



HAL
open science

Analyse thermomécanique du contact aube-stator : approches numérique et expérimentale

Nicolas Guérin

► **To cite this version:**

Nicolas Guérin. Analyse thermomécanique du contact aube-stator : approches numérique et expérimentale. Autre. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSEC043 . tel-04955238v2

HAL Id: tel-04955238

<https://theses.hal.science/tel-04955238v2>

Submitted on 18 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE
CENTRALE LYON

Numéro d'ordre : 2019LYSEC43

ÉCOLE CENTRALE DE LYON

École doctorale **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**

Unité de recherche **LTDS**

Thèse présentée par **Nicolas GUÉRIN**

Soutenue le **10 décembre 2019**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lyon, décerné par l'École Centrale de Lyon

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Dynamique des structures**

Analyse thermomécanique du contact aube-stator : approches numérique et expérimentale

Thèse dirigée par Fabrice THOUVEREZ Directeur
Mathias LEGRAND Co-Encadrant
Claude GIBERT Co-Encadrant
Patricio ALMEIDA Co-Encadrant

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Patrice CARTRAUD	Professeur, École Centrale de Nantes, LMM	
	Yannick DESPLANQUES	Professeur, École Centrale de Lille, LaM ^{CUBE}	
<i>Examinatrice</i>	Thouraya BARANGER	Professeure, Université de Lyon, LMC ²	Présidente
<i>Encadrants</i>	Fabrice THOUVEREZ	Professeur, École Centrale de Lyon, LTDS	
	Mathias LEGRAND	Professeur, Université McGill, SDVL	
	Claude GIBERT	Ingénieur de Recherche, CNRS, LTDS	
	Patricio ALMEIDA	Ingénieur Méthodes, Safran Helicopter Engines	



ÉCOLE CENTRALE DE LYON

Doctoral School **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**
University Department **LTDS**

Thesis defended by **Nicolas GUÉRIN**

Defended on **10th December, 2019**

In order to become Doctor from Université de Lyon, awarded by École Centrale de Lyon

Academic Field **Mechanical engineering**
Speciality **Structural Dynamics**

Thermomechanical analysis of blade-casing contacts : numerical and experimental aspects

Thesis supervised by Fabrice THOUVEREZ Supervisor
Mathias LEGRAND Co-Monitor
Claude GIBERT Co-Monitor
Patricio ALMEIDA Co-Monitor

Committee members

<i>Referees</i>	Patrice CARTRAUD	Professor, École Centrale de Nantes, LMM	
	Yannick DESPLANQUES	Professor, École Centrale de Lille, LaM ^{CUBE}	
<i>Examiner</i>	Thouraya BARANGER	Professor, Université de Lyon, LMC ²	President
<i>Supervisors</i>	Fabrice THOUVEREZ	Professor, École Centrale de Lyon, LTDS	
	Mathias LEGRAND	Professor, Université McGill, SDVL	
	Claude GIBERT	Research Engineer, CNRS, LTDS	
	Patricio ALMEIDA	Methods Engineer, Safran Helicopter Engines	

Cette thèse a été préparée chez les partenaires suivants.

LTDS

LTDS UMR 5513
École Centrale de Lyon
36, avenue Guy de Collongue
69134 Ecully, France

☎ 0 (+33) 4 72 18 62 93
✉ helene.schoch@ec-lyon.fr
Site ltds.ec-lyon.fr



SDVL

Department of Mechanical Engineering
Room 122, McConnell Engineering Building
McGill University
817 Sherbrooke St West
Montréal QC H3A 0C3, Canada

☎ (+1) 514 398 5321
✉ mathias.legrand@mcgill.ca
Site <http://structdynviblab.mcgill.ca>



Safran Helicopter Engines

Avenue Joseph Szydlowsky
64511 Bordes, France

☎ 0 (+33) 5 59 12 50 00
✉ patricio.almeida@safrangroup.com
Site <https://www.safran-helicopter-engines.com/fr>



À la curiosité, le plus beau de tous les vilains défauts

When a distinguished but elderly scientist states that something is possible, he is almost certainly right. When he states that something is impossible, he is very probably wrong.

The only way of discovering the limits of the possible is to venture a little way past them into the impossible.

Any sufficiently advanced technology is indistinguishable from magic.

Arthur C. Clarke

**ANALYSE THERMOMÉCANIQUE DU CONTACT AUBE-STATOR : APPROCHES NUMÉRIQUE ET EXPÉRI-
MENTALE****Résumé**

Le constant besoin d'amélioration de l'efficacité et d'allègement des turbomachines demande aux constructeurs des efforts permanents pour ouvrir les domaines de conception. En particulier, les jeux fonctionnels entre les parties fixes et tournantes des turbomachines modernes sont de plus en plus réduits, permettant des diminutions substantielles des pertes de rendement. Toutefois, l'allègement des composants entraîne leur assouplissement, et donc une importance croissante des phénomènes dynamiques dans le cycle de vie des structures fixes comme tournantes. L'effet des couplages multi-physiques se retrouve lui aussi exacerbé, que ce soit celui du couplage thermomécanique ou aéroélastique. Il est donc, dans ce contexte, nécessaire d'améliorer les outils de dimensionnement de façon à prévoir plus précisément le cycle de vie des composants des moteurs, afin de réduire les coûts de développement, tout en augmentant leur sûreté de fonctionnement et donc la sécurité des passagers. Cette thèse s'est inscrite dans la continuité de travaux précédents sur le sujet du contact aubes-stator. À savoir, introduire plus de physique dans les modèles numériques en tenant compte de phénomènes et de géométries de plus en plus complexes. L'objectif principal a été d'introduire la modélisation de phénomènes thermiques dus aux événements de contact, intervenant à l'interface entre les pièces fixes et tournantes, en se basant sur des géométries industrielles installées sur un banc d'essais. Cependant, l'introduction de cette nouvelle physique dans les modélisations devait être faite en tenant compte des contraintes de simulation sur des systèmes complexes, c'est-à-dire en trouvant un compromis entre vitesse et précision des calculs. Enfin, une phase de corrélation entre ces simulations et des essais sur banc était à effectuer, pour s'assurer de la pertinence des outils de dimensionnement mis en oeuvre. Durant cette thèse, une adaptation et une ré-instrumentation du banc d'essais CASTOR (Contact Aubes StaTOR) ont d'abord été effectuées. Plusieurs essais de contact sur banc ont ensuite été réalisés en mesurant les comportements vibratoires et thermiques des parties fixes et tournantes. Puis, des travaux menés en parallèle ont porté sur la réduction de modèles éléments finis décrivant le comportement thermomécanique d'éléments de compresseurs centrifuges de turbomachines aéronautiques. Par ailleurs, plusieurs méthodologies d'intégration temporelle des problèmes de contact, conventionnellement utilisées dans un cadre purement mécanique, ont été évaluées dans un cadre de simulation thermomécanique pour s'assurer de leur capacité à fonctionner pour ce type d'études. Certaines difficultés ont été levées en exploitant des méthodes numériques issues de la communauté scientifique traitant de la dynamique non-régulière. Enfin, des simulations ont été effectuées avec divers paramétrages pour montrer à la fois les capacités de l'outil développé, et confronter les résultats numériques aux observations expérimentales.

Mots clés : contact aube-stator, réduction de modèles, couplage thermomécanique, algorithmes de contact, corrélation calculs-essais, contact unilatéral, mesures, traitement du signal.

**THERMOMECHANICAL ANALYSIS OF BLADE-CASING CONTACTS : NUMERICAL AND EXPERIMENTAL
ASPECTS****Abstract**

The constant need for efficiency and lightweightness of aeroengines demands OEM continued efforts to open design domain. In particular, operations clearances between static and rotating parts of modern engines become narrower, leading to better efficiencies. However, lighter components generally have lower stiffnesses, causing a growth in dynamic phenomena participation in the engines life-cycle. Multi-physics coupling effects are aggravated in the same manner, whether they are of thermomechanical or aeroelastic nature. In this context, it is therefore crucial to improve design tools so as to predict more accurately the operational conditions of the engine components, with a general objective to cut down development and operational costs, while ensuring engine reliability and passenger safety. This thesis closely follows previous work on blade-casing contacts, all aimed at modelling more accurately the underlying more and more complex phenomena and structures. The main objective of this work has been to introduce a model for the thermal phenomena occurring during contacts at the interface between rotating and static parts, based on industrial geometries of components, which are set in a test rig. Due to the sophistication of the parts, the addition of these phenomena in the model had to be performed while paying attention to high simulation constraints. In other words, a trade-off had to be found between speed and precision of the computations. Finally a correlation phase was to be performed between simulations and experimental trials was to be performed to assess the relevance of the proposed numerical tools. During this thesis, a modification and a new instrumentation of the CASTOR test rig were performed. Multiple contact trials were carried out, during which vibratory and thermal behavior of the components were measured. In parallel to these experimental operations, multiple numerical developments were tackled. Among them, a model reduction methodology of thermoelastic models of turbo-engine centrifugal compressors was developed. Also, multiple time-stepping procedures, originally dedicated to solve contact problems in a purely mechanical context, we extended to perform thermomechanical computations. Several complications were removed taking advantage of advanced methods stemming from the non-smooth dynamics community. Eventually, simulations were performed with diverse setups to both show the capabilities of the numerical tool as well as confront numerical results and experimental observations.

Keywords: blade-casing contact, model order reduction, thermomechanical coupling, contact solving algorithms, simulation and experiments correlation, unilateral contact, measurement, signal analysis

Remerciements

Effectuer durant pratiquement quatre années des travaux de recherche sur un sujet complexe est une épreuve, sans doute la plus difficile à laquelle tout étudiant est soumis. Cette épreuve représente l'aboutissement non seulement d'un apprentissage, mais surtout d'une volonté, celle de satisfaire sa propre curiosité. Ma deuxième sœur m'avait écrit récemment « le chemin est plus important que l'arrivée ». Même si « la fin justifie les moyens » est un autre adage très répandu, je me sens personnellement plus proche de la première proposition.

Je tiens avant tout à remercier ma famille sans laquelle je ne serais pas la personne que je suis aujourd'hui. D'abord mes sœurs, qui m'ont beaucoup soutenu et qui continuent de le faire. Bien que plus éloignés géographiquement, j'ai le sentiment que nous n'avons jamais été aussi proches. Pour autant, je veux tout particulièrement remercier mes parents et mes grands-parents, qui ont su éveiller ma curiosité dès mon plus jeune âge, et faire preuve de patience et d'abnégation pour me permettre de l'exercer. Malgré des moments difficiles, pendant lesquels ils ne comprenaient souvent pas mes problèmes ou étaient loin de moi, tous ont formé un soutien sans faille et restent aujourd'hui encore ma plus grande source de courage et d'inspiration. Je sais que je ne mesure qu'une petite partie des efforts qu'ils ont consenti, mais je m'efforce d'être tous les jours à la hauteur de la chance qu'il m'ont donné.

Je veux ensuite remercier mes amis d'enfance, de prépa ou d'école d'ingénieur. Tous ont su me supporter que ce soit durant mes grands discours ou des (quelques ?) moments plus silencieux. Leur amitié a contribué à me faire progresser en tant que personne, et que l'on soit en contact régulier ou non, ils gardent une place particulière dans mon cœur.

À bien des égards, une thèse est un travail avant tout personnel. Chaque doctorant étant différent et chaque sujet de recherche particulier, aucune thèse ne ressemble à une autre. Pour autant, ce travail n'a pas à être solitaire. J'ai vécu les plus belles heures de ma thèse au contact d'autres thésards et de collègues, lors de discussions nombreuses, parfois houleuses ou difficiles, mais toujours instructives. Ceux qui sont concernés par ce message se reconnaîtront sans difficulté.

En particulier, je souhaite remercier mes compagnons thésards du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de Lyon, que j'ai eu le plaisir de côtoyer à la fois en thèse et durant mon post-doctorat, en particulier Adrien, Antoine, Colas, Alexa, Cécile, Étienne, Samuel, Nicolas, Anthony, Thibaut et Hugo. Même si beaucoup de choses resteront « La faute de Nico », je suis reconnaissant de l'aide morale comme technique que j'ai pu recevoir dans mes travaux, et j'espère avoir réussi à rendre un peu de ceci quand j'en ai eu l'occasion. Je remercie aussi certains collègues, Lionel, Xavier, Stéphane, Lionel, Isabelle, Jérôme et Sylvie pour leur aide technique ou administrative, ou tout simplement leur présence.

Par ailleurs, je souhaite remercier les personnels de Turbomeca qui m'ont accueilli dans leur équipe, en particulier mon premier chef Jean-Philippe Ousty qui m'a offert l'opportunité de découvrir un nouveau pan du métier d'ingénieur, et Marc Dijoud qui m'a littéralement fait aveuglément confiance. Je remercie aussi Patricio Almeida, mon encadrant industriel, qui a suivi de façon aussi assidue que possible mes travaux, qui sont en partie une extension des siens. Bien que nous n'ayons pas toujours été d'accord, je sais qu'il a toujours essayé de m'encadrer et de me faire bénéficier de son expérience du mieux possible. Je lui souhaite à lui et à Anaïs, qui m'a aussi fourni une assistance précieuse, plein de

bonheur. Je veux enfin remercier Olivier, Loïc et les autres membres du service MO de Turbomeca pour leur accueil chaleureux lors de mes séjours là-bas, ainsi que Mathieu Herran, avec qui j'ai eu de belles discussions scientifiques et qui a toujours montré beaucoup d'intérêt pour ces travaux.

Au Canada, je remercie vivement le professeur Mathias Legrand, pour son accueil dans un contexte compliqué et son encadrement. Je remercie aussi les étudiants présents à Montréal, notamment Charlélie, Carlos et David, pour les moments partagés là-bas. De plus, je tiens à remercier très chaleureusement Anders Thorin, qui a de façon imprévue joué un rôle tout simplement crucial dans mes travaux de recherche, et sans qui la fin de ma thèse aurait été toute autre. Je tiens à lui communiquer mon plus profond respect et mes plus sincères sentiments d'amitié. Par ailleurs, j'ai beaucoup interagi avec les membres de l'équipe du professeur Alain Batailly, dont Florence Nyssen et Elsa Piollet. Je les remercie pour leur accueil et le soutien dont ils ont fait preuve pour m'aider à industrialiser mes travaux. Collaborer avec eux aura été un plaisir véritable et j'espère avoir à l'avenir l'occasion de reproduire ces échanges.

Pour terminer, je veux remercier plus spécifiquement mes encadrants durant mes travaux : Fabrice Thouverez et Claude Gibert au LTDS, Mathias Legrand à l'université McGill et Patricio Almeida à Turbomeca. Par bien des aspects, ces travaux ont connu des hauts et des bas, et de nombreuses difficultés ont surgi au cours de la thèse, qu'elles soient d'ordre technique ou plus logistique. Quoiqu'il en soit, par leur absence ou leur présence, leur accord ou leur désaccord, leurs explications ou leurs critiques, tous ont contribué à faire de ce manuscrit ce qu'il est. Cela a été pour moi un honneur de travailler avec des gens aussi passionnés et d'avoir pu bénéficier de leur enseignement.

Je remercie finalement les membres du jury pour avoir accepté de lire ce manuscrit, d'évaluer ces travaux de recherche, de se déplacer pour en entendre les conclusions. Bien que la lecture d'un manuscrit semble plus aisée que son écriture, je ne doute pas une seconde de la responsabilité qui leur incombe, et je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Ces derniers mots constituent la fin du commencement de ce manuscrit, qui constitue lui-même le commencement de la fin de ces travaux. J'espère sincèrement que ce document permettra aux personnes concernées de mieux comprendre les problématiques abordées et pourra leur apporter l'aide dont ils auront sans aucun doute besoin. À défaut de révolutionner la science, il est important de lui permettre de s'épanouir.

Table des matières

Résumé	xi
Remerciements	xiii
Table des matières	xv
Introduction générale	1
Contexte industriel	1
Contexte scientifique	1
Objectifs	2
Organisation du mémoire	2
I Contact rotor–stator	5
1 Les turbomachines	5
1.1 Contexte historique	5
1.2 Fonctionnement	6
1.3 Amélioration des rendements de compression	7
2 L’interaction modale	9
2.1 Phénoménologie de l’interaction modale	9
2.2 Remarques sur les travaux de Schmiechen	13
3 Phénomènes d’usure	15
4 Problèmes de contact en thermomécanique	15
5 Bilan du chapitre	16
II Modélisation des structures et du contact	17
1 Modélisation du contact thermoélastodynamique	17
1.1 Définitions	17
1.2 Formulation continue du problème au sein des solides en contact	18
1.3 Formulation continue du problème au sein de l’interface de contact	21
1.4 Comportement mécanique et thermique de l’interface de contact	22
2 Discrétisation spatiale du problème	26
2.1 Formulation variationnelle du problème	26
2.2 Application de la méthode des éléments finis	28
3 Présentation des modèles	30
3.1 Modèle simplifié de poutre	30
3.2 Couple rotor–stator de compresseur centrifuge	31

III Réduction de modèles et sous-structuration	33
1 Présentation générale	34
2 Éléments théoriques	34
2.1 Système d'intérêt	34
2.2 Décomposition en parties interne et frontière	35
2.3 Méthode de Galerkin	35
3 Méthodes de réduction	36
3.1 Synthèse modale	36
3.2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)	37
3.3 Méthodes de Krylov	38
4 Méthodes de réduction pour la sous-structuration	40
4.1 Réduction statique de Guyan	40
4.2 Méthode de Craig–Bampton	41
4.3 Méthode de MacNeal	41
4.4 Méthode de Craig–Hale	42
4.5 Double synthèse modale	43
5 Symétrie cyclique	44
5.1 Formulation d'un problème en symétrie cyclique	44
5.2 Conditions de symétrie cyclique	45
5.3 Application des conditions aux limites cycliques sur le secteur de référence	46
5.4 Correspondance entre structure complète et espace cyclique	46
5.5 Problème aux valeurs propres associé à l'harmonique k	47
6 Spécificités dans le cadre de la problématique contact rotor-stator	47
6.1 Réduction de modèles thermiques	47
6.2 Problèmes multiphysiques	48
6.3 Problèmes faisant intervenir des contraintes de contact	50
7 Extension de la méthode de Craig–Hale	51
7.1 Limitations de la méthode de Craig–Hale	51
7.2 Construction de la base RCH	51
7.3 Orthogonalisation de la base RCH	52
8 Application au modèle de poutre thermoélastique	53
8.1 Influence du nombre de modes conservés	53
8.2 Influence du nombre de degrés de liberté	58
8.3 Optimisation paramétrique de la méthode Rational–Craig–Hale	61
9 Bilan du chapitre	64
IV Algorithmes de contact	65
1 Système étudié	66
2 Comportement transitoire de structures	66
2.1 θ -méthode	66
2.2 Algorithmes de Newmark	68
2.3 Autres schémas d'intégration temporelle	69
3 Problèmes de contact thermomécanique	70
3.1 Algorithmes de contact dans le cadre mécanique	70
3.2 Contraintes industrielles	71
4 Algorithme de Carpenter décentré	72
4.1 Schéma des différences finies centrées	72
4.2 Application des contraintes de contact	72
4.3 Cadre thermomécanique	73

5	Dynamique non-régulière	75
5.1	Introduction	75
5.2	Méthode de Moreau-Jean	77
5.3	Résolution implicite complète	81
5.4	Méthode de Moreau-Jean avec reprojction sur les contraintes en position	83
6	Comparaison des algorithmes : cas de la poutre thermomécanique 1D	88
6.1	Modèle	88
6.2	Comportement hors contact	88
6.3	Contact sans effets thermiques	91
6.4	Comparaison avec effets thermiques	98
7	Méthodes de réduction et algorithmes de contact	101
7.1	Propriétés fréquentielles des modèles utilisés	101
7.2	Comparaison des modèles réduits en simulation de contact	101
8	Bilan du chapitre	103
V	Simulations de contact rotor–stator	105
1	Paramétrage du problème de contact rotor stator	106
1.1	Paramétrage du rotor	106
1.2	Paramétrage du stator	107
1.3	Définition du jeu et de la vitesse relative	108
2	Intégration par l’algorithme de Carpenter	111
2.1	Discrétisation temporelle des équations du mouvement	111
2.2	Discrétisation de la fonction jeu	112
2.3	Calcul des efforts de contact	112
3	Intégration par l’algorithme de Moreau–Jean avec reprojction	112
3.1	Discrétisation temporelle des équations du problème	112
3.2	Calcul du jeu et de la vitesse relative entre les deux structures	113
3.3	Calcul des multiplicateurs	114
3.4	Bilan sur les algorithmes dans le cas du contact rotor–stator	115
4	Étude de convergence des modèles	116
4.1	Rotor	116
4.2	Stator	121
4.3	Comparaison des dimensions des modèles réduits utilisés	124
4.4	Caractérisation fréquentielle des modèles réduits	124
5	Simulation quasi-statique	124
5.1	Simulation sans rotation	125
5.2	Simulation avec rotation	125
5.3	Bilan	127
6	Sensibilité des réponses aux paramètres numériques	127
6.1	Comparaison des algorithmes	127
6.2	Influence du pas de temps de calcul	129
6.3	Bilan sur les effets des paramètres numériques	131
7	Simulations d’interaction modale rotor–stator	132
7.1	Motivations	132
7.2	Diagramme de coïncidence modale	132
7.3	Paramétrage	132
7.4	Interaction modale basse vitesse	134
7.5	Interaction à basse vitesse en présence de perturbations	140
7.6	Interaction à basse vitesse, sans excitation extérieure	147

7.7 Interaction rotor–stator thermomécanique	152
7.8 Bilan des simulations	158
8 Bilan du chapitre	158
VI Expérimentations sur les interactions aube-stator	159
1 Dispositif expérimental CASTOR II	160
1.1 Fonctions, architecture et conditions d’essais	160
1.2 Instrumentation	161
1.3 Caractérisation dynamique des structures	165
2 Essai d’interaction aubes-stator	167
2.1 Introduction	167
2.2 Déroulement de l’essai	168
2.3 Observations globales sur l’essai	169
2.4 Étude détaillée des interactions	176
2.5 Observations visuelles du banc	189
2.6 Conclusions générales de l’essai	192
3 Corrélation des marqueurs thermosensibles	193
3.1 Introduction	193
3.2 Evaluation des puissances dissipées lors de contacts	193
3.3 Marqueurs thermosensibles	195
3.4 Simulations numériques thermiques transitoires	198
3.5 Conclusion	203
4 Bilan du chapitre	203
Conclusion	205
Contexte	205
Résultats	205
Perspectives	206
Table des figures	209
Liste des tableaux	213
Bibliographie	217
A Équations aux dérivées partielles	229
B Méthode de Craig–Hale Rationnelle	231
C Modèle de poutre thermoélastique en traction compression	233
D Stabilité de l’algorithme de Carpenter thermomécanique	237
E Notions d’analyse convexe	239
F Outils d’aide à la conception des roues aubagées	241
Liste des publications personnelles	243

Introduction générale

Contexte industriel

Les moteurs sont basés sur un cycle thermodynamique de compression - combustion - détente aérobie et permettent à un nombre toujours croissant de passagers et de marchandises de voyager aux quatre coins du globe. Les contraintes réglementaires et économiques qui pèsent sur ce type de systèmes créent une demande permanente des constructeurs pour des machines plus robustes, économes et silencieuses, et aussi plus respectueuses de l'environnement.

Pour ce faire, de nouvelles technologies sont introduites pour gagner en performances. De nouveaux matériaux comme les alliages de titane à haute résistance et les alliages à base Nickel ont été intégrés sur les moteurs. Aujourd'hui, les matériaux composites à matrice organique, céramique ou métallique, dont l'aluminure de Titane ou les pièces obtenues par RTM (*Resin Transfer Moulding*), y prennent de plus en plus de place. À ces améliorations dans la fabrication des turbomoteurs se joint une amélioration dans les méthodes de conception. En effet, si la fabrication additive permet d'établir un nouveau paradigme dans les ateliers, de nouveaux processus de dimensionnement doivent simultanément être établis dans les bureaux d'étude. Cette évolution conjointe des deux aspects de la conception permet les gains en performances des moteurs observés actuellement. Dans le cadre de l'amélioration des processus de dimensionnement, les constructeurs cherchent à modéliser plus finement de nombreux phénomènes intervenant dans les turbomachines. L'objectif est de réduire les écarts entre les modélisations et les structures réelles, pour ouvrir le domaine de conception.

Parmi les phénomènes problématiques, constatés en service, on s'est dans cette étude intéressé aux phénomènes de contact rotor-stator. Ces phénomènes peuvent apparaître sous certaines conditions de fonctionnement en raison des distances réduites entre les parties fixes et tournantes des turbomoteurs, induites par la dilatation thermique d'un composant, ou d'un mouvement de l'appareil porteur par exemple. Ces phénomènes sont particuliers, dans la mesure où ils concernent plusieurs parties du cycle de vie des moteurs : la sécurité, la maintenance et les rendements.

Contexte scientifique

Les phénomènes de contact rotor-stator constituent une problématique scientifique très riche. En effet, ils sont intrinsèquement multi-physiques et non-linéaires, ce qui entraîne des difficultés majeures pour leur compréhension. Certains phénomènes sous-jacents comme les phénomènes vibratoires sont très rapides et globaux, alors que les phénomènes thermiques sont plutôt localisés et lents. D'autres phénomènes comme l'usure (sous ses diverses formes) ou le frottement sont directement liés aux propriétés tribologiques de l'interface de contact, et notamment aux propriétés de l'abradable qui peuvent elles aussi dépendre du champ de température.

Il en résulte une grande difficulté à les modéliser dans leur ensemble de façon efficace et précise. D'un point de vue expérimental, de nombreux travaux ont été dédiés à l'étude du comportement dynamique des structures, et de l'interaction aube-abradable, mais l'étude simultanée des différents phénomènes reste peu développée, en raison du coût ou de l'intégration de l'instrumentation nécessaire

sur des structures de géométries relativement complexe et du caractère destructif des mises en contact.

Objectifs

Cette thèse a porté sur deux aspects distincts du contact rotor–stator : un volet expérimental et un volet numérique.

Le volet expérimental s’est inscrit dans la continuité des travaux effectués au LTDS sur la plate-forme "Machines Tournantes" et a principalement porté sur la reconfiguration du banc d’essais CASTOR, développé durant la thèse de Patricio Almeida, dans le but d’en étudier un nouveau point de fonctionnement. Un des objectifs a aussi été d’apporter des informations plus précises concernant la localisation et l’intensité des contacts lors des interactions, notamment à l’aide de mesures de champs de températures.

Du point de vue numérique, l’objectif principal a été d’introduire les phénomènes thermiques et thermomécaniques dans les outils de simulation existants pour bénéficier des travaux précédents, pour compléter les physiques simulées par rapport aux données d’essais déjà disponibles. Du fait de cet ajout, de nouvelles méthodes de modélisation, et de réduction ont dû être développées ou adaptées pour convenir aux besoins de cette étude. Une partie de la thèse a aussi été consacrée à l’implémentation d’une partie des développements numériques dans un outil de calcul industriel Safran. Ces travaux numériques ont été effectués sans ambition de remplacer les pratiques existantes, puisqu’elles ont déjà prouvé leur utilité, mais avec la volonté de les compléter pour mieux servir les objectifs industriels et scientifiques de compréhension des phénomènes de contact rotor–stator.

Organisation du mémoire

Afin de répondre aux objectifs établis, il a fallu détailler la modélisation des phénomènes de contact rotor–stator, en tenant compte des contraintes de modélisation de structures industrielles. Aussi, nous avons effectué une campagne d’essais sur le banc d’essais CASTOR afin d’obtenir des données expérimentales supplémentaires, en exploitant un point de fonctionnement du banc inexploré jusqu’alors. Ce mémoire se décompose donc en six chapitres détaillant chacun un aspect spécifique développé durant cette thèse.

Le premier chapitre présente le fonctionnement général d’une turbomachine aéronautique, pour bien cerner la problématique des interactions de contact rotor–stator. Ensuite, l’état de l’art de cette thématique particulière est présenté, tant en ce qui concerne les travaux de modélisation, que les travaux expérimentaux.

Le deuxième chapitre est dédié à la mise en place des modèles étudiés dans ce mémoire. Notamment, les hypothèses de comportement des matériaux constituant les structures étudiées sont posées et les formulations continues appropriées sont dérivées pour obtenir les systèmes d’équations aux dérivées partielles à intégrer afin de décrire le comportement des structures. Aussi, la discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis, choisie du fait des contraintes de simulation industrielles, appliquée au cas de la thermoélasticité linéaire est présentée.

L’application de la méthode des éléments finis sur des structures de géométrie complexe implique souvent l’utilisation de modèles fortement discrétisés, décrits par des systèmes d’équations différentielles de grandes dimensions de l’ordre du million de variables et plus encore. Le chapitre trois porte donc sur les stratégies de réduction de problèmes discrétisés par la méthode des éléments finis. On verra dans ce chapitre que de nombreuses méthodes sont disponibles et que la difficulté majeure consiste à déterminer la stratégie de réduction la plus pertinente pour chaque application. Cette difficulté est exacerbée dans le cas où plusieurs physiques sont couplées, puisque le choix de la méthode de réduction peut dans certains cas entraîner des conséquences sur la méthode de résolution à employer.

Après la semi-discrétisation spatiale, il est nécessaire pour résoudre systèmes d’équations différentielles décrivant le comportement des structures, réduits ou non, de sélectionner une méthode de

simulation adaptée au problème étudié. Du fait des non-linéarités fortes observées durant les phénomènes de contact rotor–stator et de la polyvalence des méthodes d’intégration temporelle pour la résolution des problèmes de contact, celles-ci ont été privilégiées dans ce travail et sont présentées au chapitre quatre. Plusieurs méthodes ont été testées. L’algorithme de Carpenter, déjà utilisé dans la thématique du contact rotor–stator, a d’abord été évalué pour notre cas d’étude. En raison de limites numériques imposées par cette méthode et mises en évidence dans ce chapitre, d’autres stratégies ont été explorées avec chacune son lot de limites et de difficultés. Finalement c’est une méthode de traitement du problème de contact implicite, développée dans le cadre de la dynamique non régulière, qui a été utilisée. Bien que celle-ci représente des développements mathématiques et algorithmiques autrement plus complexes que ceux associés à la méthode de Carpenter, on montre que cette méthode permet des gains significatifs de stabilité numérique et de temps de calcul.

Une fois les méthodes de discrétisation temporelle présentées et évaluées, on décrit au chapitre cinq l’application spécifique des méthodes de réduction et de résolution au cas du contact rotor–stator. Les équations spécifiques à ce cas sont dérivées et la paramétrisation et les hypothèses de calcul utilisées sont détaillées. Différents cas de simulation sont ensuite étudiés pour mettre en évidence le comportement des structures, en fonction de la vitesse de rotation et des différents paramètres de contact. Les gains apportés par la nouvelle stratégie de modélisation, tant en termes de précision que de stabilité sont aussi mis en évidence.

Le chapitre six est dédié à la présentation de la campagne effectuée sur le banc d’essais CASTOR. Le banc d’essais, le couple de pièces rotor–stator et les outils de traitement de signal utilisés sont présentés dans ce chapitre ainsi que les résultats attendus sur la base des essais précédents. Les données obtenues durant la campagne d’essais sont ensuite analysées, et on s’est attardé sur certains comportements et mesures ayant attrait au comportement thermomécanique.

Chapitre I

Contact rotor–stator

Sommaire du chapitre

1 Les turbomachines	5
1.1 Contexte historique	5
1.2 Fonctionnement	6
1.3 Amélioration des rendements de compression	7
2 L’interaction modale	9
2.1 Phénoménologie de l’interaction modale	9
2.2 Remarques sur les travaux de Schmiechen	13
3 Phénomènes d’usure	15
4 Problèmes de contact en thermomécanique	15
5 Bilan du chapitre	16

La recherche de performances optimales des moteurs aéronautiques impose l’étude des phénomènes de contact rotor–stator. Ces phénomènes interviennent sur de nombreux éléments du cycle de vie des turbomachines, les performances, la maintenance et la sûreté de fonctionnement. Pour garantir ces éléments auprès des clients et des autorités de régulation, il est nécessaire de justifier du bon comportement des moteurs vis-à-vis de ces phénomènes.

Ceux-ci, multi-échelles et multi-physiques sont intrinsèquement très complexes. Ils ont été et continuent d’être étudiés sous divers aspects, dont ceux de la dynamique et de la thermique des structures et du contact ou de la tribologie.

Ce chapitre rassemble une bibliographie des travaux portant à la fois sur les phénomènes de contact rotor–stator, mais aussi sur l’étude des phénomènes de contact dans un contexte thermomécanique, qui est une des particularités de cette thèse par rapport aux travaux précédents . Du fait de la diversité des sujets abordés dans ce document, la bibliographie présentée dans ce chapitre est amplement élargie dans les chapitres suivants concernant les méthodes de réduction et les algorithmes de simulation des problèmes de contact.

1 Les turbomachines

1.1 Contexte historique

Au début du XX^e siècle, les progrès techniques ont permis l’accès à la troisième dimension. Les premières et seconde guerres mondiales ont vite permis aux armées des différents belligérants de

comprendre l'importance de celle-ci dans l'issue des combats. De la même façon, en temps de paix, les industriels ont compris les atouts du transport aérien dans le développement économique. Rapidement limités par le rapport poids–puissance des moteurs à pistons, les industriels ont commencé à se tourner vers les turbomoteurs durant la seconde guerre mondiale, bien que contraints par les matériaux et outils de dimensionnement disponibles à l'époque. Depuis lors, l'augmentation des performances des moteurs aéronautiques a constitué le principal objectif des constructeurs. Cette performance englobant plusieurs aspects, que ce soit la consommation spécifique, la pollution, le bruit ou les coûts de fonctionnement. Ces enjeux sont devenus cruciaux dans le contexte actuel de changement climatique et d'augmentation du trafic aérien.

1.2 Fonctionnement

Toute turbomachine doit réaliser un cycle faisant intervenir un mélange carburant / comburant en y appliquant une compression, une combustion, puis une détente. Le but recherché étant la récupération d'un travail utilisable. Ce principe de base est valide pour le moteur à essence d'une voiture, comme pour le réacteur d'un Airbus A380. La récupération d'énergie se fait dans le cas d'un *turbomoteur* au niveau des étages de turbine. Chaque étage est constitué d'une partie mobile, le *rotor*, et d'une partie fixe le, *stator*. Le rotor permet d'échanger de l'énergie cinétique avec le fluide, tandis que le stator permet de convertir l'énergie cinétique en pression.

Un moteur d'hélicoptère, dont une architecture est présentée en figure I.1, récupère l'énergie produite par le cycle pour entraîner la rotation des pales de l'hélicoptère. Cette transmission de couple se fait au niveau de la prise de force, qui constitue l'accouplement entre le moteur et la boîte de vitesses, dite *Boîte de Transmission Principale (BTP)*, de l'hélicoptère.

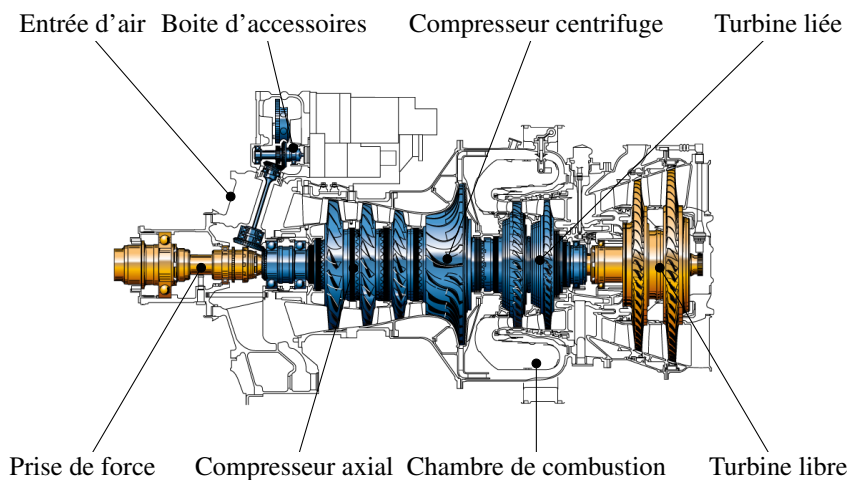


FIGURE I.1 – Coupe d'un turbomoteur Safran Helicopter Engines RTM322. Générateur de gaz (■), turbine libre (■).

Afin de fournir de l'énergie au rotor de l'hélicoptère, il faut avant tout assurer le fonctionnement permanent du cycle. Ceci est effectué par le *générateur de gaz*. Ce terme regroupe l'ensemble entrée d'air-compresseur-chambre de combustion-turbine liée qui constitue le cœur du turbomoteur. C'est au sein de cet ensemble que l'air est comprimé puis mélangé à du carburant. Le mélange est ensuite allumé dans la chambre de combustion et détendu dans la turbine liée. Cette turbine est alors entraînée par les gaz chauds, ce qui fournit un travail aux étages de compression, permettant de maintenir le cycle. Le démarrage ne peut pas s'effectuer de la sorte, mais est réalisé au moyen d'un démarreur situé dans la boîte d'accessoires.

Le générateur de gaz fournissant un excès d'énergie, on peut récupérer cet excédent au moyen de la

turbine *libre*, i.e. qui est portée par un arbre indépendant. Les turbomoteurs motorisant les hélicoptères ont des vitesses de rotation de l'ordre de 40 000 rpm.

Le détail du fonctionnement thermodynamique des turbomachines est décrit dans de nombreux ouvrages, dont [54, 131] et sera brièvement abordé ici. Les turbomachines décrites précédemment fonctionnent selon le cycle de Joule, souvent appelé cycle de Brayton par les anglophones. Les diagrammes pression-volume et température-entropie associés à ce cycle sont présentés en figure I.2. Les



FIGURE I.2 – Diagrammes thermodynamiques du cycle de Joule.

transformations correspondent à

- 1 – 2 : Compression de l'air froid, apport d'un travail au fluide ;
- 2 – 3 : Combustion du carburant, apport d'énergie au fluide ;
- 3 – 4 : Détente des gaz chauds, restitution d'énergie vers l'arbre ;
- 4 – 1 : Échappement des gaz brûlés, admission de gaz frais.

Le rendement η de ce type de cycle suit la loi

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (\text{I.1})$$

où γ est le coefficient de Laplace associé au fluide intervenant dans le fluide, qui vaut par exemple $\frac{7}{5}$ pour un gaz parfait diatomique. On comprend alors aisément que le rendement global d'une turbomachine est piloté par la pression et la température de combustion. En pratique, d'autres rendements interviennent, mais l'idée générale reste la même. Les concepts de turbomachines cherchent donc à avoir des rapports de compression et de détente ainsi que des températures de combustion les plus élevés possible.

1.3 Amélioration des rendements de compression

Plusieurs limites technologiques ralentissent l'amélioration de ces deux caractéristiques des turbomachines. Concernant les températures de combustion, la chute des performances mécaniques des matériaux constituant les éléments de la chambre de combustion et des étages de turbine avec la température limite l'enveloppe de températures de fonctionnement admissible. L'étape de compression consiste à accélérer un fluide au moyen d'une pièce mobile, puis à convertir l'énergie cinétique de ce fluide en pression statique au moyen d'une structure fixe, comme on peut le voir en figure I.3.

Ce principe est toutefois limité par certains effets de bord. En tête de pale, la géométrie des éléments constituant le rotor et le stator est généralement telle qu'il subsiste un espace, le jeu, entre les deux structures. En effet, sans cet espace, les pièces frotteraient continuellement les unes sur les autres, entraînant potentiellement des effets indésirables. Toutefois, ce jeu fonctionnel fait qu'une partie du fluide est mis en mouvement, mais n'est pas comprimé. Cette fuite entraîne par ailleurs l'apparition de vortex qui diminuent le rendement de la pale. La figure I.4 décrit le rotor et stator du compresseur

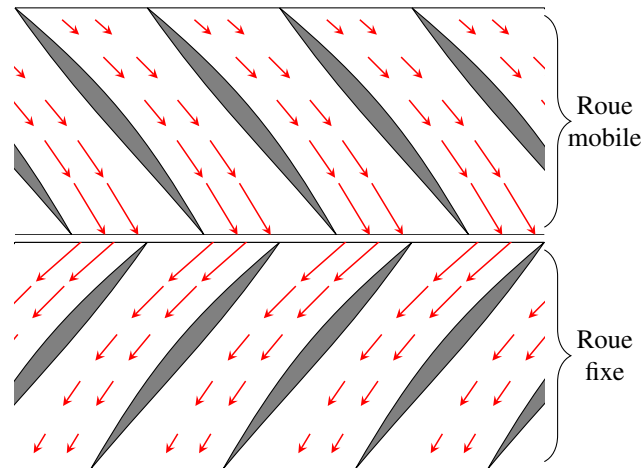


FIGURE I.3 – Principe de la compression d'un fluide dans un turbomoteur. Champ de vitesse stationnaire (\rightarrow).

centrifuge du banc CASTOR ainsi que les flux utile et de fuite apparaissant lors de la compression. D'autres distorsions et pertes ne sont pas représentées, mais peuvent être retrouvées dans la littérature. Dans l'ensemble, de nombreux travaux de recherche ont montré une forte corrélation entre rendement d'un étage de compresseur et jeu en tête de pale, dont [52, 85].

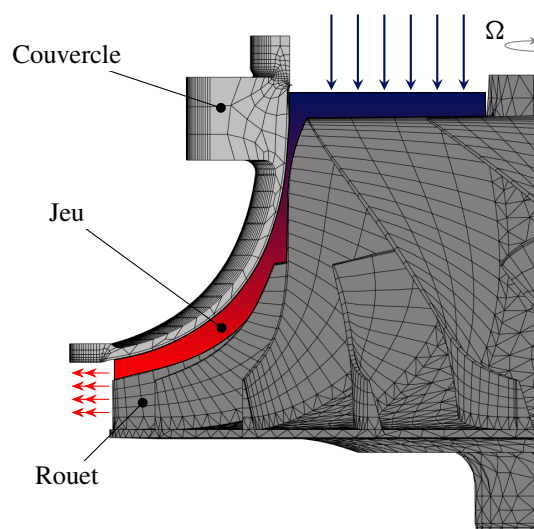


FIGURE I.4 – Écoulement de l'air dans un compresseur centrifuge aéronautique. Entrée axiale (\rightarrow) sortie radiale (\rightarrow) de l'air. Champ de pression stationnaire (■). Flux utile (), fuites ().

Pour augmenter les rendements de compression, les constructeurs de turbomachines ont donc cherché à réduire les jeux fonctionnels. Cette réduction a participé à une augmentation de la fréquence et de la criticité des contacts entre les parties fixes et tournantes, ayant plusieurs conséquences. La première étant une intensification de la fatigue et de l'usure des structures participant aux contacts, on parle alors de situations de contact rotor–stator non-accidentelles. La seconde est l'apparition de phénomènes de contact très intenses pouvant entraîner la ruine des structures voir de la machine, on parle alors de situations de contact accidentelles, ce qui a causé l'accident d'Albuquerque en 1973 [37]. La figure I.5 montre une photographie du moteur n°3 du DC-10 impliqué dans l'accident. L'évènement a été suffisamment énergétique pour que deux des trois moteurs de l'appareil aient été détruits : le premier par l'interaction modale phénomène qui sera présenté plus loin, le second par les débris du premier.

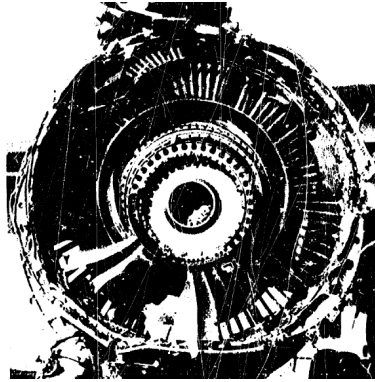


FIGURE I.5 – Accident d'un DC-10 près d'Albuquerque, 1973. Vue de face du moteur n°3 [37].

Les constructeurs, confrontés à ce type de phénomènes inconnus ou négligés jusqu'alors se sont donc intéressés à leur compréhension, du point de vue de la dynamique vibratoire, de la tribologie ou de la thermique. Pour cela, ils se sont appuyés sur des laboratoires de recherche académique et sur des développements internes. Cette thèse s'inscrit exactement dans ce contexte de partenariat entre les mondes industriel et académique.

2 L'interaction modale

Ce n'est que dans les années 1990 que les premiers travaux de recherche ont été développés de manière poussée pour mieux comprendre ces phénomènes de contact rotor-stator, notamment les travaux de Schmiechen [129, §3], proposant une interprétation de ces phénomènes sur la base d'une coïncidence de période spatiale, de sens de propagation des ondes et de période temporelle des vibrations sur le rotor et le stator. Cette interprétation est reprise ici pour expliquer l'origine du phénomène d'interaction modale et illustrer les ondes tournantes.

2.1 Phénoménologie de l'interaction modale

Pour expliquer le phénomène d'interaction modale, il est nécessaire de poser les bases de la modélisation du rotor et du stator, dont les repères d'étude sont une composante importante.

2.1.1 Repères stationnaire et tournant

Afin d'étudier le comportement des deux structures, on définit les repères R_S fixe dans un référentiel galiléen et R_R tournant autour de son axe \vec{z} (confondu avec celui du repère R_S). La figure I.6 présente un schéma détaillant ces repères. Un point $M \in \mathbb{R}^3$ est défini en coordonnées polaires par (r_R, θ_R, z_R) dans R_R et (r_S, θ_S, z_S) dans R_S . Les relations cinématiques entre les deux repères entraînent $r_R = r_S$, $z_R = z_S$ et

$$\theta_R = \theta_S - \theta_{R/S}(t) = \theta_S - \int_0^t \Omega_{R/S}(t) dt \quad (\text{I.2})$$

où $\theta_{R/S}(t)$ et $\Omega_{R/S}(t)$ sont respectivement la position angulaire relative et la vitesse de rotation entre les deux repères à un instant t donné. Dans le cas d'une vitesse de rotation constante, soit $\forall t, \Omega_{R/S}(t) = \Omega$, on obtient la relation de changement de repère

$$\theta_R = \theta_S - \Omega t \quad (\text{I.3})$$

les angles étant tous orientés avec la même convention.

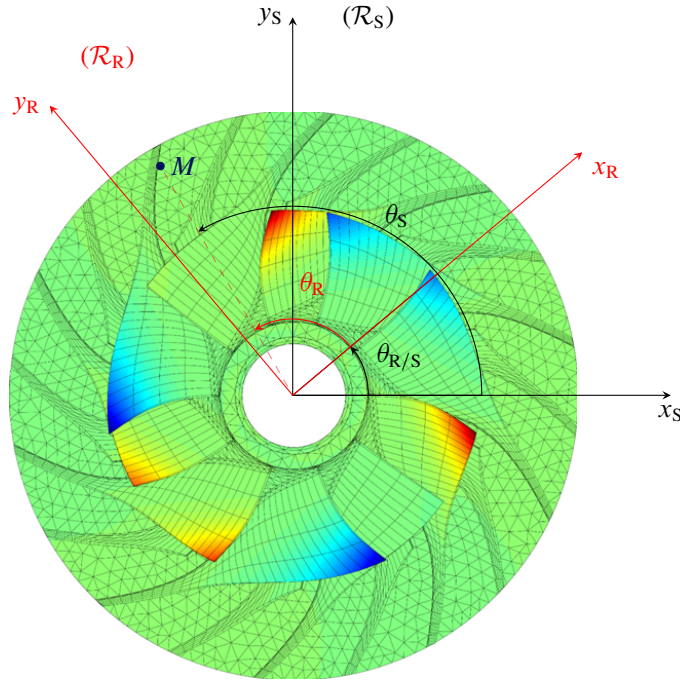


FIGURE I.6 – Repères fixe (stator) et mobile (rotor) dans une turbomachine.

2.1.2 Expression des ondes dans les deux repères

Les éléments constitutifs des turbomachines sont généralement des structures possédant des propriétés de symétrie particulières, dites de *symétrie cyclique*. Du fait de ces propriétés, on peut décrire un champ de l'une ou l'autre des structures au moyen d'ondes de pulsations spatiales croissantes, une description plus complète de la modélisation en symétrie cyclique est faite à la section III.5. Ainsi, le champ des déplacements $\mathbf{x}(\theta_R)$ des points M d'une structure dans le repère tournant (R_R) repérés par leur position angulaire θ_R peut s'exprimer comme une somme d'ondes *co-rotatives* et *contra-rotatives* notées respectivement au moyen des exposants \bullet^{co} et \bullet^{cr} .

$$\mathbf{x}(\theta_R) = \sum_{k=0}^K [\mathbf{x}_k^{\text{co}} e^{ik\theta_R} + \mathbf{x}_k^{\text{cr}} e^{-ik\theta_R}] \quad (\text{I.4})$$

où $K = E(N/2)$ dans le cas d'une structure cyclique à N secteurs, où $E(\bullet)$ désigne l'opérateur *partie entière*. Dans le repère fixe, afin de dissocier les dénominations, les ondes équivalentes sont dites *directes* ou *rétrogrades*. Ces définitions sont illustrées en figure I.7. Cette distinction entre les deux repères d'étude est très importante puisqu'en fonction de la vitesse de rotation du rotor, une onde contra-rotative pourra apparaître rétrograde, fixe ou directe, comme le montre la figure I.8. Ceci se démontre en exprimant la forme d'une onde se propageant sur une structure dans le repère qui lui est attaché, puis en appliquant le changement de repère. En supposant que la structure ne répond que sur une onde de pulsation $\omega = \omega_{kR}$, la pulsation propre d'un mode à k diamètres nodaux de la structure liée au repère mobile, le déplacement \mathbf{x} dans ce repère se simplifie en

$$\mathbf{x}_R(\theta_R, t) = (\mathbf{x}_k^{\text{co}} e^{ik\theta_R} + \mathbf{x}_k^{\text{cr}} e^{-ik\theta_R}) \cos(\omega_{kR} t). \quad (\text{I.5})$$

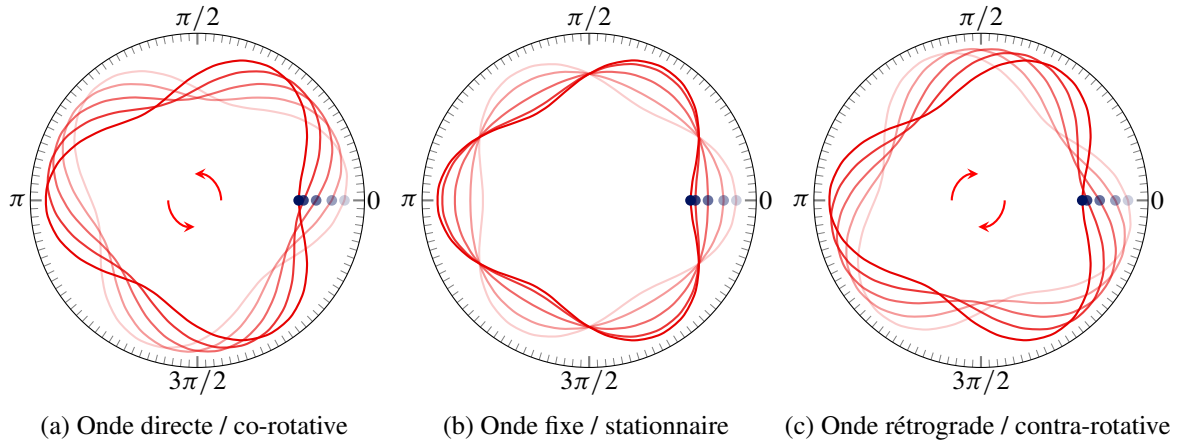


FIGURE I.7 – Ondes à trois diamètres nodaux sur une structure cyclique. Point de position angulaire nulle (\bullet), temps normalisé $t = 1$ (—), 2 (—), 3 (—), 4 (—), 5 (—), sens de propagation de l'onde dans le repère fixe (\curvearrowright).

Dans le cas d'une onde stationnaire, $\|\mathbf{x}_k^{\text{co}}\| = \|\mathbf{x}_k^{\text{cr}}\| = \|\mathbf{x}_k\|$. De plus, comme $e^{ik\theta_R} + e^{-ik\theta_R} = 2 \cos(k\theta_R)$ et que la fonction cos est paire,

$$\mathbf{x}_R = \begin{cases} 2 \cos(k\theta_R) \cos(\omega_{kR} t) \mathbf{x}_k & \text{(I.6a)} \\ (\cos(+\omega_{kR} t + k\theta_R) + \cos(-\omega_{kR} t + k\theta_R)) \mathbf{x}_k & \text{(I.6b)} \\ (\cos(\omega_{kR}^{\text{co}} t + k\theta_R) + \cos(\omega_{kR}^{\text{cr}} t + k\theta_R)) \mathbf{x}_k & \text{(I.6c)} \\ (\cos(\omega_{kR}^{\text{co}} t - k\theta_R) + \cos(\omega_{kR}^{\text{cr}} t - k\theta_R)) \mathbf{x}_k & \text{(I.6d)} \end{cases}$$

En appliquant le changement de repère (I.3) à \mathbf{x}_R , on obtient le déplacement \mathbf{x}_S de la structure dans le repère fixe (R_S)

$$\mathbf{x}_S = \begin{cases} (\cos(\omega_{kR}^{\text{co}} t - k(\theta_S - \Omega t)) + \cos(\omega_{kR}^{\text{cr}} t - k(\theta_S - \Omega t))) \mathbf{x}_k & \text{(I.7a)} \\ (\cos((\omega_{kR}^{\text{co}} + k\Omega) t - k\theta_S) + \cos((\omega_{kR}^{\text{cr}} + k\Omega) t - k\theta_S)) \mathbf{x}_k & \text{(I.7b)} \\ (\cos(\omega_{kS}^{\text{co}} t - k\theta_S) + \cos(\omega_{kS}^{\text{cr}} t - k\theta_S)) \mathbf{x}_k & \text{(I.7c)} \end{cases}$$

Ainsi le changement de repère entraîne un changement des pulsations apparentes des vibrations de la structure mobile de sorte que

$$\begin{cases} \omega_{kS}^{\text{co}} = \omega_{kR}^{\text{co}} + k\Omega & \text{(I.8a)} \\ \omega_{kS}^{\text{cr}} = \omega_{kR}^{\text{cr}} + k\Omega. & \text{(I.8b)} \end{cases}$$

Ces relations sont illustrées par la figure I.9.

La vitesse de rotation Ω_{kEO} telle que $\omega_{kS}^{\text{cr}} = 0$ est appelée *engine order speed* dans [129] ou *vitesse d'harmonique* en français. Cette vitesse correspond à un changement de perception des vibrations de la structure tournante vues du repère fixe. En effet, dans le cas d'une onde contra-rotative (se déplaçant dans la direction opposée à la rotation du rotor), pour des vitesses $\Omega < \Omega_{kEO}$, l'onde est rétrograde (vue du repère fixe). Pour $\Omega = \Omega_{kEO}$, celle-ci semble fixe, bien que contra-rotative. Pour des vitesses plus élevées, l'onde est directe vue du repère fixe.

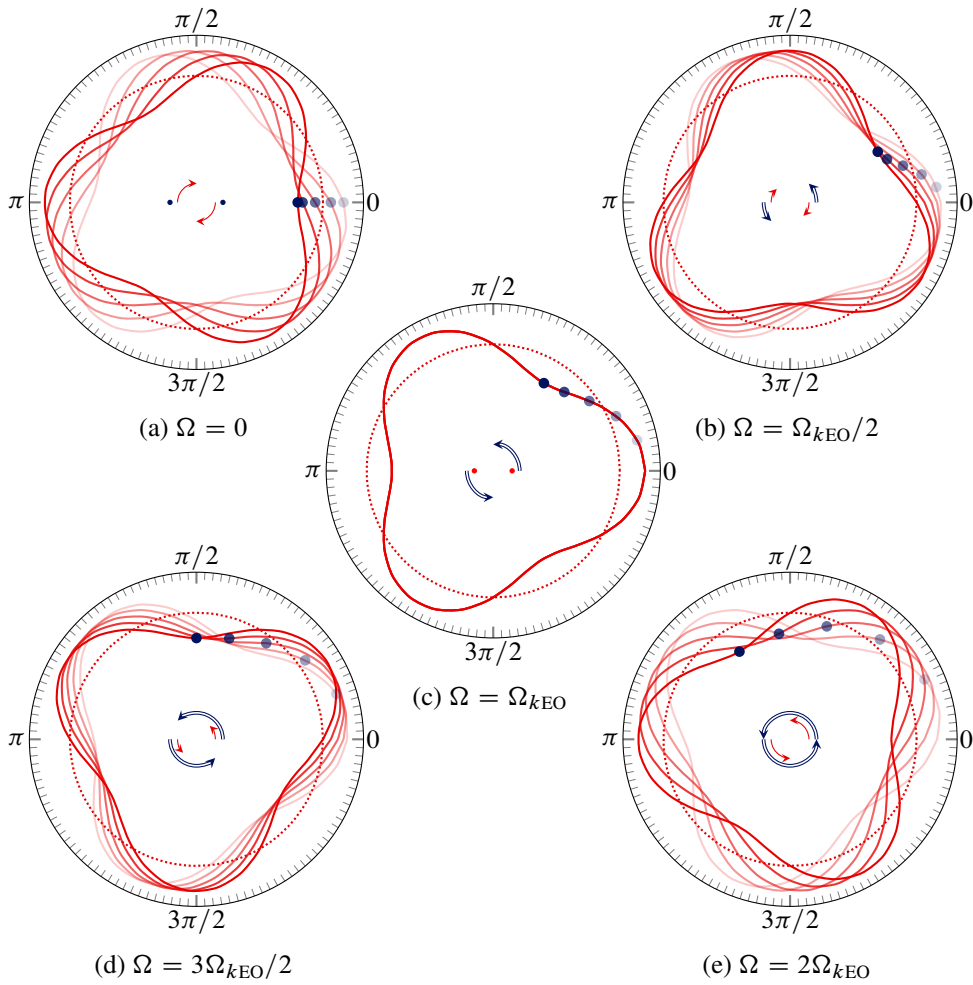


FIGURE I.8 – Changement d’apparence d’une onde contra-rotative vue du repère fixe en fonction de la vitesse de rotation. Forme de l’onde pour $t = 1$ (—), 2 (—), 3 (—), 4 (—), 5 (—) ms. Sens de la vitesse de rotation (\curvearrowright), sens de propagation de l’onde dans le repère fixe (\curvearrowleft). Point du rotor de position angulaire nulle (\bullet) dans le repère mobile.

2.1.3 Conditions d’interaction modale

La section précédente présente les ondes progressives ou stationnaires pouvant apparaître sur des structures à symétrie cyclique soumises à des charges dynamiques. Du fait des faibles jeux fonctionnels entre les parties fixes et tournantes des compresseurs de turbomachines actuelles, l’étude des interactions modales rotor–stator au sein de ces structures est particulièrement pertinente. En particulier, dans les compresseurs centrifuges de moteurs d’hélicoptères comme au niveau des soufflantes de réacteurs à double flux, la géométrie des composants entraîne une flexibilité particulière des deux structures, facilitant les échanges d’énergie lors des contact et l’apparition de niveaux de déformation importants. Le phénomène d’interaction modale correspond au cas où les deux structures se déforment selon une onde de même fréquence spatiale (nombre de diamètres nodaux) et de même pulsation apparente dans l’un des deux repères [129, §3.2], [7, §1.1.1].

Dans le cas du banc CASTOR, les fréquences propres des deux structures mesurées à l’arrêt pour les premiers modes à trois diamètres nodaux sont telles que $|\omega_{3S}| < |\omega_{3R}|$. L’interaction attendue serait donc une interaction entre un mode rétrograde sur le stator et contra-rotatif sur le rotor comme le montre la figure I.10a. On peut remarquer que dans une telle situation, comme les vitesses de rotation

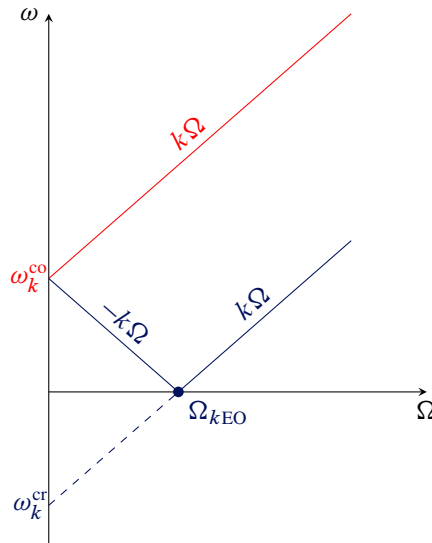


FIGURE I.9 – Pulsations apparentes d’une onde se propageant sur la structure mobile vues du repère fixe.

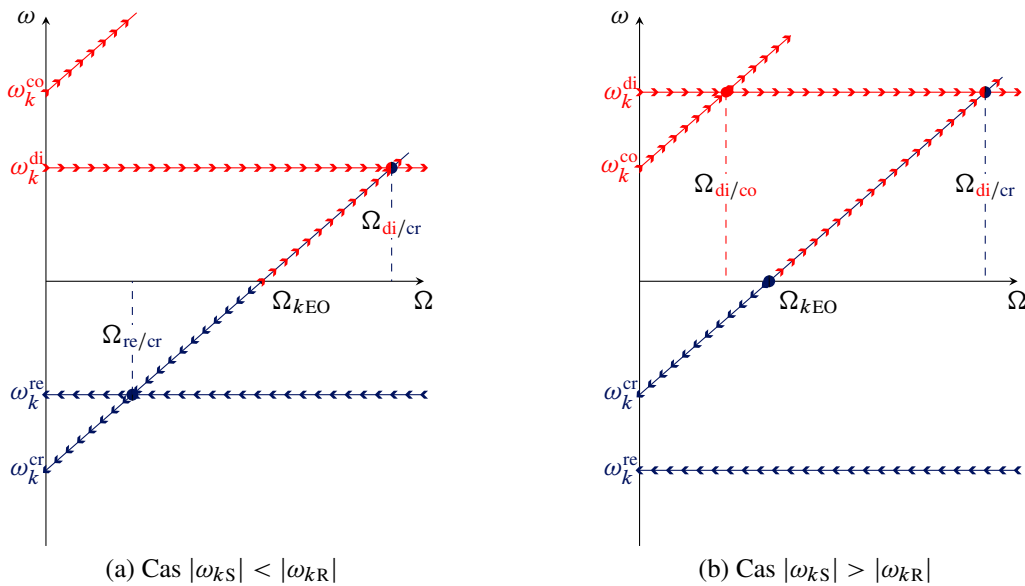


FIGURE I.10 – Diagrammes de Campbell rotor-stator exprimés dans le repère fixe (lié au stator). Pulsation d’un mode contrarotatif / rétrograde (—), Pulsation d’un mode co-rotatif / direct (—), sens de propagation de l’onde vue du repère fixe : directe (>>>), rétrograde (<<<).

admissibles du banc sont relativement faibles (par rapport aux turbomoteurs fonctionnels), l’onde contra-rotative sur le rotor est aussi rétrograde vue du repère fixe ($\Omega < \Omega_{3EO}$).

2.2 Remarques sur les travaux de Schmiechen

Schmiechen modélise le transfert d’énergie entre les deux structures de la façon suivante. L’effort de friction est modélisé comme un effort de frottement de Coulomb

$$\vec{f}_T = -\text{sign}(\vec{v} \cdot \vec{e}_T)\mu\|\vec{f}_N\| \cdot \vec{e}_T \tag{I.9}$$

où \vec{f}_T est l'effort tangentiel de contact, \vec{f}_N est l'effort normal de contact, μ est le coefficient de frottement de Coulomb supposé indépendant de la vitesse relative entre les deux structures \vec{v} et \vec{e}_T est le vecteur unitaire tangent à la surface locale de contact orienté dans la direction de la vitesse de glissement. D'abord, Schmiechen précise que le travail des efforts de contact sur une période vibratoire s'écrit

$$E_{\text{cycle}} = \int_{\text{cycle}} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{cycle}} \vec{f} \cdot \vec{v} dt \quad (\text{I.10})$$

Dans la mesure où les efforts de contact peuvent être décomposés en deux composantes locales, une normale, et une tangentielle on peut expliciter le travail comme

$$E_{\text{cycle}} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_R}} (f_N v_N + f_T v_T) dt \quad (\text{I.11})$$

Les travaux fournis par les deux types d'efforts sont ensuite étudiés séparément et de manière qualitative. Schmiechen donne ainsi les formes des déplacements, vitesses et efforts de contacts (normaux et tangentiels) représentés en figure I.11.

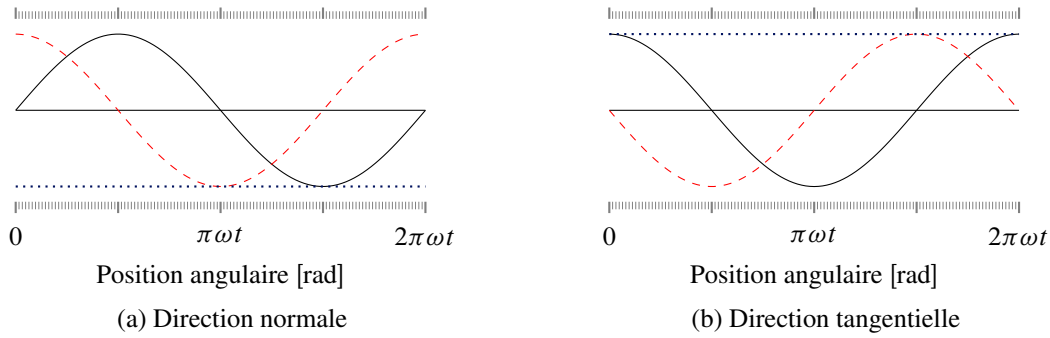


FIGURE I.11 – Trace des déplacements (—), vitesses (---), et efforts (····) durant les interactions, au niveau des têtes de pales. Repris de [129, figs. 3-17, 3-18].

On peut voir que la modélisation des efforts effectuée par Schmiechen suppose d'abord un contact permanent sur une période vibratoire puisque les efforts de contact sont non nuls sur toute la période considérée. En suivant cette approche, l'énergie E_{cycle} fournie par les efforts normaux est nulle sur un cycle, puisque les efforts normaux sont constants, mais que la vitesse normale change de signe au passage de la demi-période. De manière un peu surprenante, le bilan d'énergie proposé par Schmiechen n'est pas effectué au niveau de la zone de contact. En effet, pour un contact unilatéral, les efforts normaux ne travaillent pas (que les deux structures soient flexibles ou non) car les vitesses normales relatives sont nulles au moment du contact entre les deux structures.

Une autre incohérence de l'interprétation de Schmiechen des efforts de contact concerne les efforts tangentiels. Même si l'on peut considérer en première approche que les efforts tangentiels sont de signe identique durant les contacts et sur toute une période, il est généralement admis que la vitesse tangentielle en tête de pale ne change pas de signe du fait des vitesses de rotation élevées de la structure tournante par rapport aux vitesses vibratoires considérées. Du fait de la relation (I.9), si les efforts de contact tangentiels et normaux sont de signe constant, la vitesse tangentielle doit l'être aussi, ce qui est en désaccord avec les schémas de Schmiechen.

Enfin, dans la suite de son étude, il ne considère que des contacts partiels sur une période, ce qui n'est pas en adéquation avec ses analyses précédentes. Ces derniers schémas sont repris en figure I.12. On peut voir sur la figure I.12 que le contact n'a lieu que pour des positions angulaires où le déplacement axial est négatif. Cette approche ne repose toutefois sur aucune hypothèse précise.

Les travaux de Schmiechen ont permis de déterminer les conditions favorisant l'apparition d'inter-

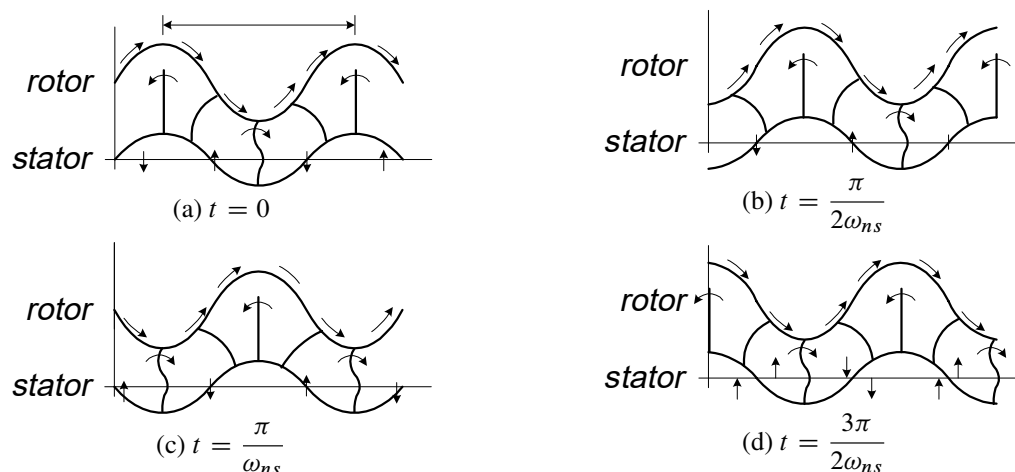


FIGURE I.12 – Modélisation simplifiée de l'interaction rotor–stator d'après Schmiechen. Les symboles (—) sur le rotor indiquent le mouvement tangentiel relatif entre les deux structures. Les flèches (—) sur le disque du stator représentent le déplacement axial du disque et les flèches (—) sur les pales du stator représentent leur mouvement de flexion.

action modale et sont toujours d'actualité. En revanche, certaines incohérences ou simplifications dans ces travaux ne permettent pas d'expliquer plus précisément certains phénomènes rencontrés lors de cas d'interaction plus réalistes. Ces cas d'interaction ont nécessité des travaux numériques plus poussés, comme dans [90, 91].

3 Phénomènes d'usure

Les phénomènes d'usure sont des phénomènes importants dans les cas de contact rotor–stator. En effet, pour diminuer la criticité des contacts et éviter certains phénomènes dangereux comme le *feu titane* [137], on applique généralement une couche de matériau abrasable sur une des pièces pouvant entrer en contact. Dans les compresseurs ce sont les stators qui sont revêtus, en général par projection thermique d'un matériau à base d'aluminium. Parfois, ce sont des structures de type nid d'abeilles qui sont employées [34]. Une revue approfondie des matériaux utilisés comme revêtement abrasable et de leurs propriétés est fournie dans [50, §1.3].

Bien que la criticité des contacts diminue, la participation des phénomènes d'usure à la dynamique des structures en contact n'a rien de trivial et de nombreuses études ont porté sur la modélisation de ces phénomènes dans le contexte du contact rotor–stator [20, 24, 32, 127]. Des bancs d'essais dédiés à la caractérisation fine des matériaux abrasables sont aussi utilisés pour fournir des paramètres de modélisation adéquats lors de simulations de contact rotor–stator [16, 28, 50]. D'autres sont consacrés à l'étude des contacts de manière plus générale, en permettant d'établir des contacts de façon contrôlée et avec des vitesses de rotation proches de celles des moteurs en service [115, 116] et plus récemment [111].

Le banc d'essais CASTOR étant équipé d'un stator revêtu d'abrasable, ces travaux ont permis de mieux comprendre les résultats des essais de contact, en revanche, les phénomènes d'usure n'ont pas pu être intégrés dans les travaux de modélisation effectués durant cette thèse.

4 Problèmes de contact en thermomécanique

L'étude des problèmes de contact dans un contexte thermomécanique est une thématique de recherche assez développée. En effet, dans le cas de contacts glissants, l'échauffement des structures est une conséquence inévitable de la dissipation de l'énergie mécanique. De nombreuses modélisations de

ces phénomènes ont été proposées [53, 69, 144]. Ces modélisations tiennent compte des phénomènes de conduction, convection, radiation et génération de chaleur intervenant dans les interfaces de contact

Cependant, dans le contexte de l’interaction rotor–stator, ces phénomènes sont relativement peu étudiés. Cela tient en partie au fait que la prédiction du comportement uniquement mécanique des structures en contact est déjà relativement complexe. Par ailleurs, pour le type de structures étudiées les phénomènes thermiques et thermomécaniques sont généralement considérés du second ordre par rapport à la dynamique des structures. En revanche, plusieurs travaux ont porté sur l’effet des phénomènes thermiques sur le comportement de rotors simplifiés et d’arbres [14, 67, 146] principalement en lien avec le phénomène de *thermal bow*, c’est-à-dire l’apparition d’une flèche d’un arbre due à un chargement thermique asymétrique par rapport à l’axe géométrique de l’arbre. Ces travaux sont à distinguer de ceux qui nous intéressent ici, car ils se limitent aux arbres et ne considèrent pas des roues aubagées, mais ils sont à associer aux contacts rotor–stator dans les joints d’étanchéité.

Quelques travaux, expérimentaux comme numériques, se sont toutefois intéressés à l’influence et à la mesure des effets thermiques sur des roues aubagées soumises à des échauffements par friction [9, 20, 102, 103]. Ces travaux ont pour certains guidé les choix de modélisation faits dans cette thèse, d’autres ont constitué la base de départ des travaux expérimentaux, au travers du banc CASTOR.

La modélisation des phénomènes thermiques et thermomécaniques entraîne de nombreuses difficultés, comme on le verra par la suite, tant du point de vue de la modélisation (ajout de degrés de liberté), que de la réduction (choix de la base) ou de la résolution numérique (couplage fort ou faible, problèmes de stabilité, oscillations).

5 Bilan du chapitre

La bibliographie présentée reprend les principaux travaux concernant les phénomènes de contact rotor–stator dans les turbomachines. D’autres revues bibliographiques sont disponibles [81, 101]. Cette bibliographie a été présentée en classant les différents travaux par phénomène plutôt que par caractère expérimental ou numérique et en restant focalisé sur le cas particulier du contact rotor–stator dans les turbomachines. Cette thèse ayant pour la partie numérique porté sur le couplage de domaines assez différents comme la réduction de modèles (chapitre III) ou les algorithmes d’intégration temporelle des problèmes de contact (chapitre IV), le tout dans un contexte de couplage thermomécanique, des références bibliographiques plus précises ont été ajoutés quand nécessaire.

Chapitre II

Modélisation des structures et du contact

Sommaire du chapitre

1 Modélisation du contact thermoélastodynamique	17
1.1 Définitions	17
1.2 Formulation continue du problème au sein des solides en contact	18
1.3 Formulation continue du problème au sein de l'interface de contact	21
1.4 Comportement mécanique et thermique de l'interface de contact	22
2 Discrétisation spatiale du problème	26
2.1 Formulation variationnelle du problème	26
2.2 Application de la méthode des éléments finis	28
3 Présentation des modèles	30
3.1 Modèle simplifié de poutre	30
3.2 Couple rotor–stator de compresseur centrifuge	31

Ce chapitre décrit la mise en équation des problèmes de contact étudiés par la suite. On ne traite ici que des contacts entre deux solides déformables possédant des propriétés thermiques. Les lois régissant les comportements mécanique et thermique des solides sont présentées, ainsi que les lois de contact. La dérivation des équations sur les domaines solides est ensuite complétée par une discrétisation spatiale au moyen de la méthode des éléments finis.

1 Modélisation du contact thermoélastodynamique

1.1 Définitions

On cherche à décrire le comportement de milieux continus solides, élastiquement déformables, pouvant emmagasiner et conduire de la chaleur. On définit deux solides occupant dans leur configuration de repos les domaines notés Ω^l avec $l \in \{1, 2\}$, potentiellement en contact. Ces solides possèdent des propriétés de masse volumique ρ^l , température T^l , champ de flux de chaleur \vec{q}^l , champ de déformations $\bar{\epsilon}^l$, champ de contraintes $\bar{\sigma}^l$. Afin de simplifier les notations, quand l'exposant \bullet^l n'est pas nécessaire, celui-ci est omis. La frontière Γ^l du domaine Ω^l peut se décomposer en plusieurs sous domaines : Γ_u^l où le déplacement est imposé, Γ_f^l où la densité surfacique d'efforts est imposée, Γ_T^l où la température est imposée et Γ_q^l où la densité surfacique de flux de chaleur est imposée. Le domaine Γ_c^l est la partition du domaine Γ^l où les deux solides sont en contact.

De par leur définition, les domaines définis ci-dessus et illustrés en figure II.1 vérifient les propriétés

$$\begin{cases} \Gamma^l = \Gamma_u^l \cup \Gamma_f^l \cup \Gamma_T^l \cup \Gamma_q^l \cup \Gamma_c^l & \text{(II.1a)} \\ \Gamma_u^l \cap \Gamma_f^l = \emptyset & \text{(II.1b)} \\ \Gamma_T^l \cap \Gamma_q^l = \emptyset & \text{(II.1c)} \end{cases}$$

Ces sous-domaines permettent de définir les conditions aux limites ainsi que les conditions initiales problème.

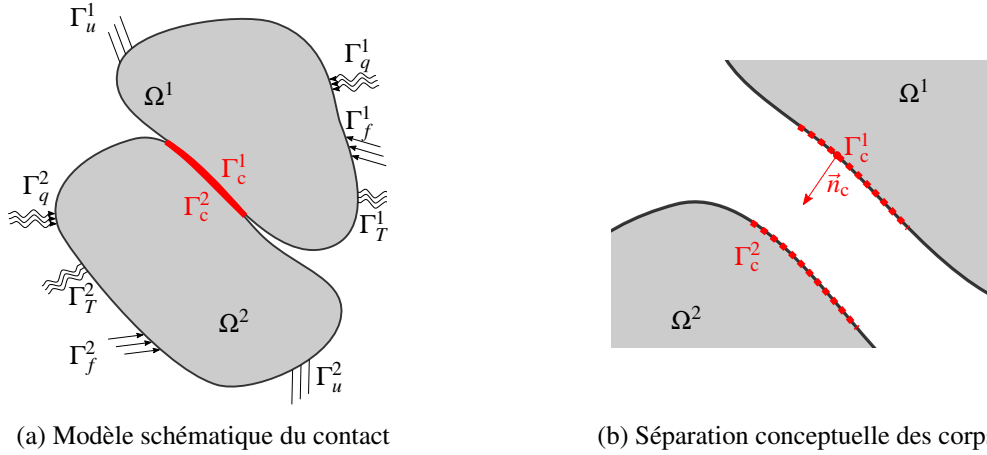


FIGURE II.1 – Domaines dans la formulation du problème de contact.

1.2 Formulation continue du problème au sein des solides en contact

Les formulations décrites dans cette section sont largement inspirées de [7, 126]. Elles sont communément admises pour la modélisation du comportement de structures thermoélastiques.

1.2.1 Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique (II.2) suppose l'existence d'une fonction E de l'état thermodynamique du système, appelée *énergie interne*, additive, ayant la dimension d'un travail, telle qu'à chaque instant la somme de la dérivée particulière de l'énergie interne de Ω et de la dérivée particulière de l'énergie cinétique K de Ω est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur Ω , P_{ext} et du taux de chaleur reçue par le système, Q_{ext} :

$$\dot{E} + \dot{K} = P_{\text{ext}} + Q_{\text{ext}} \quad \text{(II.2)}$$

où l'énergie cinétique s'écrit

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \vec{v}^2 dv \quad \text{(II.3)}$$

et l'énergie interne,

$$E = \int_{\Omega} \rho e dv. \quad \text{(II.4)}$$

On introduit alors les grandeurs e et $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$, respectivement la densité massique d'énergie interne ou énergie interne spécifique et le vecteur vitesse. Cette écriture est valable pour tout sous-domaine $\tilde{\Omega} \subset (\Omega \setminus \Gamma_c)$.

Dans le cas d'un système soumis à des efforts volumiques \vec{f}_v et surfaciques \vec{f}_s , et en supposant que les échanges de chaleur proviennent de sources volumiques q_v et surfaciques q_s , on peut exprimer la puissance des efforts extérieurs P_{ext} sous la forme

$$P_{\text{ext}} = \int_{\tilde{\Omega}} \rho \vec{f}_v \cdot \vec{v} dv + \int_{\Gamma_f} \vec{f}_s \cdot \vec{v} da \quad (\text{II.5})$$

et le flux de chaleur reçue Q_{ext} par

$$Q_{\text{ext}} = \int_{\tilde{\Omega}} q_v dv + \int_{\Gamma_f} q_s da. \quad (\text{II.6})$$

En injectant ces notations dans l'expression du premier principe (II.2), on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\tilde{\Omega}} \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) dv = \int_{\tilde{\Omega}} (\rho \vec{f}_v \cdot \vec{v} + q_v) dv + \int_{\Gamma_f} (\vec{f}_s \cdot \vec{v} + q_s) da. \quad (\text{II.7})$$

Si le champ de vitesse réel \vec{v} est continu et continûment différentiable, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique au premier principe de la thermodynamique (II.2). Ce principe s'écrit

$$P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = \dot{K}, \quad (\text{II.8})$$

par conséquent, la variation d'énergie interne vaut

$$\dot{E} = Q_{\text{ext}} - P_{\text{int}}. \quad (\text{II.9})$$

On peut ensuite remplacer P_{int} par son expression au moyen de la représentation des efforts intérieurs par le tenseur des contraintes de Cauchy ce qui permet d'écrire

$$\int_{\tilde{\Omega}} \rho \dot{e} dv = \int_{\tilde{\Omega}} (\bar{\sigma} : \bar{d} + q_v) dv + \int_{\Gamma_f} q_s da \quad (\text{II.10})$$

Cette équation exprime le premier principe de la thermodynamique sous la forme globale d'une équation de bilan. Cet énoncé implique que la densité surfacique de flux de chaleur q_s reçue par le domaine $\tilde{\Omega}$ est supposée continue et de classe \mathcal{C}^1 en temps et en espace, et est définie dans Ω par un champ vectoriel $\vec{q}_s(\vec{x}, t)$ et dépend linéairement de $\vec{n}(\vec{x})$ en chaque point de Ω sous la forme d'un flux

$$q_s = -\vec{q}_s \cdot \vec{n}. \quad (\text{II.11})$$

Le vecteur \vec{q}_s est appelé *vecteur courant de chaleur* sortant au point M, où le champ \vec{q}_s est continu et de classe \mathcal{C}^1 . Cela signifie que les échanges de chaleur entre les éléments du système ne se font que par conduction entre les particules. Le taux de chaleur reçue par $\tilde{\Omega}$ s'écrit alors

$$Q_{\text{ext}} = \int_{\tilde{\Omega}} q_v dv - \int_{\Gamma_f} (\vec{q}_s \cdot \vec{n}) da \quad (\text{II.12})$$

et après application de la formule de la divergence,

$$Q_{\text{ext}} = \int_{\tilde{\Omega}} (q_v - \text{div}(\vec{q}_s)) dv. \quad (\text{II.13})$$

L'énoncé du premier principe sous la forme de l'équation (II.10) devient alors

$$\int_{\tilde{\Omega}} \rho \dot{e} dv = \int_{\tilde{\Omega}} (\bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{d}} + q_v - \text{div}(\vec{q}_s)) dv. \quad (\text{II.14})$$

Dont est déduite l'expression locale du premier principe de la thermodynamique, aussi appelée *équation de l'énergie* :

$$\rho \dot{e} = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{d}} + q_v - \text{div}(\vec{q}_s). \quad (\text{II.15})$$

1.2.2 Second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique postule l'existence d'une variable d'état appelée *température absolue* T , positive, et d'une fonction d'état thermodynamique du système, appelée *entropie*, additive et notée S telles que pour toute évolution réelle thermodynamiquement réversible de l'élément de matière considéré, $1/T$ est le facteur intégrant du taux de chaleur reçue. Et pour toute évolution réelle du domaine $\tilde{\Omega} \subset \Omega$

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} = \int_{\tilde{\Omega}} \rho \dot{s} dv \geq \int_{\tilde{\Omega}} \frac{q_v}{T} dv - \int_{\Gamma_f} \frac{\vec{q}_s}{T} \cdot \vec{n} da. \quad (\text{II.16})$$

où s désigne l'entropie massique (ou spécifique). Dans le cas d'une évolution réversible, cette inégalité devient une égalité. On en déduit l'expression locale du second principe, aussi appelée *inégalité fondamentale*

$$\rho \dot{s} + \text{div} \left(\frac{\vec{q}_s}{T} \right) - \frac{q_v}{T} \geq 0. \quad (\text{II.17})$$

1.2.3 Inégalité de Clausius-Duhem

En tenant compte de l'équation de l'énergie (II.15) et de l'inégalité fondamentale, on obtient l'inégalité

$$\bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{d}} + \rho(T\dot{s} - \dot{e}) - \frac{\vec{q}_s}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \geq 0 \quad (\text{II.18})$$

qui devient l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{d}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{\vec{q}_s}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \geq 0 \quad (\text{II.19})$$

lorsque l'on introduit l'énergie libre de Helmholtz ψ définie par $\psi = e - Ts$. Le membre de gauche de l'inégalité de Clausius-Duhem est souvent noté Φ . C'est la dissipation volumique dans la configuration courante.

On peut de plus scinder ce terme en deux composantes notées Φ_l (la dissipation intrinsèque volumique) et Φ_θ (la dissipation thermique volumique) telles que $\Phi = \Phi_l + \Phi_\theta$, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_l = \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{d}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) \end{array} \right. \quad (\text{II.20a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_\theta = -\frac{\vec{q}_s}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T). \end{array} \right. \quad (\text{II.20b})$$

La réversibilité thermodynamique d'une évolution du domaine $\tilde{\Omega}$ est définie par

$$\forall t, \quad \forall M \in \tilde{\Omega}, \quad \Phi_l = \Phi_\theta = 0. \quad (\text{II.21})$$

1.2.4 Loi de comportement thermoélastique linéaire isotrope

Sous l'hypothèse de faibles perturbations du système, pour un système initialement au repos et en considérant que ψ ne dépend que du tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$ et de la température T , les lois d'état de la thermoélasticité s'écrivent :

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\epsilon}}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (\text{II.22})$$

Une linéarisation à l'ordre 1 de ces lois, conjointement avec la loi de conduction de Fourier donne la loi de comportement thermoélastique linéaire

$$\bar{\sigma} = \bar{E} : [\bar{\epsilon} - \alpha(T - T_1)\bar{I}] \quad (\text{II.23})$$

et l'équation de la chaleur

$$\rho c \dot{T} = q_v + \lambda \Delta T + \alpha(T - T_1) \bar{I} : \bar{E} : \dot{\bar{\epsilon}} T_1 \quad (\text{II.24})$$

où \bar{E} est le tenseur d'élasticité et α le coefficient de dilatation du matériau considéré. T_1 est la température de référence, c est la capacité thermique du matériau, λ sa conductivité thermique, et q_v une source volumique de chaleur. \bar{I} représente le tenseur identité d'ordre deux.

1.2.5 Analyse élastodynamique

La loi de conservation de la quantité de mouvement permet de formuler l'équation du mouvement au sein du domaine Ω . Résoudre le problème élastodynamique consiste alors à trouver les champs de déplacement $\vec{u}(\vec{x}, t)$, de température $T(\vec{x}, t)$ et de contraintes $\bar{\sigma}(\vec{x}, t)$ pour un point $M(\vec{x}) \in \Omega^l$ de sorte que Les équations (II.23) à (II.27) soient respectées. Parmi ces équations, on distingue

— L'équation d'équilibre local

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall M \in \Omega^l \quad \text{div}(\bar{\sigma}) + \vec{f} = \rho \vec{u} \quad (\text{II.25})$$

— Les conditions aux limites

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Gamma_u^l \quad \vec{u} = \vec{u}_L \\ \forall M \in \Gamma_t^l \quad T = T_L \\ \forall M \in \Gamma_f^l \quad \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{f}_L \\ \forall M \in \Gamma_q^l \quad -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} = q_L \end{array} \right. \quad (\text{II.26a})$$

$$(\text{II.26b})$$

$$(\text{II.26c})$$

$$(\text{II.26d})$$

— Les conditions initiales

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \Omega^l \quad \vec{u} = \vec{u}_1 \\ \forall M \in \Omega^l \quad T = T_1. \end{array} \right. \quad (\text{II.27a})$$

$$(\text{II.27b})$$

1.3 Formulation continue du problème au sein de l'interface de contact

Une modélisation du comportement thermomécanique d'une interface a été proposé par plusieurs auteurs [79, 136, 144]. Cette formulation vient compléter les équations régissant les solides en contact en introduisant un potentiel d'interface ψ_Γ , ainsi qu'une inégalité de Clausius-Duhem pour l'interface de contact.

Dans le cas présent, la loi d'interface prend uniquement en compte une condition de contact unilatéral de Signorini, du frottement de Coulomb et un terme d'échauffement par friction. Les différents phénomènes sont décrits par les efforts de contact et les déplacements relatifs normaux (\vec{f}_N, \vec{u}_N) et tangentiels (\vec{f}_T, \vec{u}_T) et par les température absolue T_Γ et l'entropie s_Γ de l'interface. T^1 et T^2 sont les températures absolues des deux solides en contact au niveau de l'interface, \vec{q}_c^1 et \vec{q}_c^2 sont les flux thermiques de contact de chaque solide vers l'interface. D'autres phénomènes peuvent être pris en compte dans la loi de contact, des phénomènes d'usure par exemple [7, 31].

La présence d'une interface Γ_c dans le domaine Ω impose de compléter les écritures de la section II.1.2.5 par des relations régissant le comportement de l'interface de discontinuité entre les sous domaines $\Omega^l, l \in \{1, 2\}$:

$$\forall M \in \Gamma_c \quad \begin{cases} \dot{e}_\Gamma = [-\bar{\sigma} \cdot \vec{v} + \vec{q}_s] \cdot \vec{n}_c = \vec{f}_s \cdot (\vec{v}^1 - \vec{v}^2) + (\vec{q}^1 - \vec{q}^2) \cdot \vec{n}_c & \text{(II.28a)} \\ \dot{s}_\Gamma \geq \left[\frac{\vec{q}_s}{T} \right] \cdot \vec{n}_c = \left[\frac{q_s^1}{T^1} - \frac{q_s^2}{T^2} \right] \cdot \vec{n}_c & \text{(II.28b)} \end{cases}$$

Les efforts de contact et les vitesses sont décomposés en deux participations, l'une normale l'autre tangentielle, notées respectivement au moyen des indices \bullet_N et \bullet_T .

$$\begin{cases} p_N = \vec{f}_s \cdot \vec{n}_c & \vec{p}_T = (\bar{I} - \vec{n}_c \otimes \vec{n}_c) \cdot \vec{f}_s & \text{(II.29a)} \\ v_N = \vec{v} \cdot \vec{n}_c & \vec{v}_T = (\bar{I} - \vec{n}_c \otimes \vec{n}_c) \cdot \vec{v} & \text{(II.29b)} \end{cases}$$

En plus de ces notations, une énergie libre de Helmholtz surfacique $\psi_\Gamma = e_\Gamma - s_\Gamma T_\Gamma$ est introduite, ce qui permet d'écrire

$$\dot{\psi}_\Gamma + \dot{s}_\Gamma T_\Gamma + s_\Gamma \dot{T}_\Gamma = p_N(v_N^1 - v_N^2) + \vec{p}_T(\vec{v}_T^1 - \vec{v}_T^2) + (\vec{q}^1 - \vec{q}^2) \cdot \vec{n}_c \quad \text{(II.30)}$$

puis

$$p_N(v_N^1 - v_N^2) + \vec{p}_T(\vec{v}_T^1 - \vec{v}_T^2) - (\dot{\psi}_\Gamma + s_\Gamma \dot{T}_\Gamma) - T_\Gamma \left[\frac{\vec{q}^1}{T^1} - \frac{\vec{q}^2}{T^2} \right] \cdot \vec{n}_c + (\vec{q}^1 - \vec{q}^2) \cdot \vec{n}_c \geq 0. \quad \text{(II.31)}$$

En regroupant certains termes, une inégalité de Clausius-Duhem est obtenue pour l'interface de contact sous la forme

$$p_N v_N + \vec{p}_T \cdot \vec{v}_T - (\dot{\psi}_\Gamma + s_\Gamma \dot{T}_\Gamma) + \left[\frac{\vec{q}^1(T^1 - T_\Gamma)}{T^1} - \frac{\vec{q}^2(T^2 - T_\Gamma)}{T^2} \right] \geq 0. \quad \text{(II.32)}$$

1.4 Comportement mécanique et thermique de l'interface de contact

La surface de tout solide réel présente à des échelles variées une succession d'aspérités. On peut toutefois définir un plan moyen pour lequel la surface de creux et de bosses de part et d'autre de ce plan soit identique. Lors d'un contact, les aspérités se déforment jusqu'à permettre l'équilibre de la surface réelle de contact soumise aux efforts de contact. Différentes lois ont été développées pour essayer de modéliser les surfaces de contact et obtenir la relation entre la charge normale p_N et le jeu mesuré. Certaines de ces lois ont été déterminées expérimentalement, d'autres sont basées sur des approches plus théoriques [143, §5.1.2].

La formulation du problème de contact comme un problème de contrainte unilatérale est généralement employé lorsque la précision requise pour la modélisation locale du contact est assez faible. Il n'est alors pas nécessaire d'exprimer de relations constitutives de l'interface de contact [143]. On déduit les contraintes de contact à partir des contraintes de non-pénétration entre les solides en contact.

Il faut rappeler que le modèle que l'on cherche à développer dans ce travail n'est pas un modèle

tribologique, mais de dynamique des structures. Les lois utilisées restent donc macroscopiques et régularisent de nombreux aspects de la zone de contact (aspérités, hétérogénéité locales du matériau).

1.4.1 Fonction distance

La condition mathématique de non pénétration est écrite sous la forme $g_N \geq 0$ qui interdit de fait la pénétration entre les domaines Ω^l . La fonction distance g_N est calculée en supposant un solide *maître* et l'autre *esclave*, ces deux dénominations étant par nature interchangeable. Dans le cas du contact rotor–stator, il paraît intéressant d'utiliser le rotor comme solide maître puisque la zone potentiellement en contact, la tête de pale, est plus réduite que sur le stator, où toute la circonférence peut entrer en contact. En prenant Ω^1 le solide maître et Ω^2 le solide esclave, le point $M^2 \in \Gamma_c^2$ le plus proche de $M^1 \in \Gamma_c^1$ est déterminé par

$$M^2(M^1) = \operatorname{argmin}_{M \in \Gamma_c^2} \|M^1 - M\|_2 \quad (\text{II.33})$$

On peut alors calculer la fonction distance entre les deux solides Ω^l aux points $M^1 \in \Gamma_c^1$ et $M^2 \in \Gamma_c^2$

$$g_N = g_{N,0} + (\vec{u}(M^2) - \vec{u}(M^1)) \cdot \vec{n}_c \quad (\text{II.34})$$

où $g_{N,0}$ représente la distance initiale entre les deux points M^1 et M^2 . Les notions de normale de

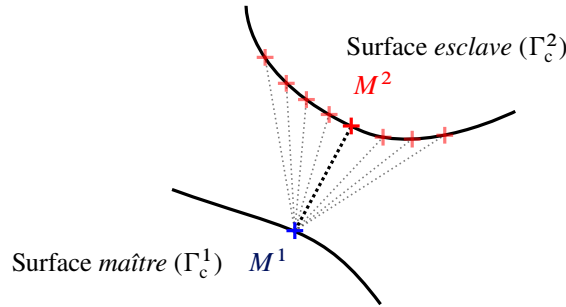


FIGURE II.2 – Notions de surface de contact maître et esclave pour un contact nœud–ligne.

contact et de fonction distance sont présentées en figure II.2. Le calcul de la fonction distance et donc la détermination des instants de contact peut nécessiter des calculs coûteux. Dans un contexte de modélisation complexe, où plusieurs points peuvent être candidats au contact, ou bien dans le cas de surfaces de contact non convexes, la détermination des jeux et des efforts de contact peut devenir extrêmement complexe. De nombreuses méthodes ont été développées afin de simplifier cette détermination, en approximant la forme des surfaces de contact par des polynômes ou en les encadrant par des formes géométriques simples [4, §3.3.3]. Lors d'une discrétisation par éléments finis, les surfaces de contact discrètes peuvent aussi être interpolées au moyen de fonctions linéaires [144] ou de B-splines [25]. Dans notre cas, nous avons considéré un nombre réduit de points de contact sur les structures de type rotor, par secteur. Le stator a été modélisé de manière continue sur la circonférence en supposant des déplacements comme une superposition de fonctions harmoniques. De plus, la normale de contact a été supposée purement unidirectionnelle.

1.4.2 Loi de contact unilatéral

Les conditions de contact unilatéral, dites de Hertz-Signorini-Moreau ou de Karush-Kuhn-Tucker [143, §5.1.1] se mettent sous la forme

$$\forall M \in \Gamma_c^1 \quad p_N \geq 0, \quad g_N \geq 0, \quad p_N g_N = 0 \quad (\text{II.35})$$

ou encore

$$\forall M \in \Gamma_c^1 \quad 0 \leq g_N \perp p_N \geq 0 \quad (\text{II.36})$$

et traduisent que lors d'un contact, les efforts normaux sont non nuls et lorsque ces efforts sont nuls, il n'y a pas contact. La loi de contact unilatéral de Signorini est illustrée en figure II.3, des lois dites *pénalisée* sont aussi tracées. Ces lois sont des régularisations de la loi de Signorini, et sont souvent employées pour simplifier les calculs [118], mais peuvent générer des problèmes numériques.

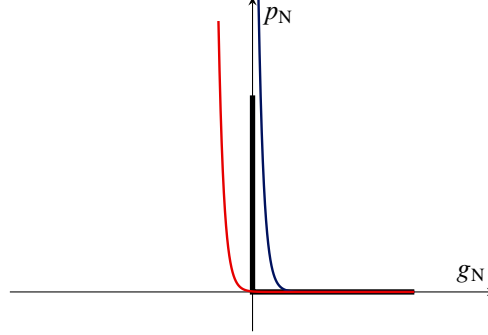


FIGURE II.3 – Lois reliant l'effort de contact normal au jeu. Loi de contact unilatéral (—), loi de pénalité extérieure (—), loi de pénalité intérieure (—).

1.4.3 Loi de frottement de Coulomb

L'étude des phénomènes de frottement peut s'avérer d'une importance capitale dans la compréhension du comportement dynamique de certaines structures ou systèmes. Toutefois, ces phénomènes sont encore largement incompris et partiellement modélisés, notamment du fait de leur caractère multi-échelle (du nanomètre au millimètre), multi-physique (mécanique, chimie, thermique) et multi-corps. La loi de frottement de Coulomb, décrite par les relations (II.37a) et présentée en figure II.4, est un modèle couramment utilisé de ces phénomènes.

$$\forall M \in \Gamma_c^1 \quad \begin{cases} \|\vec{p}_T\| \leq \mu \|\vec{p}_N\| & (\text{II.37a}) \\ \|\vec{p}_T\| < \mu \|\vec{p}_N\| \Leftrightarrow \vec{v}_T = 0 \Leftrightarrow \vec{u}_T = 0 & (\text{II.37b}) \\ \|\vec{p}_T\| = \mu \|\vec{p}_N\| \Leftrightarrow \vec{v}_T = -\frac{\vec{p}_T}{\|\vec{p}_T\|} \|\vec{v}_T\| & (\text{II.37c}) \end{cases}$$

La loi de frottement de Coulomb indique que les efforts tangentiels de contact \vec{p}_T sont contenus dans un cône paramétré par le coefficient de friction de Coulomb μ et les efforts normaux \vec{p}_N . De plus, si les efforts de contacts sont inclus dans le cône, alors la vitesse de glissement \vec{p}_T et donc le déplacement relatif entre les deux solides en contact sont nuls. Dans le cas contraire, il y a glissement et les efforts de contact tangentiels et la vitesse de glissement sont colinéaires et de direction opposée. D'autres modèles ont été proposés, comme le modèle de frottement de Tresca, ou dans le cadre de la modélisation des procédés de mise en forme le modèle de Shaw [143, §5.2].

Du fait des grandes vitesses tangentielles de contact obtenues dans le cas d'interactions rotor-stator, on suppose dans notre cas que seule la phase de glissement est prépondérante dans les phénomènes de contact étudiés. On utilise alors une loi de frottement régularisée, telle que

$$\|\vec{p}_T\| = \mu \|\vec{p}_N\| \tanh\left(\frac{\|\vec{v}_T\|}{\epsilon}\right) \quad (\text{II.38})$$

afin de simplifier la résolution du problème de contact. Cette approche est héritée des travaux de

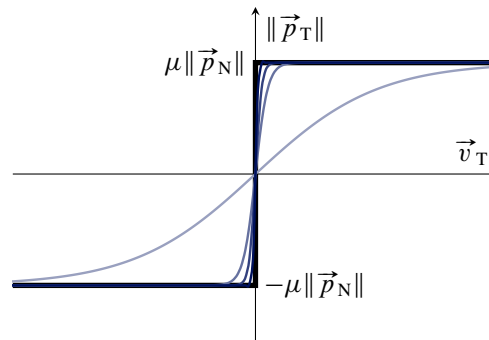


FIGURE II.4 – Lois reliant l’effort tangentiel de frottement à la vitesse de glissement. Loi de frottement de Coulomb (—), lois régularisées $\epsilon = 1$ (—), $0,1$ (—), $0,05$ (—), $0,02$ (—).

modélisation précédents dans la thématique du contact rotor-stator [7, 26]. Une comparaison graphique de la loi de frottement de Coulomb et de lois régularisées est présentée en figure II.4.

1.4.4 Conduction et génération de la chaleur dans l’interface de contact

La modélisation des transferts thermiques et la génération de flux de chaleur au niveau d’une interface font l’objet d’études poussées. Ces phénomènes sont intimement liés aux propriétés des matériaux et de l’état local des solides en contact.

Le paramètre de résistance thermique de contact permet de tenir compte d’un comportement moyen de la surface de contact en termes de conductivité thermique. Ce paramètre est influencé par la présence d’aspérités et/ou de gaz dans la zone de contact. Une présentation détaillée de ce concept et de différentes formulations est fournie dans [144]. Pour simplifier notre étude, nous avons choisi de prendre une valeur constante de la résistance thermique de contact. Ce choix, permet de formuler le flux thermique de contact comme une grandeur proportionnelle à l’effort de contact normal.

L’échauffement par friction consiste en la dissipation d’énergie mécanique sous forme de chaleur au travers des phénomènes de frottement. En notant \vec{q}_f le flux thermique dû à cette dissipation en un point, celui-ci vaut $\vec{q}_f = \|\vec{p}_T\| \|\vec{v}_T\| \cdot \vec{n}$ avec \vec{n} le vecteur unitaire sortant, normal à la surface de contact.

1.4.5 Calcul des contraintes de contact

Pour effectuer le calcul des contraintes de contact au cours du temps, différents algorithmes d’intégration temporelle ont été utilisés. On peut toutefois noter que la méthode des éléments finis, accompagnée d’une stratégie de discrétisation temporelle adaptée, n’est généralement pas la méthode la plus précise lorsque des phénomènes non-réguliers, comme des impacts, sont impliqués. En effet, les méthodes sus-mentionnées supposent une certaine régularité des évolutions du système modélisé. Des oscillations numériques sont ainsi rencontrées dans certains cas. C’est pourquoi des méthodes alternatives ont été introduites, et ce domaine de recherche suit aujourd’hui encore des développements intensifs. Parmi les autres approches permettant, entre autres choses, la résolution de problèmes de contact, on peut mentionner la méthode des éléments finis étendue (XFEM -*eXtended Finite Element Method*) [106] qui permet de combiner les avantages des méthodes reposant sur un maillage tout en s’affranchissant des problèmes de remaillage dans le cas de phénomènes non-réguliers comme les fractures ou les impacts [56]. La méthode des éléments finis ondulatoires (WFEM-*Wave Finite Element Method*) [134] permet quand à elle de traiter de manière très précise les problèmes de propagation d’ondes, notamment dans le cas des problèmes faisant intervenir des contraintes de contact unilatéral [145] bien que cette application reste pour le moment limitée au cas unidimensionnel.

Dans le cas où la discrétisation spatiale du problème est effectuée par la méthode des éléments finis conventionnels, il existe plusieurs stratégies permettant de traiter les contraintes de contact. Les

plus connues et employées sont les méthodes de pénalité intérieure ou extérieure, les multiplicateurs de Lagrange, les lagrangiens augmentés ou perturbés. Ces notions sont décrites de manière détaillée dans de nombreux ouvrages [4, 92, 143]. Durant cette thèse, nous nous sommes concentrés sur une approche par multiplicateurs de Lagrange, qui est déjà éprouvée dans le contexte des interactions de contact rotor–stator [25].

2 Discrétisation spatiale du problème

2.1 Formulation variationnelle du problème

La formulation variationnelle du problème consiste à projeter le problème continu, et donc de dimension infinie, sur un sous-espace de dimension finie.

2.1.1 Problème mécanique

Afin de décrire le champ de déplacement continu, par un champ de déplacement discret, on choisit un champ \vec{u} dans un espace fonctionnel noté \mathbb{U} avec

$$\vec{u} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U} \quad \mathcal{U} = \{\vec{u} \mid \vec{u} \in \mathbb{U}, \quad \vec{u} = \vec{u}_L \quad \text{sur } \Gamma_u\}, \quad (\text{II.39})$$

ce champ $\vec{u} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{U}$ est dit *cinématiquement admissible*. On introduit un deuxième espace \mathcal{U}_0 tel que

$$\vec{u} \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathbb{U}_0 \quad \mathcal{U}_0 = \{\vec{u} \mid \vec{u} \in \mathbb{U}, \quad \vec{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_u\} \quad (\text{II.40})$$

On choisit les inconnues en déplacement $\vec{u} \in \mathcal{U}$ et un ensemble de fonctions test $\vec{v} \in \mathcal{U}_0$, puis on construit la forme variationnelle de l'équation d'équilibre en la multipliant par chacune des fonctions test \vec{v} et en intégrant sur le domaine Ω l'équation (II.25)

$$\int_{\Omega} \text{div}(\bar{\sigma}) \cdot \vec{v} \, dv + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_v \cdot \vec{v} \, dv = \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, dv. \quad (\text{II.41})$$

La formule de la divergence donne dans le cas d'un tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ symétrique

$$\int_{\Omega} \text{div}(\bar{\sigma}) \cdot \vec{v} \, dv = \int_{\Gamma} \bar{\sigma} \cdot \vec{v} \, da - \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}(\vec{v}) \, dv = \int_{\Gamma} (\vec{f}_s + \vec{p}) \cdot \vec{v} \, da - \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}(\vec{v}) \, dv \quad (\text{II.42})$$

puis

$$\int_{\Omega} (\rho \vec{u} \cdot \vec{v} + \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}(\vec{v})) \, dv = \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v} \, dv + \int_{\Gamma} (\vec{f}_s + \vec{p}) \cdot \vec{v} \, da \quad (\text{II.43})$$

qui, en remplaçant $\bar{\sigma}$ par son expression de l'équation (II.23) donne

$$\int_{\Omega} (\rho \vec{u} \cdot \vec{v} + \bar{E} : [\bar{\epsilon}(\vec{u}) - \alpha(T - T_1)\bar{I}] : \bar{\epsilon}(\vec{v})) \, dv = \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v} \, dv + \int_{\Gamma} (\vec{f}_s + \vec{p}) \cdot \vec{v} \, da. \quad (\text{II.44})$$

Comme le tenseur des modules d'élasticité \bar{E} , le tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$ et le tenseur identité sont symétriques, ils peuvent commuter, ce qui permet d'écrire l'égalité

$$\int_{\Omega} (\rho \vec{u} \cdot \vec{v} + [\bar{\epsilon}(\vec{u}) - \alpha(T - T_1)\bar{I}] : \bar{E} : \bar{\epsilon}(\vec{v})) \, dv = \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v} \, dv + \int_{\Gamma} (\vec{f}_s + \vec{p}) \cdot \vec{v} \, da \quad (\text{II.45})$$

qui se reformule en

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{v} dv + \int_{\Omega} \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}(\vec{u}) : \bar{\bar{\bar{E}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}(\vec{v}) dv - \int_{\Omega} \alpha(T - T_1) \bar{\bar{\bar{I}}} : \bar{\bar{\bar{E}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}(\vec{v}) dv = \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{v} dv + \int_{\Gamma_f} \vec{f}_s \cdot \vec{v} da + \int_{\Gamma_c} \vec{p} \cdot \vec{v} da \quad (\text{II.46})$$

De gauche à droite, les termes de cette équation représentent respectivement :

- Le travail des forces d'inertie
- Le travail des efforts internes mécaniques
- Le travail des efforts internes d'origine thermique (contraintes thermomécaniques)
- Le travail des efforts extérieurs volumiques
- Le travail des efforts extérieurs surfaciques
- Le travail des efforts de contact

2.1.2 Problème thermique

De la même manière que pour le problème mécanique, on prend un champ de températures dans un espace fonctionnel \mathbb{T} tel que

$$T \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{T} \quad \mathcal{T} = \{T | T \in \mathbb{T}, \quad T = \mathbb{T}_L \quad \text{sur } \Gamma_T\}, \quad (\text{II.47})$$

le champ $T \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{T}$ est dit *thermiquement admissible*. Un deuxième espace \mathcal{T}_0 tel que

$$T \in \mathcal{T}_0 \subseteq \mathbb{T} \quad \mathcal{T}_0 = \{T | T \in \mathbb{T}, \quad T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_T\} \quad (\text{II.48})$$

est introduit. Les inconnues en température $T \in \mathcal{T}$ et un ensemble de fonctions test $v \in \mathcal{T}_0$ sont ensuite choisis. La forme variationnelle de l'équation de la chaleur (II.24) est construite en multipliant cette équation par chacune des fonctions test v et en intégrant le tout sur le domaine Ω

$$\int_{\Omega} \rho c \dot{T} v dv - \int_{\Omega} \text{div}(\vec{q}) v dv = \int_{\Omega} q_v v dv - \int_{\Omega} \alpha \bar{\bar{\bar{E}}} : \dot{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}} T_I v dv \quad (\text{II.49})$$

La formule de la divergence, utilisée avec la loi de conduction de Fourier donnent

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{q}) v dv = \int_{\Gamma} q_s \cdot \vec{n} v da - \int_{\Omega} -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(v) dv \quad (\text{II.50})$$

Le flux de chaleur surfacique imposé sur la frontière du système se décompose en deux participations, une sur la frontière du domaine Γ_q où les flux thermiques sont imposés, qu'ils soient conductifs, convectifs ou radiatifs, et une autre sur la zone de contact Γ_c

$$\int_{\Gamma} q_s \cdot \vec{n} v da = \int_{\Gamma_q} q_{\text{ext}} v da + \int_{\Gamma_c} q_c v da. \quad (\text{II.51})$$

La formulation variationnelle du problème thermique prend la forme finale

$$\int_{\Omega} \alpha \bar{\bar{\bar{E}}} : \dot{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}} T_I v dv + \int_{\Omega} \rho c \dot{T} v dv - \int_{\Omega} \lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(v) dv = \int_{\Omega} q_v v dv + \int_{\Gamma_q} q_{\text{ext}} v da + \int_{\Gamma_c} q_c v da. \quad (\text{II.52})$$

De gauche à droite, les termes de cette équation représentent respectivement :

- La chaleur issue des variations de déformation (effet dit *piézothermique*)
- La chaleur sensible *stockée* dans le volume
- La chaleur transportée dans le volume
- La chaleur apportée par les sources internes
- La chaleur apportée par les flux extérieurs imposée sur la frontière
- La chaleur apportée par les flux de chaleur issus du contact

2.2 Application de la méthode des éléments finis

Pour des géométries complexes, il est difficile de résoudre les équations (II.46) ou (II.52). La méthode des éléments finis repose sur une discrétisation du domaine Ω en sous-domaines Ω_e de formes géométriques simples, appelés *éléments* et sur lesquels ces équations sont toujours valides. Les déplacements ou températures sont ensuite interpolés au sein de chaque élément au moyen de *fonctions de forme* simples, généralement polynomiales, et construites de façon à respecter la continuité à la frontière entre deux éléments. Ces fonctions de forme constituent donc une interpolation continue par morceaux de l'espace fonctionnel initial défini sur Ω , et leur simplicité permet de calculer les termes des équations (II.46) ou (II.52) de façon efficace.

Cette méthode particulière a été employée, car c'est la méthode la plus répandue de nos jours dans l'industrie pour l'étude des systèmes mécaniques déformables ou les problèmes de thermique des solides.

On utilise ici la méthode des éléments finis dans sa formulation en déplacements / températures. D'autres formulations existent et sont présentées dans divers ouvrages. L'emploi de la méthode des éléments finis consiste à approcher la solution en déplacement \vec{u} et en température T sur le domaine Ω_e par un ensemble de valeurs \mathbf{u} et θ définies aux nœuds de l'élément et telles que :

$$\begin{cases} \vec{u}(\vec{x}, t) \approx \mathbf{N}(\vec{x})\mathbf{u}(t) & \text{(II.53a)} \\ T(\vec{x}, t) \approx \mathbf{N}(\vec{x})\theta(t) & \text{(II.53b)} \\ \bar{\bar{\epsilon}}(\vec{u}) \approx \mathbf{B}(\vec{x})\mathbf{u}(t) & \text{(II.53c)} \\ \bar{\bar{\sigma}}(\vec{u}, T) \approx \mathbf{D}[\mathbf{B}\mathbf{u} - \alpha\mathbf{N}\theta] & \text{(II.53d)} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(T) \approx \mathbf{B}(\vec{x})\theta(t) & \text{(II.53e)} \end{cases}$$

2.2.1 Partie mécanique

En utilisant les mêmes fonctions de forme $\mathbf{N}(\vec{x})$ pour \vec{u} et \vec{v} , en utilisant les équivalences entre notations tensorielles et matricielles et en considérant des déplacements virtuels aux nœuds tels que $\vec{v}(\vec{x}, t) \approx \mathbf{N}(\vec{x})\mathbf{v}(t)$, l'équation (II.46) est approchée sur chaque élément (défini par le domaine Ω_e) par

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}} \, dv + \int_{\Omega_e} \mathbf{v}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \, dv - \int_{\Omega_e} \alpha \mathbf{v}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{D} \mathbf{N} \theta \, dv = \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top \vec{f}_v \, dv + \int_{\Gamma_{f,e}} \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top \vec{f}_s \, da + \int_{\Gamma_{c,e}} \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top \vec{p} \, da. \end{aligned} \quad \text{(II.54)}$$

Comme \mathbf{v} , \mathbf{u} et θ ne dépendent uniquement du temps, ils peuvent être factorisés dans chaque membre de l'équation. \mathbf{v} étant par ailleurs quelconque dans \mathcal{U}_0 , l'équation précédente est indépendante de \mathbf{v} est

se simplifie en

$$\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^\top \mathbf{N} dv \ddot{\mathbf{u}} + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{D} \mathbf{B} dv \mathbf{u} - \int_{\Omega_e} \alpha \mathbf{B}^\top \mathbf{D} \mathbf{N} dv \boldsymbol{\theta} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^\top \vec{f}_v dv + \int_{\Gamma_{f,e}} \mathbf{N}^\top \vec{f}_s da + \int_{\Gamma_{c,e}} \mathbf{N}^\top \vec{p} da. \quad (\text{II.55})$$

Cette équation régissant l'équilibre mécanique d'un élément se note de manière plus légère

$$\mathbf{M}_e^{uu} \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e^{uu} \mathbf{u}_e + \mathbf{K}_e^{u\theta} \boldsymbol{\theta}_e = \mathbf{f}_{\text{ext},e} + \mathbf{f}_{c,e} \quad (\text{II.56})$$

avec \mathbf{M}_e^{uu} , \mathbf{K}_e^{uu} , $\mathbf{K}_e^{u\theta}$ les matrices de masse, raideur et dilatation thermique. Et $\mathbf{f}_{\text{ext},e}$ et $\mathbf{f}_{c,e}$ respectivement les vecteurs d'efforts extérieurs nodaux volumiques et surfaciques et le vecteur d'efforts de contact.

2.2.2 Partie thermique

Pour la partie thermique du problème, les mêmes fonctions de forme que pour la partie mécanique sont utilisées. En employant les mêmes fonctions de forme $\mathbf{N}(\vec{x})$ pour T et v et en considérant des températures virtuelles aux nœuds telles que $v(\vec{x}, t) = \mathbf{N}(\vec{x})\mathbf{v}(t)$, l'équation (II.52) est approchée par

$$\int_{\Omega_e} \alpha T_1 \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top \mathbf{D} \mathbf{B} dv \dot{\mathbf{u}} + \int_{\Omega_e} \rho c \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top \mathbf{N} dv \dot{\boldsymbol{\theta}} - \int_{\Omega_e} \lambda \mathbf{v}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{B} dv \boldsymbol{\theta} = \int_{\Omega_e} \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top q_v dv + \int_{\Gamma_{q,e}} \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top q^{\text{ext}} da + \int_{\Gamma_{c,e}} \mathbf{v}^\top \mathbf{N}^\top q^c da. \quad (\text{II.57})$$

En utilisant les mêmes propriétés que pour la partie mécanique du problème, on obtient :

$$\int_{\Omega_e} \alpha T_1 \mathbf{N}^\top \mathbf{D} \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} dv + \int_{\Omega_e} \rho c \mathbf{N}^\top \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\theta}} dv - \int_{\Omega_e} \lambda \mathbf{B}^\top \mathbf{B} \boldsymbol{\theta} dv = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^\top q_v dv + \int_{\Gamma_{q,e}} \mathbf{N}^\top q^{\text{ext}} da + \int_{\Gamma_{c,e}} \mathbf{N}^\top q^c da, \quad (\text{II.58})$$

puis

$$\mathbf{C}_e^{\theta u} \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{C}_e^{\theta\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}}_e + \mathbf{K}_e^{\theta\theta} \boldsymbol{\theta}_e = \mathbf{q}_{\text{ext},e} + \mathbf{q}_{c,e} \quad (\text{II.59})$$

avec $\mathbf{C}_e^{\theta u}$, $\mathbf{C}_e^{\theta\theta}$, $\mathbf{K}_e^{\theta\theta}$ les matrices de couplage piézo-thermique, capacité et conductivité thermiques. Les termes $\mathbf{q}_{\text{ext},e}$ et $\mathbf{q}_{c,e}$ désignent respectivement les vecteurs de flux thermiques nodaux volumiques et surfaciques et de flux thermiques de contact.

2.2.3 Assemblage des matrices élémentaires

Du fait des relations de compatibilité des déplacements et températures au niveau des nœuds, on peut assembler les matrices élémentaires calculées précédemment et former le système d'équations différentielles ordinaires du second ordre régissant le comportement des structures étudiées

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{\theta u} & \mathbf{C}^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.60})$$

Cette notation très utilisée en dynamique des structures ne constitue pas le cadre de modélisation le plus général. Une autre formulation, en base d'état cette fois (du premier ordre) est aussi envisageable et peut éventuellement être préférable du fait de la singularité de la matrice de masse généralisée du

système (II.60). Le système équivalent en base d'état s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{C}^{uu} & \mathbf{K}^{u\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{\theta u} & \mathbf{K}^{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.61})$$

En pratique, après avoir testé cette approche, on a pu montrer que l'utilisation de l'écriture d'état n'était pas nécessaire, ce qui permet de continuer à utiliser des méthodes d'intégration temporelle du second ordre comme l'algorithme de Carpenter.

Pour rappel, le couplage thermomécanique est opéré par $\mathbf{K}^{u\theta}$ qui régit la dilatation thermique du matériau, et $\mathbf{C}^{\theta u}$ qui décrit la variation locale de température du matériau lorsqu'il est soumis à une variation de contraintes. Ce dernier terme peut être négligé dans le cas des systèmes mésoscopiques, mais doit pour des systèmes plus petits (MEMS) être pris en compte [57].

Dans la suite du document, on utilisera la notation générique suivante, pour décrire indifféremment le système thermomécanique ou mécanique

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{II.62})$$

afin d'alléger les notations.

2.2.4 Discrétisation des efforts de contact et de la fonction distance

La discrétisation spatiale des efforts de contact et de la fonction distance représente une des difficultés du problème de contact. Ainsi, selon la discrétisation spatiale choisie, on peut se retrouver avec des situations de contact entre un nœud et une surface facettisée, ce qui peut entraîner des problèmes pour la convergence des résultats [143, §9.6]. Plusieurs méthodes sont utilisées pour pallier ce type de problème contact nœud-ligne, interpolation par spline, méthodes de mortier. Pour des raisons de simplicité, un contact nœud-ligne a été employé dans ces travaux, mais d'autres méthodes existent, et plusieurs ouvrages les décrivent [143, §8-9],[147, §7].

3 Présentation des modèles

3.1 Modèle simplifié de poutre

Ce modèle très simple, présenté en figure II.5, sert à illustrer à la fois les méthodologies de réduction et les caractéristiques des algorithmes d'intégration temporelle utilisés pour la résolution du problème de contact. Ce modèle est celui d'une poutre thermoélastique en traction compression. L'échauffement subit par les pales du rotor lors des contact se localise sur la tête de pale. Ce modèle simplifié permet de rendre compte des contraintes de contact unilatéral ainsi que des phénomènes de dilatation intervenant dans les pales.

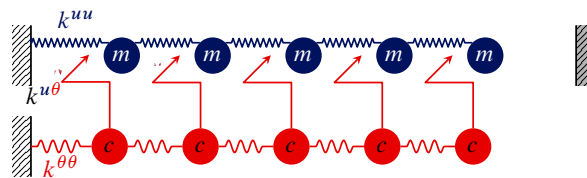


FIGURE II.5 – Modèle de poutre thermomécanique 1D.

Un script Matlab regroupant les paramètres de calcul et la méthodologie de construction de ce modèle est disponible dans l'annexe C.

3.2 Couple rotor–stator de compresseur centrifuge

Ce couple de pièces constitue l'application finale de cette thèse. Les géométries sont celles des structures installées sur le banc CASTOR et ne sont donc pas rigoureusement les pièces présentes sur les moteurs. Toutefois, ces géométries possèdent plusieurs caractéristiques inhérentes aux applications industrielles : géométries nécessitant des modèles éléments finis de grande dimension, comportement dynamique riche... La figure II.6 présente un rotor complet de compresseur centrifuge et un secteur de stator. Ces modèles doivent permettre de se rapprocher au maximum des comportements observés

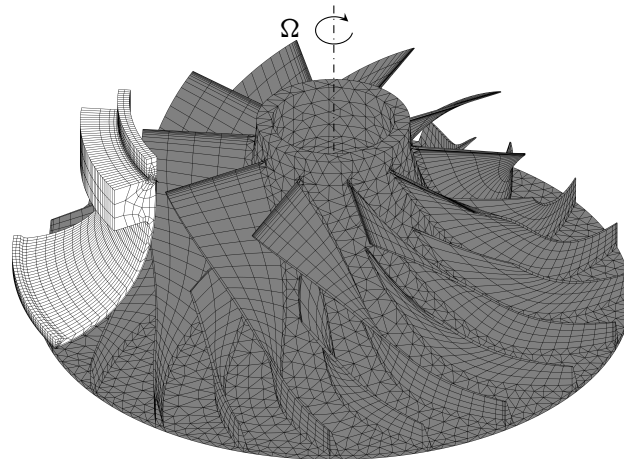


FIGURE II.6 – Modèle éléments finis simplifié de compresseur centrifuge. Couvercle (□), rouet (■).
Sens de rotation du rouet (↻).

sur le banc d'essais pour valider les outils numériques développés durant cette thèse. Les modèles éléments finis des deux structures ont été construits au moyen du logiciel de calcul ANSYS, sur la base de géométries CAO. Ce modèle a été utilisé pour évaluer la stratégie de modélisation du contact rotor–stator dans le cas le plus difficile, c'est-à-dire avec rotor et carter flexible, la double réduction du rotor et réduction en symétrie cyclique du stator. Pour rappel, les géométries du banc CASTOR, assemblé durant la thèse de Patricio Almeida [7] ont été dessinées de façon à faciliter la mise en contact entre les deux structures au niveau du bord de fuite.

Chapitre III

Réduction de modèles et sous-structuration

Sommaire du chapitre

1	Présentation générale	34
2	Éléments théoriques	34
2.1	Système d'intérêt	34
2.2	Décomposition en parties interne et frontière	35
2.3	Méthode de Galerkin	35
3	Méthodes de réduction	36
3.1	Synthèse modale	36
3.2	Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)	37
3.3	Méthodes de Krylov	38
4	Méthodes de réduction pour la sous-structuration	40
4.1	Réduction statique de Guyan	40
4.2	Méthode de Craig–Bampton	41
4.3	Méthode de MacNeal	41
4.4	Méthode de Craig–Hale	42
4.5	Double synthèse modale	43
5	Symétrie cyclique	44
5.1	Formulation d'un problème en symétrie cyclique	44
5.2	Conditions de symétrie cyclique	45
5.3	Application des conditions aux limites cycliques sur le secteur de référence	46
5.4	Correspondance entre structure complète et espace cyclique	46
5.5	Problème aux valeurs propres associé à l'harmonique k	47
6	Spécificités dans le cadre de la problématique contact rotor-stator	47
6.1	Réduction de modèles thermiques	47
6.2	Problèmes multiphysiques	48
6.3	Problèmes faisant intervenir des contraintes de contact	50
7	Extension de la méthode de Craig–Hale	51
7.1	Limitations de la méthode de Craig–Hale	51
7.2	Construction de la base RCH	51
7.3	Orthogonalisation de la base RCH	52

8 Application au modèle de poutre thermoélastique	53
8.1 Influence du nombre de modes conservés	53
8.2 Influence du nombre de degrés de liberté	58
8.3 Optimisation paramétrique de la méthode Rational–Craig–Hale	61
9 Bilan du chapitre	64

Ce chapitre décrit plusieurs méthodes de réduction et leur application dans le cadre de la modélisation de phénomènes de contact rotor–stator. Les développements proposés s’appuient sur une combinaison astucieuse de méthodes de réduction, permettant de tirer avantage des procédures de Craig–Bampton [17] et de Craig–Hale [47]. L’efficacité de l’approche proposée est évaluée sur un cas simple de poutre thermoélastique unidimensionnelle.

1 Présentation générale

La méthode des éléments finis permet, comme on a pu le voir au chapitre II, de modéliser un domaine continu au moyen d’un nombre fini de variables. Cette méthode entraîne l’approximation d’une géométrie par un assemblage d’éléments de formes simples, tétraèdres ou hexaèdres pour des éléments volumiques par exemple. Un point crucial de la méthode des éléments finis réside dans sa polyvalence. On peut en effet utiliser cette approche dans de nombreux cas, la précision étant alors directement associée au nombre d’éléments. Toutefois, l’amélioration de la précision passe aussi par une difficulté croissante, en raison du nombre de variables mises en jeu pour la description du problème. Dans le cas d’applications industrielles, il peut donc être nécessaire d’appliquer des *méthodes de réduction*, permettent d’atteindre des compromis très intéressants entre précision des résultats et temps de calcul. Cependant il faut, pour que ce compromis soit optimal, déterminer quelle méthode est la plus pertinente en fonction du problème considéré. C’est souvent cette étape qui constitue la difficulté principale de la réduction des modèles.

Le principe des méthodes de réduction est relativement simple : en général, le comportement d’une structure, même complexe, n’est dicté que par un nombre réduit de comportements singuliers qui se combinent. Le modèle utilisé pour les calculs ne doit donc pas nécessairement être capable de décrire l’ensemble de tous les comportements possibles, mais seulement ceux qui présentent un intérêt dans le cas particulier étudié. La restriction du modèle initial au modèle sous-jacent constitue l’étape de réduction.

Par le biais des méthodes de réduction, on peut aussi effectuer une sous-structuration du modèle initial. Il est alors possible d’étudier un modèle de très grande dimension, comme un avion complet, en le découpant en plusieurs sous-structures, puis en réduisant chacune d’entre elles avant de rassembler ces modèles réduits. Il est ainsi très facile de modifier localement un modèle sans avoir besoin d’effectuer de lourds calculs à chaque fois.

De nombreux ouvrages [122] et articles [33] ont été dédiés à la présentation détaillée de méthodes de réduction provenant de divers domaines.

2 Éléments théoriques

2.1 Système d’intérêt

Pour faciliter la description et la compréhension des méthodes de réduction, on limite notre étude à un système dynamique de la forme

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{III.1})$$

qui peut typiquement décrire le comportement mécanique ou thermique d'une structure. \mathbf{C} et $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont respectivement les matrices de masse et de raideur, considérées symétriques, du problème discret. Les vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs des coordonnées généralisées et des efforts généralisés.

2.2 Décomposition en parties interne et frontière

Dans le cadre général des méthodes de réduction, on fera mention de degrés de liberté dits *internes* et *frontières* désignés respectivement par les indices \bullet_i et \bullet_b . Cette décomposition est définie pour un domaine Ω au sein duquel on distingue la frontière Γ et l'intérieur qui n'est autre que le domaine privé de sa frontière. Ces deux sous-domaines font partie du domaine libre de Ω soit $\Omega_1 = \Omega \setminus \{\Gamma_u \cup \Gamma_\theta\}$. Un exemple de frontière Γ_b et de partie interne du domaine $\Omega_i = \Omega_1 \setminus \Gamma_b$ est décrit en figure III.1.

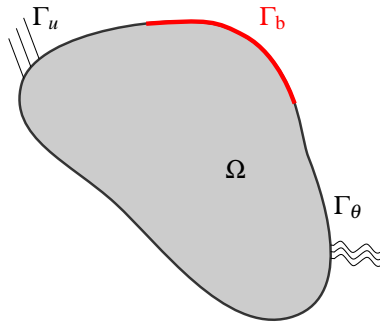


FIGURE III.1 – Sous-domaines interne et frontière d'un domaine.

2.3 Méthode de Galerkin

Les méthodes de réduction et sous-structuration de modèles éléments finis appartiennent à la classe des méthodes dites de Galerkin ou de Petrov–Galerkin, comme la méthode des éléments finis elle-même. La méthode de Galerkin, de manière générale, consiste à trouver une approximation $\tilde{\mathbf{x}}$ du champ solution \mathbf{x} . Cette approximation est définie par une combinaison linéaire d'un nombre restreint d'éléments d'une base de l'espace vectoriel étudié de sorte que

$$\mathbf{x} \approx \tilde{\mathbf{x}} = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (\text{III.2})$$

où $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice collectant les m fonctions de forme choisies pour effectuer l'approximation et $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des coordonnées généralisées dans l'espace *réduit*.

Si l'on remplace \mathbf{x} par son approximation dans l'équation (III.1), celle-ci devient

$$\mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (\text{III.3})$$

avec \mathbf{r} un terme de résidu dû à l'approximation de \mathbf{x} par $\tilde{\mathbf{x}}$. Si l'on remplace $\tilde{\mathbf{x}}$ par son expression en fonction de Φ et $\boldsymbol{\eta}$, on a

$$\mathbf{C}(\Phi \dot{\boldsymbol{\eta}}) + \mathbf{K}(\Phi \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f} + \mathbf{r}. \quad (\text{III.4})$$

La seconde étape de la méthode de Galerkin consiste à projeter le système (III.4) sur une base adéquate afin d'obtenir un système carré, permettant d'utiliser les méthodes conventionnelles de résolution, et d'éliminer le résidu \mathbf{r} . Le sous-espace de projection est défini par une base d'éléments $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et la condition d'annulation du résidu est $\Psi^T \mathbf{r} = 0$. Le problème projeté s'écrit alors

$$(\Psi^T \mathbf{C} \Phi) \dot{\boldsymbol{\eta}} + (\Psi^T \mathbf{K} \Phi) \boldsymbol{\eta} = \Psi^T \mathbf{f}. \quad (\text{III.5})$$

Dans le cas général, où $\Psi \neq \Phi$, on parle de méthodes de Petrov–Galerkin. Dans le cas particulier où $\Psi = \Phi$, on se trouve dans le cadre précis de la méthode de Galerkin, qui est la situation la plus courante en dynamique des structures. Toutefois, dans d’autres domaines scientifiques, la méthode de Petrov–Galerkin est plus commune, notamment dans le cas des méthodes de réduction de Krylov [82, §2]. On parle aussi dans le cas de la méthode de Galerkin de projection *orthogonale* puisque la projection du système complet est effectuée selon l’espace orthogonal à l’espace réduit de solutions. À l’inverse, on parle de projection *oblique* pour la méthode de Petrov–Galerkin.

Du fait des deux étapes constitutives de la stratégie de réduction, deux erreurs sont cumulées. La première est associée à l’approximation de la solution sur un espace réduit. La seconde est issue de la projection utilisée. Ces deux composantes sont illustrées sur la figure III.2, pour une méthode de type Petrov–Galerkin, et pour une méthode de Galerkin simple. Les variables des problèmes réduits par les deux méthodes sont respectivement μ et η .

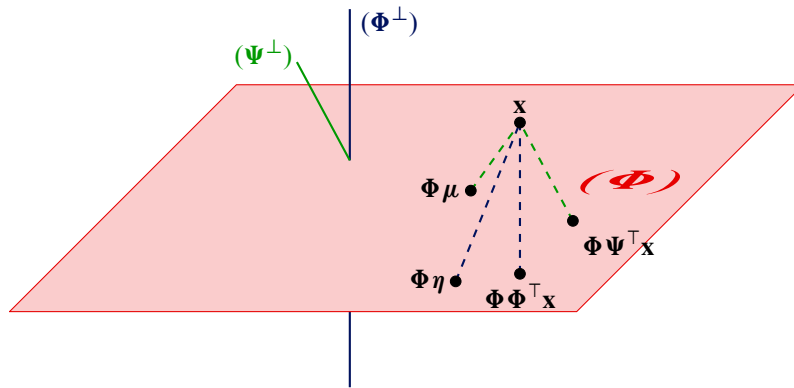


FIGURE III.2 – Méthode de Galerkin pour l’approximation d’une solution en trois dimensions par un espace à deux dimensions. Méthode de Galerkin (—), méthode de Petrov–Galerkin (—).

Les méthodes de réduction sont donc des applications particulières de la méthode de Galerkin, différant par le contenu des bases Φ et éventuellement Ψ . En fonction du problème à réduire, ces bases peuvent être construites de manière analytique ou numérique à partir de solutions d’intérêt du système complet. On parle alors de méthode de réduction *a priori*. Dans le cas contraire, où aucune base ne semble être adaptée, on peut recourir à des méthodes *a posteriori* basées généralement sur la décomposition en formes propres (POD). Quelle que soit la manière de générer les matrices utilisées pour la réduction, une bonne méthode de réduction est caractérisée par un choix optimal de Φ et Ψ permettant de minimiser l’erreur par rapport au modèle complet.

3 Méthodes de réduction

Cette section décrit trois méthodes de réduction permettant d’estimer les évolutions (statiques ou dynamiques) d’un système d’équations différentielles ordinaires, sans considération particulière sur la frontière associée, et donc pas nécessairement dédiées à une problématique de sous-structuration.

3.1 Synthèse modale

La synthèse modale est probablement, la méthode la plus naturelle pour la réduction d’un problème. En effet, si l’on considère le système réduit (III.5), dans le cas particulier où $\Psi = \Phi$ est la matrice des modes propres vérifiant $(\lambda \mathbf{C} + \mathbf{K})\Phi = \mathbf{0}$, celui-ci s’écrit

$$\mathbf{I}\dot{\eta} + \mathbf{\Lambda}\eta = \Phi^T \mathbf{f} \quad (\text{III.6})$$

du fait des propriétés d'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices de masse et de raideur et dans le cas d'une normalisation des vecteurs propres par rapport à la matrice de masse. $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est alors une matrice diagonale composée des pulsations propres du système.

On peut à ce stade faire plusieurs remarques. D'abord, les matrices \mathbf{I} et Λ étant diagonales, les équations différentielles ordinaires sont alors totalement découplées, et on peut effectuer la résolution du problème de manière indépendante pour chaque coordonnée modale [66, §5.1], ce qui simplifie grandement cette résolution. Il vient que la résolution du problème (III.6) est équivalente à la résolution pour tout numéro de mode k de l'équation

$$\dot{\eta}_k + \lambda_k \eta_k = \phi_k^\top \mathbf{f}. \quad (\text{III.7})$$

La réponse temporelle du système complet s'écrit au moyen des coordonnées généralisées et des modes sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \phi_k \eta_k(t). \quad (\text{III.8})$$

Sans entrer dans le détail mathématique de la superposition modale, on constate aisément que si le système répond particulièrement sur une forme modale, un modèle réduit construit en utilisant cette forme modale dans la base de réduction décrira correctement le problème de départ, avec toutefois un coût numérique bien inférieur.

3.2 Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres (POD)

La méthode de Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres, *Proper Orthogonal Decomposition* en anglais, est une méthode très générale et robuste permettant d'obtenir une sous-espace approchant de manière optimale un espace de départ de grande dimension. Elle est aussi appelée analyse en composantes principales ou *Principal Component Analysis* (PCA) [104, §12.4] dans la littérature. Cette approche est utilisée dans de nombreux domaines, dont les statistiques, le traitement de signal ou la réduction de modèles.

La POD repose sur une décomposition très particulière de l'espace au moyen de vecteurs bien choisis. On ne présente ici que le calcul d'une base POD par la méthode de décomposition singulière, ou *Singular Value Decomposition*, *SVD* en anglais. Cette opération peut être vue comme une extension de la décomposition aux valeurs propres aux matrices rectangulaires [122, §12.4]. L'objectif de la POD est de déterminer une base de vecteurs Φ de façon à maximiser la moyenne temporelle du produit scalaire

$$\frac{\langle \mathbf{x}, \phi \rangle}{\|\phi\|}. \quad (\text{III.9})$$

La SVD est souvent appliquée à une matrice constituée de *snapshots*, qui sont des solutions du problème complet. Considérons une matrice $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ constituée de N snapshots. La décomposition en valeurs singulières de \mathbf{x} permet d'obtenir trois matrices $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ et $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ de sorte que

$$\mathbf{x} = \mathbf{L} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R}^* \quad (\text{III.10})$$

où l'exposant \bullet^* désigne l'opération de trans-conjugation. $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice diagonale des valeurs singulières, \mathbf{L} et \mathbf{R} sont des matrices orthonormales. Les modes orthogonaux à gauche \mathbf{L} constituent alors une base admissible pour la réduction du problème de départ.

Cette méthode a démontré son caractère optimal pour de nombreuses applications, dans le cas linéaire comme non-linéaire [59, 121]. Cependant, la qualité des modèles réduits obtenus au moyen de cette méthode reste limitée par le choix des snapshots utilisés pour la SVD, en particulier dans un contexte non-linéaire dans lequel l'amplitude de l'excitation peut entraîner l'activation ou non de

non-linéarités fortes, comme du contact unilatéral. Aussi, l'application de la SVD sur des bases de dimensions importantes peut devenir aussi coûteux que d'effectuer le calcul initial. Dans ce type de situations, une SVD peut être appliquée sur le système réduit et éliminer les éléments non nécessaires de l'espace réduit *a posteriori* [94].

3.3 Méthodes de Krylov

Les méthodes de Krylov sont assez peu utilisées en dynamique des structures. Aussi appelées méthodes de *moment-matching*, elles utilisent comme leur nom l'indique les propriétés algébriques des *espaces de Krylov* et ont pour but de préserver les *moments* caractéristiques de la fonction de transfert du système lors de la réduction. Les espaces de Krylov sous-tendent de nombreuses méthodes de résolution de problèmes algébriques, comme les méthodes d'extraction de vecteurs propres [13, 87] ou de résolution de systèmes [125]. Elle ont plus récemment été utilisées pour la réduction de modèles en électronique [62, 82], en dynamique des fluides [142], et en thermique du solide [29, 42].

Les méthodes de Krylov sont supportées par les fondements du théorème de Cayley-Hamilton. Pour une matrice inversible $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, le sous-espace de Krylov associé à \mathbf{A} et \mathbf{b} et noté $\mathcal{K}_\ell(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ est l'espace vectoriel de dimension $\ell \leq n$ engendré par la base de vecteurs

$$[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\ell-1}\mathbf{b}]. \quad (\text{III.11})$$

En supposant la matrice \mathbf{K} inversible, ce qui est généralement le cas des problèmes étudiés en dynamique ou en thermique des structures, le système (III.1) présenté précédemment peut se réécrire sous la forme

$$-\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{III.12})$$

avec $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$. Pour un système libre, caractérisé par une matrice \mathbf{K} singulière, une adaptation de la procédure est nécessaire [74]. La transformée de Laplace du système donne

$$-\mathbf{A}s\mathbf{x}(s) + \mathbf{x}(s) = \mathbf{b}(s), \quad (\text{III.13})$$

avec s la variable de Laplace. On rappelle que la transformée de Laplace $X(s)$ d'une fonction $x(t)$ est, pour des conditions initiales nulles,

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt, \quad (\text{III.14})$$

la fonction pouvant admettre des valeurs scalaires ou vectorielles.

Pour simplifier les raisonnements, on omet volontairement la dépendance de transformées de Laplace en s quand celle-ci est évidente. En factorisant les termes du premier ordre en \mathbf{x} , le système devient

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}s)\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (\text{III.15})$$

On peut alors écrire la fonction de transfert $\mathbf{h}(s)$ du système dans l'espace de Laplace

$$\mathbf{h}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}s)^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{III.16})$$

dont l'expansion d'ordre ℓ en série de Taylor [29, 63] autour de $s = 0$ vaut

$$\mathbf{h}(s) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \mathbf{A}^j \mathbf{b} s^j + o(s^{\ell-1}). \quad (\text{III.17})$$

Chaque coefficient de cette expansion, généralement appelé $j^{\text{ème}}$ *moment* de la fonction de transfert, est

le $j^{\text{ème}}$ vecteur du sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_\ell(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. En électronique, les auteurs ont souvent recours au terme de *modèle de Padé* [60, 63, 64]. Afin de généraliser l'expression de cette expansion de Taylor pour toute valeur de s on introduit un changement de variable, appelé *shift* et noté s_0 , dans l'expression de la fonction de transfert, de sorte que

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}s_0 - \mathbf{A}(s - s_0))\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (\text{III.18})$$

Si s_0 n'est pas un zéro de la fonction de transfert, celle-ci admet un développement en série de Taylor autour de s_0 sous la forme [62]

$$\mathbf{h}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}s_0)^{-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} ((\mathbf{I} - \mathbf{A}s_0)^{-1} \mathbf{A})^j \mathbf{b}s^j + o((s - s_0)^{\ell-1}). \quad (\text{III.19})$$

Vu cette expression, il semble que le choix de s_0 peut induire un mauvais conditionnement de \mathbf{h} en raison des facteurs $(\mathbf{I} - \mathbf{A}s_0)^{-1}$. Pour autant, cette problématique a déjà été étudiée et il a été montré dans [119] que ce conditionnement n'avait pas de conséquences sur la précision du modèle réduit, ce qui est rappelé dans [82, §3.3.1]. De plus, si la définition mathématique des moments, associée à la contrainte $\|s - s_0\| \ll 1$, paraît limiter la précision des modèles réduits par méthodes de Krylov à des domaines fréquentiels restreints, ceux-ci se révèlent à l'utilisation capables d'une précision importante sur des domaines étendus. Cette propriété est particulièrement intéressante dans le cas de la réduction de modèles thermiques, caractérisés par une réponse de type filtre passe-bas.

On peut montrer par la suite que l'utilisation de ℓ moments comme base de réduction permet de conserver les propriétés du système de départ, la fonction de réponse en fréquence du modèle réduit étant une interpolation exacte en ℓ points de la fonction de réponse en fréquence du modèle complet. Dans ce cas, l'entier ℓ devient le paramètre de réduction de la méthode.

Les méthodes de réduction basées sur les espaces de Krylov présentent toutefois plusieurs complications. Les moments tendent en effet à être linéairement dépendants et ne constituent donc pas une base adéquate à la réduction d'un problème. En électronique, ce problème est très bien connu dans la littérature, et est notamment identifié dans [62]. Pour pallier à cette problématique, on utilise les algorithmes de Lanczos [87] ou Arnoldi [13] pour orthonormaliser les modes du sous-espace de Krylov. D'autres stratégies d'orthogonalisation peuvent être utilisées, en se basant sur un algorithme de Gram-Schmidt spécifique [29] ou d'autres techniques comme la décomposition en valeurs singulières.

Les limitations principales des premières méthodes de Krylov sont que l'approximation du modèle complet se fait autour d'une fréquence donnée, paramétrée par le shift s_0 , puis que l'expansion est calculée pour un cas de chargement spécifique.

Pour des systèmes d'équations différentielles ordinaires du second ordre, comme ceux utilisés en dynamique des structures, il peut ne pas être pratique d'exprimer le problème en base d'état pour en calculer une base de Krylov. Bai [15] décrit une stratégie de calcul de base de Krylov pour des systèmes mécaniques du second ordre évitant une telle reformulation.

Les versions les plus récentes des méthodes de réduction de Krylov décrivent de plus le principe de *multi-expansion*, on retrouve aussi le terme de méthodes de Krylov *rationnelles* [82, 124]. Plusieurs auteurs ont ainsi montré que si l'utilisation de la base générant l'espace $\mathcal{K}_\ell(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, pour un shift $s_{0,k}$ que l'on note $\mathcal{K}_\ell(\mathbf{A}, \mathbf{b}, s_{0,k})$ permet de réduire un modèle de façon précise autour du point $s = s_{0,k}$, alors la base formée par

$$\bigcup_{k=1}^p \mathcal{K}_\ell(\mathbf{A}, \mathbf{b}, s_{0,k}) = \mathcal{K}_\ell(\mathbf{A}, \mathbf{b}, s_0) \quad (\text{III.20})$$

permet d'approcher le modèle complet au voisinage de tous les $s_{0,k}$. Il faut toutefois remarquer que le choix des shifts est difficile à automatiser et qu'une méthode de sélection au cas par cas doit généralement être trouvée. L'influence du choix de ces shifts, étudiée dans la littérature [55], est mise en évidence

dans la suite de ce chapitre sur le modèle de poutre unidimensionnelle.

Une autre amélioration concerne les méthodes de Krylov *par blocs*. Ces méthodes se distinguent par l'utilisation de plusieurs cas de chargement pour la création des espaces de Krylov, soit l'utilisation de matrices \mathbf{B} et lieu et place de vecteurs \mathbf{b} . Cette approche est particulièrement importante pour la sous-structuration puisque plusieurs cas de chargement doivent pouvoir être décrits par les super-éléments. Les méthodes par blocs peuvent toutefois générer une inflation inutile de la base de réduction, car des cas de chargements proches peuvent apporter des informations partiellement redondantes dans la base de réduction.

4 Méthodes de réduction pour la sous-structuration

Les méthodes de réduction sont particulièrement intéressantes pour la description de problèmes spécifiques, notamment la sous-structuration. Cette stratégie de calcul spécifique, déjà mentionnée, consiste à réduire des éléments d'une structure complexe séparément, puis à réassembler les modèles réduits pour étudier plus facilement la structure complète.

4.1 Réduction statique de Guyan

La méthode de condensation statique de Guyan [73] constitue sans aucun doute l'un des premiers développements dans le domaine de la réduction de modèles. Bien que cette méthode ait des applications plus générales, on ne la traite ici que sous l'angle de la sous-structuration.. Les travaux d'Irons [80] et Hurty [78], qui lui sont contemporains, constituent aussi des développements importants. Cette méthode de réduction particulière ne considère pas de solutions faisant intervenir la dynamique du système considéré, mais seulement ses caractéristiques statiques, ce qui permet de rendre le modèle réduit exact pour ce type de sollicitations.

Le principe proposé par Guyan est simple : le modèle réduit doit pouvoir décrire de manière exacte tout chargement sur la frontière du modèle initial. Si l'on considère l'équilibre statique de la structure étudiée, et pour un chargement restreint à la frontière on trouve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

du fait que le terme de chargement extérieur sur la partie interne de la structure \mathbf{f}_i soit nul. Pour construire une base de réduction permettant de décrire tout chargement de la frontière, Guyan s'intéresse aux solutions du problème statique telles que pour chaque solution, un seul degré de liberté de la frontière ait une amplitude non nulle (en particulier unitaire) et que tous les autres soient fixes. Ces solutions spécifiques sont nommées *modes statiques* ou *relevés statiques*, et se traduisent par l'équilibre

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \boldsymbol{\Psi}_{ib} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.22})$$

On peut en déduire simplement l'écriture de $\boldsymbol{\Psi}_{ib}$ de sorte que la base de réduction statique de Guyan \mathbf{R}_G vaut

$$\mathbf{R}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.23})$$

Il faut noter que l'utilisation de cette méthode de réduction entraîne l'approximation de la solution initiale \mathbf{x} par $\tilde{\mathbf{x}}$ de sorte que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \approx \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_b \\ \tilde{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_b. \quad (\text{III.24})$$

La présence de toutes les solutions indépendantes, permettant de décrire toute réponse du système à un chargement sur la frontière fait de cette méthode un composant pratiquement nécessaire à toute méthode de réduction sur une frontière. De plus, les degrés de liberté de la frontière sont directement accessibles dans l'espace réduit, ce qui est particulièrement intéressant dans certains cas comme on le verra plus tard dans le document.

Dans la suite de ce document, et pour simplifier les notations, on fera l'impasse sur la notation de l'approximation de \mathbf{x} .

4.2 Méthode de Craig–Bampton

La méthode de Craig–Bampton [17] s'appuie sur les modes statiques de frontière et les *modes encastrés* du système pour construire un modèle réduit qui pourra être utilisé dans une démarche de sous-structuration. Les modes encastrés sont les couples de valeurs et vecteurs propres définis par

$$\forall k \in \{1, \dots, n_i\} \quad (\lambda_{i,k}, \phi_{i,k}) \quad | \quad (\lambda_{i,k} \mathbf{C}_{ii} + \mathbf{K}_{ii}) \phi_{i,k} = \mathbf{0}. \quad (\text{III.25})$$

L'utilisation de tels modes dans cette méthode, a donné le nom de *méthode à interfaces fixes*, par opposition aux méthodes à interfaces *libres*, *chargées* ou *hybrides*.

La base de réduction de Craig–Bampton \mathbf{R}_{CB} prend alors la forme

$$\mathbf{R}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bi} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} & \Phi_{ii} \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

où $\Phi_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ est la concaténation des modes $\phi_{i,k}$. À ce stade, cette base de vecteurs ne constitue pas une base de réduction et n'opère donc qu'un changement de base. En effet, \mathbf{R}_{CB} est une matrice carrée de dimension n , comme le système de départ. Dans une telle situation, la méthode de Craig–Bampton est rigoureusement exacte. La réduction s'opère en tronquant la base de vecteurs propres considérée. Une base de réduction de Craig–Bampton tronquée à un nombre n_m de modes est

$$\mathbf{R}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bm} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} & \Phi_{im} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.27})$$

Cette troncature s'opère généralement des valeurs propres les plus basses vers les plus hautes. Ainsi, le modèle réduit peut décrire le comportement du modèle complet jusqu'à une certaine fréquence de coupure. En dynamique des structures, une pratique courante est de considérer que les modèles réduits par la méthode de Craig–Bampton sont suffisamment précis dans la plage fréquentielle $[0; f_{n_m}/3]$, f_{n_m} étant la fréquence propre la plus élevée associée à un des modes à frontière encastrée contenu dans la base de réduction.

La méthode de Craig–Bampton est à ce jour la méthode de réduction la plus employée en dynamique des structures dans le monde industriel. Elle est disponible dans tous les grands codes de calcul industriel comme Ansys, Nastran, Abaqus ou NX. Ce succès est autant dû à sa polyvalence et sa robustesse, qu'à sa facilité de mise en œuvre.

4.3 Méthode de MacNeal

La méthode de MacNeal [95] est, à l'inverse de la méthode de Craig–Bampton, généralement considérée comme une méthode à interfaces dites *libres*. Toutefois, les développements proposés par MacNeal sont plus généraux puisqu'il considère les différents cas où les degrés de liberté de la frontière sont encastrés, libres, ou répartis entre ces deux cas, donnant son titre à son article *A hybrid method of component mode synthesis*. De manière assez intéressante, MacNeal se base essentiellement sur des travaux datant des années 1930 en électronique pour détailler ses développements.

MacNeal présente sa méthode en rappelant d'abord le cas de la synthèse modale où les degrés de liberté du système, qu'ils appartiennent à la frontière ou pas, sont réduits en utilisant comme base de réduction les modes propres de la structure complète. La base de réduction \mathbf{R}_Φ s'écrit

$$\mathbf{R}_\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{bm} \\ \Phi_{im} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.28})$$

La forme des modes propres ne possédant pas de structure particulière permettant d'isoler les degrés de liberté de la frontière, la méthode de MacNeal ne permet pas d'accéder directement à ces degrés de liberté pour effectuer un assemblage de sous-structures. Afin de bien restituer la souplesse de l'interface, il est nécessaire de compléter la base libre par des solutions statiques du problème étudié. Ces corrections entraînent le complément de la matrice \mathbf{R}_Φ obtenue précédemment sous la forme

$$\mathbf{R}_{MN} = \begin{bmatrix} \Phi_{bm} & \Phi_{bc} \\ \Psi_{im} & \Psi_{ic} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.29})$$

Les solutions statiques utilisées dans le cas de la méthode de MacNeal sont issues des matrices de coefficients d'influence de déformation, qui peuvent dans certains cas être difficiles à obtenir. Rubin [123] a proposé une formulation plus simple de ces corrections statiques, appelés *modes d'attache*. Ces modes sont calculés comme la réponse de la structure à un chargement unitaire successivement imposé sur les degrés de liberté de frontière, soit les solutions de l'équilibre

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

que l'on peut exprimer directement au moyen des sous-blocs de la matrice de raideur \mathbf{K} comme

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{bb} \\ \Psi_{ib} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{bb} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \Psi_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \end{bmatrix} \Psi_{bb} \quad (\text{III.31})$$

avec $\Psi_{bb} = (\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bi} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib})^{-1}$, qui n'est autre que le *complément de Schur* du bloc \mathbf{K}_{ii} de la matrice \mathbf{K} . On peut aussi remarquer que les modes d'attaches de MacNeal sont analogues aux modes statiques de Guyan.

À ce stade, la base de réduction de MacNeal-Rubin est

$$\mathbf{R}_{MN} = \begin{bmatrix} \Psi_{bb} & \Phi_{bm} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \Psi_{bb} & \Phi_{im} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.32})$$

Des améliorations ultérieures de la méthode de réduction de MacNeal ont été proposées, comme la méthode de Craig-Martinez [96]. N'ayant pas été utilisées durant cette thèse, leur description ne sera pas faite. Bien que fonctionnelle, la méthode de MacNeal, et plus généralement les méthodes à interfaces libres, sont souvent délaissées au profit des méthodes à interfaces fixes, en raison de leur plus grande stabilité numérique [36].

4.4 Méthode de Craig-Hale

La méthode proposée par Craig et Hale [47] consiste en une combinaison des méthodes de réduction basées sur les espaces de Krylov et des méthodes de réduction modale à interfaces libres ou fixes.

Sans re-développer les travaux présentés par Craig et Hale, ceux-ci montrent que pour un système donné, et sur la base des développements théoriques des espaces de Krylov et des méthodes de Krylov

par blocs, les espaces engendrés par des bases de vecteurs de la forme

$$\Phi_{\text{im}} = [\Psi_{\text{ib}}^{(1)} \Psi_{\text{ib}}^{(2)} \dots \Psi_{\text{ib}}^{(p-1)}] \quad (\text{III.33})$$

où Ψ_{ib} n'est autre que la base des relevés statiques solutions de l'équilibre (III.24), et

$$\Psi_{\text{ib}}^{(1)} = \mathbf{K}_{\text{ii}}^{-1} (\mathbf{C}_{\text{ii}} \Psi_{\text{ib}} + \mathbf{M}_{\text{ib}}), \quad (\text{III.34})$$

puis pour $p \geq 2$

$$\Psi_{\text{ib}}^{(p)} = \mathbf{K}_{\text{ii}}^{-1} (\mathbf{C}_{\text{ii}} \Psi_{\text{ib}}^{(p-1)}). \quad (\text{III.35})$$

Ces bases de vecteurs qui possèdent la structure d'espaces de Krylov par blocs, sont constituées de modes à interface fixe et donc la forme du mode d'ordre p est la réponse statique à un chargement inertiel imposé sur le mode d'ordre $p - 1$. La base de réduction de Craig–Hale d'ordre p , notée \mathbf{R}_{CH} est alors obtenue par

$$\mathbf{R}_{\text{CH}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\text{bb}} & \mathbf{0}_{\text{bi}} \\ \Psi_{\text{ib}} & \Phi_{\text{im}} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.36})$$

Cette base de réduction possède rigoureusement la même structure que la base de réduction de Craig–Bampton vue précédemment. Les méthodes utilisant des informations plus générales que les modes propres sont appelées de différentes façons dans la littérature, *Generalized Substructuring Methods* par exemple. Une revue assez exhaustive de ces méthodes est présentée dans [122]. Des variations autour de la méthode proposée par Craig et Hale ont été proposées par la suite [48].

4.5 Double synthèse modale

La double synthèse modale est une stratégie complémentaire des méthodes de réduction déjà présentées pour réduire la taille de modèles constitués de super-éléments. Par exemple, si une structure est constituée de super-éléments générés par la méthode de Craig–Bampton, les degrés de libertés d'interface n'étant pas forcément des grandeurs d'intérêt pour l'analyse (mais principalement nécessaires à l'efficacité de la méthode) et pouvant être dans certains cas en très grand nombre, il est dès lors très intéressant de réduire ces degrés de liberté afin de diminuer les temps de calcul.

D'un point de vue mathématique et en notant \mathbf{Z}_j une matrice associée à un super-élément et possédant la structure

$$\mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{bb},j} & \mathbf{Z}_{\text{bm},j} \\ \mathbf{Z}_{\text{mb},j} & \mathbf{Z}_{\text{mm},j} \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

l'application des contraintes de compatibilité des déplacements (ou de façon équivalente, l'équilibre des efforts) sur les frontières des super-éléments permet l'assemblage de la matrice décrivant la structure complète

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{bb}} & \mathbf{Z}_{\text{bm},1} & \dots & \mathbf{Z}_{\text{mb},N} \\ \mathbf{Z}_{\text{mb},1} & \mathbf{Z}_{\text{mm},1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{Z}_{\text{mb},N} & & & \mathbf{Z}_{\text{mm},N} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.38})$$

La réduction des degrés de liberté porte alors sur le bloc \mathbf{Z}_{bb} ayant servi à l'assemblage des super-éléments.

De nombreux auteurs ont présenté des approches de double synthèse et ces stratégies suivent encore aujourd'hui un développement soutenu. En effet, l'optimalité de ce type de stratégies dépend grandement du problème étudié, ce qui permet une variété notable des différentes solutions. De plus, ces méthodes ont été élargies au cas des structures non conformes, ou des structures modélisées en symétrie cyclique.

On peut notamment mentionner les méthodes proposées dans [46] où les auteurs proposent d'ap-

plier une réduction statique de Guyan sur une partie des degrés de liberté d'interface. Toutefois, ils pointent la difficulté de la sélection des variables à tronquer. Une stratégie envisagée est de ne garder que les degrés de liberté associés au termes diagonaux de la matrice de rigidité dynamique du système assemblé. Une autre stratégie, proposée dans [44] consiste à appliquer une synthèse modale au degrés de liberté d'attache pour réduire la taille des bloc matriciels associés.

Afin de généraliser l'emploi des méthodes de sous-structuration, des stratégies dédiées à la réduction d'interfaces ne supposant pas la compatibilité des maillages au niveau des frontières ont été proposées, d'abord une extension de la méthode de Craig–Bampton à ce cas particulier [59]. Plus récemment, une stratégie basée sur la construction de bases de polynômes, permettant d'interpoler des déformations admissibles des interfaces sans nécessiter une compatibilité exacte des déplacements a été présentée dans [41]. Une approche semblable a été proposée, utilisant des modes de *Gram-Schmidt* [27].

5 Symétrie cyclique

Dans certains cas, les systèmes physiques étudiés en ingénierie par la méthode des éléments finis présentent des symétries de chargement et/ou de géométrie. Tirer partie de ces propriétés de symétrie permet de diminuer la taille du problème étudié pour minimiser les coûts de calcul et gagner du temps. Une approche très répandue consiste par exemple à modéliser en deux dimensions des structures tridimensionnelles présentant une axe de symétrie, en considérant le comportement de ces structures comme axisymétrique. Les premiers travaux tirant partie des propriétés de répétitivité de structures linéaires ont été présentés par Orris et Petyt [113]. Ces travaux ont par la suite été complétés par Thomas [138] et Valid et Ohayon [141] pour les structures à symétrie cyclique, soit des structures telles qu'il existe un nombre entier N tel qu'une grandeur caractéristique du système $G(\alpha)$ en un point de position angulaire α est caractérisée par $G(\alpha) = G(\alpha + \frac{2\pi}{N})$.

Dans le cas particulier des machines tournantes, l'étude de certains composants peut se réduire à l'étude d'un seul éléments de ces composants en utilisant les propriétés de symétrie appropriées, comme illustré en figure III.3. Ainsi l'étude d'un disque aubagé comportant plusieurs dizaines de pales peut se réduire à l'étude d'un seul secteur comportant une pale. Le cas des structures axisymétriques correspond

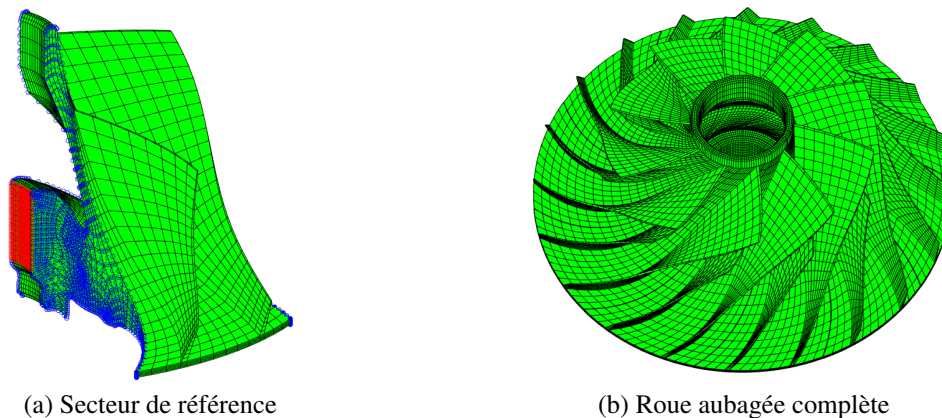


FIGURE III.3 – Équivalence entre secteur modélisé en symétrie cyclique et structure complète.
Frontières de symétrie cyclique (◐), encastrement (◑).

à des structures à symétrie cyclique dont le nombre de secteurs tend vers l'infini.

5.1 Formulation d'un problème en symétrie cyclique

La modélisation se fait dans le repère mobile R_m et l'axe de révolution de la structure est supposé confondu avec son axe de rotation. Soit R_{m_j} le repère mobile local défini par une rotation d'angle

$\alpha_j = \frac{2\pi j}{N}$ du repère R_m , pour tout $j \in [0, N - 1]$.

Soit \mathbf{x} un champ d'état de la structure dans le repère R_{m_0} confondu avec R_m . Le champ d'état \mathbf{x}_j du secteur j dans son repère local R_{m_j} est alors défini par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_j \mathbf{x}_j \quad (\text{III.39})$$

avec \mathbf{R}_j , la matrice de rotation permettant de passer du repère R_{m_j} au repère R_m :

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{I}_{n/3} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\alpha_j) & 0 & -\sin(\alpha_j) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha_j) & 0 & \cos(\alpha_j) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.40})$$

Dans le cadre de la représentation linéaire des groupes finis, Valid et Ohayon [141] ont montré que pour un secteur d'une structure à symétrie cyclique, référencé par $j = 0$ et délimité par une frontière gauche et une frontière droite séparées d'un angle α , toute grandeur d'état \mathbf{x} du secteur est telle que

$$\mathbf{x}_g = e^{ijk\alpha} \mathbf{x}_d \quad \forall j, k \in 0, \dots, N - 1. \quad (\text{III.41})$$

Du fait de l'invariance par rotation de cette relation, celle-ci peut être étendue à tout point de la structure de position angulaire θ de sorte que $\mathbf{x}(\theta + \alpha) = e^{ijk\alpha} \mathbf{x}(\theta)$.

5.2 Conditions de symétrie cyclique

Avant d'exprimer les relations entre les différents secteurs de la structure, il convient de partitionner les degrés de liberté qui nous intéressent en trois parties : l'intérieur (\bullet_i), frontière gauche (\bullet_g) et la frontière droite (\bullet_d). Moyennant certaines permutations en fonction de la base d'expression initiale de \mathbf{x}_0 , celui-ci s'écrit

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,0} \\ \mathbf{x}_{g,0} \\ \mathbf{x}_{d,0} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.42})$$

La continuité des déplacements aux interfaces entre le secteur de référence et ses deux secteurs adjacents impose les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{g,0} = \mathbf{x}_{d,1} \\ \mathbf{x}_{d,0} = \mathbf{x}_{g,N-1} \end{array} \right. \quad (\text{III.43a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{g,0} = \mathbf{x}_{d,1} \\ \mathbf{x}_{d,0} = \mathbf{x}_{g,N-1} \end{array} \right. \quad (\text{III.43b})$$

qui se traduisent en base cyclique par

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{x}}_{g,0}^k = \bar{\mathbf{x}}_{d,0}^k e^{ik\alpha} \\ \bar{\mathbf{x}}_{d,0}^k = \bar{\mathbf{x}}_{g,0}^k e^{i(N-1)k\alpha} \end{array} \right. \quad (\text{III.44a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{x}}_{g,0}^k = \bar{\mathbf{x}}_{d,0}^k e^{ik\alpha} \\ \bar{\mathbf{x}}_{d,0}^k = \bar{\mathbf{x}}_{g,0}^k e^{i(N-1)k\alpha} \end{array} \right. \quad (\text{III.44b})$$

qui sont de fait équivalentes. En utilisant la première, on peut écrire les relations suivantes entre les composantes cycliques du système en fonction de l'harmonique k considéré

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0 : \\ \forall k \in \{1, \dots, \kappa\} : \\ k = N/2 : \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{\mathbf{x}}_{g,0}^0 = \bar{\mathbf{x}}_{d,0}^0 \\ \bar{\mathbf{x}}_{g,0}^k = \bar{\mathbf{x}}_{d,0}^k e^{ik\alpha} \\ \bar{\mathbf{x}}_{g,0}^{N/2} = -\bar{\mathbf{x}}_{d,0}^{N/2} \end{array} \quad (\text{III.45a})$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{g,0}^k = \bar{\mathbf{x}}_{d,0}^k e^{ik\alpha} \quad (\text{III.45b})$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{g,0}^{N/2} = -\bar{\mathbf{x}}_{d,0}^{N/2} \quad (\text{III.45c})$$

où $\kappa = N/2 - 1$ si N est pair et $(N - 1)/2$ si N est impair. Par ailleurs, la relation (III.45c) n'existe que pour un nombre de secteurs pair. Ces relations permettent de former l'ensemble des matrices

d'application des conditions aux limites cycliques telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0 : \\ \forall k \in \{1, \dots, \kappa\} : \\ k = N/2 : \end{array} \right. \quad \mathbf{T}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{III.46a})$$

$$\mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{ik\alpha} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{III.46b})$$

$$\mathbf{T}^{N/2} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{III.46c})$$

5.3 Application des conditions aux limites cycliques sur le secteur de référence

Une fois exprimée dans la base $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_i \ \mathbf{x}_g \ \mathbf{x}_d]^\top$, toute matrice \mathbf{Z} décrivant le comportement du secteur peut être partitionnée sous la forme

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ii} & \mathbf{Z}_{ig} & \mathbf{Z}_{id} \\ \mathbf{Z}_{gi} & \mathbf{Z}_{gg} & \mathbf{Z}_{gd} \\ \mathbf{Z}_{di} & \mathbf{Z}_{dg} & \mathbf{Z}_{dd} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.47})$$

puis à l'aide des relations de propagation exprimées précédemment, on peut appliquer les conditions de symétries associées à l'harmonique k et obtenir

$$\mathbf{Z}^k = (\mathbf{T}^k)^\top \mathbf{Z} \mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ii} & \mathbf{Z}_{id} + \mathbf{Z}_{ig} e^{ik\alpha} \\ \mathbf{Z}_{di} + \mathbf{Z}_{gi} e^{-bk\alpha} & \mathbf{Z}_{dd} + \mathbf{Z}_{gg} + \mathbf{Z}_{dg} e^{ik\alpha} + \mathbf{Z}_{gd} e^{-bk\alpha} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.48})$$

Dans les cas particuliers $k \in \{0, N/2\}$, les matrices \mathbf{Z}^k sont réelles et symétriques. Dans les autres cas, elles sont complexes et hermitiennes.

5.4 Correspondance entre structure complète et espace cyclique

Toujours selon les travaux de Valid et Ohayon, on peut montrer qu'une variable d'état du secteur j , notée \mathbf{x}_j peut s'écrire

$$\mathbf{x}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{\mathbf{x}}^k e^{ijk\alpha}, \quad (\text{III.49})$$

ce qui correspond à effectuer une transformée de Fourier discrète sur les secteurs. Inversement, on peut obtenir les coordonnées cycliques $\bar{\mathbf{x}}_k$ pour tout harmonique k sur le secteur de référence au moyen de

$$\bar{\mathbf{x}}^k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{x}_j e^{-bjk\alpha}. \quad (\text{III.50})$$

Des formulations légèrement différentes [19, 35] peuvent être adoptées, qui relèvent essentiellement d'un choix de l'auteur. Un formalisme réel peut être adopté pour le calcul de la transformée (III.49) sous la forme

$$\mathbf{x}_j = \bar{\mathbf{x}}_0^0 + \sum_{k=1}^{\kappa} \left[\bar{\mathbf{x}}_0^{k,cos} \cos(jk\alpha) + \bar{\mathbf{x}}_0^{k,sin} \sin(jk\alpha) \right] + (-1)^j \bar{\mathbf{x}}_0^{N/2}, \quad (\text{III.51})$$

et en concaténant ces relations pour tous les secteurs on peut écrire le passage de la base des composantes cycliques à la base physique

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{x}} \quad (\text{III.52})$$

pour la structure cyclique complète, avec

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \cos(\alpha)\mathbf{I} & \sin(\alpha)\mathbf{I} & \cos(2\alpha)\mathbf{I} \dots & \sin(\kappa\alpha)\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \cos(2\alpha)\mathbf{I} & \sin(2\alpha)\mathbf{I} & \cos(4\alpha)\mathbf{I} \dots & \sin(2\kappa\alpha)\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I} & \cos((N-1)\alpha)\mathbf{I} & \sin((N-1)\alpha)\mathbf{I} & \cos((N-1)2\alpha)\mathbf{I} \dots & \sin((N-1)\kappa\alpha)\mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.53})$$

Grâce aux propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques et aux conditions aux limites cycliques décrites précédemment, on peut aisément retrouver les matrices du problème associé à chaque harmonique.

Dans le cadre de notre étude thermomécanique, il est important de remarquer que cette équivalence entre bases physique et cyclique est valable pour tout champ d'état de la structure. On peut ainsi utiliser cette démarche pour les champs de déplacement \mathbf{x} et de température θ .

5.5 Problème aux valeurs propres associé à l'harmonique k

Bien que la résolution du problème aux valeurs propres associé aux matrices \mathbf{Z}^k soit faisable, il est commun d'appliquer un formalisme réel pour obtenir les matrices $\mathbf{Z}_{\mathbb{R}}^k, \mathbf{Z}_{\mathbb{I}}^k$ telles que $\mathbf{Z}_{\mathbb{R}}^k = \text{Re}(\mathbf{Z}^k)$ et $\mathbf{Z}_{\mathbb{I}}^k = \text{Im}(\mathbf{Z}^k)$. De la même manière, on note $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbb{R}}^k = \text{Re}(\bar{\mathbf{x}}^k)$ et $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbb{I}}^k = \text{Im}(\bar{\mathbf{x}}^k)$. En contrepartie de la réduction à un problème réel, on doit doubler la taille de l'espace d'étude. On parle alors de secteur dupliqué, et le problème aux valeurs propres réel s'écrit pour un système semblable à (III.1)

$$\lambda \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbb{R}}^k & -\mathbf{C}_{\mathbb{I}}^k \\ \mathbf{C}_{\mathbb{I}}^k & \mathbf{C}_{\mathbb{R}}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbb{R}}^k & -\mathbf{K}_{\mathbb{I}}^k \\ \mathbf{K}_{\mathbb{I}}^k & \mathbf{K}_{\mathbb{R}}^k \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbb{R}} \\ \Phi_{\mathbb{I}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (\text{III.54})$$

6 Spécificités dans le cadre de la problématique contact rotor-stator

6.1 Réduction de modèles thermiques

Les méthodes présentées dans les sections précédentes, qui font appel à la procédure de Galerkin, permettent de trouver des bases de vecteurs de dimensions réduite permettant de décrire un problème physique. Ces méthodes sont très connues en dynamique des structures, et l'environnement dans lequel s'est déroulé cette thèse n'y est pas étranger. Toutefois, il est important de noter qu'elles sont rigoureusement applicables à des modèles éléments finis décrivant l'équation de la chaleur dans une structure. En effet, les méthodes de réduction doivent dans tous les cas préserver des propriétés intrinsèques du modèle lors de la réduction, comme la passivité et la stabilité, que le problème soit un problème de statique, dynamique, en mécanique des structures, des fluides ou en thermique. Les méthodes communément utilisées sont toutefois un peu différentes en thermique. En effet, l'équation de la dynamique et l'équation de la chaleur sont des équations aux dérivées partielles de types différents. La première est *hyperbolique* (dans le cas où l'amortissement est faible) tandis que la seconde est *parabolique* (voir l'annexe A).

Des procédures similaires à une synthèse modale sont parfois utilisées [42, 61, 133], les modes utilisés correspondent aux solutions de l'équation de la chaleur homogène. Oulefki [114, §2.2] présente plusieurs critères de troncature modale (Marshall, Litz, critère de dominance) permettant de sélectionner les modes à retenir dans la base de réduction en fonction de certaines propriétés, comme la valeur propre

associée. Ces critères simples mais rapides de troncature modale sont rigoureusement ceux qui sont utilisés dans le cas de la réduction de Craig–Bampton ou la synthèse modale en dynamique des structures. Le même auteur, reprenant des travaux antérieurs [98], précise que les critères de troncature simples ne suffisent pas dans certains cas puisqu’« un mode rapide de forte amplitude n’est pas négligeable par rapport à un mode lent de faible amplitude ». Pour optimiser le contenu de la base de réduction par rapport au problème thermique, Oulefki utilise une procédure d’optimisation dite d’*amalgame modal*. Cette procédure, semblable aux méthodes de SVD consiste à sélectionner les modes à conserver au moyen d’une mesure de l’erreur de réduction. La réduction de modèles thermiques linéaires par *vecteurs de Lanczos* est aussi mentionnée dans [42], c’est-à-dire en utilisant une approche basée sur les espaces de Krylov.

Certains auteurs ont aussi proposé des méthodologies de réduction des problèmes de conduction non-linéaires, comme dans [109] où des modes de branches sont utilisés. Ces modes sont calculés sans tenir compte des conditions aux limites du problème à résoudre. Ceci les rend plus difficiles à calculer que lors d’une synthèse modale conventionnelle mais permet à terme une plus grande polyvalence, en évitant une nouvelle réduction à chaque changement des conditions aux limites. Dans [42], un développement en série de Taylor du champ de température est employé et des dérivées modales sont calculées pour compléter une base modale linéaire. Ceci permet de réduire efficacement un problème de conduction de la chaleur rendu non-linéaire par la dépendance des propriétés thermiques du modèle avec la température.

Aucune des procédures rencontrées ne fait mention de problèmes de frottement avec échauffement, mais concernent plutôt des problèmes de conduction, convection de la chaleur, caractérisés par des temps caractéristiques relativement longs.

Concernant les turbomachines, peu de documents semblent s’intéresser à la réduction de modèles thermiques pour les roues aubagées ou les carters. Une méthodologie dédiée à la réduction des problèmes de conduction et convection dans les roues aubagées, et basée sur l’approche de Craig–Bampton, est présentée dans [38]. Cependant, de l’avis même d’un des auteurs, cette méthodologie manque d’efficacité dans l’identification des régimes transitoires, en raison de la quantité importante de modes propres nécessaires pour faire converger la méthode. Cette observation sera illustrée lors de la présentation de la stratégie de réduction utilisée dans cette thèse.

6.2 Problèmes multiphysiques

L’étude de problèmes impliquant plusieurs physiques pose plusieurs difficultés. En effet, selon les cas étudiés, les physiques couplées peuvent intervenir de façon très différentes et nécessiter des approches adaptées pour chacune de ces physiques, et leur couplage. La méthode de réduction à employer doit donc souvent être spécifique pour être efficace. Une revue de différentes approches de réduction de systèmes multiphysiques [99, §7] liste plusieurs stratégies : découplées, découplées avec enrichissement et couplées. Les systèmes étudiés sont de type thermoélastique, aéroélastique, acoustique-élastique. Des travaux associés à ces trois stratégies sont décrits ci-dessous. Il faut toutefois souligner que la frontière entre ces trois stratégies est parfois ténue.

Réduction découplée

Tran [139, §5] applique les méthodes de réduction présentées précédemment (méthode de Craig–Bampton, réduction en symétrie cyclique) au cas du couplage aéroélastique. Ce couplage est caractérisé par des temps caractéristiques courts pour le fluide et les structures considérées. Cette observation n’est pas valable pour les fluides lourds qui posent un autre problème du fait des effets inertiels importants pour ce type de fluides. Pour réduire le problème couplé, l’auteur projette les efforts aérodynamiques généralisés, calculés pour une structure rigide, au moyen d’une base de réduction calculée pour la

structure dans le vide. Les termes de couplage aéroélastique sont ainsi négligés lors du calcul des formes modales, on parle de *réduction découplée*.

D'autres travaux insistent sur la nécessité de l'absence de termes de couplage dans les bases de réduction, que l'on parle modèles mono ou multiphysiques [128]. Si l'on considère une base de réduction, de type Craig–Bampton

$$\mathbf{R}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bm} \\ \Psi_{ib} & \Phi_{im} \end{bmatrix} \quad (\text{III.55})$$

Le terme extra-diagonal Ψ_{ib} permet de satisfaire l'exactitude du modèle réduit pour tout chargement statique sur la frontière du modèle. Au sein du modèle réduit, ces premiers vecteurs sont associés chacun à un degré de liberté de la frontière. Ceux-ci servent donc à la fois à piloter le phénomènes apparaissant sur la frontière, mais aussi des phénomènes potentiellement localisés loin de cette même frontière. Ceci permet de compacter le modèle de manière très performante en autorisant la description de cinématiques complexes avec peu de degrés de liberté. Toutefois, la présence de ce type de termes génère des matrices réduites typiquement pleines, quand les matrices initiales sont très creuses du fait de leur génération par la méthode des éléments finis. Il y a donc une perte de certaines propriétés des matrices réduites vis-à-vis des matrices du modèle complet, ce qui se traduit souvent par une dégradation du conditionnement du modèle réduit. D'un point de vue phénoménologique, on constate une propagation de l'information (déplacement, température, vitesse,...) à vitesse infinie, puisque pour tout chargement sur la frontière, des degrés de liberté de la partie intérieure du modèle sont impactés, ce qui n'est pas réaliste.

Ces observations peuvent sembler anodines, mais en ce qui concerne les couplages multiphysiques, la présence de termes de couplage dans la base de réduction peut entraîner une modification du type de couplage. Ce type de modifications peut alors nécessiter d'utiliser des méthodes de résolution différentes pour les deux modèles ce qui n'a plus rien d'anodin. Les auteurs proposent donc d'éviter ce type de couplages et de conserver une structure de base de réduction diagonale par blocs. Il en résulte des bases de réduction moins optimales, puisque présentant un nombre plus important de vecteurs de base, cette optimalité étant sacrifiée pour plus de robustesse numérique de la méthode. Dans le cas de la méthode de Craig–Bampton, l'application d'une telle stratégie donnerait la base de réduction

$$\mathbf{R}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bb} & \mathbf{0}_{bm} \\ \mathbf{0}_{ib} & \Psi_{ib} & \Phi_{im} \end{bmatrix} \quad (\text{III.56})$$

Cette stratégie a déjà été proposée dans le cadre des méthodes de Krylov dans [93] et connaît un développement soutenu dans différents domaines sous la dénomination *Structure Preserving Model Order Reduction - SPMOR*.

Enrichissement des bases découplées

Une méthode de réduction thermomécanique pour les MEMS (Micro ElectroMechanical Systems) est proposée dans [108], cette méthode se base sur l'approche de Craig–Bampton pour la réduction des parties thermique et mécanique du modèle. Toutefois, ce type de structures est caractérisé par deux couplages, un couplage de la thermique vers la mécanique dû aux dilatations, et un couplage de la mécanique vers la thermique, appelé couplage piézo-mécanique. Ce second couplage entraîne la génération de chaleur lorsque la structure vibre. De ce fait, les bases de réduction découplées manquent de précision. Les auteurs proposent donc d'enrichir la base de réduction, tout en conservant la facilité de calcul des bases découplées, avec des modes de couplage thermomécanique appelés *modes pilotés par la thermique* (*thermal-driven modes* en anglais). Ces modes sont calculés en utilisant la base de modes thermiques déjà calculés, et les termes de dilatation thermique de la matrice de raideur. Par ailleurs, la méthode proposée est une méthode de type Petrov–Galerkin, avec une base de réduction et une base de projection différentes.

Réduction couplée

La réduction frontale de problèmes couplés semble l'approche la plus simple à mettre en place, puisqu'il suffit de trouver des solutions du problème complet pour le réduire. Toutefois, une telle approche présente plusieurs défauts. Les temps de calculs peuvent devenir rédhibitoires, et la sélection de solutions pertinentes très ardue. Dans [107] des modèles couplés thermomécaniques non-linéaires sont réduits en considérant plusieurs types de modes thermiques. Des modes thermiques *optimisés*, qui sont les modes engendrant les contraintes thermomécaniques les plus fortes, auxquels des corrections sont apportées pour leur permettre de respecter les conditions aux limites du problème thermique. D'autres modes sont ensuite choisis pour enrichir la base de réduction précédente sur la base de deux simulations sur le modèle complet en utilisant la méthode des snapshots. La réduction de modèles thermomécaniques de composants électroniques est étudiée dans [148]. Les méthodes proposées se basent sur les algorithmes d'Arnoldi [13] et Lanczos [87], qui appartiennent aux méthodes de réduction de Krylov.

La réduction de modèles aéroélastiques est aussi traitée de manière couplée [86]. Ces travaux décrivent une procédure où le couplage est traité de manière partielle. Dans un premier temps, une analyse CFD instationnaire est utilisée en considérant une déformée de la structure selon certains de ses modes de vibration. Les résultats de l'analyse CFD sont ensuite synthétisés au moyen d'une décomposition de Karhunen-Loeve, soit une POD. Enfin, le système couplé est réduit en utilisant la base POD pour le champ de pression instationnaire et la base des modes propres de la structures pour le champ de déplacements.

6.3 Problèmes faisant intervenir des contraintes de contact

Les problèmes de contact sont une autre classe de problèmes physiques dont la modélisation est complexe. La présentation détaillée des difficultés associées à ces problèmes est décrite dans un chapitre dédié.

Les problèmes de contact posent plusieurs difficultés. D'abord, si l'on souhaite décrire de manière précise le comportement d'une interface de contact, ce qui dans le cadre d'une modélisation par éléments finis correspond à la description précise de tous les degrés de liberté de contact, il est conseillé de conserver un maximum d'information physique associée à ces degrés de liberté. Comme les pressions de contact peuvent varier de façon notable dans le temps et l'espace, il faut donc que la base de réduction employée conserve, le plus précisément possible, l'information associée à la dynamique de ces points de contact. La méthode de Craig-Bampton a ainsi montré son efficacité pour la modélisation de phénomènes d'interaction rotor-stator [21, 22]. Des approches analogues sont aussi employées dans le cas de la modélisation des contacts sur les pales à talon [120] afin de décrire correctement les cinématiques des zones de contact.

De plus, les qualités numériques des méthodes de réduction comme le conditionnement doivent être considérées lors de l'étude de problèmes de contact. En effet, les algorithmes de traitement des problèmes de dynamique des contacts peuvent conduire très rapidement à des difficultés liées au conditionnements numériques du problème traité. Il faut donc être vigilant à ce que les qualités numériques des modèles réduits générer puissent permettre une résolution précise et efficace.

Enfin, les problèmes de contact font intervenir des impulsions, qui entraînent la formation d'ondes qui se propagent dans les structures. Pour autant, une analyse simple montre que les méthodes de réduction comme la méthode de Craig-Bampton sont plutôt adaptées à la description de solutions stationnaires puisque les modes constituant la base de réduction de Craig-Bampton couplent la frontière et la partie interne du système. Ainsi, un chargement sur un nœud de la frontière entraîne *instantanément* une réponse de la partie interne, quelle que soit la distance du point de la partie intérieure considéré à la frontière. La sélection d'une méthode de réduction adaptée à la description efficace des problèmes de contact n'a donc rien de simple, en particulier dans le cas thermomécanique.

7 Extension de la méthode de Craig–Hale

7.1 Limitations de la méthode de Craig–Hale

La méthode proposée par Craig et Hale [47] et présentée dans la section III.4.4 repose sur les éléments théoriques associés aux méthodes de réduction par blocs. Toutefois, ses auteurs ont pour son développement fait des hypothèses de couplage entre la frontière et la partie interne du système. Ces hypothèses ne sont généralement pas réductrices, mais font que cette procédure de réduction est intrinsèquement peu précise en hautes fréquences. De plus, cette méthode ne bénéficie pas des développements des méthodes de Krylov rationnelles. Ces deux limitations sont levées dans ce qui a été appelé la méthode de *Craig–Hale Rationnelle* ou *Rational Craig–Hale* en anglais, qui a été présentée dans [72] et qui va maintenant être décrite. On mentionnera cette méthode par l’acronyme RCH par la suite.

7.2 Construction de la base RCH

Afin de reprendre les développements de Craig et Hale, nous sommes partis du principe des méthodes de réduction de Krylov, à savoir exprimer la fonction de transfert du système. Cependant, cette opération s’est faite cette fois en tenant compte de la séparation entre degrés de liberté internes et frontières.

Si l’on repart de l’équilibre (III.1), vérifié par le système qui nous intéresse, dans lequel on sépare les degrés de liberté de la frontière et de la partie interne, on obtient

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bi} \\ \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (\text{III.57})$$

L’application de la transformée de Laplace à ce système suivie de la factorisation du vecteur \mathbf{x} donne

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bi} \\ \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (\text{III.58})$$

où le terme de la forme $\mathbf{C}s + \mathbf{K}$ est la *matrice de raideur dynamique* du système. La réponse \mathbf{x} du système s’interprète alors comme la réponse impulsionnelle du système à une sollicitation \mathbf{f} , que l’on supposera constante dans l’espace de Laplace (et donc un Dirac dans l’espace temporel).

En supposant que l’ensemble des chargements est limité à la frontière, soit $\mathbf{x}_b \rightarrow \mathbf{I}_{bb}$, ce nouvel équilibre s’écrit

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{C}_{bi} \\ \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{C}_{ii} \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \boldsymbol{\Phi}_{ib} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{bb} \\ \mathbf{0}_{ib} \end{bmatrix} \quad (\text{III.59})$$

où $\boldsymbol{\Phi}_{ib}$ est la réponse impulsionnelle de la partie interne du système. Cette réponse vérifie donc

$$\boldsymbol{\Phi}_{ib} = -(\mathbf{C}_{ii}s + \mathbf{K}_{ii})^{-1}(\mathbf{C}_{ib}s + \mathbf{K}_{ib}) \quad (\text{III.60})$$

Dans le cas statique, soit le comportement asymptotique pour $s \rightarrow 0$, on retrouve bien les relevés statiques utilisés dans la méthode de Craig–Bampton. Le cas asymptotique pour $s \rightarrow \infty$ donne $\boldsymbol{\Phi}_{ib} = -\mathbf{C}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib}$, ce qui correspond aux effets de masse.

La procédure d’expansion de $\boldsymbol{\Phi}_{ib}$ est maintenant appliquée autour d’une valeur de la variable de Laplace s_0 , appelée *point d’expansion*. Pour simplifier le développement de cette expansion, on notera $\mathbf{A}_{ii} = (\mathbf{C}_{ii}s_0 + \mathbf{K}_{ii})$, $\mathbf{A}_{ib} = (\mathbf{C}_{ib}s_0 + \mathbf{K}_{ib})$, $\mathbf{H}_{ib}^0 = (\mathbf{A}_{ii})^{-1}\mathbf{A}_{ib}$, $\mathbf{H}_{ib}^1 = (\mathbf{A}_{ii})^{-1}(\mathbf{C}_{ii}\mathbf{H}_{ib}^0 - \mathbf{C}_{ib})$ et

$\mathbf{H}_{ii}^2 = (\mathbf{A}_{ii})^{-1} \mathbf{C}_{ii}$. Après diverses manipulations, détaillées dans l'annexe B, l'expansion prend la forme

$$\Phi_{ib} = -\mathbf{H}_{ib}^0 + \sum_{k=1}^n (\mathbf{H}_{ii}^2)^{k-1} \mathbf{H}_{ib}^1 (s_0 - s)^k + o((s_0 - s)^n). \quad (\text{III.61})$$

D'après cette expression, les coûts numériques pour une expansion aux ordres 0 ou 1 sont donc du même ordre de grandeur que la résolution des modes statiques de Craig–Bampton, sauf qu'il faut répéter l'opération deux fois. Dans le cas d'une expansion d'ordre supérieur à 2, le calcul des termes dépendant de \mathbf{H}_{ii}^2 semble a priori plus coûteux puisqu'il fait intervenir les puissances successives de cette matrice. En pratique, on ne calcule jamais le terme \mathbf{H}_{ii}^2 , puisque l'on peut se contenter de calculer les différents moments de manière itérative, comme l'illustre l'algorithme B.1. De plus, et ce sera montré par la suite, il est généralement plus pertinent de conserver plus de points d'expansion, en tirant parti des avantages des méthodes de Krylov rationnelles que d'augmenter l'ordre d'expansion.

L'utilisation de plusieurs points d'expansion nécessite à nouveau un calcul complet par point considéré. En fonction de la taille du système considéré, et de la taille relative de la frontière par rapport à l'intérieur, il peut donc être plus intéressant autant en termes de coûts numériques que de précision, de conserver soit plusieurs modes au même point d'expansion ou quelques modes répartis sur plusieurs points d'expansion. La base de réduction dynamique du système rassemble alors les termes \mathbf{H}_{ib}^0 , \mathbf{H}_{ib}^1 et \mathbf{H}_{ib}^2 de sorte que

$$\Phi_{ib} = -[\mathbf{H}_{ib}^0 \quad \mathbf{H}_{ib}^1 \quad \dots \quad (\mathbf{H}_{ib}^2)^{k-1} \mathbf{H}_{ib}^1] \quad (\text{III.62})$$

Dans le cas d'une expansion uniquement au point $s_0 = 0$, on obtient la base de réduction :

$$\Phi_{ib} = -[\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \quad \mathbf{K}_{ii}^{-1} (\mathbf{C}_{ii} (\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib}) - \mathbf{C}_{ib}) \quad \dots \quad (\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{C}_{ii})^{k-1} \mathbf{K}_{ii}^{-1} (\mathbf{C}_{ii} (\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib}) - \mathbf{C}_{ib})] \quad (\text{III.63})$$

Si on s'intéresse à la méthode proposée par Craig et Hale [47], le contenu de la base de réduction à interfaces fixes utilisant des sous-espaces de Krylov est le suivant (qui a ici été transposé au cas du système (III.1)) :

$$\Psi_{ib}^0 = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \quad (\text{III.64})$$

$$\Psi_{ib}^1 = \mathbf{K}_{ii}^{-1} (\mathbf{C}_{ii} (-\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ib}) + \mathbf{C}_{ib}) \quad (\text{III.65})$$

$$\Phi_{ib} = [\Psi_{ib}^0 \quad \Psi_{ib}^1 \quad \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{C}_{ii} \Psi_{ib}^1 \quad \dots \quad (\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{C}_{ii})^{k-1} \Psi_{ib}^1] \quad (\text{III.66})$$

La méthode proposée ici est donc la généralisation à plusieurs points d'expansion de l'écriture faite par Craig et Hale. La base complète obtenue au moyen de la méthode décrite ci-dessus est techniquement constituée des modes de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \Phi_{ib} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.67})$$

du fait des hypothèses de construction de Φ_{ib} établies à l'équation (III.59). La base qui sera donc utilisé par la suite pour décrire la solution sera constitué des relevés statiques et de la contribution des Φ_{ib} privée des relevés statiques (déjà pris en compte)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \Phi_{ib} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \Psi_{ib} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{bb} \\ \mathbf{H}_{ib} - \Psi_{ib} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.68})$$

7.3 Orthogonalisation de la base RCH

Les bases de Krylov sont des bases intrinsèquement orthogonales. Toutefois, en raison des erreurs numériques de troncature, les modes constituant les bases de Krylov tendent à devenir colinéaires. Cette tendance entraîne une dégradation de la stabilité et du conditionnement des modèles réduits obtenus. Cette problématique est aujourd'hui bien connue et de nombreuses solutions ont été proposées pour y

remédier.

Les algorithmes d'Arnoldi [13] et Lanczos [87] résolvent ce problème en orthogonalisant le dernier mode obtenu par rapport à l'ensemble des modes précédents ou par rapport aux deux modes précédents au moyen d'une procédure de Gram-Schmidt. Plus récemment, et pour des bases de vecteurs de Ritz semblables aux bases de Krylov, l'application d'une décomposition en valeurs singulières de la base de réduction a été proposée [12, 70, 84].

Enfin, l'état de l'art montre que l'on peut appliquer une décomposition en valeurs singulières sur la matrice de masse (ou de capacité thermique dans le cas de l'équation de la chaleur) du modèle réduit mal conditionné. La base modale obtenue est alors tronquée en utilisant un critère sur les valeurs singulières associées. Si celles-ci sont de l'ordre de la précision numérique, les modes associés sont négligeables. La reprojektion du modèle réduit sur cette nouvelle base modale permet alors de récupérer un modèle plus compact et mieux conditionné. L'intérêt de cette méthode réside dans l'application de la SVD sur une base modale de dimensions déjà assez faible [94].

8 Application au modèle de poutre thermoélastique

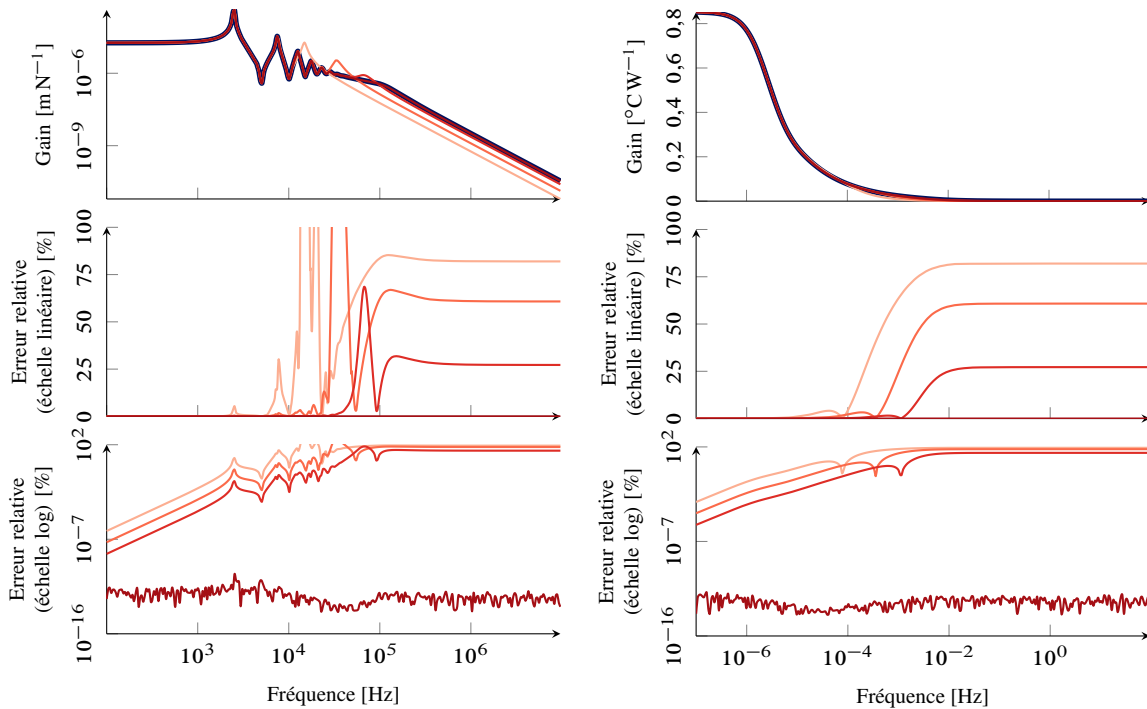
Pour caractériser chaque méthode de réduction, on les applique toutes au cas le plus simple décrit dans ce document, à savoir la poutre thermoélastique en traction compression, pour éliminer tout comportement complexe issu d'une géométrie particulière. Deux paramètres ont été considérés comme particulièrement pertinents dans un premier temps pour comparer les méthodes : le nombre de modes retenus dans la base de réduction, et le nombre de degrés de liberté du système complet. Les deux analyses ont été effectuées sur les sous-systèmes décrivant les parties mécanique et thermique du modèle de manière indépendante.

8.1 Influence du nombre de modes conservés

Le nombre de modes conservés dans la base de réduction est un des paramètres sensibles des méthodes de réduction. Pour les méthodes basées sur une synthèse modale comme les méthodes de Craig-Bampton ou MacNeal. Pour d'autres méthodes, comme les méthodes de Krylov (Craig-Hale et Rational Craig-Hale) ou les méthodes de SVD, le choix des vecteurs constituant la base de réduction nécessite des paramètres complémentaires : snapshots, points et ordre d'expansion par exemple. Dans toute cette section ces paramètres sont fixés. Le modèle étudié est un modèle comportant $n_{ddl} = 20$ degrés de liberté. Le nombre de modes conservés n_m est donné en pourcentage du nombre initial.

Méthode de Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton, figure III.4 permet sans surprise dans le cas mécanique comme thermique d'obtenir la convergence du modèle réduit sur une plage fréquentielle de plus en plus large. Comme on peut s'y attendre, le comportement pour des fréquences élevées est mauvais, mais cela n'a que peu de conséquences en mécanique puisque la dynamique des structures étudiées implique principalement les premières familles modales des structures. Dans le cas de flux thermiques de contact, dont les temps caractéristiques sont analogues à ceux des efforts de contact, et donc relativement courts par rapport aux temps caractéristiques de conduction de la chaleur, on peut supposer que cette méthode aura quelques difficultés à reproduire le comportement du système complet. En effet, avec un système réduit de moitié, l'erreur aux hautes fréquences reste de 25 % environ. Pour un système de taille identique au problème initial, les erreurs constatées sont de l'ordre de la précision numérique. Cette remarque est faite ici dans le cas de la méthode de Craig-Bampton, mais est aussi valable pour les autres méthodes testées.



(a) Fonction de réponse en fréquence – mécanique

(b) Fonction de réponse en fréquence – thermique

FIGURE III.4 – Méthode de Craig–Bampton, influence du nombre de modes retenus. $n_m = 10\%$ (—), 25% (—), 50% (—), 100% (—).

Méthode de MacNeal

La méthode de MacNeal, dont le comportement fréquentiel est présenté en figure III.5 permet elle aussi d’obtenir des modèles réduits valides sur une plage fréquentielle croissante. Toutefois, pour un nombre de modes retenus dans la base de réduction identique à un modèle réduit obtenu par la procédure décrite par Craig–Bampton, les erreurs observées sont plus faibles avec la méthode de MacNeal. On retrouve le même comportement que précédemment en ce qui concerne les hautes fréquences, à savoir que la précision est assez mauvaise dans cette gamme de fréquences, 10^4 Hz en mécanique et 10^{-4} Hz en thermique.

Méthode de Craig–Hale

La méthode de Craig–Hale, permet comme les méthodes précédentes d’obtenir des précisions importantes des modèles réduits, sauf que ce comportement concerne aussi les hautes fréquences, pour un nombre suffisant de modes. Ainsi, l’erreur due à la réduction est inférieure à 10% en mécanique et plus faible encore en thermique, quand le modèle est réduit de moitié. Ces remarques sont déduites de la figure III.6.

Méthode Rational–Craig–Hale

Le cas de cette méthode est particulier et sera décrit plus en détail dans les sections suivantes. En effet, cette méthode constitue une extension de la méthode de Craig–Hale. Cette dernière n’est paramétrée que par l’ordre de troncature de l’expansion en série de Taylor de la fonction de transfert du système, ce qui limite la dimension de l’espace de Krylov associé. La méthode Rational–Craig–Hale repose sur le calcul de plusieurs expansions. Il faut donc non seulement choisir l’ordre d’expansion,

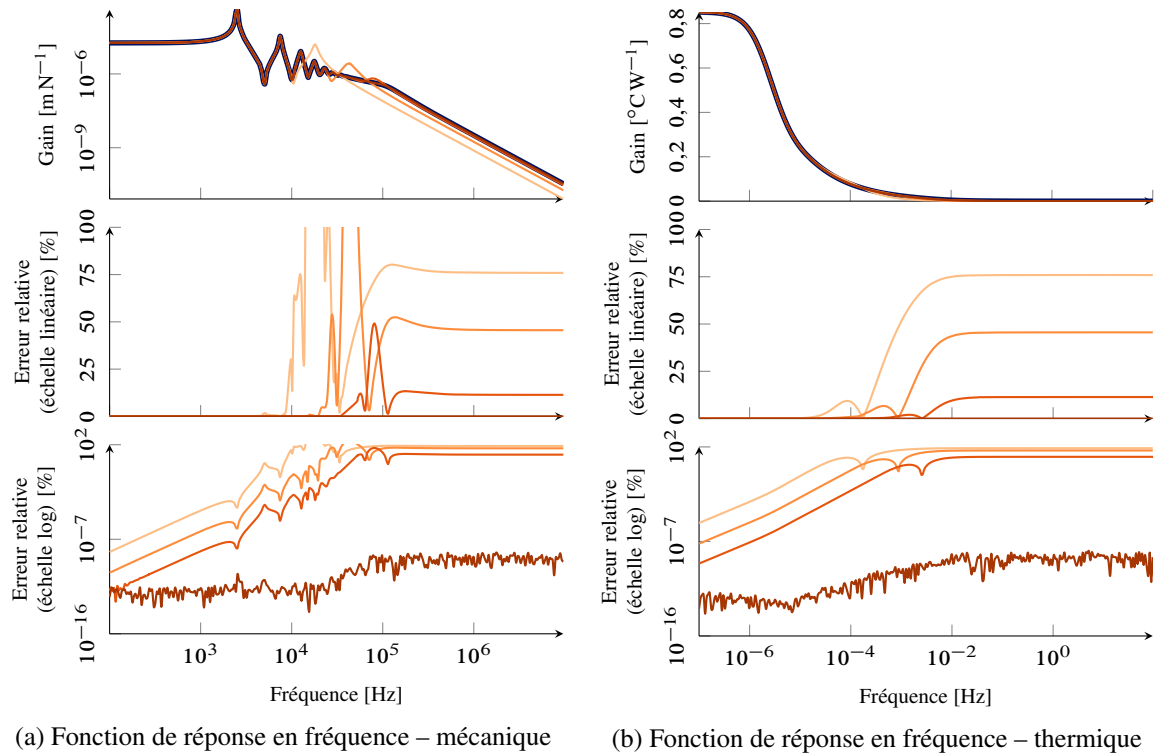


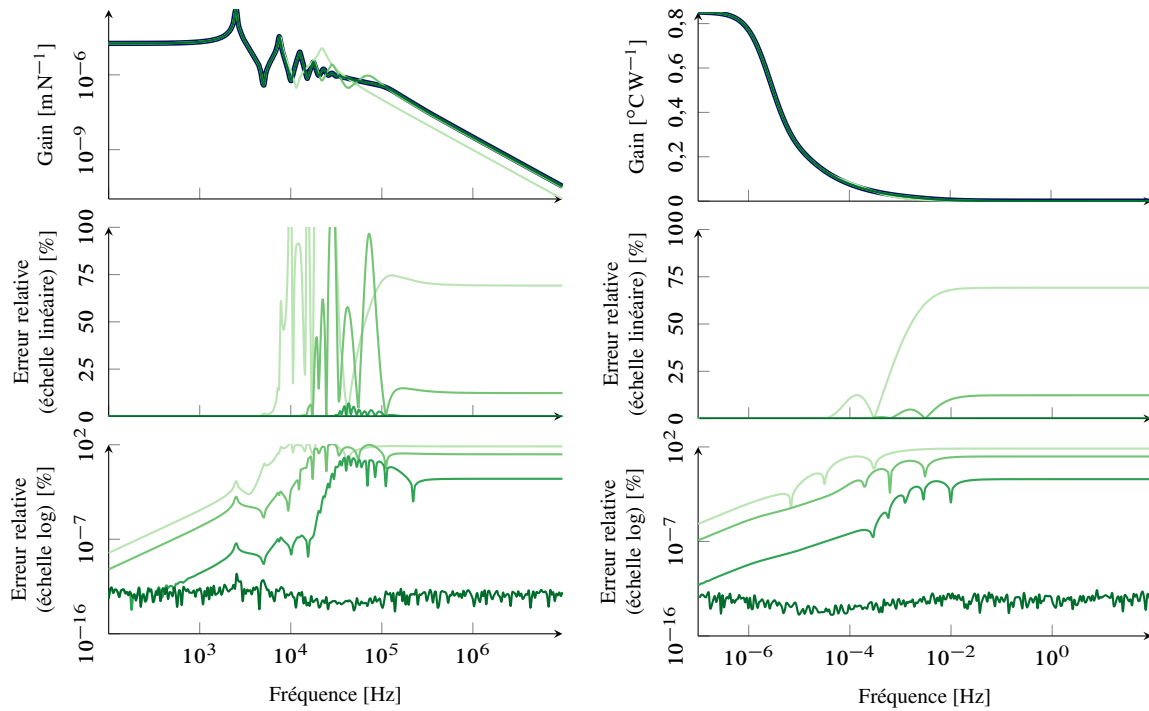
FIGURE III.5 – Méthode de MacNeal, influence du nombre de modes retenus. $n_m = 10\%$ (—), 25% (—), 50% (—), 100% (—).

mais aussi les points fréquentiels où effectuer celle-ci et donc leur nombre et leur répartition. Dans le cas présent, seul l'ordre 0 de l'expansion est conservé et les points d'expansion sont équirépartis de manière logarithmique dans l'espace $[10^{-7} \text{ Hz}; 10^5 \text{ Hz}]$. De plus, les bases obtenues par cette méthode n'étant pas nécessairement orthogonales, on a choisi une simple orthogonalisation de Gram-Schmidt dans cette section. L'influence de la méthode d'orthogonalisation est analysée ultérieurement.

La figure III.7 montre que la convergence de cette méthode est très rapide. En effet, les modèles dont la dimension représente 50 % du modèle initial montrent une erreur maximale de 10 % au maximum sur l'ensemble du spectre en mécanique et de moins de 0,1 % en thermique. On peut clairement constater que l'erreur est marquée par un ventre dans le milieu du spectre, mais que les erreurs aux hautes fréquences restent contenues, à l'inverse de ce qui est observé avec les méthode de Craig-Bampton et MacNeal.

Méthode de décomposition en valeurs singulières

La méthode de décomposition en valeurs singulières est ici simplement illustrée, en figure III.8. Plusieurs cas de chargement statiques aléatoires ont été effectués, pour obtenir une base de solutions dont une base de réduction a été obtenue par SVD. La précision des modèles réduits obtenus n'est certes pas excellente pour un fort taux de réduction. Toutefois, on observe bien la convergence de la méthode puisque l'on peut obtenir des erreurs de l'ordre de la précision numérique lorsque le modèle réduit est de même dimension que le modèle complet. Ceci montre qu'une base de réduction construite par SVD peut contenir des résultats issus de diverses origines : intégration temporelle, résolution harmonique, ou encore de mesures expérimentales. La difficulté est alors déportée sur le choix de l'information pertinente à inclure dans la base de réduction. On verra dans la section V.4.1.2 que cette méthode permet d'améliorer la qualité de la méthode de réduction RCH en filtrant des informations redondantes dans la base fournie par cette méthode. Cette procédure n'est mise en évidence que sur le modèle de secteur



(a) Fonction de réponse en fréquence – mécanique

(b) Fonction de réponse en fréquence – thermique

FIGURE III.6 – Méthode de Craig–Hale, influence du nombre de modes retenus. $n_m = 10\%$ (—), 25% (—), 50% (—), 100% (—).

de rouet. Elle ne présente en effet d'intérêt que dans le cas où plusieurs degrés de liberté proches d'une même frontière sont utilisés pour générer la base de réduction.

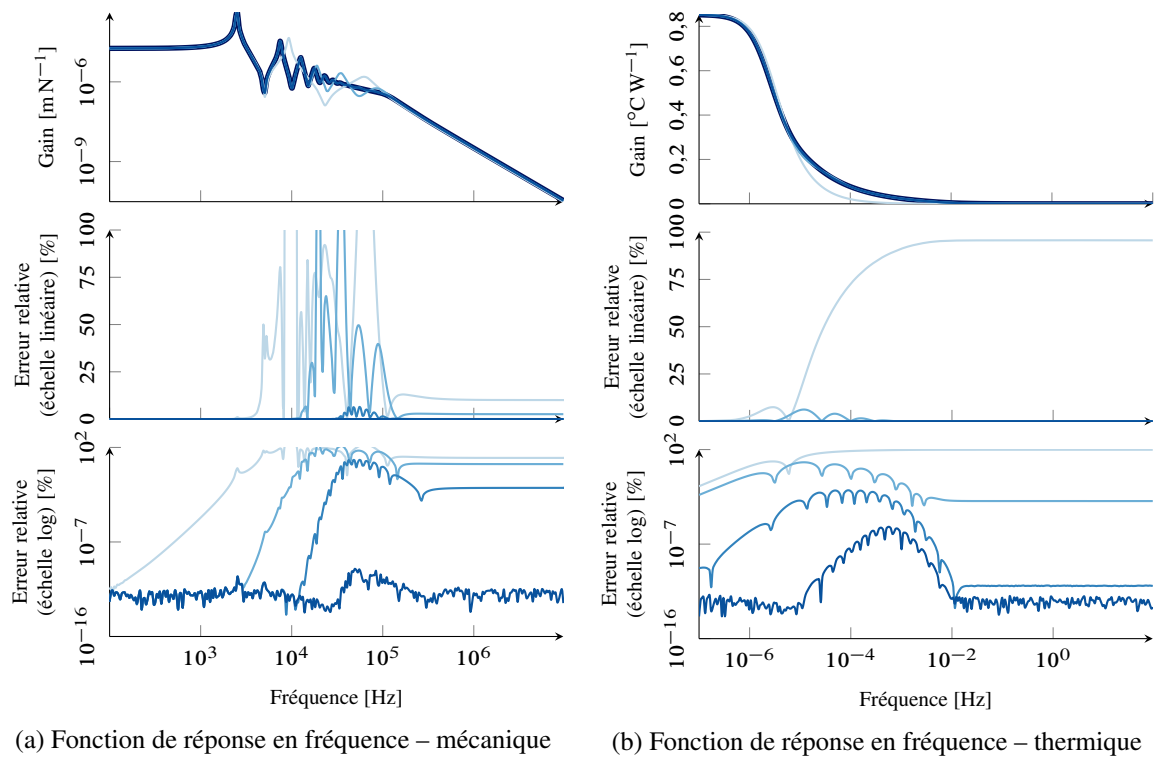


FIGURE III.7 – Méthode Rational Craig-Hale, influence du nombre de modes retenus. $n_m = 10\%$ (—), 25% (—), 50% (—), 100% (—).

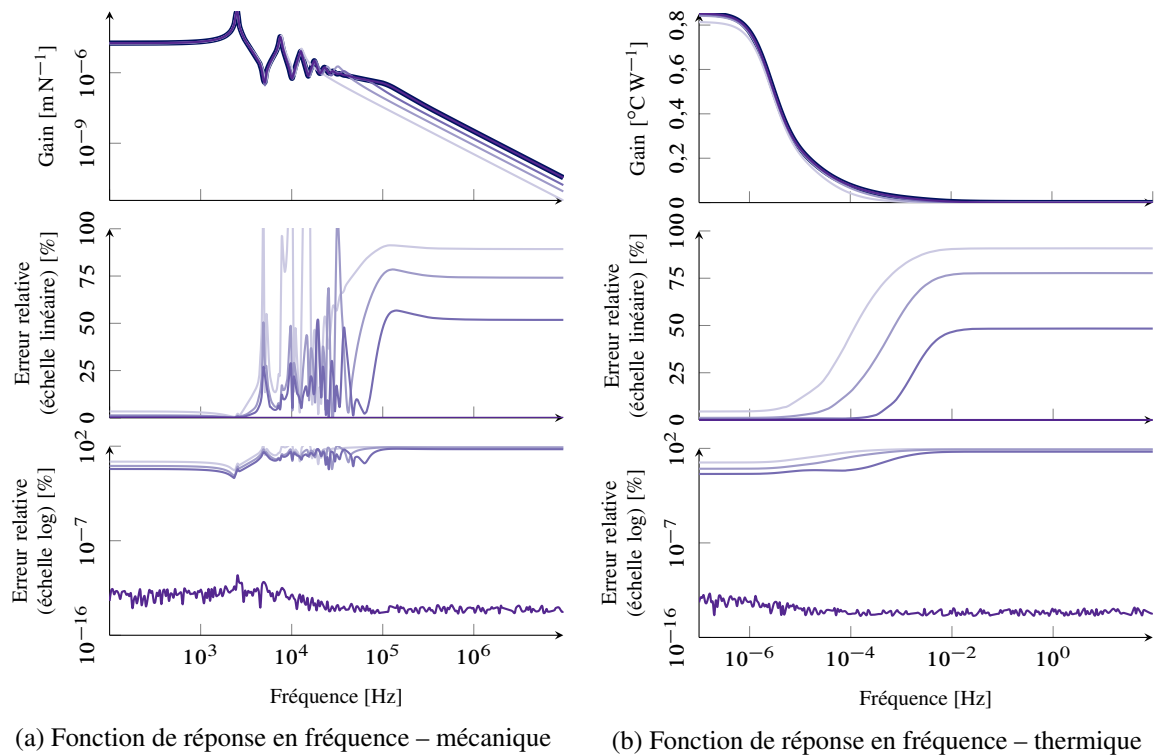


FIGURE III.8 – Méthode SVD, influence du nombre de modes retenus. $n_m = 10\%$ (—), 25% (—), 50% (—), 100% (—).

8.2 Influence du nombre de degrés de liberté

Cette section s'intéresse à la robustesse des méthodes décrites précédemment par rapport au nombre de degrés de liberté du système complet. On a fait varier le nombre de degrés de liberté du modèle complet, la taille des modèles réduits restant fixée à $n_m = 15$ pour toutes les méthodes.

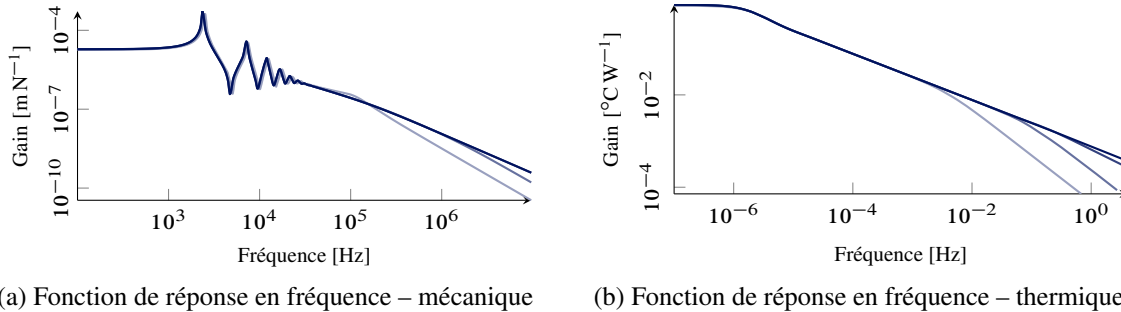


FIGURE III.9 – Modèle complet, convergence des FRF avec la discrétisation spatiale. $n_{ddl} = 20$ (—), 100 (—), 500 (—), 1000 (—).

La figure III.9 montre l'évolution des fonctions de réponse en fréquence de la poutre étudiée en fonction du nombre de degrés de liberté n_{ddl} . On a choisi les valeurs $n_{ddl} = 20, 100, 500, 1000$, qui permettent de constater une convergence notable des fonctions de réponse en fréquence du modèle complet. Pour une même discrétisation spatiale le domaine fréquentiel dans lequel la convergence du modèle complet est obtenue est plus vaste (jusqu'à 10^6 Hz) pour la partie mécanique, que pour la partie thermique du problème (jusqu'à 10^1 Hz). La convergence du modèle thermique, dans le cas de simulations de contact sera donc a priori plus difficile à obtenir que celle du modèle mécanique. Dans toutes les figures de la sous-section III.8.2, les fonctions de réponse en fréquence du système complet sont toutes celles du modèle le plus convergé qui a été évalué, à savoir le modèle pour $n_{ddl} = 1000$.

Méthode de Craig–Bampton

La méthode de Craig–Bampton, dont les propriétés sont illustrées en figure III.10, montre une dégradation de la précision dans le domaine des hautes fréquences avec l'augmentation du nombre de degrés de liberté. Cette observation est valide pour le problème mécanique et le problème thermique. Bien évidemment, lorsque le comportement du modèle complet converge, l'erreur due à la réduction varie elle aussi beaucoup moins.

Méthode de MacNeal

La méthode de MacNeal (figure III.11) présente un comportement une fois encore analogue à la méthode de Craig–Bampton. Les commentaires faits pour cette méthode restent valables ici.

Méthode de Craig–Hale

La méthode de Craig–Hale a montré une vitesse de convergence élevée à la section précédente. Les propriétés de convergence de cette méthode avec le nombre de degrés de liberté du modèle complet sont illustrées en figure III.12. Contrairement aux observations précédentes, cette méthode souffre des mêmes inconvénients que les méthodes précédentes, à savoir un manque de robustesse aux hautes fréquences et pour les deux physiques étudiées. Au regard des résultats obtenus au moyen de la méthode Rational–Craig–Hale présentés dans la section suivante, ceci semble dû à l'absence des termes de couplage intérieur–frontière lors du calcul de la base de Krylov.

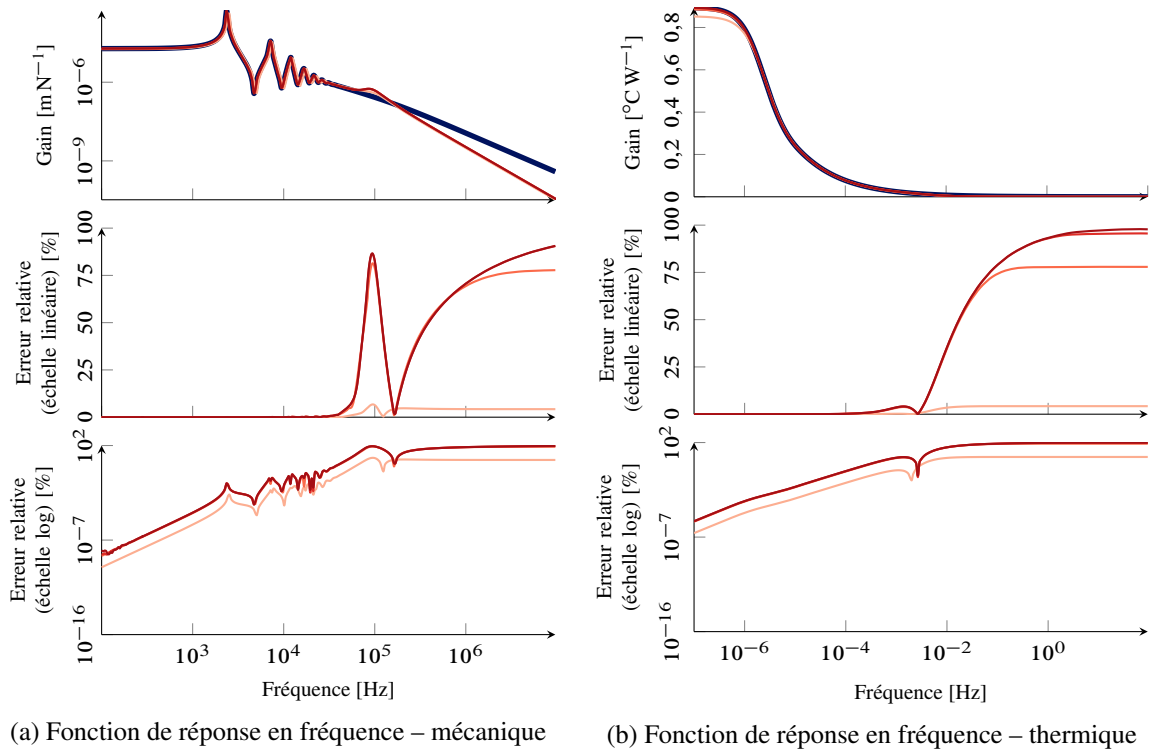


FIGURE III.10 – Méthode de Craig–Bampton, influence du nombre de degrés de liberté du modèle complet. $n_{ddl} = 20$ (—), 100 (—), 500 (—), 1000 (—).

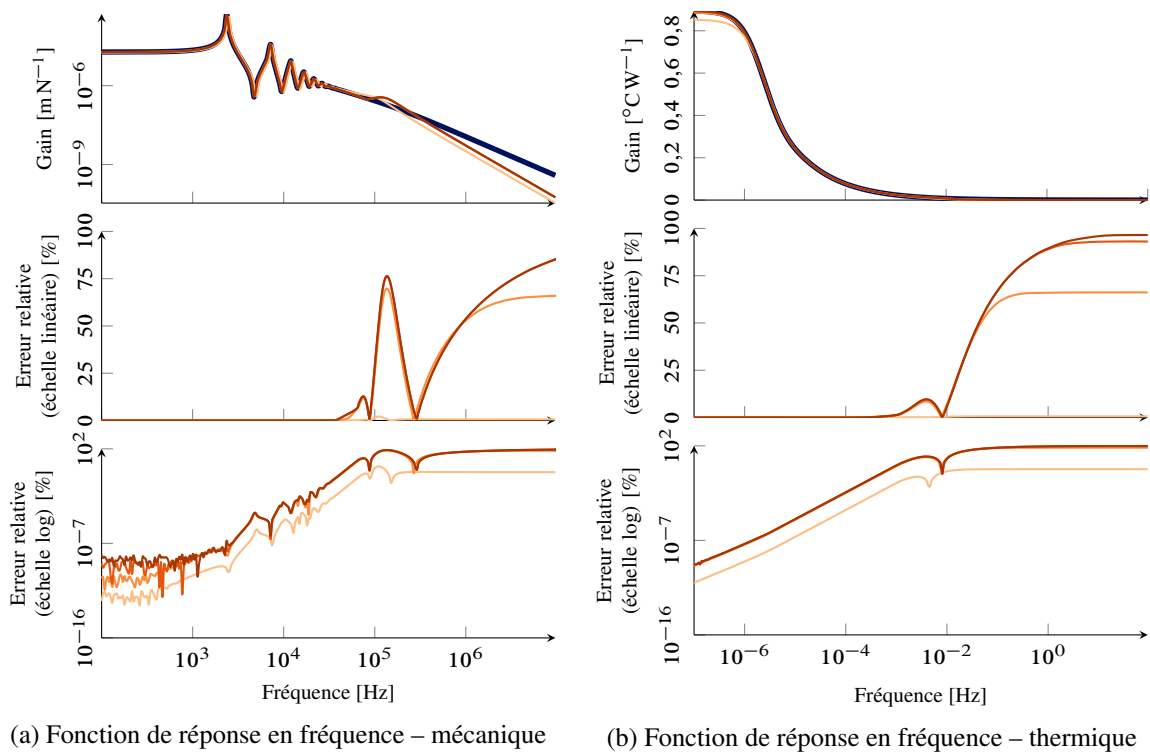


FIGURE III.11 – Méthode de MacNeal, influence du nombre de degrés de liberté du modèle complet. $n_{ddl} = 20$ (—), 100 (—), 500 (—), 1000 (—).

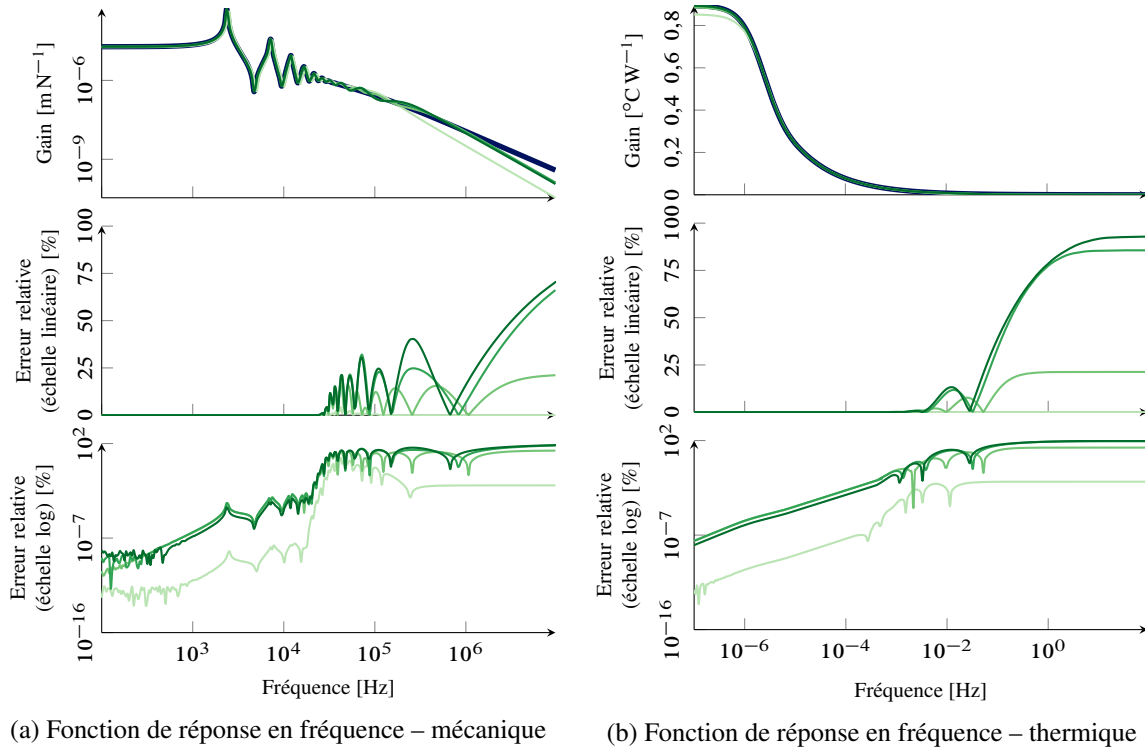


FIGURE III.12 – Méthode de Craig–Hale, influence du nombre de degrés de liberté du modèle complet. $n_{ddl} = 20$ (—), 100 (—), 500 (—), 1000 (—).

Méthode Rational–Craig–Hale

Cette dernière méthode, figure III.13 montre un comportement analogue aux méthodes précédentes concernant le problème mécanique : aux hautes fréquences, les erreurs dépassent rapidement 10 % pour le problème réduit mécanique. En revanche, et même pour un problème complet de taille $n_{ddl} = 1000$, les erreurs de fonction de réponse en fréquence en thermique restent très contenues par rapport aux méthodes déjà décrites, même si on constate une augmentation notable de ces erreurs avec la taille du problème complet étudié. Enfin, bien que ceci ait relativement peu de conséquences sur la précision des modèles réduits de manière pratique, on peut remarquer que les modèles réduits par la méthode RCH présentent une variation de l'erreur avec la fréquence notablement différente des méthodes précédentes.

Observations

Parmi toutes les méthodes comparées ici, aucune ne semble capable de produire des modèles réduits dont le comportement reste proche du modèle complet aux hautes fréquences dans le cas mécanique. Toutefois, on constate clairement que la méthode Rational–Craig–Hale permet non seulement une convergence rapide, mais aussi robuste des modèles réduits, dans le cas du problème thermique.

On peut douter de la nécessité de modèles réduits précis dans la gamme des hautes fréquences. Pour d'autres problématiques, de telles précisions ne sont pas forcément requises. Toutefois, dans le cas de l'échauffement par friction, les flux thermiques issus de la conversion d'énergie mécanique en chaleur ont des temps caractéristiques très rapides, il faut donc que les modèles réduits utilisés soient capables de rendre compte de ces échauffements en étant précis sur une large gamme de fréquences.

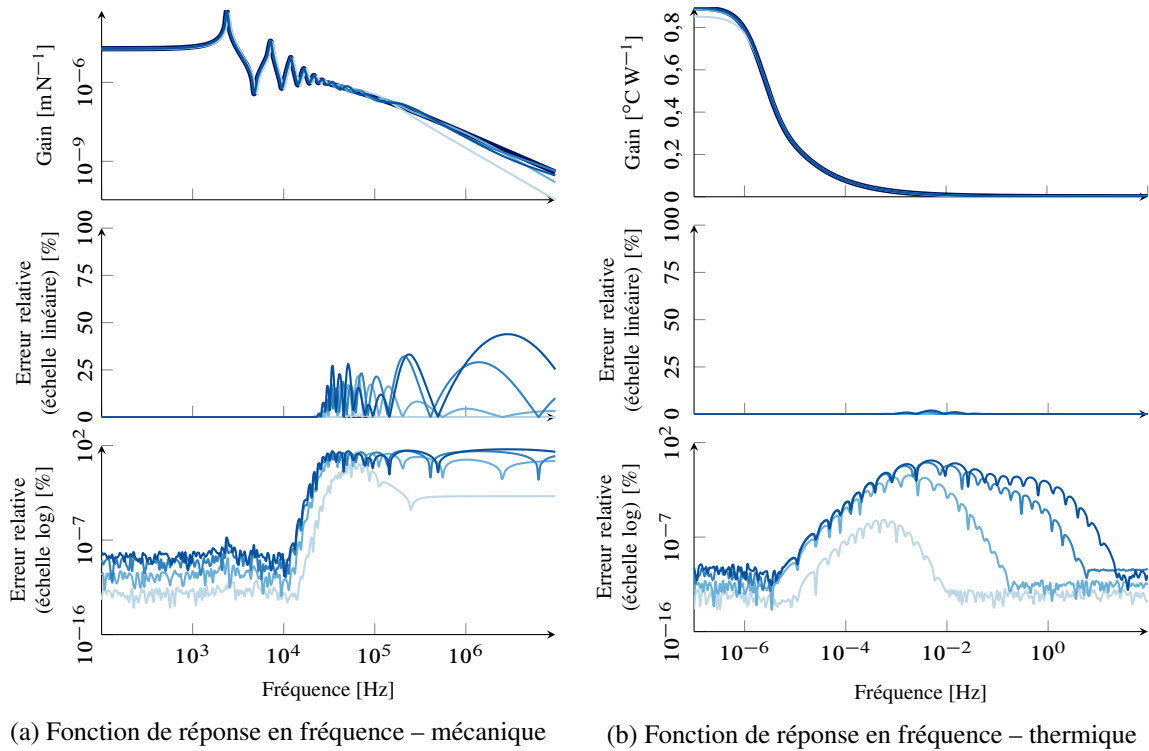


FIGURE III.13 – Méthode Rational–Craig–Hale, influence du nombre de degrés de liberté du modèle complet. $n_{ddl} = 20$ (—), 100 (—), 500 (—), 1000 (—).

8.3 Optimisation paramétrique de la méthode Rational–Craig–Hale

8.3.1 Influence des paramètres d'expansion

La méthode RCH étant paramétrée par deux paramètres majeurs, à savoir le nombre de points d'expansion n_p , et l'ordre d'expansion n_o , le nombre total de modes composant la base de réduction n_m est le produit de ces deux nombres. Il peut donc être pertinent d'étudier l'influence pour une valeur fixe de n_m de chaque paramètre. Dans cette section, cette étude est décrite sur un modèle comportant $n_{ddl} = 500$ degrés de liberté pour chacun des sous-problèmes mécanique et thermique. La figure III.14 montre l'évolution des fonctions de réponse en fréquence pour la mécanique et la thermique.

Concernant le sous-problème mécanique, le choix du couple (n_p, n_o) a des conséquences notables sur l'évolution de l'erreur de réduction. On constate ainsi une nette augmentation de l'erreur avec l'augmentation de n_p notamment dans la gamme de fréquences comprise entre 10^3 Hz et 10^4 Hz. Pour des fréquences plus élevées, les erreurs obtenues pour des valeurs importantes de n_p sont largement supérieures à celles obtenues autrement. Dans l'ensemble, la méthode RCH reste précise aux basses fréquences mais il semble préférable de conserver des ordres d'expansion élevés plutôt que d'augmenter le nombre de points d'expansion. Il faut noter que ces conclusions reposent sur la base d'un espacement logarithmique des points d'expansion, ce qui n'a rien d'anodin. En effet, il est déjà établi que le choix de ces points d'expansion est critique dans l'efficacité des méthode de Krylov rationnelles [82]. D'autres critères de positionnement ont déjà été proposés, par exemple en se servant des fréquences propres connues du système étudié.

En ce qui concerne le problème thermique, les conclusions sont tout autres. Notamment, et à l'inverse du problème mécanique, le choix du jeu de paramètres optimal semble moins évident. Premièrement, le jeu de paramètres $(n_p, n_o) = (1, 12)$ est dans ce cas le moins pertinent, puisqu'il entraîne des erreurs supérieures à 25 % sur une large partie du spectre étudié. Par ailleurs, on constate que l'augmentation du

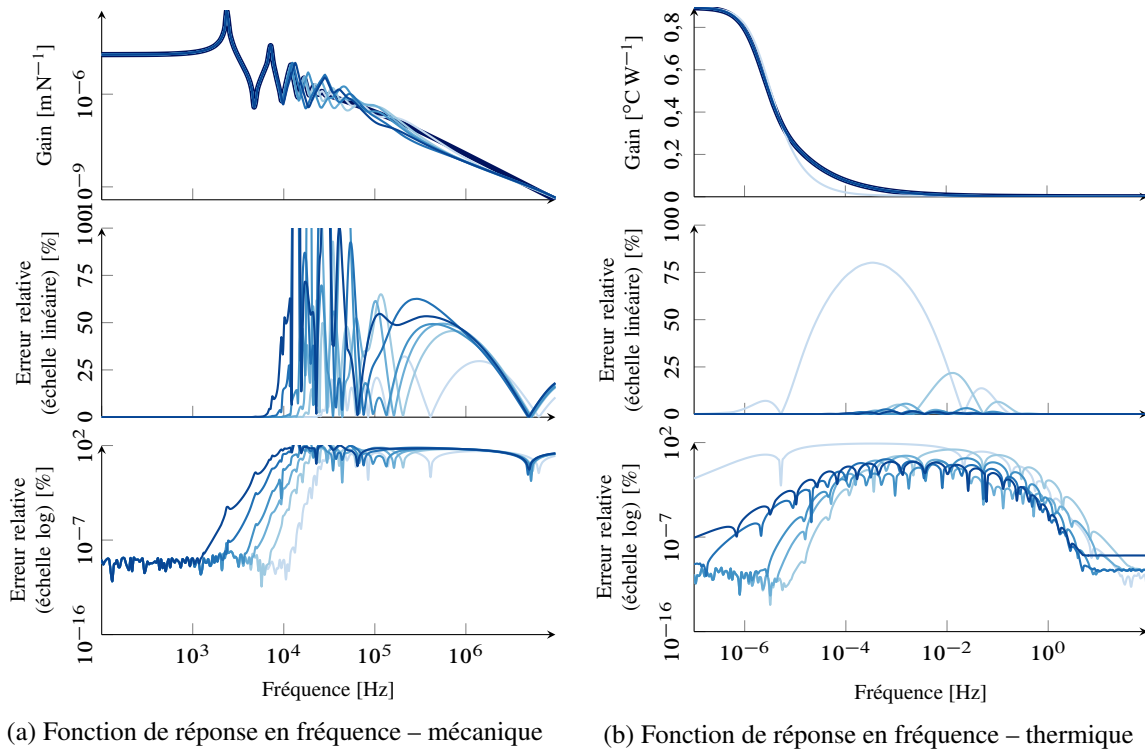


FIGURE III.14 – Méthode Rational–Craig–Hale, influence du paramétrage de l'expansion.

$(n_p, n_o) = (1, 12)$ (—), $(2, 6)$ (—), $(3, 4)$ (—), $(4, 3)$ (—), $(6, 2)$ (—), $(12, 1)$ (—).

nombre de points d'expansion a pour conséquence l'augmentation des erreurs minimales observées sur l'intervalle fréquentiel étudié. Pour autant, les erreurs maximales semblent globalement diminuer avec l'augmentation du nombre de points d'expansion. La précision de la méthode RCH dans le cas thermique ne souffre pas des mêmes limitations que dans le cas mécanique. Du fait de la nature différente de l'équation de la chaleur, le système ne présente pas de résonance à certaines fréquences. L'évolution de la réponse est donc beaucoup plus régulière en fonction de la fréquence d'excitation, ce qui rend le choix de points d'expansion espacés logarithmiquement assez pertinent dans ce cas.

L'observation des bases modales, illustrées en figure III.15 obtenues avec différents jeux de paramètres permet de mieux comprendre les différences de performances des modèles réduits. On remarque en effet que dans le cas où un seul point d'expansion est utilisé, la forme des modes encastés composant la base RCH suit une structure propre assez semblable à celle des modes propres encastés de la méthode de Craig–Bampton par exemple. La présence d'une telle organisation est logique du fait de la structure des espaces de Krylov. A l'inverse, lors de l'utilisation de plusieurs points d'expansion, cette organisation est perdue, et les modes obtenus semblent tendre à être chaotiques pour des fréquences élevées.

8.3.2 Influence de la répartition des points d'expansion

Une autre des particularités de la méthode Rational–Craig–Hale par rapport aux autres méthodes décrites dans ce chapitre concerne le positionnement des points d'expansion. En effet, dans le cas de la méthode de Craig–Bampton et MacNeal, les modes constituant les bases de réduction sont associés aux fréquences propres du système approprié. Dans le cas de la méthode de Craig–Hale, l'expansion est uniquement effectuée autour du point $s = 0$, les modes calculés ne sont donc plus associés de manière explicite à une information fréquentielle.

Dans le cas de la méthode RCH, une fois le couple nombre de points d'expansion et ordre d'ex-

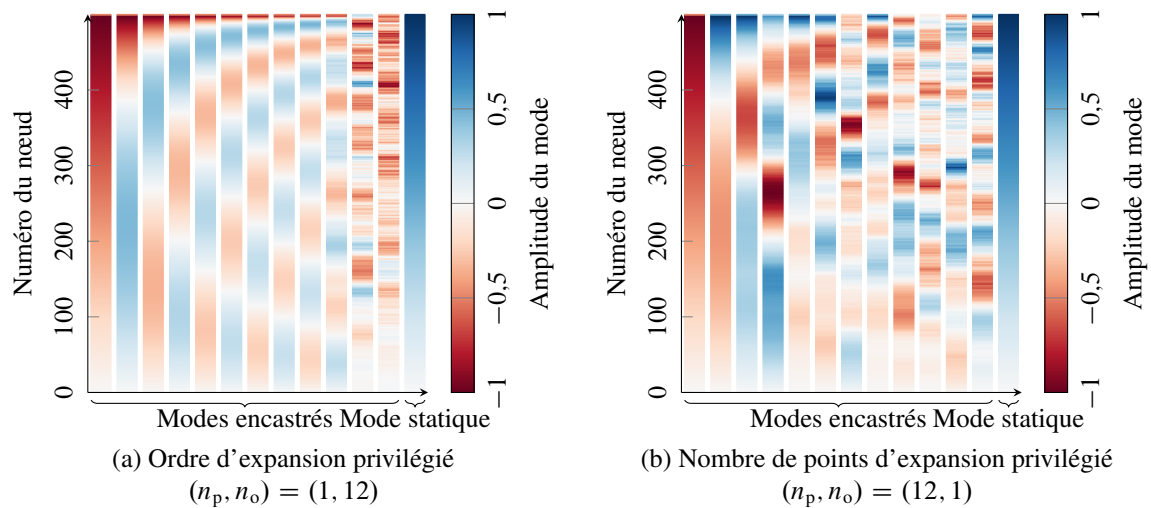
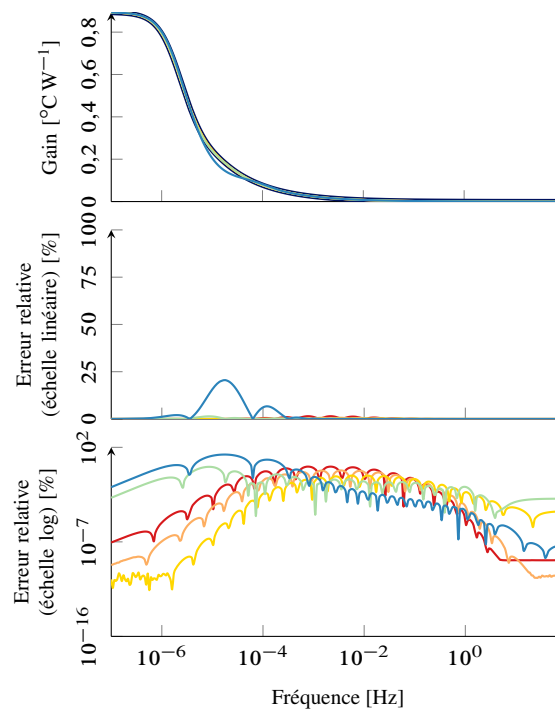


FIGURE III.15 – Bases de réduction obtenues par la méthode RCH.

ansion fixé, on peut encore faire varier la répartition des points d'expansion. Les résultats présentés jusque là ont été obtenus en utilisant une répartition logarithmique des points d'expansion sur un espace fréquentiel important [10^{-7} Hz ; 10^5 Hz].

FIGURE III.16 – Méthode Rational-Craig-Hale, influence du choix des bornes d'expansion. Modèle complet (—), modèles réduits $n_m = 12$, (-7,5) (—), (-7,3) (—), (-7,1) (—), (-5,1) (—), (-3,1) (—).

L'influence des bornes d'expansion sur la précision d'un modèle réduit RCH est illustrée en figure III.16. Pour un couple (x, y) , l'expansion est faite sur l'intervalle [10^x Hz ; 10^y Hz]. On constate une nette augmentation de l'erreur de réduction lorsque l'intervalle de réduction est décalé vers les hautes fréquences. A l'inverse, le décalage de la borne supérieure de l'intervalle vers les basses fréquences permet d'améliorer la précision des modèles réduits dans cette zone, au détriment toutefois de la

précision aux hautes fréquences. Ce compromis semble préférable du fait de l'évolution du gain en fonction de la fréquence. Dans l'ensemble, les erreurs restent contenues tant que la borne inférieure de l'expansion permet de capturer le comportement asymptotique statique. De plus, on peut tenir effectuer une expansion aux points fréquentiels $s = 0$ ou $s = \infty$, ce qui permet de garantir la précision asymptotique aux basses et hautes fréquences du modèle réduit.

9 Bilan du chapitre

La présentation des méthodes de réduction effectuée dans ce chapitre n'est en rien exhaustive. De nombreux travaux de recherche sur ces sujets sont en cours du fait de l'évidente profondeur du sujet.

Dans ce chapitre, on a particulièrement insisté sur les différences de comportement entre des modèles thermiques et mécaniques réduits par les mêmes méthodes, pour bien montrer que la convergence de modèles réduits ne suivait pas les mêmes tendances en fonction de la physique étudiée.

De plus, la méthode RCH a été décrite de façon étendue, mais pas forcément exhaustive, pour illustrer les différents paramètres intervenant dans cette méthode. Celle-ci est en effet potentiellement plus complexe à paramétrer que les méthodes connues (Craig–Bampton, MacNeal, Craig–Hale), mais permet d'avoir des précisions importantes sur des plages fréquentielles étendues.

Pour conclure, on montre clairement dans ce chapitre que le choix d'une méthode de réduction est critique puisque celles-ci sont souvent optimisées pour une application particulière, ce qui peut les rendre inadéquates pour la réduction d'autres problèmes.

Chapitre IV

Algorithmes de contact

Sommaire du chapitre

1	Système étudié	66
2	Comportement transitoire de structures	66
2.1	θ -méthode	66
2.2	Algorithmes de Newmark	68
2.3	Autres schémas d'intégration temporelle	69
3	Problèmes de contact thermomécanique	70
3.1	Algorithmes de contact dans le cadre mécanique	70
3.2	Contraintes industrielles	71
4	Algorithme de Carpenter décentré	72
4.1	Schéma des différences finies centrées	72
4.2	Application des contraintes de contact	72
4.3	Cadre thermomécanique	73
5	Dynamique non-régulière	75
5.1	Introduction	75
5.2	Méthode de Moreau-Jean	77
5.3	Résolution implicite complète	81
5.4	Méthode de Moreau-Jean avec reprojexion sur les contraintes en position	83
6	Comparaison des algorithmes : cas de la poutre thermomécanique 1D	88
6.1	Modèle	88
6.2	Comportement hors contact	88
6.3	Contact sans effets thermiques	91
6.4	Comparaison avec effets thermiques	98
7	Méthodes de réduction et algorithmes de contact	101
7.1	Propriétés fréquentielles des modèles utilisés	101
7.2	Comparaison des modèles réduits en simulation de contact	101
8	Bilan du chapitre	103

Les méthodes d'intégration temporelle constituent, après la discrétisation spatiale d'un problème par la méthode des éléments finis, une classe de méthodes permettant de prédire l'évolution temporelle du comportement d'un système. Ces méthodes transforment les équations différentielles ordinaires obtenues par la méthode des éléments finis en équations algébriques solubles par les méthodes de résolution de systèmes.

Les algorithmes de résolution des problèmes de contact constituent une application particulière des méthodes d'intégration temporelle, permettant de déterminer le comportement de systèmes soumis à des non-linéarités particulièrement fortes et associées à des temps caractéristiques courts.

Ce chapitre présente les différentes stratégies de discrétisation temporelle et certains algorithmes de résolution du problème de contact associés. Les contraintes numériques liées à l'intégration temporelle de systèmes thermomécaniques sont soulignées, une attention particulière est portée au respect des contraintes de contact en temps discret.

On montre que la stratégie habituellement utilisée dans la littérature, qui a pourtant largement fait ses preuves pour étudier les problèmes de contact rotor–stator dans un cadre purement mécanique, manque de robustesse pour des calculs thermomécaniques. Une autre stratégie est donc adoptée, faisant intervenir des concepts plus avancés de dynamique non-régulière. Cette nouvelle approche, qui nécessite des développements plus lourds tant du point de vue mathématique qu'algorithmique, permet en plus de la simulation des systèmes thermomécaniques des gains substantiels en temps de calcul.

1 Système étudié

Pour maintenir la généralité des développements, des systèmes d'EDOs du second ordre de la forme (II.62) sont considérés. De tels systèmes peuvent en effet décrire la dynamique vibratoire d'une structure, accompagnée ou non de l'équation de la chaleur. Parfois seulement des systèmes du premier ordre sont considérés, soit $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, ce qui sera explicité au cas par cas. Dans tous les développements qui suivent, les systèmes étudiés sont invariants dans le temps et linéaires hormis les contraintes de contact.

2 Comportement transitoire de structures

Les méthodes de discrétisation spatiale permettent d'obtenir à partir d'équations aux dérivées partielles un système d'équations différentielles (généralement ordinaires). Il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques de discrétisation pour transformer de tels systèmes en problèmes algébriques solubles par des approches conventionnelles.

Plus précisément, les méthodes de discrétisation temporelle permettent d'approcher le comportement au cours du temps d'un système donné au moyen d'une fonction dérivable par morceaux [89]. On suppose la connaissance d'un état initial du système à l'instant $t = 0$. Cette solution est paramétrée par $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$ et $\dot{\mathbf{x}}(t = 0) = \mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0$. Pour tout pas de temps t_n , la solution approchée est notée $\mathbf{x}_n \approx \mathbf{x}(t_n)$ et l'on cherche à déterminer l'approximation au pas suivant notée \mathbf{x}_{n+1} .

De nombreuses méthodes d'intégration temporelle existent. On présente ici les méthodes les plus connues et les plus générales, qui soutiendront par la suite le développement des algorithmes de contact évalués dans cette thèse. Notamment la θ -méthode et la méthode de Newmark, qui permettent respectivement de retrouver tous les schémas conventionnels à deux et à trois pas. Ces méthodes peuvent être vues à la fois comme des approximations par développement en série de Taylor ou encore par l'approche des résidus pondérés de la solution [147, §17.2.1].

2.1 θ -méthode

La θ -méthode est une méthode d'intégration à deux pas, applicable aux systèmes d'EDOs du premier ordre. Cette méthode consiste à approcher la solution sur un pas de temps par une interpolation linéaire construite à partir des points d'intégration au pas n et $n + 1$ soit \mathbf{x}_n et \mathbf{x}_{n+1} . Ainsi, une intégrale est approchée par une somme pondérée

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_{n+\gamma} = \mathbf{x}_n + \gamma(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = \gamma\mathbf{x}_{n+1} + (1 - \gamma)\mathbf{x}_n \quad (\text{IV.1})$$

avec dans ce cas $t = t_{n+\gamma} = t_n + \gamma h$. Le paramètre d'intégration sera dans tout ce document noté γ pour éviter toute confusion avec la température nodale. La figure IV.1 illustre le calcul de $\mathbf{x}_{n+\gamma}$ à partir de \mathbf{x}_n et \mathbf{x}_{n+1} .

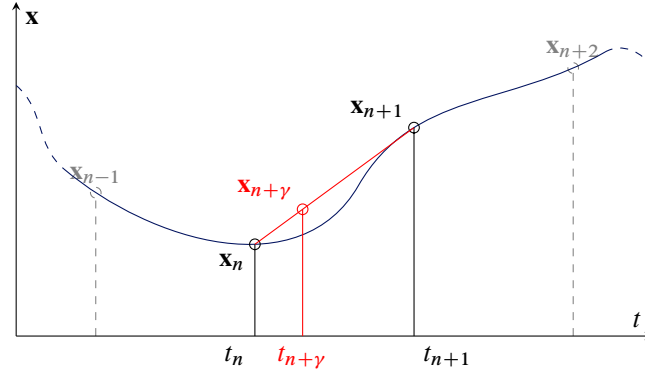


FIGURE IV.1 – Intégration numérique par la θ -méthode.

Vue sous l'angle de la méthode des éléments finis, la solution approchée $\mathbf{x}_{n+\gamma}$ se construit au moyen des fonctions de forme $\mathbf{N}(\gamma) = [\gamma \quad (1 - \gamma)]$, de sorte que

$$\mathbf{x}_{n+\gamma} = \mathbf{N}(\gamma) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

L'inconnue du problème est alors la solution au pas t_{n+1} , soit \mathbf{x}_{n+1} . Cette inconnue peut être déterminée par l'application d'une formulation de résidus pondérés à l'équation (II.62), ici réduite par l'absence d'une matrice de masse \mathbf{M} . La formulation variationnelle donne

$$\int_0^1 \mathbf{w}(\gamma)^\top [\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f}] d\gamma = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Le choix de la fonction de pondération étant arbitraire, elle peut prendre la forme $\mathbf{w}(\gamma) = w(\gamma)\mathbf{z}$ avec \mathbf{z} un paramètre arbitraire, de sorte que le système à résoudre devienne

$$\int_0^1 w(\gamma) [\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{n+\gamma} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{n+\gamma} - \mathbf{f}] d\gamma = \mathbf{0}, \quad (\text{IV.4})$$

puis en utilisant l'approximation de la dérivée $\dot{\mathbf{x}}_{n+\gamma} = \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{h}$

$$\mathbf{C} \frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{h} + \mathbf{K}(\gamma \mathbf{x}_{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{x}_n) - \mathbf{f}_{n+\gamma} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.5})$$

En faisant varier la valeur du paramètre d'intégration γ , les principaux schémas d'intégration temporelle à deux pas peuvent être obtenus, ceux-ci sont listés dans le tableau IV.1. Pour $\gamma \in [1/2; 1]$ un schéma basé sur la θ -méthode est inconditionnellement stable. Pour $\gamma \in [0; 1[$, le schéma est conditionnellement stable. Le pas de temps h permettant de garantir la stabilité du schéma est alors déterminé par

$$h_{\max} = \min_j \frac{1}{1/2 - \gamma \lambda_j} = \frac{1}{1/2 - \gamma \max_j(\lambda_j)}. \quad (\text{IV.6})$$

ou les λ_j sont les valeurs propres du problème associé à \mathbf{K}, \mathbf{C} . Ces remarques sur la stabilité sont toutefois restreintes au cas linéaire, les preuves de stabilité des algorithmes de contact sont en effet limitées à certains cas particuliers [58].

Il est généralement admis que les méthodes implicites sont stables, au prix d'un amortissement numérique plus important que celui des méthodes explicites. En revanche, les méthodes explicites requièrent des calculs moins lourds, ce qui permet souvent d'avoir des implémentations plus rapides. Les méthodes implicites trouvent leur intérêt lorsque l'on souhaite effectuer des calculs sur des structures caractérisées par des comportements relativement lents. À l'inverse, des algorithmes explicites sont souvent utilisés pour la simulation des phénomènes de crash et de dynamique dite rapide.

Nom	Paramètres d'intégration	Schéma explicite / implicite
Euler implicite	$\gamma = 1$	implicite
Crank-Nicolson [49]	$\gamma = 1/2$	implicite
Euler explicite	$\gamma = 0$	explicite

TABLEAU IV.1 – Schémas d'intégration temporelle usuels à deux pas.

2.2 Algorithmes de Newmark

Un système d'EDOs du second ordre (ou plus) pouvant être exprimé en base d'état, sous la forme d'un système du premier ordre, il est possible d'appliquer des schémas du premier ordre même sur ce type de systèmes. Cette transformation est souvent nécessaire, notamment pour utiliser certaines bibliothèques d'intégration temporelle comme celles disponibles dans Matlab ou Python.

Toutefois, afin d'améliorer la précision et les propriétés d'amortissement numérique des méthodes d'intégration temporelle, des travaux spécifiques ont été dévolus aux systèmes du second ordre. En particulier, les algorithmes de Newmark [110] font aujourd'hui figure de référence pour l'intégration temporelle de tels systèmes.

Ces algorithmes sont basés sur une expansion au second ordre de la solution approchée. En suivant à nouveau un formalisme proche de la méthode des éléments finis, on cherche à interpoler la solution en trois instants, respectivement t_{n-1} , t_n et t_{n+1} . L'interpolation se fait au moyen des fonctions de forme du second ordre, ce qui donne dans ce cas

$$\mathbf{N}(\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} & 1-\gamma^2 & \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

où à nouveau, γ est tel que $t = t_n + h\gamma$. On constate visuellement, en comparant les figures IV.1 et IV.2 que pour des évolutions rapides, la méthode de Newmark est plus précise. L'application de la méthode

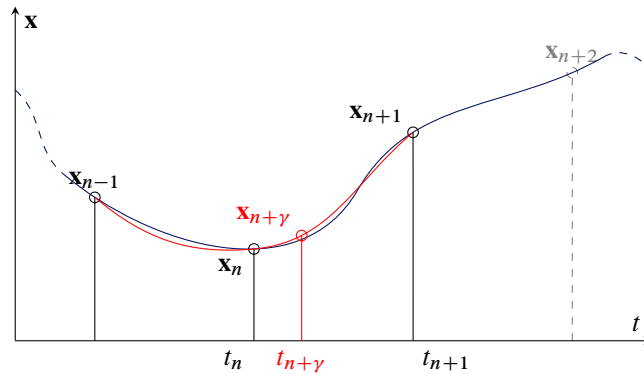


FIGURE IV.2 – Illustration de l'intégration numérique par la méthode de Newmark.

des résidus pondérés au système (II.62), et avec pour bornes d'intégration $\gamma \in [-1; 1]$ on obtient une

formulation discrétisée de la forme générale

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\alpha}{h} \mathbf{C} + \frac{\beta}{2} \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_{n+1} &= \frac{\beta}{2} \mathbf{f}_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \alpha - \beta \right) \mathbf{f}_n + \left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \mathbf{f}_{n-1} \\ &+ \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2} + \frac{(2\alpha - 1)\mathbf{C}}{h} - \left(\frac{1}{2} + \alpha - \beta \right) \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_n \\ &- \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{(\alpha - 1)\mathbf{C}}{h} + \left(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

où les paramètres α et β permettent d'obtenir l'ensemble des schémas d'intégration classique à trois points, décrits dans le tableau IV.2. Les paramètres α et β sont communément appelés *paramètre d'amortissement numérique* et *paramètre de stabilité*. En effet, le paramètre α permet de contrôler l'amortissement numérique induit par la discrétisation temporelle, étant le seul paramètre intervenant sur la matrice d'amortissement \mathbf{C} . Le paramètre β permet, une fois le paramètre α fixé, de maintenir la stabilité du schéma. En fonction des paramètres d'intégration choisis, les propriétés des algorithmes de

Nom	Paramètres d'intégration	explicite / implicite
Fox-Goodwin	$\alpha = 1/2, \beta = 1/6$	implicite
Accélération constante par demi pas de temps	$\alpha = 1/2, \beta = 1/4$	implicite
Accélération linéaire	$\alpha = 1/2, \beta = 1/3$	implicite
Accélération moyenne	$\alpha = 1/2, \beta = 1/2$	implicite
Différences finies centrées	$\alpha = 1/2, \beta = 0$	explicite

TABLEAU IV.2 – Schémas d'intégration temporelle usuels à trois points.

Newmark différent, notamment en termes de stabilité et d'amortissement numérique. La stabilité de ces méthodes est décrite de manière détaillée dans plusieurs ouvrages, parmi lesquels [68, §7.3] et [66, §5.2.2], dont on reprend ici certains résultats de manière succincte. Pour un schéma de Newmark et dans le cas d'un système initialement non amorti, le critère de stabilité est

$$h_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{\max_j (\sqrt{\lambda_j}) \sqrt{\alpha - \beta}}, \quad (\text{IV.9})$$

qui se simplifie en $h_{\min} = 2/\max_j (\sqrt{\lambda_j})$ dans le cas du schéma de différences finies centrées et où les λ_j sont les valeurs propres associées au système \mathbf{K}, \mathbf{M} . Afin d'amortir les oscillations numériques aux hautes fréquences de manière optimale, on peut se placer dans les conditions de super-stabilité, qui correspondent au critère

$$h_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{\max_j (\sqrt{\lambda_j}) \sqrt{1/2(\alpha + 1/2)^2 - \beta}}, \quad (\text{IV.10})$$

Les domaines de stabilité des algorithmes de Newmark en fonction des valeurs du couple (α, β) sont illustrés en figure IV.3.

2.3 Autres schémas d'intégration temporelle

De nombreuses autres stratégies d'intégration temporelle existent, dont les schémas α -généralisés [45], ou les schémas α -HHT [77] qui constituent une amélioration des méthodes de Newmark, ou encore les algorithmes de type Runge-Kutta. Des ouvrages de référence présentent ces algorithmes de manière exhaustive [66, §5], [147, §17].

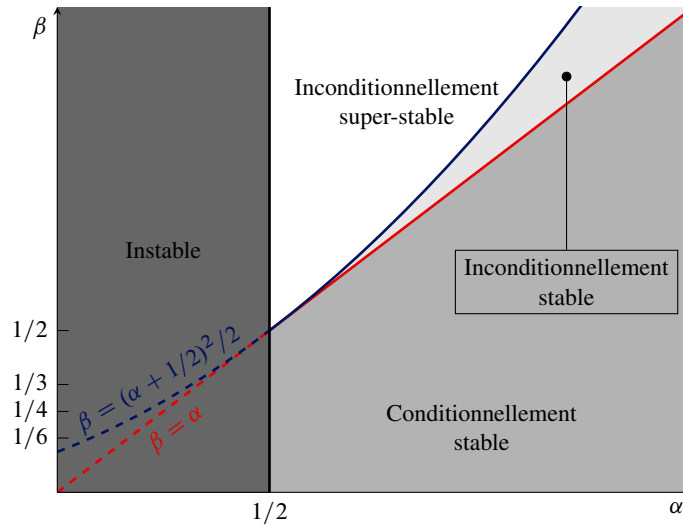


FIGURE IV.3 – Domaines de stabilité des algorithmes de Newmark. Limite de stabilité inconditionnelle (—), limite de super-stabilité inconditionnelle (—).

3 Problèmes de contact thermomécanique

3.1 Algorithmes de contact dans le cadre mécanique

Parmi les algorithmes permettant de résoudre les problèmes de contact, on distingue généralement deux types de méthodes : les schémas à *détection d'évènement* et à *capture d'évènement*. Respectivement *event-driven* et *event-capturing* en anglais [4].

Les premiers consistent en une intégration temporelle conventionnelle loin des instants de contact. Quand un contact est détecté, une procédure adaptée pour le calcul des efforts de contact est appliquée, puis une nouvelle phase d'intégration temporelle est démarrée avec les nouvelles conditions initiales issues du calcul des efforts.

Les seconds considèrent une intégration temporelle unique sur l'ensemble de l'intervalle de temps de la dynamique libre et des efforts de contact, ce qui limite généralement l'emploi d'intégrateurs d'ordre élevé, bien que des développements récents aient porté sur ce sujet [40]. Les schémas à capture d'évènement sont généralement préférés aux schémas à détection d'évènement quand le nombre d'évènements ou le nombre de contraintes est élevé. En effet, le nombre d'arrêts peut devenir rapidement contraignant, notamment lors de phénomènes d'accumulation (ex : rebond inélastique d'une balle) [4].

3.1.1 Couplage thermomécanique

Dans le cas particulier de la résolution d'un problème thermomécanique, des difficultés supplémentaires peuvent être rencontrées. Les problèmes faisant intervenir plusieurs physiques peuvent être résolus de différentes façons en fonction du couplage qui les relie. La méthodologie employée a de nombreuses conséquences sur la précision, la stabilité ou la difficulté de résolution, en particulier dans un contexte de simulation non-linéaire. De manière générale, la résolution des problèmes couplés peut être effectuée en maintenant ou non le couplage lors de la discrétisation temporelle. On parle alors de résolution en *couplage fort* ou aussi d'approche *monolithique* et le système couplé est résolu en une étape, la même discrétisation temporelle étant alors utilisée pour les EDOs décrivant chaque physique. Dans d'autres cas, une résolution découplée dite en *couplage faible* ou par *transfert de charges* est suffisante, mais nécessite normalement une résolution itérative jusqu'à annulation du résidu, convergence qui n'est pas toujours garantie ou facilement obtenue [147, §18],[39, §1.4.2]. On peut pour ce type de

résolution utiliser des méthodes d'intégration différentes pour les diverses EDOs. La figure IV.4 reprend ces commentaires .

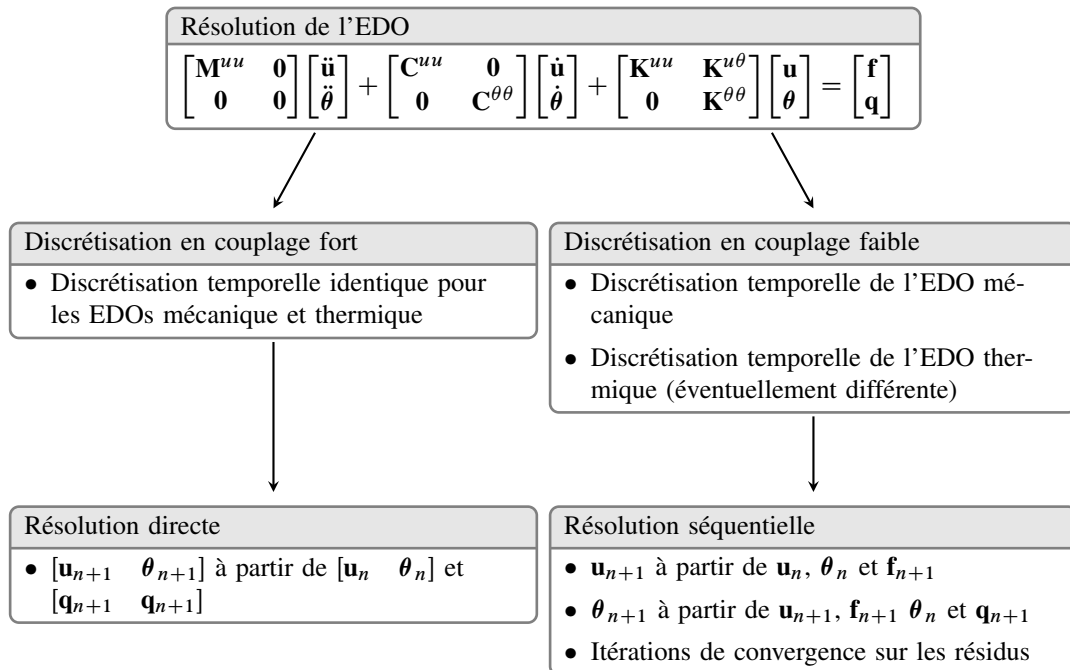


FIGURE IV.4 – Méthodologies de résolution de problèmes couplés.

3.1.2 Phénomènes de contact

Pour l'étude des problèmes de contact thermomécanique il est généralement déconseillé d'utiliser une stratégie de couplage faible, ce que rappelle une étude récente [112] qui montre que les performances des deux approches sont fortement liées aux phénomènes physiques, ainsi qu'à la taille des problèmes étudiés. En particulier, ces travaux montrent que pour les problèmes de contact thermomécanique, l'approche basée sur le couplage fort est la plus adaptée, car les flux thermiques de contact sont directement issus des efforts de contact. Cette dépendance ralentit la convergence des méthodes de résolution en couplage faible. De plus, du fait de l'utilisation de modèles réduits thermomécaniques, la structure triangulaire supérieure par blocs observée dans les systèmes (II.61) et (II.60) peut être perdue en fonction du contenu de la base de réduction. Une résolution avec couplage faible devient alors inadéquate.

Nous nous sommes donc concentrés sur des résolutions en couplage fort, qui permettent de conserver une certaine simplicité des implémentations, mais qui sont plus contraignantes en termes de choix des algorithmes. Notamment, on verra à la section IV.4.3 que le schéma de différences finies centrées sur lequel repose la méthode de Carpenter [43] n'est pas compatible avec la résolution d'un problème de contact avec couplage fort.

3.2 Contraintes industrielles

Le schéma présenté par Carpenter [43] a été utilisé pour la résolution numérique des problèmes de contact pour des structures discrétisées par éléments finis. Ce schéma a été employé pour modéliser le comportement dynamique lors de contacts rotor-stator dans plusieurs travaux [21, 23, 89, 90], qui ont amené au développement du code de calcul Safran-COROS. Un des objectifs industriels de cette thèse, qui a donc en partie conditionné l'orientation des travaux de recherche présentés dans ce document, est

d'implémenter de nouvelles fonctionnalités dans le code COROS, notamment l'ajout de la composante thermique dans la modélisation du contact. L'adaptation de l'algorithme employé dans le code COROS à la résolution du problème de contact thermomécanique a donc constitué naturellement une première voie de travail.

On propose de résoudre le problème de contact thermomécanique au moyen de deux types d'algorithmes. Le premier algorithme est dérivé de la méthode de Carpenter [43]. Celle-ci n'étant pas directement applicable au cas thermomécanique, on y ajout de l'amortissement numérique pour stabiliser l'algorithme. Les autres algorithmes sont basés sur une approche de dynamique non-régulière, le *sweeping-process* de Moreau [105], dont les travaux ont été continués par Jean [83] et sont décrits de façon approfondie dans [4]. D'autres études du problème de contact rotor-stator basées sur les schémas de Newmark [110] reposent sur un algorithme implicite [71]. Cette approche n'ayant pas été retenue dans COROS, nous nous sommes tournés vers des stratégies plus actuelles. Ainsi, bien qu'étant elle aussi implicite, la méthode de Moreau présente des fondements mathématiques solides et notamment des preuves de convergence sous certaines hypothèses [58]. Du fait de son caractère implicite, et étant supporté par la θ -méthode, la méthode de Moreau est donc hautement compatible avec la résolution d'un problème thermique, en évitant la raideur numérique inhérente à une résolution explicite [132], [147, §18.4]. Elle garantit aussi la qualité de la gestion des non-régularités, cette méthode paraît donc tout à fait adéquate à l'étude de problèmes de contact thermomécanique. Toutefois, elle repose sur une application des contraintes de contact en vitesse et non en position. Cette approche a des conséquences mineures dans des cas simples mais nécessite une correction supplémentaire lors d'une étude de contact rotor-stator complète.

4 Algorithme de Carpenter décentré

4.1 Schéma des différences finies centrées

Le schéma de Carpenter est basé sur le schéma explicite dit de *différences finies centrées*, qui fait partie de la famille des schémas de Newmark [110], et repose sur une gestion des efforts de contact au moyen de multiplicateurs de Lagrange. Dans le cas particulier du schéma de différences finies centrées, le couple de paramètres numériques de la méthode de Newmark prend la valeur $(\alpha, \beta) = (1/2, 0)$, le schéma (IV.8) se simplifie alors en

$$\left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\mathbf{C}}{2h} \right] \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2} - \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_n - \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} - \frac{\mathbf{C}}{2h} \right] \mathbf{x}_{n-1}. \quad (\text{IV.11})$$

4.2 Application des contraintes de contact

Le schéma des différences finies centrées étant un schéma explicite, Carpenter [43] en a proposée une modification pour pouvoir prendre en compte des contraintes de contact sous la forme de multiplicateurs de Lagrange. Le schéma obtenu est dit *prédicteur-correcteur*.

Une estimation des déplacements au pas $n + 1$, notée \mathbf{x}_p est effectuée dans un premier temps au moyen des grandeurs connues et sans considérer de quelconques efforts de contact, soit

$$\mathbf{x}_p = \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\mathbf{C}}{2h} \right]^{-1} \left(\mathbf{f}_n + \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2} - \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_n - \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} - \frac{\mathbf{C}}{2h} \right] \mathbf{x}_{n-1} \right) = \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_n. \quad (\text{IV.12})$$

Pour détecter les contacts, on introduit la fonction jeu discrète et notée $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_n$ où $\mathbf{C}_N = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}$ et la contrainte

$$\mathbf{g} \geq \mathbf{0} \quad (\text{IV.13})$$

où l'opération $\bullet \geq \bullet$ est à appliquer composante par composante. Par souci de simplicité des notations,

et du fait du caractère explicite de l'algorithme, on notera par la suite $\mathbf{g}_p = \mathbf{C}_N^\top \mathbf{x}_p$.

Si le jeu prédit ne respecte pas cette contrainte, une correction $\mathbf{x}_{n+1,c}$ et des efforts de contact $\mathbf{f}_{n+1,c}$ sont introduits de sorte que les déplacements \mathbf{x}_{n+1} à la fin de la correction respectent la contrainte de non pénétration. L'équilibre (IV.12) devient alors

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_{n+1,c} = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\tilde{\mathbf{f}}_n + \mathbf{f}_{n+1,c}) & \text{(IV.14a)} \\ \mathbf{g}_{n+1} = \mathbf{g}_p + \mathbf{C}_N^\top \mathbf{x}_{n+1,c} = \mathbf{0} & \text{(IV.14b)} \end{cases}$$

puis, en remplaçant \mathbf{g}_p par son expression en fonction de \mathbf{x}_p , en notant $\mathbf{f}_{n+1,c} = \mathbf{C}_{NT} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ et en prémultipliant le premier système par \mathbf{C}_N^\top on a

$$\begin{cases} \mathbf{g}_p + \mathbf{C}_N^\top \mathbf{x}_{n+1,c} = \mathbf{g}_p + (\mathbf{C}_N^\top \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT}) \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{0} & \text{(IV.15a)} \\ \mathbf{C}_N^\top \mathbf{x}_{n+1,c} = -\mathbf{g}_p. & \text{(IV.15b)} \end{cases}$$

Enfin, la forme finale permettant de déterminer les efforts de contact et les corrections de déplacement est obtenue

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = (\mathbf{C}_N^\top \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT})^{-1} \mathbf{g}_p = \hat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{g}_p & \text{(IV.16a)} \\ \mathbf{x}_{n+1,c} = -\hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}. & \text{(IV.16b)} \end{cases}$$

Les matrices \mathbf{C}_N et \mathbf{C}_{NT} découlent de la discrétisation spatiale de la mesure du jeu et représentent respectivement la direction de la distance minimale entre deux points formant un paire de contact maître–esclave, et la direction des efforts de contact (normaux et tangentiels) entre ces mêmes points.

Une différence notable de l'algorithme de Carpenter par rapport à l'algorithme de Moreau–Jean concerne la loi d'impact, concept détaillé à la section IV.5. Bien qu'une telle loi soit nécessaire dans la formulation en temps continue, l'algorithme de Carpenter ne la fait pas apparaître explicitement. En pratique, une loi d'impact peut cependant être dérivée des contraintes de non pénétration et du schéma d'intégration.

4.3 Cadre thermomécanique

4.3.1 Caractéristiques du schéma de différences finies centrées

Ce schéma présente dans le cas d'un système mécanique plusieurs avantages, principalement sa simplicité d'implémentation du fait de son caractère explicite. Le choix du paramètre d'amortissement numérique $\alpha = 1/2$ permet en outre de favoriser la stabilité de l'algorithme et donc d'augmenter le pas de temps maximal h_{\max} permettant d'obtenir la convergence [66].

Toutefois, dans le cadre thermomécanique, c'est-à-dire lorsque l'on utilise la même discrétisation spatiale pour les deux EDOs décrivant le système mécanique et son homologue thermique, le schéma ne peut pas converger pour ce jeu de paramètres. La démonstration de cette problématique dans le cas de la thermique est présentée en annexe D. On montre alors que le schéma des différences finies centrées est inconditionnellement instable pour la résolution de l'équation de la chaleur discrétisée par la méthode des éléments finis.

Il faut aussi noter qu'il est généralement déconseillé de résoudre un problème thermique au moyen de schémas explicites car le pas de temps assurant la stabilité du schéma est inversement proportionnel au carré de la dimension caractéristique du plus petit élément du maillage. On parle de problème numérique *raide* [132]. Cet effet est ici dû à la modélisation des échanges conductifs au moyen de la loi de conduction de Fourier, qui suppose une vitesse de propagation infinie. Le pas de temps de calcul requis pour des maillages fins peut ainsi devenir très faible, demandant alors des calculs coûteux. Cet inconvénient peut en partie être contourné par la réduction de modèle, comme dans le cas mécanique, puisqu'en fonction de la formulation de la base de réduction, on retire les composantes caractérisant les

évolutions rapides des modèles étudiés. Cependant, il paraît préférable d'éliminer cette contrainte par des moyens plus robustes.

4.3.2 Décentrement du schéma

Pour pouvoir appliquer l'approche de Carpenter, on propose d'ajouter de l'amortissement numérique au schéma en utilisant une valeur $\alpha > 1/2$. Ceci permet d'entrer dans un domaine de stabilité conditionnelle, sans pour autant altérer le schéma de Carpenter .

L'utilisation d'une valeur de α autre que $1/2$ n'entraîne pas de différence notable dans la résolution, mais des termes absents précédemment apparaissent dans l'étape de prédiction par rapport au cas des différences finies centrées. L'équation (IV.12) devient ainsi

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\alpha}{h} \mathbf{C} \right] \mathbf{x}_p &= \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \mathbf{f}_n + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \mathbf{f}_{n-1} \\ &+ \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2} + \frac{(2\alpha - 1)\mathbf{C}}{h} - \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_n \\ &- \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{(\alpha - 1)\mathbf{C}}{h} + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

ce qui peut aussi se simplifier en $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{x}_p = \tilde{\mathbf{f}}_n$. On peut donc réutiliser les mêmes équations que précédemment pour calculer les déplacements et températures corrigées. L'algorithme de Carpenter décentré et adapté au cas thermomécanique est présenté dans l'algorithme IV.1.

ALGORITHME IV.1 – Algorithme de Carpenter décentré

Données : \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} , $\mathbf{f}(t)$, h , α , $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{-1}, \text{gap}(\bullet)$

pour $n \leftarrow 1$ **à** n_{\max} **faire**

Initialisation des variables de bouclage

$\lambda_{n+1} \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathbf{p}_{n+1} \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathbf{f}_{n+1} \leftarrow \mathbf{f}(t_{n+1})$

$\hat{\mathbf{M}} \leftarrow \frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\alpha}{h} \mathbf{C}$

$\hat{\mathbf{C}} \leftarrow \frac{2\mathbf{M}}{h^2} + \frac{(2\alpha - 1)\mathbf{C}}{h} - \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \mathbf{K}$

$\hat{\mathbf{K}} \leftarrow \frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{(\alpha - 1)\mathbf{C}}{h} + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \mathbf{K}$

$\tilde{\mathbf{f}}_n \leftarrow \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x}_n + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \mathbf{f}_n + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \mathbf{f}_{n-1}$

Prédiction

$\mathbf{x}_p \leftarrow \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_n$

Calcul du jeu prédit

$[\mathbf{g}_p, \mathbf{C}_N, \mathbf{C}_{NT\theta}] \leftarrow \text{gap}(\mathbf{x}_p)$

Correction

si $(\mathbf{g}_p \leq \mathbf{0})$ **alors**

$\hat{\mathbf{W}} \leftarrow \mathbf{C}_N^T \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta}$ $\lambda_{n+1} \leftarrow \hat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{g}_p$ $\mathbf{p}_{n+1} \leftarrow \mathbf{C}_{NT\theta} \lambda_{n+1}$

$\mathbf{x}_{n+1} \leftarrow \mathbf{x}_p - \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{p}_{n+1}$

sinon

$\mathbf{x}_{n+1} \leftarrow \mathbf{x}_p$

Mise à jour de l'état du système

$\mathbf{x}_{n-1} \leftarrow \mathbf{x}_n$ $\mathbf{x}_n \leftarrow \mathbf{x}_{n+1}$ $n \leftarrow n + 1$

4.3.3 Calcul des flux thermiques

La prise en compte de la thermique dans la modélisation du contact entraîne la formulation de flux de chaleur au niveau de l'interface de contact. Ces flux sont dus à la création de chaleur au niveau de l'interface, qui dépend de la loi de contact. Ainsi, ces flux sont fortement influencés par les paramètres de l'interface comme les rugosités, les résistances thermiques de contact, le coefficient de friction et les températures locales [144], [7, §5.3]. Les flux de contact prennent la forme

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{c,1} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} (\nu_2(\Theta_1 - \Theta_2) - \mu \|\dot{\mathbf{x}}_T\|) \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{q}_{c,2} = \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} (\nu_1(\Theta_2 - \Theta_1) - \mu \|\dot{\mathbf{x}}_T\|) \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(IV.18a)} \\ \text{(IV.18b)} \end{matrix}$$

où ν_1 et ν_2 sont les conductances thermiques de contact entre les deux solides. On peut ainsi évaluer les flux thermiques de contact comme proportionnels aux efforts normaux de contact. Ceci permet de modifier les matrices \mathbf{C}_N et \mathbf{C}_{NT} de sorte que dans le cas thermomécanique, on note

$$\mathbf{C}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_N \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{NT\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{NT} \\ \mathbf{C}_\theta \end{bmatrix}$$

où les blocs $\mathbf{0}$ et \mathbf{C}_θ ont pour nombre de lignes, le nombre de degrés de liberté thermiques du système un nombre de colonnes identique au nombre de nœuds en contact. La matrice $\mathbf{C}_{NT\theta}$ rassemble alors les participations des forces de contact normale et tangentielle ainsi que le flux thermique de contact. Ainsi l'algorithme consiste en un pas de prédiction isotherme de la pénétration, suivi par un pas de correction thermoélastique.

5 Dynamique non-régulière

5.1 Introduction

Un impact entre deux corps est un phénomène de durée très courte, qui entraîne une modification de la dynamique des structures en contact de manière très rapide, et donc une variation rapide de leur vitesse. Les impacts sont généralement modélisés comme des phénomènes ponctuels, qui induisent des discontinuités dans les vitesses des structures considérées. Les méthodologies conventionnelles de simulation deviennent alors inadéquates pour un traitement robuste et efficace de ces problèmes. Si des structures modélisées au moyen de la méthode des éléments finis sont étudiées, une problématique supplémentaire intervient. Les conditions de contact de Signorini (II.35) relient les déplacements (via le jeu) et les efforts de contact, mais ne relient pas les vitesses avant et après l'impact. Pour que le problème soit bien posé, il faut ajouter une relation supplémentaire reliant ces vitesses, que l'on appelle une *loi d'impact*. On choisit ici une loi d'impact de Newton, qui se traduit par la relation

$$v^+ = -ev^- \quad \text{(IV.19)}$$

où les vitesses avant et après impact sont notées respectivement $v(t^-) = v^-$ et $v(t^+) = v^+$, dont les exposants traduisent les limites à gauche et à droite de l'instant d'impact, et où e est le coefficient de restitution de la loi d'impact, dont l'effet est illustré en figure IV.5. Cette relation signifiant que la vitesse est discontinue entre avant et après l'instant d'impact, les équations reliant la dynamique du système avant et après cet instant sont donc à prendre au sens des distributions. De même, en cet instant, l'effort de contact devient impulsionnel.

Prenons l'exemple d'un système masse-ressort soumis à une contrainte de contact unilatéral, repré-

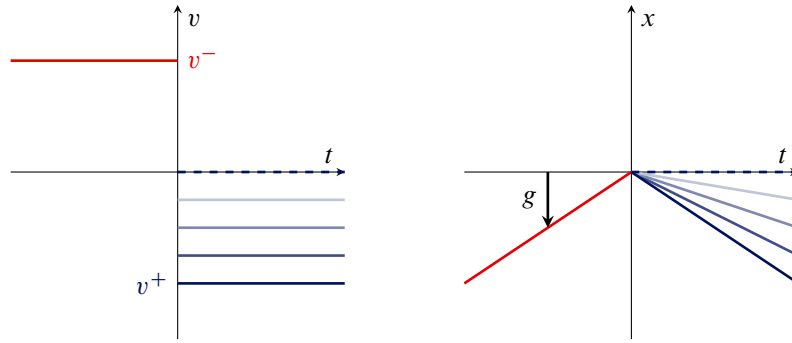


FIGURE IV.5 – Comportement en vitesse et en déplacement lors d'un impact.
 $e = 1$ (—), $e = 0.75$ (---), $e = 0.5$ (· · ·), $e = 0.25$ (- · -), $e = 0$ (- -).

senté en figure IV.6. Ce système est régi par l'équation

$$m\dot{v}(t) + kx(t) = f(t) \quad (\text{IV.20})$$

et la loi d'impact (IV.19). Du fait de la non-régularité attendue du système cette écriture est remplacé par la formulation plus rigoureuse

$$m dv(t) + kx(t)dt = dp(t) \quad (\text{IV.21})$$

En intégrant cette équation entre les instants t^- et t^+ , seuls les termes impulsionnels de cette équation restent, ce qui laisse

$$m(v^+ - v^-) = \lambda \quad (\text{IV.22})$$

Plusieurs situations se présentent en fonction de la valeur du jeu (g) et des vitesses :

- Si il n'y a pas contact ($g > 0$) et la vitesse est continue ($v^+ = v^-$), l'impulsion de contact est nulle ($\lambda = 0$).
- Au moment de l'impact, le jeu s'annule ($g = 0$), et la vitesse subit une discontinuité ($v^- > 0$ et $v^+ = 0$). L'effort impulsionnel est alors proportionnel à la discontinuité de vitesse ($\lambda = m(v^+ - v^-) = -m(1 + e)v^-$).
- Juste après l'impact, le jeu est toujours nul ($g = 0$) mais $v^+ = -ev^- \leq 0$ l'effort de contact s'annule.
- Le système reprend ensuite sa dynamique libre et les vitesses sont à nouveau continues.

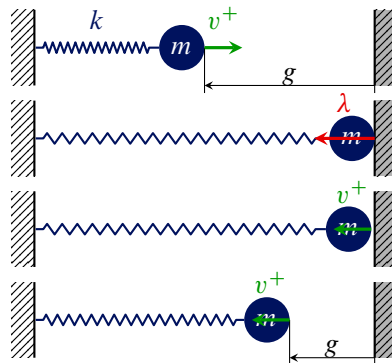


FIGURE IV.6 – Système masse-ressort soumis à une contrainte de contact unilatéral.

Une inclusion différentielle de mesure (IDM), concept issu de la mécanique non-régulière permet

de formuler ces conditions de contact de manière rigoureuse sous la forme

$$\lambda \in -\partial\psi_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+}}(g) \left(\frac{v^+ + ev^-}{1 + e} \right), \quad (\text{IV.23})$$

où $\partial\psi_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+}}(g)$ est alors la sous-différentielle de la fonction indicatrice ψ du cône tangent à \mathbb{R}^+ évaluée au point g . De plus, on peut montrer que la sous-différentielle $\partial\psi_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+}}(g)(y)$ est égale au cône normal $\mathcal{N}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+}}(g)(y)$. Les définitions de tous ces concepts d'analyse convexe sont fournies dans l'annexe E. Cette notation est équivalente [4, §A.3] à

$$0 \leq (v^+ + ev^-) \perp \lambda \geq 0, \quad (\text{IV.24})$$

qui permet de réécrire le problème (IV.20) sous la forme d'un problème de complémentarité linéaire (LCP - *Linear Complementarity Problem*)

$$\begin{cases} (v^+ + ev^-) = a\lambda + b & (\text{IV.25}) \\ 0 \leq (v^+ + ev^-) \perp \lambda \geq 0. & (\text{IV.26}) \end{cases}$$

Ce formalisme est très répandu en théorie de l'optimisation et de la programmation quadratique, et permet le traitement d'autres type de non-régularités de contact comme le cas du stick-slip issu du modèle de frottement de Coulomb.

Différents algorithmes permettent de résoudre ce type de problèmes et sont détaillés dans [4, §12.4] par exemple. Ceux-ci font l'objet de développements spécifiques, qui vont bien au-delà du contenu de cette thèse. Comme dans la plupart des cas, les algorithmes de résolution de ce type de problèmes présentent des avantages et des inconvénients, il convient donc de choisir l'algorithme le plus adapté à ses besoins.

Pour toutes les simulations, un algorithme basé sur la méthode des pivots [4, §12.4.7] a été utilisé. Cet algorithme a été récupéré sur le FileExchange de Matlab [11] et a été conçu sur la base d'une bibliothèque libre d'optimisation codée en Python appelée `OpenOpt`. Les algorithmes de programmation quadratique de Matlab, gérés par la macro `quadprog` ont aussi été testés mais ont montré des temps de calcul plus élevés que l'algorithme susnommé, avec toutefois des résultats semblables.

5.2 Méthode de Moreau-Jean

5.2.1 Origines

Du fait du caractère non-régulier du déplacement et de la température, impliquant des sauts de vitesse et de variation de température, lors des instants de contact, les dérivées secondes du déplacement et de la température ne sont pas définies. Ceci ne permet plus en théorie d'utiliser les schémas d'intégration temporelle usuels comme les schémas de Newmark présentés en section IV.2.2 et exploités par Carpenter. On se réfère ici à la stratégie initiée par Moreau [105] et Jean [83] puis reprise dans [4, §10.1], à savoir la méthode de dynamique des contacts non-réguliers (*Nonsmooth Contact Dynamics Method* en anglais). Cette approche fait intervenir des schémas numériques implicites, basés sur la θ -méthode, ce qui permet de s'affranchir d'un critère de stabilité numérique du schéma, et d'éviter des oscillations numériques indésirables par l'utilisation d'un schéma du premier ordre.

5.2.2 Formulation du problème non-régulier

On s'intéresse à un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}d\mathbf{v} + (\mathbf{C}\mathbf{v}^+ + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f})dt = d\mathbf{p} \\ \mathbf{v}^+ = \dot{\mathbf{x}}^+ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.27a)} \\ \text{(IV.27b)} \end{array}$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} sont les matrices de masse, amortissement et raideur généralisées d'un système mécanique ou thermomécanique. On rappelle que ces matrices ne dépendent pas du temps. dt est la mesure de Lebesgue, le terme $d\mathbf{v}$ est la mesure différentielle associée à \mathbf{v} . $d\mathbf{p}$ est la mesure des efforts impulsionnels de contact et \mathbf{v}^+ est le vecteur des vitesses généralisées après impact. La seule non-régularité du système étant supposée due à l'instant d'impact, la fonction \mathbf{v}^+ est considérée comme continue. \mathbf{f} est le vecteur d'efforts extérieurs excluant les efforts de contact.

5.2.3 Intégration temporelle

L'intégration temporelle sur l'intervalle $(t_n, t_{n+1}]$ avec $h = t_{n+1} - t_n > 0$ du problème (IV.27) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{(t_n, t_{n+1}]} \mathbf{M}d\mathbf{v} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{C}\mathbf{v}^+ + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f})dt = \int_{(t_n, t_{n+1}]} d\mathbf{p} \\ \mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{v}^+ dt. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.28a)} \\ \text{(IV.28b)} \end{array}$$

Puis, la définition d'une mesure différentielle [4, §C.4] donne

$$\int_{(t_n, t_{n+1}]} \mathbf{M}d\mathbf{v} = \mathbf{M} \int_{(t_n, t_{n+1}]} d\mathbf{v} = \mathbf{M}(\mathbf{v}(t_{n+1}^+) - \mathbf{v}(t_n^+)), \quad \text{(IV.29)}$$

ce qui permet de réécrire les équations du mouvement non-régulier (IV.28) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}(\mathbf{v}(t_{n+1}^+) - \mathbf{v}(t_n^+)) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (-\mathbf{C}\mathbf{v}^+ - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f})dt + \int_{(t_n, t_{n+1}]} d\mathbf{p} \\ \mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{v}^+ dt. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.30a)} \\ \text{(IV.30b)} \end{array}$$

Le problème non-régulier est maintenant discrétisé en temps au moyen d'un schéma adapté (IV.30). Des schémas d'ordres élevés, qui supposent une certaine régularité de la solution ne sont généralement pas adaptés à la résolution de ce type de problèmes [1, 83]. Récemment, des travaux ont montré qu'il était possible d'utiliser un intégrateur d'ordre élevé pour la dynamique libre, et un intégrateur du premier ordre pour les évolutions non-régulières pour bénéficier des avantages des deux approches [40], cette stratégie entraîne toutefois une certaine complexité des développements, nous nous sommes donc focalisés sur des méthodes plus simples.

Comme indiqué dans [4, §10.1], on choisit un schéma de type θ -méthode qui permet de retrouver l'ensemble des schémas d'intégration numérique à un pas. On rappelle que le schéma de la θ -méthode est inconditionnellement stable pour $0,5 \leq \gamma \leq 1$ et est conditionnellement stable pour $0 \leq \gamma < 0,5$ si le système étudié est linéaire ou sous certaines hypothèses [58] si le système est non-linéaire.

On pose les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n \approx \mathbf{x}(t_n), \text{ écriture valable aussi au pas } n+1 & \text{(IV.31a)} \\ \mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}^+(t_n), \text{ écriture valable aussi au pas } n+1 & \text{(IV.31b)} \\ \mathbf{p}_{n+1} \approx \int_{(t_n, t_{n+1}]} d\mathbf{p} & \text{(IV.31c)} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{C}\mathbf{v}^+ + \mathbf{K}\mathbf{x})dt \approx h[\gamma(\mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{n+1}) + (1-\gamma)(\mathbf{C}\mathbf{v}_n + \mathbf{K}\mathbf{x}_n)] & \text{(IV.31d)} \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}dt \approx h[\gamma\mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n] & \text{(IV.31e)} \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h[\gamma\mathbf{v}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n] & \text{(IV.31f)} \end{cases}$$

Ce qui permet de formuler le problème discrétisé en temps sous la forme

$$(\mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C} + h^2\gamma^2\mathbf{K})(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) = -h\mathbf{C}\mathbf{v}_n - h\mathbf{K}\mathbf{x}_n - h^2\gamma\mathbf{K}\mathbf{v}_n + h(\gamma\mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n) + \mathbf{p}_{n+1}. \quad \text{(IV.32)}$$

On introduit la notion de vitesse *libre* [4, §10.1.1.1], issue de la condensation de l'équation (IV.32), qui correspond à la vitesse du système lorsque les efforts de contact sont nuls. Il y a donc une analogie entre cette vitesse libre et la vitesse *prédite* de l'algorithme de Carpenter. Cette vitesse est donc notée dans la suite $\mathbf{v}_{n+1,p}$ et est telle que

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1,p} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1,p} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}\boldsymbol{\lambda}_{n+1} \quad \text{(IV.33)}$$

où la matrice

$$\hat{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C} + h^2\gamma^2\mathbf{K}) \quad \text{(IV.34)}$$

est généralement appelée *matrice d'itération*. Le vecteur de vitesse prédite vaut

$$\mathbf{v}_{n+1,p} = \mathbf{v}_n + \hat{\mathbf{M}}^{-1}[-h\mathbf{C}\mathbf{v}_n - h\mathbf{K}\mathbf{x}_n - h^2\gamma\mathbf{K}\mathbf{v}_n + h(\gamma\mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n)]. \quad \text{(IV.35)}$$

5.2.4 Observations

Dans le cadre de ce document, nous ne nous intéressons qu'à des mouvements de la dynamique de structures dépourvues de mouvement de corps rigide. Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} sont donc rigoureusement inversibles. Dans le cas d'une formulation à l'ordre deux d'un problème thermomécanique de contact non-régulier est utilisée, la matrice \mathbf{M} n'est alors plus inversible. Cependant, la matrice d'itération $\hat{\mathbf{M}}$ est supposée inversible car elle fait intervenir la matrice de capacité thermique pour $\gamma \neq 0$ soit une intégration temporelle implicite.

Dans le cas de conditions de contact unilatéral de Signorini, l'inclusion de Moreau prend la forme spécifique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \in -\mathcal{N}_{\mathcal{T}_+(\mathbf{g}_p)} \left(\frac{\mathbf{C}_N^\top \mathbf{v}_{n+1} + e\mathbf{C}_N^\top \mathbf{v}_n}{1+e} \right) & \text{(IV.36a)} \\ \mathbf{g}_p = \mathbf{g}_0 + \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{x}_n + h\eta\mathbf{v}_n) & \text{(IV.36b)} \end{cases}$$

Où on retrouve la matrice \mathbf{C}_N définie précédemment. Le paramètre η introduit dans le calcul de \mathbf{g}_p peut être choisi de différentes façons. Moreau prend par exemple $\eta = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, le jeu prédit est calculé à partir non seulement des déplacements, mais aussi des vitesses calculées au pas d'avant, ce qui constitue une différence notable de la pratique de Carpenter [43]. Le choix de la formulation pour le calcul jeu prédit pour la détection des contacts n'étant pas unique, il est largement discuté dans la littérature [83, §6][3, §4.4][40, §7.2].

Dans l'hypothèse d'un jeu prédit $\mathbf{g}_p \leq \mathbf{0}$ (fermé), l'inclusion (IV.36a) s'écrit

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1} + e\mathbf{v}_n) \perp \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{IV.37})$$

la résolution des efforts de contact $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ et des vitesses après impact nécessite donc la résolution du problème associant les équations (IV.33) et (IV.37) sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1,p} + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1} + e\mathbf{v}_n) \perp \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{IV.38a})$$

$$(\text{IV.38b})$$

il ne reste plus alors qu'à ajouter un terme $e\mathbf{v}_n$ dans les membres de gauche et droite du premier système d'équations puis de le projeter dans les repères locaux au contact (au moyen de \mathbf{C}_N^\top) pour obtenir un LCP en bonne et due forme

$$\begin{cases} \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1} + e\mathbf{v}_n) = \mathbf{C}_N^\top \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1,p} + e\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1} + e\mathbf{v}_n) \perp \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{IV.39a})$$

$$(\text{IV.39b})$$

La procédure de résolution du problème de contact par la méthode de Moreau–Jean linéairement implicite est décrite dans l'algorithme IV.2.

ALGORITHME IV.2 – Algorithme de Moreau–Jean linéairement implicite

Données : \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} , \mathbf{f} , h , γ , η , \mathbf{x}_0 , \mathbf{v}_0 , $\text{gap}(\bullet)$

pour $n \leftarrow 1$ à n_{\max} **faire**

Initialisation des variables de bouclage

$\boldsymbol{\lambda} \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{0}$

$\mathbf{f}_{n+1} \leftarrow \mathbf{f}(t_{n+1})$ $\mathbf{f}_{n+\gamma} \leftarrow h(\gamma \mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n)$ $\tilde{\mathbf{f}}_{n+\gamma} \leftarrow \hat{\mathbf{C}}\mathbf{v}_n + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}_n + \mathbf{f}_{n+\gamma}$

Prédiction

$\mathbf{v}_p \leftarrow \mathbf{v}_{n+1} + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_{n+\gamma}$

$\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}_n + h\eta \mathbf{v}_n$

Calcul du jeu prédit

$[\mathbf{g}_p, \mathbf{C}_N, \mathbf{C}_{NT\theta}] \leftarrow \text{gap}(\mathbf{x}_p)$

Correction

si $(\mathbf{g}_p \leq \mathbf{0})$ **alors**

$\hat{\mathbf{W}}_{n+1} \leftarrow \mathbf{C}_N^\top \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta}$

 Résoudre le LCP pour $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ et \mathbf{v}_{n+1} de sorte que :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1} + e\mathbf{v}_n) = \hat{\mathbf{W}}_{n+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1,p} + e\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1} + e\mathbf{v}_n) \perp \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

$\mathbf{p}_{n+1} \leftarrow \mathbf{C}_{NT\theta} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}$ $\mathbf{v}_{n+1} \leftarrow \mathbf{v}_p + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{p}_{n+1}$

sinon

$\boldsymbol{\lambda}_{n+1} \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathbf{p}_{n+1} \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathbf{v}_{n+1} \leftarrow \mathbf{v}_p$

5.3 Résolution implicite complète

5.3.1 Expression et linéarisation du résidu

Lors de l'intégration implicite d'un modèle non-linéaire, les déplacements et vitesses sont reliés par l'opérateur d'intégration, ce qui n'est pas le cas lorsqu'une intégration explicite est utilisée [68]. Une première façon de procéder consiste à supposer que la convergence est obtenue en une seule itération, ce qui permet de simplifier les développements et d'obtenir les résultats de la section IV.5.2. Pour pouvoir appliquer une procédure de résolution complète au moyen de la méthode de Newton, il faut procéder à des modifications de notations. On repart donc de l'équation d'équilibre du système (II.62), qui est reformulée en

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{x}) &= \mathbf{M}d\mathbf{v} + (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f})dt = d\mathbf{p} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & \text{(IV.40a)} \\ & \text{(IV.40b)} \end{aligned}$$

qui se traduit une fois la discrétisation temporelle effectuée par

$$\mathbf{r}(\mathbf{v}_{n+1}) = \mathbf{p}_{n+1} \quad \text{(IV.41)}$$

où le résidu \mathbf{r} s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{v}) &= \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n) - (-h\mathbf{C}\mathbf{v}_n - h^2\gamma\mathbf{K}\mathbf{v}_n - h\mathbf{K}\mathbf{x}_n + h(\gamma\mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n)) \\ &= \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_n. \end{aligned} \quad \text{(IV.42)}$$

Soit \mathbf{v}_{n+1}^τ une approximation de \mathbf{v}_{n+1} à l'itération de Newton τ et initialisée par $\mathbf{v}_{n+1}^0 = \mathbf{v}_n$. La linéarisation de l'équation résiduelle (IV.41) autour du point \mathbf{v}_{n+1}^τ donne

$$\mathbf{r}_L(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{v}_{n+1}^\tau) + [\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{r}]_{\mathbf{v}_{n+1}^\tau} (\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^\tau) \quad \text{(IV.43)}$$

avec $[\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{r}]_{\mathbf{v}_{n+1}^\tau} = \hat{\mathbf{M}}$ la matrice jacobienne du résidu \mathbf{r} par rapport à la vitesse \mathbf{v} évaluée au point \mathbf{v}_{n+1}^τ . Ici, cette jacobienne est constante, car aucune non-linéarité autre qu'issue des contacts n'est considérée. L'expression finale du résidu linéarisé $\mathbf{r}_L(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1})$ devient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_L(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}) &= \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1}^\tau - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_n + \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^\tau) \\ &= \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_n \end{aligned} \quad \text{(IV.44)}$$

De plus, comme $\mathbf{r}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}) = \mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1}$ d'après la définition du résidu (IV.41),

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^\tau) = \mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{r}(\mathbf{v}_{n+1}^\tau) \quad \text{(IV.45)}$$

et comme \mathbf{v}_{n+1}^τ et $\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}$ tendent vers \mathbf{v}_{n+1} , l'écart entre le résidu et les efforts de contact tend à diminuer.

5.3.2 Linéarisation des relations cinématiques pour la résolution du problème de contact

Les non-linéarités dans les relations cinématiques sont traitées de manière analogue aux non-linéarités du résidu. La vitesse d'impact \mathbf{y} dépend de la vitesse dans le repère global \mathbf{v} et de la matrice de contact $\mathbf{C}_N(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x})$ de sorte que

$$\mathbf{y}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{x}_p(\mathbf{v}))\mathbf{v} \quad \text{(IV.46)}$$

où la position prédite sans considérer les efforts de contact $\mathbf{x}_p(\mathbf{v})$ vaut

$$\mathbf{x}_p(\mathbf{v}) = \mathbf{x}_n + \eta h[\gamma\mathbf{v} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n]. \quad \text{(IV.47)}$$

La prédiction de déplacement utilisée dans le cas de l'intégration linéairement implicite décrite à la section IV.5.2 correspond au cas

$$\mathbf{x}_p(\mathbf{v}_n) = \mathbf{x}_n + \eta h[\gamma \mathbf{v}_n + (1 - \gamma) \mathbf{v}_n] = \mathbf{x}_n + \eta h \mathbf{v}_n. \quad (\text{IV.48})$$

Pour linéariser cette relation cinématique, il est nécessaire de calculer la jacobienne de \mathbf{y} vis-à-vis de la vitesse \mathbf{v} notée $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{y}$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{y} &= \nabla_{\mathbf{v}} \left(\mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v})) \mathbf{v} \right) \\ &= \nabla_{\mathbf{v}} \left(\mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v})) \right) \mathbf{v} + \mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v})) \\ &= h \gamma \eta \nabla_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{v} + \mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v})) \\ &\approx \mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v})) \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

Le terme de $h \gamma \eta \nabla_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}) \right) \mathbf{v}$ est généralement négligé dans l'expression de la jacobienne car il participe au second ordre en \mathbf{v} . Ainsi, le modèle linéaire tangent au point \mathbf{v}_{n+1}^{τ} est

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_L(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}) &= \mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}) = \mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau})) \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{y}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau})(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^{\tau}) \\ &= \mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau})) \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau})) (\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^{\tau}) \\ &= \mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau})) \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

De la même façon, la linéarisation des efforts de contact autour du point \mathbf{v}_{n+1}^{τ} est effectuée

$$\mathbf{f}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{C}_{NT\theta}^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau})) \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} \quad (\text{IV.51})$$

L'opérateur de Delassus linéarisé devient donc

$$\hat{\mathbf{W}}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{C}_N^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau})) (\hat{\mathbf{M}})^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta}^{\top}(\mathbf{x}_p(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau})). \quad (\text{IV.52})$$

qui dépend bien de l'itération de Newton τ du fait de la dépendance de \mathbf{C}_N et $\mathbf{C}_{NT\theta}$ en \mathbf{v} et ce même si $\hat{\mathbf{M}}_{n+1}^{\tau+1} = \hat{\mathbf{M}}$.

5.3.3 Prédiction des déplacements et vitesses à l'itération suivante

La prédiction de la vitesse à l'itération $\tau + 1$ est obtenue en supposant que les efforts de contact sont nuls dans l'équation (IV.45), ce qui donne

$$\mathbf{v}_p^{\tau+1} = \mathbf{v}_{n+1}^{\tau} - \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau}). \quad (\text{IV.53})$$

Le problème de complémentarité linéaire défini par

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{A}_{n+1}^{\tau+1} \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{b}_{n+1}^{\tau+1} & (\text{IV.54a}) \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} \perp \mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} & (\text{IV.54b}) \end{cases}$$

peut donc dorénavant être résolu. La vitesse à la fin de l'itération $\tau + 1$ de la boucle de Newton $\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}$ est ensuite déterminée au moyen de

$$\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{v}_p^{\tau+1} + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} \quad (\text{IV.55})$$

et l'erreur ϵ pour cette itération est calculée d'après l'équation (IV.45)

$$\epsilon_{n+1}^{\tau+1} = \|\mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{r}_{n+1}^{\tau+1}\| \quad (\text{IV.56})$$

qui permet de terminer les itérations une fois que la tolérance requise est atteinte.

Toutes les étapes à effectuer sont regroupées dans l'algorithme IV.3.

ALGORITHME IV.3 – Algorithme de Moreau-Jean avec boucle de Newton, adapté de [4]

Données : $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{f}, h, \alpha, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \text{gap}(\bullet)$

pour $n \leftarrow 1$ à n_{\max} **faire**

Initialisation des variables de bouclage

$\lambda \leftarrow \mathbf{0} \quad \mathbf{p} \leftarrow \mathbf{0}$

$\mathbf{f}_{n+1} \leftarrow \mathbf{f}(t_{n+1}) \quad \mathbf{f}_{n+\gamma} \leftarrow h(\gamma \mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n) \quad \tilde{\mathbf{f}}_{n+\gamma} \leftarrow \hat{\mathbf{C}}\mathbf{v}_n + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}_n + \mathbf{f}_{n+\gamma}$

Boucle de Newton

$\tau \leftarrow 0 \quad \epsilon \leftarrow \infty \quad \mathbf{x}_{n+1}^\tau \leftarrow \mathbf{x}_n \quad \mathbf{v}_{n+1}^\tau \leftarrow \mathbf{v}_n \quad \mathbf{r}_{n+1}^\tau \leftarrow -\tilde{\mathbf{f}}_{n+\gamma}$

tant que $\epsilon \geq \epsilon_{\max}$ **faire**

Prédiction

$\mathbf{v}_p^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_{n+1}^\tau - \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{r}_{n+1}^\tau$

$\mathbf{x}_p^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{x}_n + h\eta[\gamma \mathbf{v}_{n+1}^\tau + (1-\gamma)\mathbf{v}_n]$

Calcul du jeu prédit

$[\mathbf{g}_p, \mathbf{C}_N, \mathbf{C}_{NT\theta}] \leftarrow \text{gap}(\mathbf{x}_p^{\tau+1})$

Correction

si $(\mathbf{g}_p \leq \mathbf{0})$ **alors**

$\hat{\mathbf{W}}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{C}_N^\top \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta}$

Résoudre le LCP pour $\lambda_{n+1}^{\tau+1}$ et $\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}$ de sorte que :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_N^\top \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} = \hat{\mathbf{W}}_{n+1}^{\tau+1} \lambda_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{C}_N^\top \mathbf{v}_p^{\tau+1} \\ \mathbf{0} \leq \lambda_{n+1}^{\tau+1} \perp \mathbf{C}_N^\top \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

$\mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{C}_{NT\theta} \lambda_{n+1}^{\tau+1} \quad \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_p^{\tau+1} + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1}$

sinon

$\lambda_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{0} \quad \mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{0} \quad \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_p^{\tau+1}$

Evaluation de l'erreur

$\mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{C}_{NT\theta} \lambda_{n+1}^{\tau+1} \quad \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{x}_n + h[\gamma \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n]$

$\mathbf{r}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_{n+\gamma}$

$\epsilon \leftarrow \|\mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{r}_{n+1}^{\tau+1}\| \quad \tau \leftarrow \tau + 1$

Mise à jour de l'état du système

$\mathbf{x}_{n+1} \leftarrow \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} \quad \mathbf{p}_{n+1} \leftarrow \mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} \quad \mathbf{v}_{n+1} \leftarrow \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}$

5.4 Méthode de Moreau-Jean avec reprojection sur les contraintes en position

5.4.1 Problématique des pénétrations résiduelles

Bien que le schéma de Moreau-Jean présente des avantages certains en termes de robustesse et de stabilité, les pénétrations résiduelles sont inévitables du fait de l'application des contraintes de contact unilatéral sur les vitesses nodales. Dans le cas d'une configuration de contact simple (Ex : poutre 1D)

ou plus généralement quand l'expression du jeu dépend linéairement des déplacements des structures en contact, ces pénétrations ne sont pas problématiques. Quand le jeu ne dépend pas linéairement des déplacements et si les pénétrations résiduelles sont du même ordre de grandeur que les tolérances géométriques des structures étudiées. Dans le premier cas, une propagation d'erreur peut intervenir, ce qui entraîne lors d'une accumulation d'impacts la violation des contraintes en position, rendant la poursuite des calculs non pertinente. Dans le second, les erreurs apportées par les pénétrations ne permettent pas de s'approcher du comportement réel des structures étudiées.

Pour contourner différents défauts du schéma de Moreau-Jean, des améliorations récentes ont été proposées. Le reste de la section décrit l'algorithme permettant d'effectuer l'intégration du système au moyen d'un algorithme amélioré évitant la propagation de pénétrations résiduelles et présente son application sur une poutre 1D thermoélastique.

5.4.2 Augmentation du système d'intérêt

Le système (IV.40) est ici rappelé pour faciliter la compréhension, accompagné des contraintes de contact unilatéral reliant les vitesses locales normales au plan de contact et la mesure des impulsions de réaction,

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}d\mathbf{v} + (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f})dt - d\mathbf{p} & \text{(IV.40a)} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} & \text{(IV.40b)} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}^+ + e\mathbf{v}^-) \perp d\mathbf{p} \geq \mathbf{0}. & \text{(IV.57a)} \end{cases}$$

Comme indiqué précédemment, cette formulation ne permet pas d'éviter des pénétrations résiduelles lors des impacts. Une *augmentation* du système par ajout de multiplicateurs supplémentaires selon l'approche GGL (*Gear-Gupta-Leimkuhler*) a été proposée dans [3]. Le système augmenté s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \mathbf{M}d\mathbf{v} + (\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f})dt - \mathbf{C}_{NT\theta}d\boldsymbol{\lambda} & \text{(IV.58a)} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} + \mathbf{C}_{NT\theta}\boldsymbol{\chi} & \text{(IV.58b)} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}^+ + e\mathbf{v}^-) \perp d\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} & \text{(IV.58c)} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{g} \perp \boldsymbol{\chi} \geq \mathbf{0} & \text{(IV.58d)} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\chi}$ est un nouveau multiplicateur associé aux contraintes redondantes en position et vitesse, et qui permet d'assurer la non-pénétration.

5.4.3 Discrétisation temporelle du système augmenté

En combinant l'expression du système augmenté et les discrétisations temporelles, le système augmenté devient en temps discret

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) + h\gamma(\mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1}) \\ \quad + h(1-\gamma)(\mathbf{C}\mathbf{v}_n + \mathbf{K}\mathbf{x}_n - \mathbf{f}_n) = \mathbf{C}_{NT\theta} \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\mathbf{p} & \text{(IV.59a)} \\ \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = h(\gamma\mathbf{v}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) + \mathbf{C}_{NT\theta} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \boldsymbol{\chi} dt & \text{(IV.59b)} \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) + h\gamma(\mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1}) \\ \quad + h(1-\gamma)(\mathbf{C}\mathbf{v}_n + \mathbf{K}\mathbf{x}_n - \mathbf{f}_n) = \mathbf{C}_{NT\theta}\boldsymbol{\lambda}_{n+1} & \text{(IV.60a)} \\ \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = h(\gamma\mathbf{v}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) + \mathbf{C}_{NT\theta}\boldsymbol{\kappa}_{n+1}. & \text{(IV.60b)} \end{cases}$$

avec $\lambda_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\mathbf{p}$ et $\kappa_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\chi$. Les contraintes de contact discrétisées, qui regroupent les conditions de contact de Signorini, la loi d'impact et la loi de reprojction s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{0} \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1} + e\mathbf{v}_n) \perp \lambda_{n+1} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{g}_{n+1} \perp \kappa_{n+1} \geq \mathbf{0}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(IV.61a)} \\ \text{(IV.61b)} \end{array}$$

L'injection de l'équation (IV.60b) dans l'équation (IV.60a) donne

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) - (-h\mathbf{C}\mathbf{v}_n - h^2\gamma\mathbf{K}\mathbf{v}_n - h\mathbf{K}\mathbf{x}_n + h(\gamma\mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n)) \\ \quad + h\gamma\mathbf{K}\mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1} = \mathbf{C}_{NT\theta}\lambda_{n+1} \\ \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = h(\gamma\mathbf{v}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) + \mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1}, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(IV.62a)} \\ \text{(IV.62b)} \end{array}$$

qui se simplifie en

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_n + h\gamma\mathbf{K}\mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1} = \mathbf{C}_{NT\theta}\lambda_{n+1} \\ \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = h(\gamma\mathbf{v}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) + \mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(IV.63a)} \\ \text{(IV.63b)} \end{array}$$

avec $\tilde{\mathbf{f}}_n = -h\mathbf{C}\mathbf{v}_n - h^2\gamma\mathbf{K}\mathbf{v}_n - h\mathbf{K}\mathbf{x}_n + h(\gamma\mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n)$. En notant

$$\begin{cases} \mathbf{r}_v(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_n + h\gamma\mathbf{K}\mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1} - \mathbf{C}_{NT\theta}\lambda_{n+1} \\ \mathbf{r}_x(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_n - h(\gamma\mathbf{v} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) - \mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(IV.64a)} \\ \text{(IV.64b)} \end{array}$$

l'application de la méthode de Newton à $\mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ consiste à chercher les solutions $(\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1})$ de $\mathbf{r}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ comme la limite de la suite $\forall \tau \in \mathbb{N}$ $(\mathbf{v}_{n+1}^\tau, \mathbf{x}_{n+1}^\tau)$ telle que

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1}^0 = \mathbf{v}_n \\ \mathbf{x}_{n+1}^0 = \mathbf{x}_n \\ \mathbf{r}_L(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}, \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{v}_{n+1}^\tau, \mathbf{x}_{n+1}^\tau) \\ \quad + \nabla_v \mathbf{r}(\mathbf{v}_{n+1}^\tau, \mathbf{x}_{n+1}^\tau)(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^\tau) \\ \quad + \nabla_x \mathbf{r}(\mathbf{v}_{n+1}^\tau, \mathbf{x}_{n+1}^\tau)(\mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^\tau) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(IV.65a)} \\ \text{(IV.65b)} \\ \text{(IV.65c)} \end{array}$$

où \mathbf{r}_L est le résidu linéarisé qui, en remplaçant les jacobienes de \mathbf{r} par leurs expressions analytiques et en notant $\lambda_{n+1}^{\tau+1}$ et $\kappa_{n+1}^{\tau+1}$ les valeurs de λ_{n+1} respectivement κ_{n+1} à l'itération τ s'écrit

$$\mathbf{r}_L(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}, \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1}) = \begin{cases} \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_n + h\gamma\mathbf{K}\mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{C}_{NT\theta}\lambda_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{x}_n - h(\gamma\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) - \mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(IV.66a)} \\ \text{(IV.66b)} \end{array}$$

Ce système d'équations est couplé par la présence de $\kappa_{n+1}^{\tau+1}$ et de termes de vitesse dans les deux équations. Dans [3], l'auteur propose deux implémentations de la résolution de ce problème. Une implémentation maintient ce couplage, l'autre le néglige. C'est cette dernière que nous avons adapté à nos besoins, l'article montrant que les deux propositions offrent des performances tout à fait semblables avec une implémentation simplifiée dans ce cas. La résolution découplée revient à résoudre

$$\mathbf{r}_L(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}, \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1}) = \begin{cases} \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_n + h\gamma\mathbf{K}\mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1}^\tau - \mathbf{C}_{NT\theta}\lambda_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{x}_n - h(\gamma\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) - \mathbf{C}_{NT\theta}\kappa_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(IV.67a)} \\ \text{(IV.67b)} \end{array}$$

à la place. Ceci permet d'effectuer à chaque itération τ , la résolution des deux systèmes d'équations de manière indépendante. La seule différence se situe dans la considération de κ_{n+1}^τ au lieu de $\kappa_{n+1}^{\tau+1}$ dans le premier système. On note alors la $\mathbf{v}_p^{\tau+1}$ la vitesse telle que

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_p^{\tau+1} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_n + h\gamma\mathbf{K}\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}\kappa_{n+1}^\tau = \mathbf{0}. \quad (\text{IV.68})$$

Celle-ci correspond à l'extension de la notion de vitesse prédite sans tenir compte des efforts de contact dans le cas où la résolution suit une méthode de Newton complète.

Les contraintes de contact $\mathbf{g}(\mathbf{x}_{n+1}) \geq \mathbf{0}$ sont elles aussi discrétisées, en considérant la fonction résiduelle

$$\mathbf{r}_g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.69})$$

dont la linéarisation autour du point $(\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1}, \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1})$, notée $\mathbf{r}_{g,L}(\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1}, \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1})$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{g,L}(\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1}, \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1}) &= \mathbf{r}_g(\mathbf{y}_{n+1}^\tau, \mathbf{x}_{n+1}^\tau) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{r}_g(\mathbf{y}_{n+1}^\tau, \mathbf{x}_{n+1}^\tau)(\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{y}_{n+1}^\tau) \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{r}_g(\mathbf{y}_{n+1}^\tau, \mathbf{x}_{n+1}^\tau)(\mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^\tau) \\ &= \mathbf{y}_{n+1}^\tau - \mathbf{g}(\mathbf{x}_{n+1}^\tau) + (\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{y}_{n+1}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^\tau) \end{aligned} \quad (\text{IV.70})$$

puis, en notant $\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1}$ et en simplifiant les termes \mathbf{y}_{n+1}^τ , la contrainte linéarisée

$$\mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{n+1}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^\tau) \quad (\text{IV.71})$$

est obtenue. On peut alors remplacer dans cette équation $\mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1}$ par son expression en fonction des variables connues et des multiplicateurs

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_{n+1}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{x}_n + h(\gamma\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) + \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}\kappa_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^\tau) \\ &= \mathbf{C}_N^\top\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}\kappa_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{n+1}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}^\tau) + h\mathbf{C}_N^\top(\gamma\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) \end{aligned} \quad (\text{IV.72})$$

Pour conclure, la méthode découplée proposée dans [3] consiste à la résolution successive de deux LCP de dimensions réduites au lieu d'un LCP mixte de plus grande dimension. Les LCP à résoudre sont

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{C}_N^\top\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} &= \mathbf{C}_N^\top\hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{C}_N^\top\mathbf{v}_n + \mathbf{C}_N^\top\hat{\mathbf{M}}^{-1}(\tilde{\mathbf{f}}_n - h\gamma\mathbf{K}\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}\kappa_{n+1}^\tau) \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.73})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{0} &\leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + e\mathbf{v}_n) \perp \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.74})$$

pour la vitesse, dont la forme finale de LCP est

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + e\mathbf{v}_n) &= \hat{\mathbf{W}}\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_p + e\mathbf{v}_n) - h\gamma\mathbf{C}_N^\top\hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}\kappa_{n+1}^\tau \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.75})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{0} &\leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + e\mathbf{v}_n) \perp \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.76})$$

et pour le déplacement

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} &= \mathbf{C}_N^\top\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}\kappa_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{n+1}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}^\tau) + h\mathbf{C}_N^\top(\gamma\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n). \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.77})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{0} &\leq \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} \perp \kappa_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.78})$$

L'algorithme IV.4 décrit l'ensemble de la procédure d'intégration temporelle détaillée dans cette section.

ALGORITHME IV.4 – Algorithme de Moreau-Jean avec reprojection en position adapté de [3]

Données : $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{f}, h, \gamma, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \text{gap}(\bullet), e, \mu$

Variables de calcul : $\hat{\mathbf{M}} \leftarrow \mathbf{M} + h\gamma\mathbf{C} + h^2\gamma^2\mathbf{K}$ $\hat{\mathbf{C}} \leftarrow -(h\gamma\mathbf{C} + h^2\gamma\mathbf{K})$ $\hat{\mathbf{K}} \leftarrow -h\mathbf{K}$

pour $n \leftarrow 1$ **à** n_{\max} **faire**

Initialisation des variables de bouclage

$\boldsymbol{\lambda} \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{0}$

$\mathbf{f}_{n+1} \leftarrow \mathbf{f}(t_{n+1})$ $\mathbf{f}_{n+\gamma} \leftarrow h(\gamma\mathbf{f}_{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{f}_n)$ $\tilde{\mathbf{f}}_{n+\gamma} \leftarrow \hat{\mathbf{C}}\mathbf{v}_n + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{x}_n + \mathbf{f}_{n+\gamma}$

Boucle de Newton

$\tau \leftarrow 0$ $\epsilon \leftarrow \infty$ $\mathbf{x}_{n+1}^\tau \leftarrow \mathbf{x}_n$ $\mathbf{v}_{n+1}^\tau \leftarrow \mathbf{v}_n$ $\mathbf{r}_{n+1}^\tau \leftarrow -\tilde{\mathbf{f}}_{n+\gamma}$
 $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^\tau \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathcal{I}^\tau \leftarrow \emptyset$ $\mathcal{I}^{\tau-1} \leftarrow \{-1\}$

tant que $\mathcal{I}^\tau \neq \mathcal{I}^{\tau-1}$ **faire**

Prédiction

$\mathbf{v}_p^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_{n+1}^\tau - \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{r}_{n+1}^\tau$

Calcul des vitesses corrigées et des efforts de contact

si $\mathcal{I}^\tau \neq \emptyset$ **alors**

$\hat{\mathbf{W}}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{C}_N^\top \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta}$

Résoudre le LCP pour $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1}$ et $\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}$ de sorte que :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + e\mathbf{v}_n) = \hat{\mathbf{W}}_{n+1}^{\tau+1}\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_p^{\tau+1} + e\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + e\mathbf{v}_n) \perp \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

$\mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{C}_{NT\theta}\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1}$ $\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_p^{\tau+1} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1}$ $\mathcal{A} = \{\alpha | \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1, \alpha} > 0\}$

si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ **alors**

$\mathbf{C}_{NT\theta} \leftarrow \mathbf{C}_{NT\theta}(:, \alpha)$ $\mathbf{C}_N \leftarrow \mathbf{C}_N(\alpha, :)$

Résoudre le LCP pour $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1}$ et $\mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1}$ de sorte que :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{C}_N^\top \mathbf{C}_{NT\theta} \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{n+1}^\tau) + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}^\tau) + h\mathbf{C}_N^\top(\gamma\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} \perp \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

sinon

$\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{0}$ $\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{v}_p^{\tau+1}$

Calcul des positions corrigées

$\mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \mathbf{x}_n + h[\gamma\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n] + \mathbf{C}_{NT\theta}\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1}$

$\mathbf{r}_{n+1}^{\tau+1} \leftarrow \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_n) - \tilde{\mathbf{f}}_{n+\gamma} + h\gamma\mathbf{K}\mathbf{C}_{NT\theta}\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1}$

Calcul du jeu à l'itération $\tau + 1$

$[\mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1}, \mathbf{C}_N, \mathbf{C}_{NT\theta}] \leftarrow \text{gap}(\mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1})$

Passage à l'itération suivante

$\mathcal{I}^{\tau+1} \leftarrow \mathcal{I}^\tau \cup \{\alpha | \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1, \alpha} \leq 0\}$ $\tau \leftarrow \tau + 1$

Mise à jour de l'état du système

$\mathbf{x}_{n+1} \leftarrow \mathbf{x}_{n+1}^{\tau+1}$ $\mathbf{p}_{n+1} \leftarrow \mathbf{p}_{n+1}^{\tau+1}$ $\mathbf{v}_{n+1} \leftarrow \mathbf{v}_{n+1}^{\tau+1}$

6 Comparaison des algorithmes : cas de la poutre thermomécanique 1D

6.1 Modèle

Dans le but de caractériser les différents algorithmes détaillés précédemment, un modèle éléments finis simplifié est employé et consiste en une barre thermomécanique unidimensionnelle. Le modèle étudié est illustré en figure IV.7. Le modèle possède les caractéristiques suivantes : Section carrée $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, longueur $30 \times 10^{-2} \text{ m}$, module d'Young $110 \times 10^9 \text{ GPa}$, masse volumique 4500 kg m^{-3} , capacité thermique massique $585 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, conductivité thermique $3,35 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Le modèle étudié a été discrétisé en utilisant 20 nœuds.

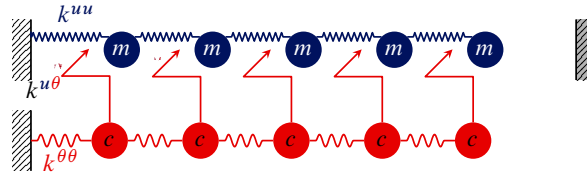


FIGURE IV.7 – Modèle de poutre thermomécanique 1D éventuellement soumise à un contact chauffant au niveau de l'extrémité libre au repos.

Ce modèle est pertinent pour l'étude du problème de contact rotor–stator en thermomécanique. En effet, il permet de reproduire sur une configuration géométrique simple toute la phénoménologie du problème qui nous intéresse, avec des conditions de contact unilatéral, et la fermeture du jeu par dilatation. Dans toute cette section, on présente principalement le comportement en déplacement, vitesse, température et effort de contact au niveau de la masse pouvant entrer en contact avec la paroi rigide. Ces grandeurs sont désignées respectivement par les notations \mathbf{x}_n^u , \mathbf{v}_n^u , \mathbf{x}_n^θ et λ_n .

6.2 Comportement hors contact

Afin de valider les algorithmes d'intégration temporelle durant la phase de vol libre (c'est-à-dire sans contact), des simulations en réponse libre et forcée ont été effectuées. Sans contact, la référence utilisée est un algorithme de type Runge-Kutta 45 fourni dans le logiciel de calcul Matlab (accessible via la commande `ode45`).

Dans toute cette partie, les paramètres numériques sont fixés aux valeurs mentionnées dans le tableau IV.3, sauf mention explicite contraire. On compare les différents algorithmes qui seront utilisés

Paramètre	Valeur
Pas de temps d'intégration	$h = 10^{-6} \text{ s}$
Paramètres d'intégration pour l'algorithme de Newmark	$(\alpha, \beta) = (1/2, 0)$
Paramètre d'intégration de la θ -méthode	$\gamma = 1/2$
Fréquence d'excitation en réponse forcée	$f = 500 \text{ Hz}$
Amplitude d'excitation	$7 \text{ N} / 1 \text{ J}$
Jeu	$1,5 \times 10^{-5} \text{ m}$
Coefficient de restitution	$e = 0$

TABLEAU IV.3 – Paramètres de simulation.

dans la résolution du problème de contact, à savoir l'algorithme de Carpenter et les algorithmes de Moreau–Jean basés sur la θ -méthode.

Les résultats obtenus pour 0,01 s de simulation sont présentés en figure IV.8, en réponse forcée et libre. Dans l'ensemble, les résultats sont pratiquement indiscernables. Sur la figure IV.8b représentant

la réponse libre de la poutre à un déplacement et une température initiaux de respectivement 10^{-4} m et 10^{-4} °C, une nette différence entre les temps caractéristiques mécaniques et thermiques est visible, différence qui a motivé les développements du chapitre III sur les méthodes de réduction.

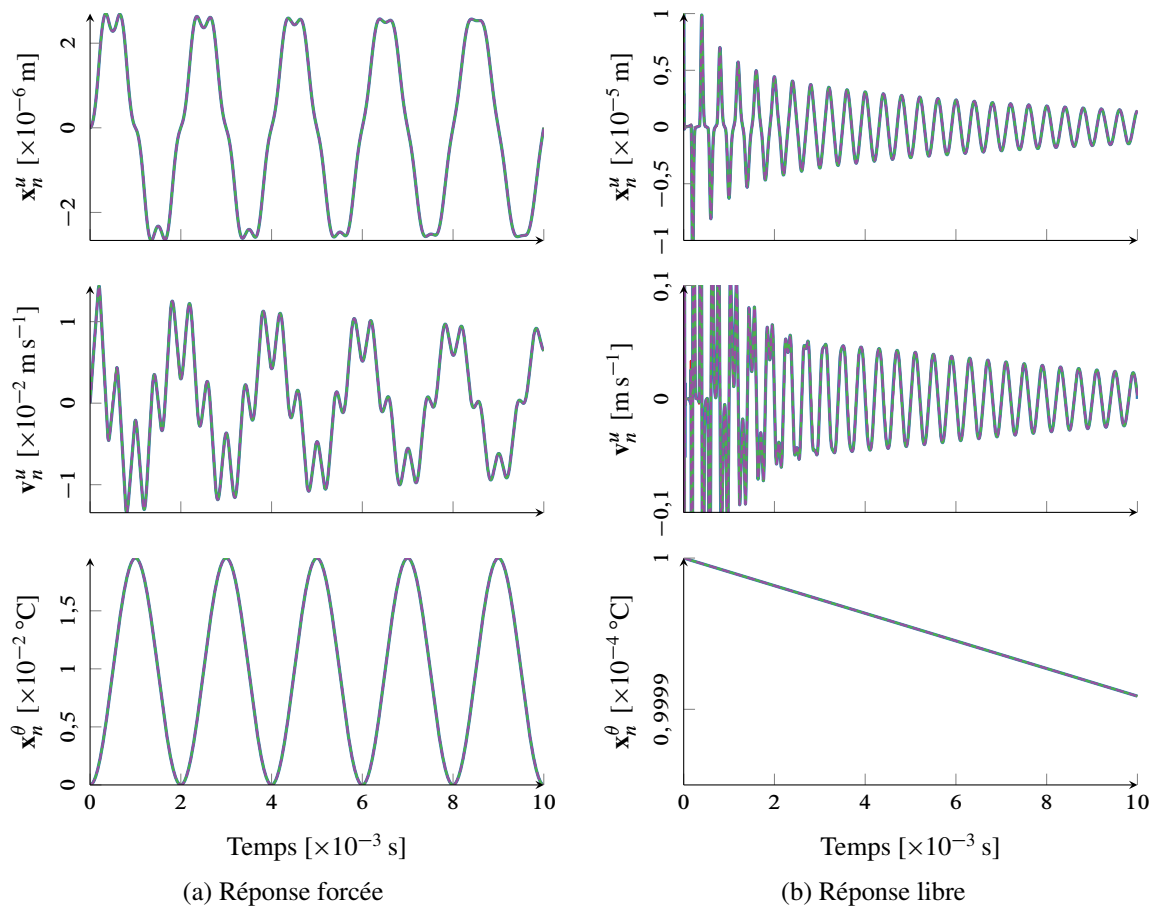


FIGURE IV.8 – Réponses temporelles sans contact. Runge-Kutta 45 (—), Carpenter (—), Moreau-Jean linéairement implicite (—), Moreau-Jean avec reprojection (- -).

Afin de caractériser plus finement les différences par rapport à l’algorithme de Runge-Kutta, on effectue une mesure de l’erreur relative $\epsilon = \max_k(\epsilon_k)$ où ϵ_k est définie par

$$\epsilon_k = \frac{\int_0^{n_{\max}} |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{\text{RK},k}| dt}{\int_0^{n_{\max}} |\mathbf{x}_{\text{RK},k}| dt}, \quad (\text{IV.79})$$

en chaque nœud d’index k , l’intégration étant effectuée au moyen de la méthode des trapèzes. Cette mesure de l’erreur, simple à mettre en œuvre, permet de comparer rapidement les comportements issus des différents algorithmes. Les erreurs calculées sont rassemblées dans la figure IV.9.

Celles-ci sont du même ordre de grandeur pour les différents algorithmes implémentés, excepté pour l’algorithme de Carpenter (différences finies centrées) dans le cas de la réponse libre en température. Dans la même situation, les algorithmes de Moreau-Jean présentent des erreurs proches du zéro numérique.

Ce comportement s’explique en regardant de manière très fine les résultats de l’intégration temporelle en réponse libre, rassemblés en figure IV.10a. Des oscillations numériques de la solution thermique avec

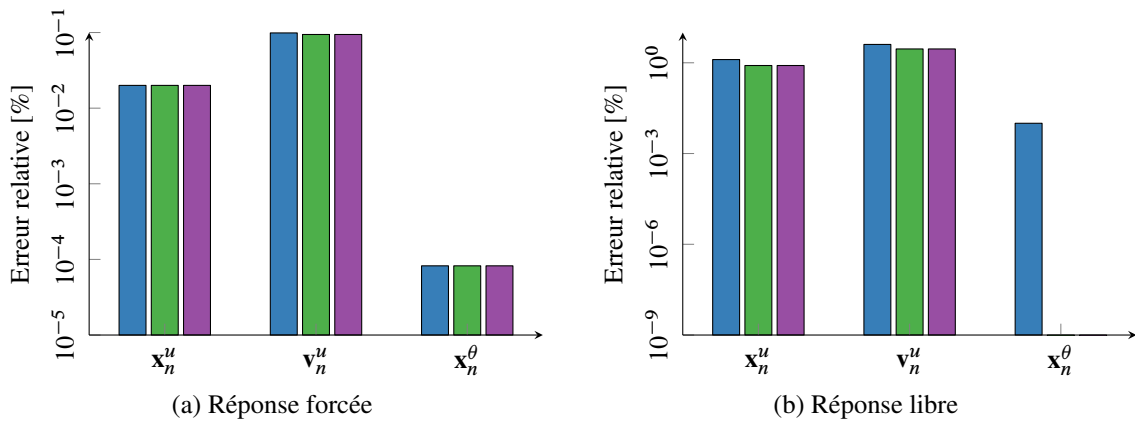


FIGURE IV.9 – Erreurs relatives entre les réponses temporelles sans contact obtenues au moyen des algorithmes mis en œuvre et l’algorithme Runge-Kutta 45. Référence , Carpenter (■), Moreau–Jean linéairement implicite (■), Moreau–Jean avec reprojction (■).

l’algorithme des différences finies centrées sont nettement discernables, avec un temps caractéristique identique au pas de temps ($h = 10^{-6}$ s). Pire encore, les résultats montrent que pour une oscillation sur deux, le comportement n’est pas physique puisque la température en un pas $n + 1$ peut être plus élevée qu’au pas n alors que le système devrait refroidir de manière monotone. Pour des temps de simulation

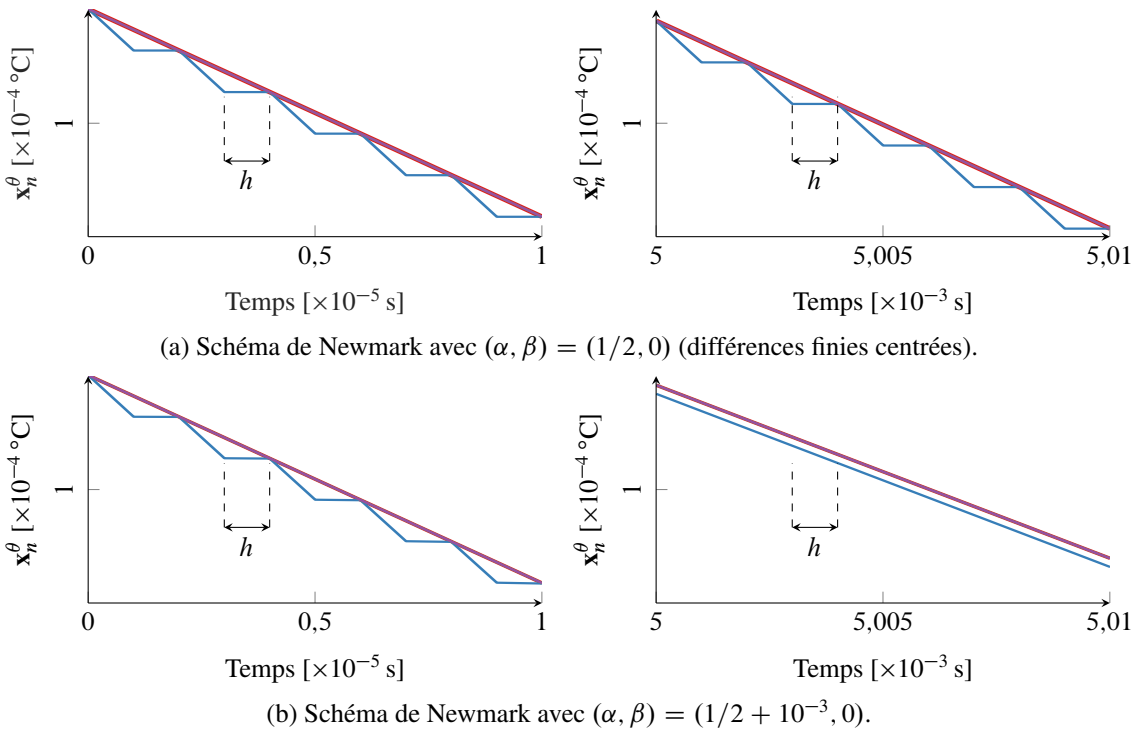


FIGURE IV.10 – Mise en évidence d’oscillations numériques de la solution thermique libre. Runge-Kutta 45 (—), Newmark (—), Moreau–Jean linéairement implicite (—), Moreau–Jean avec reprojction (—).

plus longs on constate alors clairement une divergence du système. Ces observations justifient l’ajout d’amortissement numérique, qui correspond à un décentrement, dans l’algorithme de Carpenter pour obtenir une stabilité conditionnelle de l’algorithme. La même simulation effectuée avec un schéma

de Newmark paramétré par $(\alpha, \beta) = (1/2 + 10^{-3}, 0)$ est présentée en figure IV.10b. Les oscillations numériques s'amortissent en effet avec ces paramètres. Un retard de la réponse de l'ordre d'un pas de temps subsiste toutefois dans la réponse, du fait du caractère toujours explicite de l'algorithme puisque $\beta = 0$.

6.3 Contact sans effets thermiques

Les algorithmes ont pu être validés par rapport à un algorithme de Runge–Kutta en phase de vol libre, sans contacts. Pour les évolutions avec contacts, cet algorithme n'est plus adapté. Il est toutefois possible d'effectuer une intégration de type détection d'évènement (exemple : `odeball.m`) avec Matlab.

Bien que l'algorithme de Carpenter ne soit pas idéal dans un cadre de simulation thermomécanique, il constitue un point de référence connu pour les études de contact rotor–stator. Il servira donc d'algorithme de référence pour l'analyse des schémas de Moreau–Jean dans ce qui suit. Le but n'est toutefois pas de remettre en question les algorithmes présentés, puisque leur validité et leurs limites ont été déjà démontrées dans des travaux précédents, mais bien d'illustrer les différences entre les méthodes.

Dans un premier temps, les évolutions obtenues sont comparées sans tenir compte d'effets thermiques ou thermomécaniques. En effet, ceux-ci ne participent pas aux non-linéarités de contact dans le cadre du modèle présenté au chapitre II. Afin de comprendre les différences de traitement de contact, une attention particulière est portée au jeu, à la vitesse et à l'effort de contact. La figure IV.11 reprend les résultats de cette simulation. Les phases de vol libre et de contact se distinguent aisément, ces dernières se caractérisant par des vitesses nulles et des efforts de contact positifs. Dans l'ensemble, les résultats obtenus avec les différents algorithmes sont très semblables. Pour comprendre les fonctionnements

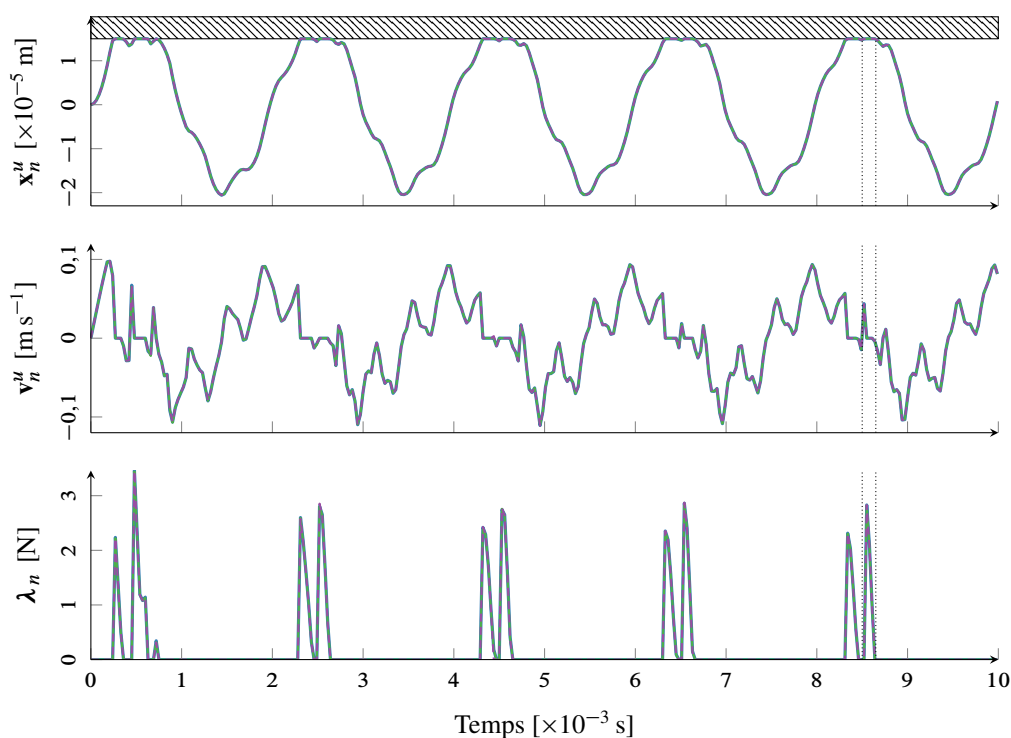


FIGURE IV.11 – Résultats d'intégration temporelle avec les différents algorithmes de contact. Carpenter (—), Moreau–Jean linéairement implicite (—), Moreau–Jean avec reprojection (---), zone d'agrandissement de la figure IV.12 (: :).

distinctifs de chaque algorithme, une phase de contact est détaillée. Deux agrandissements sont fournis

en figure IV.12 et présentent respectivement la phase de contact dans sa totalité (figure IV.12a) et la phase d'impact, soit la phase d'activation des contraintes de contact (figure IV.12b). Ces deux agrandissements permettent de mettre en évidence une différence fondamentale entre les algorithmes de Carpenter et de Moreau–Jean.

- Le premier algorithme applique les contraintes de contact en position, c'est-à-dire l'activation d'une contrainte va entraîner le respect systématique de la condition de non-pénétration $g = 0$ en fin de pas de temps. L'application directe de la condition de non-pénétration n'entraîne toutefois par une annulation de la vitesse du fait de l'interpolation des évolutions temporelles par des fonctions du second ordre.
- Le second algorithme applique les contraintes de contact en vitesse, ce qui se traduit par une vitesse nulle $v^+ = -ev^- = 0$ juste après l'impact, du fait du coefficient de restitution e nul. L'application des contraintes en vitesse génère des pénétrations résiduelles. Ces pénétrations résiduelles découlent directement de la discrétisation des lois de contact, et tendent à diminuer avec le pas de temps. Dans le cas présent, ces pénétrations ne se propagent pas du fait de la linéarité du jeu en fonction de la position du nœud de contact. Toutefois, dans des cas de simulation plus complexes, comme dans le cas de simulations de contact rotor–stator décrit au chapitre V, ces pénétrations peuvent devenir problématiques.
- L'algorithme de Moreau–Jean avec reprojction permet d'éliminer ces pénétrations résiduelles tout en respectant la loi d'impact. Toutefois, pour éviter un cyclage dans l'activation des contraintes en vitesse et en position, ces dernières ne sont activées que si les premières le sont.

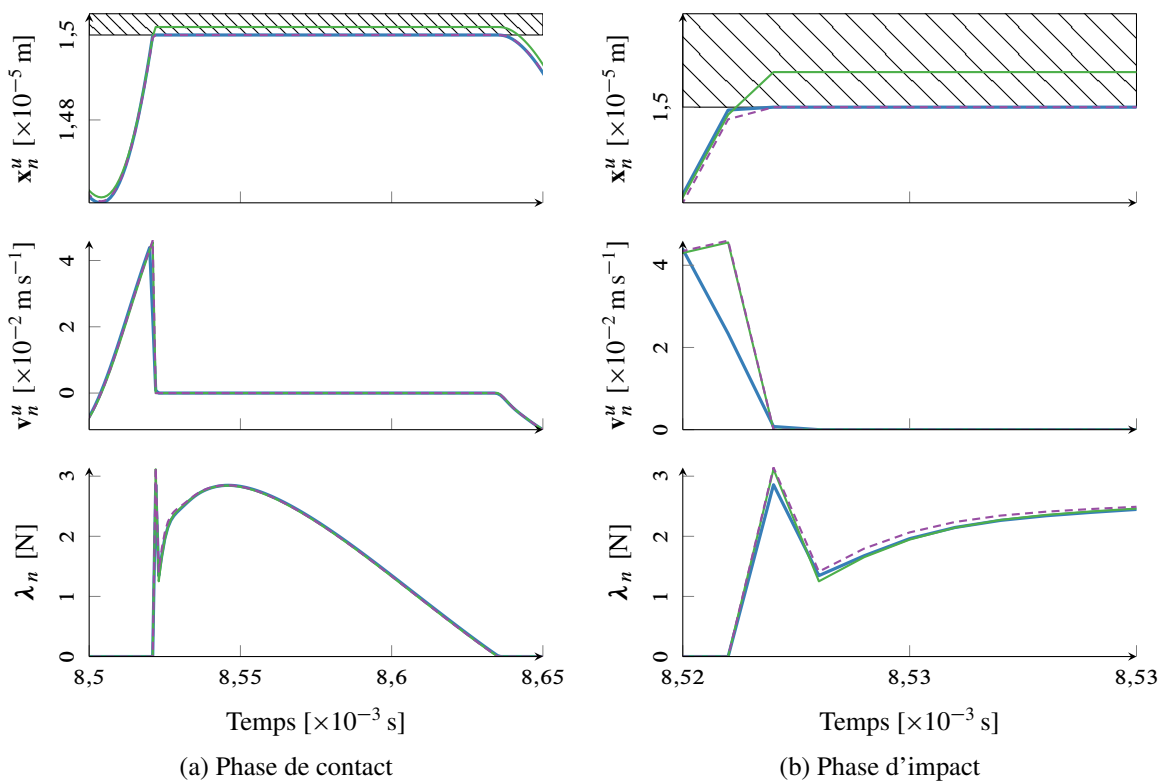


FIGURE IV.12 – Agrandissement de la dernière phase de contact de la simulation. Algorithme de Carpenter (—), Moreau–Jean linéairement implicite (—), Moreau–Jean avec reprojction (---).

6.3.1 Influence du pas de temps

L'effet du pas de temps sur les résultats fournis par chaque algorithme est étudié dans les figures IV.13, IV.14 et IV.15. À tout autre paramètre fixé, le pas de temps h d'intégration prend les valeurs $[10^{-4} \text{ s}, 10^{-5} \text{ s}, 10^{-6} \text{ s}, 10^{-7} \text{ s}]$. Le but est ici de montrer le caractère convergent des algorithmes, mais aussi certaines de leurs limites. La solution pour $h=10^{-7} \text{ s}$ est considérée comme convergée. Les résultats pour les simulations complètes ont été sous-échantillonnés, les résultats dans les agrandissements sont quant à eux fournis en totalité. Enfin, les impulsions au moment des impacts ont été tronquées, pour permettre une lecture correcte des résultats en effort λ_n .

Algorithme de Carpenter

Concernant l'algorithme de Carpenter (fig. IV.13), les résultats pour $h = 10^{-4} \text{ s}$ et 10^{-5} s ne sont pas représentés. En effet, l'algorithme est alors instable. Pour $h = 10^{-6} \text{ s}$, le critère de stabilité est validé ce qui permet d'obtenir la convergence de l'algorithme, avec ou sans contact. Les résultats varient peu entre les deux simulations. Ainsi, dans le cas de l'algorithme de Carpenter, valider le critère de stabilité est souvent suffisant pour obtenir des résultats convergés. Diminuer encore les pas de temps n'entraîne pas de changement notable des résultats, mis à part aux instants d'impact, où l'amplitude de l'impulsion tend à croître lorsque le pas de temps diminue.

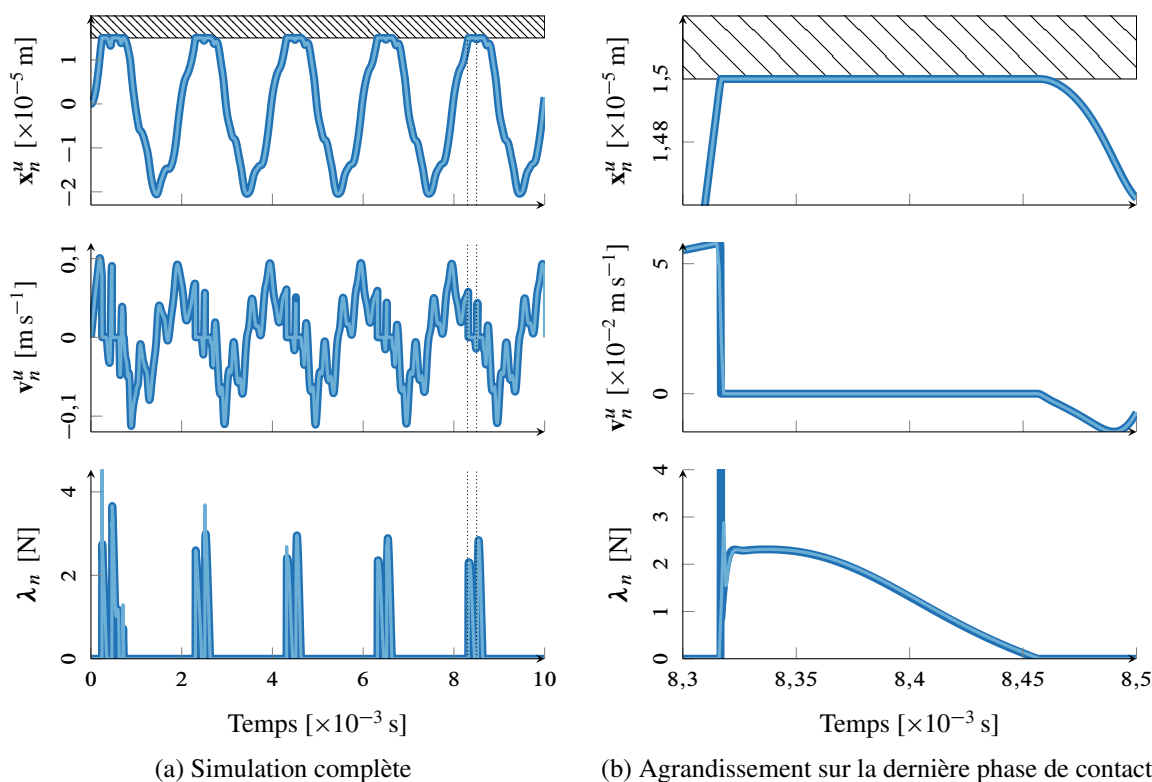


FIGURE IV.13 – Influence du pas de temps – Algorithme de Carpenter. $h = 10^{-6} \text{ s}$ (—), 10^{-7} s (—), zone d'agrandissement ($\vdots \vdots$).

Algorithme de Moreau–Jean linéairement implicite

L'algorithme de Moreau–Jean est quant à lui stable pour toutes les valeurs de pas de temps testées. Les résultats associés sont présentés en figure IV.14. Dans l'ensemble, la convergence globale des résultats s'observe facilement, en particulier en déplacements. L'agrandissement montre cependant que la convergence locale est plus difficile à obtenir. Pour $h = 10^{-4} \text{ s}$, les résultats ne sont clairement pas

convergés, en effort notamment. Par ailleurs, les pénétrations résiduelles sont relativement importantes. Pour $h = 10^{-5}$ s, les pénétrations résiduelles diminuent et les efforts de contact se rapprochent de la solution convergée. Pour $h = 10^{-6}$ s, les pénétrations résiduelles sont pratiquement indécélables et les différentes variables semblent avoir convergé.

Ces résultats montrent de façon claire la robustesse de cet algorithme, en permettant des calculs avec des pas de temps interdits avec l'algorithme de Carpenter. Bien que l'utilité de cette algorithme ne soit pas flagrante ici, par rapport à l'algorithme de Carpenter, il ne faut pas oublier que le système étudié ne possède que $n_{\text{ddl}} = 20$ degrés de liberté, ce qui limite le rayon spectral associé. Pour des modèles plus fins, ce type d'algorithme devient alors pertinent.

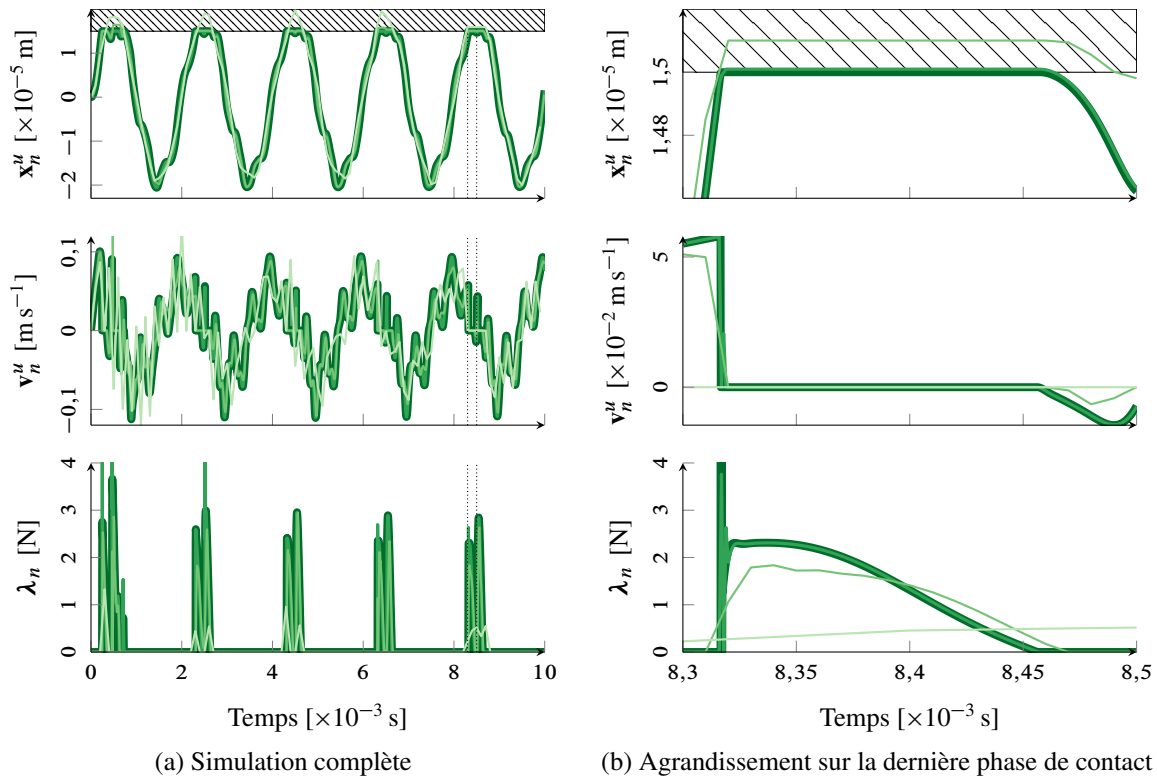


FIGURE IV.14 – Influence du pas de temps – Algorithme de Moreau–Jean linéairement implicite. $h = 10^{-4}$ s (—), 10^{-5} s (—), 10^{-6} s (—), 10^{-7} s (—), zone d'agrandissement (⋮).

Algorithme de Moreau–Jean avec reprojection

L'algorithme avec reprojection (fig. IV.15) présente des résultats sensiblement différents de l'algorithme précédent. En effet, en raison de la reprojection, pour $h = 10^{-4}$ s, les résultats présentent des oscillations importantes et divergent en fin de simulation. Pour des pas de temps aussi gros, on a déjà pu voir que les résultats étaient relativement mauvais quel que soit l'algorithme. Ici, la divergence est uniquement due à l'application de la reprojection. La même simulation sans cette étape converge. Il semble donc que la reprojection, pour des pénétrations résiduelles importantes entraîne un ajout d'énergie dans le système, menant à terme à la divergence. L'application d'amortissement numérique, soit $\gamma > 1/2$ permet de résoudre ce problème, qui semble lié aux oscillations numériques de la solution du fait de la discrétisation séparée en espace et en temps. Ainsi, bien que la reprojection permette de respecter en temps discret la contrainte en position, elle entraîne une diminution de la robustesse générale de l'algorithme.

Sur les agrandissements un autre comportement singulier de l'algorithme est observé, pour $h = 10^{-5}$ s. Pour certains instants pour lesquels les contraintes de contact sont activées, la vitesse du point

de contact est nulle, même si le jeu est ouvert. Ce comportement est dû à la première initialisation des contraintes de contact en vitesse. En effet, suivant l'algorithme IV.4, la première itération de la boucle de Newton est conduite sans considération aucune des contraintes de contact, soit $v_{n+1}^0 = v_n$. Dans le cas où $v_n > 0$, soit une phase de fermeture du jeu, la position estimée dans ces conditions appelée position *libre* et calculée au moyen de l'équation (IV.67b) est donc plus grande que dans le cas où la contrainte est active puisque la vitesse est alors nulle, soit $v_{n+1}^{\tau+1} = 0$ après l'impact.

Pour $t \approx 8,43$ s, le jeu est légèrement ouvert, ce qui entraîne la désactivation des contraintes de contact, et la vitesse est positive, ce qui tend à fermer le jeu.

Juste après, pour $t \approx 8,44$ s, le jeu est négatif, avec des pénétrations dans la zone interdite (▨). Dans le même temps, les efforts de contact sont nuls, et la vitesse est négative, ce qui correspond à un décollement, il n'y a donc pas application de la projection en position puisque le contact tend de toute manière à s'ouvrir.

Ces comportements singuliers sont à relativiser, ils n'ont que peu de conséquences sur la dynamique globale et sont fortement dépendants des taux d'amortissement, pas de temps et paramètres numériques choisis.

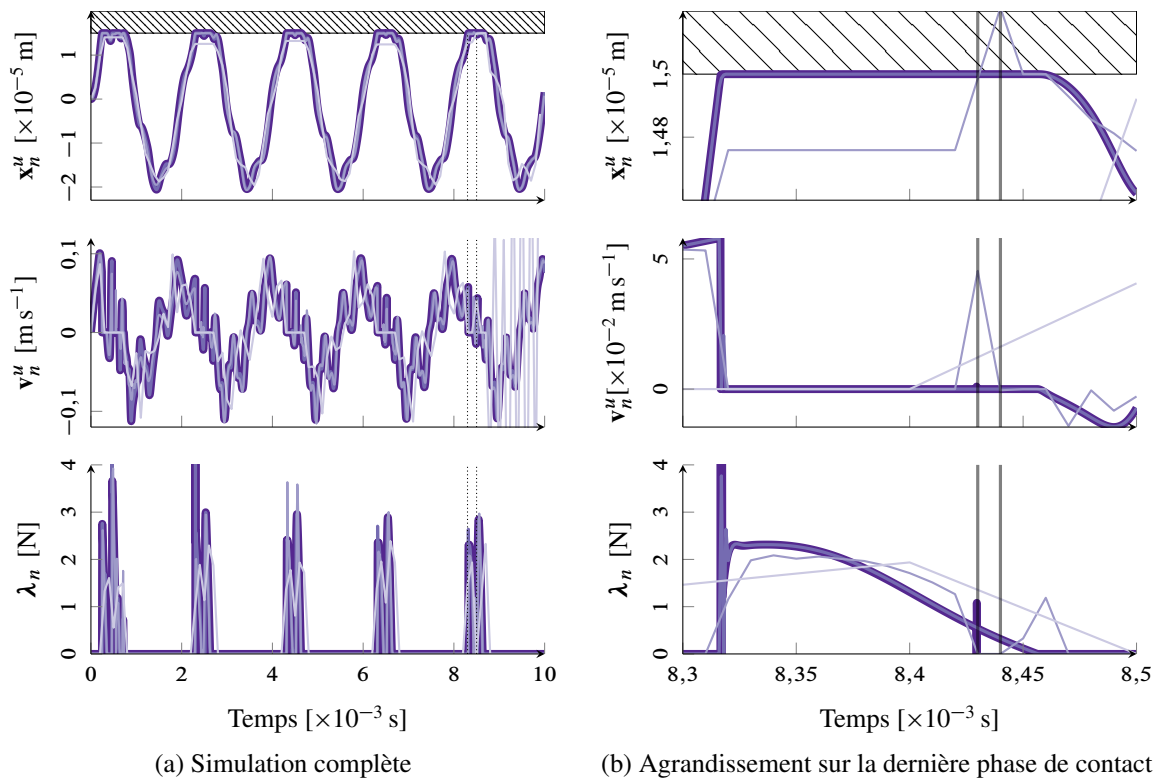


FIGURE IV.15 – Influence du pas de temps – Algorithme de Moreau–Jean avec reprojection.
 $h=10^{-4}$ s (⋯), 10^{-5} s (---), 10^{-6} s (—), 10^{-7} s (—), zone d'agrandissement (⋮⋮).

6.3.2 Influence des paramètres d'intégration numérique

Dans cette section, on s'intéresse à l'influence des paramètres d'intégration sur chaque algorithme. En effet, les paramètres d'intégration α et γ pilotent chacun l'amortissement numérique. Dans le cas où ces deux paramètres valent $1/2$, les algorithmes sont conservatifs. Toutefois, il peut être intéressant lors d'études de contact de filtrer des hautes fréquences qui apparaissent artificiellement dans les résultats du fait de la discrétisation spatiale par éléments finis. De la même manière, pour l'algorithme de Carpenter

décentré, nécessaire on le rappelle dans un contexte de simulation thermomécanique, il faut caractériser l'effet de l'augmentation de α .

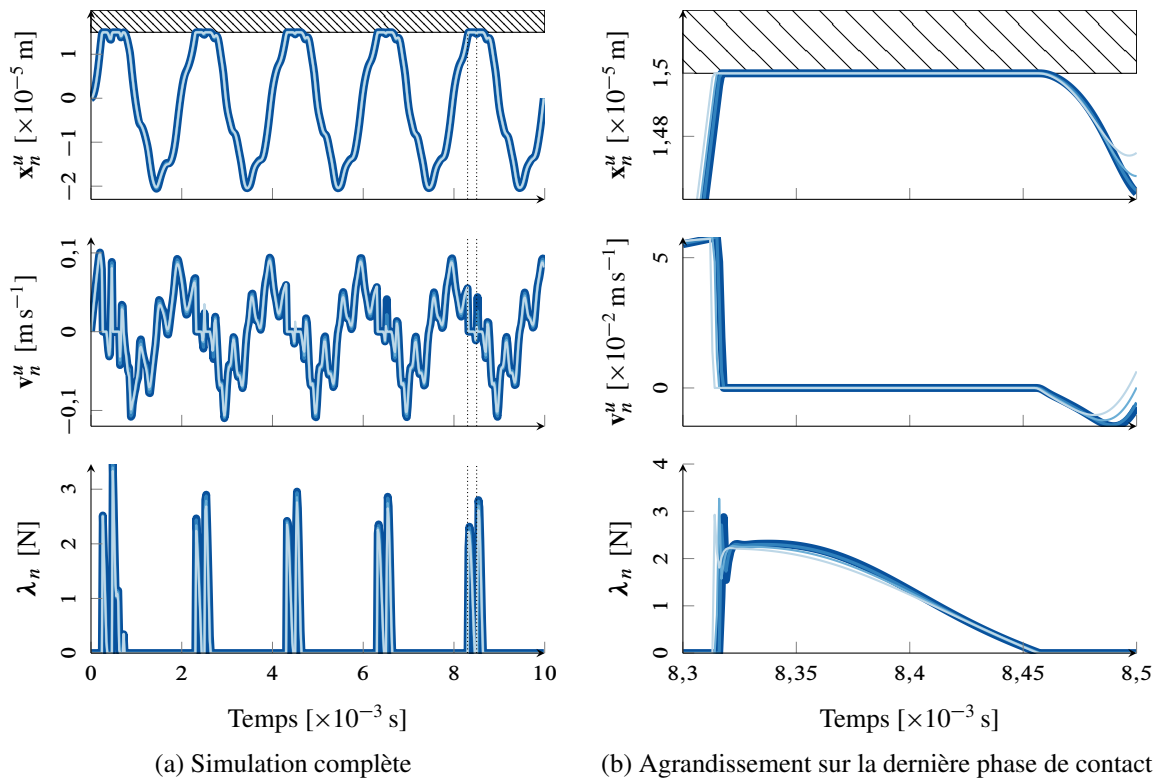


FIGURE IV.16 – Influence du paramètre α – Algorithme de Carpenter. $\alpha = 1$ (—), 0,75 (---), 0,55 (-.-), 0,5 (—), zone d'agrandissement (: : :).

Pour les trois algorithmes, l'effet de l'amortissement numérique est relativement semblable. Dans tous les cas, l'augmentation de cet amortissement entraîne une diminution des amplitudes en vitesse vibratoire et des efforts de contact. Dans le cas particulier de l'algorithme de Moreau–Jean avec reprojction, l'augmentation de l'amortissement numérique fait apparaître dans la zone agrandie des transitions analogues à ce qui a pu être observé dans l'étude d'influence du pas de temps.

Il faut évidemment noter qu'en réponse forcée, l'amortissement numérique a une importance moindre qu'en réponse libre. Toutefois, ce dernier n'est pas celui qui nous préoccupe le plus dans les simulations de contact rotor–stator.

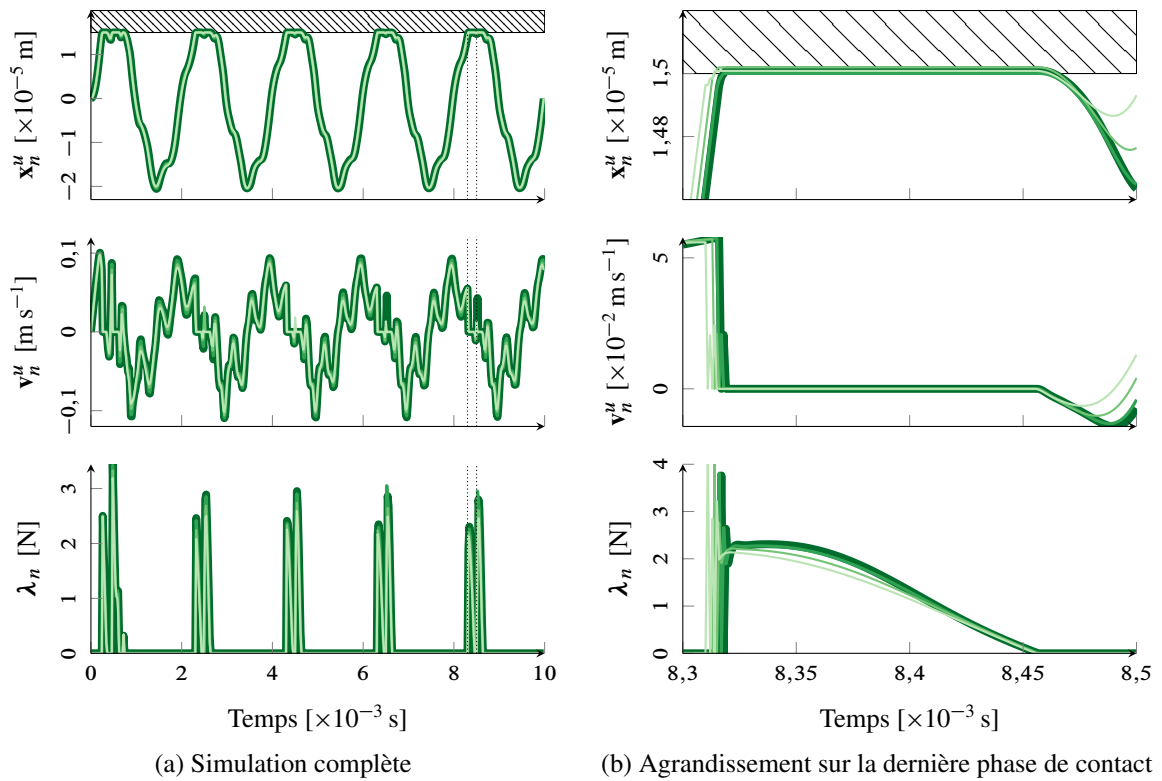


FIGURE IV.17 – Influence du paramètre γ – Moreau–Jean linéairement implicite. $\gamma = 1$ (—), 0,75 (—), 0,55 (—), 0,5 (—), zone d’agrandissement (⋮⋮).

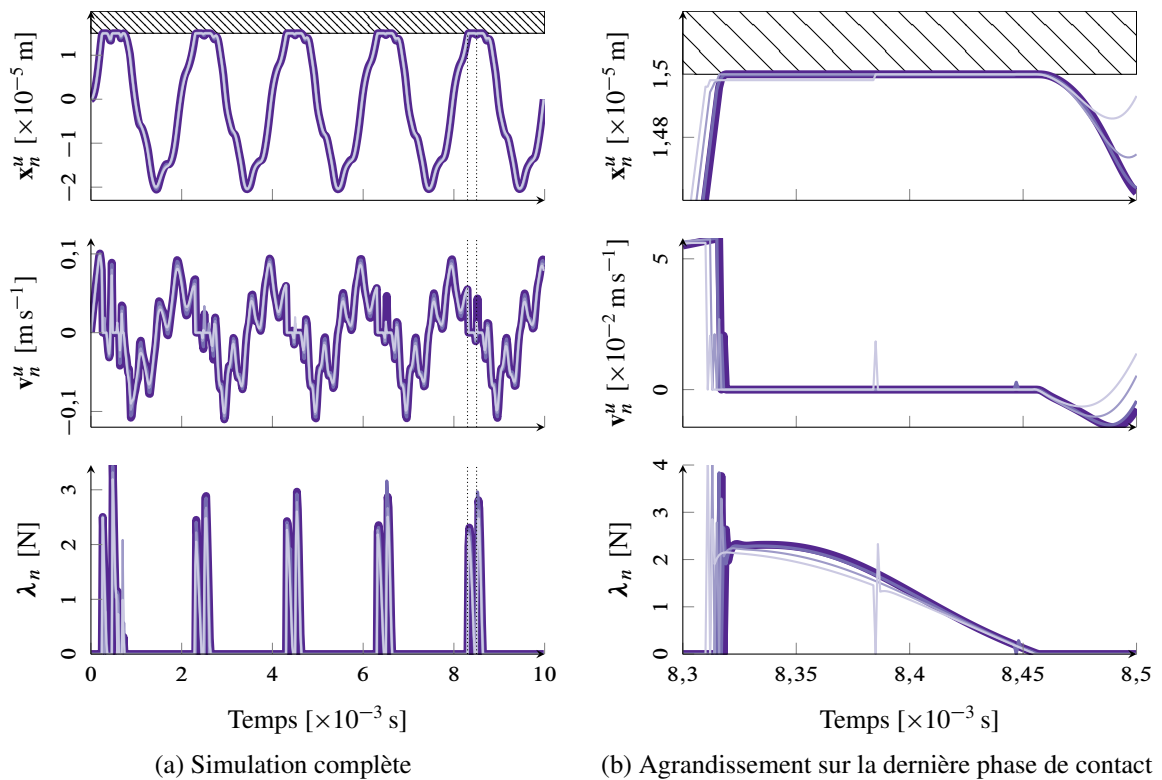


FIGURE IV.18 – Influence du paramètre γ – Moreau–Jean avec reprojection. $\gamma = 1$ (—), 0,75 (—), 0,55 (—), 0,5 (—), zone d’agrandissement (⋮⋮).

6.4 Comparaison avec effets thermiques

On compare dans cette section les résultats issus de simulations présentant un échauffement lors des contacts. Cet échauffement est proportionnel aux efforts normaux de contact par le biais d'un paramètre constant durant la simulation. Ce paramètre, homogène à une vitesse représente le produit μv_T . Le coefficient de référence, choisi de façon à mettre en évidence les effets thermiques est de 100 m s^{-1} .

Le coefficient de dilatation thermique pour le matériau constitutif de la poutre est fixé à $4,5 \times 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, à savoir celui d'un alliage de titane TA6V conventionnel.

6.4.1 Effet du couplage thermomécanique structural

Deux simulations ont été effectuées pour rendre compte du double couplage intervenant lors des contacts. En effet, un premier couplage intervient lors de la conversion d'énergie mécanique en chaleur par des phénomènes mécaniques dissipatifs (frottement, usure). Le second couplage découle des dilatations thermiques lors de la propagation de la chaleur dans la structure. La première simulation, très semblable aux simulations purement mécaniques montre l'effet de la génération de chaleur au niveau de l'interface de contact sur la température du nœud terminal de la poutre. La seconde simulation permet de distinguer l'effet du double couplage sur les résultats ce qui montre la pertinence de l'approche étudiée. Les résultats de simulation sont présentés en figure IV.19. Seules les simulations avec l'algorithme de Carpenter sont présentées, les résultats obtenus avec les autres algorithmes étant indiscernables.

Sur l'ensemble de la simulation, les températures ne font que croître, ce qui n'a rien de surprenant compte tenu de l'absence de tout phénomène permettant de refroidir la poutre, excepté la condition de température fixe à l'encastrement. Comme les temps caractéristiques d'échauffement du nœud de contact sont beaucoup plus courts (puisqu'ils sont pilotés par les vibrations) que les temps caractéristiques de refroidissement par conduction, les températures évoluent quasiment par paliers. Cette effet visuel est dû à la fenêtre d'observation des résultats, et en cas d'arrêt de l'excitation, le système retournerait à l'équilibre thermique comme mécanique.

L'augmentation des températures entraîne une fermeture du jeu en raison des dilatations thermiques. Il y a en effet une dérive des déplacements vers le contact au cours du temps. Initialement, les résultats en déplacement, vitesse, température et efforts de contact sont identiques. En fin de simulation, les phases de contact sont plus longues en tenant compte des dilatations, ce qui amène aussi à une élévation plus rapide des températures. Ce phénomène est bien connu en dynamique du freinage ou en serrage et est appelé *instabilité thermoélastique* [5, 18]. Comme toute instabilité, celle-ci amène à une divergence du système. Toutefois, cette instabilité est physique, et n'a rien à voir avec les méthodes numériques employées pour la simulation. Pour autant, dans le cas du contact rotor–stator, comme du freinage, d'autres phénomènes devraient être pris en considération pour se rapprocher des conditions véritables de fonctionnement. Parmi ces phénomènes peuvent être mentionnés, la convection, ou la dissipation de chaleur par conduction et transfert de matière (éjection d'abradable). De plus, aucun matériau ne conserve indéfiniment ses propriétés dans des conditions de haute température, différentes lois ont donc été proposées pour faire varier les propriétés de l'interface de contact avec la température, comme le coefficient de frottement de Coulomb.

6.4.2 Effet de la dépendance thermique du coefficient de frottement

Dans l'ensemble des travaux présentés, nous n'avons pas tenu compte des phénomènes d'usure. Ceci n'est en rien un oubli, il a seulement fallu choisir entre re-développer des méthodes existantes et éprouvées [31] et s'intéresser à l'amélioration des pratiques de modélisation des phénomènes de contact dans le cas thermomécanique. Il faut d'ailleurs noter qu'intégrer d'autres phénomènes non-linéaires dans la résolution du problème de contact est facilitée par les formulations implicites proposées.

Il y a toutefois un inconvénient majeur à ne pas considérer d'usure dans le système. En particulier lors d'un contact flexible–rigide comme c'est le cas ici. En fonction des paramètres de simulation,

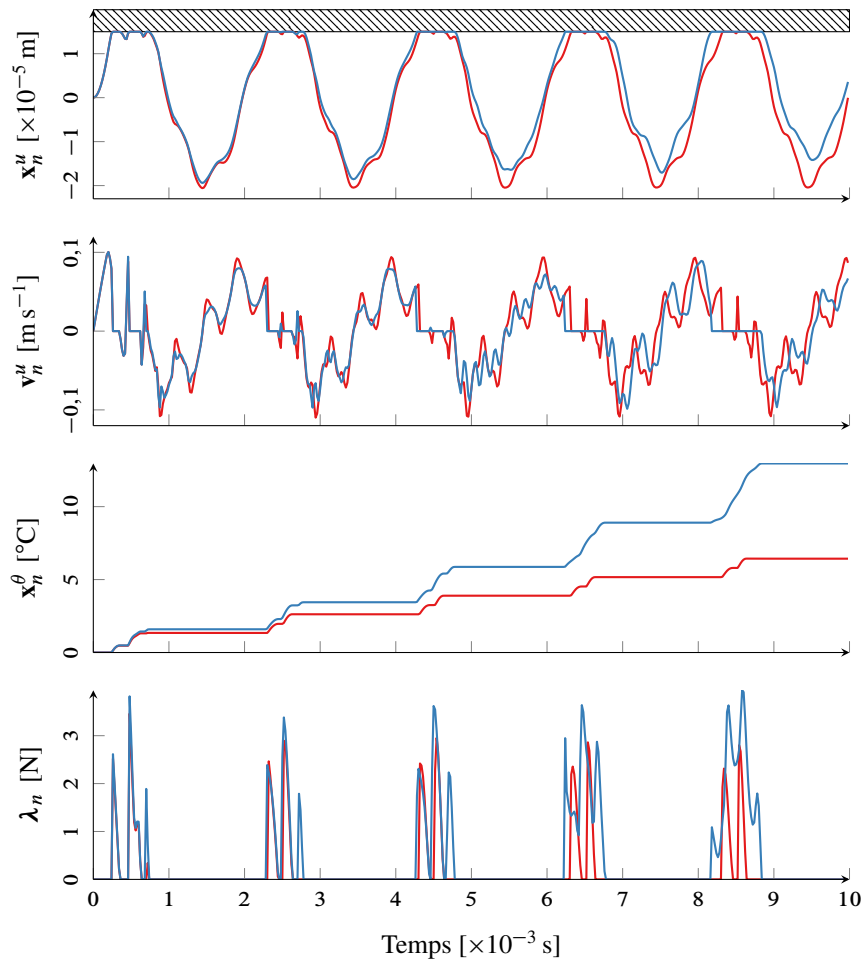


FIGURE IV.19 – Effet des dilatations thermiques sur les réponses. Sans couplage structurel (—) avec couplage structurel (—).

une instabilité de serrage des structures en contact peut aisément être atteinte. On introduit donc ici une méthode permettant de limiter les échauffements au contact par une dépendance thermique des propriétés mécaniques de l'interface, en particulier le coefficient de frottement de Coulomb. Cette loi empirique permet de reproduire l'effet des mécanismes d'endommagement de l'interface lors d'un échauffement et ainsi d'éviter une divergence physique du système. Plusieurs lois sont envisagées, comme une loi parabolique [88, §6.2.3.3]

$$\mu(\theta) = \mu_0 \left(\frac{\theta - \theta_d}{\theta_d} \right)^2 \quad (\text{IV.80})$$

ou une loi exponentielle

$$\mu(\theta) = \mu_0 \exp\left(-\frac{5\theta}{\theta_d}\right), \quad (\text{IV.81})$$

les lois choisies devant essentiellement respecter les conditions $\frac{\partial \mu}{\partial \theta} \leq 0$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \mu = \mu_0$ et $\lim_{\theta \rightarrow \theta_d} \mu = 0$. Dans les deux cas, la température θ_d correspond à une température dite de *destruction*, pour laquelle le coefficient de frottement est nul ou presque. Des lois plus complexes peuvent être utilisées pour corrélérer de manière plus précise avec des données expérimentales, éventuellement issues d'essais par canons à gaz [51]. Ces lois ont été implémentées en utilisant la valeur de la température prédite à la première itération de la résolution non-linéaire ($\tau = 0$) pour le calcul du coefficient de friction. Un

calcul implicite du coefficient est aussi possible.

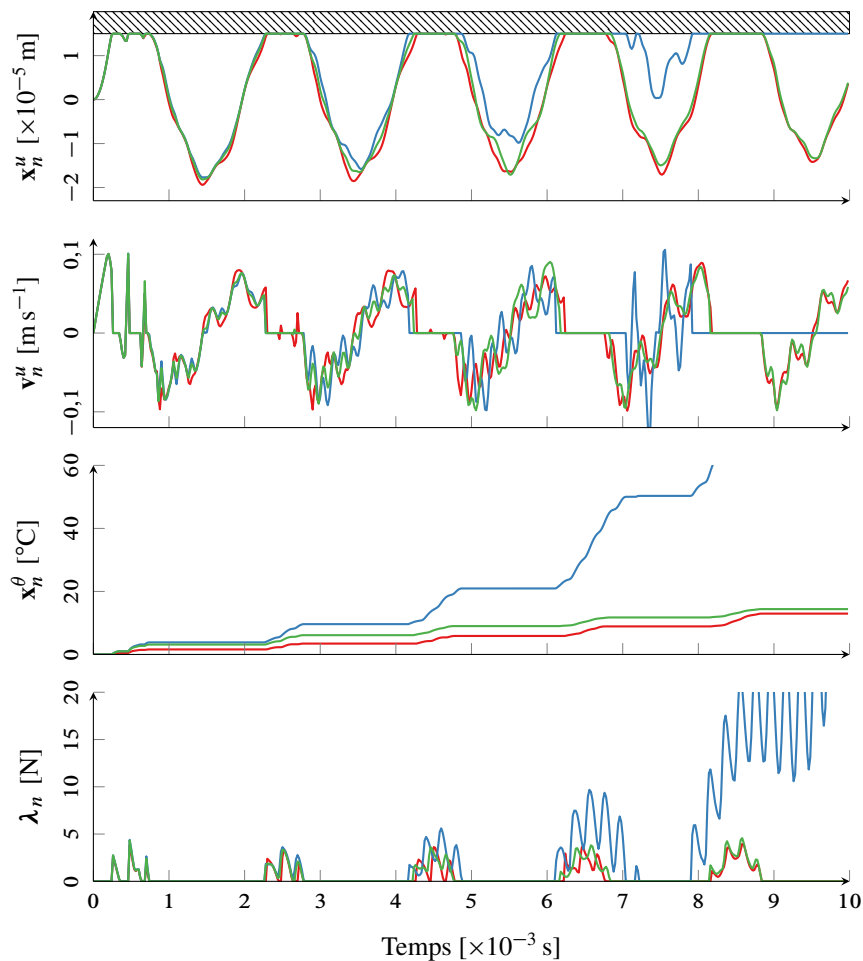


FIGURE IV.20 – Effet de la loi de dépendance thermique du coefficient de frottement. loi $\mu = \mu_0$ (—), $\mu = 2\mu_0$ (—), $\mu = 2\mu_0 \exp(-5\theta/\theta_d)$ (—).

L'effet de cette dépendance thermique des paramètres mécaniques est illustré de manière qualitative en figure IV.20. Deux simulations avec deux valeurs constantes du coefficient de restitution, proportionnel au coefficient de friction sont présentées, ainsi qu'une simulation utilisant une loi exponentielle avec une température de destruction, choisie arbitrairement, de $\theta_d = 50$ °C.

Dans le premier cas de figure, les températures augmentent après plusieurs contacts, ce qui engendre une fermeture du jeu comme observé précédemment. Toutefois, le serrage n'est pas atteint durant la simulation. Si la valeur du coefficient de frottement est doublée, le contact reste fermé en fin de simulation, la divergence physique du système est atteinte. Les résultats issus de la simulation avec la loi de dépendance en température montrent des élévations de température identiques au cas précédent en début de simulation. Très vite, l'augmentation de la température du nœud de contact fait chuter le coefficient de frottement, ce qui diminue les flux thermiques générés lors du contact. Cette température sature alors assez rapidement. En fin de simulation, le jeu reste ouvert.

Cette loi de dépendance thermique permet donc bien d'éviter des divergences dues au modèle utilisé, ce qui autorise des simulations sur des temps relativement longs sans risquer de divergence du système.

7 Méthodes de réduction et algorithmes de contact

Dans cette section, on présente dans un premier temps les résultats issus de modèles réduits par les méthodes de Craig–Bampton et Rational–Craig–Hale lors de simulations de contact thermomécanique. On s'intéresse ensuite à l'effet du couplage entre algorithme de contact et méthode de réduction, qui peut entraîner certaines difficultés numériques.

7.1 Propriétés fréquentielles des modèles utilisés

Les résultats de simulations effectuées sur le modèle complet de poutre comportant 20 degrés de liberté sont comparés. Le tableau IV.4 regroupe les paramètres utilisés pour la réduction du modèle. Pour la partie thermique, les points d'expansion sont espacés logarithmiquement.

Paramètre	Réduction mécanique	Réduction thermique
Nombre de modes retenus	$n_m^u = 5$	$n_m^\theta = 5$
Ordre d'expansion	$n_o^u = 4$	$n_o^\theta = 0$
Nombre de points d'expansion	$n_p^u = 1$	$n_p^\theta = 5$
Position des points d'expansion	$s_0^u = 10^2$	$s_0^\theta = [10^{-5}; 10^1]$

TABLEAU IV.4 – Paramètres de réduction.

Les caractérisations fréquentielles des modèles réduits avec ces paramètres sont présentées en figure IV.21. Des comportements déjà observés précédemment sont retrouvés. Les modèles mécaniques sont valides jusqu'au quatrième mode environ, soit jusqu'à 10^4 Hz, que ce soit pour les méthodes de Craig–Bampton ou Rational–Craig–Hale. Dans le cas des modèles thermiques, l'analyse est plus complexe, mais les erreurs explosent essentiellement pour la méthode de Craig–Bampton, à partir de 10^{-3} Hz.

7.2 Comparaison des modèles réduits en simulation de contact

On a dans cette section repris les paramètres de simulation du tableau IV.3. On compare ici la précision de modèles réduits présentés au chapitre III par rapport au modèle complet en situation de contact et avec couplage thermomécanique structurel. Les simulations présentées ont été effectuées avec l'algorithme de Carpenter.

7.2.1 Sans échauffement

Dans un premier temps, les réponses temporelles sans échauffement au contact, présentées en figure IV.22, sont étudiées. Sur l'ensemble de la simulation, aucune différence majeure de comportement entre les modèles réduits et le modèle complet n'est observée. Des petites différences subsistent au niveau des efforts de contact, qui sont plus appréciables sur l'agrandissement. Les efforts obtenus avec les modèles réduits oscillent visiblement autour de la solution obtenue avec le modèle complet. Ces oscillations sont plus importantes avec le modèle réduit par la méthode Rational–Craig–Hale que par la méthode de Craig–Bampton.

Il semble donc que pour un modèle réduit de même dimension, la méthode de Craig–Bampton soit un peu plus précise. Il faut aussi rappeler que cette méthode est plus simple à paramétrer que la méthode Rational–Craig–Hale, bien que cette dernière puisse présenter des résultats intéressants avec le paramétrage adéquat.

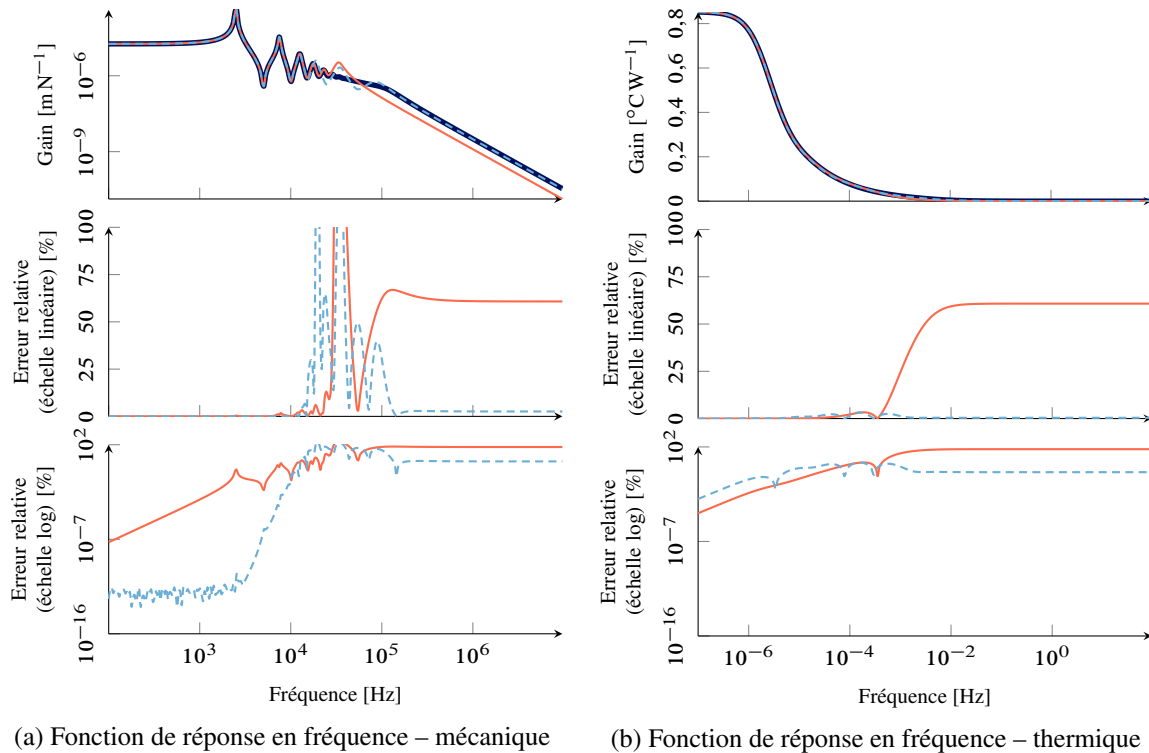


FIGURE IV.21 – Caractérisation des modèles réduits pour les simulations de contact. Modèle complet (—), Craig–Bampton (—), Rational–Craig–Hale (---).

7.2.2 Avec échauffement

Dans un second temps, on étudie les solutions obtenues avec échauffement lors de contacts. Ce type de simulation permet ainsi de caractériser non seulement les méthodes de réduction dans le cas thermique, mais aussi le respect du couplage thermomécanique.

Les comportements, regroupés en figure IV.23, sont alors radicalement différents. En effet, même sur le comportement global, une séparation rapide des résultats obtenus avec un modèle réduit Craig–Bampton par rapport au modèle complet est constatée.

En début de simulation, les déplacements, vitesses et efforts de contact sont semblables pour les trois modèles. Dès le premier impact, la température du point de contact est mal prédite pour le modèle Craig–Bampton. À l'inverse, la température avec le modèle réduit Rational–Craig–Hale est très proche de celle du modèle complet. Il a déjà été montré avec la simulation sans échauffement que la composante mécanique des modèles réduits était raisonnablement précise dans un contexte de simulations de contact. Dans le cas de la simulation avec échauffement, c'est donc la méthode de réduction thermique qui engendre une imprécision du modèle réduit Craig–Bampton, quand le modèle réduit Rational–Craig–Hale conserve une précision correcte.

Une remarque supplémentaire concerne la combinaison d'un modèle réduit de type Craig–Bampton et de l'algorithme de Carpenter. Sur l'agrandissement en figure IV.23, au niveau des courbes de température et d'effort de contact, des oscillations numériques sont une nouvelle fois présentes. Ces oscillations ont déjà été mentionnées pour les modèles éléments finis complets à la section IV.6.2 et sont dues à l'intégration temporelle explicite inhérente à la méthode de Carpenter. Le point d'intérêt est que les résultats présentés montrent que des oscillations apparaissent lors des contacts, non seulement dans la solution thermique, mais aussi dans les efforts. De plus, ces oscillations n'apparaissent pas dans les résultats du modèle complet ou du modèle réduit Rational–Craig–Hale, ou bien elles sont d'amplitude beaucoup plus faible. Bien que ces résultats ne soient pas présentés, aucune oscillation numérique de la

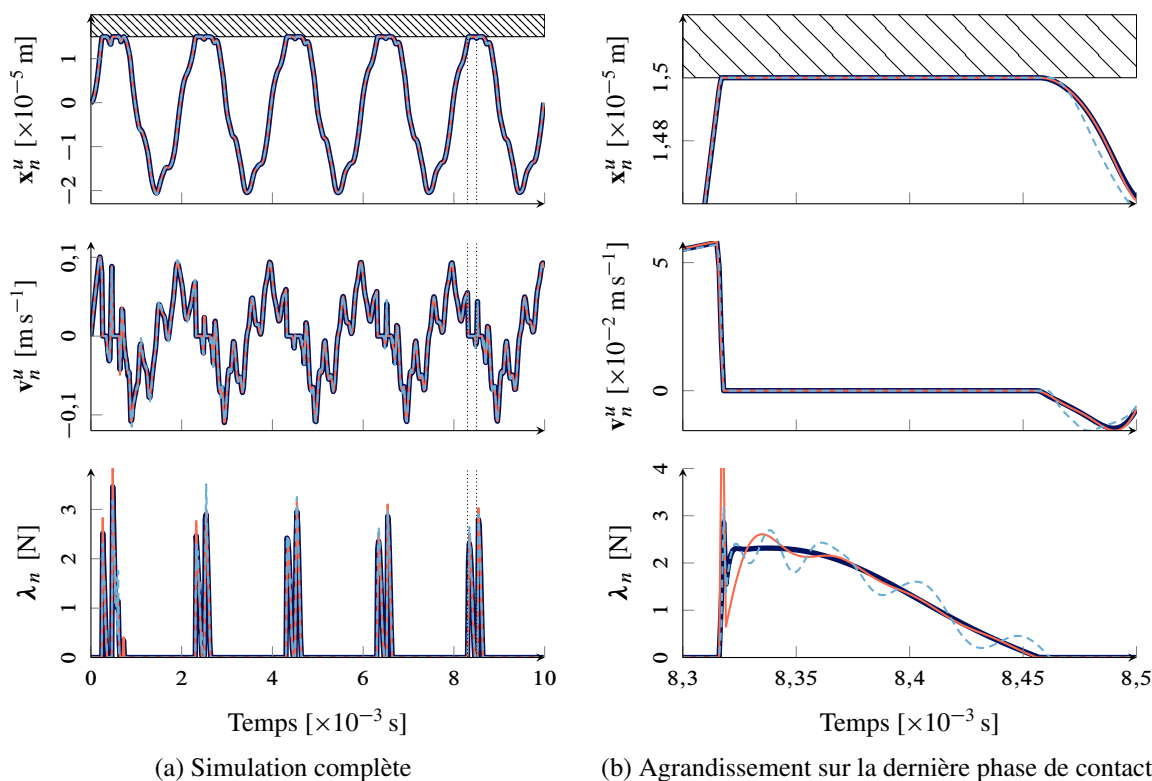


FIGURE IV.22 – Comparaison des modèles réduits en situation de contact sans échauffement. Modèle complet (—), modèle réduit Craig–Bampton (—), modèle réduit Rational–Craig–Hale (---), zone d’agrandissement (⋮⋮).

sorte n’est observée avec les algorithmes de Moreau–Jean.

La méthode de Craig–Bampton présente donc une précision moindre que la méthode Rational–Craig–Hale pour la réduction de problèmes thermiques, et amplifie les difficultés numériques déjà observées. Tout indique donc que bien que la méthode de Craig–Bampton converge, celle-ci s’avère peu optimale pour la réduction de problèmes thermiques en comparaison de la méthode Rational–Craig–Hale.

8 Bilan du chapitre

Ce chapitre a permis de détailler l’ensemble des méthodes d’intégration temporelle évaluées dans cette thèse. Ces méthodes sont de deux types :

- Une méthode d’intégration explicite déjà maîtrisée au niveau industriel pour les problèmes de contact rotor–stator en mécanique mais présentant certaines limites numériques en général, et en particulier dans le contexte de simulations thermomécaniques.
- Deux méthodes d’intégration implicites, reposant sur une base mathématique solide, et qui permettent de s’affranchir des limites numériques de la méthode précédente. Ces stratégies nécessitent cependant des développements analytiques plus complexes que la méthode explicite et que leur maîtrise s’avère plus difficile. Des travaux encore plus récents que ceux détaillés décrivent une amélioration de la dernière méthode proposée en couplant les principes de la dynamique non-régulière aux algorithmes α -généralisés [40]. D’autres travaux eux aussi focalisés sur l’aspect thermomécanique pourraient [130] pourraient servir à l’extension des travaux présentés ici.

La combinaison de modèles réduits présentés au chapitre III avec les algorithmes de contact a aussi été brièvement présentée. On a notamment pu constater que la méthode de Craig–Bampton présentait

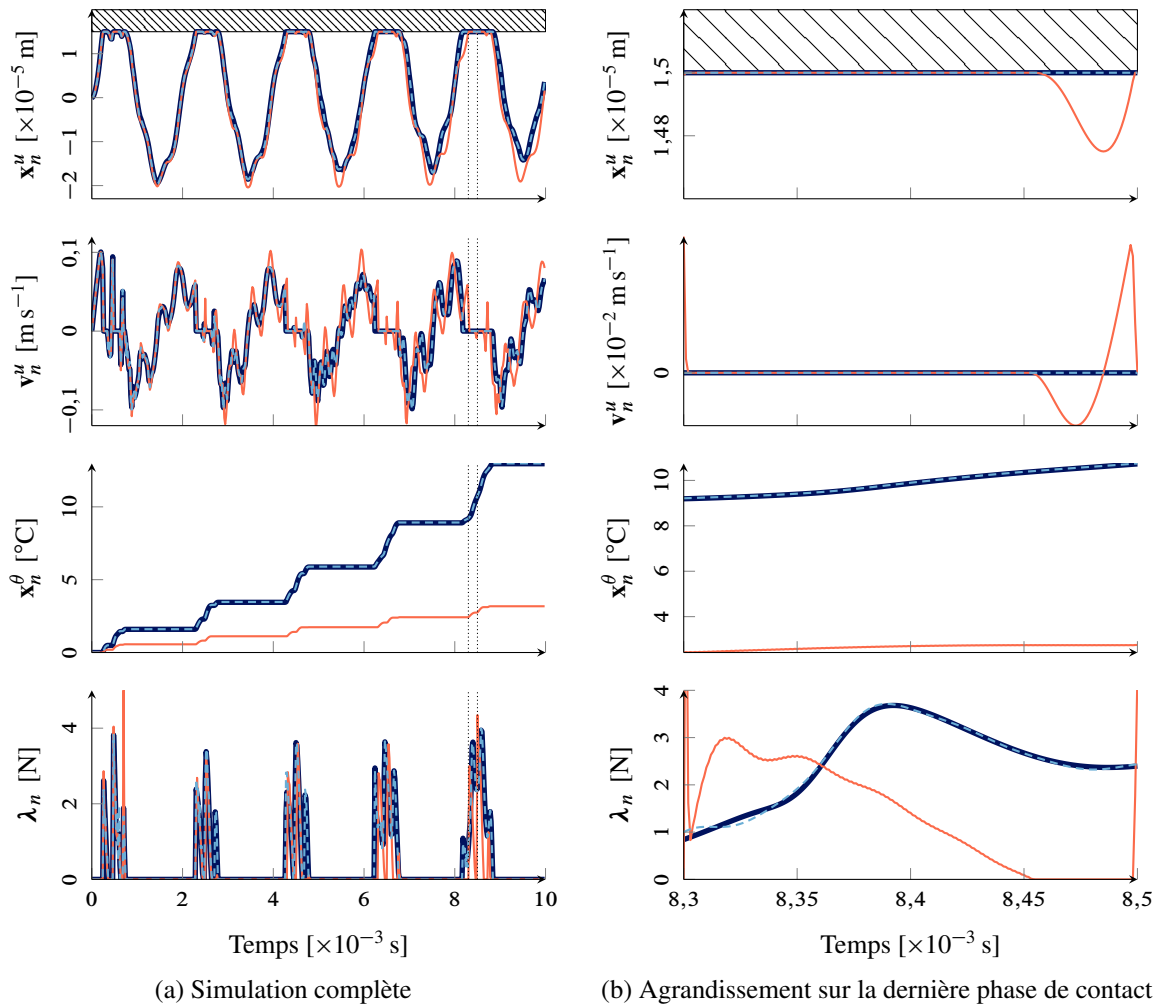


FIGURE IV.23 – Modèles réduits en situation de contact avec échauffement. Modèle complet (—), modèle réduit Craig–Bampton (—), modèle réduit Rational–Craig–Hale (---), zone d’agrandissement (⋮⋮).

de bons résultats pour la réduction du problème mécanique et que la méthode Rational–Craig–Hale avait de bonnes performances pour la partie thermique. Tous les modèles réduits utilisés dans ce qui suit ont donc été construits en utilisant une base de réduction mécanique Craig–Bampton, et une base de réduction thermique Rational–Craig–Hale.

Les algorithmes de Carpenter et l’algorithme de Moreau–Jean avec reprojction sont tous deux appliqués au cas du contact rotor–stator au chapitre suivant. Le premier parce qu’il constitue un référentiel connu pour la simulation de phénomènes d’interaction rotor–stator dans un contexte académique et industriel. Le second parce qu’il représente un pas en avant en terme de traitement des contraintes de contact et de l’intégration des phénomènes thermiques et thermomécaniques dans la simulation des interactions.

Chapitre V

Simulations de contact rotor–stator

Sommaire du chapitre

1 Paramétrage du problème de contact rotor stator	106
1.1 Paramétrage du rotor	106
1.2 Paramétrage du stator	107
1.3 Définition du jeu et de la vitesse relative	108
2 Intégration par l’algorithme de Carpenter	111
2.1 Discrétisation temporelle des équations du mouvement	111
2.2 Discrétisation de la fonction jeu	112
2.3 Calcul des efforts de contact	112
3 Intégration par l’algorithme de Moreau–Jean avec reprojection	112
3.1 Discrétisation temporelle des équations du problème	112
3.2 Calcul du jeu et de la vitesse relative entre les deux structures	113
3.3 Calcul des multiplicateurs	114
3.4 Bilan sur les algorithmes dans le cas du contact rotor–stator	115
4 Étude de convergence des modèles	116
4.1 Rotor	116
4.2 Stator	121
4.3 Comparaison des dimensions des modèles réduits utilisés	124
4.4 Caractérisation fréquentielle des modèles réduits	124
5 Simulation quasi-statique	124
5.1 Simulation sans rotation	125
5.2 Simulation avec rotation	125
5.3 Bilan	127
6 Sensibilité des réponses aux paramètres numériques	127
6.1 Comparaison des algorithmes	127
6.2 Influence du pas de temps de calcul	129
6.3 Bilan sur les effets des paramètres numériques	131
7 Simulations d’interaction modale rotor–stator	132
7.1 Motivations	132
7.2 Diagramme de coïncidence modale	132
7.3 Paramétrage	132
7.4 Interaction modale basse vitesse	134
7.5 Interaction à basse vitesse en présence de perturbations	140

7.6 Interaction à basse vitesse, sans excitation extérieure	147
7.7 Interaction rotor–stator thermomécanique	152
7.8 Bilan des simulations	158
8 Bilan du chapitre	158

La configuration correspond au modèle numérique des composants installés sur le banc d'essais CASTOR, décrit au chapitre VI. Les modèles numériques des éléments du banc CASTOR ont été obtenus à partir du logiciel de calcul par éléments finis Ansys, utilisé par Safran HE pour dimensionner les composants de ses moteurs.

Dans un premier temps, le paramétrage du problème de contact rotor–stator est décrit, ainsi que les notations spécifiques aux deux structures et au problème de contact. Ensuite, la discrétisation temporelle est développée pour les algorithmes de Carpenter et de Moreau–Jean avec reprojction. Le choix de ces deux algorithmes résulte pour le premier de considérations industrielles, puisque c'est l'algorithme de référence utilisé par Safran pour ses simulations de contact rotor–stator. Le second algorithme a été sélectionné pour ses propriétés de stabilité et respect des contraintes de non-pénétration en position par rapport à l'algorithme de Moreau–Jean conventionnel. De ce point de vue, l'algorithme de Paoli et Schatzman [117] pourrait probablement être utilisé pour cette application puisqu'il présente des caractéristiques de fonctionnement proches de celles de l'algorithme de Carpenter : non respect d'une loi d'impact au moment de l'impact [3] et correction en déplacement. Cependant, cette voie n'a pas été envisagée dans ces travaux.

Enfin, des simulations de contact sont effectuées pour mettre en évidence l'influence de paramètres numériques sur le comportement des structures en contact et des simulations permettant de caractériser les phénomènes de contact rotor–stator sont ensuite effectuées.

1 Paramétrage du problème de contact rotor stator

Le paramétrage du problème de contact rotor–stator est une étape cruciale de l'analyse. Comme de nombreux paramètres physiques et numériques interviennent, et que les résultats de simulation peuvent varier en fonction de chacun de ces paramètres, il est très important de comprendre leur choix et les conséquences de ces derniers.

Il est aussi nécessaire de constater qu'à ce stade, des compromis sont à trouver. En effet, le calcul d'interactions de contact rotor–stator par intégration temporelle représente un coût numérique important, même avec des modèles réduits, quand les dynamiques des deux structures sont modélisées. Certaines hypothèses simplificatrices décrites dans cette section ne constituent donc pas nécessairement un choix optimal, mais représentent un compromis logique dans un contexte de modélisation phénoménologique. Quand des références décrivant des approches plus précises ont été trouvées, celles-ci sont fournies afin de proposer une alternative aux stratégies présentées dans ce document.

1.1 Paramétrage du rotor

Le rotor de compresseur centrifuge équipant le banc d'essais CASTOR ayant une géométrie assez complexe, celui-ci est réduit par le biais d'une double synthèse modale. Celle-ci est effectuée en plusieurs étapes, schématisées en figure V.1. D'abord, une réduction de type Craig–Bampton / Rational–Craig–Hale sur un secteur de référence du rouet est effectuée, en conservant comme nœuds frontière, ceux destinés au calcul des efforts de contact, et ceux permettant d'assurer la continuité des déplacements et températures entre les secteurs. Ensuite, le super-élément obtenu est répliqué de façon à retrouver le nombre total de secteurs de la roue complète, à savoir dix dans le cas présent. Les conditions de compatibilité aux interfaces des différents secteurs sont ensuite appliquées, au niveau de leurs faces d'attache, ce qui permet de retrouver une structure semblable au rouet et de réduire le nombre de degrés

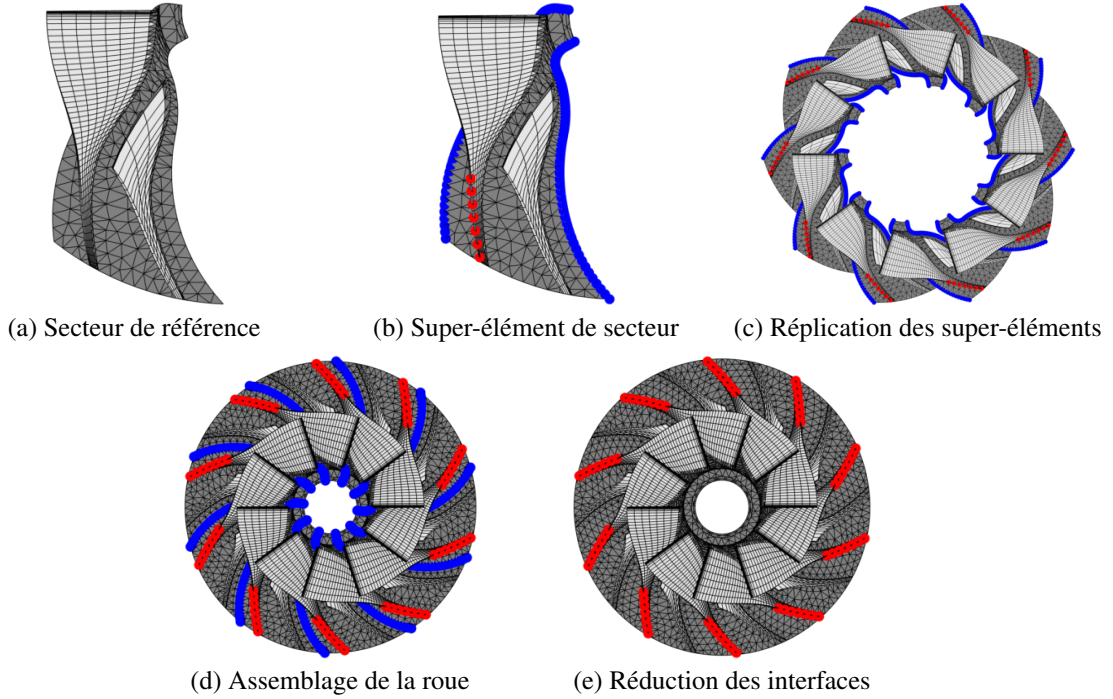


FIGURE V.1 – Schéma de principe de la stratégie de réduction du rotor.

(●) Nœuds de contact, (●) nœuds d'attache.

de liberté des interfaces d'attache par deux. Il reste à ce moment de nombreux degrés de liberté dans le modèle réduit, ce qui est typique de la réduction par la méthode de Craig–Bampton. Une réduction sur les modes d'interfaces [44] est donc appliquée. À la suite de cette double synthèse, seuls subsistent les degrés de liberté physiques des nœuds de contact et les coordonnées généralisées.

Cette méthode n'ayant pas de conséquences pour la description du problème de contact, l'EDO décrivant la dynamique du modèle de rotor, complet ou réduit suit la forme générale de l'équation de la dynamique, si l'on omet temporairement le caractère non-régulier des évolutions du système. On note particulièrement d'un exposant \bullet^R les grandeurs associées au rotor, l'EDO associée est donc

$$\mathbf{M}^R \ddot{\mathbf{x}}^R + \mathbf{C}^R \dot{\mathbf{x}}^R + \mathbf{K}^R \mathbf{x}^R = \mathbf{f}^R + \mathbf{f}_c^R \quad (\text{V.1})$$

en reprenant les autres notations définies aux chapitres précédents.

1.2 Paramétrage du stator

Le paramétrage du stator est un peu plus complexe. En effet, les points de contact potentiels sur le stator sont nécessairement plus nombreux, ce qui nécessite une approche particulière. Pour des raisons de temps de calcul, cette structure est réduite par synthèse en symétrie cyclique. D'autres modélisations, utilisant des B-splines ont déjà été évaluées mais représentent un coût numérique plus important [26].

Le calcul en symétrie cyclique permet de simuler un calcul axisymétrique en utilisant un secteur de référence discrétisé avec un seul élément dans la direction orthoradiale. Il est alors possible de modéliser le comportement d'une section droite du stator de position angulaire quelconque au cours du temps. L'utilisation d'un secteur de référence d'un seul élément d'épaisseur a pour but d'éliminer le phénomène de *repliement* (*aliasing* en anglais).

Du fait de cette modélisation, le déplacement d'une section de position angulaire α du stator noté

$\mathbf{x}^S(\alpha)$ s'écrit

$$\mathbf{x}^S(\alpha) = \mathbf{x}^S(\alpha) = \sum_k [\Phi_k^c \cos(k\alpha) + \Phi_k^s \sin(k\alpha)] \bar{\mathbf{x}}_k^S = \mathbf{F}(\alpha) \Phi \bar{\mathbf{x}}^S(t) \quad (\text{V.2})$$

où \mathbf{F} est une matrice de coefficients de Fourier, définie à l'équation (III.53), qui dépend des harmoniques spatiaux k conservés pour la modélisation en symétrie cyclique. Φ est la base de réduction collectant les bases de réduction associées à chaque harmonique spatial sous la forme

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_0 & & & & & & & & & & \\ & \Phi_1^c & & & & & & & & & \\ & \Phi_1^s & & & & & & & & & \\ & & \Phi_2^c & & & & & & & & \\ & & \Phi_2^s & & & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & & & \\ & & & & & & \Phi_k^c & & & & \\ & & & & & & \Phi_k^s & & & & \end{bmatrix} \quad (\text{V.3})$$

et $\bar{\mathbf{x}}^S(t)$ est le vecteur des coordonnées réduites du stator.

En pratique, pour la résolution du problème de contact rotor–stator, la position angulaire α d'intérêt varie avec la rotation de l'arbre. De plus, du fait de la forme des pales du rotor, on ne s'intéresse pas à des points de même position angulaire. Enfin, il n'est pas nécessaire pour la résolution du problème de contact de reconstruire les déplacements en base physique de tous les points du secteur de stator. On reformule donc les écritures pour expliciter la reconstruction des points d'intérêt du stator, décrits par un vecteur de positions angulaires $\alpha^{S/R}$ et on suppose par la suite que Φ est tronqué pour ne conserver que les degrés de liberté nécessaires.

On s'intéresse donc aux déplacements et températures

$$\mathbf{x}^S(\alpha) = \mathbf{F}(\alpha) \Phi \bar{\mathbf{x}}^S(t) \quad (\text{V.4})$$

où \mathbf{F} s'écrit

$$\mathbf{F}(\alpha^{S/R}) = [\mathbf{I} \cos(\alpha^{S/R}) \sin(\alpha^{S/R}) \cos(2\alpha^{S/R}) \sin(2\alpha^{S/R}) \dots \cos(k\alpha^{S/R}) \sin(k\alpha^{S/R})] \quad (\text{V.5})$$

L'effet de la rotation sur la position des sections de stator est illustré par la figure V.2. Il apparaît clairement que pour trois points de contact considérés sur une pale du rotor et répartis le long de la tête de pale, il est nécessaire du fait de la courbure de tenir compte de plusieurs positions angulaires pour le calcul des déplacements et températures du stator.

1.3 Définition du jeu et de la vitesse relative

1.3.1 Hypothèses de travail

On a choisi de décrire chaque structure dans son repère et de ne répercuter le changement de repère dû à la rotation que dans l'expression du jeu entre ces structures et des efforts de contact. Les deux structures ont été modélisées de sorte que les repères nodaux associés aux nœuds de contact sont orientés selon le repère cylindrique local, ce qui permet d'éviter certaines manipulations lors de la résolution du problème de contact et du changement de repère rotor–stator. Le calcul du jeu entre deux structures peut se faire selon de très nombreuses procédures, dont plusieurs exemples ont été mentionnés à la section II.1.4.1. Dans le cas présent, un contact nœud–ligne est considéré. Une paire de nœuds éventuellement en contact est donc définie par un nœud maître, ici sur la tête de pale du rotor, et un

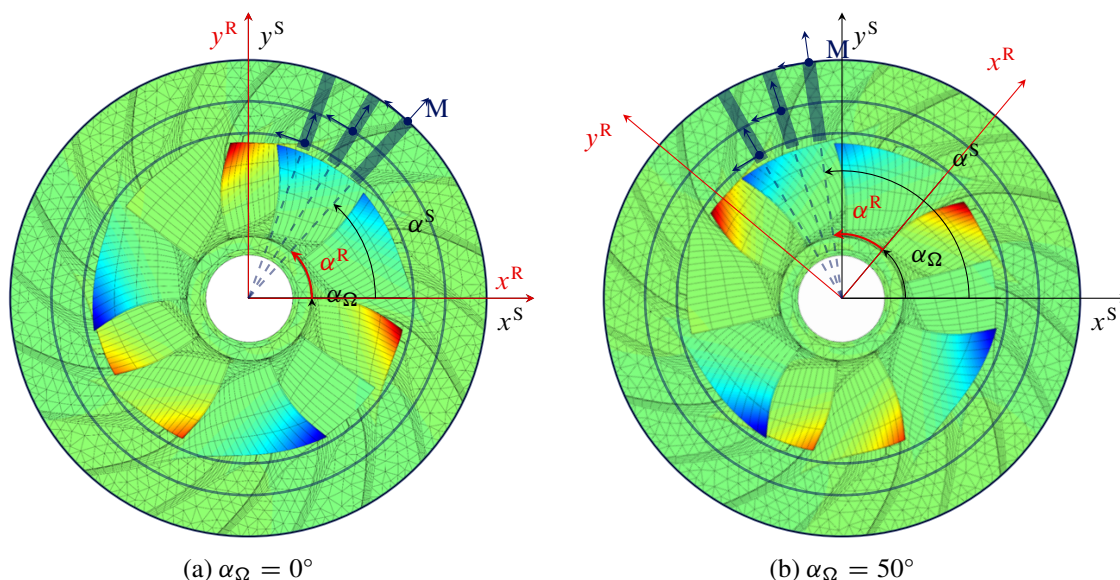


FIGURE V.2 – Effet du changement de repère sur la reconstruction des points d'intérêt du stator. Nœuds maîtres sur le rotor (●), courbe de contact sur le stator (—), section du stator à reconstruire (■).

nœud esclave défini comme la projection du nœud maître sur le stator. Cette projection peut se faire selon la direction la plus faible entre les deux structures, ce qui nécessite une procédure itérative [140].

Du fait du caractère phénoménologique de notre modèle, nous nous sommes focalisés sur d'autres aspects de la modélisation et avons effectué les simplifications suivantes dans la suite de ce chapitre :

- Le jeu est porté par la direction axiale. Les autres composantes du déplacement et de la vitesse sont négligées lors du calcul des efforts de contact normaux. Cette approximation est assez bonne près du bord de fuite, qui est la zone de contact privilégiée par les géométries et le paramétrage du modèle. En revanche, cette hypothèse induit une mauvaise estimation des jeux en méridienne et en bord d'attaque. Une première voie d'amélioration consisterait à tenir compte de la courbure de la structure au repos.
- Le jeu est toujours calculé entre un nœud de contact du rotor et une courbe de contact placée à la position angulaire du nœud le plus proche du stator selon les positions radiale puis axiale, au repos. Ce calcul est effectué lors de la synthèse modale du stator, ce qui évite de réévaluer toute la base modale à chaque itération puisque les composantes modales à utiliser pour le passage de la base réduite à la base physique du stator sont fixes.
- Le jeu est calculé en supposant que les nœuds de contact du stator sont à la même position angulaire que les nœuds de contact du rotor. Cette information permet d'évaluer relativement rapidement la reconstruction de la base modale cyclique à la base modale physique, plus précisément le calcul de \mathbf{F} dans l'équation (V.2).
- Les déplacements des nœuds du rotor sont jugés suffisamment faibles pour que la variation de la position angulaire des nœuds due aux déformations soit négligeable devant la rotation de l'arbre.

Ces choix se justifient par le fait que la configuration étudiée favorise volontairement l'apparition des contacts au niveau du bord de fuite, où la composante principale des déplacements du rotor et du stator est la composante axiale. De plus, l'amplitude totale de déplacement constatée expérimentalement est relativement faible, ce qui entraîne des modifications d'orientation des normales de contact faibles elles aussi.

La figure V.3 illustre des hypothèses équivalentes dans le cas d'un compresseur axial, et en deux dimensions pour différentes valeurs de la phase angulaire du rotor notée α_Ω . Dans cet exemple, le stator subit une déformation à trois diamètres nodaux qui a été volontairement amplifiée .

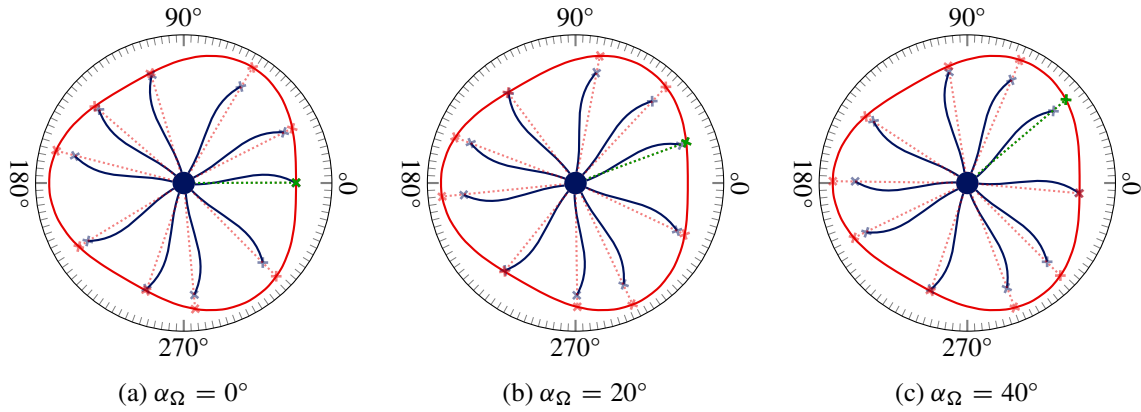


FIGURE V.3 – Effet de la rotation sur la position des nœuds de contact sur le stator. Rotor (—), stator (—), nœuds de contact connus sur le rotor (*), estimés sur le stator (*), référence angulaire (*)

1.3.2 Calcul du jeu

Les hypothèses précédentes font que la matrice de contact \mathbf{C}_N est indépendante du temps. Ainsi, pour toute contrainte (c'est-à-dire toute paire de nœuds éventuellement en contact) numérotée δ , celle-ci s'écrit

$$\mathbf{C}_N = \text{blocdiag}_{\delta \in \{1, \dots, n_c\}}(\mathbf{C}_N^\delta) \quad (\text{V.6})$$

avec

$$\forall \delta \in \{1, \dots, n_c\} \quad \nabla_{\mathbf{x}^\delta} \mathbf{g}^\delta = \mathbf{C}_N^\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.7})$$

et où n_c est le nombre de contraintes de contact éventuellement actives et où l'opérateur blocdiag effectue une concaténation diagonale par blocs. Il est à noter qu'en fonction de la taille des systèmes réduits utilisés pour le calcul, un bloc $\mathbf{0}$ peut être concaténé verticalement à \mathbf{C}_N pour respecter les dimensions des différentes matrices. La forme de \mathbf{C}_N étant supposée connue, le jeu avant discrétisation temporelle s'écrit dans le repère du rotor

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{x}^S(0) - \mathbf{x}^R(0) + \mathbf{x}^S(t) - \mathbf{x}^R(t)) \\ &= \mathbf{g}_0 + \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}^{S/R}) \Phi \bar{\mathbf{x}}^S(t) - \mathbf{x}^R(t)) \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

où $\boldsymbol{\alpha}^{S/R}(t) = \boldsymbol{\alpha}_0^{S/R} + \alpha_\Omega(t) \mathbf{1}_{n_c}$. On rappelle que la notation $\mathbf{1}_\bullet$ représente un vecteur unité d'une dimension appropriée.

Une autre conséquence est que le jeu peut être calculé de manière explicite, ce qui permet d'alléger les implémentations et d'effectuer l'intégration temporelle hors contact séparément pour les deux structures. Lors de la détection d'un contact, les déplacements et éventuellement les vitesses doivent être corrigés en tenant compte des flexibilités des deux structures. Les modifications sur les algorithmes de résolution sont décrites dans la section suivante.

1.3.3 Calcul de la vitesse relative

En ce qui concerne les algorithmes dérivés de la procédure de Moreau–Jean, il est nécessaire de pouvoir exprimer la vitesse relative entre les structures. L'exposant $\bullet^{S/R}$ est abandonné pour alléger les notations. La vitesse des nœuds du stator dans le repère tournant notée $\mathbf{v}^S(\boldsymbol{\alpha}(t), t)$ est obtenue par

dérivation par rapport au temps de $\mathbf{x}^S(\alpha(t), t)$

$$\mathbf{v}^S(\alpha, t) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{x}^S(\alpha, t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F}(\alpha))\Phi\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{F}(\alpha)\Phi\frac{\partial}{\partial t}\bar{\mathbf{x}}(t). \quad (\text{V.9})$$

D'après la définition de \mathbf{F} (V.5), sa dérivée par rapport au temps s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F}(\alpha)) = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & -2\sin(2\alpha) & 2\cos(2\alpha) & \cdots & -k\sin(k\alpha) & k\cos(k\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.10})$$

La structure de cette matrice est très semblable à celle de \mathbf{F} , moyennant des permutations de colonnes et des changements de signes. De plus, en tenant compte des hypothèses décrites à la section V.1.3.1, $\dot{\alpha} = \Omega$. Cette dérivée peut donc s'exprimer directement à partir de \mathbf{F} et d'une matrice antisymétrique \mathbf{V} de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F}(\alpha(t))) = \Omega(t)\mathbf{F}(\alpha(t))\mathbf{V} \quad (\text{V.11})$$

avec

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & & & & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{I} & & & & & & & \\ & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & & & & & & & \\ & & & \mathbf{0} & 2\mathbf{I} & & & & & \\ & & & -2\mathbf{I} & \mathbf{0} & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \mathbf{0} & k\mathbf{I} & & \\ & & & & & & -k\mathbf{I} & \mathbf{0} & & \\ & & & & & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.12})$$

La construction de la matrice \mathbf{F} et de sa dérivée est une opération relativement coûteuse dans le calcul des interactions. Remplacer la construction d'une de ces matrices par un simple produit matriciel est comparativement plus rapide.

Au moyen des expressions des vitesses des deux structures exprimées dans le même repère, la vitesse relative ou vitesse d'impact notée \mathbf{y} s'écrit

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{v}^S(t) - \mathbf{v}^R(t)) = \mathbf{C}_N^\top(\Omega\mathbf{F}(\alpha)\mathbf{V}\Phi\bar{\mathbf{x}}^S(t) + \mathbf{F}(\alpha)\Phi\dot{\bar{\mathbf{x}}}^S(t) - \mathbf{v}^R(t)) \quad (\text{V.13})$$

et la discrétisation temporelle des équations décrivant le système rotor–stator complet peut être effectuée.

2 Intégration par l'algorithme de Carpenter

2.1 Discrétisation temporelle des équations du mouvement

En reprenant les notations de la section IV.4.3, le système discret en temps décrivant la dynamique du rotor devient

$$\hat{\mathbf{M}}^R \mathbf{x}_{n+1}^R - \tilde{\mathbf{f}}_n^R - \mathbf{C}_{NT\theta}^R \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (\text{V.14})$$

et le système décrivant le stator

$$\hat{\mathbf{M}}^S \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^S - \tilde{\mathbf{f}}_n^S - [\mathbf{F}_{n+1} \Phi]^\top \mathbf{C}_{NT\theta}^S \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{0}. \quad (\text{V.15})$$

Ces calculs sont effectués pour les deux structures, dans leurs repères et leurs bases d'expression respectifs.

2.2 Discrétisation de la fonction jeu

L'algorithme de Carpenter étant un algorithme explicite, on choisit comme discrétisation temporelle

$$\mathbf{x}_n^S = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}_n^{S/R}) \boldsymbol{\Phi} \bar{\mathbf{x}}_n = \mathbf{F}_n \boldsymbol{\Phi} \bar{\mathbf{x}}_n^S \quad (\text{V.16})$$

pour les déplacements du stator exprimés en base physique et dans le repère tournant. Ainsi, le jeu prédit entre les deux structures s'écrit en notant $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{S/R}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}^{S/R}(t_{n+1}))$

$$\mathbf{g}_p = \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{F}_{n+1} \boldsymbol{\Phi} \bar{\mathbf{x}}_p^S - \mathbf{x}_p^R). \quad (\text{V.17})$$

2.3 Calcul des efforts de contact

Pour calculer les efforts de contact et la correction du jeu, la même stratégie que dans la section IV.4.3 est appliquée, en tenant compte de l'équilibre des efforts entre deux structures flexibles dans ce cas. De plus, les corrections de déplacements doivent garantir la non-interpénétration entre les structures. Ceci se traduit par la relation

$$\mathbf{g}_p + \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{F}_{n+1} \boldsymbol{\Phi} \bar{\mathbf{x}}_{n+1,c}^S - \mathbf{x}_{n+1,c}^R) = \mathbf{0} \quad (\text{V.18})$$

pour le jeu, avec

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1,c}^R = (\hat{\mathbf{M}}^R)^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta}^R \boldsymbol{\lambda}_{n+1} \\ \bar{\mathbf{x}}_{n+1,c}^S = (\hat{\mathbf{M}}^S)^{-1} [\mathbf{F}_{n+1} \boldsymbol{\Phi}]^\top \mathbf{C}_{NT\theta}^S \boldsymbol{\lambda}_{n+1}. \end{cases} \quad (\text{V.19})$$

$$\quad (\text{V.20})$$

En injectant les expressions des corrections dans la condition de non pénétration et en factorisant les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$, l'expression reliant le jeu prédit et les efforts normaux de contact

$$\boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \hat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{g}_p \quad (\text{V.21})$$

est obtenue, où

$$\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{C}_N^\top (\mathbf{F}_{n+1} \boldsymbol{\Phi} (\hat{\mathbf{M}}^S)^{-1} [\mathbf{F}_{n+1} \boldsymbol{\Phi}]^\top \mathbf{C}_{NT\theta}^S - (\hat{\mathbf{M}}^R)^{-1} \mathbf{C}_{NT\theta}^R). \quad (\text{V.22})$$

Par rapport aux descriptions fournies au chapitre IV, seule l'expression de $\hat{\mathbf{W}}$ a changé du fait de la participation des flexibilités des deux structures dans l'équilibre des efforts de contact. Du fait de l'utilisation de modèles réduits, la matrice de contact $\hat{\mathbf{W}}$ peut être *localisée* pour obtenir une matrice diagonale. En effet, en raison de la réduction des modèles, une contrainte active sur un nœud peut entraîner la correction de plusieurs déplacements, ce qui n'est pas un comportement admissible. Aussi, des efforts de contact négatifs peuvent être observés, maintenant le contact entre les deux structures (collage). La localisation permet d'éviter ce type de comportements.

3 Intégration par l'algorithme de Moreau–Jean avec reprojection

L'algorithme de Moreau–Jean avec reprojection demande quelques développements spécifiques du fait de sa plus grande complexité. Notamment, son application à ce cas d'étude nécessite l'application d'une hypothèse supplémentaire pour le calcul des multiplicateurs.

3.1 Discrétisation temporelle des équations du problème

Cette section reprend les développements décrits dans la section IV.5.4. En particulier, de l'implémentation découplée de l'algorithme de Moreau–Jean avec reprojection des déplacements sur la contrainte associée, à partir de l'équation (IV.67).

Pour le rotor, le résidu à annuler \mathbf{r}_L^R prend la forme

$$\mathbf{r}_L^R = \begin{cases} \hat{\mathbf{M}}^R(\mathbf{v}_{n+1}^{R,\tau+1} - \mathbf{v}_n^R) - \tilde{\mathbf{f}}_n^R + h\gamma\mathbf{K}^R\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^R\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{R,\tau} - \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^R\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{0} & (\text{V.23a}) \\ \mathbf{x}_{n+1}^{R,\tau+1} - \mathbf{x}_n^R - h(\gamma\mathbf{v}_{n+1}^{R,\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n^R) - \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^R\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{R,\tau+1} = \mathbf{0} & (\text{V.23b}) \end{cases}$$

et pour le stator le résidu équivalent \mathbf{r}_L^S s'écrit

$$\mathbf{r}_L^S = \begin{cases} \hat{\mathbf{M}}^S(\bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \bar{\mathbf{v}}_n^S) - \tilde{\mathbf{f}}_n^S + h\gamma\mathbf{K}^S[\mathbf{F}_{n+1}\boldsymbol{\Phi}]^\top\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^\tau - [\mathbf{F}_{n+1}\boldsymbol{\Phi}]^\top\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{0} & (\text{V.24a}) \\ \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \bar{\mathbf{x}}_n^S - h(\gamma\bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{S,\tau+1} + (1-\gamma)\bar{\mathbf{v}}_n^S) - [\mathbf{F}_{n+1}\boldsymbol{\Phi}]^\top\mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{0} & (\text{V.24b}) \end{cases}$$

dans lequel les termes de la forme $[\mathbf{F}_{n+1}\boldsymbol{\Phi}]$ constituent la principale différence par rapport à \mathbf{r}_L^R .

3.2 Calcul du jeu et de la vitesse relative entre les deux structures

Les positions et les vitesses relatives des nœuds du rotor sont directement accessibles dans la procédure d'intégration temporelle, aucune manipulation des grandeurs relatives à cette structure n'est donc nécessaire. Comme dans le cas de l'algorithme de Carpenter décrit à la section précédente, il est nécessaire de reconstruire certaines quantités physiques du stator à chaque itération pour pouvoir effectuer le calcul des efforts de contact. Dans le cas présent, il est nécessaire de calculer les déplacements, mais aussi les vitesses des points de contact du stator en base physique.

On rappelle que pour l'algorithme de Moreau–Jean avec reprojection, une procédure de résolution non-linéaire est nécessaire. Les fonctions résiduelles associées au jeu, ainsi qu'à la vitesse relative ou vitesse d'impact entre les structures doivent donc être exprimées.

3.2.1 Calcul du jeu

Au moyen de l'expression du jeu en fonction des déplacements du rotor et du stator exprimés dans le même repère de l'équation (V.8), la fonction résiduelle à annuler pour le jeu notée \mathbf{r}_g s'écrit sous la forme

$$\mathbf{r}_g(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}}^S, \mathbf{x}^R) = \mathbf{w} - \mathbf{g}_0 - \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{F}_{n+1}\boldsymbol{\Phi}\bar{\mathbf{x}}^S - \mathbf{x}^R) \quad (\text{V.25})$$

et dont la valeur au point de fonctionnement $(n+1, \tau)$ est notée \mathbf{r}_g^τ . La linéarisation de ce résidu notée $\mathbf{r}_{g,L}$ autour du point de fonctionnement $(n+1, \tau+1)$ s'exprime

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{g,L}^{\tau+1} &= \mathbf{r}_g^\tau + [\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{r}_g^\tau](\mathbf{w}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{w}_{n+1}^\tau) + [\nabla_{\bar{\mathbf{x}}^S}\mathbf{r}_g^\tau](\bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau}) + [\nabla_{\mathbf{x}^R}\mathbf{r}_g^\tau](\mathbf{x}_{n+1}^{R,\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^{R,\tau}) \\ &= \mathbf{w}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{g}_0 - \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{F}_{n+1}\boldsymbol{\Phi}\bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^{R,\tau+1}) \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

ce qui, par définition du résidu linéarisé peut être réécrit comme

$$\mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{C}_N^\top(\mathbf{F}_{n+1}\boldsymbol{\Phi}\bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^{R,\tau+1}). \quad (\text{V.27})$$

3.2.2 Calcul de la vitesse d'impact

En raison des discrétisations choisies pour les grandeurs décrivant le rotor et le stator, la vitesse d'impact discrète vaut à l'itération n

$$\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}_n^S, \bar{\mathbf{v}}_n^S, \mathbf{v}_n^R) = \mathbf{C}_N^\top(\Omega\mathbf{F}_n\mathbf{V}\boldsymbol{\Phi}\bar{\mathbf{x}}_n^S + \mathbf{F}_n\boldsymbol{\Phi}\bar{\mathbf{v}}_n^S - \mathbf{v}_n^R). \quad (\text{V.28})$$

Pour la résolution non-linéaire par la méthode de Newton, la fonction résiduelle à annuler pour la vitesse d'impact s'écrit

$$\mathbf{r}_y(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{v}}^S, \bar{\mathbf{x}}^S, \mathbf{v}^R) = \mathbf{w} - \mathbf{C}_N^\top (\Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \bar{\mathbf{x}}^S + \mathbf{F}_{n+1} \Phi \bar{\mathbf{v}}^S - \mathbf{v}^R) \quad (\text{V.29})$$

dont la valeur au point de fonctionnement $(n + 1, \tau)$ est notée \mathbf{r}_y^τ . La linéarisation de ce résidu $\mathbf{r}_{y,L}$ autour du point de fonctionnement $(n + 1, \tau + 1)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{y,L}^{\tau+1} &= \mathbf{r}_y^\tau + [\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{r}_y^\tau] (\mathbf{w}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{w}_{n+1}^\tau) \\ &\quad + [\nabla_{\bar{\mathbf{v}}^S} \mathbf{r}_y^\tau] (\bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{S,\tau}) \\ &\quad + [\nabla_{\bar{\mathbf{x}}^S} \mathbf{r}_y^\tau] (\bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau}) \\ &\quad + [\nabla_{\mathbf{x}^R} \mathbf{r}_y^\tau] (\mathbf{x}_{n+1}^{R,\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^{R,\tau}) \\ &= \mathbf{w}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{C}_N^\top (\Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau+1} + \mathbf{F}_{n+1} \Phi \bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^{R,\tau+1}). \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

ce qui permet d'exprimer la fonction vitesse d'impact discrète

$$\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{C}_N^\top (\Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau+1} + \mathbf{F}_{n+1} \Phi \bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^{R,\tau+1}). \quad (\text{V.31})$$

3.3 Calcul des multiplicateurs

3.3.1 En vitesse

Les variables au pas $(n + 1, \tau + 1)$ dans l'équation (V.31) sont remplacées par leurs expressions en fonction des pas précédents et des multiplicateurs

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} &= \mathbf{C}_N^\top (\Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{S,\tau+1} + \mathbf{F}_{n+1} \Phi \bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{S,\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^{R,\tau+1}) \\ &= \mathbf{C}_N^\top \Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi [\bar{\mathbf{x}}_n^S + h(\gamma \bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{S,\tau+1} + (1 - \gamma) \bar{\mathbf{v}}_n^S)] + [\mathbf{F}_{n+1} \Phi]^\top \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1} \\ &\quad + \mathbf{C}_N^\top \mathbf{F}_{n+1} \Phi [\bar{\mathbf{v}}_n^S + (\hat{\mathbf{M}}^S)^{-1} (\tilde{\mathbf{f}}_n^S - h\gamma \mathbf{K}^S [\mathbf{F}_{n+1} \Phi]^\top \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^\tau + [\mathbf{F}_{n+1} \Phi]^\top \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1})] \\ &\quad - \mathbf{C}_N^\top [\mathbf{v}_{n+1}^R + (\hat{\mathbf{M}}^R)^{-1} (\tilde{\mathbf{f}}_n^R - h\gamma \mathbf{K}^R \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^R \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^\tau + \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^R \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1})] \end{aligned} \quad (\text{V.32})$$

En mettant en facteur les différentes variables connues, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} &= \mathbf{C}_N^\top [\Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \bar{\mathbf{x}}_n^S + \Omega h(1 - \gamma) \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \bar{\mathbf{v}}_n^S + \mathbf{F}_{n+1} (\Omega h \gamma \mathbf{V} + \mathbf{I}) \Phi \bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{\tau+1} \\ &\quad + \Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \Phi^\top \mathbf{F}_{n+1}^\top \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1} - \mathbf{v}_{n+1}^{R,\tau+1}] \end{aligned} \quad (\text{V.33})$$

puis,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} &= \mathbf{C}_N^\top [\Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \bar{\mathbf{x}}_n^S + \Omega h(1 - \gamma) \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \bar{\mathbf{v}}_n^S \\ &\quad + \mathbf{F}_{n+1} (\Omega h \gamma \mathbf{V} + \mathbf{I}) \Phi (\bar{\mathbf{v}}_{n+1}^p + (\hat{\mathbf{M}}^S)^{-1} (-h\gamma \mathbf{K}^S [\mathbf{F}_{n+1} \Phi]^\top \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^\tau + [\mathbf{F}_{n+1} \Phi]^\top \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1}) \\ &\quad + \Omega \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{V} \Phi \Phi^\top \mathbf{F}_{n+1}^\top \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^S \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1} \\ &\quad - (\mathbf{v}_{n+1}^{R,p} + (\hat{\mathbf{M}}^R)^{-1} (-h\gamma \mathbf{K}^R \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^R \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^\tau + \mathbf{C}_{\text{NT}\theta}^R \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1}))] \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

une fois tous les termes nécessaires développés.

Dans cette écriture, un terme $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^\tau$ est présent, comme prévu par l'implémentation découplée de cet algorithme. Mais en raison du changement de repère, un terme $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1}$ intervient aussi. On applique à nouveau cette approximation, en remplaçant $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\tau+1}$ par son pendant de l'itération précédente. Ceci permet de simplifier la résolution du problème en autorisant une résolution successive de $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{\tau+1}$ puis de

$\kappa_{n+1}^{\tau+1}$. Afin de tenir compte de la loi d'impact, un terme $e\mathbf{y}_n$ est ajouté dans les membres de gauche et de droite de ce système, où e est le coefficient de la loi d'impact de Newton. Ces opérations permettent d'obtenir, après une simplification conséquente le système

$$\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} + e\mathbf{y}_n = \mathbf{A}_\lambda \lambda_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{b}_\lambda \quad (\text{V.35})$$

La résolution du problème de contact se fait alors en résolvant le LCP

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} + e\mathbf{y}_n = \mathbf{A}_\lambda \lambda_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{b}_\lambda \\ \mathbf{0} \leq (\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1} + e\mathbf{y}_n) \perp \lambda_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{V.36a})$$

$$(\text{V.36b})$$

pour $\lambda_{n+1}^{\tau+1}$ et $\mathbf{y}_{n+1}^{\tau+1}$.

Du fait du caractère découplé de l'algorithme présenté ici, les vitesses après impact peuvent être calculées par application des relations (V.23a) et (V.24a). Il reste ensuite à évaluer les multiplicateurs de reprojction pour garantir l'absence de propagation de pénétrations.

3.3.2 Calcul du multiplicateur de reprojction

Les vitesses après impact $\mathbf{v}_{n+1}^{\text{R},\tau+1}$ et $\bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{\text{S},\tau+1}$ interviennent dans la définition des déplacements corrigés $\mathbf{x}_{n+1}^{\text{R},\tau+1}$ (V.23b) et $\bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{\text{S},\tau+1}$ (V.24b). Ces résultats sont injectés dans l'écriture du jeu en temps discret (V.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} &= \mathbf{g}_0 + \mathbf{C}_\text{N}^\top [\mathbf{F}_{n+1} \Phi \bar{\mathbf{x}}_{n+1}^{\text{S},\tau+1} - \mathbf{x}_{n+1}^{\text{R},\tau+1}] \\ &= \mathbf{g}_0 + \mathbf{C}_\text{N}^\top \mathbf{F}_{n+1} \Phi (\bar{\mathbf{x}}_n^{\text{S}} + h[\gamma \bar{\mathbf{v}}_{n+1}^{\text{S},\tau+1} + (1-\gamma)\bar{\mathbf{v}}_n]) - (\mathbf{x}_n^{\text{R}} + h[\gamma \mathbf{v}_{n+1}^{\text{R},\tau+1} + (1-\gamma)\mathbf{v}_n^{\text{R}}]) \\ &\quad + \mathbf{C}_\text{N}^\top (\mathbf{F}_{n+1} \Phi (\mathbf{F}_{n+1} \Phi)^\top \mathbf{C}_\text{NT}\theta^{\text{S}} - \mathbf{C}_\text{NT}\theta^{\text{R}}) \kappa_{n+1}^{\tau+1} \end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

qui se note de façon condensée

$$\mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{A}_\kappa \kappa_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{b}_\kappa. \quad (\text{V.38})$$

Le multiplicateur de reprojction se calcule alors en résolvant le LCP

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} = \mathbf{A}_\kappa \kappa_{n+1}^{\tau+1} + \mathbf{b}_\kappa \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1} \perp \kappa_{n+1}^{\tau+1} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{V.39a})$$

$$(\text{V.39b})$$

pour $\kappa_{n+1}^{\tau+1}$ et $\mathbf{g}_{n+1}^{\tau+1}$, ce qui permet de terminer la résolution d'une itération de la boucle de Newton au moyen des relations (V.23b) et (V.24b).

3.4 Bilan sur les algorithmes dans le cas du contact rotor–stator

À la lecture des développements précédents, l'utilisation d'une méthode d'intégration temporelle implicite, qui nécessite l'emploi d'une procédure de résolution itérative, génère des difficultés d'ordre mathématique par rapport à l'algorithme de Carpenter. Cependant, cette plus grande complexité permet de justifier de résultats plus robustes dans un cadre de simulation mécanique ou thermomécanique. Cette robustesse permet finalement des temps de calculs plus faibles du fait de l'absence de critère de stabilité, et autorise des améliorations futures comme la prise en compte de lois de frottement non-régulières, une procédure itérative de recherche de points de contact ou la simulation de modèles complets et réduits comportant des non-linéarités structurelles.

4 Étude de convergence des modèles

Afin de démontrer la capacité de réduction de la stratégie couplant les méthodes de Craig–Bampton pour la partie mécanique et Rational–Craig–Hale pour la partie thermique du problème, ainsi que la précision raisonnable des modèles éléments finis, une étude de la convergence des modèles utilisés par la suite est effectuée dans cette section.

Pour le rotor comme pour le stator, de nombreux paramètres jouent sur les résultats. On rappelle ici les hypothèses de travail issues de certaines limitations, qu’elles proviennent de contraintes de calcul ou d’industrialisation de la stratégie de modélisation

- Le nombre de nœuds de contact est fixé à 7. Ce nombre influence le contenu et la taille des bases de réduction du rotor et du stator, ainsi que les temps de calcul et bien évidemment la précision des résultats. Toutefois, ce nombre a peu d’influence sur la phénoménologie de l’interaction rotor–stator, et est dans l’ordre de grandeur des pratiques retrouvées dans la bibliographie [97].
- Les modèles éléments finis initiaux sont décrits par des équations linéaires, ont comme conditions aux limites uniquement des températures imposées nulles, et sont initialement au repos.

4.1 Rotor

L’étude de convergence porte en premier lieu sur le modèle éléments finis. Ensuite, la convergence des modèles réduits (uniquement pour la partie thermique) est étudiée, puisque les modèles réduits par la méthode de Craig–Bampton ont déjà été amplement décrits dans la littérature pour les cas de contact rotor–stator [21, 22].

La validation commence avec l’étude d’un secteur de référence, puis la stratégie de réduction complète est vérifiée en tenant compte de la deuxième passe de réduction par modes d’interfaces présentée dans [44].

4.1.1 Modèles éléments finis de secteur

Afin de caractériser l’effet du maillage sur les résultats obtenus par chargement thermique sur le rotor, différentes densités d’éléments dans la pale principale du secteur de rouet ont été évaluées. Celle-ci a été discrétisée en utilisant toujours deux éléments dans l’épaisseur et 50 dans la longueur. Le maillage le moins discrétisé possède sept éléments dans la hauteur de la pale, les suivants 14, 21 et 28. Ces maillages sont présentés en figure V.4.

Pour évaluer la convergence de ces maillages, des analyses modales sur le sous-système mécanique et de réponse harmonique sur le sous-système thermique ont été effectuées.

Les fréquences propres associées aux 20 premiers modes des différents modèles sont tracées en figure V.5a. Celles-ci sont superposées, quel que soit le niveau de raffinement du maillage. La convergence du modèle en fréquence dans le domaine d’étude est donc déjà obtenue. Les fonctions de réponse en fréquence colocalisées au nœud de contact le plus proche du bord de fuite sont rassemblées en figure V.5b. Celles-ci sont normalisées afin de compenser la variation de géométrie des éléments dans la mesure où un effort nodal est appliqué pour effectuer ces analyses.

Une variation du gain pour des fréquences élevées, par rapport aux temps caractéristiques thermiques, est observée vers 0,1 Hz. Toutefois, le comportement fréquentiel ne présente pas de différences très importantes. De plus, les modèles présentés ont été réalisés en tenant compte d’hypothèses simplificatrices pouvant faire varier très fortement les résultats obtenus. Les différences constatées sont donc considérées comme suffisamment faibles pour mener les études de convergence des super-éléments sur le modèle le moins raffiné.

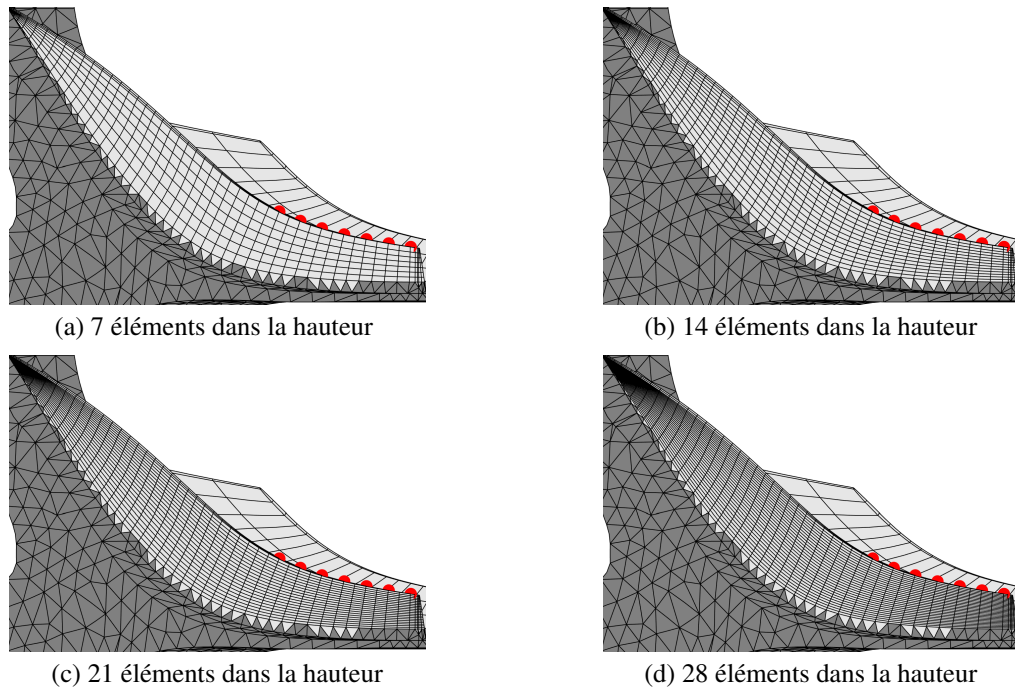


FIGURE V.4 – Maillages évalués pour l'étude de convergence dans la pale. Nœuds de contact (●).

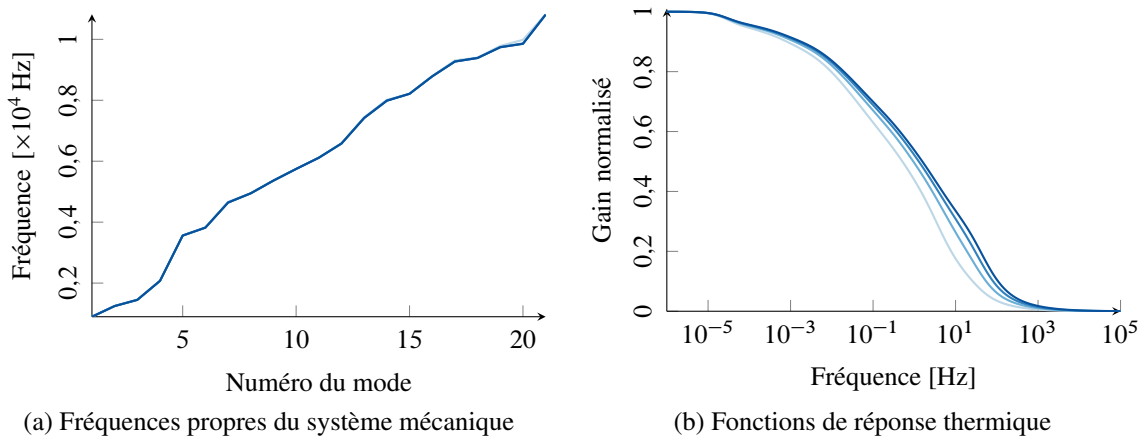


FIGURE V.5 – Analyse de convergence du maillage de rotor en fonction de la discrétisation de la pale principale. Maillage avec 7 (—), 14 (—), 21 (—), 28 (—) éléments dans la hauteur de la pale.

4.1.2 Réduction du secteur de référence

L'application au cas tridimensionnel de la méthode de réduction Rational–Craig–Hale présentée au chapitre III est étudiée dans cette section. La convergence des modèles réduits mécaniques par la méthode de Craig–Bampton étant déjà assurée, on s'efforce ici de fournir des règles de sélection de paramètres pour l'utilisation industrielle de la méthode Rational–Craig–Hale.

D'abord, la convergence des modèles réduits est caractérisée en utilisant un nombre croissant de points d'expansion, et en conservant l'ordre d'expansion à 0. Les bornes d'expansion sont respectivement positionnées à $s_i = 10^{-5}$ Hz et $s_f = 10^2$ Hz, les points intermédiaires étant espacés logarithmiquement. Les résultats sont présentés en figure V.6.

Les comportements déjà observés au chapitre III sont retrouvés dans cette étude de convergence. Ainsi, l'augmentation du nombre de points d'expansion permet de réduire l'erreur due à la réduction.

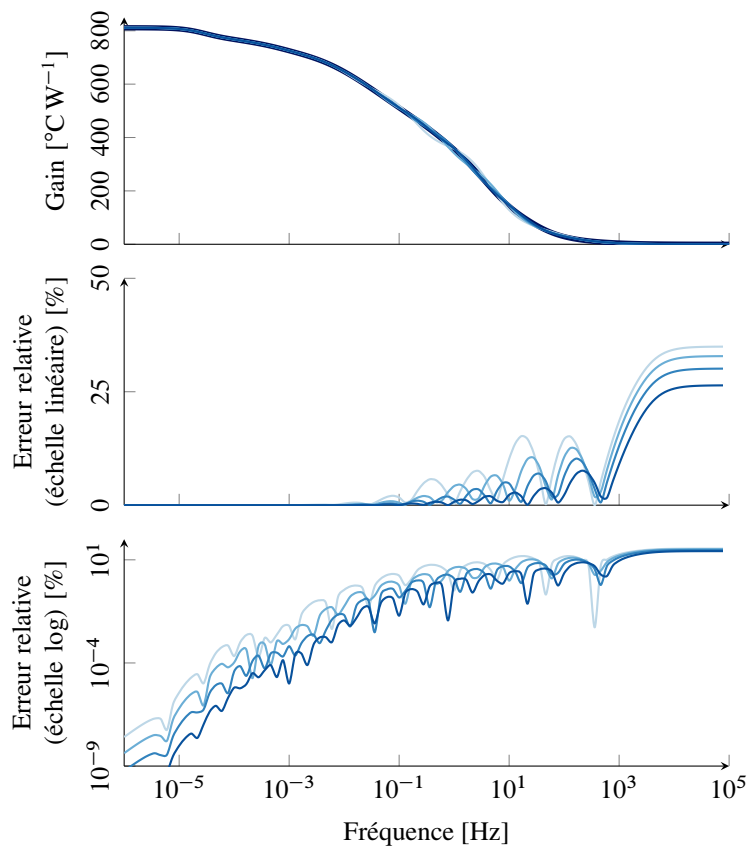


FIGURE V.6 – Convergence des modèles réduits du secteur de référence en fonction du nombre n_p de points d'expansion. Modèle complet (—), $n_p = 5$ (—), 6 (—), 7 (—), 8 (—).

L'erreur indiquée est toutefois très sensible, avec des erreurs relevées de l'ordre de 30 % au maximum quand peu de différences sont visibles sur les courbes de gain.

Déjà identifiées comme des paramètres critiques, les bornes d'expansion jouent un rôle important. Fixées dans l'étude précédente aux valeurs 10^{-5} Hz et 10^2 Hz, les résultats lorsque ces bornes deviennent $(s_i, s_f) = (10^{-5} \text{ Hz}, 10^5 \text{ Hz})$, puis $(s_i, s_f) = (10^{-5} \text{ Hz}, \infty \text{ Hz})$ sont étudiés ici. Le nombre de points d'expansion total de $n_p = 8$ points est maintenu constant, ce qui engendre une base de 56 vecteurs. L'expansion pour $s = \infty$ permet d'intégrer dans la base de réduction des modes de la forme

$$\mathbf{H}(s = \infty) = -\mathbf{C}_{ii}^{-1} \mathbf{C}_{ib} \quad (\text{V.40})$$

correspondant au comportement asymptotique dynamique de l'équation (III.60). La base est alors calculée en utilisant un avant-dernier point d'expansion à $s = 10^5$ Hz.

Les fonctions de réponse en fréquence sont rassemblées en figure V.7. L'extension de l'expansion aux hautes fréquences permet de réduire très fortement l'erreur de réduction dans ce domaine fréquentiel. Ceci est vrai pour une borne supérieure $s_f = 10^5$ Hz ou $s_f = \infty$ Hz. Dans les deux cas, l'erreur augmente dans le bas et le milieu du spectre. Cette augmentation est due à l'accroissement de l'écart entre deux points d'expansion successifs du fait de l'augmentation de l'écart entre les bornes, sans ajout de points d'expansion.

Un dernier sujet à aborder concerne le paramétrage des modèles réduits et le taux d'accroissement de la base de réduction avec les différents paramètres, notamment le nombre de nœuds sur la frontière. Avec la méthodologie Rational–Craig–Hale présentée jusque-là, le nombre de modes dans la base de réduction thermique correspond au produit $n_p \times (n_o + 1) \times n_b$. Pour autant, si deux nœuds de frontière

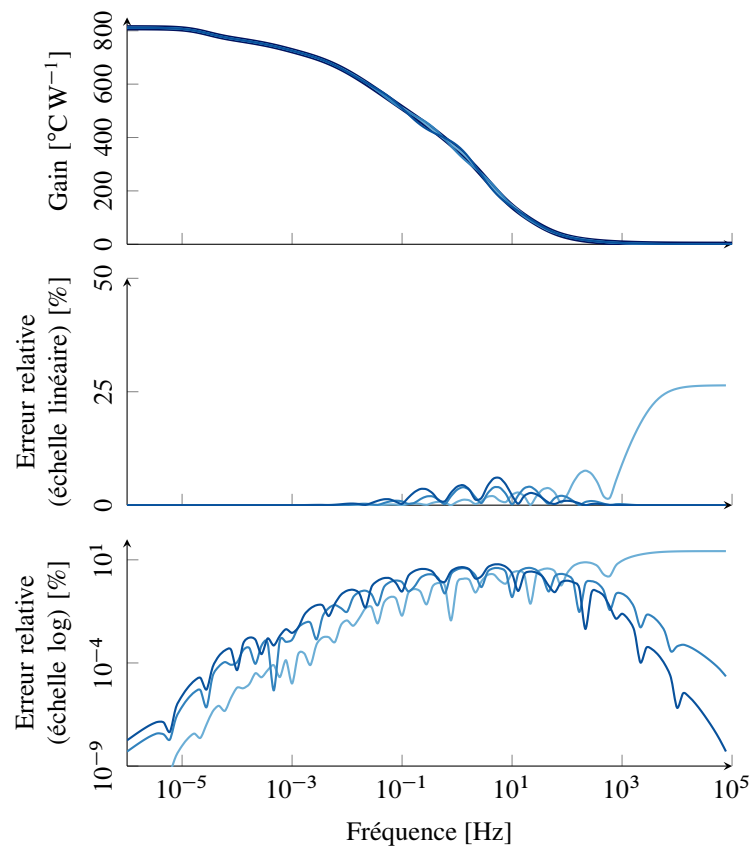


FIGURE V.7 – Convergence des modèles réduits du secteur de référence en fonction des bornes d'expansion (s_i, s_f) . Modèle complet (—), $(s_i, s_f) = (10^{-5} \text{ Hz}, 10^2 \text{ Hz})$ (—), $(10^{-5} \text{ Hz}, 10^5 \text{ Hz})$ (—), $(10^{-5} \text{ Hz}, \infty \text{ Hz})$ (—).

sont très proches, il paraît logique que le chargement de l'un ou l'autre de ces nœuds entraîne peu de différence en une position suffisamment éloignée, par exemple le pied de pale. On s'est donc intéressé à l'optimisation de la base Rational–Craig–Hale thermique après sa génération initiale, au moyen d'une Décomposition en Valeurs Singulières (SVD), opération présentée dans la section III.3.2.

L'application d'une SVD à la base Rational–Craig–Hale permet de récupérer un ensemble de modes singuliers et leur valeurs singulières associées. Les valeurs singulières élevées indiquent que le mode associé a une *énergie* importante, c'est-à-dire qu'il constitue une information nécessaire de la base de réduction. Afin de réduire la taille de cette dernière, les modes singuliers associés aux valeurs les plus faibles, ce qui revient à conserver les modes dont les valeurs singulières représentent un certain pourcentage de la somme de toutes les valeurs singulières. Ce numéro de mode maximal noté N s'obtient en cherchant $N \mid \sum_{j=1}^N \sigma_j \geq 1 - \epsilon$ où ϵ est une tolérance choisie.

Le jeu de paramètres suivant est étudié. Les bornes d'expansion sont $(s_i, s_f) = (10^{-5} \text{ Hz}, 10^5 \text{ Hz})$, le nombre de points d'expansion est $n_p = 10$ et l'ordre d'expansion est fixé à $n_o = 1$. Ce paramétrage entraîne la construction d'une base de réduction de taille volontairement importante.

Les résultats sont présentés en figure V.8, dans laquelle les courbes de gain ont été supprimées puisqu'elles ne permettent pas de distinguer les résultats. En effet, les erreurs relatives sont très faibles, avec une erreur maximale de 5 % constatée vers 1 Hz pour une troncature avec une tolérance $\epsilon = 10^{-2}$. À partir de $\epsilon = 10^{-3}$ (cas non représenté ici) l'erreur maximale se stabilise vers 1,5 %.

Les erreurs obtenues avec les modèles sans troncature et avec une tolérance de 10^{-8} sont pratiquement identiques. À l'inverse, pour des tolérances plus élevées, les erreurs augmentent pour les très

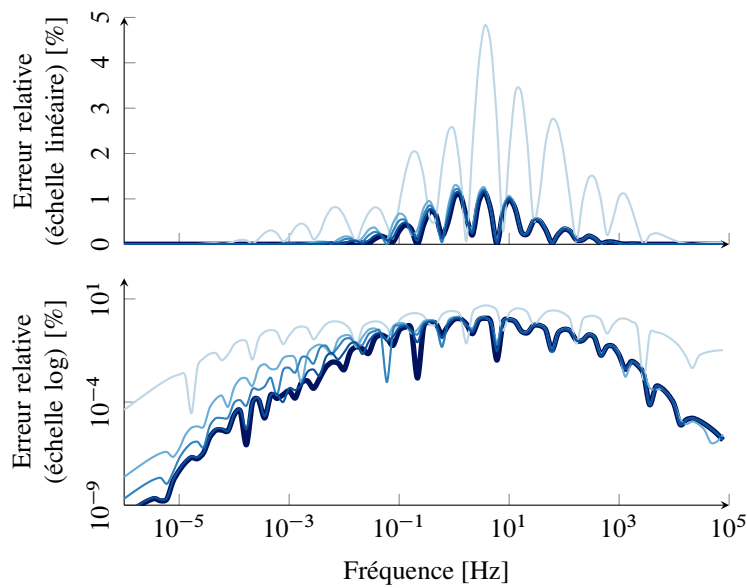


FIGURE V.8 – Convergence des modèles réduits du secteur de référence en fonction de la tolérance de troncature. $\epsilon = 10^{-2}$ (—), 10^{-4} (—), 10^{-6} (—), 10^{-8} (—), 0 (—).

basses et les très hautes fréquences dans un premier temps, puis l'erreur maximale augmente aussi pour une troncature de 10^{-2} . En quelque sorte, par le biais de ce processus, les erreurs s'homogénéisent sur l'ensemble du spectre. Pour autant, les bases de réduction associées aux modèles réduits sont de taille décroissante avec ϵ , comme l'indique le tableau V.1. Il semble ainsi possible de réduire la

Tolérance de troncature (ϵ)	Nombre de modes dans la base de réduction (n_m)
0	70
10^{-8}	66
10^{-4}	54
10^{-2}	33

TABLEAU V.1 – Effet de la troncature sur la taille des bases de réduction Rational–Craig–Hale.

taille des modèles réduits de l'ordre de 50 % tout en maintenant une très bonne précision. Ceci est particulièrement important pour la réduction de secteurs puisque de nombreux secteurs peuvent être nécessaires pour reconstruire un rotor complet. Bien évidemment, une SVD constitue une étape et donc un effort calculatoire supplémentaire. Cet effort, effectué une seule fois, constitue un moindre mal au regard du nombre de résolutions de systèmes à effectuer par la suite durant les simulations par intégration temporelle. De plus, dans l'éventualité où l'application de la SVD sur la base de réduction serait une étape limitante, des stratégies ont été proposées pour appliquer cette opération sur le modèle réduit directement dans le but d'éliminer les degrés de liberté redondants par une SVD sur la matrice d'évolution, ici la matrice de capacité thermique, comme mentionné à la section III.7.3.

Cette étude montre que la méthode Rational–Craig–Hale permet d'obtenir une base convergente pour la réduction d'un problème thermique. Toutefois, afin de diminuer la taille de la base de réduction obtenue, l'application d'une SVD avec une tolérance de troncature de 10^{-2} à 10^{-3} semble pertinente pour optimiser la taille des modèles réduits et ainsi les temps de calculs.

Les paramètres de réduction sont répertoriés dans le tableau V.2.

Paramètre	Valeur	Description
n_m^u	10	Paramètre de réduction mécanique
n_p	10	Nombre de points d'expansion
n_o	1	Nombre d'ordres d'expansion
s_i	10^{-5} Hz	Premier point d'expansion
s_f	10^5 Hz	Dernier point d'expansion
	SVD	Méthode d'orthogonalisation
ϵ	10^{-3}	Tolérance de troncature

TABLEAU V.2 – Paramètres de réduction du modèle de secteur de compresseur centrifuge.

4.1.3 Double synthèse modale

Afin d'obtenir un modèle réduit de rotor complet, un assemblage des modèles réduits de secteurs ainsi qu'une synthèse sur mode d'interfaces pour les deux physiques considérées sont effectués.

En ce qui concerne le sous-problème mécanique, cette stratégie est déjà éprouvée. Dans le cas du sous-système thermique, la question du choix d'une autre stratégie se pose aussi, comme pour la réduction des secteurs.

En pratique, il ne semble pas nécessaire d'utiliser l'approche Rational–Craig–Hale pour la double synthèse modale. En effet, la fonction de transfert d'un nœud de contact vers un nœud de frontière constitue un filtre passe-bas, gouverné par les temps caractéristiques de conduction de la chaleur au travers de la pale puis du disque. Il y a donc peu de chances pour que les évolutions thermiques au niveau des frontières d'attache des secteurs soient rapides. Ce constat semble valide pour les compresseurs centrifuges avec toutefois une nuance en fonction de la localisation des contacts. En effet, du fait de l'évolution de la hauteur de la pale du bord d'attaque au bord de fuite, les évolutions constatées au niveau des nœuds d'attache du côté du bord de fuite risquent d'être plus rapides qu'au bord d'attaque. Pour des compresseurs axiaux, le découplage est d'autant plus flagrant. Enfin, dans l'éventualité où des conditions aux limites de type convection seraient prises en compte, il y a fort à parier que le couplage inter-secteur ne joue plus de rôle important, du fait du refroidissement apporté par le fluide.

Pour valider la double synthèse modale, on effectue en accord avec la méthode des modes d'interface, une caractérisation modale avant et après réduction des interfaces d'attache. Les résultats de cette étude sont présentés en figure V.9 (seuls les 30 premiers modes sont présentés).

La seconde passe de réduction préserve les propriétés modales des sous-systèmes mécaniques et thermique. Notamment, les fréquences propres de la structure assemblée sont retrouvées, avec des erreurs de l'ordre du pourcent.

4.2 Stator

Afin d'obtenir un modèle de stator, relativement compact et compatible avec les études de contact, une modélisation en symétrie cyclique a été adoptée. Ce modèle a été choisi davantage pour des raisons pratiques, que pour la précision des résultats. En effet, il est notoirement difficile d'effectuer des simulations peu coûteuses quand les zones potentielles de contact recouvrent des surfaces importantes.

La convergence des modèles de stator utilisés dans cette étude est gouvernée, comme pour le rotor, par le modèle éléments finis construit dans un premier temps. Ensuite, le nombre d'harmoniques spatiaux, aussi appelés diamètres nodaux, et noté n_k intervient, accompagné des critères de réduction. Ces critères sont, comme pour la réduction du secteur de rotor, un nombre de modes mécaniques n_m^u et des paramètres d'expansion. Dans le cas du stator, et pour éviter une croissance trop rapide de la taille du modèle réduit, une simple synthèse modale est opérée.

En particulier, les modes utilisés pour la réduction des sous-problèmes thermiques associés à chaque

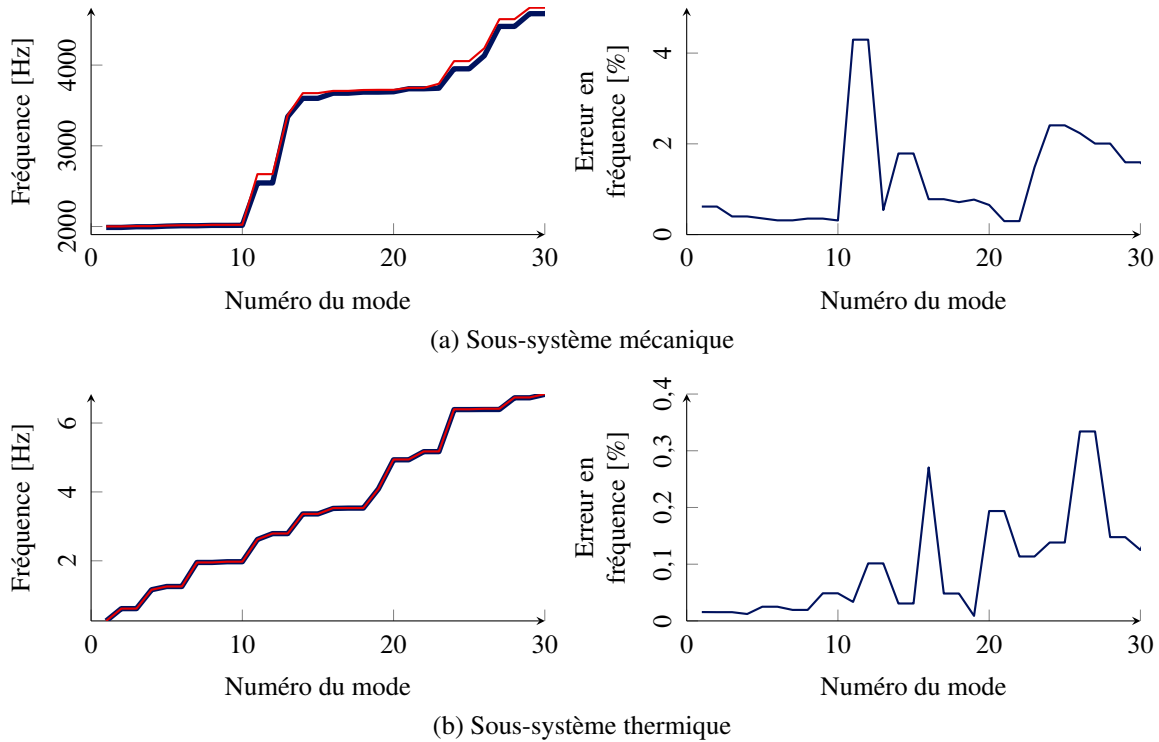


FIGURE V.9 – Étude de convergence des valeurs propres de problèmes mécaniques et thermiques lors de l'application de la double synthèse modale. Modèle avant réduction (—), modèle après réduction (—).

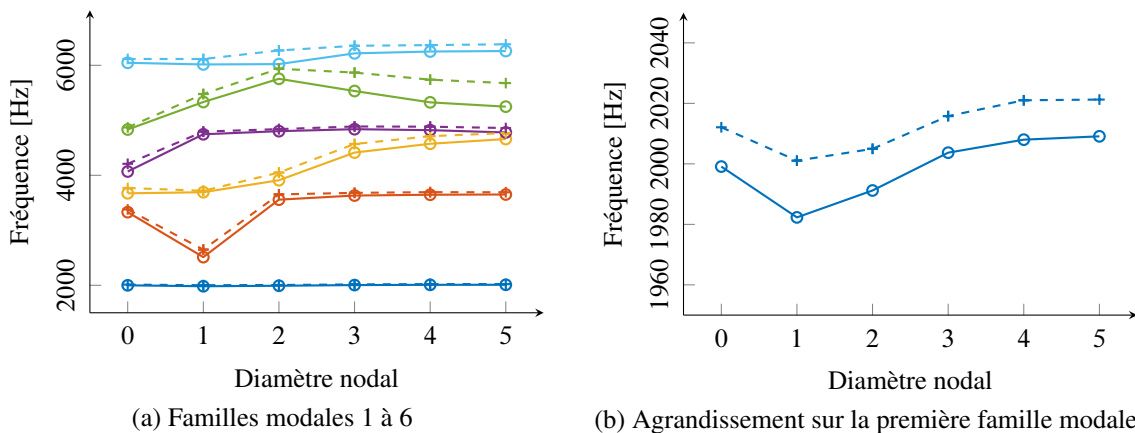


FIGURE V.10 – Comparaison des fréquences propres du rotor entre Ansys et le modèle réduit après double synthèse. Ansys en symétrie cyclique (—○—), modèle réduit (—+—).

harmonique spatial sont calculés en recherchant les nœuds du stator les plus proches des nœuds de contact du rotor et en calculant une base de Krylov par nœud de contact de manière semblable à ce qui est proposé dans l'algorithme B.1, sans toutefois utiliser le formalisme interne–frontière spécifique aux méthodes à interfaces fixes.

4.2.1 Modèle éléments finis de secteur

La figure V.11 présente le maillage du secteur de référence considéré pour la modélisation du stator. Ce secteur comporte volontairement un seul élément dans l'épaisseur et avec une ouverture angulaire de

1°, le stator complet est donc constitué de 360 secteurs de ce type. Le secteur comporte un total de 4750 nœuds et 596 éléments.

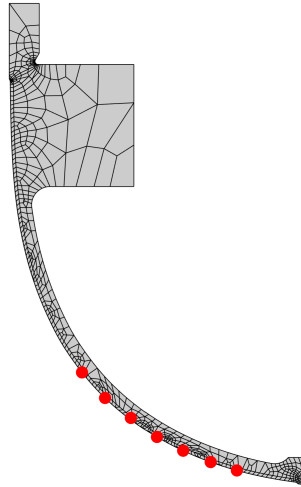


FIGURE V.11 – Modèle éléments finis de secteur de référence du couvercle. Nœuds de contact (●).

4.2.2 Modèle réduit en symétrie cyclique

La construction du modèle réduit en symétrie cyclique du stator est effectuée au moyen d'un outil développé durant la thèse. La réduction du sous-système mécanique du modèle de stator ne nécessite pas de connaître la localisation des points de contacts avant les simulations des interactions, puisque la réduction utilisée n'est qu'une synthèse modale simple. La figure V.12 illustre une partie des modes utilisés pour la synthèse modale.

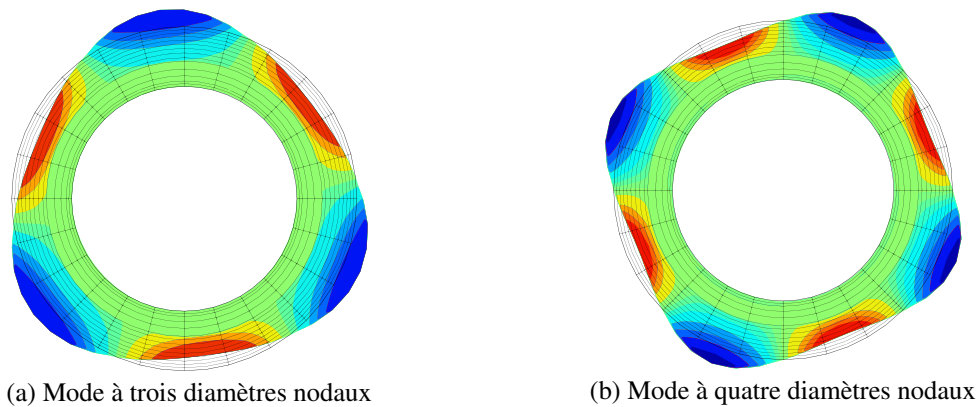


FIGURE V.12 – Déformées modales du stator.

Pour la réduction du sous-système thermique, des bases de Krylov sont utilisées, qui nécessitent la définition d'un effort pour le calcul des fonctions de transfert ou plus exactement de l'expansion de ces dernières. Il est donc très important de bien définir les nœuds de contact sur le stator.

Ces nœuds de contact sont déterminés en utilisant les nœuds de contact du rotor, qui sont fixés lors du paramétrage du modèle réduit de cette structure. Les nœuds de contact sur le stator ont été choisis de sorte qu'ils soient les nœuds de la peau inférieure du maillage possédant la même position radiale que les nœuds du rotor. Ce choix est imparfait, mais permet d'effectuer une réduction raisonnable du stator.

La modélisation en symétrie cyclique, accompagnée de la définition des paires de nœuds de contact rotor-stator, permet d'obtenir un contact nœud-ligne, comme le montre la figure V.13, ces courbes étant

reconstruites à chaque pas de temps par combinaison linéaire de fonctions harmoniques.

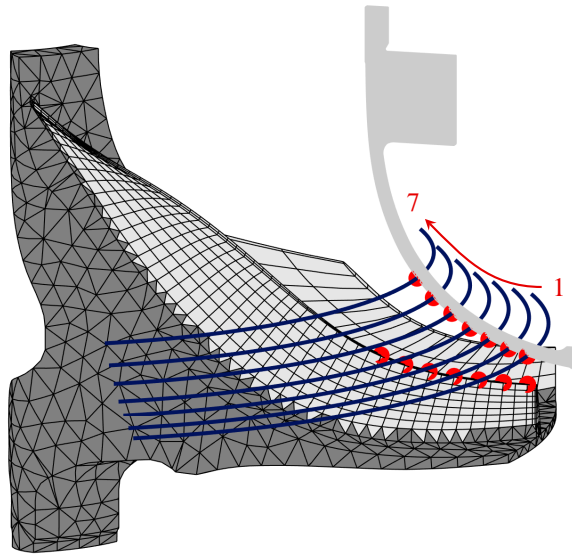


FIGURE V.13 – Courbes de contact issues de la modélisation du stator en symétrie cyclique. Paires de nœuds de contact (●), lignes de contact rotor–stator (—). Sens de numérotation des nœuds de contact (→).

4.3 Comparaison des dimensions des modèles réduits utilisés

Les modèles éléments finis complets de la roue aubagée et du couvercle comportent un total d'environ 127 000 et 967 000 nœuds respectivement, sans pour autant que les maillages soient convergés. Dans la mesure où, pour effectuer des simulations de contact, il peut être nécessaire d'effectuer une résolution de système au moins toutes les 0,1 μ s de temps simulé, les méthodes de réduction prennent tout leur sens. Par le biais des méthodes de réduction décrites précédemment, il est possible d'obtenir des modèles réduits de précision raisonnable, en particulier sur le rotor, et de dimensions de l'ordre du millier de degrés de liberté. Les travaux décrits permettent une réduction de deux à trois ordres de grandeur la taille des modèles étudiés. Les temps de calculs associés sont alors réduits d'autant plus, puisque le coût numérique d'une résolution de système augmente généralement avec le carré de sa taille.

4.4 Caractérisation fréquentielle des modèles réduits

L'organisation modale des modèles réduits étudiés dans ce chapitre est rappelée en figure V.14. On retrouve avec ces modèles l'organisation très compacte de la première famille modale du rouet, vers 2000 Hz. Ces organisations modales sont en accord avec les observations expérimentales effectuées dans [7] et dans la campagne d'essais décrite au chapitre VI.

5 Simulation quasi-statique

On présente dans cette section le comportement des deux structures lors d'une mise en contact quasi-statique. Ceci a pour but de présenter des premiers résultats, relativement aisés à interpréter pour évaluer les algorithmes de contact et le comportement des structures dans une configuration de contact complexe.

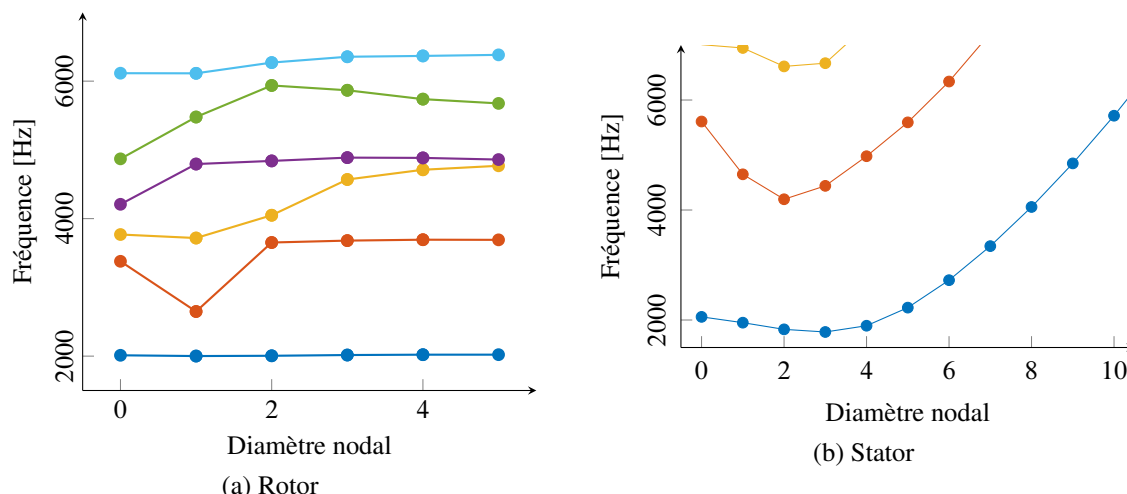


FIGURE V.14 – Diagrammes fréquences-diamètres des deux structures.

5.1 Simulation sans rotation

Afin d'illustrer ce comportement, on effectue une simulation sur 0,01 s, avec des pas de temps de calcul et d'échantillonnage des résultats de 10^{-5} s. Le stator est déformé avec un effort imposé d'amplitude croissante présentant une forme à trois diamètres nodaux. Le jeu initial entre les nœuds des deux structures est fixé pour toutes les paires de contact à 10^{-5} m. Cette simulation est aussi conduite sans rotation du rotor, toujours dans le but de faciliter au maximum l'interprétation des résultats. Dans ce type de configuration, une déformation linéaire du stator est attendue, jusqu'à ce qu'une ou plusieurs contraintes de contact s'activent, puis que les efforts de contact associés augmentent. Les résultats de cette simulation, effectuée avec l'algorithme de Moreau–Jean avec reprojection sont présentés en figure V.15.

Parmi ces résultats, les efforts de contact et les jeux sont d'un intérêt particulier, puisqu'ils permettent de caractériser le bon fonctionnement de l'algorithme de contact. Plusieurs phases se distinguent :

- À $t = 0$ s, les deux structures sont au repos et les jeux suivent la condition initiale. Au même moment, le contact est ouvert, les différents efforts de contact sont donc nuls.
- Pour $0 < t < 1,5 \times 10^{-3}$ s, le stator est progressivement chargé. Du fait de la déformée à diamètres, en fonction de la paire de contact considérée, et en particulier du secteur du rotor concerné, certains jeux augmentent (ventre positif de la déformée du stator) et d'autres diminuent (ventre négatif de la déformée du stator).
- À $t \approx 1,5 \times 10^{-3}$ s, un premier jeu s'annule, ce qui entraîne l'activation de la contrainte associée et d'un effort de contact entre les deux structures. Les jeux associés aux autres nœuds du même secteur présentent aussi une inflexion de leur évolution à cet instant, du fait de la raideur de la structure.
- Pour $t > 1,5 \times 10^{-3}$ s, l'effort de contact augmente du fait de l'augmentation du chargement extérieur sur le stator.
- À $t = 6,5 \times 10^{-3}$ s, un second nœud de contact du secteur 1 entre en contact.

5.2 Simulation avec rotation

La rotation de l'arbre est prise en compte dans cette section. Tous les autres paramètres de simulation restent fixés aux mêmes valeurs que dans la section précédente. La vitesse de rotation est fixée à 4000 rpm, ce qui correspond à une fréquence de 66,6 Hz. Cette vitesse n'est pas choisie au hasard,

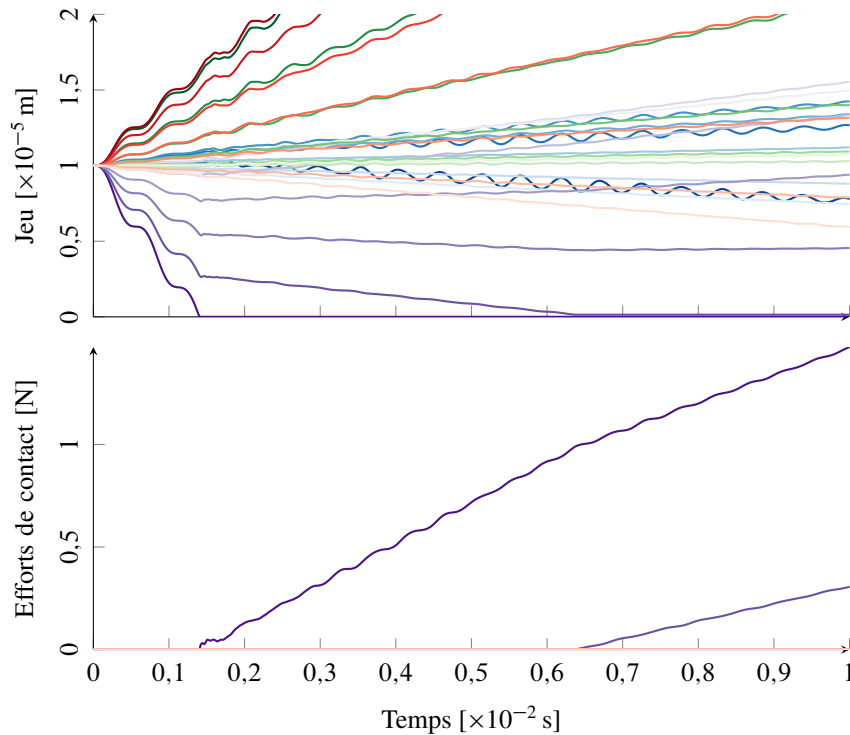


FIGURE V.15 – Simulation de contact quasi-statique. Nœuds du secteur 0 (—) ... (—), 1 (—) ... (—), 2 (—) ... (—), 3 (—) ... (—).

puisqu'elle est de l'ordre des vitesses d'interaction modale rencontrées sur le banc d'essais CASTOR. On vérifie par cette simulation que les procédures se comportent correctement, même pour des vitesses relatives élevées entre les structures. Les résultats associés sont rassemblés en figure V.16.

Les phases de contact, maintenues lors de la simulation précédente sont dans ce cas courtes et font intervenir beaucoup plus de paires de nœuds de contact. Ce changement de comportement est directement lié à la modulation des déplacements des nœuds de contact du stator exprimés dans le repère du rotor, la remarque étant valable dans l'autre sens.

Les phases suivantes se distinguent dans cette simulation :

- Pour $0 < t < 1,5 \times 10^{-3}$ s, tous les jeux restent ouverts. On peut constater les ressemblances entre les deux simulations, ce qui n'a rien d'étonnant du fait du faible angle de rotation à ce stade. Cependant, on note que le jeu sur le secteur 1, dénoté par des courbes du type (—) s'ouvre à partir de $t = 1 \times 10^{-3}$ s. À l'inverse le jeu sur le secteur 2, tracé en courbes (—) se referme, alors qu'il s'ouvrirait lors de la simulation précédente.
- À $t = 1,5 \times 10^{-3}$ s, le premier contact se ferme, ce qui a pour conséquence l'apparition d'un effort de réaction. On remarque là encore que l'évolution des jeux associés aux autres nœuds du même secteur est aussi modifiée par l'activation de cette contrainte.
- À $t = 2 \times 10^{-3}$ s, l'effort sur le nœud en contact du secteur 2 commence à faiblir, avant de s'annuler à $t = 2,5 \times 10^{-3}$ s. Au même moment, le décollement du même nœud (ouverture du jeu) est observé
- La suite de la simulation fait intervenir successivement plusieurs secteurs du rouet, du fait de l'alternance ventre positif-nœud-ventre négatif des déformations du stator.

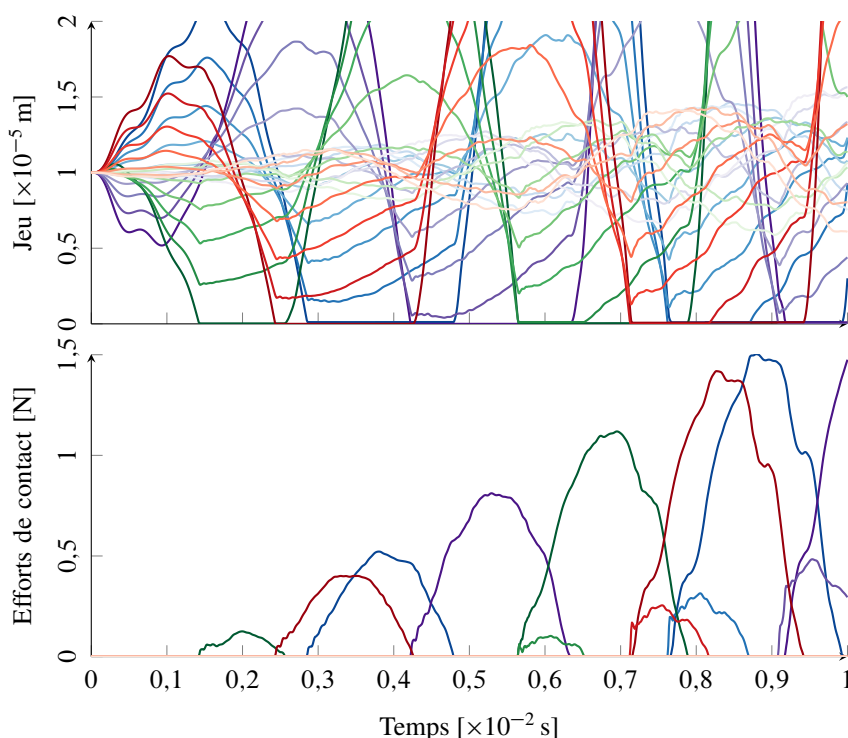


FIGURE V.16 – Simulation avec rotation. Nœuds du secteur 0 (—) ... (—), 1(—) ... (—), 2 (—) ... (—), 3 (—) ... (—).

5.3 Bilan

Ces simulations montrent clairement la capacité des outils développés à tenir compte de contraintes de contact sur plusieurs nœuds et sur des géométries complexes, en dépit des hypothèses simplificatrices employées. De plus, elles permettent d'illustrer de manière simple le comportement des structures en contact pour bien s'approprier les résultats des sections suivantes. En effet, bien que le comportement soit ici plus complexe que dans le cas simplifié étudié au chapitre IV, les observations qualitatives sont assez semblables.

6 Sensibilité des réponses aux paramètres numériques

6.1 Comparaison des algorithmes

Pour pouvoir effectuer la comparaison entre les algorithmes de contact, il est nécessaire, comme précédemment, de réduire les pas de temps de calcul en raison du critère de stabilité imposé par l'algorithme de Carpenter. Dans la configuration étudiée, ce pas de temps est fixé à 2×10^{-7} s. Les résultats des deux algorithmes sont présentés en figure V.17. Les jeux et efforts de contacts sont tracés pour les deux nœuds de contact les plus proches du bord de fuite, visibles sur la figure V.5, et pour tous les secteurs du rotor. Ceux-ci sont en effet les seuls à entrer en contact durant cette simulation.

Dans un premier temps, l'observation de l'évolution du jeu ne permet pas de distinguer les résultats obtenus avec les deux méthodes de calcul. Dans les deux cas, ce sont les paires de nœuds de contact placées sur le bord de fuite qui s'activent. Ceci découle de la forme de la précharge sur la coordonnée modale correspondant au premier mode à trois diamètres nodaux du stator dont une représentation est visible en figure V.12. Tous les secteurs entrent en contact avec le stator, du fait de la rotation. Vers $t \approx 0,6 \times 10^{-2}$ s, la seconde paire de nœuds de contacts s'active.

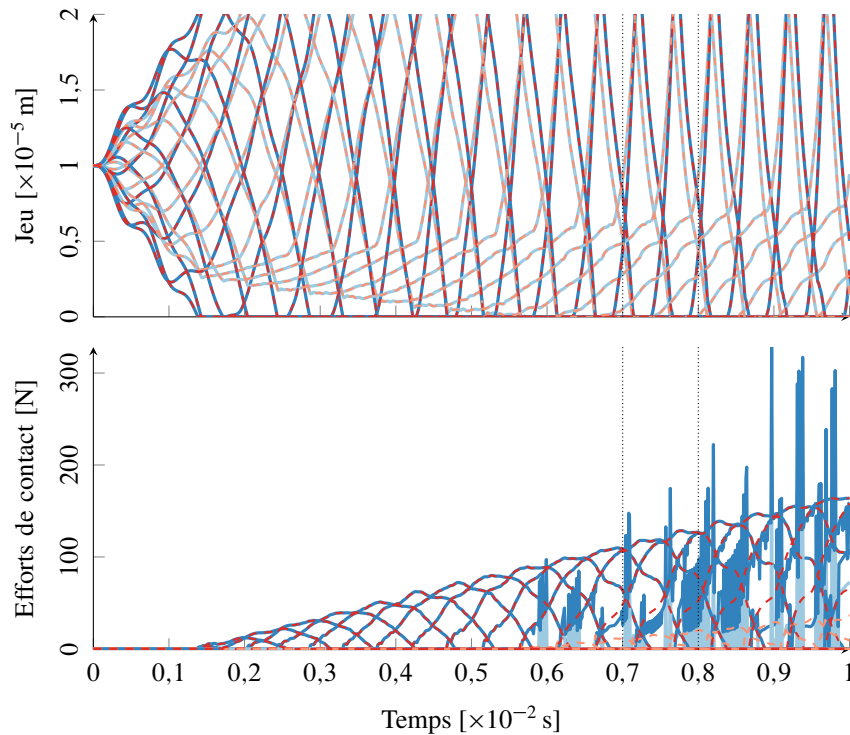


FIGURE V.17 – Comparaison des algorithmes de Carpenter et Moreau–Jean avec reprojexion dans une configuration de contact rotor–stator. Algorithme de Carpenter, nœuds n°1 (—) n°2 (—). Algorithme de Moreau–Jean, nœuds n°1 (---) n°2 (---), zone d’agrandissement de la figure V.18 (⋮⋮).

De la même manière, les efforts calculés avec les deux algorithmes sont tout à fait semblables jusqu’à $t \approx 0,6 \times 10^{-2}$ s. Au-delà, des oscillations apparaissent dans les efforts calculés avec l’algorithme de Carpenter, qui ne sont pas physiques.

La figure V.18 permet de mieux comprendre ce phénomène. Les oscillations n’apparaissent que pour l’algorithme de Carpenter et semblent liées à l’activation simultanée de deux contraintes au moins sur un même secteur. Le grossissement du jeu permet de constater que des pénétrations résiduelles de l’ordre de grandeur du pas de temps (2×10^{-7} s) sont observées à ce stade. Ce problème est probablement lié à la combinaison des méthodes de réduction (qui restreignent les cinématiques admissibles) et de l’algorithme de Carpenter (qui impose une correction en position). En effet, la réduction de modèle entraîne lors de la projection dans l’espace réduit un couplage entre les nœuds de contact, via les modes. Ainsi, avec l’algorithme de Carpenter, dès que deux contraintes ou plus sont activées, certaines difficultés apparaissent puisque l’activation d’une contrainte va entraîner une correction de position de manière *instantanée* sur un autre nœud, et même si celui-ci n’est pas en contact à ce moment. Comme l’activation des contraintes et leur correction se fait en position, si la correction d’une contrainte entraîne une variation suffisante pour *décoller* une autre paire de nœuds de contact, des oscillations numériques apparaissent. On insiste sur le fait que pour un même modèle réduit, les simulations effectuées avec l’algorithme de Moreau–Jean avec reprojexion ne présentent pas d’oscillations des efforts de contact, ni de pénétrations résiduelles notables.

Les temps de calculs sont bien évidemment un paramètre important durant une phase de conception, et en particulier en préconception, où de nombreuses itérations sont nécessaires. Dans le cas de l’algorithme de Carpenter, le pas de temps maximal de calcul est imposé par le critère de stabilité, et on rappelle qu’il vaut ici 2×10^{-7} s. Pour un temps total simulé de 10^{-2} s, l’algorithme de Moreau–Jean a nécessité 1,41 fois plus de temps que celui de Carpenter

L’algorithme de Carpenter est donc ici plus rapide, ce qui est compréhensible au regard du nombre

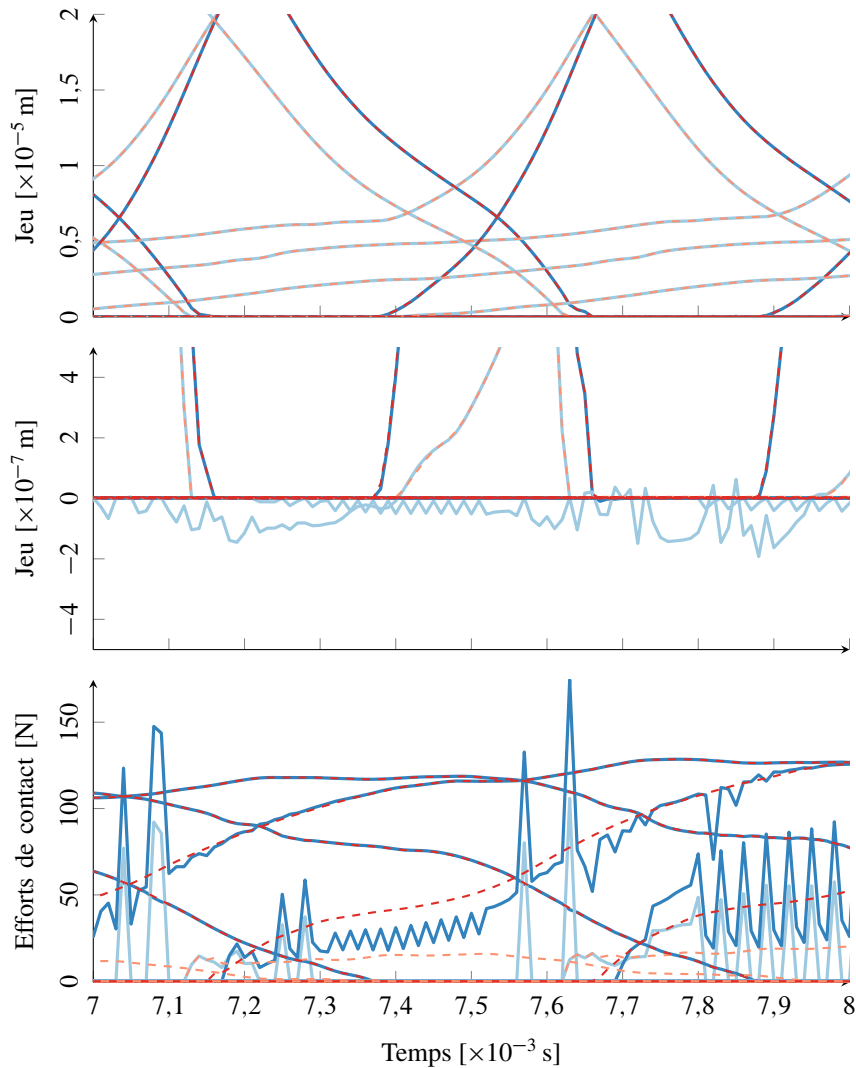


FIGURE V.18 – Zoom de la figure V.17 sur la zone temporelle $t \in 7 \times 10^{-3} - 8 \times 10^{-3}$ s. Algorithme de Carpenter, nœuds n°1 (—) n°2 (—). Algorithme de Moreau–Jean, nœuds n°1 (---) n°2 (---).

d'opérations et de la complexité de chaque algorithme, en particulier dans une configuration de contact rotor–stator. On note cependant que les temps de calcul restent du même ordre de grandeur.

6.2 Influence du pas de temps de calcul

En plus des résultats précédents, on étudie maintenant l'effet du pas de temps de calcul sur les jeux et les efforts de contact au niveau du bord de fuite. Cette étude est faite uniquement avec l'algorithme de Moreau–Jean puisque les résultats déjà présentés pour l'algorithme de Carpenter ont été effectués pour la valeur limite du pas de temps. On cherche ici à identifier la convergence des résultats avec ce paramètre, pour rechercher un compromis entre précision et temps de calcul. Les résultats ont tous été échantillonnés à 10^4 Hz, fréquence correspondante au pas de temps de calcul le plus élevé des simulations comparées, et sont rassemblés en figure V.19.

Un premier constat indique que le comportement en vol libre (sans contact) est déjà relativement bien reproduit, même pour un pas de temps de 10^{-4} s. On remarque cependant que l'importance du pas de temps peut entraîner une erreur importante en position du fait de la prédiction sans considérations de contact à la première itération de la résolution non-linéaire. On note aussi une pénétration résiduelle

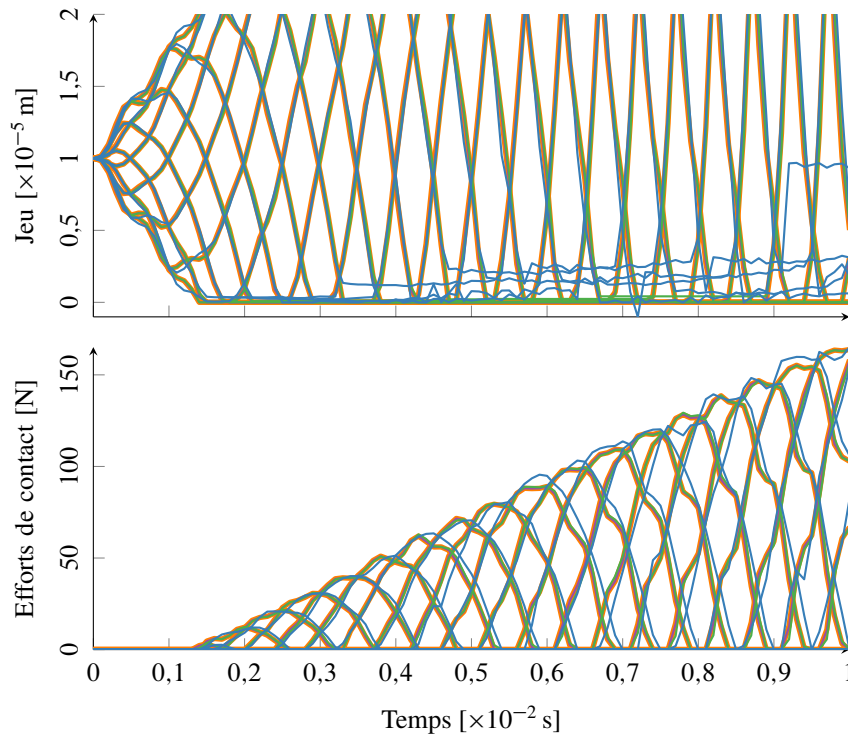


FIGURE V.19 – Réponses dynamiques avec l'algorithme de Moreau–Jean en fonction du pas de temps. $h = 2 \times 10^{-7}$ s (—), 10^{-6} s (—), 10^{-5} s (—), 10^{-4} s (—), zone d'agrandissement de la figure V.20 (⋮⋮).

vers $t \approx 0,7 \times 10^{-2}$ s, qui n'est pas toujours interdite avec cet algorithme si la vitesse relative entre les deux structures tend à ouvrir le jeu.

Ensuite, pour un paramétrage du pas de temps inférieure à 10^{-5} s, seulement de faibles différences subsistent entre les différentes simulations. Aucune pénétration résiduelle n'est alors décelable, et des écarts très faibles sont constatés, même en ce qui concerne les efforts de contact. Pour les distinguer, il est nécessaire d'étudier un agrandissement des résultats en figure V.20.

Il semble donc possible d'effectuer des simulations raisonnablement convergées avec des pas de temps bien supérieurs au pas de temps de stabilité qu'impose l'algorithme de Carpenter, même avec des modèles réalistes des structures présentes dans les compresseurs.

Les temps de calculs requis pour les simulations précédentes sont repris en figure V.21. Sans grande surprise, le temps de calcul est inversement proportionnel au pas de temps. Avec la méthode employée, la boucle de Newton était généralement convergée en deux ou trois itérations. Le temps de calcul pour un pas de temps de 10^{-5} s est de 17,1 s.

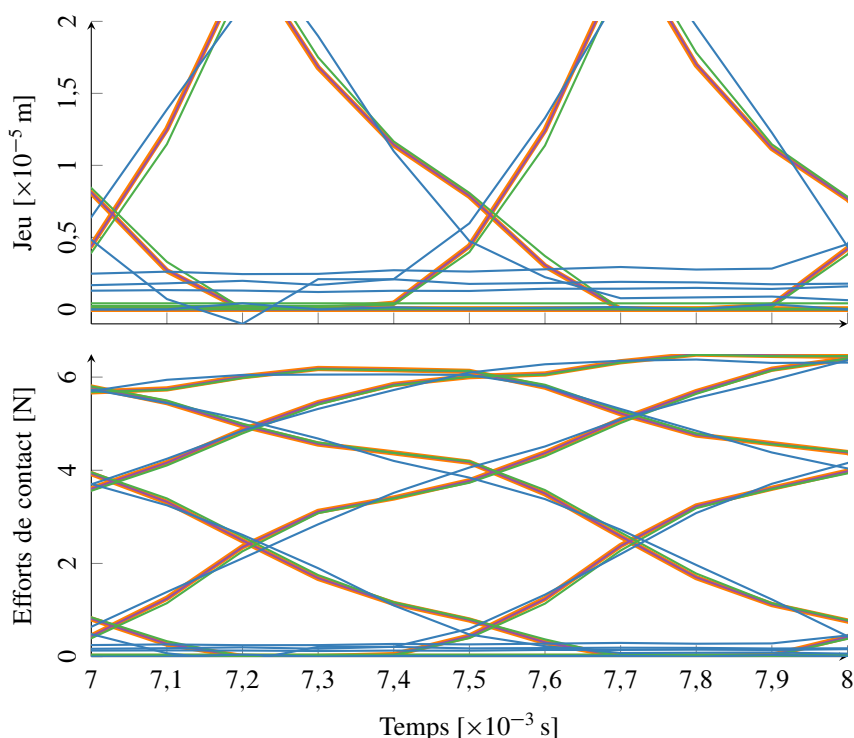


FIGURE V.20 – Zoom de la figure V.19 sur la zone temporelle $t \in 7 \times 10^{-3} - 8 \times 10^{-3}$ s.
 $h = 2 \times 10^{-7}$ s (—), 10^{-6} s (—), 10^{-5} s (—), 10^{-4} s (—).

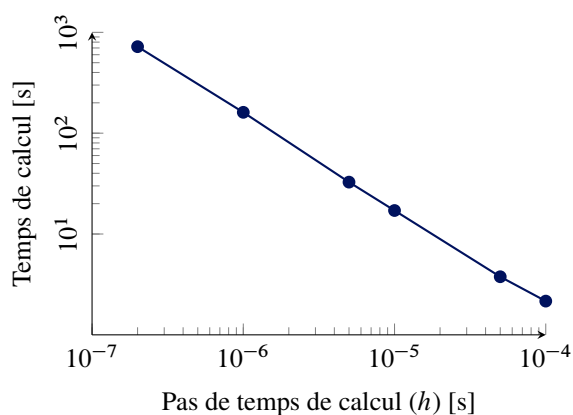


FIGURE V.21 – Temps de calcul de simulations de contact (temps simulé de 10^{-2} s) pour différents pas de temps.

6.3 Bilan sur les effets des paramètres numériques

Cette section présente plusieurs conséquences du choix des paramètres numériques et des algorithmes sur les résultats de simulation. Un des points les plus importants concerne la robustesse de la stratégie d'intégration temporelle implicite développée. En effet, celle-ci présente des résultats tout à fait semblables à l'algorithme de Carpenter, sans les désagréments qui lui sont propres, comme des pénétrations résiduelles lorsque plusieurs paires de nœuds de contact sont actives, ou encore la limite de stabilité inhérente au calcul explicite.

Bien que le modèle simulé soit fortement simplifié grâce aux méthodes de réduction, cette réduction entraîne certaines difficultés pour la résolution du problème de contact, qui sont bien traitées par la

résolution implicite non-régulière et le traitement des contraintes de contact en vitesse, qui semble offrir plus de souplesse que par l’algorithme de Carpenter.

Enfin, l’expérience montre que l’intégration implicite autorise une meilleure souplesse d’utilisation que l’algorithme de Carpenter en permettant de spécifier un pas de calcul plus élevé que le pas imposé par le critère de stabilité linéaire, bien qu’aucune preuve de convergence ne puisse être formulée en présence de non-linéarités. Il est à noter que le choix de ce pas de calcul est fortement dépendant des conditions de simulation, notamment de vitesse de rotation. En effet, pour un même pas de calcul, plus la vitesse de rotation est élevée, moins la résolution circonférentielle du calcul est bonne, ce qui peut fausser certains résultats.

7 Simulations d’interaction modale rotor–stator

7.1 Motivations

Tous les développements présentés jusqu’alors n’ont eu pour but que de démontrer le fondement mathématique ou physique des outils de calcul utilisés dans cette thèse. On cherche ici à reproduire certains phénomènes observés expérimentalement dans d’autres travaux [9, 129] pour déterminer si les outils détaillés précédemment sont suffisamment proches de la réalité pour servir de moyens de prédiction en bureau d’étude ou, plus vraisemblablement, compléter les outils existants.

L’usure n’a cependant pas pu être prise en compte dans les développements, du fait du temps conséquent alloué aux autres développements. Des travaux récents ont toutefois porté sur la modélisation de ces phénomènes [31, 32], dans un contexte d’interaction rotor–stator, et pourraient constituer une base pour de futurs développements.

7.2 Diagramme de coïncidence modale

Pour déterminer la plage de vitesse d’intérêt, un diagramme de coïncidence modale est tracé. Celui-ci rassemble les diagrammes de Campbell des deux structures (cf annexe F) exprimés dans le même repère. On a ici choisi de tracer ce diagramme dans le repère fixe, en figure V.22. De plus, on exprime toutes les fréquences dans la moitié positive du spectre pour faciliter la lecture du diagramme.

Ainsi, les fréquences du stator étant tracées dans le repère fixe, celles-ci apparaissent comme constantes. Les fréquences apparentes des modes du rotor apparaissent plus élevées ou plus faibles quand la vitesse de rotation augmente du fait du changement de repère, et selon que l’onde considérée soit co-rotative ou contra-rotative. Cette interprétation a déjà été abordée à la section I.2. On rappelle que les effets de raidissement ou d’assouplissement centrifuge sont négligeables dans cette étude. Toutefois, on présente le diagramme de coïncidence modale jusqu’à des vitesses inatteignables sur le banc CASTOR II pour bien montrer les possibilités offertes par les outils de simulation.

Plusieurs coïncidences fréquentielles sont observées, pour les modes de 1 à 4 diamètres nodaux. Les diamètres 0 et 5 ne sont pas tracés puisque dans ce cas, les ondes sur le rotor sont stationnaires. Les quatre vitesses d’interaction identifiées définissent les points de fonctionnement d’intérêt pour les simulations de contact. Ces points de coïncidence fréquentielle et spatiale constituent, d’après les critères de Schmiechen, des points privilégiés d’échange d’énergie vibratoire entre les deux structures, puisqu’en ces points, leurs fréquences vibratoires apparentes sont identiques.

7.3 Paramétrage

Le point de fonctionnement correspondant à une interaction modale à trois diamètres nodaux est maintenant étudié. Les fréquences des premiers modes présentant cette répartition spatiale, sont sur le stator à 1782,1 Hz et sur rotor à 2015,8 Hz, dans leurs repères respectifs. Du fait qu’à l’arrêt les fréquences des modes du rotor sont toutes supérieures à celles du stator, les interactions attendues sont

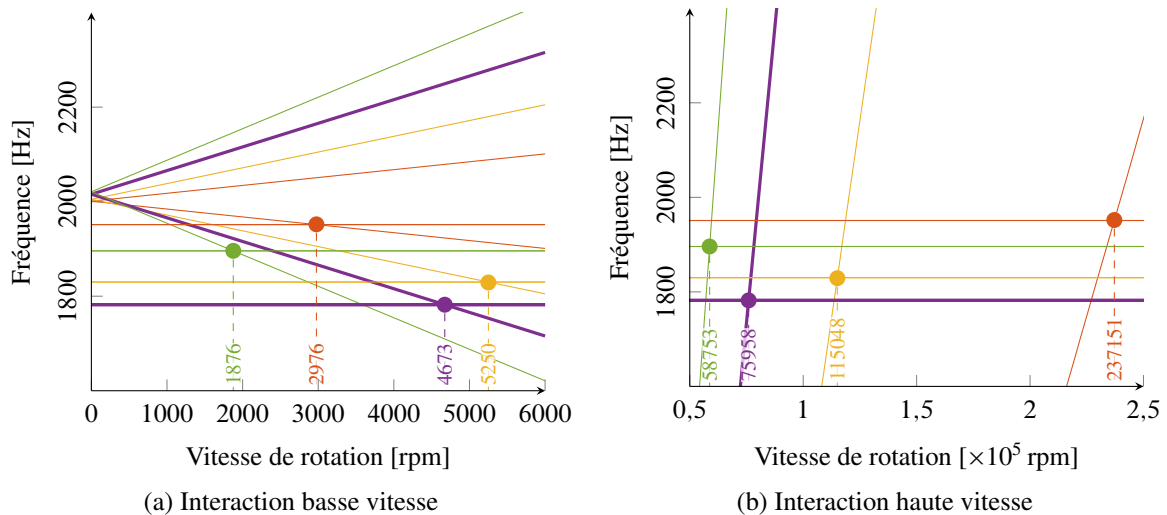


FIGURE V.22 – Diagramme de coïncidence modale dans le repère fixe. Diamètre 1 (—), 2 (—), 3 (—), 4 (—). Points de coïncidence fréquentielle et spatiale (●).

de type rétrograde/contra-rotative à basse vitesse et directe/contra-rotative à haute vitesse, à l'image de ce qui est visible sur la figure I.10a. Les sections V.7.4, V.7.5, V.7.6 décrivent respectivement trois cas de mise en contact.

D'abord, une interaction modale simple est étudiée, en excitant une onde rétrograde sur le stator, à la fréquence propre du mode considéré, soit 1782,1 Hz dans le cas du mode à 3 diamètres. Une attention particulière est apportée aux amplifications et aux contenus spectraux apparaissant lors des différences coïncidences spatiales et fréquentielles, et sur les deux structures. Ensuite, le déclenchement de la même interaction modale est investigué, en présence de perturbations de la géométrie du carter. Ce profil est obtenu en ajoutant une précharge aléatoire au stator, dont l'amplitude augmente progressivement pour fermer le jeu, et devant reproduire un état usé de l'abradable. Cette précharge est calibrée de façon à obtenir un déplacement maximal statique permettant de fermer le jeu au bord de fuite. Dans le même temps, l'amplitude d'excitation de l'onde rétrograde est divisée par deux. Le but est d'évaluer la robustesse de l'interaction modale en présence de défauts géométriques, qui diminuent la corrélation spatiale entre le rotor et le stator. Une dernière simulation sans effets thermiques est effectuée en présence uniquement de ces perturbations, dont l'amplitude est modifiée pour entraîner une pénétration de deux fois le jeu initial en l'absence de contact. Cette simulation doit permettre de se rapprocher des conditions de fonctionnement du banc CASTOR II lors de la campagne d'essais, durant laquelle les structures n'étaient pas excitées.

Les différentes excitations appliquées voient leur amplitude augmenter selon une enveloppe exponentielle permettent d'atteindre le chargement complet en environ 0,1 s après le début de la simulation. Cette enveloppe exponentielle permet de fermer le contact de façon progressive en début de simulation. Durant toutes les simulations, le rotor est libre. La vitesse de rotation suit une rampe couvrant toute la plage de fonctionnement du banc CASTOR, soit la plage 0–6000 rpm. L'utilisation d'une rampe de vitesse permet de tracer toutes les évolutions temporelles en fonction de la vitesse de rotation, ce qui est largement exploité dans la suite pour mettre en évidence l'évolution du contenu fréquentiel en fonction de la vitesse de rotation dans les différents signaux exploités. Le coefficient de frottement utilisé est $\mu = 0,1$ et le coefficient de restitution de la loi d'impact vaut $e = 0$. On rappelle que le coefficient de frottement est particulièrement difficile à déterminer expérimentalement et hautement variable en fonction des vitesses relatives entre les structures, de l'état et des températures des surfaces en contact, une valeur moyenne raisonnable pour le couple de matériaux en contact a donc été utilisée. Almeida [7, §6.3.2] étudie l'effet du coefficient de frottement dans la plage 0–0,2. Dans [100, §1.3.1] ou [30] des

valeurs d'environ 0,3 sont considérées. Le pas de temps de calcul est 10^{-5} s, et un sous-échantillonnage est effectué à 10 kHz, tous les dix pas de temps. Le stockage et le traitement des résultats sont en effet difficiles pour des simulations de même durée à échantillonnage complet, avec des volumes de données de l'ordre de 10 Go . Il faut noter que cet échantillonnage est effectué sans traitement anti-repliement au moyen d'un filtre passe-bas. Ce choix est volontaire, l'application d'un tel filtre peut générer des différences notables dans les résultats temporels, au niveau des degrés de liberté de contact, ce que nous avons souhaité éviter. Des signaux repliés sont toutefois attendus dans les différents résultats.

7.4 Interaction modale basse vitesse

7.4.1 Observations temporelles

Déplacements

L'évolution temporelle des réponses est étudiée dans un premier temps. La vitesse de rotation de l'arbre, qui suit une rampe, étant imposée, les résultats sont tracés en fonction de celle-ci.

D'abord les évolutions temporelles des déplacements axiaux des nœuds de la tête de pale du rotor, au bord d'attaque et au bord de fuite, ainsi que ceux des nœuds du bord de fuite du stator, sont affichées en figure V.23. Pour repérer les réponses aux vitesses de coïncidence modale attendues, un repère vertical est aussi tracé à l'abscisse des vitesses telles que prédites par le critère linéaire de Schmiechen.

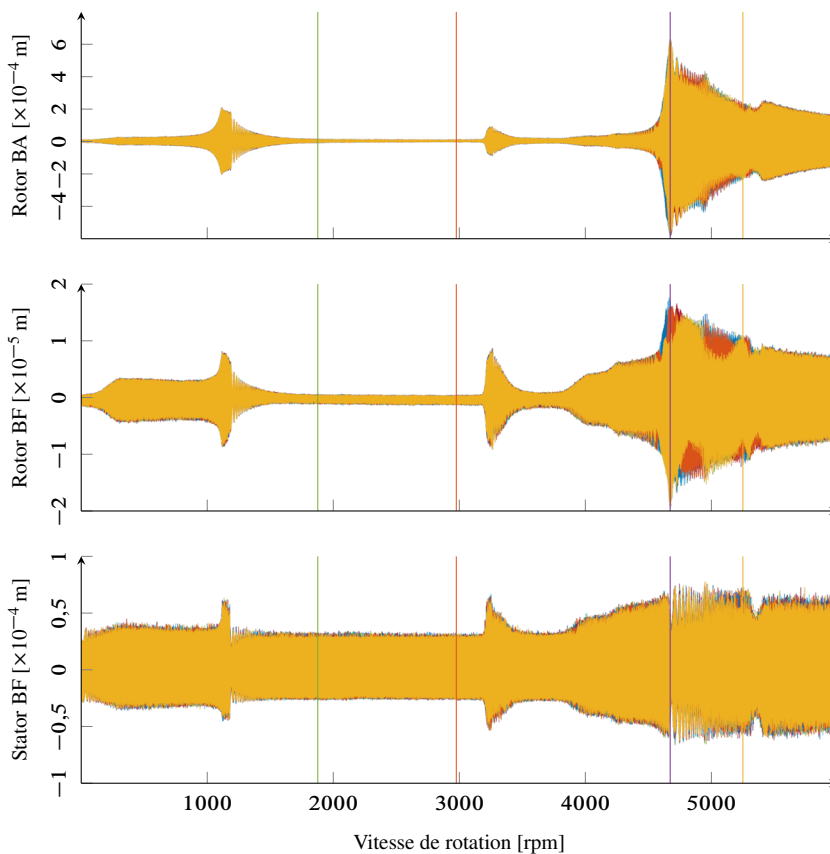


FIGURE V.23 – Déplacements axiaux au bord de fuite. Coïncidences modales à 1 (I), 2 (I), 3 (I), 4 (I) diamètres.

En observant les réponses du rotor et du stator, on remarque que les deux structures vibrent tout au long de la simulation. Cependant, une forte amplification émerge au passage de la vitesse d'interaction prédite, particulièrement visible sur les déplacements des bords d'attaque. Aucune amplification notable

n'est visible au croisement des autres conditions d'interaction. En revanche, deux amplifications plus faibles sont visibles autour de $\Omega \approx 1200$ rpm et $\Omega \approx 3300$ rpm.

Jeux et efforts de contact

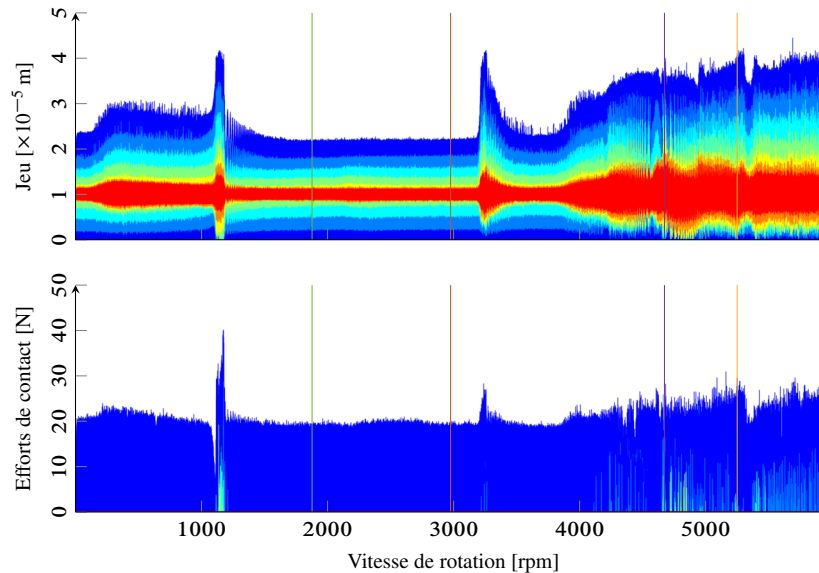


FIGURE V.24 – Jeux et efforts normaux de contact. Coïncidences modales à 1 (I), 2 (I), 3 (I), 4 (I) diamètres.

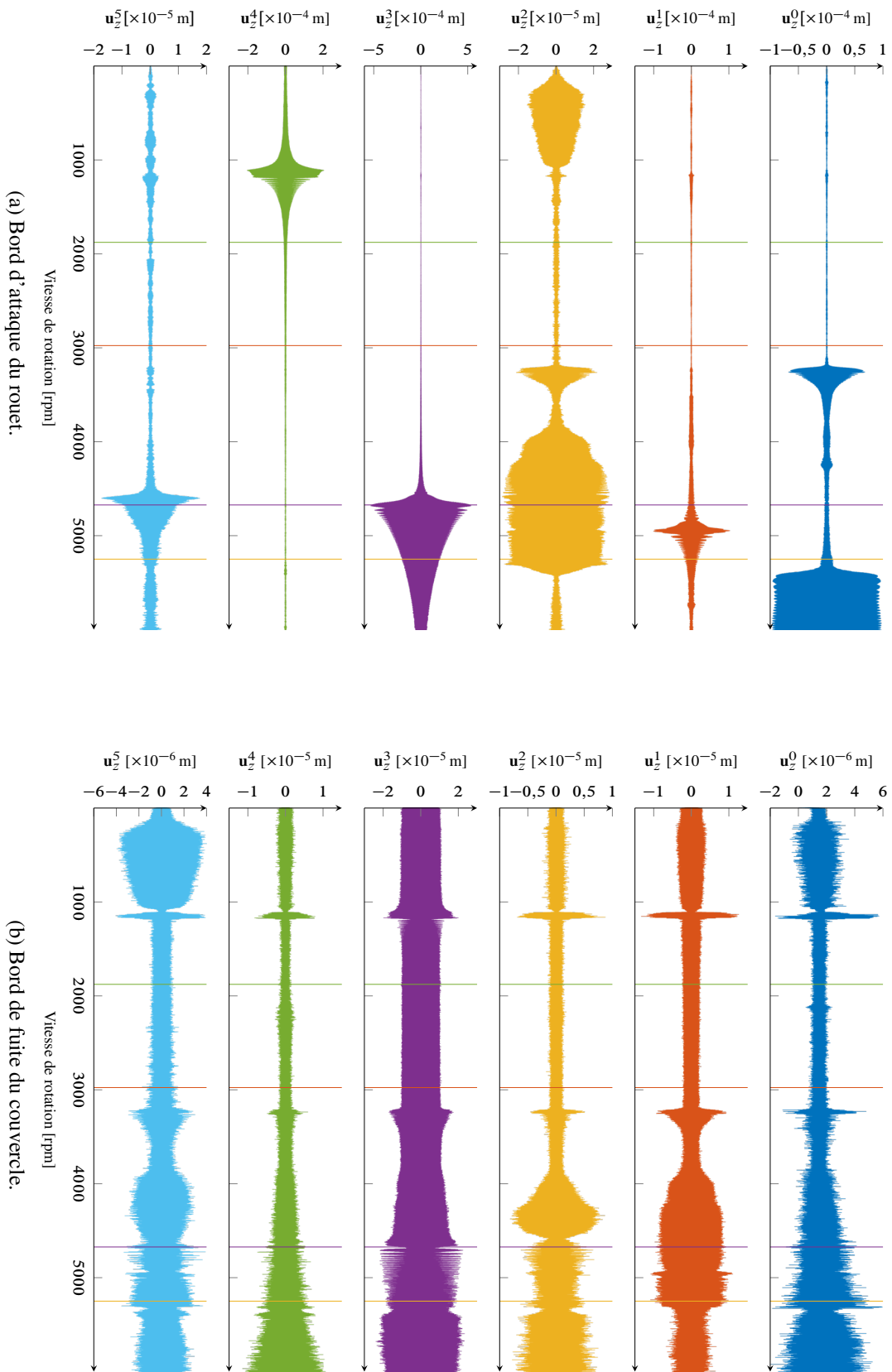
Les efforts de contact normaux, obtenus au moyen des multiplicateurs de Lagrange associés à la correction de vitesse, et les jeux, représentés en figure V.24 sont d'abord étudiés. La ligne de contact n°1 (—) participe majoritairement aux contacts durant la simulation. Les autres lignes, plus proches du bord d'attaque présentent pour cette simulation un jeu généralement ouvert, excepté lors des amplifications déjà identifiées. Lors du passage de la condition d'interaction, les efforts de contact restent du même ordre de grandeur que pour d'autres vitesses de rotation alors que les amplitudes vibratoires augmentent fortement, ce qui indique un mouvement presque en phase entre les deux structures. À l'inverse, l'amplification à $\Omega \approx 1200$ rpm se démarque par des efforts de contact doublés par rapport aux efforts constatés pour des vitesses légèrement supérieures.

Filtrage des diamètres nodaux dans le domaine temporel

Une décomposition de la réponse temporelle sur les différents diamètres est effectuée sur les déplacements du bord de fuite du stator sur la ligne de contact n°1, en figure V.25b. Une décomposition analogue est effectuée sur les déplacements axiaux du bord d'attaque du rotor, figure V.25a.

La participation de plusieurs harmoniques spatiaux est observée, principalement celle à 3 diamètres sur les deux structures, en particulier sur le rotor. Sur le stator, cette participation intervient dès le début de la simulation du fait de l'excitation de ce type d'onde. Des participations du même ordre de grandeur des harmoniques 1, 2, et 4 sont visibles. Sur le rotor, les harmoniques 3 et 4 ont les réponses les plus marquées. Les harmoniques 0 et 1 ont des réponses 50 % plus faibles au mieux. Les harmoniques 2 et 5 participent à hauteur de moins d'un dixième de l'amplitude de l'harmonique 3. L'amplification constatée au passage de la condition d'interaction modale à trois diamètres nodaux est essentiellement composée de l'harmonique 3. Les deux autres amplifications sont, sur le rotor, associées aux harmoniques 4, et 0 et 2 respectivement. Sur le stator, tous les harmoniques participent durant ces interactions. À part pour le diamètre trois, aucune amplification n'est constatée au croisement d'une condition de coïncidence modale.

FIGURE V.25 – Participation des harmoniques spatiaux dans les déplacements axiaux. Coïncidences modales à 1 (I), 2 (II), 3 (III), 4 (IV) diamètres.



7.4.2 Analyses fréquentielles

Pour mieux comprendre les phénomènes intervenant lors des contacts, des traitements fréquentiels des signaux viennent compléter les analyses temporelles. Des spectrogrammes sont principalement employés, permettant de caractériser l'évolution temporelle du contenu spectral des signaux, au prix d'un compromis entre les résolutions dans les domaines fréquentiel et temporel. Des diagrammes fréquences–diamètres sont aussi utilisés, qui associent les harmoniques spatiaux et le sens de propagation des ondes avec les harmoniques fréquentiels des signaux.

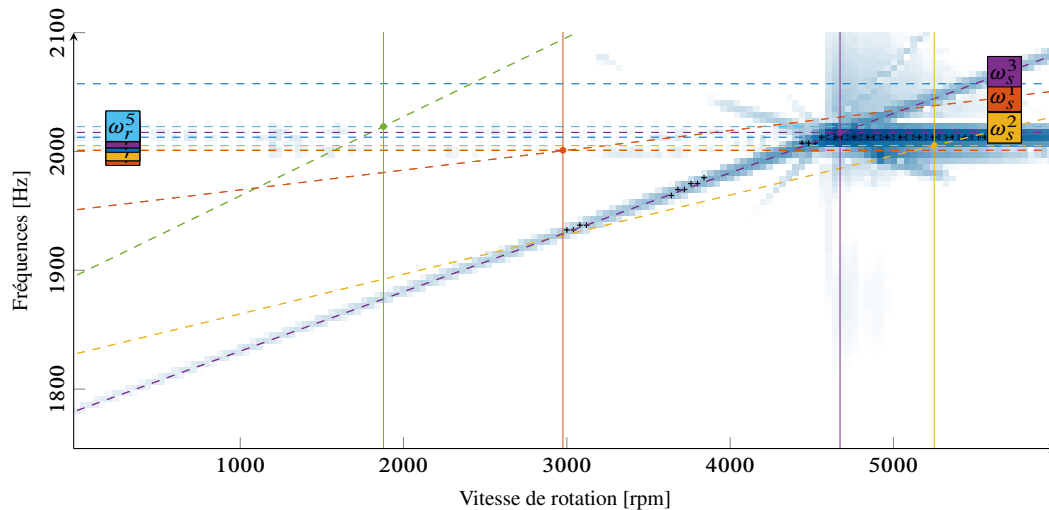
Spectrogrammes

Dans un premier temps, on étudie les spectrogrammes tracés à partir des déplacements axiaux du nœud de bord d'attaque de la pale n°1 du rouet, et sur le stator, les déplacements axiaux du nœud de la ligne de contact n°1 placé à une position angulaire de 0°. Ces spectrogrammes sont tracés en figure V.26.

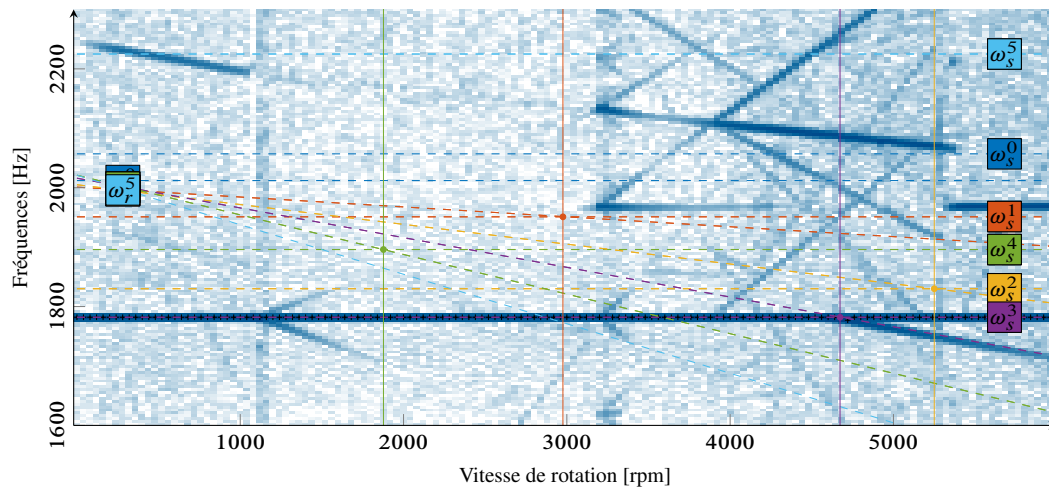
Pour en faciliter la lecture, plusieurs aides visuelles ont été superposées sur les graphiques. D'abord on a tracé les maxima sur chaque bande du spectrogramme, soit les maxima de chaque transformée de Fourier discrète sur une bande de temps de 0,2 s avec les paramètres de calcul choisis, identiques pour les deux structures. Ces indicateurs permettent de localiser dans le temps et en fréquence les composantes majoritaires du signal au cours de la simulation. On a aussi superposé les fréquences propres des deux structures issues des caractérisations modales effectuées sans contact par résolution d'un problème aux valeurs propres. Les fréquences du rotor sont indiquées par des courbes en pointillés (- -) libellées $\overline{\omega_r^k}$ où k est le nombre de diamètres du mode concerné, associé à un code couleur particulier déjà utilisé pour les analyses à diamètres effectuées précédemment. De la même façon, les fréquences du stator sont libellées $\overline{\omega_s^k}$. Du fait de l'étude d'une interaction entre une onde contra-rotative sur le rotor et une onde rétrograde sur le stator, on ne trace que les fréquences propres associées à ces ondes. Du fait du changement de repère nécessaire au passage du rotor au stator, les fréquences du rotor diminuent dans le repère fixe avec la vitesse de rotation. À l'inverse, les fréquences du stator vues dans le repère tournant augmentent. On rappelle que les effets de raidissement et d'assouplissement centrifuge sont négligés dans notre stratégie de modélisation. Les fréquences propres de chaque structure dans son repère sont donc indépendantes de la vitesse de rotation. Enfin, afin de permettre à la fois une bonne lecture des résultats et un filtrage des signaux faibles l'échelle de couleur est logarithmique et tous les atomes du spectrogramme d'une amplitude inférieure au millionième de l'atome dont la densité spectrale de puissance est la plus grande sont négligés, donc blancs.

Sur le stator, la réponse majoritaire sur la totalité de la simulation se situe à la fréquence d'excitation de l'onde rétrograde, calée sur la fréquence propre du premier mode de flexion du couvercle à trois diamètres, $\overline{\omega_s^3}$, 1782,1 Hz. Au croisement des vitesses associées aux amplifications déjà observées, des signaux possédant des fréquences variant avec la vitesse de rotation sont observés autour de la fréquence d'excitation, en particulier au croisement de la condition de coïncidence modale. Cette fréquence particulière s'avère être la fréquence du mode à trois diamètres nodaux de la première famille modale du rouet, vue dans le repère fixe, et qui chute avec une pente de -3Ω . En effet, sur le rotor, on constate au même moment que la composante majoritaire du signal se localise au niveau du mode à trois diamètres nodaux du rouet. Bien que le spectrogramme ne soit pas filtré en diamètres, les observations précédentes permettent de distinguer la participation de ce mode, dont l'amplitude vibratoire décroît une fois la condition d'interaction passée. Ce comportement est typique des régimes transitoires de vitesse de rotation durant lesquels des sources d'excitation vont rapidement croiser des modes. À côté de cette composante majoritaire, on retrouve plusieurs signaux distincts.

On observe aussi d'autres composantes dans le signal, en particulier après la seconde amplification. Les fréquences de ces signaux semblent évoluer linéairement avec la vitesse de rotation, ce sont donc des modulations de fréquence ou d'amplitude par la vitesse de rotation, soit des *side-bands*, déjà étudiées dans [7, §4.5].



(a) Rotor, bord d'attaque, pale n°1



(b) Stator, bord de fuite, position 0°

FIGURE V.26 – Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator. Fréquences propres vues dans les repères respectifs des deux structures (- -). Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+). Coïncidences modales à 1 (I), 2 (I), 3 (I), 4 (I) diamètres.

Dans une gamme de fréquences plus élevées, autour des fréquences de la deuxième famille modale du rouet (figure V.27), on trouve les harmoniques deux et trois des signaux principaux observés précédemment, avec des densités spectrales de puissance plus faibles, ainsi que certaines composantes repliées. L'harmonique deux du signal observé sur le rotor est une réponse selon une onde à six diamètres. Celui-ci apparaît comme un signal à quatre diamètres du fait du nombre de secteurs présents sur le rotor, au nombre de 10. Tout signal de pulsation spatiale supérieure à 5 est donc replié. Le diagramme zig-zag / ZZENF / SAFE en annexe F explique les différents diamètres associés au repliement d'harmoniques d'une onde. Bien que l'amplification semble localisée au niveau des modes à trois diamètres nodaux, on a déjà pu constater que seuls les modes à quatre diamètres nodaux ω_r^4 participent de manière notable à cette vitesse de rotation sur le rouet.

En dehors de cette première amplification, les réponses sur le rouet semblent concentrées autour des modes à deux ω_r^2 et zéro ω_r^0 diamètres, sans qu'une excitation issue de la vitesse de rotation soit décelable.

Sur le couvercle, on remarque la présence d'une modulation des harmoniques deux et trois de l'exci-

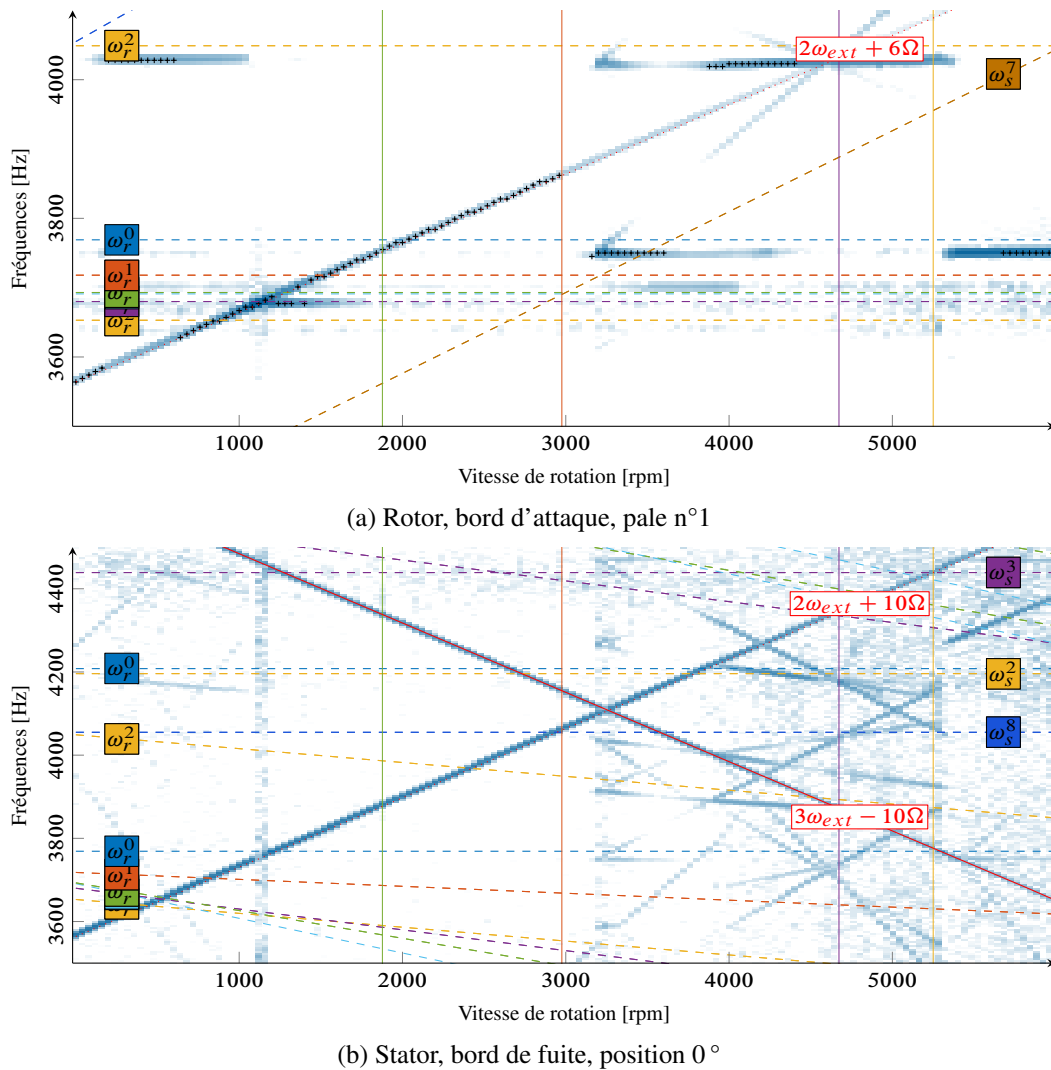


FIGURE V.27 – Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator. Fréquences propres vues dans les repères respectifs des deux structures (- -). Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+). Coïncidences modales à 1 (|), 2 (|), 3 (|), 4 (|) diamètres.

tation par la fréquence de passage des pales, soit des signaux de la forme $2\omega_{ext} + 10\Omega$ et $3\omega_{ext} - 10\Omega$.

Diagrammes fréquences–diamètres

Un dernier point à aborder pour confirmer que le comportement observé dans cette simulation est bien une interaction modale au sens de Schmiechen est celui du sens de propagation des ondes. En effet, pour avoir une interaction modale, les sens de propagation doivent être identiques sur les deux structures. En l'occurrence, les ondes doivent être rétrograde sur le stator et contra-rotative sur le rotor. Pour identifier le sens de propagation de ces ondes, on trace des diagrammes fréquences-diamètres, qui associent les fréquences temporelles et spatiales d'un signal, ainsi que le sens de propagation des ondes. Ces diagrammes sont regroupés en figure V.28.

Les diagrammes fréquences-diamètres confirment les analyses précédentes en montrant, autour de la vitesse d'interaction à trois diamètres nodaux, que les deux structures se déforment selon des ondes à trois diamètres nodaux qui se propagent conformément à l'attendu. Il s'agit donc bien dans un cas d'interaction modale.

Les analyses ne permettent pas de vérifier le caractère stable ou instable de l'interaction modale.

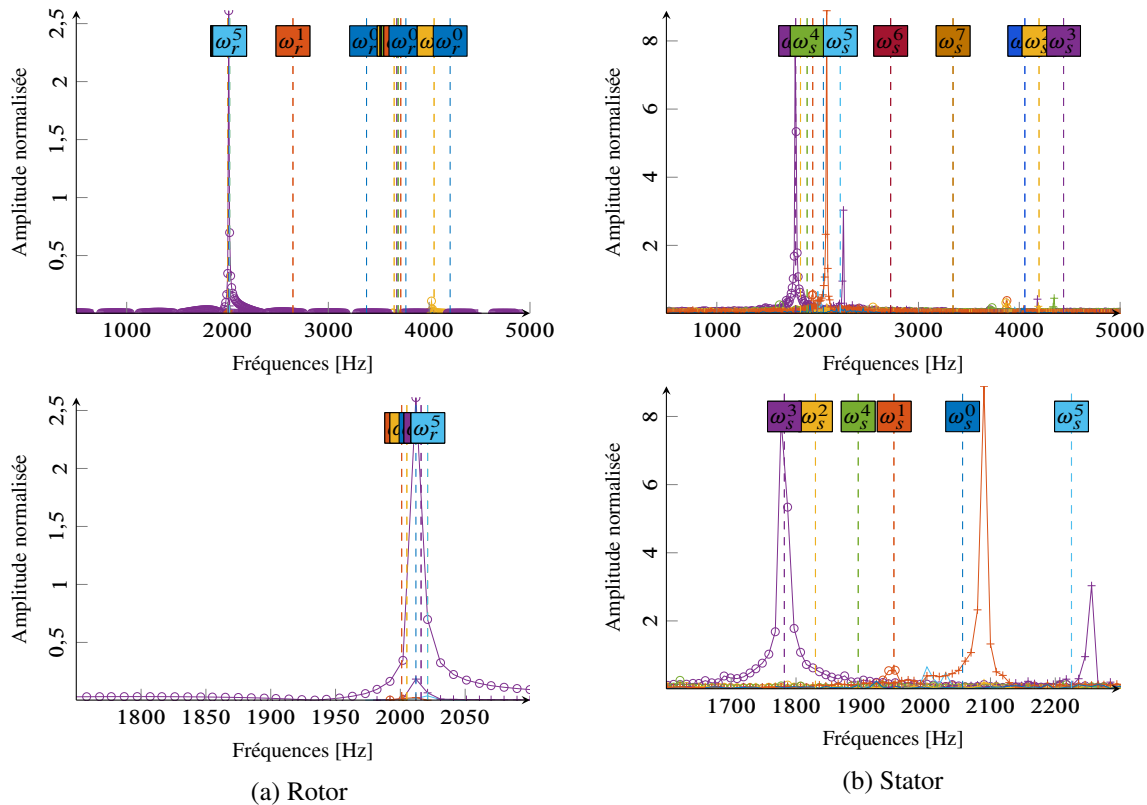


FIGURE V.28 – Diagrammes fréquences-diamètres sur la plage de vitesse 4660–4680 rpm. Ondes co-rotatives / directes (\rightarrow), contra-rotatives / rétrogrades (\leftarrow).

Un moyen de caractériser la stabilité de l'interaction est d'effectuer une simulation avec une vitesse de rotation égale à la vitesse d'interaction, d'engager le contact, puis de stopper l'excitation du couvercle. Si les amplitudes vibratoires continuent d'augmenter, l'interaction est instable, sinon celle-ci est stable. Une telle simulation a été effectuée, mais n'est pas détaillée ici. L'enseignement principal est qu'un régime vibratoire amorti s'est établi à la suite de la coupure de l'excitation, ce qui montre que l'interaction modale obtenue est stable dans ces conditions de vitesse de rotation. Cette observation est en accord avec les travaux de Schmiechen [129].

7.4.3 Bilan

Cette première simulation a permis de mettre en évidence le phénomène d'interaction modale de type contra-rotative/rétrograde. Les principales observations montrent un bon accord entre les prédictions de l'outil numérique et les travaux précédents sur le sujet, notamment concernant l'appropriation spatiale et fréquentielle des déformées du rotor et du stator.

7.5 Interaction à basse vitesse en présence de perturbations

7.5.1 Spécificités de ce cas de simulation

Dans la mesure où l'usure n'est pas prise en compte, de même que certains défauts géométriques de l'abradable revêtant le couvercle du banc CASTOR, une simulation a été effectuée dans des conditions de contact tendant à dégrader l'interaction. La simulation précédente a été effectuée en imposant des déformées très pures sur le couvercle, ce qui est relativement peu représentatif du comportement réel du stator, mais qui permet de mettre clairement en évidence le phénomène d'interaction modale.

L'apparition d'une interaction modale sur la même plage de vitesse est toujours étudiée, mais dans un contexte plus complexe, en ajoutant une déformée aléatoire du couvercle, devant représenter un état usé de l'abradable. Tous les autres paramètres sont maintenus identiques à ceux utilisés pour la simulation précédente.

7.5.2 Observations temporelles

Déplacements

L'observation des déplacements axiaux des deux structures, en figure V.29, permet de déceler des différences notables par rapport à la simulation précédente. À l'inverse de cette dernière, ce nouveau cas d'étude est caractérisé par des amplifications répétées au cours de la simulation, pour plusieurs vitesses de rotation. On remarque toutefois qu'une nouvelle amplification particulièrement importante est visible autour de la vitesse d'interaction à trois diamètres prédite par le critère de Schmiechen. Une fois encore, les amplifications sont simultanées sur les deux structures, ce qui démontre leur interaction.

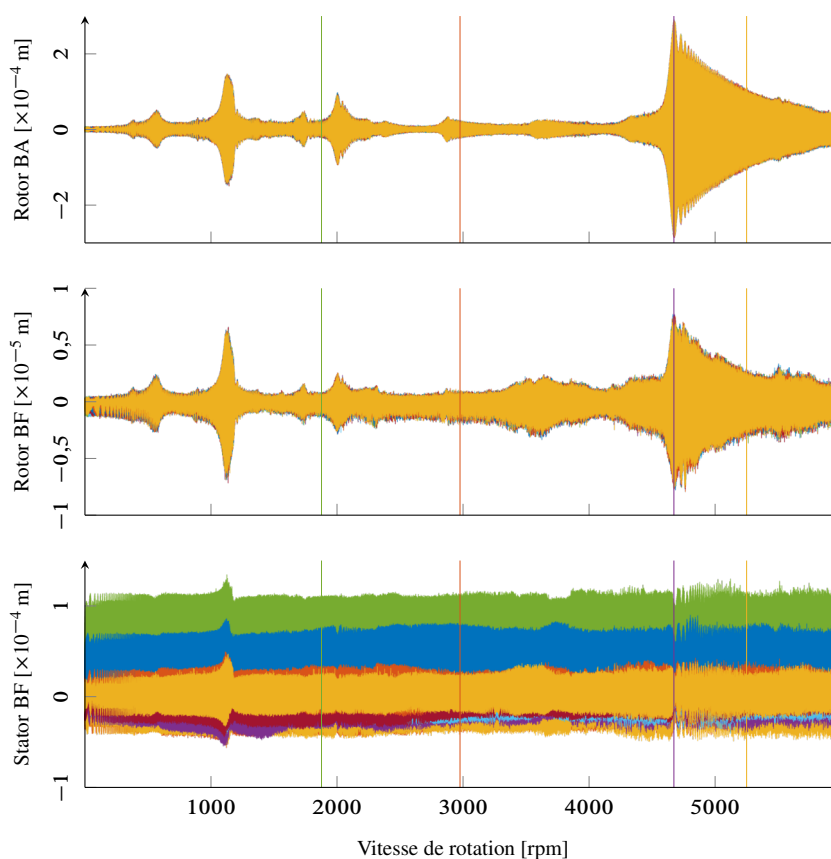


FIGURE V.29 – Déplacements axiaux au bord de fuite. Coïncidences modales à 1 (I), 2 (I), 3 (I), 4 (I) diamètres.

Sur le bord de fuite du stator, l'effet de la précharge statique permettant d'introduire un défaut de forme sur le couvercle est bien visible. La différence est particulièrement visible par rapport à la figure V.23. Une fois de plus, l'amplification la plus importante a lieu autour de la vitesse de coïncidence associée aux modes à trois diamètres nodaux.

Jeux et efforts de contact

Par rapport à la simulation précédente, le comportement en jeu et en efforts de contact est qualitativement le même. Toutefois, plus aucune amplification des efforts de contact vers $\Omega \approx 3200$ rpm n'est

constatée, en figure V.30. De plus, les lignes de contact 2 à 7 participent moins au contact, en particulier au passage de la condition d’interaction à trois diamètres. Il est probable que la précharge permettant de fermer le jeu qui a en partie remplacé l’excitation dynamique entraîne une baisse des efforts de contact.

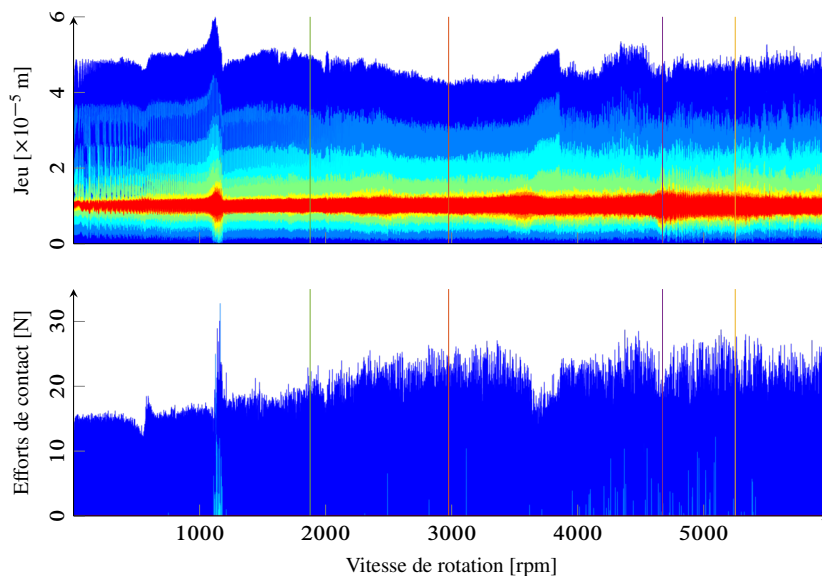


FIGURE V.30 – Jeux et efforts normaux de contact. Coïncidences modales à 1 (I), 2 (I), 3 (I), 4 (I) diamètres.

Filtrage des diamètres nodaux dans le domaine temporel

Les décompositions des déplacements en harmoniques spatiaux, rassemblées en figure V.31, montre une participation de tous les harmoniques spatiaux et sur les deux structures.

Sur le stator, tous les harmoniques possèdent une composante quasi-statique, due à la précharge, excepté la composante à trois diamètres. Par ailleurs, un comportement dynamique est observé pour tous les harmoniques, et durant l’ensemble de la simulation.

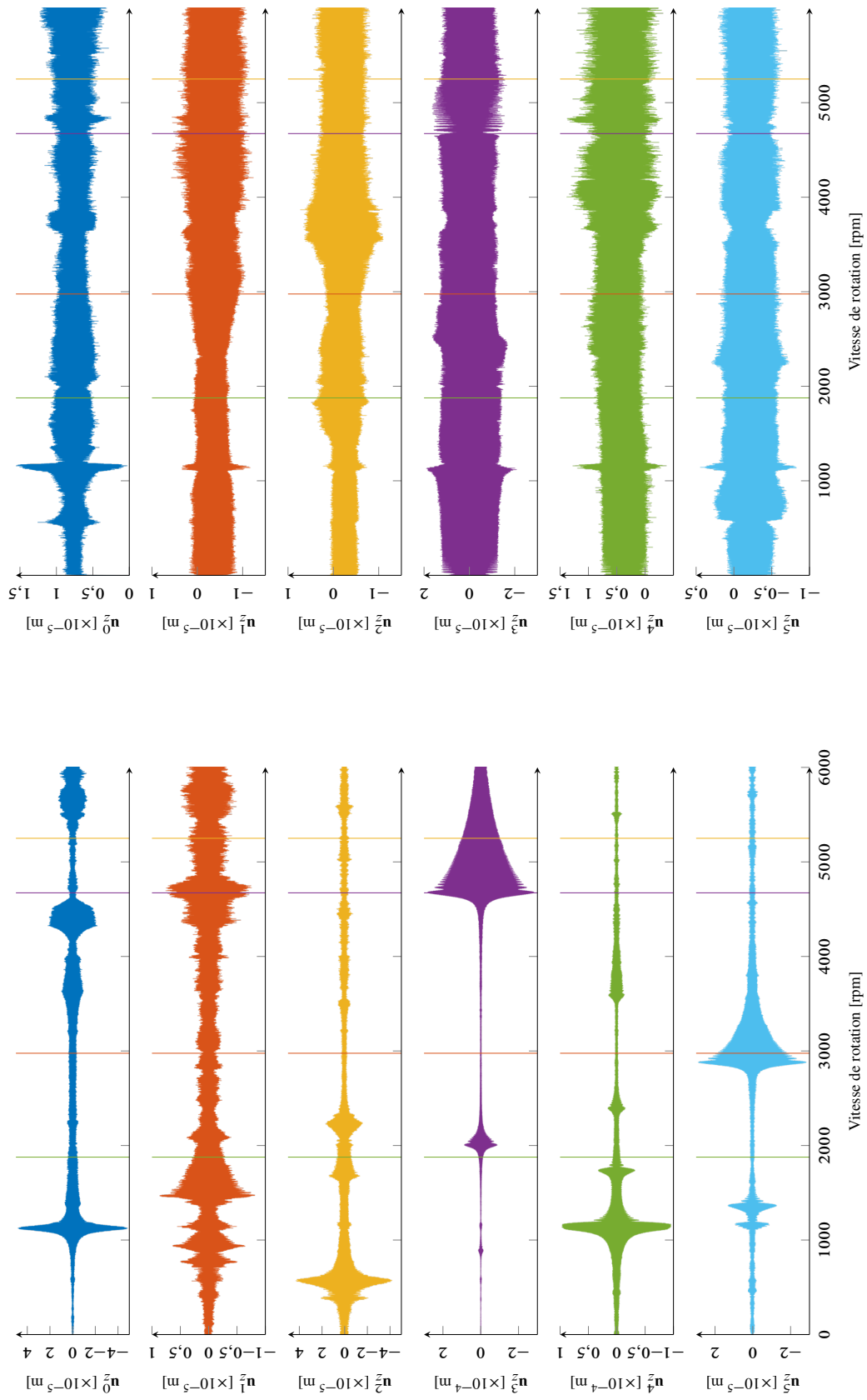
Sur le rotor, aucune composante quasi-statique n’est observée, sur aucun harmonique. Les harmoniques trois et quatre restent les harmoniques prépondérants dans les déplacements. Une amplification de l’harmonique trois au croisement de la condition d’interaction modale associée est à nouveau observée.

7.5.3 Analyses fréquentielles

Spectrogrammes

L’évolution du contenu spectral des signaux au cours de la simulation est analysée, au moyen des spectrogrammes des voies du rotor et du stator en figure V.32. Ces spectrogrammes montrent une grande richesse spectrale des réponses en déplacement des deux structures. Sur le rouet et le couvercle, des composantes du signal dues à l’excitation du stator à la fréquence de son premier modes à trois diamètres à 1782,1 Hz sont retrouvées. Toutefois, les composantes de faible intensité visibles dans la dernière simulation, et qui n’ont pas pu être expliquées sont indécélabes ici. De nombreuses composantes de signaux issus de la modulation de la fréquence d’excitation par la vitesse de rotation sont cependant constatées.

Sur le rouet, des signaux semblables à des side-bands de la fréquence de l’excitation sont présents, signaux dont la fréquence est de la forme $[\omega_{\text{ext}} \pm n\Omega]$. Sur le spectrogramme du rotor sont superposés les side-bands +1 à +8 de la fréquence d’excitation. Comme cette fréquence évolue déjà avec une pente de +3, les pentes de ces side-bands vont de +4 à +11. Ces side-bands excitent les modes de la



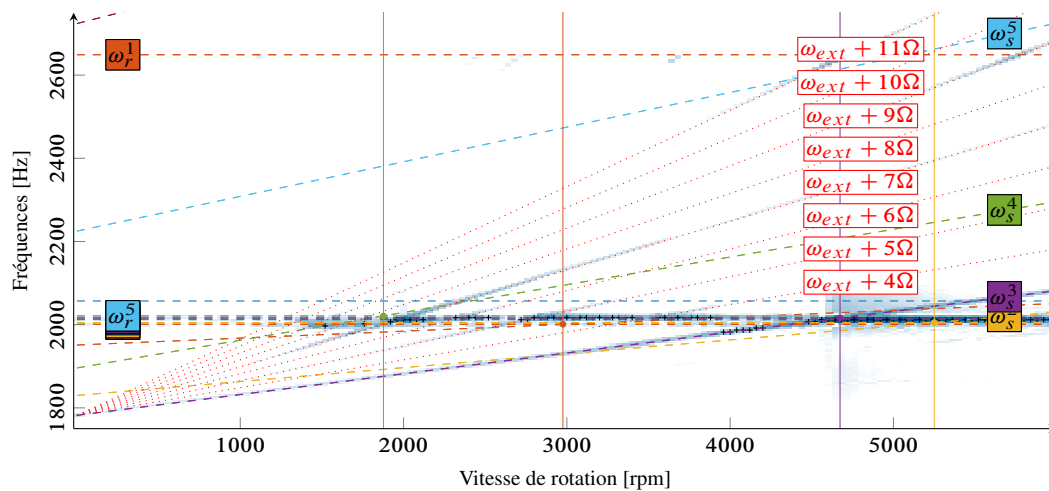
(a) Bord d'attaque du rouet.

(b) Bord de fuite du couvercle.

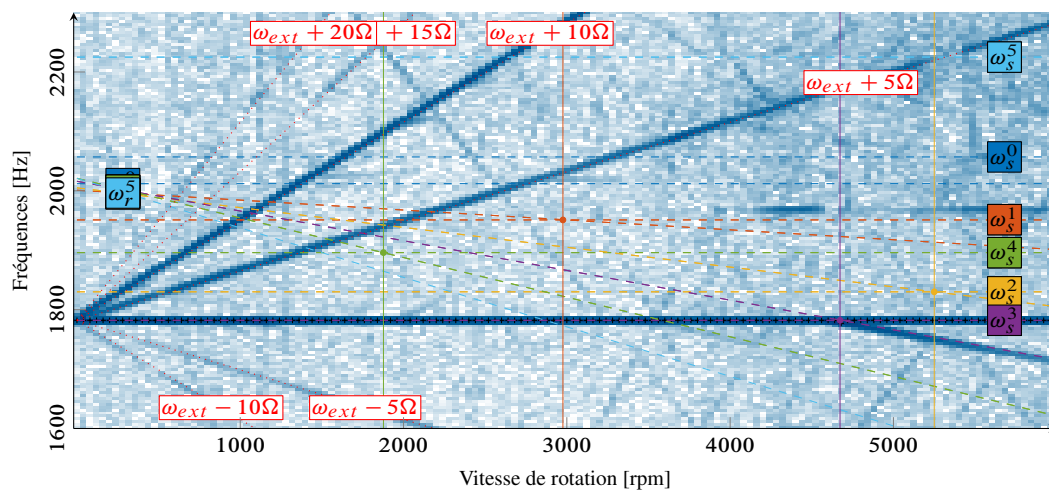
FIGURE V.31 – Participation des harmoniques spatiaux dans les déplacements axiaux. Coïncidences modales à 1 (■), 2 (■), 3 (■), 4 (■) diamètres.

première famille modale du rouet, au point de constituer la composante majoritaire du signal (hormis la partie statique), pour des vitesses de rotation relativement éloignées de la vitesse d'interaction à trois diamètres. Dès que la vitesse de rotation est suffisamment proche de la vitesse d'interaction, la réponse du mode à trois diamètres devient prépondérante, et les comportements déjà observés dans les résultats de la première simulation sont alors retrouvés. Aucun harmonique de la vitesse de rotation n'est visible dans cette simulation sur les déplacements du rouet.

Sur le stator, une participation majoritaire de la fréquence d'excitation, mais aussi, des side-bands de celle-ci sont visibles. Ces side-bands sont de la forme $\omega_{ext} \pm 5n\Omega$, avec des participations plus importantes des side-bands supérieures ($n > 0$). Cette modulation n'a pas été constatée dans le premier cas d'interaction simulé. Il semble qu'elle soit liée au passage des pales du rouet, même si des side-bands du type $\omega_{ext} \pm 10n\Omega$ pouvaient être attendus.



(a) Rotor, bord d'attaque, pale n°1



(b) Stator, bord de fuite, position 0°

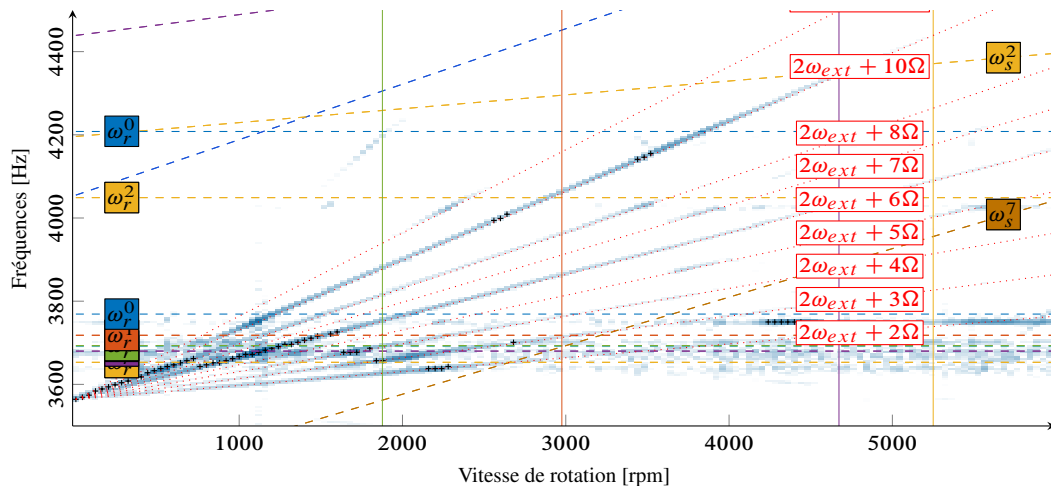
FIGURE V.32 – Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator. Fréquences propres vues dans les repères respectifs des deux structures (- -). Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+). Coïncidences modales à 1 (|), 2 (|), 3 (|), 4 (|) diamètres.

Dans la bande de fréquences autour de la deuxième famille modale du rouet sont présents l'harmonique deux de l'excitation et ses modulations par la vitesse de rotation. Cette fréquence évoluant déjà en $+6\Omega$ dans le repère du rouet, les side-bands -4 à $+2$ et la side-band $+4$ sont tracés. Une participation majoritaire du mode à 0 diamètres de la seconde famille modale du rouet est constatée juste avant le

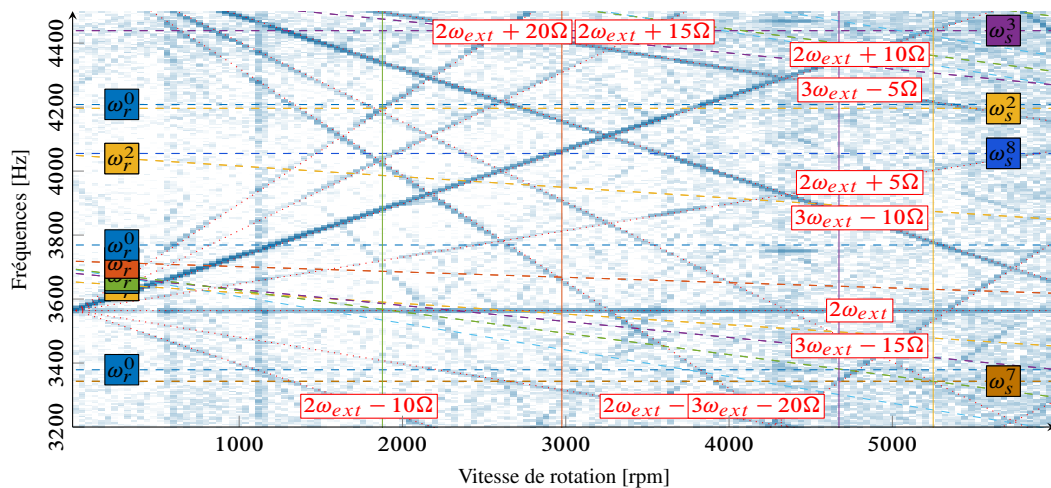
passage de la condition d'interaction modale.

Sur le couvercle, l'harmonique deux de l'excitation $2\omega_{ext}$ et des side-bands de cet harmonique sont observés, de la forme $2\omega_{ext} \pm 5n\Omega$ ainsi que celles de l'harmonique trois, de la forme $3\omega_{ext} \pm 5n\Omega$ qui apparaissent repliées. En effet, l'harmonique trois est au delà de la moitié de la fréquence d'échantillonnage de 10 kHz. Ces signaux sont à différencier des harmoniques deux des side-bands identifiées dans la bande de fréquences 1750–2100 Hz (de la forme $\omega_{ext} \pm 5n\Omega$), qui seraient de la forme $2\omega_{ext} \pm 10n\Omega$. Ce sont donc des side-bands des harmoniques deux et trois de l'excitation et non pas des harmoniques deux des side-bands de l'excitation.

Ceci montre qu'il est clairement possible d'exciter les modes supérieurs du rouet, même en favorisant la première famille modale au moyen d'une excitation extérieure, en raison des harmoniques supérieurs de cette excitation.



(a) Rotor, bord d'attaque, pale n°1



(b) Stator, bord de fuite, position 0°

FIGURE V.33 – Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator. Fréquences propres vues dans les repères respectifs des deux structures (- -). Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+). Coïncidences modales à 1 (|), 2 (|), 3 (|), 4 (|) diamètres.

Diagrammes fréquences–diamètres

Les diagrammes fréquences-diamètres permettent à nouveau de confirmer la présence d'une interaction modale à trois diamètres au passage de la condition d'interaction prédite par le critère de

Schmiechen. La figure V.34 montre que les déplacements au passage de la condition d'interaction sont associés à des ondes à trois diamètres sur les deux structures, avec des propagations rétrograde et contra-rotative.

Sur le rotor, la composante à trois diamètres est clairement pilotée par les modes associés de la première famille modale. Les autres participations apparaissent comme négligeables à ce moment de la simulation. Sur le stator, une participation majoritaire du mode à trois diamètres est remarquée, mais aussi la présence d'une onde quasi-fixe à un diamètre, et d'ondes rétrogrades à deux et quatre diamètres nodaux.

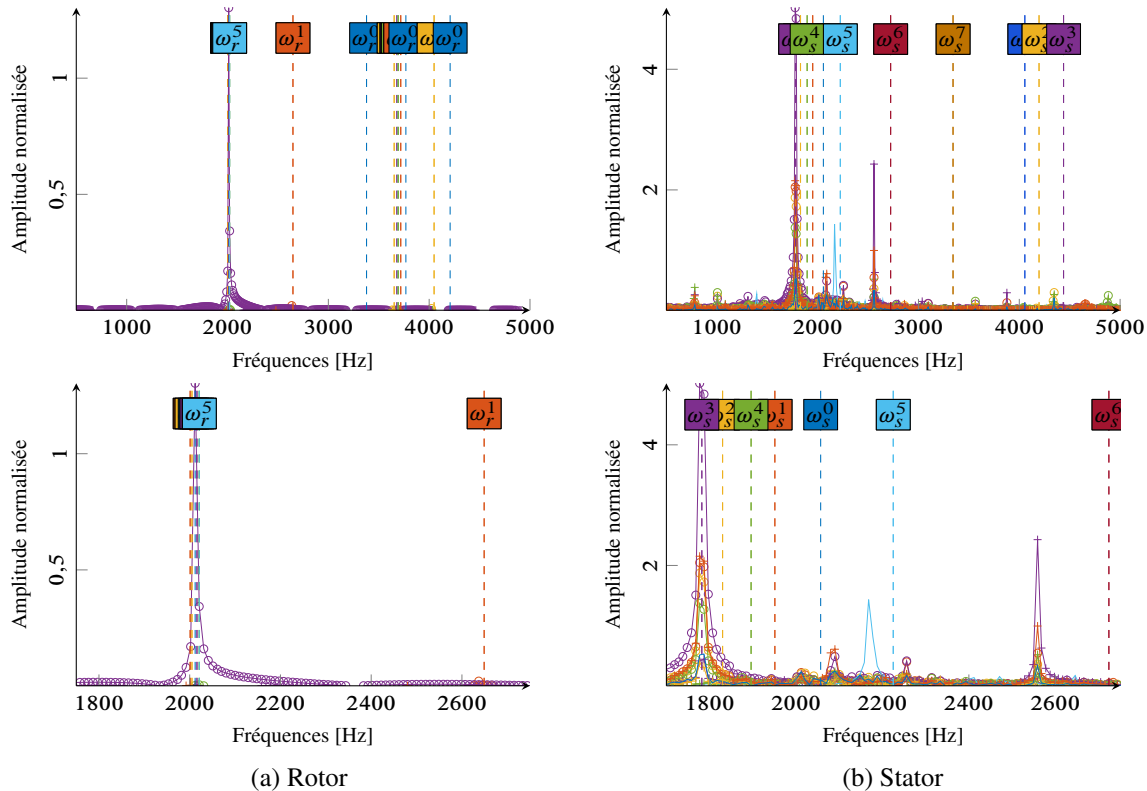


FIGURE V.34 – Diagrammes fréquences-diamètres sur la plage de vitesse 4660–4680 rpm. Ondes co-rotatives / directes (\rightarrow), contra-rotatives / rétrogrades (\leftarrow).

7.5.4 Bilan

La simulation présentée dans cette section montre clairement l'effet de la présence d'irrégularités sur le profil du carter, même en l'absence d'usure, sur le comportement dynamique du rouet et du couvercle. Le contenu spectral des déplacements des deux structures est bien plus riche que lors de l'étude d'une interaction avec un carter lisse. L'interaction modale visée, en dépit des perturbations apportées par le profil irrégulier du carter, reste le phénomène le plus énergétique identifié au cours de la simulation. Hors de la plage de vitesses de rotation permettant l'interaction modale, d'autres participations sont prépondérantes. En particulier, des side-bands de l'excitation sont remarquées, phénomène déjà identifié numériquement et expérimentalement, dans [7] par exemple. Des excitations par les harmoniques de la vitesse de rotation sont aussi observées, qui sont aussi visibles dans les résultats des essais CASTOR du chapitre VI.

7.6 Interaction à basse vitesse, sans excitation extérieure

7.6.1 Spécificités de ce cas de simulation

Ce cas se rapproche des essais de contact effectués sur le banc CASTOR. Pour ce faire, les paramètres de la simulation précédente sont réutilisés, en supprimant toutefois l'excitation dynamique du stator. La fermeture du jeu se fait donc uniquement par rapprochement du bord de fuite du stator au moyen de la précharge qui lui est appliquée. Celle-ci est calibrée de sorte que sans contact, les déplacements axiaux au bord de fuite seraient de deux fois l'amplitude du jeu initial, soit 2×10^{-5} m. Le but de cette simulation est de montrer le comportement des structures lors de contacts secs, sans abrasable, et sans excitation volontaire pour fixer un certain type de réponse. De plus, la présence d'une précharge statique permet de simuler des défauts de forme (alignement, faux-rond ...) entre les deux pièces.

7.6.2 Observations temporelles

Déplacements

Dès les premiers instants, les déplacements, en figure V.35, montrent un comportement nettement différent des deux structures par rapport aux cas précédents. Principalement, il n'y a plus d'amplification particulièrement importante au croisement de la condition d'interaction modale à trois diamètres nodaux, ni à aucune autre condition d'interaction croisée lors de la montée en vitesse. À l'inverse, de nombreuses amplifications successives sont constatées. D'abord très faibles, les amplitudes de déplacement sont de plus en plus grandes alors que la vitesse de rotation augmente. En début de simulation, les déplacements du bord de fuite du rotor semblent imposés par le stator, et le bord d'attaque se déplace très faiblement. Ensuite, les efforts de contact deviennent suffisamment forts pour déclencher les amplifications visibles sur les deux structures. Dans l'ensemble, les amplitudes vibratoires sont plus réduites que dans les simulations avec excitation dynamique.

Jeux et efforts de contact

Les jeux et des efforts de contact en figure V.36 montrent qu'au cours de la simulation, seule la ligne de contact n°1 est sollicitée, en raison de la précharge du stator. En effet, la précharge appliquée fait principalement intervenir les premiers modes de flexion du couvercle, qui sont caractérisés par des déplacements importants du bord de fuite. Les autres lignes de contact ne semblent pas participer.

Les efforts de contact ont dans un premier temps une enveloppe constante. Pour des vitesses supérieures à $\Omega \approx 3000$ rpm des amplifications progressivement croissantes apparaissent, jusqu'à la fin de la simulation. Pour autant, le jeu maximal reste quasiment constant à environ 4×10^{-5} m, soit quatre fois le jeu initial.

Filtrage des diamètres nodaux dans le domaine temporel

Les décompositions en harmoniques spatiaux des déplacements des deux structures, en figure V.37, montrent elles aussi des différences notables par rapport aux résultats précédents. Aucune amplification au croisement de la condition d'interaction modale à trois diamètres sur le rouet n'est observée. À l'inverse, de nombreuses amplification successives sont constatées, mais uniquement sur cette pièce, et tous les harmoniques spatiaux ont des participations maximales du même ordre de grandeur.

Sur le couvercle, aucune amplification particulière n'est constatée et ce sont les harmoniques zéro et deux qui sont prépondérants, principalement par leur composante quasi-statique.

7.6.3 Analyses fréquentielles

Spectrogrammes

L'étude des spectrogrammes en figure V.38 permet de mieux préciser les observations précédentes.

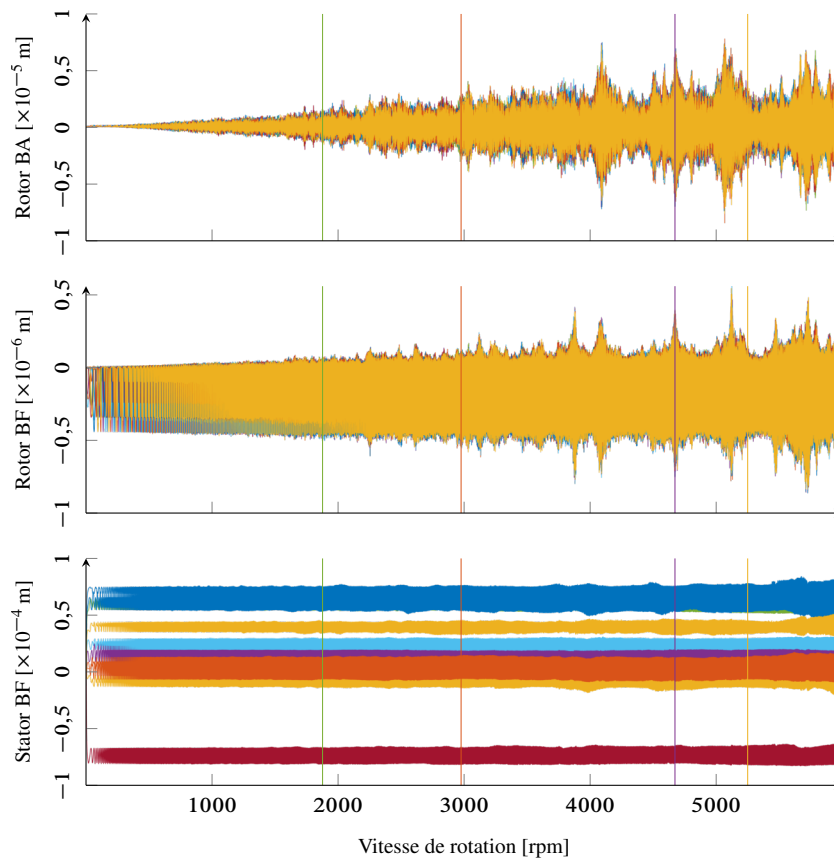


FIGURE V.35 – Déplacements axiaux. Coïncidences modales à 1 (I), 2 (I), 3 (I), 4 (I) diamètres.

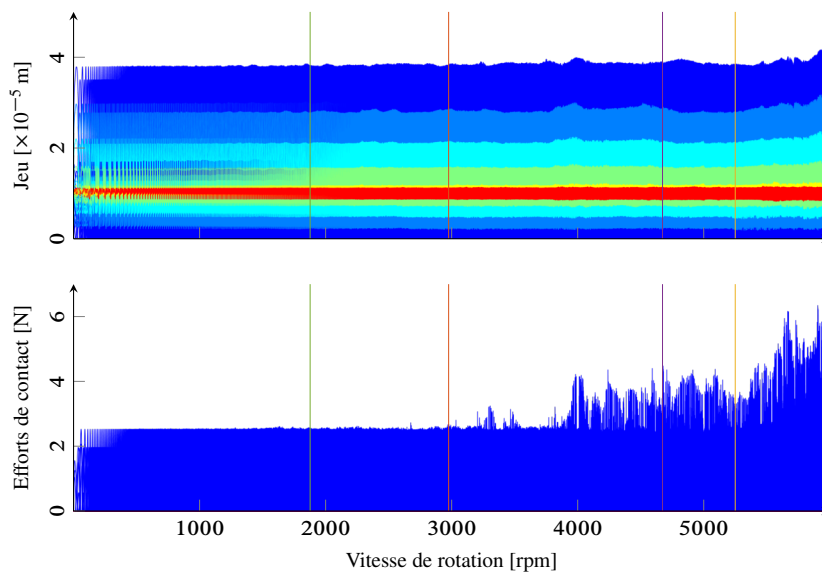
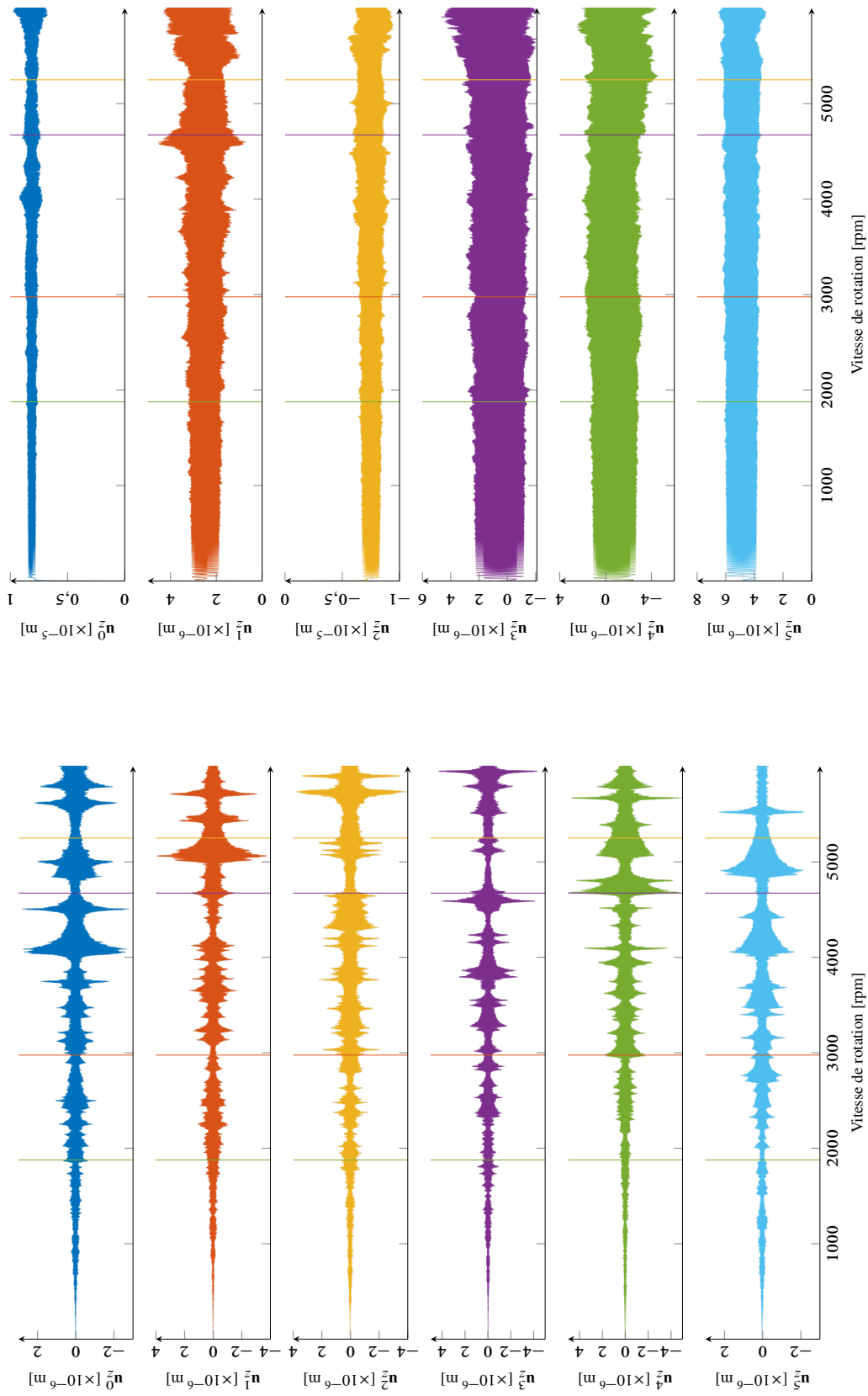


FIGURE V.36 – Jeux et efforts normaux de contact. Coïncidences modales à 1 (I), 2 (I), 3 (I), 4 (I) diamètres.

Sur le rouet, aucune composante du spectre ne semble être particulièrement prépondérante, mais les participations les plus importantes sont localisées au niveau de la première famille modale du rouet, vers 2000 Hz, sans qu’aucun mode se détache des autres. À partir de 3000 rpm, le signal commence à se



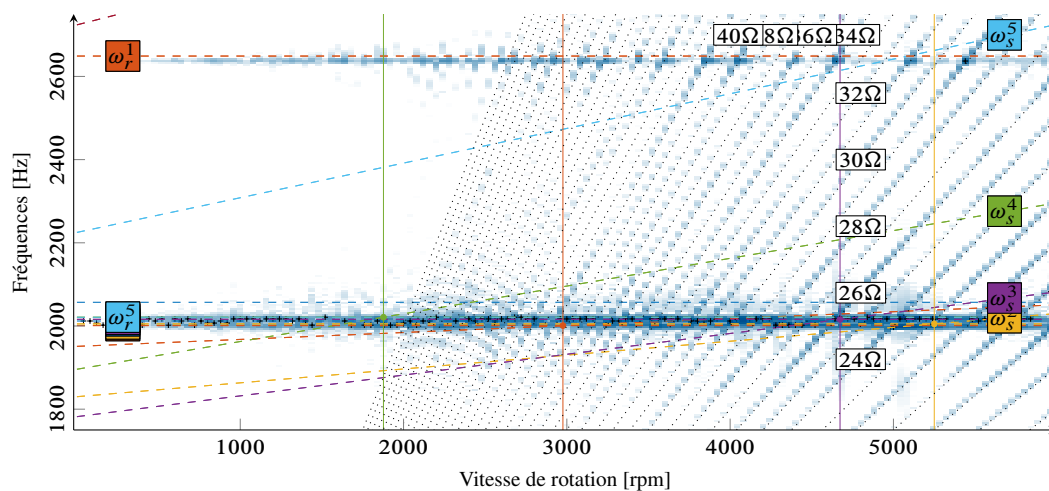
(a) Bord d'attaque du rouet.

(b) Bord de fuite du couvercle.

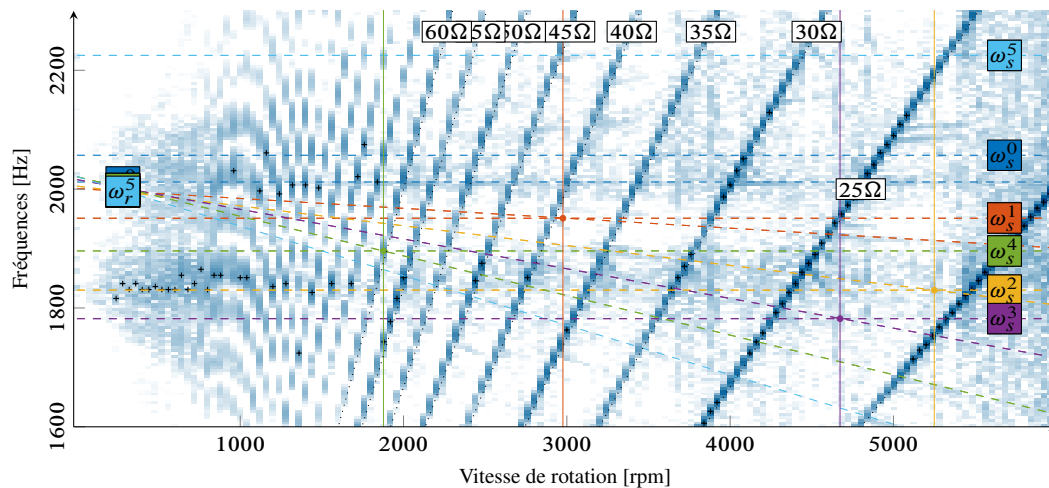
FIGURE V.37 – Participation des harmoniques spatiaux dans les déplacements axiaux. Coïncidences modales à 1 (|), 2 (|), 3 (|), 4 (|) diamètres.

structurer autour des harmoniques de la vitesse de rotation. Les harmoniques 18Ω à 60Ω sont tracés, même si les harmoniques inférieurs et supérieurs participent aussi. Ceux-ci entraînent une augmentation de la densité spectrale de puissance en dehors de la bande fréquentielle de la première famille modale du rouet. Pour éviter de superposer des annotations, seuls les harmoniques pairs entre les harmoniques 24Ω et 40Ω sont annotés sur la figure V.38a

Sur le couvercle, les harmoniques de la vitesse de rotation de la forme $5n\Omega$ interviennent de façon notable. Ces harmoniques participent particulièrement au croisement de la première famille modale du couvercle. En les suivant, on note aussi la présence de *trainées* suite au croisement des modes du rouet vus dans le repère fixe, qui se distinguent par des pentes relativement faibles. Ces participations sont toutefois de faible amplitude.



(a) Rotor, bord d'attaque, pale n°1



(b) Stator, bord de fuite, position 0°

FIGURE V.38 – Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator. Fréquences propres vues dans les repères respectifs des deux structures (- -). Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+). Coïncidences modales à 1 (I), 2 (II), 3 (III), 4 (IV) diamètres.

Dans une bande de fréquences plus élevées, les spectrogrammes de la figure V.39 montrent que la deuxième famille modale du rouet est aussi excitée par les harmoniques de la vitesse de rotation. Par moments, la participation de ces modes est même prépondérante devant celle des modes de la première famille. Sur le couvercle on retrouve à nouveau des participations des harmoniques supérieurs de la vitesse de rotation. Ces harmoniques n'entraînent toutefois pas d'excitation particulière des modes

supérieurs du couvercle.

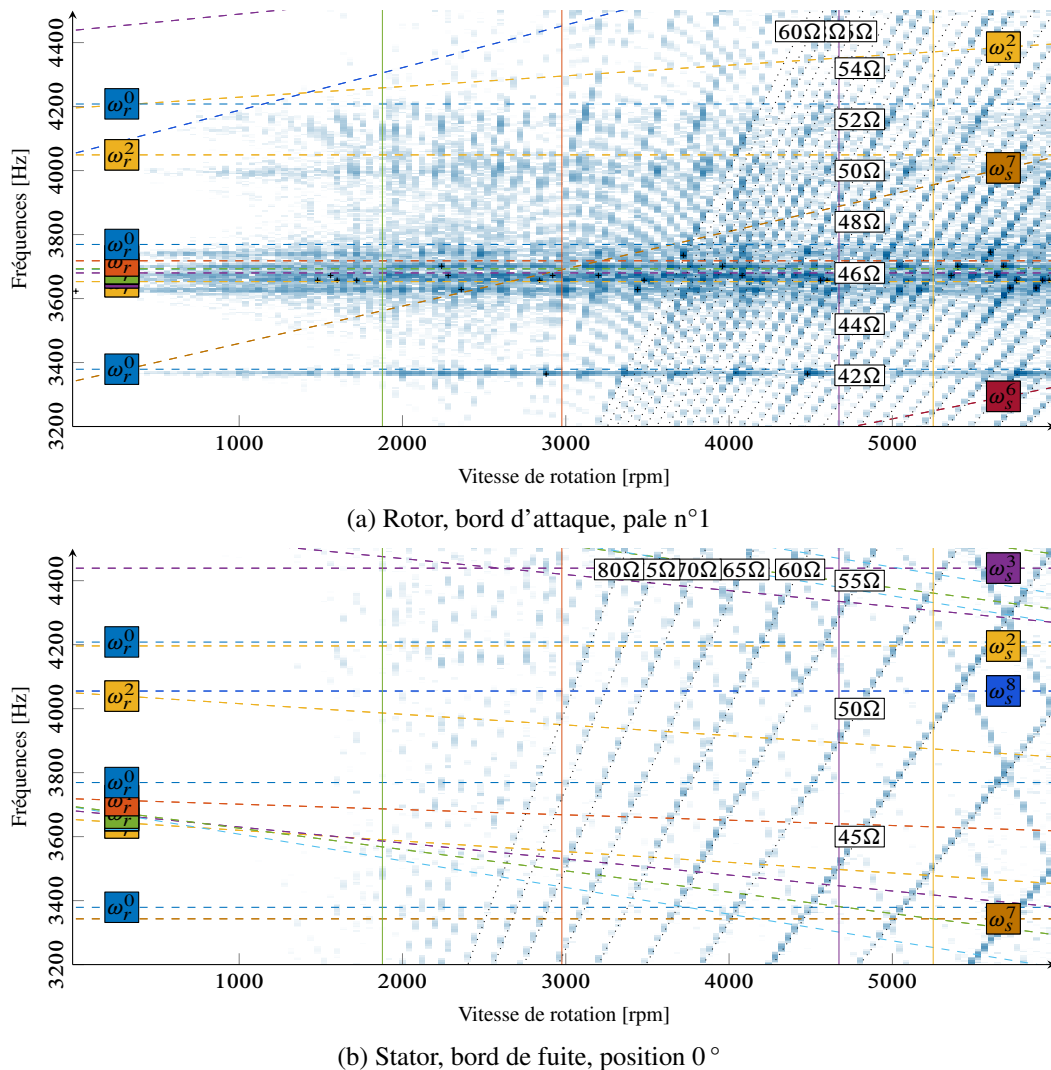


FIGURE V.39 – Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator. Fréquences propres vues dans les repères respectifs des deux structures (- -). Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+). Coïncidences modales à 1 (I), 2 (I), 3 (I), 4 (I) diamètres.

Diagrammes fréquences–diamètres

Les diagrammes fréquences–diamètres de la figure V.40 confirment toutes les observations précédentes. Autour de la vitesse d'interaction devant provoquer une interaction modale à trois diamètres nodaux, une participation majoritaire d'un des modes à quatre diamètres nodaux de la première famille modale du rouet est retrouvée. Les participations associées aux modes à trois diamètres de cette même famille sont à cette vitesse de rotation négligeables.

Sur le couvercle, et au même moment, des participations de plusieurs diamètres sont constatées, en raison des excitations par les harmoniques de la vitesse de rotation. On remarque ainsi un pic vers 750 Hz principalement composé d'ondes directes à deux, trois, et quatre diamètres. Au niveau de la première famille modale du couvercle, seul les modes à un diamètre nodal semblent répondre.

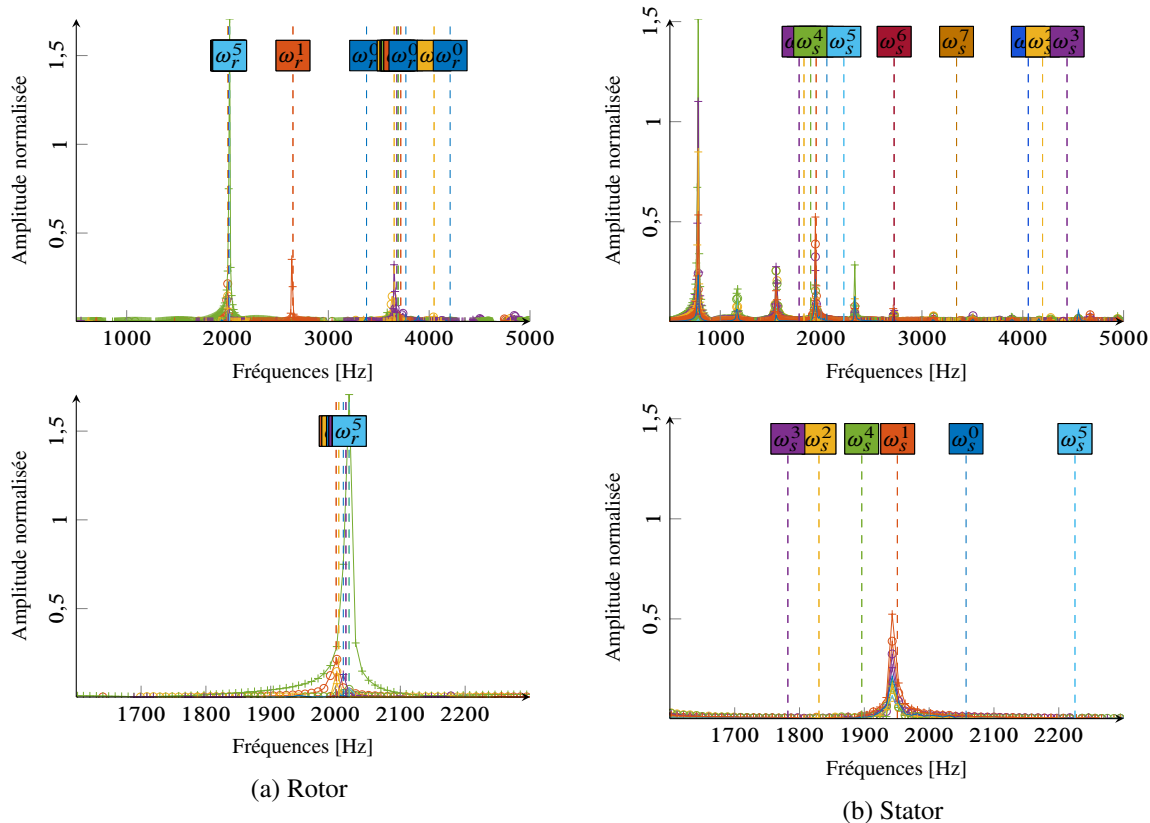


FIGURE V.40 – Diagrammes fréquences-diamètres sur la plage de vitesse 4660–4680 rpm. Ondes co-rotatives / directes (\rightarrow), contra-rotatives / rétrogrades (\leftarrow).

7.6.4 Bilan

Cette simulation montre clairement l'importance du rôle joué par les harmoniques de la vitesse de rotation dans les interactions, quand aucune excitation spécifique n'est appliquée. On remarque aussi à quel point les interactions à basse vitesse font participer des harmoniques particulièrement élevés, ce qui se traduit par une excitation très large bande du rouet et du couvercle avec des participations notables des familles modales supérieures des deux structures. Enfin, l'absence d'excitation d'une onde rétrograde sur le couvercle, avec une forme à trois diamètres, a pour conséquence l'absence d'interaction modale. De même, aucune side-band n'est observée durant cette simulation, même si l'on peut arguer que les harmoniques de la vitesse de rotation constituent un cas particulier de side-bands.

7.7 Interaction rotor–stator thermomécanique

Les simulations présentées se sont jusqu'alors limitées à un cadre purement mécanique. Toutefois, un des objectifs majeurs de ces travaux concerne la simulation thermomécanique des phénomènes de contact rotor–stator. Ici, les flexibilités des deux structures sont prises en compte, mais aussi leurs propriétés thermiques et thermomécaniques.

Cependant, il faut insister sur le caractère qualitatif de ces simulations. Celles-ci sont en effet particulièrement sensibles aux paramètres de maillage, de réduction et de simulation choisis. Notamment, la synthèse en symétrie cyclique du stator entraîne pour la partie thermique du modèle l'apparition de résultats non physiques. Ceci est dû au contenu à diamètres réduit dans le cas présent, et au caractère local des échauffements.

7.7.1 Paramètres de simulation

Afin de bien comprendre la phénoménologie de cette simulation, la vitesse de rotation est maintenue constante à 4500 rpm. Tout l'échauffement considéré provient de la dissipation par frottement. Les flux entrant dans le rotor et le stator sont identiques, ce qui correspond à une résistance thermique de contact égale pour les deux structures. Le coefficient de frottement reste fixé à 0,1. Pour fermer le contact, le stator est préchargé progressivement sur la forme de son premier mode à un diamètre nodal. Ce type de précharge permet de localiser la zone de contact sur le stator, et représente qualitativement un défaut d'alignement des deux structures, défaut qui se retrouve aisément en pratique. L'amplitude de précharge est calibrée pour obtenir un déplacement axial maximal de deux fois le jeu initial au niveau du bord de fuite en l'absence de contact, soit 2×10^{-5} m.

7.7.2 Analyse dans le domaine temporel

Déplacements

Les déplacements axiaux des nœuds de bord d'attaque des pales, et de bord de fuite des deux structures sont tracés en figure V.41. Du fait des fortes variations dès les premiers contacts, un agrandissement des trois évolutions sur le premier dixième de seconde de simulation est aussi fourni. Cet agrandissement est aussi présenté pour les autres observations temporelles qui suivent.

Comparativement aux simulations effectuées sans considérations thermiques, le comportement est radicalement différent, même en tenant compte de la vitesse de rotation constante. En effet, même si ce cas n'a pas été présenté, une simulation à régime constant et forçage périodique permet trivialement de retrouver des réponses périodiques. Dans l'ensemble, des niveaux vibratoires faibles sont notés au cours de cette simulation, même par rapport à la simulation sans excitation décrite à la section V.7.6. Deux phases principales sont distinguées. Durant les deux premières secondes de la simulation, les déplacements nodaux du rouet sont les plus importants, avec une composante basse fréquence particulièrement marquée. Juste après, les amplitudes de déplacement chutent. Simultanément, sur le stator, les vibrations deviennent très limitées.

Sur les agrandissements, la première phase correspond à la mise en contact. Les déplacements, initialement nuls sur le rouet deviennent alors visibles. Au bord de fuite, les déplacements deviennent positifs successivement pour chaque pale. Sur le couvercle, l'évolution de certains déplacements s'inverse du fait des contacts. Des oscillations, probablement d'origine numérique sont aussi visibles, du fait du faible nombre d'harmoniques spatiaux participant dans la résolution du problème de contact.

Températures nodales

L'analyse des températures est à considérer avec précaution. En effet, de nombreuses simplifications font apparaître des comportements particuliers, pour partie physiques, pour partie issus des hypothèses de travail. Ceux-ci sont illustrés en figure V.42.

Conjointement aux déplacements déjà observés, une amplification soudaine des températures des nœuds de contact du bord de fuite du rouet est observée, jusqu'à plus de 600 °C. Même si cette température peut paraître élevée, c'est une température dite *flash*, issue d'un échauffement extrêmement rapide. L'évolution temporelle de ces températures est sensiblement la même que celle des déplacements associés aux mêmes nœuds. Ceci semble indiquer un effet de localisation des températures du fait de la rapidité de l'échauffement. Cet effet est très probablement dû à la densité relativement faible du maillage volumique de la zone de contact, visible en figure V.4a, et des simplifications liées à la gestion du contact. Les échauffements se développent successivement sur chaque pale, et sont pour chacune suivis d'une phase de refroidissement. Cette succession de phases d'échauffement–refroidissement est liée à la formation d'une seule zone de contact sur la circonférence du couvercle du fait de la précharge sur une forme à un diamètre nodal de cette pièce. Après la première phase de contact, les températures nodales chutent fortement sur le rouet, à une valeur moyen d'environ 40 °C, mais toujours avec des séquences

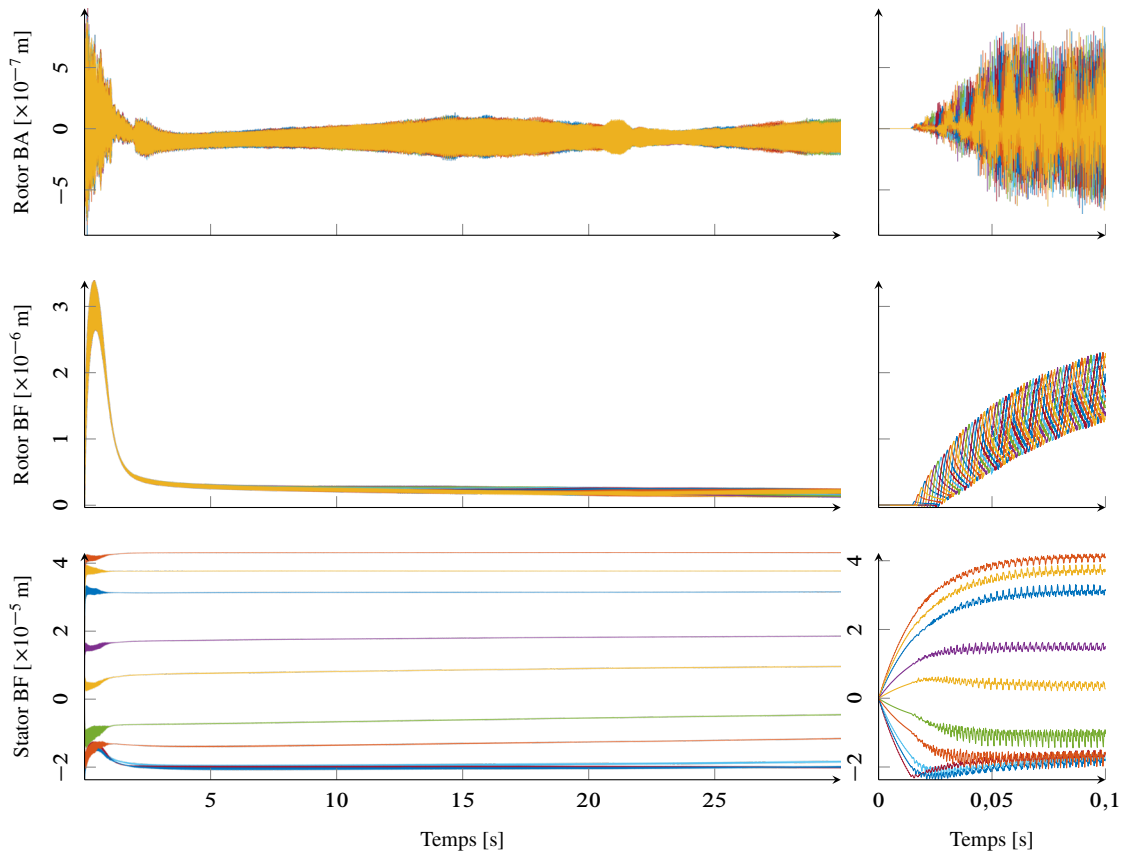


FIGURE V.41 – Évolution des déplacements axiaux au cours du temps.

d'échauffement–refroidissement. Sur le couvercle, les températures remontent progressivement sur la portion de la circonférence ayant le jeu le plus fermé.

Une remarque complémentaire concerne l'apparition de températures négatives sur le stator, vers $t \approx 1$ s. Ces températures n'ont pas de sens physique, puisqu'elles apparaissent alors que tous les flux thermiques appliqués au stator sont rentrants puisqu'issus d'un échauffement par frottement. Celles-ci sont uniquement dues à l'utilisation d'une base d'harmoniques spatiaux relativement pauvre. Ainsi, en raison d'un échauffement localisé, la solution comporte un harmonique spatial permettant de décrire cet échauffement, mais cette composante fait apparaître des lobes de températures négatives en dehors de la zone chauffée. Une augmentation de la taille du modèle de stator résoudrait progressivement ce problème. Durant la phase de contact faible, où les échauffements sont plus progressifs, les températures négatives sont réduites.

Jeux et efforts de contact

Les jeux et les efforts de contact, présentés en figure V.43 apportent une information relativement redondante avec les températures. Les efforts sont ainsi presque déductibles des déplacements ou des températures du bord de fuite du rotor. Seule la ligne de contact n°1, soit la plus proche du bord de fuite semble participer aux contacts. Qui plus est, le jeu associé à la ligne de contact n°2, un peu plus vers l'amont du module augmente légèrement au cours de la simulation.

7.7.3 Analyses fréquentielles

Spectrogrammes

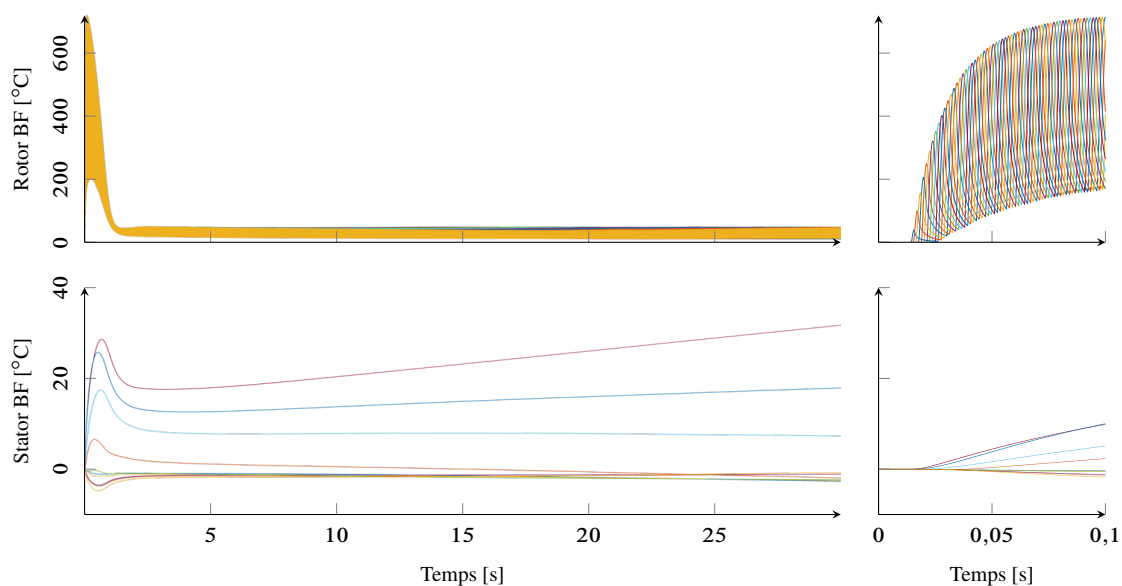


FIGURE V.42 – Évolution des températures au bord de fuite (ligne de contact n°1).

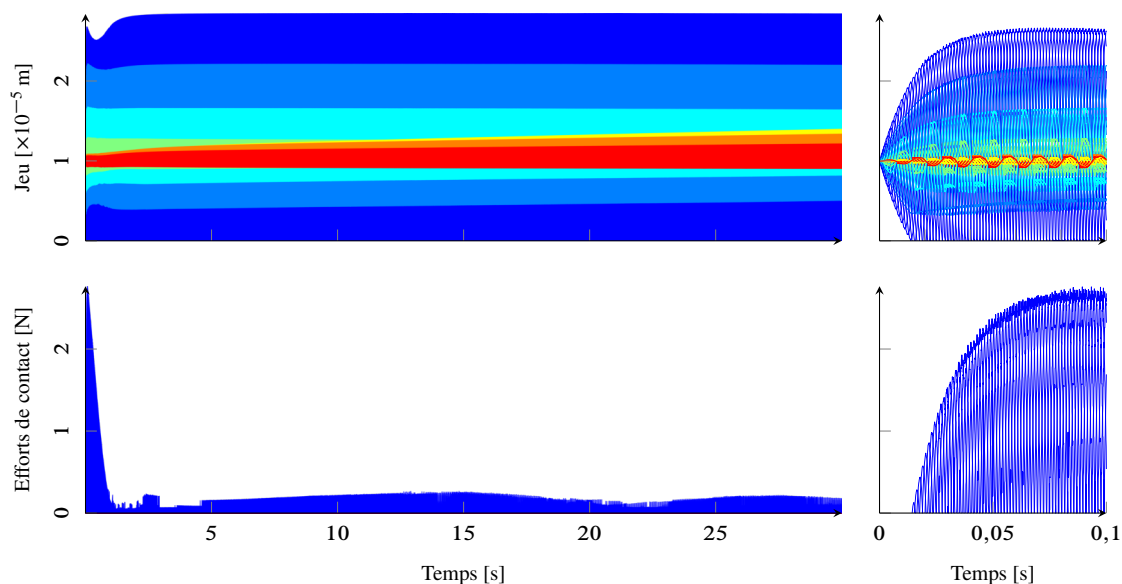


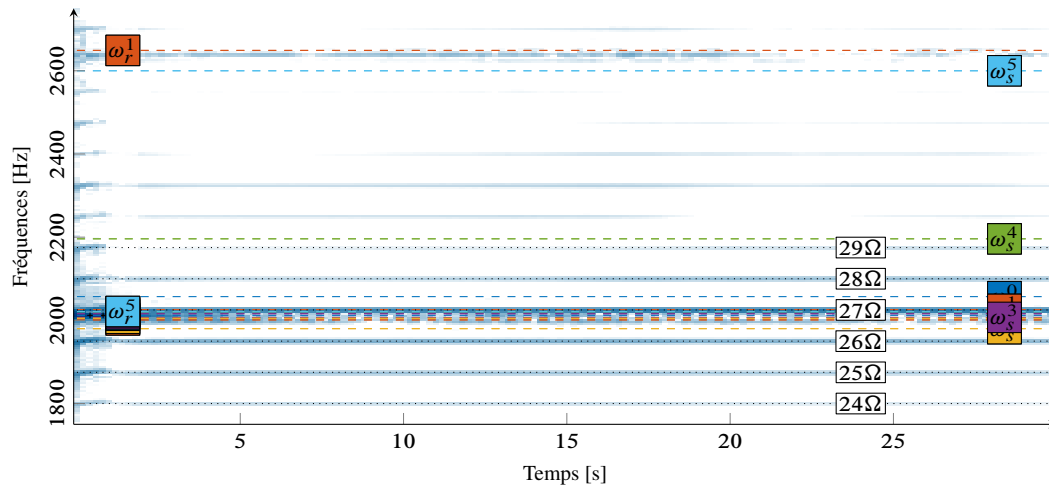
FIGURE V.43 – Jeux et efforts normaux de contact.

Comme attendu, les spectrogrammes en figures V.44 et V.45 montrent des composantes faibles et caractérisées par des fréquences constantes. Ceci est dû à la vitesse de rotation constante .

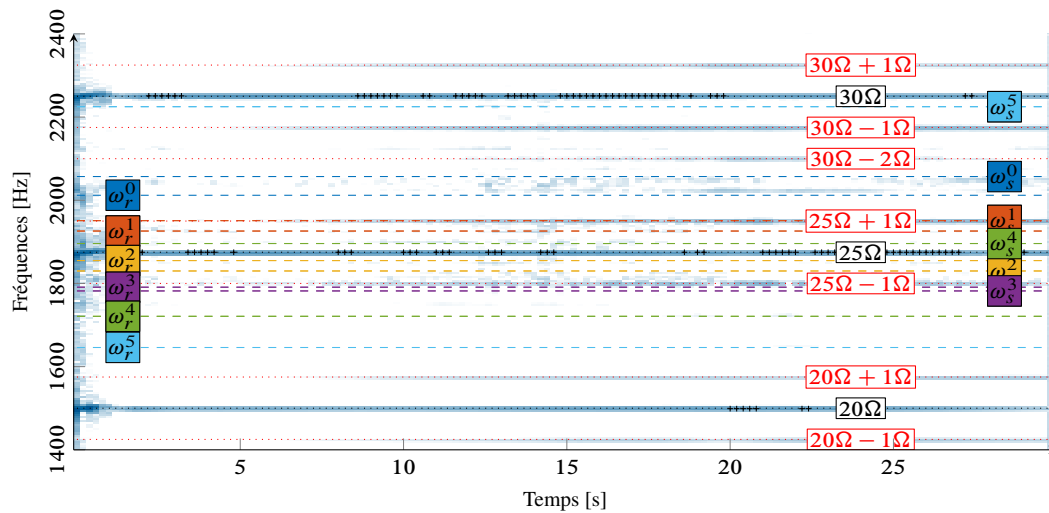
Sur le rouet, des harmoniques de la vitesse de rotation sont ressortent, principalement autour de la seconde famille modale, notamment le mode à 0 diamètre libellé ω_r^0 vers 3700 Hz qui est excité par l'harmonique 50Ω . La première famille modale du rouet participe principalement en début de simulation, durant la phase de contact fort du fait de l'excitation des modes à trois diamètres nodaux ω_r^3 par l'harmonique 27Ω de la vitesse de rotation.

Sur le couvercle, les participations principales sont concentrées sur les harmoniques 20Ω , 25Ω et 30Ω de la vitesse de rotation. D'autres harmoniques participent plus faiblement et semblent associés à des side-bands autour de ces trois harmoniques.

Diagrammes fréquences–diamètres



(a) Rotor, bord d'attaque, pale n°1



(b) Stator, bord de fuite, position 0°

FIGURE V.44 – Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator. Fréquences propres vues dans les repères respectifs des deux structures (- -). Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).

Les diagrammes fréquences–diamètres de la figure V.46 confirment les observations effectuées sur les spectrogrammes. Ceux-ci sont calculés sur l'intervalle de temps $t \in 5\text{--}6$ s pour obtenir une résolution fréquentielle fine.

Ces traitements confirment l'excitation d'une onde à trois diamètres nodaux ω_r^3 co-rotative par l'harmonique 27Ω , et d'une onde stationnaire à zéro diamètre ω_r^0 sur le rouet. Sur le couvercle, les excitations déjà observées sont retrouvées, auxquelles se rajoute l'excitation principale sur cette pièce, absente des spectrogrammes. Cette excitation, correspondant à l'harmonique 10Ω est la première fréquence de passage de pales sur le couvercle.

7.7.4 Bilan

Cette simulation permet de montrer l'impact des échauffements sur le comportement dynamique des structures par rapport aux simulations purement mécaniques. Bien que les résultats présentés soient soumis à des simplifications importantes, ceux-ci présentent certaines tendances naturelles des problèmes de contact avec échauffement par frottement : échauffements très rapides, dilatations, pertes de contact,

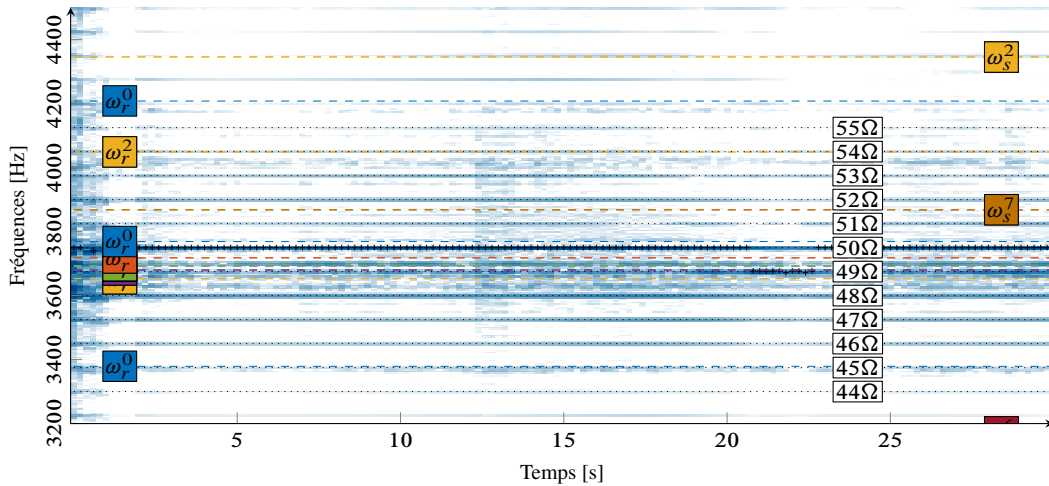


FIGURE V.45 – Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor, bord d'attaque pale n°1. Fréquences propres vues dans les repères respectifs des deux structures (- -). Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).

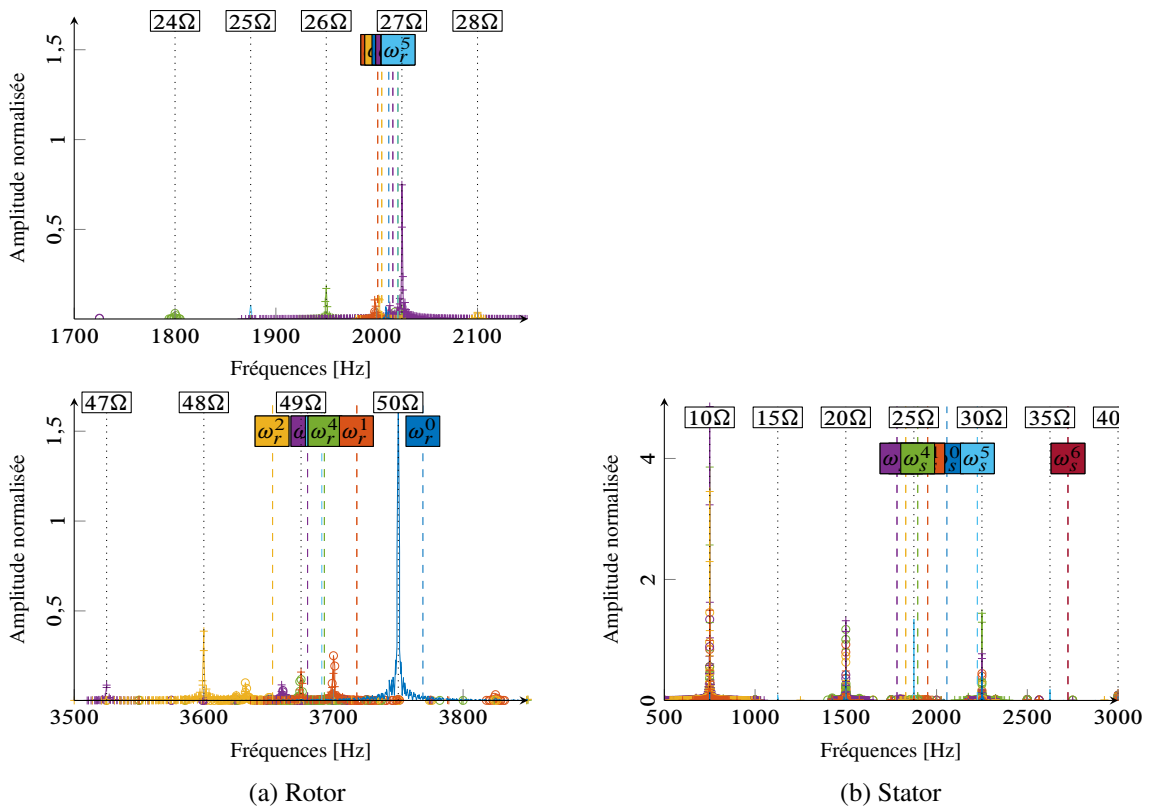


FIGURE V.46 – Diagrammes fréquences-diamètres sur l'intervalle de temps $t \in 5-6$ s. Ondes co-rotatives / directes (\rightarrow), contra-rotatives / rétrogrades (\leftarrow).

localisation des phénomènes thermiques. La localisation en particulier fait pressentir que les simulations thermomécaniques sont particulièrement sensibles au profil des pièces et du jeu. Cette simulation constitue donc un seul cas particulier, qui ne représente en rien un comportement générique du contact rotor–stator.

7.8 Bilan des simulations

Les simulations présentées dans cette section sont caractérisées par la présence de phénomènes typiques du contact rotor–stator. Bien qu’elles ne permettent pas de déterminer le caractère stable ou instable de l’interaction modale de type contra-rotative / rétrograde, puisque la vitesse d’interaction n’est pas maintenue, des simulations spécifiques ont permis de montrer qu’en cas de coupure de l’excitation, les deux structures retrouvaient leur état de repos. Les conclusions formulées dans les travaux précédents [129] pour ce cas d’interaction sont donc retrouvées.

En ce qui concerne le contenu fréquentiel des réponses, une grande dépendance de la richesse spectrale avec la vitesse de rotation et les efforts de contact est observée. Ainsi, pour des efforts faibles, très peu de phénomènes couplant la dynamique des deux structures sont observés. Les réponses se concentrent principalement sur la réponse entretenue entre les modes ciblés du couvercle et du rouet. Pour des efforts de contact plus élevés, le caractère non-linéaire du comportement s’affirme, avec l’apparition de divers contenus fréquents. Sur le rotor, des composantes majoritaires associées à deux fréquences se distinguent. D’abord, les fréquences de l’effort d’excitation du stator (de l’onde tournante excitée) vue dans le repère tournant et de ses harmoniques, puis la fréquence du mode ciblé du rotor. Sur le stator, trois composantes majoritaires sont observées. La fréquence de l’effort d’excitation du stator (de l’onde tournante excitée), la fréquence de passage des pales et ses harmoniques, et enfin la fréquence du mode ciblé du rotor vu dans le repère fixe et de ses harmoniques.

8 Bilan du chapitre

Ce chapitre décrit l’application des méthodes numériques développées aux chapitres II, III et IV au cas particulier du contact rotor–stator. Une description exhaustive des calculs effectués est détaillée, puis une étude de convergence simplifiée des modèles est menée. Ensuite, des résultats de simulations de contact sont présentés et discutés, dans un premier temps pour s’assurer du bon fonctionnement des nouvelles méthodologies présentées, notamment la procédure d’intégration temporelle implicite. Enfin, plusieurs cas de simulation sont présentés pour étudier les comportements du couple rouet–couvercle installé sur le banc CASTOR (sans usure) par rapport au phénomènes d’interaction modale à basse vitesse. Une simulation thermomécanique est aussi présentée. Celle-ci permet de mettre en évidence les difficultés et les limites de modélisation des phénomènes d’échauffement, mais permet de montrer que les méthodes numériques décrites précédemment peuvent servir de base pour des travaux futurs.

Il apparaît à la suite de ces observations que les méthodologies présentées auparavant constituent un pas en avant dans la modélisation des phénomènes de contact thermomécanique et de leurs conséquences sur la dynamique des structures en contact.

Certaines hypothèses limitantes devront toutefois être levées pour s’assurer de la pertinence des méthodes décrites dans un cas d’étude plus réaliste, ces hypothèses ont ici permis d’explorer et d’identifier les limites des méthodes conventionnellement employées, afin de s’en affranchir par l’introduction de méthodes issues d’autres communautés scientifiques.

Ce chapitre a aussi permis de mettre en évidence le contenu fréquentiel caractéristique de phénomènes d’interaction de contact rotor–stator dans les turbomachines, qui est étudié expérimentalement dans le chapitre VI.

À la vue des résultats de simulation, la difficulté apportée par les interactions rotor–stator dans la conception des turbomachines est clairement mise en évidence. En effet, un simple contact entraîne des excitations nombreuses et variées des deux structures, qu’une excitation dynamique extérieure existe ou non, même en l’absence d’échauffement ou d’usure.

Chapitre VI

Expérimentations sur les interactions aube-stator

Sommaire du chapitre

1 Dispositif expérimental CASTOR II	160
1.1 Fonctions, architecture et conditions d'essais	160
1.2 Instrumentation	161
1.3 Caractérisation dynamique des structures	165
2 Essai d'interaction aubes-stator	167
2.1 Introduction	167
2.2 Déroulement de l'essai	168
2.3 Observations globales sur l'essai	169
2.4 Étude détaillée des interactions	176
2.5 Observations visuelles du banc	189
2.6 Conclusions générales de l'essai	192
3 Corrélation des marqueurs thermosensibles	193
3.1 Introduction	193
3.2 Evaluation des puissances dissipées lors de contacts	193
3.3 Marqueurs thermosensibles	195
3.4 Simulations numériques thermiques transitoires	198
3.5 Conclusion	203
4 Bilan du chapitre	203

Ce chapitre est dédié à la présentation et à l'analyse d'essais effectués sur le banc CASTOR (Contact Aubes StaTOR) de la Plateforme Dynamique des Machines Tournantes du LTDS à l'école Centrale de Lyon. Ce banc a été développé et exploité dans le cadre du projet ANR IRINA (sImulation et maîtrise des rIsques en coNception des mAchines tournantes) et la thèse de Patricio Almeida [7], et a fourni des données expérimentales d'intérêt pour la compréhension des phénomènes de contact rotor-stator et de caractérisation modale des compresseurs centrifuges, qui ont pour partie été publiées [8-10, 65]. L'étude du comportement de ce compresseur dans des situations de coïncidence modale à quatre diamètres nodaux était l'objectif de ces premiers travaux dans la configuration dite CASTOR I.

À la suite de ce projet, il a été décidé de s'intéresser à un nouveau point de fonctionnement, afin de fournir des données expérimentales complémentaires à la base de données existante. La nouvelle campagne d'essais cible l'étude des comportements en situation de coïncidence modale à trois diamètres

nodaux. Cette situation, qui a lieu à des vitesses de rotation plus élevées présente une meilleure séparation fréquentielle entre les modes du rouet vus dans le repère statorique d'une part, et les harmoniques de la vitesse de rotation pouvant exciter les structures d'autre part. L'isolation du point de coïncidence modale visée par rapport à d'autres excitations parasites inhérentes au dispositif est ainsi améliorée. En effet, si l'on cherche à mettre en évidence une interaction modale, phénomène auto-entretenu, on doit éviter le mieux possible que des sources d'excitation viennent coïncider avec les fréquences modales.

Ce chapitre décrit en premier lieu le banc d'essais de manière succincte ainsi que ses spécificités, le détail du développement du banc et les justifications associées étant fournies dans [7]. On présente aussi certains ajouts ou modifications apportés au banc qui ont permis d'améliorer les mesures de grandeurs mécaniques mais aussi thermiques, ainsi que le comportement thermique de la broche afin d'atteindre une vitesse plus élevée qu'avec CASTOR I. Cette nouvelle configuration est désignée CASTOR II.

1 Dispositif expérimental CASTOR II

1.1 Fonctions, architecture et conditions d'essais

Les éléments constitutifs du banc CASTOR sont rappelés en figure VI.1. Les éléments à mettre en

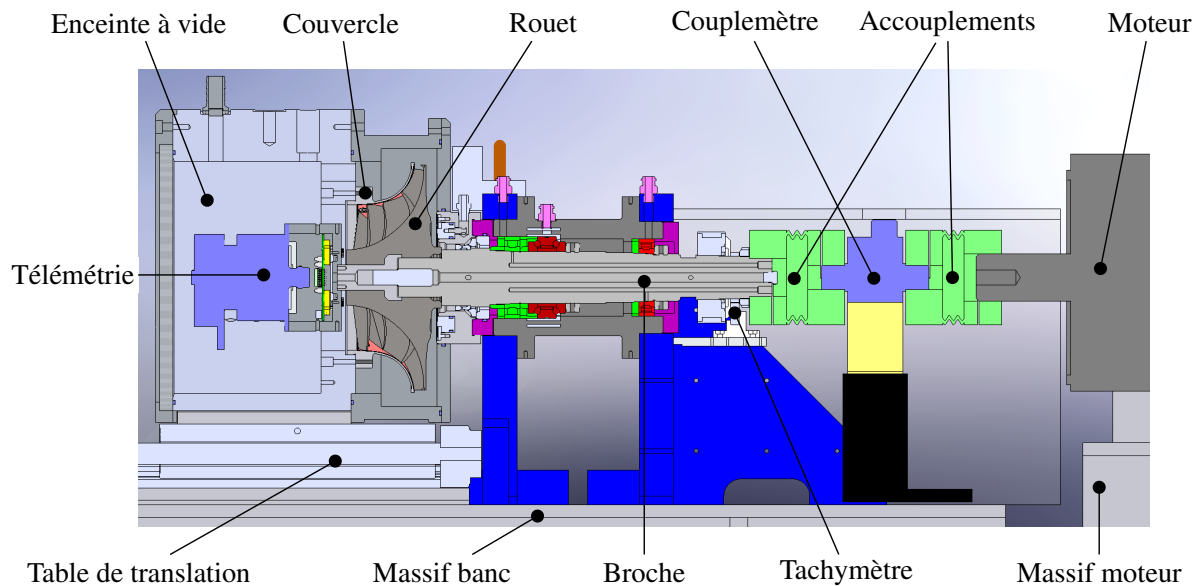


FIGURE VI.1 – Architecture du banc CASTOR II.

contact sont : un rouet pouvant être mis en rotation et un couvercle proches d'une configuration de moteur d'hélicoptère sont respectivement supportés par une broche et une enceinte à vide. Le rouet est original et le couvercle a été conçu pour que sa situation modale permette que les conditions de coïncidence modale soient comprises dans la plage de régime du banc et qu'il puissent être fixé rigidement à son support [7, §2.4]. L'utilisation d'une enceinte à vide permet de s'affranchir de la gestion d'un circuit d'écoulement d'air et de réduire de manière forte les effets aérodynamiques sur le comportement vibratoire des structures étudiées et leur interaction, notamment en termes d'amortissement, ce qui a été mis en évidence dans [65]. Ce dernier point est particulièrement important dans l'étude de composants monoblocs en titane comme le rouet, qui présentent un taux d'amortissement structural très faible. L'amortissement modal du stator est lui peu sensible à la pression ambiante. Ce dernier est identique à celui utilisé durant la campagne CASTOR I, mais possède une couche de revêtement abrasable intacte. Cette enceinte est aussi montée sur un système de table de translation permettant d'accéder à la zone de contact pour effectuer des observations et préparations avant et après les essais mais aussi de piloter le

jeu entre les structures.

La broche est mise en rotation au moyen d'un moteur électrique dont la plage de fonctionnement va jusqu'à 6000 rpm. Le couple est transmis au rouet au travers de deux accouplements élastiques permettant de compenser d'éventuels défauts d'alignement entre le moteur et la broche, et de découpler les éventuelles vibrations du moteur et de la broche. La conception de cette dernière privilégie la rigidité pour repousser la première vitesse critique du rotor au-delà de la plage de fonctionnement du banc. Le moteur et l'ensemble mécanique supportant les pièces sont par ailleurs installés sur deux massifs d'isolation indépendants, là encore pour isoler les deux systèmes. Comme les vitesses de rotation sont plus hautes dans la configuration CASTOR II, l'isolation vibratoire, déjà qualifiée dans la configuration CASTOR I, est donc naturellement améliorée. La conception de l'ensemble assure une rigidité importante aux interfaces de montage des deux composants afin de ne pas induire de couplage entre l'objet d'étude et les supports. Du fait de la coaxialité des axes du rouet et du couvercle dans le banc et du jeu radial relativement élevé (environ 0,2 mm) présent au voisinage des bords d'attaque, le contact est ainsi forcé du côté des bords de fuite.

Entre les deux accouplements, on trouve un couplemètre permettant de mesurer le couple résistant. Le couple est issu des frottements au niveau des paliers et de la mise en mouvement de l'air, même résiduel, dans l'enceinte à vide, ainsi que des contacts entre le rouet et le couvercle. La broche est elle-même montée sur un jeu de roulements qui a été modifié durant cette thèse. Un joint dynamique permet d'effectuer l'étanchéité entre l'arbre et l'enceinte à vide, pour permettre la mise sous basse pression de l'ensemble rouet/couvercle. Ces éléments peuvent aussi générer un couple résistant sur l'arbre. Bien que ceci ne soit pas lié à des dissipations de puissance, le couplemètre permet aussi de mesurer des variations de couple lors des phases d'accélération et de décélération de la broche.

Les deux pièces étudiées étant instrumentées, une télémétrie permet de récupérer les mesures effectuées sur le rotor et d'effectuer le conditionnement et la numérisation du signal au plus près des capteurs pour minimiser les perturbations d'origine électro-magnétique et le bruit thermique. Les signaux des jauges du stator sont conditionnés dans un boîtier à proximité immédiate du banc, puis les voies sont connectées à une baie d'acquisition National Instruments permettant leur filtrage, échantillonnage et numérisation. Le fonctionnement s'opère à travers les étapes de mise au vide et en température, de réglage du jeu (éventuellement négatif) entre les aubes et le stator à l'arrêt, la mise en rotation et la mesure des grandeurs physiques. Il est également possible d'appliquer une excitation au rouet en rotation à l'aide d'actionneurs piézoélectriques embarqués alimentés via un collecteur tournant. Cette capacité peut être utilisée pour la caractérisation modale du rouet.

1.2 Instrumentation

Par rapport à la campagne d'essais CASTOR I, l'instrumentation a été modifiée. Le nombre de voies disponibles étant resté le même, on a essentiellement réorganisé les capteurs sur le couvercle afin d'augmenter la résolution spatiale des mesures et d'avoir une mesure colocalisée entre les thermocouples et les jauges de déformation sur ce composant. Cette réorganisation a été effectuée sur la base du retour d'expérience de la première campagne d'essais. Toutes les acquisitions sont synchrones, et le système d'acquisition échantillonne toutes les mesures à 12 kHz.

1.2.1 Rotor

L'élément principal du rotor est un rouet de compresseur centrifuge fourni par le partenaire industriel Safran Helicopter Engines. Ce rouet possède 20 pales, regroupées en 10 secteurs. Chaque secteur comporte une pale dite *principale* et une autre appelée *intercalaire*, plus petite. Ce rouet, dont plusieurs secteurs sont visibles sur la figure VI.2 est le même que celui utilisé durant les essais CASTOR I. Le rotor est instrumenté au moyen de jauges de déformation uniquement, avec la même configuration que dans la campagne CASTOR I. L'étude de positionnement des jauges sur le rouet a été effectuée pour

cette configuration, et est disponible dans [7, §2.3.2]. Les jauges sont placées de façon à optimiser la description spatiale des modes des première et deuxième familles modales. Pour des raisons de place et de voies disponibles sur la télémétrie, au nombre de 16, toutes les pales ne sont pas instrumentées de manière identique. En effet, chaque jauge nécessite à la fois la présence de fils de raccordement à une cosse relais, puis à la télémétrie, ce qui pose des difficultés de mise en œuvre au regard de l'espace entre les pales et de leur hauteur. Une partie de l'instrumentation du rouet est visible en figure VI.2. Les 10 pales principales sont instrumentées au milieu du bord d'attaque (*BA*), zone particulièrement déformée par les modes de la première famille modale. Par ailleurs, 3 pales sont instrumentées au niveau de la méridienne (*M*), à mi-longueur de la tête de pale zone plus sollicitée en déformation par les modes de la deuxième famille modale. Enfin, 3 pales sont instrumentées au bord de fuite (*BF*), qui constitue la zone de contact attendue du fait des géométries du rouet et du couvercle. Cette organisation des capteurs permet de caractériser les diamètres nodaux de la première famille de modes du rouet, du diamètre 0 au diamètre 5, en utilisant les jauges placées sur le bord d'attaque des pales principales et des excitateurs piézoélectriques disposés au dos du rouet [7, §2.3.1]. Les jauges placées au bord de fuite permettent de déceler des chargements locaux, issus des contacts entre le rouet et le couvercle, et sont peu sensibles aux les premières familles modales du rouet.

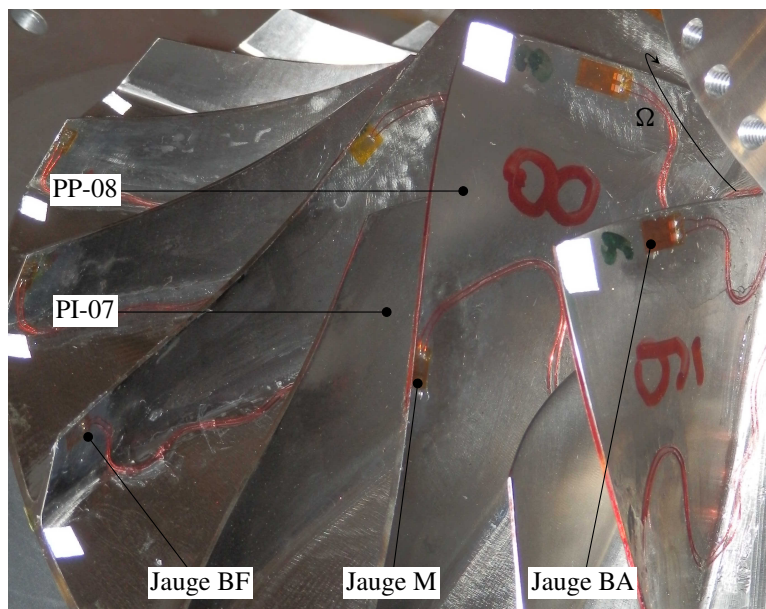


FIGURE VI.2 – Position des jauges de déformation sur le rouet. Près du bord d'attaque (*BA*), du bord de fuite (*BF*), méridienne (*M*), pale principale (*PP*), pale intercalaire (*PI*). Sens de rotation de l'arbre durant les essais (Ω).

En raison de l'indisponibilité de voies de mesure et d'accès optique, aucun capteur de température n'a pu être implanté sur cette pièce, bien que cela soit possible dans d'autres configurations [20, 111].

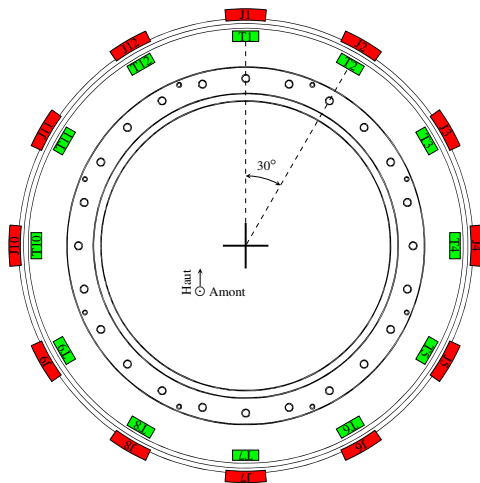
1.2.2 Stator

Le couvercle utilisé durant la première campagne d'essais sur le banc CASTOR a subi une usure prononcée du fait des contacts répétés avec le rotor [9]. Il a donc été décidé d'utiliser un autre couvercle, fabriqué sur le même plan, mais dont la couche d'abradable était neuve. Le retour d'expérience de la première campagne a aussi entraîné une modification du plan d'instrumentation pour optimiser la position des capteurs, comme indiqué plus haut.

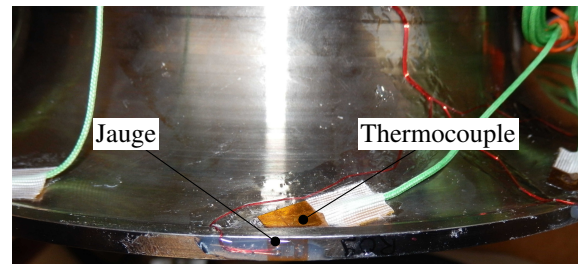
Le stator est ainsi équipé de douze jauges de déformations et de douze thermocouples placés à la même position angulaire, près du bord de fuite. Leur positionnement sur le couvercle est présenté en

figure VI.3. Auparavant, seules huit jauges étaient positionnées à cet endroit, les quatre autres ayant été placées au niveau de la méridienne. Ces jauges permettent d'analyser les diamètres nodaux sur le couvercle, jusqu'au diamètre 6.

La photographie en figure VI.3b montre le positionnement d'une des jauges de déformation sur la face cylindrique du raidisseur, qui permet la meilleure sensibilité sur les modes d'intérêt du couvercle, orientée dans la direction orthoradiale. Pour les protéger, les jauges sont noyées dans une couche de silicone souple destiné à cette fonction. Les fils de connexion, recouverts d'un vernis de protection, sont aussi visibles. Les thermocouples sont placés sur la surface extérieure du couvercle pour pouvoir mesurer la température au plus proche de la zone de contact. L'organisation des jauges le long du raidisseur permet de caractériser les déformations du couvercle jusqu'au diamètre 6 sans repliement spatial. Le nombre de thermocouples permet quant à lui de localiser relativement finement la zone de contact dans la direction orthoradiale, et éventuellement d'estimer la contribution thermique dans la déformation apparente quasi-statique des jauges. En effet, même si les jauges ont été sélectionnées pour être compensées en accord avec le matériau des supports, acier comme titane, cette compensation n'est pas parfaite et il subsiste une déformation apparente purement thermique décrite par le constructeur à l'aide un polynôme reliant déformation apparente et température locale pour chaque type de jauge [76].



(a) Répartition azimutale des capteurs.



(b) Photographie d'un couple jauge-thermocouple.

FIGURE VI.3 – Position des jauges de déformation et des thermocouples sur le couvercle. Jauges de déformation (■), thermocouples (■).

Les vibrations du stator sont aussi mesurées au moyen d'un vibromètre laser Polytec PSV 400, au travers d'un hublot de l'enceinte à vide. Cette mesure n'est possible que sur un point de la circonférence et au bord de fuite, mais est d'une grande sensibilité.

1.2.3 Couple-mètre et tachymètre

Le banc d'essais CASTOR possède un couple-mètre Kistler Minismart 4502A100/20 (bande passante de 1,5 kHz) et un tachymètre ASM Posirot PMIS4/PMIR7 (résolution 0,25°) permettant de mesurer respectivement le couple résistant sur l'arbre ainsi que la vitesse de rotation et la phase de l'arbre. Ces deux éléments sont visibles en figure VI.1. Ils sont notamment employés pour l'analyse des puissances dissipées lors des contacts.

1.2.4 Marqueurs thermosensibles

Les marqueurs thermosensibles sont des marqueurs colorés dont la couleur change lorsqu'ils atteignent un certain seuil de température. Les marqueurs utilisés durant les essais sont produits par TMC

Hallcrest [75]. Ce changement de coloration des pigments par réaction chimique dépend principalement de la température à laquelle sont soumis les pigments, mais aussi de la présence d'oxygène dans l'environnement et du temps d'exposition. Le temps de réaction donné par le fabricant est inférieur à la seconde, ce qui rend ces marqueurs particulièrement intéressants pour notre application. Ces marqueurs se présentent sous plusieurs formes en fonction de la gamme de températures d'intérêt ou de l'environnement. En particulier, il existe :

- Des crayons gras, permettant de recouvrir des surfaces relativement larges avec un minimum d'équipement et des analyses dans la gamme de températures 120–600 °C avec entre un et trois virages de coloration pour chaque crayon, la résolution de température est donc relativement faible avec ces marqueurs. En revanche la résolution spatiale est assez bonne, et les marqueurs peuvent être remplacés assez facilement.
- Des peintures, permettant de traiter des surfaces importantes (pièces complètes), mais nécessitant un équipement de peinture complet. Ces peintures offrent une large gamme de températures 104–1270 °C. Le nombre de virages est là encore assez faible. Leur principal inconvénient réside dans la difficulté de mise en œuvre de ces marqueurs. Préparer, peindre, monter puis démonter les pièces pour effectuer les observations prend en effet beaucoup de temps.
- Des patches à coller sur la structure à étudier. Ces patches ne permettent qu'une mesure locale de la température mais offrent un très grande résolution de mesure, de l'ordre du degré Celsius au détriment toutefois de la plage de mesure, environ 60 °C au mieux. Il faut dans notre cas tenir compte en plus des effets centrifuges qui ont tendance à décoller les patches placés sur le rouet.

Ces marqueurs sont présentés en figure VI.4. Pour des raisons de mise en œuvre, les peintures n'ont

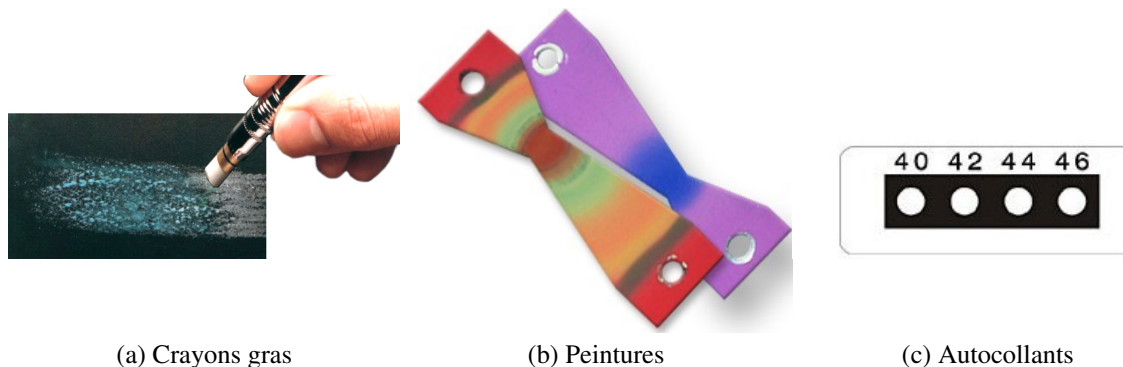


FIGURE VI.4 – Marqueurs thermosensibles.

pas été considérées dans notre étude. En revanche, des patches et des crayons thermosensibles ont été employés pour caractériser les échauffements sur le rotor. Aucune utilisation de ces marqueurs n'a été faite sur le stator. Ceci tient principalement à l'encombrement et à la difficulté d'accès de la surface extérieure de celui-ci. En effet, ces marqueurs étant à usage unique, une préparation à chaque essai d'environ deux heures a été nécessaire, uniquement pour les observations, le nettoyage et la dépose de nouveaux marqueurs.

Du fait du principe même de fonctionnement de ces marqueurs, l'information de température qu'ils fournissent est la température maximale locale vue durant l'ensemble de l'essai. Ces marqueurs ne sont donc pas suffisants pour une mesure précise ou variable dans le temps. Cependant, ils ont l'avantage de permettre une résolution spatiale de mesure très intéressante, pour identifier la forme des fronts de température dans les pales, et permettent de connaître l'enveloppe des températures vues par les pièces.

L'utilisation de ces marqueurs a été proposée pour obtenir une meilleure localisation des zones de contact sur les pales du rouet (du fait du caractère local des échauffements) ainsi que pour évaluer les champs de température auxquels est soumis le rotor durant les contacts. Pour caractériser ces deux

paramètres, nous avons décidé de recouvrir les pales du rouet au moyen d'un marqueur thermosensible sur chaque face dans un premier temps. De plus nous avons choisi trois marqueurs thermosensibles semblant pertinents pour notre étude :

- Un marqueur *basse température* dont la coloration passe du gris (■) au violet (■) à 120 °C
- Un marqueur *moyenne température* dont la coloration passe du bleu-vert (■) au gris clair (■) à 360 °C
- Un marqueur *polyvalent* dont la coloration présente plusieurs virages :
 - Un premier virage de orange (■) à gris foncé (■) à 245 °C
 - Un deuxième virage de gris foncé (■) à gris (■) à 335 °C
 - Un dernier virage de gris (■) à gris clair (■) à 505 °C
- Des marqueurs autocollants encapsulés de la gamme 182–199 °C, qui présentent un virage du blanc au noir (■), une fois soumis à la température indiquée.

La photo en figure VI.5 montre la préparation des pales avant un essai de contact.

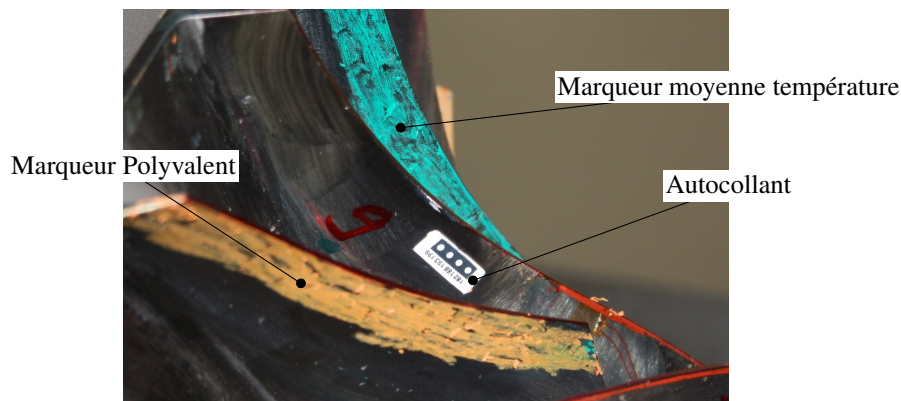


FIGURE VI.5 – Application de marqueurs thermosensibles avant un essai de contact.

1.3 Caractérisation dynamique des structures

1.3.1 Rouet

Afin de déterminer les propriétés modales du rouet à la suite de la ré-instrumentation, une caractérisation modale sous basse pression a été effectuée. En effet, l'influence de l'air sur l'amortissement modal des roues aubagées monobloc a déjà été démontrée, en particulier dans le cas des compresseurs centrifuges [65]. La caractérisation du rouet sous vide permet de mieux séparer les fréquences en diminuant fortement l'amortissement induit par l'air ambiant et donc de faciliter l'identification modale. La caractérisation a eu lieu à une température ambiante de 20 °C et une pression de 25 mbar. Les fréquences sont listées dans le tableau VI.1.

L'excitation du rouet a été réalisée au moyen d'un patch piézo-électrique placé sur la face aval du disque [8]. Les mesures ont été effectuées au moyen des jauges de bord d'attaque du rouet, et à l'arrêt. En effet, lors de la campagne d'essais CASTOR I, il a été montré que les effets centrifuges sont négligeables dans la plage de vitesses admissibles du banc [8].

1.3.2 Couvercle

À l'inverse du rouet, le couvercle a été caractérisé à pression atmosphérique, car il a été montré dans [7, §3.2.5] que l'air avait peu d'influence sur les fréquences propres de cette pièce. La caractérisation

Diamètre nodal	Fréquence [Hz]	Diamètre nodal	Fréquence [Hz]
2	2002,69	2	4167,89
3	2044,24	2	4174,12
3	2047,02	1	4194,90
4	2059,50	0	4226
4	2062,60	4	4247,20
5	2068,90	5	4272,10
1	2081,93	3	4344,10

(a) Première famille

(b) Deuxième famille

TABLEAU VI.1 – Fréquences propres du rouet.

a été réalisée au moyen d'un vibromètre laser Polytec PSV 400 en excitant la structure à l'aide d'un pot vibrant. Une description du dispositif expérimental est fournie dans [7, §3.2], pour des questions de concision, celle-ci n'est pas refaite ici. Les fréquences obtenues sont listées dans le tableau VI.2.

Diamètre nodal	Fréquence [Hz]
2	1829
3	1852,25
4	1999,75
0	2120,75
5	2355
6	2874
7	3535
2	3809

TABLEAU VI.2 – Fréquences propres du couvercle.

1.3.3 Diagramme de coïncidence modale

Au moyen des fréquences propres du rouet et du couvercle, le diagramme de Campbell dans le repère statorique a été construit. Celui-ci, fourni en figure VI.6, permet de déterminer les vitesses de coïncidence modale entre les premières familles modales du rouet et du couvercle. Les fréquences constantes avec la vitesse de rotation sont les fréquences propres du stator, et apparaissent en lignes horizontales. Les fréquences décroissantes avec la vitesse de rotation sont les fréquences propres du rotor, associées à des ondes rétrogrades. Les harmoniques de la vitesse de rotation sont aussi tracés pour évaluer le risque d'excitation des pièces par ceux-ci.

Trois vitesses de coïncidence modale sont dorénavant dans la plage de vitesses admissibles du banc, en particulier pour les modes à deux, trois et quatre diamètres nodaux. Durant la campagne CASTOR I, les pièces utilisées limitaient le nombre de coïncidences accessibles à deux du fait d'une situation modale repoussant l'interaction à deux diamètres au-delà de la plage de fonctionnement du banc [7, §3.3]. Compte tenu du désaccordage, le diagramme expérimental fait apparaître des fréquences par paires pour certains modes. La définition du profil des vitesses de rotation menant à des coïncidences devra prendre en compte cette dispersion. Pour de telles vitesses de rotation, des excitations aux harmoniques de la vitesse de rotation sont attendues, notamment par les harmoniques 21Ω pour l'interaction à deux diamètres, 29Ω pour l'interaction à trois diamètres et 126Ω à 135Ω pour l'interaction à quatre diamètres.

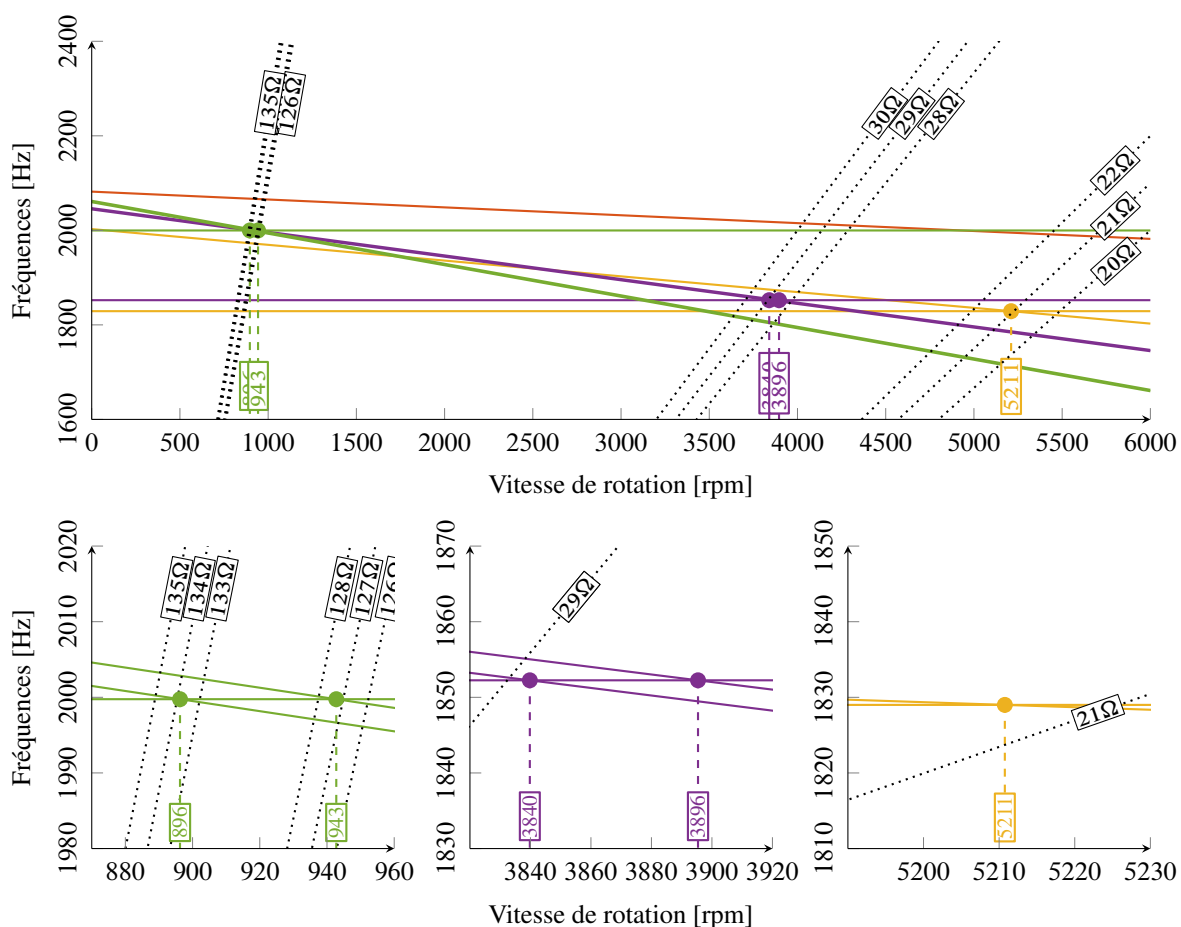


FIGURE VI.6 – Diagramme de coïncidence modale expérimental dans le repère fixe. Harmoniques de la vitesse de rotation (····). Modes à 1 (—), 2 (—), 3 (—), 4 (—) diamètres nodaux. Vitesses de coïncidence (●).

Toutefois, le choix d'une interaction à trois diamètres nodaux permet ici de se placer à une vitesse de rotation plus élevée que précédemment. Pour rappel, l'interaction étudiée durant la campagne CASTOR I et décrite dans [7, §4], était l'interaction à quatre diamètres nodaux, qui s'obtient pour des vitesses de rotation plus faibles. Ce positionnement à vitesse de rotation élevée permet d'obtenir une meilleure séparation des harmoniques de la vitesse de rotation, et des coïncidences fréquentielles d'intérêt. Le diagramme de coïncidence de la figure VI.6 illustre la densité des harmoniques de la vitesse de rotation autour des vitesses d'intérêt prédites par le critère de Schmiechen. Autour de la coïncidence à quatre diamètres, les harmoniques 126Ω à 135Ω sont d'ailleurs pratiquement indiscernables les uns des autres à la pleine échelle de la figure.

2 Essai d'interaction aubes-stator

2.1 Introduction

Les essais d'interaction aube-stator réalisés durant la campagne CASTOR II suivent un protocole assez simple. Celui-ci est constitué d'un pré-réglage du jeu entre aubes et couvercle, d'une mise au vide, d'une mise en rotation selon un profil de vitesse pré-établi. Un enregistrement des réponses du système à l'aide de l'instrumentation décrite plus haut est effectué sur l'ensemble de l'essai. L'arrêt des rotations est déclenché lorsque le profil de vitesse prévu est terminé, avec un ralentissement contrôlé, ou lorsque

les niveaux vibratoires deviennent trop importants. Un essai donné est ainsi réalisé sur une durée de l'ordre de vingt minutes.

Douze de ces essais ont été effectués avec la configuration CASTOR II en variant les conditions de jeu ou de vitesse. Dans leur ensemble, les essais ont montré des comportements qualitativement analogues, par souci de concision nous ne présentons donc ici que l'essai n°12. Au cours de ces essais, nous observons l'émergence de réponses simultanées sur l'ensemble des capteurs du rotor et du stator sur des durées relativement brèves. Ces événements seront appelés interactions (entre rotor et stator) dans la suite, dénomination correspondante aux « interactions » dans [7]. Ce sont ces interactions qui sont particulièrement analysées à l'aide de différents traitements numériques ou de recoupement entre les différentes mesures. En particulier on cherche à vérifier si les comportements observés présentent ou pas les trois caractères d'une interaction modale : coïncidences en fréquence en diamètres nodaux et sens de propagation, mis en évidence lors d'autres observations [129] et rappelés à la section I.2.

Les signaux des différents capteurs sont analysés au moyen des outils suivants :

- Analyse temporelle, brute ou filtrée en fréquence des signaux.
- Analyse temps-fréquence (spectrogrammes) permettant de suivre les composantes fréquentielles des signaux au cours du temps.
- Diagrammes de phases traçant l'évolution de la phase d'un signal en fonction de la phase de l'arbre, déjà utilisés dans [20] pour l'étude de contacts aubes-carter. Ces diagrammes permettent de mettre en évidence les excitations synchrones et asynchrones et de localiser spatialement les amplitudes de vibration. La correspondance spatiale entre les réponses du rotor et les réponses du stator peut être établie mais ne sera pas montrée ici. Elle nécessite de positionner la référence du codeur par rapport au stator.
- Transformées de Fourier spatiales sur les jauges du rotor ou du stator pour l'analyse signée des diamètres nodaux.

Le cas échéant, afin de faciliter la lecture, des informations complémentaires sont superposées aux signaux bruts ou traités :

- Les fréquences des modes des deux structures issues des caractérisations, indiquées $\boxed{\omega_r^\bullet}$ pour le rouet et $\boxed{\omega_s^\bullet}$ pour le couvercle, où l'exposant représente les nombre de diamètres nodaux.
- Les fréquences correspondant aux harmoniques de la vitesse de rotation, désignés par des $\boxed{\bullet\Omega}$.
- Sur les spectrogrammes, les maxima d'amplitude du signal sur chaque bande du spectrogramme et sur toute la plage de fréquences étudiée (filtrée).

2.2 Déroulement de l'essai

Durant cet essai, le jeu séparant le rotor et le stator a été fermé avant la mise en rotation. Cette condition initiale a permis d'obtenir une configuration de contact initiale fortement contrainte. Les phases d'interaction marquées ont été nombreuses et se sont accompagnées d'échauffements importants qui ont eu pour conséquence d'endommager une partie de l'instrumentation. Les échauffements constatés durant cet essai ont été les plus importants relevés sur le banc CASTOR à ce jour. C'est très probablement la condition initiale appliquée qui influence tout le reste du comportement.

La consigne de vitesse de rotation a été paramétrée afin de croiser la condition d'interaction modale à trois diamètres nodaux. Cette consigne a consisté en une rampe rapide d'environ 50 rpm s^{-1} permettant de s'approcher de la plage fréquentielle d'étude, puis une rampe lente de $0,27 \text{ rpm s}^{-1}$ entre 3730 rpm et 4030 rpm permettant l'établissement de régimes quasi-stationnaires, et enfin, une rampe rapide de ralentissement en fin d'essai. Un aperçu du profil de vitesse de rotation au cours de l'essai est donné en figure VI.7a.

2.3 Observations globales sur l'essai

2.3.1 Vitesse de rotation et couple sur l'arbre

Durant cet essai, de nombreuses baisses de régime, une vingtaine environ, ont pu être constatées sur le signal du tachymètre, en figure VI.7b. Comme pour les autres essais, ces ralentissements sont corrélés

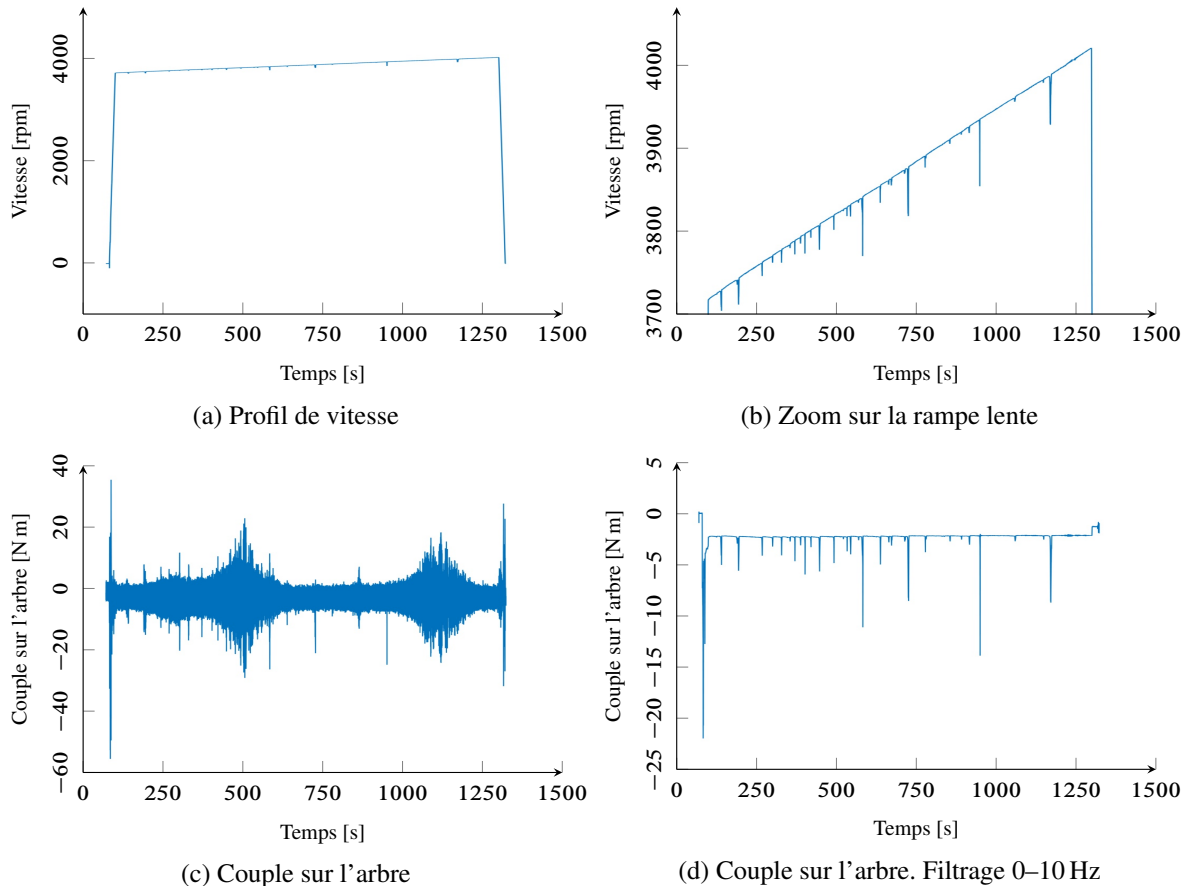


FIGURE VI.7 – Evolutions de la vitesse de rotation et du couple au cours de l'essai.

avec une variation du couple moyen mesuré sur l'arbre de rotation comme on peut le voir en comparant les figures VI.7d et VI.7b qui représentent respectivement les évolutions temporelle du couple et de la vitesse de rotation de la broche. Ces ralentissements sont ainsi clairement associés à des variations du couple résistant sur l'arbre, qui ne peuvent être imputées (par construction) qu'à des interactions entre le rotor et le stator. La suite des observations confirmera que ces événements sont bien concomitants avec des réponses dynamiques et thermiques mesurées sur les deux structures. On note que l'ensemble moteur-variateur-asservissement ne parvient pas à imposer strictement la consigne de vitesse demandée.

De plus, cet essai se démarque par la présence d'un pic de couple au démarrage plus important que durant les essais précédents. Ceci est lié à la condition initiale avec structures en contact, entraînant un couple supplémentaire à vaincre lors de l'accélération initiale de la broche. En dehors des périodes d'interaction, le couple se stabilise à une valeur moyenne correspondant aux couples résistants de frottement dans les paliers ainsi qu'à la mise en mouvement de l'air résiduel dans l'enceinte à vide, qui ont été caractérisés lors d'essais avec jeu ouvert lors d'essais précédents. Cette ouverture du jeu après le démarrage est probablement due à un rodage de l'abradable lors du démarrage.

2.3.2 Analyse des mesures de déformation effectuées sur le rotor et le stator

L'observation des signaux relevés sur le rotor et le stator permet de corroborer l'existence de ces interactions successives entre pales et couvercle. La figure VI.8 indique une simultanéité des variations des déformations mesurées sur le rotor et le stator, et lors de certaines interactions, l'augmentation rapide des températures relevées sur l'extérieur du stator. Les mesures de températures sont en effet soumises au délai dû à la conduction de la chaleur dans les structures. Les phénomènes thermiques nécessitent pour être capturés que les capteurs soient très proches de la zone de contact, ce qui n'est de toute évidence pas le cas pour chaque évènement mis en évidence par les jauges de déformation. Certaines des réponses des jauges de déformation ne reviennent pas à leur état initial. Ceci révèle des temps de stabilisation thermique ou même des endommagements.

On peut toutefois noter une sensibilité plus importante des jauges placées sur le rotor puisque certains évènements notables sur les jauges du rotor ne sont pas aisément discernables sur le stator, en particulier pour les jauges de méridienne et de bord de fuite, en figure VI.10. Lors de la mise en rotation, vers $t \approx 70$ s, on peut remarquer une augmentation des déformations simultanée sur les deux structures, sans toutefois d'augmentation notable de la température.

À l'inverse, trois évènements à $t \approx 450$ s, $t \approx 730$ s et $t \approx 1170$ s semblent avoir généré beaucoup de chaleur, avec des températures de plus de 150 °C relevées localement. Les deux derniers évènements de la sorte ont par ailleurs endommagé plusieurs jauges, sur le rotor comme sur le stator. Il est à noter que pendant ces évènements, les températures atteintes ont dépassé la plage de calibration des conditionneurs de thermocouples, ce qui a entraîné la saturation du signal acquis, les températures réellement atteintes sur la peau extérieure du stator ont probablement dépassé les 250 °C.

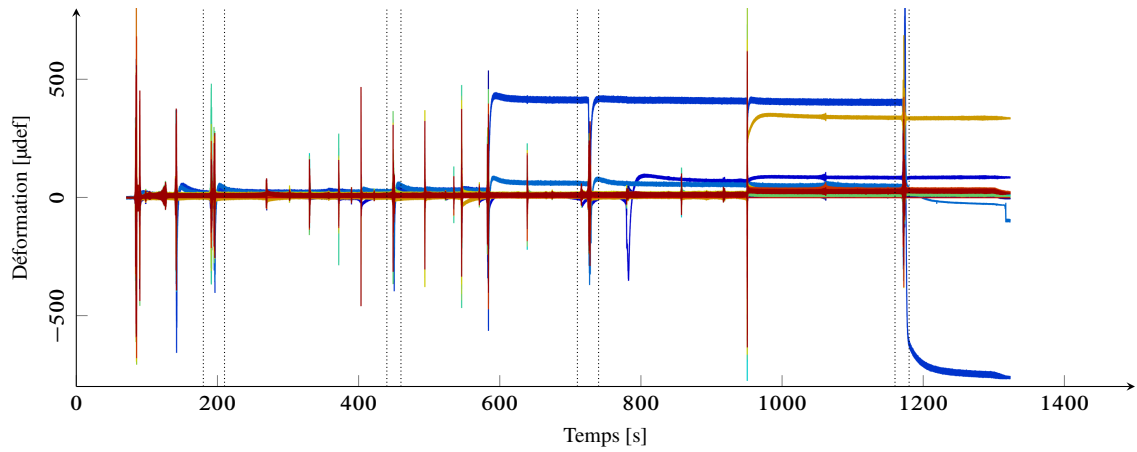
L'étude détaillée des trois évènements ayant généré de fortes élévations de température (voir figure VI.9) permet de remarquer deux phases. D'abord, une interaction dynamique mise en évidence par des réponses oscillatoires divergentes sur les deux structures et des élévations de température rapides. Ensuite, la perte d'interaction, qui s'explique par une ouverture du jeu par les phénomènes d'usure.

Ces trois évènements sont clairement associés à des contacts au bord de fuite, et sur plusieurs pales *a priori*. En effet, les jauges du rotor, figure VI.10b, présentant des réponses à basse fréquence importantes sont placées en bord de fuite, sur les pales Principale 6 (PP6) et Intermédiaire 6 (PI6), qui, vues du stator, se suivent directement lors de la rotation de l'arbre.

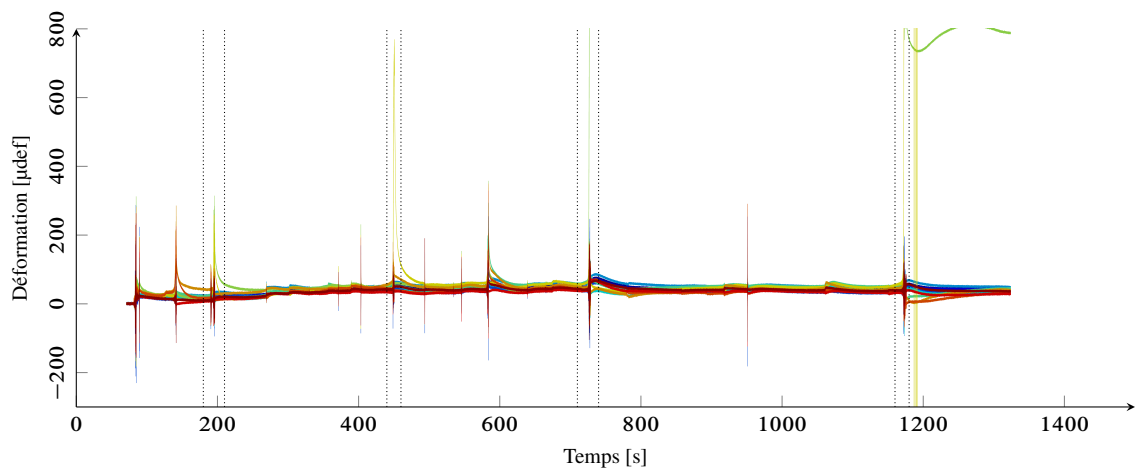
La composante quasi-statique des jauges fait intervenir des phénomènes mécaniques et thermiques, et est cohérente avec un chargement de flexion contraire au sens de rotation ou de compression, étant donnée l'implantation des jauges. La composante thermique est particulièrement présente sur les déformations mesurées au bord de fuite, et sur la méridienne, rassemblées en figure VI.11b. On y remarque que le retour aux niveaux de déformation précédant une interaction après les évènements à $t \approx 170$ s, $t \approx 190$ s ou $t \approx 800$ s prend plusieurs dizaines de secondes, ce qui est de l'ordre de grandeur des temps caractéristiques thermiques du système. Une partie des déformations affichées peut d'ailleurs s'interpréter au moyen des courbes de compensation thermique des jauges de déformation employées.

2.3.3 Analyse des mesures effectuées sur le rotor

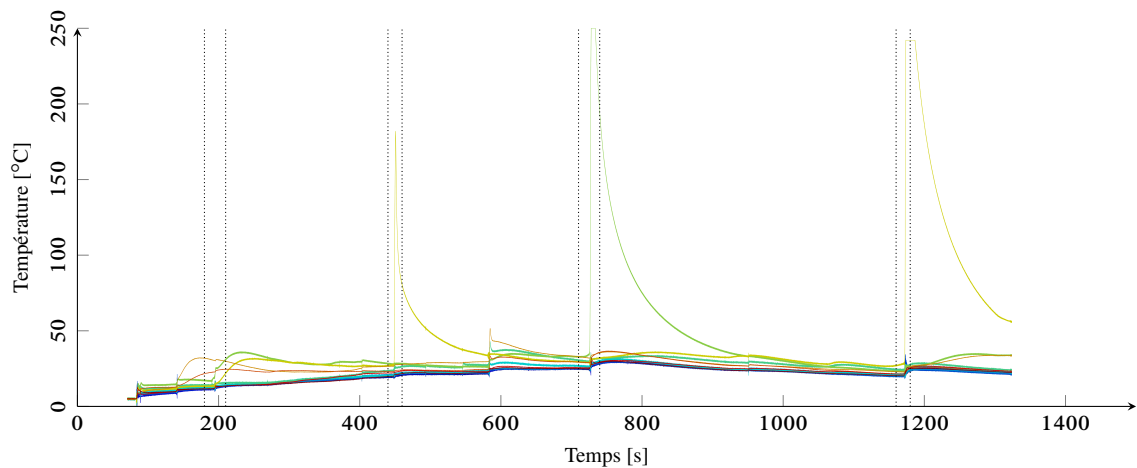
En plus des observations précédentes, l'exploitation des jauges placées à différentes positions sur le rotor, en méridienne, figure VI.10c, et au bord de fuite, figure VI.10b, montre que les zones de contact se sont déplacées au cours du temps le long de la tête de pale. Les trois évènements visibles sur les mesures fournies par les jauges de bord de fuite en figure VI.10b sont suivis entre $t \approx 200$ s et $t \approx 350$ s d'une période sans interaction notable. Pour autant, les signaux des jauges de bord d'attaque et de méridienne, visualisés dans les figures VI.10a et VI.10c, font état de réponses, relativement faibles toutefois. Par ailleurs, plusieurs ralentissements sont observés au même moment sur la mesure de la vitesse de rotation en figure VI.7b. Il y a donc bien un déplacement de la zone de contact au cours de l'essai. Cette modification des conditions de contact est bien sûr due à une composition d'effets



(a) Jauges du rouet



(b) Jauges du couvercle



(c) Thermocouples du couvercle

FIGURE VI.8 – Évolution temporelle des signaux relevés sur le rotor et le stator. Interactions détaillées à la section VI.2.4 (⋮⋮).

mécaniques et thermiques.

Les signaux des jauges placées sur les bords d'attaque du rouet de la figure VI.10a indiquent une composante quasi-statique très faible dans ces déformations sur la majorité de l'essai. Ce n'est qu'à

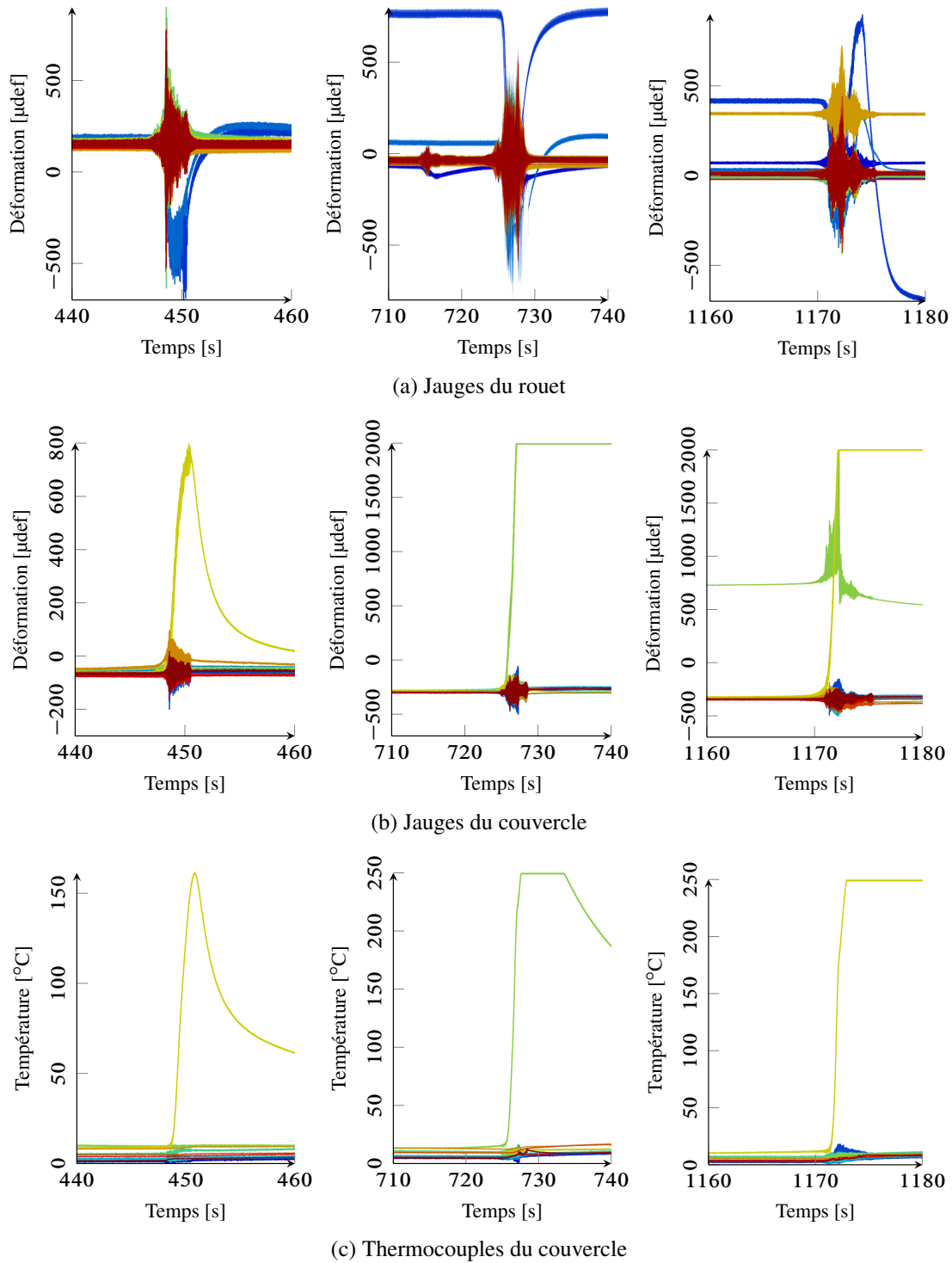
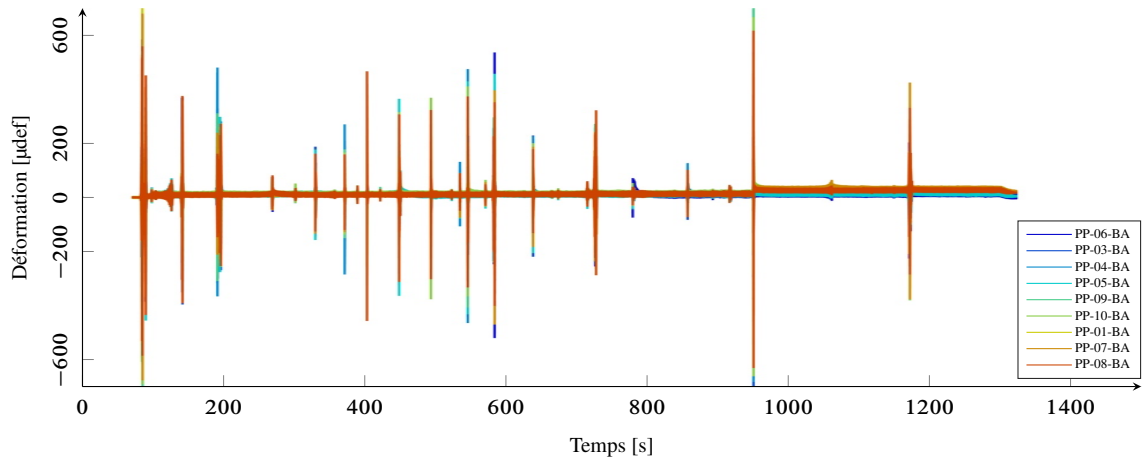


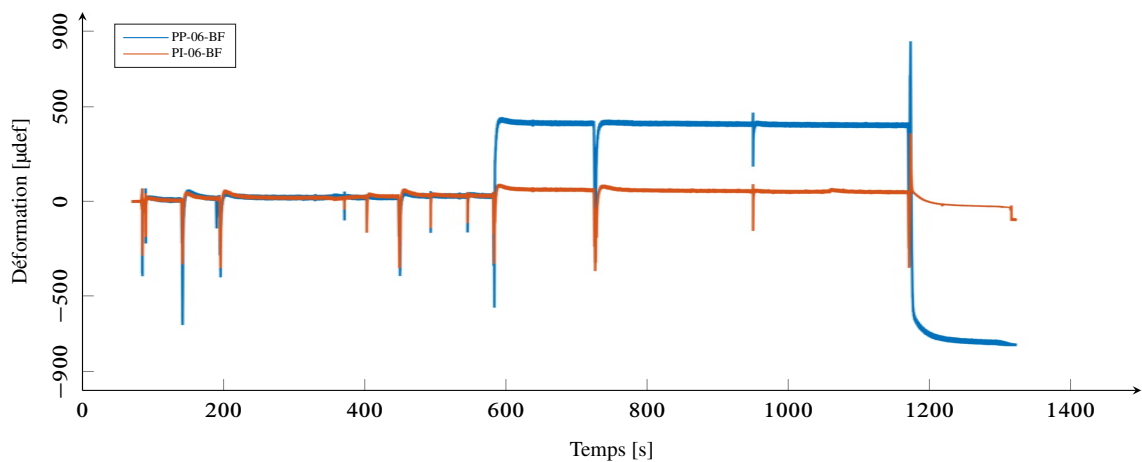
FIGURE VI.9 – Agrandissements de la figure VI.8 au voisinage des trois interactions accompagnées des échauffements mesurés les plus élevés.

$t \approx 950$ s qu'un offset apparaît sur certaines jauges de bord d'attaque d'environ $20 \mu\text{def}$. Celui-ci semble irréversible et doit donc être associé à un endommagement.

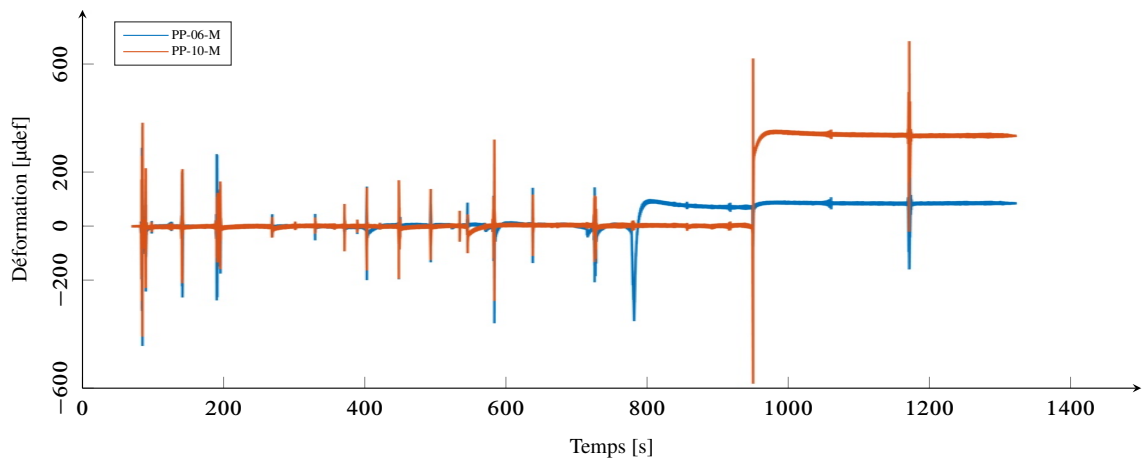
Un aspect intéressant des mesures de déformation au bord de fuite en figure VI.10b est qu'elles sont effectuées sur deux pales se suivant lors de la rotation. Bien que les pales intermédiaires participent peu dans les modes des premières familles modales du rouet, les mesures effectuées durant cet essai



(a) Bord d'attaque



(b) Bord de fuite



(c) Méridienne

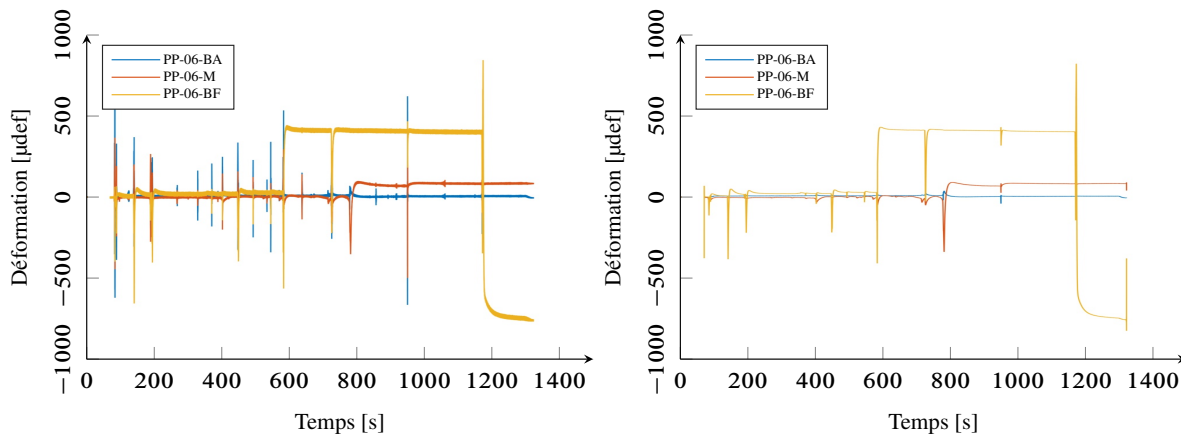
FIGURE VI.10 – Signaux temporels issus des jauges du rotor.

montrent que les deux pales se comportent de manière analogue durant la majorité de l'essai, avec toutefois des amplitudes légèrement plus importantes pour la pale principale. Toutefois, à $t \approx 600$ s, des déformations quasi-statiques apparaissent. Ces participations sont probablement attribuables à des endommagements de la jauge de la pale principale n°6, qui se traduisent par une irréversibilité des

déformations mesurées. Cet endommagement, qu'il soit d'origine mécanique (détachement), thermique (brûlure) ou plus probablement à une composition de tous ces phénomènes fait en tout cas état d'un contact particulièrement important lors de ces événements.

Concernant les jauges positionnées sur la méridienne, en figure VI.10c, le comportement affiché par les deux capteurs présente plusieurs différences. Au début de l'essai, jusqu'à $t \approx 800$ s, les deux jauges répondent aux mêmes instants, mais avec des comportements parfois très différents notamment en ce qui concerne les composantes quasi-statiques ($t \approx 400$ s, $t \approx 550$ s, $t \approx 740$ s et surtout $t \approx 800$ s). Au-delà, les mesures semblent beaucoup plus cohérentes sur les deux capteurs, mis à part l'offset relativement important apparaissant à $t \approx 950$ s sur la jauge PP10M, qui semble encore répondre malgré le déséquilibre apporté au pont de jauges.

Les mesures relevées sur la pale principale n°6, visibles en figure VI.11, montrent que la zone de contact une fois encore, se déplace durant l'essai. Durant les événements à $t \approx 720$ s et $t \approx 800$ s, les déformations mesurées par les deux jauges font état de participations quasi-statiques de forte amplitude. Cependant, quand une amplification est indiquée par une jauge, l'autre n'en présente pas, ou avec des amplitudes très différentes. On peut donc supposer que la zone de contact se délocalise entre ces deux événements. Le relevé des déformations au niveau du bord d'attaque montre une composante basse fréquence très faible, ce qui confirme l'hypothèse d'un contact proche du bord de fuite.



(a) Signaux des jauges placées sur la pale principale n°6.

(b) Signal filtré sur la bande 0–10 Hz.

FIGURE VI.11 – Mesures issues de jauges de déformation de la pale principale n°6.

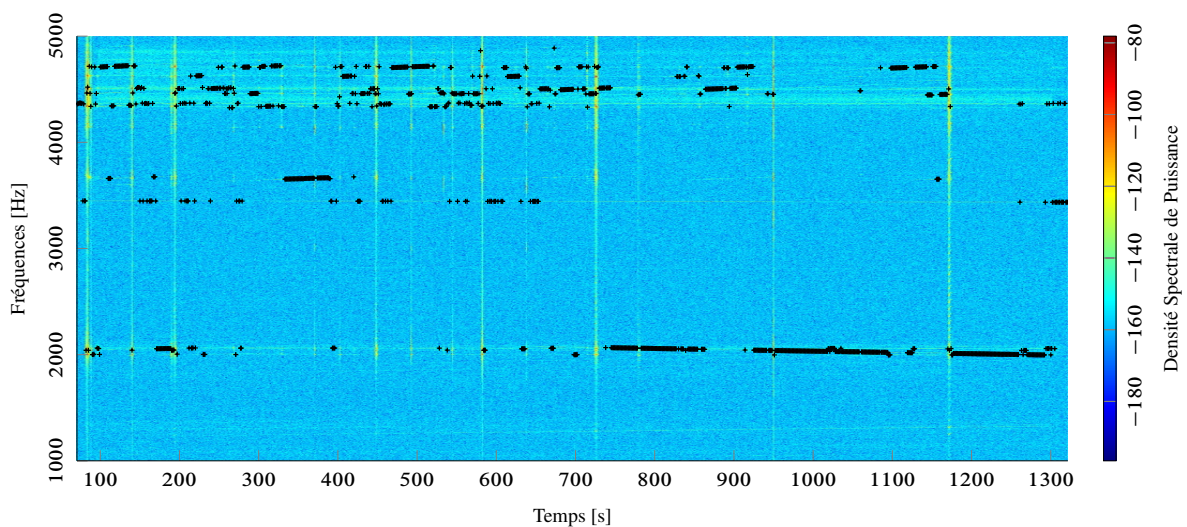
Une conclusion importante peut toutefois être effectuée concernant la localisation de la zone de contact sur une pale donnée du rouet : celle-ci est relativement large durant cet essai et couvre du bord de fuite à la méridienne. Ainsi, bien que le couvercle monté sur le banc CASTOR ait été conçu pour favoriser le contact en bord de fuite, on remarque ici que la méridienne participe de manière non négligeable. Cette conclusion va par la suite être confirmée par les observations effectuées sur les pales après essai. Concernant la répartition circonférentielle des contacts, il semble que toutes les pales ne soient pas toujours impliquées dans les interactions.

2.3.4 Analyse temps-fréquence du rotor et du stator

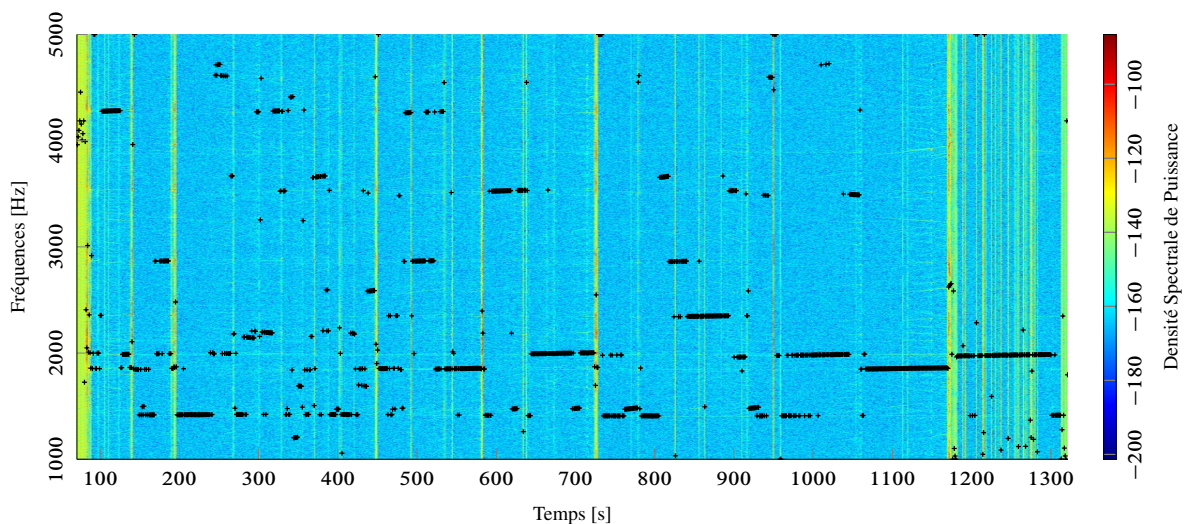
L'analyse temps-fréquence nous permet ici d'observer l'évolution du contenu spectral des mesures durant l'essai. Cette évolution, due à la fois à la variation de la vitesse de rotation ainsi qu'au changement d'état du système (prises et pertes de contact), permet de constater globalement l'étendue du spectre des réponses du module, en figure VI.12. Les spectrogrammes ont dans ce cas été calculés au moyen d'une transformée de Fourier glissante avec des échantillons de 1 s et en filtrant le signal entre 1 kHz et 5 kHz. Le spectre basse fréquence a ainsi été coupé, notamment le premier harmonique de la vitesse de

rotation, pour se concentrer sur la bande fréquentielle des première à troisième familles de modes du rouet. L'échantillonnage ayant été effectué à 12 kHz durant cet essai, la bande de fréquences d'analyse s'étend jusqu'à 6 kHz. Toutefois, un parasite présumé d'origine électromagnétique est présent dans la bande fréquentielle 5–6 kHz, c'est pourquoi la bande d'étude a été limitée à 5 kHz. Afin de faciliter la lecture des spectrogrammes, les maxima d'amplitude de chaque bande des spectrogrammes ont été mis en évidence par des symboles (+), qui permettent de suivre facilement la composante la plus énergétique du signal.

Comme remarqué précédemment dans le domaine temporel, les spectrogrammes en figure VI.12 montrent l'émergence de signatures spectrales sur les deux structures quasi-simultanées. Toutefois, le signal fourni par le vibromètre laser, en figure VI.12b, présente un spectre plus riche, notamment dans les zones $t \in 200\text{--}450$ s puis $t \in 750\text{--}1100$ s. Aussi, de nombreux signaux à large bande sont visibles en fin d'essai $t \in 1180\text{--}1300$ s. Ce phénomène est probablement lié à la présence de poussière d'abrasable en fin d'essai qui vient perturber le chemin optique parcouru par le laser et donc la mesure.



(a) Jauge rotor PP-06-BA, Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).



(b) Vibromètre laser. Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).

FIGURE VI.12 – Spectrogrammes des signaux rotor et stator filtrés sur la bande 1–5 kHz.

Plusieurs évènements vont maintenant être décrits plus en détail afin d'identifier les composantes

des signaux dans la zone des interactions à $t \approx 190$ s, $t \approx 450$ s, $t \approx 720$ s, et $t \approx 1170$ s.

2.4 Étude détaillée des interactions

2.4.1 Étude de l'interaction à $t \approx 190$ s

Durant cette période, on note en fait la présence de deux interactions ($t \approx 190$ s et $t \approx 195$ s), avec un ralentissement de la broche lors du deuxième contact figure VI.15 visible par le biais des harmoniques de la vitesse de rotations superposés au spectrogramme, et en relation avec l'augmentation du couple résistant sur l'arbre en figure VI.13d. L'analyse globale des signaux montre clairement que le second contact est plus fort que le premier : augmentation de la température figure VI.13a, du couple figure VI.13d, des déformations figures VI.13b et VI.13c.

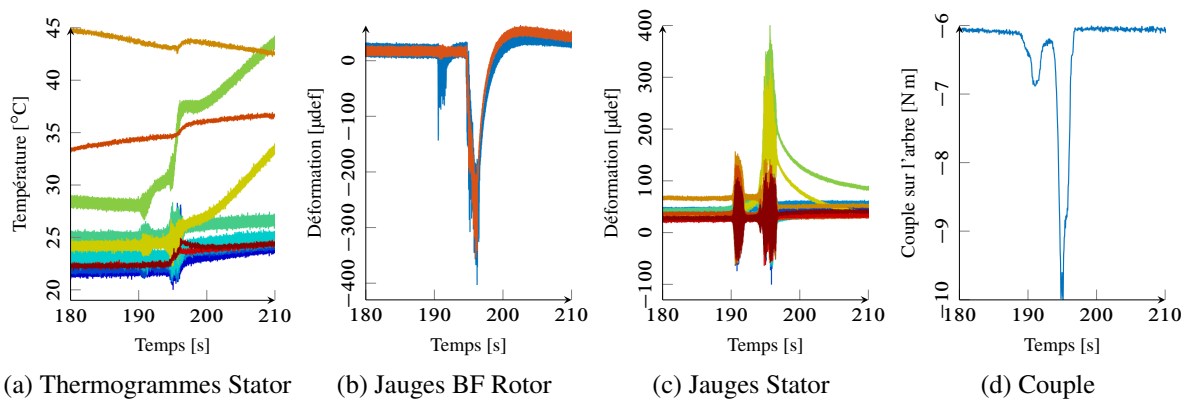


FIGURE VI.13 – Signaux temporels sur la période $t \in 180\text{--}210$ s.

L'observation de l'interaction à $t \approx 190$ s au moyen des spectrogrammes rassemblés en figure VI.14 indique que la composante la plus importante du signal avant et pendant cette interaction se situe dans la bande fréquentielle de la première famille de modes du rouet. Ces spectrogrammes ont été obtenus en calculant les transformées de Fourier sur des échantillons de 0,2 s afin d'observer plus finement l'évolution du signal au cours du temps. L'observation détaillée de cette zone fréquentielle montre plusieurs phases.

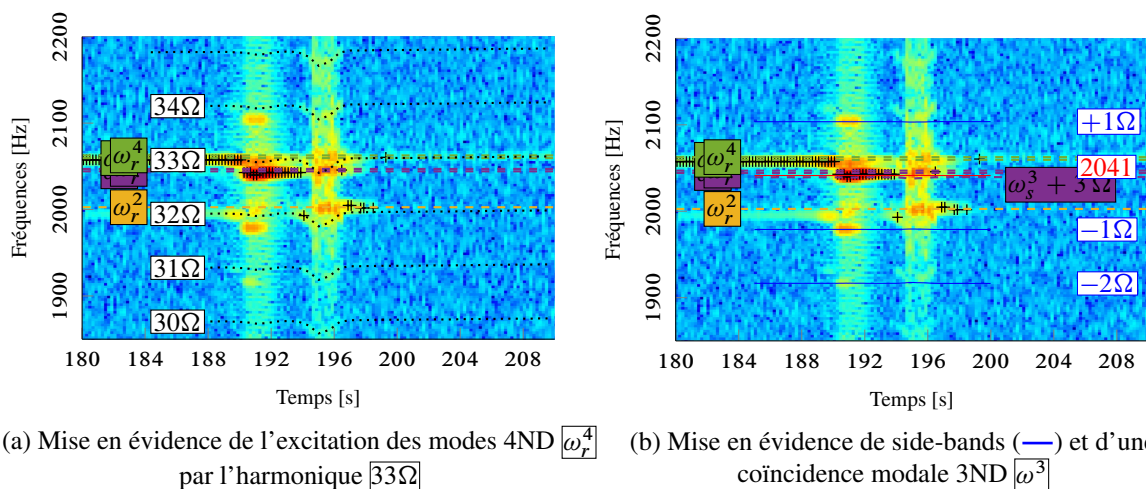


FIGURE VI.14 – Spectrogramme de la jauge PP-06-6BA, $t \in 180\text{--}210$ s. Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).

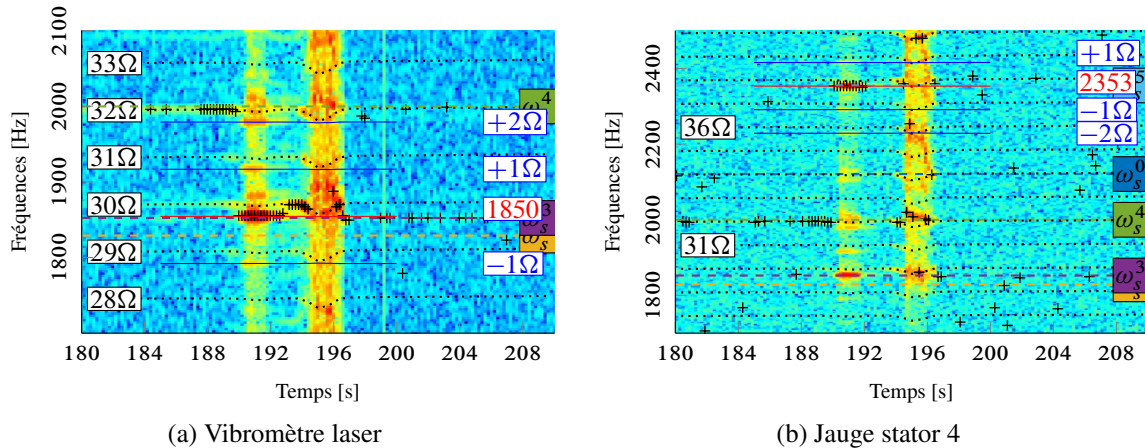
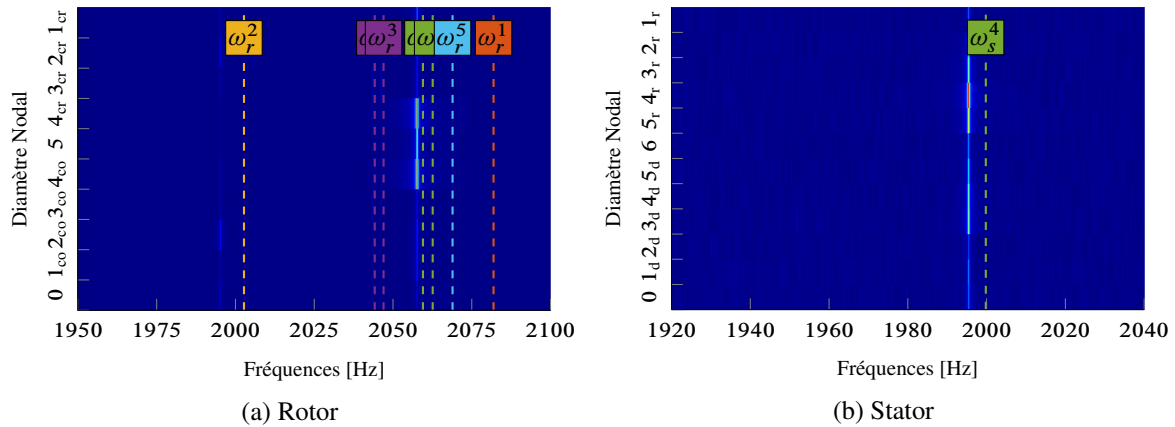
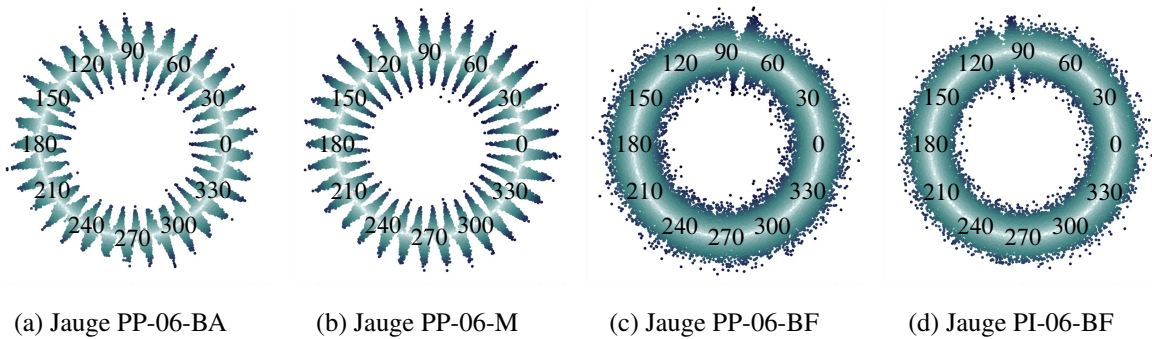


FIGURE VI.15 – Spectrogrammes de signaux mesurés sur le stator, $t \in 180\text{--}210$ s. Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).

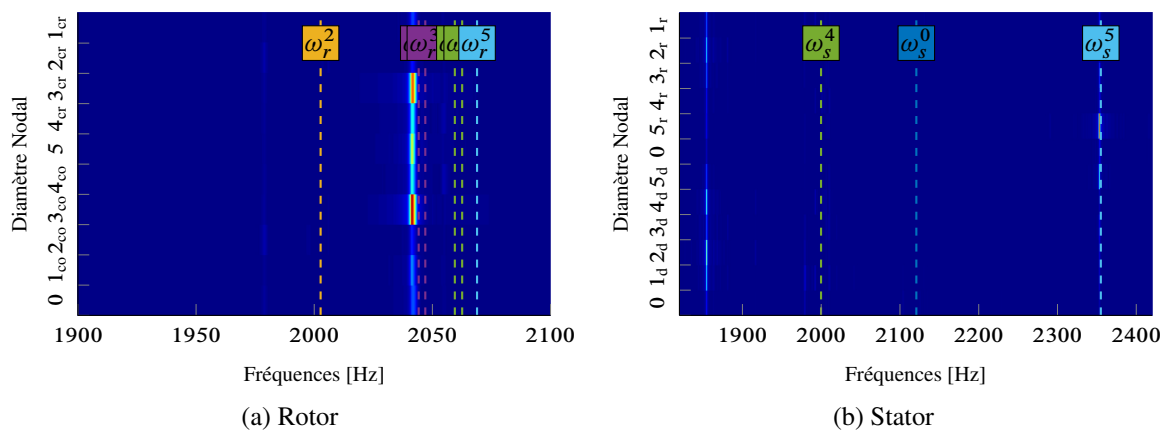
D'abord, l'excitation progressive des modes à quatre diamètres nodaux du rouet ω_r^4 , par l'harmonique 33Ω de la vitesse de rotation, mise en évidence par la correspondance du trait pointillé représentant la raie 33Ω et le trait interrompu vert représentant les fréquences propres. Les modes à quatre ω_r^4 et cinq ω_r^5 (masqué ici pour faciliter la lecture du spectrogramme) diamètres nodaux étant très proches, l'excitation des modes à cinq diamètres n'est pas non plus à exclure. Ensuite, l'interaction, durant laquelle les amplitudes augmentent fortement et le contenu fréquentiel est principalement celui des modes à trois ω_r^3 diamètres nodaux. De plus, durant cette phase de contact, la condition de coïncidence modale à trois diamètres est validée, les fréquences propres des modes à trois diamètres du rouet ω_r^3 et du stator exprimées dans le repère tournant $\omega_s^3 + 3\Omega$ étant identiques à ce moment de l'essai. La présence de side-bands, de la forme $\omega_s^3 + 3\Omega - 1\Omega$ et $\omega_s^3 + 3\Omega + 1\Omega$ est aussi constatée. Ces signaux sont nettement discernables des harmoniques de la vitesse de rotation. Aussi, on note que la séparation souhaitée entre les harmoniques de la vitesse de rotation et les fréquences de coïncidence est bien réalisée pour le mode à 3 diamètres nodaux, ce qui était une des raisons pour l'étude de cette coïncidence. Une conclusion importante est alors que dans cette période, les jauges de déformations répondent principalement sur les modes à 3 diamètres sur les deux structures de façon concomitante et de façon autonome, car isolée des composantes d'excitation dues à la rotation. Cette séparation est ensuite moins évidente, en raison du ralentissement de la broche à $t \approx 195$ s.

Avant l'interaction forte, les déformations du rotor et du stator comportent des composantes à quatre diamètres nodaux ω^4 visibles en figure VI.16, en accord avec les spectrogrammes en figures VI.14 et VI.15. L'onde présente sur le rotor est plutôt stationnaire, ce qui correspond à l'observation effectuée sur la figure VI.17. Sur le stator, une onde à quatre diamètres nodaux ω_s^4 rétrograde est observée. Les mesures fournies par les jauges de bord de fuite, visibles en figures VI.17c et VI.17d se caractérisent par la présence d'une faible amplification des déformations localisée autour de $\phi \approx 90^\circ$. Un défaut géométrique (bosse, creux, déformation par dilatation thermique) semble être à l'origine de cette augmentation locale des déformations.

Durant la première interaction, à $t \approx 191$ s, l'analyse à diamètres les déformations, figure VI.18 montre que le spectre des déformations émerge au voisinage des fréquences des modes à trois diamètres nodaux ω_r^3 sur le rotor, avec une composante co-rotative marquée et une composante contra-rotative plus faible. Une composante importante à cinq diamètres nodaux ω_s^5 rétrograde est visible sur le stator. L'observation du diagramme de phases de la jauge PP-06-BF, figure VI.19c, indique un phénomène localisé dans la zone angulaire $\phi \in 300\text{--}330^\circ$. Les mesures des jauges de bord d'attaque et de méridienne en figures VI.19a et VI.19b correspondent à un signal de fort niveau modulé. On n'a plus comme dans

FIGURE VI.16 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 186\text{--}189$ s. Filtrage 1–5 kHz.FIGURE VI.17 – Diagrammes de phases, $t \in 185\text{--}189$ s. Filtrage 1–5 kHz.

le cas précédent une vibration associée à un multiple de la vitesse de rotation. Les mesures sur le bord de fuite de la pale intercalaire n°6, visibles en figure VI.19d n'indiquent pas de déformations particulières, ce qui est cohérent avec les observations précédentes.

FIGURE VI.18 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 191\text{--}192$ s. Filtrage 1–5 kHz.

Sur la fin de cette interaction, une nouvelle analyse à diamètres, en figure VI.20, fait état de composantes à trois diamètres nodaux ω^3 sur les deux structures. Sur le rotor, la participation majoritaire est co-rotative et sur le stator, elle est rétrograde. Pourtant, dans ces conditions de vitesse de rotation, c'est une coïncidence fréquentielle entre une onde contra-rotative et une onde rétrograde qui est attendue.

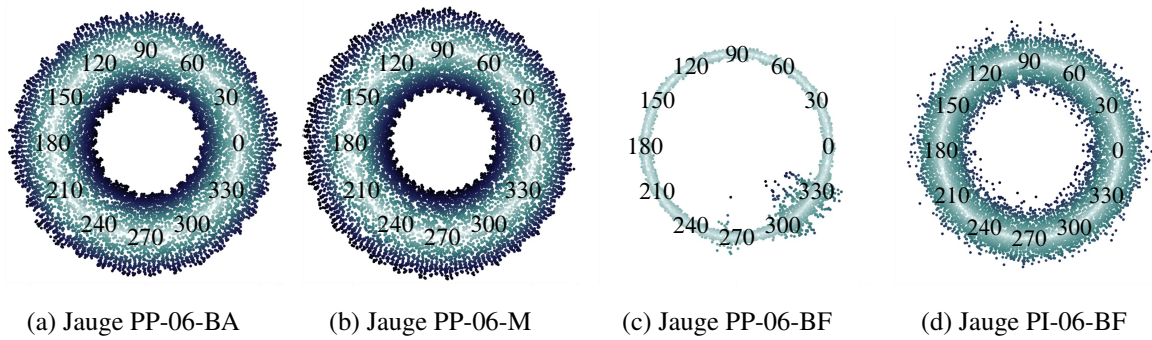


FIGURE VI.19 – Diagrammes de phases, $t \in 191\text{--}192$ s. Filtrage 1–5 kHz.

Il est possible, en tenant compte de la géométrie des pales du rouet et des déformées de ses premiers modes, que le critère de sens de propagation des ondes édicté par Schmiechen soit faussé dans cette configuration de contact. En effet, le contact a lieu près du bord de fuite, alors que les caractérisations des ondes sont effectuées au bord d'attaque. En dehors du sens de propagation, il semble donc qu'une

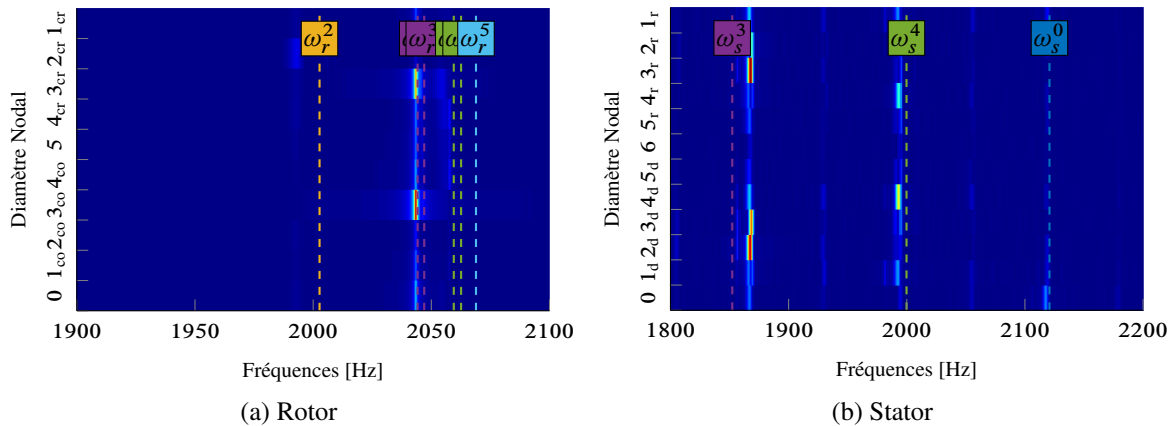


FIGURE VI.20 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 193\text{--}194$ s. Filtrage 1–5 kHz.

coïncidence modale ait été mise en évidence durant cette interaction, en particulier sur la fin de celle-ci.

Lors du second contact $t \approx 195$ s, les deux jauges de bord de fuite indiquent cette fois un évènement localisé sur le stator ($\phi \in 300\text{--}360^\circ$), le déphasage observé entre les figures VI.21c et VI.21d étant lié au décalage angulaire entre les pales principale et intercalaire du secteur n°6. On ne note pas d'organisation

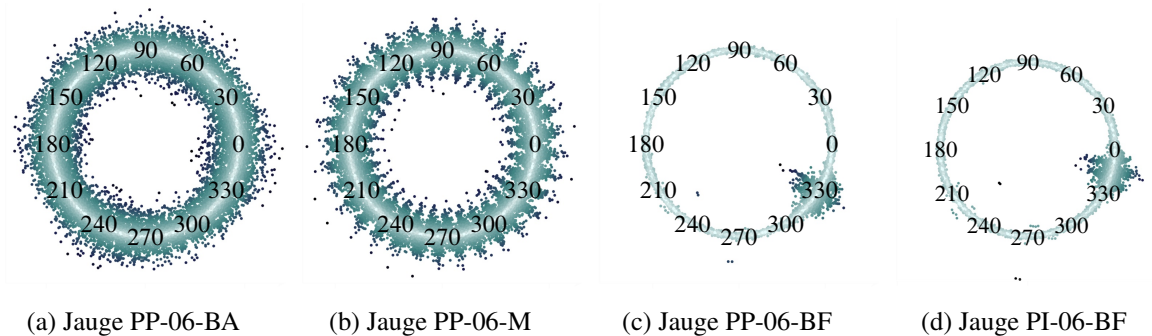


FIGURE VI.21 – Diagrammes de phases, $t \in 195\text{--}196$ s. Filtrage 1–5 kHz.

marquée dans la réponse dynamique à l'exception d'une réponse synchrone visible au niveau de la

méridienne (figure VI.21b), d'amplitude beaucoup plus faible que sur la figure précédente (VI.19b).

Après ce contact, l'ensemble rouet/couvercle ne présente plus de réponse vibratoire structurée, figure VI.22. L'usure du stator suite au contact étant responsable de ce retour à un état nominal.

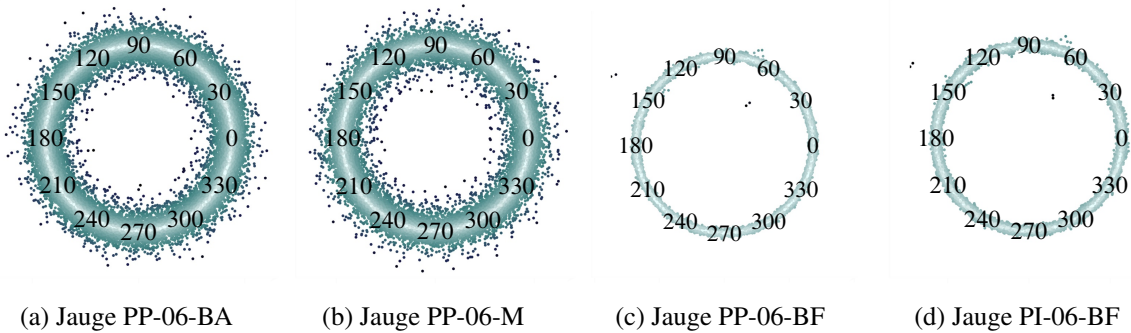


FIGURE VI.22 – Diagrammes de phases, $t \in 197\text{--}200$ s. Filtrage 1–5 kHz.

2.4.2 Étude de l'interaction à $t \approx 450$ s

Durant cette interaction, la zone de contact est proche du bord de fuite, comme l'attestent les déformations relevées sur le stator (figure VI.23c) et sur le bord de fuite du rotor (figure VI.23b). Un des thermocouples du stator, figure VI.23a, montre un pic de température à 150 °C, non observé dans le cas précédent, avec cependant des variations de couple et déformations au bord de fuite comparables. La jauge associée indique une déformation quasi-statique très importante au même moment. La partie oscillante de cette réponse s'éteint en même temps que sur les autres jauges, sur le rouet comme sur le couvercle. Ensuite, le signal montre la relaxation thermique vers l'état initial. L'interaction dure environ 2 s et les vibrations mesurées retrouvent leur niveau nominal rapidement après.

Cette période se distingue une élévation et une localisation plus importante de la température par rapport à la période $t \approx 190$ s. Une bonne répétabilité des réponses quasi-statiques au bord de fuite et en couple est constatée. Les niveaux dynamiques sont en effet de l'ordre de 100 μdef ce qui est déjà le cas après l'interaction étudiée à la section précédente, vers $t \approx 195$ s.

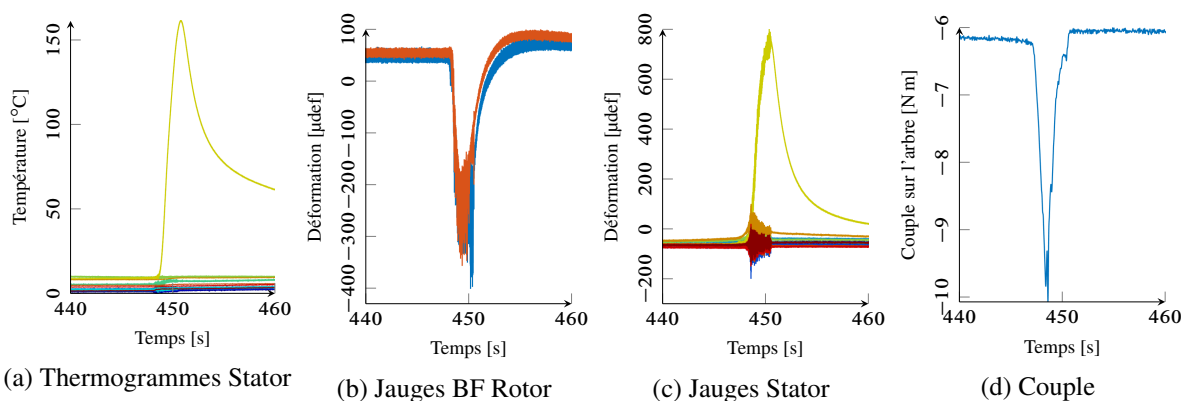


FIGURE VI.23 – Signaux temporels sur la période $t \in 440\text{--}460$ s.

Cette interaction fait majoritairement intervenir les modes des 2^{ème} et 3^{ème} familles du rouet, comme le montre le spectrogramme de la figure VI.24a. On peut noter particulièrement l'excitation du mode à cinq diamètres nodaux ω_r^5 et au début de l'interaction, l'apparition d'autres modes du rotor (ω_r^3 , ω_r^4) et d'harmoniques moteur. Sur le stator en revanche, les modes participant le plus sont les modes de la

première famille, comme on peut le voir sur le spectrogramme en figure VI.24b. Mais là encore, c'est le mode à cinq diamètres nodaux ω_s^5 qui répond le plus jusqu'à $t \approx 447$ s. Ensuite, d'autres participations émergent et ce mode n'est alors plus dominant.

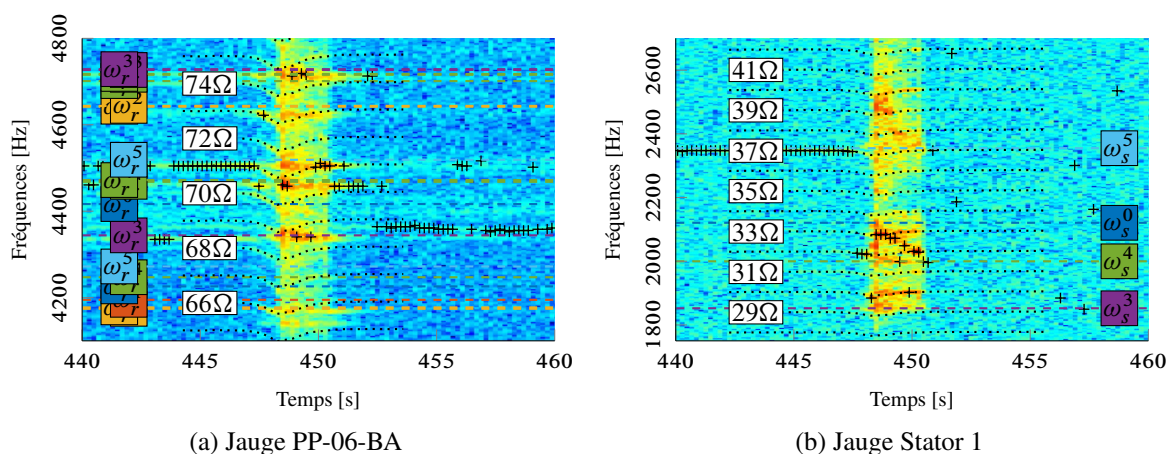


FIGURE VI.24 – Spectrogrammes, $t \in 440$ – 460 s. Filtrage 1–5 kHz. Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).

Les diagrammes de phases des déformations mesurées sur le rotor, figure VI.25, font encore une fois état d'une structure des déformations sur le rotor, avec des oscillations synchrones au niveau du bord d'attaque, traduisant une réponse avec l'harmonique 71Ω . Aussi, ces graphiques montrent un évènement localisé au voisinage de $\phi \approx 120^\circ$ sur la circonférence, au niveau du bord de fuite. Toutefois, on peut

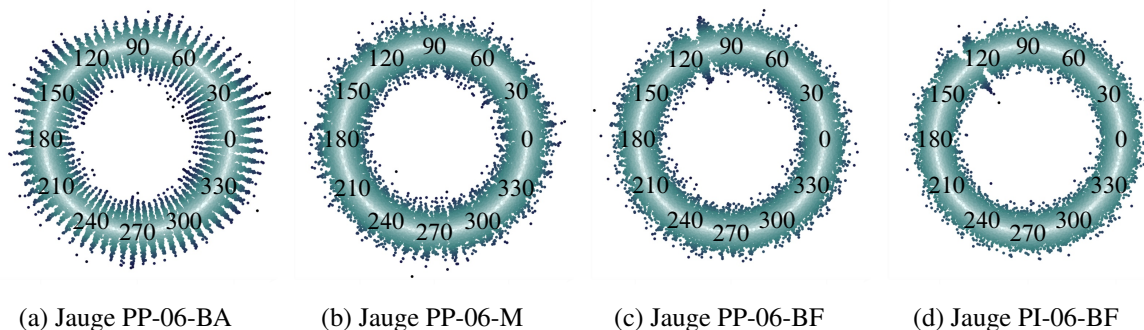
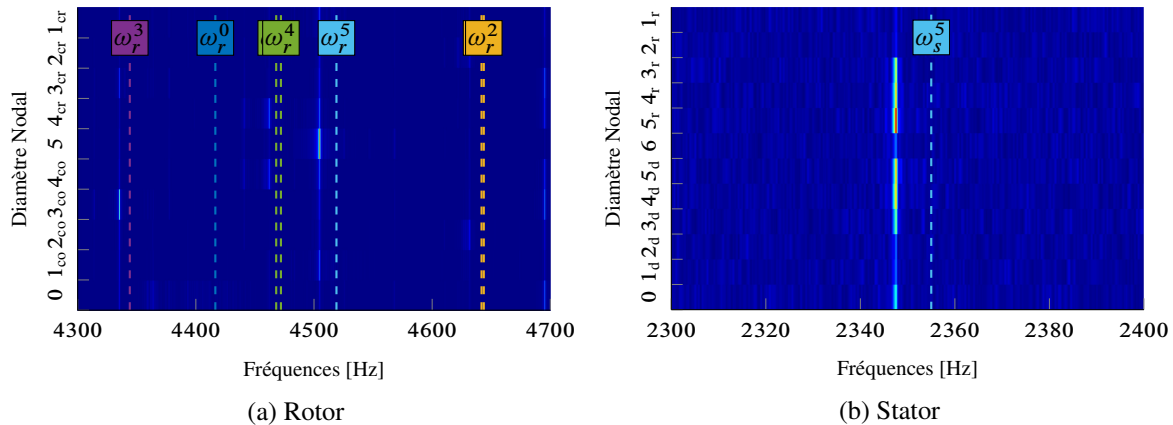
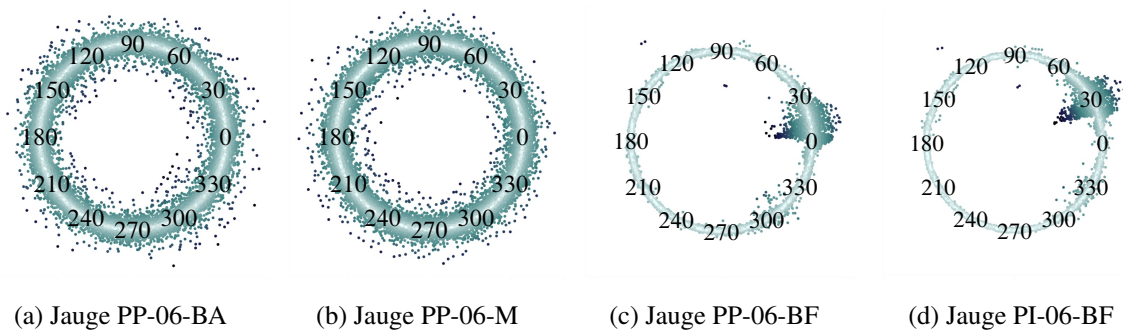
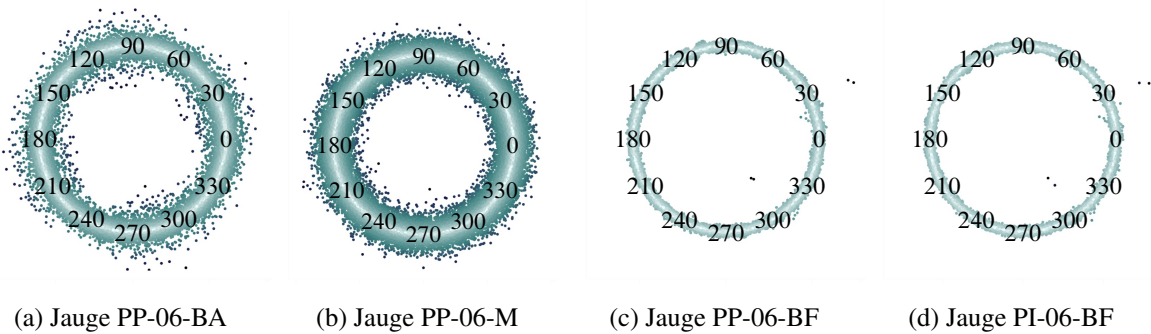


FIGURE VI.25 – Signaux des jauges en fonction de la phase de l'arbre, $t \in 445$ – 447 s. Filtrage 1–5 kHz.

noter un déphasage par rapport aux observations effectuées avant l'interaction à $t \approx 190$ s, certainement dû à l'usure de la couche de matériau abrasable, qui entraîne une modification de la localisation des contacts sur la circonférence du couvercle. L'observation des diagrammes fréquences–diamètres en figure VI.26 concorde avec les informations vues sur les spectrogrammes. La réponse est dominée par une onde à cinq diamètres nodaux ω_s^5 , indéterminée sur le rotor, et rétrograde sur le stator. D'autres participations de plus faible amplitude sont aussi observées.

Durant l'interaction, on retrouve le phénomène de localisation de déformations mesurées au bord de fuite, visible sur les figures VI.25c et VI.25d, ici dans le secteur $\phi \in 0$ – 30° . La réponse sur les jauges de bord d'attaque et de méridienne, dans les mêmes conditions, sont asynchrones (figures VI.25a et VI.25b)

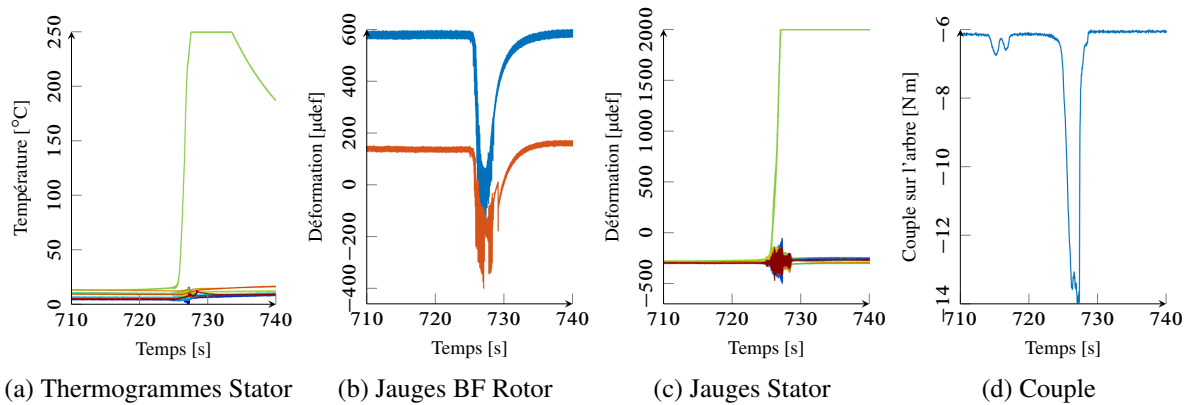
Après l'interaction, les niveaux vibratoires redeviennent faibles et aucune organisation des déformations ne peut être notée en figures VI.28c et VI.28d.

FIGURE VI.26 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 445\text{--}447$ s. Filtrage 1–5 kHz.FIGURE VI.27 – Diagrammes de phases, $t \in 448\text{--}450$ s. Filtrage 1–5 kHz.FIGURE VI.28 – Diagrammes de phases, $t \in 451\text{--}454$ s. Filtrage 1–5 kHz.

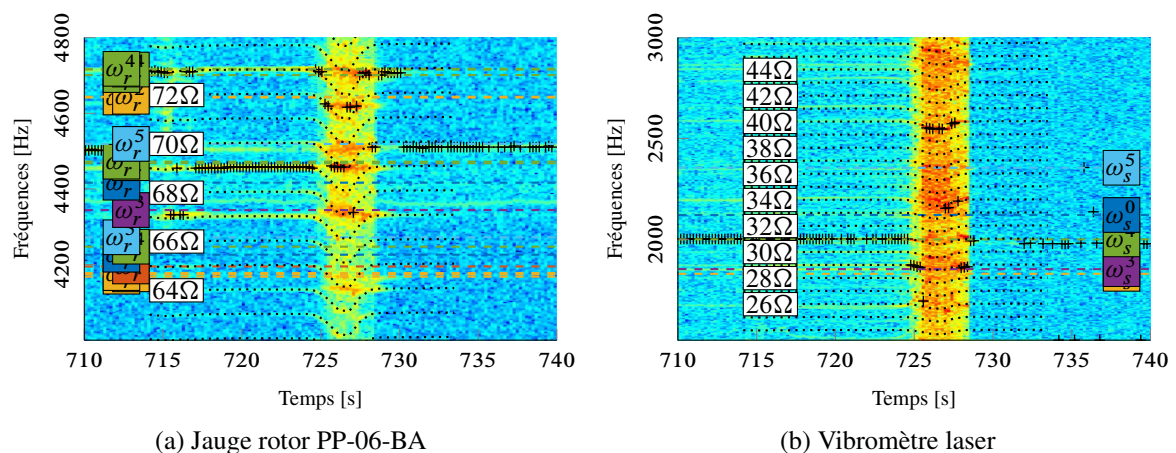
2.4.3 Étude de l'interaction à $t \approx 720$ s

La période autour de $t \approx 720$ s montre une interaction de contact importante vers $t \approx 725$ s, précédée de deux interactions de faible intensité vers $t \approx 712$ s, figure VI.29. Ces premières phases ne sont détectées que sur le tracé du couple en figure VI.29d, et n'induisent pas de déformations (figures VI.29b et VI.29c) ni d'augmentation de température (figure VI.29a) mesurables. L'interaction plus intense a des conséquences sur les deux structures, avec des une augmentation très forte et localisée de la température mesurée sur un thermocouple (figure VI.29a), placé à 30° de celui qui était fortement sollicité durant l'interaction précédente (figure VI.23a).

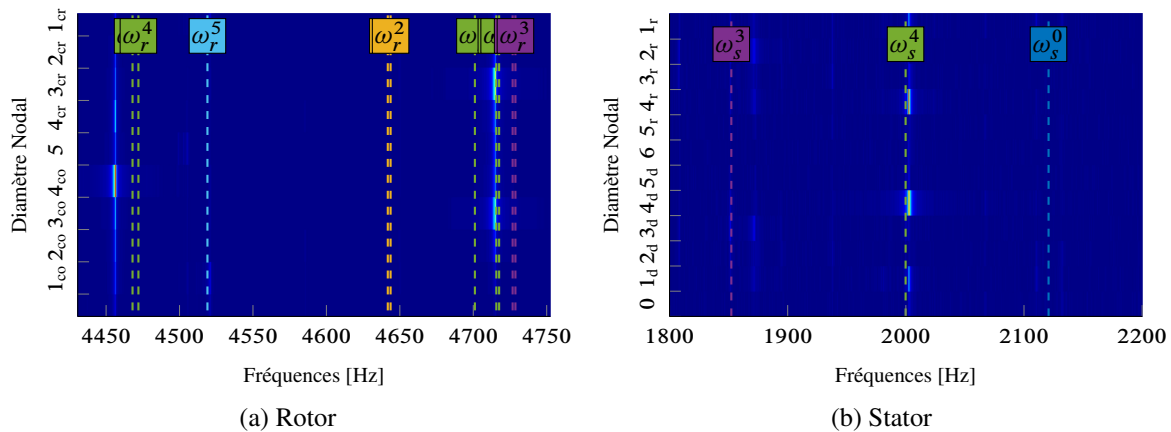
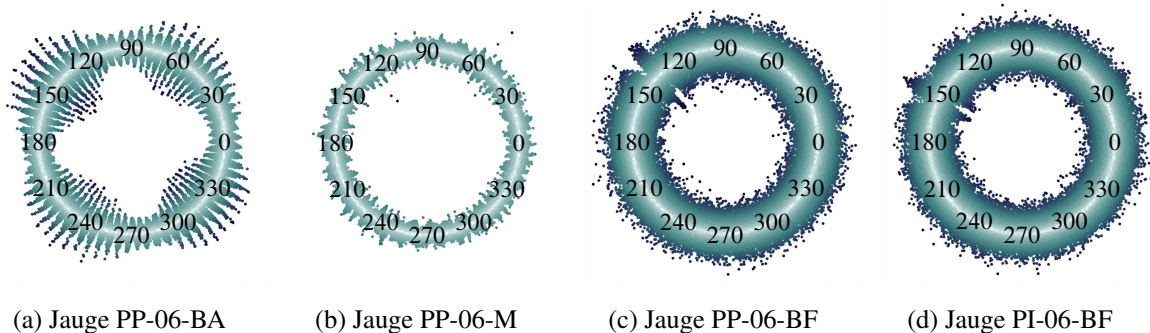
L'interaction observée à $t \approx 720$ s sur le spectrogramme VI.30a, fait apparaître une coïncidence des modes à quatre diamètres nodaux ω_r^4 des familles modales supérieures du rouet avec plusieurs

FIGURE VI.29 – Signaux temporels sur la période $t \in 710\text{--}740$ s.

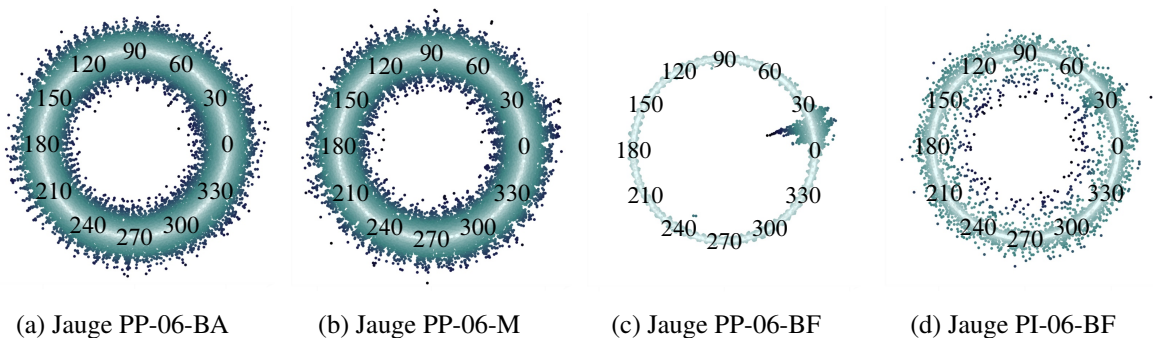
harmoniques de la vitesse de rotation, notamment les harmoniques 69Ω et 73Ω . Une coïncidence entre les modes à trois diamètres ω_r^3 avec l'harmonique 67Ω , moins énergétique est aussi constatée. Au même moment, les modes à quatre diamètres nodaux ω_s^4 de la première famille de modes du couvercle sont confondus avec l'harmonique 31Ω , en figure VI.30b. Lorsque l'interaction s'amplifie, l'harmonique 29Ω qui croise le mode à 3ND du stator participe de façon notable, ainsi que 40Ω , sans lien apparent avec un mode caractérisé.

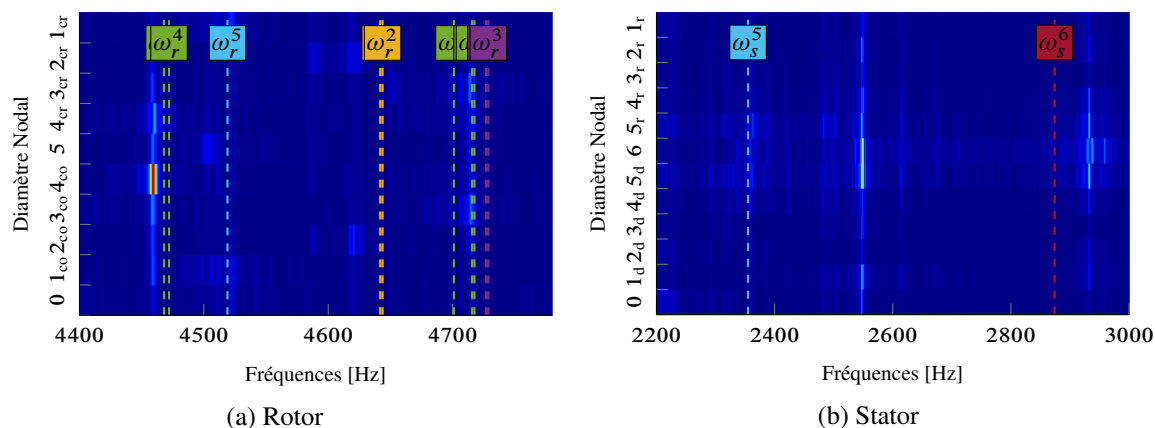
FIGURE VI.30 – Spectrogrammes, $t \in 710\text{--}740$ s. Filtrage 1–5 kHz. Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).

Les diagrammes fréquences–diamètres tracés avant l'interaction en figure VI.31 corroborent le fait que les déformations sont principalement dues à la participation des modes à quatre diamètres nodaux sur le rotor ω_r^4 et sur le stator ω_s^4 . Les diagrammes de phases, en figure VI.32a, indiquent une forme établie à quatre lobes sur la jauge PP-06-BA, traduisant la présence d'un signal synchrone replié 2Ω , ainsi que 70 lobes sous-jacents. Les ondes à quatre diamètres sont respectivement co-rotatives sur le rotor et rétrogrades sur le stator. Une nouvelle fois, on observe sur les diagrammes de phases des jauges de bord de fuite en figures VI.25c et VI.25d un phénomène localisé, cette fois vers $\phi \approx 150^\circ$.

FIGURE VI.31 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 723\text{--}725$ s. Filtrage 1–5 kHz.FIGURE VI.32 – Diagrammes de phases, $t \in 718\text{--}724$ s. Filtrage 1–5 kHz.

Durant l'interaction, la participation des modes de la deuxième famille modale du rouet s'amplifie. L'onde devient alors nettement co-rotative, comme on peut le voir sur le diagramme fréquences–diamètres en figure VI.34a. Sur le diagramme fréquences–diamètres du stator, figure VI.34b, l'onde observée est indiquée à six diamètres nodaux. Toutefois, les modes à six diamètres nodaux du stator ont été caractérisés à des fréquences éloignées d'environ 350 Hz de la zone fréquentielle excitée. Sur les diagrammes temps–phase des jauges de bord de fuite des figures VI.33c et VI.33d un comportement notablement différent est affiché par les deux jauges. Il est probable que la première pale soit soumise à des efforts de contact plus importants que la seconde ce qui entraîne des différences dans leur comportement dynamique.

FIGURE VI.33 – Diagrammes de phases, $t \in 725\text{--}729$ s. Filtrage 1–5 kHz.

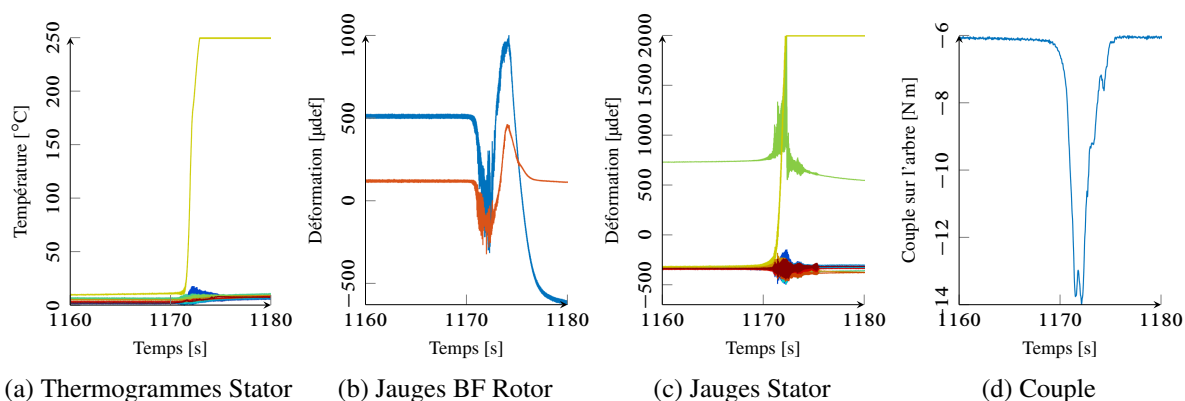
FIGURE VI.34 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 726\text{--}727$ s. Filtrage 1–5 kHz.

Après l'interaction, les déformations mesurées retrouvent des niveaux faibles, visibles sur le spectrogramme de la figure VI.29. Les mécanismes d'endommagement ont semble-t-il une fois encore ouvert le jeu entre les deux pièces.

2.4.4 Étude de l'interaction à $t \approx 1170$ s

Les signaux relevés durant cette interaction sont rassemblés en figure VI.35. Sur la période $t \in 1170\text{--}1172$ s, le couple sur l'arbre varie du couple résiduel de 6 N m que l'on trouve hors des interactions jusqu'à atteindre 14 N m, figure VI.35d. Le couple résiduel est retrouvé vers $t \approx 1176$, cette interaction dure donc environ 6 s. Simultanément, les jauges de déformations du rotor placées au bord de fuite (figure VI.35b) et celles placées sur le stator (figure VI.35c) indiquent des déformations importantes sur les deux structures. Ces déformations sont toutefois perturbées par les températures importantes, détectées sur le stator au moyen des thermocouples, figure VI.35a, de plus de 250 °C. Le thermocouple le plus sollicité sature d'ailleurs du fait de la forte élévation de température, suffisamment élevée pour que le refroidissement prenne plus de 10 s, ce qui sort de la fenêtre du graphique. Pendant l'interaction, des composantes quasi-statiques d'environ $-400 \mu\text{def}$ sont détectées, puis un retour à l'état initial par relaxation thermique est observé pour la jauge de la pale intercalaire, tandis que celle de la pale principale fait état d'un probable endommagement.

Vers $t \approx 1175$ s les signaux redeviennent nominaux.

FIGURE VI.35 – Signaux temporels sur la période $t \in 1160\text{--}1180$ s.

L'interaction à $t \approx 1170$ s fait état de contenus fréquentiel et spatial des déformations remarquable-

ment analogue à ce qui a pu être observé pendant l'interaction à $t \approx 720$ s, avec toutefois des signaux plus marqués sur les spectrogrammes de la figure VI.36. Le contenu du signal semble principalement

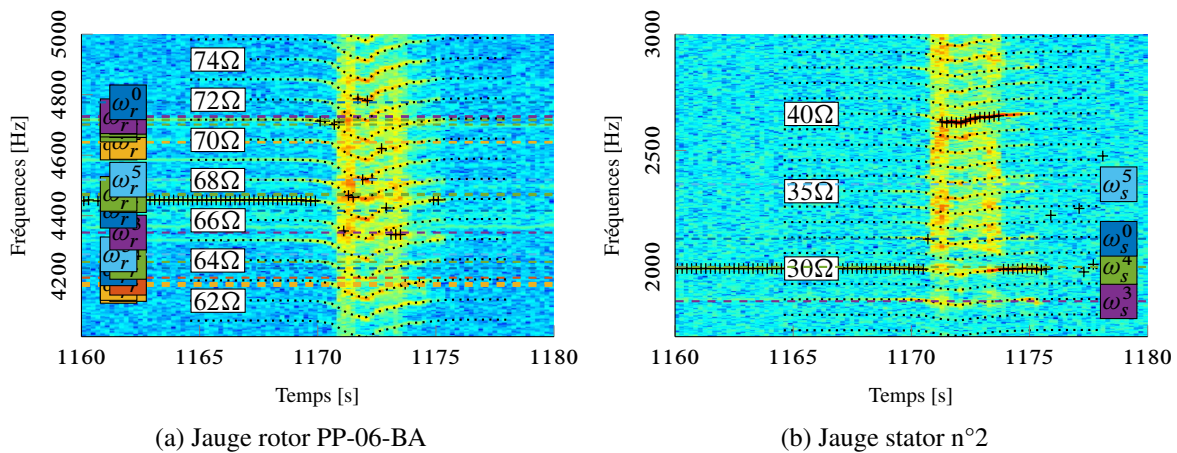


FIGURE VI.36 – Spectrogrammes, $t \in 1160\text{--}1180$ s. Filtrage 1–5 kHz. Maximum sur chaque bande du spectrogramme (+).

associé aux modes à quatre diamètres nodaux ω_r^4 sur le rotor en association avec l'harmonique 67Ω . Sur le spectrogramme du stator, figure VI.36b, on retrouve des participations importantes des modes à quatre diamètres nodaux ω_s^4 , excités par l'harmonique 30Ω de la vitesse de rotation. Durant l'interaction, une nette participation à la fréquence de l'harmonique 40Ω est observée, sans correspondance avec un mode connu de la structure. Juste avant l'interaction, vers $t \approx 1169$ s, les vibrations du rouet au niveau de la méridienne sont synchronisées sur la vitesse de rotation (figure VI.37b) et présentent 30 lobes. Cette observation est cohérente avec la réponse selon l'harmonique 30Ω . Les jauges placées aux bords de fuite indiquent des niveaux faibles de déformation, avec à nouveau une localisation de faible amplitude au niveau de $\phi \approx 90^\circ$.

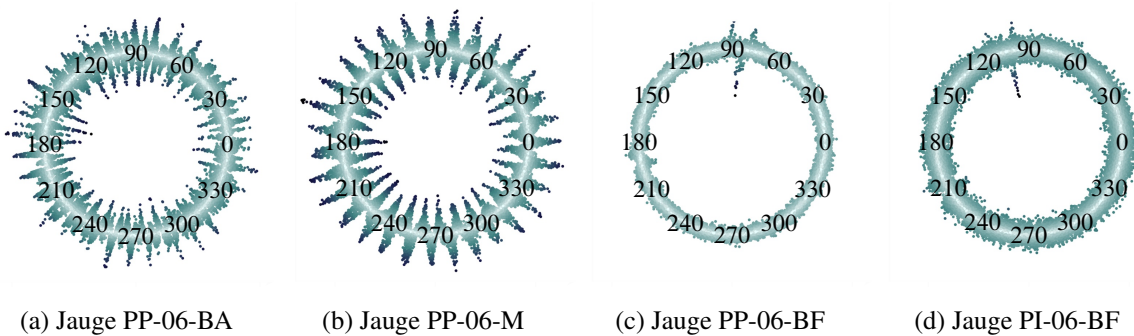
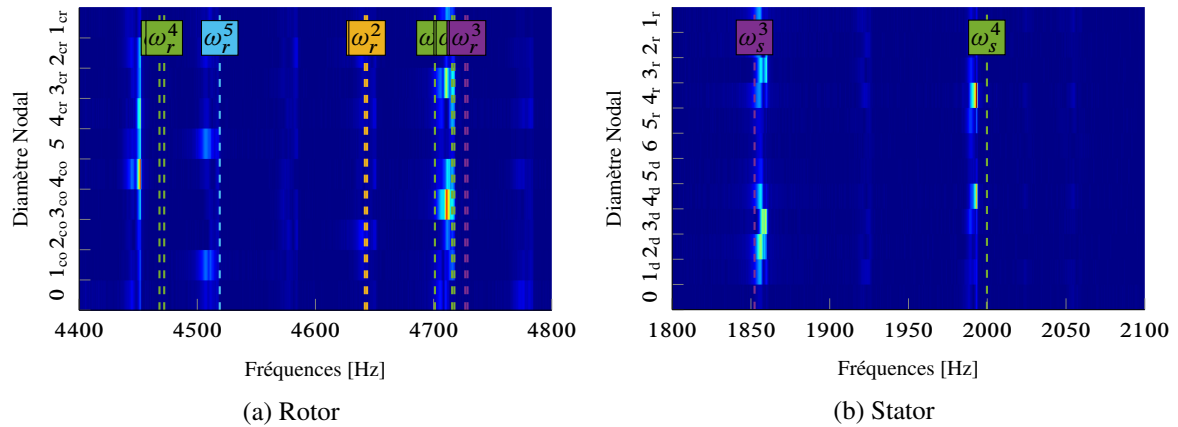


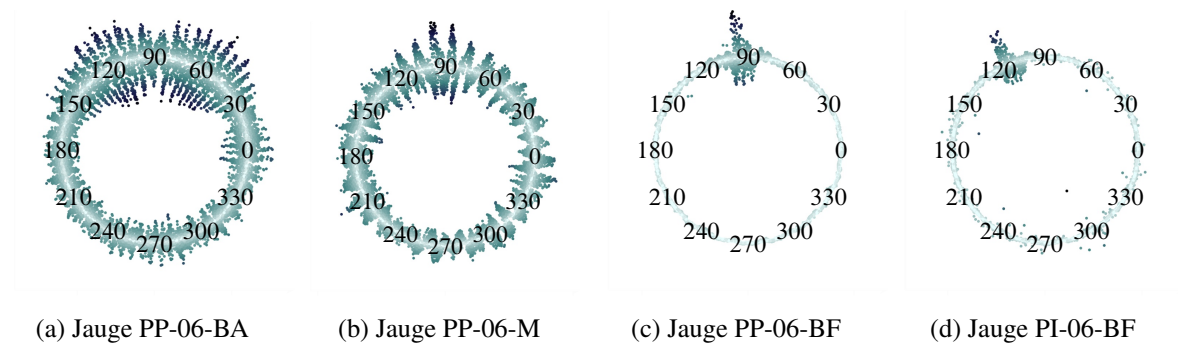
FIGURE VI.37 – Diagrammes de phases, $t \in 1168\text{--}1171$ s. Filtrage 1–5 kHz.

Les remarques faites à partir des spectrogrammes sont complétées par l'étude des diagrammes fréquences–diamètres de la figure VI.38, qui avant l'interaction indiquent des déformations à quatre diamètres nodaux ω^4 sur les deux structures (co-rotatives / rétrogrades). Des participations à trois diamètres nodaux ω^3 (co-rotatives / directes) non-négligeables sont aussi observées, particulièrement sur le rotor. Un décalage est notable entre les fréquences superposées au diagramme, issues des caractérisations modales, et les composantes à diamètres affichées. Ce décalage, d'environ 20 Hz au maximum (soit 0,5 % de la fréquence caractérisée), est dû à l'élévation des températures moyennes de pièces au cours de l'essai.

Durant l'interaction, à $t \approx 1172$ s, les diagrammes de phases présentent des évolutions particulières,

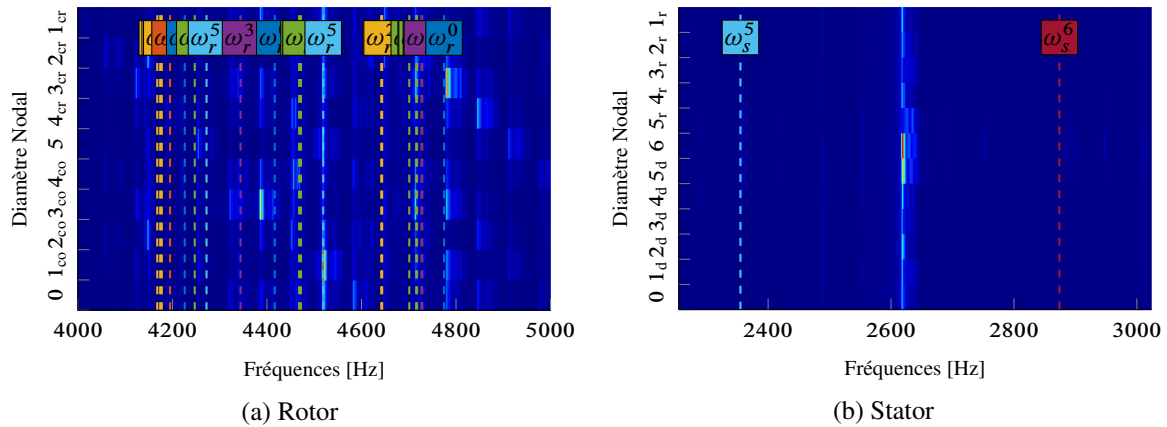
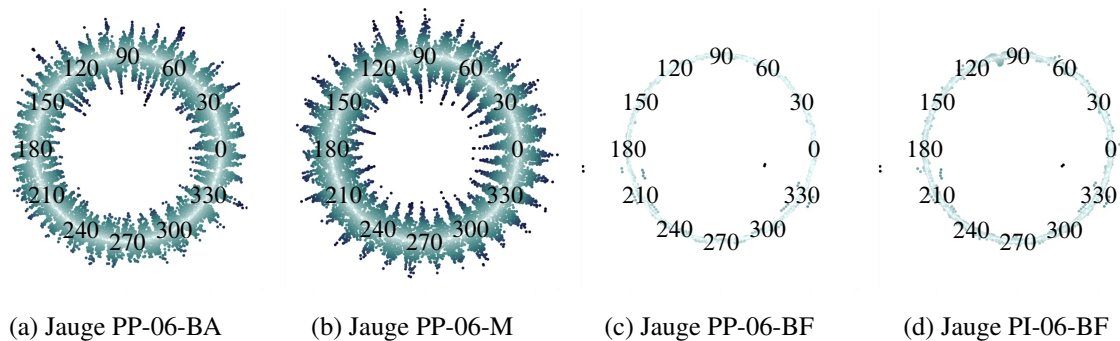
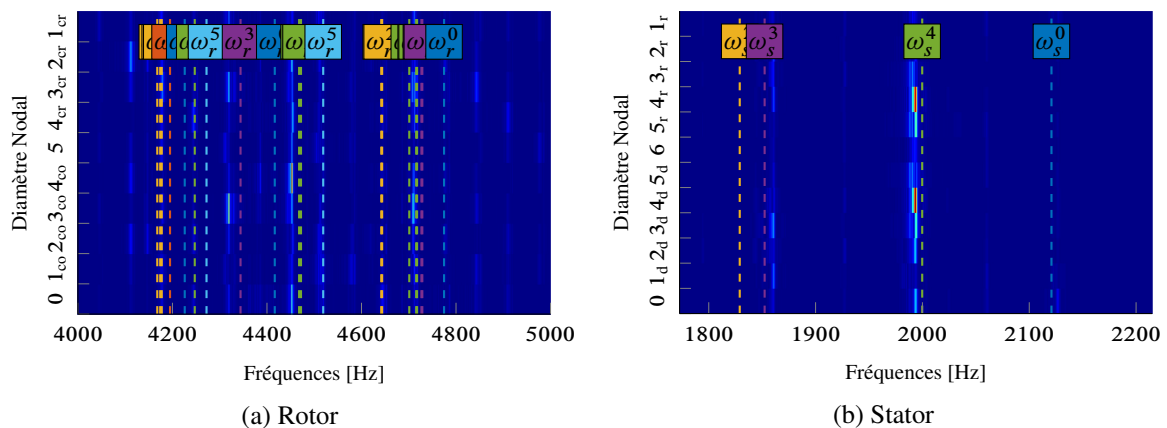
FIGURE VI.38 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 1168\text{--}1171$ s.

en figure VI.39. Les mesures au bord de fuite font apparaître des déformations localisées sur la

FIGURE VI.39 – Diagrammes de phases, $t \in 1172\text{--}1173$ s. Filtrage 1–5 kHz.

circonférence, mais cette fois-ci, les jauges de bord d'attaque et de méridienne présentent elles aussi une asymétrie, probablement en raison de l'excitation des modes des familles supérieures du rouet, pour lesquelles leur positionnement n'a pas été optimisé. Dans la mesure où cette interaction a été la plus forte observée jusque-là (figure VI.35), il semble que le contact s'est non seulement engagé sur le bord de fuite mais aussi au niveau de la méridienne, contrairement aux interactions précédentes. L'étude des diagramme fréquences–diamètres en figure VI.40 montre ici quelques limites. En effet, une composante à six diamètres nodaux ω_s^6 est détectée sur le stator, sans lien avec un mode connu de cette pièce. De façon analogue, sur le rouet, c'est une onde à un diamètre nodal ω_r^1 qui est observée, sans qu'un mode associé à ce diamètre ait été caractérisé dans cette bande fréquentielle.

À $t \approx 1175$ s, sur les figures VI.41c et VI.41d, les jauges de bord de fuite n'indiquent plus de déformations localisées à une phase angulaire donnée. Il semble donc que le rouet se soit désengagé du couvercle. Pour autant, les jauges de bord d'attaque et de méridienne indiquent encore des réponses assez fortes, qui se traduisent dans les diagrammes fréquences–diamètres en figure VI.42 par une onde à quatre diamètres nodaux ω^4 , co-rotative sur le rotor et fixe sur le couvercle (à la fréquence du mode caractérisé). Cette interaction a conduit à un contact localisé de forte intensité, en faisant ressortir principalement la participation des modes à 4 diamètres ω^4 en fin de phase de contact.

FIGURE VI.40 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 1172\text{--}1173$ s.FIGURE VI.41 – Diagrammes de phases, $t \in 1174\text{--}1175$ s. Filtrage [1–5 kHz].FIGURE VI.42 – Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 1174\text{--}1176$ s.

2.4.5 Synthèse de l'analyse des interactions

Le tableau VI.3 regroupe les caractéristiques principales des interactions étudiées.

Le mécanisme de déclenchement d'une interaction semble le même à chaque fois, à savoir : un harmonique de la vitesse de rotation vient croiser un mode du rouet, ce qui ferme le jeu entre les deux pièces. Durant l'interaction, les deux structures sont excitées sur une large bande fréquentielle, puis l'usure ouvre le jeu et les deux structures retrouvent un état nominal. La localisation des contacts évolue au cours de l'essai, avec des premiers contacts de faible intensité et localisés, qui sont suivis par des

Interaction	Niveau maximum de déformation [μdef]		Contenu modal (avant l'interaction)		Contenu modal (pendant l'interaction)		Localisation du contact
	Rotor	Stator	Rotor	Stator	Rotor	Stator	
$t \approx 190$ s	400	400	ω_r^4 33 Ω	ω_s^4 32 Ω	ω_r^3	ω_s^5 ω_s^3	Méridienne
$t \approx 450$ s	500	800	ω_r^5 71 Ω	ω_s^5 37 Ω	ω_r^3 ω_r^4 ω_r^5	ω_s^0	Bord de fuite (BF)
$t \approx 720$ s	800	2000	ω_r^4 69 Ω	ω_s^4 30 Ω	ω_r^2 ω_r^3 ω_r^4	ω_s^3 40 Ω	BF / Méridienne
$t \approx 1170$ s	800	2000	ω_r^4 67 Ω	ω_s^4 30 Ω	ω_r^3 ω_r^5	ω_s^6	BF / Méridienne

TABLEAU VI.3 – Récapitulatif des observations expérimentales.

contacts très intenses et qui semblent répartis sur une plus grande surface.

Une seule interaction vers $t \approx 190$ s présente des caractéristiques proches d'une interaction modale de contact rotor–stator au sens des critères de Schmiechen. En effet, seul le critère des sens de propagation des ondes n'est pas validé. Cette observation constitue une différence notable vis-à-vis des essais de la campagne CASTOR I [7]. Durant les autres interactions étudiées, ce sont principalement les harmoniques de la vitesse de rotation qui participent, sans connexion directe avec des modes ou une modulation des modes par la vitesse de rotation, ce qui a déjà été mis en évidence par les travaux antérieurs.

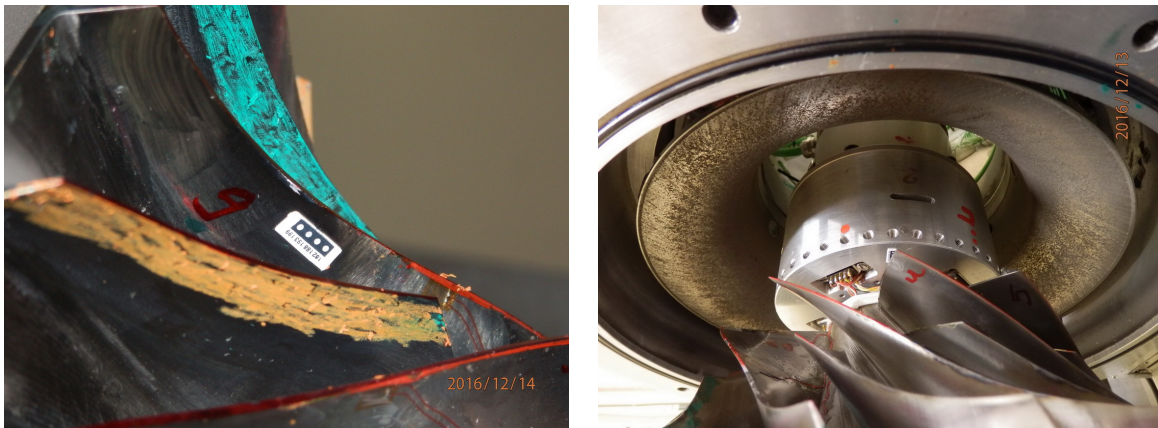
2.5 Observations visuelles du banc

Comme remarqué précédemment, cet essai a donné lieu à des contacts violents qui ont entraîné des endommagements des capteurs, endommagements visibles sur les mesures. De plus, les mesures effectuées sur le carter au moyen des thermocouples nous ont indiqué que des températures particulièrement élevées durant cet essai sur la face externe du raidisseur, qui laissent supposer des températures flash encore plus élevées au niveau de la zone de contact.

2.5.1 Avant essai

Avant cet essai, le rouet a été préparé au moyen de deux crayons thermosensibles afin d'évaluer qualitativement les champs thermiques au niveau des pales. Ces crayons thermosensibles contiennent des composés chimiques colorés, qui lorsqu'ils sont soumis à un champ thermique peuvent réagir et changer de couleur à certains seuils. Deux grades de crayons ont été employés afin de couvrir la plus grande plage de températures possible. De plus, le placement des crayons thermosensibles a été fait en tenant compte des essais précédents, qui ont montré que placé sur l'intrados des pales, le crayon pouvait être fortement pollué par la poudre d'abrasif jusqu'à le rendre inexploitable. On voit clairement les deux grades de crayon, l'un orange, l'autre vert sur les photos de la figure VI.43a, avant les essais. Ceux-ci ont été appliqués sur une hauteur d'environ 1 cm sur la tête de pale, de la méridienne au bord de fuite, pour permettre une localisation des points d'échauffement.

Le stator, du fait des essais précédents, présente des stigmates des mises en contact, comme on peut le voir en figure VI.43b. L'aspect brillant de l'abrasif notamment près du bord de fuite montre que les contacts ont eu tendance à lisser petit à petit la zone de contact, l'aspect initial étant mat. On peut aussi noter la surface striée de l'abrasif, qui rappellent des observations effectuées dans [7, §4.3.5, §4.4.4].



(a) Pales du rotor préparées au crayon thermosensible

(b) Etat du stator

FIGURE VI.43 – Prises de vues avant l'essai. Marqueurs : vert (360), orange (245 335 505).

2.5.2 Après essai

A la suite de l'essai, une nouvelle série de photographies a été prise pour constater les conséquences des contacts à la fois plus forts et plus répétés, sur le stator et le rotor, par rapport aux précédents essais de cette campagne.

L'utilisation des marqueurs thermosensibles permet un constat clair, la répartition azimutale des efforts et des flux thermiques de contact n'est pas homogène, de même que la répartition le long de la tête de pale. De plus, le virage gris clair observé sur les pales, en figure VI.44, correspond à des températures comprises entre 300 °C et 500 °C. Les zones blanches correspondent quant à elles à des températures de plus de 500 °C.

En dépit de la couche de matériau abrasable, devant permettre de minimiser la criticité des contacts, on constate que les disparités géométriques entre les différentes pales, ainsi que le profil de l'abrasable ont un grand effet sur les efforts de contact, et donc sur les flux thermiques et les températures relevées. De manière logique, on retrouve des profils plus ou moins circulaires selon que les contacts aient été très localisés, ou bien répartis.

Une inspection des têtes de pales a aussi permis de déceler ce qui ressemble à des traces d'oxydation superficielle du matériau dues à l'échauffement, ainsi que des brûlures, figure VI.45b. Les colorations violettes sont particulièrement bien visibles sur la photo de la figure VI.45a. Ici, ces colorations permettent de confirmer la pénétration de températures importantes dans les pales durant l'essai. Une pale, visible en figure VI.45b présente de plus une brûlure particulièrement marquée en tête, la coloration bleu vif du matériau indiquant clairement une forte élévation de température suivie d'une oxydation superficielle. Des stigmates dues à des phénomènes d'usure sont aussi décelables sur les têtes de pales, en figure VI.45c. On peut ainsi constater la formation après l'essai d'une *lèvre* et de stries sur certaines têtes de pales.

À la suite de cet essai, le stator a lui aussi montré des signes notables d'endommagement. Il présente en effet un profil d'usure jamais observé jusqu'alors sur le banc CASTOR. Une bande d'environ 1 cm s'est formée sur tout le tour de la pièce, usée différemment du reste de l'abrasable, en figure VI.46b. De plus, un point fortement coloré, comme la pale en figure VI.45b, se trouve dans cette bande, comme on peut le voir sur la photographie de la figure VI.46a. Les colorations indiquent la présence d'oxyde de titane. Pour rappel, le couvercle est en acier, le rouet en titane, et l'abrasable est principalement constitué d'aluminium). On peut donc envisager un mécanisme d'usure adhésive conduisant à un transfert de matière du rouet vers le couvercle. Autour de ce point coloré, on peut noter des zones plus brillantes qui correspondent à du *tartinage*, des zones au niveau desquelles la ou les pales en contact ont étalé l'abrasable, au lieu de l'user, ce qui se traduit par un passage d'un état rugueux à lisse de la surface de

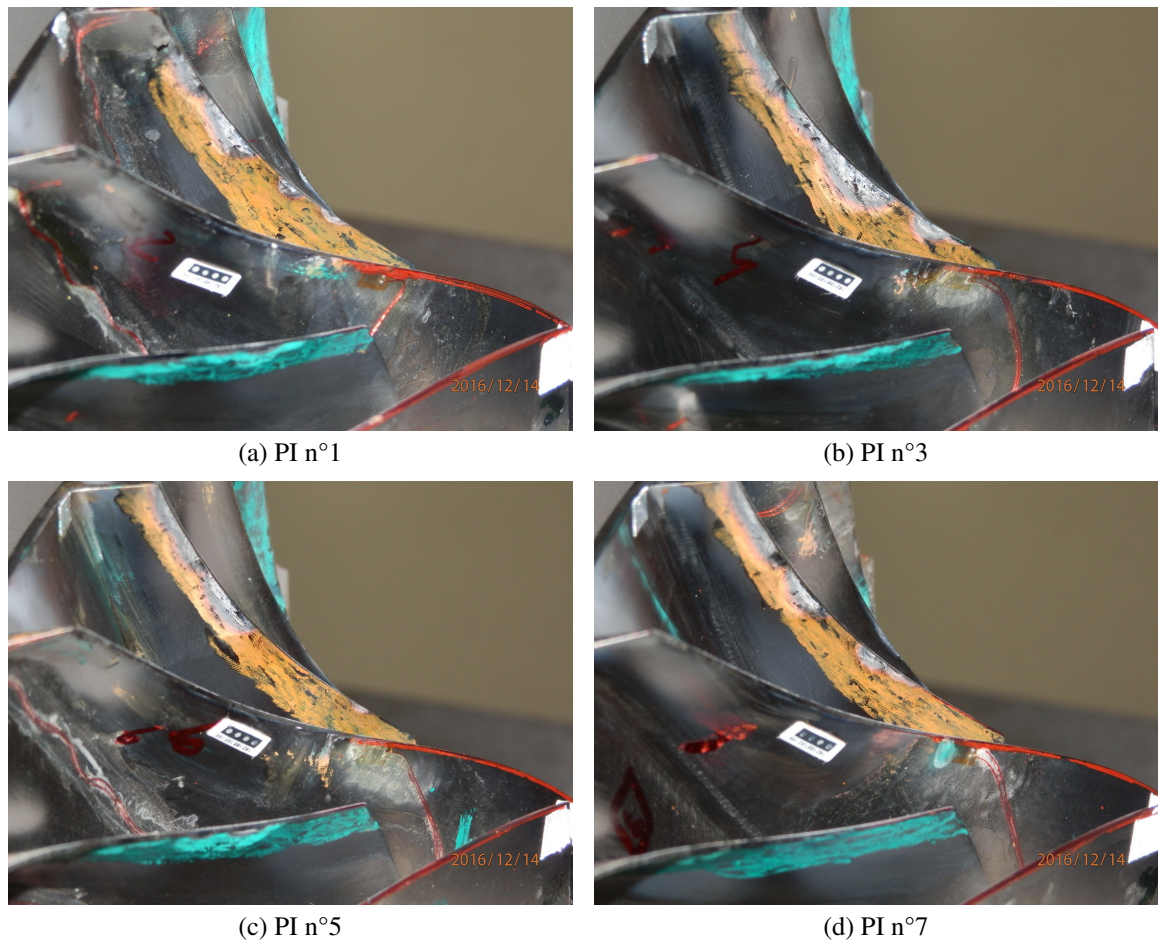


FIGURE VI.44 – Champs thermiques maximaux sur plusieurs pales du rotor. Marqueurs : vert (360), orange (505).

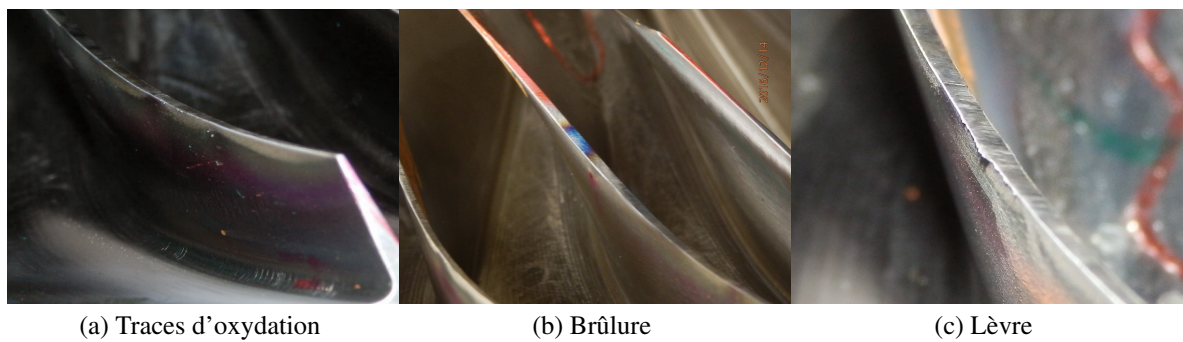


FIGURE VI.45 – Endommagements des pales observés après essai.

celui-ci.



(a) Oxyde de titane présent sur l'abradable.

(b) Profil d'usure de l'abradable.

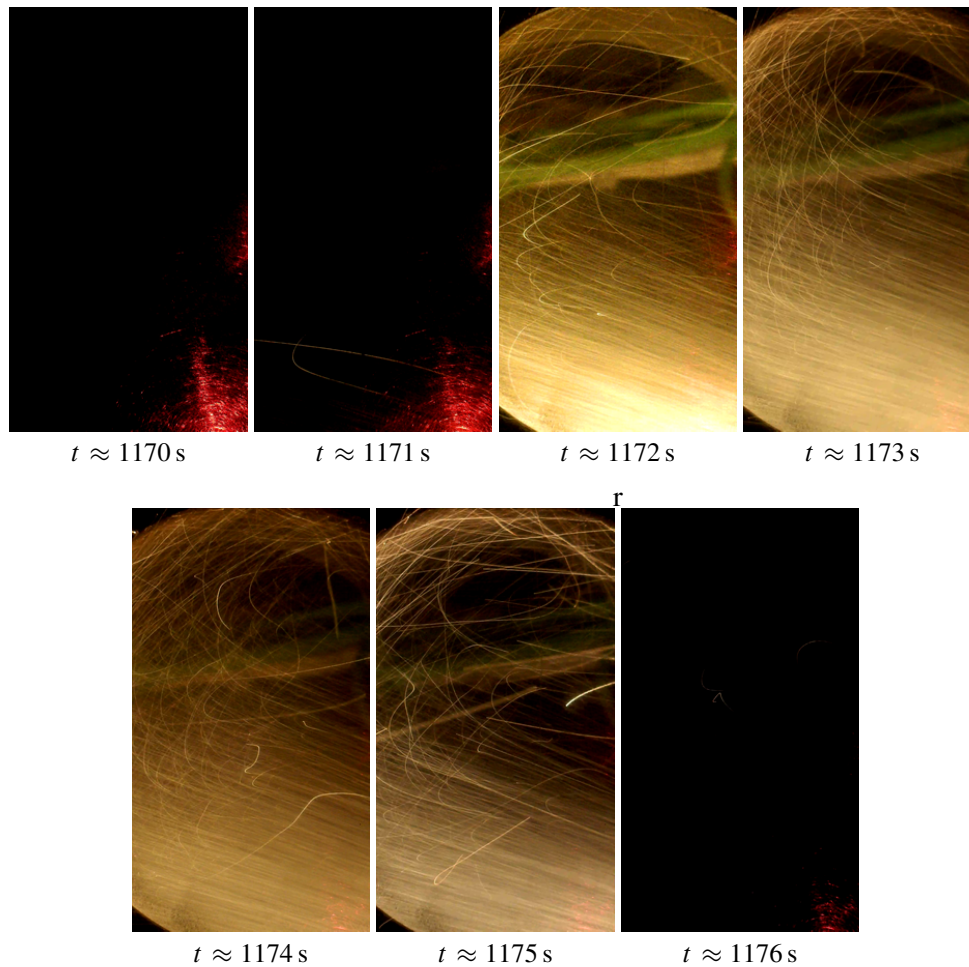
FIGURE VI.46 – Observation visuelle du couvercle après essai.

2.5.3 Observation par le hublot latéral de l'enceinte à vide

Durant cet essai, un film a été enregistré en visant au travers du hublot latéral. Ce hublot, habituellement utilisé pour mesurer les vibrations du stator au moyen d'un vibromètre laser dont on peut observer le faisceau avant la mise en contact sur les photos de la figure VI.47. Bien que la géométrie des pièces étudiées ne permette pas une ligne de vue directe vers la zone de contact, comme cela peut se faire dans le cas d'un compresseur axial [20], on s'est intéressé à ce qui se produisait au niveau du bord de fuite. Les observations effectuées ont permis de constater, au moment des interactions, des nuages d'étincelles refluant du bord de fuite, pour retourner dans la partie amont du banc en passant entre l'enceinte à vide et la face extérieure du stator. Ainsi, durant la consommation de l'abradable, de nombreuses particules sont évacuées de la zone de contact et transportent une partie de l'énergie thermique créée lors des contacts.

2.6 Conclusions générales de l'essai

Durant cet essai, qui visait à faire apparaître une interaction modale à trois diamètres nodaux entre le rotor et le stator, plusieurs épisodes de contact entre les deux structures sont intervenus. Il est important de souligner que ces contacts ont eu lieu naturellement, aucune source d'excitation additionnelle des structures comme un pot vibrant ou un excitateur piézo-électrique n'a été utilisée. Il semble qu'une interaction avec coïncidence modale ait été déclenchée dans la plage de vitesse prédite par les critères connus. Toutefois, cette condition fortement contrainte est apparue de manière minoritaire durant cet essai. La majorité des autres événements rencontrés ont apparemment pris leur source dans des excitations des modes du rouet par les harmoniques de la vitesse de rotation. Cet essai s'est démarqué par les fortes élévations de température constatées. Les observations post-essais sont en adéquation avec les mesures effectuées pendant l'essai et mettent en évidence des phénomènes d'usure et thermiques plus prononcés. Les brûlures, traces d'oxydation et autres endommagements des structures et de l'instrumentation témoignent ainsi des sollicitations élevées.

FIGURE VI.47 – Prises de vue par le hublot latéral, $t \in 1170\text{--}1176$ s.

3 Corrélation des marqueurs thermosensibles

3.1 Introduction

L'objectif de cette section est de corréler des calculs numériques effectués au moyen d'un modèle éléments finis thermique complet de secteur et des observations effectuées sur le banc d'essais CASTOR au moyen des capteurs de couple, de vitesse de rotation, et des marqueurs thermosensibles. Un intérêt particulier est porté aux températures obtenues par le calcul en fonction de la répartition des zones de contact sur les têtes de pales.

3.2 Evaluation des puissances dissipées lors de contacts

3.2.1 Puissances dissipées

Durant les essais sur le banc CASTOR, une consigne de vitesse est imposée. Cette consigne permet de balayer des plages de vitesse potentiellement critiques vis-à-vis de certains phénomènes. On propose ici d'évaluer les puissances mécaniques dissipées lors des contacts en utilisant les informations de couple et de vitesse de rotation respectivement fournies par le couplemètre et le tachymètre.

Les figures VI.48 et VI.49 regroupent respectivement les mesures des températures et déformations, et du couple et de la vitesse de rotation durant une interaction intervenue lors d'un des essais de la campagne. Cette interaction a été sélectionnée pour l'analyse en raison de sa durée relativement

importante. De plus, c'est l'interaction la plus intense de cet essai en termes de température mesurée, mais surtout d'augmentation de couple résistant sur l'arbre. Il est donc logique que les élévations les plus importantes de températures de cet essai aient eu lieu durant cette interaction particulière, dont nous avons une image en fin d'essai au moyen des marqueurs thermosensibles. Durant cet essai, les températures mesurées ont été au maximum de l'ordre de 50 °C ce qui indique une localisation du contact relativement éloignée du bord de fuite. Un filtrage des signaux de vitesse et de couple entre 0 et

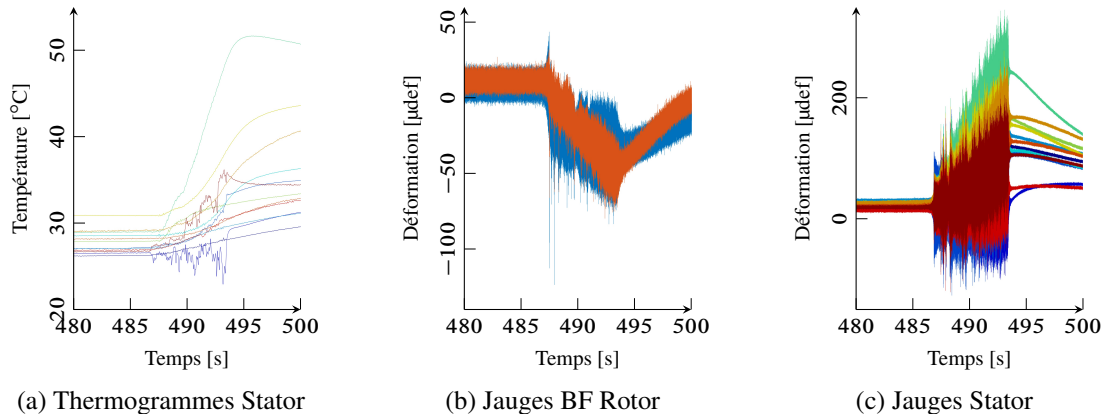


FIGURE VI.48 – Signaux temporels sur la période $t \in 480\text{--}500$ s.

10 Hz a été effectué pour tenir compte des évolutions moyennes de ces deux grandeurs.

Le couple avant l'interaction est stable à environ $-0,5$ N m en raison des couples résistants inhérents au montage du banc. Brusquement, l'amplitude augmente jusqu'à atteindre environ 3 N m de moyenne pendant 7 s marquant une mise en contact des deux structures. Simultanément, la vitesse de rotation chute sensiblement, de 3815 rpm à 3790 rpm en moyenne. Cette chute est due à l'asservissement pilotant la rotation de l'arbre qui a été conçu de façon à éviter les survitesses. À 494 s on retrouve le comportement initial en rotation soit un couple de $-0,5$ N m et une vitesse de rotation de 3816 rpm, ce qui indique une sortie de la phase de contact.

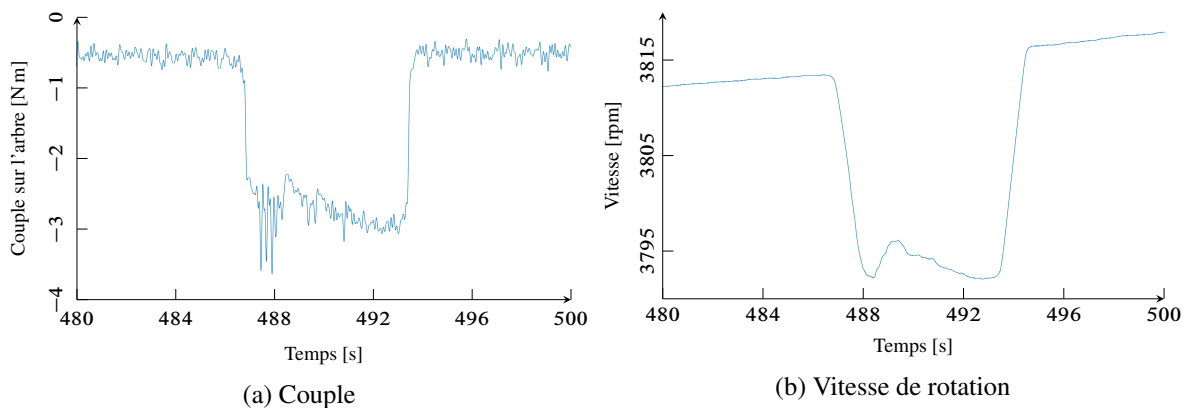


FIGURE VI.49 – Mesures effectuées aux environs de l'interaction.

À partir de ces deux informations de vitesse et de couple, la puissance instantanée consommée lors de la phase de contact par les phénomènes dissipatifs peut être déduite, au moyen de la relation

$$P = C\Omega = \frac{2\pi}{60}CN, \quad (\text{VI.1})$$

ce qui permet d'obtenir le graphe de la puissance instantanée durant l'interaction, représenté en fi-

gure VI.50. Avant et après l'interaction, environ 1900 W sont consommés en moyenne pour maintenir l'arbre en rotation. Cette consommation est liée au phénomènes de frottement intervenant dans l'assemblage de la broche : roulements, butée à billes, joint tournant. Le vide fait dans l'enceinte d'essais étant de l'ordre de 25 mbar, la mise en mouvement de cet air explique aussi en partie la puissance consommée.

On peut voir que durant l'interaction, la puissance consommée augmente jusqu'à atteindre 2800 W en moyenne, avec des pics à presque 3200 W, soit entre 900 W et 1300 W que l'on peut attribuer aux effets du contact entre le rouet et le couvercle.

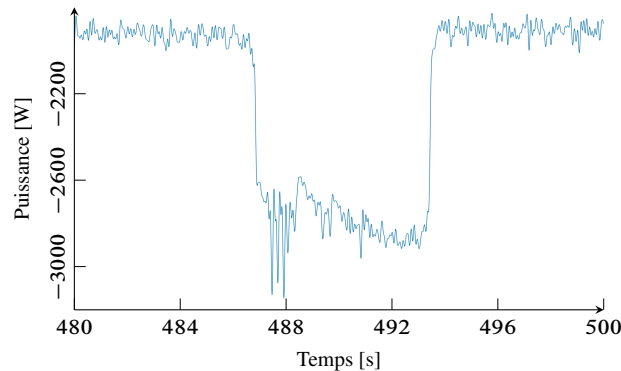


FIGURE VI.50 – Calcul de la puissance instantanée autour de l'interaction.

La majorité de la puissance dissipée lors des contacts se transformant sous forme de chaleur, on suppose que 900 W de flux thermiques sont générés durant les 7 s que dure l'interaction. On va maintenant décrire la répartition de ces flux thermiques entre les deux structures.

3.2.2 Partage des flux entre les structures

Lors des contacts, la répartition des flux thermiques dépend de nombreux paramètres qui peuvent être très difficiles à déterminer expérimentalement. Dans notre cas, nous supposons une répartition à hauteur de 50 % pour les deux structures. Ce qui donne 450 W pour chacune. Ce choix est largement discutable, mais n'ayant pas eu à disposition de données plus précises, cette répartition semble pertinente du fait de la présence de deux structures métalliques, acier pour le couvercle (dont l'abrasable contient de l'aluminium) et titane pour le rouet.

3.3 Marqueurs thermosensibles

3.3.1 Colorations observées après les essais

À la suite de l'ensemble des essais menés durant la campagne, de nombreuses répartitions de champ de température ont pu être observées. Les essais faisant intervenir plusieurs phases de contact, les températures affichées par les marqueurs reflètent les températures maximales vues par les pales durant un essai, éventuellement dues à plusieurs phases de contact.

Des différences notables entre plusieurs pales du rouet sont observées. Principalement, la localisation et la pénétration du champ de température semblent varier fortement au cours de l'essai. Dans tous les cas, une coloration très pâle du marqueur thermosensible est remarquée, qui est probablement associée à des températures supérieures à 505 °C. Deux types de faciès sont observés, des échauffements ponctuels associés à des lobes placés successivement sur la tête de pale (figure VI.52a), et des bandes larges traduisant plutôt des contacts sur une grande surface de la tête de pale (figure VI.52d).

Marqueur moyenne température Ce marqueur a été préféré au marqueur basse température, après avoir constaté sa plus faible sensibilité aux pollutions et sa bonne résistance aux fortes températures subies pas le rouet dans la zone de contact. Toutefois, le virage vert/gris est moins franc que ce qui était attendu. Une coloration pâle du marqueur entre les deux teintes attendues peut ainsi être observée sur les images rassemblées en figure VI.51. Dans la mesure où le virage doit normalement avoir lieu vers 360 °C, on peut supposer que les températures atteintes sont de l'ordre de 200 °C dans les zones vert-pâle. Les zones apparaissant très claires ou grises sur les photographies ont probablement été chauffées à plus de 360 °C. En effet, la coloration grise suggère une liquéfaction du marqueur sous l'effet des fortes température, ayant pour conséquence l'apparition de la teinte du titane des pales.

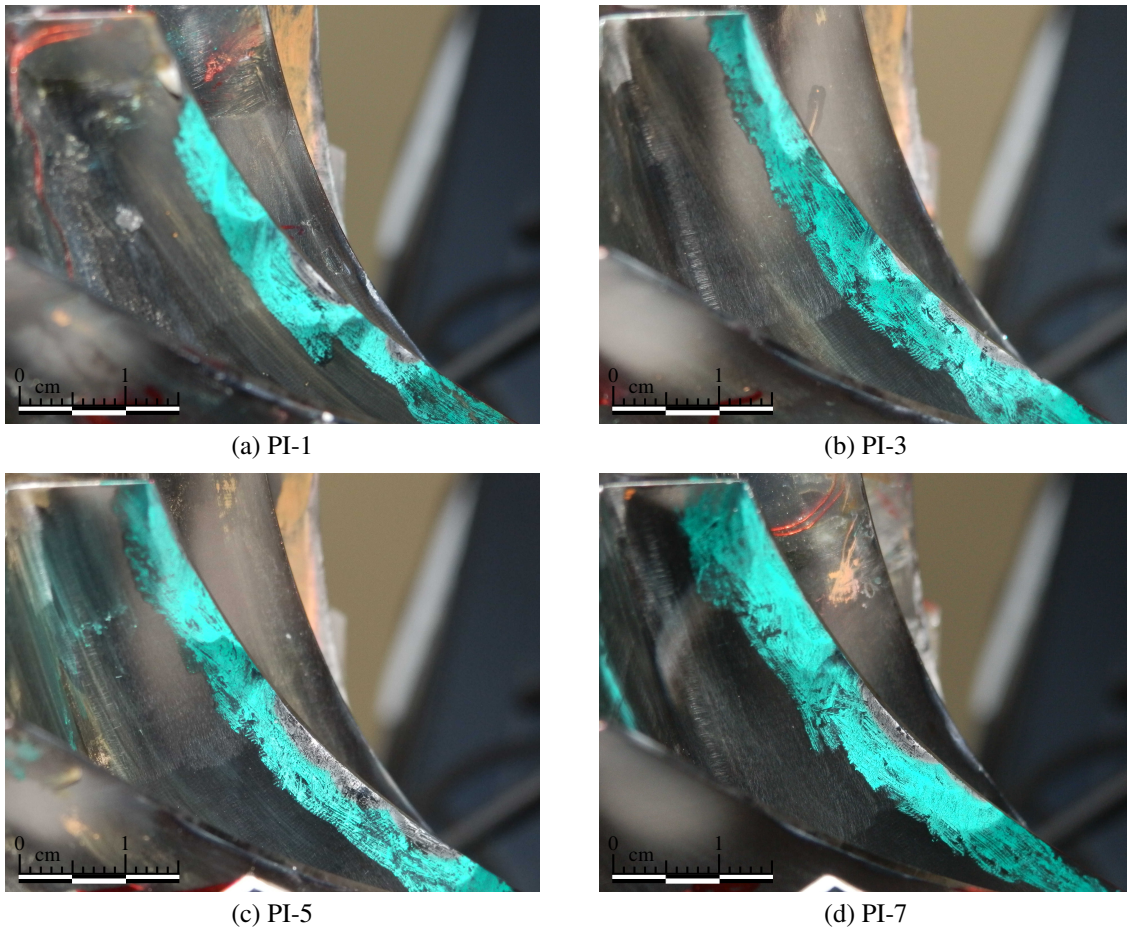


FIGURE VI.51 – Observations des marqueurs thermosensibles après essai. Marqueur moyenne température [360].

Marqueur polyvalent Le marqueur polyvalent a lui aussi permis de détecter de fortes élévations de température. Toutefois le nombre de virages de couleur plus élevé permet de faciliter la localisation des sources thermiques et donc des contacts. La encore le comportement du marqueur n'est pas rigoureusement identique à l'attendu car on ne distingue pas de zone noire (premier virage). À l'inverse, on distingue clairement des zones grises et blanches, soit les deuxième et troisième virages. La pollution du marqueur par la poussière d'abrasif peut éventuellement expliquer les écarts constatés entre les observations sur le banc et les références fournies par le fabricant des marqueurs. On peut noter sur les photographies rassemblées en figure VI.52 que le champ de température maximal vu par les pales a pu dépasser les 505 °C. De plus les localisations des contacts sont clairement variées. Avec parfois

plusieurs échauffements ponctuels, et parfois des échauffements sur de larges portions de la tête de pale.

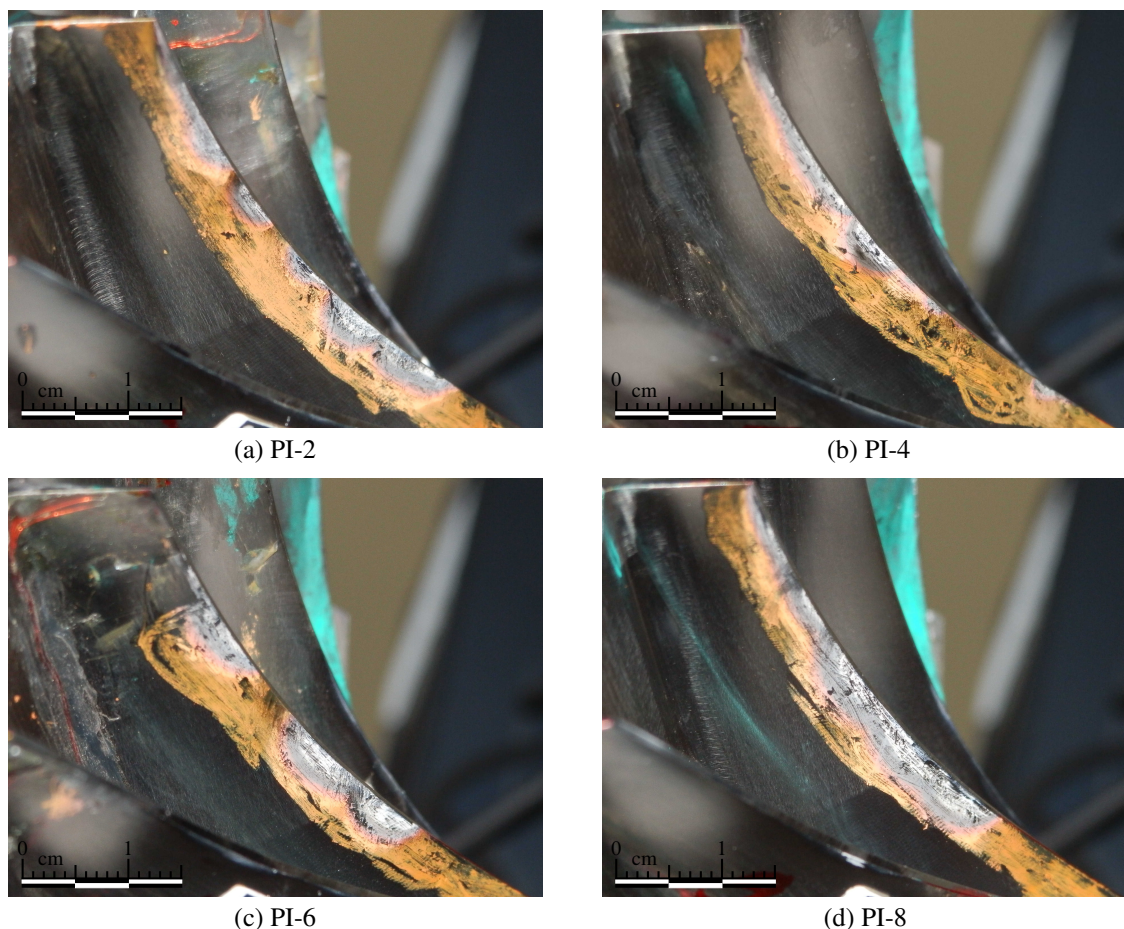


FIGURE VI.52 – Observations des marqueurs thermosensibles après essai. Marqueur polyvalent

245 335 505

Marqueurs autocollants Ce paragraphe regroupe les observations effectuées sur les marqueurs autocollants à la suite des essais. Ces marqueurs sont complémentaires des crayons thermosensibles. Ils possèdent en effet une meilleure résolution, mais une échelle plus faible de mesure de température. En raison de leur encapsulation, ils sont aussi insensibles à l'environnement d'essai, en particulier au vide et à la présence de poussière. Les différentes observations sont regroupées dans les figures VI.53 et VI.54.

Les marqueurs autocollants ont été placés entre le bord de fuite et la méridienne à environ 4 mm de distance de la tête de pale. Le positionnement des ces marqueurs, pour diverses raisons pratiques n'est pas rigoureusement identique pour les différentes pales. Ces marqueurs possèdent chacun quatre zones, passant du blanc au noir à quatre températures différentes : 182 , 188 , 193 et 199 °C. Sur les photos de la figure VI.54, il apparaît qu'une des zones a viré au noir sur la pale PP-3, indiquant une température vue par le marqueur de plus de 182 °C. Les images regroupées en figure VI.54 montrent elles aussi des élévations importantes de la température lors des essais. En effet, plusieurs marqueurs ont toutes leurs zones noircies, ce qui suggère que des températures de plus de 200 °C ont été atteintes à ces endroits.

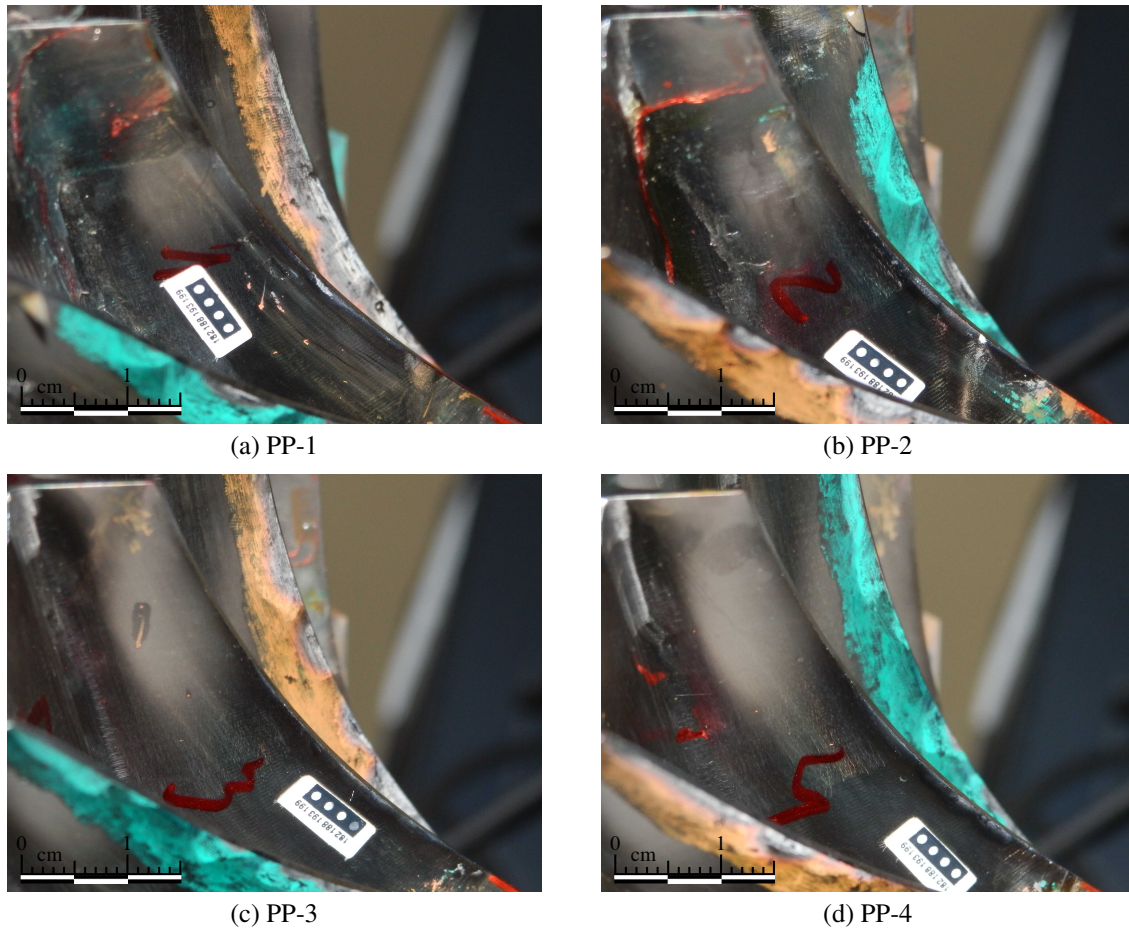


FIGURE VI.53 – Observations des marqueurs thermosensibles après essai. Marqueurs autocollants ●●.

3.3.2 Conclusion

Cette section a permis de décrire les observations expérimentales effectuées au moyen de l'ensemble de marqueurs thermosensibles à notre disposition. Des températures allant jusqu'à plus de 500 °C ont été observées, avec des répartitions spatiales très variées en lobes, ou en bandes plus larges. Afin de confirmer les cartographies de température obtenues au moyen des marqueurs colorés, des simulations numériques ont été effectuées avec des modèles éléments finis thermiques.

3.4 Simulations numériques thermiques transitoires

Cette section présente des résultats numériques issus de simulations thermiques transitoires. Ces simulations reposent sur des hypothèses fortes de simplifications. La volonté est ici de corréler qualitativement les calculs numériques avec les données expérimentales en termes de températures mesurées sur les pales. Notamment on cherche à :

- Evaluer l'effet de la répartition des flux thermiques de contact (et donc des efforts de contact) au niveau des têtes de pales
- Evaluer l'influence de l'amplitude des flux thermiques de contact par rapport aux cartographies de température constatées en essais

3.4.1 Hypothèses et paramètres

Afin d'obtenir une évaluation rapide des paramètres influents, on fait les hypothèses suivantes :

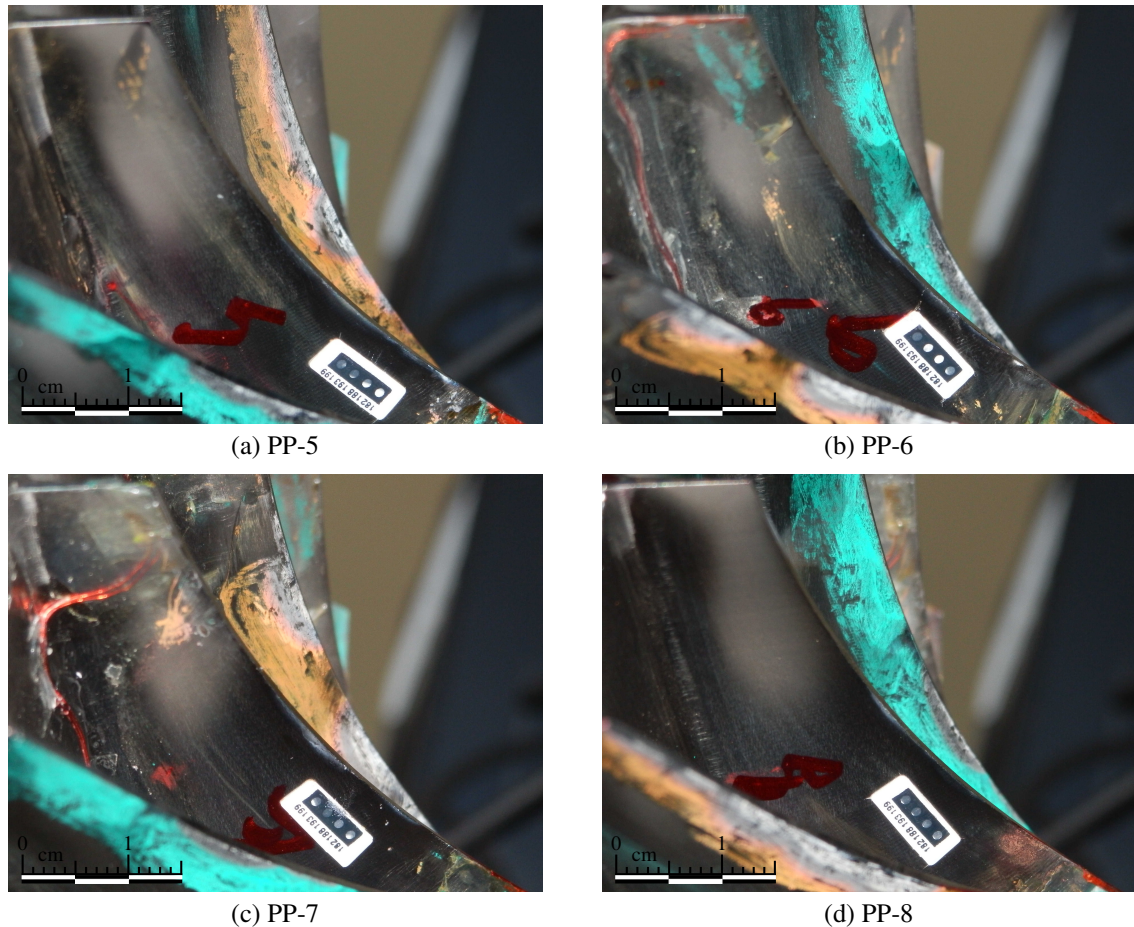



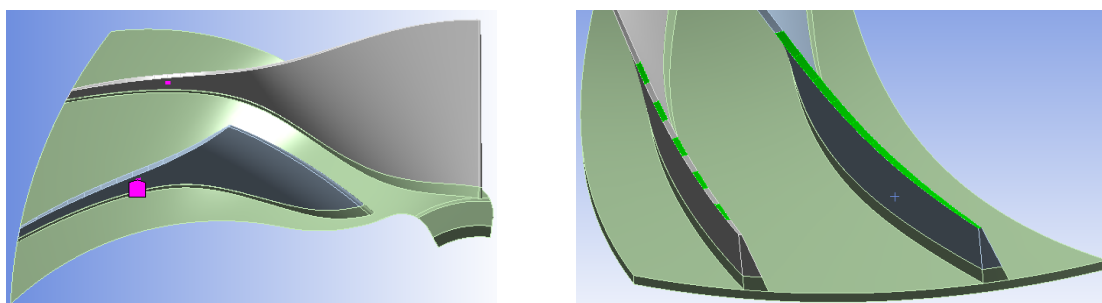
FIGURE VI.54 – Observations des marqueurs thermosensibles après essai. Marqueurs autocollants .

- Le modèle thermique est considéré linéaire
- Les flux thermiques ne se déplacent pas en cours de simulation
- Une seule interaction est étudiée
- Les flux thermiques de convection sont considérés négligeables du fait de la faible pression d'air résiduelle, et en raison de la rapidité de l'échauffement
- Les flux radiatifs sont négligés dans le calcul
- Les faces encastrées sont considérées à température constante
- Un seul secteur est étudié avec identité du champ de température sur les frontières de symétrie cyclique du secteur.

Cette analyse est basée sur l'interaction présentée précédemment à la section VI.3.2. On suppose que sur le secteur étudié est soumis à un flux thermique constant pendant toute la durée de l'interaction, correspondant au flux thermique moyen calculé, ce qui permet d'imposer qualitativement la même puissance thermique sur le modèle numérique que celle relevée durant les essais. Le champ de température est ensuite analysé pour déterminer la répartition des températures et de leurs intensités. Seul le champ de température en fin d'interaction ($t \approx 6$ s) est considéré pertinent pour la corrélation avec les marqueurs thermosensibles puisque ceux-ci ne retiennent que l'information de température maximale.

Le secteur étudié possède une pale principale et une pale intercalaire. Pour rappel, le rouet complet possède dix secteurs de la sorte. L'étude des marqueurs thermosensibles effectuée après les essais, et

regroupée dans les figures VI.52 et VI.51, indique que les échauffements avaient toujours lieu entre la méridienne et le bord de fuite. Cette zone a donc été découplée en plusieurs zones de petites dimensions afin de pouvoir répartir les flux de chaleur liés aux différents points de contacts.



(a) Vue de face du secteur étudié. Nœuds de mesure pour la corrélation avec les marqueurs autocollants (●)

(b) Zone de la tête de pale étudiée

FIGURE VI.55 – Géométrie du secteur étudié.

En utilisant les données fournies par l'interaction présentée à la section VI.3.2, on obtient un flux thermique total de 900 W. Avec le partage de flux choisi, on obtient 450 W pour l'ensemble du rotor, 270 W pour l'abradable et 180 W pour le stator. Les 450 W sur le rotor seront donc répartis différemment selon les localisations choisies.

3.4.2 Simulations effectuées

Les simulations qui vont être réalisées seront principalement basées sur la répartition du flux thermique le long de la zone de contact. Nous avons envisagé trois cas de figure :

- Contact réparti uniformément sur la tête de pale
- Contacts ponctuels
- Contact réparti de manière asymétrique entre le bord de fuite et la méridienne

Pour ces trois situations, le contact est réparti sur toutes les pales du rouet. Ceci suppose que les pales principales et intercalaires ont un même comportement lors des contacts, ce qui n'est pas acquis si l'on considère des déformées modales.

Hypothèse : Contact réparti sur toute la tête de pale

On suppose ici que les flux thermiques de contact sont uniformément répartis dans la zone d'étude. On applique un flux thermique total de 45 W sur chaque pale du secteur comme indiqué en figure VI.56a. Le champ de températures maximal, obtenu en fin d'interaction ($t \approx 6$ s) simulée, et visible en figure VI.56b, montre un échauffement sur une large portion de la tête de pale, à l'image des observations effectuées après essais de contact sur la pale intercalaire 8, visible sur la figure VI.52d.

La simulation permet de constater que les gradients de température attendus devraient permettre de distinguer clairement le premier virage de couleur. Les conditions d'utilisation du marqueur thermosensible (faible pression d'air) ont donc un impact sur ses performances. Il faut alors prendre quelques précautions dans l'analyse des données fournies par les marqueurs de type crayon thermosensibles. La température maximale calculée sur la tête de pale est de 555 °C pour cette simulation. Les colorations observées en figure VI.52d se répartissent sur une profondeur supérieure d'environ 2 mm, ce qui permet d'en déduire que les températures en fin d'interaction ($t \approx 6$ s) atteintes durant les essais ont été plus importantes encore que ce que la simulation nous montre mais restent en très bonne cohérence.

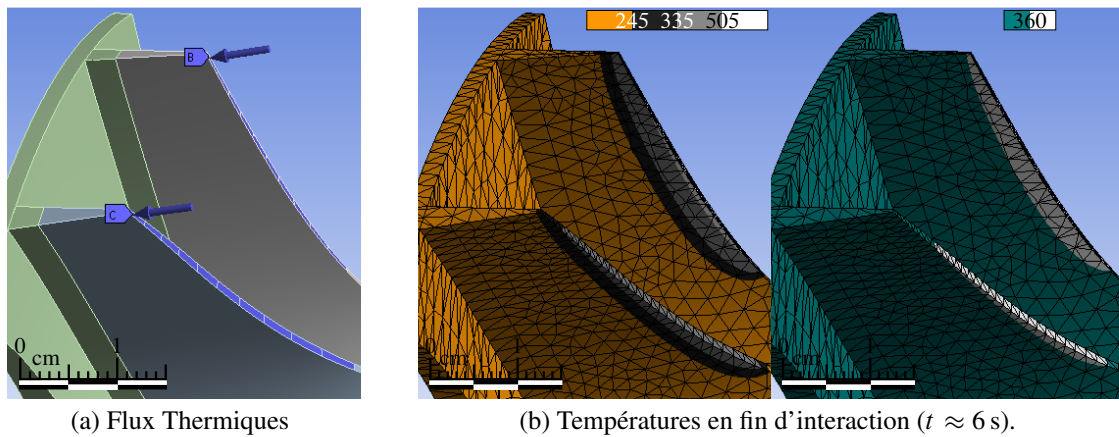


FIGURE VI.56 – Chargement et résultats dans le cas d'un contact réparti sur la tête de pale.

Hypothèse : Contacts ponctuels sur la tête de pale

Le second cas de chargement fait intervenir des contacts ponctuels sur la tête de pale. Les flux thermiques et les températures en fin d'interaction ($t \approx 6$ s) sont présentés respectivement en figures VI.57a et VI.58b. Cette simulation permet de retrouver des pénétrations du champ de température analogues aux observations effectuées sur la pale intercalaire n°2, visible sur la photographie en figure VI.52a. Là encore, le champ simulé est moins développé que le champ observé en essais. Avec toutefois une température maximale calculée de 686 °C.

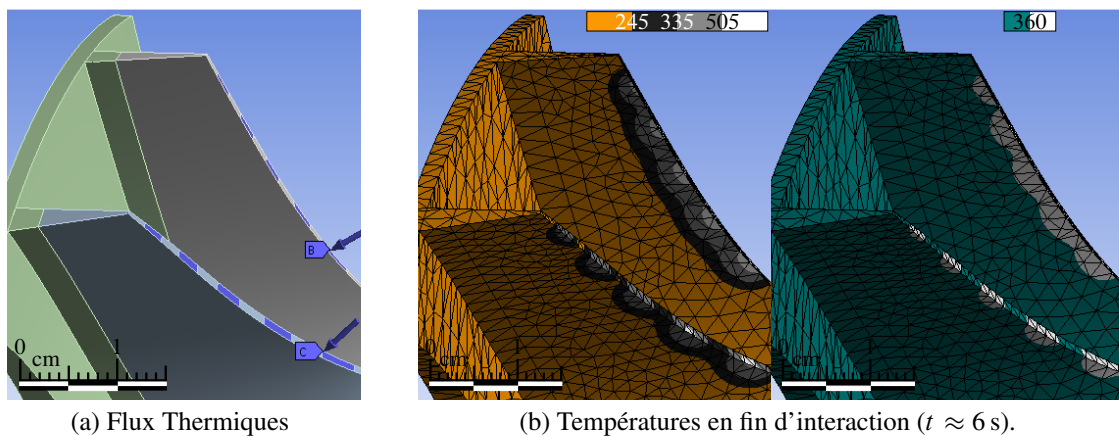


FIGURE VI.57 – Chargement et résultats dans le cas de plusieurs contacts ponctuels sur la tête de pale.

Hypothèse : Contact asymétrique sur la tête de pale

Cette dernière simulation utilise une répartition des efforts de contact sur deux zones, l'une près de la méridienne, l'autre près du bord de fuite, figure VI.58a. Cette simulation permet de retrouver des champs de température analogues à ceux observés sur la photographie en figure VI.52c.

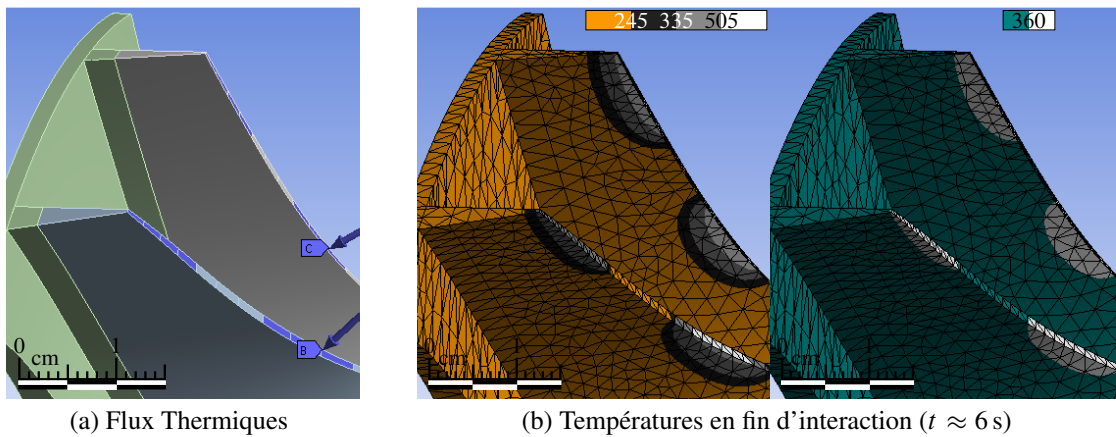


FIGURE VI.58 – Chargement et résultats dans le cas de deux contacts asymétriques sur la tête de pale.

Effet de la répartition du flux sur le maximum de température sur la tête de pale

La figure VI.59 regroupe trois thermogrammes associés chacun à une simulation. Ces thermogrammes représentent l'évolution du maximum de température sur le secteur durant les simulations. La localisation des efforts a une influence très forte sur le maximum de température sur le secteur, 710 °C pour des contacts asymétriques, en regard des 550 °C obtenus pour une répartition uniforme. Dès que l'échauffement est stoppé, les températures sur la tête de pale chutent rapidement, et au bout de dix secondes, sont identiques pour les trois cas de chargement.

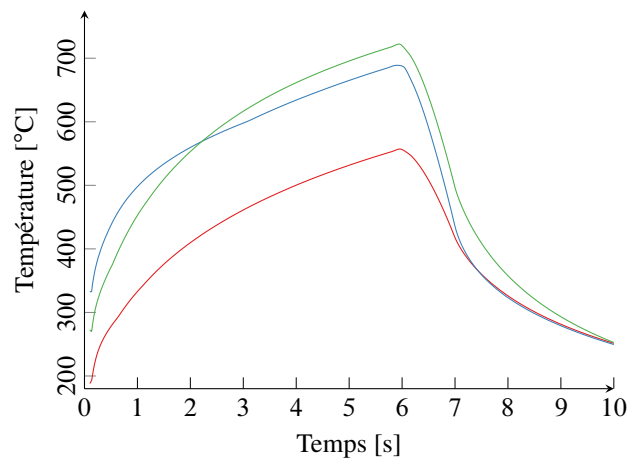


FIGURE VI.59 – Températures maximales sur la tête de pale au cours du temps pour les trois simulations. Contact réparti (—), contacts ponctuels (—), contacts asymétriques (—).

Effet de la répartition sur la température vue par les marqueurs autocollants

Les thermogrammes relevés au niveau des marqueurs autocollants sont représentés pour les trois situations simulées en figure VI.60, et pour les pales principale et intercalaire. Du fait des temps caractéristiques de conduction, le maximum de température est atteint vers 7,5 s à au niveau des marqueurs autocollants. Les températures relevées au niveau des marqueurs autocollants lors des simulations sont relativement proches pour les simulations avec flux thermiques répartis et ponctuels, probablement du fait du lissage du front de chaleur à cette distance de la tête de pale. Enfin, les températures obtenues au moyen des différentes simulations sont dans une plage de température d'environ 50 °C de part et d'autre de la plage de mesure des autocollants. On peut donc supposer que

l'ensemble de nos hypothèses de calcul sont en adéquation avec les mesures réalisées ce qui permet de valider qualitativement nos simulations.

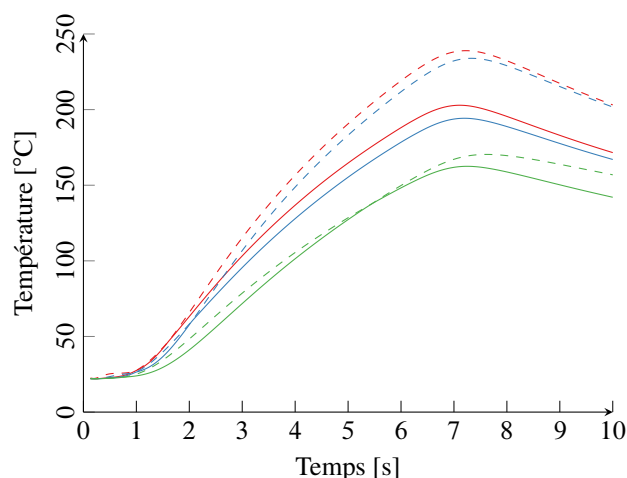


FIGURE VI.60 – Températures simulées au niveau des marqueurs autocollants. Contact réparti (—), contacts ponctuels (—), contacts asymétriques (—), pale principale (- -), pale intercalaire (—).

3.5 Conclusion

Cette étude a permis de confronter des données expérimentales et numériques afin d'analyser les champs de température obtenus pour différentes configurations de contact sur la tête de pale. La cohérence des résultats entre les différents indicateurs thermiques et l'analyse numérique, bien que basée sur des paramètres évalués de manière qualitative, mérite d'être soulignée.

En effet, les hypothèses proposées tendent plutôt à sous-estimer les températures calculées par rapport aux essais. La bonne corrélation entre les calculs et les observations du comportement thermique des structures conforte notre compréhension des phénomènes intervenant lors des contacts.

En cas de contacts répétés, ces températures pourraient amener à un abattement de la durée de vie des pièces concernées, en favorisant l'apparition de fissures au niveau des têtes de pales.

4 Bilan du chapitre

Ce chapitre décrit un essai de contact effectué sur le banc d'essais CASTOR II qui a permis de mettre en évidence des phénomènes thermiques et mécaniques importants. Des températures et des amplitudes vibratoires notables ont ainsi été constatées durant cet essai. Néanmoins, celui-ci reste qualitativement cohérent avec les essais précédemment effectués durant la campagne d'essais associée à ces travaux de thèse en termes de cinétique d'échauffement, de comportement dynamique des structures, et d'usure.

Ce chapitre présente certaines observations singulières effectuées notamment au moyen de marqueurs thermosensibles, permettant de localiser et de quantifier les champs thermiques subis par les pales durant les essais de contact. Ces champs thermiques expérimentaux sont corrélés via un calcul thermique simplifié à des coefficients de partage de flux entre les structures en contact, et aux puissances consommées durant les contacts.

Aussi, une analyse détaillée du comportement temporel, fréquentiel et spatial des structures en contact est présentée. Cette analyse montre une fois encore la richesse des phénomènes dynamiques intervenant durant les contacts et le couplage entre les deux structures.

Le phénomène particulier d'interaction modale, n'a en revanche pas pu être mis en évidence, comme lors de la campagne d'essais CASTOR I [7]. Bien que les conditions nécessaires à l'établissement de ce phénomène, facilitées par la configuration CASTOR II, aient été atteintes, les mesures effectuées ne permettent pas de caractériser avec certitude ce phénomène sur la configuration étudiée. Les critères de coïncidence fréquentielle, coïncidence spatiale et des sens de propagation des ondes ne sont en effet pas vérifiés sur les interactions relevées. Plusieurs hypothèses peuvent expliquer l'absence d'apparition de ce phénomène : un amortissement structurel trop fort du couvercle, les caractéristiques géométriques du système rouet-couvercle qui entraînent une raideur importante du rouet au bord de fuite où le couvercle est flexible, la perte de vitesse de rotation de la broche assurant la condition d'interaction lorsque les contacts s'intensifient ou encore la compétition entre phénomènes thermiques et d'usure de l'abradable.

La plupart des interactions relevées se déroulent de la manière suivante : le jeu, initialement faiblement ouvert se referme par chargement thermique ou par excitation dynamique par des harmoniques de la vitesse de rotation. Suite à la fermeture du jeu, les efforts de contact entraînent un échauffement des zones de contact et une usure de l'abradable. Au cours de l'interaction, ces deux phénomènes peuvent avoir des actions opposées ou concordantes, mais l'usure finit par prendre le dessus, ce qui a pour conséquence l'ouverture du jeu. Une fois le contact libéré, les amplitudes vibratoires et les températures diminuent jusqu'à une nouvelle interaction.

Dans l'ensemble, la campagne d'essais CASTOR II a essentiellement permis de confirmer les résultats et les conclusions de la campagne CASTOR I sur un nouveau point de fonctionnement du banc d'essais. Par ailleurs, de nouvelles données ont été produites concernant la localisation et l'intensité des échauffements sur les pales. Celles-ci jettent une nouvelle lumière sur le comportement des structures lors des contacts, en raison de la variété des profils et de l'intensité des températures relevées, supérieures à 500 °C.

Conclusion

Contexte

Les travaux présentés dans ce document s'inscrivent dans une dynamique de recherche plus large sur les phénomènes de contact rotor–stator. Cette dynamique, initiée depuis près de quinze ans, a donné lieu à de nombreuses publications scientifiques et travaux de thèse. Les développements spécifiques dont traite cette thèse sont issus de deux axes de recherche, l'un numérique, l'autre expérimental.

Le volet expérimental de cette thèse fait directement suite aux travaux de Patricio Almeida [7] sur le banc d'essais CASTOR du LTDS (UMR CNRS 5513) à l'École Centrale de Lyon. La campagne d'essais effectuée alors avait permis de mettre en évidence l'influence des différents phénomènes intervenant lors des contacts : frottement, usure et échauffement spectre des réponses des structures, vibrations transitoires. Cependant, des difficultés avaient été rencontrées lors de la mise en œuvre du banc pour en exploiter toutes les possibilités. Une nouvelle campagne d'essais, dédiée à l'étude d'un nouveau point de fonctionnement a donc été effectuée à la suite de modifications du banc d'essais, dont l'instrumentation, pour établir des observations complémentaires, en étudiant notamment le comportement des structures autour de la vitesse d'interaction à trois diamètres nodaux.

Le volet numérique découle quant à lui de travaux de modélisation initiés par Safran Aircraft Engines dans [89]. Ces travaux et ceux qui ont suivi ont permis une amélioration substantielle de la modélisation des phénomènes de contact rotor–stator, en y intégrant les effets de vitesse de rotation et les phénomènes d'usure et de frottement, tout en maintenant des temps de calcul relativement faibles compatibles avec une exploitation industrielle.

Au début de cette thèse, un phénomène crucial identifié lors de la première campagne d'essais CASTOR et dans d'autres travaux expérimentaux [100] avait reçu peu d'attention en termes de modélisation : l'échauffement par friction et ses conséquences sur le comportement des structures. Bien que des premières analyses numériques aient été effectuées dans [100], plusieurs aspects de la modélisation pouvaient être améliorés. En particulier, la compatibilité des méthodes de calcul actuellement employées par le groupe Safran pour la modélisation des phénomènes de contact dans un contexte de simulation thermomécanique a dû être évaluée, tant du point de vue de la réduction des modèles que de la simulation en elle-même.

Résultats

Les contributions scientifiques majeures apportées par cette thèse concernent principalement la réduction des modèles thermomécaniques et l'intégration temporelle des problèmes de contact thermomécanique, en lien avec les méthodes déjà utilisées chez Safran.

Les études effectuées ont permis de montrer sur des modèles unidimensionnels puis volumiques, que les méthodes de réduction communément employées en dynamique des structures pour l'étude de problèmes de contact étaient inadéquates pour la réduction d'un problème de contact thermomécanique. Ceci tient principalement à la relative facilité de réduction d'un problème de dynamique des structures. Ainsi, en s'appuyant sur le contenu modal, qui constitue le contenu principal d'une réponse dynamique

d'un système mécanique, on peut réduire très efficacement ce type de problème. À l'inverse des phénomènes ondulatoires de la dynamique des structures, les phénomènes de transport comme l'équation de la chaleur ne présentent pas de comportement modal. Il a donc fallu recourir à des méthodes peu connues en dynamique des structures, mais bien plus développées dans d'autres thématiques comme l'électronique. L'application de la méthode Rational Craig–Hale constitue ainsi une proposition notable de cette thèse, tirant partie des développements utilisés pour la réduction des problèmes de contact, et des derniers développements concernant les méthodes de Krylov, qui consistent à préserver la fonction de transfert des systèmes lors de la réduction. Les capacités de réduction de modèles éléments finis thermoélastiques linéaires de cette méthode ont été démontrées sur tous les modèles étudiés, même pour des phénomènes très rapides et des modèles de grandes dimensions.

Les travaux concernant la modélisation et l'intégration temporelle du problème de contact rotor–stator en tenant compte des effets thermiques, et de la flexibilité des deux structures n'ont pas donné lieu à des développements scientifiques particuliers. En revanche, l'exploitation de telles méthodes dans le contexte du contact rotor–station n'avait jamais été effectuée, et encore moins dans un cadre de simulation multi-physique. Les méthodes de simulation utilisées, inspirées par le domaine de la dynamique non-régulière, sont à ce jour peu déployées dans le domaine industriel. Leur adaptation au problème du contact rotor–stator a permis de confirmer leur pertinence pour ce cas d'étude dans un contexte de simulation simplifié, ainsi que leur grande stabilité et faible coût numérique, ce qui les rend particulièrement intéressantes pour réduire les coûts et les temps de calcul.

La majorité des travaux présentés dans ce document ne constituent pas une avancée scientifique de premier plan, mais plutôt une utilisation relativement judicieuse de méthodes existantes dans un but précis. Les difficultés rencontrées durant cette thèse ont donc principalement été dues à la vérification de la compatibilité entre toutes les méthodes utilisées et à leur agencement, pour permettre une modélisation relativement pertinente des phénomènes de contact rotor–stator sur la base de modèles industriels. De ce point de vue, l'objectif semble avoir été atteint.

En ce qui concerne les résultats de la campagne d'essais CASTOR II, les principaux enseignements montrent que le déclenchement d'une interaction avec coïncidence modale d'un couple rouet–couvercle, dans ces conditions de vitesse de rotation et en l'absence d'excitation, semble possible mais est très difficile, même pour une interaction à trois diamètres nodaux supposément énergétique. Notamment, les sens de propagation des ondes constatés durant une telle interaction pendant les essais ne correspondent pas aux modèles connus. Il est possible que les géométries complexes de ce type de compresseurs, et la favorisation du contact au bord de fuite, mettent en défaut ce critère initialement établi sur des structures plus simples. En revanche, certains des phénomènes prédits par les simulations numériques ont été retrouvés dans les résultats des essais, comme les side-bands par exemple. Un autre point singulier, absent des travaux précédents sur ce banc, est celui des mesures de champs de température sur les pales durant les essais. L'utilisation des marqueurs thermosensibles a ainsi permis d'évaluer les températures au niveau des têtes de pales, et par ce biais, de localiser finement les zones de contact. Les températures très élevées mesurées par ce moyen, pouvant dépasser 500 °C, pour un banc d'essais froid et des vitesses de rotation faibles, pose la question de l'endommagement des pièces en titane lors des contacts en service du fait de l'altération du matériau par échauffement.

Perspectives

Cette thèse ayant été effectuée en tenant compte de l'aspect industriel de la problématique étudiée, dont les méthodologies et outils de modélisation existants ainsi que les modèles numériques de grande dimension, celle-ci offre des perspectives très intéressantes pour la modélisation des phénomènes de contact rotor–stator dans les turbomachines. En effet, les développements concernant les méthodes de réduction de modèles thermoélastiques et détaillés au chapitre III ont d'ores et déjà été implémentés dans un outil de calcul industriel Safran en collaboration avec l'équipe d'Alain Batailly au Laboratoire

d'Analyse Vibratoire et Acoustique de l'école Polytechnique de Montréal. L'utilisation d'une partie des travaux scientifiques de cette thèse est donc à ce jour possible dans un contexte industriel.

Concernant la modélisation des phénomènes de contact, les méthodologies de modélisation non-régulière exploitées durant cette thèse constituent une amélioration notable des outils disponibles, avec une diminution des temps de calcul et une robustesse supérieure. Bien que ces développements ne soient pas encore implémentés dans l'environnement de calcul industriel, ils constituent une mise à niveau majeure des méthodes d'intégration temporelle utilisées jusqu'alors, et permettent indifféremment la modélisation des phénomènes mécaniques et thermiques.

Vu la complexité des phénomènes considérés, de par leur caractère multi-physique et multi-échelle (en temps comme en espace), il ne fait aucun doute que cette thématique donnera encore lieu à de nombreux travaux de recherche. Notamment, et bien que les développements détaillés ici permettent des modélisations simplifiées dans un contexte multi-physique, de nombreux phénomènes restent à prendre en compte. Parmi ceux-ci, l'amélioration de la prise en compte des conditions aux limites thermiques constitue un axe d'amélioration logique, notamment en ce qui concerne les phénomènes de convection. La modélisation des champs thermiques dans le stator et l'abradable fait, au moment de l'écriture de cette conclusion, l'objet de développements soutenus par l'équipe d'Alain Batailly. Un point important de la modélisation qui n'a pas pu être abordé concerne la prise en compte de l'évolution des propriétés des matériaux constitutifs des structures étudiées. En effet, on s'attend généralement avec l'augmentation des températures des structures, en particulier pour les problèmes de contact, à une altération des propriétés mécaniques (module d'Young, limite d'élasticité, dureté, coefficient de friction) et thermiques (conductivité, capacité, résistance de contact) avec l'augmentation de la température des structures. Il paraît donc pertinent que des travaux portent sur la réduction des modèles thermomécaniques non-linéaires, la résolution étant déjà effectuée de façon non-linéaire durant l'intégration temporelle du problème de contact au moyen de la méthode de Moreau–Jean avec reprojection.

Concernant le volet expérimental, l'étude d'un nouveau point de fonctionnement a permis d'exploiter la majorité du potentiel du banc d'essais CASTOR. Une perspective particulière concerne la mesure des champs thermiques sur les pales ou le carter durant les essais de contact au moyen de marqueurs thermosensibles. Cette méthode, employée par les industriels a été proposée dans le cadre de cette thèse par Anaïs Roblet de Safran Helicopter Engines. L'emploi de cette technique de mesure, qui n'avait jusqu'alors pas été utilisée dans ce contexte, fait espérer des observations très intéressantes dans les futures campagnes.

Table des figures

I.1	Coupe d'un turbomoteur Safran Helicopter Engines RTM322	6
I.2	Diagrammes thermodynamiques du cycle de Joule	7
I.3	Principe de la compression d'un fluide dans un turbomoteur	8
I.4	Écoulement de l'air dans un compresseur centrifuge aéronautique	8
I.5	Accident d'un DC-10 près d'Albuquerque, 1973	9
I.6	Repères fixe (stator) et mobile (rotor) dans une turbomachine	10
I.7	Ondes à trois diamètres nodaux sur une structure cyclique	11
I.8	Changement d'apparence d'une onde contra-rotative vue du repère fixe en fonction de la vitesse de rotation	12
I.9	Pulsations apparentes d'une onde se propageant sur la structure mobile vues du repère fixe	13
I.10	Diagrammes de Campbell rotor-stator exprimés dans le repère fixe (lié au stator)	13
I.11	Trace des déplacements (—), vitesses (- -), et efforts (····) durant les interactions, au niveau des têtes de pales	14
I.12	Modélisation simplifiée de l'interaction rotor-stator d'après Schmiechen	15
II.1	Domaines dans la formulation du problème de contact	18
II.2	Notions de surface de contact maître et esclave pour un contact nœud-ligne	23
II.3	Lois reliant l'effort de contact normal au jeu	24
II.4	Lois reliant l'effort tangentiel de frottement à la vitesse de glissement	25
II.5	Modèle de poutre thermomécanique 1D	30
II.6	Modèle éléments finis simplifié de compresseur centrifuge	31
III.1	Sous-domaines interne et frontière d'un domaine	35
III.2	Méthode de Galerkin pour l'approximation d'une solution en trois dimensions par un espace à deux dimensions	36
III.3	Équivalence entre secteur modélisé en symétrie cyclique et structure complète	44
III.4	Méthode de Craig-Bampton, influence du nombre de modes retenus	54
III.5	Méthode de MacNeal, influence du nombre de modes retenus	55
III.6	Méthode de Craig-Hale, influence du nombre de modes retenus	56
III.7	Méthode Rational Craig-Hale, influence du nombre de modes retenus	57
III.8	Méthode SVD, influence du nombre de modes retenus	57
III.9	Modèle complet, convergence des FRF avec la discrétisation spatiale	58
III.10	Méthode de Craig-Bampton, influence du nombre de degrés de liberté du modèle complet	59
III.11	Méthode de MacNeal, influence du nombre de degrés de liberté du modèle complet	59
III.12	Méthode de Craig-Hale, influence du nombre de degrés de liberté du modèle complet	60
III.13	Méthode Rational-Craig-Hale, influence du nombre de degrés de liberté du modèle complet	61
III.14	Méthode Rational-Craig-Hale, influence du paramétrage de l'expansion	62
III.15	Bases de réduction obtenues par la méthode RCH	63
III.16	Méthode Rational-Craig-Hale, influence du choix des bornes d'expansion	63

IV.1	Intégration numérique par la θ -méthode	67
IV.2	Illustration de l'intégration numérique par la méthode de Newmark	68
IV.3	Domaines de stabilité des algorithmes de Newmark	70
IV.4	Méthodologies de résolution de problèmes couplés	71
IV.5	Comportement en vitesse et en déplacement lors d'un impact	76
IV.6	Système masse-ressort soumis à une contrainte de contact unilatéral	76
IV.7	Modèle de poutre thermomécanique 1D éventuellement soumise à un contact chauffant au niveau de l'extrémité libre au repos	88
IV.8	Réponses temporelles sans contact	89
IV.9	Erreurs relatives entre les réponses temporelles sans contact obtenues au moyen des algorithmes mis en œuvre et l'algorithme Runge-Kutta 45	90
IV.10	Mise en évidence d'oscillations numériques de la solution thermique libre	90
IV.11	Résultats d'intégration temporelle avec les différents algorithmes de contact	91
IV.12	Agrandissement de la dernière phase de contact de la simulation	92
IV.13	Influence du pas de temps – Algorithme de Carpenter	93
IV.14	Influence du pas de temps – Algorithme de Moreau–Jean linéairement implicite	94
IV.15	Influence du pas de temps – Algorithme de Moreau–Jean avec reprojection	95
IV.16	Influence du paramètre α – Algorithme de Carpenter	96
IV.17	Influence du paramètre γ – Moreau–Jean linéairement implicite	97
IV.18	Influence du paramètre γ – Moreau–Jean avec reprojection	97
IV.19	Effet des dilatations thermiques sur les réponses	99
IV.20	Effet de la loi de dépendance thermique du coefficient de frottement	100
IV.21	Caractérisation des modèles réduits pour les simulations de contact	102
IV.22	Comparaison des modèles réduits en situation de contact sans échauffement	103
IV.23	Modèles réduits en situation de contact avec échauffement	104
V.1	Schéma de principe de la stratégie de réduction du rotor	107
V.2	Effet du changement de repère sur la reconstruction des points d'intérêt du stator	109
V.3	Effet de la rotation sur la position des nœuds de contact sur le stator	110
V.4	Maillages évalués pour l'étude de convergence dans la pale	117
V.5	Analyse de convergence du maillage de rotor en fonction de la discrétisation de la pale principale	117
V.6	Convergence des modèles réduits du secteur de référence en fonction du nombre n_p de points d'expansion	118
V.7	Convergence des modèles réduits du secteur de référence en fonction des bornes d'expansion (s_i, s_f)	119
V.8	Convergence des modèles réduits du secteur de référence en fonction de la tolérance de troncature	120
V.9	Étude de convergence des valeurs propres de problèmes mécaniques et thermiques lors de l'application de la double synthèse modale	122
V.10	Comparaison des fréquences propres du rotor entre Ansys et le modèle réduit après double synthèse	122
V.11	Modèle éléments finis de secteur de référence du couvercle	123
V.12	Déformées modales du stator	123
V.13	Courbes de contact issues de la modélisation du stator en symétrie cyclique	124
V.14	Diagrammes fréquences-diamètres des deux structures	125
V.15	Simulation de contact quasi-statique	126
V.16	Simulation avec rotation	127
V.17	Comparaison des algorithmes de Carpenter et Moreau–Jean avec reprojection dans une configuration de contact rotor–stator	128

V.18	Zoom de la figure V.17 sur la zone temporelle $t \in 7 \times 10^{-3}$ – 8×10^{-3} s	129
V.19	Réponses dynamiques avec l’algorithme de Moreau–Jean en fonction du pas de temps	130
V.20	Zoom de la figure V.19 sur la zone temporelle $t \in 7 \times 10^{-3}$ – 8×10^{-3} s	131
V.21	Temps de calcul de simulations de contact (temps simulé de 10^{-2} s) pour différents pas de temps	131
V.22	Diagramme de coïncidence modale dans le repère fixe	133
V.23	Déplacements axiaux au bord de fuite	134
V.24	Jeux et efforts normaux de contact	135
V.25	Participation des harmoniques spatiaux dans les déplacements axiaux	136
V.26	Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator	138
V.27	Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator	139
V.28	Diagrammes fréquences-diamètres sur la plage de vitesse 4660–4680 rpm	140
V.29	Déplacements axiaux au bord de fuite	141
V.30	Jeux et efforts normaux de contact	142
V.31	Participation des harmoniques spatiaux dans les déplacements axiaux	143
V.32	Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator	144
V.33	Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator	145
V.34	Diagrammes fréquences-diamètres sur la plage de vitesse 4660–4680 rpm	146
V.35	Déplacements axiaux	148
V.36	Jeux et efforts normaux de contact	148
V.37	Participation des harmoniques spatiaux dans les déplacements axiaux	149
V.38	Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator	150
V.39	Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator	151
V.40	Diagrammes fréquences-diamètres sur la plage de vitesse 4660–4680 rpm	152
V.41	Évolution des déplacements axiaux au cours du temps	154
V.42	Évolution des températures au bord de fuite (ligne de contact n°1)	155
V.43	Jeux et efforts normaux de contact	155
V.44	Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor et du stator	156
V.45	Spectrogrammes de déplacements axiaux du rotor, bord d’attaque pale n°1	157
V.46	Diagrammes fréquences-diamètres sur l’intervalle de temps $t \in 5$ – 6 s	157
VI.1	Architecture du banc CASTOR II	160
VI.2	Position des jauges de déformation sur le rouet	162
VI.3	Position des jauges de déformation et des thermocouples sur le couvercle	163
VI.4	Marqueurs thermosensibles	164
VI.5	Application de marqueurs thermosensibles avant un essai de contact	165
VI.6	Diagramme de coïncidence modale expérimental dans le repère fixe	167
VI.7	Evolutions de la vitesse de rotation et du couple au cours de l’essai	169
VI.8	Évolution temporelle des signaux relevés sur le rotor et le stator	171
VI.9	Agrandissements de la figure VI.8 au voisinage des trois interactions accompagnées des échauffements mesurés les plus élevés	172
VI.10	Signaux temporels issus des jauges du rotor	173
VI.11	Mesures issues de jauges de déformation de la pale principale n°6	174
VI.12	Spectrogrammes des signaux rotor et stator filtrés sur la bande 1–5 kHz	175
VI.13	Signaux temporels sur la période $t \in 180$ – 210 s	176
VI.14	Spectrogramme de la jauge PP-06-6BA, $t \in 180$ – 210 s	176
VI.15	Spectrogrammes de signaux mesurés sur le stator, $t \in 180$ – 210 s	177
VI.16	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 186$ – 189 s	178
VI.17	Diagrammes de phases, $t \in 185$ – 189 s	178
VI.18	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 191$ – 192 s	178

VI.19	Diagrammes de phases, $t \in 191\text{--}192$ s	179
VI.20	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 193\text{--}194$ s	179
VI.21	Diagrammes de phases, $t \in 195\text{--}196$ s	179
VI.22	Diagrammes de phases, $t \in 197\text{--}200$ s	180
VI.23	Signaux temporels sur la période $t \in 440\text{--}460$ s	180
VI.24	Spectrogrammes, $t \in 440\text{--}460$ s	181
VI.25	Signaux des jauges en fonction de la phase de l’arbre, $t \in 445\text{--}447$ s	181
VI.26	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 445\text{--}447$ s	182
VI.27	Diagrammes de phases, $t \in 448\text{--}450$ s	182
VI.28	Diagrammes de phases, $t \in 451\text{--}454$ s	182
VI.29	Signaux temporels sur la période $t \in 710\text{--}740$ s	183
VI.30	Spectrogrammes, $t \in 710\text{--}740$ s	183
VI.31	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 723\text{--}725$ s	184
VI.32	Diagrammes de phases, $t \in 718\text{--}724$ s	184
VI.33	Diagrammes de phases, $t \in 725\text{--}729$ s	184
VI.34	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 726\text{--}727$ s	185
VI.35	Signaux temporels sur la période $t \in 1160\text{--}1180$ s	185
VI.36	Spectrogrammes, $t \in 1160\text{--}1180$ s	186
VI.37	Diagrammes de phases, $t \in 1168\text{--}1171$ s	186
VI.38	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 1168\text{--}1171$ s	187
VI.39	Diagrammes de phases, $t \in 1172\text{--}1173$ s	187
VI.40	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 1172\text{--}1173$ s	188
VI.41	Diagrammes de phases, $t \in 1174\text{--}1175$ s	188
VI.42	Diagrammes fréquences–diamètres, $t \in 1174\text{--}1176$ s	188
VI.43	Prises de vues avant l’essai	190
VI.44	Champs thermiques maximaux sur plusieurs pales du rotor	191
VI.45	Endommagements des pales observés après essai	191
VI.46	Observation visuelle du couvercle après essai	192
VI.47	Prises de vue par le hublot latéral, $t \in 1170\text{--}1176$ s	193
VI.48	Signaux temporels sur la période $t \in 480\text{--}500$ s	194
VI.49	Mesures effectuées aux environs de l’interaction	194
VI.50	Calcul de la puissance instantanée autour de l’interaction	195
VI.51	Observations des marqueurs thermosensibles après essai	196
VI.52	Observations des marqueurs thermosensibles après essai	197
VI.53	Observations des marqueurs thermosensibles après essai	198
VI.54	Observations des marqueurs thermosensibles après essai	199
VI.55	Géométrie du secteur étudié	200
VI.56	Chargement et résultats dans le cas d’un contact réparti sur la tête de pale	201
VI.57	Chargement et résultats dans le cas de plusieurs contacts ponctuels sur la tête de pale	201
VI.58	Chargement et résultats dans le cas de deux contacts asymétriques sur la tête de pale	202
VI.59	Températures maximales sur la tête de pale au cours du temps pour les trois simulations	202
VI.60	Températures simulées au niveau des marqueurs autocollants	203
A.1	Forme du déterminant (A.4) pour $a_{xx} = a_{yy} = 1$ et différentes valeurs de a_{xy}	230
E.1	Illustration de la notion de sous-différentielle	239
E.2	Sous-différentielle (—) à la fonction indicatrice de \mathbb{R}^+ (—) en 0	240
F.1	Diagramme de Campbell	241
F.2	Diagramme SAFE	242

Liste des tableaux

IV.1	Schémas d'intégration temporelle usuels à deux pas	68
IV.2	Schémas d'intégration temporelle usuels à trois points	69
IV.3	Paramètres de simulation	88
IV.4	Paramètres de réduction	101
V.1	Effet de la troncature sur la taille des bases de réduction Rational–Craig–Hale	120
V.2	Paramètres de réduction du modèle de secteur de compresseur centrifuge	121
VI.1	Fréquences propres du rouet	166
VI.2	Fréquences propres du couvercle	166
VI.3	Récapitulatif des observations expérimentales	189

Liste des Algorithmes

IV.1	Algorithme de Carpenter décentré	74
IV.2	Algorithme de Moreau–Jean linéairement implicite	80
IV.3	Algorithme de Moreau-Jean avec boucle de Newton, adapté de [4]	83
IV.4	Algorithme de Moreau-Jean avec reprojction en position adapté de [3]	87
B.1	Algorithme de construction de la base de réduction RCH	232

Bibliographie

- [1] Vincent ACARY. « Energy conservation and dissipation properties of time-integration methods for nonsmooth elastodynamics with contact ». *Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 96.5 (mai 2016), p. 585-603. DOI : [10.1002/zamm.201400231](https://doi.org/10.1002/zamm.201400231) (cf. p. 78).
- [2] Vincent ACARY. *Homepage*. URL : <http://tripop.inrialpes.fr/people/acary/teaching.html> (cf. p. 240).
- [3] Vincent ACARY. « Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 256 (avr. 2013), p. 224-250. DOI : [10.1016/j.cma.2012.12.012](https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.12.012) (cf. p. 79, 84 sqq., 106, 215).
- [4] Vincent ACARY et Bernard BROGLIATO. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems : Applications in Mechanics and Electronics*. 2008 edition. Berlin, mar. 2008. ISBN : 978-3-540-75391-9 (cf. p. 23, 26, 70, 72, 77 sqq., 83, 215, 240).
- [5] L. AFFERRANTE, M. CIAVARELLA et J.R. BARBER. « Sliding thermoelastodynamic instability ». *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 462.2071 (juil. 2006), p. 2161-2176. ISSN : 1364-5021, 1471-2946. DOI : [10.1098/rspa.2006.1676](https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1676) (cf. p. 98).
- [6] Timothy C. ALLISON, J. Jeffrey MOORE, Andrew H. LERCHE et Harold R. SIMMONS. « Revisiting the SAFE Diagram for Analysis of Mistuned Bladed Disks » (juin 2012), p. 141-153. DOI : [10.1115/GT2012-69014](https://doi.org/10.1115/GT2012-69014) (cf. p. 242).
- [7] Patricio ALMEIDA. « Couplage thermomécanique et vibratoire d'un compresseur centrifuge lors d'un contact aube-carter ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, déc. 2014 (cf. p. 12, 18, 22, 25, 31, 75, 124, 133, 137, 146, 159 sq., 162, 165 sqq., 189, 204 sq.).
- [8] Patricio ALMEIDA, Claude GIBERT, Xavier LEBLANC, Jean-Philippe OUSTY et Fabrice THOUVEREZ. « Experimental and Numerical Investigations on a Rotating Centrifugal Compressor » (juin 2012), p. 1133-1142. DOI : [10.1115/GT2012-69760](https://doi.org/10.1115/GT2012-69760) (cf. p. 159, 165).
- [9] Patricio ALMEIDA, Claude GIBERT, Fabrice THOUVEREZ, Xavier LEBLANC et Jean-Philippe OUSTY. « Experimental Analysis of Dynamic Interaction Between a Centrifugal Compressor and Its Casing ». *Journal of Turbomachinery* 137.3 (oct. 2014), p. 031008-031008. ISSN : 0889-504X. DOI : [10.1115/1.4028328](https://doi.org/10.1115/1.4028328) (cf. p. 16, 132, 159, 162).
- [10] Patricio ALMEIDA, Claude GIBERT, Fabrice THOUVEREZ et Jean-Philippe OUSTY. « On some physical phenomena involved in blade-casing contact ». *Proceedings 9th International Conference on Structural Dynamics* (2014) (cf. p. 159).
- [11] Andreas ALMQVIST. *A pivoting algorithm solving linear complementarity problems - File Exchange - MATLAB Central*. URL : <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/41485-a-pivoting-algorithm-solving-linear-complementarity-problems> (visité le 10/04/2017) (cf. p. 77).

- [12] David AMSALLEM et Charbel FARHAT. « Stabilization of projection-based reduced-order models ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 91.4 (), p. 358-377. ISSN : 1097-0207. DOI : [10.1002/nme.4274](https://doi.org/10.1002/nme.4274) (cf. p. 53).
- [13] Walter E. ARNOLDI. « The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem ». *Quarterly of Applied Mathematics* 9.1 (1951), p. 17-29. ISSN : 0033-569X (cf. p. 38 sq., 50, 53).
- [14] Nicolò BACHSCHMID, Paolo PENNACCHI et Andrea VANIA. « Thermally induced vibrations due to rub in real rotors ». *Journal of Sound and Vibration* 299.4 (2007), p. 683-719. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2006.04.045](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.04.045) (cf. p. 16).
- [15] Zhaojun BAI et Yangfeng SU. « Dimension Reduction of Large-Scale Second-Order Dynamical Systems via a Second-Order Arnoldi Method ». *SIAM Journal on Scientific Computing* 26.5 (jan. 2005), p. 1692-1709. ISSN : 1064-8275. DOI : [10.1137/040605552](https://doi.org/10.1137/040605552) (cf. p. 39).
- [16] Sarah BAIZ, Jacky FABIS, Xavier BOIDIN et Yannick DESPLANQUES. « Experimental investigation of the blade/seal interaction ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology* 227.9 (fév. 2013), p. 980-995. ISSN : 1350-6501, 2041-305X. DOI : [10.1177/1350650112472853](https://doi.org/10.1177/1350650112472853) (cf. p. 15).
- [17] Mervyn BAMPTON et Roy R. CRAIG. « Coupling of substructures for dynamic analyses. » *AIAA Journal* 6.7 (1968), p. 1313-1319. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/3.4741](https://doi.org/10.2514/3.4741) (cf. p. 34, 41).
- [18] J.R. BARBER, HAWTHORNE WILLIAM REDE et LIGHTHILL MICHAEL JAMES. « Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids ». *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 312.1510 (sept. 1969), p. 381-394. DOI : [10.1098/rspa.1969.0165](https://doi.org/10.1098/rspa.1969.0165) (cf. p. 98).
- [19] Alain BATAILLY. « Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Nantes (ECN), déc. 2008 (cf. p. 46).
- [20] Alain BATAILLY, Quentin AGRAPART, Antoine MILLECAMPs et Jean-François BRUNEL. « Experimental and numerical simulation of a rotor/stator interaction event localized on a single blade within an industrial high-pressure compressor ». *Journal of Sound and Vibration* 375 (août 2016), p. 308-331. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2016.03.016](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.03.016) (cf. p. 15 sq., 162, 168, 192).
- [21] Alain BATAILLY, Mathias LEGRAND, Patrice CARTRAUD et Christophe PIERRE. « Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts ». *Journal of Sound and Vibration* 329.26 (déc. 2010), p. 5546-5562. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2010.07.018](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.07.018) (cf. p. 50, 71, 116).
- [22] Alain BATAILLY, Mathias LEGRAND, Patrice CARTRAUD, Christophe PIERRE et Jean-Pierre LOMBARD. « Evaluation of component mode synthesis methods for the detection of modal interaction through rotor/stator contacts ». ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. Août 2009, DETC2009-87036 (cf. p. 50, 116).
- [23] Alain BATAILLY, Mathias LEGRAND, Antoine MILLECAMPs et François GARCIN. « Numerical-experimental comparison in the simulation of rotor/stator interaction through blade-tip/abradable coating contact ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.8 (juin 2012), p. 082504-082504. ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4006446](https://doi.org/10.1115/1.4006446) (cf. p. 71).
- [24] Alain BATAILLY, Mathias LEGRAND et Christophe PIERRE. « Influence of abradable coating wear mechanical properties on rotor stator interaction ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo*. T. 6. 2011, p. 941-950. ISBN : 978-0-7918-5466-2 (cf. p. 15).

- [25] Alain BATAILLY, Benoît MAGNAIN, Mathias LEGRAND et Christophe PIERRE. *Validation of a 3D contact algorithm for the study of blade-tip/casing contacts in turbomachines*. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00533382> (visité le 17/07/2017) (cf. p. 23, 26).
- [26] Alain BATAILLY, Markus B. MEINGAST, Mathias LEGRAND et Jean Philippe OUSTY. « Rotor-stator interaction scenarios for the centrifugal compressor of a helicopter engine ». *ASME IDETC Conference*. Portland, United States, août 2013, IDETC-12211. DOI : [10.1115/DETC2013-12211](https://doi.org/10.1115/DETC2013-12211) (cf. p. 25, 107).
- [27] Giuseppe BATTIATO, Christian M. FIRRONE, Teresa M. BERRUTI et Bogdan I. EPUREANU. « Reduction and coupling of substructures via Gram–Schmidt Interface modes ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 336 (juil. 2018), p. 187-212. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/j.cma.2018.03.001](https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.03.001) (cf. p. 44).
- [28] Sarah BAÏZ. « Etude expérimentale du contact aube/abradable : contribution à la caractérisation mécanique des matériaux abradables et de leur interaction dynamique sur banc rotatif avec une aube ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lille, mar. 2011 (cf. p. 15).
- [29] T. BECHTOLD, B SALIMBAHRAMI, E.B. RUDNYI, Boris LOHMANN et J.G. KORVINK. « Krylov-Subspace-Based Order Reduction Methods Applied to Generate Compact-Electro-Thermal Models for MEMS ». *Proceedings of MSM* (jan. 2003) (cf. p. 38 sq.).
- [30] Bérenger BERTHOUL. « Modelling of blade/casing interaction taking into account abradable material behavior ». These de doctorat. Université Nantes Angers Le Mans (UNAM), mar. 2016 (cf. p. 133).
- [31] Bérenger BERTHOUL, Alain BATAILLY, Mathias LEGRAND, Laurent STAINIER et Patrice CARTRAUD. « Abradable Coating Removal in Turbomachines : A Macroscopic Approach Accounting for Several Wear Mechanisms ». *ASME. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*. T. 7B : Structures and Dynamics () : V07BT32A012. 2015. DOI : [10.1115/GT2015-42500](https://doi.org/10.1115/GT2015-42500) (cf. p. 22, 98, 132).
- [32] Bérenger BERTHOUL, Alain BATAILLY, Laurent STAINIER, Mathias LEGRAND et Patrice CARTRAUD. « Phenomenological modeling of abradable wear in turbomachines ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 98 (2018), p. 770-785. DOI : [10.1016/j.ymssp.2017.05.020](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.05.020) (cf. p. 15, 132).
- [33] B. BESSELINK, U. TABAK, A. LUTOWSKA, N. van de WOUW, H. NIJMEIJER, D.J. RIXEN, M.E. HOCHSTENBACH et W.H.A. SCHILDERS. « A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control ». *Journal of Sound and Vibration* 332.19 (sept. 2013), p. 4403-4422. ISSN : 0022460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2013.03.025](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.03.025) (cf. p. 34).
- [34] Robert C. BILL et Lawrence P. LUDWIG. « Wear of seal materials used in aircraft propulsion systems ». *Wear* 59.1 (mar. 1980), p. 165-189. ISSN : 00431648. DOI : [10.1016/0043-1648\(80\)90277-X](https://doi.org/10.1016/0043-1648(80)90277-X) (cf. p. 15).
- [35] Ronnie BLADH. « Efficient predictions of the vibratory response of mistuned bladed disks by reduced order modeling ». Thèse de doct. University of Michigan, juil. 2001 (cf. p. 46).
- [36] Ronnie BLADH, Christophe PIERRE et Matthew P. CASTANIER. « Numerical Instability of Classical Free-Interface Component Mode Synthesis Techniques ». *AIAA Journal* 41.8 (août 2003), p. 1621-1624. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/2.2123](https://doi.org/10.2514/2.2123) (cf. p. 42).
- [37] National Transportation Safety BOARD. *Aircraft Accident Report - National Airlines, Inc., DC-10-10, N60NA, Near Albuquerque, New Mexico, November 3, 1973*. NTSB-AAR-75-2. Jan. 1975 (cf. p. 8 sq.).

- [38] Daniele BOTTO, Stefano ZUCCA et Muzio M. GOLA. « Reduced-Order Models for the Calculation of Thermal Transients of Heat Conduction/Convection FE Models ». *Journal of Thermal Stresses* 30.8 (juil. 2007), p. 819-839. ISSN : 0149-5739. DOI : [10.1080/01495730701415806](https://doi.org/10.1080/01495730701415806) (cf. p. 48).
- [39] Charbel BOUERY. « Contribution to algorithmic strategies for solving coupled thermo-mechanical problems by an energy-consistent variational approach » (déc. 2012) (cf. p. 70).
- [40] Olivier BRÜLS, Vincent ACARY et Alberto CARDONA. « Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized- α scheme ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 281 (nov. 2014), p. 131-161. DOI : [10.1016/j.cma.2014.07.025](https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.07.025) (cf. p. 70, 78 sq., 103).
- [41] Luigi CARASSALE et Mirko MAURICI. « Interface Reduction in Craig–Bampton Component Mode Synthesis by Orthogonal Polynomial Series ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 140.5 (déc. 2017), p. 052504-052504-8. ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4038154](https://doi.org/10.1115/1.4038154) (cf. p. 44).
- [42] Alberto CARDONA et Sergio IDELSOHN. « Solution of non-linear thermal transient problems by a reduction method ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 23.6 (juin 1986), p. 1023-1042. ISSN : 1097-0207. DOI : [10.1002/nme.1620230604](https://doi.org/10.1002/nme.1620230604) (cf. p. 38, 47 sq.).
- [43] Nicholas J. CARPENTER, Robert L. TAYLOR et Michael G. KATONA. « Lagrange constraints for transient finite element surface contact ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32.1 (1991), p. 103-128. ISSN : 1097-0207. DOI : [10.1002/nme.1620320107](https://doi.org/10.1002/nme.1620320107) (cf. p. 71 sq., 79, 237).
- [44] Matthew P. CASTANIER, Yung-Chang TAN et Christophe PIERRE. « Characteristic Constraint Modes for Component Mode Synthesis ». *AIAA Journal* 39.6 (juin 2001), p. 1182-1187. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/2.1433](https://doi.org/10.2514/2.1433) (cf. p. 44, 107, 116).
- [45] J. CHUNG et Gregory M. HULBERT. « A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation : The Generalized- α Method ». *Journal of Applied Mechanics* 60.2 (juin 1993), p. 371-375. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.2900803](https://doi.org/10.1115/1.2900803) (cf. p. 69).
- [46] Roy R. CRAIG. *Substructure coupling for dynamic analysis and testing*. Fév. 1977 (cf. p. 43).
- [47] Roy R. CRAIG et Arthur L. HALE. « Block-Krylov component synthesis method for structural model reduction ». *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 11.6 (1988), p. 562-570. ISSN : 0731-5090. DOI : [10.2514/3.20353](https://doi.org/10.2514/3.20353) (cf. p. 34, 42, 51 sq.).
- [48] Roy R. CRAIG et Tzu-Jeng SU. « Krylov model reduction algorithm for undamped structural dynamics systems ». *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 14.6 (nov. 1991), p. 1311-1313. ISSN : 0731-5090. DOI : [10.2514/3.20789](https://doi.org/10.2514/3.20789) (cf. p. 43).
- [49] John CRANK et Phyllis NICOLSON. « A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type ». *Proceedings of Cambridge Philosophical Society* 43 (1947), p. 50-67. ISSN : 1019-7168, 1572-9044. DOI : [10.1007/BF02127704](https://doi.org/10.1007/BF02127704) (cf. p. 68).
- [50] Marion CUNY. « Contribution à la caractérisation locale des couples de matériaux mis en jeu lors du contact rotor/stator dans une turbomachine ». Thèse de doct. Université de Lorraine, mar. 2012 (cf. p. 15).
- [51] Marion CUNY, Sylvain PHILIPPON, Pierre CHEVRIER et François GARCIN. « Étude expérimentale des interactions dynamiques aube/carter » (2011) (cf. p. 99).

- [52] Syed Noman DANISH, Shafiq Rehman QURESHI, Malik Muhammad IMRAN, Salah Ud-Din KHAN, Muhammad Mansoor SARFRAZ, Abdelrahman EL-LEATHY, Hany AL-ANSARY et Mingshan WEI. « Effect of tip clearance and rotor–stator axial gap on the efficiency of a multistage compressor ». *Applied Thermal Engineering* 99 (avr. 2016), p. 988-995. ISSN : 13594311. DOI : [10.1016/j.applthermaleng.2016.01.132](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.01.132) (cf. p. 8).
- [53] J. DENAPE et N. LARAQI. « Thermal aspect of friction : Experimental evidence and theoretical approaches ». *Mecanique et Industries* 1.6 (2000), p. 563-579. ISSN : 12962139 (cf. p. 16).
- [54] S.L DIXON et C.A HALL. *Fluid Mechanics and Thermodynamics of Turbomachinery*. 6^e éd. 2010. ISBN : 978-1-85617-793-1. DOI : [10.1016/C2009-0-20205-4](https://doi.org/10.1016/C2009-0-20205-4) (cf. p. 7).
- [55] V. DRUSKIN et V. SIMONCINI. « Adaptive rational Krylov subspaces for large-scale dynamical systems ». *Systems & Control Letters* 60.8 (août 2011), p. 546-560. ISSN : 0167-6911. DOI : [10.1016/j.sysconle.2011.04.013](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.04.013) (cf. p. 39).
- [56] Céline DUBOIS, Steven LE CORRE, Malek ZARROUG, Patrick ROZYCKI et Nicolas MOËS. « Impact on highly compressible media in explicit dynamics using the X-FEM ». *Computational Mechanics* 46.2 (2010), p. 329-348. DOI : [10.1007/s00466-010-0497-x](https://doi.org/10.1007/s00466-010-0497-x) (cf. p. 25).
- [57] Amy DUWEL, John GORMAN, Marcie WEINSTEIN, Jeff BORENSTEIN et Paul WARD. « Experimental study of thermoelastic damping in MEMS gyros ». *Sensors and Actuators A : Physical*. Micromechanics section of Sensors and Actuators, based on contributions revised from the Technical Digest of the 15th IEEE International conference on Micro Electro mechanical Systems (MEMS 2002) 103.1 (jan. 2003), p. 70-75. ISSN : 0924-4247. DOI : [10.1016/S0924-4247\(02\)00318-7](https://doi.org/10.1016/S0924-4247(02)00318-7) (cf. p. 30).
- [58] Raoul DZONOU, Manuel D. P. Monteiro MARQUES et Laetitia PAOLI. « A convergence result for a vibro-impact problem with a general inertia operator ». *Nonlinear Dynamics* 58.1 (oct. 2009), p. 361. ISSN : 0924-090X, 1573-269X. DOI : [10.1007/s11071-009-9484-1](https://doi.org/10.1007/s11071-009-9484-1) (cf. p. 67, 72, 78).
- [59] Charbel FARHAT et Michel GÉRADIN. « On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructures ». *Computers & Structures* 51.5 (juin 1994), p. 459-473. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/0045-7949\(94\)90053-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)90053-1) (cf. p. 37, 44).
- [60] Peter FELDMANN et Roland W. FREUND. « Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process ». *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 14.5 (mai 1995), p. 639-649. ISSN : 0278-0070. DOI : [10.1109/43.384428](https://doi.org/10.1109/43.384428) (cf. p. 39).
- [61] Bernard FLAMENT, Frédéric BOURQUIN et Alain NEVEU. « Synthèse modale : une méthode de sousstructuration dynamique pour la modélisation des systèmes thermiques linéaires ». *International Journal of Heat and Mass Transfer* 36.6 (jan. 1993), p. 1649-1662. ISSN : 00179310. DOI : [10.1016/S0017-9310\(05\)80074-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(05)80074-2) (cf. p. 47).
- [62] Roland W. FREUND. « Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation ». *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Numerical Analysis 2000. Vol. III : Linear Algebra 123.1 (nov. 2000), p. 395-421. ISSN : 0377-0427. DOI : [10.1016/S0377-0427\(00\)00396-4](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00396-4) (cf. p. 38 sq.).
- [63] Roland W. FREUND. « Model reduction methods based on Krylov subspaces ». *Acta Numerica* 12 (mai 2003), p. 267-319. ISSN : 1474-0508, 0962-4929. DOI : [10.1017/S0962492902000120](https://doi.org/10.1017/S0962492902000120) (cf. p. 38 sq.).
- [64] Roland W. FREUND. « On Padé-type model order reduction of J-Hermitian linear dynamical systems ». *Linear Algebra and its Applications*. Special Issue in honor of Richard S. Varga 429.10 (nov. 2008), p. 2451-2464. ISSN : 0024-3795. DOI : [10.1016/j.laa.2008.03.003](https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.03.003) (cf. p. 39).

- [65] Claude GIBERT, Laurent BLANC, Patricio ALMEIDA, Xavier LEBLANC, Jean-Philippe OUSTY, Fabrice THOUVEREZ et Jean-Pierre LAÏNÉ. « Modal Tests and Analysis of a Radial Impeller at Rest : Influence of Surrounding Air on Damping » (juin 2012), p. 1121-1131. DOI : [10.1115/GT2012-69577](https://doi.org/10.1115/GT2012-69577) (cf. p. 159 sq., 165).
- [66] Thomas GMÜR. *Dynamique des structures : Analyse modale numérique*. 1^{re} éd. Lausanne, mar. 2009. ISBN : 978-2-88074-813-5 (cf. p. 37, 69, 73).
- [67] Paul GOLDMAN et Agnes MUSZYNSKA. « Rotor-to-stator, rub-related, thermal/mechanical effects in rotating machinery ». *Chaos, Solitons & Fractals* 5.9 (sept. 1995), p. 1579-1601. ISSN : 0960-0779. DOI : [10.1016/0960-0779\(94\)00165-M](https://doi.org/10.1016/0960-0779(94)00165-M) (cf. p. 16).
- [68] Michel GÉRADIN. *Théorie des vibrations*. Paris Milan Barcelone, 1993. ISBN : 2-225-83952-2 (cf. p. 69, 81).
- [69] R. J. GU et M. SHILLOR. « Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact ». *International Journal of Solids and Structures* 38.14 (avr. 2001), p. 2323-2333. ISSN : 0020-7683. DOI : [10.1016/S0020-7683\(00\)00121-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00121-9) (cf. p. 16).
- [70] S. GUGERCIN. « An iterative SVD-Krylov based method for model reduction of large-scale dynamical systems ». *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. Déc. 2005, p. 5905-5910. DOI : [10.1109/CDC.2005.1583106](https://doi.org/10.1109/CDC.2005.1583106) (cf. p. 53).
- [71] Isabelle GUILLOTEAU, Bernard PESEUX et Jérôme BONINI. « Modélisation du contact en implicite : Application à l'interaction rotor/stator ». *Revue Européenne des Eléments Finis* (2000). DOI : [10.1080/12506559.2000.10511444](https://doi.org/10.1080/12506559.2000.10511444) (cf. p. 72).
- [72] Nicolas GUÉRIN, Anders THORIN, Fabrice THOUVEREZ, Mathias LEGRAND et Patricio ALMEIDA. « Thermomechanical model reduction for efficient simulations of rotor-stator contact interaction ». *ASME Turbo Expo 2018 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. Oslo, Norway, juin 2018 (cf. p. 51).
- [73] R. J. GUYAN. « Reduction of stiffness and mass matrices ». *AIAA Journal* 3.2 (fév. 1965), p. 380-380. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/3.2874](https://doi.org/10.2514/3.2874) (cf. p. 40).
- [74] A. L. HALE et L. V. WARREN. « Concepts of a General Substructuring System for Structural Dynamics Analyses ». *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 107.1 (jan. 1985), p. 2-12. ISSN : 1048-9002. DOI : [10.1115/1.3274712](https://doi.org/10.1115/1.3274712) (cf. p. 38).
- [75] TMC HALLCREST. *Home Page | TMC Hallcrest*. URL : <http://www.tmchallcrest.com/> (visité le 16/04/2019) (cf. p. 164).
- [76] Temperature HBM. *Article : Temperature Compensation of Strain Gauges*. HBM. Mar. 2019. URL : <https://www.hbm.com/en/6725/article-temperature-compensation-of-strain-gauges/> (visité le 19/08/2019) (cf. p. 163).
- [77] Hans M. HILBERT, Thomas J. R. HUGHES et Robert L. TAYLOR. « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics ». *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 5.3 (juil. 1977), p. 283-292. ISSN : 1096-9845. DOI : [10.1002/eqe.4290050306](https://doi.org/10.1002/eqe.4290050306) (cf. p. 69).
- [78] W. C. HURTY. « Dynamic analysis of structural systems using component modes ». *AIAA Journal* 3.4 (1965), p. 678-685. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/3.2947](https://doi.org/10.2514/3.2947) (cf. p. 40).
- [79] Peter IREMAN, Anders KLARBRING et Niclas STRÖMBERG. « Finite element algorithms for thermoelastic wear problems ». *European Journal of Mechanics - A/Solids* 21.3 (2002), p. 423-440. ISSN : 0997-7538. DOI : [10.1016/S0997-7538\(02\)01208-1](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(02)01208-1) (cf. p. 21).

- [80] B. IRONS. « Structural eigenvalue problems - elimination of unwanted variables ». *AIAA Journal* 3.5 (mai 1965), p. 961-962. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/3.3027](https://doi.org/10.2514/3.3027) (cf. p. 40).
- [81] G. JACQUET-RICHARDET, M. TORKHANI, P. CARTRAUD, F. THOUVEREZ, T. NOURI BARANGER, M. HERRAN, C. GIBERT, S. BAGUET, P. ALMEIDA et L. PELETAN. « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application ». *Mechanical Systems and Signal Processing* 40.2 (nov. 2013), p. 401-420. ISSN : 0888-3270. DOI : [10.1016/j.ymsp.2013.05.010](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.05.010) (cf. p. 16).
- [82] Eric JAMES GRIMME. « Krylov Projection Methods For Model Reduction ». *PhD Thesis, University of Illinois* (1997), p. 213 (cf. p. 36, 38 sq., 61).
- [83] M. JEAN. « The non-smooth contact dynamics method ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3 (juil. 1999), p. 235-257. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00383-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00383-1) (cf. p. 72, 77 sqq.).
- [84] Irina KALASHNIKOVA, Bart van BLOEMEN WAANDERS, Srinivasan ARUNAJATESAN et Matthew BARONE. « Stabilization of projection-based reduced order models for linear time-invariant systems via optimization-based eigenvalue reassignment ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 272 (avr. 2014), p. 251-270. ISSN : 00457825. DOI : [10.1016/j.cma.2014.01.011](https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.01.011) (cf. p. 53).
- [85] F. KAMEIER et W. NEISE. « Experimental Study of Tip Clearance Losses and Noise in Axial Turbomachines and Their Reduction ». *Journal of Turbomachinery* 119.3 (juil. 1997), p. 460-471. ISSN : 0889-504X. DOI : [10.1115/1.2841145](https://doi.org/10.1115/1.2841145) (cf. p. 8).
- [86] Taehyoun KIM et John BUSSOLETTI. « An optimal reduced-order aeroelastic modeling based on a response-based modal analysis of unsteady CFD models ». *19th AIAA Applied Aerodynamics Conference*. 0 t. Fluid Dynamics and Co-located Conferences. Juin 2001. DOI : [10.2514/6.2001-1525](https://doi.org/10.2514/6.2001-1525) (cf. p. 50).
- [87] Cornelius LANZOS. « An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators ». *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 45.4 (oct. 1950), p. 255. ISSN : 0091-0635. DOI : [10.6028/jres.045.026](https://doi.org/10.6028/jres.045.026) (cf. p. 38 sq., 50, 53).
- [88] Tod A. LAURSEN. *Computational Contact and Impact Mechanics : Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Berlin Heidelberg, 2003. ISBN : 978-3-540-42906-7 (cf. p. 99).
- [89] Mathias LEGRAND. « Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion ». Thèse de doctorat. Nantes, France : Ecole Centrale de Nantes, 2005 (cf. p. 66, 71, 205).
- [90] Mathias LEGRAND, Alain BATAILLY, Benoît MAGNAIN, Patrice CARTRAUD et Christophe PIERRE. « Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines ». *Journal of Sound and Vibration* 331.11 (mai 2012), p. 2578-2601. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2012.01.017](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.01.017) (cf. p. 15, 71).
- [91] Mathias LEGRAND, Christophe PIERRE, Patrice CARTRAUD et Jean-Pierre LOMBARD. « Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction ». *Journal of Sound and Vibration* 319.1 (jan. 2009), p. 366-391. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.06.019](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.019) (cf. p. 15).
- [92] Remco I. LEINE et Nathan van de WOUW. « Non-smooth Analysis ». *Stability and Convergence of Mechanical Systems with Unilateral Constraints*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. 2008, p. 21-41. ISBN : 978-3-540-76974-3 978-3-540-76975-0. DOI : [10.1007/978-3-540-76975-0_2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-76975-0_2) (cf. p. 26).

- [93] Ren-Cang LI et Zhaojun BAI. « Structure-Preserving Model Reduction Using a Krylov Subspace Projection Formulation ». *Communications in Mathematical Sciences* 3.2 (juin 2005). Mathematical Reviews number (MathSciNet) MR2164197 , Zentralblatt MATH identifier 05035498, p. 179-199. ISSN : 1539-6746, 1945-0796 (cf. p. 49).
- [94] Andrea LUPINI et Bogdan EPUREANU. « A conditioning technique for projection-based reduced order models ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 349 (juin 2019). DOI : [10.1016/j.cma.2019.02.020](https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.02.020) (cf. p. 38, 53).
- [95] Richard H. MACNEAL. « A hybrid method of component mode synthesis ». *Computers & Structures* 1.4 (déc. 1971), p. 581-601. ISSN : 00457949. DOI : [10.1016/0045-7949\(71\)90031-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(71)90031-9) (cf. p. 41).
- [96] D. MARTINEZ, T. CARNE, D. GREGORY et A. MILLER. « Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis ». *25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. DOI : [10.2514/6.1984-941](https://doi.org/10.2514/6.1984-941) (cf. p. 42).
- [97] Markus B. MEINGAST, Alain BATAILLY, Mathias LEGRAND et Jean-Philippe OUSTY. « Investigation of Rotor-Casing Interactions in the Centrifugal Compressor of a Helicopter Engine ». Juin 2013, V07BT31A009 (cf. p. 116).
- [98] Georges Pierre MICHAILESKO. « Approximation des systèmes complexes par des modèles de dimension réduite ». Thèse d'état. Orsay : Université d'Orsay, avr. 1979 (cf. p. 48).
- [99] Marc P. MIGNOLET, Adam PRZEKOP, Stephen A. RIZZI et S. Michael SPOTTSWOOD. « A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures ». *Journal of Sound and Vibration* 332.10 (mai 2013), p. 2437-2460. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/j.jsv.2012.10.017](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.017) (cf. p. 48).
- [100] Antoine MILLECAMPS. « Interaction aube-carter : contribution de l'usure de l'abradable et de la thermomécanique sur la dynamique d'aube ». Thèse de doct. Lille, France : Université de Lille 1, 2010 (cf. p. 133, 205).
- [101] Antoine MILLECAMPS, Alain BATAILLY, Mathias LEGRAND et François GARCIN. « Snecma's Viewpoint on the Numerical and Experimental Simulation of Blade-Tip/Casing Unilateral Contacts ». *ASME Turbo Expo Conference*. Proceedings of the ASME Turbo Expo 2015. Montréal, Canada, juin 2015. DOI : [10.1115/GT2015-42682](https://doi.org/10.1115/GT2015-42682) (cf. p. 16).
- [102] Antoine MILLECAMPS, Jean-François BRUNEL, Philippe DUFRÉNOY, François GARCIN et Marco NUCCI. « Etude thermomécanique du contact aube-carter d'un turboréacteur et conséquences sur son excitation dynamique ». *AFM* (2011) (cf. p. 16).
- [103] Antoine MILLECAMPS, Jean-François BRUNEL, Philippe DUFRÉNOY, François GARCIN et Marco NUCCI. « Influence of Thermal Effects During Blade-Casing Contact Experiments » (jan. 2009), p. 855-862. DOI : [10.1115/DETC2009-86842](https://doi.org/10.1115/DETC2009-86842) (cf. p. 16).
- [104] B. MOORE. « Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction ». *IEEE Transactions on Automatic Control* 26.1 (fév. 1981), p. 17-32. ISSN : 0018-9286. DOI : [10.1109/TAC.1981.1102568](https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102568) (cf. p. 37).
- [105] J. J. MOREAU et P. D. PANAGIOTOPOULOS, éd. *Nonsmooth Mechanics and Applications*. Vienna, 1988. ISBN : 978-3-211-82066-7 978-3-7091-2624-0. DOI : [10.1007/978-3-7091-2624-0](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2624-0) (cf. p. 72, 77).
- [106] Nicolas MOËS et Ted BELYTSCHKO. « X-FEM, de nouvelles frontières pour les éléments finis ». *5e Colloque national en calcul des structures*. T. 11. Giens, France, mai 2001, p. 305 -318. DOI : [10.3166/reef.11.305-318](https://doi.org/10.3166/reef.11.305-318) (cf. p. 25).

- [107] Raghavendra MURTHY, X. Q. WANG, Andrew MATNEY et Marc P. MIGNOLET. « A Construction of Thermal Basis Functions for Coupled Structural - Thermal Reduced Order Models ». *58th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. DOI : [10.2514/6.2017-0179](https://doi.org/10.2514/6.2017-0179) (cf. p. 50).
- [108] Ph. NACHTERGAELE, D. J. RIXEN et A. M. STEENHOEK. « Efficient weakly coupled projection basis for the reduction of thermo-mechanical models ». *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Fourth International Conference on Advanced Computational Methods in ENgineering (ACOMEN 2008) 234.7 (août 2010), p. 2272-2278. ISSN : 0377-0427. DOI : [10.1016/j.cam.2009.08.116](https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.116) (cf. p. 49).
- [109] Alain NEVEU, Khalil EL-KHOURY et Bernard FLAMENT. « Simulation de la conduction non linéaire en régime variable : décomposition sur les modes de branche ». *International Journal of Thermal Sciences* 38.4 (avr. 1999), p. 289-304. ISSN : 1290-0729. DOI : [10.1016/S1290-0729\(99\)80095-7](https://doi.org/10.1016/S1290-0729(99)80095-7) (cf. p. 48).
- [110] Nathan M. NEWMARK. « A Method of Computation for Structural Dynamics ». *Journal of the Engineering Mechanics Division* 85.3 (1959), p. 67-94 (cf. p. 68, 72).
- [111] S. NITSCHKE, T. WOLLMANN, C. EBERT, T. BEHNISCH, A. LANGKAMP, T. LANG, E. JOHANN et M. GUDE. « An advanced experimental method and test rig concept for investigating the dynamic blade-tip/casing interactions under engine-like mechanical conditions ». *Wear* 422-423 (mar. 2019), p. 161-166. ISSN : 0043-1648. DOI : [10.1016/j.wear.2018.12.072](https://doi.org/10.1016/j.wear.2018.12.072) (cf. p. 15, 162).
- [112] S. R. NOVASCONE, B. W. SPENCER, J. D. HALES et R. L. WILLIAMSON. « Evaluation of coupling approaches for thermomechanical simulations ». *Nuclear Engineering and Design* 295 (déc. 2015), p. 910-921. ISSN : 0029-5493. DOI : [10.1016/j.nucengdes.2015.07.005](https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2015.07.005) (cf. p. 71).
- [113] Ruth M. ORRIS et M. PETYT. « A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures ». *Journal of Sound and Vibration* 33.2 (mar. 1974), p. 223-236. ISSN : 0022-460X. DOI : [10.1016/S0022-460X\(74\)80108-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80108-2) (cf. p. 44).
- [114] Abdelhakim OULEFKI. « Réduction de modèles thermiques par amalgame modal ». Thèse de doct. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, fév. 1993 (cf. p. 47).
- [115] C. PADOVA, M.G. DUNN, J. BARTON, K. TURNER, A. TURNER et D. DiTOMMASO. « Casing treatment and blade tip configuration effects on controlled gas turbine blade tip/shroud rubs at engine conditions ». *Proceedings of the ASME Turbo Expo*. T. 5. 2008, p. 261-276 (cf. p. 15).
- [116] Corso PADOVA, Michael DUNN, Jeffrey BARTON, Kevin TURNER et Tod STEEN. « Controlled Fan Blade Tip/Shroud Rubs at Engine Conditions ». 2011, p. 951-961. ISBN : 978-0-7918-5466-2. DOI : [10.1115/GT2011-45223](https://doi.org/10.1115/GT2011-45223) (cf. p. 15).
- [117] L. PAOLI et M. SCHATZMAN. « A Numerical Scheme for Impact Problems I : The One-Dimensional Case ». *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40.2 (jan. 2002), p. 702-733. ISSN : 0036-1429. DOI : [10.1137/S0036142900378728](https://doi.org/10.1137/S0036142900378728) (cf. p. 106).
- [118] Marie-Océane PARENT. « Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d'avion ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lyon, mar. 2015 (cf. p. 24).
- [119] G. PETERS et J. WILKINSON. « Inverse Iteration, Ill-Conditioned Equations and Newton's Method ». *SIAM Review* 21.3 (juil. 1979), p. 339-360. ISSN : 0036-1445. DOI : [10.1137/1021052](https://doi.org/10.1137/1021052) (cf. p. 39).
- [120] M. Sc L. POHLE, Dr-Ing Lars Panning-von SCHEIDT et Prof Dr-Ing Jörg WALLASCHEK. « Reduced order model of mistuned bladed disks using the Krylov subspace combined with the Craig-Bampton reduction ». *Blucher Mechanical Engineering Proceedings*. 10th World Congress on Computational Mechanics. T. 1. 2012, p. 899-908 (cf. p. 50).

- [121] Jing QIAN, Yi WANG, Hongjun SONG, Kapil PANT, Hume PEABODY, Jentung KU et Charles D. BUTLER. « Projection-Based Reduced-Order Modeling for Spacecraft Thermal Analysis ». *Journal of Spacecraft and Rockets* 52.3 (mar. 2015), p. 978-989. ISSN : 0022-4650. DOI : [10.2514/1.A33117](https://doi.org/10.2514/1.A33117) (cf. p. 37).
- [122] Zu-Qing QU. *Model Order Reduction Techniques*. London, 2004. ISBN : 978-1-84996-924-6 978-1-4471-3827-3. DOI : [10.1007/978-1-4471-3827-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3827-3) (cf. p. 34, 37, 43).
- [123] S. RUBIN. « Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis ». *AIAA Journal* 13.8 (août 1975), p. 995-1006. ISSN : 0001-1452. DOI : [10.2514/3.60497](https://doi.org/10.2514/3.60497) (cf. p. 42).
- [124] Axel RUHE. « Rational Krylov sequence methods for eigenvalue computation ». *Linear Algebra and its Applications* 58 (Supplement C avr. 1984), p. 391-405. ISSN : 0024-3795. DOI : [10.1016/0024-3795\(84\)90221-0](https://doi.org/10.1016/0024-3795(84)90221-0) (cf. p. 39).
- [125] Youcef SAAD et Martin SCHULTZ. « GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems ». *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 7.3 (juil. 1986), p. 856-869. ISSN : 0196-5204. DOI : [10.1137/0907058](https://doi.org/10.1137/0907058) (cf. p. 38).
- [126] Jean SALENÇON. *Mécanique des milieux continus : Thermoélasticité*. Jan. 2008. ISBN : 978-2-7302-1419-3 (cf. p. 18).
- [127] Nicolas SALVAT, Alain BATAILLY et Mathias LEGRAND. « Modeling of Abradable Coating Removal in Aircraft Engines Through Delay Differential Equations ». *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 135.10 (août 2013), p. 102102-102102. ISSN : 0742-4795. DOI : [10.1115/1.4024959](https://doi.org/10.1115/1.4024959) (cf. p. 15).
- [128] Wil H. A. SCHILDERS et Agnieszka LUTOWSKA. « A Novel Approach to Model Order Reduction for Coupled Multiphysics Problems ». *Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction*. MS&A - Modeling, Simulation and Applications. 2014, p. 1-49. ISBN : 978-3-319-02089-1 978-3-319-02090-7. DOI : [10.1007/978-3-319-02090-7_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02090-7_1) (cf. p. 49).
- [129] P. SCHMIECHEN. « Travelling Wave Speed Coincidence ». Thèse de doct. London, England : Imperial college of London, 1997 (cf. p. 9, 11 sq., 14, 132, 140, 158, 168).
- [130] Alexander SEITZ, Wolfgang A. WALL et Alexander POPP. « A computational approach for thermo-elasto-plastic frictional contact based on a monolithic formulation using non-smooth nonlinear complementarity functions ». *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 5.1 (mar. 2018), p. 5. ISSN : 2213-7467. DOI : [10.1186/s40323-018-0098-3](https://doi.org/10.1186/s40323-018-0098-3) (cf. p. 103).
- [131] Pasquale M SFORZA. *Theory of Aerospace Propulsion*. 2012. ISBN : 978-1-85617-912-6. DOI : [10.1016/C2009-0-61051-5](https://doi.org/10.1016/C2009-0-61051-5) (cf. p. 7).
- [132] L. SHAMPINE et C. GEAR. « A User's View of Solving Stiff Ordinary Differential Equations ». *SIAM Review* 21.1 (jan. 1979), p. 1-17. ISSN : 0036-1445. DOI : [10.1137/1021001](https://doi.org/10.1137/1021001) (cf. p. 72 sq.).
- [133] C. P. SHORE. *Reduction method for thermal analysis of complex aerospace structures*. Jan. 1985 (cf. p. 47).
- [134] B. F. SHORR. « Wave Propagation in an Inelastic Rod ». *The Wave Finite Element Method*. Foundations of Engineering Mechanics. 2004, p. 73-96. ISBN : 978-3-642-53605-2 978-3-540-44579-1. DOI : [10.1007/978-3-540-44579-1_4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-44579-1_4) (cf. p. 25).
- [135] Marari P. SINGH, John J. VARGO, Donald M. SCHIFFER et James D. DELLO. « Safe Diagram - A Design And Reliability Tool For Turbine Blading. » (1988). DOI : <https://doi.org/10.21423/R1B673> (cf. p. 242).

- [136] Niclas STRÖMBERG. « Finite element treatment of two-dimensional thermoelastic wear problems ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177.3 (juil. 1999), p. 441-455. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00392-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00392-2) (cf. p. 21).
- [137] Thomas R STROBRIDGE, John C MOULDER et Alan F CLARK. *Titanium combustion in turbine engines*. NBS IR 79-1616. Gaithersburg, MD : National Bureau of Standards, 1979. DOI : [10.6028/NBS.IR.79-1616](https://doi.org/10.6028/NBS.IR.79-1616) (cf. p. 15).
- [138] D. L. THOMAS. « Dynamics of rotationally periodic structures ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.1 (jan. 1979), p. 81-102. ISSN : 1097-0207. DOI : [10.1002/nme.1620140107](https://doi.org/10.1002/nme.1620140107) (cf. p. 44).
- [139] Duc-Minh TRAN. « Component mode synthesis methods using partial interface modes : Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry ». *Computers & Structures* 87.17 (sept. 2009), p. 1141-1153. ISSN : 0045-7949. DOI : [10.1016/j.compstruc.2009.04.009](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.04.009) (cf. p. 48).
- [140] Alexandra VALDESCAULT, Alain BATAILLY et Simon JONES. *Interpolation et approximation de données à l'aide de courbes et surfaces paramétriques de type B-splines*. Août 2012 (cf. p. 109).
- [141] Roger VALID et Roger OHAYON. « Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques » Theory and dynamic and static calculation of cyclic symmetry structures ». *La Recherche aérospatiale* 4 (1985), p. 251-263. ISSN : 0034-1223 (cf. p. 44 sq.).
- [142] Karen E. WILLCOX. « Reduced-order aerodynamic models for aeroelastic control of turbomachines ». These de doctorat. Massachusetts Institute of Technology, 2000 (cf. p. 38).
- [143] Peter WRIGGERS et Tod A. LAURSEN, éd. *Computational contact mechanics*. CISM courses and lectures no. 498. Wien ; New York, 2007. ISBN : 978-3-211-77297-3 (cf. p. 22 sq., 26, 30).
- [144] Peter WRIGGERS et Christian MIEHE. « Contact constraints within coupled thermomechanical analysis—A finite element model ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 113.3 (mar. 1994), p. 301-319. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/0045-7825\(94\)90051-5](https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)90051-5) (cf. p. 16, 21, 23, 25, 75).
- [145] Carlos YOONG, Anders THORIN et Mathias LEGRAND. « The Wave Finite Element Method applied to a one-dimensional linear elastodynamic problem with unilateral constraints ». *The ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*. Boston, United States, août 2015. DOI : [10.1115/DETC2015-46919](https://doi.org/10.1115/DETC2015-46919) (cf. p. 25).
- [146] S. ZIAEI-RAD, E. KOUCHAKI et M. IMREGUN. « Thermoelastic Modeling of Rotor Response With Shaft Rub ». *Journal of Applied Mechanics* 77.6 (nov. 2010), p. 061010-12. DOI : [10.1115/1.4000904](https://doi.org/10.1115/1.4000904) (cf. p. 16).
- [147] Olek C. ZIENKIEWICZ et Robert L. TAYLOR. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 7 édition. Amsterdam ; Boston, nov. 2013. ISBN : 978-1-85617-634-7 (cf. p. 30, 66, 69 sq., 72).
- [148] Elena ZUKOWSKI, J. WILDE, E. B. RUDNYI et Jan G. KORVINK. « Model reduction for thermo-mechanical simulation of packages ». *THERMINIC 2005*. Submitted on behalf of EDA Publishing Association (<http://irevues.inist.fr/handle/2042/5920>). Belgirate, Lago Maggiore, Italy, sept. 2005, p. 134-138 (cf. p. 50).

Annexe A

Équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles sont des équations de la forme générale

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf = h, \quad (\text{A.1})$$

elles permettent de décrire de nombreuses relations physiques comme l'équation de la chaleur, l'équation des ondes, la conservation de la masse etc. Pour cette présentation des EDPs, on se concentre sur les EDPs linéaires du second ordre et à deux variables (dans ce cas x et y), soit les EDPs de la forme

$$a_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + b_x \frac{\partial f}{\partial x} + b_y \frac{\partial f}{\partial y} + cf = h. \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas de l'équation (A.2), on note \mathbf{A} la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{xx} & \frac{a_{xy}}{2} \\ \frac{a_{xy}}{2} & a_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

et on appelle le déterminant d de \mathbf{A}

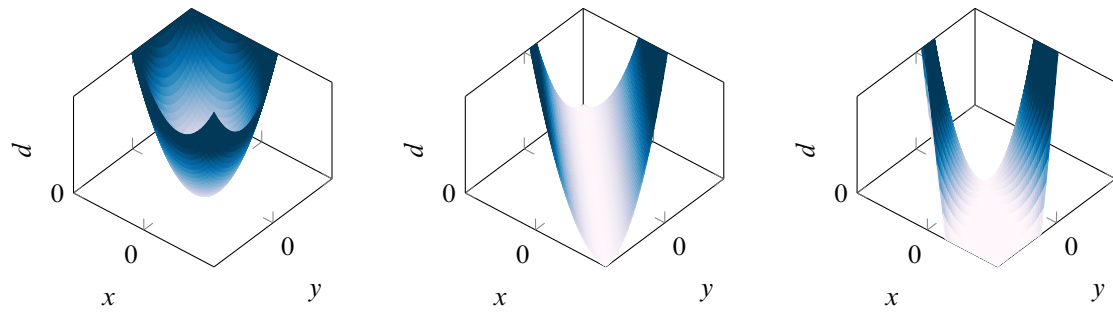
$$d = a_{xy}^2 - 4a_{xx}a_{yy} \quad (\text{A.4})$$

le déterminant de l'équation aux dérivées partielles (A.2). En fonction de la valeur de ce déterminant, l'équation (A.2) peut être de trois types. On parle d'équation elliptique si $d < 0$, parabolique si $d = 0$ ou hyperbolique si $d > 0$. Ces considérations sont généralisables aux systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre et à n variables de sorte que le déterminant est associé à la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Le système d'équations est

- elliptique si toutes les valeurs propres de \mathbf{A} sont toutes de même signe, et non nulles ;
- parabolique si toutes les valeurs propres de \mathbf{A} sont toutes de même signe, sauf une qui est nulle ;
- hyperbolique si toutes les valeurs propres de \mathbf{A} sont de même signe sauf une de signe opposé non nulle.

De manière générale, les EDPs représentant des phénomènes dissipatifs (équation de la chaleur) sont paraboliques et les EDPs associées à des phénomènes propagatifs hyperboliques (équation des ondes), alors que les équations d'équilibre (conservation de la masse) sont des EDPs elliptiques.

La figure A.1 illustre les différentes formes du déterminant d en fonction des valeurs des coefficients de l'EDP considérée, dans le cas particulier ($a_{xx} = a_{yy} = 1$). On constate clairement que pour



(a) $a_{xy} = 1$, equation elliptique (b) $a_{xy} = 2$, equation parabolique (c) $a_{xy} = 4$, equation hyperbolique

FIGURE A.1 – Forme du déterminant (A.4) pour $a_{xx} = a_{yy} = 1$ et différentes valeurs de a_{xy}

$a_{xy} = 1$, la surface est un parabolôïde elliptique, pour $a_{xy} = 2$ un cylindre parabolique et pour $a_{xy} = 4$ un parabolôïde hyperbolique.

Annexe B

Méthode de Craig–Hale Rationnelle

Cette annexe décrit le développement complet de l'expansion en série de Taylor de l'équilibre (III.60), que l'on rappelle ici

$$\Phi_{ib} = -(\mathbf{C}_{ii}s + \mathbf{K}_{ii})^{-1}(\mathbf{C}_{ib}s + \mathbf{K}_{ib}), \quad (\text{B.1})$$

de même que les notations précédemment définies $\mathbf{A}_{ii} = (\mathbf{C}_{ii}s_0 + \mathbf{K}_{ii})$, $\mathbf{A}_{ib} = (\mathbf{C}_{ib}s_0 + \mathbf{K}_{ib})$, $\mathbf{H}_{ib}^0 = \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{A}_{ib}$, $\mathbf{H}_{ib}^1 = \mathbf{A}_{ii}^{-1}(\mathbf{C}_{ii}\mathbf{H}_{ib}^0 - \mathbf{C}_{ib})$ et $\mathbf{H}_{ii}^2 = \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ii}$. En introduisant les termes dépendants de s_0 , on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{ib} &= -[\mathbf{C}_{ii}s_0 + \mathbf{K}_{ii} - \mathbf{C}_{ii}(s_0 - s)]^{-1}[\mathbf{C}_{ib}s_0 + \mathbf{K}_{ib} - \mathbf{C}_{ib}(s_0 - s)] \\ &= -[\mathbf{A}_{ii} - \mathbf{C}_{ii}(s_0 - s)]^{-1}[\mathbf{A}_{ib} - \mathbf{C}_{ib}(s_0 - s)] \\ &= -[\mathbf{A}_{ii}(\mathbf{I}_{ii} - \mathbf{H}_{ii}^2(s_0 - s))]^{-1}[\mathbf{A}_{ib} - \mathbf{C}_{ib}(s_0 - s)] \\ &= -[\mathbf{I}_{ii} - \mathbf{H}_{ii}^2(s_0 - s)]^{-1}[\mathbf{H}_{ib}^0 - \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib}(s_0 - s)] \\ &= -\left(\mathbf{I}_{ii} + \sum_{k=1}^{\ell} [\mathbf{H}_{ii}^2(s_0 - s)]^k + o((s_0 - s)^\ell)\right)[\mathbf{H}_{ib}^0 - \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib}(s_0 - s)], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

qui se développe en

$$\Phi_{ib} = -[\mathbf{H}_{ib}^0 - \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib}(s_0 - s)] - \sum_{k=1}^{\ell} [\mathbf{H}_{ii}^2(s_0 - s)]^k \mathbf{H}_{ib}^0 + \sum_{k=1}^{\ell-1} (\mathbf{H}_{ii}^2)^k (s_0 - s)^{k+1} \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib} + o((s_0 - s)^\ell). \quad (\text{B.3})$$

Comme tout facteur d'un terme $(s_0 - s)^{\ell+1}$ est négligeable devant $o((s_0 - s)^\ell)$, on élimine le terme pour $k = \ell$ dans la seconde somme

$$\Phi_{ib} = -[\mathbf{H}_{ib}^0 - \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib}(s_0 - s)] - \sum_{k=1}^{\ell} [\mathbf{H}_{ii}^2(s_0 - s)]^k \mathbf{H}_{ib}^0 + \sum_{k=2}^{\ell} (\mathbf{H}_{ii}^2)^{k-1} (s_0 - s)^k \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib} + o((s_0 - s)^\ell), \quad (\text{B.4})$$

et puisque par définition $\mathbf{H}_{ii}^2{}^0 = \mathbf{I}_{ii}$

$$\Phi_{ib} = -\mathbf{H}_{ib}^0 - \sum_{k=1}^{\ell} [\mathbf{H}_{ii}^2(s_0 - s)]^k \mathbf{H}_{ib}^0 + \sum_{k=1}^{\ell} (\mathbf{H}_{ii}^2)^{k-1} (s_0 - s)^k \mathbf{A}_{ii}^{-1}\mathbf{C}_{ib} + o((s_0 - s)^\ell). \quad (\text{B.5})$$

Une fois rassemblées les deux sommes, on obtient

$$\Phi_{\text{ib}} = -\mathbf{H}_{\text{ib}}^0 - \sum_{k=1}^{\ell} (\mathbf{H}_{\text{ii}}^2)^{k-1} (\mathbf{H}_{\text{ii}}^2 \mathbf{H}_{\text{ib}}^0 - \mathbf{A}_{\text{ii}}^{-1} \mathbf{C}_{\text{ib}}) (s_0 - s)^k + o((s_0 - s)^\ell), \quad (\text{B.6})$$

et enfin, comme $\mathbf{H}_{\text{ii}}^2 \mathbf{H}_{\text{ib}}^0 - \mathbf{A}_{\text{ii}}^{-1} \mathbf{C}_{\text{ib}} = \mathbf{A}_{\text{ii}}^{-1} \mathbf{C}_{\text{ii}} \mathbf{A}_{\text{ii}}^{-1} \mathbf{A}_{\text{ib}} - \mathbf{A}_{\text{ii}}^{-1} \mathbf{C}_{\text{ib}} = \mathbf{A}_{\text{ii}}^{-1} (\mathbf{C}_{\text{ii}} \mathbf{H}_{\text{ib}}^0 - \mathbf{C}_{\text{ib}}) = \mathbf{H}_{\text{ib}}^1$

$$\Phi_{\text{ib}} = -\mathbf{H}_{\text{ib}}^0 - \sum_{k=1}^{\ell} (\mathbf{H}_{\text{ii}}^2)^{k-1} (\mathbf{H}_{\text{ib}}^1) (s_0 - s)^k + o((s_0 - s)^\ell) \quad (\text{B.7})$$

L'algorithme B.1 décrit la méthodologie de construction de la base de réduction Rational Craig–Hale dans le cas d'un système du premier ordre.

ALGORITHME B.1 – Algorithme de construction de la base de réduction RCH

Données : Vecteur des p points d'expansion s_0 ; Ordre d'expansion ℓ

Calcul des blocs de modes de Krylov

pour $n \leftarrow 1$ **à** p **faire**

$$\mathbf{A}_{\text{ii}}^0 \leftarrow (\mathbf{C}_{\text{ii}} \mathbf{s}_0(n) + \mathbf{K}_{\text{ii}})$$

$$\mathbf{H}_{\text{ib}}^0 \leftarrow (\mathbf{A}_{\text{ii}}^0)^{-1} (\mathbf{C}_{\text{ib}} \mathbf{s}_0(n) + \mathbf{K}_{\text{ib}})$$

$$\mathbf{M}_1^{(n)} \leftarrow -\mathbf{H}_{\text{ib}}^0 + \mathbf{K}_{\text{ii}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{ib}}$$

si $\ell \geq 1$ **alors**

$$\mathbf{H}_{\text{ib}}^1 \leftarrow (\mathbf{A}_{\text{ii}}^0)^{-1} (\mathbf{C}_{\text{ii}} \mathbf{H}_{\text{ib}}^0 - \mathbf{C}_{\text{ib}})$$

$$\mathbf{M}_2^{(n)} \leftarrow -\mathbf{H}_{\text{ib}}^1$$

si $\ell \geq 2$ **alors**

$$\mathbf{M}_3^{(n)} = -\mathbf{A}_{\text{ii}}^{-1} (\mathbf{C}_{\text{ii}} \mathbf{H}_{\text{ib}}^1)$$

pour $k \leftarrow 3$ **à** ℓ **faire**

$$\mathbf{M}_{k+1}^{(n)} \leftarrow -\mathbf{A}_{\text{ii}}^{-1} (\mathbf{C}_{\text{ii}} (-\mathbf{M}_k^{(n)}))$$

Assemblage des blocs

$$\Phi_{\text{im}} \leftarrow [\tilde{\mathbf{M}}_1^{(1)} \mathbf{M}_2^{(1)} \dots \mathbf{M}_\ell^{(1)} \dots \tilde{\mathbf{M}}_1^{(p)} \mathbf{M}_2^{(p)} \dots \mathbf{M}_\ell^{(p)}]$$

Orthogonalisation de Φ_{im}

$$\Phi_{\text{im}} \leftarrow \text{orth}(\Phi_{\text{im}})$$

Résultat : Base de réduction Φ_{im}

Annexe C

Modèle de poutre thermoélastique en traction compression

Cette annexe décrit la construction du modèle éléments finis d'une poutre thermoélastique en traction compression encastrée sur à une de ses extrémités.

```
1 %% Generation du modele de poutre thermoelastique 1D
2 % Initialisation du conteneur des parametres de la poutre
3 Parametres.Poutre = struct();
4 % Longueur totale
5 Parametres.Poutre.Ltot = 30e-2;
6 % Section droite
7 Parametres.Poutre.A = (1e-3)^2;
8 % Module d'Young
9 Parametres.Poutre.E = 110*10^9;
10 % Densite du materiau
11 Parametres.Poutre.rho = 4500;
12 % Conductivite thermique
13 Parametres.Poutre.lambda = 3.35;
14 % Capacite thermique
15 Parametres.Poutre.c = 585;
16 % Coefficient de couplage thermomecanique
17 Parametres.Poutre.couplage = 0*-4.5e-7;
18 % Coefficient d'amortissement de Rayleigh (raideur)
19 Parametres.Poutre.amort = 1e-6;
20
21 % Nombre de noeuds de la poutre
22 Parametres.Poutre.n_noeuds = 21;
23 % Nombre de degres de liberte mecaniques (deplacements axiaux)
24 Parametres.Poutre.n_ddl_u = Parametres.Poutre.n_noeuds;
25 % Nombre de degres de liberte thermiques (temperatures nodales)
26 Parametres.Poutre.n_ddl_t = Parametres.Poutre.n_noeuds;
27 % Nombre total de degres de liberte
28 Parametres.Poutre.n_ddl = Parametres.Poutre.n_ddl_u+Parametres.
    Poutre.n_ddl_t;
29 % Longueur des elements (equirepartie)
30 Parametres.Poutre.L_el = Parametres.Poutre.Ltot./Parametres.Poutre.
    n_noeuds;
```

```

31 % Position des noeuds au repos
32 Parametres.Poutre.x_noeuds = Parametres.Poutre.L_el*(0:1:Parametres
    .Poutre.n_noeuds-1);
33 % Nombre de ddls mecaniques apres encastrement
34 Parametres.Poutre.n_u = Parametres.Poutre.n_ddl_u-1;
35 % Nombre de ddls thermiques apres encastrement
36 Parametres.Poutre.n_t = Parametres.Poutre.n_ddl_t-1;
37
38 %% Matrices elementaires
39
40 % Forme des matrices elementaires
41 % Raideur
42 forme_raideur = [[1 -1];[-1 1]];
43 % Masse
44 forme_masse = [[1 0.5];[0.5 1]];
45
46 % Matrices elementaires - raideur
47 Parametres.Poutre.Kel_uu = Parametres.Poutre.E*Parametres.Poutre.A/
    Parametres.Poutre.L_el*forme_raideur;
48 Parametres.Poutre.Kel_ut = Parametres.Poutre.couplage*Parametres.
    Poutre.Kel_uu;
49 Parametres.Poutre.Kel_tt = Parametres.Poutre.lambda*Parametres.
    Poutre.A/Parametres.Poutre.L_el*forme_raideur;
50
51 % Matrices elementaires - amortissement
52 Parametres.Poutre.Cel_uu = Parametres.Poutre.amort*Parametres.
    Poutre.Kel_uu;
53 Parametres.Poutre.Cel_tt = Parametres.Poutre.c*Parametres.Poutre.
    rho*Parametres.Poutre.A*Parametres.Poutre.L_el*forme_masse;
54
55 % Matrices elementaires - masse
56 Parametres.Poutre.Mel_uu = Parametres.Poutre.rho*Parametres.Poutre.
    A*Parametres.Poutre.L_el*forme_masse;
57
58 %% Assemblage
59
60 % Matrice de raideur generalisee
61 Parametres.Poutre.K0 = zeros(Parametres.Poutre.n_ddl);
62 for i = 1:Parametres.Poutre.n_noeuds-1
63     vec_iu = [i i+1];
64     vec_it = Parametres.Poutre.n_ddl_u + vec_iu;
65     Parametres.Poutre.K0(vec_iu,vec_iu) = Parametres.Poutre.Kel_uu+
        Parametres.Poutre.K0(vec_iu,vec_iu);
66     Parametres.Poutre.K0(vec_iu,vec_it) = Parametres.Poutre.Kel_ut+
        Parametres.Poutre.K0(vec_iu,vec_it);
67     Parametres.Poutre.K0(vec_it,vec_it) = Parametres.Poutre.Kel_tt+
        Parametres.Poutre.K0(vec_it,vec_it);
68 end
69 % Matrice d'amortissement generalise

```

```
70 Parametres.Poutre.C0 = zeros(Parametres.Poutre.n_ddl);
71 for i = 1:Parametres.Poutre.n_noeuds-1
72     vec_iu = [i i+1];
73     vec_it = Parametres.Poutre.n_ddl_u + vec_iu;
74     Parametres.Poutre.C0(vec_iu,vec_iu) = Parametres.Poutre.Cel_uu+
        Parametres.Poutre.C0(vec_iu,vec_iu);
75     Parametres.Poutre.C0(vec_it,vec_it) = Parametres.Poutre.Cel_tt+
        Parametres.Poutre.C0(vec_it,vec_it);
76 end
77 % Matrice de masse generalise
78 Parametres.Poutre.M0 = zeros(Parametres.Poutre.n_ddl);
79 for i = 1:Parametres.Poutre.n_noeuds-1
80     vec_iu = [i i+1];
81     Parametres.Poutre.M0(vec_iu,vec_iu) = Parametres.Poutre.Mel_uu+
        Parametres.Poutre.M0(vec_iu,vec_iu);
82 end
83
84 %% Encastrement du noeud 1
85 % Vecteur des degres de liberte restants
86 Parametres.Poutre.x_lib = [2:Parametres.Poutre.n_ddl_u Parametres.
    Poutre.n_ddl_u+2:Parametres.Poutre.n_ddl];
87 % Matrices avec prise en compte des ddls encastres
88 Parametres.Poutre.M = Parametres.Poutre.M0(Parametres.Poutre.x_lib,
    Parametres.Poutre.x_lib);
89 Parametres.Poutre.C = Parametres.Poutre.C0(Parametres.Poutre.x_lib,
    Parametres.Poutre.x_lib);
90 Parametres.Poutre.K = Parametres.Poutre.K0(Parametres.Poutre.x_lib,
    Parametres.Poutre.x_lib);
```


Annexe D

Stabilité de l'algorithme de Carpenter thermomécanique

Cette annexe décrit une étude de stabilité du schéma de différences finies centrées sur lequel repose la méthode de Carpenter [43] dans le cas d'un problème de thermique. Ce schéma n'a pas été conçu au départ pour une telle utilisation. On montre ici que le schéma est inconditionnellement instable.

L'utilisation du schéma de Carpenter impose $\beta = 0$ nous allons maintenant étudier le domaine de stabilité du schéma de Carpenter en fonction du pas de temps et de la valeur de α . Pour $\beta = 0$, le schéma devient

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\alpha}{h} \mathbf{C} \right] \mathbf{x}_{n+1} &= \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \mathbf{f}_n + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \mathbf{f}_{n-1} \\ &+ \left[\frac{2\mathbf{M}}{h^2} + \frac{(2\alpha - 1)\mathbf{C}}{h} - \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_n \\ &- \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{(\alpha - 1)\mathbf{C}}{h} + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Que l'on notera

$$\left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\alpha \mathbf{C}}{h} \right] \mathbf{x}_{n+1} = \tilde{\mathbf{f}}_n \quad (\text{D.2})$$

par souci de légèreté.

Si on s'intéresse à une évolution purement thermique du système, soit $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, la matrice de monodromie du système s'écrit

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \left[\frac{(2\alpha - 1)\mathbf{I}}{\alpha} - (1/h) \left(\frac{1}{2\alpha} + 1 \right) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \right] & - \left[\frac{(\alpha - 1)\mathbf{I}}{\alpha} + (1/h) \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \right] \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

La résolution du problème aux valeurs propres de cette matrice consiste à trouver les solutions de $|\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{I}| = 0$. Comme on peut diagonaliser $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}$ dans une base de vecteurs propres, et que le déterminant d'une matrice est invariant par changement de base, on peut écrire

$$|\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{I}| = \prod_i -\lambda \left[\frac{(2\alpha - 1)}{\alpha} - \lambda - (1/h) \left(\frac{1}{2\alpha} + 1 \right) \tau_i \right] + \left[\frac{(\alpha - 1)}{\alpha} + (1/h) \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \tau_i \right] \quad (\text{D.4})$$

Ainsi, pour un τ_i connu, les solutions du problème aux valeurs propres sont les racines du polynôme P tel que :

$$P(x) = x^2 - \left(\frac{(2\alpha - 1)}{\alpha} - (1/h) \left(\frac{1}{2\alpha} + 1 \right) \tau_i \right) x + \left(\frac{(\alpha - 1)}{\alpha} + (1/h) \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \tau_i \right). \quad (\text{D.5})$$

Dans le cas $\alpha = 1/2$, utilisé pour retrouver le schéma de différences finies centrées, on a

$$P(x) = x^2 + (2\tau_i/h)x + 1. \quad (\text{D.6})$$

On peut facilement montrer que quelle que soit la valeur de h choisie, on a alors $|\lambda| \geq 1$, ce qui au mieux ne permet pas de conclure quand à la stabilité du schéma et au pire, assure la divergence du système. En pratique, le cas $\alpha = 1/2$ est proscrit pour la résolution d'un problème thermomécanique. Pour $\alpha > 1/2$ le schéma est soumis à une stabilité conditionnelle, comme dans le cas purement mécanique.

Annexe E

Notions d'analyse convexe

Sous-différentielle

La sous-différentielle en un point $x \in K$ d'une fonction convexe $f(\bullet)$ est l'ensemble des pentes de toutes les droites passant par $f(x)$ et qui minorent f . Dans le cas d'une fonction à valeurs scalaires, la sous-différentielle est l'ensemble des réels s tels que

$$f(y) - f(x) \geq s(y - x). \quad (\text{E.1})$$

Dans le cas d'une fonctions à valeurs vectorielles

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{s}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (\text{E.2})$$

Cette définition est illustrée par la figure E.1 sur une fonction linéaire par morceaux.

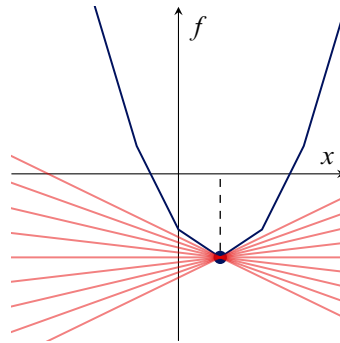


FIGURE E.1 – Illustration de la notion de sous-différentielle. Sous-différentielle (—) à une fonction convexe (—).

Fonction indicatrice

La fonction indicatrice ψ , aussi appelée indicatrice, d'un ensemble K est définie par

$$\psi_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K. \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

$$(\text{E.4})$$

Cette fonction est caractérisée par une forte discontinuité à la frontière ∂K de K , ce qui la rend non-différentiable sur celle-ci.

Dans le cas où l'ensemble K est \mathbb{R}^+ cette fonction est tout à fait semblable à l'évolution des efforts

normaux de contact dans le cas de conditions de contact unilatéral, illustrées en figure II.3. Cette fonction indicatrice admet une sous-différentielle en 0 comme le montre la figure E.2. Cette sous-différentielle,

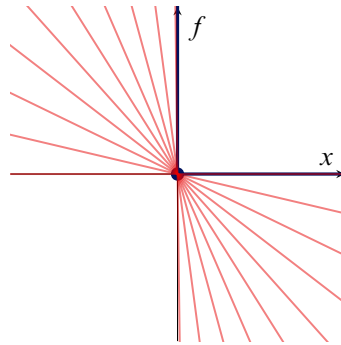


FIGURE E.2 – Sous-différentielle (—) à la fonction indicatrice de \mathbb{R}^+ (—) en 0.

notée $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}$ est définie par

$$\partial\psi_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x > 0 \\]-\infty, 0] & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

$$(\text{E.6})$$

Cône tangent

La définition d'un cône tangent est donnée dans [4, §3.5]. Pour un ensemble donné K , le cône tangent à K évalué en x s'exprime

$$\mathcal{T}_K(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x \in \overset{\circ}{K} \\ \mathbb{R}^- & \text{si } x = \max(K) \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } x = \min(K). \end{cases} \quad (\text{E.7a})$$

$$(\text{E.7b})$$

$$(\text{E.7c})$$

où $\overset{\circ}{K}$ représente l'intérieur de K , soit K privé de sa frontière. On peut appliquer cette définition pour déterminer le cône tangent à \mathbb{R}^+ évalué en x , défini par

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x > 0 \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (\text{E.8a})$$

$$(\text{E.8b})$$

Cône normal

Le cône normal $\mathcal{N}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+}(x)}(y)$, soit le cône normal au cône tangent à \mathbb{R}^+ évalué en x est défini par

$$\mathcal{N}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^+}(x)}(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x > 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \mathbb{R}^- & \text{si } x = 0 \text{ et } y \leq 0. \end{cases} \quad (\text{E.9a})$$

$$(\text{E.9b})$$

$$(\text{E.9c})$$

Informations complémentaires

Pour plus de précisions concernant les concepts utilisés en analyse convexe, le lecteur est invité à consulter [2], où de nombreux documents de formation et des articles sont disponibles.

Annexe F

Outils d'aide à la conception des roues aubagées

Diagramme de Campbell

Le diagramme de Campbell est un tracé des fréquences propres d'une structure en fonction de la vitesse de rotation. Ce diagramme est couramment utilisé comme premier moyen d'évaluer la conceptions de roues aubagées. En effet, il permet de détecter la présence de coïncidences fréquentielles entre des excitations synchrones à la vitesse de rotation (les harmoniques de la vitesse de rotation) généralement issues des écoulements internes dans les moteurs, et des modes de la structure tournante. Ce diagramme est relativement conservatif, car il ne tient pas compte des formes de excitations et des modes, mais seulement de leurs fréquences respectives. Un exemple de diagramme de Campbell pour une roue aubagée à quatre secteurs est présenté en figure F.1.

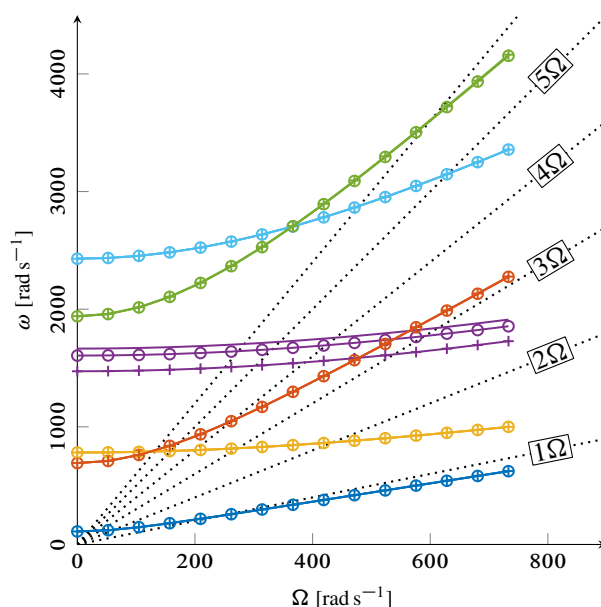


FIGURE F.1 – Diagramme de Campbell. Modes de la roue aubagée à 0 (—), 1 (⊕), et 2 (⊕) diamètres, harmoniques de la vitesse de rotation (⋯).

Diagramme SAFE

Le diagramme SAFE [135] pour *Singh's Advanced Frequency Evaluation* est une extension du diagramme de Campbell tenant compte non seulement des coïncidences fréquentielles mais aussi spatiales entre des excitations extérieures, principalement d'origine aérodynamique, et les modes propres d'une structure. Ce diagramme montre aujourd'hui certaines limites, lors de l'étude de structures présentant du désaccordage [6]. En effet, dans ce type de situation, la réponse spatiale autour d'un mode présente typiquement plusieurs ondes à diamètres au lieu d'un harmonique pur.

Un diagramme SAFE d'une roue à dix secteurs est tracé en figure F.2 pour trois vitesses de rotation de la roue : 90 %, 100 % et 110 % de la vitesse nominale. Celui-ci met par exemple en évidence une excitation probable du mode à trois diamètres de la première famille modale par l'harmonique 3 de la vitesse de rotation. Il en va de même pour le mode à quatre diamètres de la troisième famille et l'harmonique 16 de la vitesse de rotation. À l'inverse, les modes à deux diamètres des première et troisième familles modales sont peu susceptibles d'être excités, en l'absence de coïncidence non seulement fréquentielle, mais aussi spatiale avec les harmoniques de la vitesse de rotation.

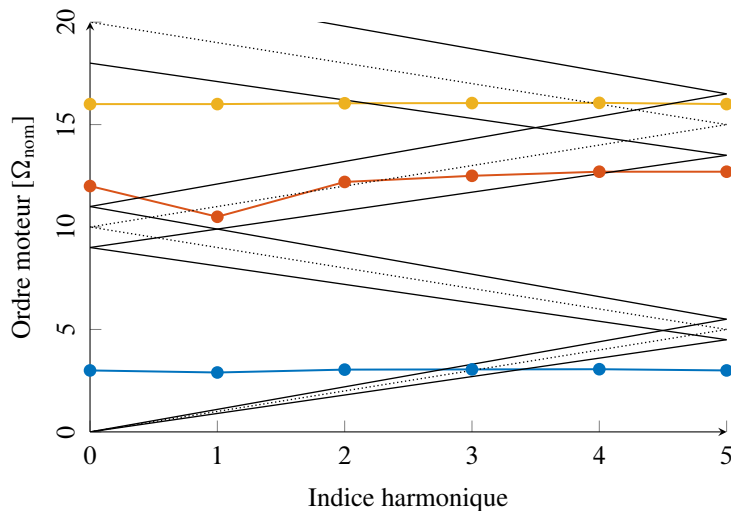


FIGURE F.2 – Diagramme SAFE. Modes de la roue aubagée (●).

Liste des publications personnelles

Reuves internationales avec comité de lecture

- Nicolas Guérin, Anders Thorin, Fabrice Thouverez, Mathias Legrand, Patricio Almeida. Thermo-mechanical model reduction for efficient simulations of rotor-stator contact interaction. *J. Eng. Gas Turbines Power* 141(2), 02-2019, Paper No : GTP-18-1368. [hal-01713849](#)
- Anders Thorin, Nicolas Guérin, Mathias Legrand, Fabrice Thouverez, Patricio Almeida. Nonsmooth thermoelastic simulations of blade-casing contact interactions. *J. Eng. Gas Turbines Power* 141(2), 02-2019, Paper No : GTP-18-1384. [hal-01713919](#)

Colloques internationaux avec actes publiés

- Nicolas Guérin, Fabrice Thouverez, Claude Gibert, Mathias Legrand, Patricio Almeida. Thermo-mechanical Component Mode Synthesis for blade casing interaction prediction. *ASME Turbo Expo 2017 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, Jun 2017, Charlotte, United States. [hal-01569918](#)
- Anders Thorin, Nicolas Guérin, Mathias Legrand. Rotor-stator interaction : formulation, reduction and simulation of a nonsmooth thermo-elastic model. 17th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Dec 2017, Maui, United States. [hal-01871945](#)
- Nicolas Guérin, Anders Thorin, Fabrice Thouverez, Mathias Legrand, Patricio Almeida. Thermo-mechanical model reduction for efficient simulations of rotor-stator contact interaction. *ASME Turbo Expo 2018 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, Jun 2018, Oslo, Norway. [hal-01713849](#)
- Anders Thorin, Nicolas Guérin, Mathias Legrand, Fabrice Thouverez, Patricio Almeida. Nonsmooth thermoelastic simulations of blade-casing contact interactions. *ASME Turbo Expo 2018 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, Jun 2018, Oslo, Norway. [hal-01713919](#)

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. P. CARTRAUD

Professeur - Ecole centrale de Nantes - GéM - Institut de Recherches en Génie Civil et Mécanique - UMR CNRS 6183 - Equipe Structure et Simulation - BP 92101
44321 Nantes cedex 3

et de

M. Y. DESPLANQUES

Professeur - Ecole centrale de Lille - Laboratoire de Mécanique de Lille - Bât. ECL bureau F13
boulevard Paul Langevin - 59655 Villeneuve d'Ascq cedex

Monsieur GUERIN Nicolas

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 29 novembre 2019

P/Le directeur de l'E.C.L.
Le directeur des Etudes



Grégory VIAL

ANALYSE THERMOMÉCANIQUE DU CONTACT AUBE-STATOR : APPROCHES NUMÉRIQUE ET EXPÉRI-MENTALE

Résumé

Le constant besoin d'amélioration de l'efficacité et d'allègement des turbomachines demande aux constructeurs des efforts permanents pour ouvrir les domaines de conception. En particulier, les jeux fonctionnels entre les parties fixes et tournantes des turbomachines modernes sont de plus en plus réduits, permettant des diminutions substantielles des pertes de rendement. Toutefois, l'allègement des composants entraîne leur assouplissement, et donc une importance croissante des phénomènes dynamiques dans le cycle de vie des structures fixes comme tournantes. L'effet des couplages multi-physiques se retrouve lui aussi exacerbé, que ce soit celui du couplage thermomécanique ou aéroélastique. Il est donc, dans ce contexte, nécessaire d'améliorer les outils de dimensionnement de façon à prévoir plus précisément le cycle de vie des composants des moteurs, afin de réduire les coûts de développement, tout en augmentant leur sûreté de fonctionnement et donc la sécurité des passagers. Cette thèse s'est inscrite dans la continuité de travaux précédents sur le sujet du contact aubes-stator. À savoir, introduire plus de physique dans les modèles numériques en tenant compte de phénomènes et de géométries de plus en plus complexes. L'objectif principal a été d'introduire la modélisation de phénomènes thermiques dus aux événements de contact, intervenant à l'interface entre les pièces fixes et tournantes, en se basant sur des géométries industrielles installées sur un banc d'essais. Cependant, l'introduction de cette nouvelle physique dans les modélisations devait être faite en tenant compte des contraintes de simulation sur des systèmes complexes, c'est-à-dire en trouvant un compromis entre vitesse et précision des calculs. Enfin, une phase de corrélation entre ces simulations et des essais sur banc était à effectuer, pour s'assurer de la pertinence des outils de dimensionnement mis en oeuvre. Durant cette thèse, une adaptation et une ré-instrumentation du banc d'essais CASTOR (Contact Aubes StaTOR) ont d'abord été effectuées. Plusieurs essais de contact sur banc ont ensuite été réalisés en mesurant les comportements vibratoires et thermiques des parties fixes et tournantes. Puis, des travaux menés en parallèle ont porté sur la réduction de modèles éléments finis décrivant le comportement thermomécanique d'éléments de compresseurs centrifuges de turbomachines aéronautiques. Par ailleurs, plusieurs méthodologies d'intégration temporelle des problèmes de contact, conventionnellement utilisées dans un cadre purement mécanique, ont été évaluées dans un cadre de simulation thermomécanique pour s'assurer de leur capacité à fonctionner pour ce type d'études. Certaines difficultés ont été levées en exploitant des méthodes numériques issues de la communauté scientifique traitant de la dynamique non-régulière. Enfin, des simulations ont été effectuées avec divers paramétrages pour montrer à la fois les capacités de l'outil développé, et confronter les résultats numériques aux observations expérimentales.

Mots clés : contact aube-stator, réduction de modèles, couplage thermomécanique, algorithmes de contact, corrélation calculs-essais, contact unilatéral, mesures, traitement du signal.

THERMOMECHANICAL ANALYSIS OF BLADE-CASING CONTACTS : NUMERICAL AND EXPERIMENTAL ASPECTS

Abstract

The constant need for efficiency and lightweightness of aeroengines demands OEM continued efforts to open design domain. In particular, operations clearances between static and rotating parts of modern engines become narrower, leading to better efficiencies. However, lighter components generally have lower stiffnesses, causing a growth in dynamic phenomena participation in the engines life-cycle. Mutli-physics coupling effects are aggravated in the same manner, whether they are of thermomechanical or aeroelastic nature. In this context, it is therefore crucial to improve design tools so as to predict more accurately the operational conditions of the engine components, with a general objective to cut down development and operational costs, while ensuring engine reliability and passenger safety. This thesis closely follows previous work on blade-casing contacts, all aimed at modelling more accurately the underlying more and more complex phenomena and structures. The main objective of this work has been to introduce a model for the thermal phenomena occurring during contacts at the interface between rotating and static parts, based on industrial geometries of components, which are set in a test rig. Due to the sophistication of the parts, the addition of these phenomena in the model had to be performed while paying attention to high simulation constraints. In other words, a trade-off had to be found between speed and precision of the computations. Finally a correlation phase was to be performed between simulations and experimental trials was to be performed to assess the relevance of the proposed numerical tools. During this thesis, a modification and a new instrumentation of the CASTOR test rig were performed. Multiple contact trials were carried out, during which vibratory and thermal behavior of the components were measured. In parallel to these experimental operations, multiple numerical developments were tackled. Among them, a model reduction methodology of thermoelastic models of turbo-engine centrifugal compressors was developed. Also, multiple time-stepping procedures, originally dedicated to solve contact problems in a purely mechanical context, were extended to perform thermomechanical computations. Several complications were removed taking advantage of advanced methods stemming from the non-smooth dynamics community. Eventually, simulations were performed with diverse setups to both show the capabilities of the numerical tool as well as confront numerical results and experimental observations.

Keywords: blade-casing contact, model order reduction, thermomechanical coupling, contact solving algorithms, simulation and experiments correlation, unilateral contact, measurement, signal analysis