



**HAL**  
open science

# Modélisation d'interface endommageable en dynamique explicite dédiée au démoulage de pneumatiques

Paul Larousse

► **To cite this version:**

Paul Larousse. Modélisation d'interface endommageable en dynamique explicite dédiée au démoulage de pneumatiques. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2024. Français. NNT : 2024ISAL0098 . tel-04931117

**HAL Id: tel-04931117**

**<https://theses.hal.science/tel-04931117v1>**

Submitted on 5 Feb 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2024ISAL0098

**THESE de DOCTORAT DE L'INSA LYON,  
membre de l'Université de Lyon**

**Ecole Doctorale N° ED 162  
Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique**

**Spécialité : Génie Mécanique**

Soutenue publiquement le 29/11/2024, par :

**Paul LAROUSSE**

---

# **Modélisation d'interface endommageable en dynamique explicite dédiée au démoulage de pneumatiques**

---

Devant le jury composé de :

Jean-François Deü	Professeur	CNAM	<b>Président</b>
Isabelle Ramière	Directrice de Recherche	CEA Cadarache	<b>Rapporteuse</b>
Laurent Monasse	Docteur HDR	Université Côte d'Azur	<b>Rapporteur</b>
Stéphane Lejeunes	Ingénieur de Recherche HDR	Centrale Marseille	<b>Examineur</b>
Anthony Gravouil	Professeur	INSA Lyon	<b>Co-directeur de thèse</b>
David Dureisseix	Professeur	INSA Lyon	<b>Directeur de thèse</b>
Jean Di Stasio	Docteur	Michelin	<b>Invité</b>
Thomas Homolle	Ingénieur	Michelin	<b>Invité</b>



# Remerciements

Cette thèse a été réalisée au LaMCoS, laboratoire sur le campus de l'INSA de Lyon, en collaboration avec l'équipe SIM/ER chez Michelin. Les travaux ont été financés par Michelin à travers un contrat CIFRE (n° 2021/0957) de l'ANRT.

Je tiens en premier lieu à remercier l'équipe ER de Michelin de m'avoir fait confiance et d'avoir cru en mes compétences et capacités en me proposant une thèse au sein de leur équipe. Je tiens particulièrement à remercier Thomas Homolle, Charlie Douanla Lontsi et Gabriel Georges, présents depuis mes débuts chez Michelin. Ensuite, je souhaite sincèrement remercier Jean Di Stasio pour tous les échanges au cours de ces trois dernières années, pour la qualité de ses travaux, sur lesquels je me suis basé, et également l'ensemble de l'équipe ER. Merci à Arthur et Éric pour leur aide dans l'implémentation.

Évidemment je souhaite très sincèrement remercier mon encadrement académique, Anthony Gravouil et David Dureisseix qui ont été présents au quotidien, avec qui j'ai eu l'occasion d'avoir des discussions très constructives et pointues grâce auxquelles j'ai pu beaucoup apprendre. Je tiens particulièrement à les remercier, au même titre que l'encadrement industriel, de m'avoir accordé une certaine confiance et laissé une grande liberté dans l'organisation de mon travail.

Pour finir, je souhaite remercier l'ensemble des membres du LaMCoS, et plus particulièrement l'équipe SMC, pour ces trois années de partage au laboratoire autour de moments conviviaux. Une dédicace spéciale à mes amis de longue date, d'enfance qui se reconnaîtront. Enfin, merci à ma famille pour le soutien inconditionnel que vous m'apportez.

Référence : TH1155\_LAROUSSE Paul

L'INSA Lyon a mis en place une procédure de contrôle systématique via un outil de détection de similitudes (logiciel Compilatio). Après le dépôt du manuscrit de thèse, celui-ci est analysé par l'outil. Pour tout taux de similarité supérieur à 10%, le manuscrit est vérifié par l'équipe de FEDORA. Il s'agit notamment d'exclure les auto-citations, à condition qu'elles soient correctement référencées avec citation expresse dans le manuscrit.

Par ce document, il est attesté que ce manuscrit, dans la forme communiquée par la personne doctorante à l'INSA Lyon, satisfait aux exigences de l'Établissement concernant le taux maximal de similitude admissible.

**INSA LYON**

Campus LyonTech La Doua

20, avenue Albert Einstein - 69621 Villeurbanne cedex - France

Tél. +33 [0]4 72 43 83 83 - Fax +33 [0]4 72 43 85 00

[www.insa-lyon.fr](http://www.insa-lyon.fr)



## Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
ED 206 CHIMIE	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="https://www.edchimie-lyon.fr">https://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a>	<b>M. Stéphane DANIELE</b> C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69616 Villeurbanne <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
ED 341 E2M2	<b>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 <a href="mailto:secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr">secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sandrine CHARLES</b> Université Claude Bernard Lyon 1 UFR Biosciences Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69622 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:e2m2.codir@listes.univ-lyon1.fr">e2m2.codir@listes.univ-lyon1.fr</a>
ED 205 EDISS	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</b> <a href="http://ediss.universite-lyon.fr">http://ediss.universite-lyon.fr</a> Sec. : Bénédicte LANZA Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 <a href="mailto:secretariat.ediss@univ-lyon1.fr">secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Sylvie RICARD-BLUM</b> Laboratoire ICBMS - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tél : +33(0)4 72 44 82 32 <a href="mailto:sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr">sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</a>
ED 34 EDML	<b>MATÉRIAUX DE LYON</b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.44 <a href="mailto:yann.de-ordenana@ec-lyon.fr">yann.de-ordenana@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Stéphane BENAYOUN</b> Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 <a href="mailto:stephane.benayoun@ec-lyon.fr">stephane.benayoun@ec-lyon.fr</a>
ED 160 EEA	<b>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="https://edeea.universite-lyon.fr">https://edeea.universite-lyon.fr</a> Sec. : Philomène TRECOURT Bâtiment Direction INSA Lyon Tél : 04.72.43.71.70 <a href="mailto:secretariat.edeea@insa-lyon.fr">secretariat.edeea@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe DELACHARTRE</b> INSA LYON Laboratoire CREATIS Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 <a href="mailto:philippe.delachartre@insa-lyon.fr">philippe.delachartre@insa-lyon.fr</a>
ED 512 INFOMATHS	<b>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</b> <a href="http://edinformaths.universite-lyon.fr">http://edinformaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Hamamache KHEDDOUCI</b> Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tél : 04.72.44.83.69 <a href="mailto:direction.infomaths@listes.univ-lyon1.fr">direction.infomaths@listes.univ-lyon1.fr</a>
ED 162 MEGA	<b>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Philomène TRECOURT Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Direction INSA Lyon <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Etienne PARIZET</b> INSA Lyon Laboratoire LVA Bâtiment St. Exupéry 25 bis av. Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:etienne.parizet@insa-lyon.fr">etienne.parizet@insa-lyon.fr</a>
ED 483 ScSo	<b>ScSo<sup>1</sup></b> <a href="https://edsciencessociales.universite-lyon.fr">https://edsciencessociales.universite-lyon.fr</a> Sec. : Mélina FAVETON Tél : 04.78.69.77.79 <a href="mailto:melina.faveton@univ-lyon2.fr">melina.faveton@univ-lyon2.fr</a>	<b>M. Bruno MILLY</b> (INSA : J.Y. TOUSSAINT) Univ. Lyon 2 Campus Berges du Rhône 18, quai Claude Bernard 69365 LYON CEDEX 07 Bureau BEL 319 <a href="mailto:bruno.milly@univ-lyon2.fr">bruno.milly@univ-lyon2.fr</a>

1. ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Un problème de contact en dynamique résolu avec un schéma explicite</b>	<b>13</b>
1.1 Les grandeurs du problème . . . . .	13
1.2 Le principe des puissances virtuelles . . . . .	16
1.3 Résolution avec la méthode des éléments finis . . . . .	21
1.4 L'étude du contact . . . . .	24
1.4.1 Les conditions de contact . . . . .	25
1.4.2 Résolution des équations de la mécanique avec la gestion du contact . . . . .	27
1.5 La discrétisation temporelle : le schéma explicite CD-Lagrange . . . . .	31
1.5.1 La famille des schémas de Newmark . . . . .	31
1.5.2 Résolution d'un problème de contact . . . . .	35
1.5.3 Illustration en compression et cisaillement . . . . .	40
<b>2 Résolution d'un modèle de zones cohésives en dynamique explicite</b>	<b>45</b>
2.1 Le cadre thermodynamique du problème . . . . .	46
2.1.1 Premier principe de la thermodynamique . . . . .	46
2.1.2 Deuxième principe de la thermodynamique . . . . .	48
2.1.3 Modèle de comportement phénoménologique : les lois d'état et d'évolution . . . . .	49
2.2 Un modèle de zones cohésives pour décrire le contact . . . . .	53
2.2.1 Le modèle RCCM . . . . .	53
2.2.2 Intégration du modèle RCCM dans le cadre thermodynamique . . . . .	59
2.2.2.1 La partie normale du contact . . . . .	59
2.2.2.2 La partie tangentielle du contact . . . . .	60
2.2.2.3 La partie élastique endommageable de l'interface . . . . .	61
2.3 Résolution dans le formalisme explicite du CD-Lagrange . . . . .	65
2.4 Applications . . . . .	69



2.4.1	Le cas d'un modèle à un degré de liberté . . . . .	71
2.4.2	Le cube avec interface RCCM . . . . .	78
2.4.2.1	Sollicitation de traction . . . . .	79
2.4.2.2	Sollicitation de traction et cisaillement . . . . .	83
2.4.3	Le cas test du peeling . . . . .	88
<b>3</b>	<b>L'effet retard pour contrôler la vitesse d'endommagement</b>	<b>93</b>
3.1	Un modèle à effet retard avec terme de rappel . . . . .	94
3.1.1	Présentation du modèle . . . . .	94
3.1.2	Comparaison au modèle RCCM standard . . . . .	95
3.2	Un modèle à effet retard à vitesse limite . . . . .	99
3.2.1	Présentation du modèle . . . . .	99
3.2.2	Comparaison au modèle RCCM standard . . . . .	100
3.2.2.1	Le cube RCCM sollicité en traction . . . . .	101
3.2.2.2	Le cube RCCM sollicité en traction et cisaillement	104
3.2.2.3	Le test du Peeling . . . . .	106
3.3	Applications à d'autres lois de comportement pour le solide défor- mable . . . . .	109
3.3.1	Un modèle visco-élastique : le modèle de Kelvin-Voigt . . .	109
3.3.1.1	Présentation du modèle . . . . .	109
3.3.1.2	Résolution d'un modèle visco-élastique . . . . .	111
3.3.2	Modèle d'endommagement . . . . .	117
<b>4</b>	<b>Extension de la résolution aux grandes transformations</b>	<b>123</b>
4.1	Adaptation du cadre de résolution aux grandes transformations .	124
4.2	Le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff . . . . .	127
4.2.1	Un matériau hyper-élastique . . . . .	127
4.2.2	Le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité . . . .	134
4.3	Application industrielle : arrachement d'une lamelle . . . . .	139
4.3.1	Mise en donnée et résolution . . . . .	139
4.3.2	Implémentation dans un code semi-industriel : MEF++ . .	148
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>161</b>
	<b>Annexes</b>	<b>165</b>
	A1 : Dynamique explicite et plasticité en volume . . . . .	165
	A2 : Dynamique explicite et modèle d'usure d'Archard . . . . .	167
	A3 : Interface endommageable extrinsèque . . . . .	169
	<b>Bibliographie</b>	<b>172</b>

# Notations

TABLE 1 – Notations pour un système continu

$t$	: temps
$\Omega_0, \Omega_t$	: configuration initiale, configuration déformée à l'instant $t$
$\partial_u \Omega_0, \partial_F \Omega_0$	: bord de $\partial \Omega_0$ pour les conditions de Dirichlet et Neumann
$\partial_u \Omega_t, \partial_F \Omega_t$	: bord de $\partial \Omega_t$ pour les conditions de Dirichlet et Neumann
$\Gamma_0, \Gamma_t$	: bord potentiel de contact de $\partial \Omega_0$ et $\partial \Omega_t$
$\mathbf{x}, \mathbf{X}$	: position sur la configuration déformée et initiale
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ddot{\mathbf{u}}$	: champ de déplacement, vitesse et accélération
$\mathbf{F}, \mathbf{F}^T, \mathbf{D}$	: tenseur du gradient des déformations, sa transposée, tenseur des vitesses des déformations
$\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}}$	: tenseur des déformations de Green-Lagrange et sa dérivée temporelle
$\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$	: tenseur des déformations et sa dérivée sous l'hypothèse de petites perturbations
$\boldsymbol{\sigma}$	: tenseur des contraintes symétrique de Cauchy
$\mathbf{S}, \mathbf{\Pi}$	: second et premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
$\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot), \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\cdot)$	: opérateur gradient et divergence, $\nabla$ nommé nabla est l'opérateur différentiel vectoriel par rapport aux coordonnées en indice
$\rho, \mathbf{f}_d, \mathbf{F}_d$	: masse volumique, forces extérieures volumiques, forces extérieures surfaciques
$\mathbb{U}, \mathbb{V}$	: les espaces de fonction des solutions et des fonctions tests

TABLE 2 – Notations pour un système discret

$h$	:	pas de temps
$\mathbf{M}, \mathbf{K}$	:	matrice de masse et de rigidité
$\mathbf{F}_{\text{ext}}, \mathbf{F}_{\text{int}}$	:	contributions intégrées des forces extérieures et intérieures de dimension le nombre de degrés de liberté
$\mathbf{U}, \mathbf{V}$	:	vecteurs globaux de taille le nombre de degrés de liberté du déplacement et de la vitesse

TABLE 3 – Notations continues pour le contact unilatéral et frottant

$g(\mathbf{x})$	:	gap normal à la position $\mathbf{x}$
$\mathbf{n}, \mathbf{t}$	:	direction normale et tangentielle au solide rigide
$v_N, \mathbf{v}_T$	:	vitesse relative normale et tangentielle au solide rigide
$F_{c,N}, \mathbf{F}_{c,T}$	:	force normale due au contact unilatéral et tangentielle due au contact frottant
$\lambda$	:	multiplicateurs de Lagrange comprenant les forces associées au contact unilatéral et frottant
$\mu$	:	coefficient de frottement
$\langle \cdot \rangle_+, \langle \cdot \rangle_-$	:	valeur positive et négative

TABLE 4 – Notations discrètes pour le contact unilatéral et frottant

$\mathbf{g}$	:	vecteur comprenant les gaps normaux des différents nœuds potentiels de contact
$\mathbf{L}_N, \mathbf{L}_T$	:	opérateur de projection de la direction normale et tangentielle de contact sur les vecteurs globaux
$r_{c,N}, \mathbf{r}_{c,T}$	:	impulsion normale et tangentielle locales dues au contact unilatéral et frottant
$\mathbf{R}_c$	:	vecteur de taille le nombre de degrés de liberté comprenant les impulsions normales dues au contact unilatéral et tangentielles dues au contact frottant
$\mathbf{H}$	:	opérateur de Delassus

TABLE 5 – Notations continues pour le comportement élastique endommageable de l’interface

$g_N, g_T$	:	raideur normale et tangentielle de l’interface de contact
$\alpha_e, u_r$	:	limite élastique et de rupture de l’interface
$\alpha, \dot{\alpha}, v_r$	:	endommagement, vitesse d’évolution de l’endommagement et vitesse limite d’endommagement
$d$	:	état de l’endommagement
$[\mathbf{u}]$	:	saut de déplacement, soit le déplacement relatif entre le solide déformable et le solide rigide
$f, \dot{f}$	:	norme du saut de déplacement et sa dérivée temporelle

TABLE 6 – Notations discrètes pour le comportement élastique endommageable de l’interface

$\boldsymbol{\sigma}_{d,N}, \boldsymbol{\sigma}_{d,T}$	:	vecteur de contrainte normale et tangentielle associés au comportement élastique endommageable des différents nœuds de contact potentiel
$\mathbf{R}_d$	:	vecteur global de taille le nombre de degrés de liberté comprenant les impulsions associées au comportement élastique endommageable
$\mathbf{W}$	:	matrice comprenant sur sa diagonale les poids d’intégration des nœuds de l’interface



# Abstract

**Keywords :** Non-smooth contact dynamics, Explicit time-integrators, Interface, Cohesive Zone Model, Symplectic time-integrators, Delayed damage model

The tire is a complex product subject to numerous constraints, and must find a compromise between cost, performance, safety and recyclability. It is composed of a multitude of overlaid layers of different materials, from textiles to metal components. The well known rubber is just one example of the final layer that comes into contact with the road surface. This manufacturing process leads to increasingly complex behaviors that are difficult to study. In this way, the choice of numerical simulation provides a better understanding of these behaviors. Indeed, using only experimental methods would be costly, potentially wasteful in terms of raw materials and time-consuming. While numerical simulation can be used to study the impact of all the manufacturing steps. An important stage in tire manufacturing, and the inspiration for this research work, is the unmolding tire process. A special attention is paid to this process because, numerically, it is a multi-components problem. Indeed, this non-regular problem is associated to frictional contact, damage and fast dynamics, rarely combined together in simulation. It is more specifically associated to interface problems, in particular with the use of cohesive zone models describing interface behaviors.

To solve numerically this kind of problem, explicit time-integrators are of interest. In fact, they can be used to solve fast-dynamics problems. While implicit non-linear schemes encounter problems with control and convergence speed, and some explicit schemes encounter difficulties in terms of numerical dissipation, the idea here, is to use a numerical symplectic scheme to solve the problem. Previous works on the so-called CD-Lagrange explicit dynamic scheme show good energy properties when contact problems are solved. It verifies the discrete conservation equations (resultant, moment, energy). Thus, in this work, the study is focused on the contact interface between a deformable solid, which could be a tire, and a rigid solid, which could be a mold. The aim is to provide a method to solve fast-dynamics problems implying a damageable interface between this two solids. To achieve this, a thermodynamically and explicit based approach is proposed. This resolution is intended to be modular, easily applicable to a large scale of behaviors for a deformable solid, or to new interface laws.

First, the contact problem is introduced with the virtual work principle. Then, a presentation is given on the local treatment of non-linearities and non-regularities with formulations based on the thermodynamic framework of general-

zed standard materials and non-regular mechanics. In a second phase, the focus is set on the RCCM (Raous-Cocu-Cangémi-Monerie) cohesive zone model evolution laws (thermodynamically speaking), with a focus on the time non-locality instead of the space non-locality to limit the damage localization. Delayed damage models are then introduced. Moreover, the modular aspect of the thermodynamic and explicit framework proposed in this resolution is shown. Finally, the approach feasibility is highlighted by integrating it into a semi-industrial code, MEF++. Applications to large transformation problems are provided. The work is illustrated with numerous test cases.

# Introduction

## Le contexte industriel

Le pneumatique est un produit complexe soumis à de nombreuses contraintes, il doit répondre à un compromis entre coût, performance, sécurité et recyclabilité. Son cahier des charges est complexe, il doit permettre à la fois d'être endurant, en s'usant le moins vite possible, mais également doit adhérer à plusieurs types de route, d'environnement, de condition, que ce soit de la pluie, de la neige, en visant une adaptation à l'ensemble des véhicules constituant le parc automobile. D'un pays à un autre les conditions de circulation n'étant pas identiques, avec des routes de plus ou moins bonnes qualités, il est également important de s'intéresser au comportement de la chaussée pour réaliser les pneus les plus performants et agréables à la conduite.

Aujourd'hui, en ce qui concerne la catégorie des véhicules de particulier, la recrudescence de véhicules de plus en plus lourds, électriques, et de tailles différentes entraînent continuellement de nouveaux challenges pour l'entreprise Michelin. Un exemple concret est l'utilisation des véhicules électriques. Alors que les véhicules sont alourdis, le pneu doit conserver sa résistance et son endurance malgré une charge plus conséquente. D'autre part, le bruit du contact du pneumatique sur la chaussée n'étant plus couvert par le moteur, pour le confort des automobilistes, il est soumis à un cahier des charges comprenant une limitation des nuisances sonores produites. Ces nouveaux challenges entraînent de nouvelles réglementations et plus de complexité pour trouver le meilleur compromis de fabrication.

Concrètement, les pneumatiques contiennent une multitude de couches superposées et composées de matériaux différents, allant du textile à des composants métalliques. La gomme, connue de tous et toutes, n'est alors qu'un exemple de la dernière couche qui est par la suite en contact avec la chaussée lors du roulage. Ce processus de fabrication entraîne des comportements de plus en plus complexes et difficiles à étudier. Ainsi, le choix de l'utilisation de la simulation numérique par Michelin est justifié. Effectivement, utiliser uniquement de l'expérimental pour comprendre les impacts du processus de fabrication sur le produit fini, ou encore le comportement d'un nouveau produit devant une multitude de scénarios aurait une durée et un coût très importants. Les itérations nécessaires pour réaliser le meilleur produit possible entraîneraient un potentiel gaspillage important de matières premières. La simulation va alors permettre d'étudier l'impact de l'ensemble des étapes de la fabrication, tels que le choix des matériaux qui composent



le pneumatique, la manière de superposer les couches, les paramètres du moulage et du démoulage ou encore les conditions de stockage sur le produit fini. Elle apporte alors un caractère modulaire pour tester les pneus de demain, à moindre coût par rapport à de l'expérimental et permettre un gain de temps, la durée de fabrication des expériences étant diminuée. Lors de la simulation numérique, pour un potentiel scénario, seules les conditions aux limites sont à modifier.

Une étape importante de la fabrication d'un pneumatique, inspirant ce sujet de thèse, est le procédé de démoulage de pneumatiques. Le pneumatique, dit "cru", c'est-à-dire qui n'a pour l'heure été soumis à aucune transformation thermique, est dans un premier temps chauffé et gonflé dans le moule. De cette manière, le pneumatique prend la forme souhaitée. C'est ce que l'on nomme l'étape de moulage. Passé un certain temps dans cette configuration, le moule s'ouvre alors en une fraction de seconde. C'est le démoulage. Lors de ce procédé il arrive que le pneumatique sorte avec des défauts, tels qu'un logo mal imprimé, des bouts de gomme restant collés dans le moule, ou alors le flanc du pneumatique abîmé. Des problèmes avec le moule peuvent également être observés avec des lamelles, solide rigide formant une partie de ce dernier, arrachées ou abîmées. Cependant, dans ce procédé complexe, il est difficile d'insérer des capteurs pour comprendre l'origine de ces imperfections. C'est un milieu chaud, confiné qu'il est difficile d'étudier expérimentalement sans être intrusif. C'est alors que la modélisation numérique intervient, avec l'objectif de comprendre les phénomènes mis en jeu afin de perfectionner ce procédé. Avec la simulation, un autre avantage recherché est de tester la faisabilité du démoulage avec de nouvelles géométries complexes, notamment non régulières et observer le comportement sur le pneumatique. Elle permet donc de dimensionner de nouveaux moules, en optimisant son choix, ce qui permet donc de limiter la production de moule inutilisable ensuite.

Un intérêt est porté à ce procédé car numériquement c'est un problème à multiples composantes. Effectivement il est associé à des thématiques de contact, d'endommagement et de dynamique rapide, rarement combinées ensemble dans le cadre de la simulation. Les problèmes de contact sont depuis longtemps à l'ordre du jour chez Michelin. Ils sont notamment abordés tout simplement avec le cas pneumatique-chaussée, mais également dans le cadre de contact tel qu'avec un trottoir pour observer les effets de tels impacts sur le pneumatique et son usure. C'est un problème non-régulier. Le procédé du démoulage de pneu est plus précisément associé à des problèmes d'interface, notamment avec l'utilisation d'un modèle de zones cohésives [22] permettant de décrire ce type de comportement. En effet, lors de l'ouverture du moule de cuisson, la gomme n'a pas encore atteint son état de cuisson complet, et elle possède un comportement encore visqueux, entraînant un contact adhérent avec le moule. C'est pourquoi un intérêt est porté aux modèles d'interface. Une fois la gomme arrachée, avec les déformations du pneumatique dues à l'ouverture rapide du moule, des contacts peuvent être observés entre le pneumatique et le moule.

Pour résoudre numériquement ce type de problème, il existe deux principaux types de schéma d'intégration temporelle en simulation numérique : les schémas dit implicites, et les autres dit explicites. Les premiers sont réputés pour résoudre des

problèmes quasi-statiques, ce sont des méthodes robustes et inconditionnellement stables. Au contraire, les schémas explicites permettent de résoudre des problèmes de dynamique rapide, alors que les schémas implicites non-linéaires rencontrent des problèmes dans le contrôle et la vitesse de convergence [76, 87, 5]. Cependant certains schémas explicites rencontrent des difficultés en terme de dissipation numérique [82, 70, 80, 27, 53]. L'idée est alors d'utiliser un schéma numérique explicite symplectique basé sur la différence centrée [48] pour résoudre le problème du démoulage et ainsi conserver numériquement l'énergie, et vérifier au sens discret les équations de conservation de façon optimale (résultante, moment, énergie).

## Sujet de l'étude

Ainsi, dans cette thèse, les travaux portent sur l'étude de l'interface de contact entre un solide déformable, qui pourrait être un pneu, et un solide rigide, qui pourrait être un moule. L'objectif est de fournir une méthode de résolution numérique en dynamique rapide d'une interface endommageable entre ces deux solides dans le cadre de problème non-régulier et non linéaire. Pour ce faire, un cadre de résolution basé sur une approche thermodynamique [52] et explicite [24, 31] est proposé. Cette résolution a vocation à être modulaire, applicable facilement à de nouvelles lois de comportement pour le solide déformable, ou bien à de nouvelles lois d'interface. Elle a également vocation à être utilisée dans le cadre de modèles matériaux en grandes transformations.

Le but n'est donc pas ici de traiter le problème réel d'application, mais à montrer la faisabilité de la démarche. Les exemples traités sont donc inspirés par la problématique à plus long terme mais visent ici à valider l'approche. Pour ce faire, les développements ont été d'abord réalisés dans un code prototype interne au laboratoire LaMCoS (Laboratoire de Mécanique du Contact et des Structures) de l'INSA (Institut Nationale des Sciences Appliquées) de Lyon, utilisé comme une boîte à outils pour valider l'intégration de nouveaux comportements, d'interface puis de volume. La résolution est ensuite implémentée dans le cadre du schéma explicite CD-Lagrange, basé sur la différence centrée (CD), en minimisant l'intrusivité et en préservant la modularité, et au maximum le caractère "matrix-free" de l'approche. L'objectif de cette approche est de faciliter l'accélération des calculs, notamment par un processus de parallélisation plus simple à mettre en place de part l'indépendance des nœuds de calcul entre eux. Pour cela, l'accent est mis sur le calcul explicite de la configuration et de l'état, au sens thermodynamique. Dans un premier temps, une présentation est réalisée sur le traitement local des non linéarités et non régularités sans pénalisation, avec des formulations basées sur le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés et de la mécanique non régulière. Dans un second temps, l'intérêt est porté sur les lois d'évolution de l'état en privilégiant la non localité en temps plutôt qu'en espace pour limiter la localisation des endommagements.

Enfin, la faisabilité est mise en avant en réalisant l'intégration de l'approche dans un code semi industriel, code prototype utilisé par Michelin.

## Plan du manuscrit

Le manuscrit de thèse est organisé en quatre chapitres distincts. Le premier est un chapitre d'introduction à la mécanique du contact avec la présentation de l'ensemble des notations et des équations associées. Ce problème est introduit à l'aide du principe des puissances virtuelles sous l'hypothèse de petites perturbations et également en grandes transformations. La discrétisation spatiale et temporelle sont présentées, notamment avec la présentation de la résolution par la méthode des éléments finis. Ensuite le schéma numérique explicite en temps, le CD-Lagrange, basé sur la différence centrée est présenté ainsi que sa résolution conformément aux travaux antérieurs réalisés [32, 31, 24]. Pour terminer ce premier chapitre, une illustration sur un cas test de l'utilisation de ce schéma est réalisée.

Le deuxième chapitre présente avec originalité la résolution d'un modèle de zones cohésives en dynamique explicite adaptée au cadre présenté. Dans un premier temps le cadre de résolution thermodynamique dans lequel s'inscrit la résolution proposée dans ce manuscrit est présenté : c'est le cadre des matériaux standards généralisés [52]. Dans un second temps, le modèle d'interface choisi, le modèle RCCM (Raous, Cocu, Cangémi et Monerie) [72, 74, 75, 73, 22, 71, 57] du nom de ses créateurs, est présenté et introduit dans ce cadre thermodynamique, puis dans le cadre de résolution explicite choisi avec le schéma CD-Lagrange. Pour finir ce chapitre, plusieurs applications résolues avec l'hypothèse de petites perturbations sont réalisées pour observer le comportement du modèle en explicite.

Le troisième chapitre a pour objectif d'améliorer le modèle RCCM standard présenté au chapitre précédent résolu en dynamique. La présentation de plusieurs modèles à effet retard est réalisée avec leur introduction dans le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés. La résolution explicite proposée dans ce manuscrit de thèse avec le schéma temporel explicite CD-Lagrange est ensuite appliquée. Plusieurs cas tests sont présentés et comparés aux résultats obtenus dans le chapitre précédent. Dans une dernière partie, de nouvelles lois de comportement matériau sont utilisées et également introduites dans le cadre thermodynamique. L'objectif est de regarder l'impact du comportement du solide déformable sur l'endommagement de l'interface, et de valider la modularité du cadre de développement et de modélisation choisi.

Le quatrième et dernier chapitre propose une généralisation des travaux des chapitres précédents présentés sous l'hypothèse de petites perturbations avec une extension au cadre des grandes transformations. Les modifications apportées à la résolution explicite sont présentées. Dans un second temps, des modèles de comportement pour le solide déformable dans le cadre des grandes transformations sont présentés. Les résultats sont ensuite comparés aux résultats obtenus dans le cadre des petites perturbations. L'objectif est de mettre en avant l'impact des grandes transformations sur l'endommagement de l'interface et d'illustrer l'avantage du cadre explicite utilisé pour traiter efficacement ces modèles à différentes sources de non linéarités et non régularités. Pour finir ce manuscrit de thèse, un cas test visant une application plus proche de la problématique industrielle du démoulage de pneu est présenté. Il simule l'arrachement d'un solide déformable au comportement hyper-élastique, d'une lamelle dont l'interface est à géométrie

complexe et non régulière. Cette application est présentée avec le code prototype utilisé jusqu'ici dans les chapitres précédents et un code semi-industriel utilisé par Michelin, MEF++.



# Chapitre 1

## Un problème de contact en dynamique résolu avec un schéma explicite

Ce premier chapitre est une introduction générale à la mécanique du contact avec une résolution du problème en dynamique rapide explicite. Cette résolution sera la base des travaux réalisés par la suite, appliquée sur le cas du contact entre un corps déformable et un corps rigide.

Dans une première partie, les grandeurs générales nécessaires à la résolution du problème de mécanique ciblée sont mises en avant. Elles sont présentées dans le cadre des grandes transformations. Dans une seconde partie, l'écriture de l'équation de la dynamique est introduite à l'aide du principe des puissances virtuelles. Ensuite un bref rappel est fait concernant la méthode des éléments finis et l'écriture des différentes grandeurs avec cette méthode pour résoudre numériquement les équations de la mécanique.

Dans un quatrième temps, un intérêt est porté à l'écriture du contact ainsi que les contraintes associées et leur insertion dans les équations à résoudre. Pour finir, une dernière partie sera consacrée à la discrétisation temporelle et à l'introduction du schéma explicite CD-Lagrange basé sur la différence centrée. Une présentation des algorithmes de résolution en dynamique explicite d'un problème de contact est réalisée. De manière à illustrer le chapitre, une simulation numérique avec un cube possédant un comportement élastique linéaire isotrope en contact avec une surface rigide est présentée comme cas test.

### 1.1 Les grandeurs du problème

Le problème à résoudre est composé de deux corps. Le premier est un solide déformable, le second un solide rigide. Dans le cadre d'un démoulage de pneu, le premier serait le pneu, le second le moule. Pour des raisons de généralité, le problème est décrit dans le cadre des grandes transformations. Au cours de l'intervalle de temps  $[t_0; t_f]$  de la simulation, avec  $t_0$  l'instant initial et  $t_f$  l'instant final, le premier solide se déforme et se déplace. Ainsi deux états distincts sont

possibles pour ce solide déformable : un premier nommé la configuration initiale, supposée à déformation nulle et vierge de contrainte, le second est nommé configuration déformée qui est obtenue après application de forces extérieures sur le solide. La figure 1.1 illustre ce propos.

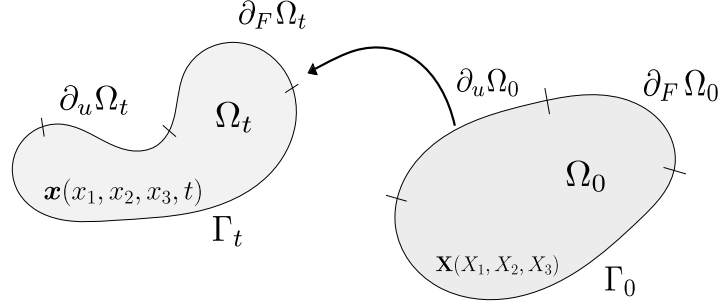


FIGURE 1.1 – Evolution de la configuration initiale  $\Omega_0$  vers la configuration déformée  $\Omega_t$

Soit  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$  la configuration initiale à  $t = t_0$ , et  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$  la configuration déformée à l'instant  $t \in [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ .  $\partial_u \Omega$  correspond au bord sur lequel les conditions de Dirichlet sont imposées, c'est-à-dire des conditions sur le déplacement  $\mathbf{u}$  qui est alors imposé à tout instant  $t$  sur ce bord.  $\partial_F \Omega$  correspond au bord où les conditions de Neumann sont appliquées, c'est-à-dire qu'une force  $\mathbf{F}_d$  est imposée sur ce bord à tout instant  $t$ . Pour finir il reste le bord  $\Gamma$  qui correspond au bord du solide déformable sur lequel le contact peut avoir lieu, et donc où les conditions de contact seront résolues, voir la section 1.4. Le bord total  $\partial \Omega$  du solide déformable s'écrit alors

$$\partial \Omega = \partial_u \Omega \cup \partial_F \Omega \cup \Gamma \quad (1.1)$$

avec

$$\partial_u \Omega \cap \partial_F \Omega = \partial_u \Omega \cap \Gamma = \partial_F \Omega \cap \Gamma = \emptyset. \quad (1.2)$$

Soit  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$  la position sur la configuration non déformée d'un point du solide déformable à l'instant initial donc à  $t = t_0$ . A l'instant  $t$  ce point devient  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  sur la configuration déformée. En formulation lagrangienne, ces deux points sont liés par la formule suivante :

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (1.3)$$

avec  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{R}^3$  le déplacement associé au point  $\mathbf{X}$  et au temps  $t$ .

Pour résoudre le problème en grandes transformations, c'est-à-dire pour des grands déplacements et/ou des grandes rotations, la méthode du lagrangien total [8] est utilisée. Elle revient à ramener l'ensemble des grandeurs de la configuration déformée du solide déformable sur la configuration initiale pour réaliser les calculs. Il existe également la méthode du lagrangien actualisé où l'on pose comme configuration initiale au cours du calcul une configuration déformée calculée. Cette méthode peut être intéressante dans le cas où le solide déformable subit de très

grandes déformations. Ainsi pour suivre l'évolution du solide déformable, il est nécessaire d'introduire des quantités liées aux déformations du solide déformable pour récupérer les quantités sur la configuration initiale.

Pour ce faire, soit  $\mathbf{F}$  le tenseur du gradient de la transformation tel que [34] :

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \quad (1.4)$$

avec  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  le tenseur identité et  $\nabla$  l'opérateur gradient. Ce tenseur permet de faire la transition entre la configuration déformée et non déformée avec la relation suivante :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (1.5)$$

avec  $d\mathbf{x}$  une variation élémentaire de position sur la configuration déformée et  $d\mathbf{X}$  la variation élémentaire de position associée sur la configuration non déformée ou initiale. Soit  $\mathbf{F}^{-1}$  l'inverse du gradient des déformations et  $J$  son déterminant tel que

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (1.6)$$

et dont la valeur est positive,  $J > 0$ , assurant une bijection entre  $\Omega_0$  et  $\Omega_t$ .

La mesure de déformation peut alors être introduite. Soit  $\mathbf{E}$  le tenseur de Green-Lagrange qui s'écrit :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (1.7)$$

avec  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  le tenseur de Cauchy-Green. Dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations, il est possible d'introduire le tenseur linéarisé des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$  de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^T) \quad (1.8)$$

qui n'est autre que le tenseur de Green-Lagrange en négligeant les termes de second ordre dus aux petits déplacements. Le tenseur de Green-Lagrange, ou des déformations, est notamment impliqué dans les lois matériaux. Il permet de relier le tenseur des contraintes aux déformations par l'intermédiaire des lois de comportement. Des exemples de lois peuvent être le modèle de Kelvin-Voigt ou encore de Maxwell dans le cas d'un solide déformable visco-élastique [52]. Différentes lois de comportement seront présentées dans les prochains chapitres.

Soit  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy sur la configuration déformée et son homologue sur la configuration initiale le second tenseur des contraintes, symétrique, de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ . Ce dernier permet de relier les contraintes de la configuration déformée sur la configuration initiale par la formule suivante :

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.9)$$

Il existe également le premier tenseur non symétrique de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{\Pi}$  dont la formulation est :



$$\mathbf{\Pi} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.10)$$

Ainsi, dans cette partie les grandeurs principales pour étudier les lois matériaux et également les quantités principales mises en jeu pour les grandes transformations ont été présentées brièvement. La partie suivante présente les équations régissant le problème de mécanique. Pour ce faire, elles seront introduites à l'aide du principe des puissances virtuelles.

## 1.2 Le principe des puissances virtuelles

Maintenant que l'ensemble des quantités permettant de décrire notre système, à savoir principalement les déplacements, les déformations et les contraintes ont été introduites, il est temps de présenter le problème mécanique en dynamique transitoire que nous allons étudier. Ici, nous supposons provisoirement que  $\Gamma = \emptyset$ , le contact n'est pas pris en compte.

Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire les espaces dans lesquels les solutions des équations sont définies, basés sur l'espace de Sobolev  $H_1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , défini comme :

$$H_1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{L}_2(\Omega) \mid \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \in \mathbb{L}_2(\Omega), 1 \leq i \leq 3 \right\} \quad (1.11)$$

avec  $\mathbb{L}_2(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de carré intégrable, c'est-à-dire :

$$\mathbb{L}_2(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 dv < +\infty \right\} \quad (1.12)$$

avec  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels.

Les solutions sont alors définies dans les espaces :

$$\begin{cases} \mathbb{U} &= \{ \mathbf{u} \in H_1(\Omega_0) \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{X}, t) \text{ sur } \partial_u \Omega_0 \} \\ \mathbb{U}_v &= \{ \mathbf{v} \in H_1(\Omega_0) \mid \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{u}}_d(\mathbf{X}, t) \text{ sur } \partial_u \Omega_0 \} \end{cases} \quad (1.13)$$

avec  $\mathbf{u}_d$  le déplacement imposé sur le bord de Dirichlet du domaine et  $\dot{\mathbf{u}}_d$  la vitesse associée, complété de l'espace :

$$\mathbb{V} = \{ \mathbf{w} \in H_1(\Omega_0) \mid \mathbf{w}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ sur } \partial_u \Omega_0 \} \quad (1.14)$$

Le problème est introduit à l'aide du principe des puissances virtuelles [52] présenté à chaque instant comme la puissance virtuelle des forces d'accélération du système qui est égale à la somme des puissances des forces intérieures et des forces extérieures. Ainsi  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  il s'écrit :

$$P_{\text{acc}}^* = P_{\text{int}}^* + P_{\text{ext}}^* \quad (1.15)$$

avec  $P_{\text{acc}}^*$  la puissance virtuelle des forces d'accélération,  $P_{\text{int}}^*$  la puissance virtuelle des forces intérieures dans laquelle la loi de comportement du matériau du solide

déformable s'applique et  $P_{\text{ext}}^*$  la puissance virtuelle des forces extérieures dans laquelle nous retrouvons l'impact des conditions de Dirichlet et de Neumann.

Il est donc nécessaire ici d'introduire le concept de mouvement virtuel. En règle générale, un mouvement virtuel est défini à tout instant par un vecteur vitesse virtuelle  $\mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  dépendant du point matériel  $\mathbf{x}$  si la configuration courante  $\Omega_t$  est utilisée et  $\mathbf{X}$  si la configuration initiale  $\Omega_0$  est utilisée [52].

Pour introduire la puissance virtuelle des forces intérieures, il est nécessaire d'introduire le tenseur d'ordre deux des vitesses de déformations  $\mathbf{D}^*$ , tenseur Eulérien qui s'écrit de la manière suivante  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{2} [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^* + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^*)^T] \quad (1.16)$$

La puissance virtuelle des forces intérieures  $P_{\text{int}}^*$  s'écrit alors dans la configuration déformée  $\Omega_t$   $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  de la manière suivante [52] :

$$P_{\text{int}}^* = - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^* dv \quad (1.17)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy présenté précédemment (1.9) et  $dv$  un élément de volume de  $\Omega_t$ .

La puissance virtuelle des forces extérieures s'écrit  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$P_{\text{ext}}^* = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}^* dv + \int_{\partial_F \Omega_t} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}^* ds \quad (1.18)$$

avec  $\mathbf{f}_d$  les forces extérieures appliquées dans le volume du solide déformable et  $\mathbf{F}_d$  les forces extérieures sur le bord  $\partial_F \Omega_t$  regroupant les conditions de Neumann et  $ds$  un élément de surface du solide déformable dans la configuration déformée.  $\mathbf{F}_d$  est introduit comme :

$$\mathbf{F}_d = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (1.19)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au bord  $\partial_F \Omega_t$  de  $\Omega_t$ .

Pour finir, la puissance virtuelle des forces d'accélération s'écrit  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$P_{\text{acc}}^* = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}^* dv \quad (1.20)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du matériau du solide déformable,  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$  le vecteur vitesse associé à la position initiale  $\mathbf{X}$  à l'instant  $t$  et  $d/dt$  l'opérateur de dérivée totale par rapport au temps.

Ainsi, l'équation du mouvement fournie par le principe des puissances virtuelles (1.15) est donnée par l'équation suivante  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$- \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^* dv + \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}^* dv + \int_{\partial_F \Omega_t} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}^* ds = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}^* dv \quad (1.21)$$

A l'aide du théorème de la divergence [34], on obtient [52] :

$$- \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^* dv = - \int_{\partial_F \Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega_t} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}^* dv \quad (1.22)$$

avec  $\nabla_{\mathbf{x}}$  l'opérateur divergence par rapport à la configuration déformée. Ainsi l'équation d'équilibre (1.21) se transforme de la manière suivante :

$$- \int_{\partial_F \Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega_t} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v}^* dv + \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}^* dv + \int_{\partial_F \Omega_t} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}^* ds = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}^* dv \quad (1.23)$$

ce qui donne alors  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$\int_{\Omega_t} \left( (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_d - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \mathbf{v}^* dv + \int_{\partial_F \Omega_t} (\mathbf{F}_d - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}^* ds = 0 \quad (1.24)$$

L'équation d'équilibre (1.24) du principe des puissances virtuelles est également appelée formulation faible du problème, formant notamment la base de travail de la méthode des éléments finis qui sera présentée dans la section suivante.

Ainsi sur la configuration déformée  $\Omega_t$ , le problème mécanique de dynamique à résoudre est le suivant :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_d - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (1.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d \quad (1.26)$$

Dans le cadre de cette thèse les forces extérieures seront appliquées uniquement en surface sur le bord  $\partial_F \Omega$ , donc  $\mathbf{f}_d = \mathbf{0}$ . Effectivement, les travaux sont principalement axés sur le contact. Le système à résoudre sur la configuration déformée devient alors :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{sur } \Omega_t \times [t_0, t_f] \quad (1.27)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{E}) \quad \text{sur } \Omega_t \times [t_0, t_f] \quad (1.28)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \partial_u \Omega_t \times [t_0, t_f] \quad (1.29)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)/dt \quad \text{sur } \Omega_t \times [t_0, t_f] \quad (1.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_d(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \partial_{F_d} \Omega_t \times [t_0, t_f] \quad (1.31)$$

avec  $f$  une fonction de la mesure de déformation donnant la loi de comportement du matériau du solide déformable. L'équation du moment angulaire s'écrit  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  sur  $\Omega_t$  par symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy. Si la vitesse est régulière et continue, alors il est possible de poser  $\ddot{\mathbf{u}} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{u}/dt^2$ .

Pour résoudre ce problème, la méthode du Lagrangien total étant utilisée, il est donc nécessaire de réécrire chaque intégrale sur la configuration initiale. Il est important de rappeler quelques notions pour ce changement de référentiel avec :

$$dv = JdV \quad (1.32)$$

avec  $J$  le déterminant du gradient de la transformation (1.6) et  $dV$  un élément de volume de la configuration initiale associé à un élément de volume  $dv$  de la configuration déformée. En ce qui concerne le changement de surface, la formule de Nanson [34] donne :

$$\mathbf{n}ds = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dS \quad (1.33)$$

avec  $dS$  un élément de surface de la configuration initiale  $\Omega_0$ ,  $\mathbf{n}$  la normale externe à  $\partial_F\Omega_t$  et  $\mathbf{N}$  la normale externe associée à  $\partial_F\Omega_0$ .

La puissance virtuelle des forces intérieures en volume (1.17) devient alors :

$$\begin{aligned} P_{int}^* &= - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^* dv \\ &= - \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^* dV \\ &= - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}^*) dV \end{aligned} \quad (1.34)$$

car  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$  par symétrie du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \\ \mathbf{D}^* = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^* \cdot \mathbf{F}^{-1} \end{cases} \quad (1.35)$$

avec  $\text{Tr}(\cdot)$  l'opérateur trace, soit la somme des composantes sur la diagonale. La dérivée temporelle du tenseur de Green-Lagrange  $\dot{\mathbf{E}}$  s'écrit  $\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}_v$  :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T \right] + \frac{1}{2} \left[ (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u})^T \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} \right] \quad (1.36)$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, les termes de second ordre sont négligés et le tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\mathbf{e}}$  peut être introduit de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T \right] \quad (1.37)$$

avec  $\dot{\mathbf{e}} \sim \mathbf{D}$  introduit à l'équation (1.16), car sous l'hypothèse de petites perturbations, la configuration initiale et déformée sont confondues.

Pour la puissance virtuelle des forces dues à l'accélération (1.20), en utilisant (1.32) on obtient  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$P_{acc}^* = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}^* dv = \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}^* dV \quad (1.38)$$

avec  $\rho_0 = J\rho$  la masse volumique du matériau du solide déformable sur la configuration initiale.

Pour finir, il nous reste à réécrire sur la configuration initiale  $\Omega_0$  la puissance virtuelle des forces extérieures en utilisant (1.33) (1.32), ce qui donne  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$\begin{aligned} P_{ext}^* &= \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}^* dv + \int_{\partial_F \Omega_t} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}^* ds \\ &= \int_{\partial_F \Omega_0} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v}^* dS \end{aligned} \quad (1.39)$$

car  $\mathbf{f}_d = \mathbf{0}$  ici et en utilisant (1.26) (1.10) (1.33),  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  on obtient :

$$\int_{\partial_F \Omega_t} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}^* ds = \int_{\partial_F \Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^* ds = \int_{\partial_F \Omega_0} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v}^* dS \quad (1.40)$$

Ainsi, sur la configuration initiale, l'équation d'équilibre (1.21) fournie par le principe des puissances virtuelles devient  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}^* dV = - \int_{\Omega_0} \text{Tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}^*) dV + \int_{\partial_F \Omega_0} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v}^* dS \quad (1.41)$$

Une formulation équivalente à (1.41) en utilisant (1.10) et (1.9)  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  est :

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}^* dV = - \int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi} : \nabla_X \mathbf{v}^* dV + \int_{\partial_F \Omega_0} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{v}^* dS \quad (1.42)$$

Ainsi sur la configuration initiale  $\Omega_0$  les équations du problème s'écrivent :

$$\nabla_X \cdot \mathbf{\Pi} = \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{sur } \Omega_0 \times [t_0, t_f] \quad (1.43)$$

$$\mathbf{\Pi} = f(\mathbf{E}) \quad \text{sur } \Omega_0 \times [t_0, t_f] \quad (1.44)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_d(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur } \partial_u \Omega_0 \times [t_0, t_f] \quad (1.45)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = d\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)/dt \quad \text{sur } \Omega_0 \times [t_0, t_f] \quad (1.46)$$

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N} = J_s \mathbf{F}_d \quad \text{sur } \partial_F \Omega_0 \times [t_0, t_f] \quad (1.47)$$

avec  $J_s$  le jacobien surfacique tel que

$$J_s = \frac{J}{\sqrt{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}}} \quad (1.48)$$

De la même manière que pour la configuration déformée,  $f$  est une fonction de la mesure de déformation donnant la loi de comportement du matériau du solide déformable. L'équation du moment angulaire s'écrit ici  $\mathbf{\Pi} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{\Pi}^T$  d'après la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  et l'équation (1.10). Les

deux dernières équations font référence aux conditions de Dirichlet avec l'équation (1.45) et de Neumann avec l'équation (1.47).

Les équations de (1.27) à (1.31) et de (1.43) à (1.47) sont appelées formulation forte du problème. Pour les résoudre, la formulation faible obtenue grâce au principe des puissances virtuelles sera utilisée (1.41). Effectivement, le problème est résolu sur la configuration initiale. Il est important de remarquer que dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations,  $\Omega_0$  et  $\Omega_t$  sont confondues. Ainsi il n'est pas nécessaire de calculer les tenseurs de Piola-Kirchhoff, la méthode des éléments finis, présentée dans la partie suivante, peut-être directement appliquée sur la configuration courante  $\Omega_t$  avec (1.21).

### 1.3 Résolution avec la méthode des éléments finis

L'objectif de cette section est d'expliquer brièvement la méthode des éléments finis et l'écriture des différentes quantités présentées précédemment de manière à pouvoir calculer en tout point de l'espace la solution de l'équation (1.41). Résoudre (1.41) signifie trouver le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  en tout point de l'espace. Nous verrons plus tard que c'est la vitesse qui est cherchée et non l'accélération  $\ddot{\mathbf{u}}$  car l'idée finale est de résoudre un problème de contact, or à l'impact la dérivée de la vitesse n'est pas définie car la vitesse n'est pas régulière [59]. Ainsi pour résoudre en tout point de l'espace, il est nécessaire de discrétiser ce dernier en éléments comme le montre la figure 1.2. La discrétisation spatiale de la configuration initiale est mise en avant, et  $\Omega_0$  devient  $\Omega_{0h}$  de la manière suivante :

$$\bar{\Omega}_{0h} = \cup_e \bar{\Omega}_{0e} \quad (1.49)$$

avec  $\Omega_{0e}$  les éléments du maillage. Si une solution très précise est recherchée, alors il est nécessaire de raffiner le maillage et donc d'augmenter le nombre d'éléments mais généralement aussi le temps de calcul.

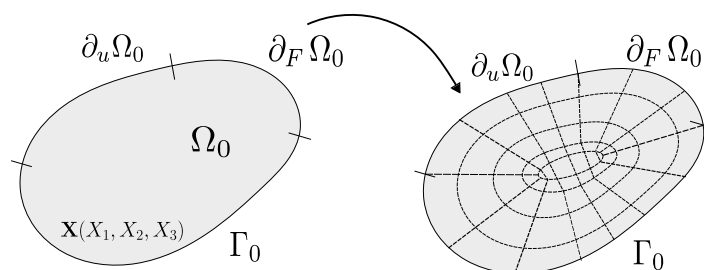


FIGURE 1.2 – Discrétisation de la configuration initiale  $\Omega_0$

Le choix des éléments est adapté au problème traité. Dans le cas d'un maillage 1D, les éléments sont généralement des segments, dans le cas d'un maillage 2D les plus courants sont des éléments quadrilatères ou triangulaires et pour finir dans le cas 3D ce sont souvent des tétraèdres ou des hexaèdres. Le choix des éléments peut avoir des impacts sur la solution discrète. Des compléments d'information non expliqués ici sur ces choix peuvent être trouvés dans [8]. Dans

le cas de la figure 1.2 dont le domaine est en 2D, la discrétisation choisie est basée sur des quadrilatères.

L'objectif de cette méthode est de calculer en chaque point, et donc en chaque nœud, les quantités d'intérêts. Les coordonnées des nœuds sont les points  $\mathbf{X}$ . Parmi les quantités nous retrouverons pour chaque nœud le déplacement  $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$  qui est un vecteur comprenant les déplacements dans les trois directions d'un nœud de position  $\mathbf{X}$  et le vecteur vitesse  $\mathbf{v} \in \mathbb{U}_v$  formé de la même manière que le vecteur déplacement. D'autres quantités seront définies sur les points d'intégration, comme notamment les variables internes des modèles utilisés que nous expliciterons plus tard, notamment présentes dans la loi de comportement du matériau du solide déformable. Ainsi la solution continue est approximée par une solution discrétisée sur ce maillage avec les quantités évaluées aux nœuds.

Pour utiliser la méthode des éléments finis il est nécessaire d'écrire la formulation faible de notre problème obtenue grâce au principe des puissances virtuelles (1.41). La vitesse virtuelle  $\mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  est appelée dans la méthode des éléments finis, la fonction test ou fonction de forme. La discrétisation spatiale étant réalisée, il est donc nécessaire maintenant de discrétiser les espaces de définition des solutions. Cela est réalisé à l'aide des fonctions de forme nommées  $\phi_i$  avec  $1 \leq i \leq N$  avec  $N$  le nombre de nœuds. Les espaces  $\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{U}_v$  et  $\mathbb{V}$  sont discrétisés en dimension finie par les espaces  $\mathbb{U}_h$ ,  $\mathbb{U}_{vh}$  et  $\mathbb{V}_h$ . La base de ces espaces est composée des fonctions de forme  $\phi_{i,k}$  telle que

$$\phi_{i,k}(\mathbf{X}) = \phi_i(\mathbf{X})\mathbf{e}_k \quad (1.50)$$

avec  $k \in \{x, y, z\}$  en dimension trois et  $\mathbf{e}_k$  les vecteurs de la base canonique associés aux coordonnées cartésiennes. Les fonctions  $\phi_i$  valent 1 au nœud  $i$  et 0 aux autres. Elles forment une partition de l'unité et sont à support compact. Ainsi dans cet espace discrétisé, la solution continue du problème en un point  $\mathbf{X}$  est approximée par  $\mathbf{v}_h \in \mathbb{U}_{vh}$  telle que :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \approx \mathbf{v}_h(\mathbf{X}, t) = \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_k v_{i,k}(t) \phi_{i,k}(\mathbf{X}) \quad (1.51)$$

Les coordonnées  $[v_{i,x}(t) \ v_{i,y}(t) \ v_{i,z}(t)]$  correspondent aux coefficients d'interpolation associés au point d'interpolation  $i$ . Ainsi ces coefficients se situent au niveau des nœuds du maillage et forment le nombre de degrés de liberté (ddl) du système avec trois degrés de liberté par nœud, la résolution étant en dimension trois. Soit  $\mathbf{V}$  le vecteur comprenant tous les degrés de liberté en vitesse et  $\mathbf{U}$  ceux en déplacement. Les fonctions de forme sont généralement des fonctions polynomiales d'ordre 1. Plus on augmente le degré du polynôme, plus il y aura de nœuds à calculer sur la géométrie. Dans notre cas des polynômes d'ordre 1, donc linéaires par morceaux, sont choisis, les sommets des éléments sont alors également appelés nœuds de calcul.

Ainsi, avec les approximations (1.51), il est possible d'écrire la formulation faible (1.41) obtenue avec le principe des puissances virtuelles sous la forme matricielle de la manière suivante :

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.52)$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  le vecteur de taille le nombre de degrés de liberté dont les composantes sont les forces intérieures généralisées à chaque nœud du maillage. De la même manière  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  est le vecteur de taille le nombre de degrés de liberté dont les valeurs sont les forces extérieures généralisées à chaque nœud du maillage pour chaque composante. Ainsi pour un nœud  $i$ , l'ensemble des variables s'écrivent :

$$\mathbf{M}_{\begin{smallmatrix} 3i..3i+2 \\ 3j..3j+2 \end{smallmatrix}} = \left( \int_{\Omega_{0h}} \rho_0 \phi_i \phi_j d\Omega_{0h} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int},3i..3i+2} = \begin{bmatrix} F_{\text{int},ix} \\ F_{\text{int},iy} \\ F_{\text{int},iz} \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext},3i..3i+2} = \begin{bmatrix} F_{\text{ext},ix} \\ F_{\text{ext},iy} \\ F_{\text{ext},iz} \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

avec

$$F_{\text{int},ik} = \int_{\Omega_{0h}} \text{Tr} \left( \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}(\phi_{i,k}, \nabla_{\mathbf{x}} \phi_{i,k}) \right) dV \quad (1.56)$$

et

$$F_{\text{ext},ik} = \int_{\partial_F \Omega_{0h}} \mathbf{F}_d \cdot \phi_{i,k} ds \quad (1.57)$$

avec  $k \in \{x, y, z\}$  les degrés de liberté associés aux composantes du nœud  $i$ . Le calcul de  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  peut être réalisé sur la configuration déformée et non initiale quand il dépend de quantités déjà connues sur la configuration déformée. Il n'est alors pas nécessaire de faire un changement de variable, ce qui alourdirait les calculs.

Il est possible d'accéder aux composantes du déplacement et de la vitesse à chaque nœud  $i$  de la manière suivante :

$$\mathbf{U}_{3i..3i+2} = [u_{i,x} \ u_{i,y} \ u_{i,z}] \quad (1.58)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{3i..3i+2} = \mathbf{V}_{3i..3i+2} = [v_{i,x} \ v_{i,y} \ v_{i,z}] \quad (1.59)$$

Pour terminer le processus de mise en place de la méthode des éléments finis, il est nécessaire de calculer sur chaque élément les grandeurs précédentes par une intégration numérique des intégrales. Nous avons choisi la méthode de quadrature de Gauss-Legendre [34]. Ensuite grâce à la formule suivante,

$$\int_{\Omega_{th}} f(X) dV = \sum_e \int_{\Omega_e} f(X) dV \quad (1.60)$$



la contribution de chaque élément est ajoutée sur chaque nœud de calcul. Cette manipulation s'appelle la phase d'assemblage [34]. Il est à noter que dans un premier temps, l'ensemble des calculs est réalisé sur un élément dit de référence, sur lequel les fonctions d'interpolation sont définies. Cette manipulation permet de ne pas définir ces fonctions sur chaque élément, ce qui serait coûteux. Une transformation géométrique permet de résoudre ensuite sur l'élément réel. Le problème semi discrétisé en espace devient alors

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad \text{sur } \Omega \text{ avec } t \in [t_0, t_f] \quad (1.61)$$

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_d(t) \quad \text{sur } \partial_u \Omega \text{ avec } t \in [t_0, t_f] \quad (1.62)$$

$$\mathbf{V}(t) = d\mathbf{U}_d(t)/dt \quad \text{sur } \partial_u \Omega \text{ avec } t \in [t_0, t_f] \quad (1.63)$$

$$\mathbf{V}(t) = d\mathbf{U}(t)/dt \quad \text{avec } t \in [t_0, t_f] \quad (1.64)$$

$$\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0 \quad (1.65)$$

avec  $\mathbf{V}_0$  les conditions initiales du problème que l'on souhaite résoudre. L'équation (1.62) permet de forcer les conditions de Dirichlet sur le déplacement avec  $\mathbf{U}_d$  le déplacement imposé aux degrés de liberté de  $\partial_u \Omega$ .

Maintenant que la discrétisation spatiale des équations de la mécanique a été brièvement présentée, nous allons passer à l'ajout du contact au problème de mécanique et sa résolution.

## 1.4 L'étude du contact

Cette section est consacrée à l'écriture des conditions de contact. Il existe deux types de contact : sur la figure 1.3, le schéma de droite fait référence au contact déformable-déformable entre deux corps ; le schéma de gauche fait référence au contact rigide-déformable. Dans ce manuscrit de thèse nous nous concentrons sur les formulations de contact rigide-déformable. Effectivement, l'application visée ultérieurement dans le projet est la simulation numérique du procédé de démoulage de pneu, entre un corps déformable, le pneu, et un corps rigide, le moule.

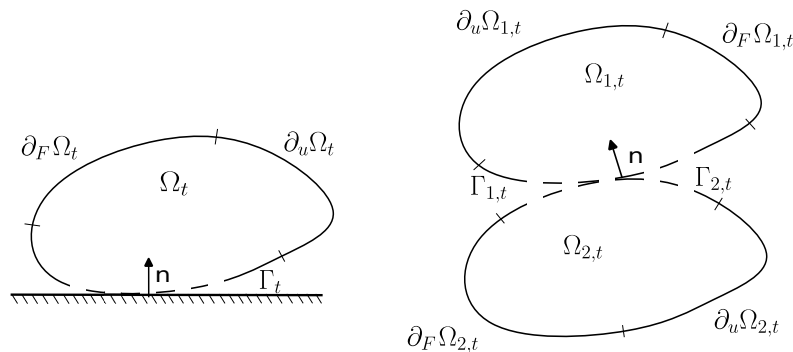


FIGURE 1.3 – Les différents types de contact

Soit  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au bord de contact potentiel  $\Gamma_t$  du solide déformable. C'est le bord où le contact est possible et les conditions de contact seront étudiées sur chaque nœud de ce bord. Sur l'illustration de gauche de la figure 1.3, nous retrouvons bien les différents bords de Dirichlet, de Neumann et de contact comme dans la figure 1.1. Dans le cas d'un contact déformable-déformable, le contact aura lieu entre les bords de contact de chaque solide déformable comme le montre l'illustration de droite de la figure 1.3 avec  $\Gamma_{1,t}$  et  $\Gamma_{2,t}$ . Chacun des solides peut être soumis à des conditions de Neumann et de Dirichlet sur les bords associés  $\partial_F\Omega_{1,t}$ ,  $\partial_F\Omega_{2,t}$  et  $\partial_u\Omega_{1,t}$ ,  $\partial_u\Omega_{2,t}$ . Il est à noter que sur chacun des solides les conditions (1.1) et (1.2) doivent être vérifiées.

Dans le cas d'un contact déformable-déformable entre deux corps  $\Omega_{1,t}$  et  $\Omega_{2,t}$  les conditions de contact sont écrites entre  $\Gamma_{1,t}$  et  $\Gamma_{2,t}$ .

### 1.4.1 Les conditions de contact

L'intérêt est donc porté sur le contact rigide-déformable. Dans un premier temps, pour décrire le contact il est nécessaire de savoir si les deux corps sont en contact actif. Pour cela il est important d'introduire le gap  $g$ , qui correspond à la distance entre les deux corps de la manière suivante :

$$g(\mathbf{x}_1) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1)) \cdot \mathbf{n} \quad (1.66)$$

en notant  $\mathbf{x}_1$  la position sur le solide déformable avec laquelle le gap est cherché,  $\mathbf{x}_2$  la position la plus proche correspondante sur le solide rigide et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au solide rigide. Il existe de nombreuses méthodes pour la détection du contact mais elles ne seront pas étudiées dans ce travail. Ici le choix d'un corps rigide statique permet de connaître la valeur du gap pour chaque position du corps déformable aisément.

Pour décrire le contact, il est nécessaire de connaître la valeur de la vitesse relative entre les deux corps. La vitesse se décompose en deux parties, sa partie normale  $v_N$  et sa partie tangentielle  $\mathbf{v}_T$ . La vitesse relative normale entre les deux corps s'écrit :

$$v_N(\mathbf{x}_1) = [\mathbf{v}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_2)] \cdot \mathbf{n} \quad (1.67)$$

avec  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_1)$  la vitesse du point du corps déformable avec lequel le gap a été calculé et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_2)$  la vitesse du point du second corps associé. La vitesse relative tangentielle entre les deux corps, notamment utile dans le cas d'un contact frottant, est définie telle que :

$$\mathbf{v}_T(\mathbf{x}_1) = [\mathbf{v}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_2)] - v_N(\mathbf{x}_1)\mathbf{n} \quad (1.68)$$

avec  $v_N$  la vitesse relative normale entre les deux corps obtenue à partir de l'équation (1.67).

Dans notre étude, le corps rigide est statique, donc cette vitesse est nulle et  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_2) = 0$ . À noter, la vitesse normale pour un point est un scalaire alors que la vitesse tangentielle est un vecteur à deux coordonnées.

Maintenant les variables définies, les conditions de contact peuvent être introduites [18]. La première consiste à exprimer la non pénétrabilité entre les deux corps. En utilisant le gap (1.66) elle s'exprime de la manière suivante :

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [t_0, t_f], \quad g(\mathbf{x}_1) \geq 0 \quad (1.69)$$

Ainsi lorsque le gap est nul, cela signifie que les deux corps sont en contact actif. A l'inverse si il est positif, il n'y a pas de contact.

La deuxième condition concerne la contrainte normale du contact. Celle-ci doit être seulement compressive (en l'absence d'adhésion), ce qui se traduit par :

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [0, t_f], \quad F_{C,N} = -(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (1.70)$$

avec  $\mathbf{F}_C$  la force de contact produite par le solide rigide sur le solide déformable et  $F_{C,N}$  sa partie normale,  $\mathbf{n}$  étant la normale entrante au solide déformable.

Pour finir il reste la condition de complémentarité s'écrivant de la manière suivante :

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [0, t_f], \quad F_{C,N} \times g = 0 \quad (1.71)$$

Cette condition permet de forcer l'état du contact à actif ou non actif. Effectivement, si il y a contact alors le gap est nul, donc la condition (1.71) est bien vérifiée. Si il n'y a pas de contact, alors la force produite par le contact est nulle donc la condition est de nouveau vérifiée.

Ces trois conditions (1.69),(1.70) et (1.71) sont plus généralement connues sous le nom de conditions de KKT (Karush-Kuhn-Tucker), ou bien de HSM (Hetz-Signorini-Moreau) [32] ou encore simplement les conditions de Signorini [10]. Elles peuvent s'écrire de manière contractée comme suit :

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [0, t_f], \quad 0 \leq g \perp F_{C,N} \geq 0 \quad (1.72)$$

Il existe une autre écriture de cette équation (1.72) introduite par Moreau [32, 59] qui consiste à l'exprimer en fonction de la vitesse :

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [0, t_f], \quad \begin{cases} \text{Si } g > 0, & F_{C,N} = 0 \\ \text{Sinon } g = 0, & 0 \leq v_N \perp F_{C,N} \geq 0 \end{cases} \quad (1.73)$$

Ces conditions (1.73) sont également appelées conditions unilatérales de contact. Effectivement seule la partie normale du contact est traitée. Seulement il peut y avoir un comportement sur la partie tangentielle, tel qu'un contact frottant.

Pour cela, il est nécessaire d'introduire la direction tangentielle  $\mathbf{t}$  du contact qui est définie comme la direction opposée de la vitesse tangentielle  $\mathbf{v}_T$ , et orthogonale à la normale  $\mathbf{n}$  du contact, de la manière suivante :

$$\mathbf{t} = -\frac{\mathbf{v}_T}{\|\mathbf{v}_T\|} \quad \text{si } \|\mathbf{v}_T\| \neq 0 \quad (1.74)$$

La force de contact tangentielle  $\mathbf{F}_{C,T}$  est introduite de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_{C,T} = F_{C,T} \mathbf{t} \quad (1.75)$$

Ainsi, le comportement du contact sur la direction tangentielle peut s'exprimer avec la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} \text{Si } F_{C,N} = 0, & F_{C,T} = 0 \\ \text{Si } F_{C,N} > 0, & 0 \leq (\mu F_{C,N} - F_{C,T}) \perp \|\mathbf{v}_T\| \geq 0 \end{cases} \quad (1.76)$$

avec  $\mathbf{F}_{C,T} = -a_2 \mathbf{v}_T$ ,  $a_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mu$  le coefficient de frottement dépendant des surfaces des matériaux rentrant en contact. Cette loi de Coulomb, loi parmi les plus utilisées, permet de décrire deux états du contact, soit un contact dit adhérent (si  $F_{C,T} < \mu F_{C,N}$ ) avec une vitesse tangentielle nulle ( $\|\mathbf{v}_T\| = 0$ ), soit un contact dit glissant ( $F_{C,T} = \mu F_{C,N}$ ) et donc une vitesse tangentielle non nulle  $\|\mathbf{v}_T\| > 0$ .

Les équations (1.72) et (1.76) à résoudre sont des problèmes dits linéaires de complémentarité (LCP) [1] dont nous donnerons les solutions plus tard dans ce chapitre.

### 1.4.2 Résolution des équations de la mécanique avec la gestion du contact

Pour écrire la formulation faible du problème avec le contact, il est nécessaire d'ajouter au principe des puissances virtuelles (1.15) la contribution des puissances virtuelles des forces dues au contact de la manière suivante :

$$P_{\text{acc}}^* = P_{\text{int}}^* + P_{\text{ext}}^* + P_{\text{contact}}^* \quad (1.77)$$

avec  $P_{\text{contact}}^*$  la puissance virtuelle des forces de contact qui s'écrit  $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbb{V}$  :

$$P_{\text{contact}}^* = \int_{\Gamma_t} \mathbf{F}_{\text{contact}} \cdot \mathbf{v}^* ds \quad (1.78)$$

avec  $\mathbf{F}_{\text{contact}}$  les forces liées au contact du solide rigide sur le solide déformable et  $\mathbf{v}^*$  la vitesse virtuelle introduite au niveau de (1.16). Cette formulation du principe des puissances virtuelles (1.77) est valable du moment de l'impact jusqu'au moment du relâchement du contact. Le reste du temps comme il n'y a pas de contact, il n'y a pas de force associée, et donc  $P_{\text{contact}}^* = 0$ .

Ainsi le problème (1.52) semi discrétisé en espace devient :

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{contact}} \quad (1.79)$$

Une méthode pour introduire les forces de contact  $\mathbf{F}_{\text{contact}}$  est d'utiliser le formalisme variationnel du Lagrangien [54]. Cette méthode est appliquée dans l'espace déjà discrétisé  $\mathbb{U}_h$ . Dans un premier temps, cette méthode est présentée sans le contact pour des raisons de clarté. Ce dernier sera rajouté ensuite. Le Lagrangien représente l'action du système et ce dernier s'écrit :

$$L(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} - V(\mathbf{U}) \quad (1.80)$$

Soit

$$T(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \quad (1.81)$$

l'énergie cinétique associée au problème et

$$V(\mathbf{U}) = V_{\text{int}}(\mathbf{U}) - V_{\text{ext}}(\mathbf{U}) \quad (1.82)$$

avec  $V_{\text{int}}$  l'énergie potentielle associée aux forces intérieures  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  et  $V_{\text{ext}}$  celle associée aux forces extérieures  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  telle que

$$-\frac{\partial V(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (1.83)$$

Le principe de Hamilton exprime la recherche pour tout système mécanique de la stationnarisation de l'action, soit la stationnarisation du Lagrangien (1.80). Cela se traduit par la formulation suivante :

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{U}, \mathbf{V}) dt = 0 \quad (1.84)$$

ce qui donne alors  $\forall \delta \mathbf{U} \in \mathbb{V}_h$  :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left( \delta \mathbf{U}^T \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} + \delta \mathbf{V}^T \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) dt = 0 \quad (1.85)$$

ce qui par une intégration par partie du second terme donne [31] :

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta \mathbf{U}^T \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) \right) dt = 0 \quad (1.86)$$

Ainsi une réécriture de l'équation (1.52) est l'équation d'Euler-Lagrange, tel que :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) \quad (1.87)$$

Le contact peut maintenant être rajouté car il influe sur l'action du système et donc sur le Lagrangien (1.80). Sur les nœuds de contact potentiel présents sur le bord de contact  $\Gamma_t$ , il est introduit un nouveau Lagrangien  $L'$  en utilisant la méthode des multiplicateurs [45, 50] de Lagrange, et il est obtenu :

$$L'(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\lambda}) = T(\mathbf{V}) - V(\mathbf{U}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_N(\mathbf{U}) \quad (1.88)$$

avec  $T$  l'énergie cinétique présentée dans (1.81) et  $V$  l'énergie potentielle des forces extérieures et intérieures (1.82).  $\boldsymbol{\lambda}$  est un vecteur contenant les multiplicateurs de Lagrange permettant de forcer les conditions de contact sur  $\Gamma_t$  avec  $\boldsymbol{\lambda} \in (\mathbb{R})^d$  et  $d$  le nombre de nœuds potentiels en contact sur  $\Gamma_t$ . Soit  $\mathbf{g}_N(\mathbf{U})$  le vecteur de taille  $d$  répertoriant l'ensemble des gaps normaux pour chaque nœud potentiel de contact calculé à partir de l'équation (1.66). Lors de l'application du principe de Hamilton de stationnarisation de l'action, le terme d'accélération  $\ddot{\mathbf{U}} = d\mathbf{V}/dt$

apparaît et il est nécessaire qu'il soit défini. Cependant, lors du contact entre le solide déformable et le solide rigide, la vitesse n'est pas régulière ni continue et donc l'accélération n'est plus définie. Effectivement lors du contact la vitesse peut admettre deux sauts. Un premier à l'impact et un second lorsque l'on relâche le contact. Ces discontinuités peuvent être possibles pour chaque nœud potentiel de contact. Ainsi, il est posé  $t_i \in [t_0, t_f]$  l'instant où le contact a lieu. L'accélération est alors définie sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_i[\cup]t_i, t_f]$  et non définie en  $t_i$ . Pour des raisons de clarté d'écriture des équations, il est choisi un seul temps de contact  $t_i$ . L'application du principe d'Hamilton (1.84) sur  $L'$  donne alors :

$$\delta \left( \int_{[t_0, t_i[\cup]t_i, t_f]} L'(\mathbf{U}, \mathbf{V}) dt + \boldsymbol{\lambda}_{t_i} \mathbf{g}_N(\mathbf{U}(t_i)) \right) = 0 \quad (1.89)$$

Ce qui après calculs, voir [24], donne :

$$\begin{aligned} \int_{[t_0, t_i[\cup]t_i, t_f]} \left( \delta \mathbf{U}^T \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} + (\nabla \mathbf{g}_N)^T \boldsymbol{\lambda} \right) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_N(\mathbf{U}) \right) dt \\ - \delta \mathbf{U}^T \left( \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right]_{t_i^-}^{t_i^+} - \nabla \mathbf{g}_N^T \boldsymbol{\lambda}_{t_i} \right) \\ + \left( \delta t_i [L]_{t_i^-}^{t_i^+} + d \mathbf{U}_{t_i}^T (\nabla \mathbf{g}_N^T \boldsymbol{\lambda}_{t_i}) \right) + \delta \boldsymbol{\lambda}_{t_i}^T \mathbf{g}_N(\mathbf{U}, t_i) = 0 \end{aligned} \quad (1.90)$$

avec  $t_i^+$  l'instant juste après l'impact au temps  $t_i$  et  $t_i^-$  l'instant juste avant. Ainsi le système d'équations obtenu à partir de (1.90) est [24, 31] :

$$\forall t \in [t_0, t_i[\cup]t_i, t_f], \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} + (\nabla \mathbf{g}_N)^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (1.91)$$

$$\forall t \in [t_0, t_i[\cup]t_i, t_f], \quad \mathbf{g}_N(\mathbf{U}) \geq 0 \quad (1.92)$$

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right]_{t_i^-}^{t_i^+} = (\nabla \mathbf{g}_N)^T \boldsymbol{\lambda}_{t_i} \quad (1.93)$$

$$\left[ L + \mathbf{V}^T \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right]_{t_i^-}^{t_i^+} = 0 \quad (1.94)$$

$$t = t_i, \quad \mathbf{g}_N(\mathbf{U}, t_i) = 0 \quad (1.95)$$

En remplaçant avec les grandeurs dans la formule du Lagrangien (1.88), le problème peut également s'écrire :

$$\forall t \in [t_0, t_i[\cup]t_i, t_f], \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (1.96)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}(t_i^+) - \mathbf{V}(t_i^-)) = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\lambda}_{t_i} \quad (1.97)$$

$$\left[ \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \right]_{t_i^-}^{t_i^+} = 0 \quad (1.98)$$

avec  $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{g}_N$  l'opérateur de projection du domaine global sur l'interface de contact  $\Gamma_t$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  et  $\boldsymbol{\lambda}_{t_i}$  définis selon l'équation (1.100).

Il est important de remarquer que dans le cas où il n'y a pas de contact,  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ . Effectivement, dans ce cas il n'y a pas de forces dues au contact et donc ce terme s'annule. L'équation (1.98) rappelle que l'énergie cinétique est conservée entre l'entrée en contact et la sortie du contact. De manière à unifier les équations (1.96) et (1.97), Moreau [59, 60] et Jean [41] ont proposé de poser les variables suivantes :

$$d\mathbf{V} = \begin{cases} \ddot{\mathbf{U}} dt, & t \in [t_0, t_i[\cup]t_i, t_f] \\ \mathbf{V}(t_i^+) - \mathbf{V}(t_i^-), & t = t_i \end{cases} \quad (1.99)$$

$$d\mathbf{r} = \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} dt, & t \in [t_0, t_i[\cup]t_i, t_f] \\ \boldsymbol{\lambda}_{t_i}, & t = t_i \end{cases} \quad (1.100)$$

avec  $\mathbf{V}(t_i^+)$  la vitesse juste après l'impact et  $\mathbf{V}(t_i^-)$  celle juste avant. Soit  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$  le vecteur de taille le nombre de degrés de liberté associé au nombre de nœuds de contact potentiel comprenant les valeurs des multiplicateurs de Lagrange obtenues après résolution des conditions de contact. Ces multiplicateurs sont également appelés impulsions. Il faut différencier  $\boldsymbol{\lambda}$  qui est une force nodale (en N), et  $\boldsymbol{\lambda}_{t_i}$  qui est une impulsion (en N.s).

L'équation de la dynamique non régulière devient alors

$$\mathbf{M}d\mathbf{V} = (\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}))dt + \mathbf{L}^T d\mathbf{r} \quad (1.101)$$

avec les conditions HSM pour chaque nœud  $i$  du bord de contact potentiel  $\Gamma_t$  défini tel que

$$\begin{cases} \text{Si} & (\mathbf{g}_N(\mathbf{U}))_i > 0, & (\mathbf{r})_i = 0 \\ \text{Sinon} & (\mathbf{g}_N(\mathbf{U}))_i = 0, & 0 \leq (\mathbf{v})_i \perp (\mathbf{r})_i \leq 0 \end{cases} \quad (1.102)$$

avec

$$\mathbf{v} = \mathbf{L}\mathbf{V} \quad (1.103)$$

Les conditions de contact (1.72) sont ici introduites en vitesse et impulsion. Cette dernière n'est autre que la force de contact, quand celle-ci est bien définie pour un nœud  $i$ , intégrée sur un intervalle de temps tel que :

$$\forall (t_1, t_2) \in [t_0, t_i[ \text{ ou } \forall (t_1, t_2) \in ]t_i, t_f] \text{ et } t_2 > t_1, (\mathbf{r})_i = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}_{\text{contact}})_i dt \quad (1.104)$$

L'ensemble des équations du problème de la mécanique a été présenté. Il reste maintenant la discrétisation temporelle pour pouvoir résoudre les équations de la mécanique dans un problème de dynamique transitoire non-régulière. Dans la prochaine section, nous expliquerons le choix du schéma numérique pour résoudre ce problème.

## 1.5 La discrétisation temporelle : le schéma explicite CD-Lagrange

Dans les sections précédentes la discrétisation spatiale a été présentée pour connaître la solution du problème en chaque point de l'espace. Le problème étant en dynamique transitoire non-régulière, il est maintenant nécessaire de le discrétiser temporellement de manière à connaître la solution à chaque instant  $t \in [t_0, t_f]$ . Discrétiser le temps revient à découper l'intervalle  $[t_0, t_f]$  en une grille dont chaque piquet de temps  $t_n$  (un instant) est séparé par un pas de temps  $h$ , constant dans notre étude,  $h = t_{n+1} - t_n$ , comme le montre la figure 1.4. Pour calculer la solution du problème discrétisé en temps, l'utilisation d'un schéma numérique est nécessaire pour calculer la solution à chaque piquet de temps  $t_n$ .

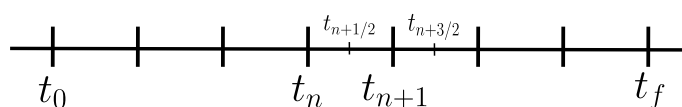


FIGURE 1.4 – Discrétisation du temps sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$

Un schéma numérique possède plusieurs propriétés. Une première est sa stabilité. Dire qu'un schéma est stable signifie qu'une petite variation de l'état initial mène à un changement borné sur la solution finale. Une seconde propriété est la précision. Un schéma d'intégration temporelle approxime ce qu'il se passe dans le temps continu. Ainsi il est possible de calculer une erreur par rapport à une solution continue, si elle existe, ou une solution obtenue avec un très petit pas de temps  $h$ . Cette solution s'appellera solution de référence. Si, pour le choix de plusieurs pas de temps plus grands que celui utilisé pour la solution de référence, l'erreur par rapport à cette solution en fonction du pas de temps en échelle log-log est une droite linéaire alors le schéma est d'ordre le coefficient directeur de cette dernière. Le schéma peut-être d'ordre un ou plus encore. Ainsi il est vérifié que si le pas de temps augmente et donc que le temps est discrétisé de manière grossière, la solution est toujours représentative mais moins précise. Il est à noter que la simulation prend en compte tous les phénomènes qui ont un temps caractéristique supérieur au pas de temps choisi. Ainsi plus le pas de temps choisi est grand, moins de phénomènes seront représentés. Pour finir, la dernière propriété est l'efficacité. Cette dernière est associée au coût de calcul de la résolution d'un incrément de temps. Une famille de schémas réunissant ces paramètres est la famille des schémas d'intégration temporelle de Newmark [62]. Le schéma utilisé pour la résolution des problèmes de contact dans ce manuscrit est basé sur un des schémas de cette famille, c'est pourquoi ils sont présentés par la suite.

### 1.5.1 La famille des schémas de Newmark

Il existe deux grandes familles de schéma numérique pour la résolution d'un problème en dynamique : les schémas dits implicites, et les schémas dits explicites. La première famille implique la résolution d'un système d'équations couplées et



peut donc être très coûteux en terme de calculs notamment avec l'utilisation de méthodes itératives pour résoudre le système linéaire ou non-linéaire. Dans le cas de problèmes non-linéaires, une méthode connue pour la résolution est l'algorithme itératif de Newton-Raphson [34]. Cependant un avantage de ce type de schéma est qu'ils sont inconditionnellement stables, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de contrainte sur le pas de temps. À l'inverse, la seconde famille, les schémas explicites, ne requiert pas de résoudre de système linéaire, ni non-linéaire, mais nécessite le choix d'un pas de temps respectant la condition de stabilité CFL [17] (Courant-Friedrichs-Lewy). Ainsi, pour la résolution d'un pas de temps donné, le schéma explicite sera plus rapide du fait qu'il s'agit d'un problème "matrix-free", ce qui permet notamment de résoudre le problème en parallélisant les calculs, puisque chaque équation du système est indépendante des autres.

Ainsi, suivant les phénomènes que l'on souhaite modéliser, un schéma sera plus adapté qu'un autre, notamment par le contenu fréquentiel du chargement extérieur. La famille des schémas de Newmark permet, suivant le choix des paramètres, d'utiliser un schéma explicite ou implicite. La formule générale de ce schéma est [62] :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_n + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}_n + \beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (1.105)$$

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + h \left[ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (1.106)$$

L'équation (1.105) permet de mettre à jour le déplacement à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction de la vitesse  $\mathbf{V}$  à l'instant  $t_n$  et de l'accélération  $\ddot{\mathbf{U}}$  aux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . De la même manière l'équation (1.106) permet de mettre à jour la vitesse à l'instant  $t_{n+1}$ . Le choix d'un schéma de Newmark se fait donc par la nécessité de choisir un couple de paramètres  $(\gamma, \beta)$ . Selon le choix de ces paramètres, les propriétés du schéma temporel sont différentes. Il peut être par exemple soit explicite soit implicite. Pour fermer le système, il est nécessaire d'ajouter aux équations (1.105) et (1.106) l'équation de la dynamique discrétisée telle que

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}) \quad (1.107)$$

soit, dans le cas où les forces intérieures sont linéaires et sans amortissement, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de  $\mathbf{V}_{n+1}$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} \quad (1.108)$$

avec  $\mathbf{K}$  la matrice de rigidité associée au comportement volumique du solide déformable. Ainsi le système à résoudre est donc le suivant :

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, \ddot{\mathbf{U}}_n) \quad (1.109)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{M}} = [\mathbf{M} + \beta h^2 \mathbf{K}] \quad (1.110)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, \ddot{\mathbf{U}}_n) = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{K} \left( \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_n + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{U}}_n \right) \quad (1.111)$$

La mise en œuvre peut ainsi se faire conformément à l'algorithme (1).

---

**Algorithm 1** Résolution du schéma de Newmark

---

**Inputs :**  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, \ddot{\mathbf{U}}_n$

1. Résoudre (1.109) pour obtenir  $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$
2. Résoudre (1.105) pour obtenir  $\mathbf{U}_{n+1}$
3. Résoudre (1.106) pour obtenir  $\mathbf{V}_{n+1}$

**Outputs :**  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$

---

La matrice  $\tilde{\mathbf{M}}$  n'étant pas diagonale, la résolution de l'équation (1.109) nécessite l'usage de la résolution d'un système. Si le système est non linéaire, alors des algorithmes tel que celui de Newton-Raphson peuvent être utilisés. Si  $\beta \geq \frac{1}{2}$  dans le régime linéaire sans amortissement, le schéma est inconditionnellement stable, c'est à dire que le choix du pas de temps est libre [36]. Dans le cas contraire, la condition de stabilité s'écrit :

$$h_{CFL} = \frac{1}{w_{max}} \frac{1}{\gamma/2 - \beta} \sqrt{\left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \left( \beta - \frac{1}{4} \right)} \quad (1.112)$$

et

$$\gamma - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta \geq 0 \quad (1.113)$$

avec  $w_{max}$  la fréquence naturelle la plus grande du système discret (1.107).

Dans le cas de la dynamique transitoire non-régulière, notamment pour la vitesse, il est souhaitable de ne pas avoir de système à résoudre et donc d'avoir l'usage d'un schéma temporel explicite pour mieux décrire les phénomènes. Effectivement, pour observer ce qu'il se passe en dynamique rapide, il est nécessaire de choisir des pas de temps petits et la gestion des non régularités est plus complexe à réaliser en implicite. Il faut notamment faire appel à des algorithmes de pénalisation [16, 6] par exemple. C'est pourquoi un intérêt est porté au schéma de la différence centrée suite à des études précédentes sur le contact [32, 31, 24]. Ce dernier correspond dans le cadre de la famille des schémas de Newmark à  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1/2$ .

Ainsi le système d'équations composé de (1.105), (1.106) et (1.107) devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}) \quad (1.114)$$

$$\mathbf{V}_{n+1} = \frac{1}{2h}(\mathbf{U}_{n+2} - \mathbf{U}_n) \quad (1.115)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{h^2}(\mathbf{U}_{n+2} - 2\mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{U}_n) \quad (1.116)$$

Cette résolution demande la connaissance de trois pas de temps différents avec  $\mathbf{U}_{n+2}$ ,  $\mathbf{U}_{n+1}$  et  $\mathbf{U}_n$ .

Ainsi en posant :

$$\mathbf{V}_{n+3/2} = \frac{1}{h}(\mathbf{U}_{n+2} - \mathbf{U}_{n+1}) \quad (1.117)$$

le système d'équations (1.114), (1.115) et (1.116) devient :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_{n+1/2} \quad (1.118)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) = h(\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1/2})) \quad (1.119)$$

$$\mathbf{V}_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_{n+3/2} + \mathbf{V}_{n+1/2}) \quad (1.120)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{h}(\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) \quad (1.121)$$

La seule inconnue est alors  $\mathbf{V}_{n+3/2}$  et la résolution est donc bien explicite et l'équation de la dynamique devient :

$$\mathbf{M}\mathbf{V}_{n+3/2} = \mathbf{M}\mathbf{V}_{n+1/2} + h(\mathbf{F}_{\text{ext}}(t_{n+1}) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1/2})) \quad (1.122)$$

avec une matrice de masse  $\mathbf{M}$  lumpée de manière à avoir un système dit "matrix free", c'est à dire que chaque équation est indépendante tout en assurant la conservation de la masse [40, 8]. Dans l'écriture de l'équation discrétisée (1.122), dans les forces intérieures la vitesse  $\mathbf{V}$  est choisie au pas de temps  $n + 1/2$ . Cela s'explique dans l'objectif de garder explicite la résolution. Une preuve a été donnée dans [8]. Il devient alors possible de résoudre des problèmes non linéaires en dynamique explicite. Cependant, un effet secondaire de ce choix est une légère diminution du pas de temps critique, voir [36]. Dans le cas linéaire et sans amortissement, le pas de temps critique (1.123) devient :

$$h_{CFL} = \frac{2}{w_{max}}. \quad (1.123)$$

Une généralisation du pas de temps critique est la formule de Courant-Friedrichs-Levy [17], connu sous le nom de condition CFL, qui exprime le pas de temps critique de la manière suivante :

$$h_{CFL} \leq \min_e \left( \frac{l_e}{c_e} \right) \quad (1.124)$$

avec  $l_e$  une longueur caractéristique qui en trois dimensions peut correspondre à un multiple du rayon inscrit dans le volume de l'élément  $e$ , ou encore à la distance entre deux nœuds, et  $c_e$  la vitesse de propagation des ondes élastiques. Ainsi en prenant la plus petite valeur, le pas de temps critique convient à tous les éléments du maillage.

Le choix de ce schéma pour la résolution de nos problèmes mécaniques en dynamique transitoire n'est pas un hasard. Une propriété intéressante de ce schéma est qu'il est symplectique [54, 79, 43]. Un schéma est dit symplectique si :

$$\mathbf{A}^T \mathbb{J} \mathbf{A} = \mathbb{J} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 1 \quad (1.125)$$

avec  $\mathbf{A}$  la matrice d'amplification du schéma numérique associée aux équations (1.105), (1.106), (1.107) et

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

Après calcul de la matrice d'amplification des schémas de la famille de Newmark, la seule solution pour obtenir  $\det(\mathbf{A}) = 1$  correspond aux coefficients  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 0$ , soit les coefficients correspondant au schéma de la différence centrée. Ainsi, d'après le théorème de Noether [33], ce modèle permet de conserver la résultante, le moment, et possède de bonnes propriétés de conservation de l'énergie. C'est en cela que le schéma de la différence centrée [24] nous intéresse.

## 1.5.2 Résolution d'un problème de contact

Pour résoudre les équations de la mécanique (1.101) et (1.102) comprenant la résolution du contact, le schéma numérique choisi est donc basé sur la différence centrée, notamment pour la propriété symplectique du schéma. Il faut donc rajouter le contact et sa résolution au schéma de Newmark précédent, c'est pour cela que l'utilisation du schéma CD-Lagrange s'est imposée. Ce schéma a été introduit dans [31] et est basé sur les conditions HSM en vitesse-impulsion.

Maintenant que les impulsions ont été introduites, et que l'utilisation d'un schéma explicite a été évoquée, conduisant à une résolution indépendante pour chaque nœud, il est nécessaire d'introduire certaines notations :

$$\begin{cases} \mathbf{v} = v_{c,N} \mathbf{n} + v_{c,T} \mathbf{t} \\ \mathbf{r} = r_{c,N} \mathbf{n} + r_{c,T} \mathbf{t} \\ \mathbf{v}_{c,T} = v_{c,T} \mathbf{t} \\ \mathbf{r}_{c,T} = r_{c,T} \mathbf{t} \end{cases} \quad (1.127)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale extérieure au solide rigide sur lequel le nœud du solide déformable est en contact, et  $\mathbf{t}$  la direction tangentielle. Soit  $\mathbf{v}$  le vecteur de vitesse relative entre les deux solides associé à un nœud de contact  $i$ ,  $\mathbf{r}$  l'impulsion associée à ce nœud de contact.  $v_{c,N}$  est la vitesse normale associée à la direction normale  $\mathbf{n}$ ,  $v_{c,T}$  est la norme de la vitesse tangentielle  $\mathbf{v}_T$  associée à la direction tangentielle  $\mathbf{t}$ . Le vecteur composé par la vitesse normale et tangentielle correspond à  $\mathbf{v}$ . De la même manière  $r_{c,N}$  correspond à l'impulsion normale et  $r_{c,T}$  la norme de l'impulsion tangentielle  $\mathbf{r}_{c,T}$ , soit  $\mathbf{r}$ . Ces quantités sont calculées et intégrées au nœud  $i$  de contact potentiel sur le bord  $\Gamma_t$ .

Ainsi, pour chaque nœud de contact potentiel, localement les conditions de contact normal HSM (1.73) s'écrivent à partir de l'équation (1.102) :

$$\begin{cases} \text{Si} & g_{n+1} > 0, \quad r_{c,N,n+3/2} = 0 \\ \text{Sinon} & g_{n+1} \leq 0, \quad 0 \leq r_{c,N,n+3/2} \perp v_{c,N,n+3/2} \geq 0 \end{cases} \quad (1.128)$$

avec  $g_{n+1}$  le gap associé au nœud  $i$ , soit  $(\mathbf{g}_N(\mathbf{U}))_i$  dans (1.102). Le gap est choisi négatif ou nul pour des raisons de précision numérique. Il s'agit d'un point essentiel basé sur les concepts de Jean-Jacques Moreau [59]. Ainsi, la détection des instants de contact n'est pas nécessaire (time stepping). On peut remarquer qu'il n'y a pas de pénalisation sur ce modèle, mais le déplacement peut entraîner une légère pénétration car le schéma est piloté en vitesse ce qui peut conduire éventuellement à un critère de précision sur le pas de temps. Il est à noter qu'une contribution tangentielle de contact est possible que si il y a de la compression et donc une impulsion de contact normal non nulle.

De la même manière, localement, les conditions de contact sur la direction tangentielle (1.76) s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{Si} & r_{c,N,n+3/2} = 0, \quad r_{c,T,n+3/2} = 0 \\ \text{Sinon} & r_{c,N,n+3/2} > 0, \quad 0 \leq (\mu r_{c,N,n+3/2} - r_{c,T,n+3/2}) \perp \|\mathbf{v}_{T,n+3/2}\| \geq 0 \end{cases} \quad (1.129)$$

avec  $\mu$  le coefficient de frottement. Comme dans (1.102), la loi de Coulomb étant utilisée, l'équation  $\mathbf{r}_{c,T} = -a\mathbf{v}_T$  avec  $a \in \mathbb{R}^+$  ou discrétisée  $\mathbf{r}_{c,T,n+3/2} = -a\mathbf{v}_{T,n+3/2}$  est vérifiée. Malgré le fait que les impulsions sont calculées au pas de temps  $n+3/2$ , la résolution reste explicite comme le montre la résolution des problèmes linéaires de complémentarité avec les algorithmes (2) et (3) introduits ci-après.

Les conditions de contact sont donc écrites localement aux nœuds et les impulsions sont calculées uniquement au niveau des nœuds de contact potentiel. Pour résoudre les équations de la dynamique, dont les vecteurs sont définis sur l'ensemble des nœuds, il est donc nécessaire de projeter ces impulsions sur le domaine global qui contient tous les nœuds du maillage. Pour ce faire, soit  $\mathbf{R}_c$  le vecteur comprenant l'ensemble des impulsions normales et tangentielles des nœuds de contact et possédant la taille du vecteur de déplacement  $\mathbf{U}$  pour pouvoir résoudre l'équation de la dynamique (1.101). Ainsi, pour construire  $\mathbf{R}_c$  il est nécessaire d'introduire les opérateurs de projection  $\mathbf{L}_N$  et  $\mathbf{L}_T$  qui permettent de replacer sur le vecteur global des nœuds les impulsions locales. Il est important de noter que les directions normale et tangentielle sont orthogonales, donc  $\mathbf{L}_N\mathbf{L}_T^T = \mathbf{L}_T\mathbf{L}_N^T = \mathbf{0}$ . Ainsi l'impulsion globale est écrite de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{L}_N^T\mathbf{R}_{c,N} + \mathbf{L}_T^T\mathbf{R}_{c,T} \quad (1.130)$$

avec  $\mathbf{R}_{c,N}$  le vecteur des impulsions normales de la taille du nombre de nœuds de contact potentiel.  $\mathbf{R}_{c,T}$  est le vecteur des impulsions tangentielles. La direction normale et tangentielle étant orthogonales, ce vecteur est de taille deux fois le nombre de nœuds de contact potentiel. Soit  $\mathbf{L}_N$  la matrice dont le nombre de lignes correspond au nombre de nœuds de contact potentiel, et le nombre de colonnes correspondant au nombre de degrés de liberté, alors :

$$\mathbf{L}_N \underset{3i..3i+2}{i} = [(n_x)_i \ (n_y)_i \ (n_z)_i] \quad (1.131)$$

avec  $[(n_x)_i \ (n_y)_i \ (n_z)_i]$  les coordonnées de la normale extérieure au solide rigide au niveau du nœud  $i$ . Les autres coefficients sont nuls. De la même manière, l'opérateur de projection tangent  $\mathbf{L}_T$  est une matrice dont le nombre de lignes correspond à 2 fois le nombre de nœuds de contact potentiel du bord  $\Gamma_t$  et le nombre de colonnes est également le nombre de degrés de liberté. Ainsi pour l'opérateur tangent il est obtenu :

$$\mathbf{L}_T \underset{3i..3i+2}{2i} = [(t_{1x})_i \ (t_{1y})_i \ (t_{1z})_i] \quad (1.132)$$

$$\mathbf{L}_T \underset{3i..3i+2}{2i+1} = [(t_{2x})_i \ (t_{2y})_i \ (t_{2z})_i] \quad (1.133)$$

avec  $[(t_{1x})_i \ (t_{1y})_i \ (t_{1z})_i]$  les coordonnées du premier vecteur tangent et  $[(t_{2x})_i \ (t_{2y})_i \ (t_{2z})_i]$  les coordonnées du second. Ainsi en chaque nœud de contact est associé un repère orthogonal  $[\mathbf{n}_i, \mathbf{t}_{1i}, \mathbf{t}_{2i}]$ . Ce schéma introduit dans [31], et également utilisé dans [24], utilise la formulation HSM en vitesse et en impulsion introduite par Moreau et Jean [59] comme présenté précédemment (1.101). Avec l'ajout du contact, le système global d'équations (1.101) devient :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_{n+1/2} \quad (1.134)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) = h(\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1}(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1/2})) + \mathbf{L}_N^T \mathbf{R}_{c,N,n+3/2} + \mathbf{L}_T^T \mathbf{R}_{c,T,n+3/2} \quad (1.135)$$

Pour résoudre l'équation de la mécanique (1.135) il est donc nécessaire de résoudre les deux problèmes linéaires de complémentarité associés aux équations (1.72) pour le problème normal et les équations (1.76) pour le problème tangent. Pour rappel les directions de contact normal et tangentiel sont orthogonales, donc les problèmes de contact peuvent être résolus l'un après l'autre. Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire d'introduire la vitesse sans contact que nous nommerons  $\mathbf{V}_{\text{free}}$  qui correspond à  $\mathbf{V}_{n+3/2}$  lorsqu'on résout (1.135) sans les contributions des impulsions de contact. Ainsi :

$$\mathbf{V}_{\text{free},n+3/2} = \mathbf{V}_{n+1/2} + h\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1}) \quad (1.136)$$

Il est donc nécessaire maintenant d'introduire les vitesses normales associées à chaque nœud de contact. Pour ce faire, l'opérateur  $\mathbf{L}_N$  va être utilisé. Soit  $\mathbf{V}_N$  le vecteur vitesse de taille le nombre de nœuds de contact potentiel stockant les vitesses normales de ces mêmes nœuds de la manière suivante :

$$\mathbf{V}_{N,n+3/2} = \mathbf{L}_N \mathbf{V}_{n+3/2} = \mathbf{V}_{N,\text{free}} + \mathbf{H}_N \mathbf{R}_{c,N,n+3/2} \quad (1.137)$$

avec

$$\mathbf{V}_{N,free} = \mathbf{L}_N \mathbf{V}_{free,n+3/2} \quad (1.138)$$

$$\mathbf{H}_N = \mathbf{L}_N \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L}_N^T \quad (1.139)$$

avec l'opérateur  $\mathbf{H}_N$  connu sous le nom d'opérateur de Delassus [23] qui est défini et positif. La matrice de masse étant lumpée et les conditions de contact locales, et donc indépendantes entre elles, cette opérateur est diagonal, ce qui nous permet de garder une résolution explicite et indépendante pour chaque nœud de contact. Localement, la vitesse normale s'écrit :

$$v_{N,n+3/2} = v_{N,free} + H_{N,loc} r_{c,N,n+3/2} \quad (1.140)$$

avec  $H_{N,loc} = (\mathbf{H}_N)_{i,i}$  pour le nœud de contact  $i$  considéré,  $v_{N,n+3/2} = (\mathbf{V}_N)_i$ ,  $v_{N,free} = (\mathbf{V}_{N,free})_i$  et  $r_{c,N,n+3/2} = (\mathbf{R}_{c,N,n+3/2})_i$ .

Ainsi, pour chaque nœud de contact, le problème linéaire de complémentarité associé à l'équation (1.128) est localement résolu par l'algorithme (2).

---

**Algorithm 2** Résolution du contact dans la direction normale

---

**Entrées :**  $g_{n+1}$ ,  $v_{N,free}$ ,  $H_{N,loc}$

**if**  $g_{n+1} > 0$  **then**

$$v_{N,n+3/2} = v_{N,free}$$

$$r_{c,N,n+3/2} = 0$$

**else**

$$v_{N,n+3/2} = \langle v_{N,free} \rangle_+$$

$$r_{c,N,n+3/2} = -H_{N,loc}^{-1} \langle v_{c,N,free} \rangle_-$$

**end if**

**Sorties :**  $v_{N,n+3/2}$ ,  $r_{c,N,n+3/2}$

---

Lorsque le gap est négatif, la vitesse normale du nœud est donnée comme la valeur positive de la vitesse sans contact  $v_{N,free}$ . Effectivement, si le nœud entre en contact alors il cherche à pénétrer le solide rigide avec lequel il entre en contact. Sa vitesse est alors négative car opposée à la normale au solide rigide. Ainsi la valeur positive donne bien une valeur nulle pour la vitesse, et ainsi le solide déformable ne cherche pas à pénétrer le solide rigide. Le nœud n'a alors plus de vitesse. Lorsque que le nœud "redécalle", sa vitesse est positive et l'impulsion est bien nulle car elle dépend de la valeur négative de la vitesse sans contact et il n'y a bien plus de contact. Ainsi cet algorithme vérifie bien les conditions de Signorini de (1.128).

De la même manière pour résoudre le problème de contact sur la partie tangente, il est nécessaire de connaître la vitesse des nœuds potentiels de contact sur la partie tangente. Pour ce faire, soit  $\mathbf{V}_T$  le vecteur contenant l'ensemble des valeurs de la vitesse tangentielle de ces nœuds. Il est ainsi obtenu de la même manière que pour le problème normal (1.137) mais avec l'opérateur  $\mathbf{L}_T$  :

$$\mathbf{V}_{T,n+3/2} = \mathbf{L}_T \mathbf{V}_{n+3/2} = \mathbf{V}_{T,free} + \mathbf{H}_T \mathbf{R}_{c,T,n+3/2} \quad (1.141)$$

avec

$$\mathbf{V}_{T,free} = \mathbf{L}_T \mathbf{V}_{free,n+3/2} \quad (1.142)$$

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{L}_T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L}_T^T \quad (1.143)$$

avec  $\mathbf{H}_T$  l'opérateur de Delassus également défini et positif. La matrice de masse étant lumpée, l'opérateur est donc également diagonal. Localement il est alors obtenu :

$$\mathbf{v}_{T,n+3/2} = \mathbf{v}_{T,free} + \mathbf{H}_{T,loc} \mathbf{r}_{c,T,n+3/2} \quad (1.144)$$

avec  $\mathbf{H}_{T,loc} = (\mathbf{H}_T)_{i..i+1,i..i+1}$  l'opérateur de Delassus local au noeud  $i$  étudié,  $\mathbf{v}_{T,free} = (\mathbf{V}_{T,free})_{i..i+1}$  et  $\mathbf{r}_{c,T,n+3/2} = (\mathbf{R}_{c,T,n+3/2})_{i..i+1}$ .

La résolution pour la partie tangentielle s'écrit alors localement comme dans l'algorithme (3)

---

**Algorithm 3** Résolution du contact dans la direction tangentielle

---

**Entrées :**  $\mathbf{v}_{T,free}, r_{c,N,n+3/2}, \mathbf{H}_{T,loc}$   
 $\tilde{\mathbf{r}}_T = -\mathbf{H}_{T,loc}^{-1} \mathbf{v}_{T,free}$   
**if**  $\|\tilde{\mathbf{r}}_T\| \leq \mu r_{c,N,n+3/2}$  **then**  
     $\mathbf{r}_{c,T,n+3/2} = \tilde{\mathbf{r}}_T$   
     $\mathbf{v}_{T,n+3/2} = 0$   
**else**  
     $\mathbf{t} = -\frac{\mathbf{v}_{T,free}}{\|\mathbf{v}_{T,free}\|}$   
     $\mathbf{r}_{c,T,n+3/2} = \mu r_{c,N,n+3/2} \mathbf{t}$   
     $\mathbf{v}_{T,n+3/2} = \mathbf{v}_{T,free} + \mathbf{H}_{T,loc} \mathbf{r}_{c,T,n+3/2}$   
**end if**  
**Sorties :**  $\mathbf{v}_{T,n+3/2}, \mathbf{r}_{c,T,n+3/2}$

---

Cet algorithme vérifie bien les équations (1.129). Effectivement il sépare bien les deux cas possibles pour le contact tangentiel. Il existe la phase d'adhérence représentée par la première condition, avec une vitesse tangentielle nulle mais bien une impulsion. Puis si cette condition n'est pas vérifiée, nous sommes dans le cas d'un glissement avec une vitesse tangentielle de glissement non nulle. On pourra noter que le vecteur tangent  $\mathbf{t}$  est aussi calculé explicitement comme la configuration courante est connue à l'instant  $t_{n+1}$ .

Pour compléter, il reste à introduire l'algorithme de résolution du schéma CD-Lagrange avec les différentes étapes de résolution. Ceci est présenté dans l'algorithme (4).

Il est intéressant de remarquer qu'un avantage particulier de ce schéma comme le montre l'algorithme (4) est que la configuration est connue et donc directement applicable en grandes transformations. Effectivement  $\mathbf{U}_{n+1}$  est la première chose qui est calculée. Ainsi, il est aisé de calculer les forces intérieures et les impulsions permettant de garder le schéma explicite et ainsi la possibilité de calculer nœud par nœud les solutions.



---

**Algorithm 4** Algorithme de résolution pour un pas de temps d'un problème de contact avec le schéma CD-Lagrange

---

**Entrées :**  $\mathbf{V}_{n+1/2}, \mathbf{U}_n$

1. Résolution explicite du déplacement :  $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_{n+1/2}$ .
2. Calcul de :  $\mathbf{F}_{ext}^{n+1}, \mathbf{F}_{int}^{n+1}(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1/2})$ .
3. Calcul de la vitesse sans le contact  $\mathbf{V}_{free}$
4. Résolution pour chaque nœud de contact des algorithmes (2), (3).
5. Reconstruction du vecteur des impulsions (1.130).
6. Résolution de la dynamique (1.135).

**Sorties :**  $\mathbf{V}_{n+3/2}, \mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{R}_{c,n+3/2}$

---

Maintenant que le schéma numérique de résolution est présenté, pour clore ce chapitre un cas test est proposé dans la section suivante pour illustrer l'utilisation du schéma.

### 1.5.3 Illustration en compression et cisaillement

Pour tester la résolution du contact en dynamique explicite et pour montrer les avantages de cette résolution, un premier cas test a été mis en place. La résolution est sous l'hypothèse de petites perturbations. Ainsi dans ce cas test, la configuration initiale et déformée sont confondues pour les calculs. Un cube dont le comportement est élastique linéaire isotrope est soumis à une compression et à une pression latérale. L'objectif ici est donc de tester le contact avec la compression. Le fait d'ajouter une pression latérale en même temps que la compression permet d'activer le frottement sur les composantes tangentielles. Le cube est posé sur un support rigide infini. Le cas étudié est donc celui présenté sur la figure 1.5.

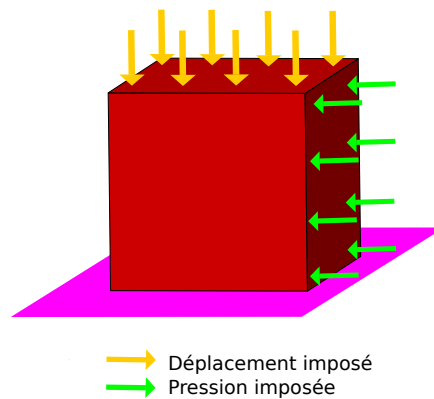


FIGURE 1.5 – Déplacement et pression imposés sur le cube

Pour réaliser les calculs, un maillage élément finis a été généré avec le logiciel Cast3M (<https://www-cast3m.cea.fr/>) et le problème a donc été résolu avec la méthode des éléments finis avec un code prototype académique codé sur Matlab de manière à pouvoir implémenter la résolution du contact. C'est un pavé droit de 10 mètres de longueur par 10 mètres de largeur par 8 mètres de hauteur discrétisé

par  $7 \times 7 \times 7$  Q1-éléments cubiques avec 8 nœuds chacun sur chaque sommet, ce qui donne 1536 degrés de liberté. La taille du cube et la discrétisation ont été choisies arbitrairement. Le choix du module d'Young pour le solide déformable est de 10 Pa pour un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et un coefficient de frottement  $\mu = 0.05$ .

Le focus est ici placé sur le comportement du contact et non les lois matériaux du solide déformable. Sur la figure 1.6 sont présentées les conditions aux limites imposées sur le cube.

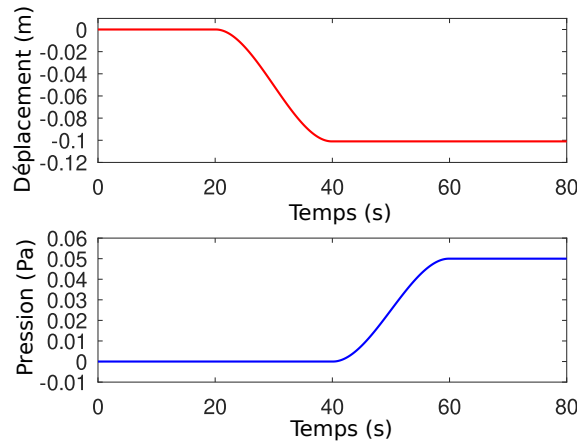


FIGURE 1.6 – Évolution du déplacement et pression imposés sur le cube en fonction du temps

Dans un premier temps, durant les 20 premières secondes de la simulation, aucun déplacement et aucune pression ne sont appliqués de manière à vérifier que le système est bien en équilibre si rien ne se passe. Dans un second temps, de  $t = 20$  secondes (s) à  $t = 40$  s de simulation, aucune pression n'est appliquée, mais de manière à compresser le cube, un déplacement perpendiculaire à la surface supérieure du cube est appliqué aux nœuds de cette surface. L'objectif ici est que l'impulsion de contact normal soit activée. Le déplacement imposé maximal est appliqué à  $t = 40$  s et est ensuite maintenu constant de manière à conserver la compression. Dans une troisième partie de la simulation de  $t = 40$  s à  $t = 60$  s, une pression extérieure est appliquée aux nœuds perpendiculairement à une face latérale du cube. L'objectif ici est donc de faire glisser le cube pour observer ce qu'il se passe d'un point de vue des impulsions tangentielles. La pression augmente jusqu'à  $t = 60$  s. A partir de ce moment, la pression et le déplacement imposés sont maintenus constants.

Un avantage de cette méthode est de connaître la direction tangentielle de contact. Dans un premier temps lors de la compression, la figure de gauche de la figure 1.7 montre que lors de la compression et sans aucune autre contrainte, les impulsions tangentielles de contact sont orientées vers le centre de la surface en contact du cube. Cela s'explique par un coefficient de Poisson non nul. Les figures du milieu et de droite de la figure 1.7 montrent l'évolution de la direction des forces tangentielles au cours du temps. Lorsque le cube commence à glisser,

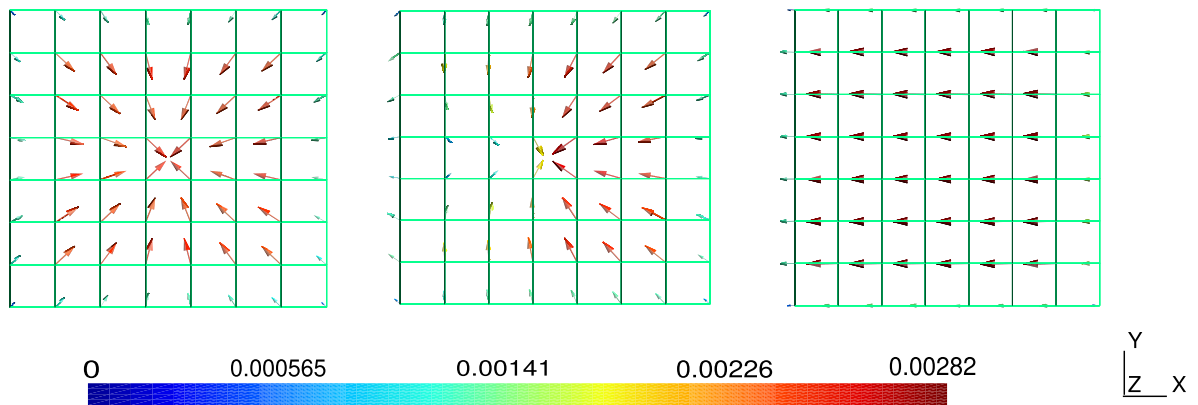


FIGURE 1.7 – Évolution de la direction de l'impulsion tangentielle ( $\text{m.s}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ ) à  $t = 40$  s (à gauche), à  $t = 45$  s (au milieu) et à  $t = 60$  s (à droite)

la direction de glissement est alignée avec les forces extérieures.

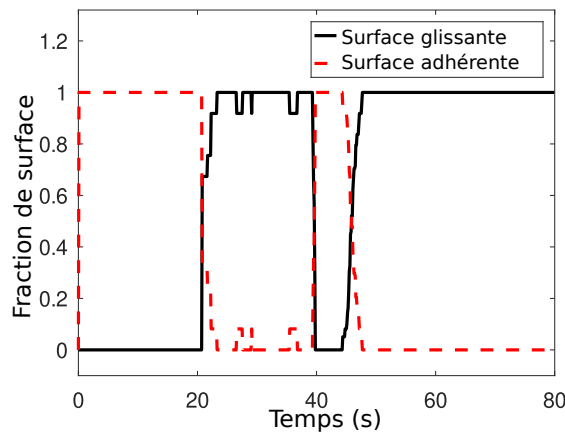


FIGURE 1.8 – Etat de la surface de contact obtenu avec un maillage de  $7 \times 7 \times 7$  elements

Effectivement la figure 1.8 montre qu'à partir de  $t = 45$  s le cube commence à glisser, ce qui confirme ce que montre la direction des impulsions tangentielles. Quelques remarques sont nécessaires par rapport à la figure 1.8. Dans un premier temps durant les vingt premières secondes de simulation il ne se passe rien, ce qui est logique puisque rien n'est appliqué sur le cube. Cependant, durant la deuxième partie de la simulation entre  $t = 20$  s et  $t = 40$  s, de nombreuses variations entre l'état de glissement et l'état d'adhérence apparaissent. Cela s'explique par le choix d'un coefficient de Poisson non nul et le choix d'un coefficient de frottement  $\mu$  qui est très faible. D'autre part, le choix d'un module d'Young  $E$  très faible, entraînant alors un comportement fortement déformable, contribue également à ces variations. Ainsi un effet dynamique apparaît à cause du transport des ondes dû au choix d'un comportement linéaire élastique sans amortissement pour le solide déformable qu'est le cube. De manière à prouver que ce ne sont pas des

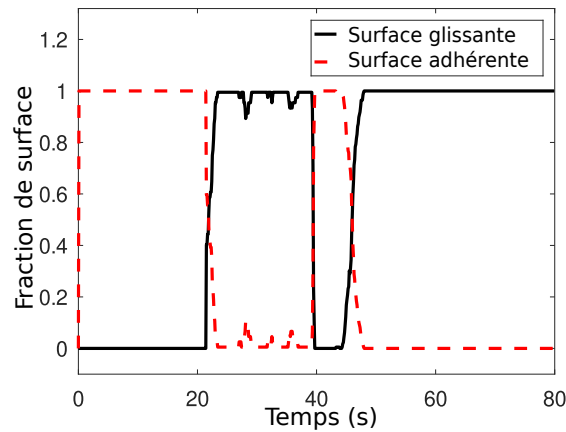


FIGURE 1.9 – Etat de la surface de contact obtenu avec un maillage raffiné de 14x14x14 elements

effets numériques, le choix de faire le calcul avec un maillage deux fois plus raffiné a été réalisé et les résultats obtenus se trouvent sur la figure 1.9.

Cette dernière figure montre bien que ce ne sont pas des effets numériques. Effectivement les variations sont obtenues aux mêmes instants avec un maillage plus raffiné. Cela s'explique simplement par le fait que comme les conditions aux limites du problème sont identiques, la vitesse des ondes reste la même, ainsi les variations apparaissent aux mêmes instants. Les résultats ne dépendent donc que très peu de la discrétisation temporelle.

Maintenant qu'un contact simple avec frottement a été résolu, l'objectif de ces travaux de recherche est d'ajouter un comportement plus complexe à ce contact au travers de l'ajout d'un modèle de zones cohésives. Pour ce faire, dans le prochain chapitre, une formulation thermodynamique et explicite est présentée de manière à pouvoir résoudre ce type de problème, dans un cadre assez générique.



# Chapitre 2

## Résolution d'un modèle de zones cohésives en dynamique explicite

Dans le premier chapitre, l'objectif était d'introduire la résolution d'un problème en dynamique transitoire non régulière avec du contact dans un cadre explicite avec le schéma numérique CD-Lagrange [24]. Dans ce deuxième chapitre, l'objectif est d'ajouter au contact unilatéral et au contact frottant un comportement supplémentaire en utilisant un modèle de zones cohésives pour prendre en compte des phénomènes tels que l'adhésion [35] ou encore de l'endommagement [22] à l'interface de contact. Pour ce faire, un cadre thermodynamique dans lequel les modèles doivent s'inscrire est introduit, notamment pour que la résolution soit physiquement motivée : le cadre des matériaux standards généralisés [52]. Le modèle RCCM (Raous-Cangémi-Cocu-Monerie) est étudié dans ce chapitre [74, 72, 22, 75]. Ensuite, un formalisme explicite pour la résolution numérique basé sur ce cadre thermodynamique est présenté avec l'utilisation du schéma CD-Lagrange. Effectivement, comme vu précédemment ce dernier permet notamment d'assurer au sens discret certaines équations de conservation car il est symplectique [31]. Avec ce formalisme il sera donc possible de résoudre explicitement des problèmes de contact avec des modèles de zones cohésives en dynamique non régulière avec un schéma explicite conservatif, au sens où la dissipation d'énergie est celle du modèle physique et non pas une dissipation numérique due au schéma. Pour cela, il est montré dans ce chapitre que la résolution présentée dans le chapitre 1 s'inscrit bien également dans ce cadre.

Pour être intégrés dans le cadre des matériaux standards généralisés, les modèles utilisés doivent respecter les deux premiers principes de la thermodynamique [52], que ce soit pour les lois de comportement d'interface (contact unilatéral, contact frottant, modèle de zones cohésives) ou encore les lois volumiques (élastique, visco-élastique, ...). Respecter les deux premiers principes de la thermodynamique signifie que les modèles conservent l'énergie et que le taux d'entropie produit est toujours plus grand ou égal au taux de chaleur divisé par la température [52].

Dans un premier temps le cadre thermodynamique dans lequel s'inscrit le problème est introduit, avec une présentation des deux premiers principes de la thermodynamique et l'inégalité de Clausius-Duhem qui en découle. Ensuite le modèle RCCM est présenté et introduit dans le formalisme thermodynamique

des matériaux standards généralisés. Dans un second temps, l'implémentation de l'algorithme de résolution en dynamique explicite est introduit. Pour conclure ce chapitre, sous l'hypothèse de petites perturbations, des applications avec différents cas tests mettant en valeur l'ensemble des comportements des modèles sont présentés.

## 2.1 Le cadre thermodynamique du problème

Dans cette première section une présentation plus détaillée des deux premiers principes de la thermodynamique est réalisée. L'objectif est de mettre en équations ce que signifie respecter ces deux premiers principes. Dans un dernier temps, les concepts de loi d'état et d'évolution seront présentés [52]. Ces lois formeront une base pour l'écriture du cadre de résolution explicite avec le schéma numérique CD-Lagrange.

### 2.1.1 Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique exprime la conservation de l'énergie [52]. Soit  $E$  l'énergie interne d'un système dont l'expression est la suivante :

$$E = \int_{\omega} \rho e \, dV \quad (2.1)$$

avec  $\omega \subset \Omega$  avec  $e$  l'énergie interne spécifique du système étudié sur le domaine  $\Omega$ ,  $\rho$  la masse volumique et  $dV$  un élément de volume de  $\Omega$ .

Soit  $E_c$  l'énergie cinétique définie de la manière suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dV \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{v}$  le vecteur vitesse d'un point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$ . Ensuite, soit  $Q$  le taux de chaleur reçu dans la région  $\Omega$ . Il s'exprime alors sous la forme :

$$Q = \int_{\omega} r \, dV - \int_{\partial\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2.3)$$

avec  $r$  la densité volumétrique de la production interne de chaleur,  $\mathbf{q}$  le flux de chaleur,  $\partial\Omega$  le bord du domaine avec  $dS$  un élément de surface de ce bord,  $\mathbf{n}$  la normale associée à un point  $\mathbf{x}$  de ce bord  $\partial\Omega$ .

Ainsi, le premier principe de la thermodynamique s'écrit de la manière suivante [52] :

$$\frac{d}{dt}(E + E_c) = P_{ext} + Q \quad (2.4)$$

avec  $d/dt$  la dérivée totale en temps et  $P_{ext}$  la puissance des forces extérieures (1.18) présentée dans le chapitre 1. Ainsi une variation dans le temps de l'énergie est égale à la somme de la puissance des forces extérieures et du flux de chaleur.

En développant l'équation (2.4), en utilisant (2.1), (2.2), (2.3) et la formulation de la puissance des forces extérieures (1.18), il est obtenu :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_{\omega} (\mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} + r) dV + \int_{\partial\omega} (\mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.5)$$

Pour rappel, dans le cas de notre étude, les forces extérieures appliquées en volume  $\mathbf{f}_d$  sont choisies comme nulles.

D'après le principe des puissances virtuelles (1.15) et dans le cas particulier où  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}$ , la relation  $P_{\text{ext}} = P_{\text{acc}} - P_{\text{int}}$  est obtenue, avec  $P_{\text{int}}$  la puissance des forces intérieures exprimée avec l'équation (1.17) et  $P_{\text{acc}}$  la puissance des forces d'accélération exprimée par l'équation (1.20).

Ainsi :

$$\frac{d}{dt} (E + E_c) = P_{\text{acc}} - P_{\text{int}} + Q \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt} (E + E_c) = \frac{dE_c}{dt} - P_{\text{int}} + Q \quad (2.7)$$

$$\frac{dE}{dt} = -P_{\text{int}} + Q \quad (2.8)$$

avec :

$$Q = \int_{\omega} r dV - \int_{\partial\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\omega} r dV - \int_{\omega} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} dV \quad (2.9)$$

Ainsi, du premier principe de la thermodynamique, en utilisant (1.17), il en découle que notre modèle doit respecter l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho e dV = \int_{\omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} dV + \int_{\omega} r dV - \int_{\omega} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} dV \quad (2.10)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy introduit avec l'équation (1.9) et  $\mathbf{D}$  le tenseur des vitesses de déformation introduit avec l'équation (1.16). Cette formule,  $\forall \omega \subset \Omega$ , peut être écrite localement de la manière suivante [52] :

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \quad (2.11)$$

Dans ce chapitre, les lois de comportement utilisées s'inscrivent dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations. Ainsi l'équation (2.11) devient [52] :

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + r - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \quad (2.12)$$

$$= \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) + r - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \quad (2.13)$$

avec  $\text{Tr}(\cdot)$  l'opérateur trace,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  le tenseur des vitesses des déformations, qui sous l'hypothèse de petites perturbations est introduit avec l'équation (1.37).



Les problèmes de thermique n'étant pas traités dans ce manuscrit, ainsi localement en chaque point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$ , les lois de comportement doivent respecter l'équation :

$$\rho \frac{de}{dt} = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (2.14)$$

pour vérifier le premier principe de la thermodynamique. Maintenant que le premier principe (2.14) a été introduit en équation, dans la section suivante, c'est le second qui est présenté.

## 2.1.2 Deuxième principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique introduit la notion d'entropie [52]. Elle fait référence à une variation d'énergie associée à une variation de température  $T$ . Son expression  $S$  est la suivante :

$$S = \int_{\omega} \rho s \, dV \quad (2.15)$$

avec  $\omega \subset \Omega$  et  $s$  représentant l'entropie spécifique par unité de masse. L'énoncé du second principe est que le taux de production d'entropie est toujours plus grand ou égal au taux de chaleur  $Q$  divisé par la température  $T$ . Ainsi, en équation, le second principe de la thermodynamique s'écrit [52] :

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{Q}{T} \quad (2.16)$$

qui, en utilisant les équations (2.15) et (2.9), peut être réécrit de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho s \, dV \geq \int_{\omega} \frac{r}{T} \, dV - \int_{\partial\omega} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dS \quad (2.17)$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_{\omega} \left( \rho \frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) dV \geq 0 \quad (2.18)$$

Cependant, cette formule est valable  $\forall \omega \subset \Omega$ . Ainsi, localement elle peut être écrite de la manière suivante [52] :

$$\rho \frac{ds}{dt} - \frac{r}{T} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad (2.19)$$

En utilisant le premier principe de la thermodynamique et donc l'équation (2.11), la formulation précédente (2.19) devient localement :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{1}{T} \left( \rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \right) \geq 0 \quad (2.20)$$

En utilisant [52] :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T}{T^2} \quad (2.21)$$

et en multipliant par la température  $T$ , l'inégalité (2.20) devient [52] :

$$\rho \left( T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{x}} T}{T} \geq 0 \quad (2.22)$$

Le potentiel d'énergie libre nommé  $\Psi$  est introduit pour réécrire l'équation (2.22). C'est une fonction d'état dont la variation permet d'obtenir le travail utile qui peut être fourni par un système fermé, à température constante, au cours d'une transformation réversible. Il est alors introduit de la manière suivante [52] :

$$\Psi = e - Ts \quad (2.23)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt} - s \frac{dT}{dt} \quad (2.24)$$

En utilisant l'équation (2.24), il est alors possible d'écrire :

$$T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} = - \left( \frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) \quad (2.25)$$

Ainsi l'écriture du deuxième principe de la thermodynamique (2.22) peut être résumée avec l'équation suivante [52] :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{x}} T}{T} \geq 0 \quad (2.26)$$

L'équation (2.26) est l'inégalité de Clausius-Duhem [52] que le modèle matériau doit respecter en chaque point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$ . Cela est valable à la fois pour le comportement de l'interface et pour le comportement en volume du solide déformable. Comme dans le cas du premier principe de la thermodynamique (2.14), avec l'hypothèse de petites perturbations, et sans prendre en compte les phénomènes thermiques, l'inégalité de Clausius Duhem s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} \right) \geq 0 \quad (2.27)$$

Ainsi, respecter les deux premiers principes de la thermodynamique conduit à vérifier l'inégalité (2.26).

Dans la section suivante, l'objectif est de présenter une condition suffisante pour vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem, au travers des potentiels d'énergie libre et de dissipation.

### 2.1.3 Modèle de comportement phénoménologique : les lois d'état et d'évolution

Un phénomène physique peut être décrit avec précision suivant le choix et le nombre de variables d'état que l'on prend pour le décrire. Un phénomène

défini de cette manière sera thermodynamiquement admissible quand l'inégalité de Clausius-Duhem (2.26) est vérifiée pour tous les trajets de transformation possible. Ainsi nos modèles matériaux devront la vérifier pour être physiquement admissible. Les variables d'état sont composées de variables observables (température, déformation, contrainte,...) et de variables internes, qui sont des variables ajoutées pour décrire notre modèle et qui sont en général plus difficilement observables expérimentalement [52]. Dans le cadre des modèles décrivant des matériaux standards généralisés, ces variables peuvent être définies à partir d'un potentiel d'énergie libre (2.23) convexe, c'est ce que l'on nomme les lois d'état. Sous l'hypothèse de petites perturbations, le potentiel d'énergie libre peut être généralisé sous la formulation suivante [52] :

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, T, \boldsymbol{\epsilon}^e, \boldsymbol{\epsilon}^p, V_k) \quad (2.28)$$

avec  $T$  la température,  $\boldsymbol{\epsilon}$  le tenseur des déformations introduit avec l'équation (1.8), qui sont des variables observables, les variables internes  $\boldsymbol{\epsilon}^e$  et  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  sont les déformations associées respectivement au comportement élastique et plastique, et  $V_k$  représentant les  $k$  autres variables internes.

Ainsi, dans le cas d'un matériau possédant un comportement visco-plastique [52], le potentiel d'énergie libre s'écrit alors  $\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e, T, V_k)$  et sa dérivée totale par rapport au temps [52] est donnée par (2.29) :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^e} : \frac{d\boldsymbol{\epsilon}^e}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial V_k} \frac{dV_k}{dt} \quad (2.29)$$

En intégrant (2.29) dans l'inégalité de Clausius-Duhem (2.26), en posant  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = d\boldsymbol{\epsilon}^e/dt$ , elle devient :

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \rho \left( s + \frac{\partial\Psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial\Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T \geq 0 \quad (2.30)$$

avec  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$ .

Cette inégalité est valable pour tous problèmes physiquement admissibles, pour toutes transformations. Ainsi, en se plaçant dans certains cas particuliers, les lois d'état écrites à partir du potentiel d'énergie libre vont pouvoir être formulées, et le modèle choisi les vérifiera par respect de l'inégalité (2.30).

Dans un premier temps, une transformation à température constante, uniforme et réversible est choisie. Elle permet de ne pas produire de déformation plastique  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  [52], les variables internes et la température restent constantes dans le temps. Traduit en équation, on obtient :

$$\frac{dT}{dt} = \dot{T} = 0 \quad (2.31)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} T = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\epsilon}^p}{dt} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{dV_k}{dt} = \dot{V}_k = 0 \quad (2.34)$$

Ainsi, l'inégalité de Clausius-Duhem à vérifier devient :

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \geq 0 \quad (2.35)$$

Or, cela est valable  $\forall \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ , donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \quad (2.36)$$

correspondant donc à la première loi d'état que doit vérifier le modèle choisi.

Pour trouver les autres lois, le cas d'une transformation purement élastique, à température uniforme non forcément constante, dans laquelle  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0$ ,  $V_k = 0$  et  $\nabla_{\mathbf{x}} T = 0$ , est choisi. Ainsi, l'inégalité de Clausius-Duhem (2.26) s'écrit alors :

$$-\rho \left( s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0 \quad (2.37)$$

Cependant,  $T$  peut être choisi de manière arbitraire, donc avec le même raisonnement que pour l'équation (2.36), on obtient :

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (2.38)$$

Pour finir, les forces thermodynamiques associées aux variables internes sont définies par [52] :

$$A_k = \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \right) \quad (2.39)$$

Ainsi, pour résumer, les lois d'état que les modèles choisis [52] doivent respecter sont :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \quad (2.40)$$

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (2.41)$$

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \quad (2.42)$$

Les expressions (2.40), (2.41) et (2.42) forment le gradient du potentiel  $\Psi$ . Que ce soit pour les lois de comportement d'interface ou de volume, il doit exister un potentiel d'énergie libre  $\Psi$  convexe propre à chaque loi permettant ainsi de vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem pour que ces lois soient thermodynamiquement admissibles.

Maintenant que les lois d'état sont définies, il est nécessaire de définir comment évoluent les variables d'état au cours d'une transformation. Ce sont les lois d'évolution. Pour ce faire, elles sont introduites à l'aide du potentiel de dissipation  $\varphi$ . Ce potentiel doit être convexe, positif ou nul et passer par l'origine.

Ainsi, en écrivant de nouveau l'inégalité de Clausius-Duhem (2.26) en prenant en compte les lois d'état (2.40), (2.41) et (2.42), l'équation (2.30) devient [52] :

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - A_k \dot{V}_k - \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad (2.43)$$

en posant pour plus de clarté :

$$\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{x}} T \quad (2.44)$$

et avec  $\Phi$  la dissipation.

Le potentiel de dissipation  $\varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{V}_k, \frac{\mathbf{q}}{T})$  doit vérifier par le principe de normalité [52] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} \quad (2.45)$$

$$A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{g} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\mathbf{q}}{T}} \quad (2.47)$$

Les équations (2.45), (2.46) et (2.47) sont les composantes du vecteur  $\nabla \varphi$  normal à la surface  $\varphi = \text{constante}$  dans l'espace des variables d'évolution. Ainsi pour obtenir les lois d'évolution associées aux variables d'état, il est nécessaire de calculer les quantités duales de  $\varphi$ . Pour ce faire, la transformation de Legendre-Fenchel permet de définir le potentiel  $\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, -A_k, -\mathbf{g})$ , potentiel dual de  $\varphi$ . La définition du potentiel  $\varphi^*$  est alors la suivante [52] :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k, \mathbf{g}) = \sup_{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{V}_k, \frac{\mathbf{q}}{T})} \left( \left( \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - A_k \dot{V}_k - \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \varphi \left( \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{V}_k, \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right) \quad (2.48)$$

Dans le cas où le potentiel  $\varphi^*$  est différentiable, alors les lois complémentaires d'évolution (2.49), (2.50) et (2.51) s'écrivent simplement de la manière suivante [52] :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.49)$$

$$-\dot{V}_k = \frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} \quad (2.50)$$

$$-\frac{\mathbf{q}}{T} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{g}} \quad (2.51)$$

Cependant, dans le cas où  $\varphi^*$  est non différentiable, il est nécessaire de calculer le sous différentiel  $\partial \varphi^*$  qui s'exprime de la façon suivante [52] :

$$\partial \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}_0) = \{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \mid \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) \geq \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}_0) + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0), \forall \boldsymbol{\sigma} \} \quad (2.52)$$

Le potentiel  $\varphi^*$  doit être positif ou nul, convexe et doit passer par l'origine. Dans ce cas, avec l'écriture des lois d'état en fonction d'un potentiel d'énergie

libre  $\Psi$  convexe, c'est une condition suffisante pour vérifier l'équation de Clausius-Duhem, mais pas nécessaire. La thermodynamique du modèle est alors vérifiée. On parle alors de modèle matériau standard généralisé.

Ainsi dans cette première section il a été montré ce que doit vérifier la loi de comportement de notre modèle pour être thermodynamiquement admissible. Cela se fait soit par la vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem, soit par le calcul des potentiels d'énergie libre  $\Psi$  et du potentiel de dissipation  $\varphi$  ou son dual  $\varphi^*$ . Dans la section suivante, un modèle de zones cohésives [22] à été choisi pour décrire le contact, et une mise en application de la vérification du cadre thermodynamique est réalisée pour ce modèle.

## 2.2 Un modèle de zones cohésives pour décrire le contact

Dans le premier chapitre, la gestion du contact dans le cadre d'une résolution explicite avec le schéma numérique CD-Lagrange a été présentée. L'écriture de l'équation de la mécanique est alors introduite en impulsion-vitesse [24] (HSM). Les forces de contact unilatéral et de frottement sont prises en compte et formulées sous forme d'impulsion. Ainsi, l'idée dans ce chapitre est d'ajouter au contact un comportement supplémentaire, de nouveau sous forme d'impulsion en ajoutant la contribution d'un modèle de zones cohésives [30, 64, 19]. Un intérêt particulier est apporté sur le phénomène d'adhésion ou plus précisément de décohésion. Ce phénomène est étudié depuis longtemps et dispose de nombreuses définitions [44]. Sa modélisation s'étend de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. Ce choix de dimension dépend du niveau de détail recherché et de l'application visée. A l'échelle microscopique le détail est recherché pour comprendre ce qui se passe précisément physiquement [9, 26, 55, 67, 39, 69], notamment d'un point de vue des interactions. Dans le cas de notre projet, ultérieurement l'application est le procédé de démoulage de pneu, ainsi une modélisation à l'échelle macroscopique est recherchée pour décrire le phénomène. Il existe plusieurs théories concernant l'adhésion, tels que la théorie de l'absorption d'Eley, ou encore la théorie d'adhésion de Johnson-Kendall-Roberts [37]. Dans cette thèse, une attention particulière est portée à la définition de l'adhésion de Frémond [35, 83] qui consiste à quantifier l'adhésion par un paramètre  $\beta$  qui caractérise "l'intensité d'adhésion", et qui est donc directement relié à un paramètre d'endommagement. Il existe ainsi des modèles basés sur cette définition à l'échelle macroscopique, et une attention particulière est portée au modèle RCCM [71, 74] et plus précisément sur la version développée par Michel Raous et Gianpietro Del Piero [22] en 2010. Dans un premier temps ce modèle est présenté, puis il est intégré au cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés présenté précédemment.

### 2.2.1 Le modèle RCCM

Le modèle RCCM est un modèle d'interface couplant les phénomènes d'adhésion et de friction. Il est caractérisé par une transition continue entre adhésion

totale et une loi de Coulomb classique avec un contact unilatéral. Ce dernier peut-être modélisé par le modèle rhéologique présenté sur la figure 2.1. La partie adhésion, modélisée par le ressort et la flèche, est présente sur les deux directions. En parallèle, sur la partie normale on retrouve un contact unilatéral, et sur la partie tangentielle un contact frottant.

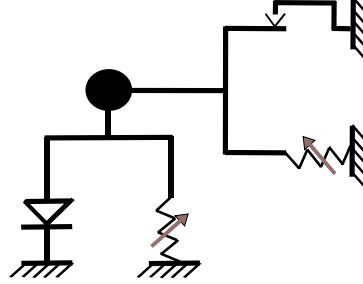


FIGURE 2.1 – Modèle rhéologique du modèle RCCM

Dans un premier article, c'est le modèle RCC (Raous-Cangémi-Cocu) qui a vu le jour en 1999 [72]. Il considérait l'interface comme une surface matérielle. Une condition de contact unilatéral et la loi de Coulomb sont strictement imposées sans utiliser aucune pénalité. Dans ce modèle, l'adhésion est caractérisée par une intensité d'adhésion  $\beta$  dont l'évolution comprend des effets de la viscosité. La perte d'adhésion est considérée dans ce modèle comme de l'endommagement [14]. Dans un second temps en 2002, le modèle RCCM (Raous-Cangémi-Cocu-Monerie), évolution du modèle RCC, a vu le jour et dans l'article [74], il est introduit une fonction caractérisant la friction. Cette dernière a pour objectif d'obtenir une meilleure transition de l'adhésion à la friction. Cette fonction est notée  $f(\beta) = 1 - \beta$  dans [74] et plus généralement suivant l'interface  $f(\beta) = 1 - \beta^m$  dans [73]. Si  $\beta = 0$  alors il n'y a pas d'adhésion lors du contact. À l'inverse, si  $\beta = 1$  alors l'adhésion est totale. Ainsi il n'y a pas de friction si l'adhésion est totale.

Dans le cadre de cette thèse, le choix du modèle RCCM s'est basé sur [22, 74]. Ce modèle est donc composé de trois parties. Une première, le contact unilatéral exprimé dans le premier chapitre, dont les conditions présentées avec l'équation (1.73) s'écrivent :

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [t_0, t_f], \quad \begin{cases} \text{Si} & g(\mathbf{x}) > 0, & r_{c,N} = 0 \\ \text{Sinon} & g(\mathbf{x}) \leq 0, & 0 \leq r_{c,N} \perp v_N \geq 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

avec pour rappel  $\Gamma_t$  le bord de la configuration déformée  $\Omega_t$  où le contact est susceptible d'avoir lieu, et  $\mathbf{x}$  la position d'un point appartenant à ce bord et donc sur lequel les conditions de contact doivent être étudiées. Soit  $g$  le gap, soit la distance entre ce point  $\mathbf{x}$  du solide déformable et le solide rigide défini avec l'équation (1.66),  $v_N$  la vitesse normale relative entre les deux solides (1.67) et  $r_{c,N}$  l'impulsion normale du contact (1.104). Pour rappel, lors du contact, la force associée est potentiellement infinie, la formulation en impulsion et vitesse introduite par Moreau et Jean [59, 41] est donc utilisée. La solution de ce système d'équation est fournie par l'algorithme (2) présenté dans le chapitre 1.

La deuxième partie de ce modèle est le calcul des forces de contact sur la direction tangentielle pour ajouter la contribution sur le système global du contact frottant. Pour ce faire, de nombreuses lois existent, mais dans le cadre de cette thèse, une des plus courantes est retenue : la loi de Coulomb. De la même manière que pour la résolution du contact sur la partie normale, l'écriture du système à résoudre est introduite en impulsion et vitesse. Ainsi, les conditions pour le contact frottant introduites avec l'équation (1.76) se réécrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Si} & r_{c,N} = 0, \quad r_{c,T} = 0 \\ \text{Sinon} & r_{c,N} > 0, \quad 0 \leq (\mu r_{c,N} - r_{c,T}) \perp \|\mathbf{v}_T\| \geq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

avec  $r_{c,T}$  la norme de l'impulsion tangentielle comme énoncé dans les notations (1.127), et  $\|\mathbf{v}_T\|$  la norme de la vitesse relative tangentielle entre les deux corps pour un point  $\mathbf{x}$  de l'interface de contact  $\Gamma_t$  comme écrit dans l'équation (1.127). Il est important de remarquer qu'il y a une impulsion tangentielle à condition qu'il y ait également un contact sur la partie normale. Soit  $\mu \in \mathbb{R}^+$  le coefficient de frottement. Suivant la valeur du coefficient de frottement le solide déformable glisse plus ou moins facilement. Plus ce coefficient est grand, plus la surface en contact du solide déformable sur le solide rigide est en adhérence. Pour que le glissement ait lieu, il faut alors une force sur la direction tangentielle  $\mathbf{t}$  plus grande. La résolution de ces conditions (2.54) est donnée par l'algorithme (3) dans le chapitre 1.

La nouveauté du modèle RCCM par rapport au cas résolu dans le chapitre précédent est l'apparition du phénomène d'adhésion, modélisé au travers d'une partie élastique endommageable. Pour ce faire il est nécessaire d'introduire une nouvelle quantité qui sera nommée le saut de déplacement  $[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t)$ . Dans le cas d'un contact unilatéral, c'est-à-dire dans une seule direction, cette quantité représente "l'épaisseur" de l'interface entre le solide déformable et le solide rigide sur le bord de contact  $\Gamma_t$ . Une illustration de cette quantité est donnée sur la figure 2.2.

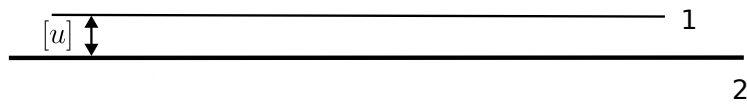


FIGURE 2.2 – Illustration du saut de déplacement dans le cas du contact unilatéral entre le solide déformable (1) et le solide rigide (2).

En d'autres termes, c'est le déplacement relatif des points  $\mathbf{x}$  de l'interface  $\Gamma_t$  du solide déformable à partir de l'instant d'impact  $t = t_i$  entre les deux solides. Dans le cas d'un contact unilatéral, le saut de déplacement correspond donc au gap énoncé dans le chapitre précédent avec l'équation (1.66). Dans le cas où le contact n'est pas uniquement unilatéral, accompagné d'un contact frottant par exemple, il est alors nécessaire de calculer le saut de déplacement tangentiel d'un point  $\mathbf{x}$  de  $\Gamma_t$ . Pour ce faire il est nécessaire de garder en mémoire la position  $\mathbf{x}_{t_i}$  à l'instant d'impact et ensuite calculer le déplacement par rapport à cette position dans la direction tangentielle  $\mathbf{t}$ . Ainsi, en trois dimensions, une généralisation du saut de déplacement est :



$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [t_0, t_f], \quad [\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) = [u]_N \mathbf{n} + [u]_T \mathbf{t} \quad (2.55)$$

avec  $[u]_N$  la partie normale du saut de déplacement avec  $\mathbf{n}$  la normale au solide rigide au point de contact  $\mathbf{x}$ , et  $[u]_T$  la norme de la partie tangentielle du saut de déplacement associée à la direction tangentielle  $\mathbf{t}$ .

Pour simplifier les calculs, dans les cas tests ou le contact n'est pas uniquement unilatéral, les solides rigide et déformable sont considérés en contact à l'instant initial  $t = t_0$ . Ainsi, il n'est pas nécessaire de garder en mémoire la position  $\mathbf{x}_{t_i}$  qui correspond à l'instant d'impact entre les deux solides. Avec cette hypothèse, dans le cas où l'interface  $\Gamma_t$  possède plusieurs nœuds de contact potentiels, les sauts de déplacement peuvent alors s'écrire de la manière suivante :

$$[\mathbf{u}]_N = \mathbf{L}_N \mathbf{U} \quad (2.56)$$

$$[\mathbf{u}]_T = \mathbf{L}_T \mathbf{U} \quad (2.57)$$

avec  $\mathbf{L}_N$  et  $\mathbf{L}_T$  les opérateurs de projection présentés à l'aide des équations (1.131), (1.132) et (1.133),  $\mathbf{U}$  le vecteur global de déplacement.  $[\mathbf{u}]_N$  est donc un vecteur de taille le nombre de nœuds potentiels de contact comprenant l'ensemble des valeurs des gaps normaux associés à ces nœuds et  $[\mathbf{u}]_T$  un vecteur de taille deux fois le nombre de nœuds de contact potentiels contenant les déplacements de ces nœuds suivant chaque direction de la tangente  $\mathbf{t}$ .

Maintenant que le saut de déplacement est présenté, il est également nécessaire d'introduire une autre variable dite d'endommagement, nommée  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , homogène à un déplacement et défini localement en chaque point de l'interface. Ce paramètre ne peut être négatif avec  $\alpha_0$  sa valeur initiale à l'instant  $t_0$ . Il a un impact sur la valeur de la raideur de l'interface que l'on note  $g_N$  pour la raideur dans la direction normale et  $g_T$  pour celle dans la direction tangentielle. En chaque point d'une interface, il peut y avoir une raideur différente dans chaque direction, mais le paramètre  $\alpha$  est le même pour chacune d'elles. Ainsi, lorsque le paramètre  $\alpha$  augmente, la raideur reste constante si  $\alpha < \alpha_e$ , avec  $\alpha_e$  la limite élastique et diminue si  $\alpha_e < \alpha < u_r$ , avec  $u_r$  la limite de rupture de l'interface. La raideur est nulle dans toutes les directions si  $\alpha \geq u_r$ . Un exemple d'évolution de la raideur en fonction de l'endommagement  $\alpha$  sera proposé ultérieurement.

Le saut de déplacement et l'endommagement sont introduits, il est maintenant possible de présenter la contribution de l'interface élastique endommageable sur le solide déformable au travers d'une contrainte qui sera nommée, contrainte d'endommagement  $\sigma_d$ . La valeur de cette contrainte dépend de l'état de l'interface.

Dans un premier temps, pour des raisons de simplicité, le cas d'une interface élastique endommageable avec une seule direction d'endommagement possible est présentée. Soit  $g_N$  la raideur de cette interface,  $\alpha$  le paramètre d'endommagement associé, et  $[u]_N$  le saut de déplacement normal associé. Dans [22] un comportement est proposé pour la contrainte  $\sigma_d$  comme le montre la figure 2.3 où le comportement de la partie élastique endommageable est observé au cours d'un essai de traction. Effectivement lorsque ce type d'essai est réalisé, le saut de déplacement augmente car le solide déformable cherche à s'arracher dans le sens de la normale  $\mathbf{n}$  du solide

rigide. Ce comportement est également lié à l'évolution de la raideur en fonction de l'endommagement car la contrainte d'endommagement est de la forme [22] :

$$\sigma_d = g_N(\alpha)[u]_N \quad (2.58)$$

Pour un essai de traction jusqu'à rupture sans relaxation au cours de l'essai, le comportement retenu est une interface possédant une contrainte linéaire, soit un comportement élastique. Au cours de l'essai, l'interface va commencer à s'endommager et donc la raideur d'interface associée à cette dernière va diminuer jusqu'à être nulle, et donc annuler l'effet de l'interface sur le solide déformable. Il est important de noter que dans le modèle RCCM, le paramètre  $\alpha$  ne peut pas diminuer, ce n'est pas un modèle avec possibilité de recollement [3, 28] (effet "post-it").

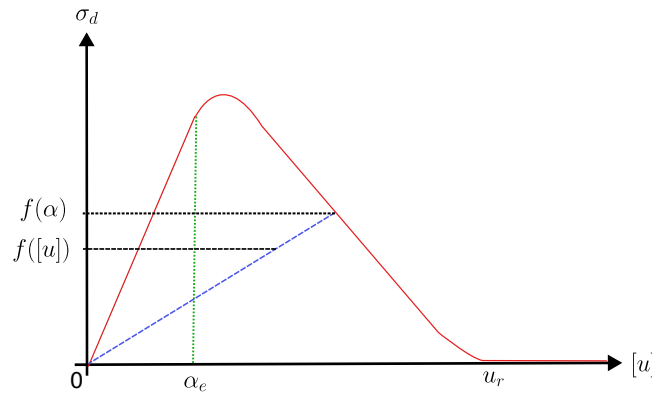


FIGURE 2.3 – Évolution de la contrainte  $\sigma_d$  en fonction du saut de déplacement  $[u]$

Sur la figure 2.3, les pointillés verts forment un repère pour la valeur de la contrainte correspondant sur l'axe des abscisses à  $\alpha_e$ , correspondant à la limite élastique de l'interface. Il est noté les valeurs  $f(\alpha)$  et  $f([u])$  pour faire référence aux valeurs de la contrainte  $\sigma_d$ . Effectivement comme l'endommagement  $\alpha$  ne peut pas diminuer, lorsque l'essai de traction est soumis à un relâchement avant la rupture totale, alors il y a un relâchement de l'interface, et la courbe en pointillés bleus est le trajet retour vers une situation au repos jusqu'à ce que le saut de déplacement soit nul. La contrainte  $\sigma_d$  est alors nulle, et l'interface n'a plus d'effet sur le solide déformable car elle n'est plus sollicitée. Ensuite, lors du redémarrage de l'essai de traction, la contrainte suit la courbe en pointillés bleus jusqu'à atteindre la valeur d'endommagement précédent. Lorsque l'endommagement augmente de nouveau, alors la courbe rouge est suivie par la contrainte. Ainsi, la loi d'évolution associée à la partie élastique endommageable pour le paramètre d'endommagement  $\alpha$ , et présentée dans [22], est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Si} & [u] = \alpha \text{ et } \alpha < u_r, & \text{alors } \dot{\alpha} = \langle v_N \rangle_+ \\ \text{Sinon} & \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Tant que le saut de déplacement est inférieur à la limite élastique  $\alpha_e$ , le comportement de l'interface reste élastique avec donc une raideur d'interface

constante. Ensuite, si le saut de déplacement est inférieur à l'endommagement actuel, alors il n'évolue pas, ce qui est traduit par  $\dot{\alpha} = 0$ .  $\alpha$  évolue donc à condition que le saut de déplacement soit égal à l'endommagement actuel et inférieur à la limite de rupture  $u_r$ . Sa valeur est alors la valeur positive  $\langle \cdot \rangle_+$  de la vitesse relative entre les deux solides  $v_N$ . Une fois la limite de rupture passée, l'interface est totalement endommagée et donc la raideur  $g_N$  est nulle, ainsi  $\alpha$  n'évolue plus.

Dans le cas en trois dimensions avec plusieurs directions d'endommagement possibles, il est nécessaire de prendre en compte l'ensemble du saut de déplacement. Pour ce faire, il est introduit la fonction  $f$  représentant la norme du saut de déplacement en un point  $\mathbf{x}$  tel que

$$f([\mathbf{u}]) = \sqrt{[u]_N^2 + ([\mathbf{u}]_T)^T [\mathbf{u}]_T} \quad (2.60)$$

en utilisant les notations de (2.55) avec  $[\mathbf{u}]_T = [u]_T \mathbf{t}$ .

Ainsi, la réécriture de la loi d'évolution (2.59) en trois dimensions est :

$$\begin{cases} \text{Si} & f([\mathbf{u}]) = \alpha \text{ et } \alpha < u_r, & \text{alors } \dot{\alpha} = \langle \dot{f} \rangle_+ \\ \text{Sinon} & \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

avec  $\dot{f}$  la dérivée de la norme du saut de déplacement qui est donc homogène à une vitesse et s'écrit :

$$\dot{f}([\mathbf{u}]) = \frac{[\mathbf{v}]^T [\mathbf{u}]}{\sqrt{[\mathbf{u}]^T [\mathbf{u}]}} \quad (2.62)$$

avec  $[\mathbf{v}]$  la vitesse relative entre les deux solides du point associé  $\mathbf{x}$ . Dans notre cas, la condition initiale est que les deux solides sont en contact, soit le gap  $g = 0$ , ainsi la vitesse relative entre les deux solides correspond à la vitesse  $\mathbf{v}$  du point  $\mathbf{x}$ .

En ce qui concerne la contrainte (2.58) associée à la raideur de l'interface, en trois dimensions elle devient :

$$\sigma_{d,N} = g_N(\alpha) [u]_N \quad (2.63)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{d,T} = g_T(\alpha) [\mathbf{u}]_T \quad (2.64)$$

Il y a donc ainsi une contrainte pour chaque direction associée au même endommagement  $\alpha$  pour l'interface.

Pour finir, le comportement de l'interface a un impact sur le coefficient de frottement  $\mu$  utilisé dans le calcul de la loi de Coulomb (2.54). Il peut être modélisé sous la forme d'une loi mixte, entre micro-fissure et des surfaces partiellement micro-élastiques, et la formulation est la suivante :

$$\mu(\alpha) = \mu_{inf} \left( 1 - \frac{g_N(\alpha)}{g_N(0)} \right) \quad (2.65)$$

avec  $\mu_{inf}$  le coefficient de frottement lorsque l'interface n'est plus cohésive. L'évolution du coefficient de frottement dépend de l'évolution de la raideur d'interface normale. Il est à noter que  $g_N(0) = g_e$ , la raideur de l'interface non endommagée.

Si l'endommagement de l'interface augmente, alors le coefficient de frottement également. Effectivement lorsque l'interface est totalement endommagée, il reste plus que le comportement de contact frottant avec  $\mu_{inf}$  comme coefficient de frottement.

D'autres versions de ce modèle existent, notamment Monerie [66] a écrit un modèle de zones cohésives frottant (MZCF), en se basant sur le modèle RCCM. Les modèles de zones cohésives sont également étudiés dans [41], notamment avec une présentation des différentes approches pour l'étude des matériaux cohésifs.

Dans la partie suivante l'objectif est d'intégrer l'ensemble de ce modèle de zones cohésives dans le cadre thermodynamique présenté précédemment.

## 2.2.2 Intégration du modèle RCCM dans le cadre thermodynamique

Dans la première section de ce chapitre il a été montré que pour qu'un modèle vérifie le cadre thermodynamique, il doit respecter les deux premiers principes de la thermodynamique. Pour cela les équations du modèle doivent respecter soit l'inégalité de Clausius-Duhem, soit les variables d'état peuvent être écrites en fonction du potentiel d'énergie libre,  $\Psi$ , et les variables d'évolution en fonction du potentiel dual  $\varphi^*$  du potentiel de dissipation. Dans le cadre du modèle RCCM, cette vérification devra être réalisée pour chaque partie du modèle, c'est à dire pour la partie concernant le contact unilatéral, la partie concernant le contact frottant avec la loi de Coulomb et enfin la partie concernant le comportement élastique endommageable.

### 2.2.2.1 La partie normale du contact

Dans cette première sous section, l'objectif est de vérifier que le comportement du contact unilatéral est bien inscrit dans le cadre thermodynamique. Pour ce faire les conditions de contact unilatéral sont les suivantes :

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [t_0, t_f], \quad \begin{cases} \text{Si} & g(\mathbf{x}) > 0, F_{C,N} = 0 \\ \text{Sinon} & g(\mathbf{x}) = 0, 0 \leq u_N \perp F_{C,N} \geq 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

en posant  $u_N$  le déplacement relatif entre le corps déformable et le corps rigide sur la normale  $\mathbf{n}$  au contact. Pour vérifier que les conditions (2.66) respectent le cadre thermodynamique, l'objectif est de les écrire en fonction des potentiels thermodynamiques. Soit  $\Psi_c$  le potentiel d'énergie libre associé au contact normal :

$$\Psi_c = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(u_N) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_N \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.67)$$

avec  $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$  l'indicatrice de l'ensemble  $\mathbb{R}^+$ , l'ensemble des réels positifs. Le potentiel  $\Psi_c$  est défini, positif et convexe.

Soit  $\Psi_c^*$  le dual du potentiel d'énergie libre (2.67) :

$$\Psi_c^* = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(F_{C,N}) = \begin{cases} 0 & \text{si } F_{C,N} \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.68)$$

Ce potentiel est également défini, positif et convexe. Les conditions de contact (2.66) peuvent alors être écrites de la manière suivante en fonction des sous-différentiels des potentiels  $\Psi$  et son dual  $\Psi^*$  :

$$u_N \in \partial_{F_{C,N}} \Psi_c^*(F_{C,N}) = \begin{cases} \text{Si } F_{C,N} > 0, u_N = 0 \\ \text{Si } F_{C,N} = 0, u_N \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.69)$$

$$F_{c,N} \in \partial_{u_N} \Psi_c(u_N) = \begin{cases} \text{Si } u_N > 0, F_{C,N} = 0 \\ \text{Si } u_N = 0, F_{C,N} \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.70)$$

Le déplacement relatif suivant la direction normale  $u_N$  et la force de contact normale  $F_{C,N}$  s'écrivant en fonction d'un potentiel d'énergie libre défini, positif et convexe, les équations (2.69) et (2.70) forment les lois d'état thermodynamique du contact unilatéral (2.66). Le déplacement relatif normal entre les deux corps  $u_N$  est égale au gap entre les deux solides (1.66), et donc pour chaque point  $\mathbf{x} \in \Gamma_t$ ,  $u_N = g$ .

De nouveau en utilisant le lemme de viabilité de Moreau [59], et en se basant sur les travaux réalisés [31, 24], les conditions de contact (2.66) s'écrivent en vitesse et impulsion de la manière suivante :

$$\forall(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_t \times [t_0, t_f], \quad \begin{cases} \text{Si } g(\mathbf{x}) > 0, r_{c,N} = 0 \\ \text{Sinon } g(\mathbf{x}) = 0, 0 \leq v_N \perp r_{c,N} \geq 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

Ainsi les conditions de contact (2.71) sont bien équivalentes au contact unilatéral (2.53) proposé par le modèle RCCM et ce dernier est donc bien inclus dans le cadre thermodynamique.

### 2.2.2.2 La partie tangentielle du contact

Dans cette seconde sous partie, l'objectif est d'intégrer la partie du modèle RCCM concernant la gestion du contact dans la direction tangentielle dans le cadre thermodynamique. Autrement dit, l'objectif est de vérifier que la loi de Coulomb dont la formulation est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } F_{C,N} = 0, F_{C,T} = 0 \\ \text{Si } F_{C,N} > 0, 0 \leq (\mu F_{C,N} - F_{C,T}) \perp \|\mathbf{v}_T\| \geq 0 \\ \text{Et } \mathbf{v}_T = -a_1 \mathbf{F}_{C,T} \text{ avec } a_1 \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.72)$$

s'inscrit dans le formalisme thermodynamique proposé. La loi de Coulomb est une loi non-associée qui ne rentre pas dans le cadre. C'est pourquoi la méthode du bi-potentiel, notamment introduite dans [84], est utilisée. C'est une généralisation du potentiel de dissipation. Ainsi soit  $b$  le bi-potentiel qui s'écrit  $\forall(\mathbf{v}_T, \mathbf{F}_{C,T}) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times (\mathbb{R}^+)^2$  :

$$b(-\mathbf{v}_T, \mathbf{F}_{C,T}) = \mathbb{I}_{\mathbb{K}_\mu}(\mathbf{F}_{C,T}) + \mu F_{C,N} \|\mathbf{v}_T\| \quad (2.73)$$

avec  $\mathbf{F}_{C,T} = F_{C,T} \mathbf{t}$  avec  $\mathbf{t}$  la direction tangentielle,  $\mathbf{v}_T$  la vitesse tangentielle telle que  $\mathbf{v}_T = v_T \mathbf{t}$ ,  $\mu$  le coefficient de frottement et  $\mathbb{I}_{\mathbb{K}_\mu}$  l'indicatrice de  $\mathbb{K}_\mu$  avec

$$\mathbb{K}_\mu = \{(F_{C,N}, \mathbf{F}_{C,T}), \quad \|\mathbf{F}_{C,T}\| - \mu F_{C,N} \leq 0\} \quad (2.74)$$

avec  $\|\mathbf{F}_{C,T}\| = F_{C,T}$ .  $\mathbb{K}_\mu$  est nommé le cône de Coulomb.

Pour vérifier le cadre thermodynamique, ce bi-potentiel  $b$  doit être bi-convexe et doit vérifier la propriété suivante :

$$b(-\mathbf{v}_T, \mathbf{F}_{C,T}) \geq -\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{F}_{C,T} \quad (2.75)$$

Le potentiel (2.73) est bien bi-convexe [84] et la condition (2.75) est bien vérifiée car le bi-potentiel est positif et d'après la loi de Coulomb,  $-\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{F}_{C,T} \geq 0$ . Concernant la loi de Coulomb, ses variables d'état peuvent être écrites en fonction de ce bi-potentiel avec

$$-\mathbf{v}_T \in \partial_{\mathbf{F}_{C,T}} b(-\mathbf{v}_T, \mathbf{F}_{C,T}) = -\mathbf{v}_T \in \partial_{\mathbf{F}_{C,T}} \mathbb{I}_{\mathbb{K}_\mu}(\mathbf{F}_{C,T}) \quad (2.76)$$

avec la notation suivante pour les forces de contact  $\mathbf{F}_C$  :

$$\mathbf{F}_C = F_{C,N} \mathbf{n} + F_{C,T} \mathbf{t} \quad (2.77)$$

et

$$\mathbf{F}_{C,T} \in \partial_{-\mathbf{v}_T} b(-\mathbf{v}_T, \mathbf{F}_{C,T}) = \begin{cases} \text{Si} & \|\mathbf{F}_{C,T}\| \leq \mu F_{C,N}, \mathbf{v}_T = 0 \\ \text{Si} & \|\mathbf{F}_{C,T}\| = \mu F_{C,N}, \mathbf{v}_T = -a_1 \mathbf{F}_{C,T}, \end{cases} \quad \text{avec } a_1 \in \mathbb{R}^+ \quad (2.78)$$

Donc les variables d'état concernées par la loi de Coulomb s'écrivent bien en fonction d'un seul potentiel  $b$  vérifiant les conditions du cadre thermodynamique. Ainsi la loi de Coulomb utilisée dans le modèle RCCM est bien inscrite dans le cadre thermodynamique. De la même manière que pour le contact unilatéral, en utilisant le lemme de viabilité de Moreau et les travaux de [24], il est possible d'écrire (2.78) avec une formulation en impulsion et vitesse :

$$\begin{cases} \text{Si} & r_{c,N} = 0, \quad r_{c,T} = 0 \\ \text{Sinon} & r_{c,N} > 0, \quad 0 \leq (\mu r_{c,N} - r_{c,T}) \perp \|\mathbf{v}_T\| \geq 0 \\ & \mathbf{r}_{c,T} = -a \mathbf{v}_T \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (2.79)$$

Les formulations (2.78) et (2.79) étant équivalentes, le cadre thermodynamique est vérifié.

### 2.2.2.3 La partie élastique endommageable de l'interface

Pour finir avec l'intégration du modèle RCCM dans le cadre thermodynamique, il est nécessaire de vérifier que le comportement élastique endommageable utilisé dans le modèle en fait partie. Pour les comportements du contact unilatéral

et de la loi de Coulomb, ce sont des méthodes avec les potentiels d'énergie libre et de dissipation qui ont été utilisées. Pour ce dernier comportement, l'objectif est de calculer l'inégalité de Clausius-Duhem et de regarder à quelle condition elle est vérifiée.

Dans un premier temps le premier principe de la thermodynamique (2.4) est donc appliqué à l'interface, soit :

$$\frac{d}{dt}(E + E_c) = P_{ext} + Q \quad (2.80)$$

avec sur l'interface pour l'énergie interne  $E$  :

$$E = \int_{\Gamma_t} e \, d\Gamma \quad (2.81)$$

avec  $e$  l'énergie interne locale d'un point  $\boldsymbol{x}$  sur le bord de contact  $\Gamma_t$ .

En ce qui concerne l'énergie cinétique, l'interface ne possédant pas de masse, il est obtenu :

$$E_c = 0 \quad (2.82)$$

Pour la puissance des forces extérieures, en se basant sur l'équation (1.18), sa valeur dans le cas de l'interface est :

$$P_{ext} = \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\sigma}_d \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_t \quad (2.83)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}_d = \sigma_{d,N}\mathbf{n} + \sigma_{d,T}\mathbf{t}$  le vecteur contrainte dû au comportement de l'interface.

En ce qui concerne le flux de chaleur  $Q$ , il est considéré comme nul, l'interface RCCM ne possédant pas ici de comportement thermique.

Ainsi, appliqué à l'interface, le premier principe de la thermodynamique (2.4) devient localement en chaque point  $\boldsymbol{x} \in \Gamma_t$  de l'interface :

$$\frac{d}{dt}e = \boldsymbol{\sigma}_d \cdot \mathbf{v} \quad (2.84)$$

Le premier principe appliqué à l'interface, il reste maintenant à appliquer le second (2.16) avec l'inégalité de Clausius-Duhem. Ainsi il est obtenu :

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{Q}{T} = 0 \quad (2.85)$$

car le flux de chaleur est  $Q = 0$ . En utilisant (2.15), localement l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit :

$$\frac{ds}{dt} - \frac{1}{T} \frac{de}{dt} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma}_d \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad (2.86)$$

En multipliant (2.86) par la température  $T$ , l'équation (2.86) devient :

$$T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} + \boldsymbol{\sigma}_d \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad (2.87)$$

En appliquant le potentiel d'énergie libre  $\Psi_d$  défini avec l'équation (2.23), l'équation (2.87) se transforme en :

$$-\frac{d\Psi_d}{dt} + \boldsymbol{\sigma}_d \cdot \mathbf{v} \geq 0 \quad (2.88)$$

Le potentiel d'énergie libre  $\Psi_d$  dépend, dans le cadre de la partie élastique endommageable du modèle RCCM, des deux paramètres qui caractérisent l'état de l'interface, à savoir le saut de déplacement  $[\mathbf{u}]$  et l'endommagement  $\alpha$ . Ainsi la dérivée totale en temps du potentiel d'énergie libre s'écrit :

$$\dot{\Psi}_d([\mathbf{u}], \alpha) = \frac{\partial \Psi_d}{\partial [\mathbf{u}]} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] + \frac{\partial \Psi_d}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (2.89)$$

avec  $[\dot{\mathbf{u}}]$  la dérivée totale en temps du saut de déplacement, ce qui correspond dans le cas étudié à la vitesse  $\mathbf{v}$  associée au point  $\mathbf{x} \in \Gamma_t$  et  $\dot{\alpha}$  fait référence à l'évolution de l'endommagement définie avec l'équation (2.61).

Ainsi en combinant les équations (2.88) et (2.89), l'inégalité de Clausius-Duhem finalement obtenue avec application sur l'interface est :

$$\left( \boldsymbol{\sigma}_d - \frac{\partial \Psi_d}{\partial [\mathbf{u}]} \right) \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial \Psi_d}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (2.90)$$

et on pose :

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \frac{\partial \Psi_d}{\partial [\mathbf{u}]} \quad (2.91)$$

$$\beta = \frac{\partial \Psi_d}{\partial \alpha} \quad (2.92)$$

En appliquant (2.92) à l'inégalité de Clausius-Duhem (2.90), la dissipation  $\Phi_1$  peut alors être introduite et sa valeur est :

$$\Phi_1 = -\beta \dot{\alpha} \quad (2.93)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem à vérifier pour le comportement de l'interface est :

$$\Phi_1 \geq 0 \quad (2.94)$$

ce qui est en accord avec le second principe de la thermodynamique d'avoir une dissipation d'énergie positive.

Dans le modèle RCCM, la contrainte associée à un comportement élastique endommageable est introduite de la manière suivante :

$$\sigma_{d,N} = g_N(\alpha)[u]_N \quad (2.95)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{d,T} = g_T(\alpha)[\mathbf{u}]_T \quad (2.96)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}_{d,T} = \sigma_{d,T} \mathbf{t}$ . Le potentiel d'énergie libre associé à ce comportement est :



$$\Psi_d([\mathbf{u}], \alpha) = \frac{1}{2}g_N(\alpha)[u]_N^2 + \frac{1}{2}g_T(\alpha)([\mathbf{u}]_T)^T[\mathbf{u}]_T \quad (2.97)$$

avec  $[\mathbf{u}]_T = [u]_T \mathbf{t}$  associé à un point  $\mathbf{x}$  du bord de contact potentiel  $\Gamma_t$  en utilisant les notations (2.55).

Ce potentiel est convexe et positif et passe par l'origine. Les lois d'état de notre modèle d'interface élastique endommageable s'écrivent alors en utilisant (2.92) :

$$\sigma_{d,N} = g_N(\alpha)[u]_N \quad (2.98)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{d,T} = g_T(\alpha)[\mathbf{u}]_T \quad (2.99)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\dot{g}_N(\alpha)[u]_N^2 + \frac{1}{2}\dot{g}_T(\alpha)([\mathbf{u}]_T)^T([\mathbf{u}]_T) \quad (2.100)$$

Ainsi, pour vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem (2.94), il est donc nécessaire de vérifier les conditions :

$$\dot{g}_N(\alpha) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{g}_T(\alpha) \leq 0 \quad (2.101)$$

soit que les dérivées des raideurs normale et tangentielle de l'interface soient inférieures ou égales à zéro car  $\dot{\alpha} \geq 0$  comme le montre la loi d'évolution présentée dans le modèle RCCM (2.61).

Pour la suite et la réalisation des cas tests, il a été choisi que les raideurs normale et tangentielle soient égales, donc  $g_N = g_T$ . Le comportement de la raideur d'interface présenté à la figure 2.3 est associé à la contrainte présentée sur la figure 2.4.

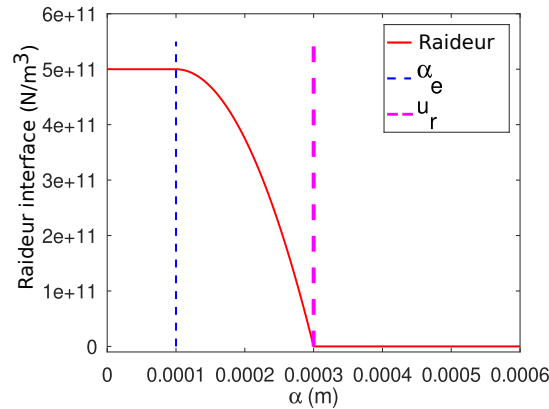


FIGURE 2.4 – Évolution de la raideur d'interface en fonction de l'endommagement.

L'évolution de la raideur en fonction de l'endommagement  $\alpha$  est obtenue avec la formulation (2.102), avec  $g_e$  la raideur initiale, soit  $g_N(0) = g_T(0) = g_e$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \alpha < \alpha_e \text{ alors } g_N = g_e \\ \text{Si } \alpha \geq \alpha_e \text{ et } \alpha < u_r, \quad \text{alors } g_N = g_e \left( 1 - \frac{(\alpha - \alpha_e)^2}{(u_r - \alpha_e)^2} \right) \\ \text{Sinon } g_N = 0 \end{array} \right. \quad (2.102)$$

Le comportement proposé en figure 2.4 respecte bien l'inégalité de Clausius-Duhem, avec une dérivée de la raideur égale ou inférieure à 0. La partie constante avec  $\alpha \leq \alpha_e$  et où la raideur  $g_N = g_T = g_e$  correspond bien à la partie linéaire observée sur la figure 2.3 lorsque  $[u] \leq \alpha_e$  avec un coefficient directeur égal à  $g_e$ .

Ainsi, de par l'écriture des variables d'état en fonction d'un potentiel d'énergie libre  $\Psi_d$  défini, positif et convexe, et de par une loi d'évolution qui vérifie l'inégalité de Clausius-Duhem (2.94) avec le comportement choisi en figure 2.4 avec une dérivée de la raideur de l'interface négative, la partie élastique endommageable du modèle RCCM vérifie donc le cadre thermodynamique. Le modèle global vérifie donc le formalisme thermodynamique. Il est à noter que dans le cadre de cette thèse un intérêt particulier est porté au modèle RCCM, notamment pour une ultérieure modélisation du démoulage d'un pneu. Cependant d'autres modèles peuvent être utilisés à condition qu'ils vérifient le cadre thermodynamique.

Dans la section suivante, le deuxième axe de ces travaux de recherche est abordé. Il s'agit de l'écriture de la résolution explicite du problème basé sur le cadre thermodynamique.

## 2.3 Résolution dans le formalisme explicite du CD-Lagrange

Pour réaliser des simulations physiquement fondées, les modèles choisis respectent donc les deux premiers principes de la thermodynamique, que ce soit pour les modèles de comportement en volume ou de l'interface. Comme dans le premier cas test présenté au chapitre 1, c'est un comportement élastique linéaire isotrope qui est choisi pour le solide déformable et qui est également inscrit dans le cadre thermodynamique [52] au même titre que le modèle RCCM.

Pour présenter le cadre de résolution explicite, on se place dans le cadre de la méthode des éléments finis, voir la partie 1.3, avec une discrétisation en temps présentée sur la figure 1.4, voir également la section 1.5 pour plus de détails. Pour rappel, le schéma CD-Lagrange utilisé s'écrit de la manière suivante (1.135) :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_{n+1/2} \quad (2.103)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) = h(\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1}) + \mathbf{R}_{n+3/2} \quad (2.104)$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de masse lumpée, voir équation (1.53),  $\mathbf{U}$  le vecteur de déplacement global sur l'espace discrétisé dont la taille est le nombre de degrés de liberté,  $\mathbf{V}$  le vecteur vitesse associé sur le même espace. Soit  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  les forces

extérieures et intérieures appliquées au domaine  $\Omega_{th}$ , correspondant à l'espace  $\Omega_t$  discrétisé, et de taille également le nombre de degrés de liberté, voir les équations (1.55) et (1.54). Pour finir, soit  $\mathbf{R}$  le vecteur global comprenant les impulsions dues au comportement d'interface qui s'écrivent :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \mathbf{R}_d \quad (2.105)$$

avec  $\mathbf{R}_c$  les impulsions dues au contact unilatéral et au comportement frottant du contact présenté avec l'équation (1.135). L'impulsion  $\mathbf{R}_d$  correspond à l'ajout du comportement élastique endommageable dans le modèle RCCM.

Le cadre de résolution explicite est simple à mettre en place. Il s'agit d'exprimer toutes les variables d'état, ou dites de configuration, à un pas de temps  $t_{n+1}$  comme pour le déplacement par exemple. Ainsi avec l'utilisation du schéma numérique CD-Lagrange l'ensemble de la configuration est connue explicitement. Soit  $[\mathbf{u}]$  le saut de déplacement associé à un nœud du bord de contact potentiel,  $\alpha$  l'endommagement associé à ce nœud et le déplacement  $\mathbf{U}$ , les variables d'état du domaine. Une fois discrétisées, ces variables correspondent donc à  $[\mathbf{u}]_{n+1}$ ,  $\alpha_{n+1}$ ,  $\mathbf{U}_{n+1}$ . L'endommagement est indépendant pour chaque nœud du bord de contact potentiel  $\Gamma_t$ , ainsi à chaque nœud est associé un endommagement  $\alpha_{n+1}$ .

Pour les lois d'évolution et ainsi que toutes les variables exprimant des vitesses, à savoir la vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}$  définie en chaque nœud du bord de contact potentiel et dont la valeur en chaque nœud est indépendante des autres, le vecteur vitesse ou encore les impulsions, sont exprimées au demi pas de temps  $t_{n+3/2}$ . Ainsi la vitesse d'endommagement s'écrit  $\dot{\alpha}_{n+3/2}$ , le vecteur vitesse  $\mathbf{V}_{n+3/2}$  et les impulsions  $\mathbf{R}_{n+3/2}$ .

Ces choix s'expliquent par la volonté de conserver le caractère symplectique du schéma CD-Lagrange. Effectivement dans la famille des schémas de Newmark, seul le schéma de la différence centrée permet cette propriété [31]. Alors la conservation de l'énergie est assurée, seules les dissipations du modèle de comportement sont présentes sans artefact numérique dû au schéma d'intégration.

Ainsi localement en chaque nœud  $i$  du bord de contact potentiel  $\Gamma_t$ , les variables d'état se calculent de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{v}_{n+1/2} \quad (2.106)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + h\dot{\alpha}_{n+1/2} \quad (2.107)$$

$$[\mathbf{u}]_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} \quad (2.108)$$

$$g_{n+1} = g_0 + [u]_N \quad (2.109)$$

avec  $\mathbf{u}_n = (\mathbf{U}_n)_i$  le vecteur déplacement du nœud  $i$ ,  $\mathbf{v}_{n+1/2} = (\mathbf{V}_{n+1/2})_i$  le vecteur vitesse associé au nœud  $i$ . L'équation (2.108) est vraie, dans le cas où la condition initiale impose le contact pour chaque nœud du bord de contact  $\Gamma_t$  entre le solide déformable et le solide rigide. Soit  $g_0$  le gap initial et  $[u]_N = [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}$ .

Il reste donc à discrétiser les lois d'évolution. En respectant le formalisme du CD-Lagrange, pour le contact unilatéral il est obtenu :

$$\begin{cases} \text{Si} & g_{n+1} > 0, \quad r_{c,N,n+3/2} = 0 \\ \text{Sinon} & g_{n+1} \leq 0, \quad 0 \leq r_{c,N,n+3/2} \perp v_{N,n+3/2} \geq 0 \end{cases} \quad (2.110)$$

L'algorithme (2) permet de résoudre ce problème de complémentarité (2.110). Résolue après l'impulsion de contact normal  $r_{c,N,n+3/2}$ , la discrétisation temporelle de la loi de Coulomb dans le formalisme du CD-Lagrange est :

$$\begin{cases} \text{Si} & r_{c,N,n+3/2} = 0, \quad r_{c,T,n+3/2} = 0 \\ \text{Sinon} & r_{c,N,n+3/2} > 0, \quad 0 \leq (\mu r_{c,N,n+3/2} - r_{c,T,n+3/2}) \perp \|\mathbf{v}_{T,n+3/2}\| \geq 0 \end{cases} \quad (2.111)$$

Ce problème de complémentarité (2.111) est quand à lui résolu avec l'algorithme (3). Ainsi les valeurs du vecteur des impulsions de contact  $\mathbf{R}_c$  de l'équation (2.105) s'écrivent pour le nœud de contact  $i$  :

$$(\mathbf{L}_N \mathbf{R}_{c,n+3/2})_i = (\mathbf{R}_{c,N,n+3/2})_i = r_{c,N,n+3/2} \quad (2.112)$$

$$(\mathbf{L}_T \mathbf{R}_{c,n+3/2})_i = (\mathbf{R}_{c,T,n+3/2})_i = r_{c,T,n+3/2} \mathbf{t}_i \quad (2.113)$$

avec  $\mathbf{t}_i$  la direction tangentielle au nœud de contact  $i$ .

Pour finir, il reste à discrétiser la loi d'évolution de la vitesse d'endommagement (2.61) qui s'écrit donc pour chaque nœud du bord  $\Gamma_t$  :

$$\begin{cases} \text{Si} & f([\mathbf{u}]_{n+1}) \geq \alpha_{n+1} \text{ et } \alpha_{n+1} < u_r, \quad \text{alors } \dot{\alpha}_{n+3/2} = \langle \dot{f}_{n+3/2} \rangle_+ \\ \text{Sinon} & \dot{\alpha}_{n+3/2} = 0 \end{cases} \quad (2.114)$$

avec  $f$  la norme du saut de déplacement présentée avec l'équation (2.60) et  $\dot{f}_{n+3/2}$  la dérivée de cette norme qui discrétisée s'écrit :

$$\dot{f}_{n+3/2}([\mathbf{u}]_{n+1}) = \frac{[\mathbf{v}]_{n+3/2}^T [\mathbf{u}]_{n+1}}{\sqrt{[\mathbf{u}]_{n+1}^T [\mathbf{u}]_{n+1}}} \quad (2.115)$$

avec pour le nœud  $i$ ,  $[\mathbf{v}] = (\mathbf{L}_N \mathbf{V}_{n+3/2})_i \mathbf{n} + \|(\mathbf{L}_T \mathbf{V}_{n+3/2})_{i..i+1}\| \mathbf{t}$ , avec  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{t}$  la direction normale et tangentielle associées au nœud de contact  $i$ . La première condition sur le saut de déplacement dans l'équation (2.114) n'est pas une égalité, pour des raisons de précision numérique, de la même manière qu'une pénétration entre les deux solides est possible.

Il est donc maintenant nécessaire d'introduire l'impulsion élastique endommageable  $\mathbf{R}_d$  présentée dans l'équation (2.105) qui prend donc en compte le comportement de l'interface sur le solide déformable. Soit  $\boldsymbol{\sigma}_{d,N,n+1} \in \mathbb{R}^d$ , avec  $d$  le nombre de nœuds présents sur le bord de contact potentiel  $\Gamma_t$ , dont la valeur calculée au nœud  $i$  est la contrainte normale élastique endommageable associée. De la même manière, soit  $\boldsymbol{\sigma}_{d,T,n+1} \in \mathbb{R}^{2d}$  un vecteur de taille deux fois le nombre de nœuds de contact potentiel, dont les valeurs calculées au nœud  $i$  sont les contraintes dans chaque direction de la tangente. Ainsi à chaque nœud  $i$  de  $\Gamma_t$  :

$$(\boldsymbol{\sigma}_{d,N,n+1})_i = g_N(\alpha_{i,n+1})(\mathbf{L}_N \mathbf{U}_{n+1})_i \quad (2.116)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_{d,T,n+1})_i = g_T(\alpha_{i,n+1})(\mathbf{L}_T \mathbf{U}_{n+1})_i \quad (2.117)$$

avec  $\mathbf{L}_N$  et  $\mathbf{L}_T$  respectivement l'opérateur normal et tangent de projection du domaine global sur les degrés de liberté concernés par le contact.

Ainsi l'impulsion globale  $\mathbf{R}_d$  s'écrit :

$$\mathbf{R}_{d,n+3/2} = h\mathbf{W}(\mathbf{L}_N^T \boldsymbol{\sigma}_{d,N,n+1} + \mathbf{L}_T^T \boldsymbol{\sigma}_{d,T,n+1}) \quad (2.118)$$

avec  $\mathbf{W}$  la matrice carrée de taille le nombre de degrés de liberté et qui est construite par l'intégration aux nœuds (poids d'intégration pour la quadrature choisis aux noeuds) des forces généralisées associées à une pression uniforme unitaire sur la surface de contact  $\Gamma_t$ . L'orientation de ces forces est la direction normale à la surface  $\Gamma_t$  et l'amplitude correspond alors au poids des nœuds d'intégration. Les poids des nœuds forment les coefficients de la diagonale de la matrice  $\mathbf{W}$  construite par la méthode des éléments finis appliquée à l'équation (2.83). Sous l'hypothèse de petites perturbations, la configuration déformée et initiale étant identiques, il est nécessaire de calculer une seule fois cet opérateur au début de la résolution.

Ainsi l'équation de la dynamique à résoudre avec l'application du cadre de résolution explicite avec le schéma CD-Lagrange est :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) &= h(\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1}) \\ &+ \mathbf{L}_N^T \mathbf{R}_{c,N,n+3/2} + \mathbf{L}_T^T \mathbf{R}_{c,T,n+3/2} \\ &+ \mathbf{R}_{d,n+3/2} \end{aligned} \quad (2.119)$$

Il est important de remarquer que pour la résolution des problèmes linéaires de complémentarité, dans les algorithmes de résolution du problème normal (2) et du problème tangent (3) du contact, la vitesse sans contact  $\mathbf{V}_{\text{free}}$  est modifiée. Elle prend maintenant en compte l'impulsion due au comportement élastique endommageable de l'interface et on note alors pour la résolution d'un pas de temps :

$$\mathbf{V}_{\text{free}} = \mathbf{V}_{n+1/2} + h\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1}) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}_{d,n+3/2} \quad (2.120)$$

Pour résoudre sur un pas de temps  $h$  l'équation de la dynamique, le cadre de résolution explicite est basé sur l'algorithme (5). Il montre donc la résolution d'un problème en dynamique explicite avec une interface possédant un comportement à la fois régulier, pour la partie élastique endommageable, et à la fois non régulier avec le contact unilatéral avec frottement. On remarque que la mise à jour de la vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}_{n+3/2}$  dépend de la dérivée du saut de déplacement  $\dot{f}_{n+3/2}$  qui dépend elle-même du vecteur vitesse global  $\mathbf{V}_{n+3/2}$ . Ainsi l'algorithme reste explicite car la dynamique (2.119) est résolue avant la loi d'évolution de l'endommagement (2.114).

---

**Algorithm 5** Résolution d'un pas de temps

---

**Entrées :**  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_{n+1/2}, \alpha_n, \dot{\alpha}_{n+1/2}$

1. Calcul de la configuration explicite :

$\mathbf{U}_{n+1}$  (2.103),  $\mathbf{g}_{n+1}$  (2.109),  $[\mathbf{u}]_{n+1}$  (2.106),  $\alpha_{n+1}$  (2.107),  $\mathbf{F}_{\text{ext},n+1}$

2. Calcul des lois d'état :

Calcul de  $\mathbf{F}_{\text{int},n+1}$  avec la loi choisie pour le corps déformable

Calcul de  $\boldsymbol{\sigma}_{d,n+1}$  avec (2.116) et (2.117) pour chaque nœud de contact

3. Dynamique explicite :

Calcul de  $\mathbf{R}_{d,n+3/2}$  avec (2.118)

Calcul de  $\mathbf{V}_{\text{free}}$  avec (2.120)

Résolution explicite des problèmes linéaires de complémentaire avec les algorithmes 2 et 3 pour obtenir  $\mathbf{R}_{c,n+3/2}$

Résolution de l'équation de la dynamique (2.119) pour obtenir  $\mathbf{V}_{n+3/2}$

4. Loi d'évolution :

Résolution locale de (2.114) pour obtenir  $\dot{\alpha}_{n+3/2}$  pour chaque nœud de contact

**Sorties :**  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+3/2}, \alpha_{n+1}, \dot{\alpha}_{n+3/2}$

---

L'avantage de cet algorithme est le caractère modulaire de la résolution. Effectivement que ce soit pour la loi de comportement du solide déformable, ou bien celle de l'interface, elles peuvent être modifiées tant que l'on choisit des lois thermodynamiques admissibles. D'autre part la configuration est connue, ainsi il devient facile de calculer les forces intérieures comme toutes les quantités sont connues. Pour finir, l'avantage de l'usage du schéma CD-Lagrange est qu'il permet également d'assurer le caractère symplectique du schéma.

Dans la partie suivante l'objectif est de présenter différents cas tests et d'observer le comportement du modèle.

## 2.4 Applications

Dans cette partie plusieurs cas tests sont présentés, allant d'un cas à un seul degré de liberté pour observer le comportement du modèle, notamment d'un point de vue des énergies, jusqu'à plusieurs cas en trois dimensions avec différentes configurations.

Mais, notre cadre de résolution numérique est réalisé avec un schéma dit explicite. Ainsi, ce dernier n'est pas inconditionnellement stable, il dépend donc du choix d'un pas de temps  $h$  pour résoudre le problème. Effectivement si le pas de temps  $h$  choisi est trop grand, alors l'algorithme est instable et aucune solution n'est obtenue. Pour ce faire, le pas de temps critique  $h_{\text{crit}}$  est introduit, et le pas de temps choisi pour la résolution doit respecter [8] :

$$h \leq h_{\text{crit}} = \frac{2}{w_{\text{max}}} \quad (2.121)$$

Lors du premier chapitre, les équations (1.123) et (1.124) donnent des valeurs

du pas de temps critique dans le cadre de la famille des schémas de Newmark et plus généralement avec la condition CFL [17].

Dans le cadre d'un système masse ressort sans interface à un seul degré de liberté avec un comportement élastique linéaire pour le matériau, la pulsation maximale  $w_{\max}$  est obtenue facilement en calculant la plus grande valeur propre  $\lambda$  du système associée à l'équation de la dynamique (2.119), avec  $w_{\max}^2 = \lambda$ . Dans ce cas précis il n'y a pas de forces extérieures donc  $f_{\text{ext}} = 0$ , d'autre part c'est un matériau élastique linéaire, donc les forces intérieures  $f_{\text{int}} = ku$ , avec  $k$  la rigidité. De plus il n'y a ni impulsion de contact, ni élastique endommageable. Ainsi [11] :

$$w_{\max} = \sqrt{4 \frac{k}{m}} \quad (2.122)$$

avec  $m$  la "masse" du degré de liberté tel que :

$$k = \frac{E s}{l_c} \quad (2.123)$$

$$m = \rho s l_c \quad (2.124)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $E$  le module d'Young,  $l_c$  une longueur caractéristique qui dans le cas en trois dimensions est reliée au rayon de la sphere inscrite dans un élément de maillage et  $s$  une surface. Dans le cas où le système contient plusieurs degrés de liberté, et donc plusieurs valeurs propres, la pulsation  $w_{\max}$  utilisée correspond à la valeur propre la plus grande pour respecter la condition CFL [17].

Maintenant, en ajoutant le contact avec le modèle RCCM comme comportement, la partie sur le contact unilatéral n'a aucun effet sur le pas de temps critique dans le cas d'un seul degré de liberté. Dans le cas à plusieurs degrés de liberté, le comportement frottant n'influe également pas sur le pas de temps critique. Cependant, la contrainte élastique due au comportement élastique endommageable de l'interface avec le modèle RCCM, entraîne une modification du pas de critique de la forme [11] :

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m} \left[ 2 + \frac{k_{\text{interface}}}{k} + \sqrt{4 + \left( \frac{k_{\text{interface}}}{k} \right)^2} \right]} \quad (2.125)$$

avec  $k_{\text{interface}}$  la raideur associée à l'interface telle que

$$k_{\text{interface}} = s \max_{\alpha} (g_N(\alpha), g_T(\alpha)) \quad (2.126)$$

dans le cas en trois dimensions.

Ainsi, il est important de remarquer que le comportement élastique endommageable de l'interface a un impact non négligeable sur le pas de temps critique. Plus l'interface va s'endommager, plus le pas de temps critique va augmenter. Étant donné que les travaux sont réalisés avec un pas de temps constant, il est donc nécessaire de choisir la valeur de la raideur de l'interface la plus grande possible pour calculer le pas de temps critique.

### 2.4.1 Le cas d'un modèle à un degré de liberté

Pour cette première application numérique du modèle RCCM, le choix est porté sur un modèle à un seul degré de liberté. La figure 2.5 présente le modèle étudié.

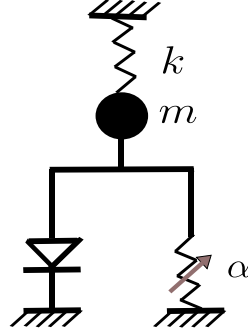


FIGURE 2.5 – Modèle rhéologique du cas test à un degré de liberté.

Soit  $k$  la rigidité associée au comportement élastique linéaire du degré de liberté, qui dans ce cas fait référence au solide déformable et  $m$  sa masse. Étant donné que le cas test possède un seul degré de liberté, l'application du modèle RCCM donne à l'interface du solide déformable un comportement avec un contact unilatéral, modélisé en bas à gauche de la figure 2.5, et un comportement élastique endommageable avec le paramètre  $\alpha$  quantifiant l'endommagement de l'interface. L'évolution de la raideur de l'interface  $g_N$  en fonction de l'endommagement  $\alpha$  est la même que celle introduite à la figure 2.4. Effectivement ce choix est appuyé notamment pour le respect du cadre thermodynamique. En se basant sur l'équation de la mécanique à résoudre (2.119) dans le cadre de l'application du modèle RCCM, le système à résoudre pour ce cas test est donc le suivant :

$$u_{n+1} = u_n + hv_{n+1/2} \quad (2.127)$$

$$[u]_{n+1} = u_{n+1} \quad (2.128)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + h\dot{\alpha}_{n+1/2} \quad (2.129)$$

$$f_{\text{int}}^{n+1} = ku_{n+1} \quad (2.130)$$

$$m(v_{n+3/2} - v_{n+1/2}) = h(f_{\text{ext}}^{n+1} - f_{\text{int}}^{n+1}) + r_{c,N,n+3/2} + r_{d,N+3/2} \quad (2.131)$$

Étant donné que les deux solides démarrent en contact, l'équation (2.128) est vérifiée. Pour obtenir  $\dot{\alpha}_{n+1/2}$  c'est la loi d'évolution de la vitesse d'endommagement (2.59) qui est utilisée, qui sous forme discrétisée est :

$$\begin{cases} \text{Si} & [u]_{n+1} \geq \alpha_{n+1} \text{ et } [u]_{n+1} < u_r, & \text{alors } \dot{\alpha}_{n+3/2} = \langle v_{n+3/2} \rangle_+ \\ \text{Sinon} & \dot{\alpha}_{n+3/2} = 0 \end{cases} \quad (2.132)$$

Pour résoudre l'équation de la dynamique (2.131), il suffit donc d'appliquer l'algorithme (5) avec comme valeurs initiales :



$$u_0 = 0 \quad (2.133)$$

$$v_{1/2} = 0 \quad (2.134)$$

$$\alpha_0 = 0 \quad (2.135)$$

$$\dot{\alpha}_{1/2} = 0 \quad (2.136)$$

et les paramètres de la table (2.1) où l'on retrouve  $\alpha_e$  la limite élastique de l'interface et  $u_r$  la limite de rupture.

TABLE 2.1 – Choix des paramètres du cas test avec 1 degré de liberté

$m$ (kg)	$s$ (m <sup>2</sup> )	$k$ (N/m <sup>3</sup> )	$\alpha_e$ (m)	$u_r$ (m)	$h_{\text{crit}}$ (s)	$h$ (s)	$g_0$ (m)
1	$1.5 \times 10^{-4}$	0	0.1	0.3	0.063	0.001	0

Pour observer uniquement le comportement de l'interface, le choix a été fait d'annuler le comportement élastique linéaire du solide déformable en choisissant une rigidité nulle,  $k = 0$ . Le choix de l'ordre de grandeur de  $\alpha_e$  et  $u_r$  est réalisé arbitrairement en fonction des autres paramètres comme la surface  $s$  de manière à pouvoir observer l'endommagement de l'interface sur le cas test.

La figure 2.6 présente l'évolution des forces extérieures en fonction du temps. L'idée du choix de cette force est de tester l'ensemble des parties du code, à savoir le calcul de l'impulsion due au contact unilatéral  $r_{c,N}$  et celle d'endommagement  $r_d$ .

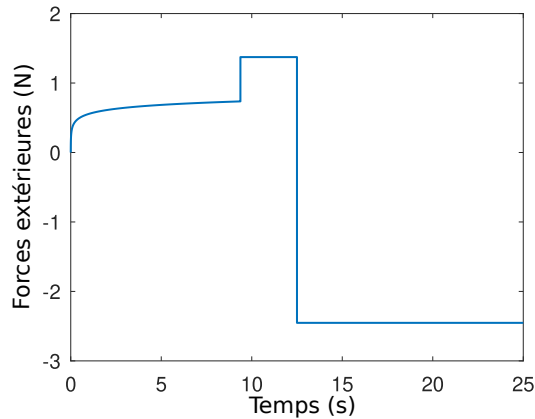


FIGURE 2.6 – Évolution des forces extérieures en fonction du temps appliquées au degré de liberté.

Effectivement, dans un premier temps, l'objectif est de tester le comportement élastique endommageable de l'interface en imposant une traction progressive sur le degré de liberté représenté par la masse. Dans un second temps, à  $t = 10$  s, une traction brutale est appliquée de manière à dépasser avec certitude la limite de rupture  $u_r$  de l'interface. Maintenant l'interface cassée, la raideur associée à cette dernière est donc nulle. Ainsi le seul comportement encore actif dans le modèle

RCCM est celui du contact unilatéral. Ainsi, pour tester l'impact, à mi-temps de la simulation, une compression brutale est imposée au degré de liberté comme le montre la figure 2.6.

Dans un premier temps, pour étudier les résultats, un intérêt est porté à l'évolution de l'endommagement  $\alpha$  au cours du temps. Pour quantifier l'état d'endommagement, une variable notée  $d \in [0, 1]$  est introduite [13] telle que :

$$d = 1 - \frac{g_N(\alpha)}{g_N(0)} \quad (2.137)$$

Si  $d = 1$ , alors l'interface est totalement endommagée et à l'inverse si  $d = 0$  l'interface n'est absolument pas endommagée. La figure 2.7 montre l'évolution de cette variable d'endommagement ainsi que l'évolution du paramètre  $\alpha$  au cours du temps.

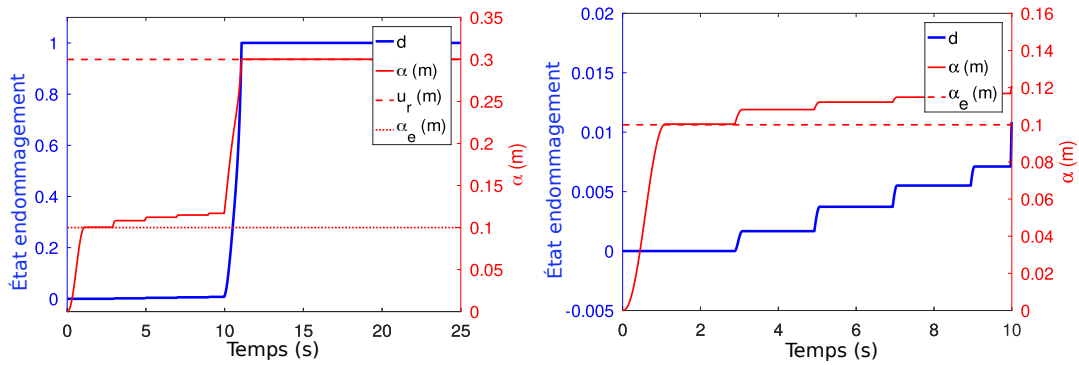


FIGURE 2.7 – Évolution de l'endommagement au cours du temps (à gauche) et zoom (à droite) pour le modèle à un degré de liberté.

Dans un premier temps, la figure 2.7 montre que l'interface n'est pas endommagée. Effectivement la variable  $d$  est nulle le temps que  $\alpha \leq \alpha_e$ . Cela s'explique car le temps que l'endommagement est inférieur à la limite élastique  $\alpha_e$  la raideur est constante. Ainsi lorsque  $\alpha \geq \alpha_e$ , l'état d'endommagement  $d$  augmente. À  $t = 10$  s lorsque les forces extérieures évoluent avec un saut en traction, l'endommagement  $\alpha$  augmente également brusquement en réponse aux forces extérieures. Parallèlement l'état d'endommagement  $d$  augmente brusquement. Lorsque  $\alpha$  atteint  $u_r$ , l'interface est bien totalement endommagée, avec un état d'endommagement  $d = 1$ . Il est à noter que dans le modèle RCCM, l'endommagement  $\alpha$  ne peut pas diminuer, ce qui explique pourquoi après la rupture il est constant et égal à la limite de rupture. D'autre part, sur la figure 2.7 on remarque que l'endommagement  $\alpha$  est en forme de créneau. Cela s'explique par le comportement élastique de l'interface. Pour expliciter ce comportement, un intérêt est porté à l'évolution de la vitesse  $v$  et du déplacement  $u$  au cours du temps  $t$  avec la figure 2.8.

Le déplacement et la vitesse oscillent jusqu'à  $t = 10$  s, c'est-à-dire avant l'application d'un saut brutal aux forces extérieures. Cela s'explique par l'application d'un chargement non régulier, comme le montre la figure 2.6, et également au comportement élastique sans amortissement associé à l'interface qui entraîne des

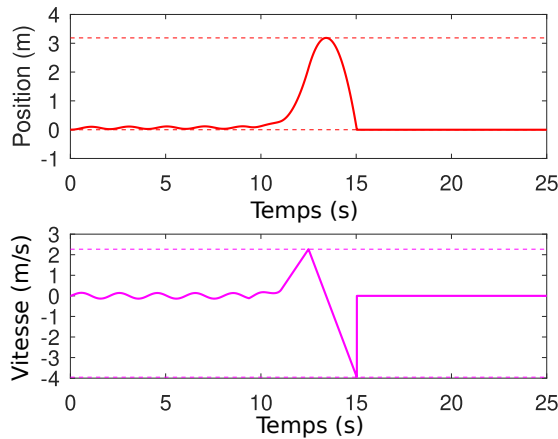


FIGURE 2.8 – Évolution du déplacement et de la vitesse au cours du temps pour le cas test à un degré de liberté.

effets de dynamique rapide. Ainsi l'évolution en créneau de l'endommagement  $\alpha$  s'explique par ce comportement oscillatoire. La vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}$  évolue seulement si la vitesse  $v$  est positive, comme le montre la loi d'évolution discrétisée (2.132). Ainsi en oscillant, la vitesse est périodiquement négative, et donc la vitesse d'endommagement associée est nulle et donc  $\alpha$  n'évolue pas.

Lors de la rupture de l'interface, la vitesse de la masse ponctuelle ne fait que croître et donc le déplacement également. Effectivement l'interface est totalement endommagée, donc la masse ponctuelle n'est plus retenue. À  $t = 12.5$  s, la masse ponctuelle est soumise à une compression brutale, voir figure 2.6, et la masse entre donc en contact avec le solide rigide. Il y a alors impact, la vitesse s'annule car il y a contact et donc le déplacement revient à sa position initiale.

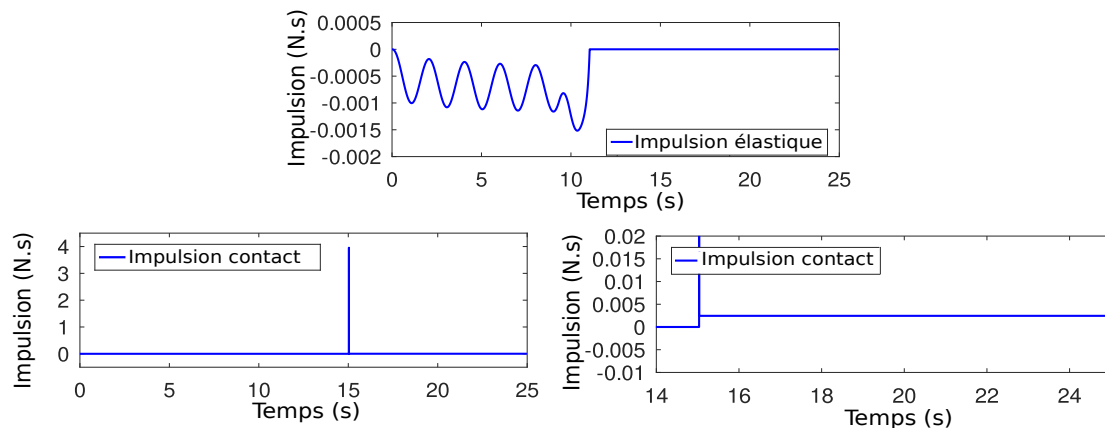


FIGURE 2.9 – Évolution des impulsions dues au contact unilatéral (en bas) et au comportement élastique endommageable (en haut) au cours du temps pour le cas test à un degré de liberté.

Pour finir, la figure 2.9 montre l'évolution de l'impulsion associée au contact

unilatéral et celle associée au comportement élastique endommageable. Dans un premier temps, le comportement élastique endommageable sans amortissement est retrouvé. Effectivement le graphique du haut de la figure 2.9 montre l'évolution de l'impulsion due à ce comportement. Cette dernière oscille. Plus on avance dans le temps, plus les oscillations sont faibles. Cela s'explique par l'endommagement de l'interface avec une raideur qui diminue au fur et à mesure que l'endommagement  $\alpha$  augmente. La valeur de l'impulsion est négative, en effet c'est une force opposée aux forces extérieures, l'interface "retient" la masse ponctuelle. Lorsque l'interface est totalement arrachée, l'impulsion est nulle. Cela est dû à la valeur de la raideur de l'interface qui est également nulle lorsque  $\alpha = u_r$ , voir la figure 2.4.

En ce qui concerne l'impulsion associée au contact unilatéral, lorsque les forces extérieures sont positives et réalisent donc une traction, elle est nulle. Effectivement le gap  $g$  est alors positif. À  $t = 15$  s, l'impulsion admet une valeur due à l'impact de la masse ponctuelle sur le solide rigide puis est légèrement positive de manière à contrer les forces extérieures.

Pour compléter l'étude du comportement du modèle RCCM résolu avec le schéma explicite CD-Lagrange, un intérêt est porté à l'étude de la conservation d'énergie du système [31]. Effectivement, une propriété et avantage de ce schéma est son caractère symplectique, qui implique donc de très bonnes propriétés énergétiques.

Le bilan d'énergie associé à un tel schéma calculé à partir de l'équation de la dynamique (2.119) s'écrit [32] :

$$\Delta W_{\text{cin},n+1} + \Delta W_{\text{comp},n+1} + \Delta W_{\text{int},n+1} - \Delta W_{\text{ext},n+1} - \Delta W_{IC,n+1} = 0 \quad (2.138)$$

avec  $\Delta W_{\text{cin},n+1}$  l'énergie cinétique du système,  $\Delta W_{\text{comp},n+1}$  une énergie complémentaire numérique due au schéma de la différence centrée [40],  $\Delta W_{\text{int},n+1}$  le travail des forces intérieures,  $\Delta W_{\text{ext},n+1}$  le travail des forces extérieures et enfin  $\Delta W_{IC,n+1}$  le travail des impulsions.

Les différents termes sont introduits à partir des notations suivantes, proposés en trois dimensions pour être dans le cas général. Il est ainsi obtenu :

$$\left[ \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \right]_n^{n+1} = \langle \mathbf{V}_n \rangle \mathbf{M} [\mathbf{V}_n] \quad (2.139)$$

$$[\mathbf{U}_n] = (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) \quad (2.140)$$

$$\langle \mathbf{U}_n \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{U}_n) \quad (2.141)$$

$$[\mathbf{V}_n] = \langle \mathbf{W}_n \rangle \quad (2.142)$$

$$[\mathbf{U}_n] = h \langle \mathbf{V}_n \rangle - \frac{h}{4} [\mathbf{W}_n] \quad (2.143)$$

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2} \quad (2.144)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_{n+3/2} + \mathbf{R}_{n+1/2}) \quad (2.145)$$

$$\mathbf{V}_{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{n+3/2} + \mathbf{V}_{n+1/2}) \quad (2.146)$$

avec  $\mathbf{V}$  le vecteur vitesse,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{U}$  le vecteur déplacement et  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_c + \mathbf{R}_d$  l'impulsion généralisée du système étudié. Les équations (2.145) et (2.146) permettent d'introduire la formulation de l'impulsion et de la vitesse au temps entier  $t_{n+1}$ . Soit  $\mathbf{W}$  la différence en vitesse entre avant et après impact. Cette variable permet de quantifier l'énergie due à l'impact et donc la vitesse qui est nulle. Dans le cadre du cas test de la masse ponctuelle ici présent, on note :

$$\mathbf{V} = v \quad (2.147)$$

$$\mathbf{U} = u \quad (2.148)$$

$$\mathbf{R} = r_{c,N} + r_d \quad (2.149)$$

$$\mathbf{M} = m \quad (2.150)$$

car il y a uniquement un seul degré de liberté.

Les équations (2.140) et (2.141) font référence respectivement à la différence et à la moyenne. En utilisant ces notations, les différents termes du bilan d'énergie (2.138) s'écrivent [31] :

$$\Delta W_{\text{cin},n+1} = \left[ \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \right]_n^{n+1} \quad (2.151)$$

$$\Delta W_{\text{comp},n+1} = \left[ -\frac{1}{8} \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} \right]_n^{n+1} \quad (2.152)$$

$$\Delta W_{\text{int},n+1} = [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_{\text{int},n} \rangle \quad (2.153)$$

$$\Delta W_{\text{ext},n+1} = [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{F}_{\text{ext},n} \rangle \quad (2.154)$$

$$\Delta W_{IC,n+1} = \frac{1}{h} [\mathbf{U}_n]^T \langle \mathbf{R}_n \rangle \quad (2.155)$$

Les figures 2.10 et 2.11 montrent l'évolution des différentes énergies du système à un seul degré de liberté au cours du temps  $t$ . À chaque pas de temps, ce sont les travaux cumulés qui sont calculés sur ces figures. Ainsi, sont donc ajoutés pour chaque quantité énergétique les travaux des pas de temps précédents pour obtenir l'énergie. La seconde figure est un zoom du premier graphique de manière à mieux observer ce qu'il se passe.

Il est important de noter que dans ces figures l'énergie des forces intérieures n'est pas calculée car cette dernière est nulle. Effectivement, pour observer uniquement le comportement de l'interface, la rigidité du matériau de la masse ponctuelle est imposée nulle, donc il n'y a pas de travail associé et donc l'énergie est nulle.

Jusqu'à  $t = 10$  s les énergies associées aux forces extérieures, à l'impulsion élastique endommageable et l'énergie cinétique oscillent. Cela est dû au caractère élastique sans amortissement de l'interface, effectivement cela entraîne des variations périodiques de la vitesse et donc du déplacement. Dans cette première partie, la dissipation d'énergie, l'énergie associée à l'impulsion élastique étant négative, est compensée par l'énergie cinétique et l'énergie des forces extérieures. À  $t = 10$  s, lorsque les forces extérieures admettent un saut, l'interface atteignant la rupture,

la dissipation associée augmente jusqu'à la rupture. Ensuite sur les figures 2.10 et 2.11 l'énergie associée est constante. L'interface étant cassée, elle ne dissipe plus.

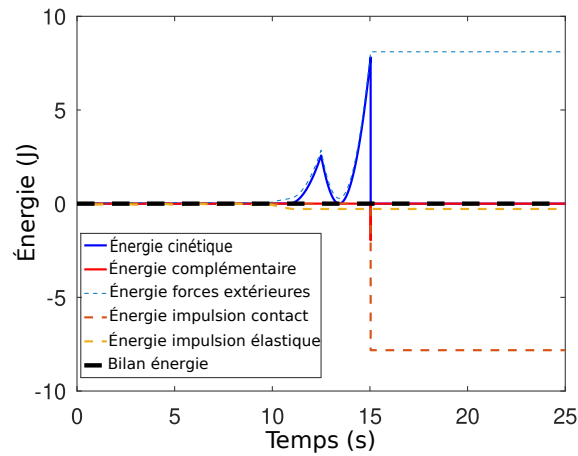


FIGURE 2.10 – Évolution du bilan d'énergie au cours du temps pour le cas test à un degré de liberté.

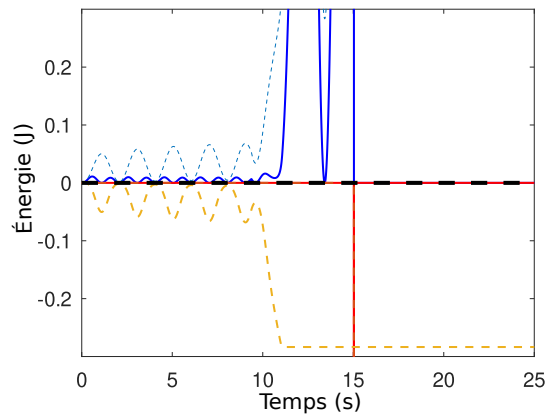


FIGURE 2.11 – Zoom sur l'évolution du bilan d'énergie en fonction du temps pour le cas test à un degré de liberté.

Ensuite l'énergie cinétique admet de grandes variations dues au changement de signe des forces extérieures et au caractère élastique sans amortissement de l'interface. Au moment de l'impact à  $t = 15$  s, la vitesse s'annule brutalement, l'énergie cinétique est alors dissipée et transférée en énergie de dissipation avec l'impulsion de contact. Le saut de vitesse induit donc une énergie complémentaire au moment de l'impact. Il est important de remarquer que le bilan d'énergie est respecté. Effectivement la courbe en tirets noirs sur les figures 2.10 et 2.11 faisant référence à l'équation (2.138) est nulle.

Ce premier cas test de la masse ponctuelle a permis de mettre en avant le comportement de l'interface avec le modèle RCCM, notamment en annulant les effets du solide déformable, ce dernier possédant une rigidité nulle. Ainsi les cas tests suivants présentent des cas en trois dimensions plus complet.

## 2.4.2 Le cube avec interface RCCM

Dans cette partie, l'objectif est de présenter un cas test en trois dimensions, faisant donc appel à toutes les parties du modèle RCCM, à savoir le contact unilatéral sur la partie normale du contact, le contact frottant sur la partie tangentielle et enfin le comportement élastique endommageable. Pour ce faire le choix pour le solide déformable est un cube dont le comportement est élastique linéaire isotrope. Un schéma du cas test est donné sur la figure 2.12. Dans le cadre du premier cas test en traction, la structure du solide déformable est donc un cube de 1 m x 1 m x 1 m et maillé avec 343 Q1-éléments hexaédriques à 8 nœuds. Il y a au total 512 nœuds.

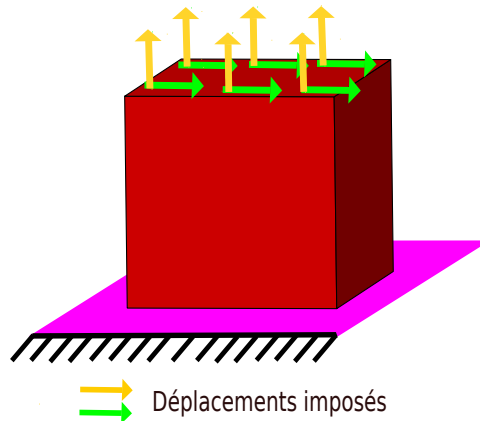


FIGURE 2.12 – Configuration cas test cube RCCM.

Pour rappel, au début de la simulation le solide rigide, qui n'est autre ici qu'un plan infini sans comportement, et le solide déformable, qui sera appelé cube RCCM par la suite, sont en contact. Le comportement de l'interface avec le modèle RCCM est appliqué sur la surface du bas du cube, celle en contact avec le solide rigide. Les conditions aux limites seront appliquées en déplacement sur les nœuds de la surface du haut du cube RCCM.

Dans la suite de cette partie, deux cas tests sont présentés. Un premier en traction, avec donc un déplacement imposé sur les degrés de liberté de la surface du haut correspondant à la direction  $z$  et un second en traction et cisaillement. Pour cela un déplacement est imposé sur les degrés de liberté de la surface du haut du cube correspondant aux directions des axes  $x$  et  $z$ . Ces déplacements imposés sont modélisés par les flèches jaunes pour les degrés de liberté sur  $z$  et vertes pour les degrés de liberté en  $x$  sur la figure 2.12.

TABLE 2.2 – Paramètres pour les cas tests associées au Cube RCCM

$E$ (Pa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu_{\text{inf}}$	$\alpha_e$ (m)
$10^8$	1000	0	0.0001
$u_r$ (m)	$h_{\text{crit}}$ (s)	$h$ (s)	$g_0$ (m)
0.0003	$2.34 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$	$-1 \times 10^{-16}$

Les paramètres choisis pour la réalisation de ces simulations sont présentés dans la table 2.2. Soit  $E$  le module d'Young utilisé pour le comportement élastique linéaire du solide déformable. Sa valeur est choisie de manière à être proche du module d'un élastomère. Le coefficient de frottement  $\mu_{\text{inf}}$  associé à l'équation (2.65) est choisi nul. Les cas tests présentés étant en traction, il n'y a alors pas de contact unilatéral et donc pas de contact frottant. La figure 2.4 donne le comportement de la raideur de l'interface en fonction de l'endommagement  $\alpha$  avec  $\alpha_e$  la valeur de la limite élastique et  $u_r$  la limite de rupture. Le pas de temps critique  $h_{\text{crit}}$  est obtenu à partir de la pulsation calculée à l'équation (2.125). Le pas de temps  $h$  constant a ensuite été choisi en respectant (2.121). Pour finir, le gap initial  $g_0$  est choisi très légèrement négatif de manière à imposer le contact sur l'ensemble des nœuds potentiels de contact pour la suite de la simulation. Cela permet notamment d'avoir des résultats reproductibles d'une machine de calcul à une autre, en évitant l'état incertain d'un contact affleurant.

### 2.4.2.1 Sollicitation de traction

Dans un premier temps c'est le chargement en traction seulement qui est présenté. L'objectif ici est d'arracher progressivement l'interface située sur la surface du bas du cube RCCM, et voir ce qu'il se passe au niveau de chaque nœud. Pour cela, le déplacement présenté sur la figure 2.13 est imposé sur l'ensemble des degrés de liberté associés à la direction  $z$  sur les nœuds de la surface du haut du cube RCCM. Le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  est choisi non-nul de manière à observer de multiples déplacements dus à des déformations dans différentes directions dans le solide déformable et avoir des contraintes dans les différentes directions.

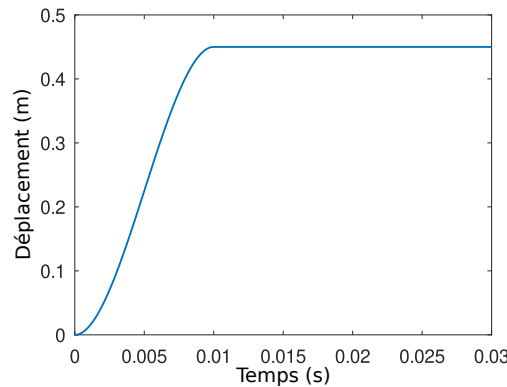


FIGURE 2.13 – Conditions aux limites avec l'évolution du déplacement imposé en fonction du temps pour une sollicitation en traction du cube RCCM.

Dans un premier temps, comme le montre la figure 2.13 le déplacement imposé augmente progressivement puis reste constant. Le choix du déplacement maximal,  $U_d = 0.45$  m, est empirique et choisi avec les observations expérimentales. Il est important de remarquer que la durée de la simulation est de seulement 0.03 s, ce qui permet donc de rentrer dans des phénomènes de dynamique rapide.



Pour observer le comportement du solide déformable et plus particulièrement de l'interface du cube RCCM, le choix est porté sur l'analyse de deux paramètres. Un premier qui est l'évolution de l'endommagement de chaque nœud de l'interface au cours du temps comme le montre la figure 2.14. Un second qui quantifie l'état de l'interface suivant trois possibilités, la fraction de l'interface dans un état élastique non endommagée, la fraction qui se trouve entre la limite élastique et la limite de rupture, donc élastique endommagée, et pour finir la fraction de l'interface totalement endommagée comme le montre la figure 2.15.

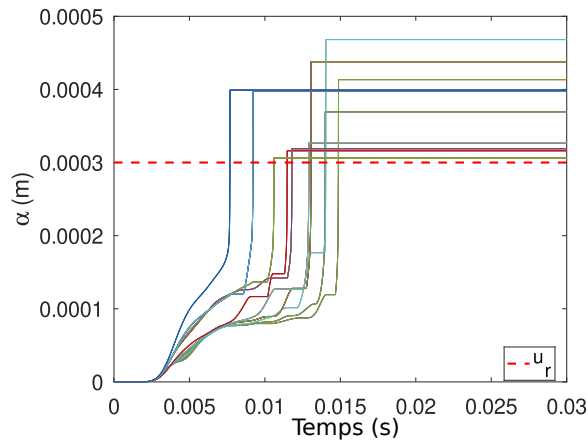


FIGURE 2.14 – Évolution de l'endommagement  $\alpha$  pour chaque nœud de l'interface en fonction du temps pour une sollicitation du cube RCCM en traction.

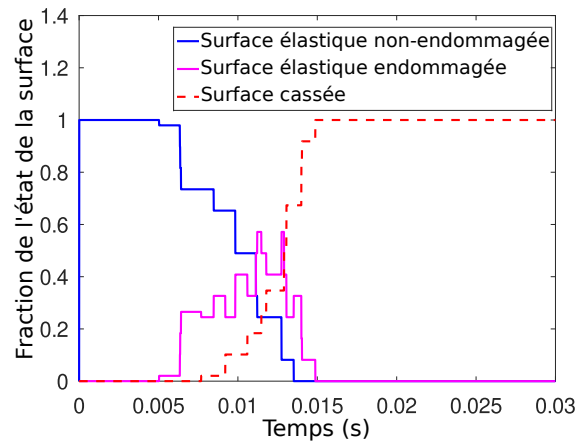


FIGURE 2.15 – Évolution de l'état de l'interface au cours du temps pour une sollicitation du cube RCCM en traction.

La figure 2.14 montre que lorsque le déplacement imposé augmente progressivement, les nœuds de l'interface s'endommagent au fur et à mesure mais pas tous au même rythme. Cela s'explique par le choix d'un coefficient de Poisson non nul, avec des contraintes qui sont donc différentes selon où l'on se trouve dans le cube. L'évolution en créneau de l'endommagement s'explique de la même manière que

pour la masse ponctuelle avec le comportement élastique linéaire du cube RCCM qui se comporte comme un ressort. À la moitié de la simulation, à  $t = 0.015$  s, l'ensemble des  $\alpha$  ont dépassés la limite de rupture, ce qui signifie donc que l'interface est totalement endommagée.

La figure 2.15 confirme les observations de la figure 2.14 avec une interface totalement endommagée à la moitié de la simulation. Les créneaux présents sur les différentes courbes s'expliquent de la même manière par le transport des ondes dans le cube RCCM, étant donné qu'il n'y a pas d'amortissement, ainsi que le comportement élastique de l'interface.

Sur la figure 2.14, on remarque que l'ensemble des  $\alpha$  ont dépassé la limite de rupture  $u_r$  de l'interface. Or, normalement l'endommagement n'est plus sensé évoluer après la rupture de l'interface. Cela s'explique par une vitesse d'endommagement non bornée lorsque le pas de temps tend vers 0, comme le montre les tangentes aux courbes des évolutions des  $\alpha$ . Avec un schéma explicite, l'état peut donc largement dépasser le seuil. Pour corriger cela, il semblerait donc intéressant physiquement d'introduire une vitesse limite pour la vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}$ . Cela sera étudié dans le chapitre suivant.

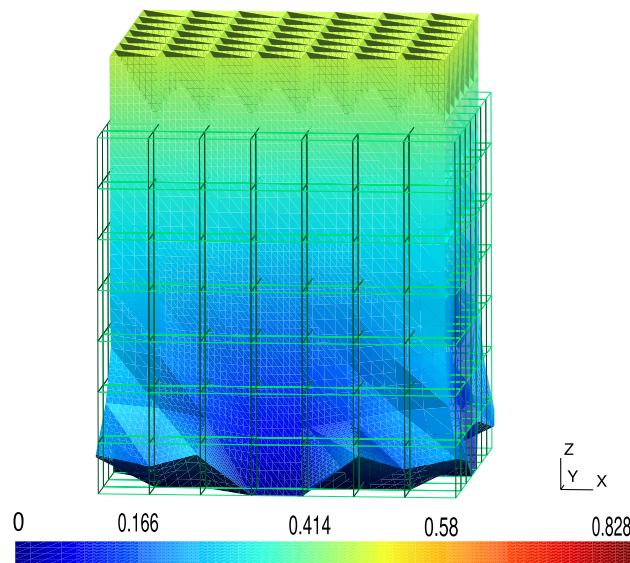


FIGURE 2.16 – Déplacement (m) du cube RCCM à  $t = 0.0115$  s pour une sollicitation en traction.

Pour illustrer le phénomène de transport des ondes dû au comportement du solide déformable, la figure 2.16 montre le déplacement à  $t = 0.0115$  s de la simulation sur l'ensemble du cube.

Des ondulations sont clairement visibles, et il est possible d'observer que l'interface s'arrache progressivement en accord avec les figures 2.14 et 2.15. Les premiers nœuds à s'arracher sont ceux des coins de l'interface étant soumis à une contrainte plus grande du fait de la déformation du cube avec un coefficient de Poisson non nul. Dans le cas d'un coefficient de Poisson nul, l'interface s'arrache de manière homogène.

Pour finir ce premier cas test, l'évolution des différentes énergies est étudiée de manière à vérifier le caractère symplectique du schéma CD-Lagrange. La figure 2.17 montre les énergies présentées précédemment (2.155) et le bilan d'énergie associé (2.138). Une première observation importante est que les bonnes propriétés énergétiques dues au caractère symplectique du schéma CD-Lagrange sont mises en avant avec un bilan d'énergie respecté. Les variations d'énergie interne et cinétique s'expliquent par le comportement élastique linéaire du cube qui agit donc comme un ressort.

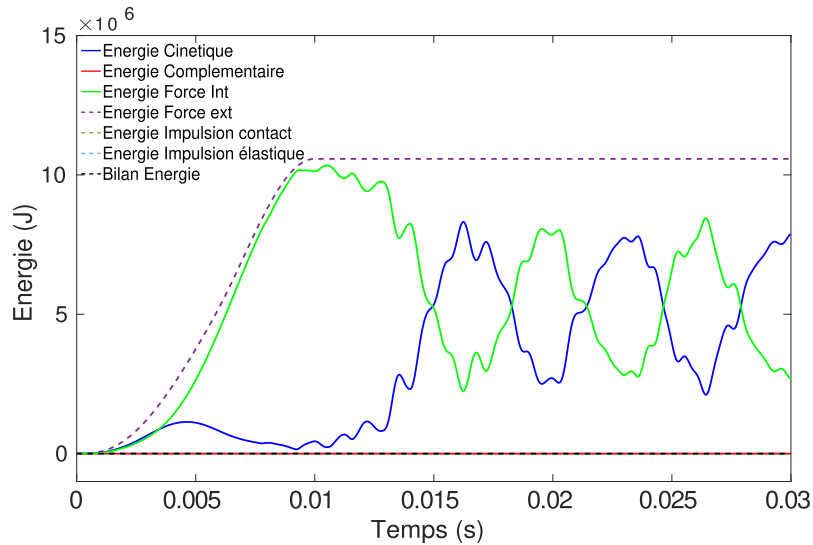


FIGURE 2.17 – Évolution des énergies cumulées en fonction du temps pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction.

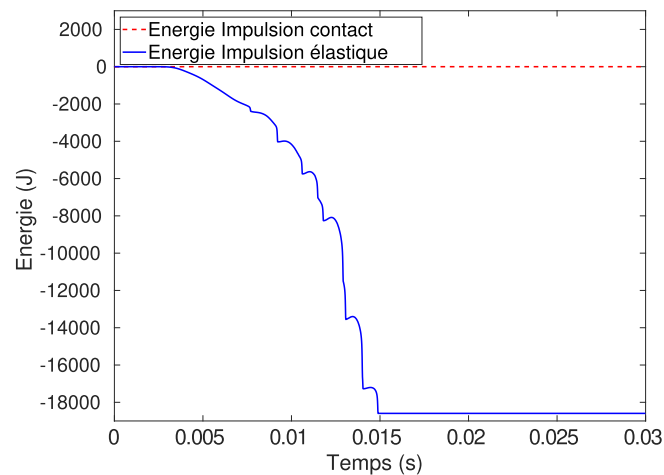


FIGURE 2.18 – Évolution des énergies cumulées associées aux impulsions en fonction du temps pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction.

En ce qui concerne l'énergie associée à l'impulsion de contact, comme le montre la figure 2.18, elle est nulle, ce qui s'explique par le fait qu'il n'y a

tout simplement pas de contact actif. Effectivement, le cube subit uniquement une traction. Cependant l'énergie associée à l'impulsion due au comportement élastique de l'interface est bien non nulle et négative. Effectivement l'arrachement de l'interface dissipe bien l'énergie, qui est convertie en énergie cinétique. Des oscillations sont observées sur la figure 2.18 qui illustre également le comportement élastique de l'interface. Lorsque l'interface est totalement endommagée, l'énergie cumulée associée à l'impulsion élastique n'évolue plus, ce qui est cohérent, il n'y a plus rien à endommager. Dans la sous-partie suivante, un autre chargement est appliqué au cube RCCM.

#### 2.4.2.2 Sollicitation de traction et cisaillement

Pour finir avec le cube RCCM, un dernier cas test est présenté avec un chargement différent. Pour cette simulation le cube présenté en figure 2.12 est de taille 0.01 m x 0.01 m x 0.01 m et discrétisé en 512 éléments hexaédriques à 8 nœuds également. En ce qui concerne les valeurs de la limite élastique et la limite de rupture, il est choisi  $\alpha_e = 5.10^{-6}$  m et  $u_r = 4.10^{-5}$  m. Cependant le comportement de la raideur de l'interface en fonction de l'endommagement reste le même que celui présenté en figure 2.4. Seuls  $\alpha_e$  et  $u_r$  sont modifiés. D'autre part, cela change également le pas de temps critique, un maillage plus raffiné implique un pas de temps critique plus petit. Le pas de temps choisi est  $h = 1.10^{-6}$  s, avec  $h_{\text{crit}} = 2.10^{-6}$  s avec l'équation (2.125).

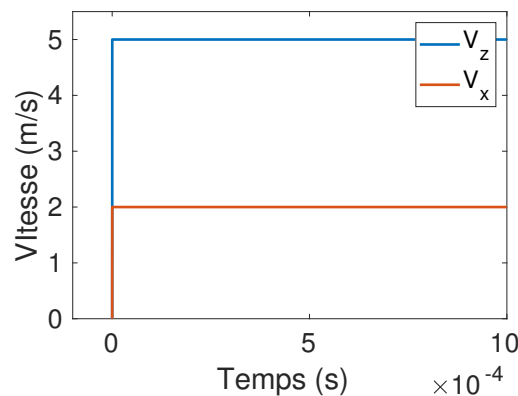


FIGURE 2.19 – Évolution des conditions aux limites en fonction du temps pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction et cisaillement.

La figure 2.19 présente les conditions aux limites en vitesse sur les degrés de liberté concernant la direction  $x$  permettant d'ajouter le comportement de cisaillement et concernant la direction  $z$  pour le comportement de traction. Pour ce cas test, le coefficient de Poisson est choisi nul. Sur la direction  $z$  le déplacement imposé est de  $5 \text{ m.s}^{-1}$  après le premier pas de temps et de  $2 \text{ m.s}^{-1}$  sur la direction  $x$ . Dans les deux cas la vitesse imposée est non régulière, mais cela n'est pas un problème avec la résolution explicite à l'aide du schéma CD-Lagrange.

Le temps de l'expérience simulée est de 0.001 s, ce cas test s'inscrit donc également dans le cadre de phénomènes de dynamique rapide. Comme dans le cas

précédent, l'évolution de chaque endommagement  $\alpha$  de chaque nœud est étudiée en fonction du temps. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 2.20. Le choix d'avoir imposé un déplacement aussi fort et irrégulier entraîne un endommagement rapide de l'interface.

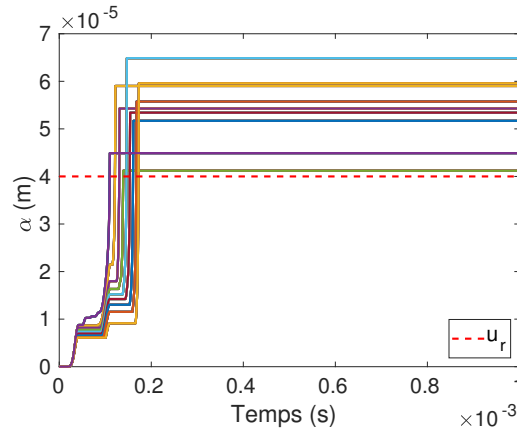


FIGURE 2.20 – Évolution de l'endommagement en chaque nœud en fonction du temps pour le cube RCCM sollicité en traction et cisaillement.

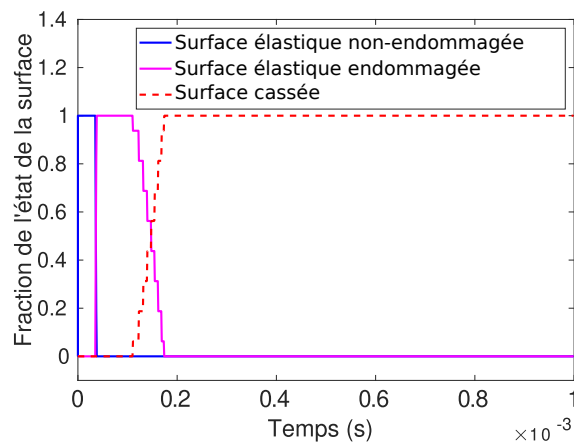


FIGURE 2.21 – Évolution des états de l'interface en fonction du temps pour le cube RCCM sollicité en traction et cisaillement.

Sur la figure 2.20 on remarque que l'interface est arrachée au fur et à mesure, il y a plusieurs nœuds qui ont le même comportement et le même endommagement. La surface s'arrache par groupe de nœuds. Cela s'explique par le choix d'un coefficient de Poisson nul et d'une sollicitation uniforme dans une seule direction. De la même manière que les cas précédents, l'évolution en créneaux des endommagements  $\alpha$  s'explique par le comportement élastique du solide déformable et de l'interface.

La figure 2.21 confirme les observations faites sur la figure 2.20. Effectivement, la courbe en pointillés rouges représentant l'arrachement de l'interface au cours

du temps augmente en créneau. L'endommagement et la rupture de l'interface se fait donc par rangée de nœuds.

Pour illustrer ces résultats, la figure 2.22 montre les déplacements sur l'ensemble du cube RCCM.

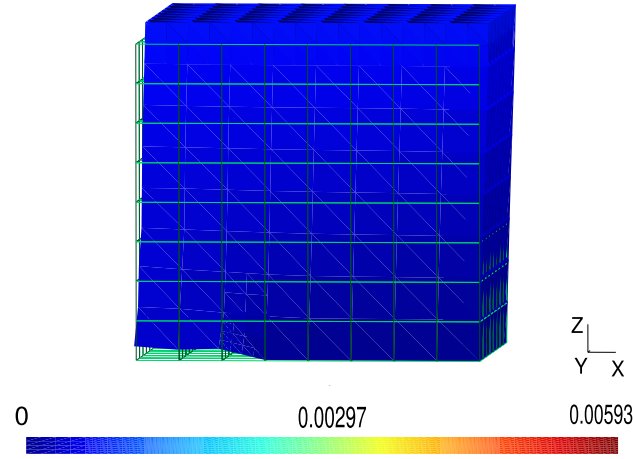


FIGURE 2.22 – Déplacement cube RCCM à  $t = 1,4 \cdot 10^{-4}$  s sollicité en traction et cisaillement.

Ainsi, on peut observer que le cube s'arrache par ligne de nœud suivant l'axe  $y$  de gauche à droite. A noter que si la vitesse était uniquement imposée sur les degrés de liberté suivant l'axe  $x$ , alors seul un phénomène de cisaillement serait observé. Cela entraînerait une entrée en contact du cube RCCM avec le solide rigide. En effet cela produirait une rotation du cube autour de l'axe  $y$  possible par le comportement élastique du solide déformable. Il y aurait alors un contact impliqué par cette rotation sur les arêtes situées au bord du cube RCCM, soit sur l'arête de droite sur le cube représenté sur la figure 2.22.

Pour terminer l'étude de ce cas test, une convergence en espace-temps est réalisée sur le cube RCCM avec ce chargement. Pour ce faire, il est nécessaire de calculer une grandeur observable à chaque pas de temps  $h$  que l'on peut comparer suivant les différents maillages. Le choix est porté sur la moyenne du déplacement suivant chaque direction, soit :

$$\tilde{U}_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{ik}(t), \quad k \in \{x, y, z\} \quad (2.156)$$

avec donc  $k$  faisant référence aux degrés de liberté de la direction choisie pour le calcul de la moyenne, et donc  $\tilde{U}_k(t)$  est la moyenne du déplacement pour chaque direction  $k$  au temps  $t$ .

Pour vérifier la reproductibilité des résultats et réaliser la convergence espace-temps, les calculs sont réalisés dans un premier temps avec un code prototype sur Matlab et ensuite avec le logiciel de simulation éléments finis MEF++ (<https://giref.ulaval.ca/>) développé par le GIREF (Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Éléments Finis) à l'université de Laval au Canada et créé pour résoudre des applications industrielles avec un grand nombre de degrés de liberté. Pour

pouvoir réaliser ces calculs avec ce logiciel, l'algorithme (5) a été développé dedans. L'utilisation d'un logiciel de simulation comme MEF++ a notamment permis de réaliser des calculs avec des maillages plus raffinés.

Pour réaliser la convergence en espace-temps, il est nécessaire d'obtenir une solution de référence pour pouvoir ensuite se comparer aux résultats obtenus avec des maillages plus grossiers. Pour ce faire, la stratégie a été de diviser par deux la taille du maillage jusqu'à obtenir des résultats "proches" entre deux tailles de maillage. Diminuer la taille de maille implique une diminution du pas de temps critique  $h_{crit}$ , ce dernier étant proportionnel à une longueur caractéristique  $l_c$  des éléments. Ainsi diviser la taille de maille par deux avec des éléments hexaédriques, revient à diminuer la valeur du pas de temps critique par deux. Dans la table 2.3 les paramètres choisis pour les différents maillages sont présentés :

TABLE 2.3 – Paramètres calcul pour les différents maillages

Maillage (Nbre Éléments)	2x2x2	4x4x4	8x8x8
$h_{crit}$ (s)	$2.10^{-7}$	$1.10^{-7}$	$5.10^{-8}$
Maillage (Nbre Éléments)	16x16x16	32x32x32	64x64x64
$h_{crit}$ (s)	$2,5.10^{-8}$	$1,25.10^{-8}$	$6,25.10^{-9}$

La figure 2.23 montre les résultats obtenus pour le déplacement moyen des degrés de liberté de l'axe  $x$  et la figure 2.24 les résultats pour le déplacement moyen des degrés de liberté sur l'axe  $z$ . La vitesse imposée étant supérieure en traction qu'en cisaillement, il est normal d'observer des déplacements plus grand suivant l'axe  $z$  que l'axe  $x$ .

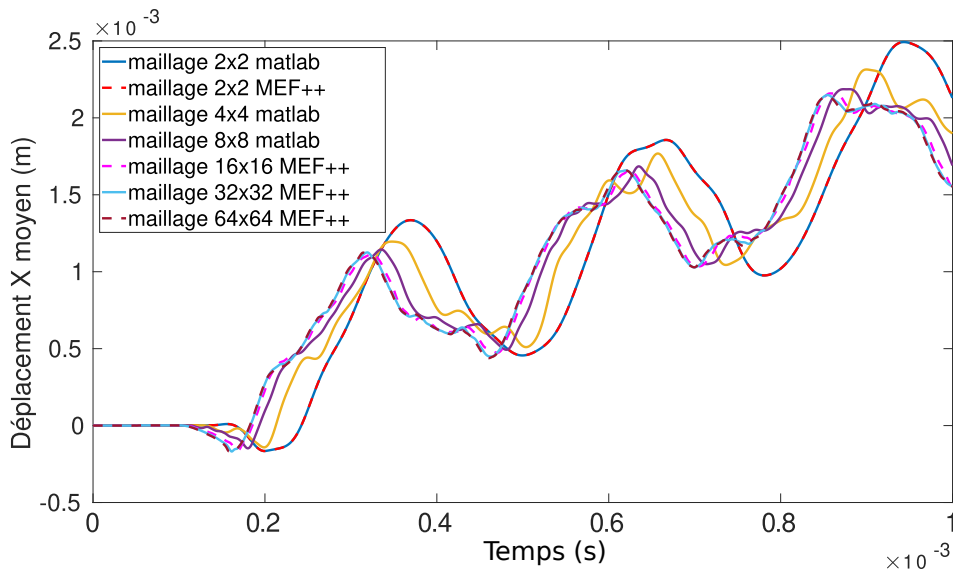


FIGURE 2.23 – Déplacement moyen des degrés de liberté suivant l'axe  $x$  des nœuds de l'interface.

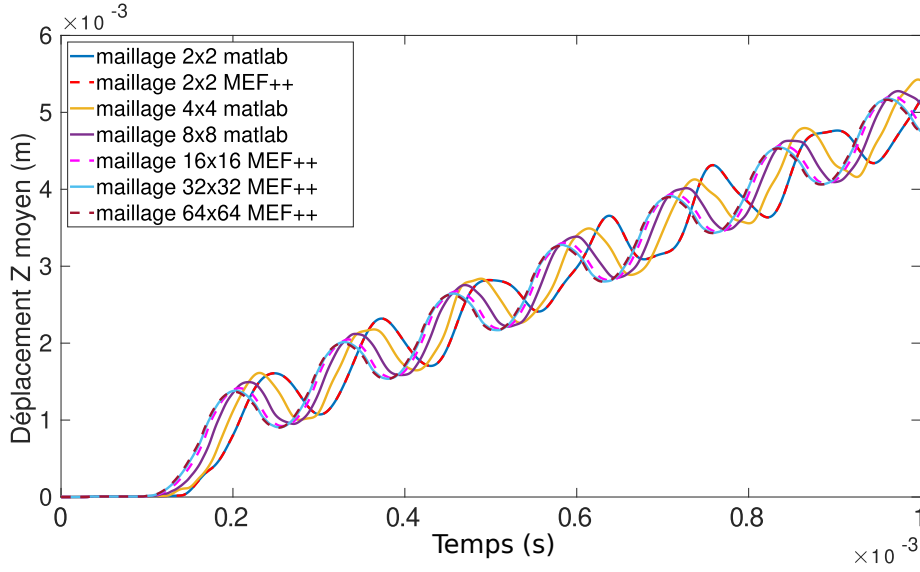


FIGURE 2.24 – Déplacement moyen des degrés de liberté suivant l’axe  $z$  des nœuds de l’interface.

Ces comportements oscillatoires s’expliquent toujours par le comportement élastique linéaire isotrope sans amortissement du solide déformable. Les figures 2.23 et 2.24 montrent que plus le maillage est raffiné, plus les solutions obtenues sont proches. La solution de référence choisie est donc celle obtenue avec le maillage en  $64 \times 64 \times 64$  éléments. Ainsi le schéma numérique semble converger vers cette solution. Pour confirmer cette observation, la distance en norme  $\mathbb{L}_1$  est calculée de la manière suivante :

$$e_k = h \sum_{i=1}^N |\tilde{U}_k(t_i) - \tilde{U}_{ref,k}(t_i)|, \quad k \in \{x, z\} \quad (2.157)$$

avec  $h$  le pas de temps associé au maillage le plus raffiné, à savoir le maillage en  $64 \times 64 \times 64$  éléments,  $\tilde{U}_{ref,k}(t_i)$  correspond à la solution associée à ce maillage au temps discrétisé  $t_i$ ,  $N$  correspond au nombre de pas de temps discret associé à l’intervalle  $[t_0, t_f]$  et  $\tilde{U}_k(t_i)$  correspond à la solution associée au maillage plus grossier que l’on compare à la référence. Cette solution est interpolée linéairement sur la grille discrétisée en temps associée au pas de temps du maillage raffiné. Ce calcul est donc réalisé pour chaque configuration présentée dans la table 2.3 et la figure 2.25 montre les résultats obtenus.

La figure 2.25 montre la reproductibilité des résultats avec des solutions obtenues par deux résolutions différentes (Matlab et MEF++) qui sont similaires. D’autre part, cette figure montre que le schéma converge à l’ordre 1 comme dans le benchmark réalisé par [24]. On remarque également une pente d’ordre 2 pour les maillages les plus raffinés. Cela peut s’expliquer par un contact absent sur ce cas test, entraînant alors un problème suffisamment régulier pour vérifier la propriété de convergence à l’ordre 2 en déplacement du schéma de la différence centrée.



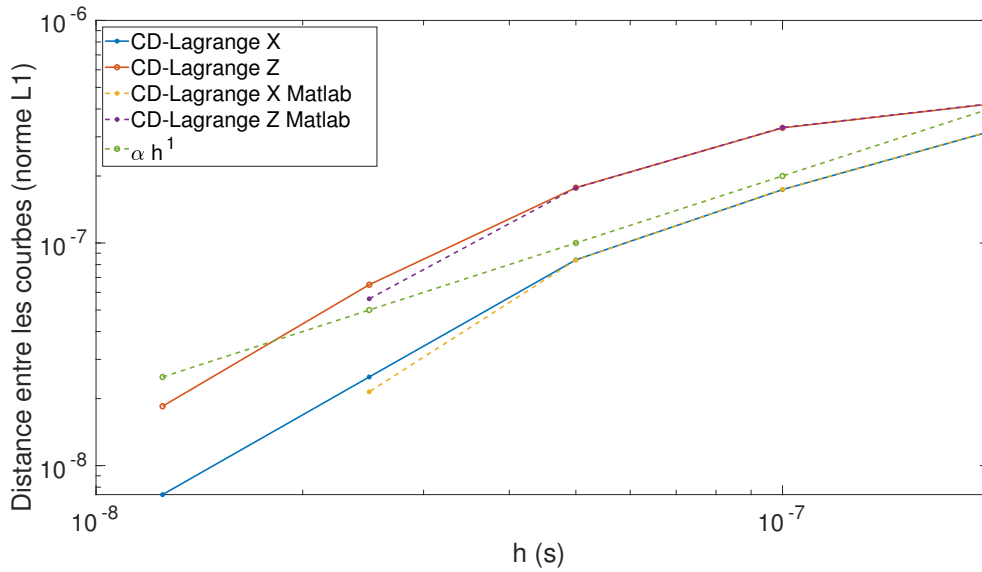


FIGURE 2.25 – Convergence espace-temps du cas Traction Cisaillement.

Les résultats pour le maillage en  $32 \times 32 \times 32$  éléments n'ont pas été réalisés sur le prototype Matlab pour des raisons de temps de calcul trop long.

Dans la dernière partie, un dernier cas test est présenté avec ce modèle RCCM.

### 2.4.3 Le cas test du peeling

Pour finir ce chapitre 2, un dernier cas test est présenté, c'est celui du Peeling, ou plus précisément de l'arrachement d'un solide déformable d'un solide rigide. Pour ce faire, le solide déformable choisi est un parallélépipède rectangle de côté 1 mètre x 1 mètre et de longueur 4 mètres.

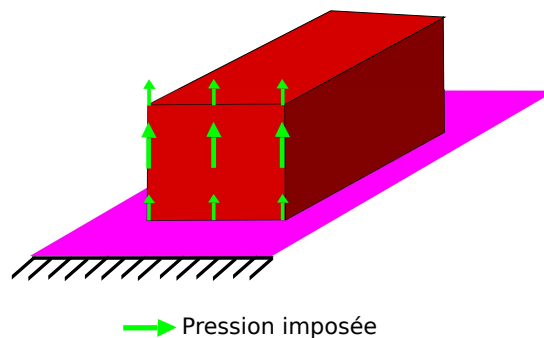


FIGURE 2.26 – Configuration cas test du Peeling.

Pour réaliser ce cas test une pression tangentielle est appliquée sur les degrés de liberté  $z$  d'un côté du rectangle. Une illustration du cas test est fournie en figure 2.26. La pression appliquée sur le côté du rectangle est une distribution

parabolique. Les valeurs de la pression appliquée sur l'arête du haut et du bas du côté de la face du côté du rectangle sont nulles. La figure 2.27 montre donc l'évolution de la pression au cours du temps pour les degrés de liberté associés à la direction  $z$  situés au milieu de la face du côté du rectangle. Ensuite une interpolation est réalisée pour obtenir une distribution parabolique.

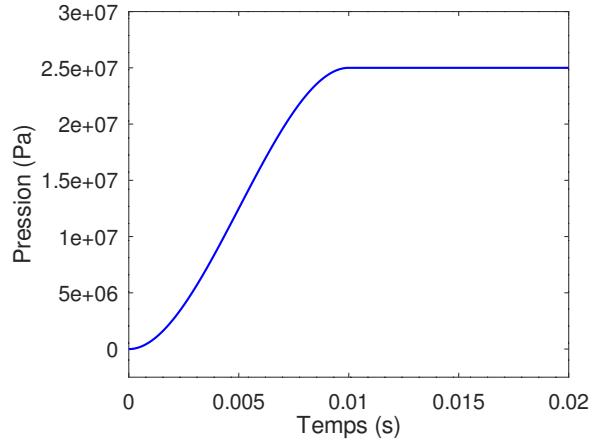


FIGURE 2.27 – Pression imposée au cours du temps au milieu d'une face latérale du rectangle.

Pour ce cas test le module d'Young est choisi à  $10^8$  Pa et le coefficient de Poisson est  $\nu = 0.3$ . Le rectangle est discrétisé en éléments hexaédriques avec  $7 \times 7 \times 28$  éléments. Le pas de temps critique calculé est  $h_{\text{crit}} = 2,34 \cdot 10^{-5}$  s. Il est identique au premier cas tests avec le cube RCCM car les éléments sont de la même taille. Le pas de temps choisi est alors  $h = 1 \cdot 10^{-5}$  s. De la même manière que pour les cas tests précédents, les deux solides sont en contact à l'instant initial. Ainsi, pour limiter les arrondis numériques et ainsi forcer le contact, la gap initial est fixé à  $g_0 = -1 \cdot 10^{-16}$  m. L'ensemble des paramètres utilisés sont présentés dans la table 2.2.

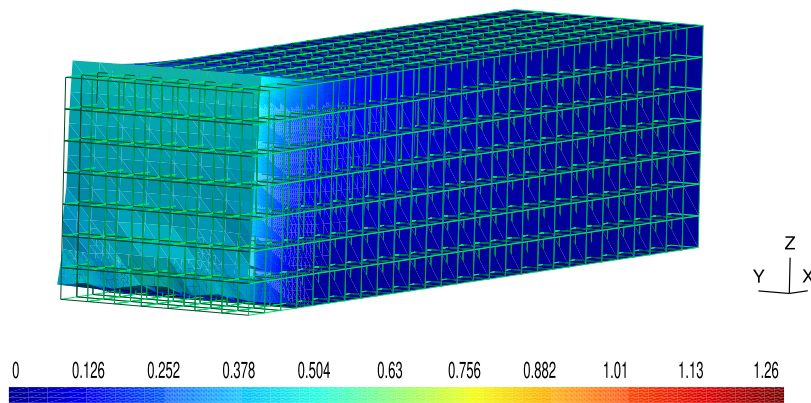


FIGURE 2.28 – Déplacement (m) à  $t = 0.014$  s pour le cas test du peeling.

L'objectif de ce cas test est d'activer dans un cas en trois dimensions plusieurs composantes du modèle RCCM, à savoir le comportement élastique endommageable

et le contact. Dans ce cas, le coefficient de frottement est  $\mu_{\text{inf}} = 0$ , il n'y a donc pas d'interaction sur l'interface liée à la loi de Coulomb.

La figure 2.28 montre le déplacement obtenu avec la pression appliquée sur le côté du rectangle. Ainsi au cours du temps, un arrachement du rectangle est observé. Cela est confirmé par la figure 2.29 montrant l'évolution de l'endommagement  $\alpha$  de chaque nœud de l'interface RCCM du rectangle au cours du temps.

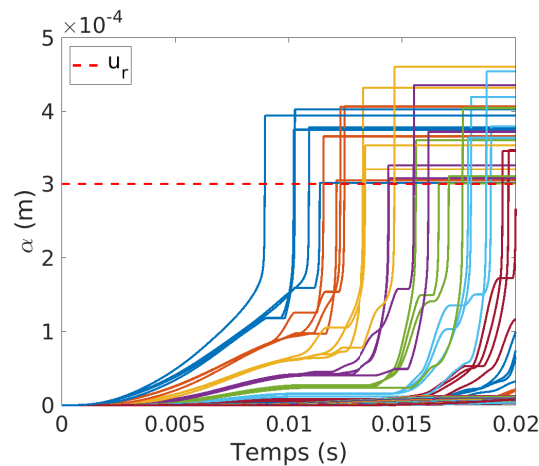


FIGURE 2.29 – Évolution de l'endommagement au cours du temps pour les nœuds de l'interface pour le cas test du peeling.

La figure 2.29 montre un endommagement progressif de l'interface de contact avec encore une bonne partie de l'interface RCCM du rectangle qui reste élastique comme le montre la figure 2.30. De la même manière que pour les cas avec le cube RCCM, la vitesse d'endommagement n'est pas bornée, ce qui entraîne un dépassement de la limite de rupture  $u_r$  pour les endommagements  $\alpha$  de chaque nœud.

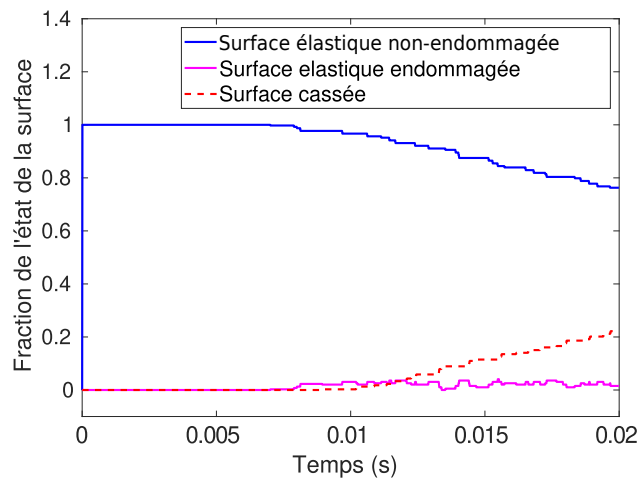


FIGURE 2.30 – Évolution des états de l'interface en fonction du temps pour le cas test du peeling.

Pour finir, en arrachant l'interface RCCM, le rectangle est soumis à un couple de flexion. Ainsi, comme le montre la figure 2.31, l'interface est soumise à un contact avec le solide rigide.

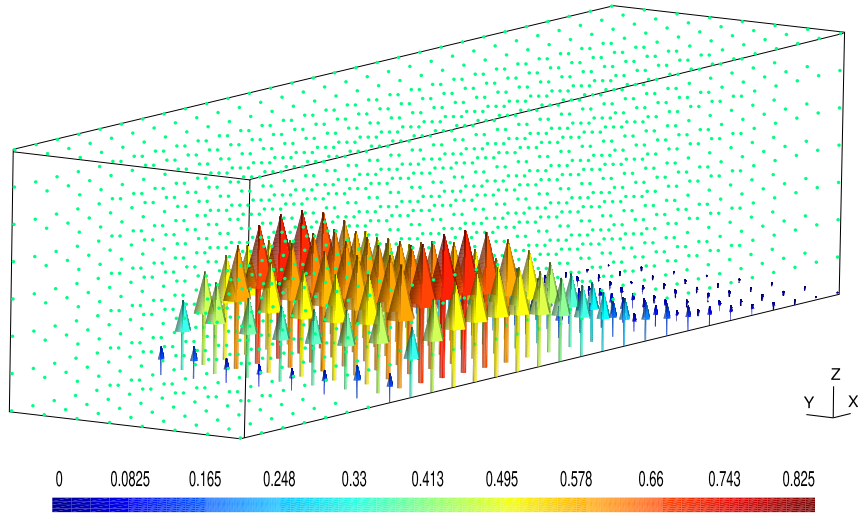


FIGURE 2.31 – Impulsions de contact normal ( $\text{m.s}^{-1}.\text{kg}$ ) à  $t = 0.014$  s pour le cas test du peeling.

Pour conclure, plusieurs cas tests ont été présentés à la fin de ce chapitre avec pour objectif d'observer le comportement du modèle RCCM résolu avec le schéma CD-Lagrange en dynamique explicite. Les figures d'évolution d'endommagement  $\alpha$  des nœuds des interfaces ont montré un défaut. En effet la vitesse d'endommagement peut tendre vers l'infini, ce qui n'est pas physiquement fondé. Ainsi dans le chapitre suivant l'objectif est la création d'un modèle à effet retard basé sur le modèle RCCM pour contrôler cette vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}$ .



# Chapitre 3

## L'effet retard pour contrôler la vitesse d'endommagement

Dans les cas tests du chapitre précédent présentant des cas d'arrachement de l'interface avec un modèle de zones cohésives, le modèle RCCM [22, 74], qui pour la suite sera nommé le modèle RCCM standard, nous avons observé que les vitesses d'endommagement des nœuds de l'interface  $\dot{\alpha}$  n'étaient pas bornées. Cependant, physiquement, cela n'est pas envisageable. Cette évolution s'explique par différents aspects. D'une part, la dynamique est résolue avec un schéma explicite piloté en vitesse. Ainsi, suivant le pas de temps choisi, la précision sur le résultat peut être plus ou moins élevée. Un manque de précision en vitesse entraîne une erreur en déplacement également, ce qui explique notamment pourquoi les paramètres d'endommagement  $\alpha$  de chaque nœud dépassent la limite de rupture dans les cas tests précédents. D'autre part, dans le modèle RCCM standard, la loi d'évolution de l'endommagement n'intègre pas de contrôle de la vitesse d'endommagement. Ainsi, pour rendre le modèle plus physique et donc contrôler cette vitesse d'endommagement, un intérêt est porté à l'intégration d'un effet retard [2, 86] dans le modèle RCCM standard respectant le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés présenté au chapitre 2.

La localisation de l'endommagement [49, 65], ou une dépendance de ce dernier au maillage [21] sont des problématiques rencontrées avec des modèles d'endommagement standards [81, 52]. Ainsi l'avantage d'implémenter des modèles d'endommagement à effet retard [47] est de pouvoir s'affranchir de ces phénomènes. Il existe d'autres méthodes pour éviter ces comportements numériques, comme des modèles avec des limiteurs de localisation [61, 68] mais ils ne seront pas étudiés dans ces travaux.

L'objectif de ce chapitre est également de mettre en avant l'aspect modulaire de la résolution présentée dans ces travaux. Effectivement, dans un premier temps, deux modèles à effet retard sont présentés ainsi que leur implémentation dans la résolution proposée. Dans un dernier temps, pour mettre en avant l'avantage de cette résolution, l'aspect modulaire de la résolution pour les lois de comportement pour le solide déformable sera mis en avant avec des cas tests avec des lois de comportement matériau volumiques différentes.

## 3.1 Un modèle à effet retard avec terme de rappel

Dans cette première partie un premier modèle à effet retard basé sur le modèle RCCM standard est présenté. Pour être intégré à la résolution proposée, il est nécessaire dans un premier temps de vérifier qu'il respecte le cadre des matériaux standards généralisés en vérifiant l'inégalité de Clausius-Duhem. Pour conclure cette première partie, ce modèle, nommé modèle RCCM à effet retard avec rappel, sera comparé aux résultats obtenus avec le modèle RCCM standard.

### 3.1.1 Présentation du modèle

Le modèle à effet retard avec rappel proposé est basé sur le modèle RCCM. Effectivement, c'est la vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}$  que l'on cherche à contrôler. Ainsi, avec ce nouveau modèle, les lois d'état et d'évolution pour le contact unilatéral (2.71) obtenues à l'aide du potentiel d'énergie libre, et le contact frottant avec la loi de Coulomb (2.79) obtenues avec la méthode du bi-potentiel, restent les mêmes et l'appartenance au cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés est montrée au chapitre 2.

Ce qui diffère du modèle RCCM standard est donc la partie élastique endommageable du modèle, et donc la loi d'évolution (2.61) associée à la vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}$  pour un nœud appartenant au bord de contact potentiel  $\Gamma_t$ .

Basée sur la loi d'évolution (2.61) du modèle RCCM standard, la loi d'évolution proposée pour ce premier modèle RCCM à effet retard est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } f([\mathbf{u}]) = \alpha \text{ et } \alpha < u_r, & \text{alors } \dot{\alpha} = \langle \dot{f} - \frac{\alpha}{\tau} \rangle_+ \\ \text{Sinon } \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $f([\mathbf{u}])$ , la norme du saut de déplacement  $[\mathbf{u}]$ , définie avec l'équation (2.60),  $\alpha$  l'endommagement d'un nœud de l'interface de contact,  $u_r$  la limite de rupture de l'interface élastique endommageable et  $\dot{f}$  la dérivée en temps de la norme du saut de déplacement introduit avec l'équation (2.62). Soit  $\tau$  un temps caractéristique caractérisant l'effet retard. Il représente une variable d'état propre au matériau du solide déformable.  $\alpha/\tau$  est le terme de rappel de l'évolution de la vitesse d'endommagement. Il est important de remarquer que pour un temps caractéristique infini,  $\tau \rightarrow +\infty$ , la loi d'évolution du modèle à effet retard avec rappel tend vers celle du modèle RCCM standard (2.61).

Pour appliquer la résolution en dynamique explicite proposée, il est nécessaire que la loi d'évolution de l'endommagement du modèle (3.1) respecte le cadre thermodynamique proposé au chapitre 2. Pour ce faire, il suffit de se baser sur l'inégalité de Clausius-Duhem (2.94) écrite sur l'interface et introduite lors de l'insertion du modèle RCCM standard. En choisissant la même évolution de raideur d'interface que pour le modèle standard, présenté en figure 2.4 et dont la dérivée en temps est négative ou nulle, alors pour que l'inégalité de Clausius-Duhem (2.94) soit vérifiée il est nécessaire que l'évolution de l'endommagement soit positive ou nulle. Or, d'après l'équation (3.1),  $\dot{\alpha} \geq 0$ . Donc l'inégalité de Clausius-Duhem et l'ensemble du modèle RCCM à effet retard avec rappel respecte le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés.

Pour résoudre l'équation de la dynamique (2.119) du problème étudié, il est donc nécessaire d'appliquer le cadre explicite présenté précédemment, voir la section 2.3, à la loi d'évolution (3.1) et on obtient :

$$\begin{cases} \text{Si } f([\mathbf{u}]_{n+1}) \geq \alpha_{n+1} \text{ et } \alpha_{n+1} < u_r, & \text{alors } \dot{\alpha}_{n+3/2} = \langle \dot{f}_{n+3/2} - \frac{\alpha_{n+1}}{\tau} \rangle_+ \\ \text{Sinon } \dot{\alpha}_{n+3/2} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour résoudre l'équation de la dynamique (2.119) avec ce modèle d'interface à effet retard, il suffit simplement d'appliquer comme avec le modèle RCCM standard l'algorithme (5). Ainsi la seule modification est l'implémentation de la nouvelle loi d'évolution (3.1) à la place de celle du modèle RCCM standard (2.61) mais il n'y a pas de modification de l'algorithme général. Ainsi, le caractère modulaire de la résolution est illustré à travers l'intégration de cette nouvelle loi de comportement pour l'interface.

Pour observer l'impact de ce modèle à effet retard par rapport au modèle RCCM standard, les cas tests sur le cube RCCM présentés au chapitre 2 sont réalisés avec ce nouveau modèle d'interface et ensuite comparés aux résultats précédents.

### 3.1.2 Comparaison au modèle RCCM standard

Avant de se comparer au modèle RCCM standard, il est nécessaire d'identifier le temps caractéristique  $\tau$  associé à l'interface élastique endommageable. De manière à pouvoir comparer les résultats, la loi de comportement choisie pour le solide déformable est toujours élastique linéaire isotrope. Ces travaux ne possédant pas de partie expérimentale, le temps caractéristique est fixé numériquement. Pour ce faire, le cas test du cube RCCM, voir la section 2.4.2.1, avec un déplacement imposé sur les degrés de liberté  $z$ , voir figure 2.13, de la face du haut du cube est réalisé avec différents temps caractéristiques. Les temps caractéristiques choisis sont ceux présentés en table 3.1.

TABLE 3.1 – Test pour le choix du temps caractéristique

$\tau_1$ (s)	$\tau_2$ (s)	$\tau_3$ (s)	$\tau_4$ (s)	$\tau_5$ (s)
0.035	0.032	0.03	0.028	0.02

Pour choisir le temps caractéristique le plus adapté à la modélisation, c'est à dire permettant une limitation de la vitesse d'endommagement et que l'endommagement ne dépasse pas la limite de rupture de l'interface  $u_r$ , la moyenne des endommagements des nœuds de l'interface  $\alpha_m$  est étudiée. Soit :

$$\alpha_m = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i}{N} \quad (3.3)$$

avec  $N$  le nombre de nœuds de contact potentiel que possède l'interface entre le solide déformable et le solide rigide et  $\alpha_i$  l'endommagement  $\alpha$  du nœud  $i$ . Son évolution est ensuite observée au cours du temps.



La figure 3.1 montre l'évolution de la moyenne des endommagements des nœuds de l'interface au cours du temps. Un effet retard est en effet observé pour chaque valeur de  $\tau$  de la table 3.1, avec une interface qui s'endommage plus tard dans le temps.

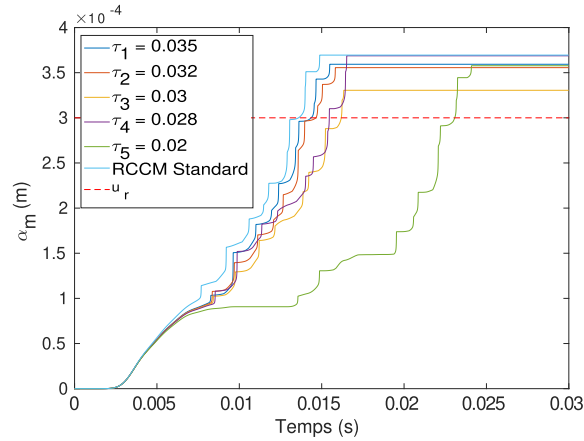


FIGURE 3.1 – Évolution de la moyenne de l'endommagement au cours du temps pour différents temps caractéristiques pour le cas test du cube RCCM en traction.

Effectivement lorsque le temps caractéristique diminue, les courbes d'endommagement se décalent sur la droite, et donc dans le temps. Cependant, sur la figure 3.1, on remarque que l'endommagement moyen  $\alpha_m$  est supérieur à  $u_r = 0.0003$  m à la fin de la simulation. Ainsi il semble qu'un effet retard soit bien observé avec ce modèle mais la vitesse d'endommagement ne semble pas être clairement limitée. Pour confirmer cette observation, un intérêt est porté à la comparaison de l'évolution de l'endommagement  $\alpha$  de tous les nœuds de contact de l'interface au cours du temps, comme le montre la figure 3.2. Sur la gauche de cette figure sont illustrés les résultats obtenus avec le modèle RCCM standard, et sur la figure de droite ceux obtenus avec le modèle à effet retard avec rappel avec un temps caractéristique  $\tau = 0.02$  s.

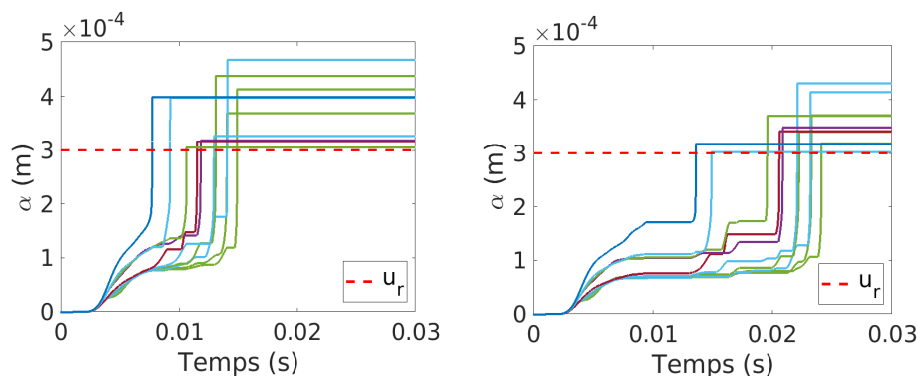


FIGURE 3.2 – Évolution de l'endommagement de l'interface en fonction du temps pour le modèle RCCM standard (à gauche) et le modèle RCCM à effet retard avec rappel avec  $\tau = 0.02$  s (à droite).

Comme évoqué pour la figure 3.1, la vitesse d'endommagement n'est pas vraiment contrôlée. Effectivement, les courbes tangentes à celles de la figure 3.2 au moment du saut sont des droites à la fin de la simulation, ainsi les vitesses d'endommagement  $\dot{\alpha}$  ne sont de nouveau pas bornées. Cependant ce modèle à effet retard permet de gagner en précision avec des valeurs d'endommagement plus faibles et proches de la limite de rupture  $u_r$  qu'avec le modèle RCCM standard.

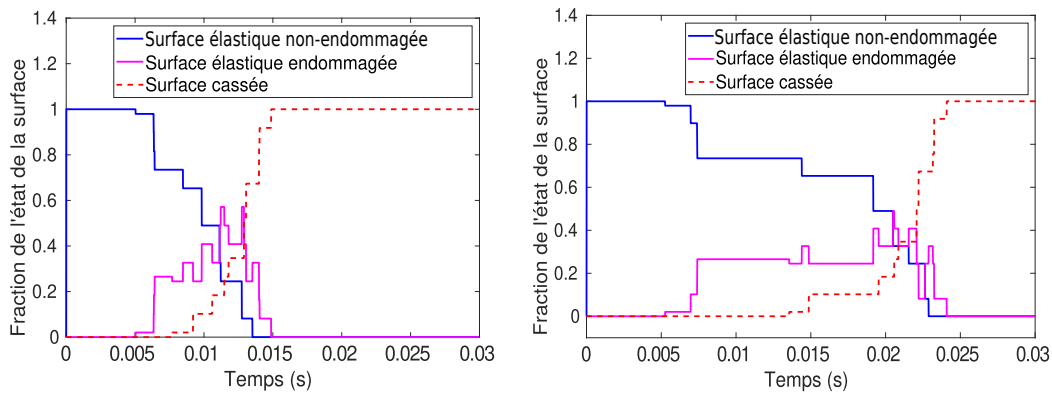


FIGURE 3.3 – Évolution de l'état de l'interface en fonction du temps pour le modèle RCCM standard (à gauche) et le modèle RCCM à effet retard avec rappel avec  $\tau = 0.02$  s (à droite).

La figure 3.3 compare l'évolution de l'état de l'interface suivant que son comportement soit élastique non endommagé ( $\alpha \leq \alpha_e$ ), élastique endommagé ( $\alpha_e < \alpha < u_r$ ) ou dans un état de rupture par rapport aux résultats obtenus avec le modèle RCCM standard. Il est aisé d'observer l'effet retard. En comparant le graphique de droite avec celui de gauche, on remarque une proportion de l'interface qui reste élastique plus longtemps et une rupture plus tardive de l'interface avec le modèle à effet retard.

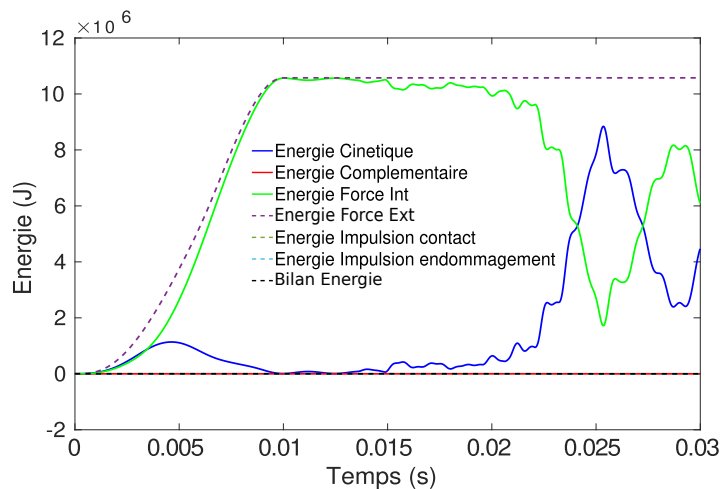


FIGURE 3.4 – Évolution des différentes énergies au cours du temps pour un temps caractéristique  $\tau = 0.02$  s pour le cas test du cube RCCM en traction .

Pour finir cette comparaison des résultats entre les deux modèles, un intérêt est porté à l'évolution des énergies au cours du temps. Les figures 3.4 et 3.5 montrent les différentes énergies au cours du temps. La figure 3.4 peut être comparée à la figure 2.17 présentée dans le chapitre 2 dans le cadre du modèle RCCM standard. L'énergie cinétique produite par le système se déclenche plus tard sur la figure 3.4 que sur la figure 2.17. Cela s'explique par un arrachement de l'interface plus tardif.

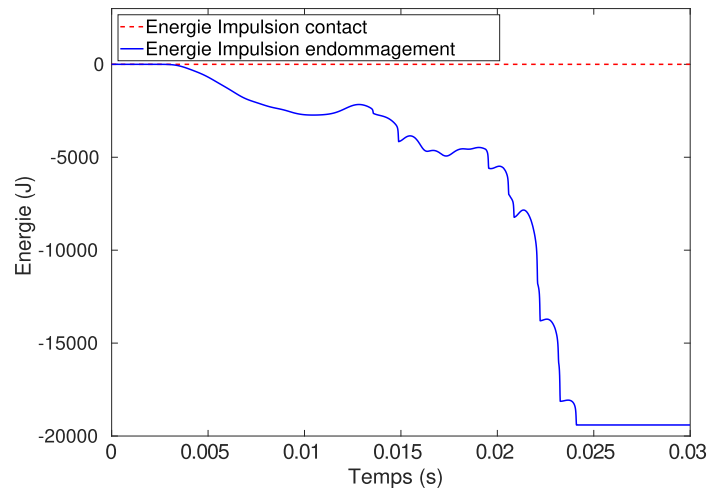


FIGURE 3.5 – Évolution des énergies associées aux impulsions au cours du temps pour un temps caractéristique  $\tau = 0.02$  s pour le cas test du cube RCCM en traction.

N'étant pas à la même échelle, la figure 3.5 propose un zoom sur les énergies associées aux différentes impulsions. On remarque que l'énergie associée au comportement élastique endommageable de l'interface, en bleu sur la figure 3.5, est activée plus tard que dans le cas de la résolution avec le modèle RCCM standard comme le montre la figure 2.18. Ce comportement explique le retard observé par rapport au modèle RCCM standard sur l'énergie cinétique, avec également l'énergie des forces intérieures qui réagit plus tard avec le comportement élastique linéaire du solide déformable.

Il est important de noter que la conservation d'énergie (2.138) est de nouveau respectée comme le montre la figure 3.4. Le modèle à effet retard proposé respectant le cadre thermodynamique et explicite, aucune dissipation numérique n'est observée.

Ainsi ce premier modèle permet de mettre en avant un effet retard, permettant notamment de gagner en précision sur les résultats avec des endommagements  $\alpha$  plus proches de la limite de rupture  $u_r$  associée à l'interface. Cependant, la vitesse ne semble pas être contrôlée. Dans la partie suivante, un nouveau modèle à effet retard est proposé et son objectif est de mieux contrôler la vitesse d'endommagement.

## 3.2 Un modèle à effet retard à vitesse limite

Le premier modèle à effet retard présenté dans la partie précédente n'a pas permis de résoudre le problème de la vitesse d'endommagement non bornée. Ainsi, dans cette partie, un second modèle à effet retard de nouveau basé sur le modèle RCCM standard est présenté dans l'objectif de la contrôler. Ce modèle est basé sur l'ajout d'une variable interne au modèle, nommée  $v_r$ , qui correspond à la vitesse maximale à laquelle l'endommagement de chaque nœud  $\dot{\alpha}$  peut évoluer comme proposé dans [2]. De la même manière que pour le modèle précédent, pour appliquer l'algorithme de résolution en dynamique explicite (5), la nouvelle loi d'évolution du modèle RCCM à effet retard proposée doit respecter le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés. Le modèle proposé est nommé modèle RCCM à effet retard à vitesse limite.

Dans la deuxième partie de cette section, les résultats obtenus avec ce nouveau modèle à effet retard sont comparés à ceux obtenus avec le modèle RCCM standard.

### 3.2.1 Présentation du modèle

Ce modèle est basé sur le modèle RCCM standard. Ainsi, de la même manière que pour le modèle proposé précédemment, il est composé de trois parties. Une première avec le contact unilatéral dont le comportement vérifie le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés, voir la section 2.2.2.1. La seconde partie est le contact frottant dont le comportement thermodynamique est vérifié à l'aide de la méthode du bi-potentiel, voir la section 2.2.2.2. Pour finir, la troisième partie, comme dans le cas précédent, concerne le comportement élastique endommageable de l'interface. Pour vérifier son appartenance au cadre thermodynamique, ce dernier doit vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem (2.94).

Basée sur les travaux de [2], la loi d'évolution proposée pour l'endommagement est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } f([\mathbf{u}]) = \alpha \text{ et } \alpha < u_r, & \text{alors } \dot{\alpha} = v_r \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{v_r} \langle \dot{f} \rangle_+\right) \right] \\ \text{Sinon } \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $v_r \in \mathbb{R}^+$  le nouveau paramètre matériau qui représente la vitesse maximale d'endommagement,  $f([\mathbf{u}])$  correspond à la norme du saut de déplacement  $[\mathbf{u}]$  entre les deux corps et  $\dot{f}$  sa dérivée. On remarque que si la vitesse maximale tend vers l'infini,  $v_r \rightarrow +\infty$ , alors le modèle RCCM standard est retrouvé grâce au développement limité de  $\exp$  au voisinage de 0.

En ce qui concerne l'évolution de la raideur d'interface en fonction de l'endommagement, elle est choisie comme dans les modèles précédents, avec l'évolution proposée en figure 2.4. Ainsi la dérivée de la raideur d'interface par rapport au temps est négative ou nulle. Pour vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem, il est donc de nouveau nécessaire que la vitesse d'endommagement soit positive ou nulle. Or, dans la loi d'évolution proposée pour ce modèle à effet retard (3.4), on a bien

$\dot{\alpha} \geq 0$ . Le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés est vérifié pour ce modèle. Le formalisme explicite présenté dans l'algorithme (5) peut être appliqué et on obtient :

$$\begin{cases} \text{Si } f(\mathbf{u}_{n+1}) \geq \alpha_{n+1} \text{ et } \alpha_{n+1} < u_r, & \text{alors } \dot{\alpha}_{n+3/2} = v_r \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{v_r} \langle \dot{f}_{n+3/2} \rangle_+\right) \right] \\ \text{Sinon } & \dot{\alpha}_{n+3/2} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

De nouveau le caractère modulaire de la résolution est démontré ici, avec le changement de modèle pour l'interface mais aucune modification de l'algorithme général de résolution à part l'implémentation de la loi d'évolution.

Pour observer le comportement de ce nouveau modèle, des cas tests sont réalisés et les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec le modèle RCCM standard. Une présentation du choix de la vitesse maximale d'endommagement  $v_r$  est réalisée.

### 3.2.2 Comparaison au modèle RCCM standard

Comme pour le premier modèle à effet retard avec rappel (3.1), où il était nécessaire de choisir un temps caractéristique, pour ce modèle à effet retard avec vitesse limite, il est nécessaire de déterminer une vitesse d'endommagement maximale  $v_r$  associée au comportement élastique endommageable de l'interface. Pour ce faire, ne possédant pas de banc expérimental, le paramètre  $v_r$  est choisi numériquement. De la même manière que pour le modèle précédent avec rappel, le cas test du cube RCCM (présenté en section 2.4.2.1) est appliqué avec un déplacement imposé sur les degrés de liberté  $z$  de la face supérieure du cube suivant l'évolution présentée en figure 2.13. Le cas test est réalisé avec plusieurs vitesses maximales comme le montre la table (3.2).

TABLE 3.2 – Test pour la vitesse d'endommagement  $v_r$

$v_{r1}$ (m.s <sup>-1</sup> )	$v_{r2}$ (m.s <sup>-1</sup> )	$v_{r3}$ (m.s <sup>-1</sup> )	$v_{r4}$ (m.s <sup>-1</sup> )	$v_{r5}$ (m.s <sup>-1</sup> )
0.3	0.5	0.7	1.5	5

Pour comparer les résultats entre les différentes vitesses maximales d'endommagement, de la même manière que pour le premier modèle à effet retard avec rappel, la moyenne de l'endommagement  $\alpha_m$  (3.3) des nœuds  $i$  de l'interface est calculée au cours du temps.

La figure 3.6 montre les résultats obtenus en fonction des différentes vitesses d'endommagement maximales choisies dans la table 3.2. La courbe violette "pas \_ retard" correspond aux résultats obtenus avec le modèle RCCM standard. Comme attendu, plus la vitesse maximale est grande, plus la surface s'endommage vite. Les vitesses d'endommagement étant alors grandes, l'endommagement  $\alpha$  dépasse plus facilement la limite de rupture  $u_r$  de l'interface. À l'inverse, plus la vitesse maximale d'endommagement diminue, plus l'évolution des vitesses d'endommagement  $\dot{\alpha}$  est régulière. D'autre part, la figure 3.6 montre l'apparition d'un effet

retard plus prononcé à mesure que la vitesse maximale d'endommagement diminue. Le choix d'une vitesse d'endommagement maximale petite, comme le montre la courbe bleue sur la figure 3.6 avec  $v_r = 0.3 \text{ m.s}^{-1}$ , augmente fortement l'effet retard et entraîne une évolution plus lente de l'endommagement. Pour endommager totalement l'interface il serait alors nécessaire d'augmenter les forces extérieures appliquées au cube RCCM ou la vitesse de chargement pour augmenter les déplacements et les déformations dans le solide déformable.

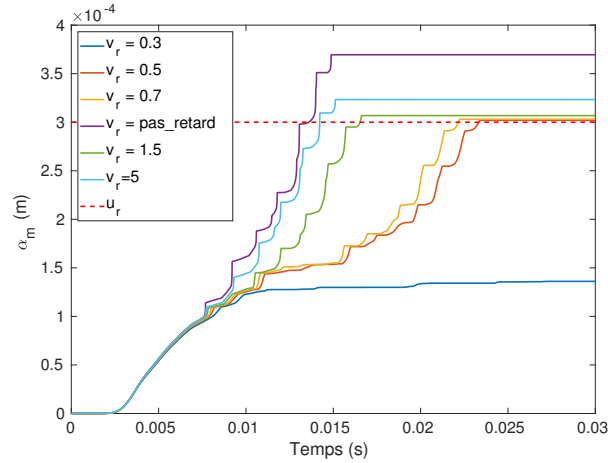


FIGURE 3.6 – Évolution de la moyenne de l'endommagement au cours du temps pour différentes vitesses maximales d'endommagement  $v_r$ .

Ainsi, pour la suite des cas tests, la vitesse maximale d'endommagement choisie est  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ . Cette vitesse permet notamment de borner l'évolution des endommagements  $\alpha$  des nœuds de l'interface proches de la limite de rupture  $u_r$  comme le montre la figure 3.6.

### 3.2.2.1 Le cube RCCM sollicité en traction

Dans ce premier cas test, les résultats obtenus avec le modèle à effet retard avec une vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  vont être comparés à ceux obtenus avec le modèle RCCM standard. Pour cela, c'est le cas présenté en section 2.4.2.1 sur lequel est appliqué un déplacement imposé comme présenté en figure 2.13 sur les degrés de liberté associés à la direction  $z$  de la face supérieure du cube qui est réalisé avec en interface ce modèle RCCM à effet retard. La raideur d'interface est choisie identique à l'évolution présentée en figure 2.4, et les paramètres du cas test sont ceux présentés dans la table 2.2.

La figure 3.7 montre les résultats d'évolution de l'endommagement au cours du temps obtenus avec chaque modèle d'interface. On remarque que l'endommagement total de l'interface arrive plus tard avec le modèle RCCM à effet retard comme attendu avec le contrôle de la vitesse maximale d'endommagement. D'autre part, avec ce nouveau modèle, on remarque que l'endommagement de l'interface ne dépasse que très peu la limite de rupture contrairement aux résultats observés avec le premier modèle à effet retard avec terme de rappel, voir figure 3.2. Ainsi

ce nouveau modèle permet de contrôler la précision. Il faut noter que pour un paramètre physique  $v_r$  fini choisi, le choix du pas de temps permet alors de ne pas trop dépasser  $u_r$ . C'est alors un critère de précision pour le choix du pas de temps.

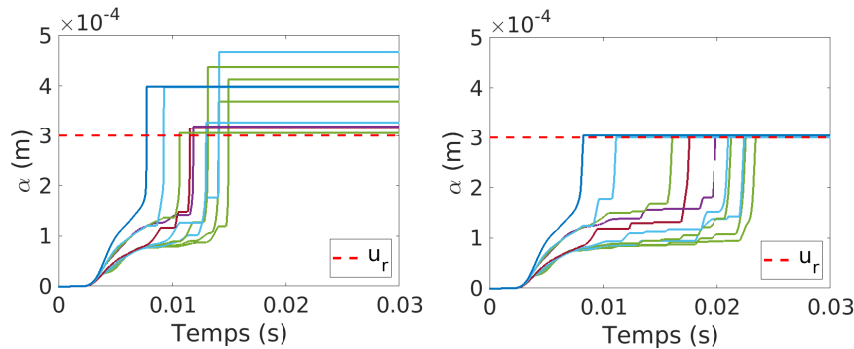


FIGURE 3.7 – Évolution de l'endommagement de l'interface en fonction du temps pour le modèle RCCM standard (à gauche) et le modèle RCCM à effet retard à vitesse limite (à droite).

Quant à la figure 3.8, elle permet de mettre en évidence l'effet retard obtenu avec ce nouveau modèle en montrant l'évolution de l'état de l'interface au cours du temps. On remarque que l'instant du début d'endommagement reste le même, ce qui s'explique par une loi de comportement identique pour le solide déformable et des conditions aux limites identiques entre les deux simulations. Effectivement, le transport des ondes élastiques dans le solide déformable reste le même avant que l'interface soit sollicitée. Ensuite de la même manière qu'avec le modèle RCCM à effet retard avec rappel, voir figure 3.3, on remarque que l'endommagement total de l'interface arrive de manière plus tardive. Les évolutions sont toujours en créneaux, ce qui s'explique notamment par l'utilisation d'un maillage grossier et le transport des ondes dans le solide déformable. Plus la vitesse  $v_r$  choisie sera petite, plus l'interface mettra du temps à s'endommager.

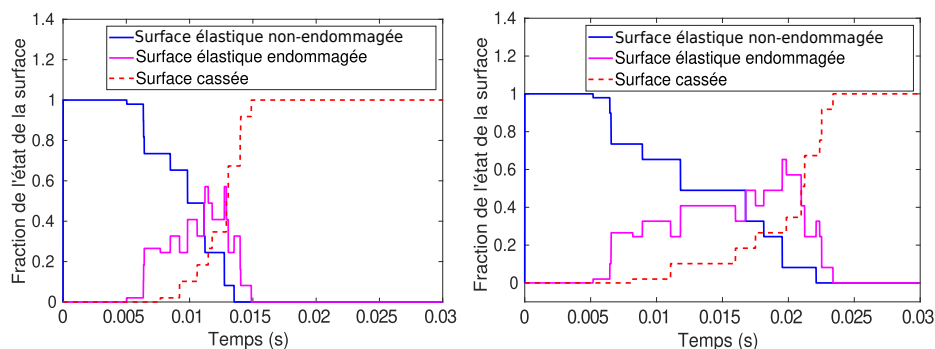


FIGURE 3.8 – Évolution de l'état de l'interface en fonction du temps pour le modèle RCCM standard (à gauche) et le modèle RCCM à effet retard avec vitesse limite (à droite).

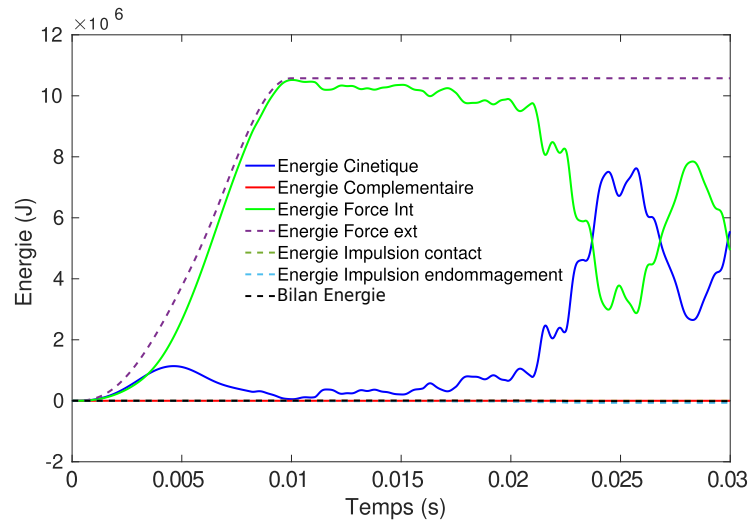


FIGURE 3.9 – Évolution des énergies en fonction du temps pour le cas test du cube RCCM en traction et cisaillement.

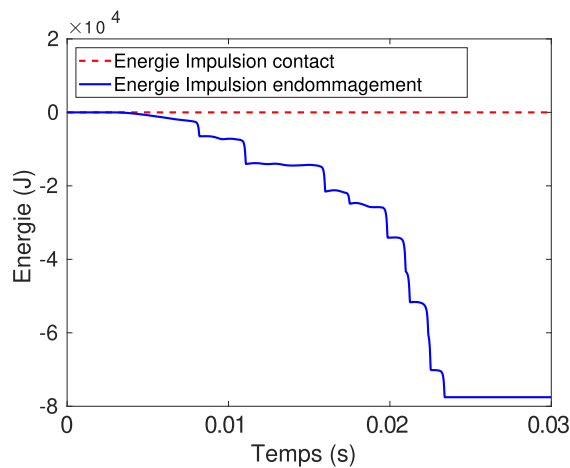


FIGURE 3.10 – Évolution des énergies associées aux impulsions en fonction du temps pour le cas test du cube RCCM en traction et cisaillement.

Pour finir la comparaison des modèles d'interface sur le cas test de traction, un intérêt est porté à l'évolution des différentes énergies au cours du temps avec les figures 3.9 et 3.10. Comme avec l'utilisation du modèle à effet retard avec rappel pour l'interface, l'énergie cinétique oscille plus tardivement qu'avec le modèle RCCM standard, voir figure 2.17. Cela s'explique par l'effet retard et c'est en adéquation avec l'évolution de l'énergie associée à l'impulsion élastique endommageable de l'interface. Effectivement, avec une interface totalement endommagée, les nœuds de l'interface n'étant plus retenus par l'interface, le solide déformable n'est alors plus contraint par une force relative à l'interface. Alors seules les forces extérieures influent sur le solide déformable. L'énergie associée aux forces intérieures augmente, et donc l'énergie cinétique également. Le bilan d'énergie étant respecté, le bon comportement énergétique du schéma est vérifié.



Ainsi le caractère modulaire de la résolution, à condition de respecter le cadre thermodynamique et explicite, est mis en avant. Effectivement, cette résolution proposée avec l'algorithme (5) permet de changer facilement de modèle d'interface.

### 3.2.2.2 Le cube RCCM sollicité en traction et cisaillement

Pour compléter l'étude du modèle RCCM à effet retard avec vitesse limite, le cas test avec traction et cisaillement présenté dans la section 2.4.2.2 est réalisé avec cette nouvelle loi d'interface. La vitesse maximale d'endommagement  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  est de nouveau choisie pour ce cas test. Cette vitesse est propre au comportement de l'interface, elle ne dépend pas des dimensions ou du comportement du solide déformable.

Pour rappel, dans ce cas test la limite de rupture de l'interface est fixée à  $u_r = 4.10^{-5} \text{ m}$ . La figure 3.11 montre la comparaison entre l'évolution des endommagements  $\alpha$  de l'interface sans modèle à effet retard et avec. L'ajout de ce dernier met en évidence son intérêt. Effectivement, on remarque un endommagement plus tardif dans le temps. D'autre part, un gain en précision est observé, avec des endommagements  $\alpha$  qui évoluent et dont le maximum correspond bien à la limite de rupture  $u_r$ .

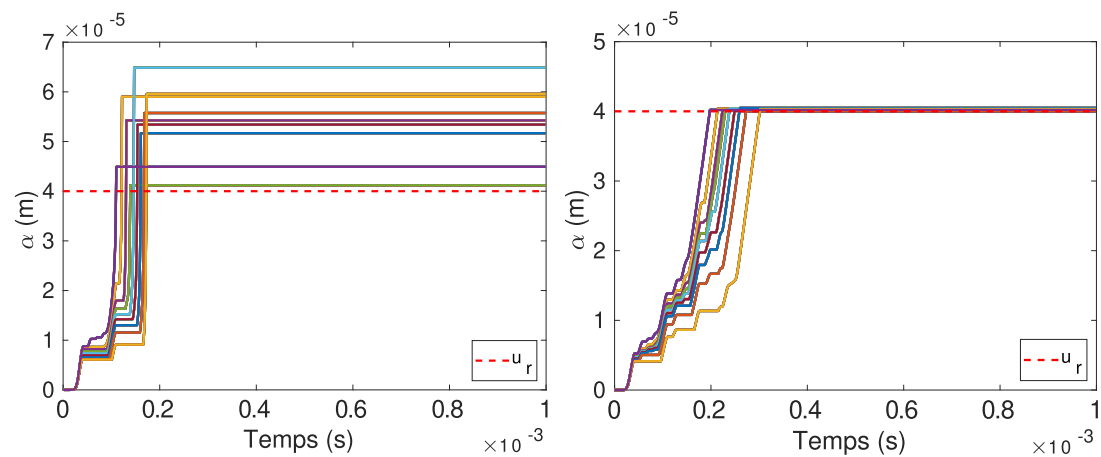


FIGURE 3.11 – Évolution de l'endommagement de l'interface en fonction du temps avec le modèle RCCM standard (à gauche) et le modèle RCCM à effet retard à vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  (à droite).

La mise en évidence de l'effet retard sur l'endommagement de l'interface est d'autant plus illustré avec la figure 3.12 qui montre les évolutions des différents états de l'interface au cours du temps entre le modèle RCCM standard et le modèle RCCM à effet retard avec vitesse limite. Avec le modèle RCCM standard, l'interface est totalement cassée au bout de  $t = 2.10^{-4} \text{ s}$  contre environ  $t = 4.10^{-4} \text{ s}$  avec l'effet retard.

Pour conclure avec ce cas test en traction et cisaillement, une dernière mise en donnée est réalisée. L'objectif ici est de mettre en évidence les différences suivant le choix de la vitesse maximale d'endommagement. Ainsi un résultat est calculé avec  $v_r = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$  et la figure 3.13 compare les résultats obtenus avec

le cas à  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  en terme d'évolution d'endommagement  $\alpha$  des nœuds d'interface au cours du temps.

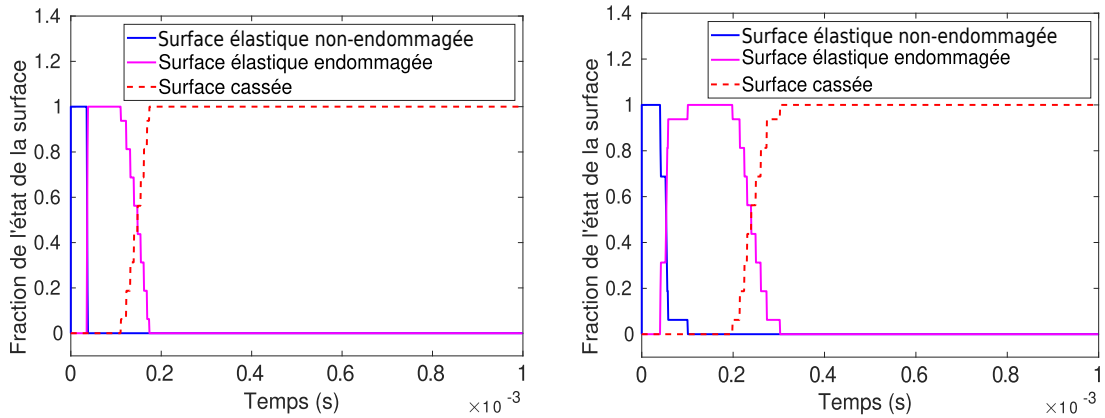


FIGURE 3.12 – Évolution de l'état de l'interface en fonction du temps avec le modèle RCCM standard (à gauche) et le modèle RCCM à effet retard à vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  (à droite).

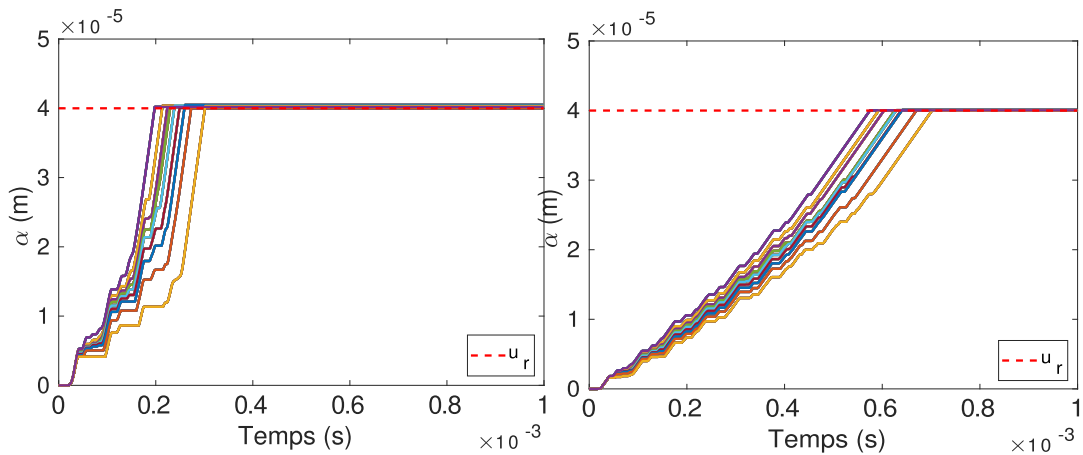


FIGURE 3.13 – Évolution de l'endommagement de l'interface en fonction du temps pour le modèle RCCM à effet retard à vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  (à gauche) et  $v_r = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$  (à droite).

Sur la figure 3.13, on remarque que les courbes d'endommagement sont moins inclinées lorsque la vitesse maximale d'endommagement diminue. Cela s'explique car la tangente à ces courbes correspond à la vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}$ . Ainsi, les courbes étant parallèles pour le cas avec  $v_r = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ , on peut en conclure que chaque nœud évolue à la vitesse maximale d'endommagement. D'autre part, on remarque que plus l'effet retard est important, plus les courbes d'évolution de l'endommagement des nœuds de l'interface est régulière, ce qui provoque un arrachement plus régulier.

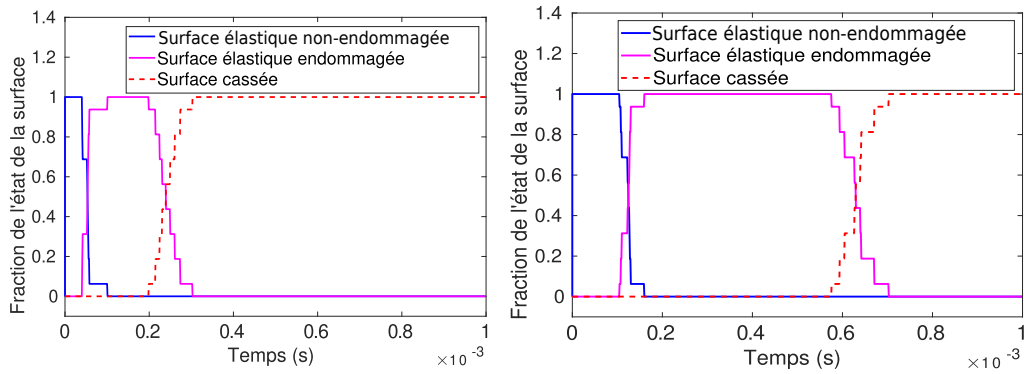


FIGURE 3.14 – Évolution de l'état de l'interface en fonction du temps pour le modèle RCCM à effet retard à vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  (à gauche) et  $v_r = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$  (à droite).

La figure 3.14 montre les états des interfaces obtenus avec chaque vitesse maximale d'endommagement. Logiquement, plus la vitesse maximale d'endommagement est faible, plus l'interface est endommagée tardivement.

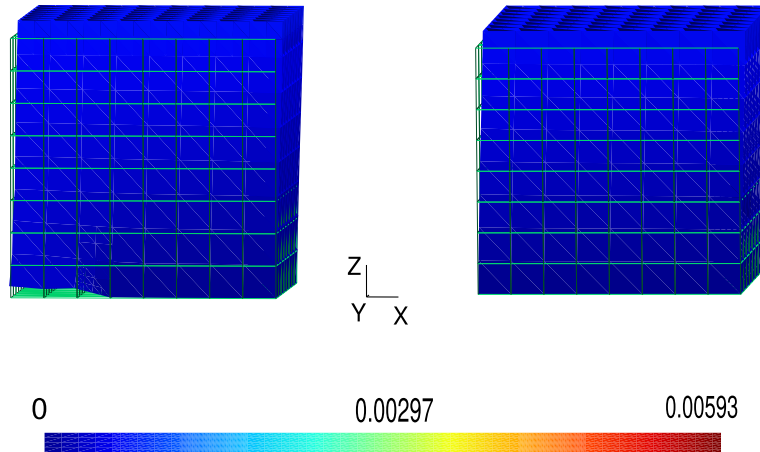


FIGURE 3.15 – Norme du déplacement (m) observée à  $t = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  pour le modèle RCCM à effet retard à vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  (à gauche) et  $v_r = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$  (à droite).

La figure 3.15 conclue ce cas test et montre la norme du déplacement sur le cube avec le modèle RCCM à effet avec une vitesse limite de  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  pour l'interface et celui avec une vitesse limite de  $v_r = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ . Au même pas de temps, on remarque un arrachement d'interface décalé, voire qui n'a pas débuté pour le modèle RCCM avec effet retard avec la plus petite vitesse limite.

### 3.2.2.3 Le test du Peeling

Pour finir, le cas test du peeling, c'est-à-dire de l'arrachement d'un parallélépipède rectangle, présenté dans la section 2.4.3 est mis en place. La mise en donnée est la même, seul le modèle RCCM à effet retard avec une vitesse limite  $v_r =$

$0.5 \text{ m.s}^{-1}$  est choisi à la place du modèle RCCM standard pour le comportement de l'interface. L'objectif est ici de regarder l'impact de ce nouveau modèle sur la partie unilatérale du contact du modèle, le coefficient de frottement  $\mu_{\text{inf}}$  étant choisi nul dans ce cas test.

La figure 3.16 montre les résultats obtenus avec le modèle RCCM standard et celui à effet retard avec vitesse limite. De nouveau les mêmes phénomènes sont observés. Effectivement, les endommagements  $\alpha$  des nœuds de contact sont quasiment bornés à la limite de rupture de l'interface,  $u_r$ . D'autre part, on observe que les pentes des courbes d'endommagement sont plus régulières et moins inclinées, ce qui s'explique par le choix de cette vitesse limite pour la vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}$  de chaque nœud.

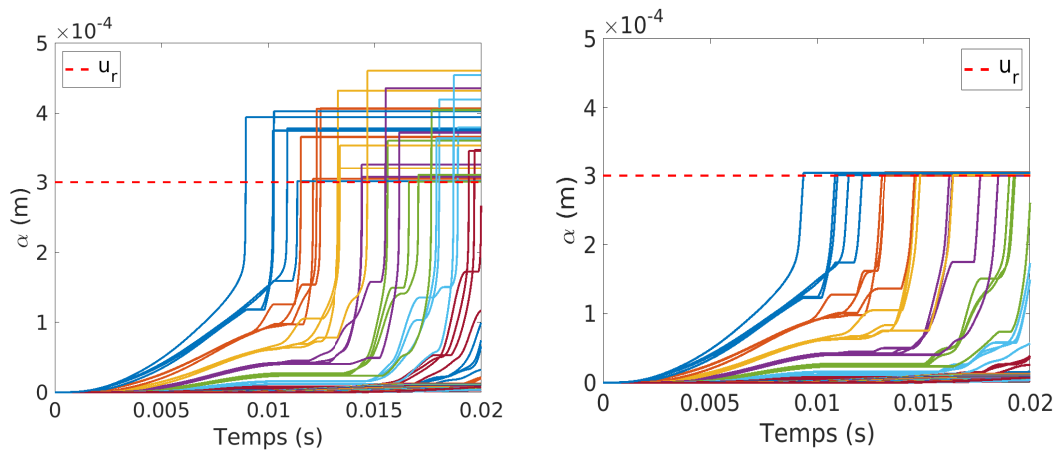


FIGURE 3.16 – Évolution de l'endommagement de l'interface en fonction du temps pour le modèle RCCM standard (à gauche) et le modèle RCCM à effet retard à vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  (à droite).

La figure 3.17 montre quant à elle l'évolution des états possibles de l'interface au cours du temps. On y retrouve les résultats obtenus avec le modèle RCCM standard et ceux obtenus avec le modèle RCCM à effet retard avec vitesse limite. Comme dans les cas présentés précédemment avec le cube RCCM, on remarque que l'interface est moins endommagée à la fin de l'expérience, ce qui s'explique seulement par un effet retard. Ces résultats étaient donc attendus.

Pour finir, dans le chapitre précédent, voir la partie 2.4.3, le cas test du peeling s'est montré intéressant car l'application de la pression tangentielle sur une face du côté du rectangle, voir la figure 2.26, entraîne une rotation globale du solide déformable, ainsi des impulsions de contact sont observées sur l'interface. L'objectif ici est d'observer l'impact du changement de modèle pour l'interface sur l'apparition des impulsions de contact.

La figure 3.18 montre l'évolution de l'énergie due aux impulsions de contact au cours du temps pour différentes vitesses maximales d'endommagement. On remarque que le choix de la vitesse maximale d'endommagement  $v_r$  ne semble pas avoir d'influence sur les rotations observées dans le solide déformable avec des évolutions sensiblement similaires pour les impulsions de contact.

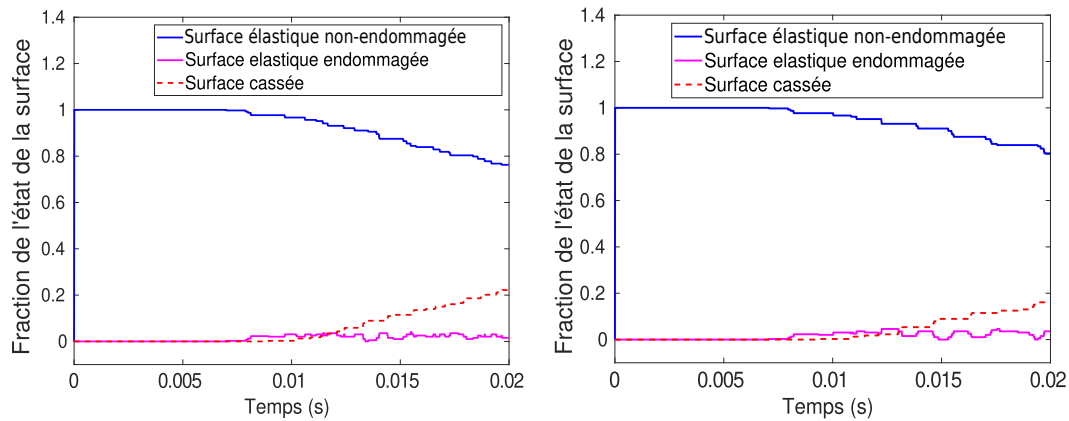


FIGURE 3.17 – Évolution de l'état de l'interface en fonction du temps pour le modèle RCCM standard (à gauche) et le modèle RCCM à effet retard à vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$  (à droite).

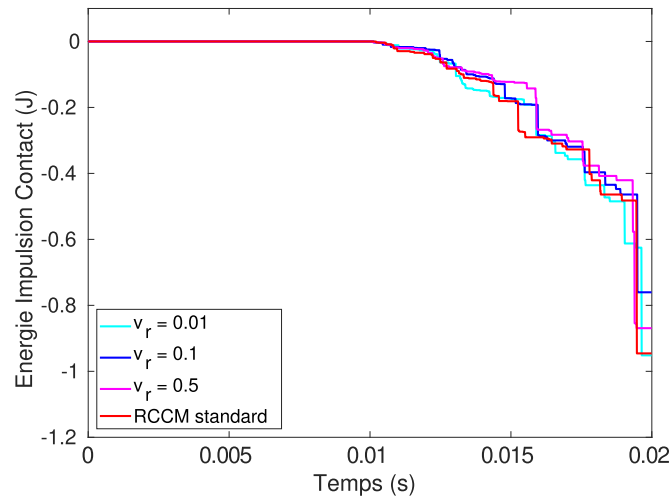


FIGURE 3.18 – Évolution de l'énergie associée à l'impulsion de contact pour différentes vitesses maximales d'endommagement pour le cas test du peeling.

Pour la suite de ce chapitre, c'est bien ce modèle à effet retard avec vitesse limite qui est choisi en modèle d'interface. Effectivement son comportement avec cette vitesse maximale d'endommagement semble plus physique. D'autre part, il permet de gagner en précision pour les résultats en terme d'endommagement, avec un endommagement des nœuds qui ne dépasse que faiblement la limite de rupture  $u_r$  de l'interface. Une étude expérimentale de ce paramètre serait intéressante, notamment dans l'objectif de comparer ces résultats à des expériences réelles.

Ainsi, à travers ces différents modèles à effet retard, le caractère modulaire de la résolution a été présenté pour les lois de comportement de l'interface. Maintenant, dans la partie suivante, l'objectif est de montrer ce caractère avec un changement de comportement pour le solide déformable. Des lois de comportement comprenant de la visco-élasticité ou de l'endommagement seront à l'étude.

### 3.3 Applications à d'autres lois de comportement pour le solide déformable

Jusqu'à présent les avantages de la résolution proposée basée sur le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés et la résolution en dynamique explicite avec le modèle CD-Lagrange se sont concentrés sur les lois de comportement de l'interface, notamment avec le modèle RCCM standard, et les différents modèles à effet retard. Dans la dernière partie de ce chapitre, l'accent est de nouveau porté sur le caractère modulaire de la résolution. Effectivement dans la partie précédente, il a été montré la facilité de changement et d'implémentation de la loi de comportement de l'interface. De la même manière ici, l'objectif est de présenter la facilité d'implémentation et d'intégration dans la résolution d'une nouvelle loi de comportement pour le solide déformable.

Dans un premier temps un focus est réalisé sur les lois de comportement visco-élastique [52]. Effectivement, dans l'ensemble des cas précédents, le choix d'un matériau élastique linéaire isotrope entraîne un transport des ondes élastiques important, provoquant ainsi des oscillations en déplacement sur les résultats. L'idée d'utiliser un matériau visqueux est d'amortir le transport de ces ondes élastiques. L'objectif ici est également de présenter comment conserver la propriété explicite dans la résolution avec une loi matériau qui dépend de la vitesse. Plus précisément, les forces intérieures dépendront alors de la vitesse.

Dans un dernier temps, un modèle avec endommagement en volume pour le solide déformable sera présenté et intégré au cadre thermodynamique. L'objectif ici est d'ajouter de la non régularité également dans le comportement du solide déformable. Il est important de noter que les lois matériaux présentées dans ce chapitre sont écrites sous l'hypothèse de petites perturbations.

#### 3.3.1 Un modèle visco-élastique : le modèle de Kelvin-Voigt

Dans la littérature il existe une multitude de lois de comportement matériau visco-élastiques [20], c'est-à-dire dont les forces intérieures dépendent de la vitesse des déformations observées dans le solide déformable. Dans ces travaux, un intérêt est porté au modèle de Kelvin-Voigt, correspondant à un amortissement du modèle élastique linéaire isotrope [52] utilisé jusqu'à présent pour les simulations.

##### 3.3.1.1 Présentation du modèle

Dans un premier temps, l'objectif est de présenter le modèle de Kelvin-Voigt et de vérifier son intégration au cadre des matériaux standards généralisés. Contrairement au modèle de Maxwell [52], celui de Kelvin-Voigt met en parallèle le comportement visqueux au comportement élastique du solide déformable. Le modèle rhéologique présenté en figure 3.19 illustre ce modèle. Soit  $E$  le module d'élasticité du solide déformable et  $\eta$  le coefficient de viscosité associé.

Ainsi, ce modèle peut être présenté sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^{an} \quad (3.6)$$

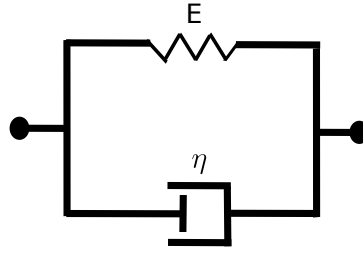


FIGURE 3.19 – Rhéologie du modèle de Kelvin-Voigt.

Soit  $\sigma^e$  la partie élastique de la contrainte correspondant à celle du modèle élastique linéaire et  $\sigma^{an}$  la partie associée à la viscosité dans le modèle, soit à l'amortissement.

Pour définir les lois d'état associées à chacune de ces contraintes, il est nécessaire d'introduire les invariants du tenseur des déformations  $\epsilon$  (1.8) et ceux du tenseur de la vitesse des déformations  $\dot{\epsilon}$  (1.37). Soit  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ , et  $\epsilon_3$  les trois invariants du tenseur des déformations tels que :

$$\epsilon_1 = \text{Tr}(\epsilon) \quad (3.7)$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2} (\text{Tr}(\epsilon)^2 - \text{Tr}(\epsilon^2)) \quad (3.8)$$

$$\epsilon_3 = \det(\epsilon) \quad (3.9)$$

De la même manière, soit  $\dot{\epsilon}_1$ ,  $\dot{\epsilon}_2$ , et  $\dot{\epsilon}_3$  les trois invariants du tenseur des vitesses de déformations tels que :

$$\dot{\epsilon}_1 = \text{Tr}(\dot{\epsilon}) \quad (3.10)$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{1}{2} (\text{Tr}(\dot{\epsilon})^2 - \text{Tr}(\dot{\epsilon}^2)) \quad (3.11)$$

$$\dot{\epsilon}_3 = \det(\dot{\epsilon}) \quad (3.12)$$

avec  $\text{Tr}(\cdot)$  l'opérateur trace et  $\det(\cdot)$  l'opérateur déterminant.

La contrainte associée au comportement élastique  $\sigma^e$  correspond à la loi d'état du comportement élastique linéaire isotrope [52], ce qui revient donc à l'exprimer en fonction du potentiel d'énergie libre  $\Psi$  introduit comme :

$$\Psi = \left(\frac{1}{2\rho}\right)(\lambda\epsilon_1^2 + 2\mu\epsilon : \epsilon) \quad (3.13)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du solide déformable,  $\epsilon_1$  le premier invariant du tenseur des déformations présenté en équation (3.7) et  $\epsilon$  le tenseur des déformations (1.8). Soit  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé définis respectivement par :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.14)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.15)$$

avec  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $E$  le module d'Young du solide déformable. Il est important de remarquer que  $\nu$  ne peut pas avoir une valeur de 0.5, cela reviendrait au cas d'un matériau incompressible. Cette problématique n'est pas traitée dans ces travaux. Ainsi le coefficient de viscosité  $\eta$  qui caractérise la viscosité dans le modèle de Kelvin Voigt présenté en figure 3.19 s'écrit [52] :

$$\eta = \lambda(1 - 2\nu)\theta_\lambda + 2\mu\theta_\mu \quad (3.16)$$

avec  $\theta_\lambda \geq 0$  et  $\theta_\mu \geq 0$  deux coefficients de relaxation caractérisant la viscosité du solide déformable.

En ce qui concerne la partie visqueuse de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^{an}$ , elle dépend de la vitesse de déformation  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ . Pour l'introduire dans le cadre des matériaux standards généralisés, il est nécessaire d'exprimer cette quantité en fonction d'un potentiel de dissipation  $\varphi$ . Dans le cadre du modèle de Kelvin-Voigt [52], ce potentiel s'écrit :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \frac{1}{2}(\lambda\theta_\lambda\dot{\epsilon}_1^2 + 2\mu\theta_\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (3.17)$$

avec  $\dot{\epsilon}_1$  le premier invariant du tenseur des vitesses de déformation présenté en équation (3.10) et  $\dot{\epsilon}_2$  le second introduit avec l'équation (3.11). Ce potentiel (3.17) est bien convexe. C'est une condition suffisante pour respecter l'inégalité de Clausius-Duhem ; le modèle vérifie donc le cadre thermodynamique.

Les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^e$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{an}$  s'écrivent respectivement en fonction d'un potentiel d'énergie libre et d'un potentiel de dissipation tous les deux convexe. Le formalisme des lois d'état et d'évolution permet alors d'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \rho(\partial\Psi/\partial\boldsymbol{\epsilon}) = \lambda Tr(\boldsymbol{\epsilon})\mathbb{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{an} = \partial\varphi/\partial\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \lambda\theta_\lambda Tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\mathbb{I} + 2\mu\theta_\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.19)$$

avec  $\mathbb{I}$  le tenseur identité de dimension trois. On remarque que si  $\theta_\mu = \theta_\lambda = 0$ , le modèle de comportement élastique linéaire est retrouvé [52].

Ainsi le modèle de Kelvin-Voigt s'écrit de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(Tr(\boldsymbol{\epsilon}) + \theta_\lambda Tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}))\mathbb{I} + 2\mu(\boldsymbol{\epsilon} + \theta_\mu\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (3.20)$$

Ce modèle vérifie donc le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés. Dans la partie suivante, le cadre de résolution explicite proposé est appliqué à ce modèle avec la présentation de l'ajout de la viscosité.

### 3.3.1.2 Résolution d'un modèle visco-élastique

Dans cette sous-section, le comportement du modèle de Kelvin Voigt est étudié. Dans un premier temps il est montré comment introduire un tel modèle dans le cadre explicite. Dans un second temps les résultats sont comparés à ceux obtenus avec le modèle élastique linéaire isotrope. Enfin, l'impact de la viscosité sur le comportement de l'interface est étudié.



## Application du cadre de résolution explicite

Le modèle de Kelvin Voigt est inscrit dans le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés présenté dans le chapitre 2. Ainsi, l'objectif est de mettre en place l'algorithme (5). Dans cet algorithme, en changeant de modèle matériau, c'est le calcul des forces intérieures  $\mathbf{F}_{int,n+1}$  qui change. Appliquer le cadre de résolution revient à calculer les variables d'état au piquet temporel  $t_{n+1}$  et les variables d'évolution au piquet temporel  $t_{n+3/2}$ .

Ainsi, le tenseur des déformations, introduit dans le chapitre 1 avec l'équation (1.8) dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations, discrétisé est :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{n+1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{n+1}^T) \quad (3.21)$$

avec  $\mathbf{u}$  le déplacement d'un point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega_t$ .

De la même manière, le tenseur des vitesses de déformations  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ , introduit avec l'équation (1.37) dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations, étant une variable d'évolution, est discrétisé de la façon suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1/2} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_{n+1/2} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_{n+1/2}^T) \quad (3.22)$$

avec  $\mathbf{v}$  le vecteur vitesse associé à un point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega_t$ .

Ainsi, dans le cadre du modèle de Kelvin-Voigt, la contrainte (3.20) discrétisée décrivant le comportement du solide déformable est la suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \lambda(\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}) + \theta_\lambda \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1/2}))\mathbb{I} + 2\mu(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} + \theta_\mu \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1/2}) \quad (3.23)$$

Il est important de remarquer que le tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  est choisi au piquet de temps  $t_{n+1/2}$  et non  $t_{n+3/2}$ ; c'est l'hypothèse proposée par Belytschko [8]. Effectivement, cette manipulation permet de conserver la résolution explicite du modèle dans l'algorithme (5). Un inconvénient de cette technique pour conserver le caractère explicite du modèle est son impact sur le pas de temps critique. Effectivement ce dernier se verra dégradé [8]. Plus l'amortissement est prononcé, c'est à dire plus  $\theta_\lambda$  et  $\theta_\mu$  sont grands, plus le pas de temps critique sera petit. Ainsi l'algorithme (5) peut être appliqué et il reste explicite.

## Application au cube RCCM sollicité en traction

Dans cette deuxième sous partie, l'objectif est de comparer les résultats obtenus avec le modèle de Kelvin-Voigt sous l'hypothèse de petites perturbations en réalisant le cas test en traction sur le cube RCCM présenté dans la section 2.4.2.1.

Le même maillage et les mêmes paramètres sont choisis. Seul le chargement est modifié de manière à mettre plus en évidence les effets de la viscosité sur l'interface et le solide déformable avec un chargement non régulier favorisant l'apparition des ondes élastiques. La figure 3.20 présente l'évolution de la vitesse imposée choisie pour les degrés de liberté  $z$  de la face supérieure du cube.

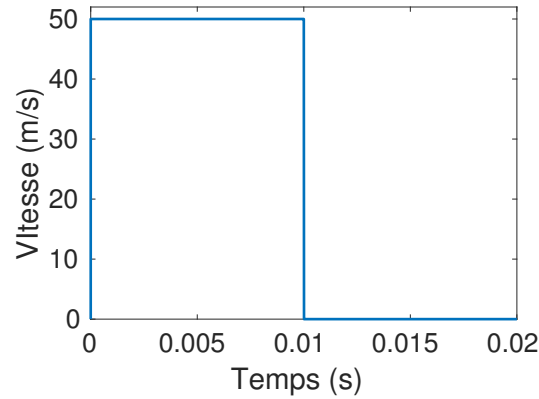


FIGURE 3.20 – Conditions aux limites sur la vitesse imposée pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction pour un matériau visco-élastique.

Le pas de temps choisi pour la réalisation de cette simulation reste  $h = 1.10^{-5}$  s. Les coefficients de relaxation sont quand à eux choisis égaux et  $\theta_\mu = \theta_\lambda = 1.10^{-3}$  s. Le modèle d'interface choisi est le modèle RCCM à effet retard avec vitesse limite  $v_r = 0.4 \text{ m.s}^{-1}$  présenté à la section 3.2.

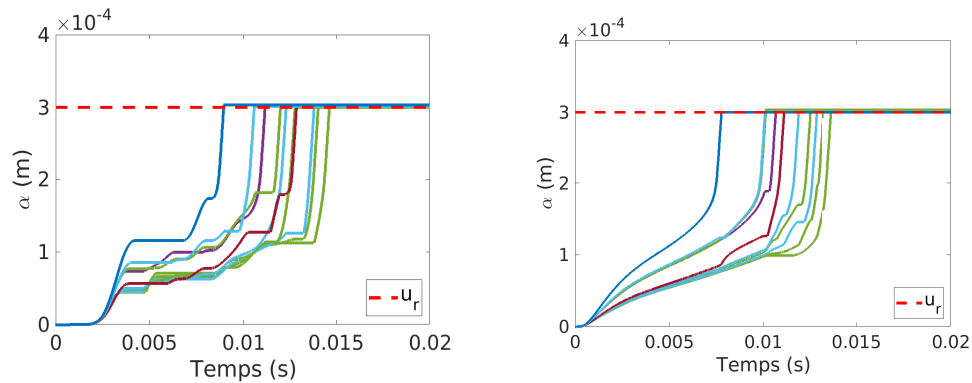


FIGURE 3.21 – Évolution de l'endommagement de l'interface en fonction du temps pour le modèle visco-élastique (à droite) et le modèle élastique linéaire (à gauche).

La figure 3.21 compare les résultats obtenus pour un solide déformable possédant un comportement visco-élastique avec le modèle de Kelvin-Voigt ou possédant un comportement élastique linéaire. L'évolution de l'endommagement est sensiblement différente entre les deux modèles. Effectivement, avec le modèle de Kelvin-Voigt, l'interface réagit plus rapidement mais de manière plus régulière. D'autre part, l'interface semble s'endommager légèrement plus rapidement comme le montre la figure 3.22.

Ce comportement de l'interface s'explique par la formulation de la contrainte du modèle de Kelvin-Voigt présentée avec l'équation (3.20). Ainsi, avec ce modèle, à un même temps  $t_n$ , les contraintes appliquées sur l'interface sont plus grandes avec l'effet de la viscosité et donc l'interface s'endommage plus vite car les conditions aux limites sont imposées en vitesse. Avec un modèle élastique linéaire,

seul  $\sigma = \sigma_e$  serait appliqué sur l'interface. Or avec le modèle de Kelvin-Voigt,  $\sigma_{an}$  est ajouté, avec  $\sigma_e$  et  $\sigma_{an}$  définis respectivement par les équations (3.18) et (3.19).

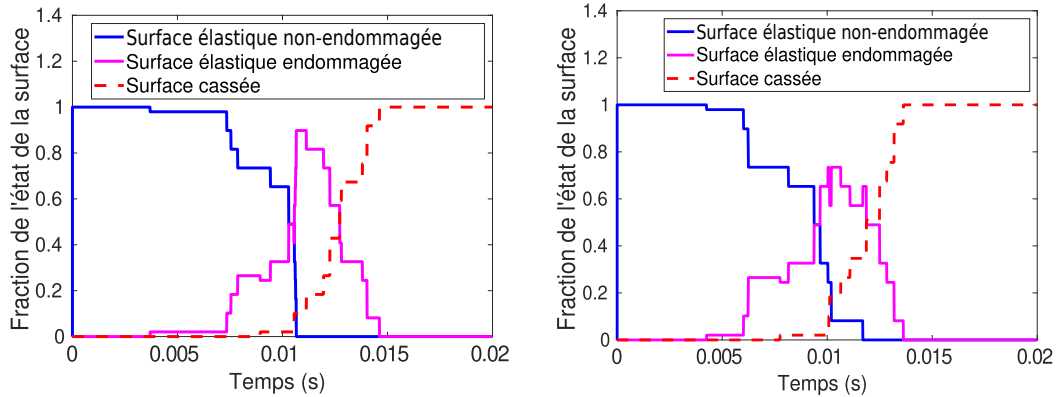


FIGURE 3.22 – Évolution de l'état de l'interface en fonction du temps pour le modèle visco-élastique (à droite) et le modèle élastique linéaire (à gauche).

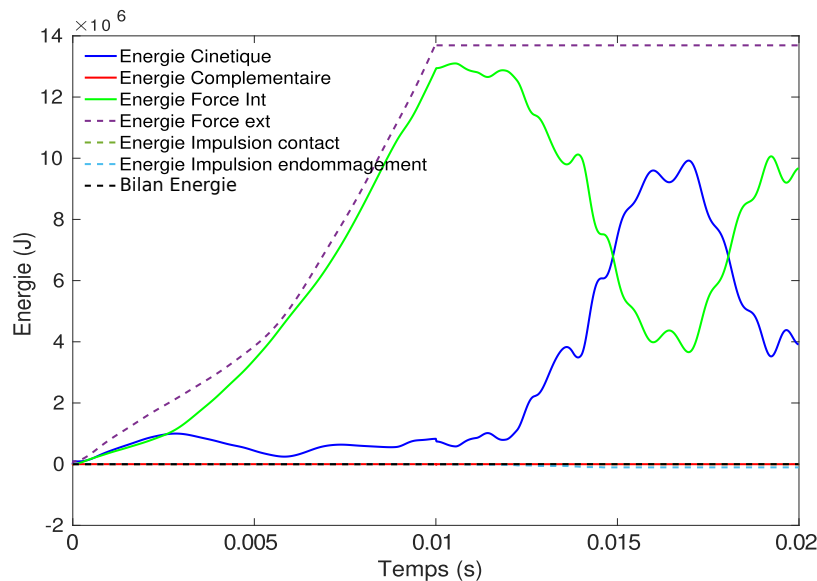


FIGURE 3.23 – Évolution des énergies au cours du temps pour le modèle élastique linéaire pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction.

Pour finir cette comparaison entre les deux comportements du solide déformable, la comparaison des évolutions des différentes énergies met en avant l'amortissement dans le solide déformable comme le montrent les figures 3.23 et 3.24.

On remarque sur la figure 3.24 que l'énergie cinétique et celle des forces intérieures sont bien plus amorties en utilisant le modèle de Kelvin-Voigt comme comportement pour le solide déformable, notamment avec des courbes qui oscillent moins comparées à celles obtenues avec le modèle élastique comme le montre la figure 3.23.

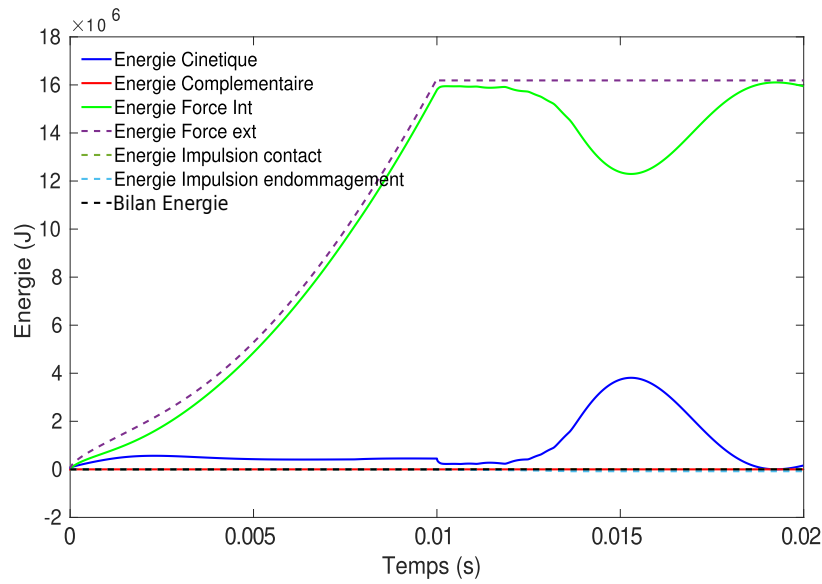


FIGURE 3.24 – Évolution des énergies au cours du temps pour le modèle visco-élastique avec  $\theta_\mu = \theta_\lambda = 1.10^{-3}$  s pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction.

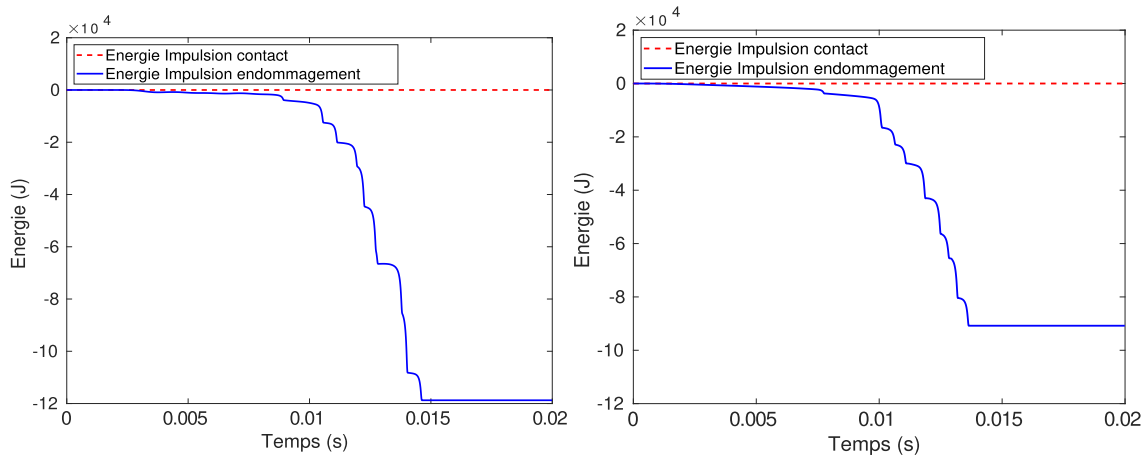


FIGURE 3.25 – Évolution des énergies associées aux impulsions au cours du temps pour le modèle visco-élastique avec  $\theta_\mu = \theta_\lambda = 1.10^{-3}$  (à droite) et le modèle élastique linéaire (à gauche) pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction.

Pour conclure, la figure 3.25 montre l'évolution des énergies au cours du temps des énergies associées à l'impulsion élastique endommageable de l'interface et de contact. On remarque sur le graphique de droite de la figure 3.25 que pour arracher l'interface, moins d'énergie est nécessaire. D'autre part cette figure confirme un arrachement plus tôt obtenu avec le comportement visco-élastique du solide déformable.

## Etude de l'impact de la viscosité sur l'interface élastique endommageable

Dans cette dernière sous-section sur le modèle de Kelvin-Voigt en comportement pour le solide déformable, l'objectif est d'observer l'impact de la valeur des coefficients de relaxation sur l'interface. Pour ce faire, les résultats obtenus avec  $\theta_\lambda = \theta_\mu = 1.10^{-3}$  s sont comparés avec des résultats obtenus avec  $\theta_\lambda = \theta_\mu = 1.10^{-4}$  s. Le pas de temps choisi pour les calculs reste le même avec  $h = 1.10^{-5}$  s.

La figure 3.26 montre les résultats obtenus pour les deux choix des coefficients de relaxation. Logiquement, plus les coefficients sont grands, plus l'endommagement est important rapidement sur l'interface. La régularité sur les courbes est maintenue.

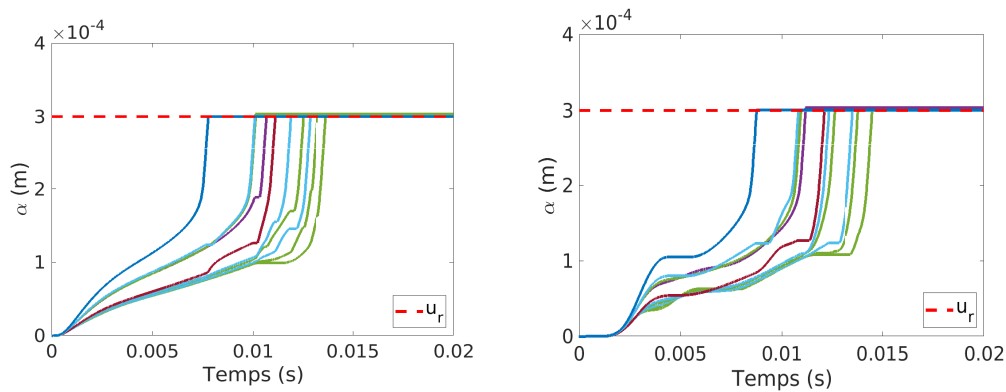


FIGURE 3.26 – Évolution de l'endommagement de l'interface au cours du temps pour le modèle visco-élastique avec  $\theta_\lambda = \theta_\mu = 1.10^{-3}$  (à gauche) et  $\theta_\lambda = \theta_\mu = 1.10^{-4}$  (à droite).

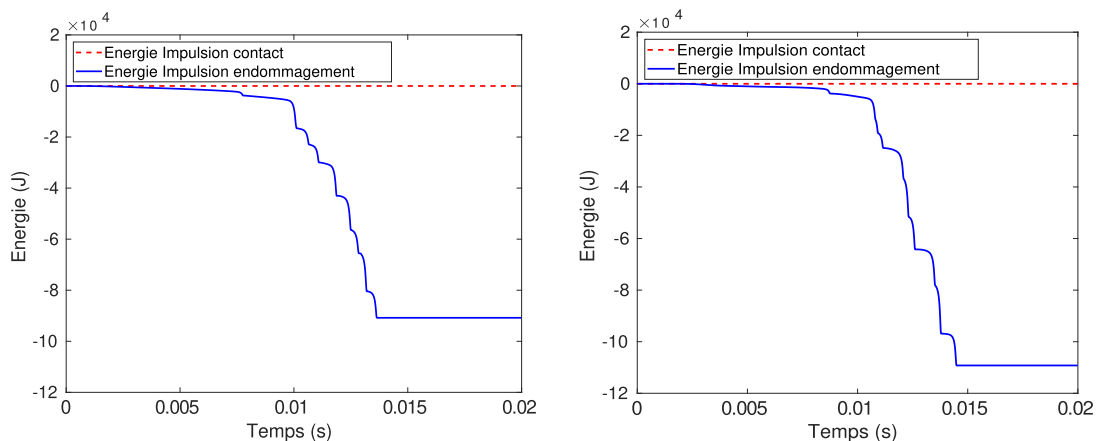


FIGURE 3.27 – Évolution des énergies au cours du temps pour le modèle visco-élastique avec  $\theta_\lambda = \theta_\mu = 1.10^{-3}$  s (à gauche) et  $\theta_\lambda = \theta_\mu = 1.10^{-4}$  s (à droite).

La figure 3.27 montre l'évolution des énergies au cours du temps des énergies associées aux impulsions élastique endommageable et de contact. On remarque

de nouveau logiquement que plus les coefficients de relaxation sont grands, plus l'énergie nécessaire pour arracher l'interface est petite. Effectivement, des coefficients de relaxation plus grands entraînent une contrainte plus grande (3.20) sur l'interface, et donc plus de facilité à s'arracher et donc moins d'énergie nécessaire pour l'arrachement. Effectivement, la figure 3.27 montre qu'avec des coefficients plus grands, l'interface s'endommage plus rapidement. D'autre part, la viscosité amortissant les ondes élastiques, l'interface est alors moins sollicitée par le solide déformable, d'où une énergie plus faible.

Ainsi, cette section a montré comment implémenter un modèle visco-élastique dans le cadre de résolution proposé. Effectivement, elle montre la possibilité de résoudre en explicite des problèmes dont les forces intérieures dépendent de la vitesse. D'autre part, après avoir montré le caractère modulaire de la résolution en changeant facilement de modèle d'interface, ici, il est montré qu'il est également trivial de changer de loi de comportement matériau pour le solide déformable.

Pour conclure ce chapitre, une dernière loi de comportement en volume est étudiée, elle intègre également de l'endommagement dans le comportement du solide déformable.

### 3.3.2 Modèle d'endommagement

Dans un premier temps, un problème rencontré avec l'endommagement dans le volume est de savoir comment ce dernier peut être quantifié. Effectivement, un matériau endommagé pourrait par exemple présenter des initiations de fissures. Cependant, ce cas n'est pas traité ici. Dans cette partie, un modèle simple d'endommagement est étudié, l'objectif étant de montrer le caractère modulaire de la résolution proposée. Ainsi, pour quantifier l'endommagement, il est nécessaire d'introduire une variable interne [52], de la même manière que pour l'interface avec (2.137). Soit  $d \in [0, 1]$  une variable donnant localement l'état de l'endommagement. Si  $d = 0$  alors le volume n'est pas endommagé, à l'inverse si  $d = 1$  alors il est totalement endommagé. Pour être thermodynamiquement admissible, ce modèle doit vérifier le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés.

Pour ce faire, en se basant sur le modèle élastique [52], le potentiel d'énergie libre  $\Psi$ , convexe, est introduit :

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.24)$$

avec  $\mathbf{C}$  l'opérateur de Hooke, tenseur d'ordre 4 [34, 52], utilisé pour le modèle élastique. L'état de l'endommagement est borné et  $d \in [0, 1]$ . Si  $d = 0$  alors le potentiel d'énergie libre associé au comportement élastique linéaire est retrouvé [52], le solide déformable n'est pas endommagé. Si  $d = 1$ , alors le volume est totalement endommagé, cela revient à avoir une contrainte nulle ( $\boldsymbol{\sigma} = 0$ ). Le calcul de la loi d'état associée au potentiel d'énergie libre (3.24) permet d'obtenir la contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  du matériau de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} = (1 - d) \boldsymbol{\sigma}_e \quad (3.25)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}_e$  la contrainte associée au modèle élastique linéaire isotrope présenté avec l'équation (3.18), et  $\boldsymbol{\epsilon}$  le tenseur des déformations.

Le potentiel d'énergie libre (3.24) dépendant également de la variable interne donnant l'état de l'endommagement  $d$ , une seconde variable d'état  $Y$  est introduite et associée à  $d$  et s'exprime sous la forme suivante :

$$Y = \frac{\partial \Psi}{\partial d} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.26)$$

Physiquement, la variable  $-Y$  est appelée le taux de relâchement d'énergie élastique [52]. Il reste maintenant à connaître la manière dont l'état de l'endommagement  $d$  évolue. Pour que ce modèle vérifie le cadre thermodynamique, il est nécessaire que le second principe de la thermodynamique soit respecté. Or, la seule dissipation  $\Phi$  observée est associée à l'état de l'endommagement dans le volume. Ainsi en appliquant l'inégalité de Clausius Duhem (2.26), on obtient :

$$\Phi = -Y\dot{d} \geq 0 \quad (3.27)$$

Ainsi, pour que l'inégalité de Clausius-Duhem (3.27) soit respectée, il est nécessaire que la loi d'évolution de l'endommagement respecte  $\dot{d} \geq 0$ , avec  $\dot{d}$  la variable quantifiant la vitesse de l'endommagement dans le solide déformable, soit la dérivée totale en temps de l'état de l'endommagement, car  $-Y \geq 0$ . Elle joue le même rôle que  $\dot{\alpha}$  pour l'endommagement de l'interface.

L'évolution de l'état de l'endommagement est basée sur les travaux de Allix et Deü en 1997 [2]. Une fonction à seuil  $f_Y$  est introduite, dépendant notamment de l'énergie  $Y_c$  nécessaire à ce qu'une fissure débute dans le solide déformable, de la manière suivante :

$$f_Y(Y) = \frac{\sqrt{-Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}} \quad (3.28)$$

avec  $Y_0$  l'énergie initiale.

Ainsi de la même manière que pour le modèle d'interface RCCM à effet retard avec vitesse limite, pour éviter une localisation de l'endommagement avec une dépendance en maillage, l'évolution proposée pour  $\dot{d}$  comprend un effet retard et est définie de la manière suivante [2] :

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_c} [1 - e^{-a \langle f_Y(Y) - d \rangle_+}] & \text{si } d < 1 \\ \dot{d} = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.29)$$

avec  $\tau_c$  un temps caractéristique caractérisant l'effet retard volumique,  $a$  un paramètre matériau [2] et  $\langle \cdot \rangle_+$  l'opérateur correspondant à la valeur positive.

Avec la loi d'évolution de l'état de l'endommagement  $d$  présentée avec l'équation (3.29), la condition  $\dot{d} \geq 0$  est bien respectée, et donc l'inégalité de Clausius-Duhem (3.27) est vérifiée. Le modèle fait donc partie intégrante du cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés. Physiquement, il ne faut pas que  $d$  se rapproche trop de 1, sinon des éléments à contrainte nulle seraient présents, mais les fissures ne sont pas prises en compte avec ce modèle. Ainsi une valeur d'endommagement critique  $d_c$  est imposée :

$$d < d_c < 1 \quad (3.30)$$

Pour le cas test, le choix de la valeur maximale d'endommagement est  $d_c = 0.8$  [12]. Dans la sous partie suivante, le cadre explicite est mis en place.

### Application du cadre de résolution explicite

Pour mettre en place le cadre de résolution explicite proposé, il est nécessaire que les variables d'état soit calculées à un piquet de temps  $t_{n+1}$  alors que les variables d'évolution à un piquet correspondant à un demi pas de temps,  $t_{n+3/2}$ . Ainsi en appliquant le schéma CD-Lagrange, la variable d'état quantifiant l'état de l'endommagement  $d$ , à un nœud  $i$  du maillage, s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Si} & d_{n+1} < d_c, & d_{n+1} = d_n + h \dot{d}_{n+1/2} \\ \text{sinon} & d_{n+1} = d_c \end{cases} \quad (3.31)$$

avec  $h$  le pas de temps. Pour le calcul du pas de temps critique  $h_{\text{crit}}$  (2.125), il suffit de prendre la raideur initiale du solide déformable (en effet elle diminue par la suite dans le volume avec l'endommagement).

D'autre part, la loi d'évolution (3.32) discrétisée s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Si} & d_{n+1} < d_c, & \dot{d}_{n+3/2} = \frac{1}{\tau_c} [1 - e^{-a \langle f_Y(Y_{n+1}) - d_{n+1} \rangle_+}] \\ \text{Sinon} & \dot{d}_{n+3/2} = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Dans la sous partie suivante, un cas test est présenté avec ce modèle et comparé aux résultats précédents avec un matériau élastique linéaire isotrope.

### Application au cube RCCM en traction

Pour finir ce chapitre, le cas test présenté est le même que celui réalisé avec le modèle de Kelvin-Voigt dans la partie 3.3.1.2. La vitesse imposée appliquée aux degrés de liberté associés à la direction  $z$  des nœuds de la face supérieure du cube est présentée en figure 3.20. Le modèle choisi pour l'interface est le modèle RCCM avec effet retard avec vitesse limite  $v_r = 0.4 \text{ m.s}^{-1}$ . Les paramètres choisis pour le modèle d'endommagement sont ceux présentés dans la table 3.3.

TABLE 3.3 – Choix des paramètres pour le modèle d'endommagement volumique

$Y_0$ (Pa)	$Y_c$ (Pa)	$\tau_c$ (s)	$a$	$d_c$
$5 \cdot 10^4$	$2,3 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^{-6}$	10	0.8

La figure 3.28 montre l'évolution de l'endommagement de l'interface pour chaque nœud de l'interface au cours du temps, pour le modèle élastique linéaire, et le modèle élastique avec endommagement.

La différence de résultat est remarquable. Effectivement avec l'endommagement en volume, l'interface n'est pas du tout cassée. Cela s'explique par le comportement volumique du solide déformable. La figure 3.29 montre l'évolution de l'endommagement moyen sur l'ensemble des nœuds du volume au cours du temps.



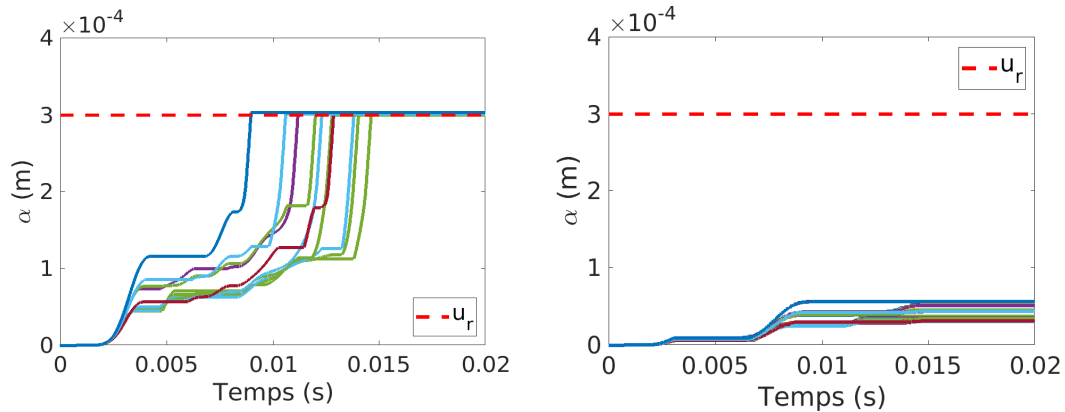


FIGURE 3.28 – Évolution de l’endommagement de l’interface au cours du temps pour le modèle élastique linéaire (à gauche) et le modèle élastique avec endommagement (à droite).

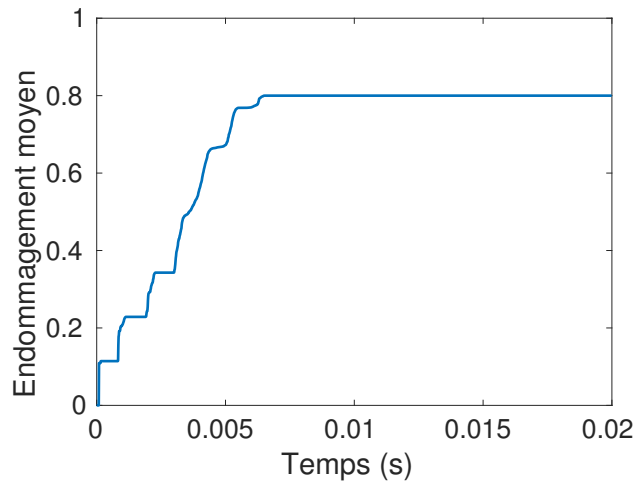


FIGURE 3.29 – Évolution de l’endommagement moyen dans le volume.

Avec les figures 3.28 et 3.29, on remarque que plus le volume s’endommage, plus les vitesses d’endommagement des nœuds diminuent et donc moins l’endommagement de l’interface évolue. Cela s’explique simplement par une diminution de la raideur dans le volume proposée dans le modèle (3.24), ce qui diminue donc les contraintes appliquées à l’interface. Le volume étant rapidement totalement endommagé comme le montre la figure 3.29, cela implique une diminution de la raideur de 80% à cet instant car  $d_c = 0.8$ . Ainsi, par rapport au cas élastique il y a moins de contraintes appliquées sur l’interface. Ainsi cette dernière n’est pas endommagée,  $\alpha < \alpha_e$  comme le montre la figure 3.30 présentant l’évolution des 3 états possibles de l’interface avec l’utilisation du modèle élastique linéaire ou élastique endommageable pour le comportement du solide déformable. Effectivement sur la figure 3.28, on remarque sur le graphique de droite que l’ensemble des endommagements  $\alpha$  associés à chaque nœud de l’interface sont en dessous de

la limite élastique  $\alpha_e = 0.0001$  m. C'est pourquoi sur le graphique de droite de la figure 3.30 l'interface est toujours totalement élastique pendant la simulation. L'interface n'est pas suffisamment endommagée et donc la raideur associée est toujours égale à sa valeur initiale, voir la figure 2.4.

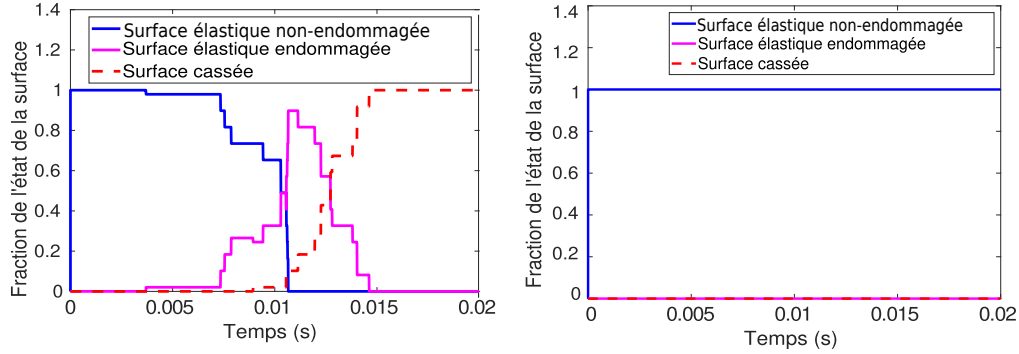


FIGURE 3.30 – Évolution de l'état de l'interface au cours du temps pour le modèle élastique linéaire (à gauche) et le modèle élastique avec endommagement (à droite).

Ainsi ce chapitre a permis de mettre en avant l'avantage de cette résolution. Effectivement le caractère modulaire de cette dernière a été montré, notamment avec l'application de nouveaux modèles d'interface avec de nouvelles lois d'évolution pour la vitesse d'endommagement. Ainsi, les modèles non-locaux en temps sont facile d'adaptation. Cependant pour les modèles non-locaux en espace, comme pour les modèles avec des limiteurs de localisation [61, 68], des études restent à réaliser, notamment pour voir si il est possible de conserver une résolution sans matrices pour appliquer la résolution proposée ici. D'autre part, la facilité à changer de loi de comportement pour le solide déformable a également été mise en avant, avec l'application du modèle de Kelvin-Voigt ou encore le modèle élastique avec endommagement. L'application de ces modèles à la résolution a permis de voir comment gérer la viscosité dans l'implémentation explicite des forces intérieures, ou encore l'ajout et la gestion de nouvelles variables internes comme l'état de l'endommagement du solide déformable.

Dans le chapitre suivant, l'objectif est de montrer comment intégrer cette résolution dans le cadre des grandes transformations.



# Chapitre 4

## Extension de la résolution aux grandes transformations

Dans les chapitres précédents, la présentation d'une résolution explicite basée sur le cadre des matériaux standards généralisés a été présentée. Son aspect modulaire a été mis en avant. Effectivement la simplicité d'implémentation d'un changement de loi matériau pour l'interface entre le solide déformable et le solide rigide a été montrée par l'application de lois de comportement à effet retard. Pour ce chapitre, le modèle d'interface choisi est le modèle RCCM à effet retard avec vitesse limite  $v_r$ , voir la section 3.2. Il permet d'apporter une approche physique au modèle et également de contrôler la précision de l'évolution de l'état de l'interface. Dans le chapitre précédent, il a également été montré la facilité de changement de loi de comportement pour le solide déformable, avec l'ajout d'un comportement visqueux à l'implémentation et également le traitement de nouvelles variables internes avec l'ajout de l'état de l'endommagement du volume.

Cependant, l'application de l'ensemble de ces lois a été réalisé dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations. Ultérieurement, l'application visée avec ces travaux est le procédé de démoulage de pneu. Or, c'est un procédé dans lequel de grands déplacements sont observés et aussi de grandes déformations. Ainsi, l'objectif de ce dernier chapitre est de présenter l'adaptation de la résolution proposée aux grandes transformations [56].

Dans un premier temps, c'est l'adaptation aux grandes transformations du cadre de résolution explicite qui est présentée avec une introduction de l'algorithme de résolution (5) dans ce nouveau cadre. Dans un second temps, la résolution sera appliquée au modèle de comportement de Saint-Venant-Kirchoff qui est une généralisation du modèle élastique linéaire en grandes transformations. Les cas avec et sans viscosité sont traités. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus avec l'hypothèse de petites perturbations. Pour finir, un cas test simplifié de l'arrachement d'une lamelle d'un pneu est présenté avec une application dans un code semi-industriel, MEF++.

## 4.1 Adaptation du cadre de résolution aux grandes transformations

Dans cette première partie, l'objectif est de proposer une généralisation de l'algorithme de résolution (5) au cadre des grandes transformations. Il est important de noter que l'algorithme peut être utilisé à condition que les lois de comportement pour le solide déformable et pour l'interface soient thermodynamiquement admissibles, soit pour être plus précis, qu'elles vérifient l'inégalité de Clausius-Duhem, voir le chapitre 2.

Dans le chapitre 1, l'écriture de l'équation de la dynamique est basée sur le principe des puissances virtuelles. Ainsi, dans ce formalisme, l'ensemble des puissances, à savoir la puissance des forces d'accélération (1.20), la puissance des forces intérieures (1.17) et la puissance des forces extérieures (1.18) ont été introduites. Ces équations sont écrites sur la configuration déformée  $\Omega_t$ , car dans le cas de problème sous l'hypothèse de petites perturbations, la configuration déformée est considérée identique à la non déformée  $\Omega_0$  pour les calculs. Ainsi l'ensemble des calculs sont réalisés sur cette configuration, et c'est dans cette logique que s'inscrit l'implémentation de l'algorithme de résolution proposé (5).

Dans le cadre des grandes transformations, il y a une distinction entre la configuration déformée  $\Omega_t$  et non déformée  $\Omega_0$ . Pour ces travaux, c'est la méthode du Lagrangien total [34] qui est utilisée. Elle implique de réaliser l'ensemble des calculs sur la configuration initiale pour appliquer la méthode des éléments finis. En utilisant les équations (1.34), (1.39) et (1.38), le principe des puissances virtuelles s'écrit alors avec l'équation (1.41) sur la configuration initiale. L'écriture de l'équation de la dynamique est alors basée sur cette équation (1.41).

Ainsi, pour calculer sur la configuration non déformée les grandeurs correspondantes au solide déformable, le second tenseur de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S}$  (1.9) est introduit. Ce tenseur symétrique permet de décrire les contraintes de Cauchy observées sur la configuration déformée, sur la configuration initiale. Il permet ainsi de décrire le comportement du solide déformable sur cette configuration. Les forces intérieures (1.56) sont alors écrites en fonction de ce tenseur. Dans le cadre des grandes transformations, le second tenseur de Piola-Kirchoff est décrit à partir d'un descripteur de déformation. Dans ces travaux, c'est le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  (1.7) qui est utilisé et qui s'écrit  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{U}$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T \right] + \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} \quad (4.1)$$

avec  $\mathbb{U}$  l'ensemble défini comme (1.13),  $\mathbf{u}$  le vecteur déplacement associé à un point  $\mathbf{X}$  de la configuration initiale. Le déplacement étant une variable d'état, en appliquant le cadre de résolution explicite, le tenseur des déformations de Green-Lagrange discrétisé s'écrit :

$$\mathbf{E}_{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_{n+1} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_{n+1})^T \right] + \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_{n+1})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_{n+1} \quad (4.2)$$

Dans le cadre d'une loi de comportement visqueuse pour le solide déformable,

la dérivée temporelle du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\dot{\mathbf{E}}$ , tenseur objectif, doit être introduite, et  $\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}_v$ , elle s'écrit :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v})^T \right] + \frac{1}{2} \left[ (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v} \right] \quad (4.3)$$

avec  $\mathbf{v}$  le vecteur vitesse associé à un point  $\mathbf{X}$  de la configuration initiale.

La vitesse étant une variable d'évolution, la dérivée temporelle du tenseur des déformations de Green-Lagrange discrétisée s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+3/2}) &= \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v}_{n+3/2} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v}_{n+3/2})^T \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v}_{n+3/2})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_{n+1} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_{n+1})^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{v}_{n+3/2} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ainsi, à partir des formulations (4.2) et (4.4), les forces intérieures peuvent être calculées. Dans ces travaux, en ce qui concerne les forces extérieures, d'un point de vue implémentation, aucun changement n'est observé. Effectivement les conditions aux limites étant exprimées au bord de Dirichlet  $\partial_u \Omega_t$  avec une vitesse imposée, elles sont directement appliquées aux degrés de liberté associés sur le vecteur vitesse assemblé dans la méthode des éléments finis.

Il reste maintenant à étudier comment sont calculées les impulsions élastiques endommageables et de contact associées au modèle d'interface, soit le modèle RCCM avec effet retard avec vitesse limite, voir section 3.2. Pour rappel les impulsions associées au contact sont obtenues par la résolution de deux problèmes de complémentarité résolus à l'aide des algorithmes (2) pour l'impulsion normale associée au contact unilatéral, et (3) pour l'impulsion tangentielle associée au contact frottant. Ces impulsions sont calculées localement aux nœuds de l'interface et nécessitent donc la connaissance de la normale  $\mathbf{n}$  et de la tangente  $\mathbf{t}$  en chacun de ces nœuds. Or, le schéma CD-Lagrange fournit la configuration, elle est connue à  $t_{n+1}$ , il est donc possible de connaître ces directions. Ainsi, aucune modification n'est nécessaire pour le calcul des impulsions de contact. Cela est possible car la matrice de masse  $\mathbf{M}$  (1.53) est lumpée, ainsi il est possible de calculer les valeurs des impulsions aux nœuds. D'autre part,  $\mathbf{M}$  est la même sur chacune des configurations. Pour rappel, dans le cadre de ces travaux, en condition initiale, le contact est imposé à tous les nœuds de l'interface entre le solide déformable et le solide rigide. Sous l'hypothèse de petites perturbations, de faibles déplacements sont observés. Cependant dans le cadre des grandes transformations, de grands déplacements sont observés. Ainsi, dans le cas où il y a plusieurs interfaces orientées différemment, il est nécessaire d'utiliser un algorithme de détection de contact à partir de la configuration  $\mathbf{U}_{n+1}$  déjà connue grâce à l'utilisation du schéma CD-Lagrange. Cela permet de recalculer le gap pour savoir si un nœud est en contact ou non et avec quelle interface. Il existe une multitude d'algorithmes de détection de contact en explicite et [25, 38, 42, 46] en présentent certains.

Pour finir, il reste à calculer l'impulsion associée au comportement élastique endommageable (2.118) de l'interface. En grandes transformations l'interface est

soumise à des déplacements plus grands, ainsi elle se déforme. Sous l'hypothèse de petites perturbations, ces phénomènes n'ayant pas lieu, il n'était alors nécessaire de calculer qu'une seule fois la matrice  $\mathbf{W}$  (2.118) concentrant sur sa diagonale les poids des nœuds de l'interface calculés sur la configuration non déformée de l'interface. Maintenant, il est nécessaire de calculer la matrice  $\mathbf{W}$  à chaque pas de temps pour obtenir l'impulsion généralisée liée au comportement élastique endommageable de l'interface. Les quantités étant connues, l'impulsion est calculée sur la configuration déformée.

Pour résumer, l'algorithme (6) présente une généralisation de l'algorithme (5) dans le cadre des grandes transformations.

---

**Algorithm 6** Résolution d'un incrément de temps dans le cadre des grandes transformations

---

**Entrées :**  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_{n+1/2}, \alpha_n, \dot{\alpha}_{n+1/2}$

1. Calcul de la configuration explicite :

$\mathbf{U}_{n+1}$  (2.103),  $\mathbf{g}_{n+1}$  (2.109),  $[\mathbf{u}]_{n+1}$  (2.106),  $\alpha_{n+1}$  (2.107),  $\mathbf{F}_{\text{ext},n+1}$   
Calcul de  $\mathbf{E}_{n+1}$  (4.2) et  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1/2})$  (4.5) suivant la loi matériau choisie

2. Calcul des lois d'état :

Calcul de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{F}_{\text{int},n+1}$  avec la loi choisie pour le corps déformable  
Calcul de  $\boldsymbol{\sigma}_{d,n+1}$  avec (2.116) et (2.117) pour chaque nœud de contact

3. Dynamique explicite :

Calcul de la matrice de poids  $\mathbf{W}_{n+1}$   
Calcul de  $\mathbf{R}_{d,n+3/2}$  avec (2.118)  
Calcul de  $\mathbf{V}_{\text{free}}$  avec (2.120)  
Détection de contact pour les nœuds de l'interface  
Résolution explicite des problèmes linéaires de complémentarité avec les algorithmes (2) et (3) pour obtenir  $\mathbf{R}_{c,n+3/2}$   
Résolution de l'équation de la dynamique (2.119) pour obtenir  $\mathbf{V}_{n+3/2}$

4. Loi d'évolution :

Résolution locale de (3.5) pour obtenir  $\dot{\alpha}_{n+3/2}$  pour chaque nœud de contact

**Sorties :**  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+3/2}, \alpha_{n+1}, \dot{\alpha}_{n+3/2}$

---

Ainsi, le cadre de résolution explicite proposé s'adapte facilement au cadre des grandes transformations. Le calcul des impulsions restant inchangé avec pour le contact les algorithmes (2) et (3) et l'équation (2.118) pour l'impulsion élastique endommageable, les directions de contact étant déjà connues grâce au schéma CD-Lagrange. Le calcul de la dérivée du tenseur de Green-Lagrange discrétisé est réalisé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1/2}) &= \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_{n+1/2} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_{n+1/2})^T \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_{n+1/2})^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{n+1} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{n+1}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_{n+1/2} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

en appliquant l'hypothèse de Belytschko [8] sur la vitesse qui est choisie comme  $\mathbf{v}_{n+1/2}$  et non  $\mathbf{v}_{n+3/2}$ , pour conserver le caractère explicite de la résolution. Il est important de remarquer que les impulsions dépendant de quantités locales et étant intégrées aux nœuds, sont calculées sur la configuration déformée. Cependant pour les forces intérieures, il est nécessaire de réaliser le calcul sur la configuration initiale à l'aide du second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  (1.9).

Dans la partie suivante, l'algorithme (6) est mis en place et appliqué à deux lois matériaux différentes. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec l'hypothèse de petites perturbations pour observer les effets de la prise en compte des grandes transformations sur l'interface avec les cas tests précédents.

## 4.2 Le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff

Dans cette section, l'objectif est de présenter des modèles qui sont une généralisation du modèle élastique linéaire et du modèle de Kelvin Voigt dans le cadre des grandes transformations. Ensuite les résultats obtenus avec ces modèles de comportement pour le solide déformable sont comparés aux résultats obtenus avec les modèles sous l'hypothèse de petites perturbations utilisés jusqu'à présent. L'impact des grandes transformations sur l'état de l'interface est alors étudié.

Dans un premier temps le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff [34] est étudié. Il offre une généralisation du modèle élastique linéaire en petites perturbations. Dans un second temps, un effet visqueux est ajouté à ce modèle pour étudier son impact. Ces modèles sont présentés dans le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés. La résolution explicite proposée dans l'algorithme (6) est alors mise en place.

### 4.2.1 Un matériau hyper-élastique

Le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff permet de décrire le comportement de matériaux hyper-élastiques [7, 85]. D'autres modèles décrivent ce type de matériaux, tels que le modèle de Mooney-Rivlin [58], ou bien celui d'Ogden [63] prenant notamment en compte la propriété d'incompressibilité. Cependant, cette dernière n'est pas étudiée ici.

Dans le cadre des grandes transformations, les lois d'état et d'évolution permettant de vérifier le respect du cadre thermodynamique sont écrites sur la configuration initiale. Ainsi pour présenter le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, le potentiel d'énergie libre convexe  $\Psi_{SVK}$  est introduit de la manière suivante :

$$\Psi_{SVK} = \frac{1}{2\rho_0}(\lambda E_1^2 + 2\mu \mathbf{E} : \mathbf{E}) \quad (4.6)$$

avec  $\rho_0$  la masse volumique du solide déformable en configuration initiale définie comme (1.38),  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé introduits respectivement avec les équations (3.14) et (3.15).  $E_1$  et  $E_2$  correspondent aux deux premiers invariants du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  définis tels que :



$$E_1 = \text{Tr}(\mathbf{E}) \quad (4.7)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (\text{Tr}(\mathbf{E})^2 - \text{Tr}(\mathbf{E}^2)) \quad (4.8)$$

La loi d'état (2.40) écrite dans le cadre des grandes transformations est introduite comme :

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \Psi_{SVK}}{\partial \mathbf{E}} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{E}) \mathbb{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (4.9)$$

avec  $\mathbf{S}$  le second tenseur symétrique des contraintes de Piola Kirchhoff (1.9) et  $\mathbb{I}$  la matrice identité. Le potentiel (4.6) étant convexe, le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff décrit par l'équation (4.9) donnant les contraintes en fonction des déformations vérifie le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés. Ainsi le cadre explicite de résolution peut être appliqué et on obtient :

$$\mathbf{S}_{n+1} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{E}_{n+1}) \mathbb{I} + 2\mu \mathbf{E}_{n+1} \quad (4.10)$$

Avec la loi de comportement du solide déformable discrétisée, l'algorithme (6) est appliqué. Pour rappel le modèle d'interface est appliqué de la même manière que dans les cas sous l'hypothèse de petites perturbations car les calculs sont réalisés sur la configuration déformée. La matrice de masse est invariante, seule la matrice des poids d'intégration  $\mathbf{W}_{n+1}$  est à recalculer à chaque pas de temps pour prendre en compte la déformation de l'interface. Dans la suite de cette section, deux cas tests sont présentés.

### Sollicitation en traction

Pour observer le comportement du modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, le premier cas test étudié correspond à celui du cube RCCM présenté en section 2.4.2.1 avec les paramètres proposés dans la table 2.2. Seules les conditions aux limites sont différentes. La figure 4.1 présente la vitesse imposée aux degrés de liberté de la direction  $z$  sur les nœuds de la surface supérieure du cube. Le cadre de la dynamique rapide est bien respecté avec un temps d'expérience simulée de 0.02 s avec un fort chargement.

Le modèle d'interface choisi est le modèle RCCM avec effet retard avec vitesse limite d'endommagement  $v_r = 0.4 \text{ m.s}^{-1}$ , voir la partie 3.2. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux du modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations. La figure 4.2 montre les résultats obtenus en terme d'évolution de l'endommagement des nœuds de l'interface au cours du temps pour les deux modèles.

L'utilisation d'une loi élastique linéaire dans le cadre des grandes transformations avec le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff pour le solide déformable a un impact non négligeable sur l'endommagement de l'interface par rapport à l'utilisation du modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations. Effectivement, sur la figure 4.2, alors que les nœuds de l'interface ne sont pas totalement

endommagés pour le modèle sous l'hypothèse de petites perturbations, ils le sont avec le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff.

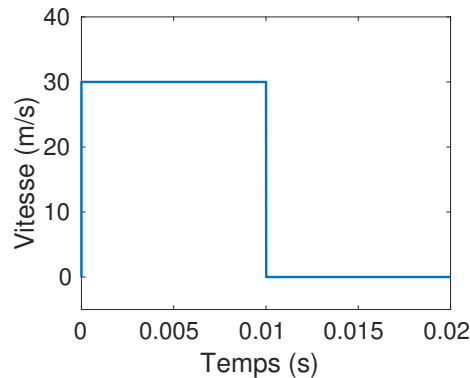


FIGURE 4.1 – Conditions aux limites avec l'évolution de la vitesse imposée en fonction du temps pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction pour un matériau hyper-élastique.

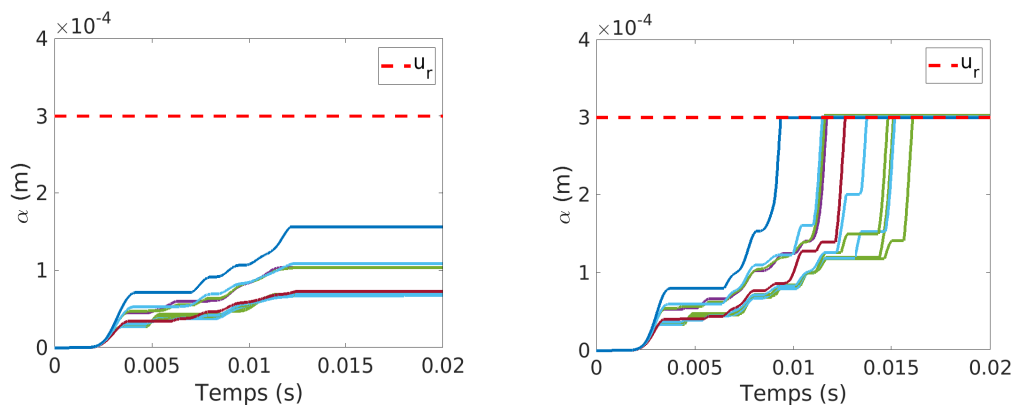


FIGURE 4.2 – Évolution de l'endommagement de l'interface en fonction du temps pour le modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations (à gauche) et le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff (à droite).

Ces résultats sont confirmés par la figure 4.3 présentant l'état de l'interface au cours du temps pour les deux modèles. Sur le graphique de droite de la figure 4.3 montrant les états de l'interface au cours du temps pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, on remarque une surface qui est progressivement totalement endommagée. Cependant, pour le modèle sous l'hypothèse de petites perturbations, on remarque sur le graphique de gauche de la figure 4.3 que la majorité des nœuds ne sont pas endommagés ( $\alpha < \alpha_e$ ) et pour le reste l'endommagement est inférieur au seuil de rupture  $u_r$ . Les créneaux obtenus sur les courbes de la figure 4.3 s'expliquent par un arrachement se réalisant par groupe de nœud et le transport des ondes élastiques.

Ces résultats s'expliquent par l'utilisation du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  (4.2) plutôt que son approximation dans le cadre des petites

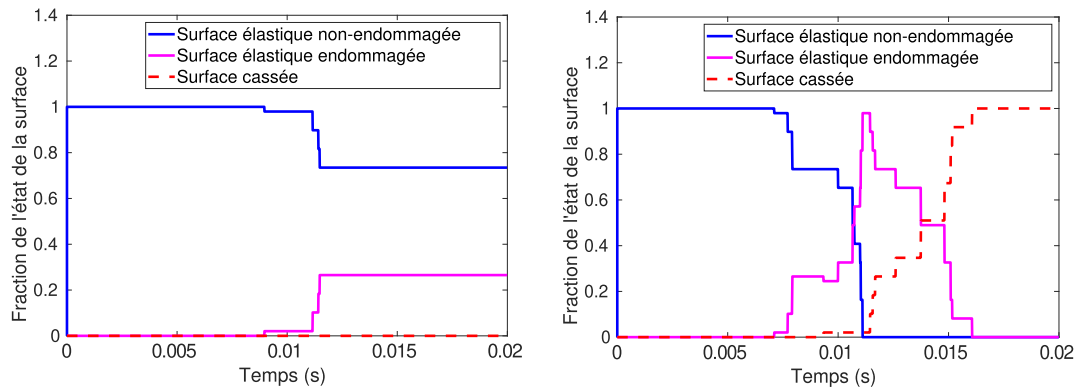


FIGURE 4.3 – Évolution de l'état de l'interface en fonction du temps pour le modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations (à gauche) et le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff (à droite).

perturbations  $\epsilon$  (3.21) pour la loi de comportement du solide déformable pour le calcul des contraintes. Effectivement les cas tests présentés contiennent des grands déplacements, ainsi l'approximation de petites perturbations n'était pas appropriée. Cependant, pour observer un arrachement de l'interface, il est nécessaire d'imposer en conditions aux limites des grands déplacements. C'est dans ce cadre que s'intègre l'algorithme (6) et son intérêt est présenté ici. Les termes quadratiques du tenseur des déformations de Green-Lagrange ne sont pas négligeables.

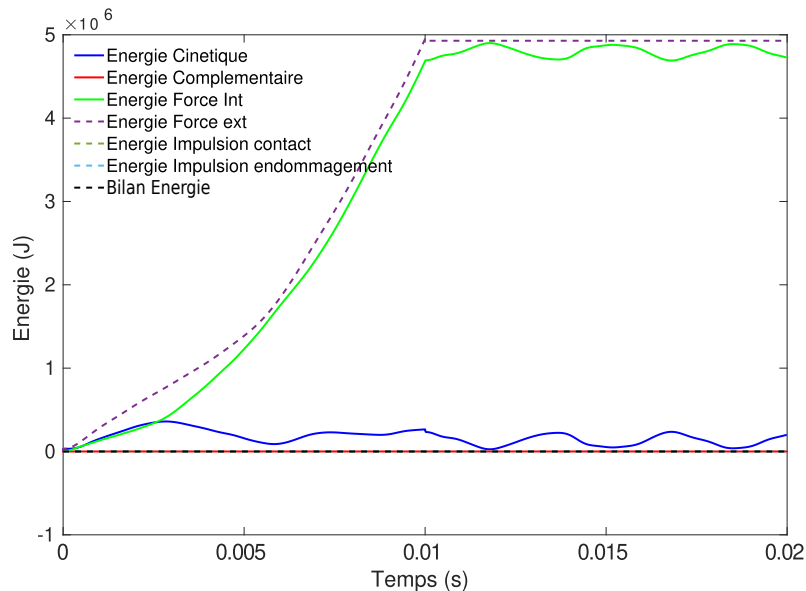


FIGURE 4.4 – Évolution des différentes énergies pour le modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction.

Pour finir la comparaison entre les deux modèles, la figure 4.4 montre l'évolution des énergies au cours du temps dans le cadre du modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations, et la figure 4.5 dans celui du modèle de Saint-Venant-Kirchhoff. On remarque que l'énergie mobilisée avec l'utilisation du modèle de Saint-Venant-Kirchhoff est plus grande. Cela s'explique par des déformations plus importantes dans le solide déformable avec le modèle s'inscrivant dans le cadre des grandes transformations. Les oscillations observées sur les énergies associées aux forces intérieures et l'énergie cinétique s'expliquent par le transport des ondes élastiques, les deux modèles étant élastiques linéaires. Pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, les fortes variations d'énergie observées pour ces grandeurs sont dues à l'arrachement de l'interface qui n'a pas lieu dans le cadre du modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations.

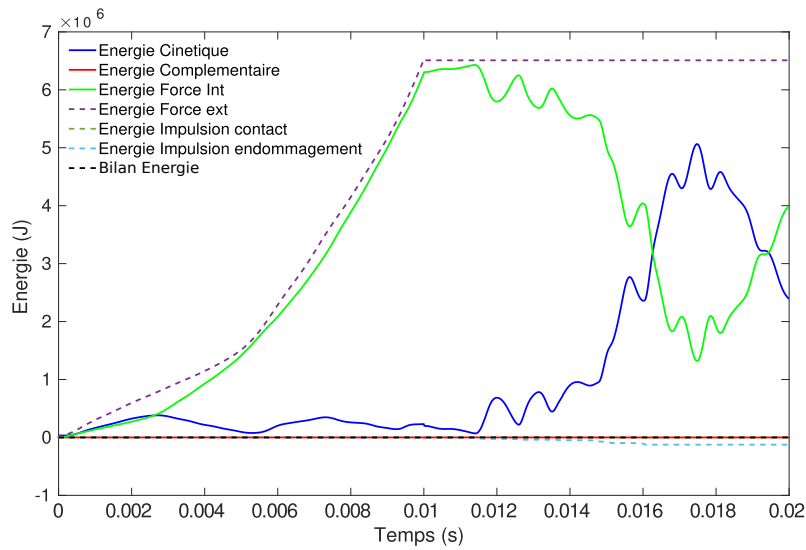


FIGURE 4.5 – Évolution des différentes énergies pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff pour le cas test du cube RCCM sollicité en traction.

On remarque que le bilan d'énergie (2.138) est respecté avec les deux modèles de comportement volumique. Le caractère symplectique du modèle est donc bien respecté dans le cadre de la résolution en grandes transformations.

Dans la sous partie suivante, c'est le cas test de l'arrachement d'un parallélépipède rectangle qui est réalisé, dans l'objectif d'observer des grandes rotations dans le solide déformable.

### Le cas test du Peeling

Pour finir cette partie sur le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, c'est le cas test du peeling qui est étudié. Il correspond à l'arrachement d'un parallélépipède rectangle. Sa mise en donnée est présentée dans la section 2.4.3. Pour le comportement de l'interface, le choix est porté sur le modèle RCCM avec effet retard avec vitesse limite  $v_r = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ . Pour le solide déformable c'est le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff qui est choisi comme loi de comportement. Les résultats sont

comparés à ceux obtenus avec le modèle élastique linéaire résolu sous l'hypothèse de petites perturbations.

La figure 4.6 montre l'évolution des endommagements  $\alpha$  des nœuds de l'interface avec l'utilisation de chaque modèle. Comme dans l'analyse des résultats avec le cas test du cube RCCM sollicité en traction, on remarque qu'avec le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, l'interface s'endommage plus vite qu'avec le modèle sous l'hypothèse de petites perturbations. Cela s'explique de nouveau car ce cas test admet de grands déplacements, ainsi avec l'hypothèse de petites perturbations, les déformations associées ne sont pas totalement prise en compte étant donnée que les termes quadratiques du tenseur de Green-Lagrange (4.2) sont négligés.

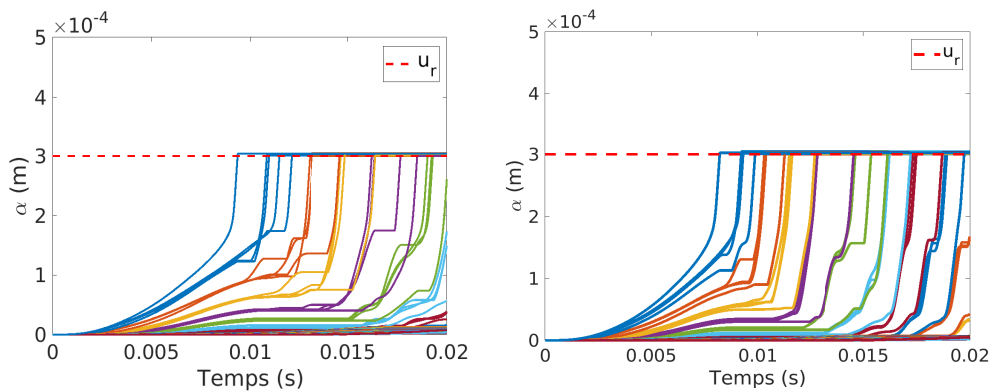


FIGURE 4.6 – Évolution des endommagements des nœuds de l'interface au cours du temps pour le modèle élastique linéaire (à gauche) et le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff (à droite).

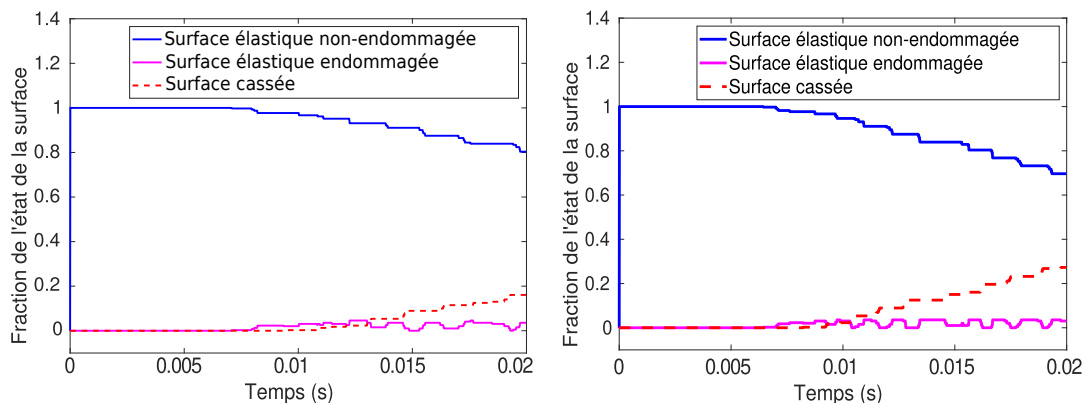


FIGURE 4.7 – Évolution des états de l'interface au cours du temps pour le modèle élastique linéaire (à gauche) et le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff (à droite).

Ces résultats sont confirmés par la figure 4.7 présentant l'évolution de l'état de l'interface au cours du temps pour les deux modèles. On remarque que la proportion de surface élastique non endommagée est plus importante avec l'utilisation du modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations qu'avec

le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff. À l'inverse, la proportion de surface totalement endommagée est plus grande à la fin de la simulation pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff.

L'arrachement du rectangle proposé par ce cas test permet d'observer des rotations dans le solide déformable. Ainsi, lorsque que la rotation est suffisante, le rectangle entre en contact avec le solide rigide, voir la figure 2.31. La figure 4.8 montre l'évolution de l'énergie associée à l'impulsion de contact pour chaque modèle. Cette figure confirme dans les deux cas qu'il y a bien un contact dû à la rotation du rectangle. Cependant, le contact est plus tardif avec le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff.

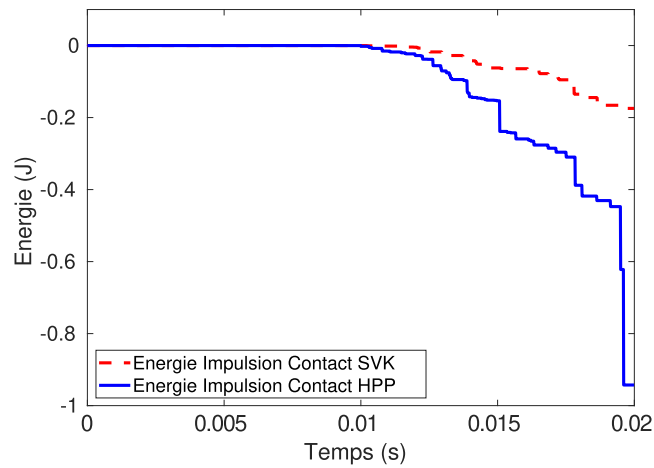


FIGURE 4.8 – Évolution des énergies associées à l'impulsion de contact pour chaque modèle pour le cas test du peeling.

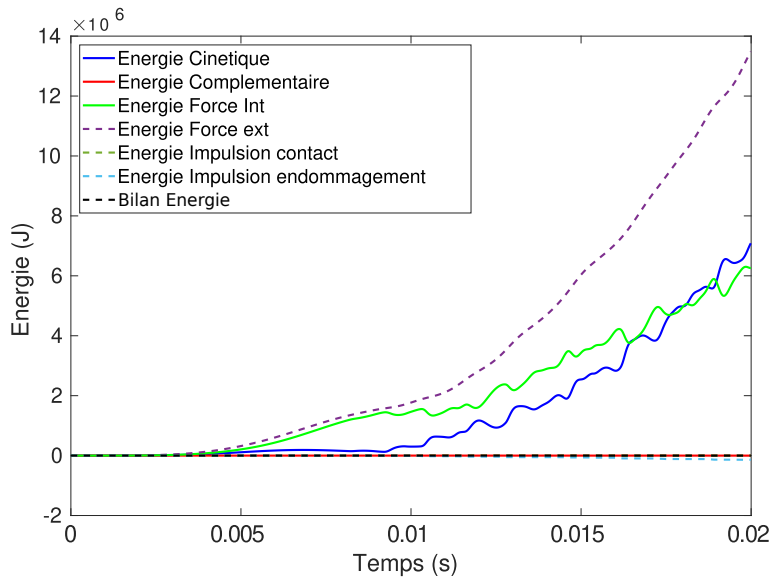


FIGURE 4.9 – Évolution des différentes énergies au cours du temps avec le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff.

Pour finir, la figure 4.9 montre l'évolution des différentes énergies du système au cours du temps. On remarque que l'ensemble des énergies augmentent progressivement, ce qui s'explique par l'arrachement progressif de l'interface, voir la figure 2.28. Il est important de noter que la balance d'énergie (2.138) est respectée grâce aux bonnes propriétés énergétiques du schéma CD-Lagrange. Ainsi, la conservation du moment, propriété du schéma symplectique est vérifiée, avec l'observation de rotations dans le solide déformable.

Dans la partie suivante, au modèle de Saint-Venant-Kirchhoff est ajouté un comportement visqueux.

## 4.2.2 Le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité

Dans cette dernière partie concernant l'implémentation de modèles de loi de comportement en grandes transformations, l'objectif est d'utiliser pour le solide déformable le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff en y ajoutant un comportement visqueux. Pour ce faire, la loi proposée se base sur le modèle de Kelvin-Voigt, voir la section 3.3.1, présenté dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations. Ce modèle permet un amortissement des ondes élastiques qui se propagent dans le solide déformable. Ce modèle est présenté dans le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés de manière à pouvoir mettre en place l'algorithme de résolution explicite (6) proposé. Soit  $\mathbf{S}$  le second tenseur de Piola-Kirchhoff (1.9) permettant de décrire les contraintes évaluées sur la configuration initiale du modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité. En se basant sur l'équation (3.6), il est introduit comme :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_{an} \quad (4.11)$$

avec  $\mathbf{S}_e$  correspondant à la partie élastique de la contrainte sur la configuration initiale, qui correspond donc au modèle de Saint-Venant-Kirchhoff classique introduit avec l'équation (4.9), et  $\mathbf{S}_{an}$  correspondant à la partie anélastique, dans laquelle le comportement visqueux est exprimé.

Dans la partie précédente, il est montré que le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff vérifie le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés, donc le comportement élastique associé à  $\mathbf{S}_e$  le vérifie. Il reste donc à exprimer  $\mathbf{S}_{an}$  dans ce cadre. Pour ce faire, le potentiel de dissipation  $\varphi_{SVK}$  est introduit de la manière suivante :

$$\varphi_{SVK} = \frac{1}{2} \left( \lambda \theta_\lambda \dot{E}_1^2 + 2\mu \theta_\mu \dot{\mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \right) \quad (4.12)$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé introduit avec les équations (3.14) et (3.15),  $\theta_\lambda$  et  $\theta_\mu$  les coefficients de relaxation caractérisant la viscosité avec l'équation (3.16).  $\dot{E}_1$  et  $\dot{E}_2$  les deux premiers invariants de la dérivée temporelle du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\dot{\mathbf{E}}$  (4.4) qui s'expriment de la manière suivante :

$$\dot{E}_1 = \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}) \quad (4.13)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}})^2 - \text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}^2) \right) \quad (4.14)$$

Le potentiel de dissipation  $\varphi_{SVK}$  est convexe. C'est une condition suffisante pour respecter l'inégalité de Clausius-Duhem et donc le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés. Ainsi, de la même manière que pour le modèle de Kelvin-Voigt avec les équations (3.18) et (3.19), les lois d'état et d'évolution associées au modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité s'écrivent :

$$\mathbf{S}_e = \rho_0(\partial\Psi_{SVK}/\partial\mathbf{E}) = \lambda\text{Tr}(\mathbf{E})\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{S}_{an} = \partial\varphi_{SVK}/\partial\dot{\mathbf{E}} = \lambda\theta_\lambda\text{Tr}(\dot{\mathbf{E}})\mathbb{I} + 2\mu\theta_\mu\dot{\mathbf{E}} \quad (4.16)$$

avec  $\Psi_{SVK}$  le potentiel d'énergie libre associé au modèle de Saint-Venant-Kirchhoff et défini avec l'équation (4.6) et  $\mathbb{I}$  la matrice identité.

Ainsi le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  caractérisant ce modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec un comportement visqueux proposant une généralisation du modèle de Kelvin-Voigt en prenant en compte les grandes transformations est :

$$\mathbf{S} = \lambda\text{Tr}(\mathbf{E})\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{E} + \lambda\theta_\lambda\text{Tr}(\dot{\mathbf{E}})\mathbb{I} + 2\mu\theta_\mu\dot{\mathbf{E}} \quad (4.17)$$

En appliquant le cadre de résolution explicite proposé dans l'algorithme (6), le second tenseur de Piola-Kirchhoff de ce modèle s'écrit :

$$\mathbf{S}_{n+1} = \lambda\text{Tr}(\mathbf{E}_{n+1})\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{E}_{n+1} + \lambda\theta_\lambda\text{Tr}(\dot{\mathbf{E}}_{n+1/2})\mathbb{I} + 2\mu\theta_\mu\dot{\mathbf{E}}_{n+1/2} \quad (4.18)$$

avec  $\mathbf{E}_{n+1}$  le tenseur des déformations de Green-Lagrange discrétisé défini avec l'équation (4.2) et  $\dot{\mathbf{E}}_{n+1/2}$  sa dérivée définie avec l'équation (4.5) avec l'utilisation de l'hypothèse de Belytschko [8] permettant de conserver le caractère explicite de la résolution. L'algorithme (6) peut donc être appliqué à cette loi de comportement pour le solide déformable.

Pour tester le comportement de ce modèle avec le cadre de résolution explicite proposé, le cas test du cube RCCM sollicité en traction est de nouveau étudié, voir la section 2.4.2.1, avec les paramètres de la table 2.2 pour le solide déformable. La discrétisation spatiale est la même ainsi que le pas de temps  $h = 1.10^{-5}$  s. En ce qui concerne le modèle d'interface, c'est également le modèle RCCM à effet retard avec vitesse limite qui est choisi, avec  $v_r = 0.4$  m.s<sup>-1</sup>. Pour les conditions aux limites, la vitesse est imposée sur les degrés de liberté associés à la direction  $z$  des nœuds de la face supérieure du cube avec l'évolution au cours du temps présentée en figure 4.1. Dans un premier temps, les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec le modèle de Kelvin-Voigt. Les coefficients de relaxation sont choisis identiques pour le comportement du solide déformable avec le modèle de Kelvin-Voigt et celui de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité, et  $\theta_\lambda = \theta_\mu = 1.10^{-3}$  s.



La figure 4.10 présente les évolutions des paramètres d'endommagement  $\alpha$  des nœuds de l'interface pour les deux modèles. Les mêmes remarques qu'avec la comparaison entre le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff et le modèle élastique linéaire sous l'hypothèse de petites perturbations peuvent être faites. En effet, l'utilisation d'un modèle prenant en compte les grandes transformations accélère l'endommagement de l'interface. Cela est dû une fois de plus à la non prise en compte des termes quadratiques du tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  et de sa dérivée  $\dot{\mathbf{E}}$  avec le modèle sous l'hypothèse de petites perturbations. D'autre part, l'effet de l'utilisation d'un modèle visqueux est illustré avec ces graphiques pour les deux modèles. Effectivement, on remarque sur la figure 4.10 que l'évolution des paramètres d'endommagement est plus régulière que sans la viscosité, voir la figure 4.2.

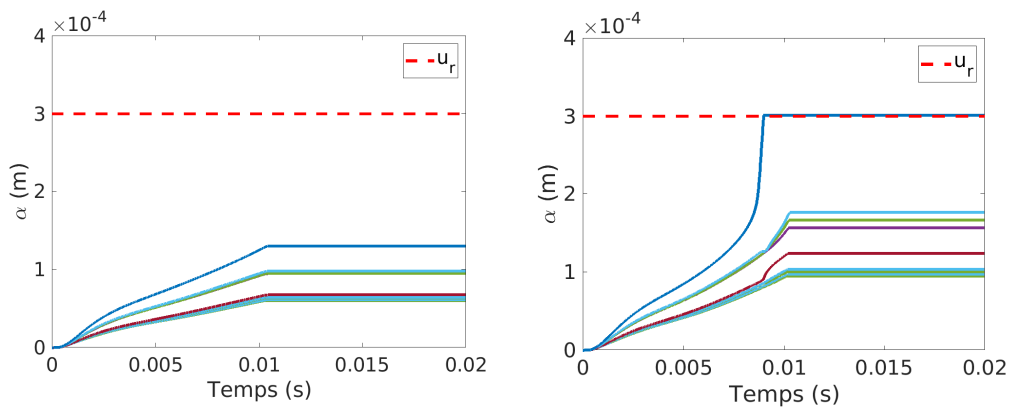


FIGURE 4.10 – Évolution des endommagements des nœuds de l'interface au cours du temps pour le modèle de Kelvin-Voigt (à gauche) et le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité (à droite).

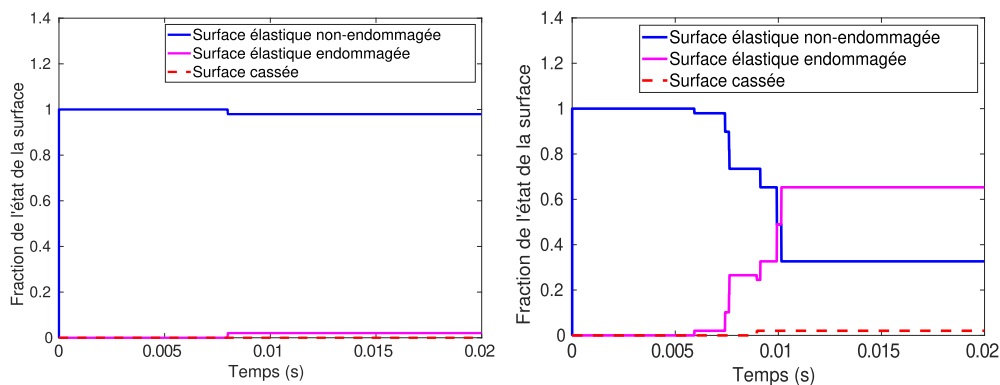


FIGURE 4.11 – Évolution des états de l'interface au cours du temps pour le modèle de Kelvin-Voigt (à gauche) et le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité (à droite).

Ces résultats sont également appuyés par la figure 4.11 présentant les évolutions des états de l'interface au cours du temps. Dans le cas d'un comportement

respectant le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec de la viscosité, on remarque que plus de 60% de l'interface est endommagée et même une petite partie totalement endommagée, ce qui représente moins de 5% dans le cas de l'usage du modèle de Kelvin-Voigt pour le solide déformable et rien de totalement endommagé.

Pour terminer l'étude du comportement de ces lois, les résultats entre un solide déformable respectant le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff et un autre respectant ce modèle avec de la viscosité sont comparés. La figure 4.12 présente les différences de résultats obtenus entre les deux simulations. Contrairement au cas avec les modèles en petites perturbations, l'ajout de la viscosité n'accélère pas l'endommagement de l'interface, au contraire l'interface s'endommage moins vite dans ce cas. Cependant l'ajout d'un comportement visqueux permet de régulariser les évolutions des endommagements de l'interface.

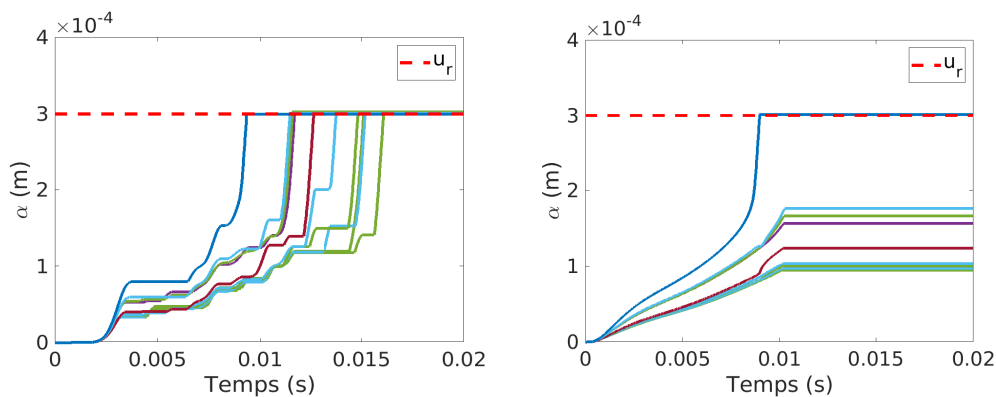


FIGURE 4.12 – Évolution des endommagements des nœuds de l'interface au cours du temps pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff (à gauche) et le modèle avec viscosité (à droite).

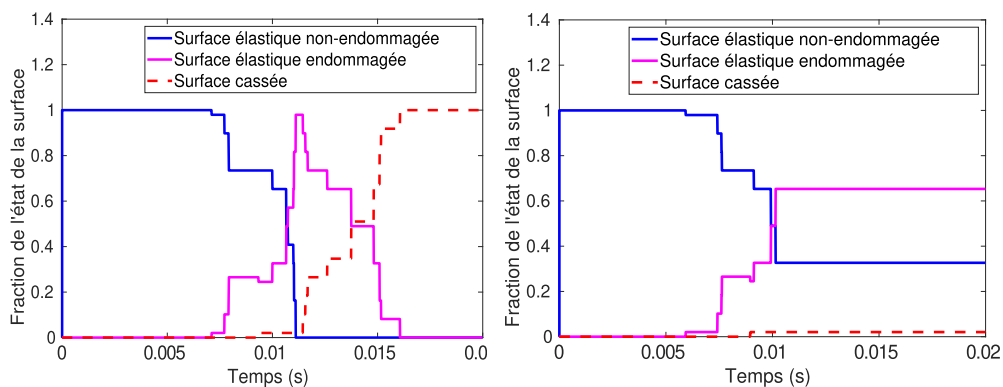


FIGURE 4.13 – Évolution des états de l'interface au cours du temps pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff (à gauche) et le modèle avec viscosité (à droite).

La figure 4.13 présentant l'évolution des états de l'interface au cours du temps pour chacun des modèles pour le solide déformable confirme les conclusions de la figure 4.12. Effectivement, alors que l'interface est totalement endommagée

dans le cas d'un solide déformable dont le comportement respecte le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, elle ne l'est pratiquement pas lorsque que l'on ajoute le comportement de viscosité.

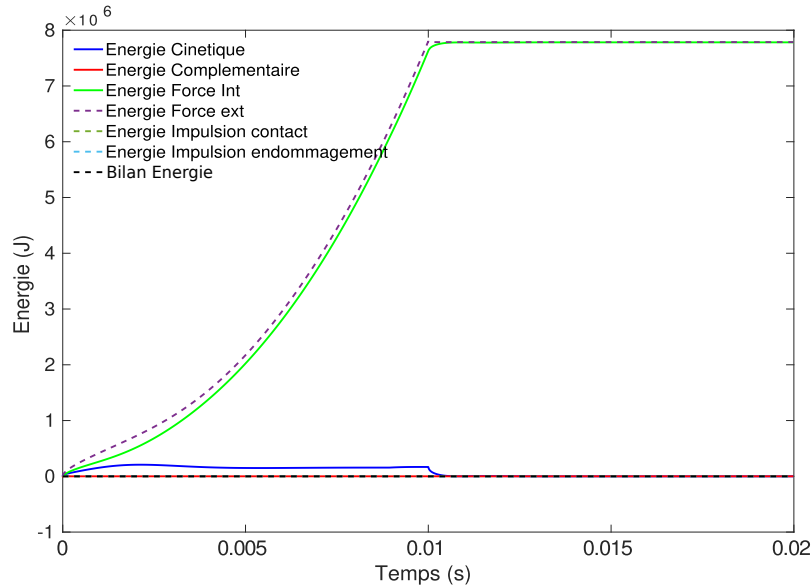


FIGURE 4.14 – Évolution des énergies au cours du temps pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité.

Pour finir cette comparaison, un intérêt est porté à l'évolution des énergies au cours du temps avec la figure 4.14. Cette dernière peut être comparée à la figure 4.5. On remarque que dans le cas du modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité, lorsque que la vitesse imposée devient nulle, voir figure 4.1, l'énergie cinétique diminue, voire s'annule. On peut en conclure que pour arracher l'interface avec ce modèle comprenant de la viscosité pour le solide déformable, il est nécessaire d'appliquer plus longtemps la vitesse imposée sur les nœuds de la face supérieure du cube dans la direction  $z$ . De nouveau, la balance d'énergie est vérifiée, donc le caractère symplectique du schéma est bien conservé.

Pour conclure, dans cette partie deux modèles s'inscrivant dans le cadre des grandes transformations et vérifiant le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés sont étudiés. L'application de ces lois matériaux pour le comportement du solide déformable et son implémentation dans la résolution explicite proposée par l'algorithme (6) mettent de nouveau en avant le caractère modulaire de la résolution proposée. D'autre part, les résultats obtenus montrent que l'impact des grands déplacements sur l'interface n'est pas négligeable lorsque celle-ci s'arrache.

Pour conclure ce manuscrit, un dernier cas test est étudié, et l'objectif est de choisir une géométrie plus complexe et plus représentative d'un démoulage de pneu (seulement une partie du problème pour simplifier). Dans un premier temps la mise en donnée du cas test est présentée ainsi que sa résolution. Le cas test est ensuite implémenté dans un code semi-industriel.

## 4.3 Application industrielle : arrachement d'une lamelle

Dans cette dernière partie, l'objectif est de présenter un cas test plus complexe, notamment avec une interface possédant une géométrie non-régulière. Ce cas test permet de solliciter l'ensemble des composants nécessaires à la résolution en dynamique explicite en grandes transformations de ce type de problème. Le but est de se placer dans le cadre du contexte du démoulage d'un pneu. Ainsi le cas test mis en place correspond lors du démoulage à l'arrachement d'un bout de gomme d'une pièce métallique du moule. Cela est appelé : l'arrachement d'une lamelle.

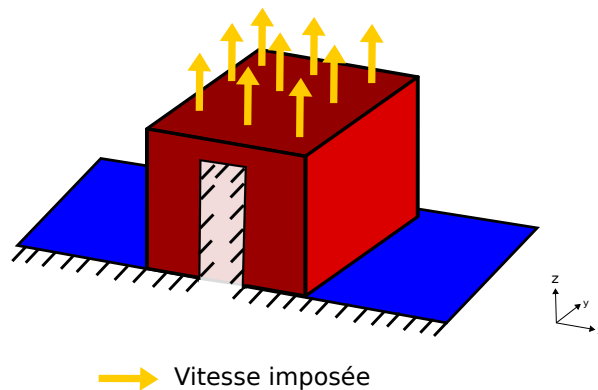


FIGURE 4.15 – Cas test : arrachement d'une lamelle.

La figure 4.15 permet d'illustrer le cas test, avec en rouge le solide déformable à arracher de la lamelle. Pour l'arracher, une vitesse est imposée sur les degrés de liberté correspondant à la direction  $z$  de la face supérieure du solide déformable. Le solide déformable est en contact avec la lamelle au début de la simulation. L'interface est donc bien irrégulière, elle dispose notamment de plusieurs arêtes.

Dans un premier temps, la mise en donnée du cas test est présentée, avec le maillage choisi, l'algorithme de détection du contact utilisé, le choix de la normale locale pour résoudre le contact en chaque nœud de l'interface. Les résultats obtenus sont ensuite présentés. Dans un second temps, une présentation du logiciel industriel utilisé par la Manufacture Française de Pneumatiques Michelin est réalisée. La mise en donnée dans cet environnement est également présentée ainsi que les résultats obtenus.

### 4.3.1 Mise en donnée et résolution

À l'instant initial les deux corps sont en contact actif, comme dans le cas du processus de démoulage. Ainsi, le gap initial  $g_0$  associé à chaque nœud de l'interface est choisi légèrement négatif, de manière à imposer le contact avec certitude. L'ensemble des paramètres matériaux et de simulation sont présentés dans la table 4.1.

TABLE 4.1 – Paramètres pour le cas test associé à l’arrachement d’une lamelle

$E$ (Pa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu_{\text{inf}}$	$\alpha_e$ (m)	$\nu$
$10^8$	1000	0.2	0.0001	0
$u_r$ (m)	$h_{\text{crit}}$ (s)	$h$ (s)	$g_0$ (m)	
0.0003	$2.34 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-5}$	$-1 \times 10^{-10}$	

En ce qui concerne l’évolution de la raideur de l’interface en fonction de l’endommagement, les raideurs normale  $g_N$  et tangentielle  $g_T$  sont choisies égales et leur évolution est celle présentée en figure 2.4. Pour ce cas test, il est choisi d’ajouter du frottement avec un coefficient  $\mu_{\text{inf}}$ , correspondant au coefficient de frottement de l’interface totalement endommagée, non nul. En ce qui concerne la loi de comportement de l’interface, c’est le modèle RCCM avec effet retard avec vitesse limite, voir la section 3.2, avec  $v_r = 0.4 \text{ m.s}^{-1}$ , qui est utilisé.

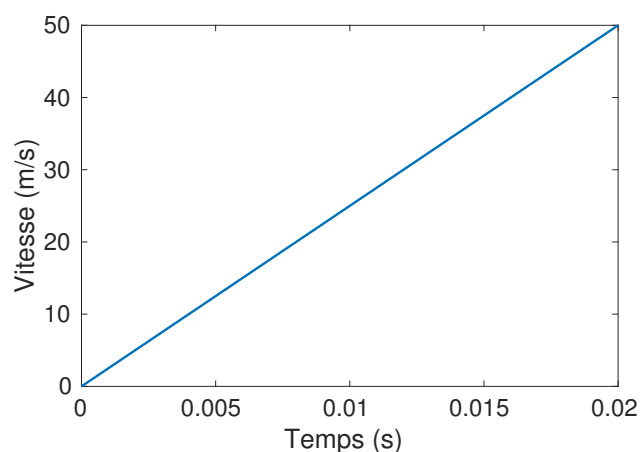


FIGURE 4.16 – Évolution de la vitesse imposée pour obtenir l’arrachement du solide déformable d’une lamelle.

La figure 4.16 présente l’évolution de la vitesse imposée en fonction du temps sur les degrés de liberté de la face supérieure du solide déformable dans la direction  $z$ . Cette vitesse est choisie de manière à observer un arrachement total progressif de la lamelle. La vitesse imposée étant élevée, et l’expérience ayant lieu sur une durée de 0.02 s, le cadre d’un problème de dynamique rapide est justifié.

### Le maillage du solide déformable

La figure 4.17 présente le maillage choisi pour le solide déformable que l’on souhaite arracher de la lamelle. Comme dans les cas tests précédents, ce sont des éléments hexaédriques à 8 nœuds, situés au sommet de chaque élément, qui sont utilisés. Le maillage est régulier, chaque élément est de même taille. Les dimensions associées au maillage sont présentées dans la table 4.2. À noter, la lamelle fait 1 m d’épaisseur sur la direction  $y$ .

Les dimensions présentées dans la table 4.2 ne sont pas représentatives d’une vraie lamelle, cependant l’objectif ici est de tester l’ensemble des phénomènes

TABLE 4.2 – Dimensionnement du maillage du solide déformable

$L_1$ (m)	$L_2$ (m)	$L_3$ (m)	$L_4$ (m)	$L_5$ (m)
1.0	1.0	0.4	1.0	1.6

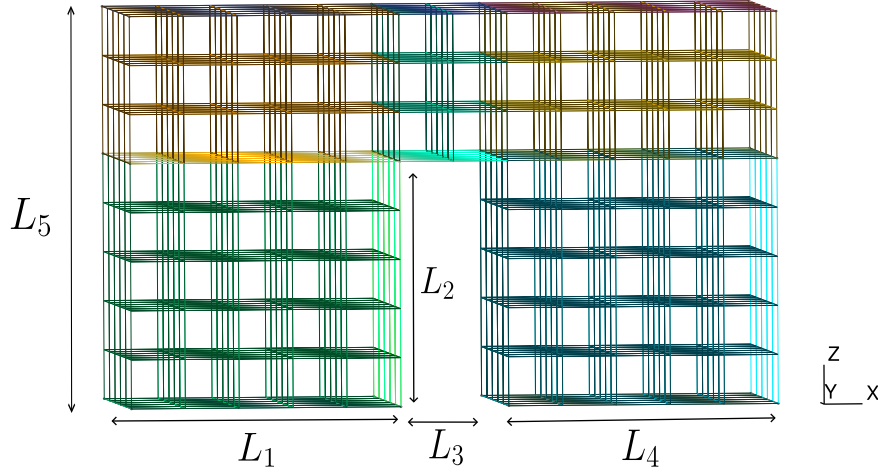


FIGURE 4.17 – Maillage du solide déformable.

associés à un arrachement, comme par exemple, le solide déformable qui rentre en contact plusieurs fois avec le solide rigide, soit la lamelle, après arrachement.

### La détection du contact

Dans le cadre des grandes transformations, il est nécessaire d'utiliser un algorithme de détection de contact. Effectivement, à l'instant initial, les deux solides sont en contact. Lorsque l'effort de traction est appliqué sur la face supérieure du solide déformable, l'interface entre les deux solides va s'endommager jusqu'à ce que les nœuds s'arrachent de l'interface. A ce moment là, le solide rigide, soit la lamelle, n'étant pas horizontale et le solide déformable étant soumis à de grands déplacements et au transport des ondes élastiques, la gomme étant un matériau hyper-élastique, ce nœud peut alors entrer en contact de nouveau avec le solide rigide. Mais, en ce lieu la normale au solide rigide nécessaire au calcul de l'impulsion de contact n'est pas forcément identique à celle de la partie de l'interface où le nœud s'est arraché. C'est pour cela qu'il est nécessaire d'avoir un algorithme de détection de contact.

Dans ces travaux, pour réaliser un algorithme de détection du contact, l'interface est divisée en cinq parties, comme le montre la figure 4.18, associées respectivement aux normales  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4$  et  $\mathbf{n}_5$ . Ces interfaces sont modélisées par cinq plans orthogonaux. Soit  $\epsilon = 1.10^{-4}$  m, une tolérance choisie inférieure à la taille de maille permettant d'éviter la non détermination de la normale dans les coins, voir figure 4.18. Ainsi dans ces derniers, la normale au solide rigide est forcée suivant les normales  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3$  ou  $\mathbf{n}_5$ . Effectivement, dans le cas contraire, les opérateurs de Delassus (1.139) associés à chaque direction de chaque interface ne seraient plus diagonaux. Ainsi le problème ne serait plus explicite, ni "matrix-

free". Il est donc nécessaire que chaque nœud de l'interface soit associé à une seule normale. Avec le schéma CD-Lagrange, la configuration est connue au début du pas de temps, ainsi pour savoir si un nœud est en contact avec une des interfaces, le gap normal de ce nœud est calculé suivant la normale de chacune des cinq interfaces. Si le gap est négatif ou nul, alors le nœud est en contact avec l'interface associée. C'est alors cette normale qui est utilisée pour calculer l'impulsion normale et tangentielle de contact associées à ce nœud avec les algorithmes (2) et (3).

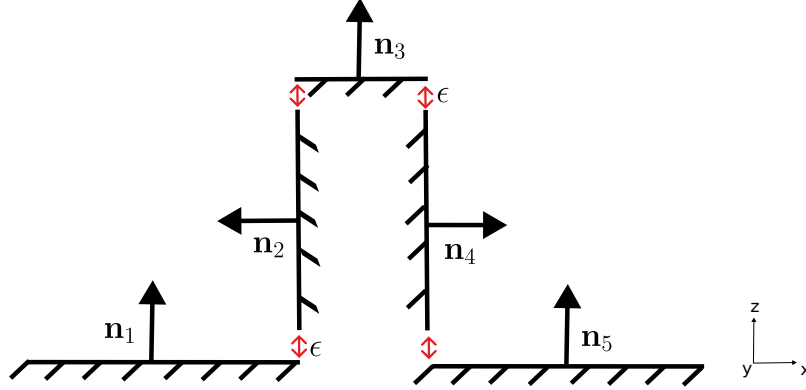


FIGURE 4.18 – Modélisation du solide rigide pour la détection du contact.

L'équation de la dynamique (2.119) à résoudre devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} (\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) &= h (\mathbf{F}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{F}_{\text{int}}^{n+1}) \\ &+ \sum_{j=1}^5 (\mathbf{L}_{N,j}^T \mathbf{R}_{c,N,j,n+3/2} + \mathbf{L}_{T,j}^T \mathbf{R}_{c,T,j,n+3/2}) \\ &+ \sum_{j=1}^5 \mathbf{R}_{d,j,n+3/2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

avec

$$\mathbf{R}_{d,j,n+3/2} = h \mathbf{W}_{j,n+1} (\mathbf{L}_{N,j}^T \boldsymbol{\sigma}_{d,N,j,n+1} + \mathbf{L}_{T,j}^T \boldsymbol{\sigma}_{d,T,j,n+1}) \quad (4.20)$$

avec les opérateurs de projection  $\mathbf{L}_{N,j}$  et  $\mathbf{L}_{T,j}$  entre l'interface  $j$  et les vecteurs globaux définis comme (1.131), (1.132) et (1.133),  $\mathbf{W}_{j,n+1}$  la matrice des poids d'intégration associée à chaque interface  $j$  recalculée à chaque pas de temps et les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{d,N,j,n+1}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_{d,T,j,n+1}$  introduites avec les équations (2.116) et (2.117).

Au niveau des arêtes, l'application de l'équation de la mécanique (4.19) implique que l'on calcule l'impulsion élastique endommageable associée à chaque interface formant l'arête, puis elles sont sommées. Ainsi les contributions des deux interfaces sont prises en compte.

## Les résultats

Dans un premier temps, le premier cas test est réalisé avec un solide déformable avec comme loi de comportement le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff sans

viscosité, voir la section 4.2.1. La résolution du problème est donc réalisée dans le cadre des grandes transformations, et c'est l'algorithme (6) qui est mis en place.

La figure 4.19 montre l'évolution des endommagements  $\alpha$  des nœuds de l'interface. On remarque que l'ensemble des nœuds sont totalement endommagés à pratiquement la moitié de la simulation. Alors que certains nœuds s'endommagent rapidement, la majorité s'endommagent en même temps.

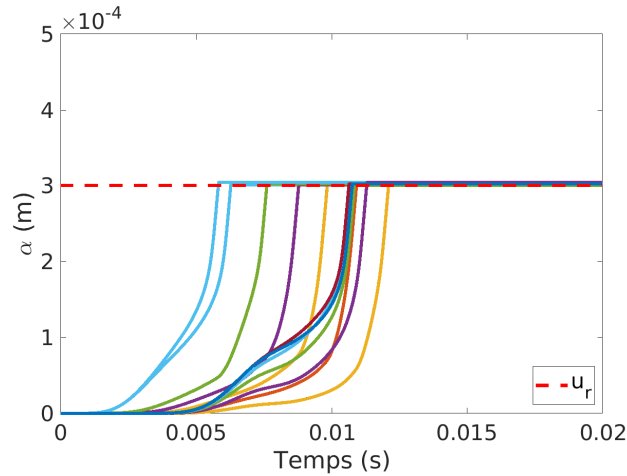


FIGURE 4.19 – Évolution des endommagements de chaque nœud de l'interface de la lamelle pour le cas test de l'arrachement d'une lamelle.

De manière à observer comment s'arrache le solide déformable de la lamelle, la figure 4.19 montre la norme du déplacement sur la lamelle et sa déformée à  $t = 0.0121$  s.

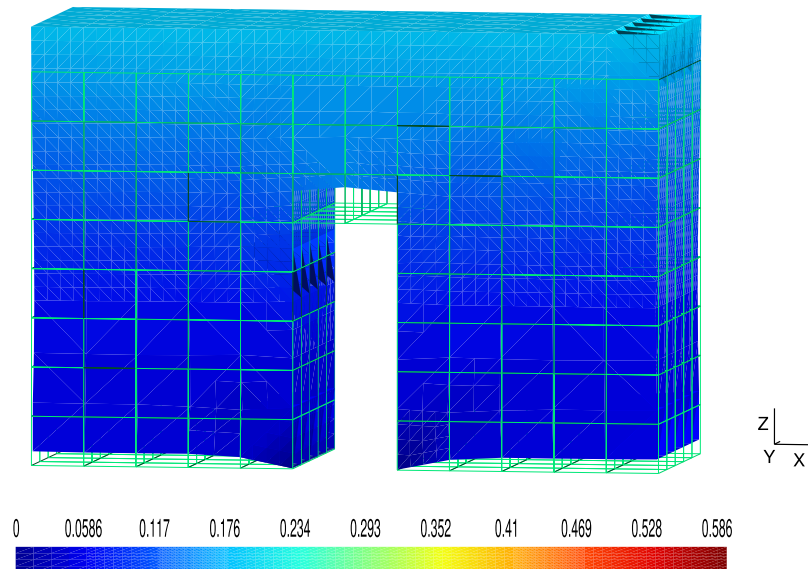


FIGURE 4.20 – Norme du déplacement (m) du solide déformable à  $t = 0.0121$  s pour le cas test de l'arrachement d'une lamelle.

Les premiers nœuds à s'arracher sont ceux situés au niveau de l'interface



associée à la normale  $\mathbf{n}_3$  sur la figure 4.18. Cela s'explique par la fine épaisseur entre cette interface et les nœuds où la vitesse est imposée. Dans un second temps, ce sont simultanément les nœuds des interfaces associés aux normales  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_5$  de la figure 4.18 qui s'endommagent du bord extérieur du solide déformable vers la lamelle comme le montre la figure 4.20. Cela s'explique par un comportement d'adhésion et de frottement sur les interfaces associées aux normales  $\mathbf{n}_2$  et  $\mathbf{n}_4$  de la figure 4.18 comme le montre la répartition des impulsions élastiques endommageables de la figure 4.21. Ainsi de plus grands déplacements et donc de plus grandes déformations sont appliquées à l'extérieur du solide déformable ce qui explique pourquoi ces nœuds s'arrachent en premier.

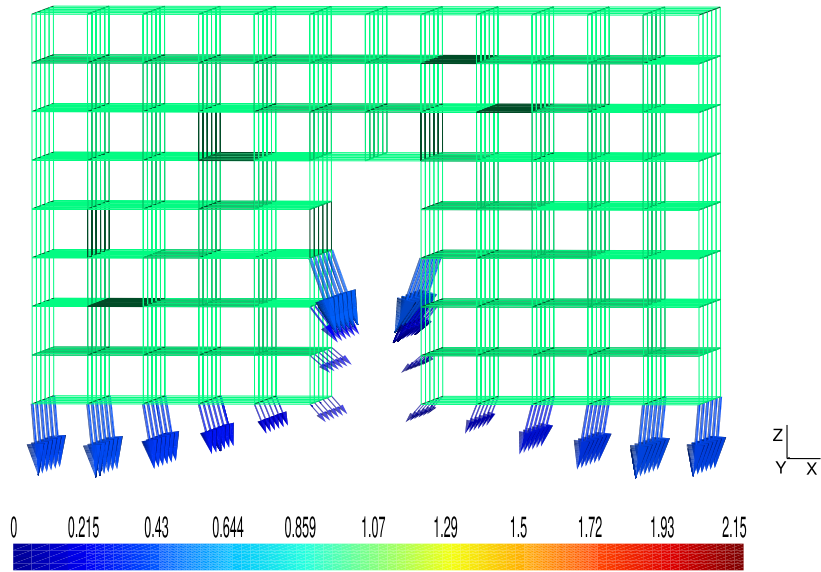


FIGURE 4.21 – Corrections en vitesse associées aux impulsions ( $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}_d$ ) ( $\text{m.s}^{-1}$ ) dues au comportement élastique endommageable à  $t = 0.0077$  s.

La figure 4.21 montre les impulsions associées au comportement élastique endommageable de l'interface. Cette figure présente la valeur des corrections en vitesse associées aux impulsions dues au comportement élastique endommageable de l'interface à un instant précédent la norme du déplacement présentée en figure 4.20. L'endommagement progressif de l'extérieur du solide déformable vers la lamelle est vérifié sur les interfaces associées aux normales  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_5$  avec des corrections décroissantes et de plus en plus inclinées à l'approche des angles de la lamelle. Cela s'explique par des rotations qui ont lieu dans le solide déformable dues aux grands déplacements observés à l'extérieur du solide déformable et au comportement adhésif sur les interfaces associées aux normales  $\mathbf{n}_2$  et  $\mathbf{n}_4$ . Sur les nœuds associés à l'interface associée à la normale  $\mathbf{n}_3$ , il n'y a pas d'impulsions à cet instant, car ces nœuds sont totalement endommagés. Ils correspondent aux nœuds totalement endommagés avant  $t = 0.005$  s sur la figure 4.19.

Pour finir, les nœuds des interfaces associées aux normales  $\mathbf{n}_2$  et  $\mathbf{n}_4$  sont soumis à des impulsions associées au comportement élastique endommageable principalement dans la direction tangentielle. Cela s'explique par une vitesse

imposée colinéaire à la direction tangentielle de ces interfaces. Ces impulsions sont inclinées car il y a également une contribution due au comportement élastique endommageable dû aux rotations dans le solide déformable entraînant une légère traction sur ces nœuds. Le transport des ondes élastiques participe à ce comportement dans le solide déformable, le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff simulant des matériaux hyper-élastiques. Pour finir, les impulsions observées sur l'interface associée à la normale  $\mathbf{n}_2$  sont symétriques à celles observées sur l'interface associée à la normale  $\mathbf{n}_4$  car le coefficient de Poisson est  $\nu = 0$ .

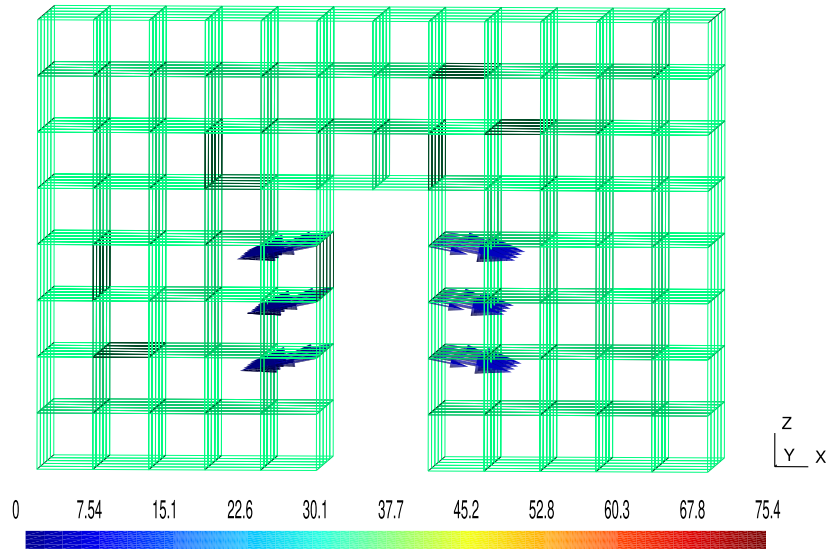


FIGURE 4.22 – Corrections en vitesse dues aux impulsions ( $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}_c$ ) ( $\text{m.s}^{-1}$ ) dues au contact à  $t = 0.0135$  s.

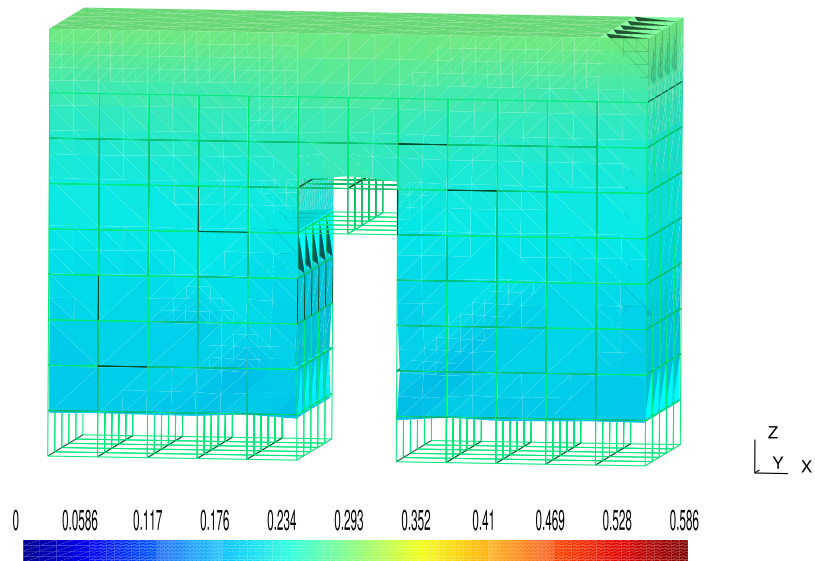


FIGURE 4.23 – Norme du déplacement (m) du solide déformable à  $t = 0.0150$  s pour le cas test de l'arrachement d'une lamelle.

Pour finir, le transport des ondes élastiques et la présence de rotations dans le solide déformable entraînent des contacts après arrachement des interfaces associées aux normales  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_5$  et l'arrachement total de l'interface. C'est à ces instants que l'utilisation de l'algorithme de détection du contact entre en jeu. Ces contacts sont observés sur la figure 4.22 présentant les corrections de vitesse associées aux impulsions liées au contact. On remarque que ces corrections sont dans les deux directions, normale et tangentielle, ce qui s'explique par l'utilisation d'un comportement de contact frottant sur la direction tangentielle avec le coefficient de frottement  $\mu_{\text{inf}}$  choisi non nul dans la table 4.1. D'autre part, sur la norme du déplacement du solide déformable proposée en figure 4.23, on remarque que le solide déformable est en contact avec la lamelle sur le haut de l'interface associée à la normale  $\mathbf{n}_2$ . Un comportement symétrique est observé sur l'interface associée à la normale  $\mathbf{n}_4$ .

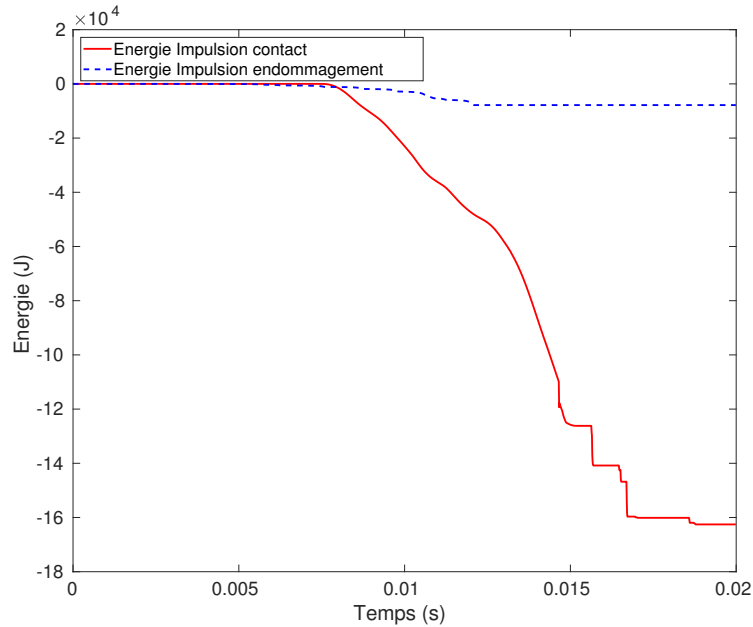


FIGURE 4.24 – Évolution des énergies associées aux impulsions élastique endommageable et de contact au cours du temps pour un solide déformable vérifiant le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff.

Pour appuyer l'apparition du contact du solide déformable sur la lamelle, la figure 4.24 présente l'évolution de l'énergie au cours du temps des différentes impulsions. On remarque bien dans un premier temps que c'est l'impulsion élastique endommageable qui est activée. Ensuite, l'énergie due au contact frottant augmente de manière régulière, c'est dû aux contacts induits par les rotations entraînant aussi un contact frottant. Dans un second temps, les sauts admis par l'énergie des impulsions de contact unilatéral et frottant s'explique par un solide déformable qui vient taper la lamelle comme le montre la figure 4.23.

Pour compléter les résultats, ce cas test est réalisé avec un solide déformable suivant comme loi de comportement le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec

un comportement visqueux, voir la section 4.2.2. De manière à comparer les résultats précédemment obtenus avec le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff, les paramètres de la table 4.1 sont conservés. Les coefficients de relaxation choisis pour caractériser la viscosité (3.16) sont  $\theta_\lambda = \theta_\mu = 1.10^{-3}$  s.

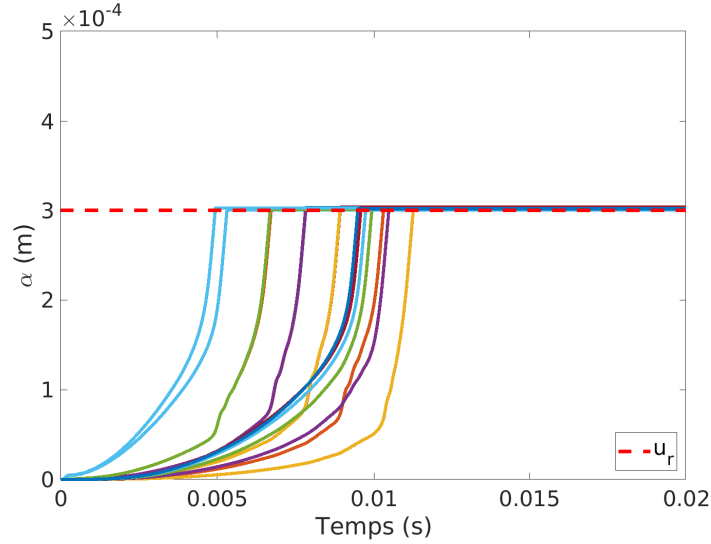


FIGURE 4.25 – Évolution de l’endommagement des nœuds de l’interface au cours du temps pour le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec un comportement visqueux.

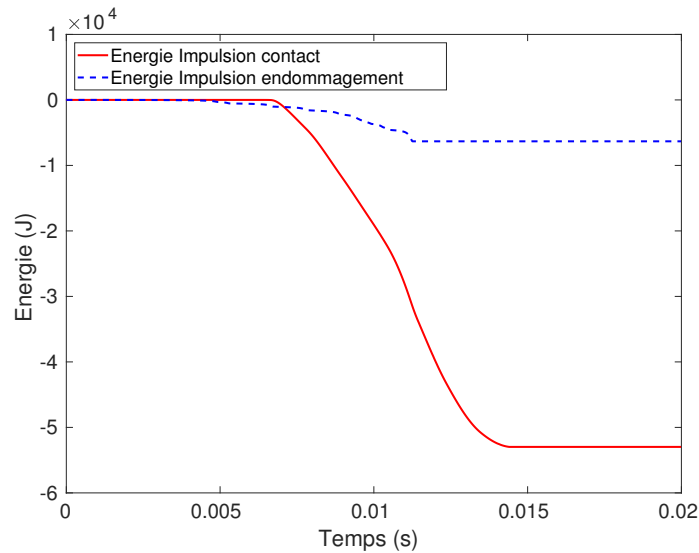


FIGURE 4.26 – Évolution des énergies associées aux impulsions élastique endommageable et de contact au cours du temps pour un solide déformable vérifiant le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff avec viscosité.

La figure 4.25 présente l’évolution des endommagements des nœuds de l’interface au cours du temps, elle est à comparer avec le figure 4.19 donnant les

résultats obtenus avec le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff classique. Il n'y a pas de différence majeure entre les deux résultats.

Pour finir la comparaison, la figure 4.26 présente les résultats obtenus en terme d'évolution des énergies associées aux différentes impulsions au cours du temps. Cette figure est à comparer avec la figure 4.24 obtenus dans le cas d'un solide déformable possédant le comportement du modèle de Saint-Venant-Kirchhoff classique. L'effet de la viscosité est aisément observable. Effectivement la viscosité amortit les ondes, et ainsi le solide déformable n'entre pas en contact avec la lamelle après l'arrachement total, ce qui explique la non apparition de saut pour l'énergie. D'autre part, les valeurs sont plus faibles, ce qui s'explique par des déplacements plus faibles dans le solide déformable dû à la viscosité.

Ainsi dans cette partie, les résultats obtenus avec un cas test plus complexe sont présentés. Dans la suite, l'objectif est de réaliser ce cas test dans un code semi-industriel et regarder la mise en donnée mise en place pour réaliser de tels calculs.

### 4.3.2 Implémentation dans un code semi-industriel : MEF++

Dans cette dernière partie, l'objectif est de réaliser le cas de l'arrachement d'un solide déformable de la lamelle avec un code déjà introduit lors de la convergence espace-temps dans le cadre d'un cube avec interface RCCM sollicité en traction et cisaillement, voir section 2.4.2.2. Ce logiciel semi-industriel de simulation est nommé MEF++, pour Méthode des Éléments Finis, et est développé au sein du GIREF, Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Éléments Finis, à l'université de Laval au Canada (<https://giref.ulaval.ca/>). Il permet notamment de résoudre des problèmes de mécanique des fluides, de structures, en transfert de chaleur, des problèmes instationnaires et/ou fortement couplés. Ainsi il peut être utilisé dans de nombreux domaines et applications. D'autre part MEF++ vise un niveau de performance élevé par son parallélisme. C'est un logiciel qui a pour objectif d'être très modulaire pour l'utilisateur tout en garantissant des performances logicielles industrielles (qualité de code, validation, parallélisme, compatibilité ..). La qualité logicielle est assurée par des compilations multi plateformes et des tests de validations sur l'ensemble de chacune des fonctionnalités, effectuées chaque nuit. C'est cette qualité, sa polyvalence et sa rapidité qui font que les équipes de Michelin ont choisi ce logiciel.

Le logiciel MEF++ est codé dans le langage C++, il permet de résoudre des problèmes allant de une à trois dimensions. Pour la résolution d'un problème, le logiciel prend en entrée un maillage, comme celui proposé à la figure 4.17, réalisé avec le logiciel GMSH (<https://gmsh.info/>) qui est un générateur de maillage libre accès. Ensuite, à l'aide du logiciel MEF++, le fichier de maillage est converti en un fichier ".mail" contenant le maillage (position des noeuds...) et un fichier ".enti", contenant les entités nécessaires aux calculs, notamment les labels identifiants des parties du maillage, comme celui permettant de désigner la surface de contact, ou encore la surface sur laquelle des conditions aux limites sont appliquées. Ainsi, un fichier contenant les conditions aux limites dont l'extension est ".CL" peut être attendu. Elles peuvent également être directement écrites

dans le fichier permettant la mise en donnée du calcul, nommé fichier champs, dont l'extension est ".champs".

Une particularité du logiciel MEF++ est de n'exposer à l'utilisateur que les champs. Ils représentent des grandeurs, que ce soit des scalaires, des vecteurs, des tenseurs que l'on peut ensuite interpoler en fonction d'un schéma d'intégration choisi. Ainsi ces données sont accessibles en n'importe quel point de l'espace à l'aide des fonctions d'interpolation du schéma d'intégration. C'est à l'aide de ces champs que l'on définit l'ensemble des grandeurs nécessaires, notamment celles pour la loi de comportement matériau pour le solide déformable. Ensuite, pour définir un problème, l'utilisateur peut renseigner des termes de formulation dans le fichier .champs. Ils correspondent aux termes de la forme faible de l'équation de la dynamique (2.119) par exemple. Pour illustrer ces propos, des exemples de fichiers .champs sont présentés dans la suite.

Dans le cadre d'un problème avec du contact, un fichier .champs par corps est nécessaire. Un premier concernant le solide déformable et les termes de formulation permettant de résoudre l'équation de la dynamique avec l'initialisation des champs globaux. Un second pour la peau, synonyme de l'interface entre les deux solides, dont l'extension est "-peau.champs", associé au comportement des nœuds de contact potentiel entre les deux corps. Ainsi ce fichier .champs de peau permet de résoudre localement les quantités reliées au contact. Il est ensuite nécessaire de transmettre ces champs locaux sur les champs globaux. Dans MEF++ cela est réalisé à l'aide d'interpolation. Il est important de ne pas oublier ces transitions de champs locaux à globaux sous peine de perdre des informations. L'utilisation de deux fichiers .champs permet une mise en donnée fine à l'utilisateur.

Pour illustrer la mise en donnée sous MEF++, une partie des fichiers .champs du problème global et de peau sont présentés dans cette partie. La figure 4.27 montre comment choisir la loi matériau du solide déformable. De manière à faire comme avec le code prototype, voir la section 4.3.1, c'est une loi de Saint-Venant-Kirchhoff qui est choisie, comme le montre le mot clé "*loi\_svk*". Comme paramètres, on retrouve  $E$  le module d'Young, " $\nu$ " le coefficient de Poisson choisi nul, " $\rho$ " pour la masse volumique et enfin " $LameMu$ " et " $LameLambda$ " les coefficients de Lamé introduits précédemment avec respectivement les équations (3.15) et (3.14). Le mot clé "*propmat*" permettra d'accéder aux propriétés du matériau, notamment pour mettre en place les termes de formulations permettant de résoudre l'équation de la dynamique (2.119).

```
{ Caoutchouc
  scalaire E 1.E8
  scalaire nu 0.
  scalaire rho 1000
  scalaire LameMu f(E,nu)=E/2/(1+nu)
  scalaire LameLambda f(E,nu)=E*nu/(1+nu)/(1-2*nu)

  loi_svk propmat
}
```

FIGURE 4.27 – Implémentation des paramètres matériaux dans le fichier .champs global.

La figure 4.28 montre comment faire appel à un terme de formulation. Dans le cadre du cas test de l'arrachement de la lamelle étudié, il n'y a pas de forces extérieures appliquées à la lamelle, seule une vitesse est imposée sur les nœuds de la surface du haut du solide déformable. Cette condition de Dirichlet est mise en place sous forme de conditions aux limites comme le montre la figure 4.29. Les impulsions étant locales et donc calculées sur la peau, dans le fichier `.champs` global il reste deux termes à calculer, à savoir celui concernant les forces intérieures, et celui concernant la matrice de masse pour posséder l'ensemble des grandeurs nécessaires à la résolution de l'équation de la dynamique (2.119). Pour la matrice de masse  $\mathbf{M}$ , le terme de formulation associé est le `"tfmassegenv3d"` qui permet de calculer la matrice lumpée introduite à l'équation (1.53).

```
//Définition probleme EF global
problemeef probEFglobal
//Définition des TFs stationnaires
//Cas Grandes def
{ probEFglobal
  tfgduuoptim(PasMatrice) lTFUU [champgeo, u, propmat_E, grad_def_u, propmat_S, schema_int, true]
}
//Définition des TFs instationnaires
{ probEFglobal_inst
  tfmassegenv3d      lTFMasse      [champgeo, u, u, rho, schema_int, default]
}

//Définition des quantités pour contact
{corps
  boolean auto_contact      false
  chaînecar type_detection_voisin      projection
  chaînecar type_reconstruction_geometrie      champgeo
  chaînecar entite_pour_peau      SC1
}
```

FIGURE 4.28 – Implémentation des termes de formulation dans le fichier `.champs` global.

En ce qui concerne les forces intérieures associées au comportement du solide déformable, le terme de formulation associé est le `"tfgduuoptim"`. On remarque qu'il prend en argument `"propmat_S"` permettant d'accéder au second tenseur de Piola-Kirchhoff introduit avec l'équation (4.9), avec `"propmat"` le mot clé introduit sur la figure 4.27. De la même manière, `"propmat_E"` permet d'appeler le tenseur des déformations de Green-Lagrange introduit à l'équation (4.2). Lors de leurs appels, ces tenseurs sont calculés et assemblés par la méthode des éléments finis [34]. Contrairement au code prototype où les forces intérieures sont calculées à l'aide du second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  et de la dérivée du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\dot{\mathbf{E}}$  appliquée aux fonctions de forme comme introduit dans l'équation (1.54), dans MEF++ un calcul équivalent est réalisé et s'écrit [34] :

$$\mathbf{F}_{int} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \nabla_X \phi \, dV \quad (4.21)$$

avec  $\mathbf{F}$  le tenseur du gradient de la déformation introduit avec l'équation (1.4),  $\Omega_0$

la configuration initiale. Effectivement la méthode du lagrangien total est utilisée, et  $\phi$  sont les fonctions de forme choisies pour la méthode des éléments finis.

On remarque que sur le terme de formulation associé aux forces intérieures, il y a le mot clé "*PasMatrice*". Il permet de ne pas calculer la matrice résidu nécessaire dans le cas d'une résolution à l'aide d'un schéma implicite, notamment pour itérer dans un algorithme de type Newton-Raphson [34] pour obtenir une solution au problème.

Pour finir avec la figure 4.28, dans la partie après l'instanciation des termes de formulation, des mots clés sont introduits pour la gestion de la détection du contact. Ainsi, le choix est fait de ne pas gérer l'auto-contact du solide déformable. La détection du contact est réalisée par le calcul du gap par projection sur le solide déformable. La détection est réalisée uniquement sur l'entité "*SC1*" faisant référence à la surface du solide déformable en contact avec le solide rigide au début de la simulation, voir le schéma 4.15. Il est à noter que les termes de formulation sont associés à un problème éléments finis dans MEF++, visible avec le mot clé "*probEFglobal*", permettant d'instancier les champs associés.

L'implémentation des termes de formulation met en avant un avantage du logiciel MEF++. Effectivement le caractère modulaire du code permet de choisir facilement les termes de formulation, avec un changement de loi matériau trivial. Comme montré avec la figure 4.27, il suffit de choisir le mot clé associé à la loi de comportement voulue et fournir les variables et paramètres associés à cette dernière. Ensuite grâce à la formulation sous forme de champs, les tenseurs peuvent être calculés en n'importe quel point, permettant ainsi d'assembler les matrices et vecteurs éléments finis avec le schéma d'intégration voulu.

```
//Déplacement imposé - dérivée en temps
scalaire DPrimeX uPrimeX
scalaire DPrimeY uPrimeY
scalaire DPrimeZ f(t) = 2500*t
empilementv3d DPrime [DPrimeX,DPrimeY,DPrimeZ]
//Champ portant les CLs de Dirichlet pour la vitesse
{Dirichlet_FaceSC2
  scalaire divX f(DPrime)=DPrimeX
  scalaire divY f(DPrime)=DPrimeY
  scalaire divZ f(DPrime)=DPrimeZ
  empilementv3d dirichlet_vit [divX,divY,divZ]
}
//conditions par défaut en vitesse
{Dirichlet_defaut
  scalaire divX f(uPrime)=uPrimeX
  scalaire divY f(uPrime)=uPrimeY
  scalaire divZ f(uPrime)=uPrimeZ
  empilementv3d dirichlet_vit [divX,divY,divZ]
}

champsurgeom default=Dirichlet_defaut SC2=Dirichlet_FaceSC2
```

FIGURE 4.29 – Implémentation des conditions aux limites dans le fichier .champs global.

La figure 4.29 montre une façon de mettre en donnée les conditions aux limites dans MEF++. Dans le cas de l'utilisation du schéma CD-Lagrange, les



conditions aux limites sont imposées en vitesse. On remarque que seule sur la composante  $z$  avec " $DPrimeZ$ " une vitesse est imposée avec  $t$  le temps courant. Cette évolution correspond à la figure 4.16. Deux blocs de conditions se distinguent sur la figure 4.29 avec " $Dirichlet\_FaceSC2$ " et " $Dirichlet\_defaut$ ". Le premier correspond aux conditions de Dirichlet appliquées sur la face " $SC2$ ", la face supérieure du solide déformable, voir 4.15, avec chaque composante détaillée. Le deuxième correspond aux conditions appliquées à tous les autres nœuds du maillage. En l'occurrence rien n'est appliqué ici, si ce n'est la propre vitesse des nœuds obtenue après résolution de l'équation de la dynamique (2.119) nommée " $uPrimeK$ " avec  $K$  la composante associée.

Ainsi, maintenant les quantités globales présentées, il reste à implémenter les quantités locales et cela à l'aide du fichier `.champs` de peau. Dans un premier temps, la figure 4.30 montre comment implémenter les variables associées à l'endommagement et son évolution. La première ligne avec la variable " $endommagement$ " correspond à son initialisation. C'est un champ de scalaire, dont les valeurs sont accessibles n'importe où dans l'espace. La vitesse limite d'endommagement  $v_r$  est retrouvée et sa valeur est toujours  $0.4 \text{ m.s}^{-1}$ . La dérivée du saut de déplacement dans le cas en trois dimensions est implémentée avec la variable " $SautU\_point$ " avec la formulation (2.115). Dans un second temps, l'évolution de l'endommagement est implémentée avec la variable " $endommagement\_evol$ " et correspond donc à  $\dot{\alpha}$ . La première formulation en commentaire correspond au modèle RCCM standard introduit avec l'équation (2.114). La seconde, utilisée pour la résolution du cas test avec la lamelle, correspond au modèle RCCM avec effet retard à vitesse limite introduit dans l'équation (3.5).

```

{ Endommagement
  scallin endommagement 0.

  alias ur=corpsEndommagement::u_r
  //Effet retard : vitesse limite endommagement
  scalaire v_r 0.4
  scalaire SautU_point_N produit_scalaire(V3D(uPrime),V3D(u))
  scalaire SautU_point_D sqrt(produit_scalaire(V3D(u),V3D(u)))
  scalaire SautU_point max(SautU_point_N/SautU_point_D,0)

  scalaire NormeU SautU_point_D

  //scalaire endommagementevol if(NormeU >= endommagement & endommagement < ur, max(SautU_point,0), 0)
  scalaire endommagementevol if(NormeU >= endommagement & endommagement < ur, v_r*(1-exp((-max(SautU_point,0)/v_r))), 0)
}

```

FIGURE 4.30 – Implémentation de l'endommagement dans le fichier `.champs` de peau.

Une fois l'endommagement défini, pour résoudre un problème de contact avec endommagement de l'interface, il est d'abord impératif dans MEF++ d'ajouter un problème normal de contact. Ce choix est réalisé, car il est estimé qu'une interface ne peut s'endommager qu'à condition qu'elle soit en contact avec un autre corps. Ensuite dans un second temps, il est nécessaire de définir un problème éléments finis associé au calcul de l'impulsion d'endommagement.

Un exemple de problème d'endommagement est introduit sur la figure 4.31.

```

problemeef probEFpeauEndommagement
{probEFpeauEndommagement

    scallin impEndommagement 0.

    alias normale_endommagement=probEFpeauN::normaleLCP
    alias ae=corpsEndommagement::alpha_e
    alias ur=corpsEndommagement::u_r
    alias endommagement=Endommagement::endommagement

    //evolution de la raideur en fonction de l'endommagement
    scalaire raideur_P1 if(endommagement < ae,g_init, g_init*(1-((endommagement-ae)*(endommagement-ae))/((ur-ae)*(ur-ae))))
    scalaire raideur_interface if(endommagement < ur, raideur_P1,0)
    //déplacement suivant la normale
    scalaire SautU produit_scalaire(V3D(u),V3D(normale_endommagement))

    scalaire poidsNoeuds produit_scalaire(V3D(champsPoids), V3D(normaleNDef))
}

```

FIGURE 4.31 – Implémentation du problème d'endommagement normal dans le fichier .champs de peau.

Il est associé à l'endommagement normal de l'interface du solide déformable. Il est important de remarquer qu'avec MEF++ il n'est pas nécessaire de découper l'interface en cinq parties, comme sur la figure 4.18. L'utilisation de projection sur le solide rigide pour réaliser la détection du contact, permet de connaître la normale du contact. Dans ce problème, on retrouve l'évolution de la raideur de l'interface avec la variable "*raideur\_interface*" qui correspond bien à l'évolution présentée en figure 2.4, le calcul du saut de déplacement normal avec la variable "*SautU*" permettant ensuite de mettre à jour l'impulsion normale avec l'équation (??). Si l'on souhaite ajouter un endommagement tangentiel, il est nécessaire d'ajouter un nouveau problème éléments finis comme celui-ci, en implémentant le saut de déplacement associé à cette direction pour pouvoir calculer l'impulsion d'endommagement associée. Ainsi, techniquement, dans MEF++ il n'est pas nécessaire de différencier les problèmes normaux et tangentiels, il suffit de choisir une direction d'endommagement et calculer le saut de déplacement associé à cette direction pour obtenir l'impulsion associée. Il est choisi de différencier l'impulsion normale et tangentielle dans le cas test de l'arrachement de la lamelle pour rester proche du code prototype. Pour réaliser le calcul de l'impulsion, il est nécessaire de récupérer le poids d'intégration des nœuds en implémentant la variable "*poidsNoeuds*". Au cours de la thèse, l'algorithme (6) appelant le problème élément finis présenté en figure 4.31 a été développé en étendant dans MEF++ la résolution explicite déjà implémentée avec le schéma CD-Lagrange durant la thèse de Jean Di Stasio [24].

Pour mettre à jour le poids d'intégration des nœuds à chaque pas de temps, il est nécessaire d'introduire le concept de PP, plus précisément, de "PréPostTraitement" comme le montre la figure 4.32.

Les PréPostTraitement correspondent à des objets, des marqueurs, que l'on place à un certain endroit du calcul, comme ici au début du pas de temps, et qui seront donc appliqués à cet instant. Dans le cas du poids d'intégration des nœuds, il est nécessaire de les recalculer à chaque pas de temps, l'interface se déformant.

```

// Ajout des PPs au problème
{probEFglobal
  ajoutePrePostTraitement [PPAssemblagePoids, DebutPasDeTemps]
  ajoutePrePostTraitement [PPCopiePoids,      DebutPasDeTemps]
}

```

FIGURE 4.32 – Implémentation des PP dans le fichier .champs de peau.

Ainsi ce PP est associé au calcul d’une pression uniforme sur la surface de contact.

De la même manière, une fois les impulsions de contact et d’endommagement calculées sur la peau, elles sont interpolées sur le domaine global. Ensuite un PP vient mettre à jour la correction de vitesse associée à ces impulsions avec l’équation de la dynamique (2.119) après le calcul des termes de formulation.

### Les résultats obtenus

Dans cette dernière partie, les résultats obtenus avec le logiciel MEF++ sont présentés et comparés aux résultats obtenus avec le code prototype. La détection du contact entre les deux codes étant différente, un premier choix de champs de normale décrivant l’interface du solide rigide est réalisé. Ce champ de normale est lissé et normé sur la surface du solide rigide comme le montre la figure 4.33. Sur cette figure, la valeur du gap initial est également affichée. La norme du gap est de  $g_0 = -1.10^{-10}$ m sur l’ensemble de l’interface, sauf sur les arêtes du bas de la lamelle où la norme est légèrement inférieure, ce qui s’explique par une pénétration  $p = 1.10^{-10}$  m sur les composantes  $x$  et  $z$  entre les deux solides à ces endroits. On remarque que les normales à la lamelle ne sont ni horizontales, ni verticales proche des arêtes, à l’inverse du cas précédent implémenté dans le code prototype avec une détection du contact proposée par la figure 4.18. Sur la figure 4.33, en bas à droite se trouve la légende pour la valeur du gap et en haut à droite celle associée au champ de normales.

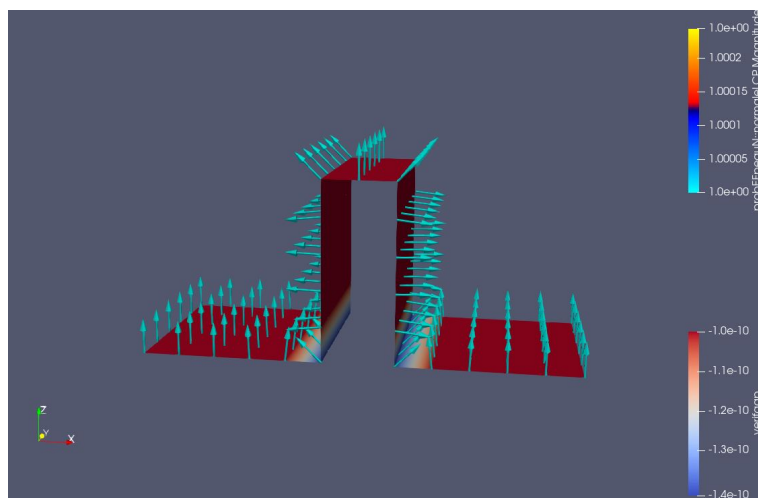


FIGURE 4.33 – Champ de normales MEF++ et gap initial.

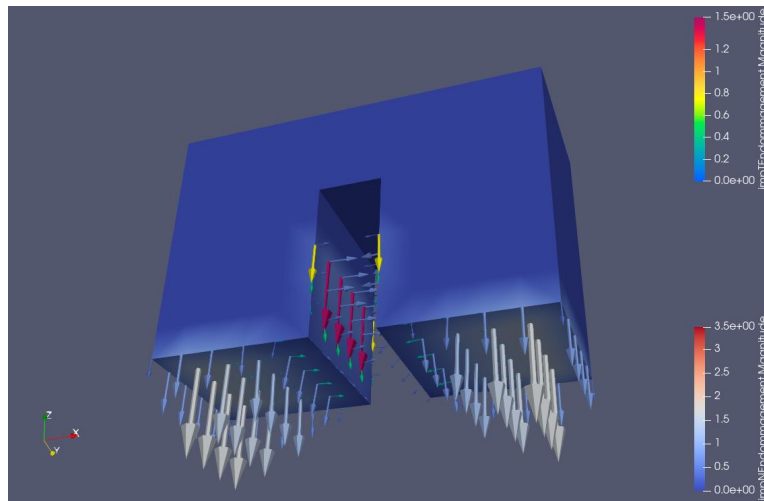


FIGURE 4.34 – Impulsions normales et tangentielles d’endommagement ( $\text{m.s}^{-1}.\text{kg}$ ) au temps  $t = 0.0077$  s obtenues avec MEF++ .

Pour observer les résultats obtenus, les impulsions normales et tangentielles dues à l’endommagement sont étudiées. La figure 4.34 montre la répartition et la valeur des impulsions d’endommagement (2.118) au même pas de temps que sur la figure 4.21. L’échelle des valeurs de l’impulsion tangentielle élastique endommageable se situe en haut à droite et pour l’impulsion normale en bas à droite de la figure 4.34. Ces résultats doivent être comparés à ceux obtenus sur la figure 4.35 correspondant aux impulsions associées aux corrections de vitesse observées sur la figure 4.21. On remarque que la répartition et l’ordre de grandeur des différentes impulsions sont similaires. Cependant elles ne sont pas égales. Cela peut s’expliquer en partie par un champ de normale différent choisi pour calculer les impulsions.

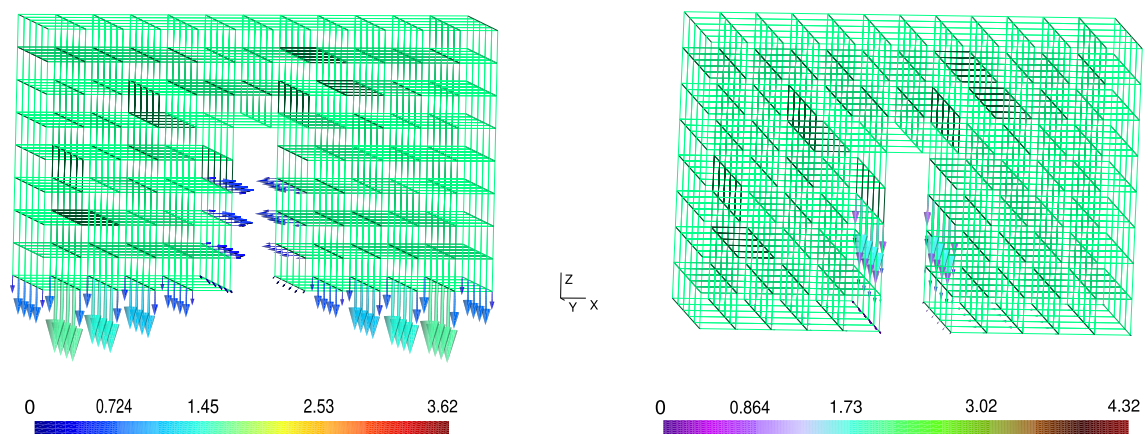


FIGURE 4.35 – Impulsions normales et tangentielles d’endommagement ( $\text{m.s}^{-1}.\text{kg}$ ) au temps  $t = 0.0077$  s associées à la figure 4.21 obtenues avec le code prototype.

La figure 4.36 montre les impulsions de contact obtenues dans la direction normale et tangentielle au solide rigide au même moment que celles obtenues sur la figure 4.22. On remarque que moins de contacts sont obtenus, avec seulement une seule rangée de nœud contre trois dans le cadre de la résolution avec le code prototype. Ces différences s'expliquent par un champ de normale différent et donc des résultats de détection du contact différent. Effectivement, sur la figure 4.33, on remarque que les normales sur les surfaces du solide rigide proches des arêtes sont légèrement inclinés, ainsi les calculs de gap sont légèrement différents.

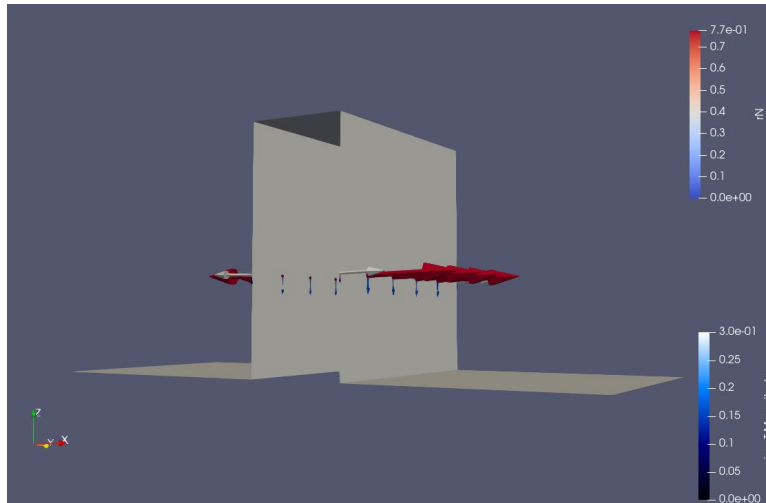


FIGURE 4.36 – Impulsions normales et tangentielles de contact ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{kg}$ ) au temps  $t = 0.0135$  s obtenues avec MEF++ avec le champ de normales introduit en figure 4.33.



FIGURE 4.37 – Norme du déplacement (m) à  $t = 0.0150$  s obtenu avec MEF++ avec le champ de normales introduit en figure 4.33.

La figure 4.37 montre la norme du déplacement observée à  $t = 0.015$  s de la simulation. On remarque un comportement oscillatoire dans le solide déformable

comme sur la figure 4.23 qui s'explique par le comportement hyper-élastique modélisé par le modèle de Saint-Venant-Kirchhoff pour la loi de comportement du solide déformable. Malgré un champ de normales différent, entraînant une valeur des impulsions légèrement différentes à un pas de temps donnée, le comportement général du solide déformable est conservé. Dans un premier temps, le solide déformable s'arrache de l'extérieur de la lamelle vers l'intérieur. Pendant ce temps des impulsions de contact apparaissent sur les surfaces rigides de l'intérieur de la lamelle. Une fois la lamelle totalement arrachée, des impulsions de contact apparaissent lorsque le solide déformable retape le solide rigide.

Pour approcher les résultats obtenus avec le code prototype Matlab, un autre champ de normales est choisi pour réaliser les calculs avec MEF++ comme le montre la figure 4.38. Ce sont les normales au point correspondant par projection qui sont choisies. Ce champ de normales évolue donc au cours du temps suivant la position des nœuds de l'interface, mais les normales au solide rigide restent soit horizontales, soit verticales comme sur la figure 4.18.

Avec ce nouveau champ de normales, la figure 4.39 présente les résultats obtenus pour les impulsions normales de contact, prises au même pas de temps que les figures 4.22 et 4.36. Contrairement à la figure 4.36 dont les résultats sont obtenus avec le champ de normales lissé, présenté en figure 4.33, la répartition des impulsions est analogue à celle obtenue avec le code prototype comme le montre la figure 4.22.

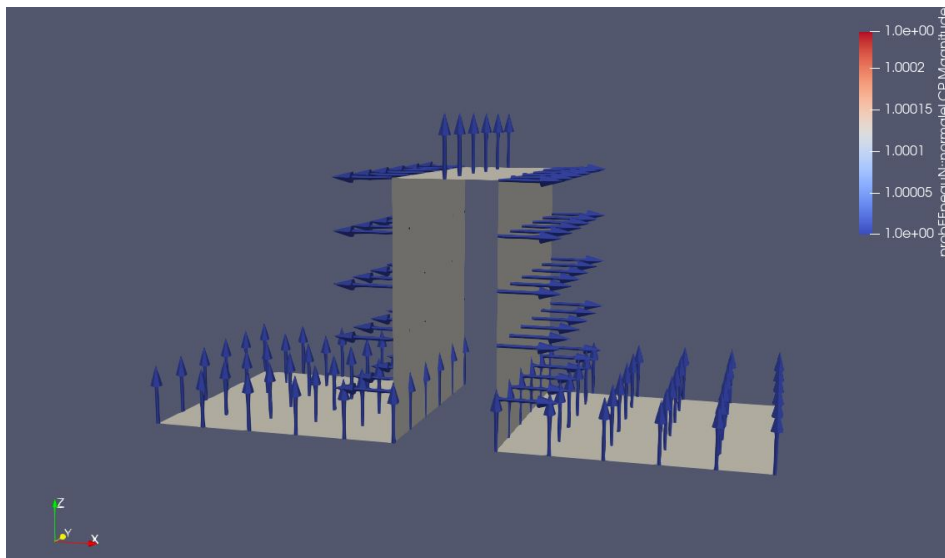


FIGURE 4.38 – Choix d'un champ de normales non lissé extérieur à la lamelle pour la simulation MEF++.

Cependant, la figure 4.40 présente également les résultats obtenus pour les impulsions de contact (2.112),(2.113) au même pas de temps que les résultats obtenus sur la figure 4.39, et on remarque que les valeurs ne sont pas exactement les mêmes. Ainsi, le comportement global est vérifié entre les deux codes, seules les valeurs diffèrent.

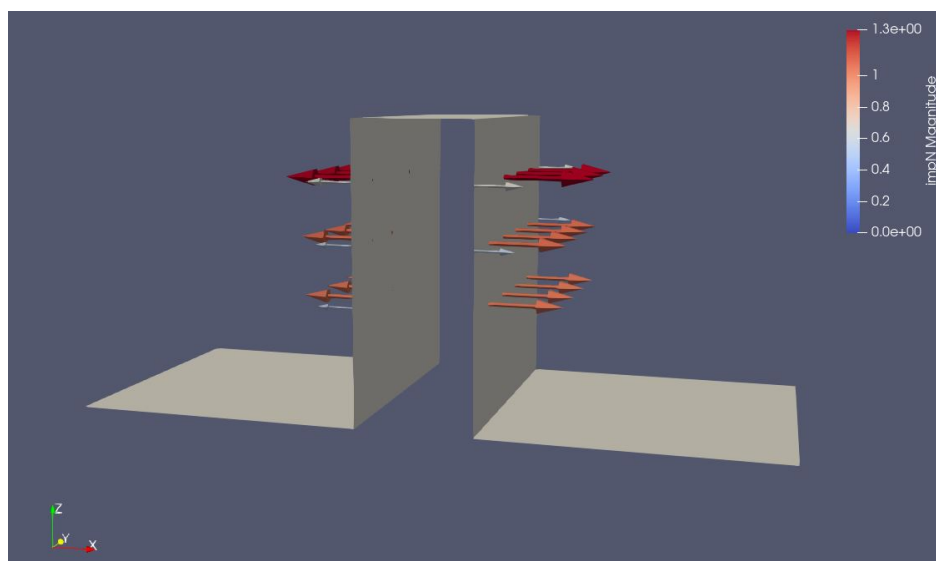


FIGURE 4.39 – Impulsions de contact normal ( $\text{m.s}^{-1}.\text{kg}$ ) à  $t = 0.0135$  s obtenus avec MEF++ avec le champ de normales non lissé.

Pour comparer le comportement global entre les trois simulations proposées, un intérêt est porté à la figure 4.41 montrant les évolutions de la moyenne sur l'endommagement des nœuds sur l'ensemble de l'interface au cours du temps. Ainsi, au début de la simulation, l'endommagement moyen augmente légèrement plus rapidement avec le code prototype et finit par s'endommager légèrement moins vite. Dans le cas de MEF++, suivant le choix du champ de normales, les résultats ne diffèrent que de très peu.

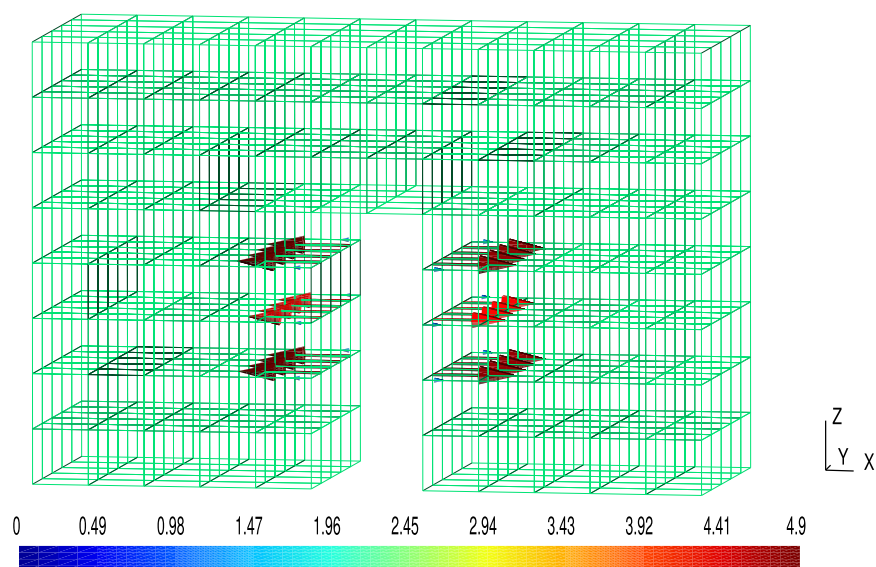


FIGURE 4.40 – Impulsions de contact normal ( $\text{m.s}^{-1}.\text{kg}$ ) à  $t = 0.0135$  s obtenus avec le code prototype.

Il est important de remarquer que l'ensemble des trois courbes évoluent de la

même manière avec un effet retard validé, notamment avec des endommagements qui restent à la limite de rupture  $u_r = 3.10^{-4}$  m à la fin de la simulation.

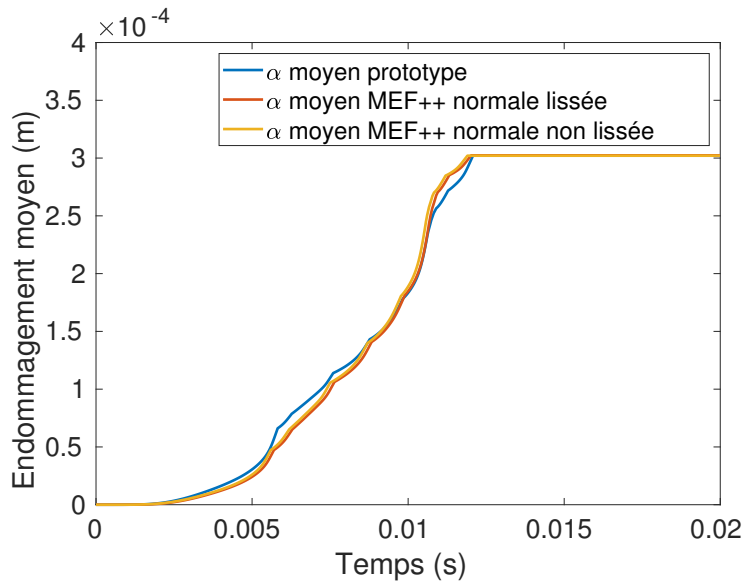


FIGURE 4.41 – Comparaison de l'évolution de la moyenne de l'endommagement au cours du temps.

Pour conclure, une adaptation du code prototype dans un code semi-industriel est réalisée. Cependant de légères différences sont observées sur les résultats. Cela peut s'expliquer par plusieurs facteurs. Dans un premier temps, dans le code prototype, seuls des vecteurs sont utilisés, contrairement à MEF++ où des champs sont calculés et ensuite les vecteurs nécessaires sont calculés à l'aide de fonction d'interpolation, pouvant mener à des écarts numériques qui se propagent entre les deux codes.

Dans un deuxième temps, le choix de la normale de contact et d'endommagement n'est pas identique et n'évolue pas de la même manière. Ainsi, des impulsions de contact qui interviennent à un certain pas de temps dans MEF++, peuvent ne pas intervenir dans le code prototype, et inversement, comme le montrent les résultats obtenus avec le cas du choix d'un champ de normale lissé, voir la figure 4.33.

Dans un troisième temps, une erreur de troncature peut être observée sur le calcul des forces intérieures qui est différent entre les deux codes. Dans le domaine continu, les formulations (1.54) et (4.21) sont équivalentes, mais dans le domaine discrétisé, le calcul de (4.21) demande une opération supplémentaire par rapport à celui réalisé dans le code prototype avec l'équation (1.54). Dans MEF++, le calcul des forces intérieures avec l'équation (4.21) revient à calculer le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, ce qui n'est pas réalisé dans le code prototype. Cependant, malgré ces différences, la figure 4.41 montre que les résultats ont des comportements similaires indépendamment des choix de modélisation.





# Conclusion et perspectives

## Un cadre de résolution explicite

Dans ce manuscrit, plusieurs notions sont abordées. Dans un premier temps, les travaux se basent sur la résolution du contact en dynamique explicite à l'aide du schéma temporel explicite CD-Lagrange introduit dans les travaux antérieurs [31, 24]. Les conditions de contact sont alors présentées avec le formalisme non régulier mis en place par Moreau [59] qui introduit ces conditions, dites aussi de HSM (Hertz-Signorini-Moreau), en impulsion et vitesse, plutôt qu'en force et déplacement. Basé sur cette écriture des conditions de contact, l'équation de la dynamique est alors écrite en impulsion et vitesse pour prendre en compte la résultante associée aux forces de contact sans recours à une régularisation numérique. Dans ce manuscrit, l'objectif est de traiter la simulation numérique d'une interface entre un solide déformable et un solide rigide en dynamique explicite, de problème associant du contact, des comportements d'endommagement et d'adhésion à l'aide de modèles de zones cohésives. Ainsi, l'idée est d'ajouter une nouvelle impulsion associée à ces comportements d'endommagement, d'adhésion, pour conserver une résolution avec le formalisme du schéma explicite CD-Lagrange.

Dans ces travaux, cette approche est basée sur deux composantes. La première concerne le caractère physiquement fondé de la résolution proposée. Effectivement elle est basée sur le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés. Ainsi, les lois de comportement matériau pour le solide déformable, tels que la loi élastique linéaire, ou le modèle de Kelvin-Voigt, ou les lois de comportement d'interface, comme le modèle RCCM choisi dans ce manuscrit, doivent vérifier ce cadre. Pour ce faire, elles doivent vérifier l'inégalité de Clausius-Duhem qui est associée au respect des deux premiers principes de la thermodynamique. Une condition suffisante est d'introduire les lois d'état et d'évolution des lois de comportement avec un potentiel d'énergie libre convexe et un potentiel de dissipation convexe.

La seconde composante de cette approche est donc l'usage du schéma temporel explicite CD-Lagrange basé sur le schéma de la différence centrée. Il est choisi car c'est un schéma dit symplectique, c'est-à-dire qu'il possède de bonnes propriétés énergétiques. La dissipation numérique discrète observée est alors très limitée par les propriétés du schéma. L'application du cadre thermodynamique au schéma temporel revient à écrire l'ensemble des variables d'état à des piquets de temps entiers,  $t_{n+1}$ , alors que les variables associées aux lois d'évolution sont calculées à des demis pas de temps,  $t_{n+1/2}$ .

Un premier avantage de cette approche est que la résolution est "matrix-free", notamment avec l'usage d'une matrice de masse lumpée et car les cas étudiés utilisent soit une géométrie analytique (plan infini), soit un solide rigide maillé et avec un maillage compatible aux interfaces. Ainsi les grandeurs calculées en chaque nœud du maillage sont indépendantes des autres nœuds et peuvent donc être calculées séparément. Cela permet une résolution en parallèle facile à mettre en place et donc une efficacité de calcul réelle. Un second avantage est la gestion des non régularités, notamment sur l'interface, comme avec le contact. Cela peut-être également étendu aux différentes lois de comportement matériau. Un autre avantage de la résolution proposée est son caractère modulaire.

## Une résolution modulaire

Pour mettre en avant l'aspect modulable de la résolution, un premier focus est réalisé sur les lois d'interface. Effectivement, le modèle RCCM standard, présenté dans [22], admet certaines limites en dynamique explicite. Les vitesses d'endommagement n'étant pas bornées, des nœuds de l'interface possèdent alors, lorsque que l'interface s'arrache totalement, des valeurs de saut de déplacement possiblement largement supérieures à la limite de rupture  $u_r$  de l'interface. Pour éviter ce comportement, le choix fait est d'étendre le modèle RCCM standard à des approches avec effet retard. L'objectif étant aussi d'éviter la localisation de l'endommagement. Deux modèles sont présentés, et c'est le modèle RCCM avec effet retard avec vitesse limite qui est retenu. Pour intégrer ces modèles à la résolution, il est nécessaire dans un premier temps de vérifier le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés pour les lois de comportement du nouveau modèle d'interface. Une fois cette vérification validée, les lois d'état et d'évolution du modèle sont discrétisées suivant le schéma CD-Lagrange. Ainsi l'application des modèles à effet retard consiste à seulement modifier la loi d'évolution de l'endommagement. L'algorithme général de résolution proposé, lui, ne change pas. Changer de loi de comportement d'interface n'est donc pas intrusif.

Dans un second temps, le caractère modulaire de la résolution est également montré avec l'utilisation d'autres lois de comportement pour le solide déformable, avec l'application de modèles en grandes transformations. Des exemples sont montrés avec l'introduction de la loi matériau de Saint-Venant-Kirchhoff décrivant des comportements hyper-élastiques et son extension avec l'ajout d'un comportement visqueux. De la même manière que pour le changement de loi de comportement du modèle d'interface, le changement de comportement volumique n'est pas intrusif dans l'algorithme général de résolution. Il est seulement nécessaire de changer le calcul du second tenseur de Piola-Kirchhoff permettant de décrire les contraintes observées sur la configuration initiale. D'autre part, l'utilisation de lois de comportement possédant de la viscosité montre la capacité de la résolution proposée à traiter les non linéarités. Dans le cadre de matériaux visqueux, seul un impact sur le pas de temps est observé.

## Perspectives

La résolution proposée permet de résoudre des problèmes d'interface dans le cadre de problème de dynamique rapide. Son caractère modulable est montré. Cependant, dans le cadre de problématique de type pneumatique, le comportement incompressible [29, 51] de ce dernier ne peut être ignoré. Ainsi, un travail d'adaptation à cette propriété pourrait être intéressant.

En ce qui concerne les lois de comportement pour l'interface, il serait intéressant d'appliquer la résolution à d'autres modèles que le RCCM utilisé dans ce manuscrit, voir l'annexe A2, A3. En effet, d'autres effets non-linéaires peuvent être pris en compte. Dans les travaux réalisés, l'impulsion associée à l'endommagement de l'interface possède un comportement élastique. Il serait alors intéressant de réaliser des cas tests en trois dimensions [28] avec des comportements plastiques ou encore visco-plastiques, voir l'annexe A1. D'autre part, un modèle avec recollement [77, 78], comme un effet post-it peut être mis en place. Effectivement, dans le cadre du démoulage de pneu on peut penser que lorsque l'interface est totalement endommagée, lors d'un nouveau contact avec la lamelle, un léger recollage avec le moule dû au caractère visqueux de la gomme encore chaude, est observé. D'autre part, le démoulage est un procédé où la température change au cours du temps, ainsi il pourrait être intéressant d'appliquer la résolution proposée avec des problèmes couplés thermo-mécanique. Il serait également intéressant d'étudier les cas de maillages incompatibles à l'interface dans le cadre de contact déformable-déformable.

Pour finir, en ce qui concerne le modèle d'interface RCCM avec effet retard avec vitesse limite, une étude du sens physique, à travers des expériences, de la vitesse d'endommagement limite pourrait être intéressante, de manière à réaliser des simulations plus proches d'un réel démoulage de pneu avec comme comportement volumique pour le solide déformable, celui de la gomme.



# Annexes

## A1 : Dynamique explicite et plasticité en volume

Pour illustrer le fait que les modèles puissent s'intégrer au cadre de résolution de l'algorithme (5) facilement, on considère un modèle élasto-plastique classique, sous l'hypothèse de petites perturbations, présentant des non-régularités avec un seuil de plasticité sans viscosité [52]. Par ailleurs, une version de comportement parfaitement plastique est décrite pour le modèle d'interface dans [28].

La configuration partitionne la déformation de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$$

avec  $\boldsymbol{\epsilon}^e$  correspondant à la déformation associée au comportement élastique et  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  au comportement plastique.

Les lois d'état thermodynamique du modèle [52] sont alors décrites comme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^e \\ R &= G(p)\end{aligned}$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 associé à un matériau élastique linéaire isotrope [34] et  $G$  est une fonction croissante, i.e.  $G' = \frac{dG}{dp} \geq 0$ .

Pour décrire le comportement élasto-plastique, il est également nécessaire d'introduire la fonction seuil suivante :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R) = \|\boldsymbol{\sigma}^D\| - R - \sigma_Y$$

avec  $\|\boldsymbol{\sigma}^D\| = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D}$ ,  $\sigma_Y$  le seuil maximal de la contrainte et  $\boldsymbol{\sigma}^D$  le tenseur déviateur associé à la contrainte tel que

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

Pour compléter le modèle, il est nécessaire d'introduire les lois d'évolution thermodynamique dont les formulations sont [52] :

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}^p &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ -\dot{p} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial p}\end{aligned}$$

avec  $\lambda$  un multiplicateur plastique [52] et  $p$  la déformation plastique cumulée. Pour décrire le comportement, il est nécessaire d'ajouter la relation de complémentarité écrite sous une forme similaire au cas de la non-linéarité de contact tel que :

$$\begin{cases} \text{si } f = 0, & 0 \leq \lambda \perp -\dot{f} \geq 0 \\ \text{sinon} & \lambda = 0 \end{cases}$$

avec dans le cas particulier de  $f = 0$  :

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right\rangle_- \\ \lambda &= \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right\rangle_+}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} G' \frac{\partial f}{\partial R}}\end{aligned}$$

Ainsi, l'algorithme associé pour un incrément de temps est détaillé dans (7).

---

**Algorithm 7** Résolution d'un incrément de temps pour un comportement élasto-plastique

---

**Entrées :**  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_{n+1/2}, p_n, \dot{p}_{n+1/2}, \boldsymbol{\epsilon}_n^p, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1/2}^p$  ▷ Configuration explicite  
 $\mathbf{U}_{n+1} \leftarrow \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_{n+1/2}$   
 $p_{n+1} \leftarrow p_n + h\dot{p}_{n+1/2}$   
 $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p \leftarrow \boldsymbol{\epsilon}_n^p + h\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1/2}^p$   
 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \leftarrow \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p)$  ▷ Lois d'état  
 $R_{n+1} \leftarrow G(p_{n+1})$   
 $f_{n+1} \leftarrow f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, R_{n+1})$   
 $\mathbf{V}_{n+3/2} \leftarrow \mathbf{V}_{n+1/2} + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{B}_\sigma^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1})$  ▷ Dynamique Matrix-free  
**if**  $f_{n+1} < 0$  **then**  
     $\lambda_{n+3/2} \leftarrow 0$   
     $\dot{p}_{n+3/2} \leftarrow 0$  ▷ Lois d'évolution  
     $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+3/2}^p \leftarrow 0$   
**else**  
     $\lambda_{n+3/2} \leftarrow \left( \left\langle \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+3/2} \right\rangle_+ \right) / \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} + \frac{\partial f}{\partial R} \Big|_{n+1} G' \frac{\partial f}{\partial R} \Big|_{n+1} \right)$   
     $\dot{p}_{n+3/2} \leftarrow -\lambda_{n+3/2} \frac{\partial f}{\partial R} \Big|_{n+1}$  ▷ Loi d'évolution  
     $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+3/2}^p \leftarrow \lambda_{n+3/2} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1}$   
**end if**  
**Sorties :**  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+3/2}, p_{n+1}, \dot{p}_{n+3/2}, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+3/2}^p$

---

## A2 : Dynamique explicite et modèle d'usure d'Archard

Bien que les modèles d'usure soient principalement utilisés dans les cas quasi-statiques, certaines situations peuvent mettre en jeu les aspects dynamique transitoire. Effectivement, pour des sollicitations vibratoires non périodiques, à fréquence assez élevée, ou du contact interlittent (décollement, impact) par exemple dans les engrennements à haute vitesse, mettent en évidence ces aspects. La difficulté réside alors dans une dynamique en temps long, pour laquelle on souhaite peu de dissipation numérique, afin de bien représenter les effets dissipatifs physiques. C'est un intérêt de l'utilisation de la résolution explicite présentée dans cette thèse.

Dans le cadre de la dynamique explicite, on vise donc à coupler la non régularité (aux impacts en particulier) à un modèle d'usure de type Archard [4]. Ce dernier décrit le volume de masse usé par unité de surface  $e$ , c'est-à-dire l'opposé de la variation de l'épaisseur  $\dot{e}$  de l'interface de contact décrit par

$$\dot{e} = \frac{C}{H} p \|\mathbf{v}_T\|$$

(en fait pour un coté de l'interface : si les deux matériaux s'usent, il y a deux valeurs) où  $\mathbf{v}_T$  est la vitesse tangentielle de glissement relatif,  $p$  la pression de contact,  $H$  la dureté et  $C$  un coefficient phénoménologique à identifier par essais (d'unité inverse d'une pression) relatif à un côté de l'interface, mais dépendant du couple de matériaux en contact. On pourrait donc dire qu'il est caractéristique des deux côtés de l'interface, et donc relatif à l'interface directement.

Dans le cadre de la dynamique explicite non-régulière CD-Lagrange, les actions au contact sont représentées par des répartitions d'impulsion  $r$ . En effet, lors d'un impact, la convergence temporelle quand  $h \rightarrow 0$  est effective pour l'impulsion, mais pas pour la répartition de force  $f = r/h \rightarrow \infty$ , la force à l'impact n'est pas définie.

Cependant, lorsque le contact est maintenu,  $r/h$  converge vers une valeur finie, et plus précisément vers la pression de contact sur la partie normale. Il est donc nécessaire d'avoir une variable interne en plus de l'épaisseur  $e$  pour mémoriser le statut de contact, permettant de séparer les cas d'impact (où  $\dot{e} = 0$ ) des cas de contact maintenu.

La dynamique s'écrit donc :

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}_{n+3/2} - \mathbf{V}_{n+1/2}) = h\mathbf{F}_{\text{ext},n+1} + \mathbf{R}_{n+3/2}$$

avec , voir le chapitre 2,

$$\mathbf{R}_{n+3/2} = \mathbf{L}_N^T \mathbf{R}_{N,n+3/2} + \mathbf{L}_T^T \mathbf{R}_{T,n+3/2}$$

L'incrément de pas de temps est donc décrit dans l'algorithme (8). Bien sur, d'autres modèles plus complexes existent, par exemple en prenant en compte la recirculation des débris d'usure sur le trajet de glissement.



---

**Algorithm 8** Résolution d'un incrément de temps pour un comportement d'usure d'Archard

---

**Entrées :**  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_{n+1/2}, e_n, \dot{e}_{n+1/2}, g_n$   
 $\mathbf{U}_{n+1} \leftarrow \mathbf{U}_n + h\mathbf{V}_{n+1/2}$   $\triangleright$  Configuration explicite  
 $\mathbf{e}_{n+1} \leftarrow \mathbf{e}_n + h\dot{\mathbf{e}}_{n+1/2}$   
 $\mathbf{g}_{n+1} \leftarrow \mathbf{g}_n + \mathbf{L}_N \mathbf{U}_{n+1} + \mathbf{e}_{n+1}$   
Résolution des algorithmes locaux (2) et (3) pour obtenir  $\mathbf{R}_{n+3/2}$   
 $\mathbf{V}_{n+3/2} \leftarrow \mathbf{V}_{n+1/2} + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} + \mathbf{R}_{n+3/2})$   $\triangleright$  Dynamique Matrix-free  
**if**  $g_{n+1} \leq 0$  **then**  $\triangleright$  Loi d'évolution local en chaque nœud  
     $\dot{e}_{n+3/2} \leftarrow \frac{C}{H} \frac{r_{N,n+3/2}}{h} \|\mathbf{v}_{T,n+3/2}\|$   
**else**  
     $\dot{e}_{n+3/2} = 0$   
**end if**  
**Sorties :**  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+3/2}, g_{n+1}, e_{n+1}, \dot{e}_{n+3/2}$

---

### A3 : Interface endommageable extrinsèque

En se basant sur les travaux de [15], l'objectif est de simuler le comportement d'interface présenté en figure 42.

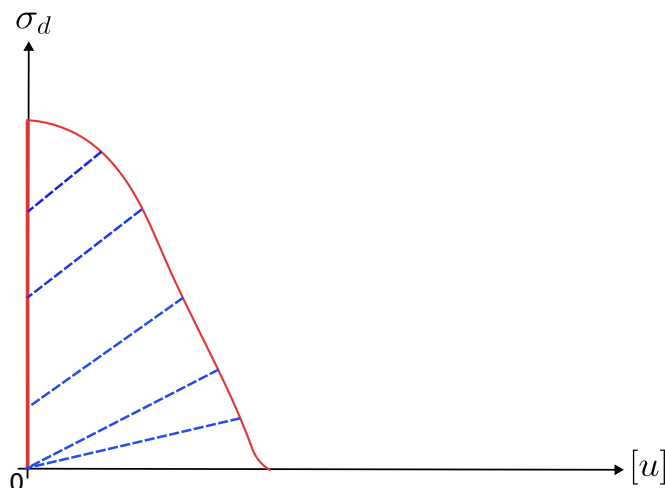


FIGURE 42 – Evolution de la contrainte de l'interface en fonction du saut de déplacement.

Dans un premier temps, la raideur  $k$  de l'interface est infinie, puis sa valeur suit la courbe rouge de la figure 42 lors d'un essai de traction complet. Dans le cas d'un relâchement durant l'essai, la contrainte suit les courbes en pointillés bleus avec un coefficient directeur maximal représentant la rigidité de l'interface  $k = k_{\max}$ . L'objectif de cette manipulation est d'avoir une raideur d'interface pas "trop grande", ce qui pourrait sinon avoir un impact important sur le pas de temps critique. Ce comportement vérifie l'inégalité de Clausius Duhem. Ainsi ce modèle rentre bien dans le cadre de résolution proposé. Un intérêt de ce modèle pourrait être la détection d'une initiation de fissure. Effectivement le choix d'une raideur infinie entre les éléments ne change pas la raideur globale du solide déformable. Lors de la phase d'endommagement, la raideur des éléments est modifiée, c'est en ces lieux que l'on pourrait détecter une initiation de fissure.

La loi d'état du modèle s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha \leq \bar{\alpha}_0, & k = k_{\max} = \frac{f(\bar{\alpha}_0)}{\bar{\alpha}_0} \\ \text{Sinon} & k = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \end{cases}$$

avec  $\alpha$  l'endommagement de l'interface,  $\bar{\alpha}_0$  la valeur de l'endommagement correspondant à la raideur maximale autorisée. Soit la contrainte de l'interface définie comme :

$$\sigma = f(\alpha) - k < \alpha - [u] >_+$$

avec  $< \cdot >_+$  la valeur positive et  $[u]$  le saut de déplacement entre le solide déformable et le solide rigide.

La loi d'évolution du modèle correspondant à la vitesse de l'endommagement peut-être la suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } [u] < \alpha \text{ ou } \alpha > u_r, & \dot{\alpha} = 0 \\ \text{Sinon} & \dot{\alpha} = \langle [u] \rangle_+ \end{cases}$$

Évidemment, une loi d'évolution avec un endommagement à effet retard peut être choisie.

Pour la résolution, on cherche toujours à avoir soit  $k = \infty$  soit  $k \leq k_{\max}$ . Un algorithme de résolution est proposé dans (9) dans le cas d'un seul degré de liberté en contact actif à l'instant initial avec un solide rigide.

---

**Algorithm 9** Résolution d'un incrément de temps pour une interface endommageable extrinsèque

---

$$k_{\max} = f(\bar{\alpha}_0)/\bar{\alpha}_0$$

$$\alpha_0, \dot{\alpha}_{1/2} = 0$$

**Entrées :**  $u_n, v_{n+1/2}$

$$u_{n+1} \leftarrow u_n + h v_{n+1/2}$$

$$\alpha_{n+1} \leftarrow \alpha_n + h \dot{\alpha}_{n+1/2} \quad \triangleright \text{ Configuration explicite}$$

Calcul de la loi d'état associée au comportement de l'interface

**if**  $\alpha_{n+1} > \bar{\alpha}_0$  **then**

$$k = f(\alpha)/\alpha$$

**else**

$$k = k_{\max}$$

**end if**

$$\sigma_{n+1} = f(\alpha_{n+1}) - k \langle \alpha_{n+1} - [u]_{n+1} \rangle_+$$

Calcul de l'impulsion élastique endommageable  $r_{d,n+3/2}$

$$\text{Calcul de } v_{free} = v_{n+1/2} + m^{-1}h(f_{\text{ext},n+1} - f_{\text{int},n+1}) + r_{d,n+3/2}$$

Résolution de l'algorithme (2) pour obtenir  $r_{c,n+3/2}$

$$v_{n+3/2} = v_{n+1/2} + m^{-1}h(f_{n+1}^{\text{ext}} - f_{n+1}^{\text{int}}) + m^{-1}(r_{c,n+3/2} + r_{d,n+3/2}) \quad \triangleright \text{ Dynamique}$$

Mise à jour de la vitesse d'endommagement  $\dot{\alpha}_{n+3/2}$

**Sorties :**  $u_{n+1}, v_{n+3/2}$

---





# Bibliographie

- [1] V. Acary and B. Brogliato. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems*, volume 35 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2008.
- [2] O. Allix and J.-F. Deü. Delayed-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45(1) :29–46, 1997.
- [3] A. Alshegri and R. Abu Al-Rub. Thermodynamic-based cohesive zone healing model for self-healing materials. *Mechanics Research Communications*, 70 :102–113, 2015.
- [4] J. Archard. Contact and rubbing of flat surfaces. *Journal of Applied Physics*, 24(8) :981–988, 1953.
- [5] F. Bamer, N. Shirafkan, X. Cao, A. Oueslati, M. Stoffel, G. de Saxcé, and B. Markert. A Newmark space-time formulation in structural dynamics. *Computational Mechanics*, 67(5) :1331–1348, mar 2021.
- [6] I. Batistic, P. Cardiff, A. Ivankovic, and Z. Tukovic. A finite volume penalty-based implicit procedure for the treatment of the frictionless contact boundaries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 124(18) :4171–4191, 2023.
- [7] H. Bechir, L. Chevalier, M. Chaouche, and K. Boufala. Hyperelastic constitutive model for rubber-like materials based on the first Seth strain measures invariant. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 25(1) :110–124, jan 2006.
- [8] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, and K. I. Elkhodary. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. 2014.
- [9] T. Brink and J.-F. Molinari. Adhesive wear mechanisms in the presence of weak interfaces : Insights from an amorphous model system. *Physical Review Materials*, 3(5), 2019.
- [10] M. Brun, R. Rezakhani, and J.-F. Molinari. Explicit dynamic approach for unbounded domains in frictional contact with rate and state laws. *Finite Elements in Analysis and Design*, 174 :103402, jul 2020.
- [11] T. Carlberger and U. Stigh. An explicit FE-model of impact fracture in an adhesive joint. *Engineering Fracture Mechanics*, 74 :2247–2262, 2007.
- [12] J. Chaboche. Continuum damage mechanics : Part I - general concepts. *Journal of Applied Mechanics*, 55(1) :59–64, 1988.

- [13] J.-L. Chaboche. Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers. *International Journal of Solids and Structure*, 34(18) :2239–2254, June 1997.
- [14] M. Cocu and R. Rocca. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2000.
- [15] N. Collins-Craft, F. Bourrier, and A. V. On the formulation and implementation of extrinsic cohesive zone models with contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 400, 2022.
- [16] M. Copetti and J. Fernandez. Numerical analysis of a quasi-static contact problem for a thermoviscoelastic beam. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(14) :4165–4173, 2011.
- [17] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100, 1928.
- [18] A. Curnier. Unilateral contact. In P. Wriggers and P. Panagiotopoulos, editors, *New Developments in Contact Problems*, pages 1–54, Vienna, 1999. Springer Vienna.
- [19] S. d’Andréa, S. Lejeunes, F. Lebon, V. Blanc, M. Lainet, and T. Helfer. Modélisation multiphysique d’une interface adhésive : dommage mécanique et réactions chimiques. 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, France, Aug 2022.
- [20] Y. Davood, H. Ali, A. Hassan, and E. Esmailzadeh. Elastic and viscoelastic foundations : a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. *Nonlinear Dynamics*, 97 :853–895, 2019.
- [21] R. De Borst. Fracture and damage in quasi-brittle materials : A comparison of approaches. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 122, 2022.
- [22] G. Del Piero and M. Raous. A unified model for adhesive interfaces with damage, viscosity, and friction. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 29(4) :496–507, jul 2010.
- [23] J. Dequidt, J. Lenoir, and S. Cotin. Interactive contacts resolution using smooth surface representation. In N. Ayache, S. Ourselin, and A. Maeder, editors, *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, volume 4792. Springer, Berlin, 2007.
- [24] J. Di Stasio. *The CD Lagrange scheme, a robust explicit time-integrator for impact dynamics : a new singular mass formulation, and an extension to deformable-deformable contact*. PhD thesis, INSA, Lyon, France, 2021.
- [25] R. Diekmann, J. Hungershöfer, M. Lux, L. Taenzer, and J.-M. Wierum. Efficient contact search for finite element analysis. ECCOMAS, Barcelona, September 2000.
- [26] A. V. Dimaki, E. V. Shilko, I. V. Dudkin, S. G. Psakhie, and V. L. Popov. Role of adhesion stress in controlling transition between plastic, grinding and breakaway regimes of adhesive wear. *Scientific Reports*, 10(1), jan 2020.

- [27] N. Dirani and L. Monasse. An explicit pseudo-energy conservative scheme for contact between deformable solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 125(4) :e7395, 2023.
- [28] D. Dureisseix, P. Larousse, A. Gravouil, and J. Di Stasio. An explicit dynamics framework suited to highly non-smooth interface behaviors. *Journal of Theoretical, Computational and Applied Mechanics*, 2024.
- [29] Y. El Archi, S. Lahellec, S. Lejeunes, and A. Jouan. Modeling the nonlinear dynamic behavior of filled elastomers : Application to the vibration of structures with large preloads. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 107, 2024.
- [30] M. Elices, G. Guinea, J. Gomez, and P. J. The cohesive zone model : advantages, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2) :137–163, 2002.
- [31] F.-E. Fekak. *Étude de la réponse dynamique des ponts roulants soumis à des chocs multiples pendant un séisme : co-simulation implicite / explicite multi-échelle en temps pour la dynamique du contact*. PhD thesis, Université de Lyon, 2017.
- [32] F.-E. Fekak, M. Brun, A. Gravouil, and B. Depale. A new heterogeneous asynchronous explicit-implicit time integrator for nonsmooth dynamics. *Computational Mechanics*, 60 :1–21, Mar. 2017.
- [33] R. C. Fetecau, J. E. Marsden, M. Ortiz, and M. West. Nonsmooth lagrangian mechanics and variational collision integrators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2(3) :381–416, 2003.
- [34] A. Fortin. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. 2020.
- [35] M. Fremond. Adhesion of solids. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(3) :383–407, 1987.
- [36] M. Geradin and D. J. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and application to structural dynamics*. Wiley, 3 edition, Jan. 2015.
- [37] D. S. Grierson, E. E. Flater, and R. W. Carpick. Accounting for the JKR-DMT transition in adhesion and friction measurements with atomic force microscopy. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 19(3-5) :291–311, jan 2005.
- [38] G. Guillaumet, M. Rivero, M. Zavala-Aké, M. Vazquez, G. Houzeaux, and S. Oller. A parallel algorithm for unilateral contact problems. *Computers and Structures*, 271, 2022.
- [39] R. Hensel, K. Moh, and E. Arzt. Engineering micropatterned dry adhesives : from contact theory to handling applications. *Adv. Funct. Mater.*, 28 :1800865, 2018.
- [40] T. J. R. Hugues. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987.
- [41] M. Jean, V. Acary, and Y. Monerie. Non-smooth contact dynamics approach of cohesive materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society*



- of London. *Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1789) :2497–2518, dec 2001.
- [42] S. Johnsen, Z. Taylor, L. Han, Y. Hu, M. Clarkson, D. Hawkes, and S. Ourselin. Detection and modelling of contacts in explicit finite-element simulation of soft-tissue biomechanics. *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, 2015.
- [43] C. Kane, J. E. Marsden, and M. Ortiz. Symplectic-energy-momentum preserving variational integrators. *Journal of Mathematical Physics*, 40(7) :3353–3371, 1999.
- [44] K. Kendall. The adhesion and surface energy of elastic solids. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 4(8) :1186–1195, aug 1971.
- [45] N. Kikuchi and J. Oden. *Contact Problems in Elasticity*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988.
- [46] S. Kockara, T. Halic, C. Bayrak, K. Iqbal, and R. Rowe. Contact detection algorithms. *Journal of Computers*, 4(10) :1053–1063, 2009.
- [47] P. Ladeveze, O. Allix, J.-F. Deu, and D. Leveque. A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-2) :105–122, 2000.
- [48] P. Larousse, D. Dureisseix, A. Gravouil, and J. Di Stasio. A thermodynamic motivated rcm damage interface model in an explicit transient dynamics framework. *Computational Mechanics*, 2024.
- [49] D. Lasry and T. Belytschko. Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6) :581–597, 1988.
- [50] S. Le Berre, I. Ramiere, J. Fauque, and D. Ryckelynck. Condition number and clustering-based efficiency improvement of reduced-order solvers for contact problems using lagrange multipliers. *Mathematics*, 10(9), 2022.
- [51] S. Lejeunes and D. Eyheramendy. Hybrid free energy approach for nearly incompressible behaviors at finite strain. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 32(2) :387–401, 2020.
- [52] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge, Aug. 1994.
- [53] F. Marazzato, A. Ern, C. Mariotti, and L. Monasse. An explicit pseudo-energy conserving time-integration scheme for hamiltonian dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 347, 2019.
- [54] J. E. Marsden and M. West. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica 2001*, 10 :357–514, 2001.
- [55] S. Medina and D. Dini. A numerical model for the deterministic analysis of adhesive rough contacts down to the nano-scale. *International Journal of Solids and Structures*, 51(14) :2620–2632, jul 2014.
- [56] K. Miller, G. Joldes, D. Lance, and A. Wittek. Total lagrangian explicit dynamics finite element algorithm for computing soft tissue deformation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23 :121–134, 2007.

- [57] Y. Monerie. *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 2000.
- [58] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics*, 1940.
- [59] J. J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In J. J. Moreau and P. D. Panagiotopoulos, editors, *Nonsmooth Mechanics and Applications*, pages 1–82. Springer Vienna, 1988.
- [60] J. J. Moreau. Numerical aspects of the sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3-4) :329–349, 1999.
- [61] K. Moreau, N. Moës, D. Picart, and L. Stainier. Explicit dynamics with a non-local damage model using the thick level set approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102 :808–838, 2014.
- [62] N. M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85 :67–94, 1959.
- [63] R.-W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 326(1567) :565–584, feb 1972.
- [64] M. Paggi and P. Wriggers. A nonlocal cohesive zone model for finite thickness interfaces - par ii : Fe implementation and application to polycrystalline materials. *Computational Materials Science*, 50(5) :1634–1643, 2011.
- [65] R. Peerlings, R. De Borst, B. W.A.M., and M. Geers. Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21, 2002.
- [66] F. Perales, Y. Monerie, F. Dubois, and L. Stainier. Fissuration dynamique des composites a matrice metallique. Application au Zircaloy hydrure. In *17eme Congrès Français de Mécanique*, 2005.
- [67] B. N. J. Persson, O. Albohr, U. Tartaglino, A. I. Volokitin, and E. Tosatti. On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion. *J. Phys. : Condens. Matter*, 17 :R1–R62, Feb. 2005.
- [68] G. Pijaudier-Cabot and D. Grégoire. A review of non local continuum damage : modelling of failure? *Networks and Heterogeneous Media*, 9(4) :575–597, 2014.
- [69] V. Popov. Energetic criterion for adhesion in viscoelastic contacts with non-entropic surface interaction. *Reports in Mechanical Engineering*, 2(1) :57–64, mar 2021.
- [70] M. Rachik, J.-M. Roelandt, and J.-L. Batoz. Simulation numérique du soufflage et du thermoformage des plastiques. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 3 :187–210, 1994.
- [71] M. Raous. Interface models coupling adhesion and friction. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(7-8) :491–501, jul 2011.

- [72] M. Raous, L. Cangémi, and M. Cocu. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3-4) :383–399, jul 1999.
- [73] M. Raous and M. A. Karray. Model coupling friction and adhesion for steel concrete interfaces. *International Journal of Computer Applications in Technology*, 34(1) :42–51, 2009.
- [74] M. Raous and Y. Monerie. Unilateral contact, friction and adhesion : 3D cracks in composite materials. In J. Martins and M. M. Marques, editors, *Contact Mechanics*, volume 103 of *Solid Mechanics and Its Applications book series*, pages 333–346. Kluwer, 2002.
- [75] M. Raous, M. Schryve, and M. Cocou. Recoverable adhesion and friction. In C. C. Banagiotopoulos, editor, *Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with applications in Engineering*, pages 165–172. Ziti Publisher, 2006.
- [76] M. Schiebl and P. Betsch. Structure-preserving space-time discretization of large-strain thermo-viscoelasticity in the framework of GENERIC. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(14) :3448–3488, apr 2021.
- [77] M. Schryve. *Modèle d’adhésion cicatrisante et applications au contact verre/élastomère*. Theses, Université de Provence - Aix-Marseille I, Nov. 2008.
- [78] M. Schryve and M. Raous. Contact et adhésion cicatrisante. In *8e Colloque national en calcul des structures*, Giens, France, May 2007. CSMA.
- [79] J. C. Simo, N. Tarnow, and K. K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(1) :63–116, 1992.
- [80] D. Soares. Three novel truly-explicit time-marching procedures considering adaptive dissipation control. *Engineering with Computers*, mar 2021.
- [81] A. Suffis. *Développement d’un modèle d’endommagement à taux de croissance contrôlé pour la simulation robuste de ruptures sous impacts*. PhD thesis, INSA Lyon, 2004.
- [82] J. Sun, K. Lee, and H. Lee. Comparison of implicit and explicit finite element methods for dynamic problems. *Journal of Materials Processing Technology*, 105(1-2) :110–118, 2000.
- [83] C. Talon and A. Curnier. A model of adhesion coupled to contact and friction. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22 :545–565, June 2003.
- [84] N. Terfaya, A. Berga, and M. Raous. A bipotential method coupling contact, friction and adhesion. *International Review of Mechanical Engineering (IREME)*, 9(4) :341, jul 2015.
- [85] O. H. Yeoh. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66(5) :754–771, nov 1993.
- [86] J. Zghal and N. Moës. Analysis of the delayed damage model for three one-dimensional loading scenarii. *Comptes Rendus. Physique*, 21(6) :527–537, jan 2021.

- [87] I. Zreid, R. Behnke, and M. Kaliske. ALE formulation for thermomechanical inelastic material models applied to tire forming and curing simulations. *Computational Mechanics*, 67(6) :1543–1557, apr 2021.







## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'INSA LYON, MEMBRE DE L'UNIVERSITE DE LYON

NOM : **LAROUSSE**

DATE de SOUTENANCE : **29/11/2024**

Prénoms : **Paul**

TITRE : **Modélisation d'interface endommageable en dynamique explicite dédiée au démoulage de pneumatiques**

NATURE : **Doctorat**

Numéro d'ordre : **2024ISAL0098**

École Doctorale : **MEGA (Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique)**

Spécialité : **Génie Mécanique**

#### RÉSUMÉ :

Le pneumatique est un produit complexe soumis à de nombreuses contraintes. Il doit répondre à un compromis entre coût, performance, sécurité et recyclabilité. Il est formé d'une multitude de couches composées de différents matériaux entraînant des comportements complexes à étudier. Ainsi, le choix de la simulation numérique s'impose, permettant notamment l'étude de nombreux scénarios. Elle permet d'étudier l'impact de chaque étape de fabrication, et notamment celle du démoulage, qui a inspiré cette thèse. Ce problème non-régulier est associé à du contact et de l'endommagement, modélisés à l'aide de modèle de zones cohésives, et à de la dynamique rapide, phénomènes rarement combinés ensemble en simulation.

Le problème à résoudre étant en dynamique transitoire, le choix d'un intégrateur temporel explicite s'impose. L'idée ici est d'utiliser un schéma explicite symplectique possédant ainsi de bonnes propriétés énergétiques en vérifiant les équations de conservation discrètes. Basé sur des travaux antérieurs, le choix est porté sur le schéma explicite CD-Lagrange.

Ainsi, l'étude se concentre sur l'interface de contact entre un solide déformable, et un solide rigide. Une méthode pour résoudre en dynamique des problèmes d'interface est présentée. Un cadre thermodynamique et explicite de résolution est alors proposé, avec un traitement local des non-linéarités et des non-régularités conduisant à un algorithme de résolution "matrix-free". Les formulations sont basées sur le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés et de la mécanique non régulière. Ensuite, l'accent est mis sur les lois d'évolution thermodynamique en étudiant la non-localité temporelle pour limiter la localisation de l'endommagement sur l'interface. Des modèles à effet retard sont alors introduits. L'aspect modulaire de la résolution proposée est montré, avec l'application de plusieurs lois d'interface et de comportement volumique. L'application à des problèmes en grandes transformations est également fournie. Enfin, la faisabilité de l'approche est mise en évidence par son intégration dans un code semi-industriel, MEF++.

MOTS-CLÉS : **Dynamique du contact non-régulière, Intégrateurs temporels explicites, Modèle de zones cohésives, Modèle d'endommagement à effet retard, Interface, Intégrateurs temporels symplectiques**

Laboratoire(s) de recherche : **LaMCoS, INSA Lyon, Université de Lyon, CNRS**

Directeur de thèse : **David Dureisseix, Anthony Gravouil**

Président du Jury : **Jean-François Deü**

Composition du Jury :

**Stéphane Lejeunes, Isabelle Ramière, Jean-François Deü, Laurent Monasse, David Dureisseix, Anthony Gravouil, Jean Di Stasio, Thomas Homolle**