F}[\tilde{G}_\tau[f](x_1, \cdot)](\xi') = 1_{|\xi'| > -\tau\varphi'(x_1)} \frac{1}{|\xi'|^{\frac{1}{2}}} e^{\tau(\varphi(x_1) - \varphi(1)) - |\xi'|(1-x_1)} \mathcal{F}[f](\xi').$$

Il est alors facile de vérifier que l'opérateur $\tilde{G}_\tau(\tilde{G}_\tau)^*$ s'exprime simplement en fonction de l'opérateur E_λ comme suit

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_\tau(\tilde{G}_\tau)^* f(x_1, x') \\ &= \int_0^1 \int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} \lambda^{-1} e^{\tau(\varphi(x_1) + \varphi(z_1) - 2\varphi(1)) - \lambda(2-z_1-x_1)} E_\lambda[f(x_1, \cdot)](x') d\lambda dz_1. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Lemme 2.5.20. *Soit $d \geq 3$. Il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\tilde{G}_\tau(\tilde{G}_\tau)^*$ défini par (2.122) satisfait l'inégalité suivante : il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$ et pour tout $\tau \geq 1$,*

$$\|\tilde{G}_\tau(\tilde{G}_\tau)^*[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})}. \quad (2.123)$$

Démonstration. En utilisant alors (2.81) du Corollaire 2.4.4, on obtient pour tout $x_1 \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{G}_\tau(\tilde{G}_\tau)^*[v(x_1, \cdot)]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \\ & \leq C \int_0^1 \int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} e^{\tau(\varphi(x_1) + \varphi(z_1) - 2\varphi(1)) - \lambda(2-z_1-x_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \|v(z_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dz_1. \end{aligned}$$

Ensuite, on va démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x_1, z_1 \in (0, 1)$, on a

$$\int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} e^{\tau(\varphi(x_1) + \varphi(z_1) - 2\varphi(1)) - \lambda(2-z_1-x_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \leq \frac{C}{|x_1 - z_1|^{1-\frac{2}{d}}}. \quad (2.124)$$

En effet, si on admet un instant (2.124), l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev donne directement qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})$ et pour tout $\tau \geq 1$,

$$\|\tilde{G}_\tau(\tilde{G}_\tau)^*[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathcal{S})}.$$

Preuve de (2.124). Grâce au lemme 2.2.7 et le fait que φ' est croissante, on a

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau \min\{\varphi'(x_1), \varphi'(z_1)\}}^{+\infty} e^{\tau(\varphi(x_1) + \varphi(z_1) - 2\varphi(1)) - \lambda(2-z_1-x_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq 1_{z_1 \leq x_1} \int_{-\tau\varphi'(z_1)}^{+\infty} e^{-(\tau\varphi'(z_1) + \lambda)(2-x_1-z_1) - \beta_2\tau((1-x_1)^2 + (1-z_1)^2)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \quad + 1_{x_1 \leq z_1} \int_{-\tau\varphi'(x_1)}^{+\infty} e^{-(\tau\varphi'(x_1) + \lambda)(2-x_1-z_1) - \beta_2\tau((1-x_1)^2 + (1-z_1)^2)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\mu = (\tau\varphi'(z_1) + \lambda)(2 - x_1 - z_1)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{z_1 \leq x_1} \int_{-\tau\varphi'(z_1)}^{+\infty} e^{-(\tau\varphi'(z_1) + \lambda)(2 - x_1 - z_1) - \beta_2\tau((1-x_1)^2 + (1-z_1)^2)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &= \mathbf{1}_{z_1 \leq x_1} e^{-\beta_2\tau((1-x_1)^2 + (1-z_1)^2)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\mu}}{[\mu - \tau\varphi'(z_1)(2 - x_1 - z_1)]^{\frac{2}{d}}} d\mu (2 - x_1 - z_1)^{-1 + \frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Ensuite, notons que pour tout $x_1, z_1 \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} (2 - x_1 - z_1)^{-1 + \frac{2}{d}} &\leq |x_1 - z_1|^{-1 + \frac{2}{d}}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\mu}}{[\mu - \tau\varphi'(z_1)(2 - x_1 - z_1)]^{\frac{2}{d}}} d\mu &\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\mu}}{\mu^{\frac{2}{d}}} d\mu \leq C. \end{aligned}$$

On conclut alors qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$, et pour tout $x_1, z_1 \in (0, 1)$,

$$\mathbf{1}_{x_1 \leq z_1} \int_{-\tau\varphi'(z_1)}^{+\infty} e^{-(\tau\varphi'(z_1) + \lambda)(2 - x_1 - z_1) - \beta_2\tau((1-x_1)^2 + (1-z_1)^2)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \leq \frac{C}{|x_1 - z_1|^{1 - \frac{2}{d}}}.$$

Par symétrie, on déduit l'inégalité de (2.124). Ainsi, la preuve du Lemme 2.5.20 est complète. \square

Enfin, du lemme 2.5.20, on déduit l'inégalité suivante

$$\|G_\tau[f]\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathcal{S})} \leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

pour tout $\tau \geq 1$ et $f \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$.

Cela achève donc la preuve de la proposition 2.5.15. \square

L'intérêt principal du résultat présenté dans le Théorème 2.5.10 est qu'il permet d'établir des résultats de prolongement unique quantifiés (dans l'esprit du Corollaire 2.5.8) pour des opérateurs elliptiques qui sont des perturbations du Laplacien, dans un cadre géométrique plus général. On renvoie au Chapitre 3 pour plus de détails, et notamment au Théorème 3.1.3.

On trouvera ensuite, dans le Chapitre 4, une version raffinée du Théorème 2.5.10 qui, combinée avec le Lemme de Wolff, permettra de quantifier le prolongement unique pour des opérateurs elliptiques qui sont des perturbations du Laplacien, avec des termes inférieurs d'ordre zéro et un dans des classes optimales d'intégrabilité, cf Théorème 4.1.1.

Chapitre 3

Estimées de Carleman L^p pour des problèmes aux limites elliptiques et applications à la quantification de prolongement unique

Dans ce chapitre, on établit des estimations de Carleman L^p globales et on fournit une application de quantification du prolongement unique. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Belhassen Dehman et Sylvain Ervedoza et a fait l'objet de l'article : *L^p Carleman estimates for elliptic boundary value problems and applications to the quantification of unique continuation* [DET23].

Contents

3.1	Introduction	96
3.2	Estimation de Carleman dans une bande	103
3.3	Construction de la paramétrice dans le cas d'une bande	105
3.4	Estimations Hilbertiennes	108
3.5	Théorèmes de restriction de Fourier et applications	113
3.5.1	Théorèmes de restriction de Fourier	114
3.5.2	Les multiplicateurs de Fourier	119
3.6	Estimations de L^p sur la paramétrice et preuves du théorème 3.2.1 et du théorème 3.2.4	122
3.6.1	Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,0}$ dans (3.28)–(3.30)	122
3.6.2	Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,1}$	132
3.6.3	Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,j}$ pour $j \geq 2$	133
3.6.4	Estimations sur l'opérateur G_τ dans (3.33)–(3.34)	134
3.6.5	Estimations sur l'opérateur R_τ dans (3.29)	136
3.7	Preuve du théorème 3.1.1 : cas général	136
3.7.1	Estimations locales	136
3.7.2	Preuve du lemme 3.7.1 : Un changement de coordonnées adapté	137
3.7.3	Fin de la preuve du Théorème 3.1.1 : Un argument de recollement	142
3.8	Preuve du théorème 3.1.3 : Prolongement unique quantitatif	146
3.9	Appendice	150
3.9.1	Rappel de quelques résultats classiques en analyse harmonique	150
3.9.2	Preuve du lemme 3.7.2	151

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de démontrer des estimations de Carleman L^p globales pour l'opérateur Laplacien en dimension $d \geq 3$. Notre stratégie repose sur des estimations de Carleman sur des bandes puis un recollement approprié des estimations locales et au bord obtenues grâce à un changement de variables. L'essentiel du travail consiste à prouver des estimations de Carleman dans la bande avec une fonction poids linéaire pour un opérateur du second ordre à coefficients dépendant linéairement de la variable normale. Cela est réalisé par la construction d'une paramétrice explicite pour l'opérateur conjugué, qui est estimée grâce à l'utilisation des théorèmes de restriction de Stein-Tomas. En application, nous déduisons des versions quantifiées de la propriété de prolongement unique pour les solutions de $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ en termes des normes de V dans $L^{q_0}(\Omega)$, de W_1 dans $L^{q_1}(\Omega)$ et de W_2 dans $L^{q_2}(\Omega)$ pour $q_0 \in (\frac{d}{2}, \infty]$ et q_1 et q_2 satisfaisant soit $q_1, q_2 > (3d - 2)/2$ et $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 4(1 - \frac{1}{d})/(3d - 2)$, soit $q_1, q_2 > 3d/2$.

Abstract

This chapter aims to prove global L^p Carleman estimates for the Laplace operator in dimension $d \geq 3$. Our strategy relies on precise Carleman estimates in strips, and a suitable gluing of local and boundary estimates obtained through a change of variables. The delicate point and most of the work thus consists in proving Carleman estimates in the strip with a linear weight function for a second-order operator with coefficients depending linearly on the normal variable. This is done by constructing an explicit parametrix for the conjugated operator, which is estimated through the use of Stein Tomas restriction theorems. As an application, we deduce quantified versions of the unique continuation property for solutions of $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ in terms of the norms of V in $L^{q_0}(\Omega)$, of W_1 in $L^{q_1}(\Omega)$ and of W_2 in $L^{q_2}(\Omega)$ for $q_0 \in (d/2, \infty]$ and q_1 and q_2 satisfying either $q_1, q_2 > (3d - 2)/2$ and $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 4(1 - \frac{1}{d})/(3d - 2)$, or $q_1, q_2 > 3d/2$.

3.1 Introduction

Résultat principal.

Le but de ce chapitre est de démontrer des estimations de Carleman globales L^p pour l'opérateur de Laplace plat dans un domaine borné régulier de \mathbb{R}^d ($d \geq 3$), avec une fonction poids générale satisfaisant les conditions strictes de sous ellipticité de Hörmander. En application, nous montrerons comment celles-ci peuvent être utilisées pour obtenir des résultats de quantification du prolongement unique pour les solutions d'équations elliptiques par rapport aux normes des potentiels.

Pour être plus précis, notre principal résultat est le suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit $d \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné de classe C^3 , et ω un sous-ensemble ouvert non vide de Ω avec $\bar{\omega} \subset \Omega$. Soit $\varphi \in C^3(\bar{\Omega})$ tel que*

$$\forall x \in \partial\Omega, \varphi(x) = 0 \text{ et } \partial_n \varphi(x) < 0, \quad (3.1)$$

et il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\inf_{\bar{\Omega} \setminus \omega} |\nabla \varphi| > \alpha, \quad (3.2)$$

et

$$\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ avec } |\nabla\varphi(x)| = |\xi| \text{ et } \nabla\varphi(x) \cdot \xi = 0, \\ (\text{Hess } \varphi(x))\nabla\varphi(x) \cdot \nabla\varphi(x) + (\text{Hess } \varphi(x))\xi \cdot \xi \geq \beta|\nabla\varphi(x)|^2, \quad (3.3)$$

où $\text{Hess } \varphi$ désigne la matrice hessienne de φ . Soit ω_1 un sous-ensemble ouvert de Ω tel que $\bar{\omega} \subset \omega_1$ et $\bar{\omega}_1 \subset \Omega$, et $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ radiale, non négative s'annulant à l'extérieur du disque de rayon 1 et égale à un dans le disque de rayon $\frac{1}{2}$.

Alors, il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ (dépendants uniquement de $\alpha, \beta, \|\varphi\|_{C^3(\bar{\Omega})}, \eta$ et de la configuration géométrique Ω, ω et ω_1) tels que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f_2 + f_{2*'} + \text{div } F & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

avec

$$f_2 \in L^2(\Omega), \quad f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{et } g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

on a, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\tau^{\frac{3}{2}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}}\|e^{\tau\varphi}\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|e^{\tau\varphi}f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau\|e^{\tau\varphi}F\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^2(\omega_1)} + \tau^{\frac{3}{4}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_1)} \right), \quad (3.5)$$

et

$$\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \left(\|e^{\tau\varphi}f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau\|e^{\tau\varphi}F\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^2(\omega_1)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_1)} \right). \quad (3.6)$$

Ici, les normes $\|\cdot\|_{L_{\eta,\tau}^p(\Omega)}$ sont définies pour $p \in [1, \infty]$ et $f \in L^p(\Omega)$ par la formule

$$\|f\|_{L_{\eta,\tau}^p(\Omega)}^2 = \tau^{\frac{d}{3}} \int_{x_0 \in \Omega} \|\eta(\tau^{\frac{1}{3}}(\cdot - x_0))f(\cdot)\|_{L^p(\Omega)}^2 dx_0.$$

Remarque 3.1.2. Les notations $2*$ et $2*'$ découlent de l'injection de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L^{2*}(\Omega)$, avec $2* = 2d/(d-2)$ et $L^{2*'}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, avec $2*' = 2d/(d+2)$.

Avant d'aller plus loin, notons que l'existence d'une fonction satisfaisant les conditions (3.1)–(3.2)–(3.3) pour n'importe quelle configuration géométrique arbitraire est due à Fur-sikov et Imanuvilov [FI96, Lemma 1.1] (voir aussi [LRLR22a, Proposition 3.31]). Les conditions (3.2)–(3.3) sont les conditions de *sous ellipticité* de la fonction poids φ par rapport à l'opérateur Laplacien. Elles sont connues pour être des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une estimation de Carleman locale en L^2 (c'est-à-dire (3.5) pour des fonctions à support compact u , et avec $f_{2*'} = 0$) pour l'opérateur Laplacien avec les mêmes puissances du paramètre de Carleman τ , voir [Hö09, Chapitre XXVIII] et par exemple [LRLR22a, Section 3.6 et Section 4.1.2] pour une perspective plus récente.

L'estimation de Carleman (3.5) coïncide avec celle de [IP03] à l'exception des termes impliquant la norme

$$L_{\eta,\tau}^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega).$$

Ce terme et l'estimation (3.6) sur

$$u \text{ dans } L_{\eta,\tau}^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$$

sont les principales nouveautés de notre résultat et nous permettent de quantifier efficacement les propriétés du prolongement unique pour les solutions d'équations elliptiques par rapport aux normes des potentiels en $L^p(\Omega)$.

Notons que l'estimation (3.5) implique une estimation sur $\tau^{\frac{1}{2}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{H^1(\Omega)}$ à partir du membre de droite de (3.5), donc sur $\tau^{\frac{1}{2}}\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}$. Par conséquent, l'estimation (3.5) ne permet pas de retrouver directement l'estimation (3.6) à partir des injections de Sobolev classiques.

Les estimations de Carleman locales (pour les fonctions à support compact) dans L^p ont été obtenues dans de nombreuses situations, mais elles concernent généralement des questions liées au prolongement unique. Nous devons notamment citer l'article novateur [JK85] obtenu pour un poids radial $\log(|x|)$, qui correspond plutôt à un poids de Carleman limite au sens où la seconde condition (3.3) est satisfaite avec $\beta = 0$ (voir aussi les résultats précédents [ABG81, Hö83]). Plus tard, plusieurs travaux ont été consacrés à l'obtention d'estimations de Carleman locales avec certains poids strictement convexes spécifiques, voir par exemple [BKRS88, Sog89, Sog90], qui ont ensuite été revisités et améliorés dans les travaux [KT01, DSF05]. Nous soulignons également les travaux plus récents [DZ19, Dav20] pour des estimations de Carleman locales avec un poids strictement convexe spécifique. Ici, nous insistons sur le fait que nous considérerons des fonctions poids générales satisfaisant les conditions strictes de sous ellipticité (3.2)–(3.3), de manière similaire à [DSF05]. En fait, l'article [DSF05] prouve que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, si φ est pseudo-convexe en x_0 (c'est-à-dire $|\nabla\varphi(x_0)| \neq 0$ et la condition (3.3) en $x = x_0$), il existe un voisinage K de x_0 tel que l'estimation de Carleman locale $\|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \leq C\|e^{\tau\varphi}\Delta u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}}$ est vérifiée pour tout u à support compact dans K . Les estimations (3.5)–(3.6) étendent donc le résultat de [DSF05] pour l'opérateur Laplacien en fournissant une estimation de Carleman globale, permettant des termes sources dans $H^{-1}(\Omega)$ et des conditions limites dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, avec une estimation de u en norme $H^1(\Omega)$.

Enfin, soulignons également que le théorème 3.1.1 présente des estimations de Carleman globales dans L^p , valables pour des fonctions u ayant éventuellement une trace non nulle sur le bord. À notre connaissance, ceci est nouveau, car toutes les estimations de Carleman en L^p avec $p \neq 2$ qu'on a rencontrées dans la littérature sont valables pour des fonctions à support compact.

Propriétés des normes $L_{\eta,\tau}^p(\Omega)$.

Pour comprendre les normes $L_{\eta,\tau}^p(\Omega)$, commençons par remarquer que pour $p = 2$, et $f \in L_{\eta,\tau}^2(\Omega)$, par le théorème de Fubini, on a, pour τ suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\eta,\tau}^2(\Omega)}^2 &\leq \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \|f\|_{L_{\eta,\tau}^2(\Omega)}^2 &\geq \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\inf_{x_0 \in \Omega} \tau^{\frac{d}{3}} \int_{x \in \Omega} |\eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))|^2 dx \right) \geq c_* \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ici, $c_* > 0$ est indépendant de $\tau \geq \tau_0$ si τ_0 est choisi de telle sorte que $\tau_0 \geq \varepsilon_0^{-3}$, où $\varepsilon_0 > 0$ est tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ et $x \in \Omega$, il existe une boule de rayon $\varepsilon/8$ contenue dans $B(x, \varepsilon/2) \cap \Omega$ (il n'est pas difficile de vérifier qu'un tel $\varepsilon > 0$ existe par compacité et régularité du bord $\partial\Omega$). Les normes $L_{\eta, \tau}^2(\Omega)$ sont donc équivalentes à la norme $L^2(\Omega)$ habituelle de manière uniforme par rapport au paramètre τ .

Pour d'autres valeurs de $p \in [1, \infty)$, ces normes sont moins faciles à décrire, car elles codent en quelque sorte des informations moyennes sur les normes L^p localisées dans des boules de rayon $\tau^{-\frac{1}{3}}$, comme on peut le voir en les écrivant sous la forme

$$\|f\|_{L_{\eta, \tau}^p(\Omega)} = \tau^{\frac{d}{6}} \left\| \left\| \eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))f(x) \right\|_{L_x^p(\Omega)} \right\|_{L_{x_0}^2(\Omega)}.$$

En fait, pour $p \in (1, \infty)$, encore une fois par le théorème de Fubini, il existe $C > 0$, tel que pour $\tau \geq \tau_0$ et $f \in L^p(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{\frac{d}{3}}}{C} \int_{x \in \Omega} \int_{x_0 \in \Omega} |\eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))f(x)|^p dx dx_0 &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\leq C \tau^{\frac{d}{3}} \int_{x \in \Omega} \int_{x_0 \in \Omega} |\eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))f(x)|^p dx dx_0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

c'est-à-dire que la norme $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ est équivalente à la norme

$$\tau^{\frac{d}{3p}} \left\| \left\| \eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))f(x) \right\|_{L_x^p(\Omega)} \right\|_{L_{x_0}^p(\Omega)}.$$

Cela implique en particulier que, pour $p > 2$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\eta, \tau}^p(\Omega)} &= \tau^{\frac{d}{6}} \left\| \left\| \eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))f(x) \right\|_{L_x^p(\Omega)} \right\|_{L_{x_0}^2(\Omega)} \\ &\leq C \tau^{\frac{d}{6}} \left\| \left\| \eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))f(x) \right\|_{L_x^p(\Omega)} \right\|_{L_{x_0}^p(\Omega)} \leq C \tau^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\frac{d}{3}} \|f\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

D'autre part, pour $p > 2$, par l'inégalité intégrale de Minkowski ([Ste16], page 271), on a , pour C indépendant de $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_{x \in \Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{x \in \Omega} \left(\tau^{\frac{d}{3}} \int_{x_0 \in \Omega} |\eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))f(x)|^2 dx_0 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \tau^{\frac{d}{6}} \left(\int_{x_0 \in \Omega} \left(\int_{x \in \Omega} |\eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))f(x)|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} dx_0 \right)^{\frac{1}{2}} = C \|f\|_{L_{\eta, \tau}^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De manière similaire, pour $p < 2$, en utilisant l'inégalité intégrale de Minkowski et l'équivalence de norme (3.7), on obtient qu'il existe une constante C indépendante de $\tau \geq \tau_0$,

$$\frac{1}{C} \tau^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})\frac{d}{3}} \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{\eta, \tau}^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}. \quad (3.10)$$

Remarquons que les estimations (3.8), (3.9), et (3.10) peuvent être utilisées pour simplifier les normes $L_{\eta, \tau}^p$ dans les estimations de Carleman (3.5) et (3.6) et les remplacer par les normes classiques L^p .

Enfin, notons que, pour p, q, r dans $[1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, pour $V \in L^q(\Omega)$ et $u \in L^p(\Omega)$, nous avons l'estimation de type Hölder suivante

$$\|Vu\|_{L^r_{\eta,\tau}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p_{\eta,\tau}(\Omega)} \sup_{x_0 \in \Omega} \{ \|V\|_{L^q(B(x_0, \tau^{-\frac{1}{3}}))} \} \leq \|u\|_{L^p_{\eta,\tau}(\Omega)} \|V\|_{L^q(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Application à la quantification du prolongement unique par rapport aux termes d'ordre inférieur.

Comme conséquence des estimations de Carleman dans le théorème 3.1.1, nous allons prouver (dans la Section 3.8) le résultat suivant :

Théorème 3.1.3. *Soit $d \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné de classe C^3 et ω un sous-ensemble ouvert non vide de Ω avec $\bar{\omega} \subset \Omega$. Alors il existe une constante $C = C(\Omega, \omega) > 0$ telle que pour toute solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de*

$$\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u) \quad \text{dans } \Omega,$$

avec

$$V \in L^{q_0}(\Omega), \quad W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

on a :

1. Si $q_0 \in (\frac{d}{2}, \infty]$, $q_1 \in (\frac{3d-2}{2}, \infty]$ et $q_2 \in (\frac{3d-2}{2}, \infty]$ et

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 4 \left(\frac{1 - \frac{1}{d}}{3d-2} \right),$$

la fonction u satisfait

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} + (\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)})^{\rho(q_1, q_2)} \right)} \|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}, \quad (3.12)$$

avec

$$\gamma(q) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{d}{2q} \right) + \frac{1}{2q}} & \text{si } q \geq d, \quad \delta(q) = \frac{2}{1 - \frac{3d-2}{2q}}, \\ \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2d} \right) \left(2 - \frac{d}{q} \right)} & \text{si } q \in \left(\frac{d}{2}, d \right], \quad \rho(q_1, q_2) = \frac{1}{1 - \frac{1}{d} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2d} \right) \left(\frac{d}{q_1} + \frac{d}{q_2} \right)}. \end{cases}$$

2. Si $q_0 \in (\frac{d}{2}, \infty]$, $q_1 \in (\frac{3d}{2}, \infty]$ et $q_2 \in (\frac{3d}{2}, \infty]$, la fonction u satisfait

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\tilde{\delta}(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\tilde{\delta}(q_2)} \right)} \|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}, \quad (3.13)$$

avec

$$\tilde{\delta}(q) = \frac{2}{1 - \frac{3d}{2q}}.$$

Remarque 3.1.4. *Notons que les conditions de l’item 1 et celles de l’item 2 ne se recouvrent pas au sens où il existe des cas où les conditions de l’item 2 sont satisfaites, tandis que celles de l’item 1 ne le sont pas (par exemple $q_1 = q_2 = 3d/2 + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ petit), et réciproquement (par exemple $q_1 = (3d - 2)/2 + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ petit et $q_2 = \infty$).*

Plusieurs remarques s’imposent.

D’abord, le prolongement unique est connu pour être valide pour des potentiels $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ lorsque $q_0 \geq d/2$, $q_1 \geq d$ et $q_2 \geq d$, voir les travaux [Wol93] et [KT01] où même le prolongement unique fort est prouvé pour $q_0 > d/2$, $q_1 > d$ et $q_2 > d$. (Ces classes d’intégrabilité pour les potentiels sont optimales, voir [KT02].)

Ces résultats du prolongement unique nécessitent l’utilisation d’une estimation de Carleman et d’un délicat argument d’analyse harmonique inspiré par [Wol92], voir aussi [KT01]. Dans cet argument, la fonction poids dans l’estimation de Carleman dépend de la solution, ce qui rend difficile le suivi de la quantification du prolongement unique par rapport aux normes des potentiels. Un autre résultat connexe est l’article [MV12], qui quantifie les propriétés de prolongement unique pour l’opérateur laplacien avec des termes d’ordre inférieur dans la classe d’intégrabilité optimale, mais pas par rapport aux normes des potentiels. En fait, puisque ce travail est basé sur [KT01], comme mentionné ci-dessus, il n’est pas clair comment la preuve dans [MV12] peut être rendue quantitative par rapport aux normes des potentiels.

Par conséquent, lorsqu’on essaie de quantifier la propriété de prolongement unique par rapport aux normes des termes d’ordre inférieur, il n’est pas clair que l’on puisse atteindre les mêmes échelles d’intégrabilité critiques pour les termes d’ordre inférieur. En fait, les résultats connus reposent uniquement sur l’utilisation d’une estimation de Carleman, ce qui, comme indiqué dans [BKRS88], ne permet pas d’aller au-delà de $W_1 \in L^{\frac{3d-2}{2}}(\Omega)$. Cela correspond à ce qui est fait dans [DZ19, Dav20] en utilisant une estimation de Carleman L^p . Mais les résultats de [DZ19] décrivant l’ordre maximal d’annulation des solutions des équations elliptiques nécessitent respectivement $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > \frac{d}{2}(3d - 2)/(5d - 2)$ et $W_1 \in L^{q_1}(\Omega)$ avec $q_1 > (3d - 2)/2$, et $W_2 = 0$. Notons également que le théorème 1 de [Dav20], qui s’applique lorsque $W_1 = W_2 = 0$, présente la même dépendance par rapport à la norme $L^{q_0}(\Omega)$ de V que dans le Théorème 3.1.3.

En outre, en prenant des estimations de Carleman L^2 , on ne peut pas atteindre la même classe d’intégrabilité que dans notre cas, voir par exemple [DZZ08].

Enfin, notons qu’en utilisant une inégalité de Caccioppoli quantitative avec des termes d’ordre inférieur singuliers (voir par exemple [DZ19, Lemma 5]) et une injection de Sobolev, on peut montrer que les inégalités (3.12) et (3.13) restent vraies en remplaçant $\|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}$ par $\|u\|_{L^2(\omega_1)}$ pour ω_1 un sous-ensemble ouvert satisfaisant $\bar{\omega} \subset \omega_1$ (puisque ω est n’importe quel ensemble ouvert non vide dans le théorème 3.1.3, cela est bien sûr une condition sans conséquence).

Signalons également que l’on peut être légèrement plus précis dans les estimées (3.12) et (3.13) du théorème 3.1.3, en utilisant la borne intermédiaire dans (3.11) au lieu de l’extrémale dans la preuve du théorème 3.1.3.

Stratégie de la preuve du théorème 3.1.1.

Pour démontrer le théorème 3.1.1, on commence par le cas géométrique simple d’une bande verticale, avec une fonction poids linéaire $x \mapsto x_1$, et un opérateur du second ordre de la forme $\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$, voir la section 3.2 pour les énoncés.

Bien que cela puisse sembler être un cas très spécifique, on montre dans la section 3.7 que ce n'est pas le cas, notamment en raison des deux faits suivants. Premièrement, si on localise les fonctions dans une boule de rayon suffisamment petit, on peut effectuer un changement de variables (dans l'esprit des coordonnées géodésiques normales), de telle sorte que l'opérateur conjugué $e^{\tau\varphi}\Delta(e^{-\tau\varphi}\cdot)$ peut être reformulé en un problème dans la bande avec un opérateur de la forme $\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$ et la fonction poids linéaire $x \mapsto x_1$. Deuxièmement, on peut recoller les estimations de Carleman locales et sur le bord obtenues de cette manière, et les termes de localisation introduits par les troncatures peuvent être absorbés par ce processus si la localisation n'est pas trop forte. Par conséquent, nous devons équilibrer les deux processus et choisir le taux de localisation de manière appropriée. Il s'avère qu'une localisation dans des boules de taille $\tau^{-\frac{1}{3}}$ fonctionne.

En conséquence, la majeure partie de l'article se concentre en fait sur la preuve d'une estimation de Carleman dans la bande pour un opérateur de la forme $\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$ avec une fonction poids linéaire $x \mapsto x_1$. Nous le faisons en plusieurs étapes.

Tout d'abord, en raison du cadre géométrique spécifique, on peut effectuer une transformation de Fourier dans les variables tangentielles (qui sont transverses au gradient de la fonction poids, c'est-à-dire à la direction e_1), et construire explicitement une paramétrice, voir la section 3.3. En fait, cette approche est inspirée par [Sog89, KT01] et par les travaux récents sur les estimations de Carleman pour l'opérateur de Laplace avec des conductivités discontinues, par exemple [LRL13].

Une fois cela fait, il est clair que nous devons obtenir des estimations sur les opérateurs apparaissant dans la paramétrice. Traiter les normes hilbertiennes peut se faire en utilisant des arguments classiques de type multiplicateur et l'identité de Parseval, voir la section 3.4.

Il reste donc à comprendre comment obtenir des estimations sur les opérateurs apparaissant dans la paramétrice dans $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ par exemple, et d'autres normes d'opérateur impliquant des espaces non hilbertiens. Pour ce faire, nous nous appuyerons sur le théorème de restriction de Fourier de Stein Tomas, rappelé dans le théorème 3.5.1, voir par exemple [Tom75], [SM93, theorem 2, page 352], ou [Sog17, Corollary 2.2.2]. De même, comme dans [KRS87, BKRS88], cette approche nous permettra de donner une manière efficace d'estimer la norme dans $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1}))$ (entre autres) des opérateurs donnés en Fourier, voir la section 3.5.2.

En utilisant ces résultats et la formule explicite obtenue pour la paramétrice, nous parvenons à obtenir des estimations de Carleman en L^p dans la bande pour un opérateur de la forme $\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$ avec une fonction poids linéaire $x \mapsto x_1$.

Enfin, soulignons qu'on a fait le choix de présenter les preuves de manière (espérons-le) pédagogique, et donc de donner tous les détails techniques nécessaires pour suivre l'ensemble des preuves. Par conséquent, certaines parties, par exemple celles concernant les estimations hilbertiennes ou les théorèmes de restriction de Fourier, peuvent sembler classiques, néanmoins on a fait le choix de les présenter, car nous ne les avons pas trouvées dans la littérature dans la version précise dont nous avons besoin.

Plan.

Le reste de l'article se présente comme suit. La section 3.2 est consacrée à l'énoncé des estimations de Carleman (à savoir les théorèmes 3.2.1 et 3.2.4) dans le cas spécifique d'une bande verticale, avec une fonction poids linéaire $x \mapsto x_1$ et pour un opérateur de la forme $\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$. Dans la section 3.3, on donne une paramétrice de l'opérateur conjugué

$e^{\tau x_1}(\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2)(e^{-\tau x_1} \cdot)$. La section 3.4 explique comment obtenir des estimations hilbertiennes sur la paramétrice. La section 3.5 rappelle ensuite les théorèmes de restriction de Fourier et explique comment ils peuvent être utilisés dans notre contexte pour estimer les normes $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1}))$ (entre autres) d'opérateurs donnés en Fourier. Dans la section 3.6, on établit toutes les estimations nécessaires sur les opérateurs apparaissant dans la paramétrice et on conclut la preuve des théorèmes 3.2.1 et 3.2.4. Dans la section 3.7, on explique comment obtenir la preuve du théorème 3.1.1 à partir du théorème 3.2.4. On fournit ensuite dans la section 3.8 la preuve du théorème 3.1.3. Enfin, dans l'annexe, on rappelle quelques résultats classiques, à savoir le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev et le lemme de phase stationnaire (dans sa version raffinée empruntée à [ABZ17]). On donne également la preuve d'un résultat technique d'interpolation utilisé dans la section 3.7.

Notations.

Nous rappelons ici quelques notations.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, on pose $x = (x_1, x')$, où $x' = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Les notations ∇ et Δ désignent respectivement le gradient et le laplacien par rapport à $x = (x_1, \dots, x_d)$, et $\nabla' = (\partial_2, \dots, \partial_d)$ et $\Delta' = \sum_{j=2}^d \partial_j^2$ sont, respectivement, les opérateurs de gradient et de laplacien tangentiels.

Dans tout le chapitre sauf en Section 3.5, la transformée de Fourier est toujours prise par rapport à $x' = (x_2, \dots, x_d)$, et sa variable duale $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ est alors indexée par $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_d)$. La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^{d-1})$ sera notée \widehat{f} :

$$\widehat{f}(\xi') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} f(x') \, dx', \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Pour une fonction f définie sur \mathbb{R}^d telle que $f(x_1, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}(x_1, \cdot)$ désignera la transformée de Fourier partielle par rapport à x' , c'est-à-dire :

$$\widehat{f}(x_1, \xi') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} f(x_1, x') \, dx', \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (3.14)$$

3.2 Estimation de Carleman dans une bande

Dans cette section, on se concentre sur le cas d'une bande de la forme

$$\Omega = (X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad (3.15)$$

et sur le problème elliptique suivant

$$\begin{cases} \Delta v - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2 v = f_2 + f_{2*'} + \operatorname{div} F & \text{dans } \Omega, \\ v(X_0, x') = g(x'), & \text{pour } x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ v(X_1, x') = 0, & \text{pour } x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \end{cases} \quad (3.16)$$

où

$$f_2 \in L^2(\Omega), \quad f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{et } g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}). \quad (3.17)$$

Pour pouvoir résoudre le problème elliptique (3.16), nous supposons la coercivité de l'opérateur $-\Delta + x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$ dans Ω , c'est-à-dire que

$$\exists c_0 > 0, \quad \forall x_1 \in [X_0, X_1], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{c_0^2} |\xi|^2 \leq \sum_{j=1}^d (1 - x_1 \lambda_j) |\xi_j|^2 \leq c_0^2 |\xi|^2, \quad (3.18)$$

où on a posé $\lambda_1 = 0$ pour plus de commodité. Sous la condition (3.18) et les hypothèses d'intégrabilité et de régularité (3.17), le problème (3.16) admet une solution unique $v \in H^1(\Omega)$.

Notre objectif est de prouver l'estimation de Carleman suivante :

Théorème 3.2.1. *Soit Ω donné par (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$, et supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et qu'il existe des constantes positives m_* et M_* telles que*

$$0 < m_* \leq \min_{j \in \{2, \dots, d\}} \lambda_j \leq \max_{j \in \{2, \dots, d\}} \lambda_j \leq M_*. \quad (3.19)$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant de c_0 , m_* et M_* (indépendante de X_0, X_1) telle que pour tout $(f_2, f_{2*'}, F, g)$ comme dans (3.17), si la solution v de (3.16) satisfait $(\partial_1 v - F_1)(X_1, x') = 0$ pour $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, alors on a, pour tout $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|ve^{\tau x_1}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|ve^{\tau x_1}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f_2 e^{\tau x_1}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|f_{2*'} e^{\tau x_1}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau \|F e^{\tau x_1}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|g e^{\tau X_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{X_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \right), \quad (3.20) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|ve^{\tau x_1}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \left(\|f_2 e^{\tau x_1}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_{2*'} e^{\tau x_1}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau \|F e^{\tau x_1}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|g e^{\tau X_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{X_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \right). \quad (3.21) \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2. *Une solution v de (3.16) avec $(f_2, f_{2*'}, F, g)$ comme dans (3.17) appartient a priori seulement à $H^1(\Omega)$. Par conséquent, les théorèmes de trace ne permettent pas de définir directement sa trace normale. Cependant, $\nabla v - F$ satisfait $\nabla v - F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $\operatorname{div}(\nabla v - F) \in L^2(\Omega) + L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$ et il est facile de vérifier que si $R \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $\operatorname{div} R \in L^2(\Omega) + L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$, alors $R \cdot n$ est bien défini en tant qu'élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, voir [BF12, Theorem III.2.43]. Par conséquent, la trace $(\nabla v - F) \cdot n$ est bien définie en tant qu'élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.*

Remarque 3.2.3. *La stricte positivité des coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{2, \dots, d\}}$ garantie par la condition (3.19) est la condition de sous ellipticité stricte pour l'opérateur $-\Delta + x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2$ par rapport à la fonction poids $x \mapsto x_1$, voir par exemple [LRLR22a, Part 1, Définition 3.30].*

Théorème 3.2.4. *Soit Ω tel que (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$, et supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18), et (3.19). Alors, il existe des constantes $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ dépendant de c_0 , m_* et M_* (indépendante de X_0, X_1), telles que pour tout $(f_2, f_{2*'}, F, g)$ comme dans (3.17), si la solution w de*

$$\begin{cases} \Delta w - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2 w - 2\tau \partial_1 w + \tau^2 w = f_2 + f_{2*'} + \operatorname{div} F & \text{dans } \Omega, \\ w(X_0, x') = g(x'), & \text{pour } x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ w(X_1, x') = 0, & \text{pour } x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \end{cases} \quad (3.22)$$

satisfait $(\partial_1 w - F_1)(X_1, x') = 0$ pour $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, alors pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau \|F\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{X_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \right), \quad (3.23) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|f_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau \|F\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{X_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

En fait, la correspondance entre le théorème 3.2.1 et 3.2.4 est donnée par

$$(f_2, f_{2^{*'}}, F, g) \rightarrow ((f_2 - \tau F_1)e^{\tau x_1}, f_{2^{*'}}e^{\tau x_1}, Fe^{\tau x_1}, ge^{\tau X_0}).$$

Les théorèmes 3.2.1 et 3.2.4 sont alors complètement équivalents, et on se concentre donc uniquement sur ce dernier.

3.3 Construction de la paramétrice dans le cas d'une bande

L'objectif de cette section est de construire explicitement la solution w de (3.22) pour $\tau \geq 1$, $(f_2, f_{2^{*'}}, F, g)$ tel que décrit dans (3.17), en supposant que le domaine Ω est une bande comme décrit dans (3.15), et que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ vérifient $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19).

Pour ce faire, on prend la transformée de Fourier partielle par rapport à la variable $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ de (3.22) avec la variable duale $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$:

$$\begin{cases} (\partial_1 - \tau)^2 \widehat{w} - \sum_{j=2}^d (1 - x_1 \lambda_j) \xi_j^2 \widehat{w} = \widehat{f}_2 + \widehat{f}_{2^{*'}} + \partial_1 \widehat{F}_1 + i \sum_{j=2}^d \xi_j \widehat{F}_j & \text{pour } (x_1, \xi') \in \Omega, \\ \widehat{w}(X_0, \xi') = \widehat{g}(\xi'), & \text{pour } \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ \widehat{w}(X_1, \xi') = 0, & \text{pour } \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (3.25)$$

On démontre ensuite ce qui suit :

Proposition 3.3.1. *Soit Ω comme dans (3.15), et supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ vérifient $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19). On introduit la fonction $\psi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\psi(x_1, \xi') = \sqrt{\sum_{j=2}^d (1 - x_1 \lambda_j) \xi_j^2}, \quad x_1 \in [X_0, X_1], \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (3.26)$$

Pour tout $\tau \geq 1$, pour tout $(f_2, f_{2^{*'}}, F, g)$ comme dans (3.17), la solution w de (3.22) satisfait formellement

$$w = K_{\tau,0}(f_2 + f_{2^{*'}}) + K_{\tau,1}(F_1) + \sum_{j=2}^d K_{\tau,j}(F_j) + R_\tau(w) + G_\tau(g) + H_\tau((\partial_1 w - F_1)(X_1, \cdot)), \quad (3.27)$$

où, en utilisant la transformée de Fourier partielle (3.14), les opérateurs $K_{\tau,j}$, pour $j \in \{0, \dots, d\}$, et R_τ sont formellement définis pour f dépendant de $(x_1, x') \in \Omega$, par

$$\widehat{K_{\tau,j} f}(x_1, \xi') = \int_{y_1 \in (X_0, X_1)} k_{\tau,j}(x_1, y_1, \xi') \widehat{f}(y_1, \xi') dy_1, \quad (x_1, \xi') \in \Omega, \quad (3.28)$$

$$\widehat{R_\tau f}(x_1, \xi') = \int_{y_1 \in (X_0, X_1)} r_\tau(x_1, y_1, \xi') \widehat{f}(y_1, \xi') dy_1, \quad (x_1, \xi') \in \Omega, \quad (3.29)$$

avec les noyaux donnés, pour $(x_1, y_1, \xi') \in [X_0, X_1]^2 \times \mathbb{R}^{d-1}$, par

$$\begin{aligned} k_{\tau,0}(x_1, y_1, \xi') &= -1_{\psi(x_1, \xi') > \tau} \int_{X_0}^{\min\{x_1, y_1\}} e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1 \\ &\quad + 1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} 1_{y_1 > x_1} \int_{x_1}^{y_1} e^{-\tau(y_1 - x_1) + \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} k_{\tau,1}(x_1, y_1, \xi') &= -1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} 1_{y_1 > x_1} e^{-\tau(y_1 - x_1) + \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} \\ &\quad + 1_{\psi(x_1, \xi') > \tau} 1_{y_1 < x_1} e^{\tau(x_1 - y_1) - \int_{y_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} + k_{\tau,0}(x_1, y_1, \xi')(\tau + \psi(y_1, \xi')), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} k_{\tau,j}(x_1, y_1, \xi') &= i\xi_j k_{\tau,0}(x_1, y_1, \xi'), & j \in \{2, \dots, d\}, \\ r_\tau(x_1, y_1, \xi) &= k_{\tau,0}(x_1, y_1, \xi') \partial_1 \psi(y_1, \xi'). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les opérateurs G_τ et H_τ sont formellement donnés en Fourier pour $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ par

$$\begin{aligned} \widehat{G_\tau g_0}(x_1, \xi') &= g_\tau(x_1, \xi') \widehat{g_0}(\xi'), & (x_1, \xi') \in \Omega, \\ \widehat{H_\tau g_0}(x_1, \xi') &= h_\tau(x_1, \xi') \widehat{g_0}(\xi'), & (x_1, \xi') \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.33)$$

où g_τ et r_τ sont donnés, pour $(x_1, \xi') \in [X_0, X_1] \times \mathbb{R}^{d-1}$, par

$$\begin{aligned} g_\tau(x_1, \xi') &= 1_{\psi(x_1, \xi') \geq \tau} e^{\tau(x_1 - X_0) - \int_{X_0}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1}, \\ h_\tau(x_1, \xi') &= 1_{\psi(x_1, \xi') > \tau} \int_{X_0}^{x_1} e^{-\tau(X_1 - x_1) - \int_{x_1}^{X_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{X_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1 \\ &\quad - 1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} \int_{x_1}^{X_1} e^{-\tau(X_1 - x_1) + \int_{x_1}^{X_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{X_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Remarque 3.3.2. Nous soulignons que la proposition 3.3.1 est formelle. On démontre plus tard, dans le théorème 3.4.1, la proposition 3.4.3 et dans la proposition 3.6.2, que les opérateurs $K_{\tau,0}$, $(K_{\tau,j})_{j \in \{1, \dots, d\}}$, R_τ , G_τ et H_τ appartiennent respectivement à $\mathcal{L}(L^2(\Omega) + L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega); L^2(\Omega))$, $(\mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega)))^d$, $\mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))$, $\mathcal{L}(H^1(\Omega); L^2(\Omega))$, $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega); L^2(\Omega))$, et $\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\Omega); L^2(\Omega))$. Un argument de densité simple permettra alors de justifier rigoureusement la formule (3.27).

Démonstration. La preuve de la proposition 3.3.1 repose sur la factorisation de l'opérateur $(\partial_1 - \tau)^2 - \sum_{j=2}^d (1 - x_1 \lambda_j) \xi_j^2$:

$$(\partial_1 - \tau)^2 - \sum_{j=2}^d (1 - x_1 \lambda_j) \xi_j^2 = (\partial_1 - \tau - \psi(x_1, \xi')) (\partial_1 - \tau + \psi(x_1, \xi')) - \partial_1 \psi(x_1, \xi'),$$

où ψ est la fonction introduite dans (3.26), et où le dernier terme doit être vu comme un terme de correction.

On pose donc

$$\widehat{H}(x_1, \xi') = \widehat{f}_2(x_1, \xi') + \widehat{f}_{2*}(x_1, \xi') + i \sum_{j=2}^d \xi_j \widehat{F}_j(x_1, \xi') + \partial_1 \psi(x_1, \xi') \widehat{w}(x_1, \xi'), \quad x_1 \in [X_0, X_1], \xi' \in \mathbb{R}^{d-1},$$

de sorte que l'équation (3.25)₍₁₎ peut être réécrite comme

$$(\partial_1 - \tau - \psi(x_1, \xi')) (\partial_1 - \tau + \psi(x_1, \xi')) \widehat{w} = \widehat{H} + \partial_1 \widehat{F}_1, \quad \text{dans } \Omega.$$

En conséquence, en introduisant l'inconnue supplémentaire $\widehat{z}(x_1, \xi') = (\partial_1 - \tau + \psi(x_1, \xi')) \widehat{w}(x_1, \xi')$, l'équation (3.25) peut être réécrite comme un système de deux EDOs du premier ordre indexées par $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$:

$$\begin{cases} (\partial_1 - \tau + \psi(x_1, \xi')) \widehat{w}(x_1, \xi') = \widehat{z}(x_1, \xi') & \text{dans } \Omega, \\ (\partial_1 - \tau - \psi(x_1, \xi')) \widehat{z}(x_1, \xi') = \widehat{H}(x_1, \xi') + \partial_1 \widehat{F}_1(x_1, \xi') & \text{dans } \Omega, \\ \widehat{w}(X_0, \xi') = \widehat{g}(\xi'), & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}, \\ \widehat{w}(X_1, \xi') = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases} \quad (3.35)$$

Soit $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$. On résout (3.35)₂ en considérant la différence $(\widehat{z} - \widehat{F}_1)(\cdot, \xi')$. On obtient alors par la formule de Duhamel, pour $x_1 \in (X_0, X_1)$,

$$\begin{aligned} \widehat{z}(x_1, \xi') &= e^{-\tau(X_1-x_1) - \int_{x_1}^{X_1} \psi(\widetilde{y}_1, \xi') d\widetilde{y}_1} (\partial_1 \widehat{w} - \widehat{F}_1)(X_1, \xi') + \widehat{F}_1(x_1, \xi') \\ &\quad - \int_{x_1}^{X_1} e^{-\tau(y_1-x_1) - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\widetilde{y}_1, \xi') d\widetilde{y}_1} \left(\widehat{H}(y_1, \xi') + (\tau + \psi(y_1, \xi')) \widehat{F}_1(y_1, \xi') \right) dy_1, \end{aligned} \quad (3.36)$$

où nous avons également remarqué en utilisant (3.35)_(1,4), que $\widehat{z}(X_1, \xi') = \partial_1 \widehat{w}(X_1, \xi')$.

On se concentre ensuite sur les équations (3.35)_(1,3,4) donnant $\widehat{w}(\cdot, \xi')$ en fonction de $\widehat{z}(\cdot, \xi')$. Il convient de noter ici que (3.35)_(3,4) donnent deux conditions aux limites pour une équation du premier ordre. Par conséquent, on fait un choix lors de la résolution de (3.35)₍₁₎ en se basant sur le fait qu'on veut des formules ne contenant que des exponentielles de nombres négatifs. Pour faire un tel choix, on analyse le signe de la fonction $x_1 \mapsto -\tau + \psi(x_1, \xi')$. En raison des conditions (3.18) et (3.19), la fonction $x_1 \mapsto \psi(x_1, \xi')$ est strictement décroissante sur $[X_0, X_1]$. Par conséquent, la fonction $x_1 \mapsto -\tau + \psi(x_1, \xi')$ peut s'annuler seulement une fois sur $[X_0, X_1]$, et si elle s'annule en un point $x_{\tau, \xi'} \in [X_0, X_1]$, elle est positive dans $[X_0, x_{\tau, \xi'})$ et négative pour $x_1 \in (x_{\tau, \xi'}, X_1]$.

En conséquence, pour $x_1 \in [X_0, X_1]$ tel que $\psi(x_1, \xi') \leq \tau$, on utilise la formule

$$\widehat{w}(x_1, \xi') = - \int_{x_1}^{X_1} e^{-\tau(\widetilde{x}_1-x_1) + \int_{x_1}^{\widetilde{x}_1} \psi(\widetilde{y}_1, \xi') d\widetilde{y}_1} \widehat{z}(\widetilde{x}_1, \xi') d\widetilde{x}_1,$$

tandis que pour $x_1 \in [X_0, X_1]$ tel que $\psi(x_1, \xi') > \tau$, on utilise la formule

$$\widehat{w}(x_1, \xi') = e^{\tau(x_1-X_0) - \int_{X_0}^{x_1} \psi(\widetilde{y}_1, \xi') d\widetilde{y}_1} \widehat{g}(\xi') + \int_{X_0}^{x_1} e^{\tau(x_1-\widetilde{x}_1) - \int_{x_1}^{\widetilde{x}_1} \psi(\widetilde{y}_1, \xi') d\widetilde{y}_1} \widehat{z}(\widetilde{x}_1, \xi') d\widetilde{x}_1.$$

Ces deux formules peuvent être écrites en une seule sous la forme

$$\begin{aligned} \widehat{w}(x_1, \xi') &= -1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} \int_{x_1}^{X_1} e^{-\tau(\widetilde{x}_1-x_1) + \int_{x_1}^{\widetilde{x}_1} \psi(\widetilde{y}_1, \xi') d\widetilde{y}_1} \widehat{z}(\widetilde{x}_1, \xi') d\widetilde{x}_1 \\ &\quad + 1_{\psi(x_1, \xi') > \tau} \left(e^{\tau(x_1-X_0) - \int_{X_0}^{x_1} \psi(\widetilde{y}_1, \xi') d\widetilde{y}_1} \widehat{g}(\xi') + \int_{X_0}^{x_1} e^{\tau(x_1-\widetilde{x}_1) - \int_{x_1}^{\widetilde{x}_1} \psi(\widetilde{y}_1, \xi') d\widetilde{y}_1} \widehat{z}(\widetilde{x}_1, \xi') d\widetilde{x}_1 \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Les formules données par la Proposition 3.3.1 sont ensuite déduites en rassemblant les formules (3.36) et (3.37). Les détails sont laissés au lecteur. \square

3.4 Estimations Hilbertiennes

L'objectif de cette section est de prouver le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit Ω donné par (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$, et supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19).*

Alors, il existe des constantes $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ dépendant de c_0, m_ et M_* (indépendant de X_0, X_1) telles que pour tout $\tau \geq \tau_0$, pour tout $(f_2, F, g_0, g_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; \mathbb{C}^d) \times H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}) \times H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$, la fonction w donnée par*

$$w = K_{\tau,0}(f_2) + K_{\tau,1}(F_1) + \sum_{j=2}^d K_{\tau,j}(F_j) + G_\tau(g_0) + H_\tau(g_1), \quad (3.38)$$

où $(K_{\tau,j})_{j \in \{0, \dots, d\}}$, G_τ et H_τ sont donnés par la proposition 3.3.1, satisfait :

$$\tau^{\frac{3}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla' w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + C\tau \|F\|_{L^2(\Omega)} + C\tau \|g_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + C\tau \|g_1\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}. \quad (3.39)$$

De plus, pour $w \in L^2(\Omega)$ satisfaisant $\nabla' w \in L^2(\Omega)$, pour tout $\tau \geq \tau_0$, $R_\tau(w)$ introduit dans la proposition 3.3.1, satisfait

$$\tau^{\frac{3}{2}} \|R_\tau(w)\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla' R_\tau(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla' w\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.40)$$

Remarque 3.4.2. *L'inégalité (3.39) ci-dessus donne des estimations sur la norme des opérateurs $K_{\tau,j}$ pour $j \in \{0, \dots, d\}$ en tant qu'opérateurs dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$, et sur la norme des opérateurs G_τ et H_τ respectivement dans $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^2(\Omega))$ et $\mathcal{L}(H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^2(\Omega))$, mais sans prétendre à l'optimalité. En fait, comme nous le verrons plus tard dans le théorème 3.4.4, l'estimation sur la norme de l'opérateur G_τ n'est pas précise. Au contraire, celles sur $K_{\tau,j}$ pour $j \in \{0, \dots, d\}$ sont précises, voir par exemple [LRLR22a, Part 1, Theorem 4.4 and Theorem 4.10] concernant $K_{\tau,0}$.*

Dans cette section et dans la section 3.6, toutes les constantes C dépendent uniquement des constantes c_0, m_*, M_* introduites en (3.18) et (3.19); cela ne sera plus mentionné par la suite.

Démonstration. On remarque d'abord que w tel que dans (3.38) satisfait par construction la version suivante de (3.35) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_1 - \tau + \psi(x_1, \xi')) \widehat{w}(x_1, \xi') = \widehat{z}(x_1, \xi') & \text{pour } (x_1, \xi') \in \Omega_{1,\tau}, \\ (\partial_1 - \tau - \psi(x_1, \xi')) (\widehat{z} - \widehat{F}_1)(x_1, \xi') \\ = \widehat{f}_2(x_1, \xi') + i \sum_{j=2}^d \xi_j \widehat{F}_j(x_1, \xi') + (\tau + \psi(x_1, \xi')) \widehat{F}_1(x_1, \xi') & \text{pour } (x_1, \xi') \in \Omega, \\ \widehat{w}(X_0, \xi') = \widehat{g}_0(\xi'), & \text{si } \psi(X_0, \xi') > \tau, \\ \widehat{w}(X_1, \xi') = 0 & \text{si } \psi(X_1, \xi') \leq \tau, \\ (\widehat{z} - \widehat{F}_1)(X_1, \xi') = \widehat{g}_1(\xi'), & \text{pour } \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \end{array} \right. \quad (3.41)$$

où $\Omega_{1,\tau} = (\{\psi(x_1, \xi') > \tau\} \cap \Omega) \cup (\{\psi(x_1, \xi') < \tau\} \cap \Omega)$. Remarquons que, étant donné $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, en raison des conditions (3.18) et (3.19), il existe au plus un élément $x_1^*(\xi') \in [X_0, X_1]$ tel que $\psi(x_1^*(\xi'), \xi') = 0$. Par conséquent, étant donné $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\{x_1 \in (X_0, X_1), (x_1, \xi') \in \Omega_{1,\tau}\}$ est soit l'intervalle entier (X_0, X_1) , soit l'union de deux intervalles disjoints $(X_0, x_1^*(\xi')) \cup (x_1^*(\xi'), X_1)$.

Puisque ce système est maintenant une famille d'EDO indexées par le paramètre de Fourier tangentiel $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, désormais, on considère $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ comme un paramètre libre.

On effectue ensuite des estimations sur $\widehat{z}(\cdot, \xi')$ en utilisant (3.41)_(2,5) en posant $\widetilde{z}(\cdot, \xi') = \widehat{z}(\cdot, \xi') - \widehat{F}_1(\cdot, \xi')$, qui satisfait :

$$\begin{cases} (\partial_1 - \tau - \psi(x_1, \xi')) \widetilde{z}(x_1, \xi') \\ \quad = \widehat{f}_2(x_1, \xi') + i \sum_{j=2}^d \xi_j \widehat{F}_j(x_1, \xi') + (\tau + \psi(x_1, \xi')) \widehat{F}_1(x_1, \xi') & \text{dans } \Omega, \\ \widetilde{z}(X_1, \xi') = \widehat{g}_1(\xi'), & \text{sur } \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases}$$

On utilise alors une approche par multiplicateur, en prenant le carré des deux côtés et en intégrant en x_1

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{X_1} (|\partial_1 \widetilde{z}(x_1, \xi')|^2 + ((\tau + \psi(x_1, \xi'))^2 + \partial_1 \psi(x_1, \xi')) |\widetilde{z}(x_1, \xi')|^2) dx_1 + (\tau + \psi(X_0, \xi')) |\widetilde{z}(X_0, \xi')|^2 \\ &= (\tau + \psi(X_1, \xi')) |\widetilde{z}(X_1, \xi')|^2 + \int_{X_0}^{X_1} \left| \widehat{f}_2(x_1, \xi') + i \sum_{j=2}^d \xi_j \widehat{F}_j(x_1, \xi') + (\tau + \psi(x_1, \xi')) \widehat{F}_1(x_1, \xi') \right|^2 dx_1 \\ &\leq (\tau + \psi(X_1, \xi')) |\widehat{g}_1(\xi')|^2 + (d+1) \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{f}_2(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ &\quad + (d+1) \sum_{j=2}^d \int_{X_0}^{X_1} |\xi_j \widehat{F}_j(x_1, \xi')|^2 dx_1 + (d+1) \int_{X_0}^{X_1} (\tau + \psi(x_1, \xi'))^2 |\widehat{F}_1(x_1, \xi')|^2 dx_1. \end{aligned}$$

Notons que, dans le cadre du théorème 3.4.1, la fonction ψ définie comme dans (3.26) est telle qu'il existe $C_1 > 0$ dépendant uniquement de c_0, m_*, M_* , tel que

$$\forall x_1 \in [X_0, X_1], \forall \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \frac{|\xi'|}{C_1} \leq \psi(x_1, \xi') \leq C_1 |\xi'|, \quad -C_1 |\xi'| \leq \partial_1 \psi(x_1, \xi') \leq -\frac{|\xi'|}{C_1}. \quad (3.42)$$

Par conséquent, pour $\tau \geq \tau_0$ suffisamment grand, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $x_1 \in [X_0, X_1]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} (\tau + |\xi'|)^2 &\leq (\tau + \psi(x_1, \xi'))^2 + \partial_1 \psi(x_1, \xi') \leq C (\tau + |\xi'|)^2, \\ \frac{1}{C} (\tau + |\xi'|) &\leq \tau + \psi(x_1, \xi') \leq C (\tau + |\xi'|). \end{aligned}$$

Par suite, l'estimation ci-dessus entraîne

$$\begin{aligned} \int_{X_0}^{X_1} (\tau + |\xi'|)^2 |\widetilde{z}(x_1, \xi')|^2 dx_1 &\leq C (\tau + |\xi'|) |\widehat{g}_1(\xi')|^2 + C \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{f}_2(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ &\quad + C \sum_{j=2}^d \int_{X_0}^{X_1} |\xi_j \widehat{F}_j(x_1, \xi')|^2 dx_1 + C \int_{X_0}^{X_1} (\tau + |\xi'|)^2 |\widehat{F}_1(x_1, \xi')|^2 dx_1. \end{aligned}$$

En rappelant que $\widetilde{z}(\cdot, \xi') = \widehat{z}(\cdot, \xi') - \widehat{F}_1(\cdot, \xi')$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{X_0}^{X_1} (\tau + |\xi'|)^2 |\widehat{z}(x_1, \xi')|^2 dx_1 &\leq C (\tau + |\xi'|) |\widehat{g}_1(\xi')|^2 + C \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{f}_2(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ &\quad + C \sum_{j=2}^d \int_{X_0}^{X_1} |\xi_j \widehat{F}_j(x_1, \xi')|^2 dx_1 + C \int_{X_0}^{X_1} (\tau + |\xi'|)^2 |\widehat{F}_1(x_1, \xi')|^2 dx_1. \end{aligned}$$

On déduit ensuite les estimations sur $\widehat{w}(\cdot, \xi')$ à partir de l'équation (3.41)_(1,3,4), en prenant à nouveau le carré des deux côtés de (3.41)₍₁₎ et en faisant une intégration par parties. Pour tout $x_1 \in [X_0, X_0]$, $\psi(x_1, \xi') \neq \tau$, on fait le calcul, une fois en effectuant l'intégration par parties sur (X_0, X_1) , et s'il existe $x_1^*(\xi') \in [X_0, X_1]$ tel que $\psi(x_1^*(\xi'), \xi') = \tau$ (rappelons qu'un tel $x_1^*(\xi')$ est nécessairement unique), on effectue les calculs sur $[X_0, x_1^*(\xi'))$ et sur $(x_1^*(\xi'), X_1]$, et on ajoute les estimations. Dans ce dernier cas, $\partial_1 \widehat{w}$ devrait être interprété comme $1_{x_1 < x_1^*(\xi')} \partial_1 \widehat{w}(x_1, \xi') + 1_{x_1 > x_1^*(\xi')} \partial_1 \widehat{w}(x_1, \xi')$. Il n'y a priori aucune raison que cela coïncide avec la dérivée de $\widehat{w}(\cdot, \xi')$ au sens de $\mathcal{D}'(X_0, X_1)$

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{X_1} \left(|\partial_1 \widehat{w}(x_1, \xi')|^2 + \left((\tau - \psi(x_1, \xi'))^2 - \partial_1 \psi(x_1, \xi') \right) |\widehat{w}(x_1, \xi')|^2 \right) dx_1 \\ & + (\psi(X_1, \xi') - \tau) |\widehat{w}(X_1, \xi')|^2 - (\psi(X_0, \xi') - \tau) |\widehat{w}(X_0, \xi')|^2 = \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{z}(x_1, \xi')|^2 dx_1. \end{aligned}$$

En conséquence, en utilisant les conditions aux limites (3.41)_(3,4) et (3.42),

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{X_1} \left(|\partial_1 \widehat{w}(x_1, \xi')|^2 + \left((\tau - \psi(x_1, \xi'))^2 + |\xi'| \right) |\widehat{w}(x_1, \xi')|^2 \right) dx_1 \\ & \leq C(\psi(X_0, \xi') - \tau) 1_{\psi(X_0, \xi') > \tau} |\widehat{g}_0(\xi')|^2 + C \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{z}(x_1, \xi')|^2 dx_1. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq \tau_0$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{X_1} \left(|\partial_1 \widehat{w}(x_1, \xi')|^2 + \left((\tau - \psi(x_1, \xi'))^2 + |\xi'| \right) |\widehat{w}(x_1, \xi')|^2 \right) dx_1 \\ & \leq C(\psi(X_0, \xi') - \tau) 1_{\psi(X_0, \xi') > \tau} |\widehat{g}_0(\xi')|^2 + C \frac{1}{\tau + |\xi'|} |\widehat{g}_1(X_1, \xi')|^2 + C \frac{1}{(\tau + |\xi'|)^2} \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{f}_2(x_1, \xi')|^2 dx_1 \\ & \quad + C \frac{|\xi'|^2}{(\tau + |\xi'|)^2} \sum_{j=2}^d \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{F}_j(x_1, \xi')|^2 dx_1 + C \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{F}_1(x_1, \xi')|^2 dx_1. \end{aligned}$$

On utilise finalement le fait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\tau \geq \tau_0$, et $x_1 \in [X_0, X_1]$,

$$\begin{aligned} & \left((\tau - \psi(x_1, \xi'))^2 + |\xi'| \right) \geq \frac{1}{C} \left(\tau + \frac{|\xi'|^2}{\tau} \right), \quad (\psi(X_0, \xi') - \tau) 1_{\psi(X_0, \xi') > \tau} \leq C |\xi'|, \\ & \frac{1}{\tau + |\xi'|} \leq \frac{1}{1 + |\xi'|}, \quad \frac{1}{(\tau + |\xi'|)^2} \leq \frac{1}{\tau^2}, \quad \frac{|\xi'|^2}{(\tau + |\xi'|)^2} \leq 1, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{X_1} \left(\tau |\widehat{w}(x_1, \xi')|^2 + |\partial_1 \widehat{w}(x_1, \xi')|^2 + \frac{1}{\tau} |\xi'|^2 |\widehat{w}(x_1, \xi')|^2 \right) dx_1 \\ & \leq C |\xi'| |\widehat{g}_0(\xi')|^2 + C \frac{1}{1 + |\xi'|} |\widehat{g}_1(\xi')|^2 + C \frac{1}{\tau^2} \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{f}_2(x_1, \xi')|^2 dx_1 + C \sum_{j=1}^d \int_{X_0}^{X_1} |\widehat{F}_j(x_1, \xi')|^2 dx_1. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et en utilisant l'identité de Parseval, on déduit (3.39).

Pour prouver (3.40), on remarque simplement que $\widehat{R_\tau w} = \widehat{K_{\tau,0} f_2}$ avec

$$\widehat{f_2}(x_1, \xi') = \partial_1 \psi(x_1, \xi') \widehat{w}(x_1, \xi'),$$

ce qui satisfait clairement $\|f_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla' w\|_{L^2(\Omega)}$. En conséquence, les estimations sur $K_{\tau,0}$ dans (3.39) fournissent immédiatement (3.40). \square

Au vu des calculs ci-dessus, pour w tel que dans (3.38), on a de bonnes estimations sur $\partial_1 \widehat{w}$ dans $L^2(\Omega_{1,\tau})$, où

$$\Omega_{1,\tau} = \{(x_1, \xi') \in \Omega, \text{ avec } \psi(x_1, \xi') > \tau\} \cup \{(x_1, \xi') \in \Omega, \text{ avec } \psi(x_1, \xi') < \tau\}. \quad (3.43)$$

En effet, à partir des calculs ci-dessus, pour w tel que dans (3.38), on a

$$\tau \|\partial_1 \widehat{w}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} \leq C \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + C\tau \sum_{j=1}^d \|F_j\|_{L^2(\Omega)} + C\tau \|g_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} + C\tau \|g_1\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}. \quad (3.44)$$

En particulier, si l'on sait que $w \in H^1(\Omega)$, on obtient une estimation sur $\partial_1 w$ dans $L^2(\Omega)$.

Notons que la preuve ci-dessus et la remarque précédente donnent immédiatement le résultat suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur, puisque toutes les solutions w de (3.22) avec les termes sources $(f_2, f_{2*'}, F, g)$ tels que dans (3.17) appartiennent à $H^1(\Omega)$, et les termes $\|\nabla' w\|_{L^2(\Omega)}^2$ provenant de $R_\tau(w)$ et (3.40) peuvent être facilement absorbés en prenant τ suffisamment grand :

Proposition 3.4.3. *Soit Ω défini dans (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$, et supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19).*

Alors, il existe des constantes $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ dépendant de c_0, m_ et M_* (indépendantes de X_0, X_1) telles que pour tout $(f_2, f_{2*'}, F, g)$ comme dans (3.17) avec $f_{2*'} = 0$, si la solution w de (3.22) satisfait $(\partial_1 w - F_1)(X_1, x') = 0$ dans \mathbb{R}^{d-1} , alors pour tout $\tau \geq \tau_0$,*

$$w = K_{\tau,0}(f_2) + K_{\tau,1}(F_1) + \sum_{j=2}^d K_{\tau,j}(F_j) + R_\tau(w) + G_\tau(g),$$

où les opérateurs $(K_{\tau,i})_{i \in \{0, \dots, d\}}$, R_τ et G_τ sont définis dans la proposition 3.3.1, et

$$\tau^{\frac{3}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|\partial_1 w\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla' w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + C\tau \|F\|_{L^2(\Omega)} + C\tau \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

On vérifie maintenant que l'estimation sur G_τ peut effectivement être améliorée :

Théorème 3.4.4. *Soit Ω tel que décrit dans (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$, et supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19), et soit G_τ l'opérateur dans (3.33) et (3.34).*

Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant de c_0, m_ et M_* (indépendantes de X_0, X_1) telle que pour tout $\tau \geq 1$, pour tout $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$,*

$$\tau^{\frac{3}{4}} \|G_\tau(g)\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{\partial_1 G_\tau(g)}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{-\frac{1}{4}} \|\nabla' G_\tau(g)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})},$$

où $\Omega_{1,\tau}$ est défini par (3.43).

Remarque 3.4.5. Notons que les estimations dans le théorème 3.4.4 fournissent de meilleures estimations que celles du théorème 3.4.1 sur les normes $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^2(\mathbb{R}^d))$ des opérateurs G_τ et $\nabla' G_\tau$, et sont en accord avec celles obtenues dans [IP03].

Démonstration. Pour $\tau \geq 1$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $\psi(X_0, \xi') > \tau$, introduisons $x_1^*(\xi') \in (X_0, X_1]$ comme étant l'unique solution de $\psi(x_1^*(\xi'), \xi') = \tau$ si elle existe, ou $x_1^*(\xi') = X_1$ sinon, et calculons

$$\int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |g_\tau(x_1, \xi')|^2 dx_1 \quad \text{et} \quad \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |\xi'|^2 |g_\tau(x_1, \xi')|^2 dx_1, \quad \text{et} \quad \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |\partial_1 g_\tau(x_1, \xi')|^2 dx_1.$$

Pour cela, on rappelle que, dans le cadre du théorème 3.4.4, nous avons

$$\exists C > 0, \forall \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall (x_1, y_1) \in [X_0, X_1]^2 \text{ avec } y_1 < x_1, \psi(y_1, \xi') \geq \psi(x_1, \xi') + \frac{1}{C} |\xi'| |x_1 - y_1|,$$

$$\exists C > 0, \forall \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall \tau \geq 1, \forall x_1 \in [X_0, x_1^*(\xi')], \frac{1}{C} |\xi'| |x_1^*(\xi') - x_1| \leq \tau - \psi(x_1, \xi'),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |g_\tau(x_1, \xi')|^2 dx_1 \leq \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} e^{2\tau(x_1 - X_0) - 2 \int_{X_0}^{x_1} \psi(y_1, \xi') dy_1} dx_1 \\ & \leq \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} e^{2(\tau - \psi(x_1, \xi'))(x_1 - X_0) - |\xi'| (x_1 - X_0)^2 / C} dx_1 \\ & \leq \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} e^{-2|\xi'| (x_1^*(\xi') - x_1)(x_1 - X_0) / C - |\xi'| (x_1 - X_0)^2 / C} dx_1 \\ & \leq \int_{X_0}^{(X_0 + x_1^*(\xi'))/2} e^{-2|\xi'| (x_1^*(\xi') - x_1)(x_1 - X_0) / C} dx_1 + \int_{(X_0 + x_1^*(\xi'))/2}^{x_1^*(\xi')} e^{-|\xi'| (x_1 - X_0)^2 / C} dx_1 \\ & \leq \int_{X_0}^{(X_0 + x_1^*(\xi'))/2} e^{-|\xi'| (x_1^*(\xi') - X_0)(x_1 - X_0) / (2C)} dx_1 + \int_{(X_0 + x_1^*(\xi'))/2}^{x_1^*(\xi')} e^{-|\xi'| (x_1^*(\xi') - X_0)(x_1 - X_0) / C} dx_1 \\ & \leq 2 \int_{X_0}^{(X_0 + x_1^*(\xi'))/2} e^{-|\xi'| (x_1^*(\xi') - X_0)(x_1 - X_0) / (2C)} dx_1 \\ & \leq C \min \left\{ \frac{1}{|\xi'| |x_1^*(\xi') - X_0|}, |x_1^*(\xi') - X_0| \right\}. \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier que, pour $\tau \geq 1$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $\psi(X_0, \xi') > \tau$,

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |g_\tau(x_1, \xi')|^2 dx_1 |g(\xi')|^2 \\ & \leq C \left(\sup_{\psi(X_0, \xi') > \tau} \left\{ \min \left\{ \frac{1}{|\xi'|^2 |x_1^*(\xi') - X_0|}, \frac{|x_1^*(\xi') - X_0|}{|\xi'|} \right\} \right\} \right) |\xi'| |g(\xi')|^2 \leq \frac{C}{\tau^{\frac{3}{2}}} |\xi'| |g(\xi')|^2. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et en utilisant l'identité de Parseval, on obtient que

$$\tau^{\frac{3}{4}} \|G_\tau(g)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

De même, on prouve que

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |\xi'|^2 |g_\tau(x_1, \xi')|^2 dx_1 |g(\xi')|^2 \\ & \leq C \left(\sup_{\psi(X_0, \xi') > \tau} \left\{ \min \left\{ \frac{1}{|x_1^*(\xi') - X_0|}, |\xi'| |x_1^*(\xi') - X_0| \right\} \right\} \right) |\xi'| |g(\xi')|^2 \leq C \tau^{\frac{1}{2}} |\xi'| |g(\xi')|^2, \end{aligned}$$

de sorte qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$,

$$\tau^{-\frac{1}{4}} \|\nabla' G_\tau(g)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

On vérifie ensuite que

$$\partial_1 g_\tau(x_1, \xi') = (\tau - \psi(x_1, \xi')) g_\tau(x_1, \xi').$$

Ensuite, si $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ est tel que $\psi(X_0, \xi') > \tau$ et $\psi(X_1, \xi') < \tau$, en utilisant que pour tout $x_1 \in [X_0, x_1^*(\xi')]$, $\tau - \psi(x_1, \xi') \leq C|\xi'| |x_1^*(\xi') - x_1|$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |\partial_1 g_\tau(x_1, \xi')|^2 dx_1 \leq \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} (\tau - \psi(x_1, \xi'))^2 e^{2\tau(x_1 - X_0) - 2 \int_{X_0}^{x_1} \psi(y_1, \xi') dy_1} dx_1 \\ & \leq C \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |\xi'|^2 (x_1^*(\xi') - x_1)^2 e^{-2|\xi'| (x_1^*(\xi') - x_1)(x_1 - X_0)/C - |\xi'| (x_1 - X_0)^2/C} dx_1 \\ & \leq C \int_{X_0}^{(X_0 + x_1^*(\xi'))/2} |\xi'|^2 (x_1^*(\xi') - X_0)^2 e^{-2|\xi'| (x_1^*(\xi') - X_0)(x_1 - X_0)/C} dx_1 \\ & \quad + C \int_{(X_0 + x_1^*(\xi'))/2}^{x_1^*(\xi')} |\xi'|^2 (x_1^*(\xi') - x_1)^2 e^{-|\xi'| (x_1^*(\xi') - X_0)(x_1 - X_0)/(2C)} dx_1 \\ & \leq C \int_{X_0}^{(X_0 + x_1^*(\xi'))/2} |\xi'|^2 (x_1^*(\xi') - X_0)^2 e^{-|\xi'| (x_1^*(\xi') - X_0)(x_1 - X_0)/(2C)} dx_1 \\ & \leq C \min \left\{ |\xi'| (x_1^*(\xi') - X_0), |\xi'|^2 (x_1^*(\xi') - X_0)^3 \right\} \leq C \min \left\{ \psi(X_0, \xi') - \tau, \frac{(\psi(X_0, \xi') - \tau)^3}{|\xi'|} \right\}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{x_1^*(\xi')} |\partial_1 g_\tau(x_1, \xi')|^2 dx_1 |g(\xi')|^2 \\ & \leq C \left(\sup_{\psi(X_0, \xi') > \tau} \left\{ \min \left\{ \frac{\psi(X_0, \xi') - \tau}{|\xi'|}, \frac{(\psi(X_0, \xi') - \tau)^3}{|\xi'|^2} \right\} \right\} \right) |\xi'| |g(\xi')|^2 \leq C |\xi'| |g(\xi')|^2. \end{aligned}$$

Des estimations similaires peuvent être obtenues pour $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ tel que $\psi(X_1, \xi') \geq \tau$, et les détails sont laissés au lecteur.

On a ainsi obtenu qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$ et $\tau \geq 1$,

$$\|\partial_1 \widehat{G_\tau(g)}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} \leq C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Ceci conclut la démonstration du théorème 3.4.4. \square

3.5 Théorèmes de restriction de Fourier et applications

Dans cette section, on rappelle d'abord le théorème classique de restriction de Fourier, puis nous présentons une version adaptée à notre cas. Nous expliquons ensuite comment ce résultat peut être appliqué pour estimer les normes d'opérateurs de certaines formes spécifiques, englobant ceux apparaissant dans la paramétrice fournie dans la proposition 3.3.1.

Dans cette section, $n \geq 2$ et, pour une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est donnée par la formule

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et est prolongée par dualité aux distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ comme d'habitude. Nous verrons plus tard que n correspond en fait à $d - 1$ dans les applications qui nous intéressent

3.5.1 Théorèmes de restriction de Fourier

Commençons par rappeler le théorème classique de Stein Tomas sur la restriction de Fourier :

Théorème 3.5.1 ([Tom75], voir aussi [SM93, Théorème 2, page 352]). *Soit $n \geq 2$, et \mathbb{S}^{n-1} la sphère unité de \mathbb{R}^n .*

Alors l'application

$$\begin{cases} L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{n-1}) \\ f \mapsto \widehat{f}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \end{cases}$$

peut être prolongée par continuité à $L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$, et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Remarque 3.5.2. *Notons que les théorèmes de restriction de Fourier ont plusieurs applications ; par exemple, elles peuvent être appliquées pour obtenir les estimations de Strichartz pour les solutions de certaines équations aux dérivées partielles (voir par exemple [Str77]), ainsi que pour obtenir des inégalités de Sobolev [KRS87], voir aussi les travaux récents [JKL22, HKL21]. Voir [Tao04] pour un cadre général de ces estimations.*

Il est bien connu que ce théorème de restriction peut être prolongé à toute hypersurface de courbure gaussienne non nulle, (voir, par exemple, [Sog17, Corollaire 2.2.2]).

En considérant les formules de la proposition 3.3.1, il est intéressant pour nous d'analyser les théorèmes de restriction de Fourier sur la famille de surfaces

$$\Sigma_a = \{\xi \in \mathbb{R}^n, \psi(a, \xi) = 1\}, \quad a \in [X_0, X_1], \quad (3.45)$$

où par analogie avec la fonction ψ dans (3.26) et les conditions (3.18), on a défini

$$\psi(a, \xi) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (1 - a\lambda_j)\xi_j^2}, \quad a \in [X_0, X_1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.46)$$

où la famille de coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ satisfait à la condition

$$\exists c_0 > 0, \quad \forall a \in [X_0, X_1], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{c_0} |\xi|^2 \leq \sum_{j=1}^n (1 - a\lambda_j) |\xi_j|^2 \leq c_0 |\xi|^2. \quad (3.47)$$

Remarquons qu'en vertu de la condition (3.47), pour tout $a \in [X_0, X_1]$, la surface Σ_a est un ellipsoïde et donc [Sog17, Corollaire 2.2.2] s'applique et garantit que l'application $f \mapsto \widehat{f}|_{\Sigma_a}$ envoie $L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\Sigma_a)$.

En fait, pour le présent travail, on a besoin d'une version légèrement plus raffinée de ce résultat, garantissant que la norme de cette application est indépendante de $a \in [X_0, X_1]$.

Théorème 3.5.3. *Soit $n \geq 2$. Supposons que la famille de coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ satisfait (3.47) pour un certain $c_0 > 0$. Alors, il existe une constante $C > 0$ dépendante uniquement de c_0 (et de n) telle que pour tout $a \in [X_0, X_1]$, pour tout $f \in L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\Sigma_a)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.48)$$

Notons que la preuve ci-dessous suit celle du théorème classique 3.5.1 et repose principalement sur le lemme de phase stationnaire.

Démonstration. Pour $a \in [X_0, X_1]$, on note par T_a l'application $T_a : f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mapsto \widehat{f}|_{\Sigma_a} \in L^2(\Sigma_a)$. Ensuite, on considère son opérateur adjoint $T_a^* : L^2(\Sigma_a) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$: Pour $g \in L^2(\Sigma_a)$,

$$T_a^*g(x) = \int_{\omega \in \Sigma_a} e^{ix \cdot \omega} g(\omega) d\Sigma_a(\omega), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'opérateur $T_a^*T_a$ agit alors de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$T_a^*T_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\omega \in \Sigma_a} e^{i(x-\tilde{x}) \cdot \omega} d\Sigma_a(\omega) f(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.49)$$

Ensuite, on démontre que l'opérateur $T_a^*T_a$ peut en fait être prolongé comme un opérateur de $L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n)$, uniformément par rapport à $a \in [X_0, X_1]$. Cela prouvera (3.48) puisque

$$\|T_a^*T_a\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} = \|T_a\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\Sigma_a))}^2.$$

Pour commencer, nous paramétrons l'hypersurface Σ_a au moyen d'un certain nombre de cartes. On remarque d'abord que Σ_a peut être liée avec la sphère \mathbb{S}^{n-1} comme suit. Pour $\omega \in \Sigma_a$, on définit $\xi = G_a(\omega)$ par

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \xi_j = \omega_j \sqrt{1 - a\lambda_j}.$$

On choisit ensuite une calotte sphérique

$$\mathcal{C}_n = \left\{ \xi \in \mathbb{S}^{n-1}; \quad \xi_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \right\}.$$

Il est facile de vérifier que, si, pour $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, $R_{\epsilon, j}$ désigne la rotation qui associe le vecteur de base e_n à ϵe_j et laisse tous les vecteurs e_k pour $k \neq j, n$ inchangés, alors la famille de $R_{\epsilon, j} \mathcal{C}_n$ pour $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ couvre toute la sphère. Par conséquent, il existe une partition de l'unité $(\chi_{\epsilon, j})_{\epsilon \in \{-1, 1\}, j \in \{1, \dots, n\}}$ de la sphère \mathbb{S}^{n-1} telle que pour chaque $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $\chi_{\epsilon, j}$ est lisse et à support compact dans $R_{\epsilon, j} \mathcal{C}_n$. Puisque par construction, $\sum_{\epsilon, j} \chi_{\epsilon, j}(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a

$$\forall \omega \in \Sigma_a, \quad \sum_{\epsilon \in \{-1, 1\}, j \in \{1, \dots, n\}} \chi_{\epsilon, j}(G_a(\omega)) = 1.$$

Par conséquent,

$$T_a^*T_a f(x) = \sum_{\epsilon \in \{-1, 1\}, j \in \{1, \dots, n\}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\omega \in \Sigma_a} \chi_{\epsilon, j}(G_a(\omega)) e^{i(x-\tilde{x}) \cdot \omega} d\Sigma_a(\omega) f(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, pour tout $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, $\chi_{\epsilon, j} \circ G_a$ est supporté dans l'ensemble des points $\omega \in \Sigma_a$ tels que $\epsilon \omega_j \sqrt{1 - a\lambda_j} \geq 1/\sqrt{2n}$, c'est-à-dire l'image inverse de la calotte $R_{\epsilon, j}(\mathcal{C}_n)$ par G_a , qu'on note $\mathcal{C}_{\epsilon, j}$. Il est clair que cet ensemble peut être paramétré par \mathbb{R}^{n-1} comme suit. En notant $\check{\xi}_j = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$, on obtient facilement

$$\mathcal{C}_{\epsilon, j} = \left\{ \left(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \epsilon h_j(a, \check{\xi}_j), \xi_{j+1}, \dots, \xi_n \right); \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (1 - a\lambda_k) \xi_k^2 \leq 1 - \frac{1}{2n} \right\},$$

où la fonction h_j est définie par la formule

$$h_j(a, \check{\xi}_j) = \frac{1}{\sqrt{1 - a\lambda_j}} \sqrt{1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (1 - a\lambda_k) \xi_k^2}, \quad a \in [X_0, X_1], \check{\xi}_j \in V_{a, j},$$

avec $V_{a, j}$ donné par

$$V_{a, j} = \left\{ \check{\xi}_j \in \mathbb{R}^{n-1}; \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (1 - a\lambda_k) \xi_k^2 \leq 1 - \frac{1}{2n} \right\}.$$

Par conséquent, l'étude de $T_a^* T_a$ est réduite à l'étude de la famille d'opérateurs

$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\check{\xi}_j \in V_{a, j}} \chi_{\epsilon, j}(G_a(H_{\epsilon, j}(a, \check{\xi}_j))) e^{i(\check{x}_j - \check{y}_j) \cdot \check{\xi}_j + \epsilon i(x_j - \tilde{x}_j) h(a, \check{\xi}_j)} \sqrt{1 + |\nabla h_j(a, \check{\xi}_j)|^2} d\check{\xi}_j f(y) dy \right),$$

où $H_{\epsilon, j}(a, \check{\xi}_j) = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \epsilon h_j(a, \check{\xi}_j), \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

Ainsi, en renumérotant les coefficients, on peut se concentrer sans perte de généralité sur l'opérateur correspondant à $\epsilon = 1$ et $j = n$. En conséquence, on introduit la notation $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, et on considère l'opérateur, défini pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathcal{T}_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}} \chi(G_a(\xi', h_n(a, \xi'))) e^{i(x' - \tilde{x}') \cdot \xi' + i(x_n - \tilde{x}_n) h_n(a, \xi')} \sqrt{1 + |\nabla h_n(a, \xi')|^2} d\xi' f(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad (3.50)$$

où χ est une fonction lisse sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} à support compact dans la calotte sphérique \mathcal{C}_n et $\chi(G_a(\cdot, h_n(a, \cdot)))$ est prolongée par 0 pour $\xi' \notin V_{a, n}$.

On a réduit la preuve du théorème 3.5.3 à la preuve du fait que les applications \mathcal{T}_a définies dans (3.50) appartiennent à l'espace $\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))$ uniformément par rapport à $a \in [X_0, X_1]$.

Afin de montrer cette propriété, pour $a \in [X_0, X_1]$ et $\delta \in \mathbb{R}$, on introduit la famille d'opérateurs, définie de $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ vers $L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ par

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{a, \delta} f(x') \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}} \chi(G_a(\xi', h_n(a, \xi'))) e^{i(x' - \tilde{x}') \cdot \xi' + i\delta h_n(a, \xi')} \sqrt{1 + |\nabla h_n(a, \xi')|^2} d\xi' f(\tilde{x}') d\tilde{x}', \end{aligned}$$

pour lesquels on montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a \in [X_0, X_1]$ et $\delta \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathcal{T}_{a, \delta}\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^{n-1}), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq C |\delta|^{-\frac{n-1}{n+1}}. \quad (3.51)$$

En effet, si l'estimation (3.51) est vérifiée, alors le théorème de Hardy Littlewood Sobolev (rappelé en annexe dans le théorème 3.9.1) implique que, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_a f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\| \left\| \int_{\tilde{x}_n \in \mathbb{R}} \mathcal{I}_{a, x_n - \tilde{x}_n} f(\cdot, \tilde{x}_n) \, d\tilde{x}_n \right\|_{L_{x'}^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\|_{L_{x_n}^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R})} \\
&\leq \left\| \int_{\tilde{x}_n \in \mathbb{R}} \left\| \mathcal{I}_{a, x_n - \tilde{x}_n} f(\cdot, \tilde{x}_n) \right\|_{L_{x'}^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^{n-1})} \, d\tilde{x}_n \right\|_{L_{x_n}^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R})} \\
&\leq C \left\| \int_{\tilde{x}_n \in \mathbb{R}} |\tilde{x}_n - x_n|^{-\frac{n-1}{n+1}} \|f(\cdot, \tilde{x}_n)\|_{L_{x'}^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^{n-1})} \, d\tilde{x}_n \right\|_{L_{x_n}^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R})} \\
&\leq C \left\| \|f(\cdot, \tilde{x}_n)\|_{L_{x'}^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\|_{L_{x_n}^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R})} = C \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \left(\frac{n+3}{2(n+1)} - \frac{n-1}{2(n+1)} \right).$$

On se concentre donc sur la preuve de l'estimation (3.51), qui, comme expliqué précédemment, conclurait la démonstration du théorème 3.5.3. Cela se fait en trois étapes.

Dans la première étape, on vérifie que $\mathcal{I}_{a, \delta}$ envoie $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ dans lui-même avec des estimées uniformes. En effet, en prenant la transformée de Fourier $x' \rightarrow \xi'$ de \mathbb{R}^{n-1} , on obtient facilement :

$$\widehat{\mathcal{I}_{a, \delta} f}(\xi') = \chi(G_a(\xi', h_n(a, \xi'))) e^{i\delta h_n(a, \xi')} \sqrt{1 + |\nabla h_n(a, \xi')|^2} \widehat{f}(\xi'),$$

de sorte que par l'identité de Parseval,

$$\|\mathcal{I}_{a, \delta}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq \left\| \chi(G_a(\xi', h_n(a, \xi'))) e^{i\delta h_n(a, \xi')} \sqrt{1 + |\nabla h_n(a, \xi')|^2} \right\|_{L_{\xi'}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

On obtient alors immédiatement qu'il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de c_0 dans (3.47) telle que pour tout $a \in [X_0, X_1]$ et $\delta \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathcal{I}_{a, \delta}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq C. \quad (3.52)$$

Dans une deuxième étape, on vérifie que $\mathcal{I}_{a, \delta}$ envoie de manière continue $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ et obtient une estimation de sa norme. En fait, on a clairement que

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{I}_{a, \delta}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^{n-1}), L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))} \\
&\leq \sup_{\delta' \in \mathbb{R}^{n-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\delta' \cdot \xi' + i\delta h_n(a, \xi')} \chi(G_a(\xi', h_n(a, \xi'))) \sqrt{1 + |\nabla h_n(a, \xi')|^2} \, d\xi' \right|. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Notre objectif est alors de prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a \in [X_0, X_1]$ et $\delta \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{\delta' \in \mathbb{R}^{n-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\delta' \cdot \xi' + i\delta h_n(a, \xi')} \chi(G_a(\xi', h_n(a, \xi'))) \sqrt{1 + |\nabla h_n(a, \xi')|^2} \, d\xi' \right| \leq \frac{C}{|\delta|^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (3.54)$$

Pour $\delta' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\delta \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda > 0$ et $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ par

$$\lambda = \sqrt{|\delta'|^2 + \delta^2} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{\lambda}(\delta', \delta).$$

En conséquence,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\delta' \cdot \xi' + i\delta h_n(a, \xi')} \chi(G_a(\xi', h_n(a, \xi'))) \sqrt{1 + |\nabla h_n(a, \xi')|^2} \, d\xi' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda \Phi(\omega, a, \xi')} \tilde{\chi}(a, \xi') \, d\xi',$$

où

$$\Phi(\omega, a, \xi') = \omega' \cdot \xi' + \omega_n h_n(a, \xi'), \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}(a, \xi') = \chi(G_a(\xi', h_n(a, \xi'))) \sqrt{1 + |\nabla h_n(a, \xi')|^2}.$$

On en déduit immédiatement que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda \Phi(\omega, a, \xi')} \tilde{\chi}(a, \xi') \, d\xi' \right| \leq \sup_{a \in [X_0, X_1]} \|\tilde{\chi}(a, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}, \quad (3.55)$$

de sorte qu'on s'intéresse uniquement aux grandes valeurs de δ . Il est alors clair qu'on doit utiliser le lemme de la phase stationnaire pour obtenir une estimation appropriée de cette quantité. Comme on doit quantifier correctement en termes des paramètres $a \in [X_0, X_1]$ et $\delta \in \mathbb{R}$, on utilise la version affinée de [ABZ17, theorem 1], rappelée en annexe dans le théorème 3.9.2.

Soit $\Omega_n \in (0, \frac{1}{2})$ tel que

$$\Omega_n \sup_{a \in [X_0, X_1]} \|\nabla_{\xi'} h_n(a, \xi')\|_{L_{\xi'}^\infty(V_{a,n})} \leq \frac{1}{2} \sqrt{1 - \Omega_n^2}.$$

Alors

$$\forall \omega \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ avec } |\omega_n| \leq \Omega_n, \quad \inf_{a \in [X_0, X_1], \xi' \in V_{a,n}} |\nabla_{\xi'} \Phi(\omega, a, \xi')| \geq \frac{|\omega'|}{2}.$$

Par conséquent, si $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ avec $|\omega_n| \leq \Omega_n$, en faisant une intégration par parties basée sur la formule

$$e^{i\lambda \Phi(\omega, a, \xi')} = \frac{1}{i\lambda |\nabla_{\xi'} \Phi(\omega, a, \xi')|^2} \nabla_{\xi'} \Phi(\omega, a, \xi') \cdot \nabla_{\xi'} e^{i\lambda \Phi(\omega, a, \xi')},$$

on obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ et une fonction décroissante $\mathcal{F}_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda \Phi(\omega, a, \xi')} \tilde{\chi}(a, \xi') \, d\xi' \right| \leq \frac{C_k}{|\lambda|^k} \mathcal{F}_k(\|\Phi(\omega, \cdot, \cdot)\|_{W^{k+1, \infty}([X_0, X_1] \times V_{a,n})}) \|\tilde{\chi}\|_{W^{k+1, \infty}([X_0, X_1] \times V_{a,n})}.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que pour $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ avec $|\omega_n| \leq \Omega_n$ et $a \in [X_0, X_1]$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda \Phi(\omega, a, \xi')} \tilde{\chi}(a, \xi') \, d\xi' \right| \leq \frac{C_k}{|\delta|^k}. \quad (3.56)$$

Il reste à analyser ce qui se passe lorsque $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ satisfait $|\omega_n| \geq \Omega_n$. Là, on utilise que

$$(\text{Hess}_{\xi'} \Phi)(\omega, a, \xi') = \omega_n (\text{Hess}_{\xi'} h_n)(a, \xi').$$

Puisqu'il existe $a_0 > 0$ tel que

$$\inf_{a \in [X_0, X_1]} \inf_{\xi' \in V_{a,n}} |\det(\text{Hess}_{\xi'} h_n)(a, \xi')| \geq a_0,$$

une application directe du théorème 3.9.2 donne l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $a \in [X_0, X_1]$, pour tout $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ avec $|\omega_n| \geq \Omega_n$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(\omega, a, \xi')} \tilde{\chi}(a, \xi') \, d\xi' \right| \leq \frac{C}{|\lambda|^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{C}{|\delta|^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (3.57)$$

En combinant (3.55)–(3.56)–(3.57), on obtient (3.54), et donc de (3.53), l'existence d'une constante C telle que pour tout $a \in [X_0, X_1]$ et $\delta \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathcal{T}_{a,\delta}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^{n-1}), L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq \frac{C}{|\delta|^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (3.58)$$

Dans la troisième et dernière étape, on conclut l'estimation (3.51) par le théorème d'interpolation de M. Riesz ([Sog17, Theorem 0.1.13]) en combinant (3.52) et (3.58). Cela achève la preuve du théorème 3.5.3. \square

3.5.2 Les multiplicateurs de Fourier

Le but de cette section est de démontrer comment le théorème 3.5.3 peut être appliqué pour obtenir des estimations sur certaines familles de multiplicateurs de Fourier.

Pour être plus précis, pour $X_0 < X_1$ et des coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ satisfaisant (3.47), on définit ψ comme dans (3.46) et Σ_a l'ellipsoïde défini pour $a \in [X_0, X_1]$ par (3.45).

Pour $a \in [X_0, X_1]$ et $k \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Sigma_a))$, on considère des opérateurs donnés comme suit :

$$K_{a,k} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \text{ donné par } \widehat{K_{a,k}(f)}(\xi) = k\left(\psi(a, \xi), \frac{\xi}{\psi(a, \xi)}\right) \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.59)$$

On montre le résultat suivant :

Proposition 3.5.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soient $X_0 < X_1$, et les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ satisfaisant (3.47). Pour $a \in [X_0, X_1]$, soit ψ et Σ_a comme dans (3.45)–(3.46). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $a \in [X_0, X_1]$, pour tout $k \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Sigma_a))$, on a*

— *Le multiplicateur de Fourier $K_{a,k}$ dans (3.59) applique $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et*

$$\|K_{a,k}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \|k\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Sigma_a))}. \quad (3.60)$$

— *Si de plus k satisfait*

$$\int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)} \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} \, d\lambda < \infty,$$

alors le multiplicateur de Fourier $K_{a,k}$ dans (3.59) appartient à $\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))$ et

$$\|K_{a,k}\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} \leq C \int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)} \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} \, d\lambda. \quad (3.61)$$

— Si k satisfait

$$\int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)}^2 \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} d\lambda < \infty,$$

alors le multiplicateur de Fourier $K_{a,k}$ dans (3.59) appartient à

$$\mathcal{L}\left(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap \mathcal{L}\left(L^2(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n)\right),$$

et

$$\|K_{a,k}\|_{\mathcal{L}\left(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)\right)} \leq C \sqrt{\int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)}^2 \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} d\lambda}, \quad (3.62)$$

$$\|K_{a,k}\|_{\mathcal{L}\left(L^2(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq C \sqrt{\int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)}^2 \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} d\lambda}. \quad (3.63)$$

Remarque 3.5.5. Les estimations de la proposition 3.5.4 joueront un rôle similaire aux estimées sur la projection spectrale de Sogge [Sog88] pour le Laplacien sphérique afin de prouver des estimations de Carleman en L^p dans le cas elliptique comme dans [Jer86, Sog90, KT01], ou la projection spectrale pour l'opérateur d'Hermite [Tha98, KT05b] afin de prouver les estimations de Carleman L^p dans le cas parabolique comme dans [Esc00, EV01, KT09].

Démonstration. La preuve de (3.60) découle immédiatement de l'identité de Parseval.

La preuve de (3.61) est plus subtile et se déroule en plusieurs étapes. Tout d'abord, en se basant sur le théorème 3.5.3, on analyse, pour $\lambda > 0$, l'application $T_{a,\lambda} : f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mapsto \hat{f}|_{\Sigma_{a,\lambda}}$, où $\Sigma_{a,\lambda} = \{\xi \in \mathbb{R}^n, \psi(a, \xi) = \lambda\}$. On explique ensuite comment cela conduit à l'estimation (3.61).

La première étape repose sur le fait que pour $a \in [X_0, X_1]$ et $\lambda > 0$, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$T_{a,\lambda}^* T_{a,\lambda} f(x) = \int_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \int_{\xi \in \Sigma_{a,\lambda}} e^{i(x-\tilde{x}) \cdot \xi} d\Sigma_{a,\lambda}(\xi) f(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Puisque la fonction $\xi \mapsto \psi(a, \xi)$ est homogène de degré 1, en utilisant un argument de scaling, on obtient

$$\begin{aligned} T_{a,\lambda}^* T_{a,\lambda} f(x) &= \lambda^{n-1} \int_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \int_{\omega \in \Sigma_{a,1}} e^{i\lambda(x-\tilde{x}) \cdot \omega} d\Sigma_{a,1}(\omega) f(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= \lambda^{-1} \int_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \int_{\omega \in \Sigma_{a,1}} e^{i(\lambda x - \tilde{x}) \cdot \omega} d\Sigma_{a,1}(\omega) f\left(\frac{\tilde{x}}{\lambda}\right) d\tilde{x}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\left(T_{a,\lambda}^* T_{a,\lambda} f\right)(x) = \lambda^{-1} \left(T_{a,1}^* T_{a,1} \left(f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right)\right)(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

À partir de cette identité, un simple argument de scaling montre que pour tout $a \in [X_0, X_1]$ et tout $\lambda > 0$,

$$\left\|T_{a,\lambda}^* T_{a,\lambda}\right\|_{\mathcal{L}\left(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n)\right)} \leq \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} \left\|T_{a,1}^* T_{a,1}\right\|_{\mathcal{L}\left(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n)\right)}.$$

Puisque $T_{a,1}^* T_{a,1} = T_a^* T_a$ est l'opérateur défini dans (3.49), et puisque T_a appartient à $\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ d'après le théorème 3.5.3, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $a \in [X_0, X_1]$, pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \left\| T_{a,\lambda}^* T_{a,\lambda} \right\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} &\leq C \lambda^{\frac{n-1}{n+1}}, \\ \left\| T_{a,\lambda} \right\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\Sigma_{a,\lambda}))} &= \left\| T_{a,\lambda}^* \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Sigma_{a,\lambda}), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} \leq C \lambda^{\frac{(n-1)}{2(n+1)}}. \end{aligned}$$

La deuxième étape consiste ensuite à réécrire l'opérateur $K_{a,k}$ comme suit :

$$K_{a,k} = \int_{\lambda > 0} T_{a,\lambda}^* M_{a,k(\lambda, \cdot)} T_{a,\lambda} \, d\lambda,$$

où $M_{a,k(\lambda, \cdot)}$ est l'opérateur défini de $L^2(\Sigma_{a,\lambda})$ vers lui-même comme suit : pour $g \in L^2(\Sigma_{a,\lambda})$,

$$M_{a,k(\lambda, \cdot)} g(\xi) = k \left(\lambda, \frac{\xi}{\psi(a, \xi)} \right) g(\xi), \quad \xi \in \Sigma_{a,\lambda}.$$

En conséquence, on a

$$\begin{aligned} \left\| K_{a,k} \right\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} &\leq \int_{\lambda > 0} \left\| T_{a,\lambda}^* M_{a,k(\lambda, \cdot)} T_{a,\lambda} \right\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} \, d\lambda \\ &\leq \int_{\lambda > 0} \left\| T_{a,\lambda}^* \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Sigma_{a,\lambda}), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))} \left\| M_{a,k(\lambda, \cdot)} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Sigma_{a,\lambda}))} \left\| T_{a,\lambda} \right\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\Sigma_{a,\lambda}))} \, d\lambda \\ &\leq \int_{\lambda > 0} \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)} \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} \, d\lambda, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'estimation

$$\left\| M_{a,k(\lambda, \cdot)} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Sigma_{a,\lambda}))} \leq \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)}.$$

Ceci conclut la preuve de l'estimation (3.61).

Les estimées (3.62)–(3.63) sont basées sur l'estimation (3.61) et les faits que l'opérateur $K_{a,k}$ satisfait $K_{a,k}^* = K_{a,\bar{k}}$ (calcul de l'adjoint par rapport au produit scalaire $L^2(\mathbb{R}^n)$), et $K_{a,k}^* K_{a,\bar{k}} = K_{a,|k|^2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left\| K_{a,k} \right\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))}^2 &= \left\| K_{a,\bar{k}} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))}^2 \\ &= \left\| K_{a,|k|^2} \right\|_{\mathcal{L}(L^{\frac{2(n+1)}{(n+3)}}(\mathbb{R}^n), L^{\frac{2(n+1)}{(n-1)}}(\mathbb{R}^n))}^2 = \int_0^\infty \|k(\lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_a)}^2 \lambda^{\frac{n-1}{n+1}} \, d\lambda, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 3.5.4, en échangeant k et \bar{k} dans les formules ci-dessus. \square

3.6 Estimations de L^p sur la paramétrice et preuves du théorème 3.2.1 et du théorème 3.2.4

Cette section est consacrée à démontrer des estimations sur les normes des différents opérateurs apparaissant dans la proposition 3.3.1, notamment dans les espaces $\mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$ pour des valeurs appropriées de p et q . On utilisera en particulier les résultats de la proposition 3.5.4 avec $n = d - 1$ et le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev (théorème 3.9.1).

On utilisera également à plusieurs reprises le lemme simple ci-dessous, dont la preuve est laissée au lecteur.

Lemme 3.6.1. 1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in [\frac{1}{2}, 2]$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\mu > 1$,

$$\int_1^\mu e^{a\lambda} \lambda^\alpha \, d\lambda \leq C e^{a\mu} (1 + \mu)^\alpha.$$

2. Pour tout $\alpha > -1$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\mu > 0$, $\int_0^\mu e^\lambda \lambda^\alpha \, d\lambda \leq C e^\mu \frac{\mu^{\alpha+1}}{1 + \mu}$.

3. Pour tout $\alpha > -1$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\gamma > 0$, $\int_{\lambda > \gamma} e^{-\lambda} \lambda^\alpha \, d\lambda \leq C e^{-\gamma} (1 + \gamma)^\alpha$.

4. Pour tout $\alpha < -1$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\gamma > 0$, $\int_{\lambda > \gamma} e^{-\lambda} \lambda^\alpha \, d\lambda \leq C e^{-\gamma} \frac{\gamma^{\alpha+1}}{1 + \gamma}$.

5. Pour tout $\alpha \in (-3, 0)$ et $a \in [\frac{1}{2}, 2]$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\gamma > 0$,

$$\int_{\lambda > \gamma} (\lambda - \gamma)^2 e^{-a\lambda} \lambda^\alpha \, d\lambda \leq C \frac{e^{-a\gamma}}{1 + \gamma^{-\alpha}}.$$

Dans l'ensemble de cette section, on se met dans le cadre du théorème 3.2.1. Avec ψ définie comme dans (3.26), il existe $c_1 > 0$ dépendant uniquement de c_0 donnée par (3.18) telle que

$$\forall (x_1, y_1) \in [X_0, X_1]^2, \forall \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \frac{1}{c_1} \psi(y_1, \xi') \leq \psi(x_1, \xi') \leq c_1 \psi(y_1, \xi'). \quad (3.64)$$

On rappelle également que toutes les constantes C dépendent uniquement de c_0, m_*, M_* introduites dans (3.18), (3.19).

3.6.1 Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,0}$ dans (3.28)–(3.30)

L'objectif de cette section est d'estimer la norme de l'opérateur $K_{\tau,0}$ dans (3.28)–(3.30), plus précisément :

Proposition 3.6.2. Soit Ω tel que défini en (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$. Supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19). Alors, il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$, pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|K_{\tau,0} f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{\partial_1 K_{\tau,0} f}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \|\nabla' K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

et, pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|K_{\tau,0} f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|\widehat{\partial_1 K_{\tau,0} f}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla' K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

avec $\Omega_{1,\tau}$ tel que défini en (3.43).

Remarque 3.6.3. Dans les estimations ci-dessus, nous soulignons que les bornes $\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ et $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^2(\Omega))$ de l'opérateur $K_{\tau,0}$ sont estimées par une puissance du paramètre de Carleman qui dépend de la dimension de l'espace d . Ce fait, qui ne se produit pas pour les estimations hilbertiennes, a déjà été observé dans plusieurs cas, et nous renvoyons par exemple à [BKRS88, Sog89, KT01, KT05a].

Démonstration. Au vu des résultats de la proposition 3.5.4, nous estimons d'abord les normes pondérées de $k_{\tau,0}(x_1, y_1, \cdot)$ pour x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$ (rappelons la définition de $k_{\tau,0}$ dans (3.30)). Nous identifions également $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ avec les paires $(\lambda, \omega') \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma_{x_1}$, où $\Sigma_{x_1} = \{\omega' \in \mathbb{R}^{d-1}, \psi(x_1, \omega') = 1\}$, à travers la formule $\xi' = \lambda \omega'$, ou de manière équivalente $\lambda = \psi(x_1, \xi')$ et $\omega' = \xi' / \psi(x_1, \xi')$. Avec un léger abus de notation, nous désignons $k_{\tau,0}$ de manière similaire qu'il soit écrit en termes de $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ ou en termes de $(\lambda, \omega') \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma_{x_1}$, c'est-à-dire

$$k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \omega') = k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda \omega').$$

Nous commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.6.4. *Il existe des constantes $C > 0$ et $C_1 > 0$ indépendantes de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), telles que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$, et $\lambda > 0$,*

— Si $\lambda \leq \tau$, alors le noyau $k_{\tau,0}$ défini dans (3.30) satisfait

$$\|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq \begin{cases} C |y_1 - x_1| e^{-\tau |y_1 - x_1|}, & \text{si } \lambda |y_1 - x_1| \leq 1, \\ \frac{C}{\lambda} e^{-(\tau - \lambda) |y_1 - x_1| - \lambda (y_1 - x_1)^2 / C_1}, & \text{si } \lambda |y_1 - x_1| \geq 1. \end{cases} \quad (3.67)$$

— Si $\lambda \geq \tau$, alors $k_{\tau,0}$ satisfait

$$\|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq \begin{cases} \frac{C}{\lambda} e^{-(\lambda - \tau) |x_1 - y_1| - \lambda (x_1 - y_1)^2 / C_1}, & \text{si } y_1 < x_1, \\ \frac{C}{\lambda} e^{-(\lambda / C + \tau) |y_1 - x_1|}, & \text{si } y_1 > x_1. \end{cases} \quad (3.68)$$

En posant, pour x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$\begin{aligned} k_{\tau,0,\partial_1}(x_1, y_1, \xi') &= -1_{x_1 < y_1} e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} \\ &\quad - 1_{\psi(x_1, \xi') > \tau} (\tau - \psi(x_1, \xi')) \int_{X_0}^{\min\{x_1, y_1\}} e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1 \\ &\quad + 1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} 1_{x_1 < y_1} (\tau - \psi(x_1, \xi')) \int_{x_1}^{y_1} e^{-\tau(y_1 - x_1) + \int_{x_1}^{\tilde{x}_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1, \end{aligned}$$

$k_{\tau,0,\partial_1}$ satisfait les bornes suivantes :

— Si $\lambda \leq \tau$,

$$\|k_{\tau,0,\partial_1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq C e^{-(\lambda/C+\tau)|y_1-x_1|} + (\tau - \lambda) \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}. \quad (3.69)$$

— Si $\lambda > \tau$,

$$\|k_{\tau,0,\partial_1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq \begin{cases} \frac{C}{\lambda}(\lambda - \tau)e^{-(\lambda-\tau)|x_1-y_1|-\lambda(x_1-y_1)^2/C_1}, & \text{si } y_1 < x_1, \\ C e^{-(\lambda/C+\tau)(y_1-x_1)}, & \text{si } y_1 > x_1. \end{cases} \quad (3.70)$$

Remarque 3.6.5. Le noyau $k_{\tau,0,\partial_1}$ correspond au noyau de $\partial_1 K_{\tau,0}$ dans le sens suivant : pour tout $f \in L^2((X_0, X_1); L^2(\mathbb{R}^{d-1}))$, et tout $(x_1, \xi') \in \Omega_{1,\tau}$,

$$\partial_1 \widehat{K_{\tau,0} f}(x_1, \xi') = \int_{y_1 \in (X_0, X_1)} k_{\tau,0,\partial_1}(x_1, y_1, \xi') \widehat{f}(y_1, \xi') \, dy_1. \quad (3.71)$$

Démonstration du lemme 3.6.4. Commençons par prouver (3.67) correspondant à $\lambda \leq \tau$. Soit $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $x_1 \in [X_0, X_1]$ tel que $\lambda = \psi(x_1, \xi') \leq \tau$. On doit alors estimer, pour $y_1 > x_1$,

$$\int_{x_1}^{y_1} e^{-\tau(y_1-x_1)+\int_{x_1}^{\tilde{y}_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1} \, d\tilde{x}_1.$$

Pour $y_1 \in [x_1, X_1]$, introduisons l'application

$$\rho(x_1, \tilde{x}_1, y_1, \xi') = \int_{x_1}^{\tilde{x}_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1 - \int_{\tilde{x}_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1,$$

qui satisfait clairement $\rho(x_1, y_1, y_1, \xi') = -\rho(x_1, x_1, y_1, \xi') \geq |y_1 - x_1| \lambda / c_1$, et $\partial_{\tilde{x}_1} \rho(x_1, \tilde{x}_1, y_1, \xi') = 2\psi(\tilde{x}_1, \xi')$ et $\partial_{\tilde{x}_1}^2 \rho(x_1, \tilde{x}_1, y_1, \xi') = 2\partial_1 \psi(\tilde{x}_1, \xi') < 0$ par (3.19). Par conséquent, par concavité en \tilde{x}_1 , pour $x_1 < y_1$ et $\tilde{x}_1 \in [x_1, y_1]$,

$$\rho(x_1, \tilde{x}_1, y_1, \xi') \leq \rho(x_1, y_1, y_1, \xi') - 2\psi(y_1, \xi') |y_1 - \tilde{x}_1| \leq \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1 - \frac{2}{c_1} \lambda |y_1 - \tilde{x}_1|,$$

où la dernière estimation découle de (3.64). Ainsi, on obtient

$$\left| \int_{x_1}^{y_1} e^{-\tau(y_1-x_1)+\int_{x_1}^{\tilde{y}_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1} \, d\tilde{x}_1 \right| \leq e^{-\tau(y_1-x_1)} \int_{x_1}^{y_1} e^{\int_{x_1}^{\tilde{y}_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1 - 2\lambda|y_1-\tilde{x}_1|/c_1} \, d\tilde{x}_1 \\ \leq e^{-\tau(y_1-x_1)+\int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1} \min \left\{ |y_1 - x_1|, \frac{c_1}{2\lambda} \right\}.$$

On utilise ensuite le fait que la fonction $\tilde{y}_1 \mapsto \psi(\tilde{y}_1, \xi')$ est concave, de sorte que pour $x_1 < \tilde{y}_1$, on a $\psi(\tilde{y}_1, \xi') \leq \psi(x_1, \xi') + \partial_1 \psi(x_1, \xi')(\tilde{y}_1 - x_1)$. En utilisant (3.47) et (3.19), il existe une constante $c_2 > 0$ dépendante uniquement de c_0 , m_* et M_* telle que $\partial_1 \psi(x_1, \xi') \leq -c_2 \psi(x_1, \xi') = -c_2 \lambda$. Par conséquent, pour $y_1 > x_1$,

$$\int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') \, d\tilde{y}_1 \leq (y_1 - x_1) \lambda - c_2 \lambda (y_1 - x_1)^2,$$

et (3.67) suit immédiatement.

On démontre ensuite (3.68) correspondant à $\lambda > \tau$. Soit $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $x_1 \in [X_0, X_1]$ tel que $\lambda = \psi(x_1, \xi') > \tau$. On doit alors estimer, pour $y_1 \in [X_0, X_1]$, la quantité

$$\int_{X_0}^{\min\{x_1, y_1\}} e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1.$$

Comme précédemment, il est facile de vérifier que l'application $\tilde{x}_1 \mapsto -\int_{\tilde{x}_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1$ a pour dérivée $2\psi(\tilde{x}_1, \xi')$ et est donc strictement croissante et concave. Par conséquent, pour tout $\tilde{x}_1 \in [X_0, \min\{x_1, y_1\}]$,

$$\begin{aligned} & -\int_{\tilde{x}_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 \\ & \leq -\int_{\min\{x_1, y_1\}}^{\max\{x_1, y_1\}} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 + 2\psi(\min\{x_1, y_1\}, \xi')(\tilde{x}_1 - \min\{x_1, y_1\}) \\ & \leq -\int_{\min\{x_1, y_1\}}^{\max\{x_1, y_1\}} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \frac{2}{c_1}\lambda(\min\{x_1, y_1\} - \tilde{x}_1). \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} & \int_{X_0}^{\min\{x_1, y_1\}} e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1 \\ & \leq e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{\min\{x_1, y_1\}}^{\max\{x_1, y_1\}} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} \min\left\{\frac{c_1}{2\lambda}, |\min\{x_1, y_1\} - X_0|\right\}. \end{aligned}$$

Si $y_1 > x_1$, on utilise simplement

$$-\int_{\min\{x_1, y_1\}}^{\max\{x_1, y_1\}} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 \leq -\frac{1}{c_1}(y_1 - x_1)\lambda.$$

Si $y_1 < x_1$, on utilise le fait que ψ est décroissante et concave, donc pour tout $\tilde{y}_1 \in [y_1, x_1]$, $\psi(\tilde{y}_1, \xi') \geq \psi(x_1, \xi') + (\tilde{y}_1 - x_1)\partial_1\psi(y_1, \xi')$. Mais il existe une constante $c_3 > 0$ dépendant de c_0 , m_* et M_* telle que $\partial_1\psi(y_1, \xi') \leq -\psi(x_1, \xi')/c_3$, donc on obtient facilement

$$-\int_{\min\{x_1, y_1\}}^{\max\{x_1, y_1\}} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 \leq -(y_1 - x_1)\lambda - \frac{1}{c_3}(y_1 - x_1)^2\lambda$$

dans ce cas. En combinant les trois dernières estimations, on obtient immédiatement (3.68).

La preuve des estimations (3.69)–(3.70) découle du fait que, pour $y_1 > x_1$,

$$\|e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1}\|_{L^\infty_\omega(\Sigma_{x_1})} \leq e^{-(\tau + \lambda/c_1)(y_1 - x_1)},$$

et des estimations déjà prouvées ci-dessus. Les détails sont laissés au lecteur. \square

Utilisant les estimées du lemme 3.6.4, nous prouvons le lemme suivant :

Lemme 3.6.6. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), telle que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$,*

$$\int_{\lambda > 0} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq \frac{C}{|x_1 - y_1|^{1-\frac{2}{d}}}, \quad (3.72)$$

$$\left(\int_{\lambda > 0} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \tilde{k}_{\tau,0}(x_1 - y_1), \quad (3.73)$$

avec $\tilde{k}_{\tau,0} \in L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})$ et $\|\tilde{k}_{\tau,0}\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \leq C\tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}}$,

$$\left(\int_{\lambda > 0} \|k_{\tau,0,\partial_1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{1}{|x_1 - y_1|^{1-\frac{1}{d}}}, \quad (3.74)$$

$$\left(\int_{\lambda > 0} \|\lambda \omega' k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \omega')\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\frac{1}{|x_1 - y_1|^{1-\frac{1}{d}}} + \check{k}_{\tau,0}(x_1 - y_1) \right), \quad (3.75)$$

avec $\check{k}_{\tau,0} \in L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})$ et $\|\check{k}_{\tau,0}\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \leq C\tau^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2d}}$.

Démonstration du Lemme 3.6.6. On commence par remarquer qu'on peut toujours imposer que la constante C_1 du Lemme 3.6.4 soit suffisamment grande pour que, pour tout $(x_1, y_1) \in [X_0, X_1]^2$, on ait $|x_1 - y_1|^2/C_1 \leq |x_1 - y_1|/4$. Cela peut être fait en supposant, par exemple, que $C_1 \geq 8$ puisque $|X_0|, |X_1| \leq 1$. Cela facilitera la preuve de certaines des estimations ci-dessous. Pour plus de commodité, cette constante C_1 sera ensuite notée C , de même que les constants génériques qui dépendent uniquement de la dimension et des paramètres c_0, m_* et M_* .

Preuve de (3.72). On décompose l'intégrale du membre de gauche de (3.72) en trois termes plus adaptés pour utiliser les résultats du Lemme 3.6.4. Le premier est facilement estimé comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\min\{\tau, 1/|y_1-x_1|\}} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C \int_0^{\min\{\tau, 1/|y_1-x_1|\}} |y_1 - x_1| e^{-\tau|y_1-x_1|} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C |y_1 - x_1| e^{-\tau|y_1-x_1|} \min \left\{ \tau, \frac{1}{|y_1 - x_1|} \right\}^{2-\frac{2}{d}} \\ & \leq C |y_1 - x_1|^{-1+\frac{2}{d}} e^{-\tau|y_1-x_1|} \min \{ \tau |y_1 - x_1|, 1 \}^{2-\frac{2}{d}} \leq C |y_1 - x_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Puis, si $1/|y_1 - x_1| < \tau$, alors $\tau|y_1 - x_1| > 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} e^{-(\tau-\lambda)|y_1-x_1|-\lambda|y_1-x_1|^2/C_1} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C e^{-\tau|y_1-x_1|} \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} e^{\lambda|y_1-x_1|} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C |y_1 - x_1|^{-1+\frac{2}{d}} e^{-\tau|y_1-x_1|} \int_1^{\tau|y_1-x_1|} e^\lambda \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C |y_1 - x_1|^{-1+\frac{2}{d}} \frac{1}{(1 + \tau|y_1 - x_1|)^{\frac{2}{d}}} \leq C |y_1 - x_1|^{-1+\frac{2}{d}}, \end{aligned}$$

où, de la quatrième à la cinquième ligne, on a utilisé le Lemme 3.6.1 point 1. Enfin, on a également, pour $y_1 > x_1$,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda > \tau} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda &\leq C \int_{\lambda > \tau} e^{-(\lambda/C+\tau)(y_1-x_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C e^{-\tau(y_1-x_1)} \int_{\lambda > 0} e^{-\lambda(y_1-x_1)/C} \lambda^{-\frac{2}{d}} \lambda \\ &\leq C e^{-\tau(y_1-x_1)} |y_1 - x_1|^{-1+\frac{2}{d}} \leq C |y_1 - x_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'estimation (3.72) est valide pour $y_1 > x_1$. Ensuite, pour $y_1 < x_1$, il ne reste plus qu'à prouver l'estimation suivante, dans laquelle nous utilisons le Lemme 3.6.1 point 3 :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda > \tau} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda &\leq C \int_{\lambda > \tau} e^{-(\lambda-\tau)(x_1-y_1)-\lambda(x_1-y_1)^2/C_1} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C e^{\tau(x_1-y_1)} \int_{\lambda > \tau} e^{-\lambda(x_1-y_1)} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}} e^{\tau(x_1-y_1)} \int_{\lambda > \tau(x_1-y_1)} e^{-\lambda} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C |x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve de (3.72) pour $y_1 < x_1$ également.

Preuve de (3.73). Bien sûr, la preuve de (3.73) est très similaire à celle de (3.72). On a d'abord

$$\begin{aligned} &\int_0^{\min\{\tau, 1/|y_1-x_1|\}} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C \int_0^{\min\{\tau, 1/|y_1-x_1|\}} |y_1 - x_1|^2 e^{-2\tau|y_1-x_1|} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C |y_1 - x_1|^2 e^{-2\tau|y_1-x_1|} \min\left\{\tau, \frac{1}{|y_1 - x_1|}\right\}^{2-\frac{2}{d}} \\ &\leq C \tau^{-\frac{2}{d}} \left((\tau|y_1 - x_1|)^{\frac{2}{d}} e^{-2\tau|y_1-x_1|} \min\{\tau|y_1 - x_1|, 1\}^{2-\frac{2}{d}}\right). \end{aligned}$$

Ensuite, si $1/|y_1 - x_1| < \tau$, c'est-à-dire $\tau|y_1 - x_1| > 1$, en utilisant le lemme 3.6.1, point 1, on a

$$\begin{aligned} &\int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} e^{-2(\tau-\lambda)|y_1-x_1|-2\lambda(y_1-x_1)^2/C_1} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C e^{-2\tau|y_1-x_1|} \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} e^{2\lambda(|y_1-x_1|-(y_1-x_1)^2/C_1)} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C |y_1 - x_1|^{\frac{2}{d}} e^{-2\tau|y_1-x_1|} \int_1^{\tau|y_1-x_1|} e^{2\lambda(1-|y_1-x_1|/C_1)} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C |y_1 - x_1|^{\frac{2}{d}} \frac{e^{-\tau(y_1-x_1)^2/C}}{(1 + \tau|y_1 - x_1|)^{1+\frac{2}{d}}} \leq C \tau^{-\frac{2}{d}} \frac{e^{-\tau(y_1-x_1)^2/C}}{(1 + \tau|y_1 - x_1|)}. \end{aligned}$$

Enfin, on a également, pour $y_1 > x_1$,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda > \tau} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda &\leq C \int_{\lambda > \tau} e^{-2(\lambda/C+\tau)(y_1-x_1)} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C e^{-2\tau(y_1-x_1)} \int_{\lambda > \tau} e^{-2\lambda(y_1-x_1)/C} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C e^{-2\tau(y_1-x_1)} \int_{\lambda > \tau} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C e^{-2\tau(y_1-x_1)} \tau^{-\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $x_1 > y_1$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\lambda > \tau} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda &\leq C \int_{\lambda > \tau} e^{-2(\lambda-\tau)(x_1-y_1)-2\lambda(x_1-y_1)^2/C_1} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C e^{2\tau(x_1-y_1)} \int_{\lambda > \tau} e^{-2\lambda((x_1-y_1)+(x_1-y_1)^2/C_1)} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C e^{2\tau(x_1-y_1)} |x_1 - y_1|^{\frac{2}{d}} \int_{\lambda > \tau|x_1-y_1|} e^{-2\lambda(1+(x_1-y_1)^2/C_1)} \lambda^{-1-\frac{2}{d}} d\lambda, \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'item 4 du lemme 3.6.1, pour $x_1 > y_1$, on obtient

$$\int_{\lambda > \tau} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C \tau^{-\frac{2}{d}} \frac{e^{-2\tau(x_1-y_1)^2/C_1}}{1 + \tau(x_1 - y_1)}.$$

Par conséquent, en combinant les estimations ci-dessus, on a

$$\left(\int_{\lambda > 0} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \tilde{k}_{\tau,0}(x_1 - y_1),$$

avec

$$\tilde{k}_{\tau,0}(z_1) = \mathbf{1}_{|z_1| < 1/\tau} \tau^{-\frac{1}{d}} + \mathbf{1}_{|z_1| > 1/\tau} \tau^{-\frac{1}{d}} \left((\tau|z_1|)^{\frac{1}{d}} e^{-\tau|z_1|} + \frac{e^{-\tau|z_1|^2/C}}{(\tau|z_1|)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (3.76)$$

On vérifie, par un simple calcul, que

$$\|\tilde{k}_{\tau,0}\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \leq C \tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}}$$

comme annoncé.

Preuve de (3.74). on a

$$\int_{\lambda > 0} e^{-2(\lambda/C+\tau)|y_1-x_1|} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq e^{-2\tau|y_1-x_1|} |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} \leq |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}}.$$

on a également, comme précédemment,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\min\{\tau, 1/|y_1-x_1|\}} (\tau - \lambda)^2 |y_1 - x_1|^2 e^{-2\tau|y_1-x_1|} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq \tau^2 \int_0^{\min\{\tau, 1/|y_1-x_1|\}} |y_1 - x_1|^2 e^{-2\tau|y_1-x_1|} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ &\leq C \tau^2 |y_1 - x_1|^2 e^{-2\tau|y_1-x_1|} \min \left\{ \tau, \frac{1}{|y_1 - x_1|} \right\}^{2-\frac{2}{d}} \\ &\leq C |y_1 - x_1|^{\frac{2}{d}} \tau^2 e^{-2\tau|y_1-x_1|} \min \{ \tau |y_1 - x_1|, 1 \}^{2-\frac{2}{d}} \\ &\leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} (\tau |y_1 - x_1|)^2 e^{-2\tau|y_1-x_1|} \min \{ \tau |y_1 - x_1|, 1 \}^{2-\frac{2}{d}} \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}}. \end{aligned}$$

Si $1/|y_1 - x_1| < \tau$, c'est-à-dire $\tau|y_1 - x_1| > 1$, nous distinguons les cas $1/|y_1 - x_1| \leq \tau/2$ et $1/|y_1 - x_1| \geq \tau/2$.

Si $1/|y_1 - x_1| \in [\tau/2, \tau]$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} (\tau - \lambda)^2 e^{-2(\tau-\lambda)|y_1-x_1|-2\lambda(y_1-x_1)^2/C_1} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda \\
& \leq C e^{-2\tau|y_1-x_1|} \int_{\tau/2}^{\tau} (\tau - \lambda)^2 e^{2\lambda(|y_1-x_1|-(y_1-x_1)^2/C_1)} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda \\
& \leq C e^{-2\tau|y_1-x_1|} \tau^{-1-\frac{2}{a}} \int_{\tau/2}^{\tau} (\tau - \lambda)^2 e^{2\lambda(|y_1-x_1|-(y_1-x_1)^2/C_1)} d\lambda \\
& \leq C e^{-2\tau|y_1-x_1|} \frac{\tau^{-1-\frac{2}{a}} e^{2\tau(|y_1-x_1|-(y_1-x_1)^2/C_1)}}{|y_1 - x_1|^3} \\
& \leq C \frac{\tau^{-1-\frac{2}{a}} e^{-2\tau(y_1-x_1)^2/C_1}}{|y_1 - x_1|^3} \\
& \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{a}} (\tau|y_1 - x_1|)^{-1-\frac{2}{a}} e^{-2\tau(y_1-x_1)^2/C} \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{a}}.
\end{aligned}$$

Si $1/|y_1 - x_1| \leq \frac{\tau}{2}$, on décompose l'intégrale en deux parties, $\int_{1/|y_1-x_1|}^{\frac{\tau}{2}}$ et $\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}$. La seconde intégrale a été estimée précédemment, et en utilisant le lemme 3.6.1 point 1, la première est estimée comme suit

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda \in (1/|y_1-x_1|, \tau/2)} (\tau - \lambda)^2 e^{-2(\tau-\lambda)|y_1-x_1|-2\lambda(y_1-x_1)^2/C} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda \\
& \leq e^{-2\tau|y_1-x_1|} \tau^2 \int_{1/|y_1-x_1|}^{\frac{\tau}{2}} e^{2\lambda(|y_1-x_1|-(y_1-x_1)^2/C)} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda \\
& \leq C e^{-2\tau|y_1-x_1|} \tau^2 |y_1 - x_1|^{\frac{2}{a}} \int_1^{\tau|y_1-x_1|/2} e^{2\lambda(1-(y_1-x_1)/C)} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda \\
& \leq C |y_1 - x_1|^{\frac{2}{a}} \tau^2 e^{-\tau|y_1-x_1|} (\tau|y_1 - x_1|)^{-1-\frac{2}{a}} \\
& \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{a}} (\tau|y_1 - x_1|)^{1-\frac{2}{a}} e^{-\tau|y_1-x_1|} \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{a}}.
\end{aligned}$$

Il reste à estimer, pour $y_1 < x_1$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda > \tau} (\lambda - \tau)^2 e^{-2(\lambda-\tau)(x_1-y_1)-2\lambda(x_1-y_1)^2/C} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda \\
& \leq C e^{2\tau(x_1-y_1)} \int_{\lambda > \tau} (\lambda - \tau)^2 e^{-2\lambda(x_1-y_1)+(x_1-y_1)^2/C} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda \\
& \leq C e^{2\tau(x_1-y_1)} |x_1 - y_1|^{-2+\frac{2}{a}} \int_{\lambda > \tau|x_1-y_1|} (\lambda - \tau|x_1 - y_1|)^2 e^{-2\lambda(1+(x_1-y_1)/C)} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda.
\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'item 5 du lemme 3.6.1 et on obtient pour $x_1 > y_1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda > \tau} (\lambda - \tau)^2 e^{-2(\lambda-\tau)(x_1-y_1)-2\lambda(x_1-y_1)^2/C} \lambda^{-1-\frac{2}{a}} d\lambda & \leq \frac{C |x_1 - y_1|^{-2+\frac{2}{a}} e^{-2\tau(x_1-y_1)^2/C}}{1 + (\tau|x_1 - y_1|)^{1+\frac{2}{a}}} \\
& \leq C |x_1 - y_1|^{-2+\frac{2}{a}}.
\end{aligned}$$

Preuve de (3.75). On a

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\min\{\tau, 1/|y_1-x_1|\}} \|\lambda\omega'k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \omega')\|_{L_{\omega'}^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C \int_0^{\min\{\tau, 1/|y_1-x_1|\}} |y_1 - x_1|^2 e^{-2\tau(y_1-x_1)} \lambda^{3-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C |y_1 - x_1|^2 e^{-2\tau(y_1-x_1)} \min\left\{\tau, \frac{1}{|y_1 - x_1|}\right\}^{4-\frac{2}{d}} \\
& \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} e^{-2\tau(y_1-x_1)} \min\{\tau|y_1 - x_1|, 1\}^{4-\frac{2}{d}} \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}}.
\end{aligned}$$

Si $1/|y_1 - x_1| < \tau$, c'est-à-dire $\tau|y_1 - x_1| > 1$, en utilisant le lemme 3.6.1, point 1, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} \|\lambda\omega'k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \omega')\|_{L_{\omega'}^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} e^{-2(\tau-\lambda)|y_1-x_1|-2\lambda(y_1-x_1)^2/C} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C e^{-2\tau|y_1-x_1|} \int_{1/|y_1-x_1|}^{\tau} e^{2\lambda(|y_1-x_1|-(y_1-x_1)^2/C)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} e^{-2\tau|y_1-x_1|} \int_1^{\tau|y_1-x_1|} e^{2\lambda(1-|y_1-x_1|/C)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} e^{-\tau(y_1-x_1)^2/C} (\tau|y_1 - x_1|)^{1-\frac{2}{d}} \\
& \leq C \tau^{1-\frac{2}{d}} e^{-\tau(y_1-x_1)^2/C} |y_1 - x_1|^{-1}.
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant le lemme 3.6.1, point 3, on a également, pour $y_1 > x_1$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda>\tau} \|\lambda\omega'k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \omega')\|_{L_{\omega'}^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C \int_{\lambda>\tau} e^{-2(\lambda/C+\tau)(y_1-x_1)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C e^{-2\tau(y_1-x_1)} \int_{\lambda>\tau} e^{-2\lambda(y_1-x_1)/C} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C e^{-2\tau(y_1-x_1)} |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} \int_{\lambda>\tau(y_1-x_1)} e^{-2\lambda/C} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C e^{-2\tau(y_1-x_1)} |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} (1 + (\tau|y_1 - x_1|))^{1-\frac{2}{d}} \\
& \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}}.
\end{aligned}$$

De la même façon, pour $x_1 > y_1$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda>\tau} \|\lambda\omega'k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \omega')\|_{L_{\omega'}^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C \int_{\lambda>\tau} e^{-2(\lambda-\tau)(x_1-y_1)-2\lambda(x_1-y_1)^2/C} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C e^{2\tau(x_1-y_1)} \int_{\lambda>\tau} e^{-2\lambda((x_1-y_1)+(x_1-y_1)^2/C)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C e^{2\tau(x_1-y_1)} |x_1 - y_1|^{-2+\frac{2}{d}} \int_{\lambda>\tau|x_1-y_1|} e^{-2\lambda(1+(x_1-y_1)/C)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda,
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le lemme 3.6.1, point 3, on obtient, pour $x_1 > y_1$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\lambda>\tau} \|\lambda\omega'k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} e^{-2\tau(y_1-x_1)^2/C} (1 + \tau|y_1 - x_1|)^{1-\frac{2}{d}} \\
& \leq C \left(1_{|y_1-x_1|\leq 1/\tau} |y_1 - x_1|^{-2+\frac{2}{d}} + 1_{|y_1-x_1|\geq 1/\tau} \tau^{1-\frac{2}{d}} |y_1 - x_1|^{-1} e^{-2\tau(y_1-x_1)^2/C}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en combinant les estimations ci-dessus, on obtient

$$\left(\int_{\lambda>0} \|\lambda\omega' k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\frac{1}{|x_1 - y_1|^{1-\frac{1}{d}}} + \check{k}_{\tau,0}(x_1 - y_1) \right),$$

avec $\check{k}_{\tau,0}(z_1) = 1_{|z_1|>1/\tau} \tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d}} e^{-\tau z_1^2/C} |z_1|^{-\frac{1}{2}}$. On vérifie là aussi, par un simple calcul, que

$$\|\check{k}_{\tau,0}(z_1)\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \leq C\tau^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2d}},$$

comme annoncé. Cela conclut la preuve du Lemme 3.6.6. \square

On est maintenant en mesure de conclure la preuve de la proposition 3.6.2. Tout d'abord, à partir de la proposition 3.5.4 avec $n = d - 1$, de l'estimation (3.72) et de l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev unidimensionnelle (rappelée dans le théorème 3.9.1), on a, pour $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|K_{\tau,0}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} &\leq \left\| \|K_{\tau,0}f(x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(X_0, X_1)} \\ &\leq \left\| \int_{X_0}^{X_1} \left(\int_{\lambda} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right) \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(X_0, X_1)} \\ &\leq C \left\| \int_{X_0}^{X_1} \frac{1}{|x_1 - y_1|^{1-\frac{2}{d}}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(X_0, X_1)} \\ &\leq C \left\| \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(X_0, X_1)} = C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (3.73) dans la proposition 3.5.4, et l'inégalité de Young, on a, pour $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|K_{\tau,0}f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| \|K_{\tau,0}f(x_1, \cdot)\|_{L^2_{x'}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L^2_{x_1}(X_0, X_1)} \\ &\leq \left\| \int_{X_0}^{X_1} \left(\int_{\lambda} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(X_0, X_1)} \\ &\leq C \left\| \int_{X_0}^{X_1} \tilde{k}_{\tau,0}(x_1 - y_1) \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \right\|_{L^2_{x_1}(X_0, X_1)} \\ &\leq C \left\| \tilde{k}_{\tau,0} \right\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \left\| \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(X_0, X_1)} \leq C\tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

De même, pour $f \in L^2(\Omega)$, on obtient

$$\|K_{\tau,0}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq \tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.77)$$

En utilisant la relation (3.71), l'estimation (3.74) dans la proposition 3.5.4, et le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev (théorème 3.9.1), on obtient, pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$,

$$\|\partial_1 \widehat{K_{\tau,0} f}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}.$$

En utilisant l'estimation (3.75) dans la proposition 3.5.4, le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev (Théorème 3.9.1) et l'inégalité de Young, on obtient, pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$,

$$\|\nabla' K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d}} \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}.$$

Les estimations ci-dessus permettent de conclure l'estimation (3.65).

L'estimation (3.66) consiste simplement en la combinaison de (3.77), du théorème 3.4.1, et de l'estimation (3.44). \square

3.6.2 Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,1}$

Le but de cette section est d'estimer la norme de l'opérateur $K_{\tau,1}$ dans (3.28)–(3.31), plus précisément :

Proposition 3.6.7. *Soit Ω comme dans (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$. Supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19). Alors, il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$,*

$$\tau^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \|K_{\tau,1} f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|K_{\tau,1} f\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 \widehat{K_{\tau,1} f}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{-\frac{1}{2}} \|\nabla' K_{\tau,1} f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. On va utiliser les mêmes notations que dans la preuve de la proposition précédente. À partir de la définition de $k_{\tau,1}$ dans (3.31), en adaptant la preuve du lemme 3.6.6 à $k_{\tau,1}$, on peut facilement déduire le résultat suivant, dont la preuve est laissée au lecteur .

Lemme 3.6.8. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), telle que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$ et $\lambda > 0$,*

$$\|k_{\tau,1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq C e^{-|\tau - \lambda| |y_1 - x_1| - \lambda (y_1 - x_1)^2 / C} + C(\tau + \lambda) \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}. \quad (3.78)$$

On va ensuite prouver le lemme suivant .

Lemme 3.6.9. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), telle que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$,*

$$\left(\int_{\lambda > 0} \|k_{\tau,1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1 - \frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{1}{|x_1 - y_1|^{1 - \frac{1}{d}}} + \tilde{k}_{\tau,1}(x_1 - y_1), \quad (3.79)$$

$$\text{avec } \tilde{k}_{\tau,1} \in L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}) \text{ et } \|\tilde{k}_{\tau,1}\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \leq C \tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d}}.$$

Démonstration. En utilisant l'item 2 du lemme 3.6.1, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau e^{-2(\tau-\lambda)|y_1-x_1|-2\lambda(y_1-x_1)^2/C} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C e^{-2\tau|y_1-x_1|} \int_0^\tau e^{2\lambda(|y_1-x_1|-(y_1-x_1)^2/C)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C |y_1-x_1|^{-2+\frac{2}{d}} e^{-2\tau|y_1-x_1|} \int_0^{\tau|y_1-x_1|} e^{2\lambda(1-|y_1-x_1|/C)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C |y_1-x_1|^{-2+\frac{2}{d}} e^{-2\tau(y_1-x_1)^2/C} \frac{(\tau|y_1-x_1|)^{2-\frac{2}{d}}}{1+\tau|y_1-x_1|} \\
& \leq C \tau^{1-\frac{2}{d}} |y_1-x_1|^{-1} e^{-2\tau(y_1-x_1)^2/C}.
\end{aligned}$$

De même, en utilisant l'item 3 du lemme 3.6.1, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_\tau^\infty e^{-2(\lambda-\tau)|y_1-x_1|-2\lambda(y_1-x_1)^2/C} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \leq C e^{2\tau|y_1-x_1|} \int_\tau^\infty e^{-2\lambda(|y_1-x_1|+(y_1-x_1)^2/C)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C |y_1-x_1|^{-2+\frac{2}{d}} e^{-2\tau|y_1-x_1|} \int_{\tau|y_1-x_1|}^\infty e^{-2\lambda(1+|y_1-x_1|/C)} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\
& \leq C |y_1-x_1|^{-2+\frac{2}{d}} e^{-2\tau(y_1-x_1)^2/C} (1+\tau|y_1-x_1|)^{1-\frac{2}{d}} \\
& \leq C \left(\mathbf{1}_{|y_1-x_1| \leq 1/\tau} |y_1-x_1|^{-2+\frac{2}{d}} + \mathbf{1}_{|y_1-x_1| \geq 1/\tau} \tau^{1-\frac{2}{d}} |y_1-x_1|^{-1} e^{-2\tau(y_1-x_1)^2/C} \right).
\end{aligned}$$

Maintenant, à partir de (3.73), (3.75), (3.78) et de la formule explicite de $\tilde{k}_{\tau,0}$ dans (3.76), on obtient

$$\left(\int_{\lambda>0} (\tau+\lambda)^2 \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda)\|^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{|x_1-y_1|^{1-\frac{1}{d}}} + \tau \tilde{k}_{\tau,0}(x_1-y_1) + \check{k}_{\tau,0}(x_1-y_1).$$

Cela conduit alors facilement à (3.79). \square

Nous concluons maintenant la preuve de la proposition 3.6.7. Comme dans la démonstration de la proposition 3.6.2, l'estimation (3.79) implique facilement qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$\tau^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2d}} \|K_{\tau,1}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Les estimations sur $K_{\tau,1}$ et $\nabla'K_{\tau,1}$ en tant qu'opérateurs de $L^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$, et sur $\partial_1 \widehat{K}_{\tau,1}$ de $L^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega_{1,\tau})$, peuvent alors être déduites immédiatement du théorème 3.4.1 et de (3.44). \square

3.6.3 Estimations sur l'opérateur $K_{\tau,j}$ pour $j \geq 2$

L'objectif de cette section est d'estimer la norme de l'opérateur $K_{\tau,j}$ dans (3.28)–(3.32) pour $j \geq 2$, plus précisément

Proposition 3.6.10. *Soit Ω tel que dans (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$. Supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19). Alors, il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), tels que pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$, pour tout $\tau \geq \tau_0$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$,*

$$\tau^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2d}} \|K_{\tau,j}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|K_{\tau,j}f\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 \widehat{K}_{\tau,j}f\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{-\frac{1}{2}} \|\nabla'K_{\tau,j}f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. On commence par remarquer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$, pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$ et $\lambda > 0$,

$$\|k_{\tau,j}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq C\lambda \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}.$$

À partir de (3.75), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$, et $\lambda > 0$, pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$,

$$\left(\int_{\lambda > 0} \|k_{\tau,j}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{1}{|x_1 - y_1|^{1-\frac{1}{d}}} + \check{k}_{\tau,0}(x_1 - y_1),$$

avec $\check{k}_{\tau,0} \in L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})$ et $\|\check{k}_{\tau,1}\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \leq C\tau^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2d}}$.

Par conséquent, il existe $C > 0$ telle que pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$, pour tout $\tau \geq 1$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$\tau^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2d}} \|K_{\tau,j}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On conclut ensuite la proposition 3.6.10 en combinant cette estimation avec celles du théorème 3.4.1 et de (3.44). \square

3.6.4 Estimations sur l'opérateur G_τ dans (3.33)–(3.34)

Proposition 3.6.11. *Soit Ω comme dans (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$. Supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19). Alors, il existe $C > 0$ indépendant de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), tel que pour tout $\tau \geq 1$, pour tout $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$,*

$$\tau^{\frac{3}{4}} \|G_\tau(g)\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{\partial_1 G_\tau}(g)\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{-\frac{1}{4}} \|\nabla' G_\tau(g)\|_{L^2(\Omega)} + \|G_\tau g\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}. \quad (3.80)$$

Démonstration. Notons que tous les termes dans (3.80) impliquant des normes Hilbertiennes ont déjà été estimés dans le théorème 3.4.4, donc seule l'estimation de la norme $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de G_τ reste à prouver.

Pour $g \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$, on introduit $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ tel que $\widehat{g}_0(\xi') = |\xi'|^{\frac{1}{2}} \widehat{g}(\xi')$, et on remarque que $G_\tau(g) = G_{\tau,0}(g_0)$, où $G_{\tau,0}$ est donné comme suit :

$$\widehat{G_{\tau,0}g_0}(x_1, \xi') = g_{\tau,0}(x_1, \xi') \widehat{g}_0(\xi'), \quad (x_1, \xi') \in [X_0, X_1] \times \mathbb{R}^{d-1},$$

avec $g_{\tau,0}(x_1, \xi') = g_\tau(x_1, \xi')/|\xi'|^{\frac{1}{2}}$, et g_τ comme dans (3.34). Il est alors clair que la norme $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de G_τ coïncide avec la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $G_{\tau,0}$.

Pour estimer la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $G_{\tau,0}$, on calcule $G_{\tau,0}^*$, où l'adjoint est donné par rapport au produit scalaire $L^2(\Omega)$: Pour $f \in L^2(\Omega)$,

$$\widehat{G_{\tau,0}^*f}(\xi') = \int_{x_1 \in [X_0, X_1]} g_{\tau,0}(x_1, \xi') \widehat{f}(x_1, \xi') dx_1, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

En conséquence, pour $f \in L^2(\Omega)$,

$$G_{\tau,0} \widehat{G_{\tau,0}^*f}(x_1, \xi') = \int_{y_1 \in [X_0, X_1]} g_{\tau,0}(x_1, \xi') g_{\tau,0}(y_1, \xi') \widehat{f}(y_1, \xi') dy_1, \quad (x_1, \xi') \in \Omega.$$

Notre prochain objectif est de vérifier que l'opérateur $G_{\tau,0}G_{\tau,0}^*$ appartient effectivement à $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$.

Pour ce faire, comme précédemment, on vérifie d'abord qu'il existe une constante C telle que pour tout $x_1 \in [X_0, X_1]$, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\|g_{\tau,0}(x_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq 1_{\lambda > \tau} \frac{C}{\lambda^{\frac{1}{2}}} e^{-(\lambda-\tau)(x_1-X_0)-\lambda(x_1-X_0)^2/C}. \quad (3.81)$$

Par conséquent, pour $x_1 \in [X_0, X_1]$ et $y_1 \in [X_0, X_1]$,

$$\begin{aligned} & \|G_{\tau,0}G_{\tau,0}^*f(x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \\ & \leq \int_{y_1 \in [X_0, X_1]} \int_{\tau}^{\infty} \|g_{\tau,0}(x_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \|g_{\tau,0}(y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \\ & \leq \int_{y_1 \in [X_0, X_1]} \int_{\tau}^{\infty} e^{-(\lambda-\tau)((x_1-X_0)+(y_1-X_0))-\lambda((x_1-X_0)^2+(y_1-X_0)^2)/C} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \\ & \leq \int_{y_1 \in [X_0, X_1]} ((x_1 - X_0) + (y_1 - X_0))^{-1+\frac{2}{d}} \frac{e^{-\tau((x_1-X_0)^2+(y_1-X_0)^2)/C}}{1 + (\tau(x_1 - X_0 + y_1 - X_0))^{\frac{2}{d}}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1, \end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 3.6.1, point 3. On obtient alors

$$\|G_{\tau,0}G_{\tau,0}^*f(x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \int_{y_1 \in [X_0, X_1]} (y_1 - x_1)^{-1+\frac{2}{d}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L^{2d/(d+2)}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1,$$

et ensuite le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev (Théorème 3.9.1) implique que

$$\|G_{\tau,0}G_{\tau,0}^*f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}.$$

Il s'ensuit que la norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $G_{\tau,0}$ est bornée par une constante indépendante de τ comme annoncé, et donc c'est aussi le cas pour la norme $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de G_{τ} . \square

Remarque 3.6.12. *On peut se demander pourquoi la preuve ci-dessus ne repose pas directement sur l'estimation (3.63). En fait, cela correspondrait à un cas limite. En effet, à partir de l'estimation (3.81) et de la proposition 3.5.4, pour $x_1 \in [X_0, X_1]$,*

$$\begin{aligned} & \|\widehat{G_{\tau,0}g_0}(x_1, \cdot)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \sqrt{\int_{\tau}^{\infty} \|g_{\tau,0}(x_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda} \\ & \leq C \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \sqrt{\int_{\tau}^{\infty} e^{-2(\lambda-\tau)(x_1-X_0)-2\lambda(x_1-X_0)^2/C} \lambda^{-\frac{2}{d}} d\lambda} \\ & \leq C \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} |x_1 - X_0|^{-(d-2)/(2d)} \frac{e^{-\tau(x_1-X_0)^2/C}}{1 + (\tau(x_1 - X_0))^{\frac{1}{d}}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'item 3 du lemme 3.6.1. Cependant, la fonction

$$x_1 \mapsto |x_1 - X_0|^{-(d-2)/(2d)} \frac{e^{-\tau(x_1-X_0)^2/C}}{1 + (\tau(x_1 - X_0))^{\frac{1}{d}}}$$

n'appartient pas à $L^{\frac{2d}{d-2}}(X_0, X_1)$, et donc nous ne pouvons pas conclure directement que $G_{\tau,0}g_0$ appartient à $L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$.

3.6.5 Estimations sur l'opérateur R_τ dans (3.29)

Pour $f \in H^1(\Omega)$, en utilisant que $R_\tau(f) = K_{\tau,0}(g)$ avec $\widehat{g}(x_1, \xi') = \partial_1 \psi(x_1, \xi') \widehat{f}(x_1, \xi')$, et donc avec $\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla' f\|_{L^2(\Omega)}$, on déduit immédiatement de (3.66) le résultat suivant :

Proposition 3.6.13. *Soit Ω comme dans (3.15) avec $X_0 < 0 < X_1$ et $\max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1$. Supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$, (3.18) et (3.19). Alors il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant uniquement de c_0, m_* et M_*), tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$, pour tout $f \in H^1(\Omega)$,*

$$\tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|R_\tau f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|R_\tau f\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|\partial_1 \widehat{R}_\tau f\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla' R_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla' f\|_{L^2(\Omega)}.$$

3.7 Preuve du théorème 3.1.1 : cas général

Ici, nous fournissons une preuve du théorème 3.1.1 en utilisant des techniques de Fourier comme nous l'avons fait précédemment, en suivant l'approche développée dans [DE22] et adaptée au cas des termes sources dans $H^{-1}(\Omega)$ et dans $L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$. Cette approche repose sur un argument de localisation et un argument de recollement, comme cela se fait généralement pour les estimations de Carleman. L'originalité ici est que nous allons localiser les fonctions dans des boules de rayon $\tau^{-\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire, en fonction du paramètre de Carleman τ . Faire ce choix permet d'approcher en quelque sorte la fonction poids φ par son approximation quadratique, et de réduire le problème par un changement de variables approprié, au cas d'une bande, avec des coefficients linéaires, comme dans le théorème 3.2.4 (voir lemme 3.7.1 et sa preuve).

Pour $\tau \geq 1$, on introduit

$$w = e^{\tau\varphi} u, \quad \widetilde{f}_2 = e^{\tau\varphi} (f_2 - \tau \nabla \varphi \cdot F), \quad \widetilde{f}_{2*'} = e^{\tau\varphi} f_{2*'}, \quad \widetilde{F} = e^{\tau\varphi} F, \quad \widetilde{g} = g,$$

de sorte que la fonction u résout (3.4) si et seulement si w résout

$$\begin{cases} \Delta w - 2\tau \nabla \varphi \cdot \nabla w + \tau^2 |\nabla \varphi|^2 w - \tau \Delta \varphi w = \widetilde{f}_2 + \widetilde{f}_{2*'} + \operatorname{div}(\widetilde{F}), & \text{dans } \Omega, \\ w = \widetilde{g} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.82)$$

3.7.1 Estimations locales

Notre première étape consiste à introduire une version locale de (3.82). Plus précisément, pour $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \omega$, on introduit $\eta_{x_0}(x)$ une fonction troncature, qui sera précisée plus en détail dans (3.86), et on pose

$$w_{x_0}(x) = \eta_{x_0}(x) w(x), \quad x \in \Omega.$$

Cette fonction résout

$$\begin{cases} \Delta w_{x_0} - 2\tau \nabla \varphi \cdot \nabla w_{x_0} + \tau^2 |\nabla \varphi|^2 w_{x_0} = f_{2,x_0} + f_{2*'},_{x_0} + \operatorname{div}(F_{x_0}), & \text{dans } \Omega, \\ w_{x_0} = \widetilde{g}_{x_0} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.83)$$

où

$$\begin{aligned} f_{2,x_0} &= \eta_{x_0} \widetilde{f}_2 - \nabla \eta_{x_0} \cdot \widetilde{F} + \tau \Delta \varphi w_{x_0} + 2 \nabla \eta_{x_0} \cdot \nabla w + \Delta \eta_{x_0} w - 2\tau \nabla \varphi \cdot \nabla \eta_{x_0} w, \\ f_{2*'},_{x_0} &= \eta_{x_0} \widetilde{f}_{2*'}, \quad F_{x_0} = \eta_{x_0} \widetilde{F}, \quad g_{x_0} = \eta_{x_0} \widetilde{g}. \end{aligned}$$

Nous prétendons qu'avec une localisation suffisamment forte, nous pouvons obtenir une estimation de Carleman locale .

Lemme 3.7.1. *Il existe des constantes $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ (dépendantes uniquement de $\alpha, \beta, \|\varphi\|_{C^3(\bar{\Omega})}$) telles que pour tout $\tau \geq \tau_0$, pour tout $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \omega$, et pour tout*

$$f_{2,x_0} \in L^2(\Omega), \quad f_{2^*,x_0} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F_{x_0} \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{et} \quad g_{x_0} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

et w_{x_0} satisfaisant à (3.83) et supporté dans $B(x_0, \tau^{-\frac{1}{3}}) \cap \bar{\Omega}$, on a

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|w_{x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \\ & \leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|f_{2^*,x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|g_{x_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (3.84)$$

et

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|w_{x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_{2^*,x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|g_{x_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

La preuve du Lemme 3.7.1 est reportée à la prochaine section et sera basée sur un changement de variables approprié et l'estimation de Carleman du le théorème 3.2.4.

Ensuite, on choisit la localisation comme suit

$$\eta_{x_0}(x) = \eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0)), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.86)$$

où η est une fonction radiale positive, dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, à support dans le disque unité, et telle que $\eta(\rho) = 1$ pour $|\rho| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi le lemme 3.7.1 s'applique à w_{x_0} et les estimations (3.84) et (3.85) sont uniformément valables pour tout $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \omega$.

Il reste donc à prouver le lemme 3.7.1 (voir la section 3.7.2) et à montrer comment recoller les estimations de ce lemme pour conclure la preuve du théorème 3.1.1. Cela sera présenté dans la section 3.7.3.

3.7.2 Preuve du lemme 3.7.1 : Un changement de coordonnées adapté

La preuve du lemme 3.7.1 se réduit principalement à un changement de variables approprié permettant de relier les estimations de Carleman (3.84) et (3.85) dans de petits disques autour de x_0 avec les estimations de Carleman (3.23)-(3.24) dans la bande établies dans le théorème 3.2.4.

On choisit $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \omega$ et on définit le vecteur L_1 et la matrice A_1 par

$$L_1 = \nabla \varphi(x_0) \in \mathbb{R}^d, \quad A_1 = \text{Hess } \varphi(x_0) \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

La forme bilinéaire

$$\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto (\text{Hess } \varphi(x_0)) \xi \cdot \xi$$

est symétrique sur \mathbb{R}^d et sur $\text{Span}\{L_1\}^\perp$. En conséquence, il existe une famille de vecteurs orthogonaux $(L_j)_{j \in \{2, \dots, d\}}$ de $\text{Span}\{L_1\}^\perp$ qui diagonalise cette forme, que nous normalisons de sorte que pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$, $|L_j| = |L_1|$. Puisque la famille $(L_j)_{j \in \{2, \dots, d\}}$ de $\text{Span}\{L_1\}^\perp$ diagonalise la forme $\xi \mapsto (\text{Hess } \varphi(x_0)) \xi \cdot \xi$ dans $\text{Span}\{L_1\}^\perp$, pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$, il existe α_j et μ_j dans \mathbb{R} tels que

$$(\text{Hess } \varphi(x_0)) L_j = \mu_j L_j + \alpha_j L_1, \quad j \in \{2, \dots, d\}.$$

Notons qu'en raison de la symétrie de $\text{Hess } \varphi(x_0)$, on a nécessairement

$$(\text{Hess } \varphi(x_0))L_1 = \mu_1 L_1 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k L_k,$$

où

$$\mu_1 = \frac{1}{|L_1|^2} (\text{Hess } \varphi(x_0))L_1 \cdot L_1 = \frac{1}{|\nabla \varphi(x_0)|^2} (\text{Hess } \varphi(x_0))\nabla \varphi(x_0) \cdot \nabla \varphi(x_0).$$

Pour $j \in \{2, \dots, d\}$, on introduit alors la matrice auto-adjointe $A_j \in \mathbb{R}^{d \times d}$ définie par

$$\begin{cases} A_j L_1 = -\alpha_j L_1 - \mu_j L_j, \\ A_j L_k = \alpha_k L_j - \alpha_j L_k, & \text{if } k \in \{2, \dots, d\} \setminus \{j\}, \\ A_j L_j = -\mu_j L_1 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k L_k. \end{cases} \quad (3.87)$$

(Il est facile de vérifier que la matrice A_j définie de cette manière est effectivement symétrique.)

On introduit alors le changement de coordonnées suivant pour x dans un voisinage de x_0 :

$$y_1(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0),$$

$$\text{pour } j \in \{2, \dots, d\}, \quad y_j(x) = L_j \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} A_j (x - x_0) \cdot (x - x_0).$$

Par construction, il existe un voisinage, dont la taille dépend uniquement de la norme C^2 de φ , tel que $x \mapsto y(x)$ soit un difféomorphisme local entre un voisinage \mathcal{V} de x_0 dans $\bar{\Omega} \setminus \omega$ et un voisinage de 0, qu'on appelle Ω_y , et qui peut donc contenir l'image d'une partie de $\partial\Omega$. S'il existe, on le note $\Gamma_y = y(\partial\Omega \cap \mathcal{V})$.

Pour τ suffisamment grand, on peut garantir que la boule de centre x_0 et de rayon $\tau^{-\frac{1}{3}}$, lorsqu'elle est intersectée avec $\bar{\Omega}$, est incluse dans un ensemble sur lequel $x \mapsto y(x)$ est un difféomorphisme, et son image est incluse dans une boule $B(0, C\tau^{-\frac{1}{3}})$.

Par conséquent, pour w_{x_0} résolvant (3.83), on définit

$$\check{w}(y) = w_{x_0}(x) \quad \text{for } y = y(x),$$

Des calculs explicites montrent alors que \check{w} satisfait

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^d b_{j,k}(x) \partial_{y_j} \partial_{y_k} \check{w}(y(x)) + \nabla_y \check{w}(y(x)) \cdot \Delta_x y(x) - 2\tau \sum_{j=1}^d c_j(x) \partial_{y_j} \check{w}(y(x)) + \tau^2 |\nabla \varphi(x)|^2 \check{w}(y(x)) \\ & = \left(\Delta w_{x_0} - 2\tau \nabla \varphi \cdot \nabla_x w_{x_0} + \tau^2 |\nabla \varphi|^2 w_{x_0} \right) (x), \quad \text{for } x \in \Omega \cap B(x_0, \tau^{-\frac{1}{3}}), \end{aligned}$$

avec

$$b_{j,k}(x) = \nabla_x y_j(x) \cdot \nabla_x y_k(x), \quad \text{et} \quad c_j(x) = \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi(x) \partial_i y_j(x).$$

On remarque ensuite que $c_j(x) = b_{j,1}(x)$ et que $b_{j,k}(x) = b_{k,j}(x)$ pour tout x . On analyse maintenant brièvement les coefficients $b_{j,k}$. Par construction des coordonnées $(y_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$,

On vérifie facilement que pour $(j, k, \ell) \in \{1, \dots, d\}^3$,

$$\begin{aligned} b_{j,k}(x_0) &= |L_1|^2 \delta_{j,k}, \\ \partial_\ell b_{j,k}(x_0) &= \sum_{i=1}^d (\partial_\ell \partial_i y_j(x_0) \partial_i y_k(x_0) + \partial_i y_j(x_0) \partial_\ell \partial_i y_k(x_0)) \\ &= \sum_{i=1}^d (A_j e_i \cdot e_\ell)(L_k \cdot e_i) + (L_j \cdot e_i)(A_k e_i \cdot e_\ell) = (A_j L_k + A_k L_j) \cdot e_\ell. \end{aligned}$$

On a ainsi en particulier

$$L_\ell \cdot \nabla b_{j,k}(x_0) = (A_j L_k + A_k L_j) \cdot L_\ell.$$

Pour plus de commodité, on écrit séparément

$$|\nabla \varphi(x_0)|^2 = |L_1|^2, \quad \text{et} \quad \partial_\ell (|\nabla \varphi|^2)(x_0) = 2 \sum_i \partial_\ell \partial_i \varphi(x_0) \partial_i \varphi(x_0) = 2A_1 L_1 \cdot e_\ell.$$

On peut ainsi analyser $b_{j,k}/|\nabla \varphi|^2$ près de $x = x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{b_{j,k}}{|\nabla \varphi|^2}(x_0) &= \delta_{j,k}, \\ L_\ell \cdot \nabla \left(\frac{b_{j,k}}{|\nabla \varphi|^2} \right)(x_0) &= \frac{1}{|L_1|^2} ((A_j L_k + A_k L_j) \cdot L_\ell - 2\delta_{j,k} A_1 L_1 \cdot L_\ell). \end{aligned}$$

En particulier, puisque $A_j L_k + A_k L_j = 0$ pour tous les $j, k \in \{1, \dots, d\}$ avec $j \neq k$, on a

$$\forall j, k \in \{1, \dots, d\} \text{ avec } j \neq k, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, d\}, \quad L_\ell \cdot \nabla \left(\frac{b_{j,k}}{|\nabla \varphi|^2} \right)(x_0) = 0.$$

Lorsque $j = k = 1$, il est évident que

$$\forall \ell \in \{1, \dots, d\}, \quad L_\ell \cdot \nabla \left(\frac{b_{1,1}}{|\nabla \varphi|^2} \right)(x_0) = 0.$$

Lorsque $j = k \geq 2$, les choix (3.87) donnent

$$L_\ell \cdot \nabla \left(\frac{b_{j,j}}{|\nabla \varphi|^2} \right)(x_0) = 0 \text{ lorsque } \ell \in \{2, \dots, d\},$$

et

$$L_1 \cdot \nabla \left(\frac{b_{j,j}}{|\nabla \varphi|^2} \right)(x_0) = -\frac{2}{|L_1|^2} (A_1 L_j \cdot L_j + A_1 L_1 \cdot L_1).$$

Grâce à un développement de Taylor de $b_{j,k}/|\nabla \varphi|^2$ près de $x = x_0$, on en déduit

$$\frac{b_{j,k}(x)}{|\nabla \varphi(x)|^2} = \delta_{j,k} (1 - \lambda_j y_1(x)) + \mathcal{O}(|x - x_0|^2),$$

avec

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_j = \frac{2}{|L_1|^2} (A_1 L_j \cdot L_j + A_1 L_1 \cdot L_1) \quad \text{pour } j \in \{2, \dots, d\}. \quad (3.88)$$

En conséquence, en définissant

$$\check{b}_{j,k}(y) = \frac{b_{j,k}(x)}{|\nabla\varphi(x)|^2} \quad \text{pour } y = y(x),$$

on obtient

$$\check{b}_{j,k}(y) = \delta_{j,k}(1 - \lambda_j y_1) + \mathcal{O}(|y|^2) \quad \text{et} \quad \nabla_y(\check{b}_{j,k}(y) - \delta_{j,k}(1 - \lambda_j y_1)) = \mathcal{O}(|y|).$$

Ainsi, en utilisant le fait que \check{w} est supporté dans $B(0, C\tau^{-\frac{1}{3}})$ et en écrivant

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^d \check{b}_{j,k}(y) \partial_{y_j} \partial_{y_k} \check{w}(y) - \sum_{j=1}^d (1 - \lambda_j y_1) \partial_{y_j}^2 \check{w} \\ &= \sum_{j,k=1}^d \partial_{y_j} \left((\check{b}_{j,k}(y) - \delta_{j,k}(1 - \lambda_j y_1)) \partial_{y_k} \check{w} \right) - \sum_{j,k=1}^d \partial_{y_j} (\check{b}_{j,k}(y) - \delta_{j,k}(1 - \lambda_j y_1)) \partial_{y_k} \check{w}, \end{aligned}$$

on obtient que

$$\sum_{j,k=1}^d \check{b}_{j,k}(y) \partial_{y_j} \partial_{y_k} \check{w}(y) - \sum_{j=1}^d (1 - \lambda_j y_1) \partial_{y_j}^2 \check{w} = \check{f}_{2,a} + \operatorname{div}(\check{F}_a),$$

où

$$\check{f}_{2,a}(y) = - \sum_{j,k=1}^d \partial_{y_j} (\check{b}_{j,k}(y) - \delta_{j,k}(1 - \lambda_j y_1)) \partial_{y_k} \check{w}, \quad \check{F}_{a,j}(y) = \sum_{k=1}^d (\check{b}_{j,k}(y) - \delta_{j,k}(1 - \lambda_j y_1)) \partial_{y_k} \check{w},$$

satisfont

$$\|\check{f}_{2,a}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\tau^{-\frac{1}{3}} \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)}, \quad \text{et} \quad \|\check{F}_a\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\tau^{-\frac{2}{3}} \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)}.$$

De même, on a

$$-2\tau \sum_{j=1}^d \check{b}_{1,j}(y) \partial_{y_j} \check{w}(y) + 2\tau \partial_{y_1} \check{w}(y) = \check{f}_{2,b}(y),$$

avec

$$\|\check{f}_{2,b}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\tau^{\frac{1}{3}} \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)}.$$

Enfin, on a

$$\check{f}_{2,c}(y) = - \frac{1}{|\nabla\varphi(x(y))|^2} \nabla_y \check{w}(y) \cdot \Delta_x y(x(y)),$$

où $x(y)$ désigne l'inverse du changement de variables $x \mapsto y(x)$, satisfait également

$$\|\check{f}_{2,c}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)}.$$

On définit alors

$$\rho_{j,k}(y) = \frac{\partial_{x_k} y_j(x(y))}{|\nabla\varphi(x(y))|^2},$$

et on introduit

$$\begin{aligned}\check{f}_2(y) &= \frac{1}{|\nabla\varphi(x(y))|^2} f_{2,x_0}(x(y)) - \sum_{j,k} \partial_{y_j} \rho_{k,j} F_{x_0,k}(x(y)) + \check{f}_{2,a}(y) + \check{f}_{2,b}(y) + \check{f}_{2,c}(y), \\ \check{f}_{2*'}(y) &= \frac{1}{|\nabla\varphi(x(y))|^2} f_{2*',x_0}(x(y)), \\ \check{F}_j(y) &= \sum_{k=1}^d \rho_{k,j}(y) F_{x_0,k}(x(y)) + \check{F}_{j,a}(y), \quad j \in \{1, \dots, d\}.\end{aligned}$$

On obtient alors que \check{w} satisfait dans Ω_y

$$\sum_{j=1}^d (1 - \lambda_j y_1) \partial_{y_j}^2 \check{w} - 2\tau \partial_{y_1} \check{w} + \tau^2 \check{w} = \check{f}_2 + \check{f}_{2*'} + \operatorname{div}_y \check{F}.$$

Si Γ_y n'est pas vide, alors on rappelle simplement que la fonction poids φ a été choisie de telle sorte que $\varphi = 0$ sur la frontière de $\partial\Omega$. En particulier, l'ensemble Γ_y est simplement paramétré par $y_1(x) = Y_0$ pour un certain $Y_0 = -\varphi(x_0) \leq 0$, et Ω peut être localement défini par $y_1 > Y_0$. Ainsi, dans ce cas, l'équation vérifiée par \check{w} devrait être complétée par

$$\check{w}(Y_0, y') = \check{g}(y'), \quad \text{pour } y' \in \mathbb{R}^{d-1},$$

où

$$\check{g}(y') = g_{x_0}(x(Y_0, y')), \quad \text{pour } y' \in \mathbb{R}^{d-1} \text{ tel que } (Y_0, y') \in \Gamma_y.$$

En raison de la forme de Ω_y et du fait que nous considérons des fonctions qui sont supportées dans des ensembles inclus dans des boules de la forme $B(0, C\tau^{-\frac{1}{3}})$, nous pouvons alors simplement étendre tous les termes sources dans une bande de la forme $[Y_0, Y_1] \times \mathbb{R}^{d-1}$, où les fonctions sont prolongées par 0 à l'extérieur de Ω_y , et \check{w} satisfait alors

$$\begin{cases} \Delta_y \check{w} - y_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_{y_j}^2 \check{w} - 2\tau \partial_{y_1} \check{w} + \tau^2 \check{w} = \check{f}_2 + \check{f}_{2*'} + \operatorname{div}_y \check{F} & \text{dans } (Y_0, Y_1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \\ \check{w}(Y_0, y') = \check{g}(y'), & \text{pour } y' \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ \check{w}(Y_1, y') = 0, & \text{pour } y' \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ \partial_{y_1} \check{w}(Y_1, y') = 0, & \text{pour } y' \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases}$$

Dans la suite, par souci de commodité, nous écrivons également Ω_y pour la bande $(Y_0, Y_1) \times \mathbb{R}^{d-1}$. Maintenant, revenons à la définition de λ_j dans (3.88) et remarquons que la condition (3.3), prise en $x = x_0$, est équivalente à la condition (3.19). Par conséquent, les estimations de Carleman dans le théorème 3.2.4 s'appliquent : pour $\tau \geq \tau_0$, on a

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|\check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|\check{w}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega_y)} \\ & \leq C \left(\|\check{f}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|\check{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|\check{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{Y_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|\check{w}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|\check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} \\ & \leq C \left(\|\check{f}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|\check{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|\check{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{Y_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \right). \end{aligned}$$

On remarque alors simplement qu'à partir des expressions de $\check{f}_2, \check{f}_{2*'}, \check{F}$ et \check{g} ,

$$\begin{aligned} & \|\check{f}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|\check{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|\check{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{Y_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \\ & \leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|f_{2*'},x_0\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|g_{x_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \tau^{\frac{1}{3}} \|\nabla_y \tilde{w}\|_{L^2(\Omega_y)} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \|\check{f}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|\check{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|\check{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{Y_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \\ & \leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|f_{2*'},x_0\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|g_{x_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \tau^{\frac{1}{3}} \|\nabla_y \tilde{w}\|_{L^2(\Omega_y)} \right). \end{aligned}$$

En conséquence, en prenant $\tau_0 \geq 1$ plus grand si nécessaire, on obtient pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|\check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|\check{w}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega_y)} \\ & \leq C \left(\|\check{f}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|\check{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|\check{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{Y_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|\check{w}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|\check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} \\ & \leq C \left(\|\check{f}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|\check{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|\check{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{Y_0\} \times \mathbb{R}^{d-1})} \right). \end{aligned}$$

En revenant aux variables originales dans le membre de gauche, on déduit facilement les estimations (3.84) et (3.85).

Le fait que les constantes ci-dessus ne dépendent pas de $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \omega$ peut être suivi dans la preuve ci-dessus : cela provient des propriétés uniformes du difféomorphisme $x \mapsto y$, et repose fortement sur les estimées uniformes (3.2)–(3.3), sur le fait que $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$, et que les constantes dans le théorème 3.2.4 dépendent uniquement de c_0, m_* et M_* dans (3.18), et (3.19) pour $X_0 < 0 < X_1$ avec $|X_0|, |X_1| \leq 1$. Cela conclut la preuve du lemme 3.7.1.

3.7.3 Fin de la preuve du Théorème 3.1.1 : Un argument de recollement

Nous procédons ensuite à un argument de recollement, qui consiste essentiellement à intégrer les estimations de Carleman locales (3.84) et (3.85), ou plutôt le carré de ces estimations, par rapport à $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \omega$, afin de déduire les estimations (3.5) et (3.6), respectivement. Nous expliquerons seulement comment déduire l'estimation (3.5) à partir de l'estimation (3.84) car l'autre argument est complètement similaire.

En partant de (3.84), il existe des constantes $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ telles que pour tout $x_0 \in \overline{\Omega} \setminus \omega$ et $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} & \tau^3 \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{d}} \|w_{x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{d}} \|f_{2*'},x_0\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \tau^2 \|F_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}} \|g_{x_0}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Utilisant les expressions explicites des termes sources, on obtient alors

$$\begin{aligned} & \tau^3 \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{d}} \|w_{x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\|\eta_{x_0} \tilde{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{d}} \|\eta_{x_0} \tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\eta_{x_0} \tilde{F}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}} \|\eta_{x_0} \tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \right) \\ & + C \left(\|\nabla \eta_{x_0} \cdot \tilde{F}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \eta_{x_0} \cdot \nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta \eta_{x_0} w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\nabla \eta_{x_0} |w|\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

En prenant éventuellement $\tau_0 \geq 1$ plus grand (ce qui peut être fait de manière uniforme pour tout $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \omega$), on peut absorber le terme $\tau^2 \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2$, et on obtient pour tout $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \omega$, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} & \tau^3 \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{d}} \|w_{x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\|\eta_{x_0} \tilde{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{d}} \|\eta_{x_0} \tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\eta_{x_0} \tilde{F}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}} \|\eta_{x_0} \tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \right) \\ & + C \left(\|\nabla \eta_{x_0} \cdot \tilde{F}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \eta_{x_0} \cdot \nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta \eta_{x_0} w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\nabla \eta_{x_0} |w|\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Maintenant, en intégrant sur x_0 dans $\Omega \setminus \omega$ et en utilisant l'identité de Fubini pour les normes hilbertiennes, on obtient

$$\begin{aligned} & \tau^3 \int_{\Omega} \rho_0(x) |w(x)|^2 dx + \tau \int_{\Omega} \rho_0(x) |\nabla w(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{d}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0 \\ & \leq C \left(\int_{\Omega} \rho_0(x) |\tilde{f}_2(x)|^2 dx + \int_{\Omega} (\tau^2 \rho_0(x) + \rho_{r,1}(x)) |\tilde{F}(x)|^2 dx \right) \\ & + C \left(\tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{d}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} \tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 dx_0 + \tau^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} \tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 dx_0 \right) \\ & + C \left(\int_{\Omega} (\rho_{r,2}(x) + \tau^2 \rho_{r,1}(x)) |w(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \rho_{r,1}(x) |\nabla w(x)|^2 dx \right), \end{aligned}$$

où les poids $\rho_0, \rho_{r,i}$ sont définis comme suit

$$\rho_0(x) = \int_{\Omega \setminus \omega} |\eta_{x_0}(x)|^2 dx_0, \quad \rho_{r,1}(x) = \int_{\Omega \setminus \omega} |\nabla \eta_{x_0}(x)|^2 dx_0, \quad \rho_{r,2}(x) = \int_{\Omega \setminus \omega} |\Delta \eta_{x_0}(x)|^2 dx_0.$$

Prenons un ouvert ω_a tel que $\bar{\omega} \subset \omega_a$ et $\bar{\omega}_a \subset \omega_1$, il est facile de vérifier à partir du choix (3.86) que

$$\begin{aligned} \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega_a, \quad |\rho_0(x)| & \geq \frac{\tau^{-\frac{d}{3}}}{3} \|\eta\|_{L^2}^2, \\ \forall x \in \Omega, \quad |\rho_0(x)| & \leq C \tau^{-\frac{d}{3}}, \end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\forall x \in \Omega, \quad |\rho_{r,1}(x)| \leq C \tau^{\frac{2}{3}-\frac{d}{3}}, \tag{3.90}$$

$$\forall x \in \Omega, \quad |\rho_{r,2}(x)| \leq C \tau^{\frac{4}{3}-\frac{d}{3}}.$$

Ainsi, pour τ suffisamment grand,

$$\begin{aligned} & \tau^3 \int_{\Omega \setminus \omega_a} |w(x)|^2 dx + \tau \int_{\Omega \setminus \omega_a} |\nabla w(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0 \\ & \leq C \int_{\Omega} |\tilde{f}_2(x)|^2 dx + C \left(\tau^2 \int_{\Omega} |\tilde{F}(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} \tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 dx_0 \right) \\ & \quad + C \left(\tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} \tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 dx_0 + \tau^{\frac{8}{3}} \int_{\omega} |w(x)|^2 dx + \tau^{\frac{2}{3}} \int_{\omega} |\nabla w(x)|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Nous ajoutons ensuite

$$\tau^3 \int_{\omega_a} |w(x)|^2 dx + \tau \int_{\omega_a} |\nabla w(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\omega_a} \|\eta_{x_0} w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0$$

des deux côtés de l'estimation précédente, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \tau^3 \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\Omega} \|\eta_{x_0} w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0 \leq C \int_{\Omega} |\tilde{f}_2(x)|^2 dx \\ & + C \left(\tau^2 \int_{\Omega} |\tilde{F}(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} \tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 dx_0 + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} \tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 dx_0 \right) \\ & + C \left(\tau^3 \int_{\omega_a} |w(x)|^2 dx + \tau \int_{\omega_a} |\nabla w(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\omega_a} \|\eta_{x_0} w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0 \right). \quad (3.91) \end{aligned}$$

Considérons le lemme suivant dont la preuve est donnée dans l'annexe 3.9.2.

Lemme 3.7.2. *Avec η_{x_0} comme dans (3.86), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq \tau_0$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$,*

$$\tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 dx_0 \leq \tau^{\frac{3}{2}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \tau^{11/6} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \quad (3.92)$$

On a donc la borne

$$\tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} \tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 dx_0 \leq \tau^{\frac{3}{2}} \|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \tau^{11/6} \|\tilde{g}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.$$

Maintenant, \tilde{g} est la trace de la fonction $w \in H^1(\Omega)$. En prenant $X \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ tel que $X \cdot n = 1$ sur $\partial\Omega$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(X|w|^2) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(X)|w|^2 dx + 2 \int_{\Omega} X \cdot \nabla w w dx \\ &\leq C \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le terme $\tau^{11/6} \|\tilde{g}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$ peut être absorbé dans le membre de gauche de (3.91) en prenant τ_0 assez grand; et on obtient

$$\begin{aligned} & \tau^3 \int_{\Omega} |w(x)|^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\Omega} \|\eta_{x_0} w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0 \\ & \leq C \left(\int_{\Omega} |\tilde{f}_2(x)|^2 dx + \tau^2 \int_{\Omega} |\tilde{F}(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2}} \|\tilde{g}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\Omega \setminus \omega} \|\eta_{x_0} \tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 dx_0 \right) \\ & \quad + C \left(\tau^3 \int_{\omega_a} |w(x)|^2 dx + \tau \int_{\omega_a} |\nabla w(x)|^2 dx + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\omega_a} \|\eta_{x_0} w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0 \right). \end{aligned}$$

On revient ensuite à la variable u et obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \tau^3 \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\Omega} \|\eta_{x_0} u e^{\tau\varphi}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0 \\ & \leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\Omega} \|\eta_{x_0} f_{2*'} e^{\tau\varphi}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 dx_0 + \tau^2 \|e^{\tau\varphi} F\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \tau^3 \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\omega_a)}^2 + \tau \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\omega_a)}^2 + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \int_{\omega_a} \|\eta_{x_0} u e^{\tau\varphi}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 dx_0 \right). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Finalement on explique comment éliminer le terme $\tau \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\omega_a)}^2$ dans le membre de droite de (3.93). Pour ce faire, on choisit un sous-ensemble ouvert ω_b de Ω tel que $\overline{\omega_a} \subset \omega_b$ et $\overline{\omega_b} \subset \omega_1$, et une fonction régulière à support compact η_ω , prenant la valeur 1 dans ω_a et s'annulant dans $\overline{\Omega} \setminus \omega_b$. Ensuite, on multiplie (3.4) par $\eta_\omega u e^{2\tau\varphi}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_\omega |\nabla u|^2 e^{2\tau\varphi} dx &= \int_{\Omega} \eta_\omega f_2 u e^{2\tau\varphi} dx + \int_{\Omega} \eta_\omega f_{2*'} u e^{2\tau\varphi} dx - \int_{\Omega} F \cdot \nabla (\eta_\omega e^{2\tau\varphi}) u dx \\ & \quad - \int_{\Omega} F \cdot \nabla u \eta_\omega e^{2\tau\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta (\eta_\omega e^{2\tau\varphi}) |u|^2 dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation

$$\left| \int_{\Omega} F \cdot \nabla u \eta_\omega e^{2\tau\varphi} dx \right| \leq \frac{1}{2} \|F e^{\tau\varphi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta_\omega |\nabla u|^2 e^{2\tau\varphi} dx,$$

on obtient facilement

$$\begin{aligned} \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\omega_a)}^2 &\leq C \|f_2 e^{\tau\varphi}\|_{L^2(\Omega)} \|u e^{\tau\varphi}\|_{L^2(\omega_b)} + C \|F e^{\tau\varphi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + C \tau \|F e^{\tau\varphi}\|_{L^2(\Omega)} \|u e^{\tau\varphi}\|_{L^2(\omega_b)} + C \tau^2 \|u e^{\tau\varphi}\|_{L^2(\omega_b)}^2 + C \left| \int_{\Omega} \eta_\omega f_{2*'} u e^{2\tau\varphi} dx \right|. \end{aligned}$$

Seul le dernier terme est inhabituel. Pour l'estimer, on remarque que, pour tout $x \in \omega_b$ (rappelons que ω_1 , donc ω_b , est à une distance positive de $\partial\Omega$), en prenant $\tau_0 \geq 1$ assez grand, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\int_{x_0 \in \Omega} \eta_{x_0}(x)^2 dx_0 = \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \tau^{-\frac{d}{3}}.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \eta_\omega f_{2*'} u e^{2\tau\varphi} dx &= \frac{\tau^{\frac{d}{3}}}{\|\eta\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} \int_{x_0 \in \Omega} \int_{x \in \Omega} \eta_\omega f_{2*'} u e^{2\tau\varphi} \eta_{x_0}(x)^2 dx dx_0 \\ &\leq C \tau^{\frac{d}{3}} \int_{x_0 \in \Omega} \|\eta_{x_0} f_{2*'} e^{\tau\varphi}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \|\eta_{x_0} u e^{\tau\varphi}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_b)} dx_0 \\ &\leq C \tau^{\frac{d}{3}} \|\eta_{x_0} f_{2*'} e^{\tau\varphi}\|_{L^2_{x_0}(\Omega; L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega))} \|\eta_{x_0} u e^{\tau\varphi}\|_{L^2_{x_0}(\Omega; L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_b))}. \end{aligned}$$

On obtient alors facilement que

$$\begin{aligned} \tau \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\omega_a)}^2 &\leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \|\eta_{x_0} f_{2*'} e^{\tau\varphi}\|_{L^2_{x_0}(\Omega; L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega))}^2 + \tau^2 \|e^{\tau\varphi} F\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \tau^3 \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\omega_b)}^2 + \tau^{\frac{3}{2} + \frac{d}{3} - \frac{1}{d}} \|\eta_{x_0} u e^{\tau\varphi}\|_{L^2_{x_0}(\Omega; L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_b))}^2 \right), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de (3.5) puisqu'on a évidemment

$$\|\eta_{x_0} u e^{\tau\varphi}\|_{L_{x_0}^2(\Omega; L_x^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_b))}^2 \leq \|\eta_{x_0} u e^{\tau\varphi}\|_{L_{x_0}^2(\omega_1; L_x^{\frac{2d}{d-2}}(\omega_1))}^2$$

pour τ_0 suffisamment grand de telle sorte que $\tau_0^{\frac{1}{3}} \geq 1/d(\omega_b, \Omega \setminus \omega_1)$.

3.8 Preuve du théorème 3.1.3 : Prolongement unique quantitatif

Tout d'abord, en restreignant ω si nécessaire, on peut supposer que c'est un sous-ensemble ouvert non vide de Ω avec $\bar{\omega} \subset \Omega$. Ensuite, pour ω_0 sous-ensemble ouvert non vide tel que $\bar{\omega}_0 \subset \omega$, il existe une fonction φ satisfaisant aux conditions (3.2)–(3.3) dans ω_0 , de sorte que les estimations de Carleman (3.5)–(3.6) dans le théorème 3.1.1 avec $\omega_1 = \omega$ soient vérifiées.

Pour $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, on considère des décompositions de la forme

$$\begin{aligned} V &= V_{\frac{d}{2}} + V_d + V_{\infty}, & \text{avec } V_{\frac{d}{2}} &\in L^{\frac{d}{2}}(\Omega), \quad V_d \in L^d(\Omega), \quad V_{\infty} \in L^{\infty}(\Omega), \\ W_1 &= W_{1,d} + W_{1,\infty}, & \text{avec } W_{1,d} &\in L^d(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad W_{1,\infty} \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d), \\ W_2 &= W_{2,d} + W_{2,\infty}, & \text{avec } W_{2,d} &\in L^d(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad W_{2,\infty} \in L^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}^d), \end{aligned}$$

ce qui sera précisé ultérieurement.

En particulier, en appliquant (3.5) pour u solution de (3.4), avec $f_{2^*} = V_{\frac{d}{2}}u + V_d u + W_{1,d} \cdot \nabla u$, $f_2 = V_{\infty}u + W_{1,\infty} \cdot \nabla u$, et en utilisant (3.8) et (3.11), on obtient l'existence de $C_1 > 0$ tel que pour $\tau \geq \tau_0$:

$$\begin{aligned} &\tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|e^{\tau\varphi} (V_{\infty}u + W_{1,\infty} \cdot \nabla u)\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} (V_{\frac{d}{2}}u + V_d u + W_{1,d} \cdot \nabla u)\|_{L_{\eta,\tau}^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \\ &\quad + C_1 \tau \|e^{\tau\varphi} (W_{2,d}u + W_{2,\infty}u)\|_{L^2(\Omega)} + C_1 \left(\tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\omega)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L_{\eta,\tau}^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)} \right) \\ &\leq C_1 \left(\|V_{\infty}\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_d\|_{L^d(\Omega)} + \tau \|W_{2,\infty}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C_1 \left(\|W_{1,\infty}\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C_1 \left(\tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L_{\eta,\tau}^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + C_1 \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}. \end{aligned} \tag{3.94}$$

De même, en appliquant (3.6) avec $f_{2^*} = V_{\frac{d}{2}}u + W_{1,d} \cdot \nabla u$, $f_2 = V_d u + V_{\infty}u + W_{1,\infty} \cdot \nabla u$, on obtient l'existence d'une constante $C_2 > 0$ telle que pour $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} &\tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L_{\eta,\tau}^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C_2 \left(\|V_{\infty}\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \tau \|W_{2,\infty}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C_2 \left(\|W_{1,\infty}\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C_2 \left(\|V_d\|_{L^d(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L_{\eta,\tau}^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + C_2 \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Ainsi, si nous avons

$$2C_1 \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|V_d\|_{L^d(\Omega)} + \tau \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \leq \tau^{\frac{3}{2}}, \quad (3.96)$$

$$2C_1 \left(\|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \leq \tau^{\frac{1}{2}}, \quad (3.97)$$

$$2C_2 \left(\|V_d\|_{L^d(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \leq \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}, \quad (3.98)$$

les estimations (3.94)–(3.95) donnent

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq 2C_1 \left(\tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \\ &\quad + 2C_1 \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} &\leq 2C_2 \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + \tau \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 2C_2 \left(\|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} + 2C_2 \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}. \end{aligned}$$

Ensuite, sous les conditions (3.96)–(3.97)–(3.98), on a également

$$\begin{aligned} &\tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 4C_1 C_2 \tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \left(\tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + \tau \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 4C_1 C_2 \tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \left(\tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \left(\|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + 2C_1 \left(C_2 \left(\tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \tau^{\frac{3}{4}} + \tau^{\frac{3}{2}} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}. \end{aligned}$$

Notons que cette estimation fournit une estimation d'observation si les conditions supplémentaires suivantes sont également satisfaites

$$8C_1 C_2 \tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \left(\tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + \tau \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \leq \tau^{\frac{3}{2}} \quad (3.99)$$

$$8C_1 C_2 \tau^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \left(\tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \left(\|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \leq \tau^{\frac{1}{2}}. \quad (3.100)$$

En effet, dans ce cas, on obtiendrait

$$\begin{aligned} &\tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2C_1 \left(C_2 \left(\tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} + \tau \|W_{2,d}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \tau^{\frac{3}{4}} + \tau^{\frac{3}{2}} \right) \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}. \quad (3.101) \end{aligned}$$

Par conséquent, notre prochaine étape est de comprendre comment, étant donné $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, on peut minimiser la valeur de τ pour laquelle on peut trouver des décompositions telles que les conditions (3.96)–(3.97)–(3.98)–(3.99)–(3.100) soient satisfaites.

Avant d'aller plus loin, notons que (3.96)–(3.97)–(3.98)–(3.99)–(3.100) sont satisfaites pourvu que, pour $c_0 > 0$ suffisamment petit,

$$\begin{cases} \|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_0 \tau^{\frac{3}{2}}, & \|V_d\|_{L^d(\Omega)} \leq c_0 \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}}, & \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \leq c_0, \\ \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_0 \tau^{\frac{1}{2}}, & \tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} + \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \leq c_0, \\ \tau^{\frac{1}{2}} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \leq c_0. \end{cases} \quad (3.102)$$

Le cas $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 \in (\frac{d}{2}, d]$. Pour $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 \in (\frac{d}{2}, d]$ et $\lambda_0 > 0$ à choisir ultérieurement, on pose $V_{\frac{d}{2}} = V1_{|V|>\lambda_0}$, $V_d = V1_{|V|\leq\lambda_0}$, $V_\infty = 0$, pour lesquels on a les estimations suivantes

$$\lambda_0^{q_0 - \frac{d}{2}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)}^{\frac{d}{2}} \leq \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{q_0}, \quad \|V_d\|_{L^d(\Omega)}^d \leq \lambda_0^{d - q_0} \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{q_0}.$$

De même, pour $W_1 \in L^{q_1}(\Omega)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega)$ et λ_1, λ_2 des nombres positifs à choisir ultérieurement, on pose $W_{1,d} = W_1 1_{|W_1|>\lambda_1}$, $W_{1,\infty} = W_1 1_{|W_1|\leq\lambda_1}$, et $W_{2,d} = W_2 1_{|W_2|>\lambda_2}$, $W_{2,\infty} = W_2 1_{|W_2|\leq\lambda_2}$, pour lesquels on a les estimations

$$\begin{cases} \lambda_1^{q_1 - d} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)}^d \leq \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{q_1}, & \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_1, \\ \lambda_2^{q_2 - d} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)}^d \leq \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{q_2}, & \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_2. \end{cases} \quad (3.103)$$

Les conditions (3.102) sont donc satisfaites à condition que

$$\begin{cases} \lambda_0^{1 - \frac{q_0}{d}} \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\frac{q_0}{d}} \leq c_0 \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}}, & \lambda_0^{1 - 2\frac{q_0}{d}} \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\frac{2q_0}{d}} \leq c_0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq c_0 \tau^{\frac{1}{2}}, & \tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\lambda_1^{1 - \frac{q_1}{d}} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{q_1}{d}} + \lambda_2^{1 - \frac{q_2}{d}} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{q_2}{d}} \right) \leq c_0, \\ \tau^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{1 - \frac{q_1}{d}} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{q_1}{d}} \lambda_2^{1 - \frac{q_2}{d}} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{q_2}{d}} \leq c_0. \end{cases} \quad (3.104)$$

On choisit alors $\lambda_0 = \tau^{\alpha_0} \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}$, $\lambda_1 = \tau^{\alpha_1} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}$ et $\lambda_2 = \tau^{\alpha_2} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}$ pour certains paramètres réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, de sorte que les conditions (3.104) soient satisfaites

$$\begin{cases} \tau^{\alpha_0(1 - \frac{q_0}{d}) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)} \leq c_0, & \tau^{\alpha_0(1 - 2\frac{q_0}{d})} \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)} \leq c_0, \\ \tau^{\alpha_1 - \frac{1}{2}} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \tau^{\alpha_2 - \frac{1}{2}} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)} \leq c_0, \\ \tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d} + \alpha_1(1 - \frac{q_1}{d})} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d} + \alpha_2(1 - \frac{q_2}{d})} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)} \leq c_0, \\ \tau^{\frac{1}{2} + \alpha_1(1 - \frac{q_1}{d}) + \alpha_2(1 - \frac{q_2}{d})} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)} \leq c_0. \end{cases} \quad (3.105)$$

Pour $q_0 \in (\frac{d}{2}, d]$, $q_1 > (3d - 2)/2$, $q_2 > (3d - 2)/2$ avec $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < \frac{4(1 - \frac{1}{d})}{3d - 2}$, on choisit $\alpha_0 = (\frac{3}{4} + \frac{1}{2d})\frac{d}{q_0}$, $\alpha_1 = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})\frac{d}{q_1}$, $\alpha_2 = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})\frac{d}{q_2}$, de sorte que le système (3.105) est satisfait pour un certain C suffisamment grand,

$$\begin{cases} \tau^{(2 - \frac{d}{q_0})(\frac{3}{4} + \frac{1}{2d})} \geq C \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}, \\ \tau^{\frac{1}{2} - (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})\frac{d}{q_1}} \geq C \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}, & \tau^{\frac{1}{2} - (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})\frac{d}{q_2}} \geq C \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}, \\ \tau^{1 - \frac{1}{d} - (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})(\frac{d}{q_1} + \frac{d}{q_2})} \geq C \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, avec les notations du théorème 3.1.3,

$$\tau \geq C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} + (\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)})^{\rho(q_1, q_2)} \right). \quad (3.106)$$

Pour $q_0 \in (\frac{d}{2}, d]$, $q_1 > 3d/2$ et $q_2 > 3d/2$, on peut choisir alternativement $\alpha_0 = (\frac{3}{4} + \frac{1}{2d})\frac{d}{q_0}$, $\alpha_1 = \frac{3d}{4q_1}$, $\alpha_2 = \frac{3d}{4q_2}$, de sorte que le système (3.105) soit satisfait pour un certain C suffisamment grand.

$$\tau^{(2-\frac{d}{q_0})(\frac{3}{4}+\frac{1}{2d})} \geq C\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}, \quad \tau^{\frac{1}{2}-\frac{3d}{4q_1}} \geq C\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}, \quad \tau^{\frac{1}{2}-\frac{3d}{4q_2}} \geq C\|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)},$$

Pour $q_0 \in (\frac{d}{2}, d]$, $q_1 > 3d/2$ et $q_2 > 3d/2$, on peut choisir alternativement $\alpha_0 = (\frac{3}{4} + \frac{1}{2d})\frac{d}{q_0}$, $\alpha_1 = \frac{3d}{4q_1}$, $\alpha_2 = \frac{3d}{4q_2}$, de sorte que le système (3.105) soit satisfait pour un certain C suffisamment grand,

$$\tau^{(2-\frac{d}{q_0})(\frac{3}{4}+\frac{1}{2d})} \geq C\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}, \quad \tau^{\frac{1}{2}-\frac{3d}{4q_1}} \geq C\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}, \quad \tau^{\frac{1}{2}-\frac{3d}{4q_2}} \geq C\|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)},$$

c'est-à-dire, avec les notations du théorème 3.1.3,

$$\tau \geq C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\tilde{\delta}(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\tilde{\delta}(q_2)} \right). \quad (3.107)$$

En prenant τ suffisamment grand pour saturer la condition (3.106), respectivement la condition (3.107), en encadrant la fonction poids $e^{\tau\varphi}$ par valeurs inférieures et supérieures dans (3.101), nous déduisons facilement le théorème 3.1.3 item 1, respectivement item 2 pour $q_0 \in (\frac{d}{2}, d]$.

Le cas $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 \in [d, \infty]$. Pour $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 \in [d, \infty]$ et $\lambda_0 > 0$ à choisir ultérieurement, on pose $V_{\frac{d}{2}} = 0$, $V_d = V1_{|V|>\lambda_0}$, $V_\infty = V1_{|V|\leq\lambda_0}$, pour lesquels on a les estimations suivantes

$$\lambda_0^{q_0-d}\|V_d\|_{L^d(\Omega)}^d \leq \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{q_0}, \quad \|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_0.$$

Les potentiels $W_1 \in L^{q_1}(\Omega)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega)$ sont décomposés comme précédemment $W_1 = W_{1,d} + W_{1,\infty}$, $W_2 = W_{2,d} + W_{2,\infty}$ avec les estimations (3.103) pour les paramètres positifs λ_1 et λ_2 à choisir ultérieurement. De même, comme précédemment, les conditions (3.102) sont donc satisfaites pourvu que

$$\begin{cases} \lambda_0^{1-\frac{q_0}{d}}\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\frac{q_0}{d}} \leq c_0\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}, & \lambda_0 \leq c_0\tau^{\frac{3}{2}}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq c_0\tau^{\frac{1}{2}}, & \tau^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2d}}(\lambda_1^{1-\frac{q_1}{d}}\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{q_1}{d}} + \lambda_2^{1-\frac{q_2}{d}}\|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{q_2}{d}}) \leq c_0, \\ \tau^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{1-\frac{q_1}{d}}\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{q_1}{d}}\lambda_2^{1-\frac{q_2}{d}}\|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{q_2}{d}} \leq c_0. \end{cases} \quad (3.108)$$

Comme précédemment, pour $q_0 \in [d, \infty]$, $q_1 > (3d-2)/2$, $q_2 > (3d-2)/2$ avec $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < \frac{4(1-\frac{1}{d})}{3d-2}$, on choisit $\alpha_0 = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})\frac{d}{q_0}$, $\alpha_1 = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})\frac{d}{q_1}$, $\alpha_2 = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})\frac{d}{q_2}$, et $\lambda_0 = \tau^{\alpha_0}\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}$, $\lambda_1 = \tau^{\alpha_1}\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}$ et $\lambda_2 = \tau^{\alpha_2}\|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}$. On en déduit alors que le système (3.108) est satisfait pour un certain C suffisamment grand,

$$\begin{cases} \tau^{(2-\frac{d}{q_0})(\frac{3}{4}-\frac{1}{2d})} \geq C\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}, \\ \tau^{\frac{1}{2}-(\frac{3}{4}-\frac{1}{2d})\frac{d}{q_1}} \geq C\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}, & \tau^{\frac{1}{2}-(\frac{3}{4}-\frac{1}{2d})\frac{d}{q_2}} \geq C\|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}, \\ \tau^{1-\frac{1}{d}-(\frac{3}{4}-\frac{1}{2d})(\frac{d}{q_1}+\frac{d}{q_2})} \geq C\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}\|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}, \end{cases}$$

c'est-à-dire, (3.106) avec les notations du théorème 3.1.3.

Encore une fois, pour $q_0 \in [d, \infty]$, $q_1 > 3d/2$ et $q_2 > 3d/2$, on peut choisir alternativement $\alpha_0 = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2d})\frac{d}{q_0}$, $\alpha_1 = \frac{3d}{4q_1}$, $\alpha_2 = \frac{3d}{4q_2}$, de sorte que les conditions (3.108) sont impliquées par

$$\tau^{(\frac{3}{2} - \frac{d}{q_0})(\frac{3}{4} + \frac{1}{2d})} \geq C \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}, \quad \tau^{\frac{1}{2} - \frac{3d}{4q_1}} \geq C \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}, \quad \tau^{\frac{1}{2} - \frac{3d}{4q_2}} \geq C \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)},$$

c'est-à-dire (3.107) avec les notations du théorème 3.1.3.

On déduit alors immédiatement le théorème 3.1.3 dans le cas $q \geq d$ à partir de (3.101) comme dans le cas $q \leq d$.

Remarque 3.8.1. *En fait, si on se concentre sur les conditions*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \leq c_0 \tau^{\frac{1}{2}}, & \tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d}} (\lambda_1^{1 - \frac{q_1}{d}} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{q_1}{d}} + \lambda_2^{1 - \frac{q_2}{d}} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{q_2}{d}}) \leq c_0, \\ \tau^{\frac{1}{2}} \lambda_1^{1 - \frac{q_1}{d}} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{q_1}{d}} \lambda_2^{1 - \frac{q_2}{d}} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{q_2}{d}} \leq c_0, \end{cases} \quad (3.109)$$

qui apparaissent dans les deuxième et troisième lignes du système (3.104) et (3.108), et en choisissant $\lambda_1 = \tau^{\alpha_1} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}$ et $\lambda_2 = \tau^{\alpha_2} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}$, on peut trouver τ suffisamment grand pour que le système (3.109) soit satisfait pourvu que

$$\begin{cases} \alpha_1 < \frac{1}{2}, & \alpha_2 < \frac{1}{2}, \\ \alpha_1 \left(\frac{q_1}{d} - 1 \right) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2d}, & \alpha_2 \left(\frac{q_2}{d} - 1 \right) > \frac{1}{4} - \frac{1}{2d}, & \alpha_1 \left(\frac{q_1}{d} - 1 \right) + \alpha_2 \left(\frac{q_2}{d} - 1 \right) > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.110)$$

En effet, dans ce cas, il suffit de prendre, pour une constante suffisamment grande C ,

$$\tau \geq C \left(\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{a_{q_1}(\alpha_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{a_{q_2}(\alpha_2)} + \left(\|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)} \right)^{b(\alpha_1, \alpha_2)} \right), \quad (3.111)$$

avec

$$a_q(\alpha) = \max \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha}, \frac{1}{\alpha \left(\frac{q}{d} - 1 \right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \right\}, \quad b_{q_1, q_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\alpha_1 \left(\frac{q_1}{d} - 1 \right) + \alpha_2 \left(\frac{q_2}{d} - 1 \right) - \frac{1}{2}}.$$

Bien qu'il soit assez facile de vérifier que le système (3.110) admet des solutions (α_1, α_2) si q_1 et q_2 satisfont $q_1 > 3d/2 - 1$, $q_2 > 3d/2 - 1$ et $q_1 + q_2 > 3d$, il n'est pas clair comment choisir α_1 et α_2 satisfaisant (3.110) pour minimiser τ dans (3.111). On a donc décidé dans la preuve ci-dessus du théorème 3.1.3 de nous limiter au cas où les deux termes de $a_q(\alpha)$ sont égaux (ce choix correspond à l'item 1 du théorème 3.1.3), ou de considérer, au lieu de (3.109), les conditions suffisantes

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq c_0 \tau^{\frac{1}{2}}, \quad \tau^{\frac{1}{4}} (\lambda_1^{1 - \frac{q_1}{d}} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{q_1}{d}} + \lambda_2^{1 - \frac{q_2}{d}} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{q_2}{d}}) \leq c_0,$$

ce choix conduisant à l'item 2 du théorème 3.1.3.

3.9 Appendice

3.9.1 Rappel de quelques résultats classiques en analyse harmonique

On commence par rappeler le théorème classique de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Théorème 3.9.1 ([Hö03, Theorem 4.5.3] Théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev). *Pour* $(p, q, r) \in (1, \infty)^3$ tels que

$$\frac{1}{r} = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right),$$

il existe une constante $C_{p,q}$ telle que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\| x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-\frac{n}{r}} f(y) \, dy \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dans ce chapitre, on a également utilisé le lemme de la phase stationnaire. Bien qu'il s'agisse d'un lemme très classique d'analyse harmonique, on a utilisé la version suivante prouvée dans [ABZ17], qui présente l'avantage de quantifier précisément les constantes.

Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, introduisons

$$I_{\Phi,b}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\Phi(\xi)} b(\xi) \, d\xi.$$

Définissons $K = \text{supp } b$ et soit V un voisinage ouvert de K , et utilisons les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_{d+2} := \sum_{2 \leq |\alpha| \leq d+2} \sup_{\xi \in V} |D_\xi^\alpha \Phi(\xi)|$,
- $\mathcal{N}_{d+1} := \sum_{|\alpha| \leq d+1} \sup_{\xi \in K} |D_\xi^\alpha b(\xi)|$.

Théorème 3.9.2 ([ABZ17, Théorème 1] Lemme de la phase stationnaire). *Supposons qu'il existe* $a_0 > 0$ *tel que pour tout* $\xi \in V$, $|\det(\text{Hess } \Phi(\xi))| \geq a_0$, *où* $\text{Hess } \Phi(\xi)$ *désigne la matrice hessienne de* Φ *en* ξ .

Il existe une constante C *indépendante de* (Φ, b) , *telle que pour tout* $\lambda \geq 1$,

$$|I_{\Phi,b}(\lambda)| \leq \frac{C}{a_0^{1+d}} \left(1 + \mathcal{M}_{d+2}^{\frac{d}{2}+d^2} \right) \mathcal{N}_{d+1} \lambda^{-\frac{d}{2}}.$$

3.9.2 Preuve du lemme 3.7.2

La preuve du lemme 3.7.2 repose sur une estimation d'interpolation appropriée.

Tout d'abord, pour $\tau \geq \tau_0$, on définit l'opérateur

$$\Lambda_\tau : L^2(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \setminus \omega; L^2(\partial\Omega)), \quad \text{défini par } \Lambda_\tau g(x_0) = \eta_{x_0, \tau}(\cdot) g(\cdot), \quad x_0 \in \Omega \setminus \omega, \quad (3.112)$$

où on rappelle que $\eta_{x_0, \tau}$ est la fonction donnée par $\eta_{x_0, \tau}(x) = \eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0))$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, pour une fonction lisse à support compact η .

En utilisant (3.89)–(3.90), il est facile de vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \forall g \in L^2(\partial\Omega), \quad & \|\Lambda_\tau g\|_{L^2(\Omega \setminus \omega; L^2(\partial\Omega))}^2 \leq C \tau^{-\frac{d}{3}} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}^2, \\ \forall g \in H^1(\partial\Omega), \quad & \|\Lambda_\tau g\|_{L^2(\Omega \setminus \omega; H^1(\partial\Omega))}^2 \leq C \tau^{-\frac{d}{3}} \left(\|g\|_{H^1(\partial\Omega)}^2 + \tau^{\frac{2}{3}} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

On peut alors déduire facilement l'estimation (3.92). Plus précisément, par interpolation, Λ_τ agit de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\Omega \setminus \omega; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$. Pour estimer l'opérateur dans cette norme avec des puissances appropriées de τ , nous procédons comme suit. Soit $(\Phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la base de

fonctions propres de l'opérateur Laplace Beltrami $-\Delta$ sur $\partial\Omega$, associées aux valeurs propres $(\lambda_j^2)_{j \in \mathbb{N}}$, qui sont non négatives et tendent vers l'infini. En conséquence, pour $g = \sum_j a_j \Phi_j$, les normes $L^2(\partial\Omega)$, $H^1(\partial\Omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ de g peuvent être lues comme, respectivement, $\|(a_j)\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$, $\|(a_j(\lambda_j + 1))\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$, et $\|(a_j(\lambda_j + 1)^{\frac{1}{2}})\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$.

En écrivant $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ sous la forme $g = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \Phi_j$, on introduit ensuite la fonction

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j (\lambda_j + 1 + \tau^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}-z} \Lambda_\tau \Phi_j, \quad z \in \mathbb{C} \text{ avec } \Re(z) \in [0, 1].$$

La fonction f est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \text{ avec } \Re(z) \in (0, 1)\}$ à valeurs dans $L^2(\Omega \setminus \omega; L^2(\partial\Omega))$, $f(\frac{1}{2}) = \Lambda_\tau g$, et

$$\begin{aligned} \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \|f(i\beta)\|_{L^2(\Omega \setminus \omega; L^2(\partial\Omega))}^2 &\leq C \tau^{-\frac{d}{3}} \sum_j |a_j|^2 (\lambda_j + 1 + \tau^{\frac{1}{3}}), \\ \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \|f(1 + i\beta)\|_{L^2(\Omega \setminus \omega; H^1(\partial\Omega))}^2 &\leq C \tau^{-\frac{d}{3}} \sum_j |a_j|^2 (\lambda_j + 1 + \tau^{\frac{1}{3}}). \end{aligned}$$

Puisque $L^2(\Omega \setminus \omega; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) = [L^2(\Omega \setminus \omega; L^2(\partial\Omega)), L^2(\Omega \setminus \omega; H^1(\partial\Omega))]_{\frac{1}{2}}$, on déduit des estimations ci-dessus qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et $\tau \geq \tau_0$,

$$\|\Lambda_\tau g\|_{L^2(\Omega \setminus \omega; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}^2 \leq C \tau^{-\frac{d}{3}} \left(\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \tau^{\frac{1}{3}} \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right).$$

Ceci conclut la preuve du lemme [3.7.2](#).

Chapitre 4

Quantification du prolongement unique pour l'opérateur de Laplace avec des potentiels irréguliers

Dans ce chapitre, on établit des estimations de quantification du prolongement unique. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Pedro Caro et Sylvain Ervedoza et devrait être finalisé prochainement : *Quantification of unique continuation for the Laplace operator with rough potentials*. [CET24].

Contents

4.1	Introduction	154
4.2	Résultats auxiliaires	157
4.2.1	Lemme de Wolff	157
4.2.2	Estimations de Carleman	158
4.3	Estimations de Carleman améliorées : Preuve du théorème 4.2.4	160
4.3.1	Étape principale : Estimations de Carleman pour les solutions dans une bande.	161
4.3.1.1	Une paramétrice explicite	162
4.3.1.2	Bornes des opérateurs $K_{\tau,j}$	164
4.3.1.3	Preuve du théorème 4.3.1	170
4.3.2	Preuve du théorème 4.2.4	173
4.3.2.1	Estimations locales de Carleman	173
4.3.2.2	Un argument de recollement	177
4.4	Un cadre géométrique spécifique	179
4.5	Autres géométries et preuve du théorème 4.1.1	187
4.5.1	Une boule observée depuis un voisinage de sa frontière	187
4.5.2	Une estimation de trois boules	188
4.5.3	Le cas général : Preuve du théorème 4.1.1	190
4.6	Appendice	192
4.6.1	À propos de transformation de Kelvin	192

Résumé

Dans ce travail, nous étudions les estimations quantitatives de la propriété de prolongement unique pour les solutions d'une équation elliptique $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$

dans un sous-ensemble ouvert et connexe de \mathbb{R}^d , où $d \geq 3$. Ici, $V \in L^{q_0}$, $W_1 \in L^{q_1}$ et $W_2 \in L^{q_2}$ avec $q_0 > d/2$, $q_1 > d$, et $q_2 > d$. Notre objectif est de fournir une quantification explicite de la propriété de prolongement unique en fonction des normes des potentiels. Pour ce faire, nous revisitons les estimations de Carleman établies dans [DET23] et prouvons une version affinée de celles-ci. Nous les combinons ensuite avec un argument dû à T. Wolff, introduit dans [Wol92], pour la preuve de la propriété de prolongement unique pour les solutions d'équations de la forme $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u$.

Abstract

In this work, we investigate the quantitative estimates of the unique continuation property for solutions of an elliptic equation $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u)$ in an open, connected subset of \mathbb{R}^d , where $d \geq 3$. Here, $V \in L^{q_0}$, $W_1 \in L^{q_1}$, and $W_2 \in L^{q_2}$ with $q_0 > d/2$, $q_1 > d$, and $q_2 > d$. Our aim is to provide an explicit quantification of the unique continuation property with respect to the norms of the potentials. To achieve this, we revisit the Carleman estimates established in [DET23] and prove a refined version of them, and we combine them with an argument due to T. Wolff introduced in [Wol92] for the proof of unique continuation for solutions of equations of the form $\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u$.

4.1 Introduction

Résultat principal.

Notre objectif principal est de prouver le résultat quantitatif de prolongement unique suivant.

Theorem 4.1.1. *Soit $d \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, et ω et \mathcal{O} des sous-ensembles ouverts non vides de Ω avec $\omega \subset \bar{\omega} \subset \mathcal{O} \subset \bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$. De plus, supposons la condition géométrique suivante :*

(GC) *Pour tout $y \in \bar{\mathcal{O}}$, il existe $x_0 \in \omega$, $r_y > 0$ et un chemin lisse γ_y de longueur finie tel que $\gamma_y(0) = x_0$, $\gamma_y(1) = y$, et $\cup_{s \in [0,1]} B_{\gamma_y(s)}(r_y) \subset \Omega$, où $B_{\gamma_y(s)}(r_y)$ est la boule centrée en $\gamma_y(s)$ et de rayon r_y .*

Alors, il existe des constantes $C = C(\omega, \mathcal{O}, \Omega) > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ ne dépendant que de ω , \mathcal{O} et Ω telles que pour toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de

$$\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \operatorname{div}(W_2 u) \quad \text{dans } \mathbb{D}'(\Omega), \quad (4.1)$$

où

$$V \in L^{q_0}(\Omega) \text{ avec } q_0 \in \left[\frac{d}{2}, \infty \right], \text{ et } W_j \in L^{q_j}(\Omega; \mathbb{C}^d) \text{ avec } q_j \in (d, \infty], \text{ pour } j \in \{1, 2\}, \quad (4.2)$$

nous avons

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} \right)} \|u\|_{H^1(\omega)}^\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad (4.3)$$

avec

$$\gamma(q) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{d}{2q}\right) + \frac{1}{2q}} & \text{si } q \geq d, \\ \frac{1}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}\right) \left(2 - \frac{d}{q}\right)} & \text{si } q \in \left(\frac{d}{2}, d\right], \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta(q) = \frac{2}{1 - \frac{d}{q}}, \quad \text{si } q > d. \quad (4.4)$$

Avant d'aller plus loin, notons que la condition géométrique **(GC)** supposée dans le théorème 4.1.1 est une condition technique très légère. Cette condition peut être violée dans certains ensembles de type fractal, mais elle est certainement satisfaite pour la plupart des configurations géométriques. En particulier, cette condition géométrique **(GC)** est satisfaite lorsque ω , \mathcal{O} et Ω sont des boules concentriques, cas dans lequel (4.3) se réduit à l'estimation habituelle de type 3-boules, avec une quantification explicite par rapport aux termes d'ordre inférieur.

Bien sûr, une application directe du théorème 4.1.1 permet d'obtenir la propriété de prolongement unique suivante pour l'opérateur de Laplace : Si $u \in H^1(\Omega)$ satisfait (4.1) avec les potentiels V , W_1 et W_2 comme dans (4.2) et $u = 0$ dans ω , alors $u = 0$ dans tout ensemble \mathcal{O} satisfaisant $\mathcal{O} \Subset \Omega$ et **(GC)**. Le théorème 4.1.1 est une quantification de cette propriété car il stipule que, si $u \in H^1(\Omega)$ est petit dans ω et satisfait (4.1) avec les potentiels V , W_1 et W_2 comme dans (4.2), alors u est petit dans \mathcal{O} , avec une quantification précise en fonction des normes des potentiels.

Il est bien connu que le prolongement unique est valide pour des potentiels généraux $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, où $q_0 \geq d/2$, $q_1 \geq d$, et $q_2 \geq d$ (voir [Wol93]). De plus, un prolongement unique forte a même été prouvée dans les cas où $q_0 > d/2$, $q_1 > d$, et $q_2 > d$ (voir [KT01]). Ces classes d'intégrabilité pour les potentiels sont optimales, comme le montre [KT02]. Cependant, établir des résultats de prolongement unique nécessite l'utilisation d'une estimation de Carleman et un argument délicat dû à T. Wolff, voir [Wol92], comme discuté également dans [KT01]. Cet argument nécessite de choisir une fonction poids dans l'estimation de Carleman dépendant de la solution u elle-même. La question de quantifier la propriété de prolongement unique en fonction des normes des potentiels est donc assez délicate, et c'est la principale nouveauté de notre travail.

Nous mentionnons également le travail [MV12], qui quantifie les propriétés de prolongement unique pour l'opérateur de Laplace avec des termes d'ordre inférieur dans la classe d'intégrabilité optimale. Cependant, il ne fournit pas de quantification explicite en fonction des normes des potentiels. Encore une fois, étant donné que ce travail s'appuie sur [KT01], comme mentionné précédemment, il reste incertain comment la preuve dans [MV12] peut être rendue quantitative en fonction des normes des potentiels.

Lors de la tentative de quantification de la propriété de prolongement unique en fonction des normes des termes d'ordre inférieur, les résultats connus reposent uniquement sur l'utilisation d'une estimation de Carleman telle que celle présentée dans [DET23, Théorème 1.1], qui, comme le souligne [BKRS88], ne permet pas de dépasser $W_1 \in L^{\frac{3d-2}{2}}(\Omega; \mathbb{C}^d)$. Cela correspond à ce qui est fait dans [DZ19, Dav20, DET23] en utilisant des estimations de Carleman L^p . Les résultats de [DZ19] décrivant l'ordre maximal d'annulation des solutions d'équations elliptiques nécessitent que V et W_1 soient respectivement dans $L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > d(3d-2)/(5d-2)$ et dans $L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ avec $q_1 > (3d-2)/2$, et $W_2 = 0$. Ceci a

été amélioré dans [DET23] en utilisant de nouvelles estimations de Carleman L^p permettant de traiter V et W_1 respectivement dans $L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > d/2$ et dans $L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ avec $q_1 > (3d - 2)/2$, montrant la même dépendance en $\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}$ que dans [Dav20], qui était limité au cas $W_1 = W_2 = 0$.

Nous soulignons également que les estimations de Carleman L^2 ne permettent pas d'atteindre la classe d'intégrabilité optimale pour les potentiels et les termes d'ordre inférieur, voir par exemple [SS82] où il est montré qu'on peut obtenir des résultats de prolongement unique quantifiés pour des potentiels $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > 2d/3$. En fait, même en utilisant des estimations de Carleman L^p , on peut obtenir des résultats de prolongement unique pour des potentiels V dans la classe d'intégrabilité optimale ($V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 > d/2$), mais sous des conditions d'intégrabilité restrictives sur W_1 et W_2 , voir par exemple [BKRS88] et [Wol93].

Le théorème 4.1.1 constitue une amélioration de [DET23, Théorème 1.3]. Le théorème 4.1.1 permet des termes d'ordre inférieur non triviaux $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ avec $q_1 > d$ et $q_2 > d$, tandis que le Théorème 1.3 de [DET23] est limité à des classes d'intégrabilité plus élevées. En effet, le Théorème 1.3 de [DET23] affirme que si $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ avec $q_1 > (3d - 2)/2$, $q_2 > (3d - 2)/2$ et $1/q_1 + 1/q_2 < 4(1 - 1/d)/(3d - 2)$, alors toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de (4.1) satisfait

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}}^{\tilde{\delta}(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}}^{\tilde{\delta}(q_2)} + (\|W_1\|_{L^{q_1}} \|W_2\|_{L^{q_2}})^{\gamma(q_1, q_2)} \right)} \|u\|_{H^1(\omega)}^\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha}, \quad (4.5)$$

avec

$$\tilde{\delta}(q) = \frac{2}{\left(1 - \frac{(3d-2)}{2q}\right)} \quad \text{et} \quad \gamma(q_1, q_2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{d}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}\right)\left(\frac{d}{q_1} + \frac{d}{q_2}\right)}.$$

En conséquence, la dépendance en fonction des normes des potentiels W_1 et W_2 est également plus faible dans (4.3) que dans (4.5), puisque δ donnée par (4.4) est plus petite que $\tilde{\delta}$, même pour $q > (3d - 2)/2$.

En fait, cela suggère également d'analyser l'optimalité des coefficients γ et δ dans (4.4), mais cette question est, à notre connaissance, entièrement ouverte, sauf dans le cas où $W_1 = W_2 = 0$ et $V \in L^\infty(\Omega)$. En effet, dans ce cas, il est connu que la dépendance de la constante dans la quantification du prolongement unique est de la forme $C \exp(C \|V\|_{L^\infty}^{\frac{2}{3}})$, voir [Mes91, DZZ08]. Cela coïncide avec notre estimation puisque $\gamma(\infty) = 2/3$.

Notre preuve ne permet pas de dériver une estimation jusqu'à la frontière de Ω . Cela est dû à un fait technique, venant d'une part de l'utilisation de l'argument de Wolff et d'autre part de l'utilisation de l'estimation de Carleman dans [DET23]. En effet, comme nous le verrons, en gros, l'argument de Wolff nécessite la possibilité de manipuler (le gradient de) la fonction poids dans l'estimation de Carleman. Mais l'estimation de Carleman dans [DET23], que nous utiliserons et revisiterons dans ce travail, exige que la frontière du domaine soit un ensemble de niveaux de la fonction poids. Ces deux conditions sont donc incompatibles et posent problème lorsqu'on travaille dans un voisinage de la frontière.

Nous souhaitons également souligner que les opérateurs de Schrödinger dans (4.1) incluent également la considération de potentiels $V \in W^{-1, d+\epsilon}(\Omega)$, où $\epsilon > 0$. En effet, tout potentiel de ce type peut être représenté sous la forme $V \equiv V_0 + \operatorname{div}(W)$, avec $V_0 \in L^{d+\epsilon}(\Omega) \subset L^{\frac{d}{2}+\epsilon}(\Omega)$ et $W \in L^{d+\epsilon}(\Omega, \mathbb{C}^d)$ (voir, par exemple, [AF03, Théorème 3.9]). Par conséquent, on peut réécrire Vu sous la forme $Vu = V_0u + \operatorname{div}(Wu) - W \cdot \nabla u$.

Plan du chapitre.

Nous commenterons brièvement la structure de ce chapitre. Dans la section suivante, nous rappellerons d'abord un résultat auxiliaire dû à T. Wolff dans [Wol92] (cf. Lemma 4.2.1), suivi de la présentation de certaines estimations améliorées de type Carleman L^p (cf. Théorème 4.18 dans la Section 4.2), inspirées de [DET23]. Ensuite, la Section 4.3 sera consacrée à la preuve de ces estimations de Carleman. Puis, dans la Section 4.4, nous établirons une quantification locale du prolongement unique dans un cadre géométrique spécifique (cf. Lemma 4.4.1). Enfin, dans la Section 4.5, nous utiliserons cela pour établir une estimation des trois boules, ce qui donne directement le résultat quantitatif de prolongement unique énoncé dans le théorème 4.1.1, après quelques manipulations classiques.

Notations.

Enfin, introduisons certaines des notations que nous utiliserons tout au long de ce chapitre :

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, nous posons $x = (x_1, x')$, où $x' = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, $B_x(r)$ désigne la boule centrée en $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$.
- Les notations ∇ et Δ désignent respectivement le gradient et le Laplacien par rapport à $x = (x_1, \dots, x_d)$, et $\nabla' = (\partial_2, \dots, \partial_d)$ et $\Delta' = \sum_{j=2}^d \partial_j^2$ sont, respectivement, le gradient vertical et les opérateurs Laplaciens verticaux.
- La transformée de Fourier est toujours prise par rapport à $x' = (x_2, \dots, x_d)$, et sa variable duale $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ est indexée par $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_d)$. Notons que pour une fonction f définie sur \mathbb{R}^d (ou une bande verticale $(X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}$) telle que $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$, $\widehat{f}(x_1, \cdot)$ désigne la transformée de Fourier partielle par rapport à x' , c'est-à-dire :

$$\widehat{f}(x_1, \xi') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} f(x_1, x') \, dx', \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (4.6)$$

- Pour un ensemble mesurable E de \mathbb{R}^d , nous notons par $|E|$ sa mesure de Lebesgue.

4.2 Résultats auxiliaires

Dans cette section, nous commencerons par rappeler le lemme de Wolff, puis nous présenterons une version affinée des estimations de Carleman L^p , inspirée du Théorème 3.1.1. Ces résultats sont essentiels pour la démonstration du théorème 4.1.1.

4.2.1 Lemme de Wolff

Nous commençons par présenter le lemme de Wolff, introduit dans [Wol92] :

Lemma 4.2.1 ([Wol92, Lemme 1]). *Soit μ une mesure positive dans \mathbb{R}^d ayant une décroissance plus rapide que exponentielle, au sens où*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \log(\mu\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \geq T\}) = -\infty. \quad (4.7)$$

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe compact. Alors, il existe une famille $(k_j)_{j \in J}$ d'éléments de \mathcal{C} et une famille de ensembles convexes disjoints $(E_{k_j})_{j \in J}$ contenus dans \mathbb{R}^d tels que les mesures $d\mu_{k_j}$, définies par $d\mu_{k_j}(x) = e^{k_j \cdot x} d\mu(x)$, sont concentrées dans E_{k_j} , c'est-à-dire,

$$\mu_{k_j}(\mathbb{R}^d \setminus (1+T)E_{k_j}) \leq \frac{1}{2} e^{-T/C_W} \|\mu_{k_j}\|, \quad \forall T \geq 0, \quad (4.8)$$

et tel que

$$\sum_j |E_{k_j}|^{-1} \geq C_W^{-1} |\mathcal{C}|, \quad (4.9)$$

où C_W est une constante positive ne dépendant que de d , et $(1+T)E_{k_j}$ désigne la dilation de E_{k_j} autour de son barycentre par un facteur de $1+T$.

Le lemme de Wolff, tel qu'énoncé dans [Wol92], est un élément clé dans la démonstration des résultats de prolongement unique pour les potentiels V et W_1 dans la classe d'intégrabilité optimale. Notons que dans [Wol92], W_2 n'est pas considéré.

4.2.2 Estimations de Carleman

Nous présentons d'abord les estimations de Carleman obtenues dans [DET23, Théorème 1.1] et présentées au Chapitre 3, Théorème 3.1.1 :

Theorem 4.2.2 ([DET23, Théorème 1.1], Théorème 3.1.1 Chapitre 3). *Soit $d \geq 3$. Considérons un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de classe C^3 , et des sous-ensembles ouverts non vides ω_0 et ω de Ω avec $\omega_0 \Subset \omega \Subset \Omega$. Soit $\varphi \in C^3(\bar{\Omega})$ telle que*

$$\forall x \in \partial\Omega, \varphi(x) = 0 \text{ et } \partial_n \varphi(x) < 0, \quad (4.10)$$

et il existe $\alpha, \beta > 0$ pour lesquels

$$\inf_{\bar{\Omega} \setminus \omega_0} |\nabla \varphi| > \alpha, \quad (4.11)$$

et

$$\begin{aligned} \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega_0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \text{ avec } |\nabla \varphi(x)| = |\xi| \text{ et } \nabla \varphi(x) \cdot \xi = 0, \\ (\text{Hess } \varphi(x)) \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \varphi(x) + (\text{Hess } \varphi(x)) \xi \cdot \xi \geq \beta |\nabla \varphi(x)|^2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où $\text{Hess } \varphi$ désigne la matrice Hessienne de φ .

Alors il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ (dépendant seulement de $\alpha, \beta, \|\varphi\|_{C^3(\bar{\Omega})}$, et de la configuration géométrique de Ω, ω , et ω_0) tels que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant

$$-\Delta u = f_2 + f_{2^{*'}} + \text{div } F \quad \text{dans } \mathbb{D}'(\Omega), \quad (4.13)$$

avec $(f_2, f_{2^{*'}}, F)$ satisfaisant

$$f_2 \in L^2(\Omega), \quad f_{2^{*'}} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad (4.14)$$

nous avons, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau \varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau \varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|e^{\tau \varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|e^{\tau \varphi} F\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|e^{\tau \varphi} f_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau \varphi} u\|_{L^2(\omega)} + \tau^{\frac{3}{4}} \|e^{\tau \varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} &\leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|e^{\tau\varphi} F\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Remarque 4.2.3. Les notations 2^* et $2^{*'}$ proviennent de l'injection de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$, avec $2^* = 2d/(d-2)$ et $L^{2^{*'}}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, avec $2^{*' } = 2d/(d+2)$.

Pour obtenir le théorème 4.1.1, nous prouvons la version affinée du théorème 4.2.2, dont la démonstration sera donnée dans la Section 4.3.

Theorem 4.2.4. Soit $d \geq 3$. Considérons un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et des sous-ensembles ouverts non vides ω_0 et ω de Ω avec $\omega_0 \Subset \omega \Subset \Omega$. Soit $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$ satisfaisant les conditions (4.11)–(4.12).

Alors, pour tout sous-ensemble compact K de Ω , il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ (dépendant seulement de α , β , $\|\varphi\|_{C^3(\overline{\Omega})}$, et de la configuration géométrique de Ω , ω , ω_0 et K) tels que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant $\text{supp } u \subset K$ et (4.13) avec $(f_2, f_{2*'}, F = F_2 + F_{2*'})$ satisfaisant

$$f_2 \in L^2(\Omega), \quad f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F_2 \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{et} \quad F_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad (4.17)$$

nous avons, pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|e^{\tau\varphi} F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|e^{\tau\varphi} F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2d}} \left(\|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|e^{\tau\varphi} F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{H^1(\omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

et, pour tout ensemble mesurable E de Ω ,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau|E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} &\left(\tau \|e^{\tau\varphi} u\|_{L^2(E)} + \|e^{\tau\varphi} \nabla u\|_{L^2(E)} \right) \\ &\leq C \left(\|e^{\tau\varphi} f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|e^{\tau\varphi} F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \left(\|e^{\tau\varphi} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|e^{\tau\varphi} F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|e^{\tau\varphi} F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} \right) + \tau^{\frac{3}{2}} \|e^{\tau\varphi} u\|_{H^1(\omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Remarque 4.2.5. Le théorème 4.2.4 présente plusieurs nouvelles caractéristiques par rapport au théorème 4.2.2 :

- L'une des principales différences entre le théorème 4.2.4 et le théorème 4.2.2 est que le théorème 4.2.4 permet un terme source de la forme $\text{div}(F_{2*'})$ avec $F_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et quantifie l'estimation sur la solution u de (4.13) en fonction de la norme $L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ de $F_{2*'}$. Notons que la norme $L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ de $F_{2*'}$ apparaissant dans les membres de droite de (4.18)–(4.19) apparaît avec une puissance du paramètre de Carleman qui est strictement inférieure à celle apparaissant pour les normes $L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$ de F_2 . En quelque sorte, pour $F_{2*'}$, la perte d'ellipticité de l'opérateur de Laplace conjugué $e^{\tau\varphi} \Delta(e^{-\tau\varphi} \cdot)$ apparaît dans la norme $L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d)$ de $F_{2*'}$ et non dans sa norme $L^2(\Omega; \mathbb{C}^d)$.

- L'estimation (4.19) présente également une estimation de la norme H^1 de u sur des ensembles mesurables E . Des améliorations similaires apparaissent dans le travail [Wol92, Section 6]. Notons que ces estimations sont particulièrement pertinentes lorsque $|E| \lesssim \tau^{-d}$, c'est-à-dire sur des sous-ensembles mesurables petits, pour lesquels on obtient de (4.19) une estimation sur $\tau^{\frac{7}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi}u\|_{L^2(E)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi}\nabla u\|_{L^2(E)}$. Cette estimation est raisonnable et doit être comparée au terme $\tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}$ car, d'après l'estimation de Hölder,

$$\tau^{\frac{7}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi}u\|_{L^2(E)} \leq \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(E)} (\tau|E|^{\frac{1}{d}}) \lesssim \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}} \|e^{\tau\varphi}u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}.$$

Cependant, notons que pour les grands ensembles E , l'estimation dans (4.19) de la norme L^2 de $e^{\tau\varphi}u$ est pire que l'estimation donnée par (4.18).

- Concernant les termes d'observation, c'est-à-dire les termes impliquant des normes sur ω , les estimations (4.18) et (4.19) impliquent la norme $H^1(\omega)$ de u au lieu de normes plus faibles comme dans (4.15) et (4.16). En fait, nous l'écrivons pour plus de commodité, car cela n'aura aucun impact sur le résultat énoncé dans le théorème 4.1.1.
- Dans ce travail, nous nous concentrons sur la dérivation d'estimations locales de Carleman (en d'autres termes, nous considérons uniquement des fonctions u à support compact). Néanmoins, il convient de noter que, suivant la démonstration du théorème 4.2.2 dans [DET23] (en particulier la sous-section 6.4), le théorème 4.2.4 peut être étendu aux fonctions $u \in H^1(\Omega)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet possible-ment non homogènes.

4.3 Estimations de Carleman améliorées : Preuve du théorème 4.2.4

Cette section est consacrée à la preuve du théorème 4.2.4.

Bien que le théorème 4.2.4 semble assez proche du théorème 4.2.2, il sera nécessaire de revoir en profondeur la preuve du théorème 4.2.2 donnée dans [DET23] et d'incorporer certaines modifications en cours de route.

L'étape clé de la preuve du théorème 4.2.2 consiste à démontrer des estimations appropriées sur l'inverse d'un opérateur de la forme

$$\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2 - 2\tau \partial_1 + \tau^2, \quad (4.20)$$

dans une bande verticale

$$\Omega = (X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \text{ avec } X_0 < 0 < X_1 \text{ et } \max\{|X_0|, |X_1|\} \leq 1, \quad (4.21)$$

où les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfont $\lambda_1 = 0$,

$$\exists c_0 > 0, \quad \forall x_1 \in [X_0, X_1], \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{c_0^2} |\xi|^2 \leq \sum_{j=1}^d (1 - x_1 \lambda_j) |\xi_j|^2 \leq c_0^2 |\xi|^2, \quad (4.22)$$

et

$$0 < m_* \leq \min_{j \in \{2, \dots, d\}} \lambda_j \leq \max_{j \in \{2, \dots, d\}} \lambda_j \leq M_*. \quad (4.23)$$

Ici, $\tau \geq 1$ joue le rôle du paramètre de Carleman, puisque l'opérateur dans (4.20) coïncide avec

$$e^{\tau x_1} \left(\Delta - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2 \right) (e^{-\tau x_1} \cdot).$$

Ceci constitue vraiment l'étape principale de la preuve du théorème 4.2.2, car on peut ensuite utiliser le caractère local des estimations de Carleman pour retrouver le théorème 4.2.2 dans toute sa généralité (voir [DET23] pour plus de détails ; cette stratégie sera brièvement rappelée dans la Section 4.3.2).

Notre preuve du théorème 4.2.4 suit la même démarche, et l'estimation clé est une estimation affinée de l'inverse de l'opérateur (4.20) dans une bande, ce qui sera fait dans la sous-section 4.3.1. Une fois ceci accompli, la preuve du théorème 4.2.4 pourra être déduite de manière similaire à [DET23] via un processus de localisation adéquat, qui est rapidement rappelé dans la sous-section 4.3.2 pour la commodité du lecteur.

4.3.1 Étape principale : Estimations de Carleman pour les solutions dans une bande.

Dans toute cette section, Ω est une bande de la forme $(X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}$ comme dans (4.21).

Notre objectif dans cette sous-section est de prouver l'estimation de Carleman suivante, qui est une version affinée de [DET23, Théorème 2.2].

Theorem 4.3.1. *Soit $\Omega = (X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}$ comme dans (4.21), avec $d \geq 3$, et supposons que les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, d\}} \in \mathbb{R}^d$ satisfassent $\lambda_1 = 0$, (4.22) et (4.23). Alors il existe des constantes $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ dépendant de c_0 , m_* et M_* , tous indépendants de X_0, X_1 , tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$, pour tout $w \in H^1(\Omega)$ à support compact dans Ω et satisfaisant*

$$\Delta w - x_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_j^2 w - 2\tau \partial_1 w + \tau^2 w = f_2 + f_{2*'} + \operatorname{div}(F_2 + F_{2*'}), \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.24)$$

avec

$$f_2 \in L^2(\Omega), \quad f_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F_2 \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{et} \quad F_{2*'} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad (4.25)$$

on a

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + \tau^{\frac{1}{2}} \|F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

et, pour tous les sous-ensembles mesurables E de Ω ,

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau |E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau \|w\|_{L^2(E)} + \|\nabla w\|_{L^2(E)} \right) \\ & \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

La démonstration du théorème 4.3.1 est bien sûr très proche de celle du [DET23, Théorème 2.2], puisque le théorème 4.3.1 est une version améliorée du Théorème 2.2 dans [DET23] en ce qui concerne les mêmes points que dans la Remarque 4.2.5.

Elle nécessitera plusieurs étapes :

1. Construction d'une paramétrice explicite donnant w résolvant (4.24) en termes des termes sources $(f_2, f_{2^{*'}}, F = F_2 + F_{2^{*'}})$, basée sur [DET23, Proposition 3.1], que nous rappellerons dans la Sous-sous-section 4.3.1.1.
2. Estimations des opérateurs impliqués dans la paramétrice, qui correspondra également principalement à celles de la Section 6 de [DET23], que nous rappellerons également. De nouvelles estimations seront également nécessaires pour obtenir les estimations complètes du théorème 4.3.1, reposant sur la décomposition de $F_{2^{*'}}$ en ses composantes de basse et haute fréquence, voir la Sous-sous-section 4.3.1.2.
3. Une combinaison appropriée des estimations sur les divers opérateurs impliqués dans la paramétrice, voir la sous-section 4.3.1.3.

En particulier, nous nous appuyerons sur la paramétrice explicite suivant donnant w comme solution de (4.24) en termes des termes sources $(f_2, f_{2^{*'}}, F = F_2 + F_{2^{*'}})$.

4.3.1.1 Une paramétrice explicite

Nous utilisons la paramétrice construite dans le travail [DET23]. Pour ce faire, nous introduisons la fonction $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\psi(x_1, \xi') = \sqrt{\sum_{j=2}^d (1 - x_1 \lambda_j) \xi_j^2}, \quad x_1 \in [X_0, X_1], \quad \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad (4.28)$$

Selon [DET23, Proposition 3.1], nous avons alors la paramétrice explicite suivante :

Proposition 4.3.2 ([DET23, Proposition 3.1]). *Dans le même cadre que le théorème 4.3.1. Pour tout $\tau \geq 1$, si w est à support compact et satisfait (4.24) avec les termes sources $(f_2, f_{2^{*'}}, F_2, F_{2^{*'}})$ comme dans (4.25), alors*

$$w = K_{\tau,0}(f_2 + f_{2^{*'}}) + \sum_{j=1}^d K_{\tau,j}((F_2 + F_{2^{*'}}) \cdot e_j) + R_\tau(w), \quad (4.29)$$

où la famille de vecteurs $(e_j)_{j \in \{1, \dots, d\}}$ est la base canonique de \mathbb{R}^d et, en utilisant la transformée de Fourier partielle, les opérateurs $K_{\tau,j}$, pour $j \in \{0, \dots, d\}$, et R_τ sont définis pour f dépendant de $(x_1, x') \in \Omega$ par

$$\widehat{K_{\tau,j}f}(x_1, \xi') = \int_{y_1 \in (X_0, X_1)} k_{\tau,j}(x_1, y_1, \xi') \widehat{f}(y_1, \xi') \, dy_1, \quad (x_1, \xi') \in \Omega, \quad (4.30)$$

$$\widehat{R_\tau f}(x_1, \xi') = \int_{y_1 \in (X_0, X_1)} r_\tau(x_1, y_1, \xi') \widehat{f}(y_1, \xi') \, dy_1, \quad (x_1, \xi') \in \Omega, \quad (4.31)$$

avec des noyaux donnés, pour $(x_1, y_1, \xi') \in [X_0, X_1]^2 \times \mathbb{R}^{d-1}$, par

$$k_{\tau,0}(x_1, y_1, \xi') = -1_{\psi(x_1, \xi') > \tau} \int_{X_0}^{\min\{x_1, y_1\}} e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{\tilde{y}_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1 \\ + 1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} 1_{y_1 > x_1} \int_{x_1}^{y_1} e^{-\tau(y_1 - x_1) + \int_{x_1}^{\tilde{y}_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1, \quad (4.32)$$

$$k_{\tau,1}(x_1, y_1, \xi') = -1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} 1_{y_1 > x_1} e^{-\tau(y_1 - x_1) + \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} \\ + 1_{\psi(x_1, \xi') > \tau} 1_{y_1 < x_1} e^{\tau(x_1 - y_1) - \int_{y_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} + k_{\tau,0}(x_1, y_1, \xi')(\tau + \psi(y_1, \xi')), \quad (4.33)$$

$$k_{\tau,j}(x_1, y_1, \xi') = i\xi_j k_{\tau,0}(x_1, y_1, \xi'), \quad j \in \{2, \dots, d\}, \quad (4.34)$$

$$r_\tau(x_1, y_1, \xi) = k_{\tau,0}(x_1, y_1, \xi') \partial_1 \psi(y_1, \xi'). \quad (4.35)$$

La clé pour prouver la Proposition 4.3.2 est de remarquer que la transformée de Fourier partielle de l'opérateur dans (4.20) est de la forme

$$(\partial_1 - \tau)^2 - \sum_{j=2}^d |\xi_j|^2 (1 - x_1 \lambda_j) = (\partial_1 - \tau - \psi(x_1, \xi')) (\partial_1 - \tau + \psi(x_1, \xi')) - \partial_1 \psi(x_1, \xi').$$

Il est alors clair que l'ensemble dans lequel les estimations peuvent se dégénérer est l'ensemble $\{(x_1, \xi') \in (X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \text{ avec } \psi(x_1, \xi') = \tau\}$. En conséquence, il est intéressant d'utiliser un type d'opérateur de projection $P_{hf,\tau}$ sur les composantes haute fréquence agissant sur $L^2(\Omega)$ et donné en Fourier, pour $f \in L^2(\Omega)$, par la formule

$$\widehat{P_{hf,\tau} f}(x_1, \xi') = \eta \left(\frac{\psi(X_1, \xi')}{\tau} \right) \hat{f}(x_1, \xi'), \quad (x_1, \xi') \in (X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad (4.36)$$

où η est une fonction lisse dans $\mathcal{C}^\infty([0, \infty), \mathbb{R})$, prenant la valeur 0 dans $[0, 2]$, prenant la valeur 1 en dehors de $[0, 3]$, et bornée par 1.

Notons que puisque l'opérateur $P_{hf,\tau}$ correspond à une convolution dans la variable x' avec un noyau L^1 $x' \mapsto \tau^{d-1} \eta_1(\tau x')$ où $\eta_1(z') = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{z' \cdot \xi'} \eta(\psi(X_1, \xi')) d\xi'$, on peut vérifier à l'aide d'un simple argument de changement d'échelle que, pour tout $p \in [1, \infty]$, il existe C_p tel que pour tout $f \in L^p(\Omega)$,

$$\|P_{hf,\tau} f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Cet opérateur présente l'avantage de localiser dans les fréquences ξ' telles que pour tout $x_1 \in (X_0, X_1)$, $\psi(x_1, \xi') \geq \psi(X_1, \xi') \geq 2\tau$, et donc loin de l'ensemble critique $\{(x_1, \xi') \in (X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \text{ avec } \psi(x_1, \xi') = \tau\}$. Il est également facile de vérifier qu'il commute avec tous les opérateurs $(K_{\tau,j})_{j \in \{0, \dots, d\}}$ et R_τ .

Cet opérateur peut être utilisé en particulier sur F_{2*}' , que nous écrivons comme

$$F_{2*}' = P_{hf,\tau} F_{2*}' + (I - P_{hf,\tau}) F_{2*}'.$$

En utilisant les notations F_{2*}' pour désigner les dernières $d - 1$ composantes de F_{2*}' et div' pour désigner l'opérateur de divergence sur $\mathbb{R}_{x'}^{d-1}$, il est facile de vérifier que $\text{div}'((I - P_{hf,\tau}) F_{2*}')$ appartient à $L^2(\Omega)$, et ainsi l'identité (4.29) peut être écrite comme

$$w = K_{\tau,0}(f_2 + f_{2*}' + \text{div}'((I - P_{hf,\tau}) F_{2*}')) + K_{\tau,1}((F_2 + P_{hf,\tau} F_{2*}') \cdot e_1) \\ + K_{\tau,1}(((I - P_{hf,\tau}) F_{2*}') \cdot e_1) + \sum_{j=2}^d K_{\tau,j}((F_2 + P_{hf,\tau} F_{2*}') \cdot e_j) + R_\tau(w). \quad (4.37)$$

C'est l'une des formules que nous utiliserons par la suite. Notons qu'elle implique tous les opérateurs $K_{\tau,j}$ et R_τ apparaissant dans la Proposition 4.3.2, de sorte que le théorème 4.3.1 sera dérivé en utilisant les estimations connues sur ces opérateurs obtenues dans [DET23] et les gains appropriés que nous aurons en considérant comment ces opérateurs agissent à basse et haute fréquence.

4.3.1.2 Bornes des opérateurs $K_{\tau,j}$

Notre preuve sera basée sur les estimations pour chacun des opérateurs $(K_{\tau,j})_{j \in \{0, \dots, d\}}$.

Estimations connues. Plusieurs estimations ont déjà été obtenues dans [DET23] (cf Chapitre 3) et sont rappelées ici :

Proposition 4.3.3 (Proposition 3.6.2 dans Chapitre 3). *Dans le même cadre que le théorème 4.3.1. Il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant seulement de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)) tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$, pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} \|K_{\tau,0}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|K_{\tau,0}f\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 \widehat{K_{\tau,0}f}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \|\nabla' K_{\tau,0}f\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

et, pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|K_{\tau,0}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|K_{\tau,0}f\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|\partial_1 \widehat{K_{\tau,0}f}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla' K_{\tau,0}f\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

avec

$$\Omega_{1,\tau} = \{(x_1, \xi') \in (X_0, X_1) \times \mathbb{R}^{d-1}, \text{ avec } \psi(x_1, \xi') \neq \tau\}. \quad (4.40)$$

Proposition 4.3.4 (Propositions 3.6.7 et 3.6.10 dans Chapitre 3). *Dans le même cadre que le théorème 4.3.1. Il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant seulement de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)) tels que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, pour tout $\tau \geq \tau_0$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$,*

$$\tau^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \|K_{\tau,j}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|K_{\tau,j}f\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 \widehat{K_{\tau,j}f}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{-\frac{1}{2}} \|\nabla' K_{\tau,j}f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 4.3.5 (Proposition 3.6.13 dans Chapitre 3). *Dans le même cadre que le théorème 4.3.1. Il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant seulement de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)) tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$ et pour tout $f \in H^1(\Omega)$,*

$$\tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|R_\tau f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{2}} \|R_\tau f\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|\partial_1 \widehat{R_\tau f}\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla' R_{\tau,0}f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla' f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il est naturel d'obtenir de meilleures estimations pour les opérateurs $(P_{h,f,\tau} K_{\tau,j})_{j \in \{0, \dots, d\}}$ par rapport aux opérateurs $(K_{\tau,j})_{j \in \{0, \dots, d\}}$, puisque l'opérateur de projection haute fréquence $P_{h,f,\tau}$ est une projection qui projette sur la partie où l'opérateur conjugué dans (4.20) est elliptique. Bien que de telles estimations soient connues et plutôt classiques dans le cadre hilbertien, cela doit être précisé lorsqu'il s'agit d'obtenir des estimations sur ces opérateurs de $L^p(\Omega)$ à $L^q(\Omega)$ lorsque p ou q différent de 2 (nous renvoyons à [KT01] pour des estimations de ce type dans un contexte étroitement lié). C'est précisément notre objectif suivant.

Estimations pour les hautes fréquences. Nous listons ci-dessous les nouvelles estimations que nous obtenons pour les opérateurs $(K_{\tau,j})_{j \in \{0, \dots, d\}}$ aux hautes fréquences, à comparer avec celles des Propositions 4.3.3 et 4.3.4. Celles-ci seront démontrées par la suite.

Proposition 4.3.6. *Dans le même cadre que le théorème 4.3.1. Il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant seulement de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)) tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$, pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$,*

$$\tau \|P_{h,f,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla P_{h,f,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}, \quad (4.41)$$

et, pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$\tau \|P_{h,f,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^2 \|P_{h,f,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|\nabla P_{h,f,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.42)$$

Remarque 4.3.7. *Il est intéressant de comparer les estimations dans la Proposition 4.3.6 avec celles de la Proposition 4.3.3. En particulier, on observe que pour les estimations hilbertiennes, c'est-à-dire pour la norme $\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$ de $P_{h,f} K_{\tau,0}$, les estimations (4.42) sont meilleures que celles dans (4.39) pour $K_{\tau,0}$ par un facteur $\tau^{\frac{1}{2}}$. Cette amélioration est plus faible pour les estimations dans les normes $\mathcal{L}(H^1(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ et $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), H^1(\Omega))$ de $P_{h,f} K_{\tau,0}$, mais reste meilleure d'un facteur $\tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d}}$ par rapport aux normes $\mathcal{L}(H^1(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ et $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), H^1(\Omega))$ de $K_{\tau,0}$.*

Proposition 4.3.8. *Dans le même cadre que le théorème 4.3.1. Il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et dépendant seulement de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)), tels que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, pour tout $\tau \geq \tau_0$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$,*

$$\|P_{h,f,\tau} K_{\tau,j} f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau \|P_{h,f,\tau} K_{\tau,j} f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla P_{h,f,\tau} K_{\tau,j} f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.43)$$

Remarque 4.3.9. *Ici encore, comme dans la remarque 4.3.7, en comparant les estimations dans la Proposition 4.3.8 avec celles de la Proposition 4.3.4, nous voyons que, pour $j \geq 1$, il y a encore un gain d'un facteur $\tau^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2d}}$ lorsqu'on considère la norme $\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de l'opérateur $P_{h,f,\tau} K_{\tau,j}$ par rapport à la norme de $K_{\tau,j}$, et un facteur $\tau^{\frac{1}{2}}$ lorsqu'on considère les normes $\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$.*

Avant de passer aux démonstrations des Propositions 4.3.6 et 4.3.8, nous soulignons que chaque opérateur $K_{\tau,j}$ pour $j \in \{0, \dots, d\}$ est un opérateur de multiplication de Fourier dans la variable verticale. Nous pouvons donc utiliser le Théorème de Restriction de Stein-Tomas [Tom75] pour estimer leur comportement en tant qu'opérateur de $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ à $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$ pour certaines valeurs de p et q . Cette approche a été utilisée pour montrer, par exemple, la Proposition 3.6.2 avec une paramétrisation appropriée de l'espace de phase $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ comme $\xi' \mapsto (\psi(a, \xi'), \xi'/\psi(a, \xi'))$ pour ψ comme dans (4.28) et $a \in [X_0, X_1]$ adapté aux noyaux apparaissant dans la Proposition 4.3.2. Les détails complets se trouvent dans Section 3.5 du chapitre 3.

Démonstration de la Proposition 4.3.6. Compte tenu des résultats de la Proposition 3.5.4, nous estimons d'abord les normes pondérées de $k_{\tau,0}(x_1, y_1, \cdot)$ pour x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$ (voir la définition de $k_{\tau,0}$ dans (4.32)). Nous identifions également $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ avec les paires $(\lambda, \omega') \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma_{x_1}$, où $\Sigma_{x_1} = \{\omega' \in \mathbb{R}^{d-1}, \psi(x_1, \omega') = 1\}$, par la formule $\xi' = \lambda \omega'$, ou

équivalent, $\lambda = \psi(x_1, \xi')$ et $\omega' = \xi'/\psi(x_1, \xi')$. Avec un léger abus de notation, nous notons $k_{\tau,0}$ de manière similaire qu'il soit écrit en termes de $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$ ou en termes de $(\lambda, \omega') \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma_{x_1}$.

D'après [DET23, Lemme 6.4], il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$, $\lambda > \tau$, et tous $x_1, y_1 \in [X_0, X_1]$, nous avons

$$\|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq \begin{cases} \frac{C}{\lambda} e^{-(\lambda-\tau)|x_1-y_1|-\lambda(x_1-y_1)^2/C_1}, & \text{si } y_1 < x_1, \\ \frac{C}{\lambda} e^{-(\lambda/C+\tau)|y_1-x_1|}, & \text{si } y_1 > x_1. \end{cases} \quad (4.44)$$

En raisonnant comme dans [DET23, Lemme 6.6], nous déduisons

$$\left(\int_{2\tau}^{\infty} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C e^{-\tau|y_1-x_1|} \tau^{-\frac{1}{d}}. \quad (4.45)$$

En conséquence, en utilisant la Proposition 3.5.4, l'inégalité de Young et le fait que pour tout $x_1 \in [X_0, X_1]$, $\lambda = \psi(x_1, \xi') \geq \psi(X_1, \xi') \geq 2\tau$ en raison de (4.23), nous avons, pour $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$ et $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| \|P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f(x_1, \cdot)\|_{L_{x'}^2(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} \\ &\leq \left\| \int_{X_0}^{X_1} \left(\int_{2\tau}^{\infty} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L_{y'}^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} \\ &\leq C \left\| \left(y_1 \mapsto e^{-\tau|y_1|} \tau^{-\frac{1}{d}} \right) \star_{y_1} \|f(y_1, \cdot)\|_{L_{y'}^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} \\ &\leq C \left\| y_1 \mapsto e^{-\tau|y_1|} \tau^{-\frac{1}{d}} \right\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \left\| \|f(y_1, \cdot)\|_{L_{y'}^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L_{y_1}^{\frac{2d}{d+2}}(X_0, X_1)} = C \tau^{-1} \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

De même, nous obtenons que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et $\tau \geq 1$,

$$\|P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \tau^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.47)$$

De même, en argumentant comme dans [DET23, Lemme 6.6], nous obtenons

$$\left(\int_{2\tau}^{\infty} \|\lambda \omega' k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \omega')\|_{L_{\omega'}^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |y_1 - x_1|^{-1+\frac{1}{d}}. \quad (4.48)$$

En utilisant la Proposition 3.5.4, le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev en 1-d, nous obtenons alors, pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$ et $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla' P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| \left\| \nabla' P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f(x_1, \cdot) \right\|_{L_{x'}^2(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} \\
&\leq \left\| \int_{X_0}^{X_1} \left(\int_{2\tau}^{\infty} \|\lambda k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \|f(y_1, \cdot)\|_{L_{y'}^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} \\
&\leq C \left\| \left(y_1 \mapsto |y_1|^{-1+\frac{1}{d}} \right) \star_{y_1} \|f(y_1, \cdot)\|_{L_{y'}^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} \\
&\leq C \left\| \|f(y_1, \cdot)\|_{L_{y'}^{\frac{2d}{d+2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L_{y_1}^{\frac{2d}{d+2}}(X_0, X_1)} = C \|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Nous concluons l'estimation (4.41) en combinant (4.46), (4.49) et (4.38) pour l'estimation de $\partial_1 P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f$ pour $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$.

Pour conclure (4.42), en considération de (4.47), nous avons seulement besoin d'estimer les normes $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ et $\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$ de $P_{hf,\tau} K_{\tau,0}$. Celles-ci sont plus simples car l'estimation (4.44) indique qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$, $\lambda > 2\tau$, et tous $x_1, y_1 \in [X_0, X_1]$, nous avons

$$(\tau + \lambda) \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq C e^{-\tau|x_1-y_1|} \tag{4.50}$$

Nous obtenons alors immédiatement, par l'inégalité de Young, que pour $f \in L^2(\Omega)$ et $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\tau \|P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla' P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \tau \left\| \|P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f(x_1, \cdot)\|_{L_{x'}^2(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} + \left\| \|\nabla' P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f(x_1, \cdot)\|_{L_{x'}^2(\mathbb{R}^{d-1})} \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} \\
&\leq C \left\| \int_{X_0}^{X_1} e^{-\tau|x_1-y_1|} \|f(y_1, \cdot)\|_{L_{y'}^2(\mathbb{R}^{d-1})} dy_1 \right\|_{L_{x_1}^2(X_0, X_1)} \leq C \tau^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Cette estimation, ainsi que (4.47) et l'estimation (4.39) pour l'estimation de $\partial_1 P_{hf,\tau} K_{\tau,0} f$ pour $f \in L^2(\Omega)$, donne l'estimation (4.42). \square

Démonstration de la Proposition 4.3.8. Nous ne faisons qu'esquisser la preuve de la Proposition 4.3.8 car elle repose sur des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de la Proposition 4.3.6.

Expliquons les principales étapes pour obtenir l'estimation (4.43). En utilisant [DET23, Lemma 6.8], nous obtenons une constante $C > 0$ indépendante de X_0, X_1 (et ne dépendant que de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)), telle que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$, et $\lambda > 0$,

$$\|k_{\tau,1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq C e^{-|\tau-\lambda||y_1-x_1|-\lambda(y_1-x_1)^2/C} + C(\tau + \lambda) \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}. \tag{4.52}$$

et, pour $j \in \{2, \dots, d\}$,

$$\|k_{\tau,j}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq C \lambda \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}. \tag{4.53}$$

L'estimation (4.48) permet alors de démontrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \geq 1$, $j \in \{2, \dots, d\}$, et tous $x_1, y_1 \in [X_0, X_1]$,

$$\left(\int_{2\tau}^{\infty} \|k_{\tau,j}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C|y_1 - x_1|^{-1+\frac{1}{d}}. \quad (4.54)$$

De manière similaire, on peut déduire de (4.52) que cela est également valable pour $j = 1$.

En utilisant la Proposition 3.5.4 et le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev, nous en déduisons qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, pour tout $\tau \geq 1$ et pour tout $f \in L^2(\Omega)$,

$$\|P_{hf,\tau}K_{\tau,j}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Les estimations sur les normes $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ de $P_{hf,\tau}K_{\tau,j}$ et $\nabla'P_{hf,\tau}K_{\tau,j}$ peuvent être réalisées plus facilement et sont laissées au lecteur, et la norme $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ de $\partial_1P_{hf,\tau}K_{\tau,j}$ suit de la Proposition 4.3.4. \square

Estimations à basse fréquence. Dans nos arguments qui suivent, nous devons également comprendre le comportement de l'opérateur $(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$ et montrer comment il agit sur $L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$:

Proposition 4.3.10. *Dans le cadre du théorème 4.3.1. Il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ indépendants de X_0, X_1 (et ne dépendant que de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)) tels que pour tout $\tau \geq \tau_0$ et pour tout $f \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$,*

$$\begin{aligned} & \|(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}f\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}\|(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}f\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \|\partial_1(I - \widehat{P_{hf,\tau}})K_{\tau,1}f\|_{L^2(\Omega_{1,\tau})} + \tau^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2d}}\|\nabla'(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}f\|_{L^2(\Omega)} \leq C\tau\|f\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

où $\Omega_{1,\tau}$ est l'ensemble défini dans (4.40).

Démonstration. De manière similaire aux preuves précédentes, nous utiliserons des bornes appropriées sur le noyau $k_{\tau,1}$. Notamment, nous utiliserons la borne (4.52), la borne (4.44) et la borne suivante, obtenue dans [DET23, Lemma 6.4] : Il existe des constantes $C > 0$ et $C_1 > 0$ indépendantes de X_0, X_1 (et ne dépendant que de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)) telles que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$, et $\lambda \leq \tau$, le noyau $k_{\tau,0}$ défini dans (4.32) satisfait

$$\|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq \begin{cases} C|y_1 - x_1|e^{-\tau|y_1 - x_1|}, & \text{si } \lambda|y_1 - x_1| \leq 1, \\ \frac{C}{\lambda}e^{-(\tau-\lambda)|y_1 - x_1| - \lambda(y_1 - x_1)^2/C_1}, & \text{si } \lambda|y_1 - x_1| \geq 1. \end{cases} \quad (4.56)$$

En suivant [DET23, Lemma 6.9], nous pouvons alors obtenir qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de X_0, X_1 (et ne dépendant que de c_0, m_* et M_* dans (4.22) et (4.23)) telle que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\lambda>0} \|k_{\tau,1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{1}{|x_1 - y_1|^{1-\frac{1}{d}}} + \tilde{k}_{\tau,1}(x_1 - y_1), \\ & \text{avec } \tilde{k}_{\tau,1} \in L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}) \text{ et } \|\tilde{k}_{\tau,1}\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R})} \leq C\tau^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2d}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

En utilisant ensuite la Proposition 3.5.4, le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev et l'inégalité de Young, nous déduisons que la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^2(\Omega))$ de $(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$ est bornée par $C\tau^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2d}}$.

Pour obtenir une borne sur la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$ (rappelons que $I - P_{hf,\tau}$ se localise à la fréquence ξ' telle que $\psi(X_1, \xi') \leq 3\tau$), nous montrons d'abord qu'il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{3c_1\tau} \|k_{\tau,1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C \int_0^{3c_1\tau} e^{-|\tau-\lambda||y_1-x_1|-\lambda(y_1-x_1)^2/C} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda + \tau C \int_0^{3c_1\tau} \|k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \\ & \leq C\tau|x_1 - y_1|^{-1+\frac{2}{d}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé [DET23, Lemma 6.6] pour borner le second terme à droite et c_1 est défini par

$$c_1 = \sup_{x_1 \in [X_0, X_1]} \sup\{\psi(x_1, \xi'), \text{ t.q. } \psi(X_1, \xi') = 1\}.$$

En utilisant ensuite la Proposition 3.5.4 et le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev, la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$ est bornée par $C\tau$.

Pour l'estimation de la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $\nabla'(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$, le point crucial est de prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1, y_1 \in [X_0, X_1]$, et pour tout $\tau \geq 1$,

$$\left(\int_0^{3c_1\tau} \|\lambda\omega'k_{\tau,1}(x_1, y_1, \lambda, \omega')\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\tau^{\frac{5}{4}-\frac{1}{2d}}|x_1 - y_1|^{-1+\frac{1}{d}}. \quad (4.58)$$

En utilisant encore une fois la Proposition 3.5.4 et l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $\nabla'(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$ est bornée par $\tau^{\frac{5}{4}-\frac{1}{2d}}$.

Pour prouver l'inégalité (4.58), nous utilisons [DET23, Lemma 6.8]. En utilisant (4.52), nous pouvons borner le terme sur le côté gauche comme suit

$$C \left(\int_0^{3c_1\tau} e^{-|\tau-\lambda||y_1-x_1|-\lambda(y_1-x_1)^2/C} \lambda^{3-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} + C\tau \left(\int_0^{3c_1\tau} \|\lambda\omega'k_{\tau,0}(x_1, y_1, \lambda, \omega')\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puis, en utilisant [DET23, Lemma 6.6], nous obtenons l'estimation souhaitée sur le second terme. Un calcul simple donne la même borne sur le premier terme.

Pour estimer la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $\partial_1(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$, c'est plus technique. Tout d'abord, nous rappelons que le noyau de l'opérateur $\partial_1 K_{\tau,1}$, noté par $k_{\tau,1,\partial_1}$, prend la forme suivante : pour tout $(x_1, \xi') \in \Omega_{1,\tau}$ et tout $y_1 \in (X_0, X_1)$,

$$\begin{aligned} k_{\tau,1,\partial_1}(x_1, y_1, \xi') &= -1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} 1_{y_1 > x_1} (\tau - \psi(x_1, \xi')) e^{-\tau(y_1-x_1) + \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} \\ &+ 1_{\tau < \psi(x_1, \xi')} 1_{y_1 < x_1} (\tau - \psi(x_1, \xi')) e^{\tau(x_1-y_1) - \int_{y_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} \\ &+ k_{\tau,0,\partial_1}(x_1, y_1, \xi') (\tau + \psi(y_1, \xi')), \end{aligned} \quad (4.59)$$

où $k_{\tau,0,\partial_1}$ est défini pour x_1, y_1 dans $[X_0, X_1]$ et $\xi' \in \mathbb{R}^{d-1}$, par

$$\begin{aligned} k_{\tau,0,\partial_1}(x_1, y_1, \xi') &= -1_{x_1 < y_1} e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} \\ &\quad - 1_{\psi(x_1, \xi') > \tau} (\tau - \psi(x_1, \xi')) \int_{X_0}^{\min\{x_1, y_1\}} e^{-\tau(y_1 - x_1) - \int_{x_1}^{x_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1 \\ &\quad + 1_{\psi(x_1, \xi') \leq \tau} 1_{x_1 < y_1} (\tau - \psi(x_1, \xi')) \int_{x_1}^{y_1} e^{-\tau(y_1 - x_1) + \int_{x_1}^{\tilde{x}_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1 - \int_{x_1}^{y_1} \psi(\tilde{y}_1, \xi') d\tilde{y}_1} d\tilde{x}_1. \end{aligned}$$

Le noyau de $\partial_1(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$, noté par $k_{\tau,1,\partial_1,\ell f}$, est alors donné en Fourier par

$$k_{\tau,1,\partial_1,\ell f}(x_1, y_1, \xi') = \left(1 - \eta\left(\frac{\psi(X_1, \xi')}{\tau}\right)\right) k_{\tau,1,\partial_1}(x_1, y_1, \xi'). \quad (4.60)$$

Un calcul fastidieux (similaire à ceux de [DET23, Section 6]) montre alors qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de X_0 et X_1 , telle que pour tout x_1 et y_1 dans $[X_0, X_1]$, pour tout $\tau \geq 1$, et $0 < \lambda < 3c_1\tau$,

$$\|k_{\tau,1,\partial_1,\ell f}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})} \leq C\tau \left(e^{-|\tau - \lambda||y_1 - x_1| - \lambda(y_1 - x_1)^2/C} + \|k_{\tau,0,\partial_1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}\right).$$

En conséquence, en utilisant [DET23, Lemma 6.6] pour borner le second terme sur le membre de droite de la dernière inégalité, nous pouvons prouver

$$\left(\int_0^{3c_1\tau} \|k_{\tau,1,\partial_1}(x_1, y_1, \lambda, \cdot)\|_{L^\infty(\Sigma_{x_1})}^2 \lambda^{1-\frac{2}{d}} d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\tau |x_1 - y_1|^{-1+\frac{1}{d}}. \quad (4.61)$$

L'utilisation de l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev montre alors que la norme $\mathcal{L}(L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega))$ de $\partial_1(I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}$ est bornée par $C\tau$. Cela conclut la preuve de la Proposition 4.3.10. \square

4.3.1.3 Preuve du théorème 4.3.1

Avec les diverses estimations établies dans les propositions présentées dans la sous-section précédente, nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 4.3.1, c'est-à-dire les estimations de Carleman dans la bande.

Démonstration du théorème 4.3.1. En utilisant la Proposition 4.3.2, si w est à support compact et satisfait (4.24) pour certains termes sources $(f_2, f_{2*'}, F_2, F_{2*'})$ comme dans (4.25), alors

$$w = K_{\tau,0}(f_2 + f_{2*'}) + \sum_{j=1}^d K_{\tau,j}((F_2 + F_{2*'}) \cdot e_j) + R_\tau(w).$$

Rappelons que l'opérateur $P_{hf,\tau}$ commute avec tous les opérateurs $(K_{\tau,j})_{j \in \{0, \dots, d\}}$ et R_τ . En conséquence, la partie haute fréquence de $w_{hf,\tau} = P_{hf,\tau}w$ satisfait

$$w_{hf,\tau} = P_{hf,\tau}K_{\tau,0}(f_2 + f_{2*'}) + \sum_{j=1}^d P_{hf,\tau}K_{\tau,j}((F_2 + F_{2*'}) \cdot e_j) + R_\tau(w_{hf,\tau}).$$

En utilisant les diverses estimations des Propositions 4.3.6, 4.3.8, et 4.3.5, à haute fréquence, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|w_{hf,\tau}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_{hf,\tau}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\tau^{-1/2} \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|f_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|F_2 + F_{2^{*'}}\|_{L^2(\Omega)} \right) + C \|\nabla' w_{hf,\tau}\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

et nous avons également (en utilisant aussi (4.38) et le fait que)

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|w_{hf,\tau}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \\ & \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|F_2 + F_{2^{*'}}\|_{L^2(\Omega)} \right) + C \|\nabla' w_{hf,\tau}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

En conséquence, il existe un $\tau_0 > 0$ tel que pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|w_{hf,\tau}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_{hf,\tau}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\tau^{-1/2} \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|f_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|F_2 + F_{2^{*'}}\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.64)$$

et donc

$$\tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|w_{hf,\tau}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|F_2 + F_{2^{*'}}\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (4.65)$$

Nous définissons alors la partie basse fréquence $w_{\ell f,\tau} = (I - P_{hf,\tau})w$ de w : En utilisant (4.37), nous obtenons

$$\begin{aligned} w_{\ell f,\tau} &= K_{\tau,0}((I - P_{hf,\tau})(f_2 + f_{2^{*'}}) + \operatorname{div}'((I - P_{hf,\tau})F'_{2^{*'}})) + K_{\tau,1}((I - P_{hf,\tau})F_2 \cdot e_1) \\ & \quad + (I - P_{hf,\tau})K_{\tau,1}(F_{2^{*'}} \cdot e_1) + \sum_{j=2}^d K_{\tau,j}((I - P_{hf,\tau})F_2 \cdot e_j) + R_{\tau}(w_{\ell f,\tau}). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Bernstein (voir, par exemple, [BCD11, Lemma 2.1.]), nous obtenons que $\operatorname{div}'((I - P_{hf,\tau})F'_{2^{*'}})$ appartient à $L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)$ et

$$\|\operatorname{div}'((I - P_{hf,\tau})F'_{2^{*'}})\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \leq C\tau \|F_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}.$$

Nous utilisons alors les Propositions 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5, et 4.3.10 pour obtenir

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|w_{\ell f,\tau}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_{\ell f,\tau}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \right) + C \|\nabla' w_{\ell f,\tau}\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

et

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|w_{\ell f,\tau}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \\ & \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2^{*'}}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \right) + C \|\nabla' w_{\ell f,\tau}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Comme précédemment, nous pouvons alors absorber le terme $\|\nabla' w_{\ell f, \tau}\|_{L^2(\Omega)}$ dans le membre de droite de (4.66) en choisissant τ suffisamment grand : En prenant $\tau_0 \geq 1$ plus grand si nécessaire, nous avons, pour $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}} \|w_{\ell f, \tau}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_{\ell f, \tau}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.68)$$

et, en conséquence,

$$\tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|w_{\ell f, \tau}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \right). \quad (4.69)$$

En combinant les estimations (4.64) et (4.68), nous déduisons l'estimation de Carleman (4.26). De même, en combinant les estimations (4.65) et (4.69), nous déduisons l'estimation de Carleman (4.27) à l'exception des estimations localisées sur l'ensemble E .

Pour finaliser la preuve de (4.27), nous nous concentrons donc sur les estimations localisées au sein du sous-ensemble $E \subset \Omega$. Pour ce faire, d'une part, à basses fréquences, nous utilisons les estimations de Hölder et de Bernstein :

$$\begin{aligned} \tau \|w_{\ell f, \tau}\|_{L^2(E)} + \|\nabla' w_{\ell f, \tau}\|_{L^2(E)} & \leq |E|^{\frac{1}{d}} \left(\tau \|w_{\ell f, \tau}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(E)} + \|\nabla' w_{\ell f, \tau}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(E)} \right) \\ & \leq C |E|^{\frac{1}{d}} \tau \|w_{\ell f, \tau}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

En conséquence, en multipliant l'estimation ci-dessus par $\tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}}$ et en utilisant (4.69), nous déduisons

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\tau \|w_{\ell f, \tau}\|_{L^2(E)} + \|\nabla' w_{\ell f, \tau}\|_{L^2(E)} \right) & \leq C |E|^{\frac{1}{d}} \tau \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_2\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \right). \end{aligned}$$

D'autre part, les estimations (4.64) donnent

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\tau \|w_{hf, \tau}\|_{L^2(E)} + \|\nabla' w_{hf, \tau}\|_{L^2(E)} \right) & \leq \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\tau \|w_{hf, \tau}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla' w_{hf, \tau}\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ & \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|F_2 + F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Enfin, sur la base des Propositions 4.3.3–4.3.5, nous pouvons déduire l'estimation suivante pour le terme $\partial_1 w$:

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|\partial_1 w\|_{L^2(E)} & \leq \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|\partial_1 w\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\tau^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|F_2 + F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

En combinant les trois dernières estimations, nous concluons que

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau |E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau \|w\|_{L^2(E)} + \|\nabla w\|_{L^2(E)} \right) \\ & \leq C \left(\|f_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_2\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

et la preuve du théorème 4.3.1 est ainsi complétée. \square

4.3.2 Preuve du théorème 4.2.4

L'objectif de cette section est de déduire le théorème 4.2.4 dans le cas d'une géométrie générale à partir du théorème 4.3.1 qui ne considère que le cas d'une bande.

Pour ce faire, nous nous appuyons sur deux étapes principales :

- Un processus de localisation, qui permet, par un changement de variables approprié, d'utiliser le théorème 4.3.1 pour déduire une estimation locale de Carleman.
- Un argument de raccordement pour assembler ces estimations locales.

C'est la stratégie utilisée dans [DET23, Section 7]. Nous ne faisons qu'en esquisser les grandes lignes ci-dessous pour la commodité du lecteur, car celle-ci n'implique aucune difficulté nouvelle par rapport à [DET23].

4.3.2.1 Estimations locales de Carleman

Pour $\tau \geq 1$, nous introduisons

$$w = e^{\tau\varphi}u, \quad \tilde{f}_2 := e^{\tau\varphi}(f_2 - \tau\nabla\varphi \cdot F), \quad \tilde{f}_{2^{*'}} := e^{\tau\varphi}f_{2^{*'}}, \quad \tilde{F} = \tilde{F}_2 + \tilde{F}_{2^{*'}} := e^{\tau\varphi}F_2 + e^{\tau\varphi}F_{2^{*'}},$$

de telle sorte que la fonction u résout (4.13) si et seulement si w résout

$$\Delta w - 2\tau\nabla\varphi \cdot \nabla w + \tau^2|\nabla\varphi|^2w - \tau\Delta\varphi w = \tilde{f}_2 + \tilde{f}_{2^{*'}} + \operatorname{div}(\tilde{F}) \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.70)$$

Nous introduisons maintenant une version locale de (4.70). À savoir, pour $x_0 \in \bar{\Omega} \setminus \omega$, nous introduisons $\eta_{x_0}(x)$ une fonction de coupure définie par

$$\eta_{x_0}(x) = \eta(\tau^{\frac{1}{3}}(x - x_0)), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (4.71)$$

où η est une fonction radiale lisse non négative (dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$) telle que $\eta(\rho) = 1$ pour $|\rho| \leq 1/2$ et s'annule en dehors de la boule unité. Nous posons

$$w_{x_0}(x) = \eta_{x_0}(x)w(x), \quad x \in \Omega,$$

qui résout

$$\Delta w_{x_0} - 2\tau\nabla\varphi \cdot \nabla w_{x_0} + \tau^2|\nabla\varphi|^2w_{x_0} = f_{2,x_0} + f_{2^{*'},x_0} + \operatorname{div}(F_{x_0}), \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.72)$$

où

$$f_{2,x_0} = \eta_{x_0}\tilde{f}_2 - \nabla\eta_{x_0} \cdot \tilde{F}_2 + \tau\Delta\varphi w_{x_0} + 2\nabla\eta_{x_0} \cdot \nabla w + \Delta\eta_{x_0}w - 2\tau\nabla\varphi \cdot \nabla\eta_{x_0}w, \quad (4.73)$$

$$f_{2^{*'},x_0} = \eta_{x_0}\tilde{f}_{2^{*'}} - \nabla\eta_{x_0} \cdot \tilde{F}_{2^{*'}}, \quad F_{x_0} = \eta_{x_0}\tilde{F}. \quad (4.74)$$

Rappelons que u est supposé être à support compact dans un certain ensemble compact K , tel que $K \Subset \Omega$. En conséquence, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d, d(x, K) \leq \varepsilon\}$ est un sous-ensemble de Ω .

Nous dérivons alors le lemme suivant, dont la preuve est similaire à celle dans [DET23, Lemme 7.1].

Lemma 4.3.11. *Il existe des constantes $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ (dépendant seulement de $\alpha, \beta, \|\varphi\|_{C^3(\bar{\Omega})}, K, \omega$ et Ω) telles que pour tout $\tau \geq \tau_0$, pour tout $x_0 \in K_\varepsilon \setminus \omega_0$, et pour tous $(f_{2,x_0}, f_{2^{*'},x_0}, F_{x_0} = F_{2,x_0} + F_{2^{*'},x_0})$ satisfaisant*

$$f_{2,x_0} \in L^2(\Omega), \quad f_{2^{*'},x_0} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega), \quad F_{2,x_0} \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad \text{et } F_{2^{*'},x_0} \in L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega; \mathbb{C}^d) \cap L^2(\Omega; \mathbb{C}^d),$$

and w_{x_0} satisfying (4.72) and supported in $B_{x_0}(\tau^{-\frac{1}{3}})$, we have

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{2}} \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2^{*'},x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2^{*'},x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + \tau^{\frac{1}{2}} \|F_{2^{*'},x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.75)$$

et, pour tous les ensembles mesurables E de Ω ,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|w_{x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau |E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau \|w_{x_0}\|_{L^2(E)} + \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(E)} \right) \\ + \tau^{\frac{3}{2}} \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2^{*'},x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2^{*'},x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \|F_{2^{*'},x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Esquisse de la preuve. L'idée principale est de construire un changement de coordonnées approprié qui permet d'écrire l'équation (4.72) sous la forme (4.24) à quelques termes d'ordre inférieur près qui peuvent être gérés en utilisant les propriétés de localisation de w_{x_0} .

Pour $x_0 \in K_\varepsilon \setminus \omega_0$, nous introduisons $L_1 \in \mathbb{R}^d$ et $A_1 \in \mathbb{R}^{d \times d}$ comme suit :

$$L_1 = \nabla \varphi(x_0) \in \mathbb{R}^d, \quad A_1 = \text{Hess } \varphi(x_0) \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

La forme bilinéaire

$$\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto (\text{Hess } \varphi(x_0)) \xi \cdot \xi$$

est symétrique sur \mathbb{R}^d et sur $\text{Span}\{L_1\}^\perp$. En conséquence, il existe une famille de vecteurs orthogonaux $(L_j)_{j \in \{2, \dots, d\}}$ de $\text{Span}\{L_1\}^\perp$ qui diagonalise cette forme, que nous normalisons de sorte que pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$, $|L_j| = |L_1|$. Puisque la famille $(L_j)_{j \in \{2, \dots, d\}}$ de $\text{Span}\{L_1\}^\perp$ diagonalise la forme $\xi \mapsto (\text{Hess } \varphi(x_0)) \xi \cdot \xi$ dans $\text{Span}\{L_1\}^\perp$, pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$, il existe α_j et μ_j dans \mathbb{R} tels que

$$(\text{Hess } \varphi(x_0)) L_j = \mu_j L_j + \alpha_j L_1, \quad j \in \{2, \dots, d\}.$$

Remarque : par la symétrie de $\text{Hess } \varphi(x_0)$, nous avons alors nécessairement

$$(\text{Hess } \varphi(x_0)) L_1 = \mu_1 L_1 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k L_k,$$

où

$$\mu_1 = \frac{1}{|L_1|^2} (\text{Hess } \varphi(x_0)) L_1 \cdot L_1 = \frac{1}{|\nabla \varphi(x_0)|^2} (\text{Hess } \varphi(x_0)) \nabla \varphi(x_0) \cdot \nabla \varphi(x_0).$$

Pour $j \in \{2, \dots, d\}$, nous introduisons alors la matrice autosymétrique $A_j \in \mathbb{R}^{d \times d}$ définie par

$$\begin{cases} A_j L_1 = -\alpha_j L_1 - \mu_j L_j, \\ A_j L_k = \alpha_k L_j - \alpha_j L_k, & \text{si } k \in \{2, \dots, d\} \setminus \{j\}, \\ A_j L_j = -\mu_j L_1 + \sum_{k \geq 2} \alpha_k L_k. \end{cases}$$

(Il est facile de vérifier que chaque matrice A_j définie de cette manière est bien symétrique.)

Nous définissons alors le changement de coordonnées suivant pour x dans un voisinage de x_0 :

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \varphi(x) - \varphi(x_0), \\ y_j(x) &= L_j \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} A_j (x - x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{pour } j \in \{2, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Par construction, il existe un voisinage, dont la taille dépend uniquement de la norme C^2 de φ , tel que $x \mapsto y(x)$ est un difféomorphisme local entre un voisinage \mathcal{V} de x_0 dans $\overline{\Omega} \setminus \omega$ et un voisinage de 0, que nous appelons Ω_y .

Pour τ suffisamment grand, nous pouvons nous assurer que la boule de centre x_0 et de rayon $\tau^{-\frac{1}{3}}$, lorsqu'elle est intersectée avec $\overline{\Omega}$, est incluse dans un ensemble sur lequel $x \mapsto y(x)$ est un difféomorphisme, et son image est incluse dans une boule $B_0(C\tau^{-\frac{1}{3}})$.

Ainsi, pour w_{x_0} résolvant (4.72), nous posons

$$\check{w}(y) = w_{x_0}(x) \quad \text{pour } y = y(x),$$

Des calculs fastidieux, détaillés dans [DET23, Section 7.2], montrent que \check{w} satisfait alors

$$\Delta_y \check{w} - y_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_{y_j}^2 \check{w} - 2\tau \partial_{y_1} \check{w} + \tau^2 \check{w} = \check{f}_2 + \check{f}_{2^*} + \operatorname{div}_y \check{F} \quad \text{dans } (Y_0, Y_1) \times \mathbb{R}^{d-1},$$

où les coefficients $(\lambda_j)_{j \in \{2, \dots, d\}}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{2}{|L_1|^2} (A_1 L_1 \cdot L_1 + A_1 L_j \cdot L_j) \\ &= \frac{2}{|\nabla \varphi(x_0)|^2} ((\operatorname{Hess} \varphi(x_0)) \nabla \varphi(x_0) \cdot \nabla \varphi(x_0) + (\operatorname{Hess} \varphi(x_0)) L_j \cdot L_j), \end{aligned} \quad (4.77)$$

les termes sources sont

$$\begin{aligned} \check{f}_2(y) &= \frac{1}{|\nabla \varphi(x(y))|^2} f_{2,x_0}(x(y)) - \sum_{j,k} \partial_{y_j} \rho_{k,j} F_{x_0,2,k}(x(y)) + \check{f}_{2,a}(y) + \check{f}_{2,b}(y) + \check{f}_{2,c}(y), \\ \check{f}_{2^*}(y) &= \frac{1}{|\nabla \varphi(x(y))|^2} f_{2^*,x_0}(x(y)) - \sum_{j,k} \partial_{y_j} \rho_{k,j} F_{x_0,2^*,k}(x(y)), \\ \check{F}_j(y) &= \underbrace{\sum_{k=1}^d \rho_{k,j}(y) F_{x_0,2,k}(x(y))}_{=: \check{F}_{j,2}} + \check{F}_{j,a}(y) + \underbrace{\sum_{k=1}^d \rho_{k,j}(y) F_{x_0,2^*,k}(x(y))}_{=: \check{F}_{j,2^*}}, \quad j \in \{1, \dots, d\}, \end{aligned}$$

dans lequel ρ est défini comme

$$\rho_{j,k}(y) = \frac{\partial_{x_k} y_j(x(y))}{|\nabla \varphi(x(y))|^2},$$

et $\check{f}_{2,a}$, $\check{f}_{2,b}$, $\check{f}_{2,c}$ et \check{F}_a satisfont, en raison de la localisation de w dans $B_{x_0}(\tau^{-\frac{1}{3}})$ (équivalentement, de \check{w} dans $B_0(C\tau^{-\frac{1}{3}})$),

$$\begin{aligned} \|\check{f}_{2,a}\|_{L^2(\Omega_y)} &\leq C\tau^{-\frac{1}{3}} \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)}, & \|\check{f}_{2,b}\|_{L^2(\Omega_y)} &\leq C\tau^{\frac{1}{3}} \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)}, \\ \|\check{f}_{2,c}\|_{L^2(\Omega_y)} &\leq C \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)}, & \|\check{F}_a\|_{L^2(\Omega_y)} &\leq C\tau^{-\frac{2}{3}} \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)}. \end{aligned}$$

En raison de la forme de Ω_y et du fait que nous considérons des fonctions qui sont supportées dans des ensembles inclus dans des boules de la forme $B(0, C\tau^{-\frac{1}{3}})$, nous pouvons alors simplement étendre tous les termes sources dans une bande de la forme $[Y_0, Y_1] \times \mathbb{R}^{d-1}$, où les fonctions sont étendues par 0 en dehors de Ω_y , et \check{w} satisfait alors

$$\Delta_y \check{w} - y_1 \sum_{j=2}^d \lambda_j \partial_{y_j}^2 \check{w} - 2\tau \partial_{y_1} \check{w} + \tau^2 \check{w} = \check{f}_2 + \check{f}_{2*'} + \operatorname{div}_y \check{F} \quad \text{dans } (Y_0, Y_1) \times \mathbb{R}^{d-1},$$

Dans ce qui suit, pour des raisons de commodité, nous écrivons également Ω_y pour la bande $(Y_0, Y_1) \times \mathbb{R}^{d-1}$. Maintenant, la condition (4.12) implique que tous les λ_j dans (4.77) sont positifs, c'est-à-dire que la condition (4.23) est satisfaite. En conséquence, les estimations de Carleman dans le théorème 4.3.1 s'appliquent, et nous pouvons aisément déduire les estimations dans le Lemme 4.3.11. Concentrons-nous par exemple sur la preuve de l'estimation de Carleman (4.76) (la preuve de l'estimation de Carleman (4.75) est complètement similaire et en fait plus facile, et est laissée au lecteur).

Pour $\tau \geq \tau_0$, nous avons d'après (4.26) et (4.27) que

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|\check{w}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau |E_y|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} (\tau \|\check{w}\|_{L^2(E_y)} + \|\nabla \check{w}\|_{L^2(E_y)}) \\ + \tau^{\frac{3}{2}} \|\check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C \left(\|\check{f}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}_2\|_{L^2(\Omega_y)} \right. \\ \left. + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|\check{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \|\check{F}_{2*'}\|_{L^2(\Omega_y)} \right) \right). \end{aligned}$$

Nous remarquons alors simplement que, d'après l'expression de \check{f}_2 , $\check{f}_{2*'}$, et $\check{F} = \check{F}_2 + \check{F}_{2*'}$,

$$\begin{aligned} \|\check{f}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}_2\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|\check{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \tau \|\check{F}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega_y)} + \|\check{F}_{2*'}\|_{L^2(\Omega_y)} \right) \\ \leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*',x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*',x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \right. \\ \left. \left. + \|F_{2*',x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right) + \tau^{\frac{1}{3}} \|\nabla_y \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} \right), \end{aligned}$$

En conséquence, en choisissant $\tau_0 \geq 1$ plus grand si nécessaire, nous obtenons pour tout $\tau \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|\check{w}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega_y)} + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau |E_y|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} (\tau \|\check{w}\|_{L^2(E_y)} + \|\nabla \check{w}\|_{L^2(E_y)}) \\ + \tau^{\frac{3}{2}} \|\check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} + \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla \check{w}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} + \tau \|F_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ \left. + \tau^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|f_{2*',x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \tau \|F_{2*',x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + \|F_{2*',x_0}\|_{L^2(\Omega)} \right) \right). \end{aligned}$$

En inversant le changement de variables sur le côté gauche, nous déduisons facilement les estimations (4.76).

Le fait que les constantes ci-dessus ne dépendent pas de $x_0 \in K_\varepsilon \setminus \omega_0$ peut être suivi dans la preuve ci-dessus : cela provient des propriétés d'uniformité du difféomorphisme $x \mapsto y$, et repose largement sur les bornes uniformes (4.11)–(4.12), sur le fait que $\varphi \in C^3(\bar{\Omega})$, et que les constantes dans le théorème 4.3.1 dépendent seulement de c_0 , m_* et M_* dans (4.22), et (4.23) pour $X_0 < 0 < X_1$ avec $|X_0|, |X_1| \leq 1$. Cela termine la preuve du Lemme 4.3.11. \square

4.3.2.2 Un argument de recollement

Ici encore, la preuve suit de près celle de [DET23, Section 7.3] et nous nous concentrons sur la preuve de l'estimation (4.19), car l'estimation (4.18) peut être faite de manière similaire et est donc laissée au lecteur.

Nous partons de (4.76) : Il existe des constantes $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ telles que pour tout $x_0 \in K_\varepsilon \setminus \omega_0$ et $\tau \geq \tau_0$, et w_{x_0} solution de (4.72),

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \|w_{x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau|E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\}^2 \left(\tau^2 \|w_{x_0}\|_{L^2(E)}^2 + \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(E)}^2 \right) \\ & + \tau^3 \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|f_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \|F_{2,x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left(\|f_{2^*,x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \tau^2 \|F_{2^*,x_0}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \|F_{2^*,x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (4.78)$$

En utilisant les expressions explicites des termes sources (4.73) et (4.74), nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Côté droit de (4.78)} & \leq C \left(\|\eta_{x_0} \tilde{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\eta_{x_0} \tilde{F}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left(\|\eta_{x_0} \tilde{f}_{2^*}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\eta_{x_0} \tilde{F}_{2^*}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \|\eta_{x_0} \tilde{F}_{2^*}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right) \\ & + C \left(\|\nabla \eta_{x_0} \cdot \tilde{F}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \eta_{x_0} \cdot \nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta \eta_{x_0} w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + \tau^2 \|\nabla \eta_{x_0} |w|\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \|\nabla \eta_{x_0} \tilde{F}_{2^*}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

En prenant $\tau_0 \geq 1$ plus grand si nécessaire (ce qui peut être fait uniformément en $x_0 \in K_\varepsilon \setminus \omega_0$), nous pouvons absorber le terme $\tau^2 \|w_{x_0}\|_{L^2(\Omega)}^2$ par le côté gauche de (4.78). Ensuite, en intégrant par rapport à x_0 sur $K_\varepsilon \setminus \omega_0$, en utilisant l'identité de Fubini pour les normes hilbertiennes, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left\| \|\eta_{x_0} w\|_{L_x^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \right\|_{L_{x_0}^2(K_\varepsilon \setminus \omega_0)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau^2 |E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau^2 \|\rho_0^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(E)}^2 + \|\rho_0^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{L^2(E)}^2 \right) \\ & + \tau^3 \|\rho_0^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\rho_0^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \left(\|\rho_0^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\tau^2 \rho_0 + \rho_{r,1})^{\frac{1}{2}} \tilde{F}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left\| \|\eta_{x_0} \tilde{F}_{2^*}\|_{L_x^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right\|_{L_{x_0}^2(K_\varepsilon \setminus \omega_0)}^2 \right) \\ & + C \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left(\left\| \|\eta_{x_0} \tilde{f}_{2^*}\|_{L_x^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right\|_{L_{x_0}^2(K_\varepsilon \setminus \omega_0)}^2 + \tau^2 \left\| \|\eta_{x_0} \tilde{F}_{2^*}\|_{L_x^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right\|_{L_{x_0}^2(K_\varepsilon \setminus \omega_0)}^2 + \|\rho_0^{\frac{1}{2}} \tilde{F}_{2^*}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & + C \left(\|(\rho_{r,2} + \tau^2 \rho_{r,1})^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho_{r,1}^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

où les poids $\rho_0, \rho_{r,i}$ sont définis comme suit :

$$\rho_0(x) = \int_{K_\varepsilon \setminus \omega_0} |\eta_{x_0}(x)|^2 dx_0, \quad \rho_{r,1}(x) = \int_{K_\varepsilon \setminus \omega_0} |\nabla \eta_{x_0}(x)|^2 dx_0, \quad \rho_{r,2}(x) = \int_{K_\varepsilon \setminus \omega_0} |\Delta \eta_{x_0}(x)|^2 dx_0.$$

L'inégalité intégrale de Minkowski ([Ste16, p.271]) pour les normes non hilbertiennes donne

alors :

$$\begin{aligned}
& \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \|\rho_0^{\frac{1}{2}} w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau^2 |E|^{\frac{2}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau^2 \|\rho_0^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(E)}^2 + \|\rho_0^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{L^2(E)}^2 \right) \\
& \quad + \tau^3 \|\rho_0^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\rho_0^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq C \left(\|\rho_0^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\tau^2 \rho_0 + \rho_{r,1})^{\frac{1}{2}} \tilde{F}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \|\rho_{r,1}^{\frac{1}{2}} \tilde{F}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 \right) \\
& \quad + C \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left(\|\rho_0^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\rho_0^{\frac{1}{2}} \tilde{F}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \|\rho_0^{\frac{1}{2}} \tilde{F}_{2*'}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \quad + C \left(\|(\rho_{r,2} + \tau^2 \rho_{r,1})^{\frac{1}{2}} w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho_{r,1}^{\frac{1}{2}} \nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier à partir du choix (4.71) que, pour τ suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
\rho_0(x) &= \tau^{-\frac{d}{3}} \|\eta\|_{L^2}^2, \quad \forall x \in K \setminus \omega, & \rho_0(x) &\leq C \tau^{-\frac{d}{3}}, \quad \forall x \in \Omega, \\
\rho_{r,1}(x) &\leq C \tau^{\frac{2}{3}-\frac{d}{3}}, \quad \forall x \in \Omega, & \text{et} & \quad \rho_{r,2}(x) \leq C \tau^{\frac{4}{3}-\frac{d}{3}}, \quad \forall x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour τ assez grand,

$$\begin{aligned}
& \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \|w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega \setminus \omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau^2 |E|^{\frac{2}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau^2 \|w\|_{L^2(E \cap (K \setminus \omega))}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(E \cap (K \setminus \omega))}^2 \right) \\
& \quad + \tau^3 \|w\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}^2 + \tau \|\nabla w\|_{L^2(\Omega \setminus \omega)}^2 \\
& \leq C \left(\|\tilde{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\tilde{F}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left(\|\tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\tilde{F}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \|\tilde{F}_{2*'}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right) \\
& \quad + C \left(\tau^{\frac{8}{3}} \|w\|_{L^2(\omega)}^2 + \tau^{\frac{2}{3}} \|\nabla w\|_{L^2(\omega)}^2 \right),
\end{aligned}$$

Nous ajoutons alors

$$\begin{aligned}
& \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \|w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau^2 |E|^{\frac{2}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau^2 \|w\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\omega)}^2 \right) \\
& \quad + \tau^3 \|w\|_{L^2(\omega)}^2 + \tau \|\nabla w\|_{L^2(\omega)}^2
\end{aligned}$$

à chaque côté de l'estimation précédente et nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \|w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \min \left\{ \frac{1}{\tau^2 |E|^{\frac{2}{d}}}, 1 \right\} \left(\tau^2 \|w\|_{L^2(E)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(E)}^2 \right) \\
& \quad + \tau^3 \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq C \left(\|\tilde{f}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\tilde{F}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left(\|\tilde{f}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 + \tau^2 \|\tilde{F}_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \|\tilde{F}_{2*'}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{d}} \left(\tau^2 \|w\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\omega)}^2 + \|w\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\omega)}^2 \right) \right).
\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve du théorème 4.2.4.

4.4 Un cadre géométrique spécifique

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur un cadre géométrique spécifique impliquant une boule de rayon $R > 0$ (rappelons que $B_0(r)$ désigne la boule centrée en 0 et de rayon r). Dans ce contexte, nous visons à prouver le lemme suivant sur le prolongement unique quantitatif, comme présenté dans le théorème 4.1.1.

Lemme 4.4.1. *Soit $R > 0$ et $d \geq 3$. Nous considérons le cadre géométrique suivant (voir Figure 4.1) :*

$$\Omega = B_0(2R) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{4} \right\}, \quad \mathcal{O} = B_0\left(\frac{3R}{2}\right) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{3} \right\}, \quad \text{et } \omega = (B_0(2R) \setminus B_0(R)) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{4} \right\},$$

Il existe des constantes $C = C(R, d) > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ dépendant seulement de R et d de sorte que toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de (4.1) avec (V, W_1, W_2) comme dans (4.2) satisfait l'estimation de prolongement unique quantitatif (4.3) avec γ et δ comme dans (4.4).

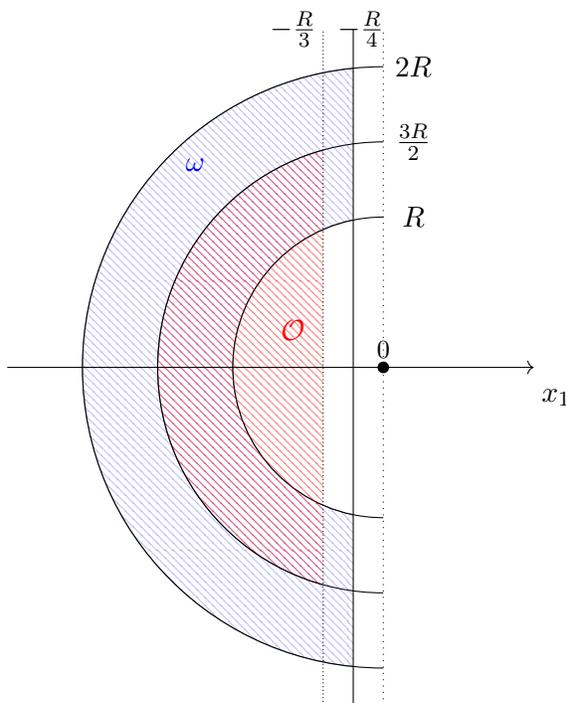


FIGURE 4.1 – Le cadre géométrique du Lemme 4.4.1 : Propagation de la petitesse de gauche à droite.

Notre objectif est d'expliquer comment nous pouvons combiner les estimations de Carleman établies dans le théorème 4.2.4 et l'argument de Wolff (Lemme 4.2.1) afin d'obtenir l'estimation de prolongement unique quantitatif (4.3).

Une remarque clé est que le lemme de Wolff s'applique à des fonctions poids linéaires de la forme $y \mapsto k \cdot y$ pour $k \in \mathbb{R}^d$, tandis que nos estimations de Carleman sont valables sous des conditions de sous-ellipticité appropriées sur la fonction poids ((4.11)–(4.12)), alors que le paramètre τ est un nombre réel positif.

Pour utiliser simultanément les deux outils, nous construisons une famille de fonctions poids qui satisfont aux conditions de sous-ellipticité (4.11)–(4.12) et à l'argument de Wolff.

Lemma 4.4.2. *Dans le même cadre que dans le Lemme 4.4.1, pour $k \in \mathbb{R}^d$, nous posons*

$$\varphi_k(x) = k_1 x_1^2 + k' \cdot x', \quad x \in \Omega. \quad (4.79)$$

Alors, il existe $\epsilon > 0$ tel que

1. Pour tout $k \in B_{e_1}(\epsilon)$, la fonction φ_k satisfait (4.11) et (4.12) avec certaines constantes positives $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ indépendantes de $k \in B_{e_1}(\epsilon)$, et sa norme C^3 sur $\bar{\Omega}$ est bornée indépendamment de $k \in B_{e_1}(\epsilon)$.
2. Il existe $\rho > 0$ tel que

$$\inf_{k \in B_{e_1}(\epsilon)} \inf_{x \in \mathcal{O}} \{\varphi_k(x)\} \geq (1 + \rho) \sup_{k \in B_{e_1}(\epsilon)} \left\{ \sup_{x \in \Omega \cap \{x_1 \in (-\frac{7R}{24}, -\frac{R}{4})\}} \{\varphi_k(x)\} \right\}. \quad (4.80)$$

3. En posant $\Sigma_\epsilon = \{k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \text{ tel que } |k/k| - e_1| \leq \epsilon\}$, la famille $(\varphi_k)_{k \in \Sigma_\epsilon}$ satisfait la propriété suivante : Si f est une fonction positive à support compact dans Ω , nous définissons la famille $d\mu_k(x) = e^{\varphi_k(x)} f(x) dx$, alors pour $\mathcal{C} \subset \Sigma_\epsilon$ un ensemble convexe compact, il existe une famille $(k_j)_{j \in J}$ d'éléments de \mathcal{C} et des ensembles disjoints deux à deux $(E_{k_j})_{j \in J}$ inclus dans Ω de sorte que les mesures $d\mu_{k_j}$ satisfont (4.8) avec $T = 0$ et la famille $(E_{k_j})_{j \in J}$ satisfait (4.9) avec C_W une constante positive dépendant uniquement de d et Ω .

Démonstration. Les item 1 et 2 peuvent être vérifiés directement à l'aide de calculs immédiats, le fait que $\varphi_{e_1}(x) = x_1^2$ satisfait (4.11) et (4.12) :

$$\inf_{x \in \mathcal{O}} \{\varphi_{e_1}(x)\} = \frac{R^2}{9} > \sup_{x \in \Omega \cap \{x_1 \in (-\frac{7R}{24}, -\frac{R}{4})\}} \{\varphi_{e_1}(x)\} = \left(\frac{7}{24}\right)^2 R^2.$$

Il reste à vérifier l'item 3. Pour ce faire, notons par $Y : x \mapsto y$ le difféomorphisme donné par $y_1(x) = x_1^2$, et $y' = x'$ (ceci est clairement un difféomorphisme de Ω vers $Y(\Omega)$ puisque Ω est éloigné de $\{x_1 = 0\}$), et X l'inverse de la fonction Y . Remarquons alors que pour tout $k \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi_k(x) = k_1 x_1^2 + k' \cdot x' = k \cdot Y(x).$$

Posons alors f une fonction positive à support compact dans Ω . Ainsi, dans les nouvelles coordonnées y , la famille de mesures $d\mu_k(x) = e^{\varphi_k(x)} f(x) dx$ devient

$$d\tilde{\mu}_k(y) = e^{k \cdot y} f(X(y)) |\text{Jac}(X)| dy, \quad (4.81)$$

où $\text{Jac}(X)$ est le jacobien de la fonction X . Par conséquent, d'après le Lemme 4.2.1, pour $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$, il existe une famille $(k_j)_{j \in J}$ d'éléments de \mathcal{C} et des ensembles convexes disjoints $(\tilde{E}_{k_j})_{j \in J}$ tels que les familles $(d\tilde{\mu}_{k_j})_{j \in J}$, $(k_j)_{j \in J}$, et $(\tilde{E}_{k_j})_{j \in J}$ satisfont aux propriétés (4.8) et (4.9) avec \tilde{C}_W une constante positive ne dépendant que de d . Par conséquent, nous considérons les ensembles $E_{k_j} = X(\tilde{E}_{k_j})$, qui sont disjoints (pas nécessairement convexes) et satisfont

$$|E_{k_j}| \leq \|\text{Jac}(X)\|_\infty |\tilde{E}_{k_j}|.$$

En utilisant cette inégalité, la propriété de sommation (4.9) pour les ensembles E_{k_j} est satisfaite, avec la constante $C_W = \|\text{Jac}(X)\|_\infty^{-1} \tilde{C}_W$. D'autre part, la propriété de concentration (4.8) avec $T = 0$ sur E_{k_j} pour chaque $d\mu_{k_j}$ découle de la propriété de concentration (4.8) pour la famille $d\tilde{\mu}_{k_j}$ sur \tilde{E}_{k_j} et de l'identité (4.81). \square

En conséquence du résultat précédent, notons que le théorème 4.2.4 est valable pour tout φ_k avec $k \in B(e_1, \epsilon)$, avec des constantes qui sont uniformes par rapport à $k \in B_{e_1}(\epsilon)$. Par conséquent, en appliquant le théorème 4.2.4, nous déduisons facilement le résultat suivant :

Lemma 4.4.3. *Soit $d \geq 3$. Soit*

$$\Omega = B_0(2R) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{4} \right\}, \quad \mathcal{O} = B_0\left(\frac{3R}{2}\right) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{3} \right\}, \quad \text{et } \omega = (B_0(2R) \setminus B_0(R)) \cap \left\{ x_1 < -\frac{R}{4} \right\},$$

Alors, pour tout sous-ensemble compact K de Ω , il existe $C > 0$ et $\tau_0 \geq 1$ tels que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant $\text{supp } u \subset K$ et (4.13) avec $(f_2, f_{2*'}, F = F_2 + F_{2*'})$ comme dans (4.17), nous avons, pour tout $k \in \Sigma_\epsilon$ avec $|k| \geq \tau_0$, avec φ_k comme dans (4.79),

$$\begin{aligned} |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} u\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_k} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|e^{\varphi_k} f_2\|_{L^2(\Omega)} + |k| \|e^{\varphi_k} F_2\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_k} F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + |k|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|e^{\varphi_k} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + |k| \|e^{\varphi_k} F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} u\|_{H^1(\omega)} \right), \end{aligned} \quad (4.82)$$

et, pour tous les ensembles mesurables E de Ω ,

$$\begin{aligned} |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\varphi_k} u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{|k| |E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} &\left(|k| \|e^{\varphi_k} u\|_{L^2(E)} + \|e^{\varphi_k} \nabla u\|_{L^2(E)} \right) \\ &\leq C \left(\|e^{\varphi_k} f_2\|_{L^2(\Omega)} + |k| \|e^{\varphi_k} F_2\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|e^{\varphi_k} f_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + |k| \|e^{\varphi_k} F_{2*'}\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \right. \\ &\quad \left. + |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\varphi_k} F_{2*'}\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} u\|_{H^1(\omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Lemme 4.4.1.

Démonstration du Lemme 4.4.1. Pour plus de clarté, nous divisons la preuve en plusieurs étapes.

Étape 1 : Application des estimations de Carleman. Pour $u \in H^1(\Omega)$ avec

$$\Delta u = Vu + W_1 \cdot \nabla u + \text{div}(W_2 u) \quad \text{dans } \Omega,$$

nous posons $v = \eta u$, où η est une fonction de coupure lisse qui vaut 1 dans $B_0(3R/2) \cap \{x_1 < -7R/24\}$ et s'annule dans un voisinage de $\partial\Omega$, de sorte que nous avons

$$\Delta v = Vv + W_1 \cdot \nabla v + \text{div}(W_2 v) + f_\eta \quad \text{dans } \Omega,$$

où f_η est défini par

$$f_\eta = 2\nabla\eta \cdot \nabla u + \Delta\eta u - W_1 \cdot \nabla\eta u - W_2 \cdot \nabla\eta u, \quad (4.84)$$

et satisfait ainsi

$$\text{Supp } f_\eta \subset \omega \cup (\Omega \cap \{x_1 \in (-7R/24, -R/4)\}). \quad (4.85)$$

Maintenant, pour $V \in L^{q_0}(\Omega)$, $W_1 \in L^{q_1}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega; \mathbb{C}^d)$, avec $q_0 > d/2$, $q_1 > d$, et $q_2 > d$, nous allons effectuer une décomposition de la forme

$$\begin{aligned} V &= V_{\frac{d}{2}} + V_d + V_\infty, & \text{avec } V_{\frac{d}{2}} &\in L^{\frac{d}{2}}(\Omega), \quad V_d \in L^d(\Omega), \quad V_\infty \in L^\infty(\Omega), \\ W_1 &= W_{1,d} + W_{1,\infty}, & \text{avec } W_{1,d} &\in L^d(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad W_{1,\infty} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d), \\ W_2 &= W_{2,d} + W_{2,\infty}, & \text{avec } W_{2,d} &\in L^d(\Omega; \mathbb{C}^d), \quad W_{2,\infty} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C}^d). \end{aligned}$$

Nous expliquerons plus tard, à l'Étape 4 de la preuve, la décomposition précise que nous choisirons.

Nous appliquons ensuite le Lemme 4.4.3. L'estimation de Carleman (4.82) avec $f_{2^*'} = V_d v + V_d v + W_{1,d} \cdot \nabla v$, $f_2 = V_\infty v + W_{1,\infty} \cdot \nabla v + f_\eta$, $F_{2^*'} = W_{2,d} v$, et $F_2 = W_{2,\infty} v$ donne que pour tout $k \in \Sigma_\varepsilon$ avec $|k| \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_k} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(\Omega)} + \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty} \|e^{\varphi_k} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad + \|e^{\varphi_k} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{1}{2}} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \\ &\quad + |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} v\|_{H^1(\omega)} + |k|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|V_d\|_{L^d(\Omega)} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(\Omega)} + \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \right) \\ &\quad \left. + |k|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|e^{\varphi_k} W_{1,d} \cdot \nabla v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + |k| \|e^{\varphi_k} W_{2,d} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \right). \end{aligned}$$

En conséquence, il existe $c_0 > 0$ tel que si

$$\left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_d\|_{L^d(\Omega)} \right) \leq c_0 |k|^{\frac{3}{2}}, \quad \text{et} \quad \left(\|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \leq c_0 |k|^{\frac{1}{2}}, \quad (4.86)$$

pour tout $k \in \Sigma_\varepsilon$ avec $|k| \geq \tau_0$,

$$\begin{aligned} |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_k} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 \left(\|e^{\varphi_k} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} u\|_{H^1(\omega)} \right. \\ &\quad + \left(|k|^{\frac{1}{2}} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \right) \|e^{\varphi_k} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \\ &\quad \left. + |k|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|e^{\varphi_k} W_{1,d} \cdot \nabla v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + |k| \|e^{\varphi_k} W_{2,d} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \right). \quad (4.87) \end{aligned}$$

De même, l'estimation de Carleman (4.19) avec $f_{2^*'} = V_d v + W_{1,d} \cdot \nabla v$, $f_2 = V_\infty v + V_d v + W_{1,\infty} \cdot \nabla v + f_\eta$, $F_{2^*'} = W_{2,d} v$, et $F_2 = W_{2,\infty} v$ donne que pour tout $k \in \Sigma_\varepsilon$ avec $|k| \geq \tau_0$, et pour tout ensemble mesurable E ;

$$\begin{aligned} &|k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{|k| |E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left(|k| \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(E)} + \|e^{\varphi_k} \nabla v\|_{L^2(E)} \right) \\ &\leq C \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(\Omega)} + \|V_d\|_{L^d(\Omega)} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_k} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|e^{\varphi_k} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad + |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + \|e^{\varphi_k} W_{1,d} \cdot \nabla v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + |k| \|e^{\varphi_k} W_{2,d} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \\ &\quad \left. + |k| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \|e^{|k|\varphi_k} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} u\|_{H^1(\omega)} \right). \end{aligned}$$

En conséquence, il existe $c_1 > 0$ tel que si

$$\|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \leq c_1, \quad \|V_d\|_{L^d(\Omega)} \leq c_1 |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}}, \quad \text{et} \quad \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \leq c_1, \quad (4.88)$$

pour tout $k \in \Sigma_\varepsilon$ avec $|k| \geq \tau_0$, et pour tout ensemble mesurable E ;

$$\begin{aligned} &|k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\varphi_k} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} + |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{|k| |E|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left(|k| \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(E)} + \|e^{\varphi_k} \nabla v\|_{L^2(E)} \right) \\ &\leq C_2 \left(\left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + |k| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|e^{\varphi_k} v\|_{L^2(\Omega)} + \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_k} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|e^{\varphi_k} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + |k|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|e^{\varphi_k} W_{1,d} \cdot \nabla v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + |k| \|e^{\varphi_k} W_{2,d} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + |k|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_k} u\|_{H^1(\omega)} \right). \quad (4.89) \end{aligned}$$

À partir de maintenant, nous supposons que les conditions (4.86) et (4.88) sont satisfaites.

Étape 2 : Application de l'argument de Wolff. Soit $n \in \mathbb{R}$ plus grand que $\tau_0/(1-\epsilon)$, avec ϵ comme dans le Lemme 4.4.2. Nous posons $\widetilde{\mathcal{C}}_n = \{k \in \mathbb{R}^d, \text{ tel que } |k - ne_1| \leq \epsilon n\}$, de sorte que $\widetilde{\mathcal{C}}_n = nB_{e_1}(\epsilon) \subset \Sigma_\epsilon$. Pour tout $k \in \widetilde{\mathcal{C}}_n$, nous définissons la mesure

$$\begin{aligned} d\mu_k &= \left(|e^{\varphi_k(x)} W_{1,d}(x) \cdot \nabla v(x)|^{\frac{2d}{d+2}} + |(1+\epsilon)ne^{\varphi_k(x)} W_{2,d}(x)v(x)|^{\frac{2d}{d+2}} \right) dx \\ &= e^{\varphi_{2dk/(d+2)}(x)} \left(|W_{1,d}(x) \cdot \nabla v(x)|^{\frac{2d}{d+2}} + |(1+\epsilon)nW_{2,d}(x)v(x)|^{\frac{2d}{d+2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Puis, le Lemme 4.4.2 (appliqué à $\mathcal{C}_n = 2d\widetilde{\mathcal{C}}_n/(d+2)$) implique l'existence d'une constante $C_W > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble d'indices J_n , une famille $(k_{j,n})_{j \in J_n}$ d'éléments de $\widetilde{\mathcal{C}}_n$ et une famille correspondante d'ensembles disjoints $(E_{k_{j,n}})_{j \in J_n}$ tels que pour tout $j \in J_n$, nous avons

$$\begin{aligned} & \left\| |e^{\varphi_{k_{j,n}}(x)} W_{1,d} \cdot \nabla v|^{\frac{2d}{d+2}} + |n(1+\epsilon)e^{\varphi_{k_{j,n}}(x)} W_{2,d}v|^{\frac{2d}{d+2}} \right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{d+2}{2d}} \\ & \leq 2 \left\| |e^{\varphi_{k_{j,n}}(x)} W_{1,d}(x) \cdot \nabla v(x)|^{\frac{2d}{d+2}} + |n(1+\epsilon)e^{\varphi_{k_{j,n}}(x)} W_{2,d}(x)v(x)|^{\frac{2d}{d+2}} \right\|_{L^1(E_{k_{j,n}})}^{\frac{d+2}{2d}} \end{aligned} \quad (4.90)$$

et

$$\sum_{j \in J_n} |E_{k_{j,n}}|^{-1} \geq \frac{1}{C_W} \left(\frac{2d}{d+2} \right)^d n^d. \quad (4.91)$$

Nous allons prouver que si les conditions

$$\begin{cases} \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)}^d + \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^d \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)}^d < \frac{1}{C_W(16C_2(1+\epsilon))^d} \left(\frac{2d}{d+2} \right)^d, \\ 8C_2 \left(\|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \right) \leq 1, \end{cases} \quad (4.92)$$

(où C_2 est la constante dans (4.89)) sont satisfaites, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $j_{*,n} \in J_n$ tel que

$$8C_2 \left(\|W_{1,d}\|_{L^d(E_{k_{j_{*,n}}})} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \|W_{2,d}\|_{L^d(E_{k_{j_{*,n}}})} \right) \leq \frac{1}{|k_{j_{*,n}}| |E_{k_{j_{*,n}}}|^{\frac{1}{d}}}. \quad (4.93)$$

En effet, sinon, pour tout $j \in J_n$, nous aurions

$$|E_{k_{j,n}}|^{-1} \leq (16C_2(1+\epsilon)n)^d \left(\|W_{1,d}\|_{L^d(E_{k_{j,n}})}^d + \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^d \|W_{2,d}\|_{L^d(E_{k_{j,n}})}^d \right),$$

(où nous utilisons l'estimation élémentaire $(a+b)^d \leq 2^d(a^d + b^d)$ pour $a, b \geq 0$).

En sommant ces estimations sur $j \in J_n$ et en tenant compte du fait que les ensembles $(E_{k_{j,n}})_{j \in J_n}$ sont disjoints deux à deux, nous obtiendrions

$$\frac{1}{C_W} \left(\frac{2d}{d+2} \right)^d n^d \leq \sum_{j \in J_n} |E_{k_{j,n}}|^{-1} \leq (16C_2(1+\epsilon)n)^d \left(\|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)}^d + \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^d \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)}^d \right),$$

ce qui contredirait (4.92).

Nous supposons donc la condition (4.92). Pour $n \geq \tau_0/(1 - \epsilon)$, nous posons $k_n = k_{j_*,n}$, où $k_{j_*,n}$ est tel que (4.93) soit vérifiée, et nous posons $E_n = E_{k_{j_*,n}}$. Nous déduisons alors de (4.89) que

$$\begin{aligned}
& |k_n|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \min \left\{ \frac{1}{|k_n| |E_n|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left(|k_n| \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(E_n)} + \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(E_n)} \right) \\
& \leq C_2 \left((\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + |k_n| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}) \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
& \quad + \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|e^{\varphi_{k_n}} W_{1,d} \cdot \nabla v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. \left. + |k_n| \|e^{\varphi_{k_n}} W_{2,d} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} \right). \tag{4.94}
\end{aligned}$$

En utilisant ensuite les estimations classiques $|a|^\alpha + |b|^\alpha \leq 2(|a| + |b|)^\alpha$ et $(|a| + |b|)^\alpha \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha$ pour $\alpha \in [0, 1]$ et $a, b \in \mathbb{R}$, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
& \|e^{\varphi_{k_n}} W_{1,d} \cdot \nabla v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + |k_n| \|e^{\varphi_{k_n}} W_{2,d} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \\
& \leq 2 \|e^{\frac{2d}{d+2} \varphi_{k_n}} \left(|W_{1,d} \cdot \nabla v|^{\frac{2d}{d+2}} + (n(1 + \epsilon)) |W_{2,d} v|^{\frac{2d}{d+2}} \right)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{d+2}{2d}} \\
& \leq 4 \|e^{\frac{2d}{d+2} \varphi_{k_n}} \left(|W_{1,d} \cdot \nabla v|^{\frac{2d}{d+2}} + (n(1 + \epsilon)) |W_{2,d} v|^{\frac{2d}{d+2}} \right)\|_{L^1(E_n)}^{\frac{d+2}{2d}} \\
& \leq 4 \|e^{\varphi_{k_n}} W_{1,d} \cdot \nabla v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(E_n)} + 4n(1 + \epsilon) \|e^{\varphi_{k_n}} W_{2,d} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(E_n)} \\
& \leq 4 \left(\|W_{1,d}\|_{L^d(E_n)} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(E_n)} + n(1 + \epsilon) \|W_{2,d}\|_{L^d(E_n)} \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(E_n)} \right) \\
& \leq \frac{1}{2C_2} \min \left\{ \frac{1}{|k_n| |E_n|^{\frac{1}{d}}}, 1 \right\} \left((1 - \epsilon)n \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(E_n)} + \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(E_n)} \right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (4.90), et le fait que, d'après (4.93),

$$4 \|W_{1,d}\|_{L^d(E_n)} \leq \frac{1}{2C_2} \frac{1}{|k_n| |E_n|^{\frac{1}{d}}}, \quad \text{et} \quad 4(1 + \epsilon) \|W_{2,d}\|_{L^d(E_n)} \leq \frac{1 - \epsilon}{2C_2} \frac{1}{|k_n| |E_n|^{\frac{1}{d}}}$$

et, d'après (4.92)₍₂₎,

$$4 \|W_{1,d}\|_{L^d(E_n)} \leq 4 \|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \leq \frac{1}{2C_2}, \quad \text{et} \quad 4(1 + \epsilon) \|W_{2,d}\|_{L^d(E_n)} \leq 4(1 + \epsilon) \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \leq \frac{1 - \epsilon}{2C_2}.$$

En conséquence, d'après (4.94), nous déduisons que

$$\begin{aligned}
& |k_n|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \left(\|e^{\varphi_{k_n}} W_{1,d} \cdot \nabla v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} + |k_n| \|e^{\varphi_{k_n}} W_{2,d} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} \right) \\
& \leq 2C_2 \left((\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + |k_n| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)}) \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} + \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + \|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} \right). \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Étape 3 : Combinaison des estimations de Carleman (4.87) et (4.89), et de l'estimation (4.95). En utilisant (4.87), (4.89) et (4.95), nous obtenons qu'il existe une constante $C > 0$

telle que pour tout $n \geq \tau_0/(1 - \epsilon)$,

$$\begin{aligned} |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left(|k_n|^{\frac{1}{2}} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \right) \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \right) \\ &\quad + |k_n|^{-\frac{1}{d}} \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + |k_n| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} + \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

et

$$\begin{aligned} |k_n|^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2d}} \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}(\Omega)} &\leq C \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + |k_n| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Notez en particulier qu'à la vue des hypothèses (4.86), nous obtenons de (4.96) qu'il existe $\tau_1 \geq \tau_0/(1 - \epsilon)$ tel que, pour tout $n \geq \tau_1$,

$$\begin{aligned} |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left(|k_n|^{\frac{1}{2}} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \right) \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Ainsi, en combinant (4.97) et (4.98), nous obtenons, pour tout $n \geq \tau_1$,

$$\begin{aligned} |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left(|k_n|^{\frac{1}{2}} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \right) |k_n|^{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + |k_n| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} \right). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Avec les contraintes (4.86), (4.88) et (4.92), il existe C tel que

$$\left(|k_n|^{\frac{1}{2}} \|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \right) |k_n|^{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \leq C |k_n|^{-\frac{1}{d}},$$

et

$$\left(\|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} + |k_n| \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \leq 2c_0 |k_n|^{\frac{3}{2}}, \quad \text{et} \quad \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_0 |k_n|^{\frac{1}{2}}.$$

En conséquence, nous déduisons de (4.99) qu'il existe $\tau_2 \geq \tau_1$ tel que pour tout $n \geq \tau_2$,

$$|k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} v\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} \nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} + |k_n|^{\frac{3}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} \right). \quad (4.100)$$

Étape 4 : Quantification. Pour quantifier la propriété de prolongement unique, nous devons simplement choisir des valeurs appropriées pour n (rappelons que k_n est de l'ordre de n) et des décompositions adéquates de V , W_1 et W_2 sous la forme $V_{\frac{d}{2}} + V_d + V_\infty$, $W_{1,d} + W_{1,\infty}$, $W_{2,d} + W_{2,\infty}$.

Nous rappelons donc les contraintes nécessaires jusqu'ici (voir (4.86), (4.88), (4.92)), que nous résumons comme suit :

$$\|V_{\frac{d}{2}}\|_{L^{\frac{d}{2}}(\Omega)} \lll 1, \quad |n|^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2d}} \|V_d\|_{L^d(\Omega)} \lll n^{\frac{3}{2}}, \quad \|V_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \lll n^{\frac{3}{2}}, \quad (4.101)$$

$$\|W_{1,d}\|_{L^d(\Omega)} \lll 1, \quad \|W_{1,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \lll n^{\frac{1}{2}}, \quad (4.102)$$

$$\|W_{2,d}\|_{L^d(\Omega)} \lll 1, \quad \|W_{2,\infty}\|_{L^\infty(\Omega)} \lll n^{\frac{1}{2}}. \quad (4.103)$$

Respect des conditions (4.102)–(4.103). Pour $W_1 \in L^{q_1}(\Omega)$ et $W_2 \in L^{q_2}(\Omega)$, avec q_1 et q_2 dans $[d, \infty]$, et pour des nombres positifs λ_1, λ_2 à déterminer, nous posons $W_{1,d} = W_1 1_{|W_1| > \lambda_1}$, $W_{1,\infty} = W_1 1_{|W_1| \leq \lambda_1}$, $W_{2,d} = W_2 1_{|W_2| > \lambda_2}$, et $W_{2,\infty} = W_2 1_{|W_2| \leq \lambda_2}$. Les conditions (4.102)–(4.103) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{1-\frac{q_1}{d}} \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\frac{q_1}{d}} &\lll 1, & \lambda_1 n^{-\frac{1}{2}} &\lll 1 \\ \lambda_2^{1-\frac{q_2}{d}} \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\frac{q_2}{d}} &\lll 1, & \lambda_2 n^{-\frac{1}{2}} &\lll 1. \end{aligned}$$

Si nous choisissons λ_1 et λ_2 de sorte que $\lambda_j^{1-\frac{q_j}{d}} \|W_j\|_{L^{q_j}(\Omega)}^{\frac{q_j}{d}} = \lambda_j n^{-\frac{1}{2}}$ ($j \in \{1, 2\}$), c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} n^{\frac{d}{2q_1}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)} n^{\frac{d}{2q_2}},$$

alors cela entraîne les conditions

$$n^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2q_1}} \ggg \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}, \quad \text{et} \quad n^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2q_2}} \ggg \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}. \quad (4.104)$$

Respect des conditions (4.101). Nous considérons maintenant les deux cas suivants pour le potentiel V :

Cas $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 \in [d, \infty]$. Pour $\lambda_0 > 0$ à choisir plus tard, nous posons $V_{\frac{d}{2}} = 0$, et $V_d = V 1_{|V| > \lambda_0}$, $V_\infty = V 1_{|V| \leq \lambda_0}$, de sorte que les conditions (4.101) deviennent

$$\lambda_0^{1-\frac{q_0}{d}} \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\frac{q_0}{d}} \lll n^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}, \quad \lambda_0 \lll n^{\frac{3}{2}}.$$

Avec le choix $\lambda_0 = \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)} n^{(\frac{3}{4}-\frac{1}{2d})\frac{d}{q_0}}$, cela donne

$$n^{(2-\frac{d}{q_0})(\frac{3}{4}-\frac{1}{2d})} \ggg \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}. \quad (4.105)$$

Cas $V \in L^{q_0}(\Omega)$ avec $q_0 \in (d/2, d]$. Pour $\lambda_0 > 0$ à déterminer plus tard, nous posons $V_\infty = 0$, et $V_{\frac{d}{2}} = V 1_{|V| > \lambda_0}$, $V_d = V 1_{|V| \leq \lambda_0}$, de sorte que les conditions (4.101) deviennent

$$\lambda_0^{1-\frac{2q_0}{d}} \|V\|_{L^{q_0}}^{\frac{2q_0}{d}} \lll 1, \quad \lambda_0^{1-\frac{q_0}{d}} \|V\|_{L^{q_0}}^{\frac{q_0}{d}} \lll n^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2d}}.$$

Avec le choix $\lambda_0 = \|V\|_{L^{q_0}} n^{(\frac{3}{4}+\frac{1}{2d})\frac{d}{q_0}}$, cela donne

$$n^{(2-\frac{d}{q_0})(\frac{3}{4}+\frac{1}{2d})} \ggg \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}. \quad (4.106)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que les conditions (4.104)–(4.106) sont satisfaites, c'est-à-dire, avec les notations (4.4),

$$n \geq \tau_3(V, W_1, W_2) := C \left(1 + \|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} \right),$$

pour une constante C suffisamment grande, de sorte que, en particulier, l'estimation (4.100) est valable pour tout $n \geq \tau_3(V, W_1, W_2)$.

Étape 5. Obtention d'une estimation de stabilité. Nous commençons par estimer le terme $\|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)}$ comme suit (rappelons (4.84)–(4.85)) : pour $n \geq \tau_3(V, W_1, W_2)$,

$$\begin{aligned} \|e^{\varphi_{k_n}} f_\eta\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(1 + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)} \right) \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} \\ &\quad + C \left(1 + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)} \right) e^{\sup_{x_1 \in (-\frac{7R}{24}, -\frac{R}{4})} \{\varphi_{k_n}\}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C |n|^{\frac{1}{2}} \|e^{\varphi_{k_n}} u\|_{H^1(\omega)} + C |n|^{\frac{1}{2}} e^{\sup_{x_1 \in (-\frac{7R}{24}, -\frac{R}{4})} \{\varphi_{k_n}\}} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les propriétés de localisation du gradient de la fonction de coupure η et la borne (4.104).

En bornant la fonction poids $e^{\varphi_{k_n}}$ par le haut et par le bas dans (4.100), nous obtenons pour tout $n \geq \tau_3(V, W_1, W_2)$ que

$$e^{\inf_{\mathcal{O}}\{\varphi_{k_n}\}} \|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C|n|e^{\sup_{\omega}\{\varphi_{k_n}\}} \|u\|_{H^1(\omega)} + Ce^{\sup_{x_1 \in (-\frac{7R}{24}, -\frac{R}{4})}\{\varphi_{k_n}\}} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

En utilisant ensuite les propriétés (4.80), nous déduisons qu'il existe deux constantes positives A et B telles que pour tout $n \geq \tau_3(V, W_1, W_2)$,

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq Ce^{An} \|u\|_{H^1(\omega)} + Ce^{-Bn} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

En optimisant le membre de droite par rapport à $n \geq \tau_3(V, W_1, W_2)$, nous obtenons

$$\|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C \|u\|_{H^1(\omega)}^{\frac{B}{A+B}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{A}{A+B}} \exp(C\tau_3(V, W_1, W_2)).$$

Ceci conclut la preuve du lemme 4.4.1. □

Remarque 4.4.4. *Il est clair d'après la preuve ci-dessus que, si V est la somme finie de potentiels $V_i \in L^{p_i}(\Omega)$, l'estimation (4.3) reste valable en remplaçant $\|V\|_{L^p(\Omega)}^{\gamma(p)}$ par $\sum_i \|V_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\gamma(p_i)}$.*

4.5 Autres géométries et preuve du théorème 4.1.1

Cette section est consacrée à la preuve du théorème 4.1.1. Nous allons le faire en utilisant plusieurs configurations géométriques, jusqu'à une estimation quantitative des trois boules.

4.5.1 Une boule observée depuis un voisinage de sa frontière

Lemme 4.5.1. *Soit $R > 0$ et $d \geq 3$. Nous considérons la configuration géométrique suivante (voir la Figure 4.2) :*

$$\Omega = \mathcal{A}_0\left(\frac{R}{4}, 2R\right), \quad \mathcal{O} = \mathcal{A}_0\left(\frac{R}{2}, 2R\right), \quad \omega = \mathcal{A}_0(R, 2R).$$

(Ici, $\mathcal{A}_0(r_1, r_2)$ désigne la couronne $B_0(r_2) \setminus B_0(r_1)$.)

Il existe des constantes $C = C(R, d) > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ dépendant uniquement de R et d de sorte que toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de (4.1) avec (V, W_1, W_2) comme dans (4.2), satisfait l'estimation de prolongement unique quantitative (4.3) avec γ et δ comme dans (4.4).

Démonstration. La preuve du Lemme 4.5.1 découle directement du Lemme 4.4.1. Soit $x_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, et appliquons le Lemme 4.4.1 avec

$$\begin{aligned} \Omega_{x_0} &= B_0(2R) \cap \left\{ x \cdot x_0 < -\frac{R}{4} \right\}, & \mathcal{O}_{x_0} &= B_0\left(\frac{3R}{2}\right) \setminus \left\{ x \cdot x_0 < -\frac{R}{3} \right\}, \\ \omega_{x_0} &= (B_0(2R) \setminus B_0(R)) \cap \Omega_{x_0}. \end{aligned}$$

En conséquence, pour tout $x_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, il existe une constante $C_{x_0} > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\mathcal{O}_{x_0})} &\leq Ce^{C\left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)}\right)} \|u\|_{H^1(\omega_{x_0})}^{\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega_{x_0})}^{1-\alpha} \\ &\leq Ce^{C\left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)}\right)} \|u\|_{H^1(\omega)}^{\alpha} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

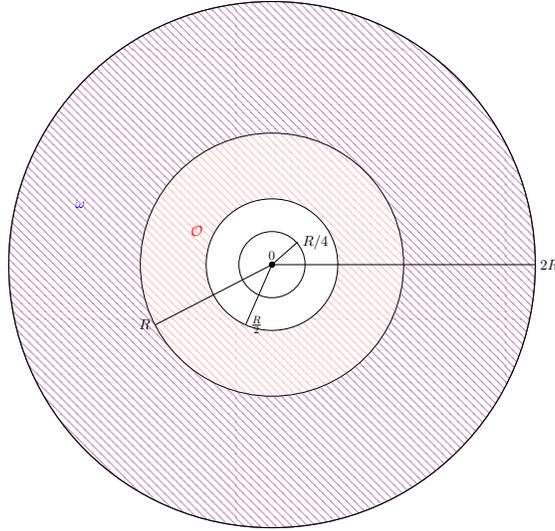


FIGURE 4.2 – La configuration géométrique du Lemme 4.5.1 : Propagation de la petitesse depuis un voisinage d’une boule vers son intérieur.

La constante C_{x_0} est en fait indépendante de x_0 en raison de l’invariance par rotation du problème. Par conséquent, nous la notons simplement C dans ce qui suit. En conséquence, le membre de droite de l’estimation précédente ne dépend pas de x_0 . En prenant le carré et en intégrant cette inégalité par rapport à x_0 sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} , nous obtenons une estimation sur

$$\int_{x \in B_0(\frac{3R}{2}) \setminus B_0(\frac{R}{2})} (|u|^2 + |\nabla u|^2) \rho_R(x) \, dx,$$

où $\rho_R(x) = \int_{x_0 \in \mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{1}_{x \cdot x_0 < -\frac{R}{3}}(x_0) \, dx_0$. Il est alors facile de vérifier que ρ_R est une fonction radiale, s’annulant pour $|x| \in (0, R/3)$, et croissante. Par conséquent, nous en déduisons

$$\|u\|_{H^1(B_0(\frac{3R}{2}) \setminus B_0(\frac{R}{2}))} \leq \frac{C}{\sqrt{\rho_R(\frac{R}{2})}} e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^\gamma + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^\delta + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^\delta \right)} \|u\|_{H^1(\omega)}^\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

L’estimation de u dans $H^1(B_0(2R) \setminus B_0(3R/2))$ est simple puisque $B_0(2R) \setminus B_0(3R/2) \subset \omega \subset \Omega$. \square

4.5.2 Une estimation de trois boules

Dans cette partie, nous prouvons une inégalité quantitative des trois boules :

Lemme 4.5.1 (Estimation des trois boules). *Soit $R > 0$ et $d \geq 3$. Nous considérons la configuration géométrique suivante (voir la Figure 4.3) :*

$$\Omega = B_0(4R), \quad \mathcal{O} = B_0(2R), \quad \text{et } \omega = B_0(R);$$

Alors, il existe des constantes $C = C(R, d) > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ dépendant uniquement de R et d de sorte que toute solution $u \in H^1(\Omega)$ de (4.1) avec (V, W_1, W_2) comme dans (4.2), satisfait l’estimation de prolongement unique quantitative (4.3) avec γ et δ comme dans (4.4).

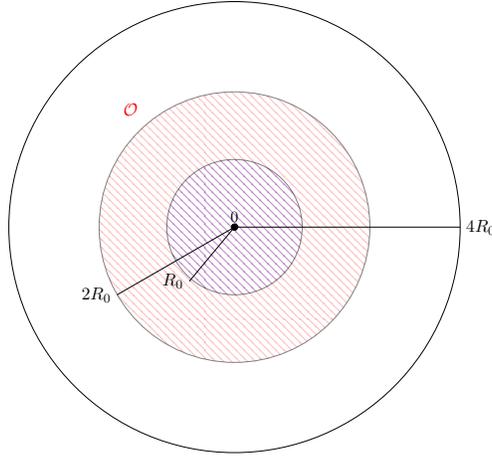


FIGURE 4.3 – La configuration géométrique du Lemme 4.5.1 : Propagation de la petitesse d’une boule vers son extérieur.

Démonstration. Étape 1 : Réflexion conforme. Tout d’abord, nous considérons la configuration géométrique suivante

$$\Omega_0 = \mathcal{A}_0\left(\frac{R}{2}, 4R\right), \quad \mathcal{O}_0 = \mathcal{A}_0\left(\frac{R}{2}, 2R\right), \quad \omega_0 = \mathcal{A}_0\left(\frac{R}{2}, R\right).$$

Nous notons par T la réflexion conforme par rapport à la sphère $S_0(R)$, donnée par :

$$\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \ni x \mapsto \tilde{x} = T(x) := \frac{R^2}{|x|^2}x, \quad (4.107)$$

L’images des ensembles Ω_0 , \mathcal{O}_0 et ω_0 sont alors données par :

$$\tilde{\Omega} = T\Omega_0 = \mathcal{A}_0\left(\frac{R}{4}, 2R\right), \quad \tilde{\mathcal{O}} = T\mathcal{O}_0 = \mathcal{A}_0\left(\frac{R}{2}, 2R\right), \quad \tilde{\omega} = T\omega_0 = \mathcal{A}_0(R, 2R). \quad (4.108)$$

Par conséquent, pour $u \in H^1(\Omega)$ une solution de (4.1) avec (V, W_1, W_2) comme dans (4.2), nous considérons la transformation de Kelvin de u (voir, par exemple, [Wer81]),

$$\tilde{u}_R(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{(d-2)} u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right), \quad x \in \tilde{\Omega}. \quad (4.109)$$

Par un calcul classique détaillé dans l’appendice 4.6.1, en utilisant la règle de chaîne, nous pouvons vérifier que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\partial_{x_i} \tilde{u}_R(x) = -\frac{(d-2)x_i}{|x|^2} \tilde{u}_R(x) + \left(\frac{R}{|x|}\right)^d \sum_{j=1}^d \left(\delta_{ij} - 2\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) \partial_{x_j} u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right), \quad x \in \tilde{\Omega},$$

et

$$\Delta \tilde{u}_R(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{(d+2)} \Delta u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right), \quad x \in \tilde{\Omega}.$$

Nous considérons ensuite les potentiels suivants

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{R,j}(x) &:= \frac{R^2}{|x|^2} \left(W_j \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right) - 2x \cdot W_j \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right) \frac{x}{|x|^2} \right), \quad j \in \{1, 2\}, \\ \widetilde{V}_R(x) &:= \underbrace{\frac{R^4}{|x|^4} \left(V \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right) \right)}_{=:\widetilde{V}_{R,1}} + \frac{(d-2)}{|x|^2} x \cdot \left(\widetilde{W}_{R,1}(x) + \widetilde{W}_{R,2}(x) \right).\end{aligned}$$

En conséquence, $u \in H^1(\Omega)$ est une solution de (4.1) avec (V, W_1, W_2) si et seulement si u_R donné par (4.109) résout

$$\Delta \widetilde{u}_R = \widetilde{V}_R \widetilde{u}_R + \widetilde{W}_{R,1} \cdot \nabla \widetilde{u}_R + \operatorname{div} \left(\widetilde{W}_{R,2} \widetilde{u}_R \right) \quad \text{dans } \widetilde{\Omega}.$$

Étape 2 : Application du Lemme 4.5.1. En appliquant le Lemme 4.5.1 à \widetilde{u}_R avec la configuration géométrique définie dans (4.108) (accompagnée de la Remarque 4.4.4), il existe $C > 0$ dépendant uniquement de d et R tel que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_R\|_{H^1(\widetilde{\mathcal{O}})} \\ \leq C e^C \left(\|\widetilde{V}_{R,1}\|_{L^{q_0}(\widetilde{\Omega})}^{\gamma(q_0)} + \|\widetilde{W}_{R,1}\|_{L^{q_1}(\widetilde{\Omega})}^{\gamma(q_1)} + \|\widetilde{W}_{R,2}\|_{L^{q_2}(\widetilde{\Omega})}^{\gamma(q_2)} + \|\widetilde{W}_{R,1}\|_{L^{q_1}(\widetilde{\Omega})}^{\delta(q_1)} + \|\widetilde{W}_{R,2}\|_{L^{q_2}(\widetilde{\Omega})}^{\delta(q_2)} \right) \|\widetilde{u}_R\|_{H^1(\widetilde{\omega})}^\alpha \|\widetilde{u}_R\|_{H^1(\widetilde{\Omega})}^{1-\alpha},\end{aligned}$$

avec γ et δ tels que définis dans (4.4). Ensuite, en utilisant le changement de variables $y = (R/|x|)^2 x$, on peut vérifier que

$$\begin{aligned}\|\widetilde{W}_{R,j}\|_{L^{q_j}(\widetilde{\Omega})} &\simeq \|W_j\|_{L^{q_j}(\Omega_0)}, \quad j \in \{1, 2\}, \\ \|\widetilde{V}_{R,1}\|_{L^{q_0}(\widetilde{\Omega})} &\simeq \|V\|_{L^{q_0}(\Omega_0)}, \\ \|\widetilde{u}_R\|_{H^1(\widetilde{\Pi})} &\simeq \|u\|_{H^1(T^{-1}\Pi)}, \quad \Pi \in \{\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{O}}, \widetilde{\omega}\},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que le Jacobien¹ de l'inversion T^{-1} ($= T$) est borné dans $\widetilde{\Omega}$.

Puisque $\gamma(q) \leq \delta(q)$ pour tout $q \in (d, \infty]$, il existe une constante positive C dépendant uniquement de d et R , telle que

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^1(\mathcal{O}_0)} &\leq C e^C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega_0)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega_0)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega_0)}^{\delta(q_2)} \right) \|u\|_{H^1(\omega_0)}^\alpha \|u\|_{H^1(\Omega_0)}^{1-\alpha} \\ &\leq C e^C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} \right) \|u\|_{H^1(\omega)}^\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Pour conclure le Lemme 4.5.1, il faut également obtenir une estimation similaire pour $\|u\|_{H^1(B_0(R/4))}$; cette dernière estimation est évidente puisque $B_0(R/4) \subset \omega \subset \Omega$. La preuve du Lemme 4.5.1 est donc terminée. \square

4.5.3 Le cas général : Preuve du théorème 4.1.1

Démonstration du théorème 4.1.1. La stratégie suit les mêmes lignes que celle de [LRLR22a, Théorème 5.6], voir aussi [ELB23, Théorème 1.2], et est basée sur les idées classiques selon lesquelles les estimations des trois boules permettent de propager l'information.

1. Les coefficients $a_{ij}(y)$ du Jacobien de l'inverse T^{-1} sont donnés par : $(R/|y|)^2 (\delta_{ij} - 2y_i y_j / |y|^2)$.

Étape 1 : Propagation de la petitesse dans les voisinages des points y dans $\overline{\mathcal{O}}$. Rappelons la condition géométrique **(GC)** : Pour tout $y \in \overline{\mathcal{O}}$, il existe $x_0 \in \omega$, $r_y > 0$ et un chemin lisse γ_y de longueur finie tel que $\gamma_y(0) = x_0$, $\gamma_y(1) = y$, et $\cup_{s \in [0,1]} B_{\gamma_y(s)}(r_y) \subset \Omega$.

En conséquence, pour $y \in \overline{\mathcal{O}}$, nous prenons un tel chemin γ_y et définissons $R_y = \min\{r_y/4, r_0\}$, où r_0 est tel que $B_{x_0}(r_0) \subset \omega$.

Nous définissons une séquence $(x_{(j)})_j$, pour $j \geq 0$, par $x_{(j)} = \gamma_y(t_j)$ où $t_0 = 0$ et, pour $j \geq 1$,

$$t_j = \begin{cases} \inf A_j & \text{si } A_j \neq \emptyset, \\ 1 & \text{si } A_j = \emptyset, \end{cases} \quad \text{où } A_j = \left\{ \sigma \in (t_{j-1}, 1] ; \gamma_y(\sigma) \notin B_{x_{(j-1)}}(R_y) \right\}.$$

La séquence $(x_{(j)})_j$ est finie puisque la longueur de γ_y est finie. Soit $(x_{(0)}, \dots, x_{(N_y)})$ une telle séquence avec $x_{(N_y)} = y$. Notons que nous avons $B_{x_{(j+1)}}(R_y) \subset B_{x_{(j)}}(2R_y) \subset B_{x_{(j)}}(4R_y) \subset \Omega$ pour $j = 0, \dots, N_y - 1$, en raison du choix que nous avons fait pour R_y ci-dessus. Par le Lemme 4.5.1, il existe $C > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$ tels que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(B_{x_{(j+1)}}(R_y))} &\leq \|u\|_{H^1(B_{x_{(j)}}(2R_y))} \\ &\leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} \right)} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha} \|u\|_{H^1(B_{x_{(j)}}(R_y))}^{\alpha}, \end{aligned}$$

pour $j = 0, \dots, N_y - 1$. En itérant cette estimation, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\|u\|_{H^1(B_y(R_y))} \\ &\leq C^{\sum_{j=0}^{N_y} \alpha^j} e^{C \left(\sum_{j=0}^{N_y} \alpha^j \right) \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|V_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}^{\gamma_2(p_2)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} \right)} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha^{N_y}} \|u\|_{H^1(B_{x_{(0)}}(R_y))}^{\alpha^{N_y}} \\ &\leq C_y e^{C_y \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|V_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}^{\gamma_2(p_2)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} \right)} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha_y} \|u\|_{H^1(\omega)}^{\alpha_y}. \end{aligned}$$

Étape 2 : Argument de compacité. En raison de la compacité de $\overline{\mathcal{O}}$, nous pouvons choisir un nombre fini de boules $(B_{y_j}(R_{y_j}/2))_{j \in \{1, \dots, p\}}$ avec $y_j \in \overline{\mathcal{O}}$ et R_{y_j} comme ci-dessus, de sorte que $\overline{\mathcal{O}} \subset \cup_{j \in \{1, \dots, p\}} B_{y_j}(R_{y_j}/2)$. Nous construisons ensuite une partition de l'unité de $\overline{\mathcal{O}}$ en choisissant des fonctions lisses $(\chi_j)_{0 \leq j \leq p}$, chacune étant supportée dans $B_{y_j}(R_{y_j})$, telles que

$$\sum_{j=1}^p \chi_j = 1 \text{ dans un voisinage de } \overline{\mathcal{O}}, \quad 0 \leq \chi_j \leq 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq C \sum_{j=1}^p \|u\|_{H^1(\text{supp } \chi_j)} \leq C \sum_{j=1}^p \|u\|_{H^1(B_{y_j}(R_{y_j}))} \\ &\leq C e^{C \left(\|V\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{\gamma(q_0)} + \|V_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}^{\gamma_2(p_2)} + \|W_1\|_{L^{q_1}(\Omega)}^{\delta(q_1)} + \|W_2\|_{L^{q_2}(\Omega)}^{\delta(q_2)} \right)} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha^N} \|u\|_{H^1(\omega)}^{\alpha^N}, \end{aligned}$$

avec $\alpha = \min_{j \in \{1, \dots, p\}} \{\alpha_{y_j}\}$. Cela conclut la preuve du théorème 4.1.1. \square

4.6 Appendice

4.6.1 À propos de transformation de Kelvin

Pour tout $R > 0$, nous considérons la transformée de Kelvin de $u : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ (voir, par exemple [Wer81]),

$$\tilde{u}_R(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{(d-2)} u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right).$$

Il est bien connu que si u est une fonction harmonique, alors \tilde{u}_R est harmonique. C'est due à la suivante relation :

$$\Delta \tilde{u}_R(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{(d+2)} \Delta u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right). \quad (4.110)$$

Notre objectif dans cette partie est de démontrer cette égalité utilisée dans la preuve du Lemme 4.5.1. Dans les calculs suivants, nous prendrons $h_R(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{d-2}$.

On dérive $\tilde{u}_R(x) = h_R(x)u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right)$ par rapport à x_i , pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$\partial_{x_i} \tilde{u}_R(x) = (\partial_{x_i} h_R)(x)u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) + h_R(x) \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} u)\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) \partial_{x_i} \left(x_j \frac{R^2}{|x|^2}\right).$$

Puisque, $(\partial_{x_i} h_R)(x) = -\frac{(d-2)x_i}{|x|^2} \left(\frac{R}{|x|}\right)^{d-2}$ et $\partial_{x_i} \left(x_j \frac{R^2}{|x|^2}\right) = \frac{R^2}{|x|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{|x|^2}\right)$, on a alors

$$\begin{aligned} (\nabla \tilde{u}_R)_i(x) &= -\frac{(d-2)x_i}{|x|^2} \tilde{u}_R(x) + \left(\frac{R}{|x|}\right)^d \sum_{j=1}^d \left(\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{|x|^2}\right) \partial_{x_j} u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) \\ &= -\frac{(d-2)x_i}{|x|^2} \tilde{u}_R(x) + \left(\frac{R}{|x|}\right)^d (\nabla u)_i\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) - \left(\frac{R}{|x|}\right)^d \sum_{j=1}^d \left(\frac{2x_i x_j}{|x|^2}\right) \partial_{x_j} u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a pour tout $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C}^d)$

$$\operatorname{div}(f \tilde{u}_R)(x) = \operatorname{div}(f) \tilde{u}_R(x) + f \cdot \nabla \tilde{u}_R(x).$$

On dérive une nouvelle fois par rapport à x_i pour obtenir

$$\begin{aligned} \partial_{x_i x_i}^2 \tilde{u}_R(x) &= \partial_{x_i}^2 h_R(x) u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) + 2\partial_{x_i} h_R(x) \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} u)\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) \partial_{x_i} \left(x_j \frac{R^2}{|x|^2}\right) \\ &\quad + h_R(x) \sum_{j,k=1}^d \partial_{x_j} \partial_{x_k} u\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) \partial_{x_i} \left(x_j \frac{R^2}{|x|^2}x_k\right) \partial_{x_i} \left(x_k \frac{R^2}{|x|^2}x_j\right) \\ &\quad + h_R(x) \sum_{j=1}^d (\partial_{x_j} u)\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) \partial_{x_i}^2 \left(\frac{R^2}{|x|^2}x_j\right). \end{aligned}$$

Notez que h_R est harmonique, et on a $\partial_{x_i} \left(x_j \frac{R^2}{|x|^2} \right) = \frac{R^2}{|x|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{|x|^2} \right)$. Ensuite, nous calculons séparément

$$\begin{aligned} & -2 \left(\frac{R}{|x|} \right)^{d-2} \frac{(d-2)}{|x|^2} \sum_{i,j=1}^d x_i \partial_{x_i} \left(x_j \frac{R^2}{|x|^2} \right) (\partial_{x_j} u) \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right) \\ & = 2 \left(\frac{R}{|x|} \right)^d \frac{(d-2)}{|x|^2} \sum_j x_j (\partial_{x_j} u) \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right) = 2 \left(\frac{R}{|x|} \right)^d \frac{(d-2)}{|x|^2} x \cdot (\nabla u) \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^d \partial_{x_j} \partial_{x_k} u \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right) \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \left(x_j \frac{R^2}{|x|^2} x_j \right) \partial_{x_i} \left(x_k \frac{R^2}{|x|^2} x_j \right) \\ & = \sum_{j,k=1}^d \partial_{x_j} \partial_{x_k} u \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right) \delta_{jk} \left(\frac{R}{|x|} \right)^4 = \left(\frac{R}{|x|} \right)^4 \Delta u \left(\frac{R^2}{|x|^2} x \right). \end{aligned}$$

Finalement, nous devons calculer $\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 \left(\frac{R^2}{|x|^2} x_j \right)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 \left(\frac{R^2}{|x|^2} x_j \right) & = R^2 \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \left(\frac{\delta_{ij} |x|^2 - 2x_i x_j}{|x|^4} \right) \\ & = R^2 \sum_{i=1}^d \frac{(2\delta_{ij} x_i - 2(\delta_{ij} + 1)x_j) |x|^4 - (\delta_{ij} |x|^2 - 2x_i x_j) 4|x|^2 x_i}{|x|^8} \\ & = R^2 \frac{(-2d + 4)x_j}{|x|^4}. \end{aligned}$$

En combinant tous ces résultats, nous concluons la relation (4.110).

Bibliographie

- [ABG81] W. O. Amrein, A.-M. Berthier, and V. Georgescu. L^p -inequalities for the Laplacian and unique continuation. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 31(3) :vii, 153–168, 1981.
- [ABZ17] T. Alazard, N. Burq, and C. Zuily. A stationary phase type estimate. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(7) :2871–2880, 2017.
- [AF03] R. A. Adams and J. F. Fournier. *Sobolev Spaces (Pure and applied mathematics ; v. 140)*. Elsevier, 2003.
- [Ali83] S. Alinhac. Non-unicité du problème de Cauchy. *Ann. of Math. (2)*, 117(1) :77–108, 1983.
- [Aro56] N. Aronszajn. Sur l’unicité du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242 :723–725, 1956.
- [Bar00] V. Barbu. Exact controllability of the superlinear heat equation. *Appl. Math. Optim.*, 42(1) :73–89, 2000.
- [BCD11] H. Bahouri, J. Y. Chemin, and R. Danchin. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, volume 343 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [BDBE13] L. Baudouin, M. De Buhan, and S. Ervedoza. Global Carleman estimates for waves and applications. *Comm. Partial Differential Equations*, 38(5) :823–859, 2013.
- [BF12] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [BKRS88] B. Barcelo, C. E. Kenig, A. Ruiz, and C.-D. Sogge. Weighted Sobolev inequalities and unique continuation for the Laplacian plus lower order terms. *Illinois Journal of Mathematics*, 32(2) :230–245, 1988.
- [BL12] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces : an introduction*, volume 223. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Bur98] N. Burq. Décroissance de l’énergie locale de l’équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel. *Acta Math.*, 180(1) :1–29, 1998.
- [Cal58] A.-P. Calderón. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. *Amer. J. Math.*, 80 :16–36, 1958.

- [Car39] T. Carleman. Sur un problème d'unicité pur les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 26(17) :9, 1939.
- [CET24] P. Caro, S. Ervedoza, and L. Thabouti. Quantification of unique continuation for the Laplace operator with rough potentials. *in preparation.*, 2024.
- [Dav20] B. Davey. Quantitative unique continuation for Schrödinger operators. *J. Funct. Anal.*, 279(4) :108566, 23, 2020.
- [DCFL⁺17] M. Di Cristo, E. Francini, C.-L. Lin, S. Vessella, and J.-N. Wang. Carleman estimate for second order elliptic equations with Lipschitz leading coefficients and jumps at an interface. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 108(2) :163–206, 2017.
- [DE22] J. Dardé and S. Ervedoza. A short introduction to Carleman estimates. *HAL preprint hal-03619905v1*, 2022.
- [DET23] B. Dehman, S. Ervedoza, and L. Thabouti. L^p Carleman estimates for elliptic boundary value problems and applications to the quantification of unique continuation. *to appear in Annales Henri Lebesgue*, 2023.
- [DSF05] D. Dos Santos Ferreira. Sharp L^p Carleman estimates and unique continuation. *Duke Math. J.*, 129(3) :503–550, 2005.
- [DSFKSU09] D. Dos Santos Ferreira, C.-E. Kenig, M. Salo, and G. Uhlmann. Limiting Carleman weights and anisotropic inverse problems. *Invent. Math.*, 178(1) :119–171, 2009.
- [DZ19] B. Davey and J. Zhu. Quantitative uniqueness of solutions to second-order elliptic equations with singular lower order terms. *Comm. Partial Differential Equations*, 44(11) :1217–1251, 2019.
- [DZZ08] T. Duyckaerts, X. Zhang, and E. Zuazua. On the optimality of the observability inequalities for parabolic and hyperbolic systems with potentials. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 25(1) :1–41, 2008.
- [ELB23] S. Ervedoza and K. Le Balc'h. Cost of observability inequalities for elliptic equations in 2-d with potentials and applications to control theory. *Communications in Partial Differential Equations*, pages 1–55, 2023.
- [Esc00] L. Escauriaza. Carleman inequalities and the heat operator. *Duke Mathematical Journal*, 104(1) :113–127, 2000.
- [EV01] L. Escauriaza and L. Vega. Carleman inequalities and the heat operator II. *Indiana University mathematics journal*, pages 1149–1169, 2001.
- [FCGIP04] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov, and J.-P. Puel. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 83(12) :1501–1542, 2004.
- [FCZ00] E. Fernández-Cara and E. Zuazua. Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 17(5) :583–616, 2000.
- [FI96] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34 of *Lecture Notes Series*. Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [FL96] C. Fabre and G. Libeau. Prolongement unique des solutions. *Communications in Partial Differential Equations*, 21(3-4) :573–596, 1996.

- [FLVW16] E. Francini, C.-L. Lin, S. Vessella, and J.-N. Wang. Three-region inequalities for the second order elliptic equation with discontinuous coefficients and size estimate. *J. Differential Equations*, 261(10) :5306–5323, 2016.
- [GL86] N. Garofalo and F. H. Lin. Monotonicity properties of variational integrals, A_p weights and unique continuation. *Indiana University Mathematics Journal*, 35(2) :245–268, 1986.
- [GV95] J. Ginibre and G. Velo. Generalized strichartz inequalities for the wave equation. *Journal of functional analysis*, 133(1) :50–68, 1995.
- [Hö58] L. Hörmander. On the uniqueness of the Cauchy problem. *Math. Scand.*, 6 :213–225, 1958.
- [Hö59] L. Hörmander. On the uniqueness of the Cauchy problem. II. *Math. Scand.*, 7 :177–190, 1959.
- [Hö63] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*, volume Band 116 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Academic Press, Inc., Publishers, New York ; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
- [Hö83] L. Hörmander. Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 8(1) :21–64, 1983.
- [Hö03] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin ; MR1065993 (91m :35001a)].
- [Hö09] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. IV*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Fourier integral operators, Reprint of the 1994 edition.
- [HKL21] S. Ham, Y. Kwon, and S. Lee. Uniqueness in the Calderón problem and bilinear restriction estimates. *Journal of Functional Analysis*, 281(8) :109119, 2021.
- [Hol01] E. A. Holmgren. *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen*. 1901.
- [IK04] A.-D. Ionescu and C.-E. Kenig. L^p Carleman inequalities and uniqueness of solutions of nonlinear Schrödinger equations. *Acta Math.*, 193(2) :193–239, 2004.
- [IP03] O. Y. Imanuvilov and J. P. Puel. Global carleman estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems. *International Mathematics Research Notices*, 2003(16) :883–913, 2003.
- [Isa93] V. Isakov. Carleman type estimates in an anisotropic case and applications. *J. Differential Equations*, 105(2) :217–238, 1993.
- [Isa98] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, volume 127 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [IY98] O.-Y. Imanuvilov and M. Yamamoto. Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate. *Inverse Problems*, 14(5) :1229–1245, 1998.

- [IY01] O.-Y. Imanuvilov and M. Yamamoto. Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations. volume 17, pages 717–728. 2001. Special issue to celebrate Pierre Sabatier’s 65th birthday (Montpellier, 2000).
- [IY03] O.-Y. Imanuvilov and M. Yamamoto. Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 39(2) :227–274, 2003.
- [IY05] O.-Y. Imanuvilov and M. Yamamoto. Carleman estimates for the non-stationary Lamé system and the application to an inverse problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11(1) :1–56, 2005.
- [Jer86] D. Jerison. Carleman inequalities for the Dirac and Laplace operators and unique continuation. *Adv. in Math.*, 62(2) :118–134, 1986.
- [JK85] D. Jerison and C. E. Kenig. Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrodinger operators. *Annals of Mathematics*, 121(3) :463–488, 1985.
- [JKL22] E. Jeong, Y. Kwon, and S. Lee. Carleman estimates and boundedness of associated multiplier operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 47(4) :774–796, 2022.
- [KN00] C. E. Kenig and N. Nadirashvili. A counterexample in unique continuation. *Mathematical Research Letters*, 7(5) :625–630, 2000.
- [KRS87] C. E. Kenig, A. Ruiz, and C.-D. Sogge. Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators. *Duke Math. J.*, 55(2) :329–347, 1987.
- [KRS16] H. Koch, A. Rüland, and W. Shi. The variable coefficient thin obstacle problem : Carleman inequalities. *Adv. Math.*, 301 :820–866, 2016.
- [KS88] C.-E. Kenig and C.-D. Sogge. A note on unique continuation for Schrödinger’s operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 103(2) :543–546, 1988.
- [KSU07] C.-E. Kenig, J. Sjöstrand, and G. Uhlmann. The Calderón problem with partial data. *Ann. of Math. (2)*, 165(2) :567–591, 2007.
- [KT98] M. Keel and T. Tao. Endpoint Strichartz estimates. *American Journal of Mathematics*, 120(5) :955–980, 1998.
- [KT01] H. Koch and D. Tataru. Carleman estimates and unique continuation for second-order elliptic equations with nonsmooth coefficients. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 54(3) :339–360, 2001.
- [KT02] H. Koch and D. Tataru. Sharp counterexamples in unique continuation for second order elliptic equations. *J. Reine Angew. Math.*, 542 :133–146, 2002.
- [KT05a] H. Koch and D. Tataru. Dispersive estimates for principally normal pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(2) :217–284, 2005.
- [KT05b] H. Koch and D. Tataru. L^p eigenfunction bounds for the Hermite operator. *Duke Math. J.*, 128(2) :369–392, 2005.
- [KT09] H. Koch and D. Tataru. Carleman estimates and unique continuation for second order parabolic equations with nonsmooth coefficients. *Communications in Partial Differential Equations*, 34(4) :305–366, 2009.

- [Léa10] M. Léautaud. Spectral inequalities for non-selfadjoint elliptic operators and application to the null-controllability of parabolic systems. *J. Funct. Anal.*, 258(8) :2739–2778, 2010.
- [Leb96] G. Lebeau. équation des ondes amorties. In *Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993)*, volume 19 of *Math. Phys. Stud.*, pages 73–109. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.
- [Ler19] N. Lerner. *Carleman inequalities*, volume 353 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Cham, 2019. An introduction and more.
- [LL23] C. Laurent and M. Léautaud. Lectures on unique continuation for waves. *arXiv preprint arXiv :2307.02155*, 2023.
- [LM12] J. L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications : Vol. 1*, volume 181. Springer Science & Business Media, 2012.
- [LR95] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Communications in Partial Differential Equations*, 20(1-2) :335–356, 1995.
- [LR97] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Duke Math. J.*, 86(3) :465–491, 1997.
- [LRL12] J. Le Rousseau and G. Lebeau. On Carleman estimates for elliptic and parabolic operators. applications to unique continuation and control of parabolic equations***. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 18(3) :712–747, 2012.
- [LRL13] J. Le Rousseau and N. Lerner. Carleman estimates for anisotropic elliptic operators with jumps at an interface. *Anal. PDE*, 6(7) :1601–1648, 2013.
- [LRLR22a] J. Le Rousseau, G. Lebeau, and L. Robbiano. *Elliptic Carleman estimates and applications to stabilization and controllability. Vol. I. Dirichlet boundary conditions on Euclidean space*, volume 97 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser/Springer, Cham, [2022] ©2022. PNLDE Subseries in Control.
- [LRLR22b] J. Le Rousseau, G. Lebeau, and L. Robbiano. *Elliptic Carleman estimates and applications to stabilization and controllability. Vol. II. General boundary conditions on Riemannian manifolds*, volume 98 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser/Springer, Cham, [2022] ©2022. PNLDE Subseries in Control.
- [LRR10] J. Le Rousseau and L. Robbiano. Carleman estimate for elliptic operators with coefficients with jumps at an interface in arbitrary dimension and application to the null controllability of linear parabolic equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 195(3) :953–990, 2010.
- [LRR11] J. Le Rousseau and L. Robbiano. Local and global Carleman estimates for parabolic operators with coefficients with jumps at interfaces. *Invent. Math.*, 183(2) :245–336, 2011.
- [Mü54] C. Müller. On the behavior of the solutions of the differential equation $\Delta U = F(x, U)$ in the neighborhood of a point. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 :505–515, 1954.

- [Man02] N. Mandache. A counterexample to unique continuation in dimension two. *Comm. Anal. Geom.*, 10(1) :1–10, 2002.
- [Mes91] V. Z. Meshkov. On the possible rate of decrease at infinity of the solutions of second-order partial differential equations. *Mat. Sb.*, 182(3) :364–383, 1991.
- [Mil74] K. Miller. Nonunique continuation for uniformly parabolic and elliptic equations in self-adjoint divergence form with hölder continuous coefficients. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 54(2) :105–117, 1974.
- [MV12] E. Malinnikova and S. Vessella. Quantitative uniqueness for elliptic equations with singular lower order terms. *Math. Ann.*, 353(4) :1157–1181, 2012.
- [Pli63] A. Plíš. On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 11 :95–100, 1963.
- [Saw84] E.-T. Sawyer. Unique continuation for Schrödinger operators in dimension three or less. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 34, pages 189–200, 1984.
- [SM93] E.-M. Stein and T. S. Murphy. *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 3. Princeton University Press, 1993.
- [Sog88] C.-D. Sogge. Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds. *J. Funct. Anal.*, 77(1) :123–138, 1988.
- [Sog89] C.-D. Sogge. Oscillatory integrals and unique continuation for second order elliptic differential equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3) :491–515, 1989.
- [Sog90] C.-D. Sogge. Strong uniqueness theorems for second order elliptic differential equations. *Amer. J. Math.*, 112(6) :943–984, 1990.
- [Sog92] C.-D. Sogge. Uniqueness in Cauchy problems for hyperbolic differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333(2) :821–833, 1992.
- [Sog17] C.-D. Sogge. *Fourier integrals in classical analysis*, volume 210. Cambridge University Press, 2017.
- [SS82] J.-C. Saut and B. Scheurer. Sur l’unicité du problème de Cauchy et le prolongement unique pour des équations elliptiques à coefficients non localement bornés. *J. Differential Equations*, 43(1) :28–43, 1982.
- [Ste16] E.-M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions (PMS-30), Volume 30*. Princeton university press, 2016.
- [Str77] R.-S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3) :705–714, 1977.
- [Tao04] T. Tao. Some recent progress on the restriction conjecture. In *Fourier analysis and convexity*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 217–243. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [Tat99] D. Tataru. Carleman estimates, unique continuation and applications. *Notes downloadable from <http://math.berkeley.edu/tataru/ucp.html>*, 1999.
- [Tay81] M.-E. Taylor. *Pseudodifferential operators*, volume No. 34 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.

- [Tha98] S. Thangavelu. Hermite and special Hermite expansions revisited. *Duke Math. J.*, 94(2) :257–278, 1998.
- [Tom75] P.-A. Tomas. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81 :477–478, 1975.
- [Tre70] F. Trèves. *Linear partial differential equations*. Gordon and Breach, New York, 1970.
- [Wer81] J. Wermer. *Potential theory*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg and New York, 1981.
- [Wol92] T.-H. Wolff. A property of measures in \mathbf{R}^N and an application to unique continuation. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 2(2) :225–284, 1992.
- [Wol93] T.-H. Wolff. Recent work on sharp estimates in second-order elliptic unique continuation problems. *J. Geom. Anal.*, 3(6) :621–650, 1993.