



**HAL**  
open science

# Estimation multi-technique de l'ajustement isostatique glaciaire en Antarctique

Alexandre Boughanemi

► **To cite this version:**

Alexandre Boughanemi. Estimation multi-technique de l'ajustement isostatique glaciaire en Antarctique. Glaciologie. Université Côte d'Azur, 2024. Français. NNT : 2024COAZ5062 . tel-04942121

**HAL Id: tel-04942121**

**<https://theses.hal.science/tel-04942121v1>**

Submitted on 12 Feb 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

# THÈSE DE DOCTORAT

## Estimation multi-technique de l'Ajustement Isostatique Glaciaire en Antarctique

**Alexandre BOUGHANEMI**

Laboratoire Géoazur (UMR 7329 CNRS), Observatoire de la Côte d'Azur

Présentée en vue de l'obtention du grade de  
docteur en Sciences de la Planète et de  
l'Univers

d' Université de la Côte d'Azur

Dirigée par: Riad HASSANI / Anthony  
MÉMIN

Soutenue le: 15 novembre 2024

Devant le jury composé de:

Laurent MÉTIVIER, Directeur de recherche, IGN

Stéphane MAZZOTTI, Professeur, Université de Montpellier

Jean-Paul BOY, Physicien, EOST, Strasbourg

Muriel LLUBES, Maîtresse de conférences, Université Toulouse III-Paul  
Sabatier

Riad HASSANI, Professeur, Université Côte d'Azur

Anthony MÉMIN, Maître de conférences, Université Côte d'Azur

# Estimation multi-technique de l'Ajustement Isostatique Glaciaire en Antarctique

Jury:

Rapporteurs

Laurent MÉTIVIER, Directeur de recherche, IGN  
Stéphane MAZZOTTI, Professeur, Université de Montpellier

Examineurs

Jean-Paul BOY, Physicien, EOST, Strasbourg  
Muriel LLUBES, Maîtresse de conférences, Université Toulouse III-Paul Sabatier

Directeurs de thèse

Riad HASSANI, Professeur, Université Côte d'Azur  
Anthony MÉMIN, Maître de conférences, Université Côte d'Azur

Invités

Giorgio SPADA, Professeur, Université de Bologne

# Résumé et mots clés

---

**Titre: Estimation multi-technique de l'Ajustement Isostatique Glaciaire en Antarctique**

---

**Résumé:**

La Terre se déforme de façon viscoélastique en réponse aux variations de masse superficielle se produisant sur quelques heures à plusieurs milliers d'années. Dans le cadre des changements de la cryosphère, l'ajustement isostatique glaciaire (GIA) a classiquement été modélisé en invoquant une rhéologie élastique, pour les variations les plus récentes, ou une rhéologie viscoélastique de type Maxwell, pour les variations débutant au dernier maximum glaciaire. En Antarctique, où les effets induits par les variations récentes et passées de masse de la calotte se cumulent, ces modèles ne permettent pas d'expliquer les observations géodésiques et gravimétriques acquises depuis plus de 20 ans. Dans cette thèse nous explorons l'influence de trois lois rhéologiques dans la modélisation des déformations induites par les changements passés et récents de la calotte Antarctique. Nous considérons les lois rhéologiques de Maxwell, Andrade et Burgers ainsi qu'un profil de viscosité typiquement utilisé dans la modélisation du GIA et un second qui comprend une couche de faible viscosité dans le manteau supérieur. Il ressort que les profils de viscosités et les rhéologies ont un impact significatif pour des déformations se produisant entre 10 et 1 000 ans après les variations de masse en surface. L'utilisation des rhéologies de Burgers et d'Andrade mène à des déformations plus grandes que celles de Maxwell, avec des différences allant jusqu'à 300 mm pour les déplacements verticaux résultant des variations de masses actuelles. Afin de déterminer les déformations visqueuses en Antarctique tout en s'acquittant d'hypothèses contraignantes sur la structure interne et la rhéologie du manteau, nous avons développé une stratégie d'inversion qui utilise conjointement trois types d'observations : l'altimétrie et la gravimétrie satellitaire ainsi que le positionnement GNSS. Les paramètres déterminés par cette inversion sont les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques des taux de variation d'épaisseur de la calotte, des densités superficielles des masses qui varient et des vitesses verticales associées aux déformations visqueuses de la surface. Des tests réalisés sur des données synthétiques montrent que cette nouvelle méthode permet de retrouver les coefficients jusqu'au degré harmonique 40. Les paramètres, cartes et données prédites par l'inversion sont très proches de ceux attendus, avec des erreurs principalement inférieures à 1 %.

---

**Mots clés:** Gravimétrie - Antarctique - Positionnement - Méthode Inverse - Isostasie - Altimétrie

# Abstract and keywords

**Title:** Multi-technique estimate of Glacial Isostatic Adjustment in Antarctica

**Abstract:**

The Earth deforms viscoelastically in response to variations in surface mass over periods ranging from a few hours to several thousand years. In the context of changes in the cryosphere, glacial isostatic adjustment (GIA) has classically been modeled by invoking elastic rheology, for the most recent variations, or Maxwell-type viscoelastic rheology, for variations beginning at the last glacial maximum. In Antarctica, where the effects induced by recent and past variations in cap mass are cumulative, these models are unable to explain the geodetic and gravimetric observations acquired over the past 20 years. In this thesis, we explore the influence of three rheological laws in modeling deformations induced by past and recent changes in the Antarctic ice cap. We consider the rheological laws of Maxwell, Andrade and Burgers, as well as a viscosity profile typically used in GIA modeling and a second that includes a low-viscosity layer in the upper mantle. We find that viscosity profiles and rheologies have a significant impact for deformations occurring between 10 and 1 000 years after surface mass changes. Using the Burgers and Andrade rheologies leads to larger deformations than the Maxwell rheology, with differences of up to 300 mm for vertical displacements resulting from current mass variations. In order to determine viscous deformations in Antarctica while satisfying constraining assumptions about the internal structure and rheology of the mantle, we have developed an inversion strategy that makes joint use of three types of observations : satellite altimetry and gravimetry, and GNSS positioning. The parameters determined by this inversion are the coefficients of the spherical harmonic decomposition of cap thickness variation rates, surface densities of varying masses and vertical velocities associated with viscous surface deformations. Tests carried out on synthetic data show that the new method is able to recover coefficients up to harmonic degree 40. The parameters, maps and data predicted by the inversion are very close to those expected, with errors mainly below 1 %.

**Keywords:** Gravimetry - Antarctica - Positioning - Inverse Method - Isostasy - Altimetry

*“I have found that it is the small everyday deed of ordinary  
folks that keep the darkness at bay.  
Small acts of kindness and love.”*

*– Gandalf, The Hobbit: The desolation of Smaug, or There and  
Back Again*



## Remerciements

Ainsi nous y voilà. La grande rédaction de ma carrière. Le manuscrit est envoyé, la présentation est faite. Si je rédige aujourd'hui ces lignes, c'est que j'ai accompli ma mission et que je suis maintenant docteur en géophysique de l'Université Côte d'Azur. Cet accomplissement est mien, mais il n'aurait jamais été possible sans l'ensemble des personnes qui m'ont soutenues tout au long de cette aventure. Il est maintenant temps pour moi d'offrir ces quelques lignes pour remercier toutes ces personnes.

Tout d'abord je souhaite remercier Anthony Mémin et Riad Hassani, mes deux directeurs, sans qui cette thèse n'aurait pas eu lieu. Cette aventure n'aurait pas été possible sans toute la patience, sagesse, gentillesse et bienveillance dont ils ont fait preuve. Merci à vous deux d'avoir cru en moi de la Licence au Master pour enfin finir en Thèse. Ensuite je tiens à remercier toute l'équipe de GEOAZUR qui tout au long de ma thèse m'a soutenu, guidé et aidé. Je tiens spécialement à remercier Frédérique Leclerc pour tout le soutien, l'écoute, la bienveillance et la gentillesse qu'elle m'aura offert du début à la fin de la thèse. Le groupe de rédaction est une excellente idée qui m'aura beaucoup aidé pour la rédaction du manuscrit, et j'espère que tu pourras continuer avec les futurs doctorants. Enfin je tiens à remercier l'ensemble de mon jury, Laurent Métivier, Stéphane Mazzotti, Jean-Paul Boy, Muriel Llubes et Giogio Spada pour tout leur temps et bienveillance durant les quelques mois de fin de thèse.

Deuxièmement, j'aimerais remercier les autres personnes de mon laboratoire avec qui j'ai passé ces 3 belles années. Les premières personnes que je souhaite remercier sont Arthur Christelle et Vincenzo. Mon début de thèse n'aurait jamais pu être le même sans vous, et ces quelques derniers mois de labeur n'auraient pas été aussi fluides si nous ne nous étions pas entraînés. Sachez tous les trois que ma porte vous sera toujours ouverte (N'oubliez pas de venir boire un verre si vous êtes du côté du CNES!). Merci aussi à tous ceux, avec qui j'ai mangé ces trois dernières années. Les parties de ping-pong, tarot et toutes nos belles discussions m'auront permis de me décompresser et égayer mes journées. Un remerciement générique ne serait pas approprié alors vous aurez tous droit d'être nommé! Un Grand Merci à Andréa pour toutes nos discussions que ce soit autour d'un café le matin, ou autour d'une bière après le travail. Merci à Alexita, Pierre, Andy, Sylvain, Clara, Nicolas, Clélia, Alex, Mathieu, Frichnel, Philippe, Julien, Mailys, Alexander, Chloé, Feyza. Toutes les aventures, toutes les soirées à la plage et tous les moments que nous auront partagé pendant ces trois années resteront gravés dans ma mémoire. Je prends cette ligne pour souhaiter bonne chance et bon courage à Nicolas, Alex et Clélia pour leur thèse qui commence l'année où se fini la mienne.

Enfin ces remerciements ne seraient jamais complets sans ces lignes pour remercier ces quelques spéciales personnes. Tout d'abord, Merci à ma famille qui m'aura soutenu ces trois années. Clément, mon frère, des mots infinis ne sont jamais utiles avec toi puisque nous avons démontré à de maintes reprises que nous pensons, réfléchissons, et rigolons à la même vitesse. Tu sais ce que ton support m'aura apporté, et même si des kilomètres nous séparent nous seront toujours sur la même longueur d'onde. Une Personne qui mérite sa place ici est mon amie Carlina. Cette amitié inattendu qui a commencé au don du sang de Nice aura été une source de joie et de belles discussions. Je te souhaite tout le meilleur pour la fin de ta formation

et pour la suite. Je veux ensuite offrir mes plus sincères remerciements à mon amie Marion. Notre amitié a peut-être commencé tard dans la thèse, elle n'en reste pas moins l'une de mes plus précieuses. Toutes nos parties de 'battle of hogwarts' ces mercredis soirs, toutes les conversations et tous les repas que nous avons partagés resteront parmi mes meilleurs souvenirs de thèse. Toutes mes félicitations pour ton appartement, et j'ai hâte de vous revoir toi et Julien dès que je reviendrai sur Nice. Je ne peux simplement pas finir ces lignes sans remercier du fond du cœur Laetitia, sans qui mener la thèse à sa fin aurait été tout simplement impossible. Tu fais partie des plus belles personnes que j'ai pu rencontrer de toute ma vie. Je n'ai pas la maîtrise des mots pour exprimer tout ce que ton amitié me représente, mais la plus belle chose est que je n'ai pas besoin de m'exprimer pour que tu saches tout ça. Quand j'écris ces lignes, tu n'as pas encore fini ta thèse. Même si tu le sais déjà, sache que je serais toujours là en cas de besoin. Je te souhaite tout le meilleur du monde, et j'ai hâte de te revoir pour la remise des diplômes et ta soutenance de thèse!

Je finirai par remercier toutes les personnes que j'ai pu rencontrer durant ma thèse, et je vous souhaite à tous le meilleur du monde.

# Liste des figures

2.1	Représentation des rhéologies viscoélastique de Maxwell, d'Andrade et de Burgers d'après Castillo-Rogez et al. (2011). . . . .	8
2.2	Nombres de Love de charge (LLNs) élastiques pour un modèle de Terre PREM (Dziewonski and Anderson, 1981) d'après Mémin (2011). . . . .	13
2.3	Schéma de la convolution spatio-temporelle effectuée pour la modélisation des effets des redistributions de masses (voir cours M2 MÉMIN Anthony). $M$ représente le point d'observation des déformations, $a$ est le rayon terrestre, $\Psi$ est la distance angulaire entre l'observateur et l'excitation et $\alpha$ est l'azimut de la distribution de masse. . . . .	15
2.4	Carte du déplacement vertical élastique induit par la déglaciation instantanée de la calotte glaciaire décrite dans la table 2.1. La ligne verte montre le méridien le long duquel les déplacements au cours du temps sont estimés (Figure 2.5a et b). . . . .	16
2.5	(a) Profil en latitude des déplacements verticaux issus de la déglaciation pour la rhéologie de Maxwell, obtenus avant la déglaciation ( $t = -50$ ans), lors de la déglaciation ( $t = 0$ ans), puis 500 et 2000 ans après la déglaciation. (b) différences dans les déplacements verticaux par rapport à la rhéologie de Maxwell pour les rhéologies de Burgers et d'Andrade. Les lignes verticales en tirets noirs montrent les limites de la calotte glaciaire. . . . .	18
2.6	Déplacement radial (a) et variations de gravité (b) cumulés calculés pour un observateur se trouvant sous la calotte glaciaire. (c) et (d) montrent les taux de ces deux paramètres. Les courbes vertes montrent les réponses élastiques. . . . .	20
2.7	Déplacement radial (a) et variations de gravité (b) cumulés calculés pour un observateur se trouvant en périphérie de la calotte. (c) et (d) montrent les taux de ces deux paramètres. Les courbes vertes montrent les réponses élastiques. . . . .	21
3.1	Density (a), rigidity (b) and viscosity (c) profiles for the Earth models VM5a and VM5am. . . . .	30
3.2	Deformations over time due to unloading at $t = 20$ yrs and loading at $t = 70$ yrs for the Maxwell, Andrade and Burgers rheologies with $\sigma_0 = 1$ Pa. In a), we show the effect of the $\frac{\eta'}{\eta}$ ratio, b) the $\frac{\mu'}{\mu}$ ratio and c) the $\alpha$ parameter. . . . .	31
3.3	LLNs computed using the Earth model VM5a with the Burgers (a) and Andrade (b) rheologies for several values of $\frac{\eta'}{\eta}$ and $\alpha$ respectively 1 year after loading. . . . .	33
3.4	LLNs computed for VM5a (solid) and VM5am (dash) Earth models using Maxwell (blue), Andrade (red) and Burgers (black) rheologies 1 year (a) and 10 years (b) after the loading. The green curves show the elastic LLNs for the VM5a (solid) and VM5am (dashed) models. . . . .	36

3.5	LLNs computed for VM5a (solid) and VM5am (dash) Earth models using Maxwell (blue), Andrade (red) and Burgers (black) rheologies 100 years (a) and 1,000 years (b) after the loading. The green curves show the elastic LLNs for the VM5a (solid) and VM5am (dashed) models. . . . .	37
3.6	LLNs computed for VM5a (solid) and VM5am (dash) Earth models using Maxwell (blue), Andrade (red) and Burgers (black) rheologies 10,000 years after the loading. The green curves show the elastic LLNs for the VM5a (solid) and VM5am (dashed) models. . . . .	38
3.7	Present-day radial displacement (a) and gravity variation (b) rates in Antarctica induced by the Pleistocene deglaciation estimated using the ICE-6G_C (VM5a) deglaciation model and the VM5a viscosity profile, using a Maxwell rheology. Differences between present-day radial displacement rates estimated using Maxwell and Andrade rheologies (c) and using Maxwell and Burgers rheologies (d) due to the Pleistocene deglaciation in Antarctica and using the VM5a viscosity profile. The yellow star indicates the location where time series of Figure 3.8 are estimated. . . . .	40
3.8	Cumulative radial displacement during the last 26 kyrs (a) estimated using the ICE-6G_C (VM5a) model using VM5a and VM5am Earth models. The observer is located on the shore of the Antarctic peninsula as shown in Figure 3.7. b) and c) : same as a) but during two shorter time intervals: the beginning of the melting of the AIS (b) and the last 1 kyr before present (c). . . . .	42
3.9	Thickness variation rates between 2002 and 2017 for the PDIMC model of the AIS (a). Pink triangles show the locations of the GPS stations used in Barletta et al. (2018). The yellow star show the location where vertical displacement (b) and gravity variations (c) are estimated using the Maxwell, Andrade and Burgers rheologies. The deglaciation starts in 2002 and ends in 2017. The green lines show the purely elastic response for the VM5a and the VM5am Earth models. . . . .	43
3.10	Time varying rates of the viscous radial displacement (a) and gravity variation (b) estimated near PIG (yellow star in Fig. 3.9-a). . . . .	44
4.1	Schéma des observables disponibles en Antarctique et des composantes du déplacement vertical (VLM pour Vertical Land Motion), des observations d'altimétrie (h) et de gravimétrie (g), modifié d'après Vishwakarma et al. (2023). PDSMC correspond à l'acronyme Present-Day Surface Mass Change pour variations de masses de surface actuelles. . . . .	49
4.2	Carte des taux de variations de gravité GRACE calculés pour des évaluations mensuelles sur la période de 2003 à 2017 pour la solution RL05 du GRGS et reconstruite jusqu'au degré harmonique 60. . . . .	51
4.3	Domaine couvert par les différentes missions d'observations d'altimétrie en Antarctique d'après Schröder et al. (2019). . . . .	52
4.4	Carte des taux de variations d'élévation de la surface Antarctique obtenus d'après les données de Schröder et al. (2019) avant la dégradation à 300 km. . . . .	53
4.5	Carte des distributions des observations (a) et de la grille des observations complémentaires (b). Les points verts de la carte a) représentent les observations d'altimétrie et de gravimétrie, les points rouges les localisations des stations GNSS. . . . .	61

4.6	Représentation de la calotte polaire utilisée pour valider notre stratégie d'inversion. . . . .	62
4.7	Observations reproduites en fonction des observations attendues. La droite rouge correspond à la droite de coefficient directeur égal à 1. . .	63
4.8	Différences entre les données synthétiques et les données prédites par l'inversion en fonction de la latitude. Les couleurs des points correspondent à leur longitude. . . . .	64
4.9	Erreurs relatives des CDHS des taux de variation d'épaisseur de calotte, des densités superficielles des masses variant et des vitesses verticales visqueuses de la surface pour le modèle analytique. . . . .	65
4.10	(a) Carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	66
4.11	(a) Carte des densité superficielle des masses variant, reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des densité superficielle des masses variant inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	67
4.12	(a) Carte des vitesses verticales visqueuses reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des vitesses verticales visqueuses inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	68
4.13	Carte des masses volumiques utilisées pour la construction du modèle réaliste de l'inversion. . . . .	69
4.14	Différences entre les données synthétiques et les données prédites par l'inversion en fonction de la latitude pour le modèle réaliste. Les couleurs des points correspondent à leur longitude. . . . .	70
4.15	Observations reproduites en fonction des observations attendues pour un modèle de calotte dit réaliste. La droite rouge correspond à la droite de coefficient directeur égal à 1. . . . .	71
4.16	Erreurs relatives des CDHS des taux de variation d'épaisseur de calotte Antarctique reconstruite au degré 40. . . . .	73
4.17	Erreurs relatives des CDHS des taux de variations de masse surfacique pour la calotte Antarctique reconstruite au degré 40. . . . .	74
4.18	Erreurs relatives des CDHS des taux de déplacement vertical de la surface reconstruite au degré 40 au degré 40. . . . .	75
4.19	(a) Carte des taux de variation d'épaisseur de calotte reconstruit jusqu'au degré 40, (b) Carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	76
4.20	(a) Carte des densité superficielle des masses variant, reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des densité superficielle des masses variant inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	77
4.21	(a) Carte des vitesses verticales visqueuses reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des vitesses verticales visqueuses inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	78
4.22	Variances par degré harmoniques des CDHS pour le modèle réaliste, en noir le spectre attendu, en bleu le spectre obtenu pour l'inversion et en orange le spectre obtenu pour l'inversion comprenant les 4 stations fictives supplémentaires. . . . .	80

4.23	(a) Carte des taux de variation d'épaisseur de calotte glaciaire reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire inversée jusqu'au degré 40 avec les stations supplémentaires, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	81
4.24	(a) Carte des densité superficielle des masses variant reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des densité superficielle des masses variant inversée jusqu'au degré 40 avec les stations supplémentaires, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	82
4.25	(a) Carte des vitesses verticales visqueuses reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des vitesses verticales visqueuses inversée jusqu'au degré 40 avec les stations supplémentaires, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés. . . . .	83
4.26	Erreurs relatives des CDHS des taux de variation d'épaisseur de calotte Antarctique reconstruite au degré 40 en ajoutant 4 stations fictives sur le plateau est Antarctique. . . . .	84
4.27	Erreurs relatives des CDHS des taux de variations de masse surfacique pour la calotte Antarctique reconstruite au degré 40 en ajoutant 4 stations fictives sur le plateau est Antarctique. . . . .	85
4.28	Erreurs relatives des CDHS des taux de déplacement vertical de la surface reconstruite au degré 40 au degré 40 en ajoutant 4 stations fictives sur le plateau est Antarctique. . . . .	86

# Table des matières

Résumé . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
Remerciements . . . . .	vii
Liste des figures . . . . .	xii
<b>1 Introduction</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 Modéliser les effets des redistributions de masses superficielles sur Terre</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1 Introduction . . . . .	5
2.2 Problème de la gravito-viscoélasticité . . . . .	6
2.2.1 Équations fondamentales . . . . .	6
2.2.2 Choix des rhéologies employées pour la modélisation du GIA . . . . .	7
2.2.2.1 Rhéologie élastique de Hooke . . . . .	8
2.2.2.2 Rhéologie de Maxwell . . . . .	9
2.2.2.3 Rhéologie de Burgers . . . . .	10
2.2.2.4 Rhéologie d'Andrade . . . . .	10
2.3 Résolution du problème de la gravito-viscoélasticité . . . . .	11
2.3.1 Linéarisation des équations . . . . .	11
2.3.2 Formalisme des nombres de Love et fonctions de Green . . . . .	13
2.4 Application du formalisme pour une calotte glaciaire . . . . .	15
2.4.1 Paramètres de la calotte glaciaire . . . . .	15
2.4.2 Déplacements élastiques résultants de la déglaciation . . . . .	15
2.4.3 Déplacements viscoélastiques le long d'un méridien de longitude $7^\circ$ . . . . .	17
2.4.4 Déformations pour un observateur sous la calotte glaciaire . . . . .	19
2.4.5 Déformations pour un observateur sur le bourrelet périphérique . . . . .	20
2.5 Conclusion . . . . .	22
<b>3 Effets des rhéologies d'Andrade et de Burgers sur la modélisation de l'Ajustement Isostatic Glaciaire en Antarctique</b> . . . . .	<b>23</b>
3.1 Introduction . . . . .	26
3.2 Modeling strategy . . . . .	28
3.2.1 Formalism . . . . .	28
3.2.2 Earth's radial structures . . . . .	29
3.2.3 Rheological laws . . . . .	29
3.2.4 Sensitivity of LLNs to rheologies and viscosity profiles . . . . .	33
3.2.4.1 Variations in LLNs due to rheological parameters . . . . .	33
3.2.4.2 Effects of the Earth model on the LLNs . . . . .	34
3.3 Response to ice-mass change in Antarctica . . . . .	38
3.3.1 Predicting the deformation . . . . .	38
3.3.2 Pleistocene deglaciation . . . . .	39
3.3.3 Recent ice-mass change . . . . .	41
3.4 Discussion . . . . .	44

3.4.1	About the relative sea level . . . . .	44
3.4.2	About the upper mantle viscosity . . . . .	45
3.5	Conclusions . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Inversion par approche combinée des effets du GIA en Antarctique</b>	<b>47</b>
4.1	Introduction . . . . .	47
4.2	Observations utilisées . . . . .	50
4.2.1	Gravimétrie satellitaire . . . . .	50
4.2.2	Altimétrie satellitaire . . . . .	52
4.2.3	Observations GNSS . . . . .	53
4.3	Méthode d'inversion par combinaison d'observations géodésiques . .	54
4.3.1	Détail de la méthode . . . . .	54
4.3.1.1	Définition du problème inverse . . . . .	54
4.3.1.2	Gradient gravimétrique . . . . .	54
4.3.1.3	Décomposition en harmoniques sphériques . . . . .	55
4.3.1.4	Hypothèse de la couche mince . . . . .	56
4.3.1.5	Inversion par méthode des moindres carrés . . . . .	57
4.3.1.6	Limitations de la méthode . . . . .	59
4.3.2	Validation de la méthode d'inversion . . . . .	60
4.3.2.1	Définition du modèle analytique . . . . .	60
4.3.2.2	Résultats de l'inversion : Reproduction des observa- tions . . . . .	62
4.3.2.3	Résultats de l'inversion : Estimation des coefficients .	64
4.3.2.4	Résultats de l'inversion : Reconstruction des cartes . .	65
4.4	Application de la méthode à un modèle réaliste . . . . .	69
4.4.1	Définition du modèle réaliste . . . . .	69
4.4.2	Résultats pour le modèle réaliste : Reproduction des observa- tions . . . . .	70
4.4.3	Résultats pour le modèle réaliste : Estimation des coefficients .	71
4.4.4	Résultats pour le modèle réaliste : Reconstruction des cartes . .	72
4.4.5	Discussion des résultats . . . . .	79
4.4.5.1	À propos des résultats de l'inversion . . . . .	79
4.4.5.2	À propos des incertitudes des paramètres inversés . .	87
4.4.5.3	À propos des hypothèses de la méthode d'inversion .	87
4.5	Conclusions et perspectives . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>89</b>
5.1	Sur l'impact des rhéologies et des profils de viscosité . . . . .	89
5.2	Sur l'inversion des vitesses verticales visqueuses . . . . .	90
5.3	Perspectives . . . . .	90
	<b>Bibliographie</b>	<b>93</b>

## Chapitre 1

# Introduction

L'Antarctique est le siège de plusieurs mécanismes contrôlant la redistribution des masses de glace à plusieurs échelles temporelles et spatiales. Ces redistributions entraînent un ajustement de l'équilibre isostatique terrestre, nommé Ajustement Isostatique Glaciaire ou GIA (pour Glacial Isostatic Adjustment). La déglaciation du Pléistocène a provoqué une redistribution d'eau aux océans estimée de l'ordre de  $6 \times 10^6$  Gt pour les modèles les plus récents (e.g. ICE6G\_C Peltier et al., 2015), représentant environ 120 m de variations du niveau marin. Cette grande redistribution de masse provoque encore aujourd'hui des déplacements pour l'ensemble de la surface terrestre. Par ailleurs, les changements pluridécennaux du climat engendrent une modification de la dynamique des glaciers conduisant à une perte de masse de glace et de neige de la calotte de l'ordre de  $109 \pm 56$  Gt/an (environ 0.3 mm/an d'élévation du niveau marin) entre 1992 et 2017 (IMBIE, 2018). Les déplacements et variations de gravité résultant de ces deux types de variations de masse sont modélisés à l'aide d'un modèle de déglaciation et d'un modèle de Terre. Plusieurs modèles décrivent la déglaciation du Pléistocène, tels que ICE3G (Tushingham and Peltier, 1991), W12 (Whitehouse et al., 2012), IJ05\_R2 (Ivins et al., 2013) ou ICE6G\_C (Peltier et al., 2015). Historiquement les modèles de GIA ont été construits en supposant une Terre à symétrie sphérique et une rhéologie viscoélastique de Maxwell, permettant d'expliquer les observations du GIA liées à la déglaciation du Pléistocène pour les régions comme l'Amérique du Nord ou la Scandinavie (Cathles, 1971; Peltier, 1974; Peltier and Andrews, 1976a; Peltier and Andrews, 1976b; Peltier, 1976; Peltier et al., 2015; Li et al., 2020). Ces modèles ont été construits à partir d'observations géodésiques, telles que les variations relatives du niveau marin, pour contraindre la chronologie de la déglaciation et les paramètres rhéologiques de la Terre comme la viscosité du manteau (Peltier, 1974; Peltier and Andrews, 1976b; Peltier, 1976). Les différentes études portant sur le GIA en Scandinavie ou en Amérique du Nord tendent à attribuer des viscosités du manteau supérieur de l'ordre de  $10^{21}$  Pa.s (Haskell, 1935; Mitrovica, 1996; Peltier et al., 2015). Cependant, des études récentes montrent que les taux des déplacements verticaux en réponse à l'amincissement actuel des glaciers en Antarctique (e.g. Niell et al., 2014) et ceux résultant de la fin du Petit Âge Glaciaire (LIA pour Little Ice Age, Grove, 2012; Mémin et al., 2014; Barletta et al., 2018) ne peuvent pas être expliqués de manière satisfaisante en utilisant la rhéologie de Maxwell et le profil de viscosité classiquement utilisé pour décrire les déformations résultant de la déglaciation du Pléistocène. Ces déformations s'expliquent mieux si l'on utilise une viscosité d'environ  $10^{18}$ - $10^{19}$  Pa.s pour le manteau supérieur ou une partie de celui-ci. Plusieurs autres rhéologies comme celle d'Andrade ou de Burgers sont aussi étudiées pour décrire une réponse transitoire qui pourrait permettre de mieux expliquer les observations en Antarctique. Ainsi, la modélisation des déplacements visqueux en Antarctique, résultant des variations de masse passées et présentes, est un enjeu important à la fois pour

expliquer les observations et améliorer notre compréhension des processus de déformation.

Il y aujourd'hui beaucoup d'imprécisions quant aux estimations du GIA en Antarctique. Même si ces estimations semblent converger depuis vingt ans vers une contribution de l'ordre de 60 Gt/an (Martín-Español et al., 2016a), la variabilité obtenue d'un modèle à un autre peut être très importante (e.g. Gunter et al., 2014; Peltier et al., 2015; Martín-Español et al., 2016b). Cette variabilité a des implications géophysiques et géodésiques conséquentes en termes de déformation de surface, de bilan de masse de la calotte ou d'estimation du niveau marin par exemple. Cette variabilité a une origine multiple : la chronologie des déglaciations passées et des redistributions de masse actuelles, le modèle de structure interne, la stratégie de modélisation et les observations employées pour contraindre ou valider les modèles. De plus, les propriétés physiques de la Terre, comme son profil de viscosité, l'épaisseur de la lithosphère ou la rhéologie du manteau, restent encore mal contraintes. Comme pour les modèles de variation de masse, ces variabilités engendrent des écarts significatifs dans les déformations modélisées. Par ailleurs, les mécanismes de redistribution des masses interagissent entre eux de façon complexe de telle sorte qu'il est difficile de séparer leur contribution respective. Une solution pour résoudre ce problème est d'utiliser les différentes observations disponibles en Antarctique pour contraindre les contributions des variations de masse présentes et passées et les déformations résultantes.

Les missions satellites sont les seules capables de couvrir l'ensemble de la calotte de façon quasi-continue. Notamment, les missions altimétriques (e.g. Envisat, ICESat, CryoSat-2) permettent de mesurer les variations d'élévation de la calotte Antarctique au cours du temps. Les calottes glaciaires pouvant couvrir des surfaces importantes (e.g.  $14.1 \times 10^6$  km<sup>2</sup> pour l'Antarctique), l'altimétrie satellite est la seule technique permettant de mesurer, à l'échelle de la calotte, des variations de volume. Ces mesures d'élévation permettent alors d'estimer des bilans de masse (e.g. Krabill et al., 1995; Rémy and Parouty, 2009; Csatho et al., 2014; Schröder et al., 2019; Khan et al., 2022). De plus, les satellites altimétriques enregistrent aussi les déplacements de surface liés aux redistributions de masse passées et actuelles. La gravimétrie satellite GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) et GRACE-FO (Tapley et al., 2004; Tapley et al., 2019) permettent depuis 2002 d'obtenir des estimations mensuelles des variations du champ de gravité de la Terre, donnant ainsi accès aux redistributions de masse en sa surface ou en profondeur. Ces redistributions comprennent les variations de masse des calottes glaciaires ainsi que les remaniements de masses mantelliques liées à l'ajustement isostatique. Ces données sont souvent utilisées pour les régions comme le Groenland (e.g. Slobbe et al., 2009; Steffen et al., 2009; Velicogna, 2009; Wu et al., 2010; Schrama and Wouters, 2011; Velicogna et al., 2020b; Barletta et al., 2024) et l'Antarctique (e.g. Chen et al., 2009; Horwath and Dietrich, 2009; Gunter et al., 2014; Velicogna et al., 2020b) pour estimer les bilans de masse des calottes glaciaires sur les 20 dernières années. Par ailleurs, la combinaison des observations GRACE et des mesures altimétriques permettrait, en théorie, d'estimer plus précisément les bilans de masses redistribués aux océans (e.g. Pritchard et al., 2010; Zwally et al., 2021). Enfin les mesures GNSS permettent d'accéder directement aux déplacements de la surface de la Terre et en particulier ceux induits en réponse aux variations de masse de glace. Ces déplacements comprennent les parties visqueuses liées à la déglaciation du Pléistocène, et les parties élastiques et visqueuses liées aux redistributions de masse plus récentes. Ces observations sont largement utilisées pour modéliser le GIA (e.g. Gunter et al., 2014; Peltier et al., 2015; Martín-Español et al., 2016a; Martín-Español et al., 2016b; Barletta

et al., 2018; Vishwakarma et al., 2023). Liées à leurs spécificités propres, ces trois techniques ont des sensibilités différentes face à chaque mécanisme et nécessitent d'être utilisées de façon conjointe pour contraindre les effets du GIA. L'objectif de cette thèse est donc de proposer une méthode permettant de combiner les différentes observations géodésiques disponibles en Antarctique pour inverser une carte des taux de déplacements visqueux de la surface en Antarctique.

Le plan de la thèse est le suivant.

Dans un premier temps, nous présentons la méthode utilisée pour modéliser les déplacements et variations de gravité dus aux redistributions de masse de glace (chapitre 2). L'objectif de ce chapitre est de présenter les équations fondamentales de la gravito-viscoélasticité qui permettent la modélisation des effets du GIA. Nous explicitons les différentes rhéologies que nous utilisons pour modéliser les déformations. Après cela nous présentons le formalisme utilisé pour résoudre les équations fondamentales et introduisons les nombres de Love de charge. Nous employons ces nombres pour modéliser les déplacements de surface et les variations de gravité liés aux redistributions de masse. Nous appliquons ensuite notre méthodologie pour les trois rhéologies viscoélastiques pour décrire les déformations engendrées par l'amincissement spontané et total d'une calotte polaire. Nous présentons les premiers résultats de l'impact des rhéologies dans la modélisation des déplacements et variations de gravité. Nous trouvons, aux courtes échelles de temps, que les rhéologies d'Andrade et de Burgers produisent des déplacements et variations de gravité de l'ordre de 3 et 1,5 fois ceux générés en utilisant la rhéologie de Maxwell respectivement.

Une des grandes sources de variabilité dans l'estimation des chronologies de déglaciation et des déformations est le modèle de Terre employé. Par exemple, des incertitudes subsistent quant au profil de viscosité du manteau et sa rhéologie. Ces incertitudes peuvent être jusqu'à deux ordres de grandeurs dans la viscosité du manteau supérieur et la rhéologie de Maxwell classiquement utilisée ne permet pas d'expliquer l'ensemble des observations de la région Antarctique. Nous réalisons donc dans ce chapitre (chapitre 3) une étude des effets des rhéologies dans la modélisation des déformations du GIA en Antarctique. Nous modélisons les déformations pour un modèle de déglaciation du Pléistocène et de variations de masse récentes que nous construisons à partir d'observations d'altimétrie. Nous calculons les nombres de Love pour deux modèles de Terre en supposant des viscosités du manteau supérieur et chacune des trois rhéologies viscoélastiques du chapitre 1. Nous modélisons ensuite les déformations induites par les deux modèles de variations de masses. Les résultats montrent que les différences sont les plus importantes entre les rhéologies de Maxwell et de Burgers pendant les 100 - 1000 ans qui suivent le début du changement de la masse superficielle. L'utilisation des rhéologies d'Andrade et de Burgers conduit à une plus grande réponse de la Terre pour des échelles de temps décennales à centennales, jusqu'à 10 m de plus que Maxwell pour les déplacements verticaux cumulés. Si l'on considère uniquement les changements récents de la masse de glace, les rhéologies de Burgers et d'Andrade conduisent à des taux de déformation plusieurs fois supérieurs à ceux estimés avec la rhéologie de Maxwell. Les résultats de ce chapitre font l'objet de l'article Boughanemi and Mémin (2024).

Dans le chapitre 3 nous avons montré l'importance des rhéologies et des viscosités dans la modélisation des effets du GIA en Antarctique, ainsi que l'incertitude que ces paramètres provoquent. La troisième étape de la thèse est d'établir une méthode d'inversion des déplacements visqueux en Antarctique qui s'acquitte d'un

maximum d'hypothèses sur la structure interne de la Terre et les modèles de déglaciation. Nous utilisons une combinaison d'observations d'altimétrie satellite, de gravimétrie satellite et de positionnement GNSS pour inverser les taux de variation d'épaisseur de la calotte glaciaire, de densité superficielle des masses qui varient et les vitesses verticales visqueuses. Nous appliquons notre méthode à un jeu de données synthétiques issues d'un cas analytique de variations de masse, puis à un cas plus réaliste basé sur un modèle direct de GIA et sur les observations altimétriques en Antarctique. Nous obtenons que les coefficients, cartes et données reproduites pour une inversion allant jusqu'au degré harmonique 40 sont tous très proches du résultat attendu, avec des erreurs majoritairement inférieures à 1%.

Enfin nous présentons les conclusions générales et les perspectives en lien avec les résultats de cette thèse.

## Chapitre 2

# Modéliser les effets des redistributions de masses superficielles sur Terre

### Contenu

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2.2</b>	<b>Problème de la gravito-viscoélasticité</b>	<b>6</b>
2.2.1	Équations fondamentales	6
2.2.2	Choix des rhéologies employées pour la modélisation du GIA	7
<b>2.3</b>	<b>Résolution du problème de la gravito-viscoélasticité</b>	<b>11</b>
2.3.1	Linéarisation des équations	11
2.3.2	Formalisme des nombres de Love et fonctions de Green	13
<b>2.4</b>	<b>Application du formalisme pour une calotte glaciaire</b>	<b>15</b>
2.4.1	Paramètres de la calotte glaciaire	15
2.4.2	Déplacements élastiques résultants de la déglaciation	15
2.4.3	Déplacements viscoélastiques le long d'un méridien de longitude $7^\circ$	17
2.4.4	Déformations pour un observateur sous la calotte glaciaire	19
2.4.5	Déformations pour un observateur sur le bourrelet périphérique	20
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>22</b>

## 2.1 Introduction

Nous nous intéressons aux déformations et aux variations de gravité subies par la Terre lorsqu'elle est soumise à une charge en surface, soit les changements de masse de glace actuels et passés. Ainsi, nous devons prendre en considération la réponse de la Terre à plusieurs échelles spatio-temporelles. La Terre étant une planète de grandes dimensions, la gravité y joue un rôle prépondérant, lui donnant sa forme quasi-sphérique. Ainsi, le calcul des mouvements de la surface de la Terre doit nécessairement intégrer les variations du champ de gravité induites par la déformation. Nous utilisons la théorie de la gravito-visco-élasticité, qui permet de modéliser

les déformations et les variations de gravité d'un corps visco-élastique simultanément. Le but de cette partie est de décrire les équations et le formalisme permettant de calculer les déformations et les variations de gravité lorsque la Terre est soumise à une charge en sa surface. Ces déformations varient de l'ordre du millimètre par an au centimètre par an, soit environ neuf ordres de grandeur plus petits que le rayon terrestre. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse des petites perturbations à notre problème. Cette hypothèse nous permettra plusieurs approximations pour les équations des sections à suivre. De plus, la description des déformations qu'elle subit suite à une variation de masse sur sa surface nécessite l'emploi d'une loi de comportement reliant contraintes et déformations: une loi rhéologique. Notamment, la Terre se comporte comme un solide élastique aux courtes échelles de temps et comme un solide visqueux aux longues échelles de temps. Nous considérons les lois rhéologiques de Maxwell, Burgers et Andrade, couramment utilisées pour rendre compte d'un certain nombre de processus géophysiques. Le plan du chapitre est le suivant. Dans un premier temps nous décrivons les équations fondamentales de la gravito-viscoélasticité, qui caractérisent la déformation d'un corps (Sec: 2.2). Ensuite nous décrivons le formalisme de résolution de ces équations (Sec: 2.3). Enfin nous modélisons les déformations engendrées par une calotte glaciaire et concluons (Sec:2.4 et Sec:2.5).

## 2.2 Problème de la gravito-viscoélasticité

### 2.2.1 Équations fondamentales

Nous supposons que la Terre se trouve initialement dans un état de pré-contrainte résultant de son auto-gravitation ce qui lui confère une forme sphérique. Pour calculer les déplacements et les variations de gravité des corps visco-élastiques, nous devons considérer les équations fondamentales suivantes (Peltier, 1974; Wu and Peltier, 1982a) :

#### – équation de conservation de la masse :

Supposons  $\rho$  la masse volumique ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) d'un milieu  $M$  et  $v$  la vitesse eulérienne ( $\text{m}/\text{s}$ ) des particules de ce milieu. Le principe de conservation de la masse exprime le fait que le bilan des masses entrantes et sortantes du milieu  $M$  doit être nul. L'équation de la conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

#### – équation de conservation de la quantité de mouvement :

Considérons le même milieu  $M$  que pour le principe de conservation de la masse. La seconde loi de Newton appliquée au volume  $V$  de surface  $S$  considéré comme précédemment s'écrit

$$\rho \frac{dv}{dt} = \nabla \cdot \bar{\sigma}^e + f \quad (2.2)$$

où  $\bar{\sigma}^e$  est la perturbation eulerienne du tenseur des contraintes et  $f$  correspond aux forces volumiques appliquées au milieu  $M$ .

– **équation de Poisson :**

Prenons  $\phi$  le potentiel de gravité ( $\text{m}^2/\text{s}^2$ ) de notre milieu  $M$ . L'équation de Poisson pour ce potentiel s'écrit

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho \quad (2.3)$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle telle que  $G = 6.6742 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $\rho$  la masse volumique du milieu  $M$ .

– **équation constitutive :**

Nous cherchons à caractériser les déformations et variations de gravité d'un corps subissant une excitation. Pour cela il est nécessaire d'avoir une relation décrivant les déformations du corps en fonction de l'excitation subie. Cette relation est l'équation constitutive ou loi rhéologique. L'équation constitutive relie les déformations du corps  $M$  aux contraintes qu'il subit, sous la forme

$$\sigma(t) = F(\varepsilon(t)) \quad (2.4)$$

où  $\sigma(t)$  est la contrainte appliquée,  $\varepsilon(t)$  est la déformation du corps  $M$  et  $F$  est la loi rhéologique reliant déformations et contraintes. Dans le cadre du GIA la rhéologie la plus communément employée est la rhéologie visco-élastique de Maxwell (Peltier, 1974; Cathles, 1971; Peltier and Andrews, 1976b; Peltier, 1976). Cependant plusieurs études récentes emploient des rhéologies transitoires comme Burgers et Andrade (e.g. Ivins et al., 2020; Gevorgyan et al., 2020) (voir introduction chapitre 3), ainsi que loi élastique de Hooke (Barletta et al., 2018). Dans la section nous 2.2.2 nous décrivons chacune de ces rhéologies.

### 2.2.2 Choix des rhéologies employées pour la modélisation du GIA

Nous voulons mettre en évidence les effets des rhéologies notamment lorsqu'elles sont employées pour modéliser les déplacements et les variations de gravité dans le cadre du GIA. Dans cette section nous décrivons l'ensemble de ces rhéologies.

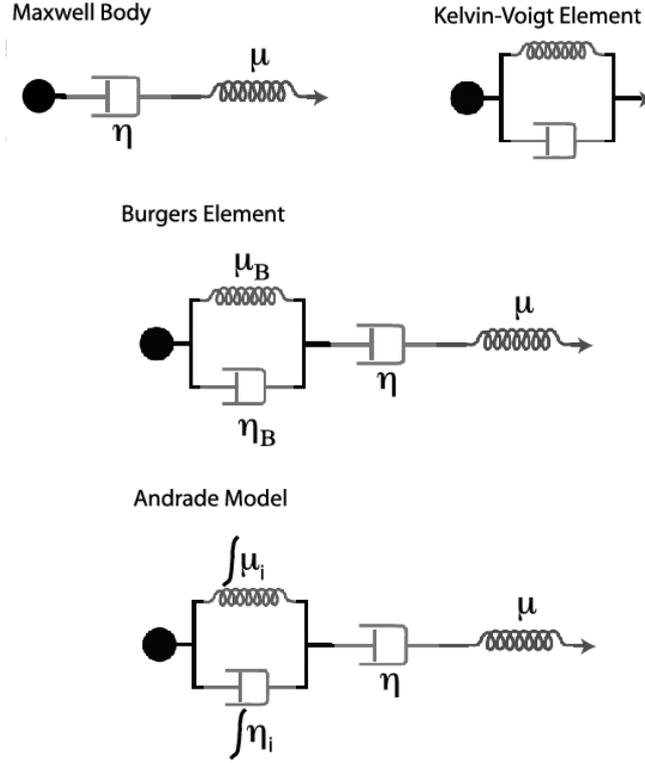


Figure 2.1: Représentation des rhéologies viscoélastique de Maxwell, d'Andrade et de Burgers d'après Castillo-Rogez et al. (2011).

### 2.2.2.1 Rhéologie élastique de Hooke

La rhéologie de Hooke décrit le comportement élastique d'un corps. Le milieu analogue à la rhéologie de Hooke est un ressort parfait, dont le comportement dépendra de sa rigidité. Les déformations engendrées lors de l'application d'une contrainte sont instantanées et sans dissipation d'énergie. La loi de Hooke est définie par la relation

$$\sigma_{ij} = \lambda_e \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_e \varepsilon_{ij} \quad (2.5)$$

où  $\lambda_e$  et  $\mu_e$  sont les paramètres élastiques de Lamé et  $\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker. Pour une Terre supposée incompressible, l'équation 2.5 s'écrit

$$\sigma_{ij} = 2\mu_e \varepsilon_{ij} \quad (2.6)$$

Dans le cadre de notre modélisation du GIA nous supposons que les variations de masse de surface, et donc les variations de contraintes, sont instantanées et durables au cours du temps. Nous pouvons donc décrire les contraintes à l'aide de la fonction Heaviside  $H$  telle que

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^0 H(t) \quad (2.7)$$

avec  $\sigma_{ij}^0$  la contrainte appliquée au milieu, telle que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$  si  $t \geq 0$  et  $\sigma_{ij} = 0$  si  $t < 0$ . En appliquant ce type de contraintes, nous définissons les déformations au cours du temps

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{\sigma_{ij}^0}{2\mu_e} H(t) \quad (2.8)$$

Nous pouvons ainsi noter que l'amplitude de la déformation sera inversement proportionnelle à la rigidité du milieu. La fonction de fluage pour la rhéologie de Hooke est définie par

$$J = \frac{1}{\mu_e} \quad (2.9)$$

Bien que cette rhéologie soit utilisée pour modéliser les déformations liées aux variations de masse actuelles, elle se révèle insuffisante (e.g. Nield et al., 2014; Barletta et al., 2018). Pour cela il est nécessaire d'employer une rhéologie viscoélastique.

### 2.2.2.2 Rhéologie de Maxwell

La rhéologie de Maxwell est la plus souvent utilisée dans les études portant sur le réajustement isostatique glaciaire (e.g. Peltier, 1974; Wu and Peltier, 1982b; Peltier et al., 2015). La rhéologie de Maxwell permet de décrire une réponse instantanée élastique et une réponse durable visqueuse. Elle est généralement représentée par une analogie avec un ressort et un piston en série. Le ressort caractérise le comportement élastique (Hooke), et le piston le comportement visqueux (Newtonien) (c.f. Fig. 2.1). L'équation constitutive de la rhéologie de Maxwell s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\mu_e}{\eta} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = 2\mu_e \dot{\varepsilon}_{ij} + \lambda_e \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} \quad (2.10)$$

avec  $\eta$  la viscosité du milieu (Pa.s). Pour une Terre incompressible cette équation devient

$$\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\mu_e}{\eta} \sigma_{ij} = 2\mu_e \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.11)$$

Les déformations d'un milieu Newtonien sont continues et progressives lors de l'application d'une contrainte, dont l'amplitude dépend de la viscosité du milieu. En appliquant les contraintes décrites dans l'équation 2.7 les déformations s'écrivent

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{\sigma_{ij}^0}{2\eta} t H(t) \quad (2.12)$$

Puisque l'élément de Hooke et de Newton sont mis en série leurs déformations respectives se somment. À l'inverse deux éléments mis en parallèle verront leur contraintes se sommer. En sommant l'expression des déformations précédente à celle obtenue en 2.8 il vient les déformations d'un corps de Maxwell :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \frac{\sigma_{ij}^0}{2\mu_e} \left[ H(t) + \frac{\mu_e}{\eta} t H(t) \right] \\ &= \frac{\sigma_{ij}^0}{2\mu_e} \left[ 1 + \frac{t}{\tau} \right] H(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec  $\tau = \frac{\eta}{\mu_e}$  le temps de relaxation de Maxwell. C'est cette relation qui décrit la fonction de fluage pour la rhéologie de Maxwell.

### 2.2.2.3 Rhéologie de Burgers

La rhéologie de Burgers est une loi de comportement similaire à celle de Maxwell dans le sens où elle rend compte d'un comportement instantané élastique suivi d'une réponse visqueuse. Cependant, la réponse visqueuse pour un corps de Burgers se fait en deux étapes. Le régime en état stationnaire que l'on retrouve pour un corps de Maxwell se met en place à la suite d'un régime transitoire. Cette rhéologie est généralement utilisée dans l'étude des déformations post-sismiques (e.g. Pollitz, 2003; Hoechner et al., 2011) et est représentée par un élément de Maxwell en série avec un élément de Kelvin-Voigt en série (c.f. Fig.2.1). Pour exprimer les déformations d'un corps de Burgers il nous faut expliciter celle d'un élément de Kelvin-Voigt. Contrairement à l'élément de Maxwell, l'élément de Kelvin-Voigt est composé d'un ressort et d'un piston mis en parallèle. Les déformations d'un élément de Kelvin-Voigt sont caractérisée par une première phase progressive des déformations, qui tend vers une réponse élastique. Les déformations d'un élément de Kelvin-Voigt sont

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_{ij}^0}{2\eta} \left[ \frac{\eta}{\mu_e} H(t) - \frac{\eta}{\mu_e} e^{-\frac{\mu_e}{\eta} t} H(t) \right] \quad (2.14)$$

Nous retrouvons dans cette expression la limite élastique des déformations  $\frac{\sigma_{ij}^0}{2\mu_e}$  exprimée dans l'équation 2.8. Le délai pour atteindre cette limite élastique dépendra du temps de relaxation de Maxwell 2.13, et ainsi de la viscosité du milieu. Plus la viscosité du milieu sera faible, plus vite la limite élastique sera atteinte. Avec les déformations de l'élément de Kelvin-Voigt explicitée nous pouvons exprimer les déformations d'un corps de Burgers. Les déformations d'un corps de Burgers sont donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \frac{\sigma_{ij}^0}{2} \left[ \left( \frac{1}{\mu_e} + \frac{1}{\mu'} \right) H(t) + \frac{t}{\eta} H(t) - \frac{1}{\mu'} e^{-\frac{\mu'}{\eta} t} H(t) \right] \\ &= \frac{\sigma_{ij}^0}{2\mu_e} \left[ 1 + \frac{t}{\tau} + \frac{\mu_e}{\mu'} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] H(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec  $\mu'$  et  $\eta'$  la rigidité et viscosité de l'élément de Kelvin-Voigt et  $\tau' = \frac{\eta'}{\mu'}$ . Cette relation fournit la fonction de fluage de la rhéologie de Burgers pour une contrainte de type  $H(t)$ . Le cas présenté correspond au modèle de Burgers simple (SBM pour Simple Burgers Model) (Ivins et al., 2020). En ajoutant plusieurs éléments de Kelvin-Voigt en série nous obtenons le modèle étendu de Burgers (EBM pour Extended Burgers Model).

### 2.2.2.4 Rhéologie d'Andrade

La rhéologie d'Andrade est une extension de la rhéologie de Maxwell permettant de rendre compte d'une anélasticité aux courtes échelles de temps. Le modèle d'Andrade est décrit par un élément de Maxwell et un nombre  $N$  d'éléments de Kelvin-Voigt en série (c.f. Fig.2.1) tel que  $N \rightarrow \infty$ . Il a été construit à partir de l'étude expérimentale du comportement des métaux soumis à une contrainte (Andrade, 1910). Le modèle rhéologique d'Andrade est caractérisé pour une contrainte de type  $H(t)$  par la relation (Gevorgyan et al., 2020) :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{\sigma_{ij}^0}{2\mu_e} \left[ 1 + \frac{t}{\tau} + At^{-\alpha} \right] H(t) \quad (2.16)$$

où  $A = \frac{1}{\mu_e} \left( \frac{\eta}{\mu_e} \right)^{-\alpha}$  et  $\alpha \in [0.15, 0.6]$  sont des paramètres physiques qui contrôlent la réponse transitoire (Goetze, 1971; Goetze and Brace, 1972; Castillo-Rogez et al., 2011). Pour le reste de notre étude nous employons les rhéologies de Maxwell, de Burgers avec le modèle SBM et d'Andrade pour modéliser les déformations du GIA. Dans la section suivante nous décrivons la résolution des équations fondamentales.

## 2.3 Résolution du problème de la gravito-viscoélasticité

### 2.3.1 Linéarisation des équations

Les déformations calculées sont très petites devant le rayon terrestre (6371 km). Nous nous trouvons donc ici dans le cadre des petites perturbations. Supposons dans un premier temps que notre milieu  $M$  à un comportement élastique linéaire et isotrope. Nous pouvons définir  $\mathbf{u}$  le vecteur des déplacements infinitésimaux (dans le cadre des petites perturbations) devant suivre l'équation de l'équilibre des forces (équation 2.2) dont les dérivées temporelles peuvent être ignorées. Pour le reste de cette section les vecteurs seront notés en gras. Nous pouvons donc réécrire l'équation 2.2 comme étant

$$\nabla \cdot \bar{\sigma}^e + \rho_0 \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_0) - \rho_0 \mathbf{g}_0 \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{g}_1 = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique initiale du milieu,  $\mathbf{g}_0$  est la gravité de surface initiale,  $\mathbf{g}_1$  est la petite perturbation de la gravité de surface et  $\bar{\sigma}^e$  est le tenseur des contraintes élastiques tel que

$$\bar{\sigma}^e = \lambda_e \nabla \cdot \mathbf{u} \bar{\mathbb{I}} + 2\mu_e \bar{\varepsilon} \quad (2.18)$$

avec  $\bar{\mathbb{I}}$  et  $\bar{\varepsilon}$  les tenseurs identité et des déformations infinitésimales, respectivement. Dans l'équation 2.17 nous supposons les forces de volume extérieurs négligeables. Nous supposons comme condition à la surface de la Terre que les forces d'attractions sont issues d'une distribution de masse (i.e. hypothèse de la couche mince). Nous considérons un modèle de Terre sphérique, auto-gravitant et sans rotation. À partir de l'équation 2.3 nous pouvons exprimer l'attraction de gravité  $\mathbf{g}$  comme étant

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{g}$  dépendra de la distribution de masse. Nous pouvons écrire le potentiel de gravité en une partie pour l'état initial  $\phi_0$  et une partie pour l'état perturbé  $\phi_1$  de telle sorte que :

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi G \rho_1 = -4\pi G \nabla \cdot \rho_0 \mathbf{u} \quad (2.20)$$

Cette relation permettant de relier les variations de gravité à la déformation du milieu suite à la redistribution de masse. Le modèle de Terre que nous considérons nous permet de nous placer dans un repère sphérique  $(R, \theta, \lambda)$  avec  $R$  le rayon terrestre,  $\theta$  la colatitude ( $\theta \in [0, \pi]$ ) et  $\lambda$  la longitude ( $\lambda \in [0, 2\pi]$ ). Nous nous intéressons aux déplacements  $\mathbf{u}$  et au potentiel gravitationnel  $\Phi$  de la Terre. Nous utilisons les harmoniques sphériques complexes

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos(\theta)) e^{im\lambda} \quad (2.21)$$

où  $P_n^m$  est la fonction associée de Legendre de degré  $n$  et d'ordre  $m$ . Les décompositions en harmoniques sphériques du déplacement  $\mathbf{u}$  et des forces de traction  $\mathbf{T} = \bar{\sigma}^e \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$  s'écrivent

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n U_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) \frac{\mathbf{r}}{R} + V_n^m r \nabla_S Y_n^m(\theta, \lambda) \quad (2.22)$$

et

$$\mathbf{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) \frac{\mathbf{r}}{R} + S_n^m r \nabla_S Y_n^m(\theta, \lambda) \quad (2.23)$$

où  $\nabla_S = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$  est le gradient de surface et  $(U_n^m, V_n^m, R_n^m, S_n^m)$  sont les coefficients des parties radiales  $(U_n^m, R_n^m)$  et tangentielles  $(V_n^m, S_n^m)$  de la décomposition en harmoniques sphériques de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{T}$ . Pour le potentiel de gravité nous avons

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Phi_n^m Y_n^m(\theta, \lambda) \quad (2.24)$$

et définissons les coefficients  $Q_n^m$  tels que

$$Q_n^m = \dot{\Phi}_n^m + \frac{n+1}{r} \Phi_n^m + 4\pi G \rho_0 U_n^m \quad (2.25)$$

où  $\dot{\Phi}_n^m$  représente la dérivée selon  $r$  de  $\Phi_n^m$ .  $(\Phi_n^m)$  sont les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques de  $\Phi$ . En raison de la symétrie sphérique du modèle de Terre, les ordres des décompositions n'interviennent pas. Nous utilisons les équations fondamentales linéarisées ainsi que les décompositions en harmoniques sphériques pour poser le problème (Alterman et al., 1959; Mémin, 2011) sous la forme

$$\frac{dY_n}{dr} = AY_n \quad (2.26)$$

où pour chaque degré  $n$  nous avons  $Y_n = (U_n, V_n, R_n, S_n, \Phi_n, Q_n)$  si le milieu est solide et  $Y_n = (U_n, R_n, \Phi_n, Q_n)$  si le milieu est liquide. Le détail de la matrice  $A$  et du système d'équations ordinaires linéaires est montré dans (Mémin, 2011). Chacune des inconnues des équations ci-dessus doivent respecter les conditions aux limites des interfaces pour les différents changements de milieu possibles. Les conditions sont les suivantes:

- Pour une interface solide-solide:  $U_n, V_n, R_n, S_n, \Phi_n, Q_n$  sont continus
- Pour une interface solide-liquide:  $U_n, R_n, \Phi_n, Q_n$  sont continus
- Pour une surface libre (surface de la Terre ici):  $R_n(R) = S_n(R) = 0$
- Pour une charge de surface :  $R_n(R) = \frac{2n+1}{3} \bar{\rho}$ ,  $S_n(R) = 0$  et  $Q_n(R) = \frac{2n+1}{R}$

Les équations 2.22 et 2.24 sont utilisées pour définir les nombres de Love (Love, 1909) et construire les fonctions de Green qui nous permettent de modéliser les déformations de la Terre (voir section 2.3.2).

### 2.3.2 Formalisme des nombres de Love et fonctions de Green

Les équations fondamentales linéarisées permettent de relier linéairement les déplacements et les variations de gravité subis par la Terre à la suite d'une excitation. Les coefficients de proportionnalité introduits par Love (1909) sont des nombres adimensionnés qui décrivent la réponse de la Terre. Ces nombres de Love dépendent du modèle de Terre et du type d'excitation. Pour une charge en surface définie par une densité superficielle de masse  $\sigma_n$  de degré  $n$ , nous définissons les nombres de Love de charge (LLN pour Load Love Numbers) élastiques  $h'$ ,  $l'$  et  $k'$  de degré  $n$  par :

$$U_n = h'_n \frac{3}{2n+1} \frac{\sigma_n}{\bar{\rho}} \quad (2.27)$$

$$V_n = l'_n \frac{3}{2n+1} \frac{\sigma_n}{\bar{\rho}} \quad (2.28)$$

$$\Phi_n = (1 + k'_n) \frac{3g_0}{2n+1} \frac{\sigma_n}{\bar{\rho}} \quad (2.29)$$

où  $\bar{\rho}$  est la masse volumique moyenne de la Terre. La figure 2.2 montre un exemple de nombres de Love de charges élastiques, calculés pour le modèle de Terre PREM (Dziewonski and Anderson, 1981). Les nombres de Love élastiques de la Figure 2.2 restent inchangés au cours du temps et donnent la réponse instantanée de la Terre à la variation de masse de surface. Mémin (2011) utilise la méthode de Runge-Kutta à pas adaptatif pour intégrer numériquement les systèmes d'équations différentiels. Dans le chapitre 4 nous utilisons ces nombres de Love dans l'inversion d'un modèle de déplacement visqueux de la surface en Antarctique.

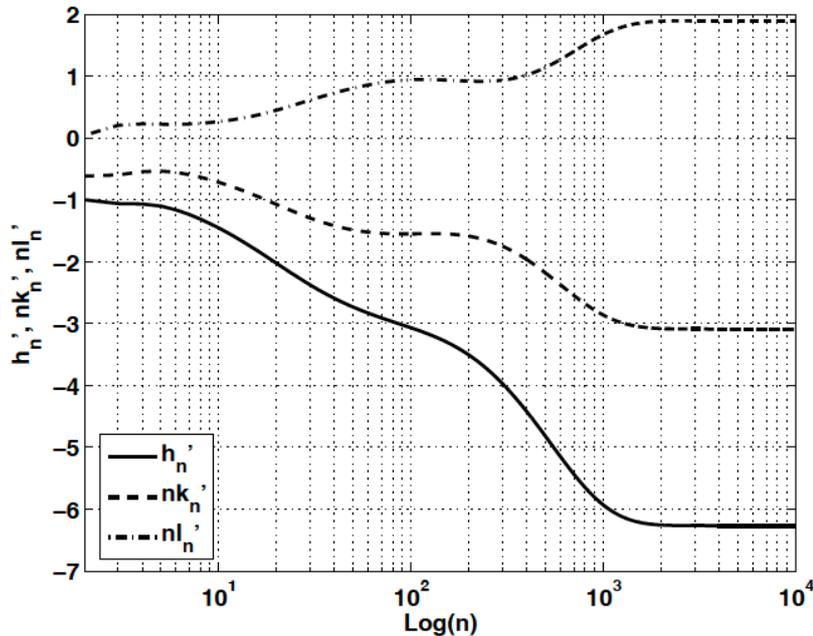


Figure 2.2: Nombres de Love de charge (LLNs) élastiques pour un modèle de Terre PREM (Dziewonski and Anderson, 1981) d'après Mémin (2011).

Pour calculer les nombres de Love viscoélastiques nous utilisons le principe de correspondance (Peltier, 1974; Wu and Peltier, 1982a; Spada et al., 2011; Melini et al.,

2022). Le principe de correspondance permet, si l'on peut décrire un comportement rhéologique viscoélastique de façon linéaire, de résoudre les équations des LLNs élastiques dans le domaine fréquentiel. Cela nous permet donc d'exprimer les LLNs viscoélastiques dans le domaine fréquentiel, et donc en les inversant de les obtenir dans le domaine temporel. Le logiciel ALMA<sup>3</sup> développé par Melini et al. (2022) permet de réaliser ces étapes successivement via l'utilisation de l'équation de Post-Widder (Post, 1930; Widder, 1934; Widder, 1941). Cette méthode permet d'éviter les instabilités numériques des modes normaux, classiquement utilisés pour déterminer les LLNs. Plus de détails sur la méthode employée sont donnés dans Spada and Boschi (2006) et Spada et al. (2011).

Les nombres de Love ainsi calculés sont ensuite utilisés pour former les fonctions de Green, qui permettent d'estimer les observables géodésiques. Les fonctions de Green, introduites par Georges Green en 1828 (Challis, 2003), correspondent à une solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Ces fonctions caractérisent la réponse impulsionnelle d'un système. Elles permettent de savoir comment réagit un système lorsqu'il subit une excitation unitaire. Pour l'étude de la réponse de la Terre à une redistribution de masse en surface (e.g. Farrell, 1972; Mémin et al., 2009) on définit les fonctions de Green pour le déplacement radial ( $G_{ur}^{ve}$ ) et les variations de gravité en surface ( $G_g^{ve}$ ). Pour un modèle sphérique les fonctions de Green s'écrivent:

$$G_{ur}^{ve}(\psi, t) = \frac{G}{g_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} h'_n(t) P_n(\cos\psi) \quad (2.30)$$

$$G_g^{ve}(\psi, t) = -\frac{G}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \left( 1 - \frac{n+1}{n} k'_n(t) + \frac{2}{n} h'_n(t) \right) P_n(\cos\psi) \quad (2.31)$$

avec  $P_n$  le polynôme de Legendre de degré  $n$ ,  $R$  le rayon terrestre et  $\psi$  la distance angulaire entre le point d'observation considéré et la charge de surface. Si la source de la déformation est une distribution de masses de surface qui varie au court du temps, il faut dans ce cas appliquer une convolution spatio-temporelle des fonctions de Green pour obtenir la réponse de la Terre. Nous pouvons alors écrire notre fonction comme

$$X(\theta, \lambda, t) = \iint_{\Omega} \int_{-\infty}^t G_X^{ve}(\psi, t-t') \sigma_L(\theta', \varphi', t') dt' d\Omega \quad (2.32)$$

où  $\Omega$  représente la surface totale recouverte par la distribution de masse de surface, dont les éléments sont écrits tels que  $d\Omega = R^2 \sin(\theta') d\theta' d\varphi'$ .  $X(\theta, \lambda, t)$  représente la déformation de la Terre associée à la fonction de Green  $G_X^{ve}$  dont l'exposant  $ve$  représente une fonction de Green viscoélastique et  $X$  correspond à  $g$  ou  $u_r$ , et  $\sigma_L$  est la distribution de masse de surface, comme montré dans l'exemple de la figure 2.3.

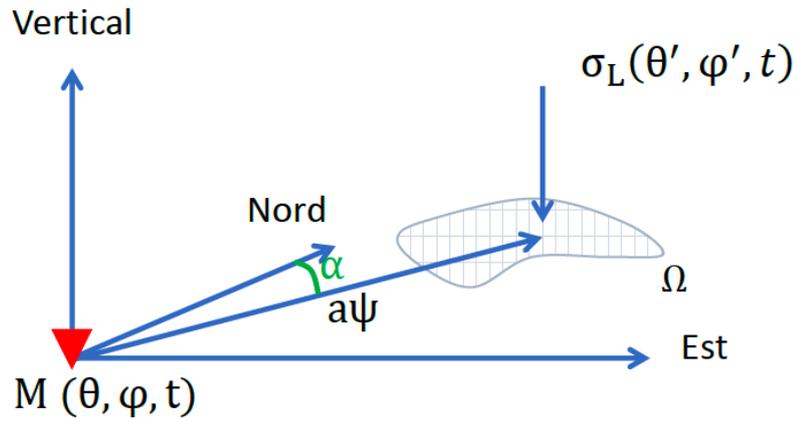


Figure 2.3: Schéma de la convolution spatio-temporelle effectuée pour la modélisation des effets des redistributions de masses (voir cours M2 MÉMIN Anthony).  $M$  représente le point d'observation des déformations,  $a$  est le rayon terrestre,  $\Psi$  est la distance angulaire entre l'observateur et l'excitation et  $\alpha$  est l'azimut de la distribution de masse.

Nous utilisons le logiciel TABOO (Spada, 2003; Melini et al., 2022) pour effectuer les calculs de convolutions spatio-temporelles. TABOO est un code en fortran dédié aux calculs des déformations dans le cadre du GIA. Il a été initialement conçu pour un modèle de Terre visco-élastique à rhéologie de Maxwell, non tournant, incompressible, autogravitant, à symétrie sphérique. TABOO permet aussi de calculer des nombres de Love de charge viscoélastiques et accepte, après modification du code, des nombres de Love externes comme ceux sortis d'ALMA. Nous pouvons ainsi calculer les déformations et variations de gravité pour un modèle de Terre régit par les lois rhéologiques d'Andrade et de Burgers, en plus de celle de Maxwell. Dans la section suivante nous montrons l'application de la modélisation à une calotte glaciaire.

## 2.4 Application du formalisme pour une calotte glaciaire

### 2.4.1 Paramètres de la calotte glaciaire

Dans cette section nous appliquons le formalisme de modélisation établi dans les sections précédentes à une calotte glaciaire. Nous utilisons les LLNs viscoélastiques calculés pour les trois rhéologies de Burgers, Maxwell et Andrade pour le modèle de Terre VM5a de Peltier et al. (2015) (voir chapitre 3 section 3.2.1 pour les détails du modèle). Nous utilisons pour la rhéologie d'Andrade  $\alpha = 1/3$  et pour la rhéologie de Burgers  $\frac{\eta'}{\eta} = 0.1$  et  $\frac{\mu'}{\mu_e} = 0.3$ . Nous supposons que la calotte est présente à la surface de la Terre à l'état initial, et appliquons une déglaciation instantanée à  $t = 0$  an. L'amplitude des déformations induites par une calotte glaciaire dépend des paramètres de cette dernière. Les paramètres de la calotte utilisés sont donnés dans la table 2.1.

### 2.4.2 Déplacements élastiques résultants de la déglaciation

La figure 2.4 montre le déplacement radial élastique suite à la déglaciation. Nous pouvons noter que l'effet le plus important se situe dans la zone précédemment sous

TABLE 2.1: Paramètres de la calotte glaciaire.

demi ouverture	épaisseur	masse volumique	centre de la calotte
5°	100 m	931 kg/m <sup>3</sup>	43.6°N / 7.0°E

et autour de la calotte. La zone précédemment glacée subie une surrection de l'ordre de 1 m, et entre 20 et 50 cm pour le pourtour immédiat de la calotte. Nous pouvons noter aussi qu'en champ plus lointain la surface terrestre subie une subsidence de l'ordre de quelques centimètres. Cette subsidence s'applique sur le pourtour de la calotte ayant subi une surrection liée à la présence de la calotte glaciaire, que l'on nomme bourrelet périphérique. En champ lointain de la calotte les déformations induites par la déglaciation tendent vers zéro.

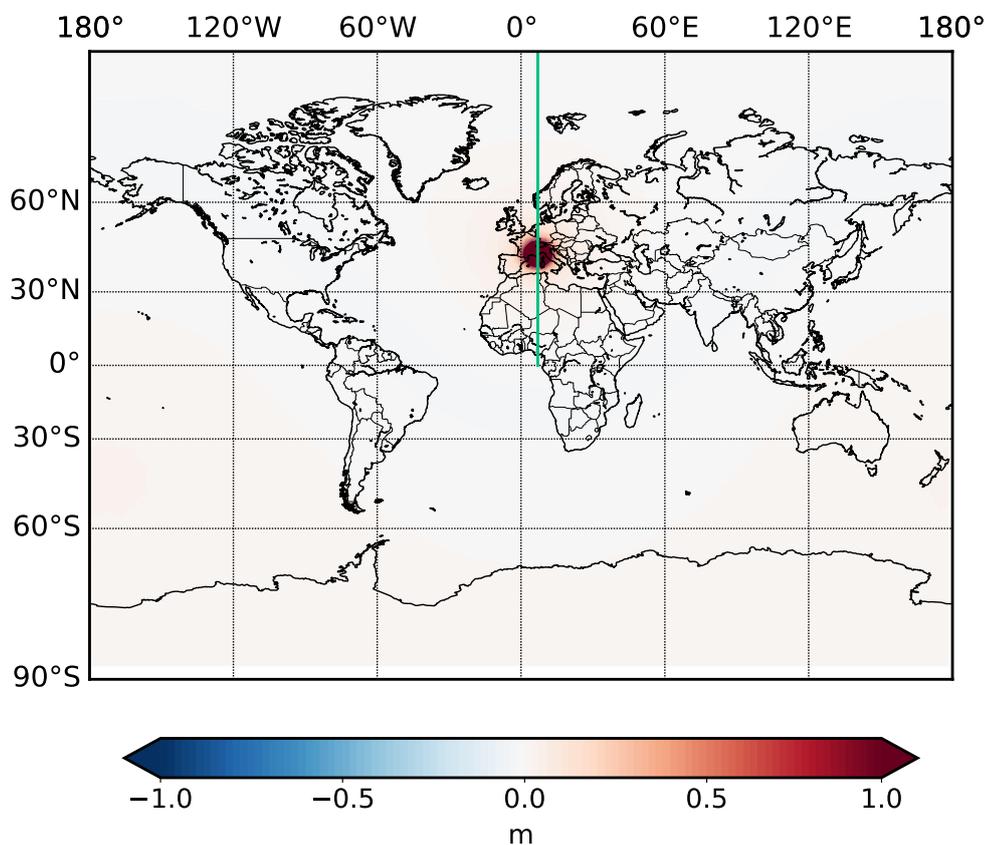
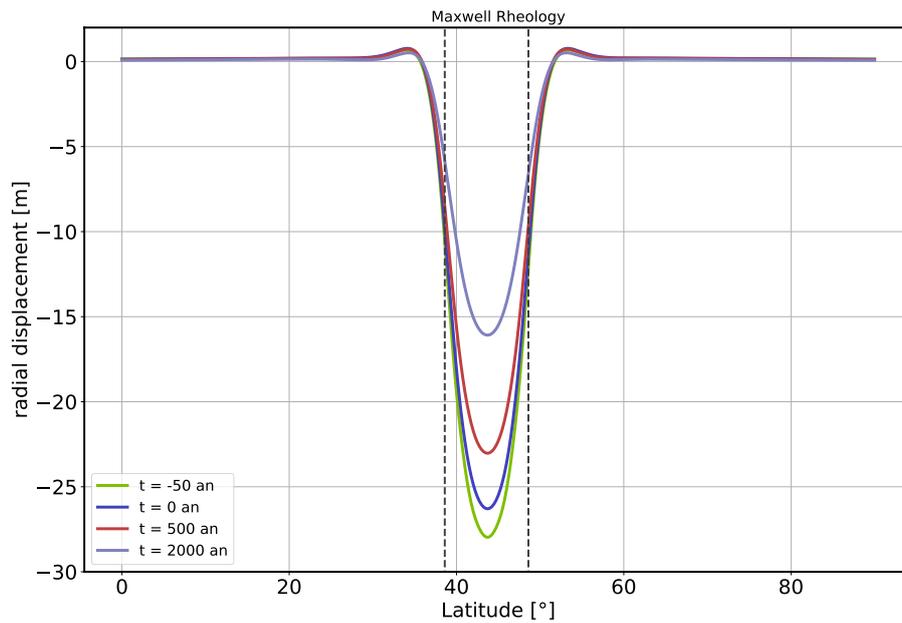


Figure 2.4: Carte du déplacement vertical élastique induit par la déglaciation instantanée de la calotte glaciaire décrite dans la table 2.1. La ligne verte montre le méridien le long duquel les déplacements au cours du temps sont estimés (Figure 2.5a et b).

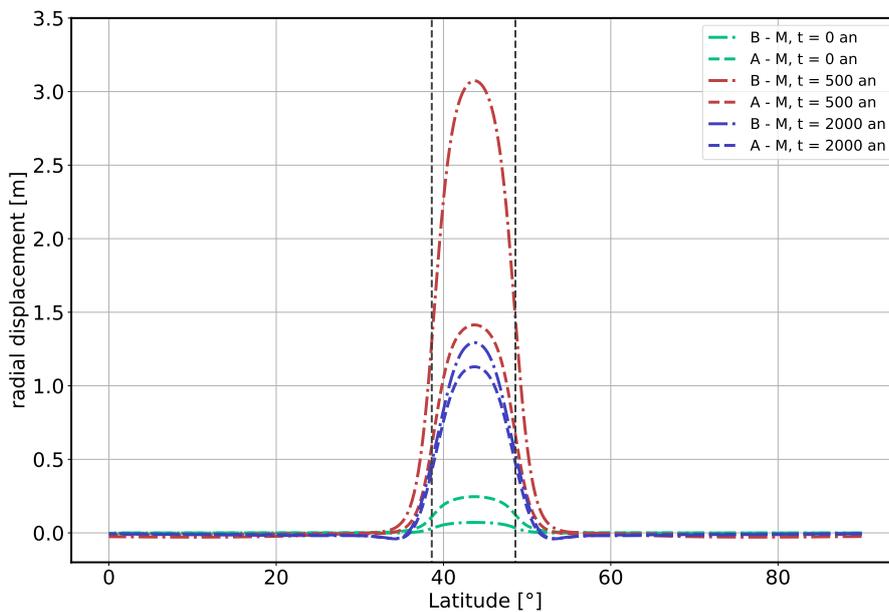
### 2.4.3 Déplacements viscoélastiques le long d'un méridien de longitude $7^\circ$

Nous utilisons ici des fonctions de Green pour une Terre viscoélastique. Les déformations continuent donc de s'accumuler au cours du temps. Pour illustrer les déformations de la surface nous traçons des profils en latitude des déplacements de la surface au cours du temps (figures 2.5a et b). La figure 2.5a montre les déplacements de la surface en réponse à une déglaciation instantanée pour une Terre viscoélastique de Maxwell, et à différents moments par rapport à l'époque de la déglaciation: l'état initial ( $t = -50$  ans), la réponse élastique instantanée ( $t = 0$  ans) et deux moments de la réponse visqueuse ( $t = 500$  et  $2000$  ans). Nous calculons ces profils pour les trois rhéologies viscoélastiques présentées dans la section 2.2.2. Les différences dans les déplacements par rapport à la rhéologie de Maxwell sont montrés dans la figure 2.5b. À  $t = -50$  ans nous pouvons noter pour  $\varphi \in [37^\circ, 42^\circ]$  et  $\varphi \in [52^\circ, 57^\circ]$  la présence du bourrelet en périphérie de la calotte. Ce bourrelet se met en place pour accommoder la présence de la calotte. Sur les 100 m d'épaisseur de glace plus de 25 m apparaîtront comme étant enfouis en bordure de la calotte. De la même manière que pour la figure 2.4, les déplacements pour  $\varphi \in [0^\circ, 37^\circ]$  et  $\varphi \in [57^\circ, 90^\circ]$  sont nulles. La zone  $\varphi \in [37^\circ, 57^\circ]$  montre les effets viscoélastiques des variations d'épaisseur de la calotte.

Nous pouvons noter sur ces figures que la réponse élastique est la même pour chaque rhéologie. Ce résultat est cohérent puisque la réponse élastique ne dépend que des paramètres élastiques du modèle (densité  $\rho$  et rigidité  $\mu$ ). La différence entre ces rhéologies se trouve dans la réponse visqueuse. Dans un premier temps nous pouvons comparer la déformation subie par la surface entre  $t = 0$  an et  $t = 500$  ans. L'effet maximal de la déglaciation est obtenu pour la zone directement sous la calotte. les déplacements autour du bourrelet sont de quelques cm contre plusieurs mètres là où se situait la calotte. La déformation la plus importante est obtenue pour la rhéologie de Burgers, suivi d'Andrade et de Maxwell. L'écart entre les rhéologies de Maxwell et de Burgers et Andrade sont de 1.5 m et 3 m, respectivement. Ces différences dans les déplacements sont liées à la phase transitoire des rhéologies de Burgers et d'Andrade. Les effets de la phase transitoire sont aussi notables aux temps courts. Sur la période de  $t = 500$  ans à  $t = 2000$  ans les déplacements visqueuses correspondent à l'état stationnaire des trois rhéologies. Nous pouvons noter qu'à  $t = 2000$  ans les déplacements sous la calotte sont similaires pour les rhéologies d'Andrade et de Burgers, avec un écart de l'ordre de 1 m. les déplacements pour la rhéologie de Maxwell sont toujours inférieures à celles des deux autres rhéologies. Dans les sections suivantes nous nous intéressons aux déplacements et variations de gravité en surface pour un point sous la calotte et un point du bourrelet périphérique.



(A)



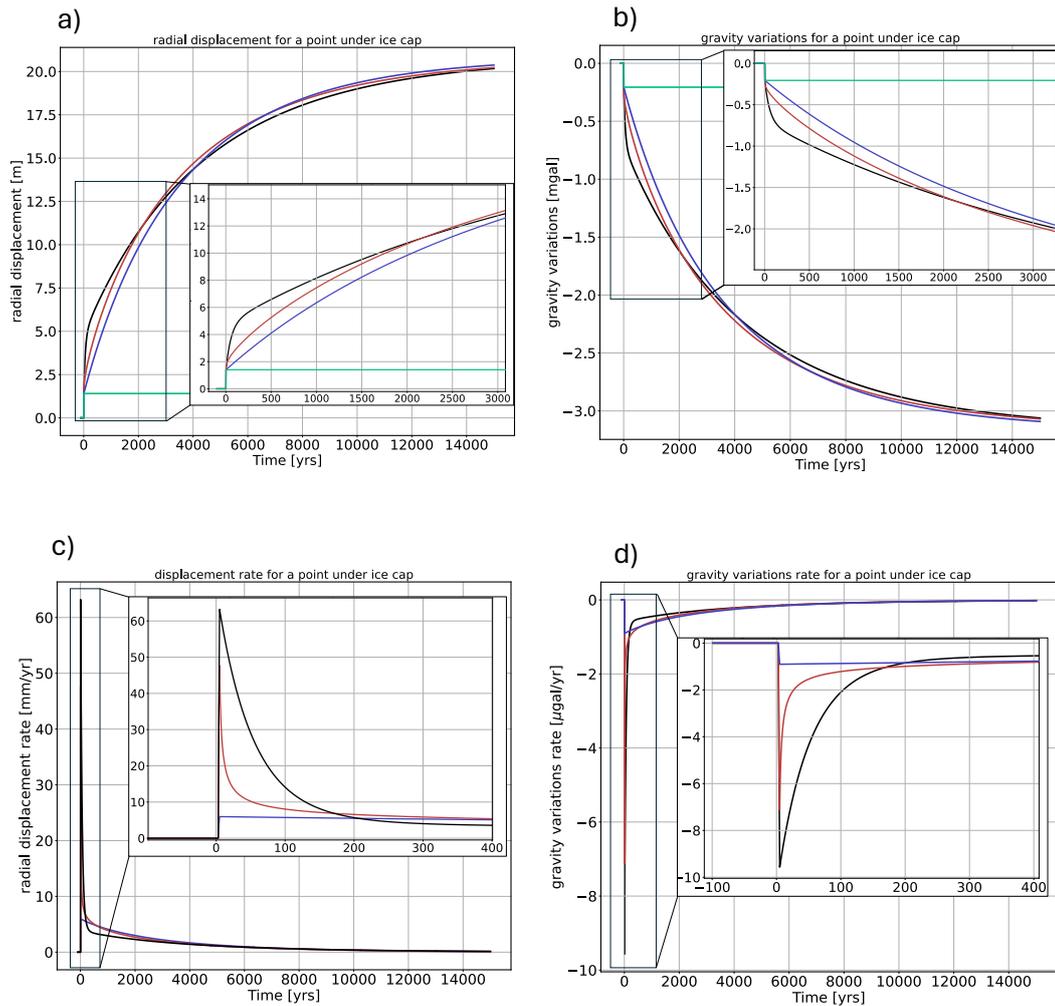
(B)

Figure 2.5: (a) Profil en latitude des déplacements verticaux issus de la déglaciation pour la rhéologie de Maxwell, obtenus avant la déglaciation ( $t = -50$  an), lors de la déglaciation ( $t = 0$  an), puis 500 et 2000 ans après la déglaciation. (b) différences dans les déplacements verticaux par rapport à la rhéologie de Maxwell pour les rhéologies de Burgers et d'Andrade. Les lignes verticales en tirets noirs montrent les limites de la calotte glaciaire.

#### 2.4.4 Déformations pour un observateur sous la calotte glaciaire

Dans cette section nous décrivons les déformations subies par un point sous la calotte (43°N,7°E). Les figures 2.6-a et -b montrent le déplacement vertical et la variation de la gravité au cours du temps. La déformation purement élastique (courbes vertes dans les Fig. 2.6-a et -b) est la même pour toutes les rhéologies. Pour cet observateur nous obtenons pour les déformations élastiques un déplacement de 1,41 m et une variation de gravité de -0,206 mGal. Immédiatement après le rebond élastique nous passons dans le cadre des déformations visqueuses. Les déformations visqueuses de Maxwell sont immédiatement en état stationnaire et le reste jusqu'au retour à l'équilibre isostatique. Les rhéologies de Burgers et d'Andrade permettent dans un premier temps une réponse transitoire. Ces deux rhéologies conduisent à un soulèvement et à un changement de gravité beaucoup plus importants que la rhéologie de Maxwell pour les courtes échelles de temps ( $t \leq 1000$  ans). La différence par rapport à la rhéologie de Maxwell atteint environ 3 m et 0,7 mGal, et environ 1,5 m et 0,25 mGal pour les rhéologies de Burgers et d'Andrade, respectivement. A partir de 3000 ans les déplacements et variations de gravité engendrés tendent à converger vers des valeurs similaires pour chaque rhéologie. Les différences de déplacement et variations de gravité à partir de cette échelle de temps sont de l'ordre du centimètre et du microGal, respectivement. Nous pouvons aussi souligner que les déplacements et variations de gravité cumulés (à  $t = 15000$  ans) sont similaires pour les trois rhéologies.

Pour mieux comprendre les différences induites par l'utilisation de différentes rhéologies, nous représentons sur les figures 2.6-c et -d les taux de déplacement radial visqueux et de variation de gravité, respectivement. Les rhéologies de Burgers et d'Andrade induisent sur les courtes périodes ( $t \leq 100$  ans) des taux de déformation jusqu'à 10.5 et 6 fois supérieurs à ceux de la rhéologie de Maxwell. A partir de  $t = 100$  ans les taux de déformations des deux rhéologies tendent à converger vers les taux de Maxwell. Cette période de temps reflète le caractère transitoire des rhéologies de Burgers et de d'Andrade. Durant une courte période de temps nous pouvons constater que les rhéologies d'Andrade et de Maxwell ont des taux de déformations supérieurs à ceux de Burgers (entre  $t = 200$  ans et  $t = 1000$  ans). Ce résultat est intéressant pour l'étude de déformations visqueuses liées à la fonte du Petit Âge glaciaire (LIA pour Little Ice Age) (e.g. Grove, 2012; Mémin et al., 2014), car il montre que l'emploi de Burgers mènera à des taux de déplacement différents de ceux de la rhéologie d'Andrade ou de Maxwell. A partir de  $t = 2000$  ans les taux de déformations des trois rhéologies deviennent similaires, et tendent vers zéro à partir de  $t = 10000$  ans. Ces deux périodes montrent la réponse en état stationnaire des trois rhéologies. Il est important de noter que comme pour les écarts dans les déplacements cumulés, les différences dans les taux de déformations ne sont remarquables que pour les courtes périodes de temps. Les rhéologies transitoires auront donc un impact notable pour les courtes périodes de temps après les déglaciations, ainsi que pour les zones subissant encore des variations de masse de glace sur Terre (e.g. Groenland (Simon et al., 2022), Antarctique (Barletta et al., 2018)).



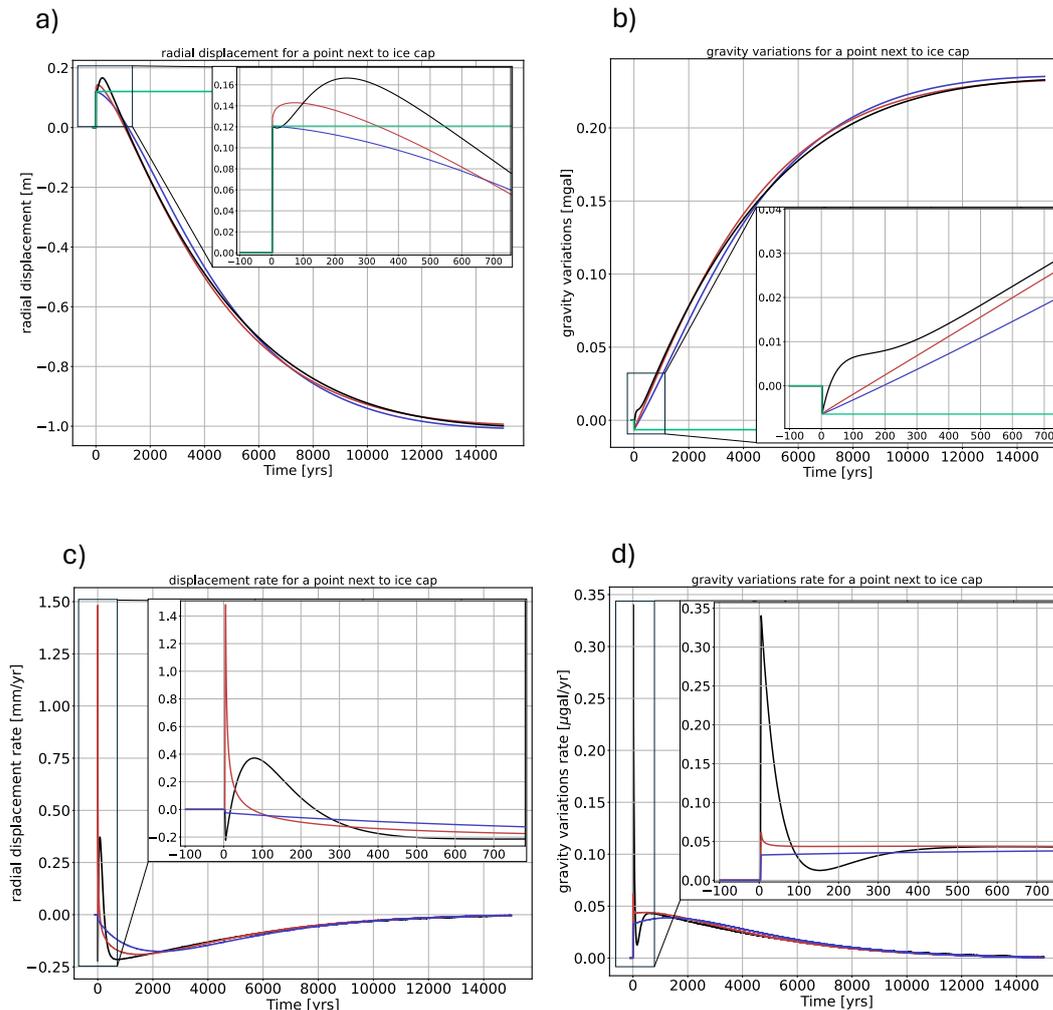
## Maxwell Andrade Burgers

Figure 2.6: Déplacement radial (a) et variations de gravité (b) cumulés calculés pour un observateur se trouvant sous la calotte glaciaire. (c) et (d) montrent les taux de ces deux paramètres. Les courbes vertes montrent les réponses élastiques.

### 2.4.5 Déformations pour un observateur sur le bourrelet périphérique

Dans cette section nous décrivons les déformations subies pour un point sur le bourrelet glaciaire (37°N,7°E). Comme pour la section précédente, les figures 2.7-a et -b et 2.7-c et -d montrent les déplacements et variations de gravité ainsi que leurs taux dans le temps, respectivement. Nous pouvons noter dans un premier temps que les déformations induites au niveau du bourrelet sont beaucoup moins importantes que celle pour la zone sous la calotte. Comme pour l'observateur sous la calotte la composante élastique de la déglaciation montre un soulèvement de 0.121 m et une variation de gravité de  $-6.4 \mu\text{Gal}$ . Pour ce qui est des déformations visqueuses nous obtenons des comportements différents de ceux de la partie précédente. Pour la rhéologie de Maxwell, immédiatement après le soulèvement élastique nous observons une subsidence. La relaxation totale est obtenue plus tard que pour la partie

précédente, autour de  $t = 14000$  ans. Les rhéologies de Burgers et d'Andrade mènent à des comportements différents de Maxwell. Pour la rhéologie d'Andrade nous pouvons noter une courte phase de soulèvement de la surface d'environ 100 ans, suivi d'une subsidence qui se poursuit jusqu'à atteindre l'équilibre isostatique autour de 14000 ans. Le comportement d'un corps de Burgers est encore plus variable que les deux précédents. Dans un premier nous observons une courte phase de subsidence pour  $t \in [0, 20]$  ans, puis une phase de soulèvement pour  $t \in [21, 235]$  ans et enfin un retour en subsidence jusqu'à la fin des déformations. Ces comportements sont intéressants pour les courtes périodes post variations de masse. Nous montrons qu'il est possible d'obtenir du soulèvement pour des zones qui en employant la rhéologie de Maxwell ne subirait que de la subsidence.



## Maxwell   Andrade   Burgers

Figure 2.7: Déplacement radial (a) et variations de gravité (b) cumulés calculés pour un observateur se trouvant en périphérie de la calotte. (c) et (d) montrent les taux de ces deux paramètres. Les courbes vertes montrent les réponses élastiques.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi notre stratégie de modélisation du GIA. Nous définissons les équations fondamentales de la gravito-viscoélasticité, et explicitons les trois rhéologies viscoélastiques que nous employons. La linéarisation des équations fondamentales ainsi que les équations constitutives de Maxwell, de Burgers et d'Andrade nous permettent de définir les nombres de Love de charge et des fonctions de Green pour un modèle de Terre sphérique.

Nous utilisons ensuite ces fonctions pour illustrer les effets induits par la déglaciation d'une calotte glaciaire pour chaque rhéologie viscoélastique. Nous supposons une déglaciation d'une calotte de  $5^\circ$  de demi amplitude et de 100 m d'épaisseur. Nous montrons dans un premier temps des profils en latitude des déformations au cours du temps pour chaque rhéologie. Ces profils montrent que les principales différences entre rhéologies dans la modélisation sont obtenues pour les courtes périodes de temps après la variation de masse, de l'ordre de quelques centaines d'années. Nous montrons ensuite les déformations au cours du temps pour deux observateurs, un situé sous la calotte et l'autre en dehors. Les évolutions temporelles des déplacements et de la gravité montrent que les écarts entre les rhéologies peuvent atteindre plusieurs mètres et dizaines de microGal. Les différences s'amointrissent aux temps long, de l'ordre du millénaire et au-delà. De la même manière les écarts dans les taux de déformations sont importants sur les courtes échelles de temps, de l'ordre de la dizaine de millimètre par an et de quelques microGals par an.

Dans ce chapitre nous avons montré les effets des variations de masse d'une calotte. Nous avons mis en évidence les premiers effets des rhéologies dans l'estimation des déplacements et variations de gravité liés aux variations de masse de surface. Dans le chapitre suivant nous nous intéressons aux effets des rhéologies lorsque l'on emploie un modèle de variation de masse réaliste sur le plan spatial et temporel. Nous utilisons la méthode établie et nous nous intéressons à l'impact des rhéologies et viscosité du manteau dans l'estimation des effets de la déglaciation du Pléistocène et des variations de masses actuelles.

## Chapitre 3

# Effets des rhéologies d'Andrade et de Burgers sur la modélisation de l'Ajustement Isostatic Glaciaire en Antarctique

### Contenu

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>3.2</b>	<b>Modeling strategy</b> . . . . .	<b>28</b>
3.2.1	Formalism . . . . .	28
3.2.2	Earth's radial structures . . . . .	29
3.2.3	Rheological laws . . . . .	29
3.2.4	Sensitivity of LLNs to rheologies and viscosity profiles . . .	33
<b>3.3</b>	<b>Response to ice-mass change in Antarctica</b> . . . . .	<b>38</b>
3.3.1	Predicting the deformation . . . . .	38
3.3.2	Pleistocene deglaciation . . . . .	39
3.3.3	Recent ice-mass change . . . . .	41
<b>3.4</b>	<b>Discussion</b> . . . . .	<b>44</b>
3.4.1	About the relative sea level . . . . .	44
3.4.2	About the upper mantle viscosity . . . . .	45
<b>3.5</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>46</b>

---

Le contenu de ce chapitre fait l'objet d'un article paru dans *Geodesy and Geodynamics* (volume 15, numéro 5, pages 429-440) en 2024, intitulé: **Effects of Andrade and Burgers rheologies on glacial isostatic adjustment modeling in Antarctica**. Les auteurs sont **Boughanemi Alexandre** et **Mémin Anthony**.

La région Antarctique est une des zones clés pour l'étude du GIA. La calotte glaciaire Antarctique (AIS pour Antarctic Ice Sheet) couvre 98% de la surface du continent et est une des plus grande réserve d'eau continentale. Comme le Groenland, la calotte Antarctique est sujette à la foi aux déplacements et variations de gravités dues de la déglaciation passée depuis la fin du Last Glacial Maximum (LGM) et les effets des variations de masse actuelle. Nous disposons aujourd'hui de plusieurs jeux d'observations des variations de l'AIS. Sur la période de 2002 à 2017 plusieurs

missions d'altimétrie satellites (e.g. CRYOSAT, ICESAT-1, ICESAT-2) ont fourni des observations qui reflètent les variations d'épaisseur de la calotte ainsi que les déplacements du sol. De 2002 à 2018 et depuis 2018 les missions d'observations gravimétriques GRACE et GRACE-FO fournissent des observations traduisant les variations de masses de l'AIS et celles dues aux déplacements du sol. Ces observations nous permettent d'avoir une estimation du bilan de masse de l'Antarctique, de l'ordre de 2720 Gt de glace redistribué aux océans sur la période de 1992 à 2017 (IMBIE, 2018). Ceci nous permet en partie de modéliser les variations de masse de la calotte Antarctique et donc de modéliser les effets actuels du GIA en Antarctique. Cependant nous ne disposons pas d'observations en Antarctique, tels que les évolutions des paléo-rivages, pour contraindre les évolutions temporelles de l'AIS. De plus les paramètres rhéologiques comme le profil de viscosité de la Terre restent mal contraints.

Il existe aujourd'hui plusieurs modèles de déglaciation pour la calotte Antarctique décrivant son évolution sur les derniers 25 000 ans comme ICE6G\_C (Peltier et al., 2015) ou IJ05\_R2 (Ivins et al., 2013). Ces modèles sont construits sur la base d'un modèle de Terre, comprenant un profil de viscosité à symétrie sphérique et en utilisant la rhéologie viscoélastique de Maxwell. La viscosité employée pour le manteau supérieur est majoritairement de l'ordre de  $10^{21} Pa.s$  (e.g. Peltier et al., 2015). Cependant plusieurs études récentes (e.g. Nield et al., 2014; Barletta et al., 2018) montrent qu'employer une viscosité de l'ordre de  $10^{18}$  à  $10^{19} Pa.s$  permet d'obtenir un meilleur accord avec les observations. Par ailleurs plusieurs études sur les rebonds post-sismiques (e.g. Pollitz, 2003; Pollitz et al., 2006) employant la rhéologie de Burgers tendent à suggérer des viscosités similaires. La rhéologie de Burgers peut être décrite comme étant la combinaison de la rhéologie de Maxwell et d'un élément de Kelvin-Voigt, et permet une réponse d'abord transitoire visqueuse puis en régime permanent d'un milieu. Cette rhéologie permet d'obtenir une réponse plus importante qu'avec la rhéologie de Maxwell aux courtes échelles de temps après la variation de masse de surface. La rhéologie viscoélastique d'Andrade, communément utilisée dans l'étude des effets de marées, peut-être approximée à un modèle de Burgers étendu (Gevorgyan et al., 2020). Ces rhéologies décrivent toutes deux une réponse transitoire qui incluent une viscosité du milieu plus faible que pour la réponse en régime permanent. Ce comportement est en accord avec les récentes études (e.g. Paxman et al., 2023; Ivins et al., 2023), mais ces rhéologies ne sont peu ou pas utilisées dans le cadre de l'étude du GIA. Dans ce chapitre nous estimons l'impact des différentes rhéologies et de deux profils de viscosité sur la modélisation du GIA en Antarctique pour les variations de masse passées et présentes.

Pour modéliser la composante Pléistocène du GIA en Antarctique nous utilisons le modèle de déglaciation ICE6G\_C (Peltier et al., 2015). Ce modèle a été obtenu conjointement avec un profil de viscosité pour la Terre, VM5a. Afin d'estimer les effets d'une couche à faible viscosité dans le manteau supérieur du profil de viscosité dans l'estimation des déplacements et variations de gravité du GIA, nous utilisons aussi une version modifiée de VM5a (appelée par la suite VM5am). Ce profil comprend sous la lithosphère une couche avec une viscosité de  $\eta = 10^{18} Pa.s$  dans le manteau supérieur. Pour modéliser les variations de masse actuelles nous utilisons les observations d'altimétrie de Schröder et al. (2019) et construisons un modèle de variations d'épaisseur de la calotte Antarctique. Nous utilisons le formalisme des nombres de Love (Love, 1909) et le formalisme des fonctions de Green comme décrites dans le Chapitre 2 pour modéliser les déplacements et variations de gravité suivant les variations de masse. Nous utilisons les logiciels ALMA (Melini et al., 2022) et TABOO

(Spada, 2003) pour calculer les nombres de Love de charge et calculer les déplacements verticaux et les variations de gravité, respectivement.

Pour la déglaciation du Pléistocène, nous obtenons des différences dans les taux de déplacement de l'ordre de 0.1 à 0.5 mm/an par rapport à la rhéologie de Maxwell. Les différences maximales sont obtenues avec la rhéologie d'Andrade, et le profil de viscosité VM5a. Nous modélisons aussi les séries temporelles liées à la déglaciation pour un point se situant sur la péninsule Antarctique. Il ressort que les différences dans le déplacement radial cumulé entre les rhéologie est de l'ordre de quelques centimètres sur un total d'environ 0,5 m. En revanche, en utilisant la rhéologie de Burgers nous obtenons à courtes échelles de temps après la déglaciation des écarts de l'ordre de 10 m dans le déplacement radial. Les mêmes conclusions sont obtenues en utilisant le profil VM5am. Le déplacement cumulé obtenu par rapport au profil VM5a est plus important d'environ 40 m. Ce résultat illustre l'importance de la rhéologie et du profil de viscosité employés dans l'estimation du niveau marin relatif, qui est directement lié à l'estimation des variations de volume de glace passée et donc la construction des modèles de déglaciation. Pour la composante actuelle nous modélisons les déplacements et les taux de déplacement variables dans le temps pour un observateur localisé dans la région de Pine Island Glacier (PIG). Il ressort que pour les fontes actuelles, le profil de viscosité à un effet majeur sur les déplacements cumulés modélisés. Les déplacements et taux de déplacements obtenus avec le profil VM5am sont entre 2 et 4 fois supérieurs à ceux obtenus avec le profil VM5a. Utiliser le profil VM5am augmente significativement la contribution visqueuse des déplacements. Elle représente plus de la moitié des déplacements encourus, contre moins de 20% avec le profil VM5a. Les différences entre rhéologies sont aussi plus marquées. Les rhéologies de Burgers et d'Andrade entraîne des déplacements cumulés plus grands de 100 mm et 25 mm, respectivement.

Ces résultats nous permettent de discuter de l'importance de la viscosité du manteau supérieur et de la rhéologie dans la construction des modèles de GIA. Plusieurs modèles (e.g. Ivins et al., 2013; Peltier et al., 2015) utilisent les variations du niveau eustatique passées pour contraindre l'histoire de la déglaciation du Pléistocène. Nous montrons ici que des déplacements similaires, et donc des variations du niveau marin similaires, mais suivant une histoire différentes, peuvent être obtenus en changeant la viscosité et la rhéologie du manteau. Nos résultats suggèrent que l'utilisation d'une rhéologie viscoélastique transitoire entraînerait une chronologie et une variation de masse différente. De même, nous obtenons un meilleur accord avec les taux de déplacements observés en utilisant les rhéologies transitoires de Burgers et Andrade. Comme plusieurs autres études ont montré que la viscosité du manteau supérieur est susceptible de dépendre du temps (e.g. Adhikari et al., 2021; Paxman et al., 2023), l'utilisation d'une rhéologie transitoire qui inclut une réponse visqueuse à court terme de la Terre devrait améliorer la modélisation de la GIA en unifiant au sein d'une même loi rhéologique les effets induits par les changements passés et présents de la masse de glace.

## Abstract

Variations in ice mass deform the Earth and modify its gravity field, a process known as Glacial Isostatic Adjustment (GIA). GIA in Antarctica remains poorly constrained due to the cumulative effect of past and present ice-mass changes, the unknown history of the past ice-mass change, and the uncertainties on the mechanical properties of the Earth. We investigate the effect of using Andrade and Burgers

viscoelastic rheologies, instead of that commonly used of Maxwell, to model GIA-induced deformation in Antarctica. We use the Love number and Green's functions formalism to compute the radial surface displacements and the gravity changes induced by the past and present day ice-mass changes. We consider an Earth model with the elastic properties and the radial structure averaged from the Preliminary Reference Earth Model and two viscosity profiles to account for the recently published results regarding the present day ice-mass changes. Using the three rheological laws influences differently the temporal response of the Earth and leads to smaller discrepancies compared to that induced by the two viscosity structures. The differences are the largest between Maxwell and Burgers rheologies during the 100 - 1000 years following the beginning of the surface-mass change. Results show that using the Andrade and Burgers rheologies lead to a greater response of the Earth for decennial to centennial time scales, up to 10 m more than Maxwell. Considering the recent ice-mass changes only, Burgers and Andrade rheologies lead to deformation rates that are several times larger than that estimated with the Maxwell rheology.

### 3.1 Introduction

Antarctica is the southernmost continent on Earth. Its surface covers  $14.1 \times 10^6$  km<sup>2</sup> including 98% beneath ice. The melting of the ice of the Antarctic Ice Sheet (AIS) could induce a global mean sea level rise of 58 m (IMBIE, 2018). Due to the large extent of the AIS, ice-mass change can only be assessed from satellite altimetry data, as it provides with changes of its surface elevation, or satellite gravimetry, as gravity changes are a direct consequence of mass changes (e.g. Wingham et al., 1998; Velicogna and Wahr, 2006). Several studies provide estimates of the ice mass balance in Antarctica (e.g. IMBIE, 2018; Velicogna et al., 2020a). The results point to an ice loss of about 2,720 Gt between 1992 and 2017 (IMBIE, 2018). In response to these mass changes, the surface of the Earth deforms. Deformations resulting from past and present-day ice-mass changes are due to viscoelastic processes and gravitational responses and tend to an isostatic equilibrium. This process, called Glacial Isostatic Adjustment (GIA), is directly influenced by the mechanical properties and the structure of the inner Earth.

The effects of GIA have been observed and studied for a long time (Peltier and Andrews, 1976b; Peltier, 1976). GIA generates crustal displacements and variations of the Earth's gravity field which are currently observed from Global Navigation Satellite System (GNSS) and ground or space-based gravimetry such as the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) and its Follow On (GRACE-FO) missions (Tapley et al., 2004; Landerer et al., 2020). Removing GIA signals from positioning and gravity data is required in order to accurately estimate present-day ice-mass change from geodetic observations (Li et al., 2020; Powell et al., 2020; Hattori et al., 2021). GIA-induced deformations are classically modeled by assuming a viscoelastic Earth with a Maxwell rheology (e.g. Cathles, 1971; Peltier, 1974; Li et al., 2020). This rheology is characterized by a short-term elastic and long-term viscous response, commonly represented as a spring and a dash-pot respectively. The Maxwell rheology has made possible to explain the evolution of the sea level deduced from the emergence of paleo-shorelines, particularly in regions formerly covered by ice during the Last Glacial Maximum (LGM) such as the North American region (e.g. Tamisiea et al., 2007). Several studies based on GIA related observations, such as land uplift or relative sea level, suggest that the average viscosity of the mantle, from the bottom of the lithosphere down to a depth of 1 400 km, should be of

the order of  $10^{21}$  Pa.s (e.g. Haskell, 1935; Mitrovica, 1996). However, recent studies show that uplift rates in response to current glacier thinning (e.g. Nield et al., 2014) and those resulting from the end of the Little Ice Age (LIA, Grove, 2012; Mémin et al., 2014; Barletta et al., 2018) cannot be explained by using the Maxwell rheology and the classical viscosity profile used to describe the deformations resulting from the Pleistocene deglaciation. These deformations are best explained if a viscosity of about  $10^{18}$ - $10^{19}$  Pa.s is used for the upper mantle or a part of it. In Antarctica, such low viscosities might reflect the lateral structure of the Earth as suggested by seismic tomography (e.g. Ritzwoller et al., 2001; Morelli and Danesi, 2004). It has already been shown that lateral changes in the Earth mechanical structure can affect the predictions of surface displacement (Powell et al., 2020), mass balance from space-based gravimetry (Wal et al., 2015) and sea-level change (Powell et al., 2021). However, they remain barely considered when analysing geodetic data as well as to derive the global deglaciation model ICE6G\_C (Peltier et al., 2015).

In parallel, studies of post-seismic deformation commonly employ Burgers (Pollitz, 2003) rheologies, also suggesting lower viscosities and fast non-elastic deformations. The Burgers rheology can be described as a Maxwell element (spring and dash-pot in series) and one (simple Burgers model or SBM) or several (extended Burgers model or EBM) Kelvin-Voigt elements (spring and dash-pot in parallel) connected in series. Maxwell and Kelvin-Voigt elements allow SBM and EBM to describe steady-state and transient viscous responses respectively (e.g. Ivins et al., 2020). According to Ivins et al. (2020) SBM and EBM have similarities provided that their respective parameters are appropriately tuned. Performing simple experiments involving deformations of an EBM half-space, Ivins et al. (2023) point that purely elastic models are not appropriate to account for deformations from inter-annual time scale and that Maxwell models may lead to long-term viscosity of the mantle that is too low. Thus, they favor the use of transient rheologies. Transient rheologies have already been discussed by Yuen et al. (1986) and Peltier et al. (1980) in the framework of GIA. In their work, they concluded that transient rheologies are not important for understanding GIA, particularly in the North American region. Sabadini et al. (1985) discussed the effect of transient rheologies with respect to the viscosity of the lower mantle. They find that similar results can be achieved with transient rheologies, but with a different viscosity profile than with Maxwell. These previous studies were mostly focused on the deformations induced by the Pleistocene deglaciation. Including LIA and present-day ice-mass changes in Greenland, Paxman et al. (2023) have obtained similar results to that of Ivins et al. (2023). They show that transient rheologies could be used to unify low and high mantle viscosities estimated from decadal to centennial and millennial surface-mass changes. Simon et al. (2022) have also shown that SBM allows for a better explanation of the rapid changes of the near-field postglacial sea level than does the use of the Maxwell rheology. Based on Ivins et al. (2022), they have justified the use of SBM arguing that deformation estimated using the EBM does not show complex temporal changes given a gradual surface-mass changes. Also recently, Michel and Boy (2022) have highlighted, using SBMs, the importance of the anelasticity of the Earth's mantle in the estimation of the deformations due to the present-day melts, especially for low degree deformations.

The Andrade rheology is also a transient rheology that is frequently employed in astronomical and planetary studies to account for energy dissipation (e.g. Castillo-Rogez et al., 2011; Efroimsky, 2012; Gevorgyan et al., 2020). This rheology has a steady-state phase represented by a Maxwell element, as SBM and EBM, and a transient phase driven by a power-law function of time (e.g. Faul and Jackson, 2015).

Gevorgyan et al. (2020) and references therein point that it is possible to interpret the non-Maxwell contribution of the Andrade rheology as a continuum of Kelvin-Voigt elements added in series, and therefore an EBM. Indeed, studying Enceladus' energy dissipation due to libration, Gevorgyan et al. (2020) succeeded in approximating the Andrade rheology using six Kelvin-Voigt elements. Yet, the Andrade rheology has not been employed to study GIA and the SBM or EBM have not been used in Antarctica.

This paper aims at assessing the differences between using Maxwell, Burgers and Andrade rheologies when estimating geodetic parameters in response to GIA induced by short and long-term ice-mass change in Antarctica. It is not the goal of this paper to explain current observations. As mentioned above, the effects of lateral changes in the Earth's structure have been studied. Thus, we also do not investigate this aspect in this paper. Rather, we want to investigate the following questions: i) Are the past and present-day ice-mass changes resulting deformations significantly different by using the three rheologies for a typical Earth structure? ii) How does a strong viscosity contrast in the upper mantle affect these deformations? iii) How are the predicted cumulative deformations and rates affected by the three rheologies?

In Section 3.2, we present the Earth models that we employ and the formalism we follow to estimate surface deformation and gravity changes due to a surface redistribution of mass. In Section 3.3, we investigate the effects of the Pleistocene deglaciation and the recent ice-mass change on estimating geodetic parameters in Antarctica. We finally discuss our results in section 3.4 and conclude (Sect. 3.5) regarding the influence of rheologies on GIA modeling.

## 3.2 Modeling strategy

### 3.2.1 Formalism

To model the deformations and the gravity changes of the Earth in response to surface ice-mass changes we use the gravito-viscoelasticity theory and the Green's functions formalism (e.g. Farrell, 1972; Peltier, 1974). This formalism requires the computation of Love numbers (LNs) introduced by Love (1909). Love Numbers are dimensionless numbers that reflect the inner structure of the Earth and relate the deformations and gravity changes of the Earth to the cause of the deformation (e.g. Longman, 1962; Longman, 1963; Farrell, 1972). Ice changes result from a change in the ice-mass distribution at the Earth's surface which represent a surface loading. In the spherical harmonic formalism, a surface-mass distribution of harmonic degree  $n$ ,  $\sigma_n$ , induces a radial ( $u_n$ ) and tangential ( $v_n$ ) displacement of the surface as well as a change in the gravity potential ( $\phi_n$ ) of the same degree. Loading Love Numbers (LLNs)  $h'_n$ ,  $l'_n$  and  $k'_n$ , which are the LNs describing the capability of the Earth to deform when submitted to a unit surface forcing, are then related to displacements and gravity changes by the following relations (Sections 4.3 and 4.4 in Spada, 2003):

$$u_n = \frac{h'_n}{\rho_e} \frac{3}{2n+1} \sigma_n \quad (3.1)$$

$$v_n = \frac{l'_n}{\rho_e} \frac{3}{2n+1} \sigma_n \quad (3.2)$$

$$\phi_n = \frac{1+k'_n}{\rho_e} \frac{3\gamma}{2n+1} \sigma_n \quad (3.3)$$

with  $\rho_e$  the average density of the Earth and  $\gamma$  the surface gravity. Several methods have been implemented to compute LLNs like the normal modes approach (e.g. Peltier, 1974; Vermeersen and Sabadini, 1997) and the propagator approach (Sabadini et al., 1982). With the ALMA (pLANetary Love nuMBers cALculator) software, Melini et al. (2022) introduced an original strategy to numerically integrate the gravito-viscoelasticity equations. ALMA can rapidly and accurately compute the LLNs for a given spherically symmetric, non-rotating, incompressible and self-gravitating Earth model and a Heaviside loading function. It employs a numerical Laplace inversion of the Love numbers equations using the Post-Widder formula (Post, 1930; Widder, 1934; Widder, 1941). LLNs computed using ALMA are close to the ones computed using other approaches (Spada et al., 2011). More explanations of the method are given in Spada (2003) and Spada and Boschi (2006).

### 3.2.2 Earth's radial structures

We use two models for the Earth inner structure derived from the Preliminary Reference Earth Model (PREM) of Dziewonski and Anderson (1981). The models have a different number of layers and for each layer, rigidity and density are averaged from the PREM radial structure. Since we are using the ICE-6G\_C (VM5a) deglaciation model (Argus et al., 2014; Peltier et al., 2015) for investigating the effects of rheologies on GIA estimates, we use the associated VM5a viscosity profile. The VM5a model (Argus et al., 2014; Peltier et al., 2015) includes a 100 km thick elastic lithosphere, a viscosity of the upper mantle  $\eta_{UM} = 0.5 \times 10^{21}$  Pa.s, a 530 km-thick shallow lower mantle with a viscosity  $\eta_{LM1} = 1.6 \times 10^{21}$  Pa.s, and a deep lower mantle with a viscosity  $\eta_{LM2} = 3.1 \times 10^{21}$  Pa.s. We also use a modified version of this viscosity profile to account for recently published results in important ice-melting areas (e.g. Nield et al., 2014; Mémin et al., 2014; Barletta et al., 2018). This profile, hereafter called VM5am, divides the upper mantle into two viscoelastic layers. The shallow upper mantle is 120 km thick with a viscosity  $\eta_{SUM} = 1.0 \times 10^{18}$  Pa.s, assuring a large viscosity contrast as suggested by previously cited studies, while the deep upper mantle has the same properties as VM5a. The parameters of these models are described in Figure 3.1.

### 3.2.3 Rheological laws

Describing quasi-instantaneous and prolonged surface displacements or gravity changes is usually realized by invoking a viscoelastic body. The most often used viscoelastic rheology in GIA studies is the Maxwell law (e.g. Peltier, 1974; Wu and Peltier, 1982a). A body driven by such a law behaves elastically instantaneously and is characterized by a viscous steady state behavior for longer loading. For a Maxwell body submitted to a Heaviside loading, the creep compliance function  $J_M$  describes the strain variations under a step function of stress (Faul and Jackson, 2015). Following Ivins et al. (2020), we show the normalized compliance  $\Psi_M$ . The normalizing factor is  $\frac{\sigma_0}{2\mu}$  where  $\sigma_0$  is the initial loading stress and  $\mu$  the rigidity, both in Pa. The normalized compliance function is given as (Castillo-Rogez et al., 2011):

$$\Psi_M(t) = \left(1 + \frac{t}{\tau_M}\right) H(t) \quad (3.4)$$

with  $t$  the time,  $H(t)$  the heaviside function and  $\tau_M$  the Maxwell time with  $\tau_M = \frac{\eta}{\mu}$ ,  $\eta$  being the viscosity. To illustrate the strain variations of a Maxwell medium we

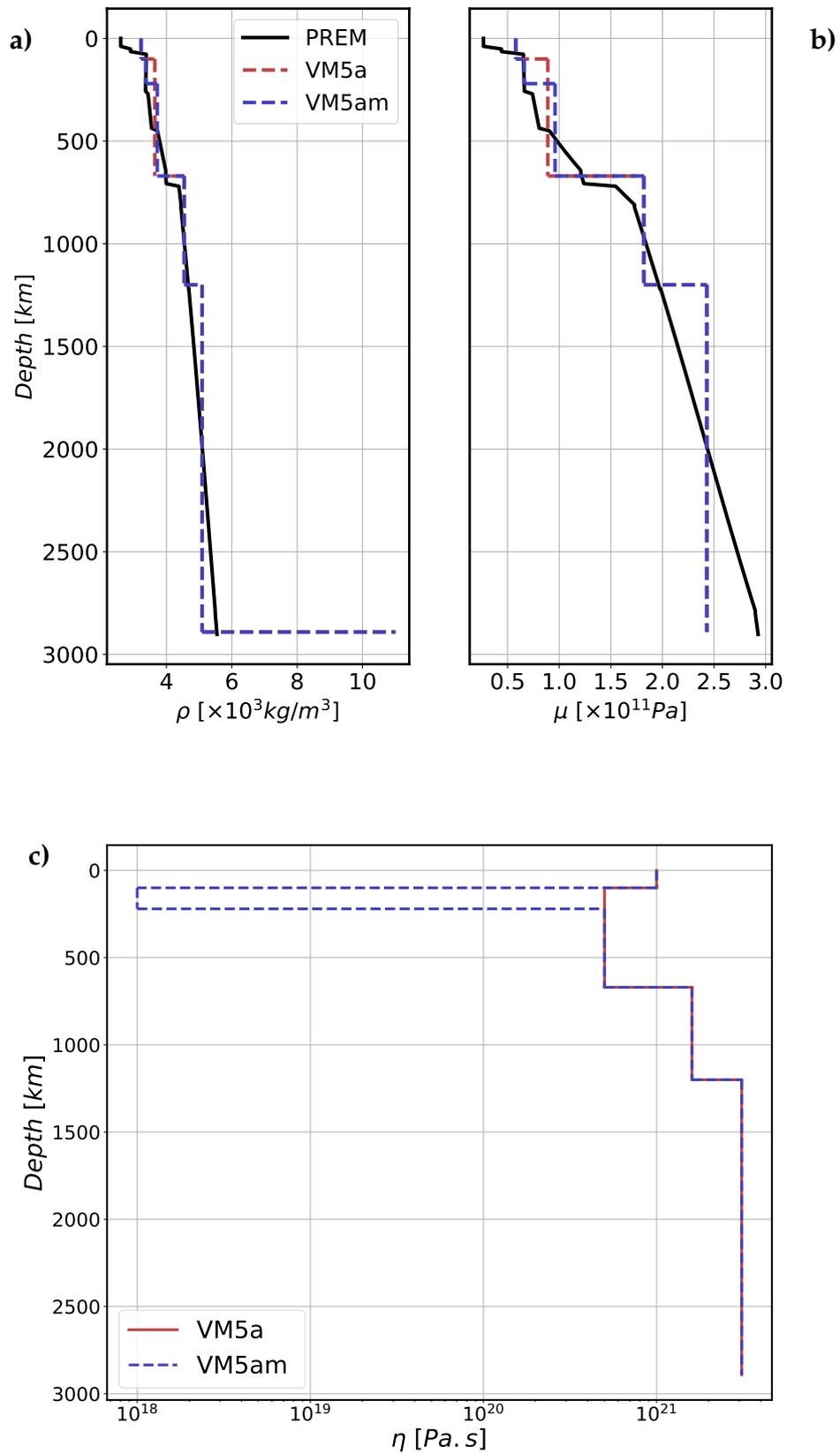


Figure 3.1: Density (a), rigidity (b) and viscosity (c) profiles for the Earth models VM5a and VM5am.

consider a stress function representing an unloading and a loading phases at  $t = 20$  yrs and  $t = 70$  yrs respectively. We assume that  $\mu = 10^{11}$  Pa and  $\eta = 10^{21}$  Pa.s and show  $\Psi_M$  in figure 3.2. It shows the synchronous unloading phase and the elastic deformation followed by the steady state deformation and a non recoverable strain after the loading phase.

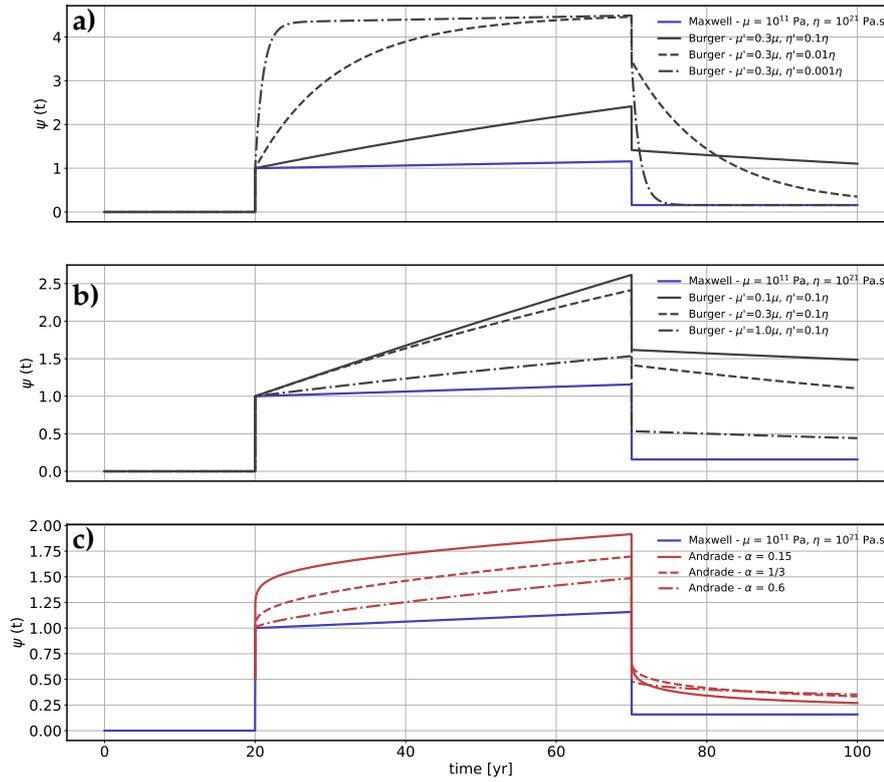


Figure 3.2: Deformations over time due to unloading at  $t = 20$  yrs and loading at  $t = 70$  yrs for the Maxwell, Andrade and Burgers rheologies with  $\sigma_0 = 1$  Pa. In a), we show the effect of the  $\frac{\eta'}{\eta}$  ratio, b) the  $\frac{\mu'}{\mu}$  ratio and c) the  $\alpha$  parameter.

A Burgers viscoelastic body can be described as a Maxwell body to which a Kelvin-Voigt element has been added, enabling a transient response. This transient response allows to gradually deform the stressed medium from the elastic response to the steady state behaviour. It is often used to explain post-seismic deformations (e.g. Pollitz, 2003; Hoechner et al., 2011). To describe the transient phase, the Burgers law requires a second viscosity,  $\eta'$ , and a second rigidity,  $\mu'$ . Then the normalized creep compliance function for the Burgers rheology,  $\Psi_B$ , takes the following form (Ivins et al., 2020):

$$\Psi_B(t) = \left( 1 + \frac{t}{\tau_M} + \frac{\mu}{\mu'} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau'}} \right) \right) H(t) \quad (3.5)$$

where  $\tau' = \eta'/\mu'$ . Considering the same unloading and loading history as previously, we show in figures 3.2a) and 3.2b) the effects of  $\frac{\eta'}{\eta}$  and  $\frac{\mu'}{\mu}$  on  $\Psi_B$ , respectively. Figure 3.2a) shows that the  $\frac{\eta'}{\eta}$  ratio controls the timing of the transient response, with a lower ratio greatly shortening its duration. Figure 3.2b) shows that the  $\frac{\mu'}{\mu}$  controls the amplitude of the response, with a lower ratio leading to a larger response. To estimate post-seismic rebound it is common to use  $\frac{\eta'}{\eta} \in [0.01, 0.1]$ , and  $\frac{\mu'}{\mu} \in [0.1, 1]$ .

The Andrade rheology is an extension of the Maxwell rheology by adding a damping term to the creep compliance function represented as a power law of time. A discussion of this model is introduced in Gevorgyan et al. (2020). It is often used to model tidal deformations and account for energy dissipation of telluric bodies. We assume that the relaxation time, or the time it takes for a body to reach 63% of the full deformation, is the same for both the Andrade and Maxwell rheologies (Castillo-Rogez et al., 2011). That time is written as  $\tau_M = \tau_A = \frac{\eta}{\mu}$ . The normalized creep compliance function for the Andrade rheology ( $\Psi_A$ ) is then (Castillo-Rogez et al., 2011):

$$\Psi_A(t) = \left( 1 + \frac{t}{\tau_M} + \left( \frac{t}{\tau_M} \right)^\alpha \right) H(t) \quad (3.6)$$

where  $\alpha$  is a physical parameter representing the transient response (Jackson et al., 2002; Castillo-Rogez et al., 2011), ranging as  $\alpha \in [0.15, 0.6]$ . Referring to the same stress history, we show in Figure 3.2c) the impact of that parameter. Similarly to the  $\frac{\eta'}{\eta}$  ratio,  $\alpha$  acts on the duration of the transient response and also on its amplitude.  $\alpha$  is usually taken between 0.33 and 0.5 (Goetze, 1971; Goetze and Brace, 1972; Efroimsky, 2012; Melini et al., 2022), and mostly as 1/3. Using the same parameters defining the Maxwell element, the SBM and Andrade rheology lead to sensibly largest strain compare to the purely Maxwell medium. In Section 3.2.4 we show a sensitivity analysis, in terms of LLNs, of Andrade and Burgers rheologies to the parameter  $\alpha$  and the ratio  $\frac{\eta'}{\eta}$ , respectively.

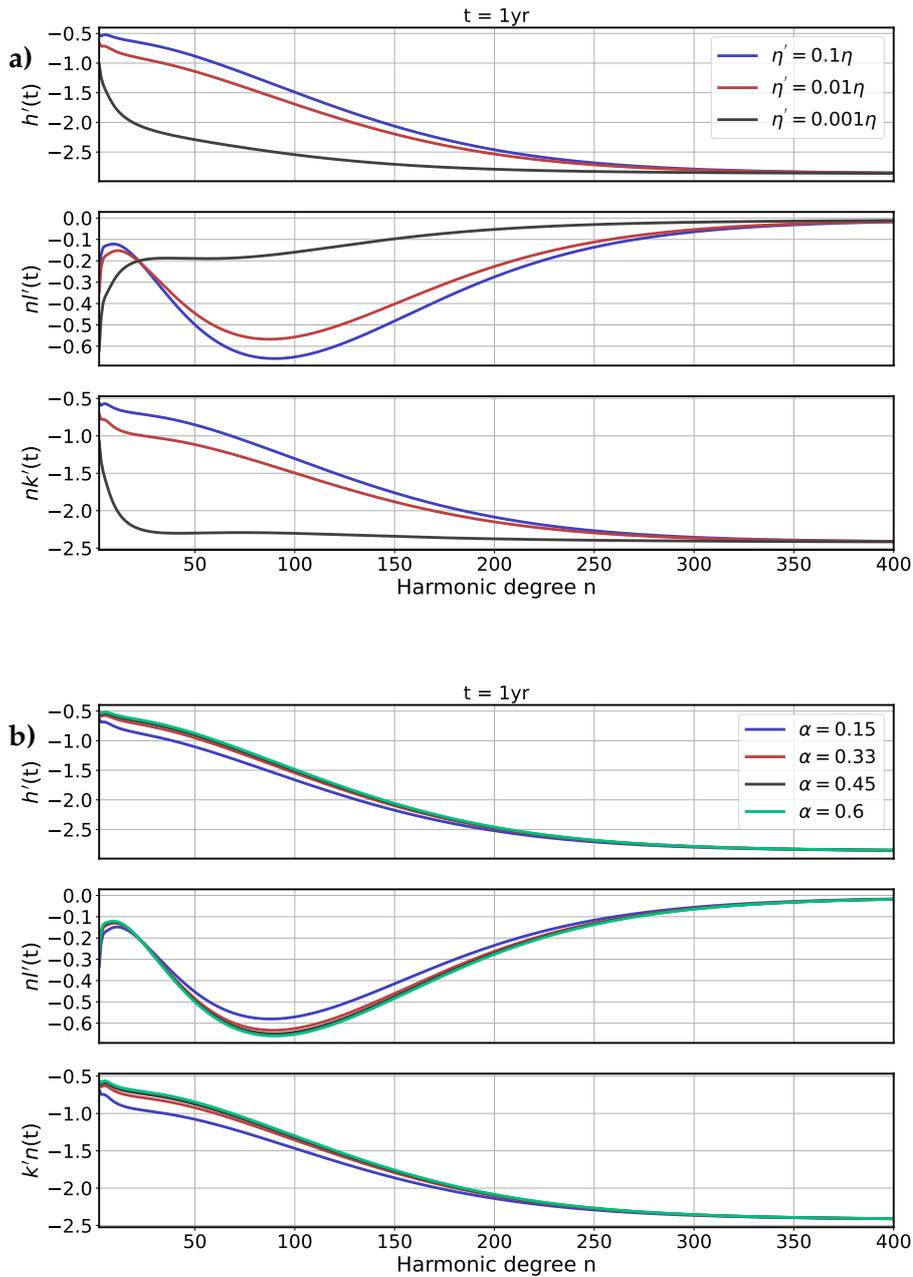


Figure 3.3: LLNs computed using the Earth model VM5a with the Burgers (a) and Andrade (b) rheologies for several values of  $\frac{\eta'}{\eta}$  and  $\alpha$  respectively 1 year after loading.

### 3.2.4 Sensitivity of LLNs to rheologies and viscosity profiles

#### 3.2.4.1 Variations in LLNs due to rheological parameters

The Andrade and Burgers rheologies require more parameters than the ones used to describe the Maxwell rheology. We investigate the effect of those parameters on LLNs. We compute the Heaviside LLNs one year after the loading for the Earth model VM5a with Burgers and Andrade rheologies and for harmonic degrees ranging from 2 to 400.

We show the LLNs in Figure 3.3 for a SBM with  $\frac{\mu'}{\mu} = 0.3$  (e.g. Pollitz, 2003; Pollitz et al., 2006; Hoechner et al., 2011) and  $\frac{\eta'}{\eta}$  in  $\{0.001, 0.01, 0.1\}$  and an Andrade rheology with  $\alpha$  in  $\{0.15, 0.33, 0.45, 0.6\}$ . We consider here  $\frac{\eta'}{\eta} = 0.001$ , corresponding to a transient relaxation time 300 shorter than the Maxwell time, to illustrate a relatively rapid transient response of a SBM as shown in Figure 3.2.

Except for  $\frac{\eta'}{\eta} = 0.001$ , both rheologies show similar variations of LLN as function of increasing degrees. The largest differences are observed for degrees lower than 250 for both rheologies. Beyond 300, there is no notable effect if we change the ratio  $\frac{\eta'}{\eta}$  and the parameter  $\alpha$ . This shows that the transient response can have an impact on LLNs for degrees lower than 200 or equivalently to deformation of wavelength larger than 200 km.

We observe few differences between using a ratio of 0.01 and 0.1 in the case of the Burgers rheology. The greatest differences are obtained between a ratio equals to 0.01 or 0.1 and that equals to 0.001. Further in this study we keep the ratio value of 0.1 for our modeling (Pollitz, 2003; Pollitz et al., 2006; Hoechner et al., 2011) as reference to estimate the impact of the Burgers rheology on GIA modeling.

There are very little difference obtained in the LLNs with  $\alpha$  ranging from 0.33 to 0.6. However, discrepancies are obtained with  $\alpha = 0.15$  at the level of the differences obtained for the SBM between  $\frac{\eta'}{\eta} = 0.01$  and 0.1. Thus the LLNs are weakly sensitive to a change in this parameter. Given that, we use the classical value of  $\alpha = 1/3$  for the rest of this study.

### 3.2.4.2 Effects of the Earth model on the LLNs

To investigate the effect of the rheologies on the time response of the Earth to a loading, we compute LLNs 1, 10, 100, 1,000, and 10,000 years after the loading for degrees up to 250 using the six Earth models described in Sections 3.2.2 and 3.2.3. Results are shown in Figures 3.4-3.6 with the elastic responses.

LLNs obtained with the VM5a profile deviate from the elastic response ten years after the loading for the SBM and the Andrade rheology and one hundred years after the loading for the Maxwell rheology. For VM5am, the differences are notable as early as one year after the loading for all the rheologies. All rheologies and Earth's viscosity profiles lead to  $h'_n$  and  $k'_n$  (resp.  $l'_n$ ) that converge to the elastic limit for degrees larger than 225 (resp. 235) and 150 (resp. 175) one and ten thousand years after the loading. For degrees larger than 200 the discrepancies in LLNs with respect to that of the Maxwell rheology, for any rheology and Earth' structure, are lower than 2.5%. This means that for wavelengths smaller than 200 km, the time response of our Earth models is similar and close to the elastic one.

LLNs calculated for the VM5a model show notable differences for decennial to millennial time scales and harmonic degrees ranging between 10 and 150. Discrepancies with respect to the Maxwell rheology range between 10% and 45% for the Andrade rheology, and between 5% and 140% for the SBM. The largest effect induced by using different rheologies is obtained one hundred years after the loading for both rheologies. After ten thousand years, the differences in LLNs for both profiles and all rheologies are lower than 1.8%. This indicates that rheologies have no effect on LLNs computed ten thousand years after the loading for the considered Earth' structure.

LLNs computed for the VM5am models show a larger amplitude depending on the harmonic degree than that computed for VM5a models. While the discrepancies

between rheologies are important one year after the loading, they rapidly reduce as early as ten years after the loading to tend to zero one thousand years after the loading. Discrepancies between LLNs from VM5am and VM5a models are reduced to less than 1% ten thousand years after the loading. As expected, this implies that VM5am models are more sensitive to changes occurring at smaller spatial scales from annual to centennial time scales post loading.

For VM5am models, the greatest effects induced by using different rheologies are observed one year after the loading for LLNs with harmonic degrees between 50 and 100. For VM5a models it is rather one hundred years after loading for LLNs with harmonic degrees lower than 75. Besides, VM5am models lead to larger LLNs than VM5a models for time scale lower than ten thousand years. These results indicate that a large viscosity contrast in the upper mantle leads to greater discrepancies in the viscous response and also to larger differences between rheologies from annual to centennial time scales. This implies that surface-mass changes that occurred few decades to centuries ago, such as during the LIA (e.g. Grove, 2012; Mémin et al., 2014), might lead to different predicted present-day Earth deformation depending on the rheology that is employed. Besides, given the different time response depending on the viscosity structure and the rheology, our analysis of LLNs suggests that estimates of relative sea level (RSL) and paleo-shoreline changes might also be affected (Clark et al., 1978; Clark, 1980; Simon et al., 2022). Next, we use the computed LLNs for our six Earth models to estimate displacements and gravity changes resulting from the past and present-day ice-mass changes.

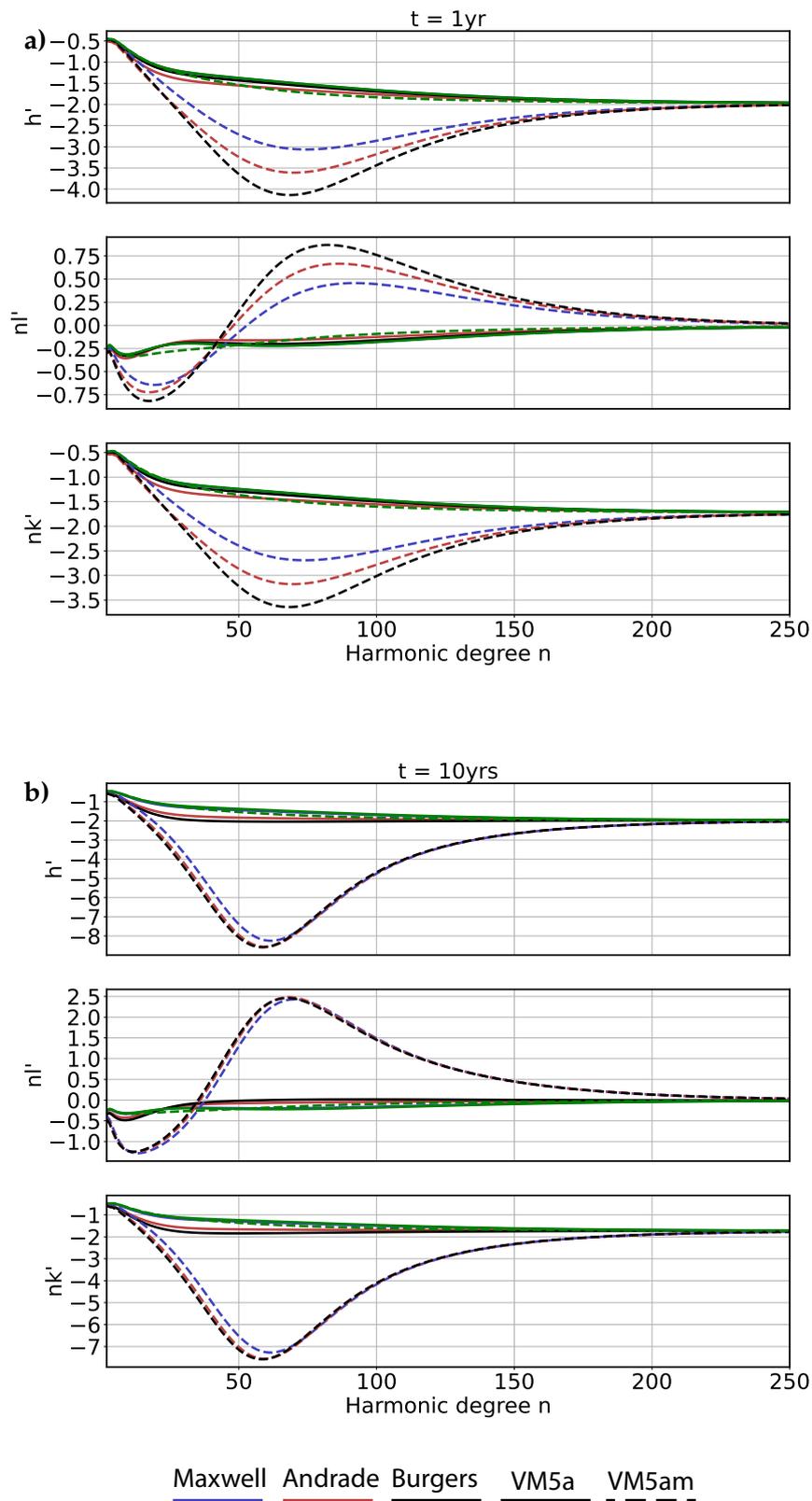


Figure 3.4: LLNs computed for VM5a (solid) and VM5am (dash) Earth models using Maxwell (blue), Andrade (red) and Burgers (black) rheologies 1 year (a) and 10 years (b) after the loading. The green curves show the elastic LLNs for the VM5a (solid) and VM5am (dashed) models.

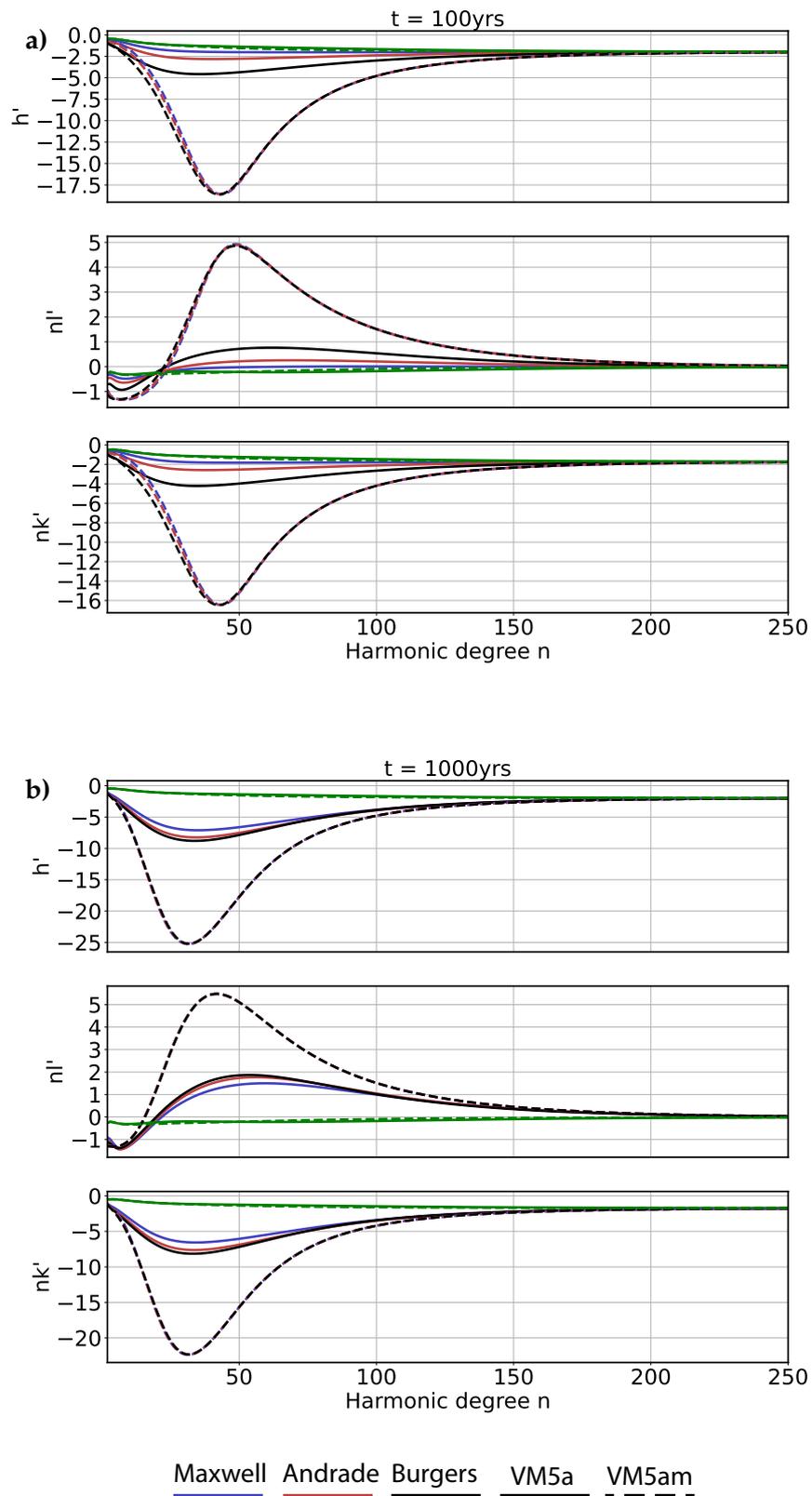


Figure 3.5: LLNs computed for VM5a (solid) and VM5am (dash) Earth models using Maxwell (blue), Andrade (red) and Burgers (black) rheologies 100 years (a) and 1,000 years (b) after the loading. The green curves show the elastic LLNs for the VM5a (solid) and VM5am (dashed) models.

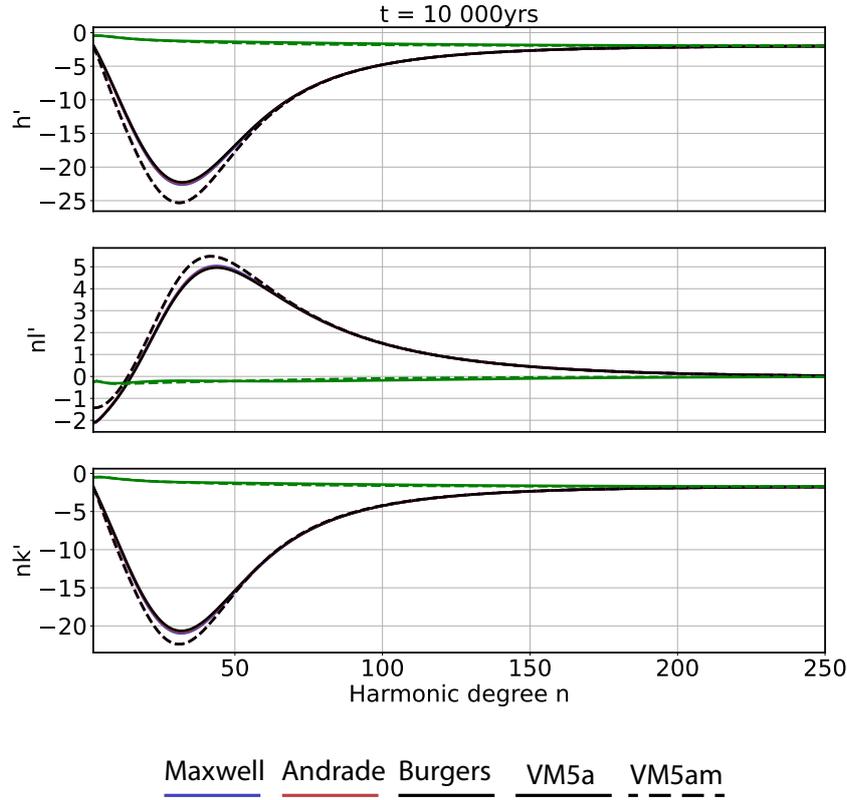


Figure 3.6: LLNs computed for VM5a (solid) and VM5am (dash) Earth models using Maxwell (blue), Andrade (red) and Burgers (black) rheologies 10,000 years after the loading. The green curves show the elastic LLNs for the VM5a (solid) and VM5am (dashed) models.

### 3.3 Response to ice-mass change in Antarctica

#### 3.3.1 Predicting the deformation

In this section we use the LLNs computed in Section 3.2 to estimate the deformation induced by ice-mass changes at the surface of the Earth. To that end we use the Green's function formalism. The Green's functions characterize the impulse response of the Earth to a point-mass excitation. We use the LLNs presented in section 3.2.3 to compute Green's functions for the surface radial displacement ( $G_{u_r}$ ) and the surface gravity disturbance ( $G_g$ ). They are defined as (eqs. 37 and 46 of Farrell (1972) and 64 and 65 of Peltier (1974))

$$G_{u_r}(\psi, t) = \frac{\Gamma}{\gamma a} \sum_{n=0}^{\infty} h'_n(t) P_n(\cos \psi) \quad (3.7)$$

$$G_g(\psi, t) = -\frac{\Gamma}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \left( 1 - \frac{n+1}{n} k'_n(t) + \frac{2}{n} h'_n(t) \right) P_n(\cos \psi) \quad (3.8)$$

where  $t$  is time,  $P_n$  is the Legendre polynomial,  $\psi$  is the angular distance between the point where we estimate the deformation and the source of the deformation,  $\Gamma$  is the

universal gravitational constant and  $a$  is the Earth mean radius. The source of the deformation is usually not a point mass but rather a surface distribution of mass,  $\sigma_L$ , that varies with time at the surface of the Earth. Then the Green's functions are convoluted with the surface-mass distribution to compute the resulting radial displacement of the surface,  $u_r$ , and the surface gravity change,  $g$ . The convolution can be written as

$$X(\theta, \phi, t) = \int \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t G_X(\psi, t - t') \sigma_L(\theta', \phi', t') dt' d\Omega \quad (3.9)$$

where  $\Omega$  is the total area covered by the surface-mass distribution,  $d\Omega = a^2 \sin(\theta') d\theta' d\phi'$  is the elementary area,  $X$  is either  $u_r$  or  $g$ . We use the free open source TABOO software from Spada (2003) to perform the convolution (3.9). The original version of TABOO allows the computation of the surface displacements and the geoid changes of a spherically symmetric, non-rotating, incompressible, self-gravitating and Maxwell Earth model induced by a load. We modified TABOO to compute the surface gravity changes (Méménin et al., 2014) and to input LLNs output from ALMA. The native spherical harmonics expansion of the ocean redistribution function in TABOO is limited to degree 180. However, Figures 3.4-3.6 show that there would be little differences in our modeling for degrees beyond 180, with expected discrepancies in LLNs no larger than 4%. We therefore limit our modeling to that harmonic degree.

### 3.3.2 Pleistocene deglaciation

The past ice history in Antarctica is complex and not entirely accurately understood due to the lack of observations, and more specifically observations of near field paleo-shoreline evolution. Indeed, far field observations of paleo-shoreline evolution help to constrain the amount of ice involved while near field observations provide also constraints on the timing of ice-mass changes (Clark et al., 1978; Clark, 1980). In Antarctica, paleo-shorelines are not available which makes it difficult to properly estimate the history of the ice sheet during the Pleistocene. A possibility is therefore to compare observations of present-day displacement and gravity rates with that estimated from model outputs that are mainly produced employing a Maxwell Earth. In this section, we assess the effect of the three rheologies described in section 3.2.1 on GIA deformation resulting from the Pleistocene deglaciation in Antarctica.

To describe the ice-mass change history of the AIS during the Pleistocene we use the model ICE-6G\_C (VM5a) from Argus et al. (2014) and Peltier et al. (2015) directly uploaded from <https://www.atmos.physics.utoronto.ca/~peltier/data.php> (last accessed on March 8 2023). We use the geometry of ICE-6G\_C (VM5a) as implemented in SELEN<sup>4</sup> (Spada and Melini, 2019). Ice-mass variations are described for each former iced area, approximated by 3,046 caps of 0.61° radius, from 26 kyrs ago to present, using a time history made of 500-year time steps. Even though the conservation of mass is implemented in TABOO, it was not designed to properly account for sea level changes induced by ice-mass changes. As SELEN<sup>4</sup> integrates the sea level equation, we use SELEN<sup>4</sup> to estimate the effect of sea level changes on deformations in Antarctica and compare predicted current radial displacement rates from TABOO with that from SELEN<sup>4</sup> for ICE-6G\_C (VM5a) using the same Maxwell Earth model (VM5a). We obtained that considering sea level changes increases uplift rates by up to 15 % in Antarctica. For the remaining of the paper we use TABOO.

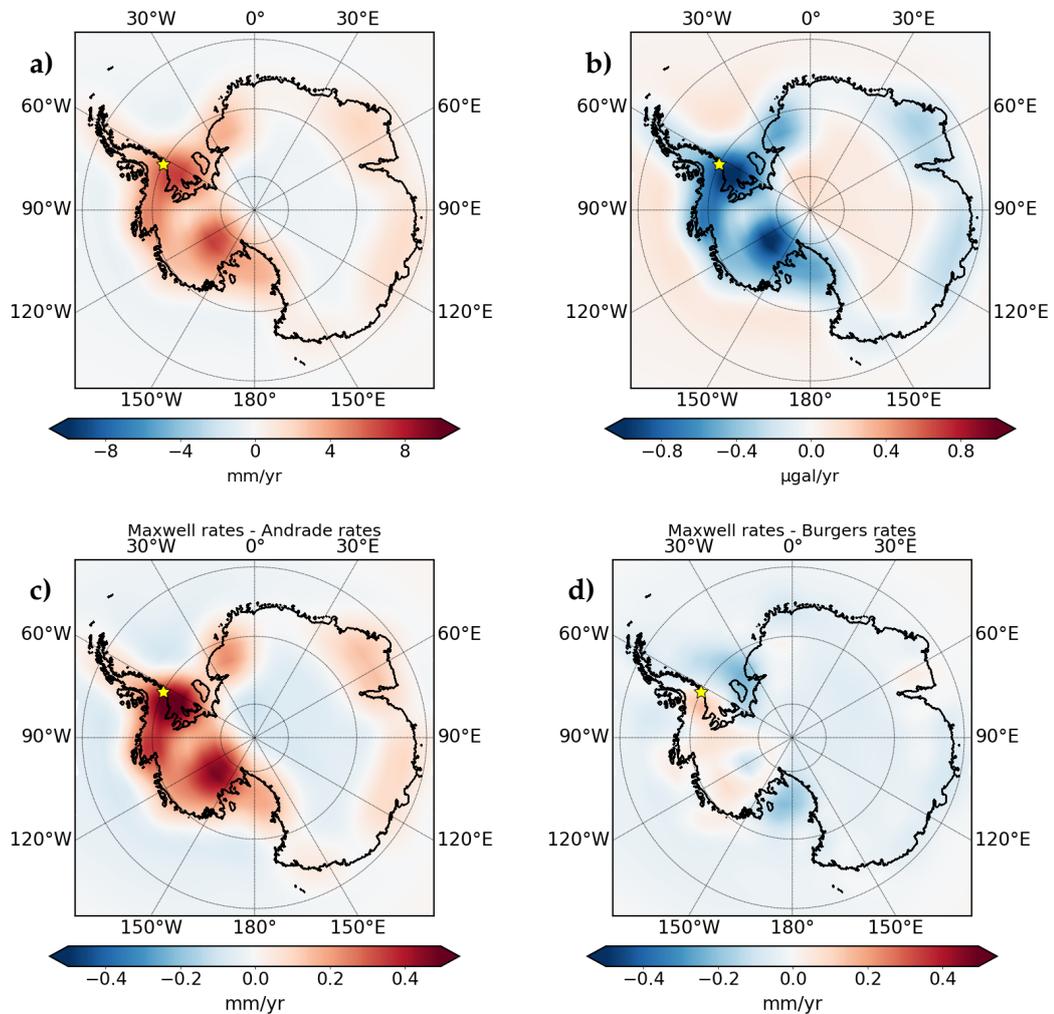


Figure 3.7: Present-day radial displacement (a) and gravity variation (b) rates in Antarctica induced by the Pleistocene deglaciation estimated using the ICE-6G\_C (VM5a) deglaciation model and the VM5a viscosity profile, using a Maxwell rheology. Differences between present-day radial displacement rates estimated using Maxwell and Andrade rheologies (c) and using Maxwell and Burgers rheologies (d) due to the Pleistocene deglaciation in Antarctica and using the VM5a viscosity profile. The yellow star indicates the location where time series of Figure 3.8 are estimated.

Figure 3.7 shows the present-day radial displacement and gravity variation rates in Antarctica induced by the Pleistocene deglaciation estimated using the VM5a viscosity profile with a Maxwell rheology. The pattern of the deformation rates is similar to that estimated by Argus et al. (2014). The largest deformations are mainly located on West Antarctica and South of the Antarctic peninsula. Figure 3.7-c and -d show the differences in radial displacement rates between using Andrade and Maxwell rheologies and that between using Burgers and Maxwell rheologies respectively. The largest differences are located in West Antarctica and in the Antarctic peninsula, where the largest geodetic rates are predicted (Fig. 3.7). Employing the Andrade rheology to model the present-day deformations due to the Pleistocene deglaciation leads to rates mainly lower to that obtained using the Maxwell rheology. Differences in uplift rates reach up to 0.5 mm/yr under the Ronne-Filchner ice shelf. The Burgers rheology leads to slightly larger and lower rates than the Maxwell rheology in East and West Antarctica, respectively. The largest difference is about  $\pm 0.2$  mm/yr.

To investigate the effect of the viscosity structure and the rheological laws on paleo-shoreline predictions, we show in Figure 3.8 the cumulative radial displacement during the last 26 kyrs at 75°S and 63°W (Fig. 3.7) computed using VM5a and VM5am Earth models. Adding a low viscosity layer in the upper mantle directly impacts the total vertical uplift. Indeed, using VM5am models leads to a 26 kyrs-cumulated uplift 40 m larger than that using VM5a models. For both VM5a and VM5am models, using Burgers and Andrade rheologies results in larger cumulative displacement than using Maxwell rheology, up to 1 m (VM5am) and 4 m (VM5a) after 26 kyrs (Fig. 3.8-c). A more detailed analysis (Fig. 3.8-b) shows that from 26 to 14.5 kyrs ago, the six Earth models lead to very similar radial displacements. Discrepancies in radial displacement between rheologies range from 5 to 20 cm, with Burgers providing the largest. During this time interval, the Northern hemisphere is subject to important mass changes while the AIS remains almost stable (Argus et al., 2014; Peltier et al., 2015). This suggests that our models are not significantly sensitive to far-field mass changes. The AIS began to lose mass about 14.5 kyrs ago as suggested by the uplift of few meters in Figure 3.8-b. Similar uplifts, induced by the Meltwater Pulse 1a and 1b, are observed 11.5 and 11 kyrs ago. These events represent a large change in relative sea level (more details in e.g. Weaver et al., 2003; Lin et al., 2021). Figure 3.8 illustrates that the viscosity structure and the rheologies have a significant impact on the timing of the deformations. The Burgers and Andrade rheologies transient response leads to larger deformation during the first few centuries after deglaciation. At longer time scale using different rheologies does not result in different Earth response. As a consequence, deglaciation models based on paleo-shoreline evolution and cumulative surface displacements should be impacted by using a strong viscosity contrast in the upper mantle and different rheologies.

### 3.3.3 Recent ice-mass change

To consider the present-day mass changing in Antarctica we use the variations of the elevation of ice sheet between January 2002 and November 2017 derived by Schröder et al. (2019) from satellite altimetry. The glaciers showing the greatest variation in elevation are the Thwaites glacier and the Pine Island glacier (PIG), with elevation variation rates exceeding 20 cm/yr (Rémy et al., 2014; Schröder et al., 2019). We model the ice-mass variation by covering the Antarctic surface with 1,784 ice caps of 0.43° of half amplitude. We exclude caps located south of 85°S as there is little to no altimetry data for these latitudes due to the orbit geometry of satellites. We also

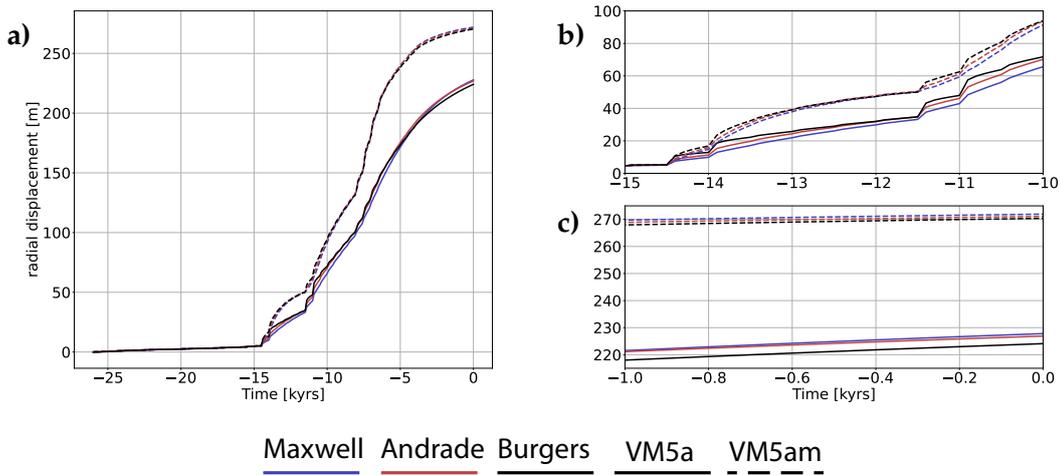


Figure 3.8: Cumulative radial displacement during the last 26 kyr (a) estimated using the ICE-6G\_C (VM5a) model using VM5a and VM5am Earth models. The observer is located on the shore of the Antarctic peninsula as shown in Figure 3.7. b) and c) : same as a) but during two shorter time intervals: the beginning of the melting of the AIS (b) and the last 1 kyr before present (c).

exclude any cap with no thickness variation. The height variation associated to each cap is averaged from altimetry height changes. We use yearly piecewise constant phases to describe the temporal variations of the AIS height that we combined to the density of pure ice as an upper boundary for the local mass changes (e.g. Fig.2a Riva et al., 2009), namely  $931 \text{ kg/m}^3$ . This forms our present-day ice-mass change (PDIMC) model. The distribution of caps and the associated height change rates are shown in Figure 3.9-a.

Figure 3.9-b and -c show the vertical displacement and the gravity variation computed close to PIG (yellow star in Fig. 3.9-c) for the six Earth models previously described. The location of the observer is chosen near PIG where the mass change is the largest over our studied time interval, that should result in the largest deformation. The purely elastic deformation (green curves in Fig. 3.9-b and -c), similar for all Earth models, contributes the most in 2017 to the cumulative vertical displacement obtained using the VM5a model. It is less than 50 % of the total deformation for the VM5am model. The low viscosity layer within the upper mantle of VM5am models more than doubles the deformation. Regarding the viscous deformation, in 2017, Andrade and Burgers rheologies lead to larger uplift and gravity change than the Maxwell rheology. The difference reaches about 20 mm and  $3 \mu\text{Gal}$ , and about 27 mm and  $4 \mu\text{Gal}$  for VM5a and VM5am Earth models, respectively. Besides, for VM5a models, the Maxwell rheology induces neglectable viscous deformation compared to the elastic deformation as already shown in Barletta et al. (2018). After 2017, in our PDIMC model the ice mass stops changing. The resulting viscous response increases the discrepancies between deformations resulting from the three rheologies. The largest differences between vertical displacement and gravity variation are obtained from using Maxwell and Burgers rheologies with the VM5a profile. They reach up to 100 mm and  $16.5 \mu\text{Gal}$  in 2070.

To better understand the changes induced by using different rheologies and the two viscosity profiles, we plot in Figure 3.10 the time varying rate of the vertical

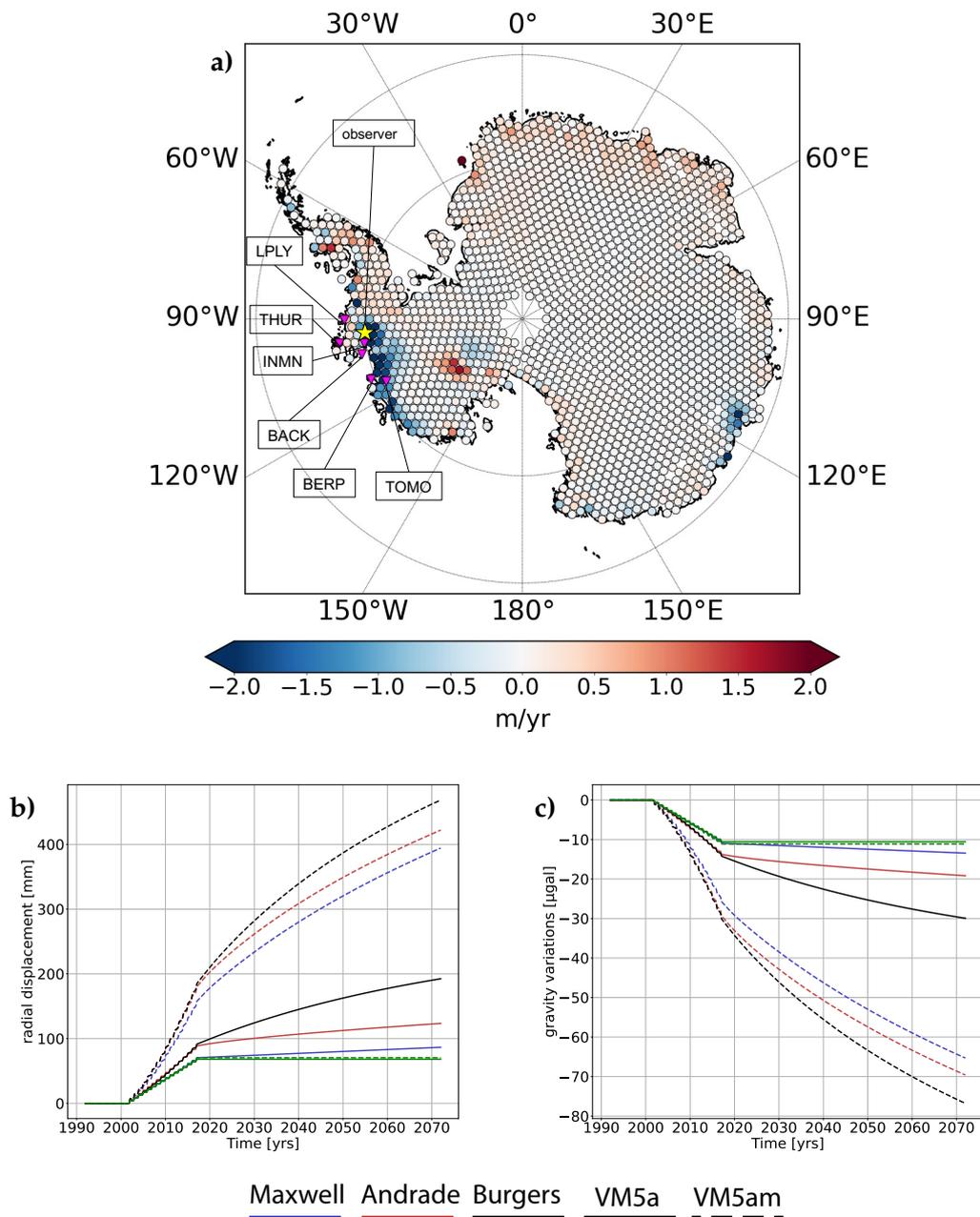


Figure 3.9: Thickness variation rates between 2002 and 2017 for the PDIMC model of the AIS (a). Pink triangles show the locations of the GPS stations used in Barletta et al. (2018). The yellow star shows the location where vertical displacement (b) and gravity variations (c) are estimated using the Maxwell, Andrade and Burgers rheologies. The deglaciation starts in 2002 and ends in 2017. The green lines show the purely elastic response for the VM5a and the VM5am Earth models.

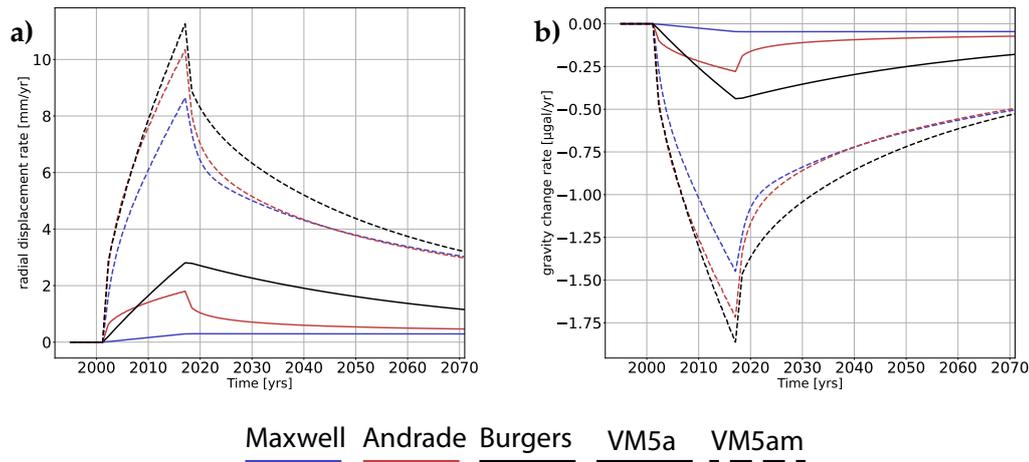


Figure 3.10: Time varying rates of the viscous radial displacement (a) and gravity variation (b) estimated near PIG (yellow star in Fig. 3.9-a).

displacement and the gravity variation. VM5am models lead to rates more than five times that estimated using VM5a models, showing that indeed including a low viscosity layer within the upper mantle can help reconciling geodetic rates derived from observations with model predictions (e.g. Nield et al., 2014; Mémin et al., 2014; Barletta et al., 2018). An effect is noticeable when comparing the rates obtained considering the three rheologies using VM5am. Indeed, using the Burgers rheology leads to instantaneous rates in 2017 that are 10 and 41 % larger than that from using Andrade and Maxwell rheologies, respectively. Discrepancies in rates resulting from using different rheologies are the largest when the ice mass stops changing in 2017. They converge to reach similar values about 50 years later for VM5am models. This convergence takes more time for VM5a models, and more specifically between rates estimated using the Burgers rheology and that using the two other rheologies.

## 3.4 Discussion

### 3.4.1 About the relative sea level

Most of the recent Pleistocene deglaciation models, such as W12 (Whitehouse et al., 2012), IJ05\_R2 (Ivins et al., 2013), A13 (A et al., 2013) or ICE-6G\_C (VM5a) (Argus et al., 2014; Peltier et al., 2015) use paleo-shoreline observations in Scandinavia and North America to constrain the deglaciation history. As these regions have constraints on both far and near-field observations, the deglaciation history is expected to be more accurately estimated (Clark et al., 1978; Clark, 1980). These models employ all a Maxwell viscoelastic Earth to estimate the timing and amount of ice involved in the deglaciation. In sections 3.3.2 and 3.3.3 we present the accumulated radial displacement for the ICE-6G\_C (VM5a) and PDIMC models. We show that, in our case, the viscosity profiles have the largest impact on the accumulated radial displacement, leading to an increase of more than 40 m. Rheologies with a transient response have a lower effect on displacement estimation, leading to an increase for the decennial to centennial time scales up to 10 m for the ICE-6G\_C (VM5a) model. We obtain similar results for the PDIMC model, with differences in displacement

ranging up to 20 cm. These results show that rheologies should have an impact on constraining near-field mass changes. Consequently using different rheologies to model past ice-mass changes from observations of paleo-shorelines should lead to different chronologies of mass evolution. Therefore, it is expected that changing the rheology when modeling the northern hemisphere deglaciations, where the paleo-shorelines are available, is likely to have a notable effects, meeting the conclusions by Simon et al. (2022).

### 3.4.2 About the upper mantle viscosity

Nield et al. (2014) found that the Earth model that better explains GNSS data in the Antarctic Peninsula has a lithosphere thickness of 140 km and an upper mantle viscosity ranging between  $6 \times 10^{17}$  and  $2 \times 10^{18}$  Pa.s. Working on the Fleming glacier in the Antarctic peninsula, Zhao et al. (2017) suggest a viscosity for the upper mantle between  $10^{19}$  and  $10^{20}$  Pa.s, based on a multi-decennial study of the ice-mass change based on satellite altimetry and GNSS observations. This discrepancy in the result could be explained by a timescale dependency on the upper mantle viscosity.

Other examples of upper mantle viscosities inferred from present-day ice-mass changes are found in Greenland and Svalbard. Mémin et al. (2014) inferred the shallow upper mantle viscosity from gravity variation and vertical uplift observations at Ny-Ålesund induced by past- (Pleistocene, LIA) and present-day ice-mass change. They find that a viscosity ranging from 1.0 and  $5.5 \times 10^{18}$  Pa.s and a lithosphere thickness between 50 and 100 km can explain the observed geodetic rates. Similar results were recently obtained for the Greenland region by Paxman et al. (2023). In Adhikari et al. (2021) an estimation for the mantle viscosity is inferred from sub-centennial mantle deformation and compared to GIA estimates in Greenland. These estimates are derived from GNSS observations. They find that the upper mantle viscosity should at least be one order of magnitude below the value commonly found in GIA studies, with a viscosity ranging from 3 to  $11 \times 10^{19}$  Pa.s. The study of Paxman et al. (2023) on the timescale-dependent apparent viscosity of the upper mantle in Greenland also agrees with these results. They find that the apparent viscosity of the upper mantle depends on the timescale considered, with a viscosity of  $10^{18}$  Pa.s for the decennial periods and  $10^{19}$  Pa.s for the centennial periods at depth of 200 km. They also find that the viscosity for multi-millennial periods and above, the upper mantle viscosity keeps a stable value around  $6 \times 10^{20}$  Pa.s. These estimations are obtained considering a Maxwell viscoelastic Earth to account for the current bedrock uplift rates due to the present-day melting. Several studies (Adhikari et al., 2021; Paxman et al., 2023) based on GNSS and satellite altimetry observations show a timescale dependency on the viscosity of the upper mantle. As shown in section 3.2.1, the Andrade and Burgers rheologies both have a short-term transient response with viscosities up to 2 orders of magnitude lower than those of the millennial time scale. Using rheologies with a transient response should be investigated to explain these observations.

In section 3.3.3 we highlight differences in the estimated uplift rates, especially between Burgers and Maxwell rheologies for PDIMC models. We find that the uplift and gravity variation rates can be 10 times larger than those estimated using the Maxwell rheology when using a Burgers rheology. Similarly with the Andrade rheology, we obtain rates up to 4.5 times larger than that derived from using the Maxwell rheology. Results from sections 3.3.2 and 3.3.3 show that adding a low viscosity layer increases the PDIMC deformation rates but decreases the Pleistocene rates. These results could mean that in order to explain the current observations, the

Earth would need to have a much lesser viscous behavior for the very short term mass change and a more viscous behavior for long term deglaciation. This could be achieved using a transient rheology such as Andrade or Burgers, with more tuning on the parameters controlling the short term transient response of the Earth.

### 3.5 Conclusions

In this study we have computed the LLNs for six Earth models that involve the viscoelastic rheologies of Maxwell, Andrade and Burgers and two viscosity profiles: the VM5a from Peltier et al. (2015) and a modified version that includes a 120 km-thick layer in the upper mantle with a viscosity of about three orders of magnitude lower (VM5am). We observe different responses using the three rheologies mainly for loading wavelengths larger than 200 km. Besides, the large viscosity contrast in the upper mantle amplifies the discrepancies in the viscous responses from annual to centennial time scales.

Then, we have estimated radial displacement and surface gravity disturbances resulting from the ICE-6G\_C (VM5a) past deglaciation model and a PDIMC model derived from satellite altimetry. We have first compared the predicted rates from the six Earth models to assess their effect on the amplitude and the chronology of the geodetic variations. The largest impact on GIA-induced geodetic parameters is due to the low viscosity layer in the upper mantle. This layer increases the total displacement caused by the Pleistocene deglaciation by up to about 40 m and the PDIMC by up to 240 mm. Using the ICE-6G\_C (VM5a) model we have also shown that, with respect to what the Maxwell rheology induces, the Burgers and Andrade rheologies lead to a difference of up to 10 m in radial displacement during the first few centuries after ice-mass changes.

Introducing a strong viscosity contrast in the upper mantle can lead to geodetic rates induced by PDIMC more than five times larger than without. With the low viscosity layer, Burgers and Andrade rheologies induce larger, up to 41 and 31 % respectively, displacement and gravity variation rates than the Maxwell rheology for the current ice-mass change.

Comparing our modeled rates to the observed vertical displacement rates gives insight on how considering different rheologies and viscosity structure might help reducing the misfit. Invoking a low viscosity layer within the upper mantle but also using Burgers and Andrade rheologies allow to reduce the misfit. As several other studies have shown that the upper mantle viscosity is likely to be time-dependant, using a transient rheology that includes a short-term viscous response to the Earth should improve GIA modeling by unifying within a single rheological law effects induced by past and present-day ice-mass changes.

## Chapitre 4

# Inversion par approche combinée des effets du GIA en Antarctique

### Contenu

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>47</b>
<b>4.2</b>	<b>Observations utilisées</b>	<b>50</b>
4.2.1	Gravimétrie satellitaire	50
4.2.2	Altimétrie satellitaire	52
4.2.3	Observations GNSS	53
<b>4.3</b>	<b>Méthode d'inversion par combinaison d'observations géodésiques</b>	<b>54</b>
4.3.1	Détail de la méthode	54
4.3.2	Validation de la méthode d'inversion	60
<b>4.4</b>	<b>Application de la méthode à un modèle réaliste</b>	<b>69</b>
4.4.1	Définition du modèle réaliste	69
4.4.2	Résultats pour le modèle réaliste : Reproduction des observations	70
4.4.3	Résultats pour le modèle réaliste : Estimation des coefficients	71
4.4.4	Résultats pour le modèle réaliste : Reconstruction des cartes	72
4.4.5	Discussion des résultats	79
<b>4.5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>87</b>

### 4.1 Introduction

L'Antarctique est une zone complexe dans l'étude de l'ajustement isostatique glaciaire (GIA pour Glacial Isostatic Adjustment). Elle est le siège de plusieurs mécanismes contrôlant la redistribution des masses à plusieurs échelles temporelles et spatiales. Tout comme le Groenland elle est le théâtre des effets de la déglaciation du Pléistocène et des redistributions de masses de glace actuelles. Ces deux phénomènes engendrent des déformations à des échelles spatiales et temporelles différentes. Afin de comprendre les effets engendrés par ces mouvements de masse il est nécessaire d'avoir une estimation des variations spatio-temporelles de la calotte Antarctique. Ces déformations peuvent être estimées si l'on suppose connues les propriétés mécaniques de la Terre et l'histoire de la redistribution de masses. Diverses observations géodésiques comme les observations d'altimétrie satellite ou de gravimétrie

satellite (IMBIE, 2018) permettent d’avoir une estimation actuelle des pertes de masse de glace de la calotte Antarctique. Ces observations sont aussi utilisées pour modéliser la déglaciation du Pléistocène pour l’Amérique du Nord et la Scandinavie. Ces zones possèdent des observables comme les évolutions du niveau marin relatif (RSL pour Relative Sea Level), des datations d’exposition aux rayonnements cosmiques ou des mesures GNSS et gravimétriques permettant de contraindre l’histoire de la déglaciation du Pléistocène dans l’hémisphère nord (Peltier, 1974; Peltier et al., 2015). En supposant un modèle de Terre (e.g. VM5a de Peltier et al. (2015)) il est possible de modéliser les effets de la déglaciation à partir d’une distribution de masse de glace. Il faut ensuite comparer les déformations obtenues avec les observations puis ajuster le modèle pour mieux les expliquer. Le modèle de déglaciation est ensuite modifié pour mieux expliquer les observations. Les itérations se poursuivent jusqu’à l’obtention du modèle expliquant le mieux les différentes observations. Ces modèles tendent à converger vers une estimation de la contribution du GIA de l’ordre 60 Gt/an (Martín-Español et al., 2016a). Cependant les propriétés mécaniques de la Terre restent encore mal connues, et la variabilité entre modèles reste importante, de l’ordre de plusieurs dizaines de Gt/an (e.g. Gunter et al., 2014; Peltier et al., 2015; Martín-Español et al., 2016b). De plus les observations telles que RSL ne sont pas disponibles en Antarctique, ce qui rend difficile l’estimation de la déglaciation du Pléistocène pour cette région. L’étude du GIA en Antarctique reste donc très imprécise. Afin de pallier au manque d’observations permettant l’emploi d’une méthode directe, plusieurs modèles de GIA récents comme G14 (Gunter et al., 2014) ou RATES (Martín-Español et al., 2016b) utilisent les méthodes inverses pour estimer les déformations de la surface Antarctique.

L’avantage des méthodes inverses pour la région Antarctique est qu’elles sont basées sur les observations de la calotte, et permettent de s’affranchir d’une partie des incertitudes liées aux modèles de déglaciation et aux paramètres rhéologiques de la Terre. Pour appliquer les méthodes inverses à l’étude du GIA en Antarctique, il est nécessaire d’utiliser des observations géodésiques comme l’altimétrie satellite. Ces observations permettent de rendre compte du déplacement de la surface de la Terre ainsi que des variations d’épaisseur de la calotte Antarctique. Cependant les variations d’épaisseur de la calotte engendrent aussi des déplacements de la surface. L’altimétrie seule ne permet donc pas de distinguer ces deux phénomènes. De la même manière la gravimétrie satellite rend compte des variations de masse de la Terre. Elle ne permet pas de distinguer les redistributions d’eau aux océans des remaniements mantelliques liés au GIA. Les observations GNSS ne rendent compte que du déplacement de la surface. Elles ne permettent pas à elle seule de distinguer les contributions élastiques et visqueuses du déplacement, qui nécessitent des connaissances sur les propriétés terrestres et sur la redistribution de masse. La Figure 4.1 illustre les interactions entre les diverses composantes des observations géodésiques du GIA en Antarctique. En raison de leurs spécificités propres, ces trois techniques ont des sensibilités différentes face à chaque mécanisme et nécessitent d’être utilisées de façon conjointe. C’est sur la base de combinaisons d’observations en Antarctique que sont construits les différents modèles inverses de GIA en Antarctique.

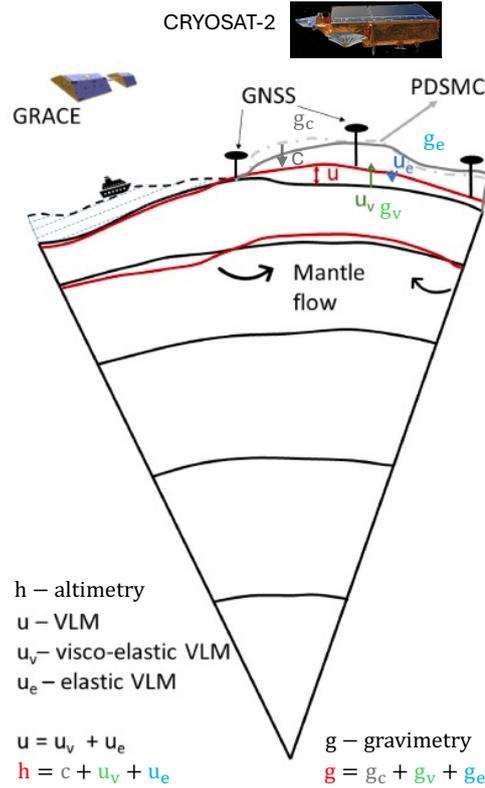


Figure 4.1: Schéma des observables disponibles en Antarctique et des composantes du déplacement vertical (VLM pour Vertical Land Motion), des observations d'altimétrie (h) et de gravimétrie (g), modifié d'après Vishwakarma et al. (2023). PDSMC correspond à l'acronyme Present-Day Surface Mass Change pour variations de masses de surface actuelles.

Une première inversion du GIA en Antarctique est réalisée avec les travaux de Riva et al. (2009) et Gunter et al. (2014). Ces deux études utilisent une méthode de combinaison d'observations satellites GRACE et d'altimétrie satellite ainsi qu'un modèle de densification des neiges (Ligtenberg et al., 2011) et un modèle climatique (RACMO (Lenaerts et al., 2012)) pour obtenir des taux de déplacement de surface,  $\dot{h}_{GIA}$ , de densité superficielle des glaces,  $\rho_{surface}$ , et de variation de masse de glace. Ils utilisent le formalisme des nombres de Love de charge (Love, 1909) pour résoudre l'effet élastique des variations de masse de glace. Ces taux sont calculés avec la relation

$$\dot{h}_{GIA} = \frac{\dot{m}_{GRACE} - \rho_{surface} \cdot \dot{h}_{ICESat}}{\rho_{roche} - \rho_{surface}} \quad (4.1)$$

où  $\dot{m}_{GRACE}$  est le taux de variation de masse observé par les satellites GRACE,  $\dot{h}_{ICESat}$  est le taux de variation d'élévation observé par l'altimétrie satellite et  $\rho_{roche}$  est la masse volumique des roches de la lithosphère Antarctique. Cette méthode permet de couvrir l'ensemble de la calotte Antarctique mais nécessite de fortes hypothèses sur les phénomènes observés comme l'accumulation ou la compaction de neiges. Pour résoudre leur équation Riva et al. (2009) et Gunter et al. (2014) doivent aussi utiliser un modèle de densité de roche et de variation de masse de surface. Une autre approche possible pour l'inversion du GIA est une approche statistique. Dans leur travaux Martín-Español et al. (2016b) utilisent la méthode du modèle bayésien hiérarchique (BHM pour Bayesian Hierarchical Model) pour inverser le

bilan de masse de glace sur la période de 2003 à 2013. Ils utilisent une combinaison d'observations géodésiques pour inverser des tendances annuelles de variations de masse de glace, de compaction de la neige de surface, du bilan de masse et des déplacements de la surface Antarctique. Cette méthode est testée et utilisée pour étudier les variations de masses de glace en Antarctique et leur contribution aux variations du niveau marin (Schoen et al., 2015; Zammit-Mangion et al., 2015a; Zammit-Mangion et al., 2015b). Cependant, le problème ainsi formulé est sous-déterminé et nécessite donc l'apport de données supplémentaires. Ces données sont obtenues par les modèles climatiques RACMO et de densification des neiges mentionnés plus haut. En revanche les incertitudes des résultats de cette méthode restent difficiles à estimer (Martín-Español et al., 2016b). Une autre méthode utilisée est celle des moindres carrés (Willen et al., 2020; Willen et al., 2022; Vishwakarma et al., 2023). Cette méthode reprend les équations de Riva et al. (2009) et Gunter et al. (2014) pour inverser les effets du GIA. Dans leur travaux Willen et al. (2020) montrent la sensibilité d'une inversion en employant des données similaires à Gunter et al. (2014) en ajoutant une composante de compaction de la neige. Cette même méthode est utilisée dans leur étude suivante (Willen et al., 2022) sur la faisabilité d'une inversion du GIA à l'échelle globale. Dans cette étude, l'inversion est réalisée en utilisant un jeu de données synthétiques créés à partir de modèles directs de GIA et climatiques. Ils montrent qu'une inversion globale du GIA est réalisable en supposant que les erreurs sur les observations sont connues. Cependant si ces erreurs sont inconnues il n'est pas possible de séparer le signal du GIA et son erreur. L'étude de Vishwakarma et al. (2023) se porte sur l'inversion d'un modèle global de GIA à partir d'observations GRACE et GNSS. Ils utilisent le formalisme des harmoniques sphériques pour inverser par moindres carrés un modèle global de déplacement vertical. Pour compléter le manque de station GNSS à l'échelle globale, une grille de stations fictives est utilisée. Ces stations sont réparties sur l'ensemble du globe sur une grille échantillonnée tous les 5°, et les déplacements sont obtenus à partir de modèles directs de GIA (ICE6G\_C (Peltier et al., 2015) et Caron (Caron et al., 2018)). Les résultats de leur inversion montrent que le complément des stations n'influence que très peu le modèle obtenu, qui peut être significativement différent de *l'a priori*. Le point commun de chacune de ces études et que les données utilisées ne fournissent pas assez d'informations sur les phénomènes observés. Cela entraîne donc l'emploi de modèles et d'hypothèses pour compenser ce manque. Nous proposons ici une méthode d'inversion permettant de s'affranchir du maximum d'hypothèses. Nous utilisons une combinaison d'observations GNSS, de gravimétrie satellite et d'altimétrie satellite pour inverser une carte des déplacements de surface Antarctique, des variations d'épaisseur et de densité superficielle de masse de la calotte. Dans la section 4.2 nous détaillons les données utilisées. Nous explicitons notre méthode dans la section 4.3, l'appliquons dans la section 4.4 et concluons (section 4.5).

## 4.2 Observations utilisées

### 4.2.1 Gravimétrie satellitaire

Un premier type d'observation fournissant un aperçu des effets du GIA est la gravimétrie satellite GRACE (Tapley et al., 2004; Landerer et al., 2020). La mission GRACE lancée en 2002 et achevée en 2017 a pour but d'effectuer des mesures mensuelles des variations du champ de gravité terrestre pour l'étude des changements climatiques. La mission s'est ensuite poursuivie en 2018 avec la mission GRACE-FO et continue

à fournir des estimations mensuelles du champ de gravité terrestre (Landerer et al., 2020). Ces observations de variation de gravité reflètent les changements de masse de la Terre, qui sont des indicateurs fondamentaux de la dynamique du climat et fournissent une vision globale de l'évolution du cycle de l'eau et du bilan énergétique de la Terre (Rodell et al., 2018; Tapley et al., 2004; Tapley et al., 2019). Ces observations ont déjà été utilisées dans le cadre de l'étude du GIA (e.g. Martín-Español et al., 2016b; Vishwakarma et al., 2023) car elles fournissent un accès aux remaniements de la glace des calottes et des masses mantelliques liées aux changements de masse actuels et passés. Dans la région Antarctique, nous supposons que les remaniements de masses observés ne reflètent que les variations de masse de la calotte glaciaire Antarctique (AIS pour Antarctic Ice Sheet) et celles liées à l'ajustement isostatique. Nous pouvons décrire nos observations notées  $\Delta g_{obs}$  ( $m/s^2$ ) avec l'équation

$$\Delta g_{obs} = \Delta g_c + \Delta g_e + \Delta g_v \quad (4.2)$$

où  $\Delta g_c$  représente les variations de gravité liés aux variations de masse de la calotte,  $\Delta g_e$  et  $\Delta g_v$  les composantes élastique et visqueuse des variations de gravité engendrées par les ajustements isostatiques, respectivement. La figure 4.1 illustre les interactions des différentes composantes des variations de gravité. Pour notre étude nous disposons d'une carte des taux de variation de gravité sur la période de 2002 à 2017 (figure 4.2) issus de la solution RL05 du GRGS (Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale). Cette carte est obtenue à partir des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques des taux de variation du champ de gravité terrestre allant jusqu'au degré 60. Les observations de gravimétrie spatiale ont une résolution beaucoup plus faible que celles d'altimétrie, de l'ordre de 300 km.

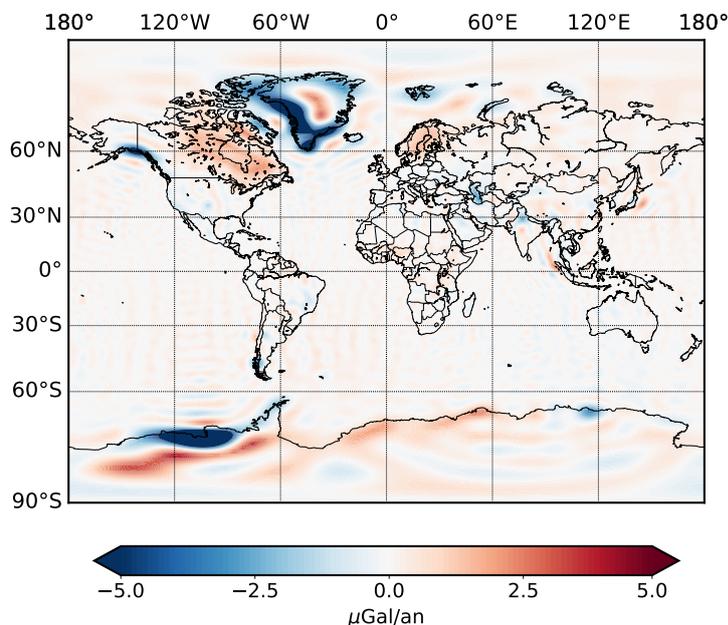


Figure 4.2: Carte des taux de variations de gravité GRACE calculés pour des évaluations mensuelles sur la période de 2003 à 2017 pour la solution RL05 du GRGS et reconstruite jusqu'au degré harmonique 60.

### 4.2.2 Altimétrie satellitaire

Les missions d'altimétries sont un des éléments fondamentaux pour observer et comprendre l'évolution de l'AIS (Rémy and Parouty, 2009; IMBIE, 2018). Les observations d'altimétrie permettent de rendre compte du mouvement vertical de la surface Antarctique. Ces mouvements sont composés des variations d'épaisseur de la calotte Antarctique et des déplacements du sol. Ces déplacements peuvent être séparés en deux composantes: une partie élastique due aux variations de masses actuelles de la calotte et une partie visqueuse due aux variations de masses passées et actuelles. Notons  $\Delta h_{obs}$  (m) nos observations d'altimétrie. Nous pouvons écrire la relation suivante

$$\Delta h_{obs} = \Delta c + \Delta u_e + \Delta u_v \quad (4.3)$$

où  $\Delta c$  représente les variations d'épaisseur de la calotte,  $\Delta u_e$  et  $\Delta u_v$  les composantes élastique et visqueuse du déplacement de la surface, respectivement (cf. figure 4.1). À elles seules les observations altimétriques ne permettent pas de séparer les déplacements de la surface et les variations d'épaisseur de la calotte. Depuis 1992 plusieurs séries de missions d'observations ont été lancées, comme les missions ERS-1 et 2, Envisat, ICESat et CryoSat-2. Ces missions ont une couverture spatiale et temporelles différentes. La géométrie d'orbite du satellite CryoSat-2 lui permet de couvrir la calotte Antarctique jusqu'à une latitude de 88°S contre 81.5°S pour les satellites Envisat ou ERS-2 comme le montre la figure 4.3.

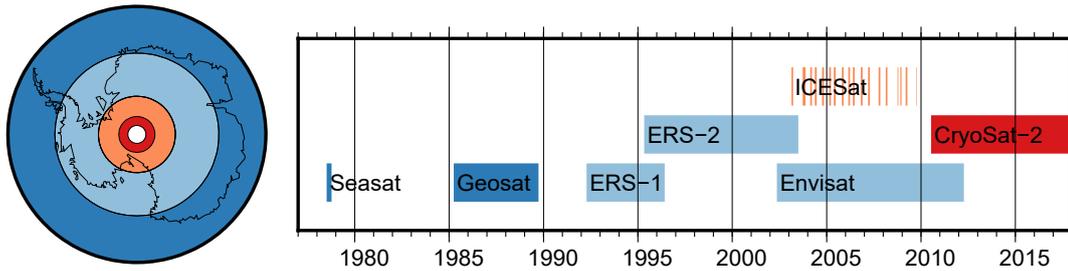


Figure 4.3: Domaine couvert par les différentes missions d'observations d'altimétrie en Antarctique d'après Schröder et al. (2019).

Les taux de variations d'élévation obtenus vont aussi varier en fonction des périodes d'observations (e.g. Wingham et al., 2006; Flament and Rémy, 2012). Il est donc difficile de combiner ces observations. Les travaux de Schröder et al. (2019) fournissent une réanalyse de l'ensemble de ces missions d'altimétrie afin de combiner les différents jeux d'observation pour obtenir une estimation mensuelle des variations d'élévation de l'AIS. Dans ce chapitre nous utilisons les évaluations mensuelles de la période du 01/2002 au 11/2017. Les cartes des évaluations mensuelles sont faites de pixels de surface  $10 \times 10 \text{ km}^2$  couvrant la surface du continent Antarctique (Schröder et al., 2019). Les observations d'altimétrie n'incluent pas les barrières de glace comme la barrière Ross. Nous réalisons pour chaque pixel une inversion par moindre carré des tendances linéaires afin d'obtenir une carte des taux de variations d'altimétrie de la calotte Antarctique. Les taux de variation d'élévation de la surface Antarctique sont montrés avec la figure 4.4. Afin de garder la cohérence entre les observables, nous dégradons notre carte de taux pour obtenir la même résolution spatiale que pour les données GRACE. Nous réalisons pour cela des moyennes des taux pondérés à la surface de chaque pixel pour obtenir une carte échantillonnée tous les 300 km.

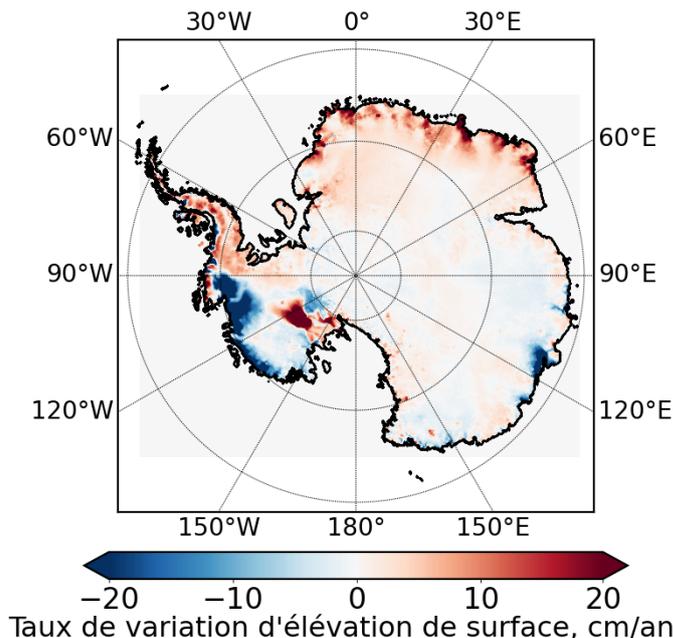


Figure 4.4: Carte des taux de variations d'élévation de la surface Antarctique obtenus d'après les données de Schröder et al. (2019) avant la dégradation à 300 km.

### 4.2.3 Observations GNSS

Les observations GNSS sont des observations couramment utilisées dans les études géodésiques. Elles permettent de quantifier les déplacements de la surface terrestre sur des échelles de temps de l'ordre de la minute à plusieurs dizaines d'années. Ces observations sont utilisées dans divers champs d'études géodésiques tels que l'étude de la ionosphère (Jin et al., 2015) ou l'étude des séismes et tsunamis (Tsushima and Ohta, 2014). Dans le cadre du GIA, les observations GNSS permettent de rendre compte des déplacements verticaux élastiques de la surface liés au changement de masse actuel et visqueux liés au changement de masse passées (du Pléistocène à récent) (e.g. Barletta et al., 2018; Simon et al., 2021). Comme pour les observations d'altimétrie et de gravimétrie satellite, nous pouvons décomposer les déplacements GNSS, notés  $\Delta u_{obs}$  (m), en

$$\Delta u_{obs} = \Delta u_e + \Delta u_v \quad (4.4)$$

où les composantes du déplacement sont les mêmes que pour les observations d'altimétrie (voir aussi figure 4.1). Un problème soulevé dans l'étude de Vishwakarma et al. (2023) pour l'inversion du GIA est la répartition inégale sur Terre des stations GNSS. Ce problème est empiré pour la région Antarctique où les stations GNSS sont très peu nombreuses et non équitablement réparties, principalement sur l'ouest du continent. Comme pour Vishwakarma et al. (2023), nous utilisons un réseau de stations fictives dont les taux de déplacements sont obtenus avec un modèle *a priori*. Les positions des stations et des stations fictives sont montrées dans la section suivante. Pour notre inversion nous utilisons les stations GNSS des Terres Australes et Antarctique Françaises (TAAF) dont les positions sont montrées dans la figure 4.1a). Une partie de ces stations est utilisées dans l'étude des déplacements de la surface en Europe liés aux variations de charge d'eau de surface (Michel et al., 2021).

## 4.3 Méthode d'inversion par combinaison d'observations géodésiques

### 4.3.1 Détail de la méthode

Dans cette section nous présentons la démarche utilisée pour réaliser l'inversion du modèle de GIA en Antarctique.

#### 4.3.1.1 Définition du problème inverse

Nous cherchons à déterminer les contributions d'origine élastique et visqueuse ainsi que celles liées aux variations de masse de la calotte (quantités vues à la section 4.2 et indicées par  $e$ ,  $v$  et  $c$ , respectivement) pouvant expliquer les données des trois types d'observations présentées à la section précédente. Autrement dit, nous cherchons à ce que les trois champs  $\Delta h$ ,  $\Delta g$ ,  $\Delta u$  définis sur la sphère par

$$\begin{cases} \Delta h(\theta, \lambda) = \Delta c(\theta, \lambda) + \Delta u_e(\theta, \lambda) + \Delta u_v(\theta, \lambda), \\ \Delta g(\theta, \lambda) = \Delta g_c(\theta, \lambda) + \Delta g_e(\theta, \lambda) + \Delta g_v(\theta, \lambda), \\ \Delta u(\theta, \lambda) = \Delta u_e(\theta, \lambda) + \Delta u_v(\theta, \lambda), \end{cases} \quad (4.5)$$

prennent des valeurs les plus proches possibles des données observées  $\Delta h_{obs}$ ,  $\Delta g_{obs}$ ,  $\Delta u_{obs}$  aux points de coordonnées  $(\theta, \lambda)$  où celles-ci sont disponibles. Ainsi les six champs, dont nous rappelons brièvement les significations :

- $\Delta c$  : variation d'épaisseur de la calotte,
- $\Delta u_e$ ,  $\Delta u_v$  : composantes élastique et visqueuse du déplacement radial de la surface,
- $\Delta g_c$  : variation de gravité liée à la variation de masse de la calotte,
- $\Delta g_e$ ,  $\Delta g_v$  : variation de gravité engendrée par les ajustements isostatiques élastiques et visqueux,

forment les inconnues de notre problème inverse. Bien entendu, posé sous cette forme, le problème est insoluble, le système (4.5) ne présentant que trois équations. Il nous faut introduire des contraintes et des hypothèses supplémentaires traduisant le fait que ces six champs ne sont pas tous indépendants.

#### 4.3.1.2 Gradient gravimétrique

La réponse visqueuse de la Terre implique à la fois des changements de hauteur de la surface et une redistribution de la masse du manteau. Il existe une relation entre les taux de déplacements de surface et les taux de variations de gravité, le gradient gravimétrique noté

$$f = \dot{g} / \dot{u}_r \quad (4.6)$$

où  $\dot{g}$  et  $\dot{u}_r$  sont les taux de variation de gravité et de déplacement vertical, respectivement, pour exprimer les variations de gravité en fonction des déplacements de la surface :

$$\Delta g_v = f \times \Delta u_v. \quad (4.7)$$

La valeur du gradient gravimétrique pour les régions concernées seulement par les effets de la déglaciation du Pléistocène est généralement estimée à  $-0.150 \pm 0.03 \mu\text{Gal}/\text{mm}$  pour un observateur sur la surface terrestre (Wahr et al., 1995; Sato et al., 2012; Mémin et al., 2012; Olsson et al., 2015; Olsson et al., 2019). Cette valeur est la somme de deux effets contrôlant les variations de gravité en fonction des déplacements visqueux de surface. Le premier est le gradient à l'air libre qui représente les variations de gravité pour un observateur changeant d'altitude. Les variations de gravité seront donc directement proportionnelles à la gravité de surface, suivant l'équation  $\delta g = \frac{-2g_R}{R} \delta h$  (Mémin et al., 2012) où  $R$  est le rayon terrestre,  $g_R$  la gravité de surface et  $\delta h$  est la variation d'élévation par rapport à la surface. Le deuxième effet peut être approximé à l'aide de la formule du plateau de Bouguer, qui représente les variations de gravité liées aux remaniements de masse des différentes couches terrestre, défini par  $\delta g = 2\pi G\rho$  (Mémin et al., 2012) où  $G$  est la constante gravitationnelle et  $\rho$  est ici la masse volumique moyenne de la couche concernée. Les déformations visqueuses dans le cadre du GIA concernent le manteau supérieur, dont la masse volumique moyenne est  $\rho_m \approx 3600 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Nous utilisons les variations de gravité observées par les satellites GRACE, qui ne subissent pas les variations d'altitude de la surface, autrement dit on a  $\delta h = 0 \text{ m}$ . Notre gradient gravimétrique sera donc défini par l'approximation du plateau de Bouguer, tel que  $f \approx 0.15 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ .

#### 4.3.1.3 Décomposition en harmoniques sphériques

Soit  $F$  une fonction scalaire de la variable  $\mathbf{x} = (\theta, \lambda) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ . Son approximation par décomposition en harmoniques sphériques tronquée à l'ordre  $n_0$  sera écrite sous la forme condensée (le  $\cdot$  désigne le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^M$ )

$$F(\mathbf{x}) \simeq \sum_{k=1}^M \phi_k(\mathbf{x}) F_k = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}, \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_M) \in \mathbb{R}^M$  sont les  $M = (n_0 + 1)(n_0 + 2)$  coefficients de la décomposition et  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^M$  est le vecteur formé par les harmoniques réelles  $Y_{mn}^c$  et  $Y_{mn}^s$  rangées selon

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) = (Y_{00}^c(\mathbf{x}), Y_{00}^s(\mathbf{x}), Y_{10}^c(\mathbf{x}), Y_{10}^s(\mathbf{x}), \dots, Y_{n_0 n_0}^c(\mathbf{x}), Y_{n_0 n_0}^s(\mathbf{x})) \quad (4.9)$$

En utilisant de telles approximations pour les différents champs inconnus de notre problème et en introduisant la relation (4.7) pour éliminer  $\Delta g_v$ , nous pouvons réécrire (4.5) comme

$$\begin{cases} \Delta h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{e} + \mathbf{v}) \\ \Delta g(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{g}_c + \mathbf{g}_e + f\mathbf{v}) \\ \Delta u(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{v}) \end{cases} \quad (4.10)$$

où les vecteurs  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{g}_c$  et  $\mathbf{g}_e$  contiennent les coefficients des décompositions en harmoniques sphériques de  $\Delta c$ ,  $\Delta u_e$ ,  $\Delta u_v$ ,  $\Delta g_c$  et  $\Delta g_e$ , respectivement. Pour le reste du chapitre l'acronyme CDHS référera aux coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques.

#### 4.3.1.4 Hypothèse de la couche mince

Pour estimer les composantes élastiques dans le cadre des harmoniques sphériques nous pouvons utiliser le formalisme des nombres de Love de charge détaillés dans le Chapitre 2. Nous utiliserons donc aussi les relations liées à l'hypothèse de la couche mince. Le déplacement élastique ainsi que la variation de gravité lié à la redistribution de masse de surface sont directement liés à la variation de contrainte subie par la surface. Cette variation de contrainte est due à une variation de masse superficielle  $\sigma$  telle que  $\Delta\sigma = \rho\Delta c$  où  $\rho$  est la masse volumique des matériaux redistribués. En notant  $s$  les CDHS de  $\sigma$  et en utilisant le formalisme des fonctions de Green détaillé dans le chapitre 2, nous pouvons exprimer :

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{s} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{g}_e + \mathbf{g}_c = \mathbf{D}_g \cdot \mathbf{s} \quad (4.12)$$

avec  $\mathbf{D}_e$  et  $\mathbf{D}_g$  les matrices diagonales de dimension  $M \times M$  contenant les coefficients des fonctions de Green pour chaque CDHS de  $\sigma$  tels que :

$$\mathbf{D}_e = \frac{4\pi GR}{g_R} \times \text{diag}([\beta_0, \beta_1, \beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \beta_2, \beta_2, \beta_2, \beta_2, \dots, \beta_{n_0}]) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{D}_g = 4\pi G \times \text{diag}([\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_2, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_0}]) \quad (4.14)$$

avec

$$\beta_i = \frac{h'_i}{2i+1} \quad (4.15)$$

$$\gamma_i = \frac{(1+k'_i) \times (i+1)}{2i+1} \quad (4.16)$$

où  $h'_i$  et  $k'_i$  sont les nombres de Love de charge élastiques variant de 0 à  $n_0$ ,  $G$  est la constante de gravitation universelle,  $R$  est le rayon terrestre moyen et  $g_R$  est l'attraction de gravité à la surface terrestre. Nous avons ainsi les  $\mathbf{D}_{eii}$  en  $\text{m}^3/\text{kg}$  et les  $\mathbf{D}_{gii}$  en  $\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ . Grâce aux relations (4.11) et (4.12) nous pouvons éliminer  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{g}_e + \mathbf{g}_c$  du système (4.10) pour obtenir alors le système final qui comprend trois équations pour trois champs inconnus :

$$\begin{cases} \Delta h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{s} + \mathbf{v}), \\ \Delta g(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{D}_g \cdot \mathbf{s} + f\mathbf{v}), \\ \Delta u(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{D}_e \cdot \mathbf{s} + \mathbf{v}), \end{cases} \quad (4.17)$$

En écrivant ce système aux  $N$  points  $\mathbf{x}_i$  où les données observées ( $\Delta h_{obs}$ ,  $\Delta g_{obs}$ ,  $\Delta u_{obs}$ ) sont localisées, nous obtiendrons un système rectangulaire ( $N \times 3M$ ) linéaire en  $(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{v})$ , que nous résoudrons par moindres carrés pour estimer ces  $3M$  paramètres. À partir de ceux-ci, nous obtiendrons une estimation des cartes des taux de variations d'épaisseur de calotte ( $\Delta c(\mathbf{x}) \simeq \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{c}$ ), de variations de densité superficielle de masse ( $\Delta\sigma(\mathbf{x}) \simeq \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}$ ), de déplacements verticaux visqueux ( $\Delta u_v(\mathbf{x}) \simeq \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ ).

#### 4.3.1.5 Inversion par méthode des moindres carrés

Le système (4.17) étant linéaire, l'approche est très classique (Tarantola, 2005) et sans difficultés théoriques particulières. Nous la détaillons ici pour poser les notations utilisées et montrer comment le système final peut être inversé sans coût numérique excessif malgré un nombre de données et de paramètres pouvant être importants.

Nous désignons par  $\mathbf{x}_{u_i}^{obs} = (\theta_{u_i}, \lambda_{u_i})$ ,  $1 \leq i \leq N_u$  la localisation des  $N_u$  stations GNSS et par  $\Delta u_i^{obs}$  les déplacements verticaux mesurés par chacune d'elles que nous regroupons dans un vecteur :

$$\Delta \mathbf{u}_{obs} = \left( \Delta u_1^{obs}, \dots, \Delta u_{N_u}^{obs} \right) \in \mathbb{R}^{N_u}. \quad (4.18)$$

Nous faisons de même pour les observations d'altimétrie et de gravimétrie supposées être données en  $N_h$  points de coordonnées  $\mathbf{x}_{h_i}^{obs}$  et en  $N_g$  points  $\mathbf{x}_{g_i}^{obs}$  :

$$\Delta \mathbf{h}_{obs} = \left( \Delta h_1^{obs}, \dots, \Delta h_{N_h}^{obs} \right) \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad \Delta \mathbf{g}_{obs} = \left( \Delta g_1^{obs}, \dots, \Delta g_{N_g}^{obs} \right) \in \mathbb{R}^{N_g}. \quad (4.19)$$

Notons que dans les cas pratiques que nous présenterons, nous avons considéré que ces deux derniers jeux d'observations étaient localisés aux mêmes points ( $N_h = N_g$ ,  $\mathbf{x}_{h_i}^{obs} = \mathbf{x}_{g_i}^{obs}$ ), chose que nous ne pourrions bien entendu pas supposer pour les stations GNSS.

Ces trois jeux de données représentent donc un ensemble de  $N = N_h + N_g + N_u$  valeurs que nous pouvons représenter par un vecteur  $\mathbf{d}_{obs}$  de  $\mathbb{R}^N$  :

$$\mathbf{d}_{obs} = \left( \Delta \mathbf{h}_{obs}, \Delta \mathbf{g}_{obs}, \Delta \mathbf{u}_{obs} \right) \in \mathbb{R}^N. \quad (4.20)$$

Supposons alors connue une estimation, notée  $\mathbf{m}$ , des  $3M$  paramètres  $\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$  :

$$\mathbf{m} = (\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{3M}. \quad (4.21)$$

Par (4.17) nous pouvons calculer les valeurs  $\mathbf{d} = (\Delta \mathbf{h}, \Delta \mathbf{g}, \Delta \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^N$  « prédites » par ce modèle aux points  $\mathbf{x}_{h_i}^{obs}$ ,  $\mathbf{x}_{g_i}^{obs}$ ,  $\mathbf{x}_{u_i}^{obs}$ , respectivement, valeurs qui s'expriment linéairement en fonction de  $\mathbf{m}$  :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{h} \\ \Delta \mathbf{g} \\ \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_h \cdot \mathbf{D}_e & \Phi_h & \Phi_h \\ \Phi_g \cdot \mathbf{D}_g & \mathbf{0}_g & f \Phi_g \\ \Phi_u \cdot \mathbf{D}_e & \mathbf{0}_u & \Phi_u \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.22)$$

les matrices  $\Phi_h, \Phi_g, \Phi_u$  ayant pour éléments les valeurs des fonctions de base  $\phi_k$  aux points d'observations  $\mathbf{x}_h^{obs}, \mathbf{x}_g^{obs}, \mathbf{x}_u^{obs}$ , respectivement (par exemple  $\Phi_h$ , de dimensions  $N_h \times M$ , a pour éléments  $[\Phi_h]_{ij} = \phi_j(\mathbf{x}_{h_i}^{obs})$ ).

Connaissant ces données prédites nous pouvons calculer leur « distance » aux données réelles en définissant celle-ci à partir de :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{m}) &= \alpha_h \|\Delta \mathbf{h} - \Delta \mathbf{h}_{obs}\|_{\mathbf{C}_h^{-1}}^2 + \alpha_g \|\Delta \mathbf{g} - \Delta \mathbf{g}_{obs}\|_{\mathbf{C}_g^{-1}}^2 + \alpha_u \|\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_{obs}\|_{\mathbf{C}_u^{-1}}^2 \\ &= \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_{obs}\|_{\mathbf{C}_d^{-1}}^2 \\ &= \|\mathbf{G} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{d}_{obs}\|_{\mathbf{C}_d^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

où  $\alpha_h, \alpha_g, \alpha_u$  sont des nombres de  $[0, 1]$ ,  $\mathbf{C}_h, \mathbf{C}_g, \mathbf{C}_u$  sont les matrices (symétriques définies positives) de covariances de chacun des jeux de données,  $\mathbf{C}_d^{-1}$  la matrice  $N \times N$  :

$$\mathbf{C}_d^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_h \mathbf{C}_h^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_g \mathbf{C}_g^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha_u \mathbf{C}_u^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

et où  $\|\cdot\|_A$  désigne la norme associée à une matrice (SDP)  $\mathbf{A}$ .

La méthode des moindres carrés consiste alors à chercher des valeurs de  $\mathbf{m}$  qui rendent minimale cette distance. La relation entre paramètres  $\mathbf{m}$  et données prédites  $\mathbf{d}$  étant linéaire ( $\mathbf{d} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}$ ), la fonction  $\mathbf{m} \mapsto J(\mathbf{m})$  est convexe et sa valeur minimale est donc unique. Sa stricte convexité (lorsque la matrice  $\mathbf{G}$  est de rang plein) entraînera l'unicité du minimiseur.

L'expression de ce minimiseur,  $\mathbf{m}$ , est classiquement déduite des équations dites *normales* (e.g. Tarantola, 2005) traduisant la condition de stationnarité de  $J$  en  $\mathbf{m}$  ( $\nabla J(\mathbf{m}) = \mathbf{0}$ ) :

$$\left( \mathbf{G}^T \mathbf{C}_d^{-1} \mathbf{G} \right) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{G}^T \mathbf{C}_d^{-1} \cdot \mathbf{d}_{obs}. \quad (4.25)$$

En exploitant les expressions particulières des matrices  $\mathbf{G}$  (4.22) et  $\mathbf{C}_d^{-1}$  (4.24), nous pouvons donner la solution explicite de ce système et faire ainsi l'économie d'opérations numériquement coûteuses lorsque  $N$  et  $M$  sont importants (formation de la matrice et du second membre, résolution numérique). Après élimination et substitution (4.25) donne en effet (sous réserve que les différentes inverses ci-dessous existent) :

$$\begin{cases} c + \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{s} + v & = \left[ \Phi_h^T \mathbf{C}_h^{-1} \Phi_h \right]^{-1} \Phi_h^T \mathbf{C}_h^{-1} \cdot \Delta \mathbf{h}_{obs} =: \mathbf{h}, \\ \mathbf{D}_g \cdot \mathbf{s} + f v & = \left[ \Phi_g^T \mathbf{C}_g^{-1} \Phi_g \right]^{-1} \Phi_g^T \mathbf{C}_g^{-1} \cdot \Delta \mathbf{g}_{obs} =: \mathbf{g}, \\ \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{s} + v & = \left[ \Phi_u^T \mathbf{C}_u^{-1} \Phi_u \right]^{-1} \Phi_u^T \mathbf{C}_u^{-1} \cdot \Delta \mathbf{u}_{obs} =: \mathbf{u}. \end{cases} \quad (4.26)$$

Remarquons que les seconds membres de (4.26), notés  $\mathbf{h}, \mathbf{g}, \mathbf{u}$  et qui ne dépendent que des données, ne sont rien d'autres que les approximations par moindres carrés des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques de  $\Delta \mathbf{h}_{obs}, \Delta \mathbf{g}_{obs}, \Delta \mathbf{u}_{obs}$ .

Il n'y a finalement aucune difficulté à résoudre directement (4.26) pour trouver les coefficients cherchés :

$$\begin{cases} c & = \mathbf{h} - \mathbf{u}, \\ \mathbf{s} & = (f \mathbf{D}_e - \mathbf{D}_g)^{-1} \cdot (f \mathbf{u} - \mathbf{g}), \\ v & = \frac{1}{f} (\mathbf{g} - \mathbf{D}_g \cdot \mathbf{s}). \end{cases} \quad (4.27)$$

Remarque : la valeur utilisée pour  $f$  ( $0.15 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ ) ne rend jamais la matrice  $(f \mathbf{D}_e - \mathbf{D}_g)$  singulière (i.e.  $f \mathbf{D}_{e_{ii}} \neq \mathbf{D}_{g_{ii}}, \forall i = 1, \dots, M$ ) et celle-ci étant diagonale, le calcul de  $\mathbf{s}$  se fait sans effort.

La solution donnée par (4.27) nous permet aussi d'exprimer les incertitudes sur chacun des paramètres si l'on a une estimation des incertitudes sur  $h$ ,  $g$  et  $u$  :

$$\begin{cases} \delta c_i = \delta u_i + \delta h_i, \\ \delta s_i = |\gamma_i| (f \delta u_i + \delta g_i), \\ \delta v_i = |\gamma_i| (|\mathbf{D}_{g_{ii}}| \delta u_i + |\mathbf{D}_{e_{ii}}| \delta g_i), \end{cases} \quad 1 \leq i \leq M \quad (4.28)$$

avec  $\gamma_i = 1/(f\mathbf{D}_{e_{ii}} - \mathbf{D}_{g_{ii}})$ . L'incertitude de  $\delta c_i$  est principalement contrôlée par celle de  $\delta h_i$  (m), étant trois ordres de grandeur supérieure à celle de  $\delta u_i$  ( $10^{-3}$  m). Pour l'incertitude de  $s_i$  et  $v_i$  il nous faut d'abord estimer  $\gamma_i$ . Elles peuvent donc être grandes si les facteurs  $|\gamma_i|$  le sont ( $\mathbf{D}_{g_{ii}}$  proche de  $f\mathbf{D}_{e_{ii}}$ ). Prenons l'exemple du degré harmonique 2. Nous avons  $f\mathbf{D}_{e_{22}} = -1.62 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ ,  $\mathbf{D}_{g_{22}} = 3.50 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ , et  $\gamma_2 = -2,73 \times 10^9 \text{ kg}\cdot\text{s}^2/\text{m}^3$ . Nous avons  $f\delta u_i$  et  $\delta g_i$  de l'ordre de  $10^{-8} \text{ m}/\text{s}^2$ , donc nous auront  $\delta s_2$  de l'ordre de  $10 \text{ kg}/\text{m}^2$  et  $\delta v_2$  de l'ordre de  $10^{-4}$  m soit 0,1 mm.

#### 4.3.1.6 Limitations de la méthode

Plusieurs limitations à notre méthode sont à mentionner. Nous cherchons ici à obtenir une carte des taux de déplacements pour l'Antarctique, en utilisant les observations qui y sont disponibles. Pour notre inversion nous utilisons le formalisme des harmoniques sphériques, qui nécessitent des observations réparties le mieux possible sur l'ensemble de la surface de la Terre. Nos observations ne sont localisées qu'en Antarctique, ce qui ne pose pas de problème pour une inversion des degrés harmoniques les plus bas (3 et en dessous) mais donne des résultats incohérents pour les degrés supérieurs. Afin de régler ce problème nous utilisons une grille de coordonnées distribuées sur le reste de la Terre pour compléter les observations et contraindre les déplacements et variations de gravité en dehors de la région Antarctique. Nous accordons un poids très faibles aux données de cette grille complémentaire afin de ne contraindre les résultats de l'inversion qu'à des ordres de grandeur cohérents d'un point de vue géophysique (e.g. de l'ordre du millimètre pour les déplacements visqueux). L'efficacité de cette méthode est montrée dans les travaux de Vishwakarma et al. (2023).

Deux autres limitations dans notre inversion sont la quantité et la répartition des observations. Afin d'inverser notre système il est nécessaire que nous disposions d'au moins autant d'observations que de paramètres que nous voulons inverser. Dans le cas présent le nombre de paramètres  $M = (n+1)(n+2)$  dépendra directement du degré harmonique  $n$  maximal que nous cherchons à inverser. Pour les données d'altimétrie et de gravimétrie nous disposons de bien plus d'observations que requis pour le degré maximal que nous imposons. Cependant les données GNSS sont beaucoup plus limitées que les autres. De plus, puisque nous travaillons avec les harmoniques sphériques, il est nécessaire d'avoir une disposition spatiales d'observations respectant le critère de Shannon Nyquist. La longueur d'onde spatiale  $\lambda$  pour un degré harmonique  $n_0$  est obtenue par la relation

$$\lambda = \frac{2\pi R}{\sqrt{n_0(n_0 - 1)}} \approx \frac{2\pi R}{n_0} \quad (4.29)$$

Pour respecter ce critère nous répartissons nos observations d'altimétrie, de gravimétrie et données complémentaire sur une grille icosaédrique, dont nous contrôlons l'espacement entre chaque point. Une grille similaire est utilisée dans le code SELEN<sup>4</sup>

de Spada and Melini (2019). Nous choisissons que l'espace entre chaque point soit un quart de la longueur d'onde spatiale maximale que nous inversons.

### 4.3.2 Validation de la méthode d'inversion

Dans cette section nous utilisons un modèle analytique dont la formule pour chaque CDHS est connue pour valider notre méthode. Nous avons défini dans la section précédente notre méthode d'inversion pour des variations d'épaisseur. Pour notre validation nous travaillerons en utilisant des taux de variations des différents paramètres. Il est important de noter que pour travailler avec des taux de variation des paramètres nous supposons les masses volumiques  $\rho$  mentionnées dans la section 4.3.1.4 constantes, soit  $\dot{\rho} = 0 \text{ kg/m}^3/\text{an}$ . Ceci nous permet de respecter la relation  $\Delta\sigma = \rho\Delta c$ . Nous générons un jeu de données synthétique à partir de cartes de variations d'épaisseurs de calotte, de densité superficielle des masses et de vitesses verticales visqueuses. Dans la suite du chapitre, nous appellerons les données générées pour l'inversion « données synthétiques » et les données obtenues par l'inversion « données prédites ». Nous réalisons une inversion des CDHS jusqu'au degré 40, puis nous comparons les résultats de l'inversion aux résultats attendus. Premièrement, nous montrons une comparaison des données prédites avec les données synthétiques. Deuxièmement, nous montrons les erreurs des CDHS inversés relativement aux CDHS attendus. Troisièmement, nous comparons les cartes produites avec les CDHS inversés aux cartes attendues.

#### 4.3.2.1 Définition du modèle analytique

Le modèle analytique utilisé est une calotte polaire circulaire. Dans ce cas de figure les CDHS tels que  $m \neq 0$  sont nuls. Cela signifie que seuls les coefficients  $C_{n0}$ , où  $n$  est le degré harmonique, sont non nuls. Nous supposons que l'on dispose d'une calotte polaire de demi ouverture  $\alpha = 30^\circ$  de densité  $\rho = 917 \text{ kg/m}^3$ , comme le montre la figure 4.6. La composante visqueuse du déplacement vertical suit aussi une distribution zonale, avec une demi ouverture de  $40^\circ$  et un taux de déplacement de  $5 \text{ mm/an}$ . La carte des variations visqueuses de gravité est obtenue à partir de la carte des déplacements verticaux et du gradient gravimétrique défini en section 4.3.1.2. La distribution des observations est celle montrée dans la figure 4.5. Pour cette validation nous supposons que les matrices d'incertitudes pour les observations sont des matrices identités, et accordons un poids de  $10^{-4}$  aux valeurs de la grille complémentaire.

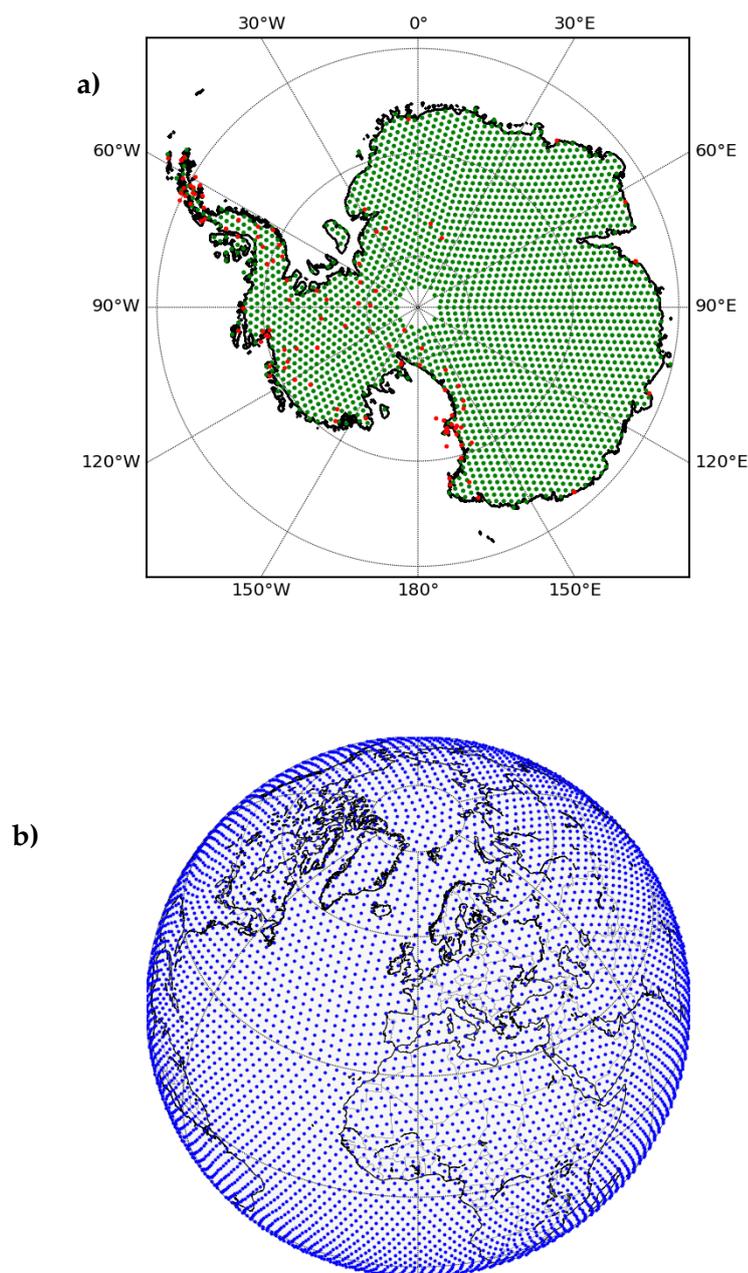


Figure 4.5: Carte des distributions des observations (a) et de la grille des observations complémentaires (b). Les points verts de la carte a) représentent les observations d'altimétrie et de gravimétrie, les points rouges les localisations des stations GNSS.

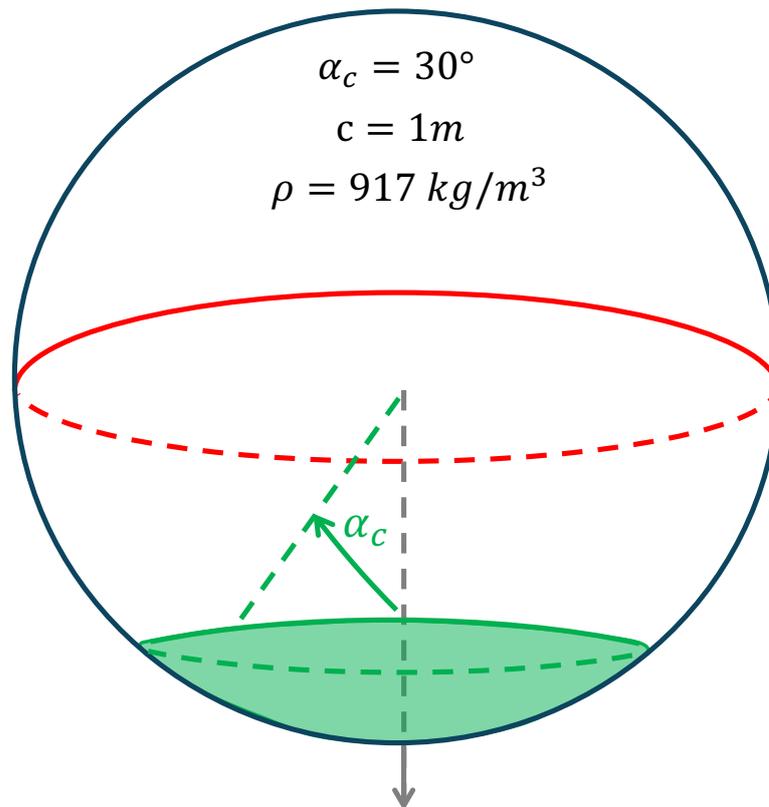


Figure 4.6: Représentation de la calotte polaire utilisée pour valider notre stratégie d'inversion.

#### 4.3.2.2 Résultats de l'inversion : Reproduction des observations

Dans la figure 4.7 nous représentons les données reproduites grâce aux coefficients inversés en fonction des données synthétiques. La droite rouge représente pour chaque jeu de données la droite telle que  $y = x$ , qui est attendue pour une reproduction parfaite des données. Dans un premier temps nous pouvons noter que l'on obtient pour la majorité des observations un très bon accord entre les données prédites et attendues. L'accord aux observations est meilleur pour les données de GNSS. Nous notons des écarts plus importants pour les données d'altimétrie et de gravimétrie. Ces écarts sont montrés dans la figure 4.8, où nous les représentons en fonction des latitudes et des longitudes des observations. La figure 4.8 montre que les écarts des données prédites augmentent en se rapprochant du pôle, atteignant un maximum de  $-32$  mm/an pour l'altimétrie,  $-1.5$   $\mu$ Gal/an pour la gravimétrie et  $2$  mm/an pour les données GNSS. Les écarts pour les latitudes supérieures à  $-80^\circ$  sont deux à trois ordres de grandeurs en dessous des valeurs des données pour l'altimétrie et la gravimétrie, représentant moins de 1% d'erreur. Les écarts pour les latitudes plus basses sont plus importants, notamment pour les données GNSS, mais ne dépassent pas 4%. La tendance des écarts à augmenter en se rapprochant des plus basses latitudes peut être expliquée par les erreurs des CDHS inversés, que nous montrons ci-après.

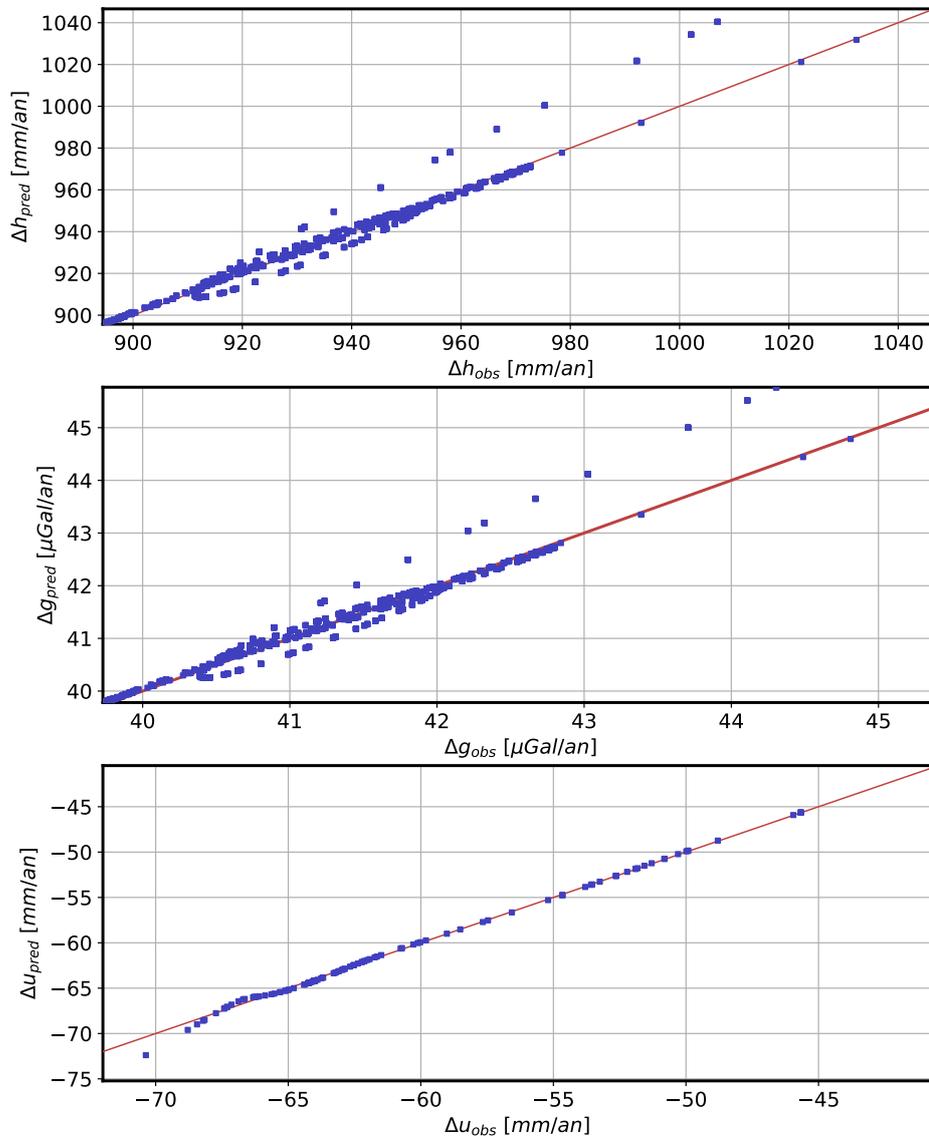


Figure 4.7: Observations reproduites en fonction des observations attendues. La droite rouge correspond à la droite de coefficient directeur égal à 1.

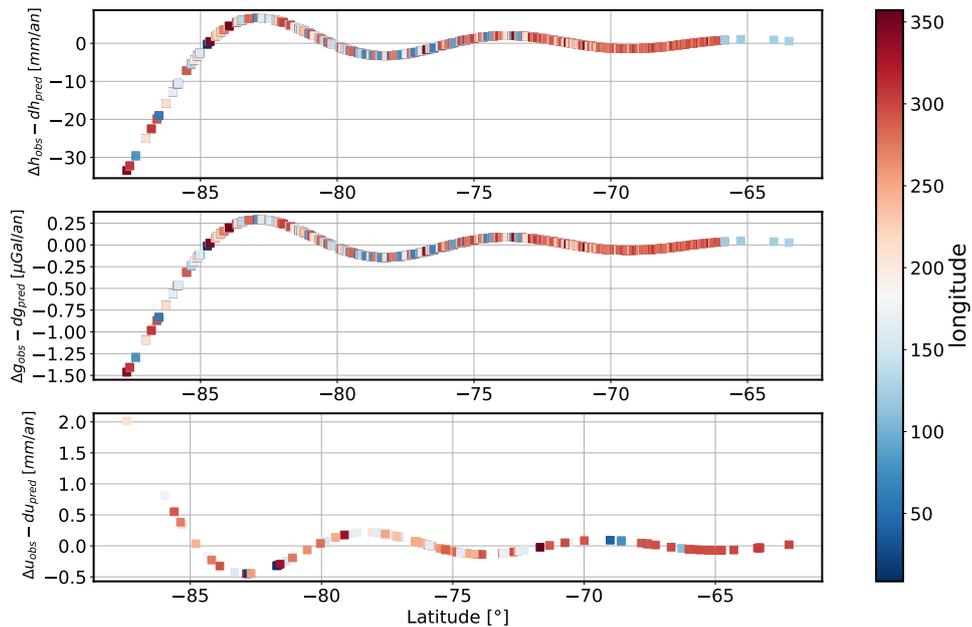


Figure 4.8: Différences entre les données synthétiques et les données prédites par l'inversion en fonction de la latitude. Les couleurs des points correspondent à leur longitude.

#### 4.3.2.3 Résultats de l'inversion : Estimation des coefficients

La figure 4.9 montre les erreurs relatives des coefficients  $c$ ,  $s$  et  $v$  inversés par rapport aux valeurs attendues du modèle synthétique. Les erreurs relatives sont représentées en échelle logarithmique uniquement pour les coefficients zonaux. Les CDHS inversés non zonaux ont des valeurs inférieures à l'épsilon machine ( $< 10^{-16}$ ) et présentent des erreurs relatives supérieures à  $10^2$  %. Cependant ces erreurs du point de vue physique représentent des écarts inférieurs à  $10^{-16}$  m ou  $m/s^2$ , et peuvent donc être considérées nulles. En revanche les erreurs relatives pour les coefficients zonaux jusqu'au degré 10 sont de l'ordre de 0,001 à 1 % ou en dessous pour chaque paramètres inversés. Les degrés supérieurs à 10 présentent des erreurs relatives majoritairement de l'ordre de 10 %. Les erreurs des coefficients  $v$  de degré supérieurs à 25 sont plus importantes que pour les coefficients  $c$  et  $s$ . Ces écarts sont cohérents avec les résultats obtenus pour la reproduction des données de la section précédente, où nous obtenions des écarts dans la reproduction des données plus importants en se rapprochant du pôle. Nous nous attendons à trouver des écarts dans les cartes reconstruites maximums aux pôles.

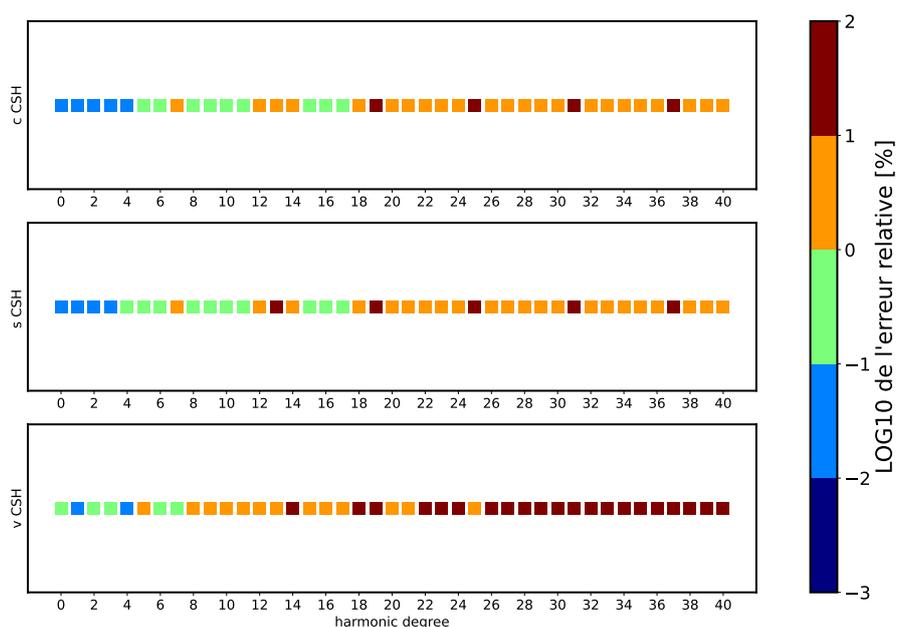
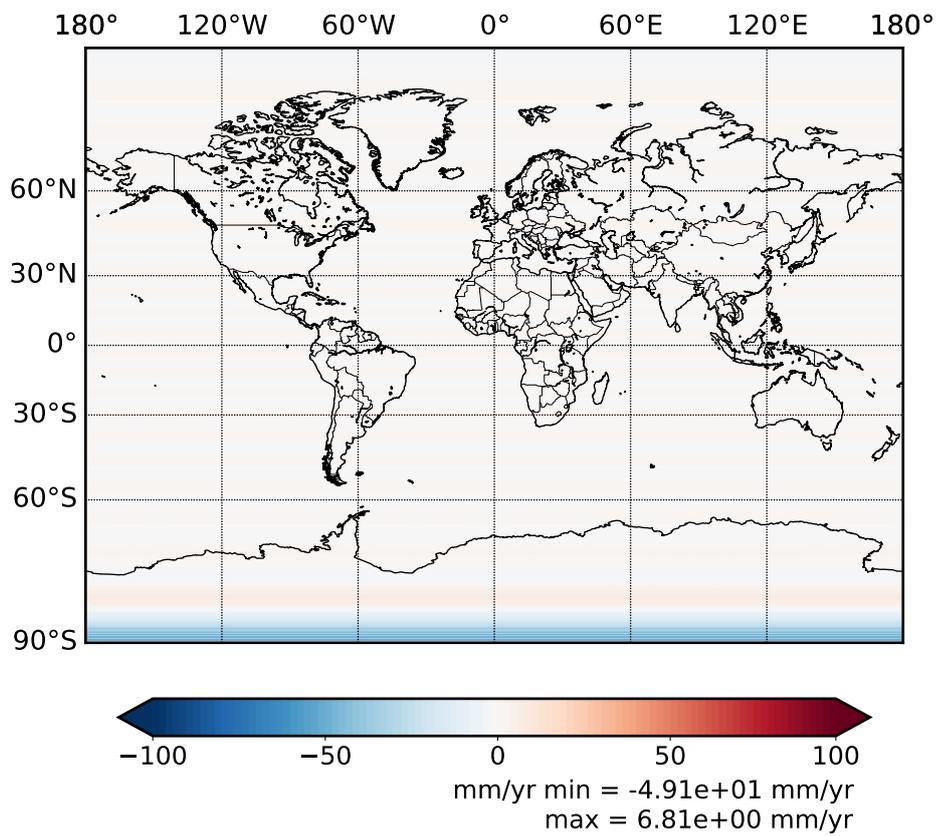
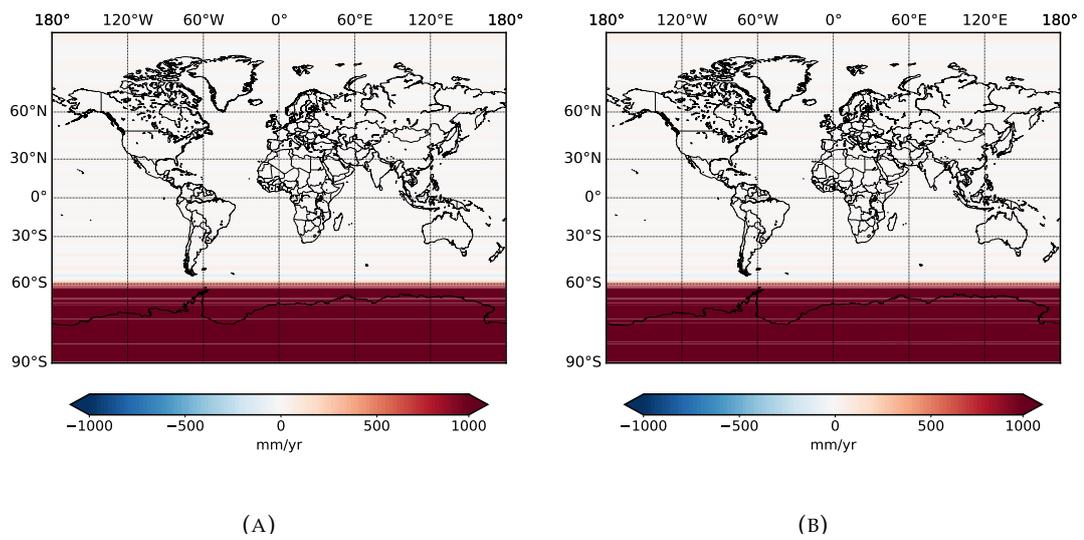


Figure 4.9: Erreurs relatives des CDHS des taux de variation d'épaisseur de calotte, des densités superficielles des masses variant et des vitesses verticales visqueuses de la surface pour le modèle analytique.

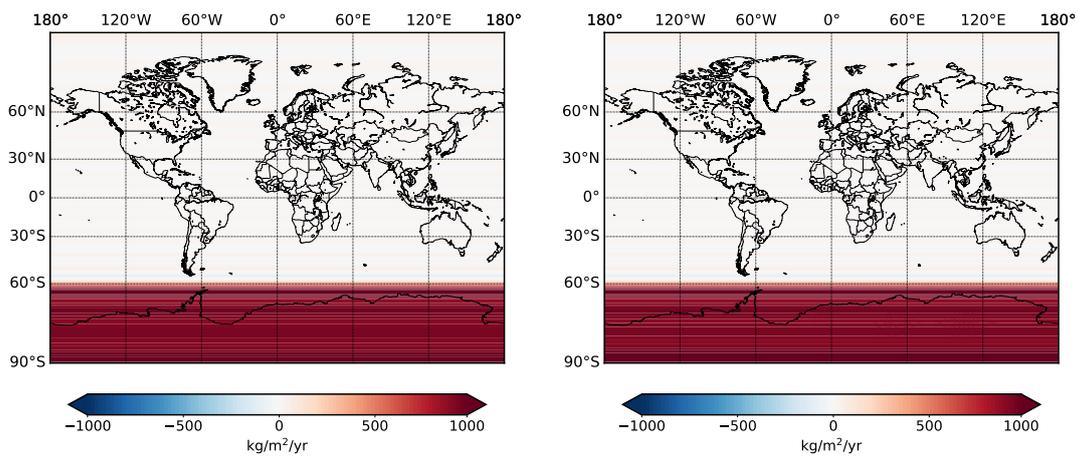
#### 4.3.2.4 Résultats de l'inversion : Reconstruction des cartes

Dans cette partie nous comparons les cartes reconstruites à partir des coefficients inversés aux cartes attendues pour notre modèle synthétique. Les cartes 4.10a, 4.11a et 4.12a sont celles utilisées pour générer les données du modèle analytique. Les cartes 4.10b, 4.11b et 4.12b sont celles reconstruites à partir des coefficients inversés et les cartes 4.10c, 4.11c et 4.12c montrent leurs différences respectives. Les cartes reconstruites à partir des CDHS sont très proches des cartes attendues. Pour les cartes de taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire et de densité de masse superficielle les écarts sont entre deux et trois ordres de grandeurs en dessous des valeurs attendues. Les écarts maximums obtenus sont respectivement 0,68 % et 0,82 %. Les écarts relatifs pour la carte des taux de déplacements sont plus importants que pour les deux cartes précédentes. Ces écarts sont maximums au niveau des pôles (1,77 mm/an), et représentent 35% de la valeur attendue. Les cartes de variations d'épaisseur de calotte glaciaire et de densité de masse superficielle présentent aussi des écarts maximums aux pôles. Les distributions spatiale des écarts dans les cartes reproduites sont les mêmes pour chaque paramètres, et correspondent à un schéma zonal de degré 40. Pour les latitudes éloignées des pôles, les cartes sont très bien reproduites, avec des erreurs très proches de zéro. Ces résultats sont cohérents avec ceux de la partie précédente où nous avons comparé les données prédites et les données synthétiques. Nous nous attendons à obtenir des écarts plus importants pour les coefficients des degrés les plus haut.



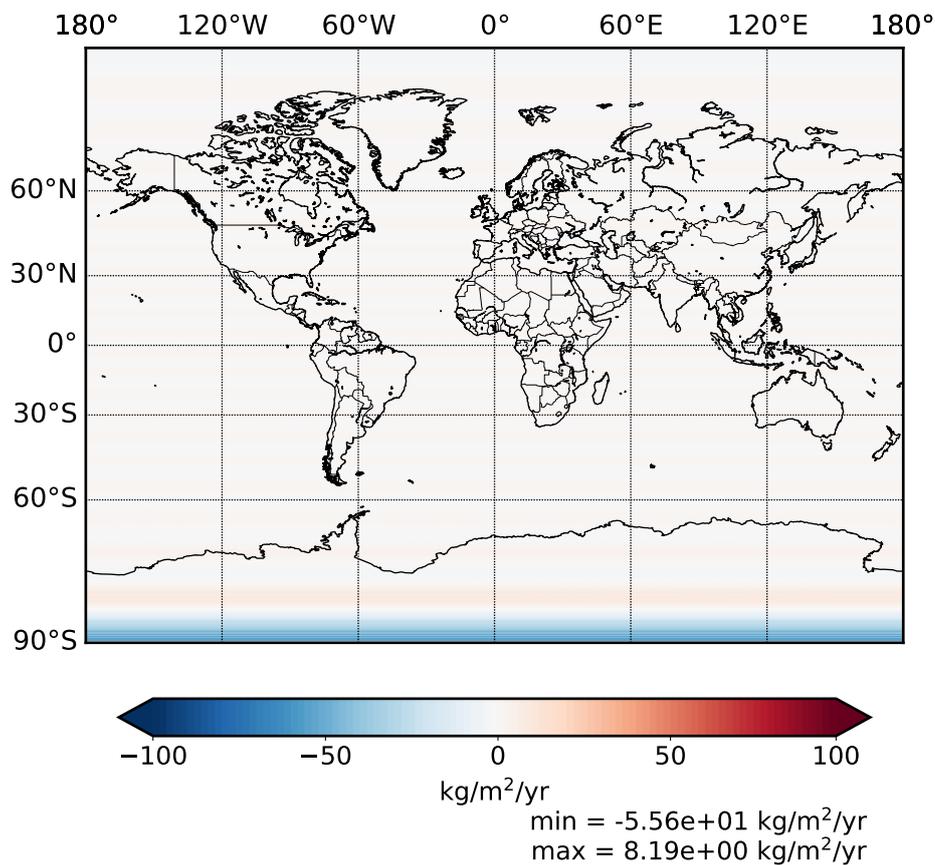
(c)

Figure 4.10: (a) Carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.



(A)

(B)



(C)

Figure 4.11: (a) Carte des densité superficielle des masses variant, reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des densité superficielle des masses variant inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.

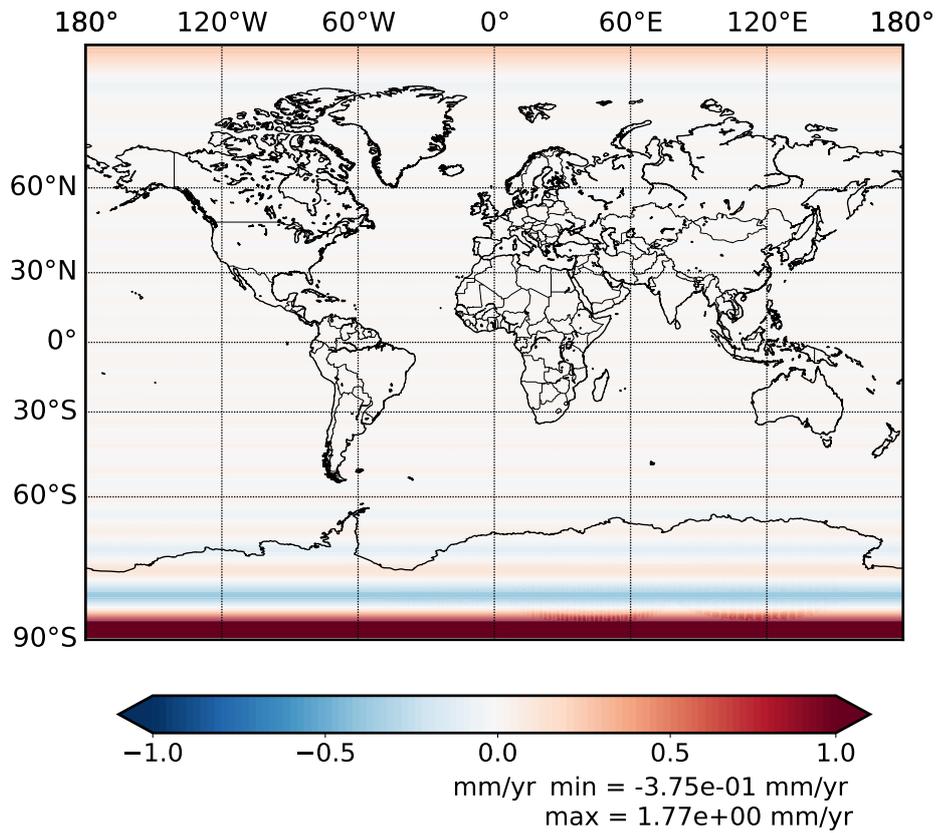
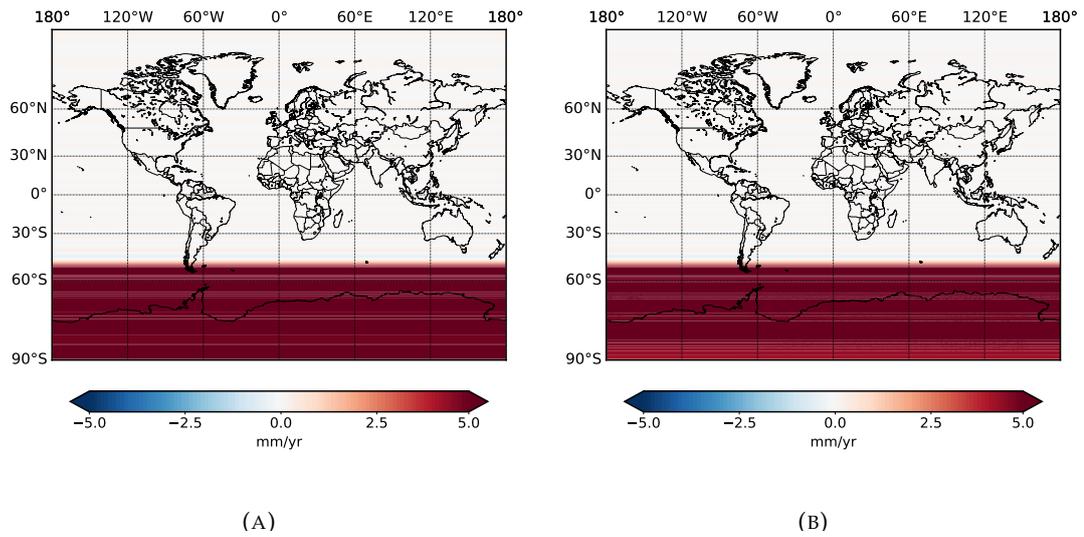


Figure 4.12: (a) Carte des vitesses verticales visqueuses reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des vitesses verticales visqueuses inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.

## 4.4 Application de la méthode à un modèle réaliste

### 4.4.1 Définition du modèle réaliste

Dans la section précédente nous avons validé notre approche avec un modèle analytique pour lequel nous connaissons les formules analytiques des CDHS. Dans cette partie nous appliquons notre méthode d'inversion à un modèle réaliste quant à la distribution des variations de masse et des déplacements visqueux. Pour les variations d'épaisseur de calotte nous utilisons la carte des taux de variation d'élévation de la figure 4.4. La majorité des variations d'épaisseur est cette fois-ci localisée sur la côte Ouest de l'Antarctique. Peu de variations d'épaisseur se situe au niveau du pôle. Nous nous attendons donc à retrouver peu d'erreur comme nous obtenions précédemment pour le modèle analytique. Nous calculons les CDHS de cette carte et la reconstruisons jusqu'au degré 40 (figure 4.19a). Pour les densités superficielles de masse nous utilisons une carte de masse volumique combinée à la carte de la figure 4.19a pour obtenir la carte de la figure 4.20a. Les masses volumiques sont montrées par la figure 4.13. Finalement, la composante visqueuse du déplacement et de la variation de gravité sont construites à partir du modèle ICE6G\_C (Peltier et al., 2015). Comme pour la carte des variations d'épaisseur nous décomposons puis reconstruisons la carte des taux de déplacements verticaux jusqu'au degré 40, ce qui nous donne la carte 4.21a. Nous construisons nos jeux de données à partir de ces cartes, en utilisant les distributions pour les données et grilles complémentaires montrées dans la section précédente (figures 4.5 a) et b)).

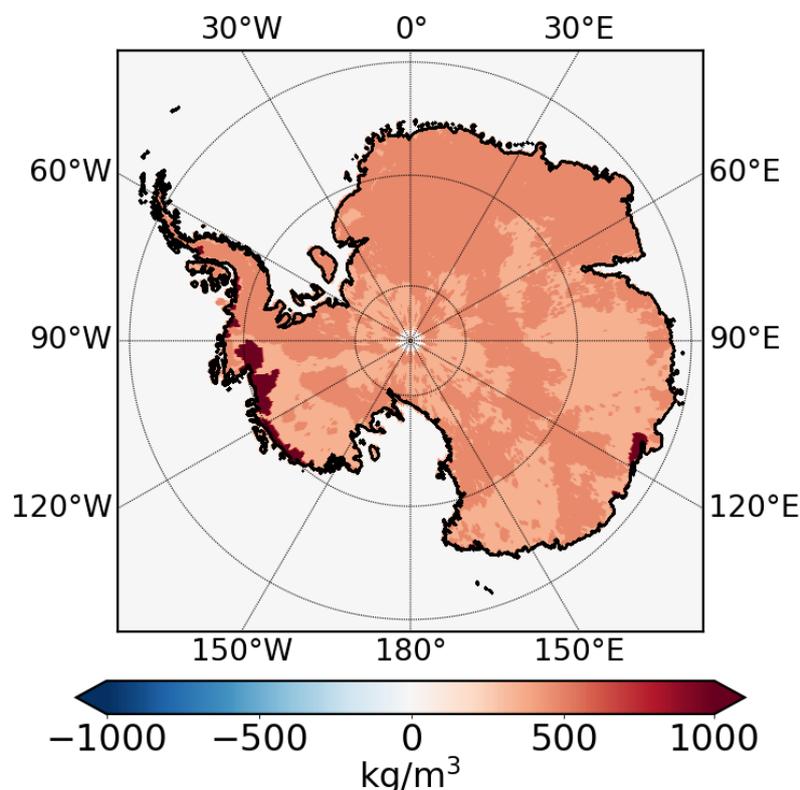


Figure 4.13: Carte des masses volumiques utilisées pour la construction du modèle réaliste de l'inversion.

#### 4.4.2 Résultats pour le modèle réaliste : Reproduction des observations

Comme pour la section précédente nous présentons dans un premier temps les données reproduites par l'inversion en fonction des données synthétiques. La figure 4.15 montre les données prédites en fonction des données synthétiques. Comme pour le modèle analytique nous obtenons une excellente reconstruction des données. Dans ce cas nous évitons les gros écarts obtenus pour les observations proches du pôle. Les données reproduites sont donc beaucoup plus proches des données synthétiques, et ce pour chaque type d'observation. Comme pour la section précédente nous montrons les différences entre les données prédites et attendues dans la figure 4.14. Nous pouvons noter dans un premier temps que les différences obtenues ici sont entre un et deux ordres de grandeurs plus petites que précédemment. Les écarts maximums obtenus représentent moins de 1% des valeurs maximales attendues, pour chaque jeu de données. Comme pour le modèle analytique les écarts sont les plus importants lorsque l'on se rapproche du pôle. Les longitudes des observations n'ont pas d'influence dans les écarts obtenus. Les écarts entre les données prédites et attendues étant très petits, nous nous attendons à obtenir des variations minimales dans les cartes reproduites et les CDHS.

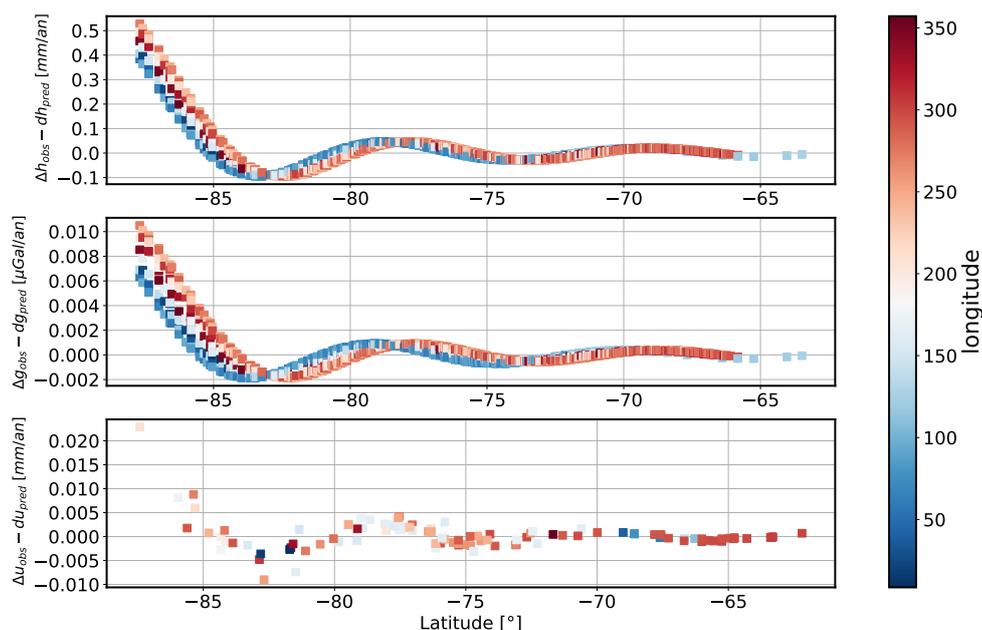


Figure 4.14: Différences entre les données synthétiques et les données prédites par l'inversion en fonction de la latitude pour le modèle réaliste. Les couleurs des points correspondent à leur longitude.

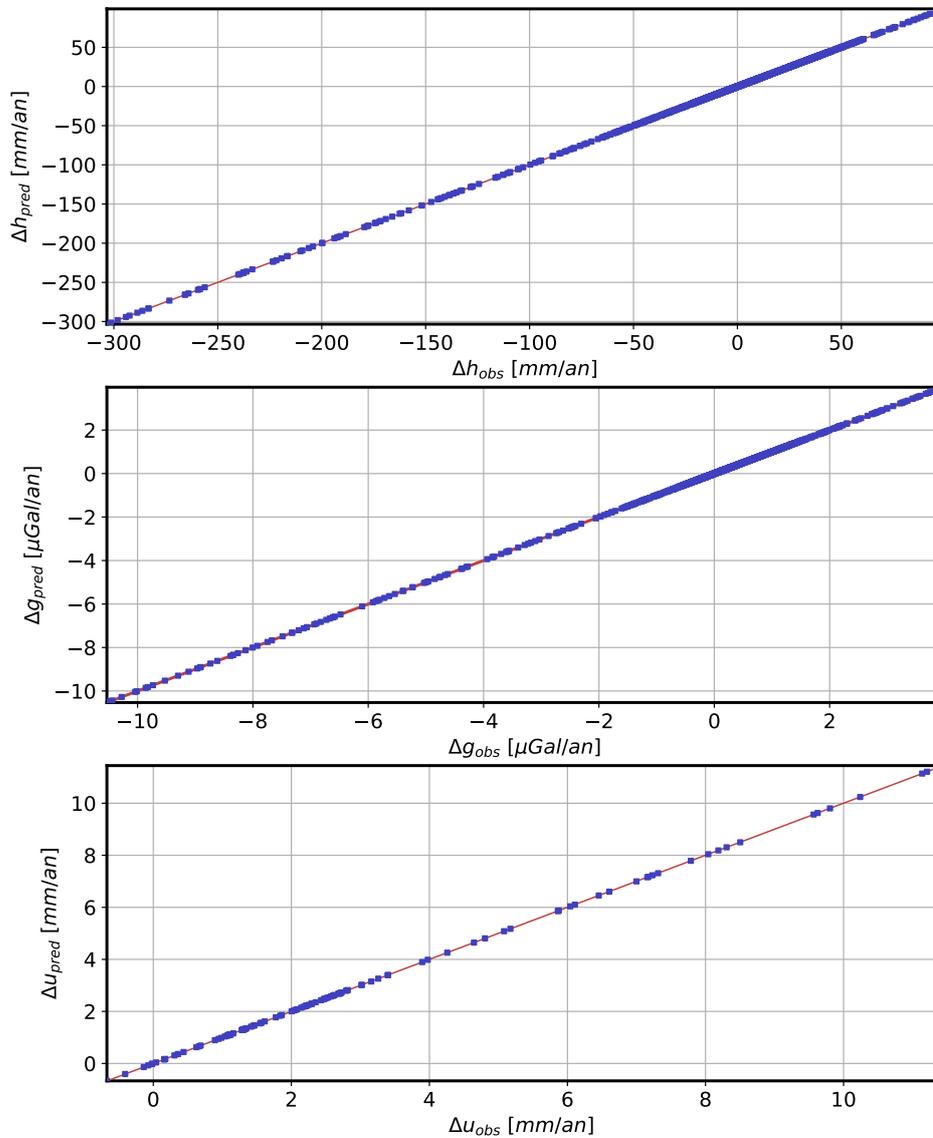


Figure 4.15: Observations reproduites en fonction des observations attendues pour un modèle de calotte dit réaliste. La droite rouge correspond à la droite de coefficient directeur égal à 1.

#### 4.4.3 Résultats pour le modèle réaliste : Estimation des coefficients

Les figures 4.16, 4.17 et 4.18 montrent les erreurs relatives des coefficients  $c$ ,  $s$  et  $v$  par rapport aux valeurs attendues pour le modèle réaliste. Dans un premier temps nous pouvons noter des comportements similaires entre les coefficients  $c$  et  $s$  dont la majorité des erreurs sont inférieures à 10%. Nous pouvons noter que les coefficients d'ordres et degrés inférieurs à 12 présentent des erreurs relatives plus importantes que pour les degrés plus hauts. De plus, les coefficients des degrés et ordres

supérieurs à 20 présentent des erreurs supérieures à 10%, et peuvent dépasser les 100%. Cette erreur peut cependant être ignorée car elle concerne des degrés dont les valeurs attendues sont très faibles ( $< 10^{-16}$ ).

Le comportement des coefficients  $v$  est différents des deux précédents, où nous avons deux comportements distincts:

- les coefficients pour  $n \in [10, 40]$  et  $m \in [10, 40]$  présentent des erreurs relatives très faibles (toutes inférieures à 0.01%). Cette gamme d'erreur relative permet d'expliquer la bonne reconstruction de la carte 4.21b à l'exception de la région est Antarctique (voir section 4.4.4).

- les coefficients pour  $n \in [0, 40]$  et  $m \in [0, 10[$  présentent des erreurs relatives plus importantes, majoritairement de l'ordre de 10%, et pouvant dépasser les 100% pour les coefficients des degrés entre 10 et 20. Ces erreurs sur les coefficients de bas ordre, similaire à celle retrouvée pour les coefficients  $c$  et  $s$ , permettent d'expliquer l'écart obtenu sur la région est Antarctique (voir section 4.4.4).

#### 4.4.4 Résultats pour le modèle réaliste : Reconstruction des cartes

Nous comparons ici les cartes reconstruites à partir des coefficients inversés aux cartes attendues pour notre modèle réaliste. Comme mentionné précédemment, les cartes 4.19a, 4.20a et 4.21a sont celles utilisées pour générer les données du modèle réaliste. Les cartes 4.19b, 4.20b et 4.21b sont celles reconstruites à partir des coefficients inversés et les cartes 4.19c, 4.20c et 4.21c montrent leurs différences respectives. Comme pour la reproduction des observations nous pouvons noter que les cartes obtenues par inversion sont très proches des cartes attendues. Les différences entre les trois cartes ont le même schéma spatial. Les différences sont toutes localisées sur le plateau continental de l'est Antarctique, qui correspond à la zone où nous avons le moins d'observations GNSS. Les écarts dans les cartes de variations d'épaisseur et de masse de surface obtenues par inversion indiquent une accumulation de masse sur le plateau est Antarctique et un taux de déplacement visqueux plus faible. Les masses volumiques sont de l'ordre de  $900 \text{ kg/m}^3$ , proche de la masse volumique de la glace. Les différences dans les taux de déplacements visqueux sont plus importantes que pour les cartes précédentes par rapport aux valeurs attendues. Nous notons sur le plateau est Antarctique une subsidence que nous n'avons pas dans la carte attendue, dont les taux maximaux sont de l'ordre de 4 mm/an. Ces différences sont du même ordre de grandeur que les déplacements moyens attendus.

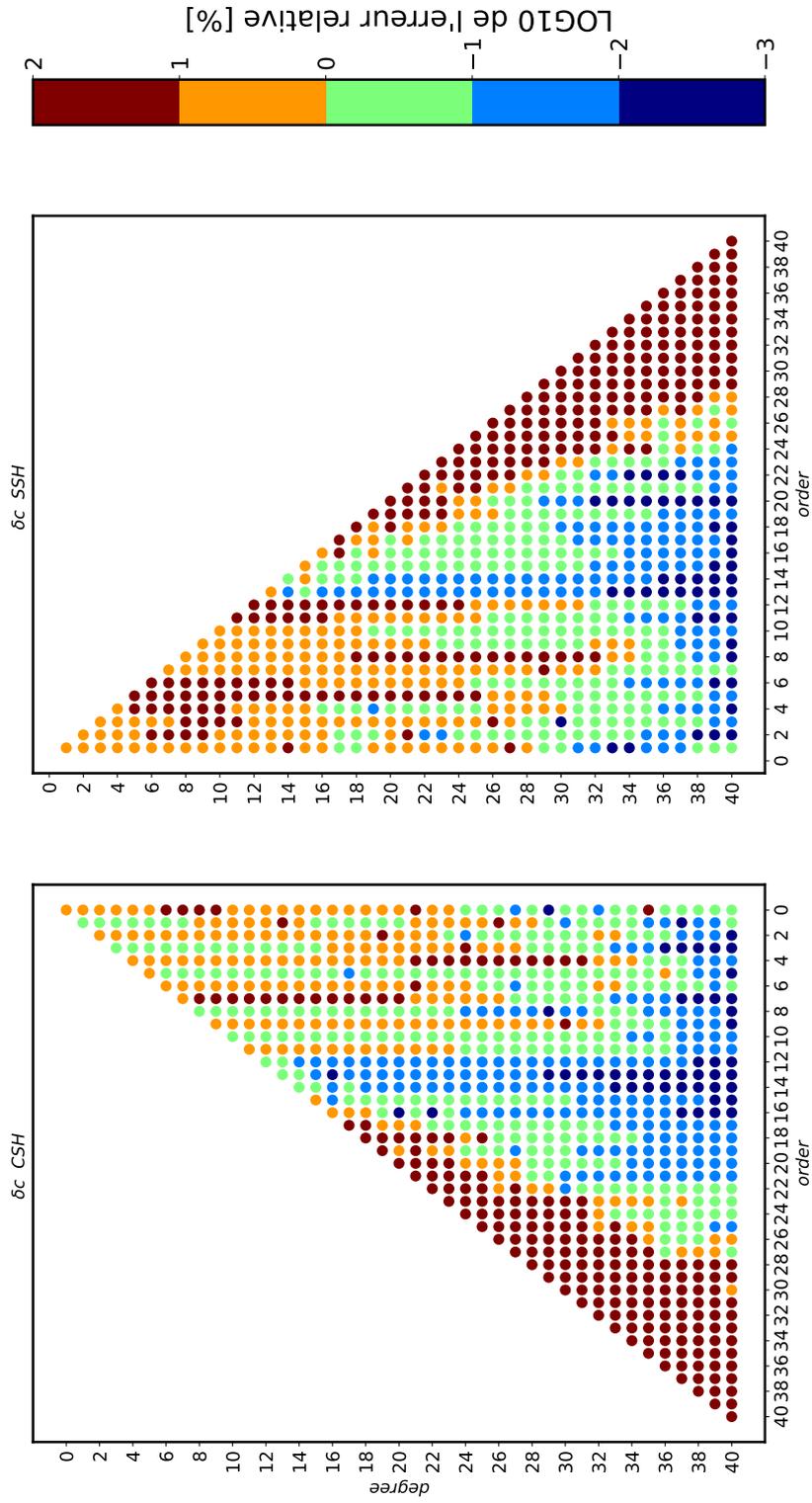


Figure 4.16: Erreurs relatives des CDHS des taux de variation d'épaisseur de calotte Antarctique reconstruite au degré 40.

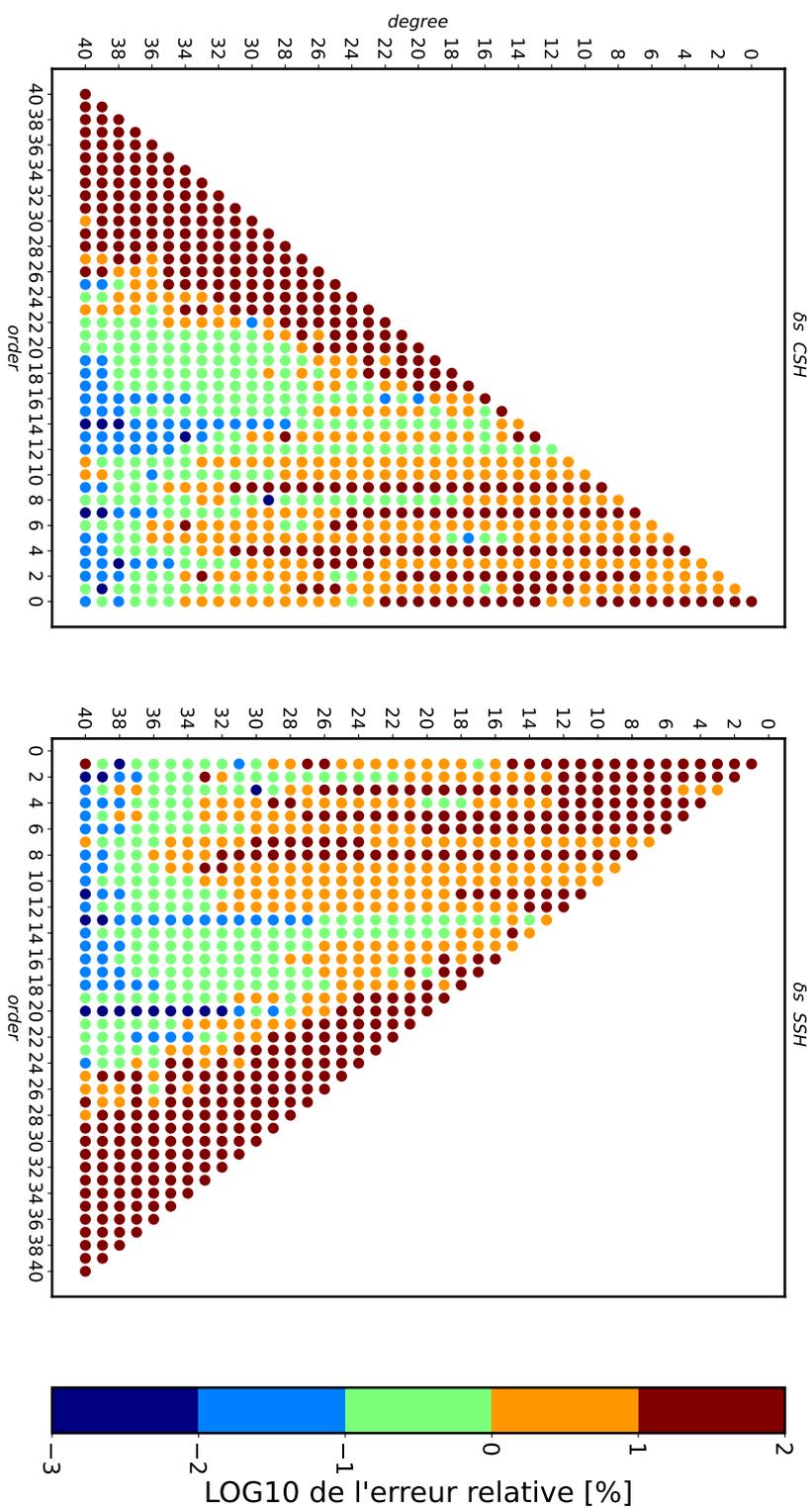


Figure 4.17: Erreurs relatives des CDHS des taux de variations de masse surfacique pour la calotte Antarctique reconstruite au degré 40.

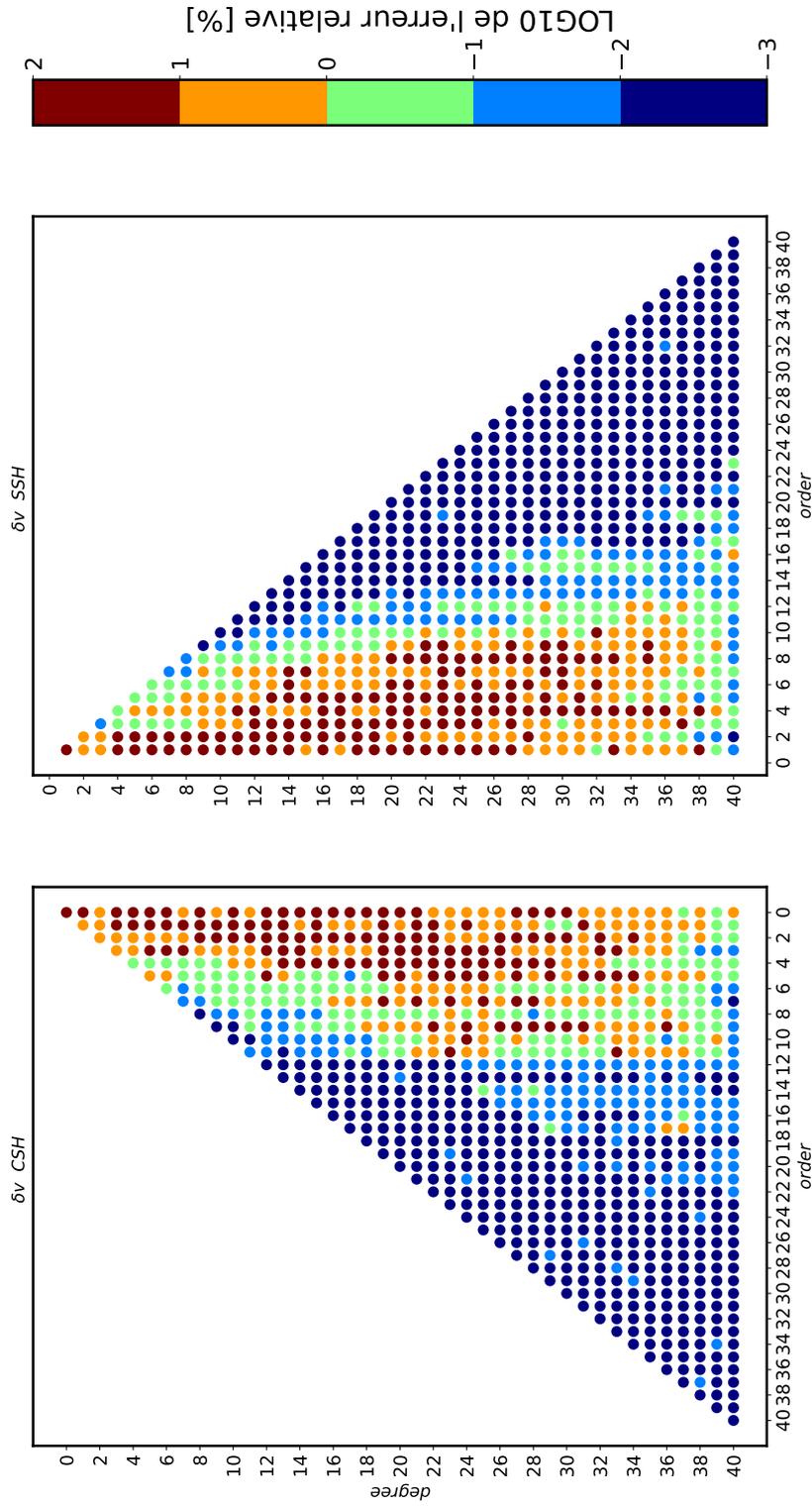


Figure 4.18: Erreurs relatives des CDHS des taux de déplacement vertical de la surface reconstruite au degré 40 au degré 40.

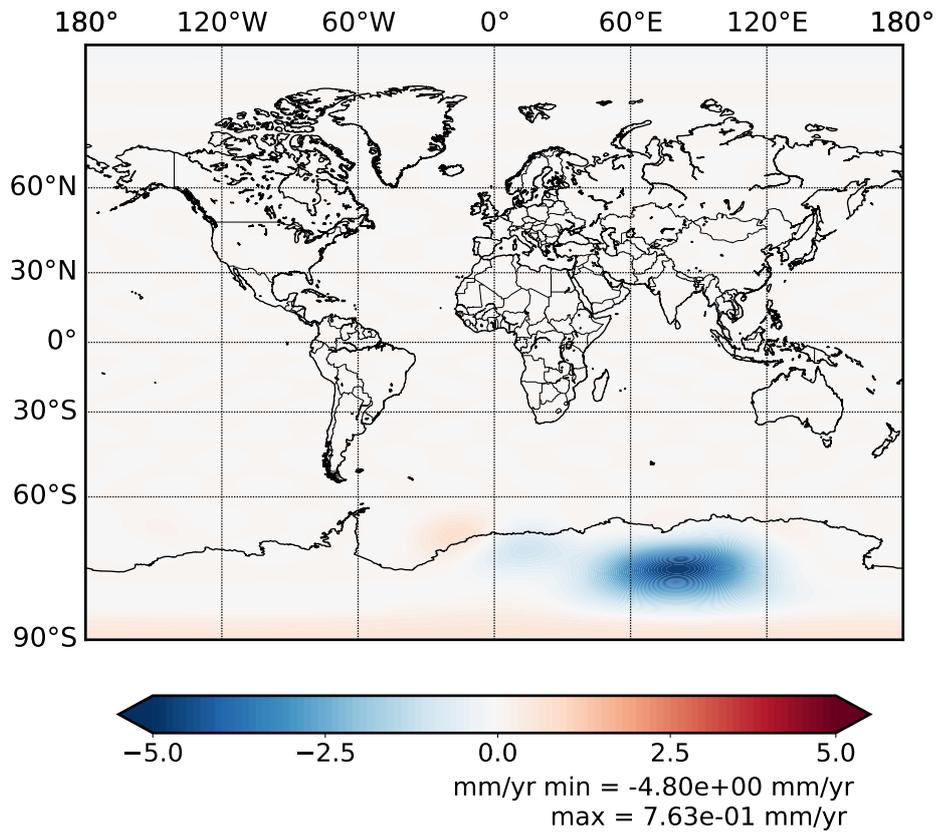
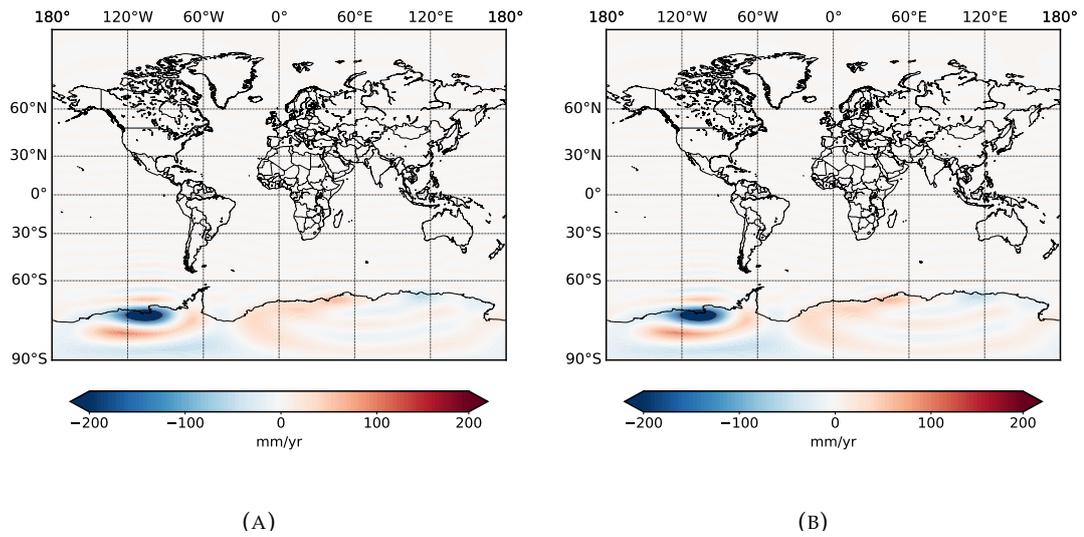


Figure 4.19: (a) Carte des taux de variation d'épaisseur de calotte reconstruit jusqu'au degré 40, (b) Carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.

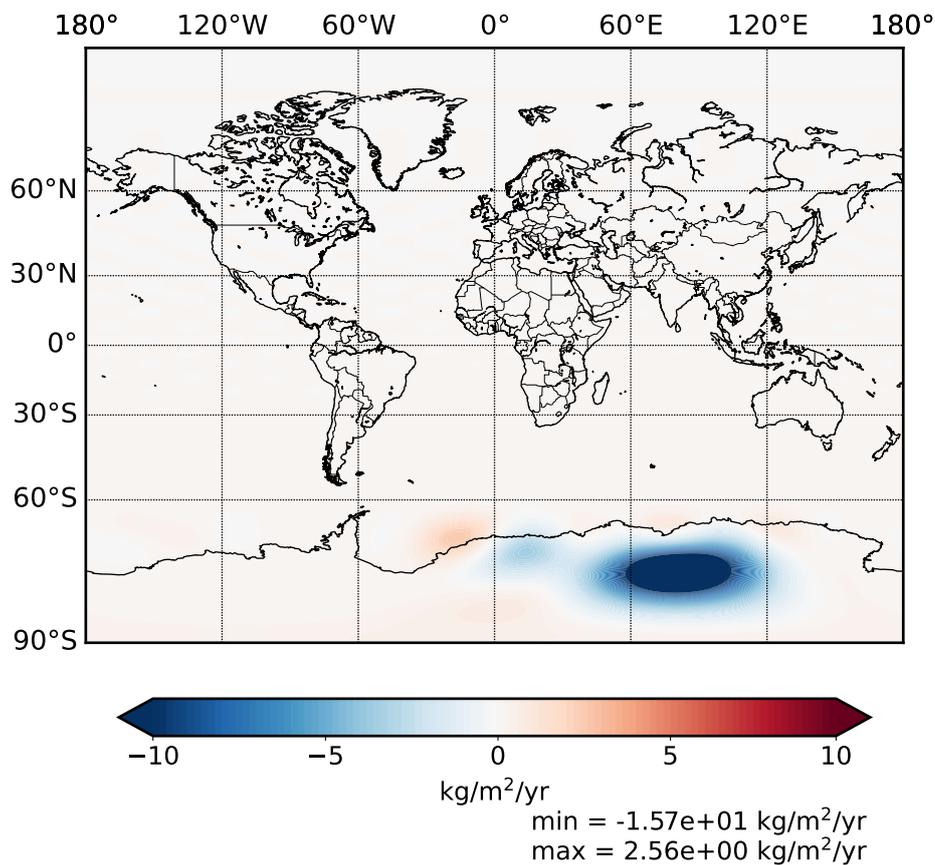
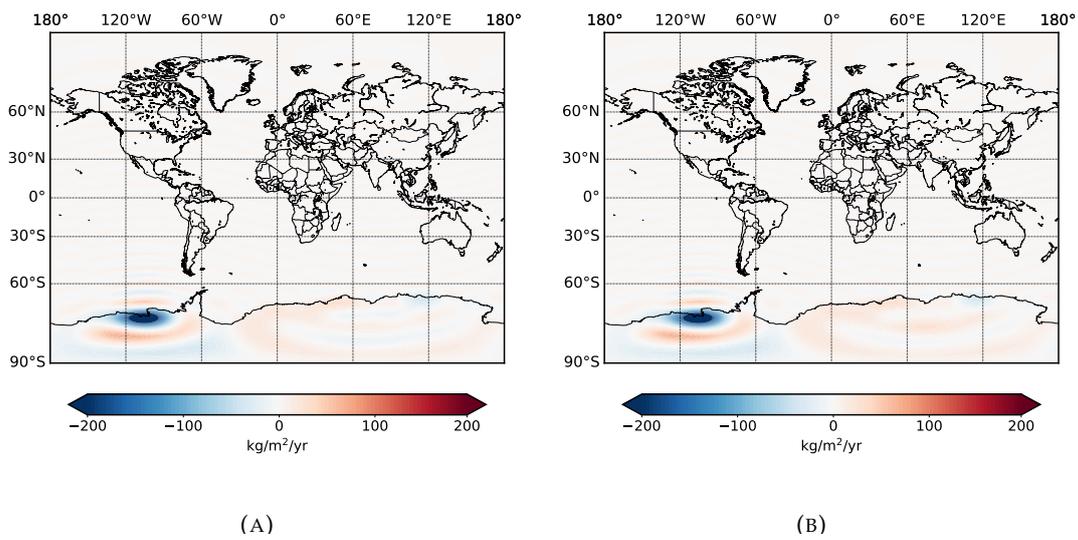


Figure 4.20: (a) Carte des densité superficielle des masses variant, reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des densité superficielle des masses variant inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.

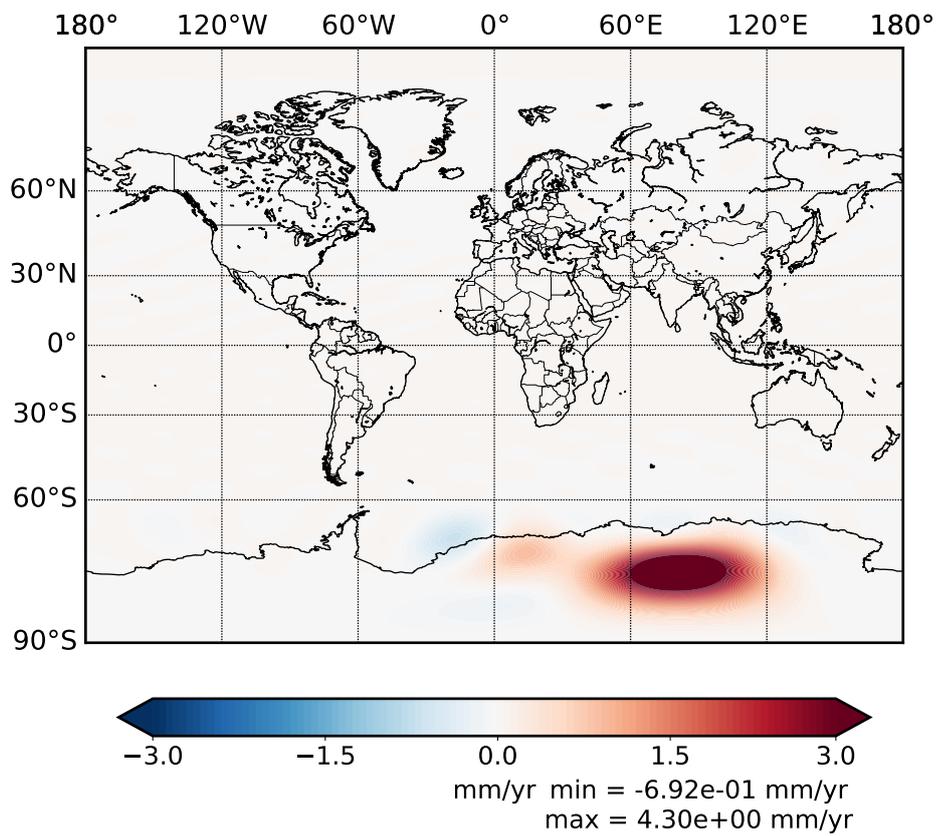
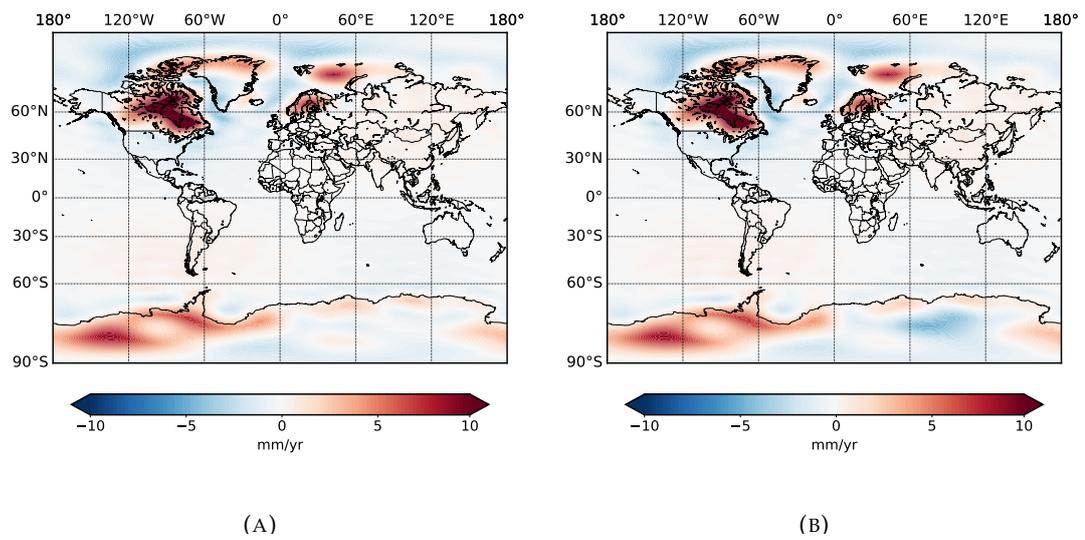


Figure 4.21: (a) Carte des vitesses verticales visqueuses reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des vitesses verticales visqueuses inversée jusqu'au degré 40, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.

## 4.4.5 Discussion des résultats

### 4.4.5.1 À propos des résultats de l'inversion

Dans l'ensemble les résultats de l'inversion sont très proches des résultats attendus. Les erreurs obtenues dans la reconstruction des données et les CDHS sont en très grande partie inférieures à 1%. Les écarts dans les cartes reconstruites sont inférieurs à 3% pour les taux de variation d'épaisseur et de masse de surface. Les écarts relatifs sont plus importants pour les taux de déplacements verticaux, de l'ordre de 20%. Ces écarts sont localisés sur l'est de l'Antarctique, où nous disposons de très peu de stations. Le problème du manque de stations et leurs inégale distribution sur Terre est aussi évoqué dans les travaux de Vishwakarma et al. (2023). Cependant leur travaux consistent en l'inversion d'un modèle de GIA global en utilisant un maximum de stations GNSS disponibles. Ici nous n'utilisons que les observations disponibles en Antarctique, ce qui limite fortement le nombre de stations utilisables. Pour vérifier la source des erreurs que nous trouvons dans les cartes obtenues par inversion nous ajoutons 4 stations GNSS fictives, localisées sur le plateau Antarctique Est, toutes sur la latitude  $-82^\circ$  et aux longitudes  $30^\circ\text{E}$ ,  $60^\circ\text{E}$ ,  $90^\circ\text{E}$  et  $120^\circ\text{E}$ . Les cartes résultant de cette inversion sont montrées dans les figures 4.23, 4.24 et 4.25. Les écarts des cartes obtenues sont fortement réduits par rapport à ceux des cartes sans stations supplémentaires, inférieurs à 0,1 % pour chacun des paramètres.

Nous retrouvons aussi cette réduction d'erreur dans les CDHS inversés comme le montrent les figures 4.26, 4.27 et 4.28. Les erreurs sur les coefficients de bas ordres ( $< 10$ ) que nous avons pour l'ensemble des paramètres sont maintenant fortement réduites. Nous retrouvons encore pour les paramètres  $c$  et  $s$  les fortes erreurs relatives sur les coefficients des plus hauts degrés et ordres, mais l'explication reste la même que précédemment.

Pour illustrer l'impact de l'ajout des stations fictives nous montrons la variance des CDHS en fonction du degré harmonique pour chaque paramètre dans la figure 4.22, définie par la relation

$$V_n^X = \sum_{i=0}^n \left( (C_{ni}^X)^2 + (S_{ni}^X)^2 \right) \quad (4.30)$$

où  $X$  est une des trois variances que nous comparons: la variance des coefficients attendus notée *Att*, celle des coefficients inversés de la section 4.4 notée *Inv* et celle des coefficients inversés avec les stations supplémentaires, notée *Inv+* (voir figure 4.22). En comparant la variance de référence à celle obtenue pour l'inversion de la section 4.4, nous observons deux comportements différents. Les variances des paramètres  $c$  sont très proches des valeurs attendues, mais nous pouvons noter de petits écarts pour les degrés entre 13 et 19. Pour les paramètres  $s$  nous obtenons des écarts dans la variance significatifs pour les degrés tels que  $n \in [1, 9]$ ,  $n \in [12, 19]$  et  $n \in [25, 31]$ . Les variances des autres degrés sont très proches de la valeur attendue. Pour la variance des coefficients  $v$  le résultat est différent. Les variances obtenues pour tous les degrés inférieurs à 23 ont des écarts notables aux valeurs de références, mais celles des degrés plus hauts sont très proches du résultat attendu. Les écarts que nous obtenons dans la variance reflètent les résultats que nous obtenons dans la section 4.4. En revanche, les variances des trois paramètres que nous obtenons pour l'inversion réalisée avec les 4 stations fictives sont toutes très proches des valeurs attendues. Cette correction dans la variance se reflète aussi dans les erreurs relatives des CDHS montrées dans les figures 4.26, 4.27 et 4.28, notamment pour les coefficients des ordres inférieurs à 10. En comparant les spectres obtenus par inversion

au spectre de référence, nous pouvons voir l'impact de l'ajout des stations fictives. Pour conclure, nous parvenons donc à expliquer les écarts obtenus. Ce résultat illustre l'importance de la distribution spatiale des observations pour notre inversion.

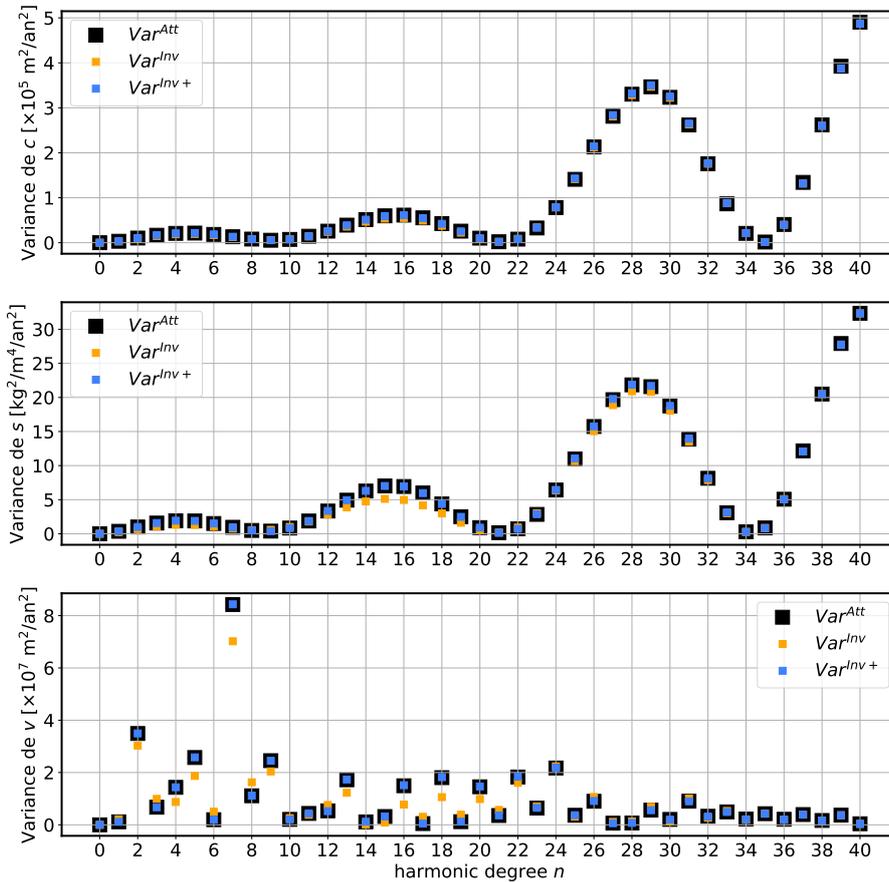


Figure 4.22: Variances par degré harmoniques des CDHS pour le modèle réaliste, en noir le spectre attendu, en bleu le spectre obtenu pour l'inversion et en orange le spectre obtenu pour l'inversion comprenant les 4 stations fictives supplémentaires.

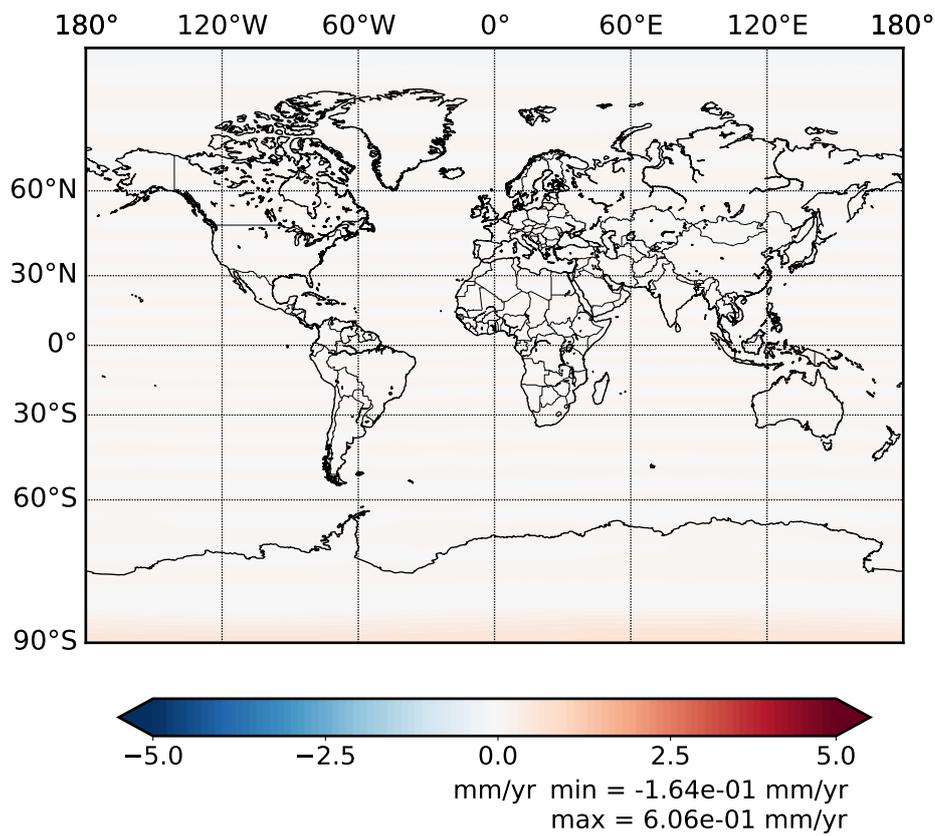
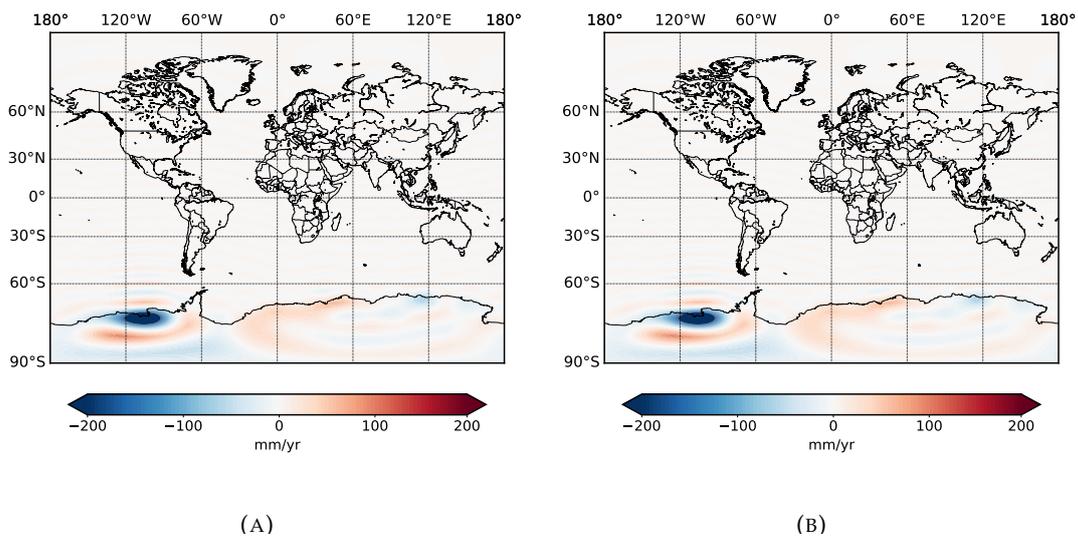


Figure 4.23: (a) Carte des taux de variation d'épaisseur de calotte glaciaire reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire inversée jusqu'au degré 40 avec les stations supplémentaires, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.

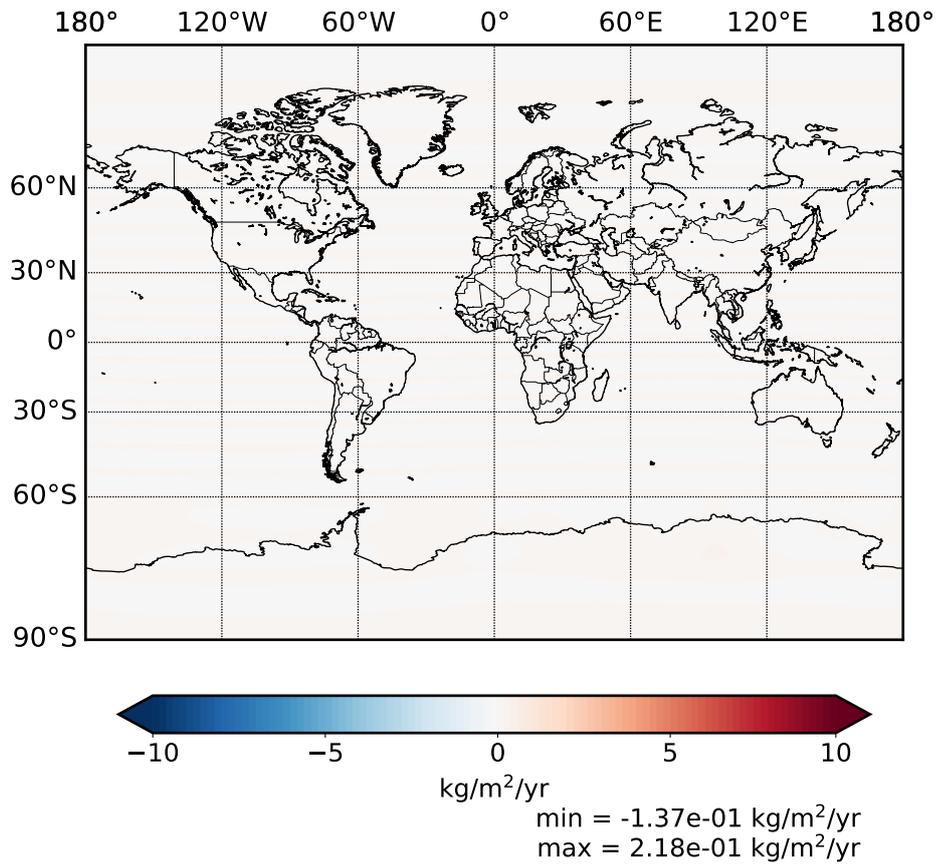
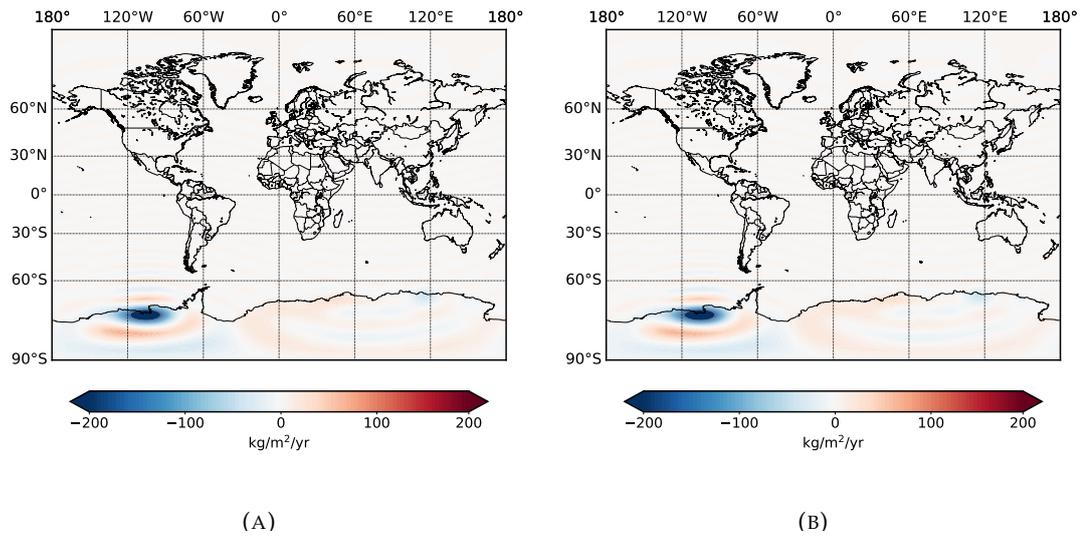
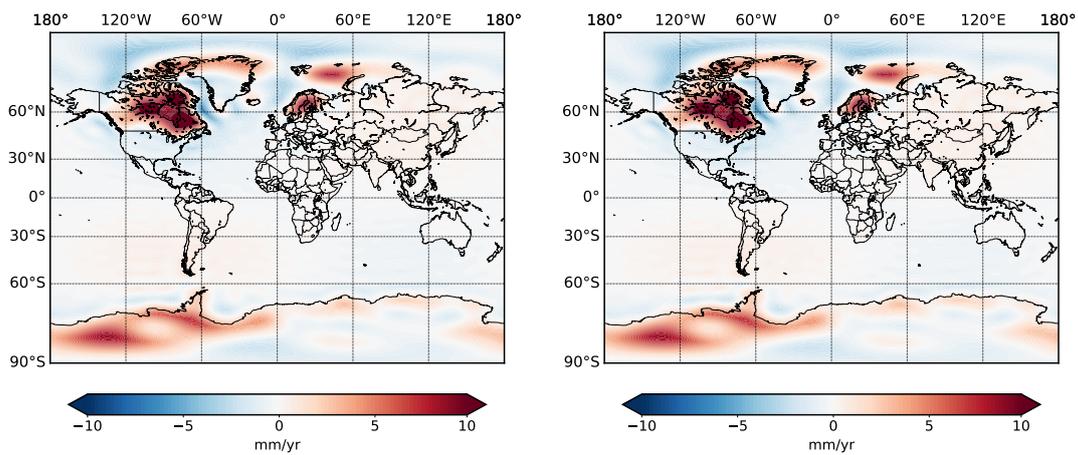
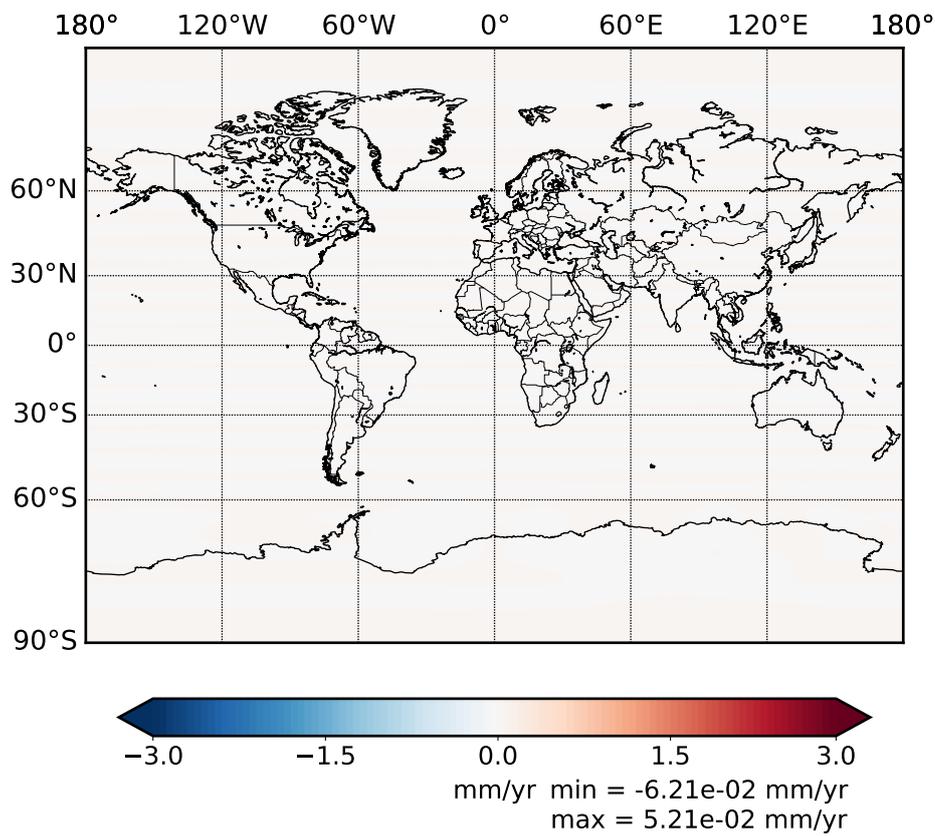


Figure 4.24: (a) Carte des densité superficielle des masses variant reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des densité superficielle des masses variant inversée jusqu'au degré 40 avec les stations supplémentaires, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.



(A)

(B)



(C)

Figure 4.25: (a) Carte des vitesses verticales visqueuses reconstruite jusqu'au degré 40, (b) Carte des vitesses verticales visqueuses inversée jusqu'au degré 40 avec les stations supplémentaires, et (c) Carte des différences entre les taux attendus et inversés.

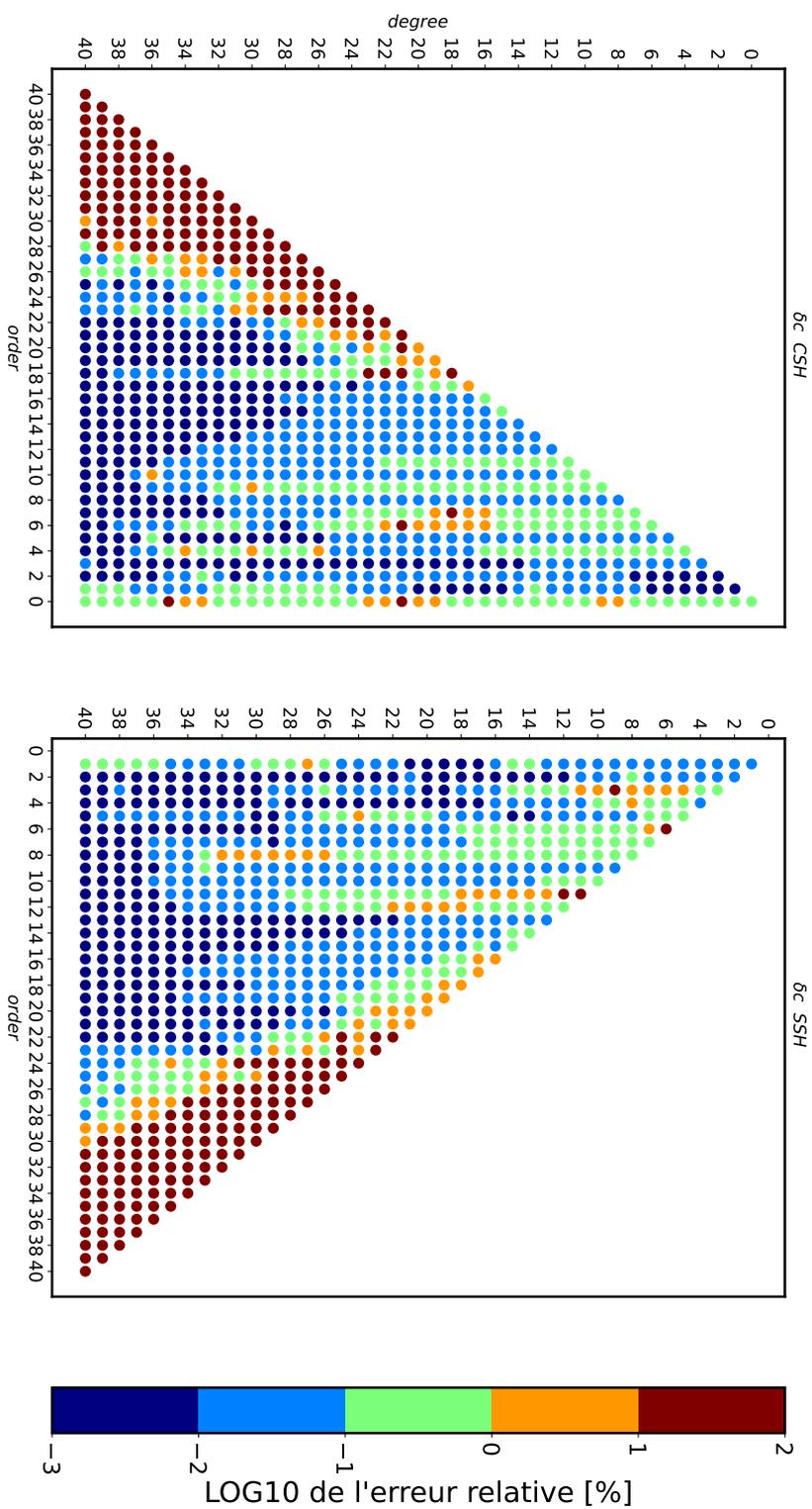


Figure 4.26: Erreurs relatives des CDHS des taux de variation d'épaisseur de calotte Antarctique reconstruite au degré 40 en ajoutant 4 stations fictives sur le plateau est Antarctique.

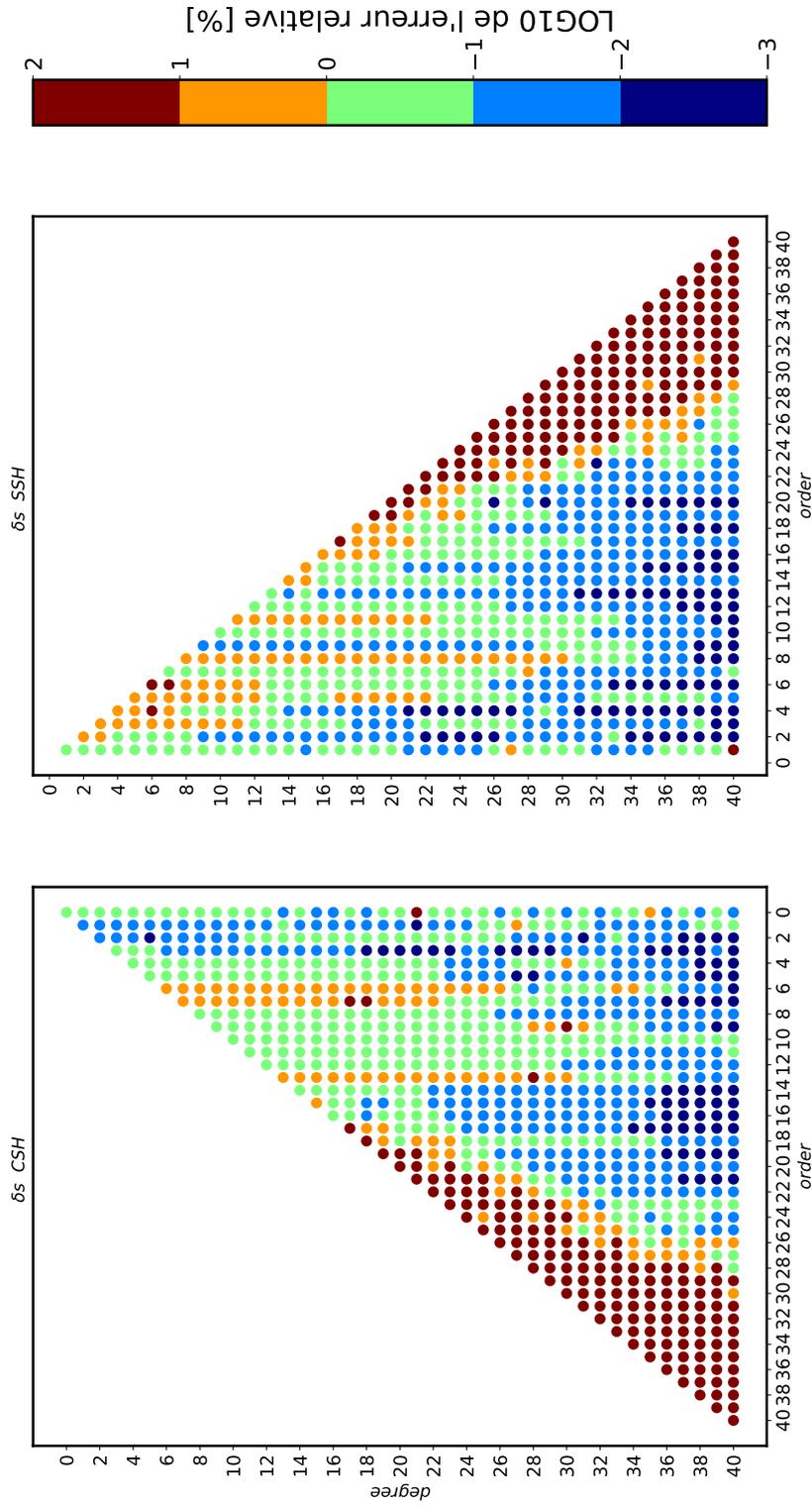


Figure 4.27: Erreurs relatives des CDHS des taux de variations de masse surfacique pour la calotte Antarctique reconstruite au degré 40 en ajoutant 4 stations fictives sur le plateau est Antarctique.

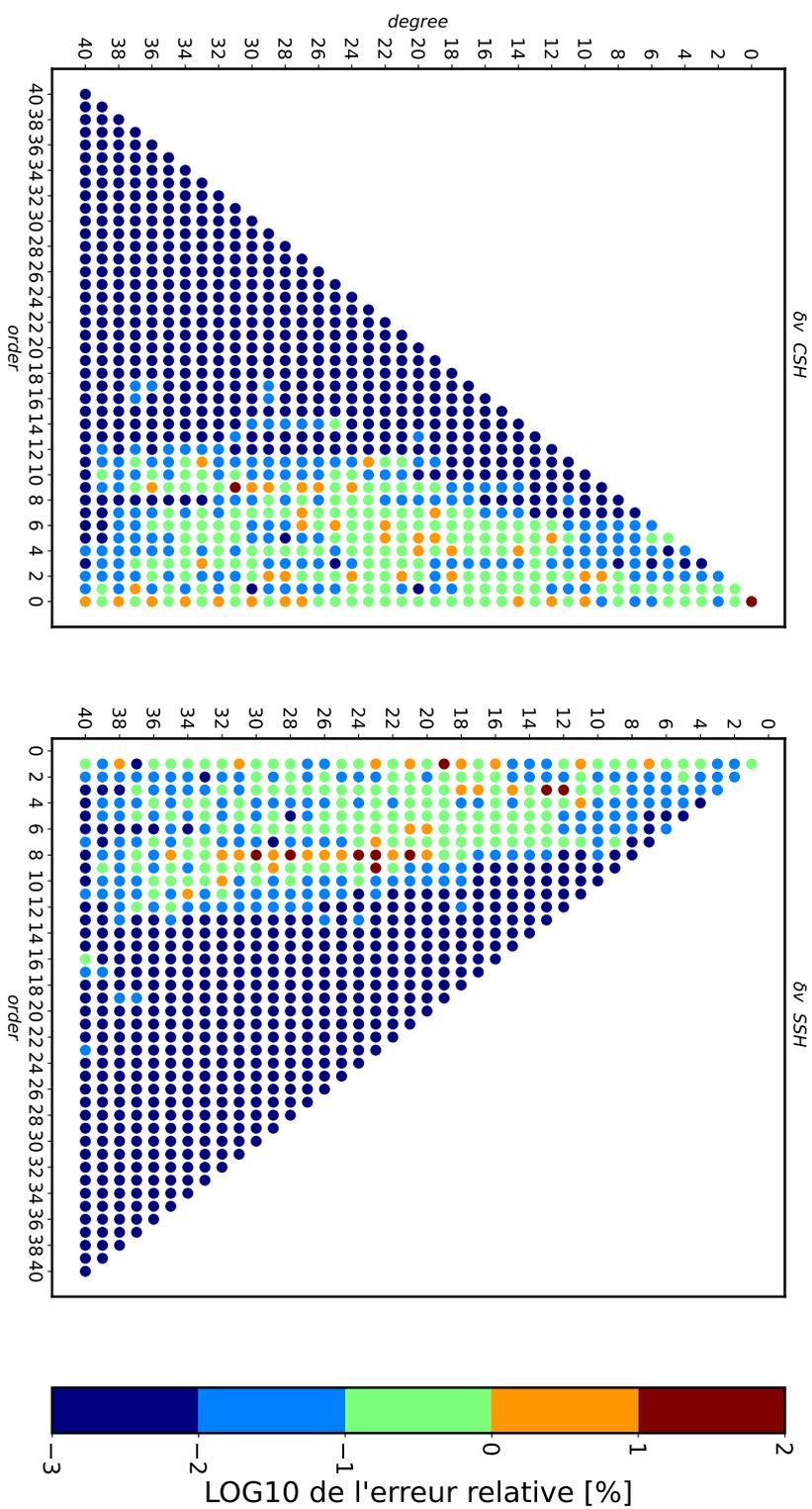


Figure 4.28: Erreurs relatives des CDHS des taux de déplacement vertical de la surface reconstruite au degré 40 au degré 40 en ajoutant 4 stations fictives sur le plateau est Antarctique.

#### 4.4.5.2 À propos des incertitudes des paramètres inversés

Pour avoir les incertitudes des paramètres inversés, il nous faut les incertitudes de chaque jeu de données. Ici nous supposons que les matrices de covariances des observations du modèle réaliste sont des matrices identités. Nous n'avons donc pas les incertitudes des paramètres inversés. Étant donné que nous générons notre propre jeu de donnée, nous pouvons définir arbitrairement les incertitudes. Pour l'application aux données réelles, l'ajout des incertitudes est plus compliqué. Les incertitudes sont disponibles pour les tendances GNSS et les données d'altimétrie satellite grâce aux travaux de Schröder et al. (2019) mais pas pour les données GRACE. Un problème similaire est soulevé dans les travaux de Willen et al. (2022). Dans le cas de l'application aux données, il sera nécessaire d'avoir les incertitudes des observations pour obtenir les incertitudes des coefficients.

#### 4.4.5.3 À propos des hypothèses de la méthode d'inversion

Nous avons montré que notre méthode permet d'inverser les CDHS pour des cartes de taux de variation d'épaisseur de calotte glaciaire, de variation densité de masse superficielle et de vitesses verticales visqueuses. Pour réaliser cette inversion, une hypothèse est utilisée : la relation entre les taux de déplacements verticaux visqueux et les variations de gravité. Nous supposons que les variations de gravité liées à l'ajustement isostatique visqueux peuvent être exprimées à l'aide du rapport  $\dot{g}/\dot{u}$  que l'on suppose constant tel que  $f = 0.15 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ . Cette hypothèse nous permet d'obtenir un système linéaire que l'on résout ici avec la méthode des moindres carrés linéaires. Cependant, la valeur du rapport  $\dot{g}/\dot{u}$  estimée à  $-0.150 \pm 0.03 \mu\text{Gal}/\text{mm}$  (e.g. Wahr et al., 1995; Mazzotti et al., 2011; Sato et al., 2012; Olsson et al., 2019) est obtenue pour des temps longs après les variations de masse, de l'ordre de 10 000 ans. Le gradient gravimétrique estimé dans les travaux de Sato et al. (2012) et Olsson et al. (2019) est de  $-0,170 \mu\text{Gal}/\text{mm}$  pour les courtes échelles de temps post variations de masse, et converge vers  $-0.150 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ . Cette variation au cours du temps s'explique par les déplacements de la surface ainsi que les remaniements progressifs des roches mantelliques. Pour les observations de gravimétrie GRACE seuls les remaniements mantelliques auront un impact sur le gradient gravimétrique. Dans le chapitre 3 nous montrons que même pour les échelles de temps très courtes (inférieures à une décennie) les déplacements visqueux liés aux variations de masse actuelles ont en théorie un impact mesurable. Pour les régions sujettes aux variations de masses actuelles, le gradient gravimétrique devrait donc varier au cours du temps. Une solution pour s'affranchir de cette hypothèse serait d'inclure le rapport dans les paramètres inversés. Inclure ce paramètre ne nous permettra plus d'utiliser les moindres carrés linéaires pour résoudre le système, car il deviendra non linéaire.

## 4.5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre nous proposons une méthode d'inversion du GIA en Antarctique basées sur les observations disponibles en Antarctique. Nous utilisons les relations entre ces observations pour définir un système permettant l'inversion d'une carte des taux de variations d'épaisseur de calotte glaciaire, de variations de masse surfacique et de déplacements verticaux visqueux. Nous utilisons la méthode des moindres carrés linéaires pour résoudre notre système et inverser les CDHS des trois cartes. Nous vérifions la validité de notre méthode à l'aide d'un modèle analytique qui comprend une calotte polaire suivant une distribution zonale et centrée au pôle

sud. Nous appliquons ensuite notre méthode à un modèle réaliste pour la distribution de variation de masse et des déplacements visqueux. Nous obtenons une très bonne reproduction des données avec l'inversion, ainsi que des cartes de variations de masse et d'épaisseur de calotte, avec des écarts inférieurs à 3%. Nous retrouvons des différences plus importantes pour la carte des déplacements visqueux, jusqu'à 20% des taux maximums. Les CDHS inversés sont en majorité très proches de ceux attendus, avec des erreurs relatives inférieures à 1%. Certains coefficients présentent des erreurs beaucoup plus importantes, mais ces coefficients ont des valeurs très petites comparés aux autres, plusieurs ordres de magnitudes en comparaison. Nous montrons donc que notre méthode d'inversion de modèle de GIA pour la région Antarctique est valide.

La première perspective quant à la poursuite des travaux de ce chapitre est l'application de cette méthode aux observations réelles. Ici nous éprouvons notre méthode dans un cadre où nous contrôlons les données synthétiques et les coefficients des décompositions en harmoniques sphériques que nous cherchons à retrouver. Il sera intéressant d'appliquer notre méthode sur les données GNSS, GRACE et d'altimétrie satellite, et d'employer divers modèles directs de GIA pour vérifier leur impact sur l'inversion. De par la nature de l'inversion, l'effet de l'aliasing lié à la troncature des degrés harmoniques devra être testé. Une autre piste de perspective est l'utilisation de nombres de Love de charge élastiques calculés pour des modèles de Terre comprenant une hétérogénéité latérale, et comparer les déformations élastiques obtenues. Enfin l'ajout de la valeur du gradient gravimétrique aux paramètres inversés permettrait de s'affranchir d'une des hypothèses majeures pour notre inversion.

## Chapitre 5

# Conclusions

Au cours de cette thèse nous nous sommes intéressés aux déplacements visqueux de la surface en Antarctique, dus aux variations de masses actuelles et passées. Dans un premier temps nous avons établi notre méthode pour modéliser les déplacements verticaux et variations de gravité suivant les variations de masse sur une Terre dont les paramètres rhéologiques varient. Puis nous avons étudié l'impact sur la modélisation des déplacements et variations de gravité des trois rhéologies viscoélastiques de Maxwell, Andrade et Burgers ainsi que de deux profils de viscosité: un profil classiquement utilisé pour les modèles direct de GIA et un second comprenant une couche de plus faible viscosité dans le manteau supérieur. Nous avons utilisé le code ALMA<sup>3</sup> (Melini et al., 2022) pour calculer les LLNs des trois rhéologies viscoélastiques, puis le code TABOO (Spada, 2003) pour calculer les déformations résultant du GIA. Nous avons considéré pour cela le modèle de déglaciation Pléistocène ICE6G\_C (Peltier et al., 2015) et un modèle de variations de masse actuelles basé sur les observations d'altimétrie satellite (Schröder et al., 2019). Enfin pour s'affranchir des hypothèses sur les paramètres rhéologiques terrestres encore mal contraints, nous établissons une méthode pour estimer les vitesses verticales visqueuses de la surface Antarctique, basée sur des observations d'altimétrie, de gravimétrie satellitaire et de positionnement GNSS. Nous avons utilisé la méthode des moindres carrés pour inverser les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques des cartes du taux des variations d'épaisseur de calotte et celui des variations des densités superficielles de masse ainsi que la carte des vitesses verticales visqueuses. Deux conclusions majeures sont obtenus des résultats de la thèse.

### 5.1 Sur l'impact des rhéologies et des profils de viscosité

L'impact le plus important sur les paramètres géodésiques induits par la GIA est dû à la couche de faible viscosité dans le manteau supérieur. Cette couche augmente le déplacement total causé par la déglaciation du Pléistocène de plusieurs mètres et ceux des variations de masses actuelles de plusieurs dizaines de centimètres, et peut conduire à des taux géodésiques plus de cinq fois plus importants. En outre, le contraste de viscosité de trois ordres de grandeur dans le manteau supérieur amplifie les divergences dans les réponses visqueuses entre les échelles de temps annuelles et centennales.

Nous avons également montré que, par rapport à ce que la rhéologie de Maxwell induit, les rhéologies de Burgers et d'Andrade conduisent à une différence significative dans la modélisation des déformations du GIA, pouvant aller jusqu'à 10 m au cours des premiers siècles suivant les changements de masse de glace. Les écarts dans les réponses entre les trois rhéologies, notables dans les LLNs et les déformations, sont principalement retrouvées pour les longueurs d'onde supérieures à 200 km, soit des degrés harmoniques inférieurs à 200. L'ajout de la couche de faible

viscosité dans le manteau supérieur augmente les taux de déplacement et de variation de la gravité des rhéologies Burgers et d'Andrade, jusqu'à 41 et 31 % respectivement, pour les échelles de temps de l'ordre du siècle après les variations de masses. Le fait d'invoquer une couche de faible viscosité dans le manteau supérieur, mais aussi d'utiliser les rhéologies de Burgers et d'Andrade, pourrait permettre de réduire les écarts aux observations en Antarctique. Comme plusieurs autres études ont montré que la viscosité du manteau supérieur est susceptible de dépendre du temps, l'utilisation d'une rhéologie transitoire qui inclut une réponse visqueuse à court terme de la Terre devrait améliorer la modélisation de la GIA en unifiant au sein d'une même loi rhéologique les effets induits par les changements passés et présents de la masse de glace. Ces résultats illustrent bien les incertitudes encore présentes quant à la modélisation du GIA en Antarctique, et motivent les travaux du chapitre 4 sur le développement d'une méthode inverse.

## 5.2 Sur l'inversion des vitesses verticales visqueuses

Les relations entre les observations d'altimétrie et de gravimétrie satellitaire ainsi que le positionnement GNSS, nous permettent de définir un système dont l'inversion fournit les cartes des taux de variations d'épaisseur de la calotte glaciaire, de variations de densité superficielle de masse et de déplacements verticaux visqueux en Antarctique. Nous utilisons la méthode des moindres carrés linéaires pour résoudre notre système et inverser les coefficients des décompositions en harmoniques sphériques des trois cartes, jusqu'au degré harmonique 40. Nous vérifions la validité de notre méthode à l'aide de deux modèles : un modèle analytique comprenant une calotte glaciaire centrée au pôle sud et un modèle réaliste basé sur la distribution de variation de masse issue des observations d'altimétrie et des déplacements visqueux issus d'un modèle direct de GIA (ICE6G\_C). Nous obtenons dans les deux cas une très bonne reproduction des données avec l'inversion, ainsi que des cartes de variations de masse et d'épaisseur de calotte, avec des écarts majoritairement inférieurs à 3%. Les résultats du modèle réaliste montrent l'importance de la distribution spatiale des observations GNSS. Le manque de ce type d'observations sur la partie Est de l'Antarctique se révèle être une source d'erreurs pour les cartes inversées, pouvant atteindre 20% des taux maximums pour les déplacements visqueux. Les coefficients des décompositions en harmoniques sphériques inversés sont en majorité très proches de ceux attendus, avec des erreurs relatives inférieurs à 1%. Certains coefficients présentent des erreurs beaucoup plus importantes, mais ces coefficients ont des valeurs très petites comparés aux autres, plusieurs ordres de magnitude en comparaison. Nous montrons ainsi que notre méthode d'inversion de modèle de GIA pour la région Antarctique est valide.

## 5.3 Perspectives

Plusieurs perspectives quant à la poursuite de cette étude sont possibles. La première et plus évidente est l'application de cette méthode aux observations réelles. Ici nous éprouvons notre méthode sur un jeu de données synthétiques, où nous connaissons les coefficients des décompositions en harmoniques sphériques que nous cherchons à retrouver. Au court de la thèse nous avons développé notre approche par combinaison d'observations et l'avons validé dans deux cas de figure. Il sera intéressant d'appliquer notre méthode sur les données GNSS, GRACE et d'altimétrie satellite, et de comparer les résultats à divers modèles directs de GIA [e.g. ICE6G\_C,

Peltier et al. (2015), RATES Martín-Español et al. (2016b), CARON Caron et al. (2018)]. Une question qui se posera lors de l'application de l'inversion aux données réelles sera l'effet de l'aliasing lié à la troncature des degrés harmoniques que nous effectuerons.

Deuxièmement, un travail sur les hypothèses formulées pour l'inversion pourra être fait. Dans le chapitre 4, nous supposons que les composantes élastiques des déplacements et variations de gravité sont estimables à l'aide des nombres de Love de charges élastiques. Ces nombres de Love sont obtenus en supposant le modèle de Terre PREM à symétrie sphérique et incompressible, supposant une lithosphère de 100 km d'épaisseur. Plusieurs études montrent des hétérogénéités latérales sous l'Antarctique. Les travaux de Ritzwoller et al. (2001) et Morelli and Danesi (2004) sur la tomographie sismique suggèrent un fort contraste d'épaisseur de lithosphère élastique entre l'Antarctique ouest et est, de l'ordre de 100 km et 200 km respectivement. Les travaux plus récents de Wal et al. (2015) utilisant la tomographie sismique et An et al. (2015) sur les vitesses d'ondes sismiques suggèrent des écarts similaires dans les épaisseurs de lithosphère entre l'est et l'ouest de l'Antarctique. Plusieurs études récentes utilisent des observations géodésiques telles que les données GRACE (Chen et al., 2018; Pappa et al., 2019) pour déterminer les paramètres physiques de la région Antarctique. Les travaux de Chen et al. (2018) utilisent une combinaison d'observations de gravimétrie satellite GRACE et de modèles de topographie et d'épaisseur de glace pour déterminer l'épaisseur élastique effective de la lithosphère Antarctique. Ils retrouvent les grands écarts entre les différentes régions. Les travaux de Pappa et al. (2019) emploient aussi les données satellites GRACE ainsi que des observations sismologiques et des modèles pétrologiques pour déterminer les températures, densité et viscosité de la lithosphère Antarctique. Les épaisseurs estimées sont similaires à celles obtenues dans les études précédentes, de l'ordre de 100 km pour l'Antarctique ouest et 200 km pour l'Antarctique Est.

Comme nous le mentionnons dans le chapitre 4, les changements latéraux dans la structure mécanique de la Terre peuvent affecter les prévisions des déplacements de la surface, le bilan de masse obtenu à partir de la gravimétrie satellite et l'évolution du niveau eustatique (Wal et al., 2015; Powell et al., 2020; Powell et al., 2021). Une avenue possible pour s'affranchir de l'hypothèse de la symétrie sphérique serait l'emploi de modèles de Terre 3D pour le calcul des nombres de Love de charge. Il existe aujourd'hui plusieurs logiciels comme CitcomSVE (Zhong et al., 2022; Fienga et al., 2023; Fienga et al., 2024) qui permet de calculer les nombres de Love de charges viscoélastiques pour des corps ayant des variations latérales de structures, dont la validité a été vérifiée avec le logiciel semi-analytique ALMA<sup>3</sup> (Melini et al., 2022). Ces nombres de Love obtenus en supposant un modèle de Terre reflétant les hétérogénéités latérales de la région Antarctique pourraient nous permettre de s'affranchir l'hypothèse de la symétrie sphérique.

De plus, les variations latérales dans la structure de l'Antarctique auront un impact sur l'estimation du gradient gravimétrique, qui est un élément constitutif de notre stratégie d'inversion. Dans le chapitre 4 nous avons supposé que le gradient gravimétrique est constant à  $0,15 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ . Des incertitudes restent quant au gradient gravimétrique, notamment lié aux incertitudes sur la structure interne de la Terre et aux déplacements visqueux liés aux variations de masse actuelles. Une perspective d'amélioration de l'inversion sera la modification de la méthode d'inversion pour inclure le gradient gravimétrique aux paramètres inversés.

Enfin, après réalisation de l'inversion sur les données réelles, une piste de poursuite des travaux sera l'inversion d'un modèle de Terre et de rhéologie permettant la meilleure explication des observations en Antarctique. Un exemple similaire

d'inversion des paramètres de planètes est montré dans les travaux de Briaud et al. (2023) sur la structure interne de la Lune. Cette étude réalise une inversion de la structure interne de la Lune utilisant les méthodes statistiques et les nombres de Love calculés avec ALMA<sup>3</sup>. Une approche similaire utilisant TABOO pour le calcul des déplacements et variations de gravité pourrait être réalisée.

# Bibliographie

- A, Geruo, John Wahr, and Shijie Zhong (Nov. 2013). “Computations of the viscoelastic response of a 3-D compressible Earth to surface loading: an application to Glacial Isostatic Adjustment in Antarctica and Canada”. In: *Geophysical Journal International* 192.2, pp. 557–572. ISSN: 0956-540X. DOI: [10.1093/gji/ggs030](https://doi.org/10.1093/gji/ggs030).
- Adhikari, S., G. A. Milne, L. Caron, S. A. Khan, K. K. Kjeldsen, J. Nilsson, E. Larour, and E. R. Ivins (Oct. 2021). “Decadal to Centennial Timescale Mantle Viscosity Inferred From Modern Crustal Uplift Rates in Greenland”. In: *Geophysical Research Letters* 48.19. DOI: [10.1029/2021gl1094040](https://doi.org/10.1029/2021gl1094040).
- Alterman, Zipora, Hans Jarosch, and Chaim L Pekeris (1959). “Oscillations of the Earth”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 252.1268, pp. 80–95.
- An, Meijian, Douglas A Wiens, Yue Zhao, Mei Feng, Andrew Nyblade, Masaki Kanao, Yuansheng Li, Alessia Maggi, and Jean-Jacques L ev eque (2015). “Temperature, lithosphere-asthenosphere boundary, and heat flux beneath the Antarctic Plate inferred from seismic velocities”. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 120.12, pp. 8720–8742.
- Andrade, Edward Neville Da Costa (1910). “On the viscous flow in metals, and allied phenomena”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 84.567, pp. 1–12.
- Argus, Donald F., W. R. Peltier, R. Drummond, and Angelyn W. Moore (May 2014). “The Antarctica component of postglacial rebound model ICE-6G\_C (VM5a) based on GPS positioning, exposure age dating of ice thicknesses, and relative sea level histories”. In: *Geophysical Journal International* 198.1, pp. 537–563. ISSN: 0956-540X. DOI: [10.1093/gji/ggu140](https://doi.org/10.1093/gji/ggu140).
- Barletta, Valentina R, Michael Bevis, Benjamin E Smith, Terry Wilson, Abel Brown, Andrea Bordonni, Michael Willis, Shfaqat Abbas Khan, Marc Rovira-Navarro, Ian Dalziel, et al. (2018). “Observed rapid bedrock uplift in Amundsen Sea Embayment promotes ice-sheet stability”. In: *Science* 360.6395, pp. 1335–1339. DOI: [10.1126/science.aao1447](https://doi.org/10.1126/science.aao1447).
- Barletta, Valentina R, Andrea Bordonni, and Shfaqat Abbas Khan (2024). “GNET derived mass balance and glacial isostatic adjustment constraints for Greenland”. In: *Geophysical Research Letters* 51.9, e2023GL106891.
- Boughanemi, Alexandre and Anthony M emin (2024). “Effects of Andrade and Burgers rheologies on glacial isostatic adjustment modeling in Antarctica”. In: *Geodesy and Geodynamics*.

- Briaud, Arthur, Clément Ganino, Agnès Fienga, Anthony Mémin, and Nicolas Rambaux (2023). "The lunar solid inner core and the mantle overturn". In: *Nature* 617.7962, pp. 743–746.
- Caron, L, ER Ivins, E Larour, S Adhikari, J Nilsson, and G Blewitt (2018). "GIA model statistics for GRACE hydrology, cryosphere, and ocean science". In: *Geophysical Research Letters* 45.5, pp. 2203–2212.
- Castillo-Rogez, Julie C, Michael Efroimsky, and Valéry Lainey (2011). "The tidal history of Iapetus: Spin dynamics in the light of a refined dissipation model". In: *Journal of Geophysical Research: Planets* 116.E9. DOI: <https://doi.org/10.1029/2010JE003664>.
- Cathles, LM (1971). "Lower mantle viscosity inferred from post glacial adjustment of the ocean basin and Canada". In: *Trans. Am Geophys. Union*. Vol. 52. 4, p. 353.
- Challis, Lawrie (2003). "The green of green functions". In: *Physics Today* 56.12, pp. 41–46.
- Chen, Bo, Carina Haeger, Mikhail K Kaban, and Alexey G Petrunin (2018). "Variations of the effective elastic thickness reveal tectonic fragmentation of the Antarctic lithosphere". In: *Tectonophysics* 746, pp. 412–424.
- Chen, JL, CR Wilson, D Blankenship, and BD Tapley (2009). "Accelerated Antarctic ice loss from satellite gravity measurements". In: *Nature Geoscience* 2.12, pp. 859–862.
- Clark, James A (1980). "The reconstruction of the Laurentide Ice Sheet of North America from sea level data: Method and preliminary results". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 85.B8, pp. 4307–4323. DOI: <https://doi.org/10.1029/JB085iB08p04307>.
- Clark, James A, William E Farrell, and W Richard Peltier (1978). "Global Changes in Postglacial Sea Level: A Numerical Calculation1". In: *Quaternary research* 9.3, pp. 265–287. DOI: [https://doi.org/10.1016/0033-5894\(78\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0033-5894(78)90033-9).
- Csatho, Beata M, Anton F Schenk, Cornelis J Van Der Veen, Gregory Babonis, Kyle Duncan, Soroush Rezvanbehbahani, Michiel R Van Den Broeke, Sebastian B Simonsen, Sudhagar Nagarajan, and Jan H Van Angelen (2014). "Laser altimetry reveals complex pattern of Greenland Ice Sheet dynamics". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 111.52, pp. 18478–18483.
- Dziewonski, Adam M. and Don L. Anderson (June 1981). "Preliminary reference Earth model". In: *Physics of the earth and planetary interiors* 25.4, pp. 297–356. DOI: [10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7).
- Efroimsky, Michael (2012). "Tidal dissipation compared to seismic dissipation: In small bodies, Earths, and super-Earths". In: *The Astrophysical Journal* 746.2, p. 150. DOI: [10.1088/0004-637X/746/2/150](https://doi.org/10.1088/0004-637X/746/2/150).
- Farrell, W. E. (1972). "Deformation of the Earth by surface loads". In: *Reviews of Geophysics* 10.3, p. 761. DOI: [10.1029/rg010i003p00761](https://doi.org/10.1029/rg010i003p00761).

- Faul, Ulrich and Ian Jackson (2015). "Transient creep and strain energy dissipation: An experimental perspective". In: *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 43, pp. 541–569. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-earth-060313-054732>.
- Fienga, Agnes, Arthur Briaud, Shijie Zhong, and Anthony Mémin (2023). "Comparisons between tidal deformation modeling from the semi-analytical ALMA3 and the finite element CitcomSVE". In: *AGU Fall Meeting Abstracts*. Vol. 2023. 24, DI33A–0024.
- Fienga, Agnès, Shijie Zhong, Anthony Mémin, and Arthur Briaud (2024). "Tidal dissipation with 3D finite element deformation code CitcomSVE v2. 1: comparisons with the semi-analytical approach". In.
- Flament, Thomas and Frédérique Rémy (2012). "Dynamic thinning of Antarctic glaciers from along-track repeat radar altimetry". In: *Journal of Glaciology* 58.211, pp. 830–840.
- Gevorgyan, Yeva, Gwenaél Boué, Clodoaldo Ragazzo, Lucas S Ruiz, and Alexandre CM Correia (2020). "Andrade rheology in time-domain. Application to Enceladus' dissipation of energy due to forced libration". In: *Icarus* 343, p. 113610. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.113610>.
- Goetze, C and WF Brace (1972). "Laboratory observations of high-temperature rheology of rocks". In: *Developments in Geotectonics*. Vol. 4. Elsevier, pp. 583–600. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-41015-3.50036-7>.
- Goetze, Christopher (1971). "High temperature rheology of westerly granite". In: *Journal of Geophysical Research* 76.5, pp. 1223–1230. DOI: <https://doi.org/10.1029/JB076i005p01223>.
- Grove, Jean M (2012). *The little ice age*. Routledge.
- Gunter, BC, O Didova, REM Riva, SRM Ligtenberg, JTM Lenaerts, MA King, MR Van den Broeke, and T Urban (2014). "Empirical estimation of present-day Antarctic glacial isostatic adjustment and ice mass change". In: *The Cryosphere* 8.2, pp. 743–760.
- Haskell, N. A. (Aug. 1935). "The Motion of a Viscous Fluid Under a Surface Load". In: *Physics* 6.8, pp. 265–269. DOI: [10.1063/1.1745329](https://doi.org/10.1063/1.1745329).
- Hattori, A., Y. Aoyama, J. Okuno, and K. Doi (July 2021). "GNSS Observations of GIA-Induced Crustal Deformation in Lützow-Holm Bay, East Antarctica". In: *Geophysical Research Letters* 48.13. DOI: [10.1029/2021gl1093479](https://doi.org/10.1029/2021gl1093479).
- Hoechner, Andreas, Stephan V. Sobolev, Indridi Einarsson, and Rongjiang Wang (July 2011). "Investigation on afterslip and steady state and transient rheology based on postseismic deformation and geoid change caused by the Sumatra 2004 earthquake". In: *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 12.7, n/a–n/a. DOI: [10.1029/2010gc003450](https://doi.org/10.1029/2010gc003450).
- Horwath, Martin and Reinhard Dietrich (2009). "Signal and error in mass change inferences from GRACE: the case of Antarctica". In: *Geophysical Journal International* 177.3, pp. 849–864.

- IMBIE (2018). "Mass balance of the Antarctic Ice Sheet from 1992 to 2017". In: *Nature* 558.7709, pp. 219–222. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0179-y>.
- Ivins, ER, L Caron, S Adhikari, E Larour, and M Scheinert (2020). "A linear viscoelasticity for decadal to centennial time scale mantle deformation". In: *Reports on Progress in Physics* 83.10, p. 106801. DOI: [10.1088/1361-6633/aba346](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aba346).
- Ivins, Erik R, Lambert Caron, and Surendra Adhikari (2023). "Anthropocene isostatic adjustment on an anelastic mantle". In: *Journal of Geodesy* 97.10, p. 92. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00190-023-01781-7>.
- Ivins, Erik R, Lambert Caron, Surendra Adhikari, and Eric Larour (2022). "Notes on a compressible extended Burgers model of rheology". In: *Geophysical Journal International* 228.3, pp. 1975–1991. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggab452>.
- Ivins, Erik R, Thomas S James, John Wahr, Ernst J O. Schrama, Felix W Landerer, and Karen M Simon (2013). "Antarctic contribution to sea level rise observed by GRACE with improved GIA correction". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 118.6, pp. 3126–3141. DOI: <https://doi.org/10.1002/jgrb.50208>.
- Jackson, Ian, John D Fitz Gerald, Ulrich H Faul, and Ben H Tan (2002). "Grain-size-sensitive seismic wave attenuation in polycrystalline olivine". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 107.B12, ECV–5. DOI: <https://doi.org/10.1029/2001JB001225>.
- Jin, Shuanggen, Giovanni Occhipinti, and Rui Jin (2015). "GNSS ionospheric seismology: Recent observation evidences and characteristics". In: *Earth-Science Reviews* 147, pp. 54–64.
- Khan, Shfaqat A, Jonathan L Bamber, Eric Rignot, Veit Helm, Andy Aschwanden, David M Holland, Michiel van den Broeke, Michalea King, Brice Noël, Martin Truffer, et al. (2022). "Greenland mass trends from airborne and satellite altimetry during 2011–2020". In: *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* 127.4, e2021JF006505.
- Krabill, W, R Thomas, K Jezek, K Kuivinen, and S Manizade (1995). "Greenland ice sheet thickness changes measured by laser altimetry". In: *Geophysical Research Letters* 22.17, pp. 2341–2344.
- Landerer, Felix W, Frank M Flechtner, Himanshu Save, Frank H Webb, Tamara Bandikova, William I Bertiger, Srinivas V Bettadpur, Sung Hun Byun, Christoph Dahle, Henryk Dobslaw, et al. (2020). "Extending the global mass change data record: GRACE Follow-On instrument and science data performance". In: *Geophysical Research Letters* 47.12, e2020GL088306. DOI: <https://doi.org/10.1029/2020GL088306>.
- Lenaerts, Jan TM, MR Van den Broeke, WJ Van de Berg, E Van Meijgaard, and P Kuipers Munneke (2012). "A new, high-resolution surface mass balance map of Antarctica (1979–2010) based on regional atmospheric climate modeling". In: *Geophysical research letters* 39.4.
- Li, Tanghua, Patrick Wu, Hansheng Wang, Holger Steffen, Nicole S Khan, Simon E Engelhart, Matteo Vacchi, Timothy A Shaw, W Richard Peltier, and Benjamin P Horton (2020). "Uncertainties of glacial isostatic adjustment model predictions

- in North America associated with 3D structure". In: *Geophysical Research Letters* 47.10, e2020GL087944. DOI: <https://doi.org/10.1029/2020GL087944>.
- Ligtenberg, SRM, MM Helsen, and MR Van den Broeke (2011). "An improved semi-empirical model for the densification of Antarctic firn". In: *The Cryosphere* 5.4, pp. 809–819.
- Lin, Yucheng, Fiona D Hibbert, Pippa L Whitehouse, Sarah A Woodroffe, Anthony Purcell, Ian Shennan, and Sarah L Bradley (2021). "A reconciled solution of Meltwater Pulse 1A sources using sea-level fingerprinting". In: *Nature communications* 12.1, p. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-021-21990-y>.
- Longman, I. M. (Feb. 1962). "A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads: 1. Theory". In: *Journal of Geophysical Research* 67.2, pp. 845–850. DOI: [10.1029/jz067i002p00845](https://doi.org/10.1029/jz067i002p00845).
- (Jan. 1963). "A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads: 2. Computations and numerical results". In: *Journal of Geophysical Research* 68.2, pp. 485–496. DOI: [10.1029/jz068i002p00485](https://doi.org/10.1029/jz068i002p00485).
- Love, Augustus Edward Hough (1909). "The yielding of the Earth to disturbing forces". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 82.551, pp. 73–88. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1909.0008>.
- Martín-Español, Alba, Matt A King, Andrew Zammit-Mangion, Stuart B Andrews, Philip Moore, and Jonathan L Bamber (2016a). "An assessment of forward and inverse GIA solutions for Antarctica". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 121.9, pp. 6947–6965.
- Martín-Español, Alba, Andrew Zammit-Mangion, Peter J Clarke, Thomas Flament, Veit Helm, Matt A King, Scott B Luthcke, Elizabeth Petrie, Frederique Rémy, Nana Schön, et al. (2016b). "Spatial and temporal Antarctic Ice Sheet mass trends, glacio-isostatic adjustment, and surface processes from a joint inversion of satellite altimeter, gravity, and GPS data". In: *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* 121.2, pp. 182–200.
- Mazzotti, Stephane, A Lambert, J Henton, TS James, and N Courtier (2011). "Absolute gravity calibration of GPS velocities and glacial isostatic adjustment in mid-continent North America". In: *Geophysical Research Letters* 38.24.
- Melini, Daniele, Christelle Saliby, and Giorgio Spada (2022). "On computing viscoelastic Love numbers for general planetary models: the ALMA3 code". In: *Geophysical Journal International* 231.3, pp. 1502–1517. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggac263>.
- Mémin, Anthony (2011). "Modélisation des variations géodésiques induites par la fonte des glaciers: séparabilité des effets des déglaciations passée et actuelle". PhD thesis. Strasbourg.
- Mémin, Anthony, Jacques Hinderer, and Yves Rogister (2012). "Separation of the geodetic consequences of past and present ice-mass change: influence of topography with application to Svalbard (Norway)". In: *Pure and applied geophysics* 169.8, pp. 1357–1372.

- Mémin, Anthony, Y Rogister, J Hinderer, M Llubes, E Berthier, and J-P Boy (2009). "Ground deformation and gravity variations modelled from present-day ice thinning in the vicinity of glaciers". In: *Journal of Geodynamics* 48.3-5, pp. 195–203.
- Mémin, Anthony, Giorgio Spada, J-P Boy, Y Rogister, and Jacques Hinderer (2014). "Decadal geodetic variations in Ny-Ålesund (Svalbard): role of past and present ice-mass changes". In: *Geophysical Journal International* 198.1, pp. 285–297.
- Michel, A and JP Boy (2022). "Viscoelastic Love numbers and long-period geophysical effects". In: *Geophysical Journal International* 228.2, pp. 1191–1212. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggab369>.
- Michel, Alexandre, Alvaro Santamaría-Gómez, Jean-Paul Boy, Félix Perosanz, and Sylvain Loyer (2021). "Analysis of GNSS displacements in Europe and their comparison with hydrological loading models". In: *Remote Sensing* 13.22, p. 4523.
- Mitrovica, Jerry X (1996). "Haskell [1935] revisited". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 101.B1, pp. 555–569. DOI: <https://doi.org/10.1029/95JB03208>.
- Morelli, Andrea and Stefania Danesi (2004). "Seismological imaging of the Antarctic continental lithosphere: a review". In: *Global and Planetary Change* 42.1-4, pp. 155–165. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gloplacha.2003.12.005>.
- Nield, Grace A, Valentina R Barletta, Andrea Bordoni, Matt A King, Pippa L Whitehouse, Peter J Clarke, Eugene Domack, Ted A Scambos, and Etienne Berthier (2014). "Rapid bedrock uplift in the Antarctic Peninsula explained by viscoelastic response to recent ice unloading". In: *Earth and Planetary Science Letters* 397, pp. 32–41. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2014.04.019>.
- Olsson, Per-Anders, Kristian Breili, Vegard Ophaug, Holger Steffen, Mirjam Bilker-Koivula, Emil Nielsen, Tonis Oja, and Ludger Timmen (2019). "Postglacial gravity change in Fennoscandia—three decades of repeated absolute gravity observations". In: *Geophysical Journal International* 217.2, pp. 1141–1156.
- Olsson, Per-Anders, Glenn Milne, Hans-Georg Scherneck, and Jonas Ågren (2015). "The relation between gravity rate of change and vertical displacement in previously glaciated areas". In: *Journal of Geodynamics* 83, pp. 76–84.
- Pappa, F, J Ebbing, F Ferraccioli, and W van der Wal (2019). "Modeling satellite gravity gradient data to derive density, temperature, and viscosity structure of the Antarctic lithosphere". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 124.11, pp. 12053–12076.
- Paxman, Guy J. G., Harriet C. P. Lau, Jacqueline Austermann, Benjamin K. Holtzman, and C. Havlin (Feb. 2023). "Inference of the Timescale-Dependent Apparent Viscosity Structure in the Upper Mantle Beneath Greenland". In: *AGU Advances* 4.2. DOI: [10.1029/2022av000751](https://doi.org/10.1029/2022av000751).
- Peltier, W Richard, DF Argus, and R Drummond (2015). "Space geodesy constrains ice age terminal deglaciation: The global ICE-6G\_C (VM5a) model". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 120.1, pp. 450–487. DOI: <https://doi.org/10.1002/2014JB011176>.

- Peltier, William R and John T Andrews (1976a). "Glacial-isostatic adjustment—I. The forward problem". In: *Geophysical Journal International* 46.3, pp. 605–646.
- (1976b). "Glacial-isostatic adjustment—I. The forward problem". In: *Geophysical Journal International* 46.3, pp. 605–646. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1976.tb01251.x>.
- Peltier, WR (1974). "The impulse response of a Maxwell Earth". In: *Reviews of Geophysics* 12.4, pp. 649–669. DOI: <https://doi.org/10.1029/RG012i004p00649>.
- (1976). "Glacial-isostatic adjustment—II. The inverse problem". In: *Geophysical Journal International* 46.3, pp. 669–705. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1976.tb01253.x>.
- Peltier, WR, DA Yuen, and P Wu (1980). "Postglacial rebound and transient rheology". In: *Geophysical Research Letters* 7.10, pp. 733–736. DOI: <https://doi.org/10.1029/GL007i010p00733>.
- Pollitz, Fred F (2003). "Transient rheology of the uppermost mantle beneath the Mojave Desert, California". In: *Earth and Planetary Science Letters* 215.1-2, pp. 89–104. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0012-821X\(03\)00432-1](https://doi.org/10.1016/S0012-821X(03)00432-1).
- Pollitz, Fred F, Roland Bürgmann, and Paramesh Banerjee (2006). "Post-seismic relaxation following the great 2004 Sumatra-Andaman earthquake on a compressible self-gravitating Earth". In: *Geophysical Journal International* 167.1, pp. 397–420. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03018.x>.
- Post, Emil L (1930). "Generalized differentiation". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 32.4, pp. 723–781.
- Powell, E., N. Gomez, C. Hay, K. Latychev, and J. X. Mitrovica (Jan. 2020). "Viscous Effects in the Solid Earth Response to Modern Antarctic Ice Mass Flux: Implications for Geodetic Studies of WAIS Stability in a Warming World". In: *Journal of Climate* 33.2, pp. 443–459. DOI: [10.1175/jcli-d-19-0479.1](https://doi.org/10.1175/jcli-d-19-0479.1).
- Powell, Evelyn M, Linda Pan, Mark J Hoggard, Konstantin Latychev, Natalya Gomez, Jacqueline Austermann, and Jerry X Mitrovica (2021). "The impact of 3-D Earth structure on far-field sea level following interglacial West Antarctic Ice Sheet collapse". In: *Quaternary Science Reviews* 273, p. 107256. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.quascirev.2021.107256>.
- Pritchard, Hamish D, SB Luthcke, and Andrew H Fleming (2010). "Understanding ice-sheet mass balance: progress in satellite altimetry and gravimetry". In: *Journal of Glaciology* 56.200, pp. 1151–1161.
- Rémy, Frédérique, Thomas Flament, Aurélie Michel, and Jacques Verron (2014). "Ice sheet survey over Antarctica using satellite altimetry: ERS-2, Envisat, SARAL/AltiKa, the key importance of continuous observations along the same repeat orbit". In: *International Journal of Remote Sensing* 35.14, pp. 5497–5512. DOI: <https://doi.org/10.1080/01431161.2014.926419>.
- Rémy, Frédérique and Soazig Parouty (2009). "Antarctic ice sheet and radar altimetry: A review". In: *Remote Sensing* 1.4, pp. 1212–1239.

- Ritzwoller, Michael H, Nikolai M Shapiro, Anatoli L Levshin, and Garrett M Leahy (2001). "Crustal and upper mantle structure beneath Antarctica and surrounding oceans". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 106.B12, pp. 30645–30670.
- Riva, Riccardo EM, Brian C Gunter, Timothy J Urban, Bert LA Vermeersen, Roderik C Lindenbergh, Michiel M Helsen, Jonathan L Bamber, Roderik SW van de Wal, Michiel R van den Broeke, and Bob E Schutz (2009). "Glacial isostatic adjustment over Antarctica from combined ICESat and GRACE satellite data". In: *Earth and Planetary Science Letters* 288.3-4, pp. 516–523. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2009.10.013>.
- Rodell, Matthew, Jay S Famiglietti, David N Wiese, JT Reager, Hiroko K Beaudoin, Felix W Landerer, and M-H Lo (2018). "Emerging trends in global freshwater availability". In: *Nature* 557.7707, pp. 651–659.
- Sabadini, R, DA Yuen, and P Gasperini (1985). "The effects of transient rheology on the interpretation of lower mantle viscosity". In: *Geophysical Research Letters* 12.6, pp. 361–364. DOI: <https://doi.org/10.1029/GL012i006p00361>.
- Sabadini, Roberto, David A Yuen, and Enzo Boschi (1982). "Polar wandering and the forced responses of a rotating, multilayered, viscoelastic planet". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 87.B4, pp. 2885–2903. DOI: <https://doi.org/10.1029/JB087iB04p02885>.
- Sato, Tadahiro, Satoshi Miura, Wenke Sun, Takayuki Sugano, Jeffrey T Freymueller, Christopher F Larsen, Yusaku Ohta, Hiromi Fujimoto, Daisuke Inazu, and Roman J Motyka (2012). "Gravity and uplift rates observed in southeast Alaska and their comparison with GIA model predictions". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 117.B1.
- Schoen, N, A Zammit-Mangion, JC Rougier, T Flament, F Rémy, S Luthcke, and JL Bamber (2015). "Simultaneous solution for mass trends on the West Antarctic Ice Sheet". In: *The Cryosphere* 9.2, pp. 805–819.
- Schrama, Ernst JO and Bert Wouters (2011). "Revisiting Greenland ice sheet mass loss observed by GRACE". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 116.B2.
- Schröder, Ludwig, Martin Horwath, Reinhard Dietrich, Veit Helm, Michiel R Van Den Broeke, and Stefan RM Ligtenberg (2019). "Four decades of Antarctic surface elevation changes from multi-mission satellite altimetry". In: *The Cryosphere* 13.2, pp. 427–449. DOI: <https://doi.org/10.5194/tc-13-427-2019>.
- Simon, Karen M, Riccardo EM Riva, and Taco Broerse (2022). "Identifying geographical patterns of transient deformation in the geological sea level record". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 127.7, e2021JB023693. DOI: <https://doi.org/10.1029/2021JB023693>.
- Simon, KM, REM Riva, and LLA Vermeersen (2021). "Constraint of glacial isostatic adjustment in the North Sea with geological relative sea level and GNSS vertical land motion data". In: *Geophysical Journal International* 227.2, pp. 1168–1180.
- Slobbe, DC, P Ditmar, and RC Lindenbergh (2009). "Estimating the rates of mass change, ice volume change and snow volume change in Greenland from ICESat and GRACE data". In: *Geophysical Journal International* 176.1, pp. 95–106.

- Spada, G. and L. Boschi (July 2006). "Using the Post-Widder formula to compute the Earth's viscoelastic Love numbers". In: *Geophysical Journal International* 166.1, pp. 309–321. DOI: [10.1111/j.1365-246x.2006.02995.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.2006.02995.x).
- Spada, Giorgio (2003). "The theory behind TABOO". In: *Samizdat Press edn.* 606.
- Spada, Giorgio, Valentina Roberta Barletta, Volker Klemann, REM Riva, Zdenek Martinec, Paolo Gasperini, Björn Lund, Detlef Wolf, LLA Vermeersen, and MA King (2011). "A benchmark study for glacial isostatic adjustment codes". In: *Geophysical Journal International* 185.1, pp. 106–132. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.04952.x>.
- Spada, Giorgio and Daniele Melini (2019). "SELEN 4 (SELEN version 4.0): a Fortran program for solving the gravitationally and topographically self-consistent sea-level equation in glacial isostatic adjustment modeling". In: *Geoscientific Model Development* 12.12, pp. 5055–5075. DOI: <https://doi.org/10.5194/gmd-12-5055-2019>.
- Steffen, Holger, Svetozar Petrovic, Jürgen Müller, Roland Schmidt, Johann Wunsch, Franz Barthelmes, and Jürgen Kusche (2009). "Significance of secular trends of mass variations determined from GRACE solutions". In: *Journal of Geodynamics* 48.3-5, pp. 157–165.
- Tamisiea, ME, JX Mitrovica, and JL Davis (2007). "GRACE gravity data constrain ancient ice geometries and continental dynamics over Laurentia". In: *Science* 316.5826, pp. 881–883. DOI: [10.1126/science.1137157](https://doi.org/10.1126/science.1137157).
- Tapley, Byron D, S Bettadpur, Mo Watkins, and Ch Reigber (2004). "The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results". In: *Geophysical research letters* 31.9. DOI: [10.1029/2004GL019779](https://doi.org/10.1029/2004GL019779).
- Tapley, Byron D, Michael M Watkins, Frank Flechtner, Christoph Reigber, Srinivas Bettadpur, Matthew Rodell, Ingo Sasgen, James S Famiglietti, Felix W Landerer, Don P Chambers, et al. (2019). "Contributions of GRACE to understanding climate change". In: *Nature climate change* 9.5, pp. 358–369.
- Tarantola, Albert (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM.
- Tsushima, Hiroaki and Yusaku Ohta (2014). "Review on near-field tsunami forecasting from offshore tsunami data and onshore GNSS data for tsunami early warning". In: *Journal of Disaster Research* 9.3, pp. 339–357.
- Tushingham, AiMi and WR Peltier (1991). "Ice-3G: A new global model of late Pleistocene deglaciation based upon geophysical predictions of post-glacial relative sea level change". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 96.B3, pp. 4497–4523.
- Velicogna, Isabella (2009). "Increasing rates of ice mass loss from the Greenland and Antarctic ice sheets revealed by GRACE". In: *Geophysical Research Letters* 36.19.
- Velicogna, Isabella, Yara Mohajerani, Geruo A, Felix Landerer, Jeremie Mouginot, Brice Noel, Eric Rignot, Tyler Sutterley, Michiel Broeke, Melchior Wessem, and David Wiese (Apr. 2020a). "Continuity of Ice Sheet Mass Loss in Greenland and

- Antarctica From the GRACE and GRACE Follow-On Missions". In: *Geophysical Research Letters* 47.8. DOI: [10.1029/2020gl087291](https://doi.org/10.1029/2020gl087291).
- Velicogna, Isabella, Yara Mohajerani, Felix Landerer, Jeremie Mouginot, Brice Noel, Eric Rignot, Tyler Sutterley, Michiel van den Broeke, Melchior van Wessem, and David Wiese (2020b). "Continuity of ice sheet mass loss in Greenland and Antarctica from the GRACE and GRACE Follow-On missions". In: *Geophysical Research Letters* 47.8, e2020GL087291.
- Velicogna, Isabella and John Wahr (2006). "Measurements of time-variable gravity show mass loss in Antarctica". In: *science* 311.5768, pp. 1754–1756. DOI: [10.1126/science.1123785](https://doi.org/10.1126/science.1123785).
- Vermeersen, LLA and R Sabadini (1997). "A new class of stratified viscoelastic models by analytical techniques". In: *Geophysical Journal International* 129.3, pp. 531–570. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb04492.x>.
- Vishwakarma, Bramha Dutt, Yann Ziegler, Jonathan L Bamber, and Sam Royston (2023). "Separating GIA signal from surface mass change using GPS and GRACE data". In: *Geophysical Journal International* 232.1, pp. 537–547.
- Wahr, John, Han DaZhong, and Andrew Trupin (1995). "Predictions of vertical uplift caused by changing polar ice volumes on a viscoelastic Earth". In: *Geophysical Research Letters* 22.8, pp. 977–980.
- Wal, Wouter van der, Pippa L Whitehouse, and Ernst JO Schrama (2015). "Effect of GIA models with 3D composite mantle viscosity on GRACE mass balance estimates for Antarctica". In: *Earth and Planetary Science Letters* 414, pp. 134–143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2015.01.001>.
- Weaver, Andrew J, Oleg A Saenko, Peter U Clark, and Jerry X Mitrovica (2003). "Meltwater pulse 1A from Antarctica as a trigger of the Bølling-Allerød warm interval". In: *Science* 299.5613, pp. 1709–1713. DOI: [10.1126/science.1081002](https://doi.org/10.1126/science.1081002).
- Whitehouse, Pippa L, Michael J Bentley, Glenn A Milne, Matt A King, and Ian D Thomas (2012). "A new glacial isostatic adjustment model for Antarctica: calibrated and tested using observations of relative sea-level change and present-day uplift rates". In: *Geophysical Journal International* 190.3, pp. 1464–1482. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2012.05557.x>.
- Widder, David V (1934). "The inversion of the Laplace integral and the related moment problem". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 36.1, pp. 107–200.
- Widder, DV (1941). "The Laplace transform, vol. 6 of". In: *Princeton Mathematical Series*.
- Willen, Matthias O, Martin Horwath, Andreas Groh, Veit Helm, Bernd Uebbing, and Jürgen Kusche (2022). "Feasibility of a global inversion for spatially resolved glacial isostatic adjustment and ice sheet mass changes proven in simulation experiments". In: *Journal of Geodesy* 96.10, p. 75.

- Willen, Matthias O, Martin Horwath, Ludwig Schröder, Andreas Groh, Stefan RM Ligtenberg, Peter Kuipers Munneke, and Michiel R Van Den Broeke (2020). "Sensitivity of inverse glacial isostatic adjustment estimates over Antarctica". In: *The Cryosphere* 14.1, pp. 349–366.
- Wingham, DJ, A Shepherd, A Muir, and GJ Marshall (2006). "Mass balance of the Antarctic ice sheet". In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 364.1844, pp. 1627–1635.
- Wingham, Duncan J, Andrew J Ridout, Remko Scharroo, Robert J Arthern, and CK Shum (1998). "Antarctic elevation change from 1992 to 1996". In: *Science* 282.5388, pp. 456–458. DOI: [10.1126/science.282.5388.456](https://doi.org/10.1126/science.282.5388.456).
- Wu, P. and W. R. Peltier (Aug. 1982a). "Viscous gravitational relaxation". In: *Geophysical Journal International* 70.2, pp. 435–485. DOI: [10.1111/j.1365-246x.1982.tb04976.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246x.1982.tb04976.x).
- Wu, Patrick and WR Peltier (1982b). "Viscous gravitational relaxation". In: *Geophysical Journal International* 70.2, pp. 435–485.
- Wu, Xiaoping, Michael B Heflin, Hugo Schotman, Bert LA Vermeersen, Danan Dong, Richard S Gross, Erik R Ivins, Angelyn W Moore, and Susan E Owen (2010). "Simultaneous estimation of global present-day water transport and glacial isostatic adjustment". In: *Nature Geoscience* 3.9, pp. 642–646.
- Yuen, David A, Roberto CA Sabadini, Paolo Gasperini, and Enzo Boschi (1986). "On transient rheology and glacial isostasy". In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 91.B11, pp. 11420–11438. DOI: <https://doi.org/10.1029/JB091iB11p11420>.
- Zammit-Mangion, Andrew, Jonathan L Bamber, Nana W Schoen, and Jonathan C Rougier (2015a). "A data-driven approach for assessing ice-sheet mass balance in space and time". In: *Annals of Glaciology* 56.70, pp. 175–183.
- Zammit-Mangion, Andrew, Jonathan Rougier, Nana Schön, Finn Lindgren, and Jonathan Bamber (2015b). "Multivariate spatio-temporal modelling for assessing Antarctica's present-day contribution to sea-level rise". In: *Environmetrics* 26.3, pp. 159–177.
- Zhao, Chen, Matt A. King, Christopher S. Watson, Valentina R. Barletta, Andrea Bordon, Matthew Dell, and Pippa L. Whitehouse (2017). "Rapid ice unloading in the Fleming Glacier region, southern Antarctic Peninsula, and its effect on bedrock uplift rates". In: *Earth and Planetary Science Letters* 473, pp. 164–176. ISSN: 0012-821X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2017.06.002>.
- Zhong, Shijie, Kaixuan Kang, and Chuan Qin (2022). "CitcomSVE: A Three-Dimensional Finite Element Software Package for Modeling Planetary Mantle's Viscoelastic Deformation in Response to Surface and Tidal Loads". In: *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 23.10, e2022GC010359.
- Zwally, H Jay, John W Robbins, Scott B Luthcke, Bryant D Loomis, and Frédérique Rémy (2021). "Mass balance of the Antarctic ice sheet 1992–2016: reconciling results from GRACE gravimetry with ICESat, ERS1/2 and Envisat altimetry". In: *Journal of Glaciology* 67.263, pp. 533–559.

