



HAL
open science

Percolation de dernier passage sur les graphes acycliques orientés complets

Benjamin Terlat

► **To cite this version:**

Benjamin Terlat. Percolation de dernier passage sur les graphes acycliques orientés complets. Probabilités [math.PR]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT : 2024UPASM036 . tel-04956251

HAL Id: tel-04956251

<https://theses.hal.science/tel-04956251v1>

Submitted on 19 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Last passage percolation on complete directed acyclic graphs

*Percolation de dernier passage sur les graphes
acycliques orientés complets*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 574, mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat: Mathématiques appliquées
Graduate School : Mathématiques. Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée au **Laboratoire de Mathématiques d'Orsay (Université Paris-Saclay, CNRS)** et à l'**Institut de Physique Théorique (Université Paris-Saclay, CEA, CNRS)**, sous la direction de **Arvind SINGH**, chargé de recherche HDR, et le co-encadrement de **Sanjay RAMASSAMY**, chargé de recherche.

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 15 octobre 2024, par

Benjamin TERLAT

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Nathanaël ENRIQUEZ

Professeur, Université-Paris-Saclay

Régine MARCHAND

Maîtresse de conférences HDR, Université de Lorraine

Marie THÉRET

Professeure, Université Paris Nanterre

Jean-Baptiste GOUÉRÉ

Professeur, Université de Tours

Président

Rapporteur & Examinatrice

Rapporteur & Examinatrice

Examineur

Titre : Percolation de dernier passage sur les graphes acycliques orientés complets

Mots clés : percolation de dernier passage, graphes aléatoires, limite hydrodynamique, chaînes de Markov

Résumé : Cette thèse porte sur la percolation de dernier passage sur des graphes complets acycliques orientés. Ce problème consiste en l'étude du poids maximal d'un chemin dans un graphe complet où les arêtes sont pondérées par des poids aléatoires, et où le poids d'un chemin consiste en la somme des poids de ses arêtes. Notre travail porte sur la "constante de temps", représentant asymptotiquement le poids maximal d'un chemin divisé par le nombre de sommets du graphe, lorsque le nombre de sommets dans le graphe est grand. Nous étudierons différentes propriétés de cette constante de temps vue en tant que fonction de la distribution des poids des arêtes, telles que la stricte monotonie, la continuité et l'analyticité. Un cas notable est lorsque les poids des arêtes valent soit 1 ou m avec probabilités respectives p et $1-p$. Pour $m > 0$, la constante de temps est une

fonction rationnelle de p . Pour $m = 0$, elle correspond à l'inverse d'une fonction thêta de Ramanujan. Il n'existe pas de formule close connue pour $m < 0$, mais nous donnerons une formule analytique dans ce cas précis. Dans le cas $m = -\infty$, on réfutera une conjecture de Mallein et Ramassamy concernant le développement de Taylor de cette constante de temps. Enfin, nous étudierons une limite hydrodynamique de l'infinite bin model, un modèle introduit par Foss et Konstantopoulos qui est équivalent à la percolation de dernier passage pour $m = -\infty$. Pour cette limite hydrodynamique déterministe, la constante de temps est explicite. On montrera que l'espace des paramètres du modèle se divise en régions indexées par des objets combinatoires. Sur chaque région, la constante de temps est une fonction rationnelle des paramètres du modèle.

Title: Last passage percolation on complete directed acyclic graphs

Keywords: last passage percolation, random graphs, hydrodynamic limit, Markov chains

Abstract: This thesis focuses on last-passage percolation on complete directed acyclic graphs. We study the maximal weight of a path in a complete graph where the edges are assigned random weights, and where the weight of a path is the sum of the weights of its edges. More precisely, we study the "time constant", which asymptotically represents the maximal weight of a path divided by the number of vertices in the graph, when the number of vertices goes to infinity. We will explore various properties of this time constant seen as a function of the distribution of the edges weights, such as strict monotonicity, continuity, and analyticity. A notable case is when the edge weights are either equal to 1 or m with respective probabilities p and $1-p$. For $m > 0$, the time constant is a rational fraction of p . For $m = 0$, it corresponds to

the inverse of a Ramanujan theta function. For negative m , there is no known closed formula, but we will provide an analytical formula in this specific case. For $m = -\infty$, we will disprove a conjecture by Mallein and Ramassamy regarding the Taylor series expansion of this time constant. When $m = -\infty$, last-passage percolation is equivalent to the infinite bin model, a model introduced by Foss and Konstantopoulos. In the last chapter, we will study a hydrodynamic limit of the infinite bin model. For this deterministic hydrodynamic limit, the time constant is explicit. We will show that the parameter space of the model is divided into regions indexed by combinatorial objects. On each region, the time constant is a rational function of the model parameters.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mes deux directeurs sans qui cette thèse n'existerait probablement pas aujourd'hui. Merci à vous Sanjay et Arvind pour m'avoir encadré pendant ces trois années. C'est grâce à votre accompagnement constant à tous les niveaux, vos encouragements et votre bienveillance que j'en suis là aujourd'hui. Merci à vous pour toutes ces idées que nous avons partagées durant nos discussions, pour toutes les intuitions que vous m'avez données, et pour toutes vos relectures consciencieuses. Tout cela a grandement contribué à l'élaboration de ce manuscrit et je vous en remercie tous deux chaleureusement. En particulier, merci à toi Sanjay pour ton encadrement de mon stage de M2 qui a ensuite débouché sur cette thèse, et pour notre collaboration sur le dernier chapitre de cette thèse.

Je tiens ensuite à remercier l'ensemble des membres du jury. Je suis très reconnaissant envers Régine Marchand et Marie Théret d'avoir accepté d'être rapporteurs pour cette thèse, et pour l'intérêt qu'elles ont porté à mes travaux. Merci pour vos retours positifs, très détaillés et précis qui m'ont permis d'améliorer encore plus ce manuscrit. Je remercie également chaleureusement Jean-Baptiste Gouéré et Nathanaël Enriquez pour avoir accepté d'être examinateurs pour cette thèse. J'en suis honoré.

Durant ces trois années, j'ai eu la chance de travailler dans deux laboratoires où j'ai bénéficié d'excellentes conditions de travail. Je tiens à remercier l'ensemble de mes collègues et amis des différentes équipes de l'IPhT, du LMO et autres pour toutes les discussions et tous ces moments que nous avons passé ensemble, dont je ne garde que de bons souvenirs.

Je tiens à adresser également un remerciement spécial à Damien Thomine pour une discussion que nous avons eue concernant le Chapitre 4, ainsi qu'Andrew Elvey Price pour la discussion qui m'a été rapportée par Sanjay et dont l'intuition a inspiré le Chapitre 3 de cette thèse.

Merci à tous les soutiens financiers qui m'ont permis de participer à de nombreuses conférences durant lesquelles j'ai pu présenter mes travaux et découvrir de nombreux chercheurs et sujets de recherche. Je tiens également à remercier les personnels des secrétariats et administratifs qui assurent le bon fonctionnement des laboratoires. En particulier, merci à l'école doctorale de mathématiques Hadamard pour son accompagnement et sa disponibilité.

Pendant ces trois ans, j'ai également été chargé de TD pour des étudiants de l'IUT d'Orsay. Je tiens à remercier l'équipe de l'IUT qui m'a accueilli. En particulier, merci à vous Banafsheh, Sébastien et Elodie. Cette expérience d'enseignement a été particulièrement enrichissante, et je remercie chaleureusement toute l'équipe pour son accueil et son soutien.

Mes remerciements vont également à tous les professeurs et chargés de TD que j'ai eus durant ma scolarité et mes études, qui ont à la fois entretenu mon goût des mathématiques, et en même temps m'ont donné envie de transmettre à mon tour. Je pense en particulier à mes enseignants durant

mon M2 Probabilités à Orsay. Plus spécifiquement, les cours de Nathanaël Enriquez sur les modèles solubles et de Nicolas Curien sur les graphes aléatoires ont véritablement orienté mes intérêts vers le sujet de cette thèse. Je remercie également sans être exhaustif Igor Kortchemski, Pierre-Loïc Méliot, Edouard Maurel-Ségala, Jean-François Le Gall, Christophe Giraud et Matthieu Lerasle pour leurs cours qui m'ont tous apporté beaucoup. Mes remerciements vont également à Sophie Lemaire qui m'a permis de découvrir le modèle des graphes d'Erdos-Renyi durant un stage de recherche en M1. Je remercie enfin Stéphane Zahnd et Bernard Lemaire, mes deux professeurs de mathématiques, respectivement en math sup et math spé, ainsi que Stéphane Delobel qui fut mon professeur de mathématique en terminale qui ont su entretenir mon intérêt pour les mathématiques.

Merci à tous mes amis (mathématiciens ou non) pour tous ces moments que l'on a passé ensemble et pour m'avoir soutenu durant ces trois ans. Merci à Damien et Ella pour avoir relu l'introduction de cette thèse. Merci Galia pour avoir réussi à me supporter pendant trois ans et pour ton soutien lors des moments difficiles. Merci à vous Tiphaine, Victoria, Antoine, Ella, Bartolomé et Élodie, pour nos rendez-vous hebdomadaires le mercredi soir. Merci à Thibault, Pierre, Eliame, ainsi qu'à Charlotte, Louis, Némó, Florine pour tous ces moments passés en votre compagnie pendant ces trois ans. À vous Léa et Élise, toute ma gratitude pour ces fantastiques moments! À mes amis de la promo d'Orsay, Till, Kacem, Margot, Damien et Thomas, j'espère que l'on coinchera bientôt à nouveau. Merci Marion, je te souhaite une bonne affectation à Nantes! À vous Antoine et Pauline, je vous souhaite le meilleur. Merci à toi Alexandra, notamment pour avoir gardé si souvent mon chat. Enfin, merci à vous Rémi, Clément, Emmanuel, Alpha et Christophe!

Enfin, je remercie ma famille, plus particulièrement mon père qui m'a soutenu, notamment financièrement tout au long de mes études, et sans qui tout cela aurait été beaucoup plus difficile pour moi. Merci à mon frère Dorian, à Maryline, Béatrice, Paul, Oscar, et plus généralement à toute ma famille, pour leur soutien sans faille.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Modèles de percolation, percolation de premier et de dernier passage	7
1.1.1	Contexte historique	7
1.1.2	Percolation de premier passage	9
1.1.3	Percolation de dernier passage	12
1.2	Graphes de Barak-Erdős et l'infinite bin model	15
1.2.1	Chemin le plus long dans un graphe de Barak-Erdős	15
1.2.2	Motivations et applications	16
1.2.3	Résultats pour les graphes de Barak-Erdős	19
1.2.4	Application du théorème sous-additif dans le régime des graphes denses	24
1.2.5	Couplage avec un système de particules en interaction : l'infinite bin model	26
1.3	Percolation de dernier passage sur les graphes complets acycliques orientés	32
1.3.1	Cas général	32
1.3.2	Quelques cas particuliers	36
1.3.3	Autres modèles similaires	37
1.4	Théorie de la reconstruction et systèmes de particules en interactions	38
1.4.1	Reconstruction pour le système de particules	40
1.4.2	Reconstruction par les points squelettes	44
1.5	Résultats obtenus durant la thèse	47
1.5.1	Régularité et propriétés de la constante de temps	47
1.5.2	Cas particulier avec deux poids positifs	49
1.5.3	Cas particulier avec un poids entier négatif et poids 1	50
1.5.4	Étude d'une limite d'échelle de l'infinite bin model	56
2	Regularity of the time constant	63
2.1	Introduction	63
2.2	Stationary max growth system and a formula for $C(\nu)$	69
2.2.1	The max growth system	69
2.2.2	Stationary MGS for weight distributions with an atom at their essential supremum	71
2.2.3	An abstract formula for the time constant for last passage percolation	79
2.3	Regularity properties of the time constant	81
2.3.1	Analyticity in p for measures of the form $(1 - p)\mu + p\delta_M$	81
2.3.2	Analyticity for measures with N atoms	84
2.3.3	Continuity	86
2.3.4	Strict monotonicity of $C(\nu)$	90
2.4	The case of probability distributions supported by two non-negative real numbers	95
2.4.1	Rationality in p for measures of the form $(1 - p)\delta_{\frac{M}{k}} + p\delta_M$	95

2.4.2	Rationality in p for measures of the form $(1 - p)\delta_m + p\delta_M$ for $0 < m < M$	98
2.4.3	A formula for the time constant for measures of the form $\nu = (1 - p)\delta_0 + p\delta_M$.	102

3	Theoretical and numerical results on the time constant for a non-trivial class of weight distribution	105
3.1	Introduction	105
3.1.1	Theoretical results	107
3.1.2	Numerical results	108
3.2	The N -bin model and renovation theory	113
3.2.1	The N -bin model seen as a particle system	113
3.2.2	The max growth system	114
3.2.3	From the MGS to the N -bin model	115
3.2.4	Renovation events for the N -bin model	117
3.2.5	Proof of Proposition 3.1.3	119
3.2.6	Analyticity of the stationary distribution of the N -bin model	122
3.3	A formula for the time constant via the generating function method	125
3.3.1	Proof of Proposition 3.3.1	127
3.3.2	Proof of Theorem 3.1.2	127
3.4	An efficient computation method for the Taylor expansion of the stationary distribution	131
3.4.1	Preliminary results	132
3.4.2	Presentation of the algorithm	134
3.4.3	Asymptotic computational complexity	137
4	A hydrodynamic limit of the infinite bin model: the liquid bin model	141
4.1	Introduction	141
4.2	The liquid bin model	144
4.2.1	Definition of the liquid bin model	144
4.2.2	Coupling with a car model	146
4.3	Properties of the car model	150
4.3.1	Stationary configurations and trajectories	150
4.3.2	Monotonicity property and existence of stationary trajectories	152
4.3.3	Uniqueness of the stationary configuration and exponential convergence	155
4.4	Formula for the front's speed and study of parameter space partitioning	161
4.4.1	Partitioning the parameter space	161
4.4.2	Solving the linear system	164
4.4.3	Every region has non-empty interior	167
4.5	Adjacency structure of the regions	171
4.5.1	Characterization of the boundaries	173
4.5.2	Proof of Theorem 4.5.2	180
4.5.3	Examples of boundary equations	186
4.6	Convergence of the infinite bin model to the liquid bin model	187
4.6.1	Initialisation for $l = 0$	191
4.6.2	Inductive step	199

1 - Introduction

1.1. Modèles de percolation, percolation de premier et de dernier passage

Dans cette section, nous débutons en présentant divers modèles de percolation (de manière non exhaustive). Après avoir introduit les modèles de percolation et de percolation de premier passage, nous aborderons le modèle plus récemment étudié de percolation de dernier passage, qui constitue le cadre dans lequel se situe le sujet de cette thèse.

1.1.1. Contexte historique

Les modèles de percolation trouvent leur origine dans la physique des matériaux et ont été initialement introduits dans les années 50 par Broadbent et Hammersley. Ils continuent de susciter un vif intérêt aujourd'hui, avec de nombreux problèmes encore non résolus. L'un des problèmes modélisés par ce modèle est le suivant : on considère un milieu poreux sur lequel on verse un liquide. La question est de savoir à quelles conditions le liquide va se propager ou non dans le milieu poreux. D'autres questions se posent également, notamment sur la vitesse de propagation du liquide dans le milieu. Si l'on s'intéresse au moment où la première goutte de liquide traverse le milieu, on parle de *percolation de premier passage*. En revanche, si l'on s'intéresse au moment où tout le liquide a traversé le milieu poreux, on parle de *percolation de dernier passage*.

Dans le papier [BH57] de 1957, Broadbent et Hammersley introduisent rigoureusement ce problème d'un point de vue mathématique. Ils modélisent le problème de la manière suivante : un milieu poreux est représenté par un graphe (dirigé ou non), représentatif de la structure du milieu poreux. Indépendamment entre les arêtes, un liquide (ou un gaz) est capable de traverser une arête donnée de ce graphe avec une probabilité fixée $p \in [0, 1]$. L'objet d'étude est alors la taille des composantes connexes dans le graphe des arêtes traversables par le liquide. L'une des propriétés intéressantes de ce modèle est l'existence d'une transition de phase non triviale pour l'existence d'une composante connexe de taille infinie. En effet, pour une classe de graphes G infinis (dirigés ou non) satisfaisant certaines hypothèses, Broadbent et Hammersley montrent dans [BH57], [Ham57] et [Ham59] qu'il existe un seuil critique non trivial $0 < p_c(G) < 1$ pour p à partir duquel le nombre de sommets atteignables par le liquide en partant d'un sommet fixé au départ est infini avec probabilité positive. Plus précisément, si l'on considère $v_0 \in V(G)$ un sommet du graphe et que l'on dénote par $W(v_0)$ le nombre de sommets atteignables en partant de v_0 dans le graphe par les arêtes franchissables par le liquide,

$$\mathbb{P}_p(|W(v_0)| = \infty) \begin{cases} = 0 & \text{si } p \in [0, p_c(G)[, \\ > 0 & \text{si } p \in]p_c(G), 1]. \end{cases}$$

Ce résultat est valable en particulier dans le cas où $G = \mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 2$. On donne une illustration de la taille de la plus grande composante critique dans les régimes sous et sur critiques en Figure 1.1.

Une application pratique de ce résultat est donnée dans [BH57] : on considère un grand verger

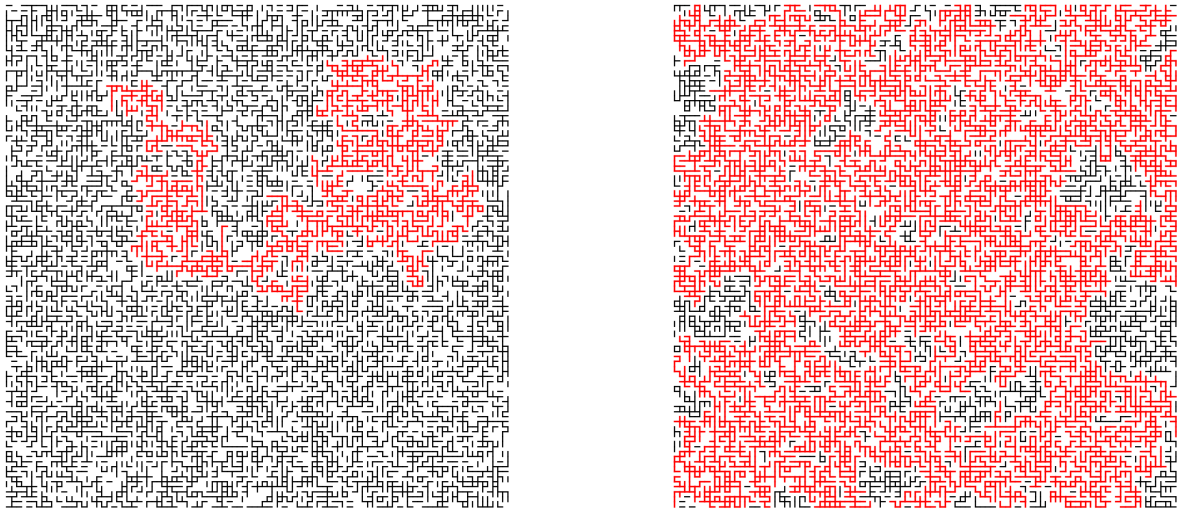


FIGURE 1.1 – Simulation de deux réalisations de percolation dans \mathbb{Z}^2 . On place une source de liquide au centre de chacune des deux figures et on colorie en rouge les arêtes traversées par le liquide. À gauche, on se place dans le régime sous-critique ($p = 0.48 < 1/2$). Dans ce cas, toutes les composantes connexes d'arêtes traversées par du liquide sont finies presque sûrement. À droite, on se place dans le régime sur-critique ($p = 0.52 > 1/2$). Pour ce régime, il existe une (unique) composante connexe infinie.

dans lequel sont plantés des arbres sur une grille carrée. On considère que certains arbres peuvent tomber malades, et qu'un arbre infecte chacun de ses voisins sur la grille avec probabilité p , et ce indépendamment entre voisins. En supposant que la probabilité p qu'un arbre infecte l'un de ses voisins ne dépende que de sa distance entre les arbres sur la grille, il existe une distance minimale à imposer pour éviter qu'un grand nombre d'arbres ne soient infectés.

En général, les valeurs limites pour les modèles de percolation sont difficiles à obtenir. En particulier, la probabilité critique $p_c(G)$ n'est en général pas connue et est liée à la géométrie du graphe G . Pour $G = \mathbb{Z}^d$, le seul cas où cette probabilité est explicite est le cas $d = 2$ pour lequel $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$. Sykes and Essam donnent des arguments dans [SE64] pour justifier ce résultat. Harris montre dans [Har60] que $p_c(\mathbb{Z}^2) \geq 1/2$, puis Kesten [Kes80] finit par montrer que $p_c(\mathbb{Z}^2)$ vaut bien $1/2$. Pour d'autres réseaux, il est rarement possible de calculer le seuil critique explicitement. On citera néanmoins le cas des réseaux hexagonaux pour lesquels Sykes and Essam [SE64] donnent le seuil critique, qui fut montré rigoureusement par Wierman [Wie81].

Une autre question intéressante consiste à comprendre ce qui se passe au seuil critique $p_c(G)$. L'une des questions posées est l'existence d'une composante infinie au seuil critique. On notera qu'il est également possible de définir des modèles de percolation dans lesquels on enlève des sommets plutôt que des arêtes. Lorsque l'on autorise les suppressions de sommets, on parle de *percolation de sites*. Lorsque l'on autorise les suppression d'arêtes, on parle de *percolation de liens*. L'hypothèse d'indépendance entre les poids des arêtes et des sommets est parfois remplacée par une hypothèse plus générale de stationnarité.

Il existe également d'autres modèles en physique statistique présentant des transitions de phase. L'un des plus connus est le modèle d'Ising, modélisant le phénomène de ferromagnétisme. Ce modèle introduit par Ising dans sa thèse en 1925 est en lien étroit avec la percolation dans \mathbb{Z}^2 . En effet, la percolation et le modèle d'Ising sont tous deux des cas particuliers d'un modèle plus général appelé *FK-percolation*. Ce dernier modèle fut introduit par Fortuin et Kasteleyn dans [FK72]. Pour ce modèle, la probabilité critique est une fonction explicite des paramètres. Ce résultat a été montré récemment dans [BD12].

Pour plus de détails sur la percolation en général, on pourra se référer aux livres de Grimmett et Kesten [Gri89; Kes82] et aux cours de Werner [Wer08] et Duminil-Copin [Dum18].

1.1.2. Percolation de premier passage

Le problème de percolation de premier passage a ensuite été introduit par Hammersley et Welsh en 1965 [HW65], qui donnent également plusieurs motivations pour ce problème. En particulier, l'une d'entre elles est l'étude du temps de propagation d'une maladie entre les arbres d'un verger plantés sur une grille carrée comme nous l'avons introduite précédemment. Pour ce modèle, il ajoute une complexification : à chaque arête du graphe considéré non supprimée, on associe un temps aléatoire. Ces temps sont supposés indépendants entre arêtes et s'interprètent de la façon suivante : si $u_{i,j}$ est le temps associé à l'arête (i, j) dans le graphe G , alors $u_{i,j}$ correspond au temps que mettra l'arbre i à infecter l'arbre j à partir du moment où l'arbre i sera infecté. La quantité étudiée est alors $t(i, j)$, le temps que met l'arbre i à infecter l'arbre j pour deux sommets quelconques i et j dans G :

$$t(i, j) = \min_{\gamma \in \Gamma_{i,j}} u_{\gamma_1, \gamma_2} + \cdots + u_{\gamma_{|\gamma|-1}, \gamma_{|\gamma|}},$$

où $|\gamma|$ est le nombre de sommets dans un chemin γ , $\Gamma_{i,j}$ est l'ensemble des chemins $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ avec $\gamma_1 = i$, $\gamma_l = j$, et (i_k, i_{k+1}) est une arête dans G non supprimée pour tout $1 \leq k \leq l-1$. Dans cet article, ils montrent en particulier pour $G = \mathbb{Z}^2$ que le temps minimal moyen pour que la maladie se propage du point $(0, 0)$ au point $(n, 0)$ est équivalent à n fois une constante déterministe. Cette constante est appelée *constante de temps*.

Pour montrer l'asymptotique du temps $t(n, 0)$, Hammersley et Welsh [HW65] introduisent la notion de processus stochastique sous-additif, et montrent la convergence du processus sous des hypothèses fortes. En 1968, Kingman généralise ce résultat dans [Kin68] et montre le théorème sous-additif ergodique, qui s'applique dans un cadre plus général que celui d'Hammersley et Welsh. Ce résultat est une généralisation de la loi forte des grands nombres aux processus sous-additifs et est très souvent utilisé en percolation de premier et de dernier passage car il permet sans trop d'hypothèses de montrer l'existence d'une constante limite. La constante limite pour cette généralisation de la loi forte des grands nombres, lorsqu'elle est finie, est appelée *constante de temps*, comme dans le cas de la percolation de premier passage.

On notera $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Rappelons qu'un processus $(X_{s,t})_{s < t \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles est dit *sous-additif* si pour tout $s < u < t \in \mathbb{N}$,

$$X_{s,t} \leq X_{s,u} + X_{u,t}.$$

De plus, $(X_{s,t})_{s,t \in \mathbb{N}}$ est dit *stationnaire* si la loi de $(X_{s+l,t+l})_{s < t \in \mathbb{N}}$ est la même pour tout $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

D'autres versions de ce théorème ont été obtenues ensuite. On citera en particulier la version de Liggett [Lig85b], qui nous sera utile par la suite :

Théorème 1.1.1 (Théorème ergodique sous-additif [Lig85a; Lig85b]). *Soit $(X_{s,t})_{s < t \in \mathbb{N}}$ un processus à valeurs réelles. Supposons que :*

- $X_{1,1} = 0$, $X_{1,n} \leq X_{1,m} + X_{m,n}$ pour tous $1 \leq m \leq n$,
- $(X_{nk+1,(n+1)k+1})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ est stationnaire pour tout $k \in \mathbb{N}$,
- $(X_{m,m+k})_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ et $(X_{m+1,m+k+1})_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ont la même loi pour tout $m \in \mathbb{N}$,
- $\mathbb{E}[X_{1,2}^+] < +\infty$.

Alors, la limite $X_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_{1,n}}{n}$ est presque sûrement bien définie. De même, la limite

$$C := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[X_{1,n}]}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{E}[X_{1,n}]}{n} \in [-\infty, +\infty[$$

est bien définie. De plus,

$$\frac{X_{1,n}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X_\infty,$$

et si $C \neq -\infty$,

$$\frac{X_{1,n}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1} X_\infty.$$

Si le processus $(X_{nk+1,(n+1)k+1})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ est ergodique pour tout $k \geq 1$, alors $X_\infty = C$ presque sûrement.

Remarque 1.1.2. Comme le remarque Kingman dans [Kin68], les deuxième et troisième hypothèses du Théorème 1.1.1, ainsi que l'ergodicité des processus $(X_{nk+1,(n+1)k+1})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ pour tout $k \geq 1$, sont vérifiées pour tout processus $(X_{s,t})_{s < t}$ de la forme

$$X_{s,t} = F_{t-s}(\dots, Z_{s-1}, Z_s, Z_{s+1}, \dots) = F_{t-s}((Z_{s+n})_{n \in \mathbb{Z}}),$$

où F_k est une fonction mesurable fixée pour tout $k \geq 1$ et où $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont des variables aléatoires i.i.d. Par conséquent, pour de tels processus, le théorème s'applique et la limite X_∞ vaut C presque sûrement.

Remarque 1.1.3. De manière similaire, il est possible de définir un processus *sur-additif* comme étant un processus $(X_{s,t})_{0 \leq s < t}$ à valeurs réelles tel que pour tout $s < u < t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$X_{s,t} \geq X_{s,u} + X_{u,t}.$$

Le Théorème 1.1.1 s'applique également aux processus sur-additifs : si $(X_{s,t})_{0 \leq s < t}$ est un processus sur-additif, il suffit d'appliquer le théorème à $(-X_{s,t})_{0 \leq s < t}$ qui est un processus sous-additif.

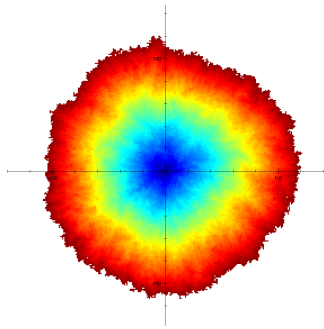


FIGURE 1.2 – Simulation de percolation de premier passage dans \mathbb{Z}^2 . On associe à chaque arête un temps de passage de loi exponentielle d'espérance 1. On considère que le temps de passage minimal entre deux points x et y est défini comme le minimum des temps de passage des chemins partant de x et finissant en y , où le temps de passage d'un chemin est défini comme la somme des temps de passage de ses arêtes. Le temps de passage minimal définit une métrique sur \mathbb{Z}^2 . On représente en rouge foncé les points à distance 50 de l'origine pour cette métrique. Les autres couleurs correspondent chacune à une distance d comprise entre 0 et 50, et indique quels sont les points à cette distance d de l'origine.

Le Théorème 1.1.1 est bien souvent utilisé en percolation de premier passage étant donné qu'il permet de montrer l'existence de la constante de temps. Heuristiquement, il est appliqué de la manière suivante : on veut étudier le temps de passage minimal entre deux sommets a et b d'un graphe. Si l'on considère un sommet c quelconque entre a et b , alors le temps de passage minimal entre a et b est majorée par la somme des temps de passage minimaux entre a et c et entre c et b . En d'autres termes, si l'on veut aller d'un point a à un point b , le trajet prends plus de temps si l'on impose une étape c sur la route. Si l'on considère le processus $(X_{a,b})_{a,b}$, où $X_{a,b}$ est le temps de passage minimal entre a et b , $(X_{a,b})_{a,b}$ est donc sous-additif. Le théorème de Kingman s'applique alors, à condition que les autres hypothèses du théorème soient satisfaites.

Lorsque la distance entre deux points $(a, 0, \dots, 0)$ et $(b, 0, \dots, 0)$ de \mathbb{R}^d tend vers l'infini, on vient de voir que le temps de passage minimal entre ces deux points est presque sûrement équivalent à une constante fois $|b - a|$ par le théorème de Kingman. Cette constante peut s'interpréter comme l'inverse de la vitesse moyenne d'un fluide traversant un milieu poreux. Différents résultats ont été montrés pour ce modèle sur la constante de temps. En particulier sur sa régularité, Kesten [Kes86] et Cox et Kesten [CK81] montrent que cette constante est continue en la loi de probabilité des temps de passage des arêtes pour la topologie de la convergence en loi. Il est possible d'en dire plus dans certains cas particuliers. Dembin et Cerf [CD22] et Dembin [Dem21] ont récemment montré que cette constante de temps était Lipschitzienne dans le régime sur-critique pour la percolation de premier passage avec temps de passage possibles 1 et $+\infty$ pour les arêtes. Plus récemment Can, Nakajima et Nguyen [CNN24] ont étendu ce résultat à une classe plus large de loi pour les temps de passage des arêtes. Il a également été montré que la constante de temps pour ce modèle était strictement croissante en tant que fonction de la loi des temps de passage [BK93; Mar02]. On montrera des résultats similaires dans le cadre de la percolation de dernier passage sur les graphes complets (cf. Théorèmes 1.5.3 et 1.5.4).

On notera que la percolation de premier passage consiste en la construction d'une pseudo-métrique¹ aléatoire sur un graphe donné. On remarquera également que la constante de temps ne dépend que de l'angle formé par les points a et b considérés. Plus précisément, si l'on considère une direction $x \in \mathbb{R}^d$ (de norme $|x| = 1$), alors sous certaines hypothèses de moments sur la loi des temps de passage des arêtes, il existe une constante $C_{\mathbb{Z}^d}(x)$ telle que

$$\frac{t(0, nx)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s., L^1} C_{\mathbb{Z}^d}(x).$$

De plus $C_{\mathbb{Z}^d}$ est soit identiquement nulle, soit définit une norme dans \mathbb{R}^d . Dans le second cas, la forme limite de la boule unité pour la pseudo-métrique aléatoire correspond à la boule unité pour cette norme. Dans [CD81], Cox et Durrett montrent la convergence uniforme de la boule aléatoire de rayon n de la percolation de premier passage vers cette forme limite lorsque n tend vers l'infini. Ils montrent de plus que cette forme limite est convexe et d'intérieur non vide. On donne une illustration de cette métrique en Figure 1.2.

Il reste encore de nombreuses questions ouvertes sur ce modèle. En particulier, l'une d'entre elles consiste à trouver une loi de probabilité non triviale pour les temps de passage des arêtes pour laquelle la constante de temps est explicite. La stricte convexité de la forme limite est également un problème ouvert. Pour plus d'informations sur ce modèle, on pourra se référer à [ADH17].

1.1.3. Percolation de dernier passage

Après cette brève présentation de la percolation et de la percolation de premier passage, intéressons-nous à présent au problème de percolation de dernier passage, qui est le sujet principal de cette thèse.

Le problème de percolation de dernier passage s'énonce de la façon suivante : on étudie le poids maximal que l'on peut obtenir en parcourant des chemins dans un graphe orienté, où l'on suppose qu'à chaque sommet et/ou arête de ce graphe est assigné un poids aléatoire, et que le poids d'un chemin orienté est donné par la somme des poids de ses arêtes et de ses sommets. La plupart du temps, ces poids sont supposés indépendants et de même loi, ou a minima stationnaire.

De la même manière que pour la percolation de premier passage, le Théorème 1.1.1 s'applique également en percolation de dernier passage par la Remarque 1.1.3 étant donné le processus $(X_{a,b})_{0 \leq a < b}$, où $X_{a,b}$ est le poids maximal que peut prendre un chemin entre deux sommets a et b d'un graphe, vérifie une propriété de sur-additivité.

Une contrainte supplémentaire en percolation de dernier passage porte sur l'orientation des arêtes. En effet, lorsque l'on étudie le chemin le plus long entre deux points d'un graphe, il est nécessaire de supposer que le graphe est orienté et sans cycle, ou que l'on ne considère que les chemins auto-évitant (c'est-à-dire qui ne repassent jamais deux fois par un même sommet). Dans le cas contraire, la non-existence de chemin de poids infini dans le graphe n'est pas assurée, ce qui trivialisait le problème. Dans la plupart des cas présentés dans cette thèse, on considèrera donc des graphes orientés.

¹On obtient seulement une pseudo-métrique car lorsque les arêtes ont poids 0 avec probabilité positive, le temps de passage minimal entre deux sommets distincts peut être nul.

En percolation de dernier passage, plusieurs modèles sont exactement solubles. En d'autres termes, on peut caractériser toutes les quantités d'intérêt pour ces modèles. En particulier, dans ce cas, la constante de temps est explicite. L'un des outils utilisés pour étudier ces modèles est souvent un couplage avec un système de particules en interaction. Dans cette thèse, on emploiera des méthodes de ce type pour étudier la constante de temps dans le cas de la percolation de dernier passage sur les graphes complets.

Considérons tout d'abord le cas classique de la percolation de dernier passage de Hammersley. Ce modèle a été introduit par Hammersley dans [Ham72] en vue de répondre au problème posé par Ulam [Ula61] sur l'étude de la taille typique d'une plus longue sous-suite croissante dans une permutation choisie uniformément au hasard.

Rappelons que pour une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, une sous-suite croissante de longueur l est une suite d'entiers $1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq n$ telle que $\sigma(k_1) < \dots < \sigma(k_l)$. Le problème d'Ulam est le suivant : si σ_n est une permutation aléatoire choisie uniformément au hasard parmi les permutations de $\{1, \dots, n\}$, quelle est l'asymptotique de la longueur de la plus longue sous-suite croissante de la permutation σ_n ?

Le problème peut se voir comme un problème de percolation de la façon suivante : on considère une permutation aléatoire σ_n choisie uniformément parmi les permutations à n sommets. En considérant l'ensemble des points $E = \{(i, \sigma(i)) : i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, le problème est équivalent à trouver le poids maximal d'un chemin Nord-Est entre les points $(1, 1)$ et (n, n) , où le poids d'un chemin est le nombre de points de E contenus dans le chemin, et où un chemin Nord-Est est un chemin dont les pas sont de la forme $(a, b) \neq (0, 0)$ avec $a, b \geq 0$.

Dans [Ham72], Hammersley montre que la plus longue sous-suite dans une permutation uniforme à n éléments se comporte asymptotiquement comme \sqrt{n} fois une constante déterministe c . Il montre de plus que c est comprise entre $\pi/2$ et e , mais laisse comme question ouverte de trouver la valeur exacte de c . Par une étude combinatoire du problème, Vershik et Kerov [VK77] et Logan et Shepp [LS77] montrent que cette constante c vaut en réalité 2. Une preuve probabiliste fut ensuite donnée par Aldous et Diaconis [AD95], dans laquelle ils introduisent *les lignes de Hammersley*, déjà utilisées de façon implicite dans [Ham72] par Hammersley. Ils font également le lien entre ces lignes et un système de particules en interaction.

Heuristiquement, les lignes de Hammersley se construisent de la façon suivante : on commence par tracer une ligne partant du haut et finissant à droite passant seulement par les points de poids 1 les plus en bas à gauche possible (c'est-à-dire, tous les points (i, j) de poids 1 tels qu'il n'existe pas d'autre point (i', j') de poids 1 avec $i' \leq i$ et $j \leq j'$). On vient de tracer la première ligne de Hammersley. On itère ensuite le processus en retirant les points sur la première ligne pour obtenir la suivante, etc. Au final, le nombre de lignes de Hammersley correspond exactement au nombre maximal de points qu'un chemin Nord-Est peut emprunter.

Une autre variante de ce problème consiste à considérer des poids i.i.d de loi de Bernoulli sur les sommets de $\mathbb{Z}^2 \cap [1, n]^2$. À la différence du problème précédent, on remarque qu'il n'y a pas toujours

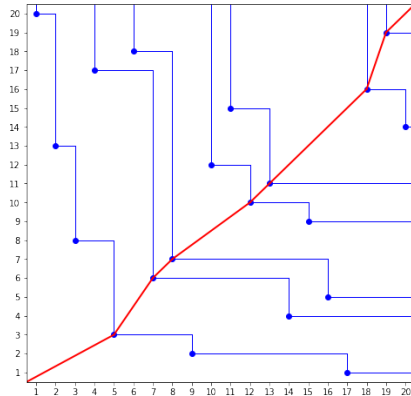


FIGURE 1.3 – Illustration du processus de lignes de Hammersley pour la permutation à 20 éléments $\sigma_{20} = (20, 13, 8, 17, 3, 18, 6, 7, 2, 12, 15, 10, 11, 4, 9, 5, 1, 16, 19, 14)$. Les lignes en bleus correspondent aux lignes de Hammersley. En rouge, on représente un chemin "Nord-Est" (c'est-à-dire qu'il ne peut que monter et aller à droite) maximisant le nombre de points bleus traversés. La longueur de ce chemin correspond au nombre de lignes de Hammersley et à la longueur de la plus longue sous-suite croissante dans la permutation σ_{20} . La plus longue sous-suite croissante représentée ici est la sous-suite (3, 6, 7, 10, 11, 16, 19). Pour obtenir un plus long chemin à partir des lignes de Hammersley, on part d'en haut à droite, et on choisit un point bleu traversé par la ligne de Hammersley la plus en haut à droite. Ensuite, on recommence à partir de ce point en choisissant un point bleu au "Sud-Ouest" de ce point sur la deuxième ligne de Hammersley la plus en haut à droite, et on relie ces deux points. On recommence ensuite jusqu'à ce qu'on ait choisi un point sur chacune des lignes.

un unique point de poids 1 sur chaque ligne et chaque colonne de la grille comme dans le cas du problème d'Ulam. Néanmoins, par approximation, il est possible de retrouver le résultat $c = 2$. Dans [Bas+16], Basdevant, Enriquez, Gerin et Gouéré ont redémontré le fait que $c = 2$ grâce à ce modèle. De plus, ils donnent la constante de temps dans le cas où les poids sont de loi de Bernoulli ou de loi géométrique. Pour montrer ces résultats, ils introduisent un processus de ligne de la même façon que dans [AD95]. Le cas où les poids sont de loi exponentielle ou géométrique a également été étudié dans [Rol+10] grâce à une généralisation du processus de ligne de Hammersley pour laquelle chaque ligne a une certaine épaisseur.

Une autre méthode similaire pour montrer que cette constante vaut 2 vient d'une approximation avec un système de particules [Bas+16]. Pour ce système de particules, il est également possible de définir les lignes de Hammersley, et ces lignes correspondent aux trajectoires des particules. L'intérêt de ce modèle est qu'il est exactement soluble : on peut construire une version stationnaire de ce système de particules et calculer explicitement les probabilités dans le régime stationnaire.

Dans cette thèse, on utilisera des méthodes similaires avec des couplages avec des systèmes de particules pour étudier la percolation de dernier passage sur les graphes complets (cf. Sections 1.2.5 et 1.3.1). Bien qu'il sera également possible de construire une version stationnaire de ces système de particules, la formule pour la constante de temps ne sera pas toujours aussi explicite à calculer dans notre cas.

1.2. Graphes de Barak-Erdős et l'infinite bin model

Contrairement aux modèles de percolation de dernier passage dans \mathbb{Z}^2 que nous avons présentés à la section précédente, les modèles de percolation de dernier passage sur les graphes complets ne sont pas solubles en général. Par conséquent, il reste de nombreuses questions ouvertes concernant ces modèles, similaires à celles qui se posent en percolation de premier passage dans \mathbb{Z}^d . En particulier, la constante de temps n'est pas explicite pour ces modèles. La principale contribution de cette thèse porte sur l'étude de cette constante de temps pour différents modèles de percolation de dernier passage sur les graphes complets.

Le premier modèle historiquement étudié de percolation de dernier passage sur les graphes complets consiste en l'étude d'un plus long chemin dans un graphe de Barak-Erdős, une version orientée des graphes d'Erdős-Rényi [ER59] qui ont été introduits par Barak et Erdős dans l'article [BE84]. Ce modèle de percolation de dernier passage a été étudié pour la première fois en 1986 dans deux contextes différents [NCS86; Gel+86], et ce de manière indépendante. Dans [NCS86; CN91], il est introduit par Cohen et Newman en tant que modèle de chaîne alimentaire dans le but d'étudier la plus grande longueur d'une chaîne de prédation. Il a également été étudié la même année dans [Gel+86; IN94] dans le but d'étudier le temps d'exécution de tâches réalisées en parallèle avec des contraintes sur l'ordre de réalisation des tâches. Ce modèle sera également étudié dans le cadre de la stabilité des files d'attente quelques années plus tard par Foss and Konstantopoulos [FK03] et plus récemment en physique théorique par Itoh et Krapivsky [IK12; Ito18].

En 1992, Newman [New92] étudie ce modèle dans différents régimes. En particulier lorsque la probabilité p de présence des arêtes ne dépend pas du nombre de sommets dans le graphe, il montre que la longueur d'un plus long chemin dans ces graphes est asymptotiquement équivalente à une constante déterministe fois le nombre de sommets dans le graphe. Cette constante ne dépend que de la probabilité de présence des arêtes p dans le graphe, et on la notera $C(p)$ par la suite.

Dans cette section, nous présentons ce modèle et les résultats y étant associés.

1.2.1. Chemin le plus long dans un graphe de Barak-Erdős

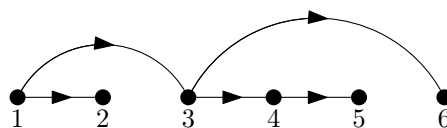


FIGURE 1.4 – Exemple de réalisation de graphe de Barak-Erdős à 6 sommets. Dans ce graphe, le plus long chemin est de longueur $L_6(p) = 3$. Le plus long chemin partant de 1 et finissant en 6 est de longueur $L_6^{g,d}(p) = 2$.

Commençons tout d'abord par définir précisément ces graphes de Barak-Erdős. Un graphe de Barak-Erdős à n sommets est un graphe orienté aléatoire dans lequel les sommets sont numérotés de 1 à n et dans lequel les arêtes sont orientées dans le sens croissant de la numérotation. Les arêtes de ce graphe sont de la forme (i, j) avec $i < j$ et chaque arête est présente avec probabilité $p \in [0, 1]$. On suppose que les arêtes sont présentes ou non dans le graphe de façon indépendantes entre elles.

On remarquera qu'un graphe de Barak-Erdős est tout simplement un graphe d'Erdős-Rényi [ER59; Gil59] pour lequel chaque arête est orientée de sa plus petite vers sa plus grande extrémité (voir Figure 1.4 pour un exemple de réalisation de graphe de Barak-Erdős avec $n = 6$ sommets).

Considérons le graphe ayant pour sommets les entiers relatifs et dont les arêtes sont les (i, j) avec $i < j$ tels que $b_{i,j} = 1$, où $(b_{i,j})_{i < j \in \mathbb{Z}}$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p . Un tel graphe est appelé *graphe de Barak-Erdős*. Notons que l'on peut construire ces graphes simultanément pour tout $p \in [0, 1]$ par le couplage classique suivant : soient $(U_{i,j})_{i < j}$ des variables i.i.d de loi uniforme sur $[0, 1]$. Posons $b_{i,j} = 1$ si $U_{i,j} \leq p$ et 0 sinon. Par construction, les $b_{i,j}$ sont i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre p . On appellera parfois *couplage trivial* ce couplage.

L'objet d'étude en terme de percolation de dernier passage pour ce modèle est la longueur d'un plus long chemin entre les sommets 1 et n :

$L_{i,j}(p) :=$ la longueur d'un plus long chemin allant de k à l pour certains $i \leq k \leq l \leq j$.

On notera par la suite $L_n(p) := L_{1,n}(p)$ la longueur du plus long chemin entre 1 et n pour tout $n \geq 1$. On donne un exemple de réalisation de graphe de Barak-Erdős en Figure 1.4 pour laquelle $L_6(p) = 3$. Dans le cas où p ne dépend pas de n , une application du théorème sous-additif de Kingman (Théorème 1.1.1) nous donne l'existence d'une *constante de temps* $C(p)$ pour ce modèle (voir Section 1.2.4) :

$$\frac{L_n(p)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s., L^1} C(p). \quad (1.1)$$

On prouvera ce résultat en Section 1.2.4. On donnera également une autre preuve de l'existence de cette constante par un couplage avec un système de particules en interaction et grâce à la théorie de la reconstruction (cf. Sections 1.2.5 et 1.4.1).

L'un des enjeux de cette thèse est de présenter de nouveaux résultats sur cette constante de temps $C(p)$.

1.2.2. Motivations et applications

Présentons à présent quelques motivations pour ce modèle que nous avons évoquées précédemment.

Chaînes alimentaires

Historiquement, les graphes de Barak-Erdős ont été étudiés par Cohen, Briand et Newman en tant que modèle pour représenter les chaînes alimentaires [NCS86; New92; CBN90]. Dans ces articles, le modèle des graphes de Barak-Erdős est aussi appelé *cascade model*. On modélise une chaîne alimentaire de la façon suivante : on considère un nombre fini d'espèces, et on représente les relations de prédateurs dans un graphe dirigé. Si l'on numérote les espèces de 1 à n , et que l'on considère deux espèces $i < j$, alors on supposera que l'arête (i, j) est dans le graphe si et seulement si l'espèce j est un prédateur pour l'espèce i . On donne en Figure 1.5 un exemple tiré de [CBN90] de chaîne alimentaire représentée par un graphe dirigé.

Dans [NCS86; New92], un cas considéré est le cas des graphes de Barak-Erdős peu denses (ou "sparse") où l'on suppose que la probabilité de présence des arêtes $p = p_n$ dépend du nombre n de sommets

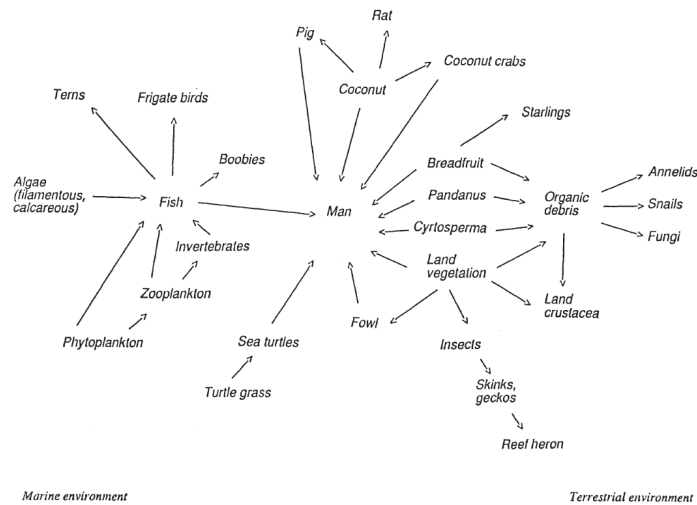


FIGURE 1.5 – Exemple de graphe dirigé représentant une chaîne alimentaire. Reproduit à partir de "Community food webs : Data and Theory", par J. Cohen, F. Briand et C. Newman, 1990, p.4, Springer-Verlag, [CBN90].

dans le graphe et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Plus précisément, dans le cas où $p = \frac{c}{n}$, le plus long chemin L_n dans un graphe de Barak-Erdős à n sommets est de l'ordre de $\frac{\log n}{\log \log n}$ lorsque n tend vers l'infini. Ce cas est important en termes de chaînes alimentaires car le degré moyen d'un sommet dans une chaîne alimentaire est d'ordre constant en pratique. Comme le remarque Newman, ce modèle donne une justification du fait que la plus longue chaîne dans une chaîne alimentaire réelle reste faible pour des chaînes alimentaires comportant un grand nombre d'espèces.

On notera que des résultats similaires sont connus pour les graphes non orientés. Pour les graphes d'Erdős-Renyi, le plus long chemin est un $O(\log(n))$ lorsque $p = c/n$ avec $c < 1$. À la différence du cas des graphes dirigés, lorsque $p = c/n$ avec $c > 1$, il existe au moins un chemin de longueur d'ordre n (cf. [AKS81] pour ces deux faits).

Récemment, une approximation poissonnienne de ce modèle a été étudiée : le *continuum cascade model* [IK12; Ito18]. L'analyse de ce modèle est plus simple que celle du cascade model classique. En particulier, la constante de temps pour ce modèle est asymptotiquement $e + \frac{3 \log(x)}{2x} + O(1/x)$ lorsque x tend vers l'infini. Plus précisément, le continuum cascade model est défini de la façon suivante : on considère le graphe dont l'ensemble des sommets est l'intervalle $[0, x]$. Pour tout $x_1 \in [0, x]$, l'ensemble des x_2 tels que (x_1, x_2) est une arête du graphe est un processus de Poisson ponctuel A_{x_1} sur $[x_1, x]$ d'intensité 1. Les $(A_{x_1})_{x_1 \in [0, x]}$ sont supposés indépendants. Si $L(x)$ correspond au nombre maximal d'arêtes que peut contenir un chemin partant du sommet 0, alors $x^{-1} \mathbb{E}[L(x)]$ est asymptotiquement équivalent à $e + \frac{3 \log(x)}{2x} + O(1/x)$.

Réalisation de tâches en parallèle

Une autre application de ce problème porte sur le calcul du temps moyen d'exécution de tâches par une infinité de processeurs, les tâches devant être réalisées de façon à respecter certaines contraintes d'ordre. Ces contraintes sont encodées dans un graphe dirigé appelé *graphe de tâches*.

Pour ce problème, supposons que l'on numérote les tâches de 1 à n . Le graphe de tâches G_n est un graphe ayant pour sommets $1, \dots, n$ et dont les arêtes sont de la forme (i, j) avec $i < j$. Soient deux tâches distinctes i et j avec $i < j$. L'arête (i, j) est présente dans le graphe de tâches G_n si et seulement si la tâche i doit être effectuée avant que le traitement de la tâche j ne puisse commencer.

Si l'on considère l'approximation que les temps d'exécution des tâches sont tous égaux à 1 presque sûrement et en supposant que l'on dispose d'un nombre très grand de processeurs (que l'on suppose infini), alors la longueur d'un plus long chemin dans le graphe de tâches correspond au temps total d'exécution des tâches.

Ce problème a d'abord été étudié par Gelenbe, Nelson, Philips et Tantawi [Gel+86] dans le cas où le graphe de tâches est un graphe de Barak-Erdős pour lequel chaque arête est présente avec probabilité p , et où le temps d'exécution de chaque tâche suit une loi exponentielle de paramètre 1. Ils donnent notamment l'approximation $\frac{2p}{(1+p)}$ pour la constante de temps. Par la suite, ce même problème sera étudié dans différents régimes par Isopi et Newman [IN94], et ils montrent que le temps d'exécution de n tâches est équivalent² à

$$\begin{cases} 4np_n & \text{lorsque } p_n \rightarrow 0 \text{ et } \frac{np_n}{\log n} \rightarrow +\infty, \\ \gamma \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma}}\right)^2 \log n & \text{lorsque } \frac{np_n}{\log n} \rightarrow \gamma, \\ \log n & \text{lorsque } \frac{np_n}{\log n} \rightarrow 0. \end{cases}$$

lorsque le nombre de sommets n tend vers l'infini. Lorsque le temps de réalisation de chaque tâche est constant égal à 1, Newman montre dans [New92] que la longueur du plus long chemin L_n se comporte comme enp_n en probabilité lorsque $p_n \rightarrow 0$ et $\frac{np_n}{\log n} \rightarrow +\infty$. La différence entre la constante e dans le cas de Newman dans [New92] et la constante 4 dans le cas traité dans [Gel+86] vient du fait que le temps de traitement n'est pas le même dans les deux modèles.

Auparavant, ce type de problème de calcul en parallèle avait déjà été étudié dans le cadre d'autres modèles de graphes aléatoires, notamment dans le cas où le graphe de tâches est un arbre de Bienaymé-Galton-Watson de loi de reproduction quelconque et où les temps de traitement des tâches sont i.i.d dans [FKM83].

En Section 1.4.2 (Remarque 1.4.2), on discutera d'une façon d'utiliser la théorie de la reconstruction dans le but de calculer des approximations de la constante de temps dans le cas où l'on ne suppose plus que le nombre de processeurs est infini. Dans ce cas, on notera que le fait que l'on doive choisir quelles tâches réaliser parmi les disponibles à chaque étape ajoute une complexité au problème. Deux

²Si l'on note T_n le temps d'exécution de n tâches, la convergence de $(np_n)^{-1}T_n$ est presque sûre dans le premier cas, et celle de $\log(n)^{-1}T_n$ est une convergence en probabilité dans les deux autres cas.

algorithmes simples de décision pour le traitement des tâches sont présentés dans [MN84] dans le cas où le graphe de tâches est un arbre et où l'on suppose le nombre de serveurs fini.

Stabilité des files d'attente

En général, pour un modèle de file d'attente quelconque, on suppose que l'on sert les clients à un certain taux λ et que les clients arrivent à un certain taux μ . On dit qu'une file d'attente est stable lorsque, presque sûrement, le nombre de clients à traiter n'explose pas lorsque l'on fait tendre le temps vers l'infini. Heuristiquement, la file d'attente est stable si le taux d'arrivée des clients est plus petit que le taux de départ des clients. Plus précisément, la file d'attente est stable lorsque $\mu < \lambda$. Inversement, lorsque $\lambda < \mu$, la file d'attente n'est pas stable.

Un autre problème modélisé par le plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős est le suivant. On considère un problème de files d'attente, avec un nombre infini de serveurs et n clients. On suppose que chaque sommet d'un graphe de Barak-Erdős à n sommets correspond à un client, et que l'arête (i, j) est présente dans le graphe si et seulement si le client i doit être servi avant que l'on commence à servir le client j . On suppose que les clients arrivent à taux μ , et que le temps de traitement de chaque client vaut 1 presque sûrement.

Dans [BF95], Baccelli et Foss étudient une classe générale de files d'attente et donnent un critère de stabilité rigoureux pour celles-ci. Grâce à ce critère, Foss et Konstantopoulos [FK03] donnent un critère de stabilité pour la file d'attente présentée ci-dessus. Pour ce problème, la constante de temps pour la percolation de dernier passage dans les graphes de Barak-Erdős est un seuil critique pour la stabilité de la file d'attente. Plus précisément, lorsque n est grand, le système est stable si et seulement si $C(p) < \mu$.

1.2.3. Résultats pour les graphes de Barak-Erdős

Nous présentons à présent plusieurs résultats connus sur le plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős.

Régime des graphes peu denses et transitions de phase

Le problème du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős a été étudié dans le régime des graphes peu denses par Newman [New92], c'est-à-dire, dans le cas où la probabilité de présence des arêtes p_n tend vers 0 lorsque le nombre de sommets n tend vers l'infini. Pour ce régime, il montre l'existence de différentes transitions de phase.

Notons qu'il est possible d'étudier différentes quantités semblables pour ce problème en fonction de si l'on impose ou non que les chemins considérés commencent en 1 et finissent en n . Dans [New92], Newman étudie le cas présenté précédemment correspondant à $L_n(p)$, ainsi que le cas du plus long chemin commençant au sommet 1. Plus précisément, pour tout $i < j \in \mathbb{Z}$, notons les quantités étudiées par Newman :

$$L_{i,j}(p) := \text{la longueur d'un plus long chemin allant de } k \text{ à } l \text{ pour certains } i \leq k \leq l \leq j, \quad (1.2)$$

$$L_{i,j}^g(p) := \text{la longueur d'un plus long chemin allant de } i \text{ à } l \text{ pour un certain } i \leq l \leq j, \quad (1.3)$$

où le g (pour gauche) en exposant indique que l'on impose au chemin à commencer en 1. Comme pour $L_n(p)$, on notera par la suite pour tout $n \geq 1$, $L_n^g(p) := L_{1,n}^g(p)$, la longueur du plus long chemin entre 1 et n commençant au sommet 1. Remarquons que l'on a la relation suivante étant donné la définition de ces deux quantités :

$$L_n(p) = \max_{j \in [1, n]} L_j^g(p).$$

Les deux théorèmes suivants (Théorèmes 1.2.1 et 1.2.2) montrés par Newman donnent le comportement asymptotique de la longueur du plus long chemin dans le régime où la probabilité de présence des arêtes $p = p_n$ tend vers 0 lorsque le nombre de sommets n tend vers l'infini (voir également le diagramme de phase en Figure 1.6 pour une illustration de ces résultats).

Tout d'abord, donnons le résultat dans le régime "sparse" dans le cas où l'on impose le chemin à commencer en 1 :

Théorème 1.2.1 ([New92]). *Pour deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notons $a_n \ll b_n$ si $a_n = o(b_n)$ lorsque n tends vers l'infini. Si $L_n^g(p_n)$ est la longueur d'un plus long chemin partant du sommet 1 dans un graphe de Barak-Erdős à n sommets et probabilité de présence d'arête p_n*

- Si $p_n \ll n^{-1}$, alors $L_n^g(p_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$.
- Si $p_n \sim \alpha n^{-1}$, $L_n^g(p_n)$ converge en loi vers $K(\alpha)$, où $K(t)$ est le nombre d'individus au temps $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ dans un processus de naissance pur à temps continu, où les naissances ont lieu à taux 1 et où $K(0) = 1$.
- Si $n^{-1} \ll p_n \ll 1$, $\frac{L_n^g(p_n)}{np_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} e$.

Le résultat dans le régime "sparse" dans le cas où l'on n'impose pas les points de départ et d'arrivée des chemins est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.2 ([New92]). *Si $L_n(p_n)$ est la longueur d'un plus long chemin partant dans un graphe de Barak-Erdős à n sommets et probabilité de présence d'arête p_n ,*

- Si $p_n \ll n^{-2}$, alors $L_n(p_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$.
- Si $p_n \sim \theta n^{-(1+\frac{1}{m})}$ pour un certain entier $m \geq 1$, alors $L_n(p_n) - m + 1$ converge en loi vers une loi de Bernoulli de paramètre $1 - e^{-\frac{\theta^m}{(m+1)!}}$.
- Si $\theta n^{-(1+\frac{1}{m})} \ll p_n \ll \theta n^{-(1+\frac{1}{m+1})}$ pour un certain entier $m \geq 1$, alors $L_n(p_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} m$.
- Si $n^{-(1+\varepsilon)} \ll p_n \ll 1$ pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{L_n(p_n)}{m_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$, où $m_n := \inf\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \binom{n}{m+1} p_n^m \leq 1\}$.

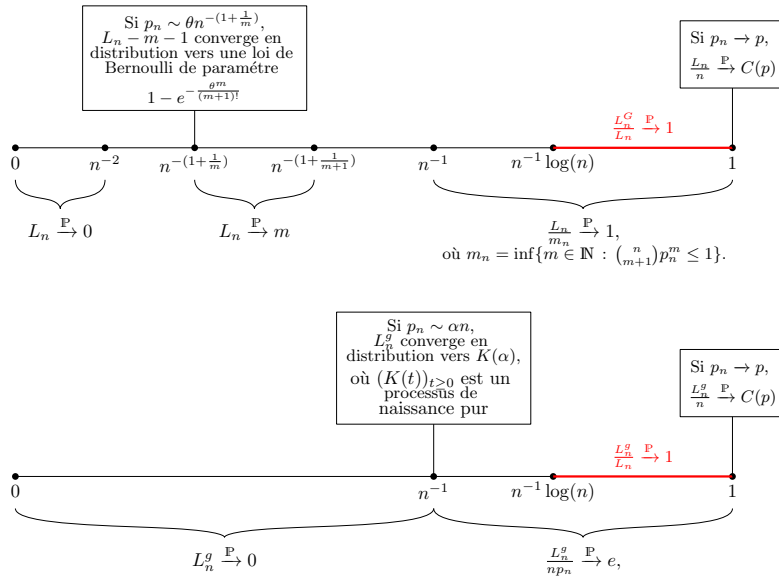


FIGURE 1.6 – Diagramme de phases pour la longueur du plus long chemin dans le régime des graphes peu denses.

En particulier, dans le cas où p_n est équivalent à $\gamma \frac{\log n}{n}$, la longueur du plus long chemin $L_n(p_n)$ est équivalente à $\log(n)\gamma A(\gamma)e$, où $A(\gamma) > 1$ est la solution de l'équation $A \log(A) = \frac{1}{e\gamma}$.

De plus, Newman montre que $L_n(p_n)$ et $L_n^g(p_n)$ ont presque sûrement la même asymptotique lorsque $p_n \gg \frac{\log(n)}{n}$. En particulier, il a montré que dans le régime où p ne dépend pas de n , le fait d'imposer ou non que le chemin commence en 1 ne change pas la constante de temps : presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n(p)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n^g(p)}{n} = C(p).$$

On donnera une preuve de ce dernier résultat dans la Section 1.4 (cf. Théorème 1.2.5).

La constante de temps dans le régime des graphes denses

À présent, nous allons introduire le cas que nous avons le plus étudié durant cette thèse : le cas des graphes denses (c'est-à-dire le cas où la probabilité de présence des arêtes p ne dépend pas du nombre de sommets n). Rappelons que la constante de temps $C(p)$ correspond à la limite presque sûre de la longueur d'un plus long chemin dans un graphe de Barak-Erdős fini divisée par le nombre de sommets dans le graphe, lorsque le nombre de sommets dans le graphe tend vers l'infini. Il n'est pas toujours facile de calculer explicitement les constantes de temps pour les modèles de percolation. Dans le cas des graphes de Barak-Erdős, il n'existe pas de formule explicite connue à ce jour pour la constante de temps $C(p)$. Il est néanmoins possible de l'approximer et d'étudier ses propriétés. Commençons par énoncer les deux faits suivants :

- $p \mapsto C(p)$ est croissante sur $[0, 1]$,
- $0 \leq C(p) \leq 1$ pour tout $p \in [0, 1]$.

La première de ces propriétés se montre grâce au couplage trivial introduit en Section 1.2.1. Avec ce couplage, il est clair que $L_n(p) \leq L_n(p')$ pour tout $0 \leq p < p' \leq 1$. Par passage à la limite, on obtient le premier point. Le second point vient du fait que $L_n(p)$ est compris entre 0 et n presque sûrement.

Dans [AF89], Albert et Frieze montrent que la constante de temps $C(1/2)$ pour le plus long chemin dans un graphe orienté uniforme ($p = 1/2$) est comprise entre 0.5654 et 0.610.

L'un des premiers résultats sur la constante de temps $C(p)$ en tant que fonction de p a été prouvé par Newman [New92]. Il montre que lorsque p tend vers 0, la constante de temps $C(p)$ est équivalente à ep . Ce résultat a ensuite été amélioré par Mallein et Ramassamy [MR21] grâce à un couplage avec un système de particules en interaction introduit dans [FK03] et par des approximations par des marches branchantes avec sélection. Pour ce couplage, le plus long chemin dans le graphe correspond à la position de la particule la plus à droite dans le système de particule. On dit que cette particule est au *front* du système de particule. Grâce à ce couplage, le résultat obtenu est le suivant :

$$C(p) = ep \left(1 + \frac{\pi^2}{2(-\log p)^2} \right) + o \left(\frac{p}{(-\log p)^2} \right) \quad \text{lorsque } p \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

Ce résultat est une conséquence du fait que l'on connaît les premiers termes asymptotiques de la vitesse du front pour les marches branchantes avec sélection. Dans [AP83], Aldous et Pitman montrent le premier terme de l'asymptotique pour la vitesse de propagation du front pour les marches branchantes avec sélection. Le second terme a ensuite été conjecturé par Brunet et Derrida [BD97] et prouvé par Bérard et Gouéré [BG10]. D'après une conjecture de Brunet et Derrida [BD97], le terme suivant pour cette asymptotique serait $3e\pi^2 p \frac{\log \log(1/p)}{(\log 1/p)^3}$.

Foss et Konstantopoulos [FK03] obtiennent quelques années après Newman des bornes inférieures et supérieures pour $C(p)$ valables pour tout $p \in]0, 1[$. Grâce à cet encadrement, ils obtiennent les cinq premiers termes du développement asymptotique de $C(p)$ à $p = 1$:

$$C(1 - q) = 1 - q + q^2 - 3q^3 + 7q^4 + O(q^5) \quad \text{lorsque } q \rightarrow 0.$$

Dans [MR21] et [MR19], Mallein et Ramassamy montrent divers résultats sur $C(p)$. En particulier, ils montrent que la constante de temps $C(p)$ est une fonction analytique du paramètre p .

Théorème 1.2.3 ([MR21], [MR19]). *La constante de temps $p \mapsto C(p)$ est analytique sur $]0, 1[$. De plus, si $C(p) = \sum_{k \geq 0} b_k (1 - p)^k$, pour p dans un voisinage ouvert de 1, alors $b_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \geq 0$.*

En particulier, ce résultat implique qu'il n'y a pas de transition de phase dans les graphes de Barak-Erdős denses pour la longueur du plus long chemin. Le résultat d'analyticité été obtenu dans un premier temps pour $p \in]1/2, 1[$ dans [MR21]. On notera qu'il est impossible de prolonger le résultat d'analyticité de la constante de temps en $p = 0$ en conséquence de l'asymptotique (1.4) à ce point donnée dans [MR21].

Ils introduisent également une suite de bornes supérieures et inférieures pour $C(p)$ en étudiant deux systèmes de particules approximant l'infinite bin model, un système de particules en lien avec notre

problème que nous présentons ci-dessous. Grâce à ces encadrements, ils obtiennent les 17 premiers coefficients du développement asymptotique de C au voisinage de 1. À ce jour, il n'existe pas de formule explicite pour cette suite de coefficients. Cette suite est répertoriée sur l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers (OEIS) sous l'identifiant A321309. Dans [MR19], Mallein et Ramassamy conjecturent que les coefficients de cette suite sont de signes alternés et croissants en valeur absolue. On montrera que cette conjecture est fautive dans le Chapitre 3 grâce à des méthodes numériques (voir Section 1.5.3).

Un élément clé utilisé dans [MR21] et [MR19] pour montrer ces résultats est un couplage [FK03] entre le problème de percolation et un système de particules en interaction : *l'infinite bin model (IBM)*. Nous présenterons ce système de particules et ce couplage dans la Section 1.2.5. Dans [MR21], la méthode utilisée pour étudier la régularité de la constante de temps est une méthode de "développement perturbatif exact". Dans [MR19], la méthode employée vient de la théorie de la reconstruction que nous présenterons plus en détails dans la Section 1.4.

Une autre question qui se pose lorsque l'on étudie ce type de problème concerne les fluctuations. Pour certains modèles de percolation de dernier passage dans le plan (ceux dans la classe d'universalité KPZ), les fluctuations sont connues et sont reliées à la loi de Tracy-Widom, c'est-à-dire la loi de la plus grande valeur propre dans une matrice aléatoire de type GUE. A contrario, dans le cadre de la percolation de dernier passage dans les graphes complets, les fluctuations sont plus simples : elles sont gaussiennes. Ce résultat est montré en premier lieu par Bollobas et Brightwell [BB97b]. Il est également possible de montrer une convergence en processus du plus long chemin entre les sommets 1 et nt lorsque n tend vers l'infini. Le théorème suivant est montré par Denisov, Foss et Konstantopoulos [DFK12] pour une généralisation des graphes de Barak-Erdős pour laquelle la probabilité de présence des arêtes dépend de la distance entre leurs extrémités. Il a ensuite été montré dans un cadre plus général dans [FMS14]. Dans notre cas, ce résultat s'énonce de la façon suivante :

Théorème 1.2.4 ([DFK12; FMS14]). *Il existe une constante $\sigma(p) > 0$ telle que le processus $(l_n(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ converge faiblement vers un mouvement Brownien standard dans l'espace de Skorokhod $D[0, +\infty)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact [Bil99], où*

$$l_n(t) := \frac{L_{\lfloor nt \rfloor} - C(p)nt}{\sigma(p)\sqrt{n}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Un dernier résultat concerne les variantes de ce problème.

Rappelons que Newman a montré que le fait d'imposer que le chemin commence en 1 ou non ne change pas la constante de temps pour le problème du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős. Il est également possible de montrer que la constante de temps est la même si l'on impose que le chemin commence en 1 et finisse en n , où n est la taille du graphe. Plus précisément, notons

$$L_{i,j}^{g,d}(p) := \text{la longueur d'un plus long chemin allant de } i \text{ à } j,$$

et $L_n^{g,d}(p) := L_{1,n}^{g,d}(p)$. Rappelons que $L_n^g(p)$ et $L_n(p)$ sont définis de la même manière en (1.2) et (1.3). Le fait que $L_{s,t}^{g,d}(p)$ a la même asymptotique que ces trois autres quantités a été démontré par Denisov, Foss et Konstantopoulos dans [DFK12] grâce à la théorie de la reconstruction. On donnera une preuve du théorème suivant en Section 1.4.2.

Théorème 1.2.5 ([DFK12]). *Pour tout $p \in]0, 1]$, presque sûrement,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{g,d}(p)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^g(p)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(p)}{n} = C(p).$$

Le reste de la Section 1.2 (c'est-à-dire les Sections 1.2.4 et 1.2.5) est dédiée à la présentation d'éléments de preuve de certains de ces résultats. En Section 1.2.4, on présente comment le théorème sous-additif de Kingman s'applique pour ce modèle. Dans la Section 1.2.5, on introduit le système de particules en interaction appelé infinite bin model introduit par Foss et Konstantopoulos, et utilisé par Mallein et Ramassamy pour étudier ce modèle.

1.2.4. Application du théorème sous-additif dans le régime des graphes denses

Présentons à présent un premier élément de preuve pour l'étude de ce modèle. On commence par montrer comment le Théorème 1.1.1 s'applique au problème du plus long chemin dans un graphe de Barak-Erdős.

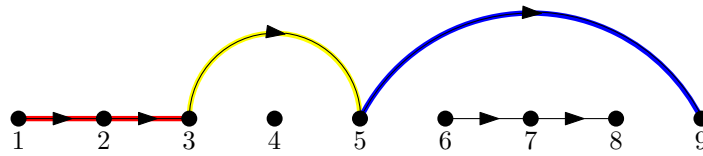


FIGURE 1.7 – Illustration de la propriété de sous-additivité de $(L_{s,t}(p) + 1)_{s < t}$, où $L_{s,t}(p)$ la longueur d'un plus long chemin entre les sommets s et t . Le chemin le plus long est $(1, 2, 3, 5, 9)$. Les restrictions de ces chemins aux ensembles de sommets $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $\llbracket 4, 9 \rrbracket$ sont représentées respectivement en rouge et bleu. La longueur du chemin rouge vaut 2 et est majorée par $L_{1,4}(p) = 2$. La longueur du chemin bleu vaut 1 et est majorée par $L_{4,9}(p) = 2$. L'arête jaune qui relie ces deux chemins a pour longueur 1. On a donc bien $L_{1,9}(p) \leq L_{1,4}(p) + L_{4,9}(p) + 1$.

Pour ce modèle, le Théorème 1.1.1 s'applique au processus sous-additif $(L_{m,n}(p) + 1)_{0 \leq m < n}$. En effet, pour tout $1 \leq s < u < t$,

$$L_{s,t}(p) \leq L_{s,u}(p) + L_{u,t}(p) + 1.$$

Une illustration de cette propriété est donnée en Figure 1.7. Ce résultat se montre de la façon suivante : considérons un plus long chemin dont les extrémités sont entre s et t . On découpe ce chemin en deux parties : celle dont les sommets sont entre s et u et celle dont les sommets sont entre u et t . Le plus long chemin entre s et t considéré s'obtient comme la concaténation de ces deux parties, plus une éventuelle arête reliant ces deux chemins si l'un de ses deux chemins n'a pas u en extrémité³. Par définition de L , la longueur du chemin de gauche est majorée par $L_{s,u}(p)$ et la longueur du

³Dans l'exemple donné en Figure 1.7, cette éventuelle arête est bien présente et est représentée en jaune.

chemin de droite est majorée par $L_{u,t}(p)$. On obtient alors la propriété de sous-additivité. Le fait que $C = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[\frac{L_n(p)}{n}]$ soit fini est clair car $L_n(p)$ est compris entre 0 et n . Les autres hypothèses du Théorème 1.1.1 sont également satisfaites par la Remarque 1.1.2 étant donné que $L_{m,n}(p)$ s'écrit de la forme suivante :

$$L_{m,n}(p) = F_{m-n}(\dots, X_{m-1}, X_m, X_{m+1}, \dots),$$

où $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont des variables i.i.d et F_k sont des fonctions déterministes.⁴ Par conséquent, pour tout $p \in [0, 1]$, il existe une constante $C(p)$ ne dépendant que du paramètre p telle que

$$\frac{L_n(p)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} C(p).$$

La constante de temps $C(p)$ est appelée *constante de temps* pour le modèle de Barak-Erdős.

Étant donné que la longueur $L_n(p)$ d'un plus long chemin entre les sommets 1 et n est comprise entre 0 et n pour tout $p \in [0, 1]$, on obtient la convergence dans L^1 de $n^{-1}L_n(p)$ vers $C(p)$ par le théorème de convergence dominée :

$$\frac{L_n(p)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s., L^1} C(p).$$

Il n'est pas aussi simple de montrer que $(L_n^{g,d}(p))_{n \geq 0}$ et $(L_n^g(p))_{n \geq 0}$ convergent de la même façon. En effet, il n'est pas clair que $(L_n^g(p))_{n \geq 0}$ vérifie une propriété de sous-additivité ou de sur-additivité. On remarquera néanmoins que $(L_n^{g,d}(p))_{n \geq 0}$, vérifie la propriété de sur-additivité suivante (voir Figure 1.8) : si l'on note $L_{s,t}^{g,d}(p)$ le plus long chemin d'arêtes du graphe partant de s et finissant en t , alors pour tout $s < u < t$,

$$L_{s,t}^{g,d}(p) \geq L_{s,u}^{g,d}(p) + L_{u,t}^{g,d}(p).$$

Remarquons toutefois que $L_n^{g,d}(p)$ prend la valeur $-\infty$ lorsqu'il n'y a pas de chemin entre les sommets 1 et n , et que cet événement arrive avec probabilité positive pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $\inf \mathbb{E}[L_n^{g,d}(p)] = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ce qui met en défaut les hypothèses du Théorème 1.1.1. Néanmoins, ce n'est qu'un problème technique car dans un graphe de Barak-Erdős, on peut montrer que presque sûrement, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, il existe un chemin partant de 1 et finissant en n dans le graphe.

⁴On peut en effet construire $L_{m,n}(p)$ de la façon suivante : on considère que $X_i = (X_{i,j})_{i < j}$ sont des variables i.i.d de Bernoulli de paramètre p , où $X_{i,j}$ vaut 1 si et seulement si l'arête (i, j) est dans le graphe, et où $F_k(\dots, x_1, x_0, x_1, \dots)$ correspond au plus long chemin inclus dans le graphe ayant pour sommets $0, \dots, k$ et ayant pour arêtes les (i, j) avec $0 \leq i < j \leq k$ tels que $x_{i,j} = 1$.

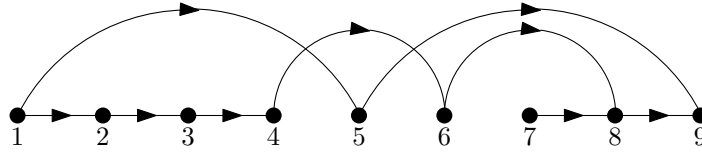


FIGURE 1.8 – Illustration de la propriété de sur-additivité de $(L_{s,t}^{g,d}(p))_{s<t}$. Pour tout $1 \leq u \leq 9$ avec $u \notin \{5, 7\}$, $L_{1,u}^{g,d}(p) + L_{u,9}^{g,d}(p) = L_{1,9}^{g,d}(p) = 6$. Pour $u = 5$, $L_{1,5}^{g,d}(p) = 1$ et $L_{5,9}^{g,d}(p) = 1$ donc $L_{1,9}^{g,d}(p) > L_{1,5}^{g,d}(p) + L_{5,9}^{g,d}(p)$. Pour $u = 7$, $L_{1,7}^{g,d}(p) = -\infty$, donc $L_{1,9}^{g,d}(p) > L_{1,7}^{g,d}(p) + L_{7,9}^{g,d}(p)$.

1.2.5. Couplage avec un système de particules en interaction : l'infinite bin model

Cette section est dédiée à la présentation de l'infinite bin model (IBM) et à son lien avec le problème du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős. Dans cette thèse, on étudiera une limite hydrodynamique déterministe de l'infinite bin model. On pourra se référer au Chapitre 4 et à la Section 1.5.4 pour ce dernier point. Dans la Section 1.3.1, nous présenterons une généralisation de l'infinite bin model dont nous nous servirons au Chapitre 2 pour étudier le modèle plus général de percolation sur les graphes complets avec des poids sur les arêtes.

L'infinite bin model est un système de particules en interaction introduit par Foss et Konstantopoulos dans [FK03]. Pour ce modèle, les particules évoluent dans \mathbb{Z} . Dans le même article, ils montrent que le front, c'est-à-dire la particule la plus à droite dans le système, se propage de façon linéaire en fonction du temps. Ce système de particules est paramétré par une loi de probabilité sur $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Pour étudier le plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős, Foss et Konstantopoulos [FK03] couplent les graphes de Barak-Erdős avec l'infinite bin model de paramètre la loi géométrique de paramètre p . Pour ce couplage, la position du front au temps n correspond au plus long chemin dans un graphe de Barak-Erdős à n sommets. Ils démontrent ainsi que la constante de temps est bien définie, et qu'elle correspond à la vitesse du front de cet infinite bin model.

Pour montrer que le front se propage de façon linéaire en le temps, ils construisent une version stationnaire de l'infinite bin model grâce à la théorie de la reconstruction que nous présenterons dans la Section 1.4 (voir Section 1.4.1 pour la construction de l'infinite bin model stationnaire).

Ce couplage a ensuite été étudié par Mallein et Ramassamy [MR19]. Grâce à ce couplage et à la théorie de la reconstruction, ils montrent l'analyticité de la constante de temps en $p \in]0, 1]$ (cf. Théorème 1.2.3). Ce couplage est également une étape dans la preuve de l'asymptotique (1.4) obtenue dans le même article. On notera qu'un cas particulier de l'infinite bin model avait déjà été étudié plus tôt par Aldous et Pitman [AP83].

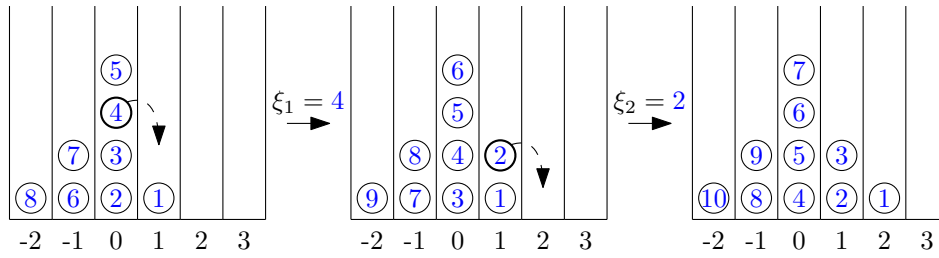


FIGURE 1.9 – Illustration de la dynamique de l'IBM. À gauche, on représente les quatre urnes au front de la configuration initiale au temps $n = 0$. On numérote à chaque étape (en bleu) les particules dans l'ordre croissant en les parcourant de la droite vers la gauche. Pour passer de la $n - 1$ à la n -ième étape, on ajoute une particule dans l'urne à droite de l'urne contenant la particule numérotée ξ_n . Pour passer du temps 0 au temps 1, on ajoute une particule dans l'urne 1 car $\xi_1 = 4$ et la quatrième particule la plus à droite au temps 0 est dans l'urne 0. Pour passer du temps 1 au temps 2, on ajoute une particule dans l'urne 2 car $\xi_2 = 2$ et la deuxième particule la plus à droite au temps 1 est dans l'urne 1.

L'infinite bin model

Commençons par présenter l'infinite bin model. On considère un modèle d'urne évoluant en temps discret. Les urnes sont indexées par les entiers relatifs. Chaque urne contient un certain nombre entier de particules. À chaque étape, on ajoutera une particule dans une urne. Le choix de l'urne est aléatoire. Plus précisément, à chaque étape, on tire indépendamment du passé une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Si cette variable vaut k , on ajoutera la particule dans l'urne immédiatement à droite de l'urne contenant la k -ième particule la plus à droite. On donne une illustration de ce système de particules en Figure 1.9.

Configuration d'urnes : On représente une configuration d'urnes par un élément de $(\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}$. Si $X = (X(i))_{i \in \mathbb{Z}}$ est une configuration d'urnes, alors $X(i)$ représente le nombre de particules dans l'urne i . On notera que l'on autorise une urne à contenir une infinité de particules.

Front d'une configuration : Si $X = (X(i))_{i \in \mathbb{Z}}$ est une configuration d'urnes, on dénote par $f(X)$ l'index de l'urne la plus à droite contenant au moins une particule. Par la suite, on ne considérera que les configurations d'urnes pour lesquelles le front est bien défini et fini.

Dynamique : Soit $X \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathbb{Z}}$ et $k \in \mathbb{N}$. On dénote par $\Phi_k(X)$ la configuration X à laquelle on ajoute une particule dans l'urne immédiatement à droite de la k -ième particule la plus à droite. Plus précisément,

$$\Phi_k(X) = X + (\dots, 0, 1, 0, \dots),$$

où le 1 dans $(\dots, 0, 1, 0, \dots)$ est à l'index $\min\{j \in \mathbb{Z} : \sum_{i=j}^{\infty} X(i) < k\}$.

Infinite bin model de loi μ (IBM(μ)) : On considère μ une loi de probabilité sur \mathbb{N} et $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d de loi μ . Pour $X_0 \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathbb{Z}}$ telle que $f(X_0)$ est bien défini et telle qu'il existe une infinité de particules dans X_0 , on définit par récurrence sur n le processus $(X_n)_{n \geq 0}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \Phi_{\xi_n}(X_{n-1}). \tag{1.5}$$

Le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ obtenu est appelé *infinite bin model* de loi μ et de configuration initiale X_0 . On le notera parfois $\text{IBM}(\mu)$.

Pour ce modèle, il est possible de montrer qu'il existe une constante v_μ telle que la position du front est asymptotiquement équivalente à nv_μ au temps n , lorsque n tend vers l'infini. Cette constante correspond à la *vitesse du front pour l'IBM*(μ). On montrera le théorème suivant en Section 1.4.1.

Théorème 1.2.6. *Pour toute loi μ sur \mathbb{N} telle que $\mu(\{1\})$ est non nul, il existe une constante v_μ strictement positive telle que presque sûrement et dans L^1 ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(X_n)}{n} = v_\mu.$$

Dans cette thèse, on étudiera une version déterministe de ce processus stochastique : le *liquid bin model* (LBM). Cette version peut s'interpréter comme limite hydrodynamique de l'infinite bin model de loi μ lorsque les écarts entre les atomes de μ tendent vers l'infini d'une certaine façon. On présentera ce modèle et ses propriétés dans la Section 1.5.4 et le Chapitre 4.

Le couplage de Foss et Konstantopoulos

L'intérêt d'étudier ce système de particules vient de la propriété de couplage entre les graphes de Barak-Erdős et ce système de particules. En effet, il est possible de construire simultanément le graphe et l'infinite bin model de façon à ce que le plus long chemin dans le graphe de Barak-Erdős à n sommets corresponde à la position du front dans l'infinite bin model à l'instant n . Nous présentons à présent la façon dont on réalise ce couplage.

Considérons un graphe de Barak-Erdős de probabilité de présence d'arête p et rappelons que $L_n(p)$ est la longueur d'un plus long chemin dans le graphe partant d'un sommet i et finissant en un sommet j , où $i \leq j$ sont des sommets entre 1 et n . De façon similaire, considérons

$$L_n^d(p) := \text{la longueur d'un plus long chemin allant de } k \text{ à } n \text{ pour un certain } 1 \leq k \leq n.$$

On construit le couplage de la façon suivante : considérons la configuration d'urnes X_0 contenant une infinité de particules dans l'urne -1 et aucune particule dans les autres urnes. Par récurrence sur n , on pose que $X_n = X_{n-1} + (\dots, 0, 1, 0, \dots)$, où le 1 dans est en position $L_n^d(p)$ dans le dernier vecteur.

Avec cette construction, on peut montrer par récurrence sur n que les indices des urnes contenant les particules dans le système d'urnes au temps n comptées avec répétitions sont les $(L_k^d(p))_{1 \leq k \leq n}$. Par conséquent, la position de la particule la plus à droite dans la configuration d'urnes au temps n correspond au maximum des $(L_k^d(p))_{1 \leq k \leq n}$, et ce maximum vaut $L_n(p)$:

$$f(X_n) = L_n(p).$$

Il reste à vérifier que $(X_n)_{n \geq 0}$ a la dynamique d'un infinite bin model. Plus précisément, on montre à présent que $(X_n)_{n \geq 0}$ a la loi d'un infinite bin model de loi $\mathcal{G}(p)$ géométrique sur \mathbb{N} de probabilité de

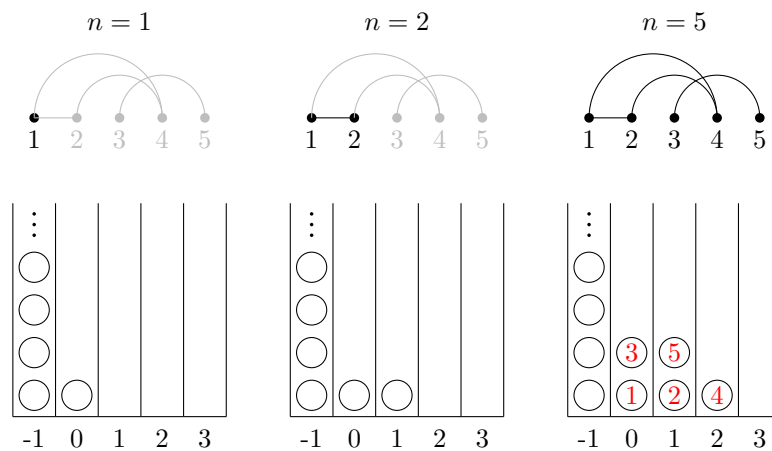


FIGURE 1.10 – Illustration de la construction du couplage : on ajoute un à un les sommets dans le graphe de Barak-Erdős. À chaque fois que l'on ajoute un sommet dans le graphe, on ajoute une particule dans le système de particules. Au temps $n = 0$, l'urne -1 contient une infinité de particules, et les urnes à sa droite n'en contiennent aucune. Au temps 1, on ajoute le sommet 1 dans le graphe, et comme le plus long chemin finissant en 1 est de longueur 0, on ajoute la particule 1 dans l'urne 0. On procède ainsi pour tous les temps de 1 à 5. Au temps 2, on ajoute le sommet 2 qui est relié au sommet 1 pour la réalisation ci-dessus. Le plus long chemin finissant en 2 dans le graphe à longueur 1, donc on ajoute la particule 2 dans l'urne 1. À gauche et au centre de la figure, on représente le graphe et le système de particules aux instants respectifs 1 et 2. À droite, on représente le graphe et le système de particules obtenu à l'instant 5. Dans chaque particule dans la partie droite de la figure, on affiche en rouge l'étape à laquelle la particule a été ajoutée dans le système.

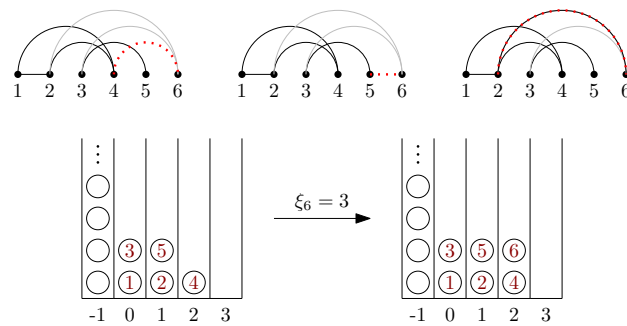


FIGURE 1.11 – Illustration du fait que le processus obtenu a bien la loi de l'IBM de loi géométrique de paramètre p . Étudions le moment où l'on ajoute la sixième particule et le sommet 6. On va explorer une par une les arêtes de la forme $(i, 6)$ avec $1 \leq i \leq 5$ en parcourant les i dans l'ordre des plus longs chemins finissant en i dans le graphe à n sommets. Cela revient à parcourir les particules de la droite vers la gauche dans le système de particules par construction, c'est-à-dire dans l'ordre 4, 5, 2, 3 puis 1 pour cet exemple. On représente en pointillés rouges l'ordre dans lequel on explore ces arêtes sur l'illustration. On commence par regarder si l'arête $(4, 6)$ est dans le graphe. Si elle l'est, alors le plus long chemin est nécessairement de longueur 3 car le plus long chemin dans le graphe à 5 sommet est de longueur 2 et ne peut augmenter que de 1 à chaque étape. Sinon, si $(4, 6)$ n'est pas dans le graphe, on explore ensuite l'arête $(5, 6)$, puis si elle n'est pas dans le graphe l'arête $(2, 6)$, etc. jusqu'à ce qu'on trouve une arête dans le graphe. En explorant les arêtes dans cet ordre, on s'assure que dès que l'on explore une arête qui est dans le graphe, on ne pourra pas faire mieux que la position de la particule plus un en terme de plus long chemin. Étant donné que l'exploration des arêtes correspond à une répétition d'expériences aléatoires indépendantes de probabilité de succès p , on ajoute une particule avec la même dynamique que pour celle d'un IBM de loi géométrique de paramètre p . Sur la figure, la première arête appartenant au graphe que l'on explore est la troisième, donc $\xi_6 = 3$.

succès p . Si tel est le cas, le Théorème 1.2.6 implique que la constante de temps existe et qu'elle est égale à v_{μ_p} , où μ_p est la loi géométrique de paramètre p :

$$C(p) = v_{\mu_p}.$$

Pour tout $n \geq 1$, considérons σ_n une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $(L_{\sigma_n(k)}^d(p))_{1 \leq k \leq n}$ soit décroissante. Notons qu'il existe plusieurs choix pour σ_n , mais la dynamique sera indépendante de ce choix. On peut par exemple choisir d'imposer que les $\sigma_n(k)$ tels que $L_{\sigma_n(k)}^d(p) = a$ sont dans l'ordre croissant pour tout a . L'idée est d'utiliser la propriété de récurrence suivante pour $L_n^d(p)$: lorsque n est relié à un sommet $1 \leq k < n$ dans le graphe,

$$L_n^d(p) = 1 + \max\{L_k^d(p) : k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, b_{k,n} = 1\}.$$

En d'autres termes, la longueur du plus long chemin finissant en n est égale à 1 plus la longueur d'un plus long chemin finissant en k , où k est un sommet relié à n dans le graphe maximisant $L_k^d(p)$. Lorsque n n'est pas relié à un sommet $1 \leq k < n$ dans le graphe, on a $L_n^d(p) = 0$. Posons

$$\xi_n := \min\{k \in \mathbb{N} : b_{\sigma_{n-1}(k),n} = 1\}$$

qui correspond au k tel que $\sigma_{n-1}(k)$ est le sommet j maximisant $L_j^d(p)$ parmi les sommets reliés à n .⁵ Avec cette notation, lorsque n est relié à un sommet k entre 1 et $n-1$,

$$L_n^d(p) = L_{\sigma_{n-1}(\xi_n)}^d(p) + 1.$$

En terme d'urnes, cette inégalité s'interprète de la façon suivante : la position de la nouvelle particule au temps n est dans l'urne immédiatement à droite de l'urne contenant la ξ_n -ième particule la plus à droite au temps $n-1$, ce qui correspond bien à la dynamique de l'infinite bin model. Il reste à voir que les $(\xi_n)_{n \geq 1}$ sont i.i.d de loi géométrique sur \mathbb{N} de paramètre p . Le fait que la loi de ξ_n soit géométrique de paramètre p est une simple conséquence du fait que conditionnellement à $(L_k^d(p))_{k \leq n-1}$, ξ_n est un nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p . Le fait qu'elles soient indépendantes est une conséquence du fait que $(b_{i,j})_{i < j}$ sont des variables de loi de Bernoulli i.i.d.

On donnera également une illustration de la construction de ce couplage en Figures 1.10 et 1.11.

⁵Pour que ξ_n soit bien défini pour tout $n \geq 1$ et de loi géométrique de paramètre p , on suppose que les $b_{i,j}$ avec $i \geq j$ sont également bien définis. Plus précisément, on suppose que les $(b_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d de loi Bernoulli de paramètre p . Notons que la valeur de $b_{i,j}$ lorsque $i \geq j$ n'importe pas car ils n'interviennent que dans les cas où un sommet n n'est relié à aucun sommet entre 1 et $n-1$, et dans ce cas, $L_n^d(p) = 0$. Dans le cas où n est relié à un sommet entre 1 et $n-1$, ξ_n est nécessairement inférieur à $n-1$. Par conséquent, $\sigma_{n-1}(\xi_n)$ est bien défini dans ce cas. On peut également définir $\sigma_{n-1}(k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k > n-1$, ainsi que $L_k^d(p)$ pour tout $k \leq 0$ de façon à ce que la formule de récurrence pour $L_n^d(p)$ valable dans le cas où un sommet de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ est relié à n , soit également valable dans le cas où aucun sommet de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ n'est relié à n : il suffit de poser $\sigma_{n-1}(k) = k$ pour tout $k > n-1$ et $L_k^d(p) = -1$ pour tout $k \leq 0$.

1.3. Percolation de dernier passage sur les graphes complets acycliques orientés

Nous introduisons maintenant le modèle de percolation sur les graphes complets avec des poids sur les arêtes. Ce modèle généralise le problème du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős présenté en Section 1.2. Dans le Chapitre 2, on montrera des résultats analytiques sur la constante de temps dans ce cadre plus général (voir Section 1.5.1). Certains de ces résultats sont similaires à ceux présentés en Section 1.2.3.

Comme dans le cas des graphes de Barak-Erdős, ce problème peut se réduire à l'étude d'un système de particules en interaction : la *max growth system (MGS)*. Ce modèle et ce système de particules ont été étudiés par Foss, Konstantopoulos, Mallein et Ramassamy [Fos+23a]. Ce système de particules est une généralisation de l'infinite bin model que nous avons présenté précédemment en Section 1.2.5.

1.3.1. Cas général

Le problème est le suivant. On considère le graphe dirigé complet à n sommets G_n , dont les sommets sont les entiers de 1 à n , et dont les arêtes sont tous les (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$. À chaque arête du graphe, on assigne un poids aléatoire. On suppose que les poids sont indépendants et de même loi. On considère des chemins orientés dans ce graphe, c'est-à-dire des suites de sommets $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n$, avec $0 \leq l \leq n$. Le poids d'un tel chemin est défini comme la somme des poids de ses arêtes. La quantité que nous étudions ici est le poids maximal pour un chemin dans un tel graphe à n sommets.

Plus rigoureusement, si $w_{i,j}$ correspond au poids de l'arête (i, j) et si $\gamma = (i_1, \dots, i_l)$ est un chemin orienté dans le graphe à n sommets, alors le poids du chemin γ vaut

$$w_\gamma := w_{i_1, i_2} + \dots + w_{i_{l-1}, i_l}.$$

Par la suite, on supposera que les $w_{i,j}$ sont i.i.d de loi ν , où ν est une loi sur $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$.

Pour ce modèle, on autorise les poids $w_{i,j}$ à valoir $-\infty$. On notera que tout chemin contenant une arête de poids $-\infty$ ne pourra pas être un chemin de poids maximal. Par conséquent, donner le poids $-\infty$ à une arête revient à retirer l'arête du graphe si l'on s'intéresse uniquement au poids maximal d'un chemin dans le graphe. En particulier, on remarquera que dans le cas où les poids des arêtes valent soit 1 ou $-\infty$ presque sûrement, le poids maximal d'un chemin dans le graphe a la même loi que la longueur maximale d'un chemin dans un graphe de Barak-Erdős.

De manière analogue au cas des plus longs chemins dans les graphes de Barak-Erdős, on considère les quantités suivantes :

- $W_{i,j} :=$ le poids d'un chemin de poids maximal allant de k à l pour certains $i \leq k \leq l \leq j$,
- $W_{i,j}^g :=$ le poids d'un chemin de poids maximal allant de i à l pour un certain $i \leq l \leq j$,
- $W_{i,j}^{g,d} :=$ le poids d'un chemin de poids maximal allant de i à j .

De plus, on notera $W_n := W_{1,n}$, $W_n^g := W_{1,n}^g$ et $W_n^{g,d} := W_{1,n}^{g,d}$ pour tout $n \geq 1$.

Comme pour l'étude du chemin le plus long dans les graphes de Barak-Erdős, il est possible de montrer que ces quantités sont toutes presque sûrement asymptotiquement équivalentes à n fois une même constante de temps, sous réserve que le moment d'ordre 2 de la restriction de ν à \mathbb{R}_+^* soit fini (cf. [FMS14]). Dans ce cas, il existe une constante $C(\nu)$ telle que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n^g}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n^{g,d}}{n} = C(\nu),$$

et la même convergence a lieu dans L^1 pour W_n et W_n^g par théorème de convergence dominée. Ce résultat se montre de la même manière que dans le cas des graphes de Barak-Erdős (Théorème 1.2.5) avec les événements de reconstructions du MGS (cf. [Fos+23b] pour plus de détails).

Commençons par montrer deux propriétés faciles à obtenir sur cette constante de temps :

- (i) La fonction $\nu \mapsto C(\nu)$ est croissante pour l'ordre stochastique.
- (ii) La constante de temps est homogène, c'est-à-dire que multiplier tous les poids par une constante strictement positive M revient à multiplier la constante de temps par M .

Le premier fait est une conséquence du fait que si ν_1 est stochastiquement dominée par ν_2 , alors il existe un couplage tel que $X_1 \leq X_2$ et X_i a pour loi ν_i pour $i \in \{1, 2\}$. Le second fait est trivial par définition de la constante de temps.

De plus, en supposant une hypothèse de régularité supplémentaire sur la loi ν , Foss, Martin et Schmidt [FMS14] donnent également le comportement asymptotique de $W_n^{g,d}$ dans le cas où ν est supportée par $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_+^*$ et où la restriction de ν à \mathbb{R}_+^* n'a pas de second moment. Rappelons qu'une fonction g sur \mathbb{R}_+^* à valeurs réelles varie régulièrement à taux $s \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\frac{g(tx)}{g(x)}$ tend vers t^{-s} lorsque x tend vers l'infini pour tout $t > 0$. Le résultat est le suivant : si la fonction de répartition des poids varie régulièrement à taux $s \in]0, 2[$,⁶ alors il existe une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ telle que $\frac{W_n^{g,d}}{b_n}$ converge vers une variable aléatoire w (cf. [FMS14]). De plus, la suite $\log(b_n)$ est équivalente à $\log(n^{2/s})$ lorsque n tend vers l'infini.

Dans [FMS14], Foss, Martin et Schmidt donnent une condition suffisante pour avoir un théorème central limite (Théorème 1.3.1).

Théorème 1.3.1 ([FMS14]). *Soit ν une loi de probabilité sur $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_+^*$ telle que $\nu(\mathbb{R}_+^*) > 0$. Supposons que la loi des poids est ν . Si le moment d'ordre 3 de la restriction de ν à \mathbb{R}_+^* est fini, alors il existe une constante $\sigma(\nu) > 0$ telle que le processus*

$$\left(l_n(t) = \frac{W_{[nt]} - C(\nu)nt}{\sigma(\nu)\sqrt{n}}, t \geq 0 \right)$$

converge en loi vers un mouvement Brownien standard dans l'espace de Skorokhod $D[0, +\infty)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

⁶Notons que cette hypothèse implique que le second moment de la loi des poids n'est pas fini.

Comme pour le problème du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős, l'existence de la constante de temps et le Théorème 1.3.1 se montrent grâce à la théorie de la reconstruction.

Dans [Fos+23a], ce modèle est étudié pour les mesures de probabilité ν dont le support est borné supérieurement par une constante : on considère les mesures ν telles que $\nu([-\infty, M]) = 1$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on reste dans le cadre dans lequel Foss, Martin et Schmidt ont montré l'existence de la constante de temps. On a donc l'existence de la constante de temps $C(\nu)$. *C'est dans ce cadre que nous nous placerons dans cette thèse.*

Comme pour les graphes de Barak-Erdős, ce modèle peut s'étudier via un couplage avec un système de particules en interaction : le max growth system (MGS) [Fos+23a]. Ce modèle a été introduit en vue de calculer des approximations numériques de la constante de temps. En effet, la constante de temps est définie comme la limite d'un processus aléatoire (lorsque le nombre de sommets dans le graphe tend vers l'infini). En construisant des événements de reconstruction pour ce modèle (un outil que nous présenterons plus en détails dans la Section 1.4), il est possible de montrer que la constante de temps s'écrit comme l'espérance d'une certaine variable aléatoire. Il est alors possible de calculer des approximations de cette constante de temps $C(\nu)$ par une méthode de Monte-Carlo classique.

Le max growth system (MGS)

Le max growth system est un système de particules en interaction sur l'axe réel à temps discret. Ce MGS est une généralisation de l'IBM présenté en Section 1.2.5. Dans le MGS, les particules peuvent maintenant être placées sur tout \mathbb{R} et plus seulement sur \mathbb{Z} comme pour l'IBM. À chaque instant, on a un certain nombre de particules dans le système. On suppose qu'à tout temps, le maximum des positions des particules est fini (autrement dit, il existe un intervalle de la forme $[M, +\infty[$ ne contenant aucune particule). Le système évolue de la façon suivante : à chaque instant, on va ajouter une particule dans le système. Pour déterminer la position de cette nouvelle particule au temps $n + 1$, chaque particule dans le système au temps n propose une position pour la nouvelle particule. La position de la nouvelle particule au temps $n + 1$ correspond au maximum de ces propositions. On suppose que la proposition d'une particule à la position x et à un instant n a la même loi que $x + w$, où w suit la loi ν . On suppose de plus que les propositions des particules sont indépendantes entre elles à chaque étape, et également indépendantes entre étapes. On illustre la dynamique de ce système de particules en Figure 1.12.

Plus précisément, on représente une configuration de particules par une mesure discrète sur \mathbb{R} , où chaque atome correspond à une particule. Par exemple, la configuration $\lambda = \delta_0 + 2\delta_3$ correspond à une configuration avec une particule en position 0 et deux particules en position 3. Si λ est une configuration de particules, on notera $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ les positions des particules dans l'ordre décroissant et comptées avec multiplicité. Par convention, si une configuration λ contient seulement un nombre fini de particules k , on posera $\lambda_{k+1} = \dots = -\infty$. On considère $\lambda^{(0)}$ une configuration de particules. Si $(X_i^{(n)})_{n \geq 0, i \geq 1}$ sont i.i.d de loi ν , alors le processus $(\lambda^{(n)})_{n \geq 0}$ défini par la récurrence suivante est un MGS de loi ν et de configuration initiale $\lambda^{(0)}$: pour tout $n \geq 1$,

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} + \delta_{\max_{i \geq 1} (\lambda_i^{(n-1)} + X_i^{(n)})}$$

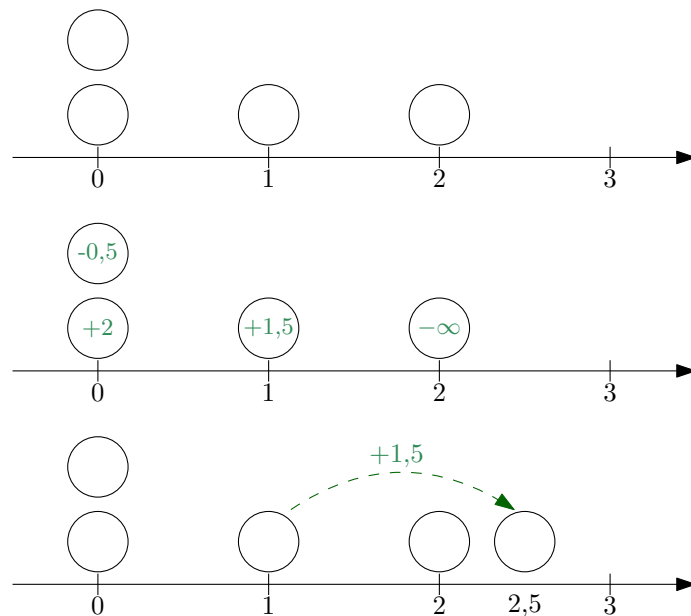


FIGURE 1.12 – Illustration de la dynamique du MGS de loi ν . Comme pour l'IBM, on ajoute une particule à chaque étape dans le système. Considérons la configuration représentée en haut de la figure. Pour déterminer où l'on ajoute la nouvelle particule à l'étape suivante, on associe une variable aléatoire de loi ν (en vert et dans les particules dans la partie centrale de la figure). Chaque particule propose d'ajouter la nouvelle particule à une position correspondant à sa position plus sa proposition. Par exemple, la particule la plus à droite propose d'ajouter une particule en position $2 + (-\infty) = -\infty$. Pour placer la nouvelle particule, on choisit la plus grande de ces propositions. Ici, les placements proposés sont $-\infty, 2.5, 2$ et -0.5 , donc on ajoute la particule en position 2.5 . On notera que les propositions de chaque particule peuvent changer entre les étapes étant donné que l'on tire à chaque fois, et indépendamment du passé, les variables représentées en vert pour chaque particule et chaque étape. On notera que si les variables en vert valent soit 1 ou soit $-\infty$ à toutes les étapes (c'est-à-dire lorsque $\nu = p\delta_1 + (1-p)\delta_{-\infty}$), alors la proposition retenue sera celle la plus à droite ayant un poids 1, ce qui donne au final la même dynamique que pour l'IBM de loi géométrique.

Le couplage entre MGS et percolation de dernier passage

De la même façon que pour l'IBM, on peut coupler le problème de percolation de dernier passage sur les graphes complets avec le système de particules présenté ici : le MGS. Ce couplage se construit de la même façon que dans le cas des graphes de Barak-Erdős.

Considérons $W_n^{g,d}$ le poids maximal dans le graphe complet à n sommets allant de 1 à n et $\lambda^{(0)}$ la configuration initiale avec une particule en 0. Posons

$$\lambda^{(n)} := \sum_{k=0}^n \delta_{W_k^{g,d}}$$

la configuration contenant n particules dont les positions sont $(W_{0,k}^{g,d})_{0 \leq k \leq n}$. Alors $(\lambda^{(n)})_{n \geq 0}$ est un MGS de loi ν et de configuration initiale $\lambda^{(0)} = \delta_0$.

Pour plus de détails, on pourra se référer au Chapitre 2 et à [Fos+23a].

1.3.2. Quelques cas particuliers

En plus du cas des graphes de Barak-Erdős, il existe d'autres cas particuliers intéressants de percolation de dernier passage sur les graphes complets. Un premier exemple est le cas où les poids peuvent prendre seulement deux valeurs. Nous le présentons dans les deux sous-sections suivantes.

Cas avec poids de loi de Bernoulli

Un cas particulier intéressant pour ce modèle est le cas traité par Dutta [Dut20] : on suppose que les poids des arêtes valent 0 ou 1, avec probabilités respectives $1 - p$ et $p \in [0, 1]$. Pour ce modèle, la constante de temps est explicite. Par une étude de fonction génératrice, Dutta a montré que la constante de temps était égale à l'inverse d'une fonction thêta de Ramanujan $\phi(q) = \sum_{k \geq 1} q^{\binom{n}{2}}$ évaluée en $1 - p$:

$$\forall p \in [0, 1], C(p\delta_1 + (1 - p)\delta_0) = \frac{1}{\sum_{k \geq 1} (1 - p)^{\binom{k}{2}}}.$$

Ce cas est le seul cas pour lequel la constante de temps est explicite et où les poids des arêtes ne sont pas tous strictement positifs. Pour montrer ces résultats, Dutta utilise des outils de combinatoire analytique classiques. Dans le Chapitre 3, on donnera également une méthode combinatoire similaire mais différente de celle de Dutta pour retrouver cette constante de temps. Dans le Chapitre 2, on donnera une preuve probabiliste simple de ce résultat utilisant le fait que le MGS est exactement soluble dans ce cas.

Cas avec deux poids réels

Un autre cas particulier est celui étudié dans [FKP23] par Foss, Konstantopoulos et Pyatkin. Dans ce cas, on suppose que les arêtes peuvent valoir $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ou 1 avec probabilités respectives $1 - p$ et $p \in [0, 1]$. Dans [FKP23], la propriété étudiée est la régularité de la constante en a à $p \in]0, 1[$ fixé.

Théorème 1.3.2 ([FKP23]). ⁷ *En tant que fonction de a , la constante de temps est strictement convexe. De plus, ses points de non-dérivabilité sont :*

- les rationnels négatifs $x \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, 0]$,
- les inverses d'entier $1/k$ où $k \geq 2$ est un entier,
- les entiers positifs $k \geq 2$.

On notera que ce modèle inclut les cas des graphes de Barak-Erdős ($a = -\infty$) et le cas étudié par Dutta ($a = 0$). On notera de plus qu'il y a une différence de comportement pour la constante de temps avant et après $a = 0$: pour $a < 0$, la constante de temps est non-dérivable sur un ensemble dense de points, alors que c'est l'inverse qui se produit pour $a > 0$. Par la suite, nous étudierons plus en détails le cas où $a > 0$ (cf. Section 1.5.2) et le cas où a est un entier négatif (cf. Section 1.5.3). On utilisera en particulier des éléments de preuve du Théorème 1.3.2 provenant de [FKP23] afin de montrer que la constante de temps est une fraction rationnelle en p pour tout $a > 0$. Le cas où a est strictement négatif est beaucoup plus complexe, et il n'y a aucune formule close connue à ce jour pour ces constantes de temps.

1.3.3. Autres modèles similaires

D'autres modèles similaires ont été étudiés, notamment dans [DFK12] où l'on considère la généralisation du problème du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős suivante : on considère I un ensemble muni d'un ordre partiel \prec et on considère le graphe ayant pour ensemble de sommets $\llbracket 1, n \rrbracket \times I$. On considère qu'il y a une arête entre (i, x) et (j, y) si et seulement si $i < j$ et $x \prec y$. On retire ensuite chaque arête avec probabilité $p \in [0, 1]$ de façon indépendante.⁸ Pour ce modèle, le plus long chemin dans le graphe vérifie une loi forte des grands nombres comme le cas des graphes de Barak-Erdős. De plus, on peut montrer que les fluctuations du processus limite sont explicites, et constructibles à partir de Gaussiennes indépendantes indexées par $|I|$. En particulier, dans le cas où I est un ensemble d'entiers fini muni de l'ordre usuel, la loi des marginales du processus limite est la même que la loi de la plus grande valeur propre dans une matrice aléatoire de type GUE (Gaussian Unitary Ensemble). Pour ce cas particulier, Glynn et Whitt [GW91] posent le problème de trouver la loi des marginales pour ce processus limite, qui ne sont pas explicites. Dans le Chapitre 3 de sa thèse [Boy22], Boyer donne une façon de construire une version stationnaire pour un problème similaire pour laquelle la loi du processus est explicite. Dans [KT13], Konstantopoulos et Trinajstić étudient un modèle de percolation de dernier passage dans le plan similaire à celui des graphes de Barak-Erdős.

⁷Ce résultat ressemble à celui présenté par Newman sur les transitions de phase dans le régime "sparse" (cf. Théorème 1.2.2) : dans les deux cas, on a une infinité de transitions de phase.

⁸Le cas où I est un singleton est équivalent au cas des graphes de Barak-Erdős.

Le graphe considéré a pour ensemble de sommets \mathbb{Z}^2 . On considère que les arêtes sont les couples d'éléments de \mathbb{Z}^2 de la forme $((i_1, i_2), (j_1, j_2))$ avec $i_1 \leq j_1$ et $i_2 \leq j_2$. Pour ce modèle et pour tout $a \in]0, 3/14[$, ils montrent que les fluctuations du plus long chemin entre les points $(0, 0)$ et (n, n^a) sont de loi Tracy-Widom.

Il est aussi possible de considérer le problème du plus long chemin dans des graphes non dirigés [AKS81 ; AF21]. Dans le régime sous lequel p est constant et non nul dans un graphe à n sommets, il est possible de montrer qu'il existe un cycle Hamiltonien dans le graphe avec grande probabilité lorsque le nombre de sommets n tend vers l'infini, ce qui implique que la longueur d'un plus long chemin simple (c'est-à-dire ne passant pas deux fois par un même sommet) est équivalent à n lorsque n tend vers l'infini. L'échelle à laquelle ce problème devient intéressant est celle où $p = c/n$, où c est une constante, pour laquelle il y a une transition de phase à $c = 1$. Dans [AF21], Anastos et Frieze montrent l'existence d'une constante de temps $f(c)$ pour $c > 1$ assez grand telle que le plus long chemin simple divisé par le nombre de sommets converge presque sûrement vers $f(c)$. Dans le même article, ils donnent les deux premiers termes du développement asymptotique de $f(c)$ pour c au voisinage de $+\infty$.

Une autre variante consiste à ajouter des poids aléatoires aux sommets en plus des poids des arêtes. Dans ce cas, le poids d'un chemin correspond à la somme des poids de ses arêtes et de ses sommets. Le poids maximal pour ce modèle vérifie également une loi forte des grands nombres et un théorème central limite [FK18], sous des hypothèses de moments similaires à celles données pour l'existence de la constante de temps dans [FMS14] et le Théorème 1.3.1.

1.4. Théorie de la reconstruction et systèmes de particules en interactions

Dans cette section, nous présentons un dernier outil qui nous permet de montrer la plupart des résultats étudiés dans le régime dense : la théorie de la reconstruction. Cette section est plus technique que les précédentes, mais on y présente des éléments clés pour comprendre les preuves de certains des nouveaux résultats présentés dans cette thèse.

Nous présenterons en particulier différents cas reliés à notre modèle auxquels elle s'applique.

Historiquement, la théorie de la reconstruction a été développée afin de donner un critère pour l'existence d'une version stationnaire pour certains processus stochastiques. Un autre objectif motivant le développement de cet outil est le fait de simuler de manière parfaite la version stationnaire de ces processus.

La théorie de la reconstruction a été développée initialement par Borovkov [Bor78] pour les processus stochastiques $(X_n)_{n \geq 0}$ vérifiant une récursion de la forme suivante :

$$X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1}), \tag{1.6}$$

où f est une fonction mesurable et $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ est une suite aléatoire stationnaire. On notera que l'IBM présenté précédemment vérifie ce type de formule de récurrence. L'objectif de Borovkov est de fournir un cadre général dans lequel il est possible de construire une version stationnaire de processus aléatoires à temps discrets : grâce à cette méthode, il montre sous certaines hypothèses que pour une

suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, il existe un unique processus stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifiant (1.6) pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Des constructions similaires sont également considérées dans [AK97; AK99; DF99] et [CFF02].

Heuristiquement, cet outil s'applique de la façon suivante. Considérons le cas où $(X_n)_{n \geq 0}$ est un processus stochastique récursif (c'est-à-dire, vérifiant (1.6) pour tout $n \geq 0$). La première étape consiste à construire des événements $(\xi_n)_{n \geq 0}$ -mesurables de probabilités non nulles conditionnellement auxquels il existe un n_0 à partir duquel X_n ne dépende pas de la valeur initiale du processus de X_0 . C'est ce que l'on appelle un *couplage fort*. Les événements vérifiant une telle propriété seront ce que nous appellerons par la suite des *événements de reconstructions*. L'existence de tels événements permet ensuite de construire le processus stationnaire par une méthode de couplage par le passé (ou "coupling from the past") : étant donné une suite $(\xi_n)_{n \leq 0}$ pour laquelle un événement de reconstruction se produit à un certain temps $n \leq 0$, il n'existe qu'une seule valeur possible pour X_0 . On peut ensuite appliquer cette méthode en partant de n'importe quel temps $n \in \mathbb{Z}$ pour construire le processus stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Dans certain cas, et en particulier pour l'IBM, il n'est pas possible de trouver des événements de reconstruction avec la façon dont Borovkov les définit. Le fait que cette théorie ne s'applique pas à l'IBM vient du fait qu'une configuration de l'IBM garde en mémoire tout le passé du processus. Pour remédier à ce problème, Foss et Konstantopoulos [FK03] ont développé une généralisation de la théorie de reconstruction de Borovkov qui s'applique à une classe plus large de processus. En particulier, elle s'applique à l'IBM car elle peut s'appliquer à des fonctionnelles du processus (en particulier, aux projections sur un certain nombre d'urnes fini jusqu'à une certaine distance du front). Grâce à cet outil, ils remontent l'existence de la constante de temps et donnent une borne supérieure et une borne inférieure pour cette constante. La convergence du processus des plus long chemins vers un mouvement brownien est également démontrée.

L'une des difficultés à l'application de la théorie de la reconstruction généralisée vient d'un degré de liberté dans la construction des événements de reconstruction. En effet, le choix de tels événements n'est pas unique en général.

Dans ce qui suit, nous allons présenter différents types d'événements de reconstruction utilisés dans le cadre de notre modèle. Dans un premier temps, nous allons étudier les événements de reconstructions pour l'IBM et pour le MGS (Section 1.4.1). Il est également possible de trouver des événements similaires directement sur le modèle de graphe étudié et non plus sur ces deux systèmes de particules. Nous présentons ces événements dans la Section 1.4.2.

Ces deux types d'événements de reconstruction sont tous les deux intéressants. L'avantage du point de vue des systèmes de particules vient du fait que l'on peut appliquer des méthodes et des outils reliés aux chaînes de Markov et aux marches aléatoires. Dans ce cas, les événements de reconstruction peuvent se voir comme des arbres enracinés étiquetés de façon croissante en partant de la racine. En particulier, ce point de vue du système de particules est utile pour montrer des propriétés de régularité sur la constante de temps. Inversement, le point de vue du graphe est notamment utile pour étudier d'autres quantités que le plus long chemin pour l'ordre partiel associé au graphe de Barak-Erdős. Du point de vue des graphes, les événements de reconstruction peuvent s'interpréter

comme l'existence de sommets dans le graphe reliés à tous les autres sommets. Ces sommets sont appelés *points squelettes*. On peut montrer que tout chemin de longueur maximal dans un graphe passe par tous les points squelettes du graphe. Par conséquent, on peut montrer qu'il est possible de décomposer le graphe de Barak-Erdős en une "concaténation" de sous-graphes finis en vue d'étudier le plus long chemin. En Remarque 1.4.2, on présentera en particulier une application des points squelettes pour un problème similaire à celui du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős mais pour lequel il n'est pas possible de construire un couplage avec un système de particules comme l'IBM.

1.4.1. Reconstruction pour le système de particules

Soit μ une loi de probabilité sur \mathbb{N} . Commençons par présenter différentes façons de construire la version stationnaire de l'infinite bin model de loi μ , c'est-à-dire un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifiant (1.5) pour tout $n \in \mathbb{Z}$ où les $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d de loi μ .⁹

La première méthode que nous présentons est celle employée par Foss et Konstantopoulos dans [FK03]. Considérons $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoire i.i.d et à valeurs dans \mathbb{N} de loi μ . Ici, notre but est de montrer l'existence et l'unicité d'un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifiant la récursion (1.5) correspondant à l'infinite bin model pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On supposera ici que $\mu(\{1\}) := p > 0$ comme dans [FK03].

Remarque 1.4.1. Il est également possible de construire des événements de reconstruction pour l'IBM lorsque $p = \mu(\{1\}) = 0$. Ceci est montré par Foss et Zachary dans [FZ13] grâce à un résultat combinatoire de Chernysh et Ramassamy [CR17].

Rappelons que l'on passe du processus au temps $n - 1$ au temps n en ajoutant une particule dans l'urne immédiatement à droite de l'urne contenant la ξ_n -ième particule la plus à droite dans le système au temps $n - 1$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère l'événement de reconstruction suivant :

$$A_n = \{\xi_{n+1} \leq 1, \xi_{n+2} \leq 2, \dots, \xi_{n+k} \leq k, \dots\}.$$

Notons que conditionnellement à A_n , les positions des nouvelles particules ne dépendent que de la position du front à l'instant n . En effet, supposons par exemple que A_0 se produit, et que l'urne du front à l'instant 0 est l'urne 0. Étant donné que l'on a ajouté n particules pour passer de l'instant 0 à l'instant n , et que ξ_n vaut au plus n , on ajoutera une particule à droite d'une particule dont on connaît bien la position. Par exemple, étant donné que $\xi_1 = 1$, pour passer de l'instant 0 à l'instant 1, on doit ajouter une particule dans l'urne immédiatement à droite de l'urne contenant la particule la plus à droite à l'instant 0. Par définition du front, cette particule se trouve dans l'urne 0, donc on ajoute une particule dans l'urne 1. Ensuite, $\xi_2 \in \{1, 2\}$, donc pour passer de l'instant 1 à l'instant 2, on a deux possibilités : si ξ_2 vaut 1, on ajoute la particule dans l'urne 2, sinon, on l'ajoute dans l'urne 1. Nous donnons une illustration de cette propriété cruciale en Figure 1.13.

⁹Ici, le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas stationnaire dans le sens usuel étant donné que la position du front de X_n change en fonction du temps. Néanmoins, si l'on note X'_n la configuration obtenue à partir X_n en décalant toutes les urnes afin de remettre le front à 0, alors le processus $(X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien stationnaire dans le sens usuel.

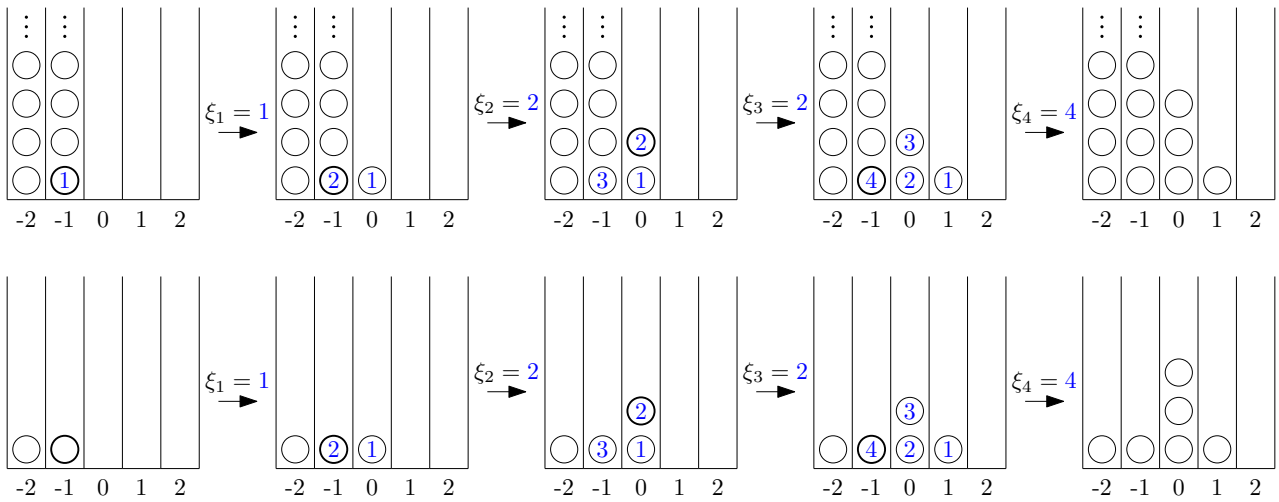


FIGURE 1.13 – Illustration de l'application d'un mot triangulaire à deux configurations initiales différentes ayant le même front. On remarque que peu importe la configuration de départ, les positions des nouvelles particules sont toutes plus grandes que la position du front au départ, et les positions des nouvelles particules est la même dans les deux systèmes. Ceci est dû au fait que l'événement A_0 est satisfait (ou plus précisément, que les conditions sur ξ_1, \dots, ξ_4 dans la définition de A_0 soient satisfaites). Ainsi, si on passe du temps $i - 1$ au temps i , la ξ_i -ème particule que l'on considère est forcément une nouvelle particule, ou une particule de l'urne au front de la configuration initiale. Dans les deux cas, on peut montrer par récurrence sur la taille du mot triangulaire que les positions des particules ajoutés sont les mêmes dans les deux systèmes.

Notons également que la probabilité que A_n se réalise vaut $\prod_{k \geq 1} \mu([1, k])$. Par passage au log, il est facile de voir que cette quantité est non nulle pour toute mesure μ d'espérance finie. Dans ce cas, par le théorème de récurrence de Poincaré [VO16], les $\dots < T_{-1} < T_0 \leq 0 < T_1 < \dots$ correspondants aux temps n auxquels A_n se réalisent sont tous bien définis et finis.

Grâce à ces événements de reconstruction $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, il est possible de réaliser des simulations parfaites¹⁰ pour l'infinite bin model, et donner une formule pour la constante de temps comme une somme infini de polynômes indexés par des mots de taille finie, où un mot est une suite finie où infinie d'entiers positifs. Propp et Wilson font le lien entre la propriété de "coupling from the past" et la possibilité de réaliser des simulations parfaites dans [PW96]. On pourra également se référer à [FK03]

¹⁰ $C(\nu)$ est définie comme la limite presque sûre de $n^{-1}W_n$ lorsque n tends vers l'infini. A priori, pour obtenir des approximation numérique de $C(\nu)$, on doit donc choisir un n assez grand et simuler un grand nombre de fois $n^{-1}W_n$. Avec cette méthode, on a un biais lié au choix du n . Par simulation parfaite, on entend que l'on peut à la place simuler une variable aléatoire X qui ne dépend pas de n et dont l'espérance est $C(\nu)$.

et [Fos+23a] pour d'autres exemples. Commençons par introduire quelques notations qui vont nous permettre de donner des formules pour la vitesse du front de l'IBM :

Mot : Un mot est une suite d'entiers strictement positifs $(\beta_1, \beta_2 \dots)$ finie ou infinie.

Taille d'un mot : Un mot β est de taille finie l s'il s'écrit de la forme $(\beta_1, \dots, \beta_l)$, où $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si β est un mot de taille finie, on notera $|\beta|$ sa taille.

Pour un mot β de taille finie l , on définit Φ_β comme la composition de $\Phi_{\beta_l}, \dots, \Phi_{\beta_1}$, où Φ est défini dans la Section 1.2.5 sur l'IBM :

$$\Phi_\beta = \Phi_{\beta_l} \circ \dots \circ \Phi_{\beta_1}.$$

Bon mot : Un bon mot β est un mot de taille finie tel que pour toute configuration initiale X_0 , la position du front dans les mots $\Phi_\beta(X_0)$ et $\Phi_{\beta'}(X_0)$ diffère de 1, où $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{|\beta|-1})$ correspond au mot β auquel on enlève sa dernière lettre. On note \mathcal{B} l'ensemble des bons mots.

Mot triangulaire : Un mot triangulaire consiste en mot $(\beta_1, \beta_2, \dots)$ finie ou infinie telle que pour tout $i \geq 1$, la i -ème lettre de la suite est inférieure ou égale à i . On note \mathcal{T} l'ensemble des mots triangulaires de taille finie.

Mot minimal dans un ensemble : Soit \mathcal{A} un ensemble de mots. Un suffixe d'un mot $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ est un sous mot de β de la forme $(\beta_i, \dots, \beta_l)$ avec $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$. Ce suffixe est dit strict si $i > 1$. On dit qu'un mot β est minimal dans \mathcal{A} si β est dans \mathcal{A} et qu'aucun suffixe strict de β n'appartient à \mathcal{A} . On note par \mathcal{A}_m l'ensemble des mots minimaux dans \mathcal{A} .

Par construction de l'infinite bin model, la vitesse du front correspond à la probabilité dans le régime stationnaire que le front avance de 1 entre deux temps consécutifs. L'équivalence entre "strong coupling" et "coupling from the past" (cf. [FK03]) permet de montrer le Théorème 1.2.6. C'est de cette manière que procèdent Foss et Konstantopoulos dans [FK03] pour montrer ce résultat (voir également [MR19]). En conditionnant par rapport à la valeur du premier mot triangulaire dans le passé $(\xi_{T_0}, \dots, \xi_{-1}, \xi_0)$, on obtient la formule suivante pour la vitesse du front de l'IBM(μ) pour toute probabilité μ pour laquelle 1 est un atome :

$$v_\mu = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{B}} \mu(\{\beta_1\}) \dots \mu(\{\beta_{|\beta|}\}). \quad (1.7)$$

Dans [MR19], Mallein et Ramassamy donnent une formule similaire¹¹ pour la vitesse du front en considérant les bons mots minimaux :

$$v_\mu = \sum_{\beta \in \mathcal{B}_m} \mu(\{\beta_1\}) \dots \mu(\{\beta_{|\beta|}\}). \quad (1.8)$$

¹¹On notera que la différence entre les formule (1.7) et (1.8) vient du choix des événements de reconstruction. On remarquera en particulier que ces deux classes d'événements de reconstruction ne sont pas inclus l'une dans l'autre. En effet, le mot 1, 1, 2, 4, 2 est un mot triangulaire minimal et bon mais pas bon minimal. Inversement, le mot 1, 2, 4, 2 est bon minimal mais pas triangulaire.

On peut également obtenir une autre formule similaire pour v_μ par théorème ergodique : si l'on note $L(\beta)$ le nombre de fois où la position du front a changé entre les configurations X_0 et $\Phi_\beta(X_0)$ pour tout mot triangulaire β et une configuration initiale quelconque, alors par la loi des probabilités totales appliquée à $(\xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_2-1})$, on obtient

$$v_\mu = \prod_{k \geq 1} \mu([1, k]) \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \mu(\{\beta_1\}) \dots \mu(\{\beta_{|\beta|}\}) \cdot L(\beta). \quad (1.9)$$

Le terme $\prod_{k \geq 1} \mu([1, k])$ correspond à l'inverse de l'espérance de $T_2 - T_1$ qui correspond à l'écart entre deux temps de reconstruction consécutifs. On notera qu'étant donné que la position des nouvelles particules ajoutées en appliquant β ne dépendent que de la position du front dans X_0 , la quantité $L(\beta)$ ne dépend pas du choix de X_0 .

Par le couplage entre l'infinite bin model et les graphes de Barak-Erdős, on sait que la position du front dans l'infinite bin model de loi géométrique et le plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős ont la même asymptotique. Dans le cas où μ est la loi géométrique de paramètre p , on notera que la probabilité que A_n se réalise vaut

$$\gamma_{1-p} := \prod_{k \geq 1} (1 - (1-p)^k)$$

pour tout $p \geq 0$. Par conséquent, on obtient les formules suivantes pour $C(p)$ par les formules (1.7), (1.8) et (1.9),

$$C(p) = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{B}} p^{|\beta|} (1-p)^{H(\beta)}, \quad (1.10)$$

$$= \sum_{\beta \in \mathcal{B}_m} p^{|\beta|} (1-p)^{H(\beta)}, \quad (1.11)$$

$$= \gamma_{1-p} \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} p^{|\beta|} (1-p)^{H(\beta)} L(\beta), \quad (1.12)$$

où $H(\beta)$ est la *hauteur du mot* β , définie comme la somme de ses lettres moins sa taille : $H(\beta) := \sum_{i=1}^{|\beta|} \beta_i - |\beta|$.

Ces formules permettent d'obtenir divers résultats sur la constante d'un point de vue théorique mais également d'un point de vue numérique. D'un point de vue théorique, elles permettent de montrer des propriétés sur la constante de temps, notamment sur sa régularité (voir Théorème 1.2.3). Ces formules montrent également que les coefficients du développement asymptotique de C au voisinage de 1 sont des entiers. D'un point de vue numérique, elle permettent de calculer les premiers termes du développement asymptotique de la constante de temps au voisinage de $p = 1$. Grâce à ces formules, Mallein et Ramassamy ont obtenu une vingtaine de coefficients pour ce développement asymptotique (17 avec la formule (1.10), 20 calculés récemment par Mallein avec la formule (1.12)). Une autre méthode donnant à peu de chose près le même nombre de coefficients que ces formules consiste à approximer l'IBM par deux processus de Markov sur un espace d'état fini [MR21].

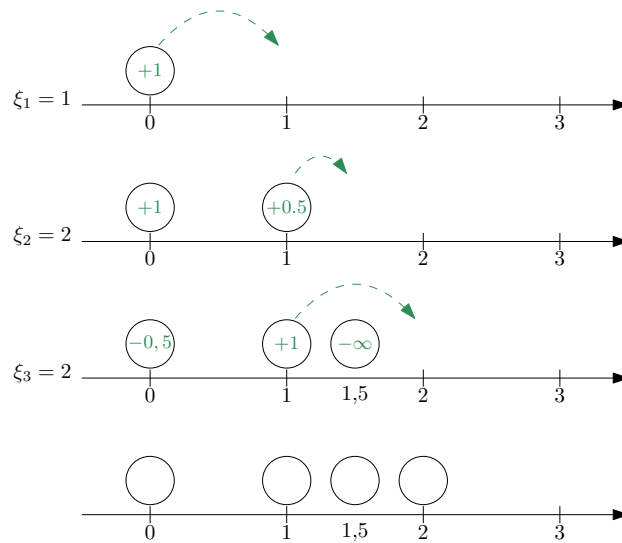


FIGURE 1.14 – Illustration des événements de reconstruction du MGS. On suppose ici que tous les poids proposés par les particules valent au plus 1. La proposition de chaque particule est représentée en vert. De façon analogue au cas des graphes de Barak-Erdős avec l'IBM, on note ξ_n le rang de la particule la plus à droite proposant un $+1$. Lorsque le mot (ξ_1, \dots, ξ_n) est triangulaire, la position des nouvelles particules ne dépend que de la position du front dans configuration de départ. En effet, le fait que toutes les propositions sont plus petites que $+1$, qu'à chaque étape on ajoute exactement une particule, et que l'une des n particules les plus à droite propose un $+1$ à l'étape n , implique que l'une de ces propositions sera celle de la nouvelle particule. Par conséquent, on peut ignorer les propositions des particules à gauche du front de la configuration initiale.

Il est également possible de définir des événements de reconstruction similaires pour le MGS. C'est de cette façon que nous construisons un MGS stationnaire dans le Chapitre 2, dans le cas où les poids ont valeurs dans un intervalle de la forme $[-\infty, M]$ avec probabilité non nulle qu'un poids vaille M . Nous donnons une brève explication sur ces événements de reconstruction en Figure 1.14. Il est également possible de construire des événements de reconstruction similaires pour le MGS lorsque la probabilité qu'un poids vaille M est nulle, mais dans ce cas, le choix des événements de reconstruction dépend d'un paramètre c qui n'est pas unique et doit être choisi en fonction de la loi des poids (voir [Fos+23a] pour plus de détails).

1.4.2. Reconstruction par les points squelettes

Dans cette section, nous introduisons des événements similaires aux événements de reconstruction pour l'IBM et le MGS, mais cette fois-ci directement pour le modèle de graphe de Barak-Erdős et le graphe complet orienté avec des poids sur ses arêtes.

Considérons le cas des graphes de Barak-Erdős. L'idée est de montrer qu'il existe une proportion positive de sommets dans ce graphe qui sont reliés à tous les autres sommets du graphe avec probabilité 1. En effet, si l'on note B_n l'événement "pour tout k, l tels que $-\infty < k < n < l < +\infty$, il existe un chemin dirigé dans le graphe passant par k, n et l " pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors la probabilité de

l'événement B_n est égale à

$$\gamma_{1-p}^2 = \prod_{k \geq 1} (1 - (1-p)^k)^2.$$

Ces points sont l'analogue des temps de débuts de mots triangulaire pour l'IBM. Par le théorème de récurrence de Poincaré [VO16], il existe une infinité de $n < 0$ et de $n > 0$ tels que B_n se réalise. Si B_n se réalise, on dit que n est un *point squelette*.

Ces points sont intéressants du point de vue du plus long chemin pour la raison suivante : tout plus long chemin entre deux sommets $s < t$ passe par tous les points squelettes entre s et t . En effet, considérons un chemin γ partant de s et finissant en t , et supposons qu'il existe un point squelette n entre s et t tel que ce chemin γ ne passe pas par n . Nécessairement, il existe une arête (i, j) dans le chemin avec $i < n < j$. Par définition d'un point squelette, il existe un chemin γ' allant de i à j passant par n . En remplaçant l'arête (i, j) dans le chemin γ par le chemin γ' , on a toujours un chemin allant de s à t , mais sa longueur est plus grande que celle du chemin d'origine γ . Par conséquent, γ ne peut pas être de longueur maximale s'il ne contient pas tous les points squelettes entre s et t .

Ces points sont introduits en premier lieu en vue d'étudier les ordres partiels aléatoires dans [Alo+94] sous le nom de *posts*. Dans une série d'articles, différentes propriétés des graphes de Barak-Erdős reliées aux ordres partiels aléatoires sont étudiées. Les points squelettes ont ensuite été utilisés par Bollobas et Brightwell [BB97b] pour étudier différentes quantités, notamment la longueur du plus long chemin dans un graphe de Barak-Erdős (appelée hauteur dans ce contexte). En effet, il est possible de construire un ordre partiel aléatoire à partir d'un graphe de Barak-Erdős de la façon suivante : on considère un graphe de Barak-Erdős à n sommets. On considère l'ordre partiel \prec sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que deux éléments $x < y$ vérifient $x \prec y$ si et seulement s'il existe un chemin orienté dans le graphe allant de x à y . La hauteur de cet ordre partiel aléatoire (c'est-à-dire la longueur d'un plus long chemin dans le graphe de Barak-Erdős) a été étudiée dans ce contexte dans [AF89; BB97b]. La largeur de l'ordre obtenu, correspondant à la taille maximale d'un ensemble d'éléments non comparables deux à deux, est étudié dans [BE84; BB95]. D'autres quantités reliées à la théorie des ordres partiels sont également étudiées dans la littérature pour ce modèle, notamment sa dimension et son nombre d'extensions linéaires [SCC93; Alo+94; BB97a; BB97b].

Ces points ont plus tard été utilisés pour montrer divers résultats en percolation de dernier passage, en particulier pour étudier les fluctuations pour ce modèle (cf. Théorème 1.2.4, [DFK12; FMS14]). Ils sont également introduits dans le cadre plus général où l'on ajoute des poids sur les sommets [FK18].

Dans [FKP23], Foss, Konstantopoulos et Pyatkin introduisent ces points squelettes dans le cadre plus général de la percolation de dernier passage sur les graphes complets où les poids valent soit 1, soit $a \in \mathbb{R}$. Grâce à ces points squelettes et à une analyse des graphes possibles entre deux tels points, ils montrent le Théorème 1.3.2.

Afin d'illustrer l'utilité de ces points squelettes, montrons que le fait d'imposer ou non que les chemins commencent en 1 et finissent en n ne change pas la constante de temps. Nous donnons à présent une preuve du Théorème 1.2.5 : Considérons un graphe de Barak-Erdős $G(\mathbb{Z}, p)$ dont l'ensemble des sommets est \mathbb{Z} et tel que chaque arête (i, j) avec $i < j$ est présente dans le graphe avec probabilité

p . Considérons les plus petits et plus grands points squelettes k_- et k_+ entre 1 et n dans le graphe $G(\mathbb{Z}, p)$. Une conséquence du théorème de récursion de Poincaré [VO16] donne que k_- et $n - k_+$ sont négligeable devant n . Par conséquent, comme les chemins de longueur $L_n(p)$ et les chemins de longueur $L_n^{g,d}(p)$ qui commencent en 1 et finissent en n passent par tous les points squelettes entre 1 et n , $L_n(p) = L_n^{g,d}(p) + o(n)$ lorsque n est grand. L'existence de la limite $C(p)$ vient de l'application du théorème sous-additif donnée en Section 1.2.4.

Remarque 1.4.2. Remarquons qu'une application possible des points squelettes est la suivante. Introduisons un problème de réalisation de tâches en parallèle avec un nombre fini de serveur. On considère un graphe de tâches à n sommets de type Barak-Erdős (cf. Section 1.2.2). On suppose que le temps de traitement de chaque tâche vaut 1 presque sûrement et que l'on dispose d'un nombre N fini de serveurs. On veut étudier $L_{1,n}^{(N)}(p)$, le temps nécessaire pour que toutes les tâches entre 1 et n soient exécutées. Notons que dans le cas $N = +\infty$, $L_{1,n}^{(N)}(p)$ est égal à $L_n(p)$, le plus long chemin dans le graphe. Dans ce cas, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est un point squelette, alors au temps où la tâche k traitée, aucune autre tâche ne sera traitée simultanément. Ceci est une simple conséquence de la définition de point squelette. Par conséquent, le temps de traitement $L_{1,n}^{(N)}$ se décompose de la façon suivante :

$$L_{1,n}^{(N)}(p) = L_{1,k-1}^{(N)}(p) + 1 + L_{k+1,n}^{(N)}(p).$$

Si l'on note $0 \leq T_1 < T_2 < \dots$ les points squelettes consécutifs, par le théorème ergodique,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_{1,n}^{(N)}(p)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \gamma_{1-p}^2 \mathbb{E} \left[L_{T_1, T_2-1}^{(N)}(p) \right] =: C^{(N)}(p).$$

Grâce à cette formule, il est possible de réaliser des simulations parfaites de la constante de temps pour ce modèle comme pour le cas des Barak-Erdős (cf. [FK03]) et le cas du MGS (cf. [Fos+23a]). De plus, en appliquant la loi des probabilités totale au graphe restreint à l'intervalle $\llbracket T_1, T_2 \rrbracket$, on obtient la formule suivante pour la constante de temps qui permet de calculer les premiers termes de son développement asymptotique au voisinage de 1 :

$$C^{(N)}(p) = \gamma_{1-p}^2 \sum_{E \in \mathcal{P}} p^{|E|} (1-p)^{NC(E)} L^{(N)}(E),$$

où \mathcal{P} est l'ensemble des ensembles partiellement ordonnés de taille finie ayant exactement un minimum, un maximum et aucun autre élément comparable à tous les autres, $NC(E)$ est le nombre de couples d'éléments (i, j) avec $i < j$ non-comparables dans E et $1 \leq L^{(N)}(E) \leq |E|$ est le nombre d'étapes que prend l'algorithme à effectuer toutes les tâches lorsque le graphe d'assistances est donné par le diagramme de Hasse de E .

Mentionnons qu'il n'y a pas de système de particules connu associé à ce modèle comme pour l'IBM dans le cas où le nombre de serveur est infini. Par conséquent, ce modèle est un exemple pour lequel les points squelettes sont utiles.

1.5. Résultats obtenus durant la thèse

Dans cette section, nous présentons dans un premier temps les propriétés analytiques de la constante de temps pour la percolation de dernier passage sur les graphes complets (Section 1.5.1 et Chapitre 2). En particulier, nous montrerons que cette constante est continue et strictement croissante en tant que fonction de la loi des poids des arêtes.

Ensuite, nous étudierons plus en détails le cas où la loi des poids des arêtes est supportée par deux réels. Dans le cas où ces deux réels sont strictement positifs, on montrera que la constante de temps est une fraction rationnelle en les probabilités de ces deux poids (Section 1.5.2 et Chapitre 2). Dans le cas particulier où ces poids sont un entier négatif et 1, on donnera une formule pour la constante de temps comme une somme de polynômes indexés par les chemins de longueur finie dans un graphe infini. On présentera une méthode algorithmique de complexité polynomiale pour calculer le développement de Taylor de la constante de temps dans ce cas particulier (Section 1.5.3 et Chapitre 3).

Enfin, en collaboration avec Sanjay Ramassamy, nous étudierons un problème différent relié à une limite d'échelle de l'infinite bin model : le liquid bin model. Ce modèle déterministe que nous présenterons par la même occasion en Section 1.5.4 et dans le Chapitre 4 peut s'interpréter comme la limite hydrodynamique de l'infinite bin model de loi μ lorsque le support de μ est fini et que l'écart entre les atomes de μ est grand. On montrera que pour ce modèle déterministe, la vitesse du front est une fraction rationnelle par morceaux. De plus, les différentes phases sur lesquelles cette vitesse est rationnelle sont indexées par une classe d'objets combinatoires. Si l'on considère une loi μ supportée par N atomes, alors ces objets sont au nombre de Catalan(N). On donnera la formule de la vitesse du front sur chacune des phases.

1.5.1. Régularité et propriétés de la constante de temps

Le premier résultat porte sur la constante de temps pour le modèle de percolation de dernier passage sur les graphes complets pour une grande classe de mesures de poids : on considère que les poids suivent une loi ν pour laquelle il existe un nombre réel $M > 0$ telle que tous les poids sont plus petits ou égaux à M , et valent M avec probabilité p . Sans perdre de généralité, on peut supposer que $M = 1$ par la propriété de "rescaling" (ii) montrée en Section 1.3.1.

Dans ce cadre, nous généralisons le Théorème 1.2.3 de Mallein et Ramassamy [MR19] correspondant au cas où les poids valent 1 ou $-\infty$:

Théorème 1.5.1 (Chapitre 2, Théorème 2.1.6). *Considérons une mesure de probabilité $\nu_{p,\mu}$ de la forme $p\delta_1 + (1-p)\mu$, où μ est une mesure de probabilité sur l'ensemble $[-\infty, 1[$. Alors la fonction $p \mapsto C(\nu_{p,\mu})$ est analytique sur $]0, 1[$.*

En conséquence de ce théorème, la constante de temps est caractérisée par son développement de Taylor en $p = 1$. L'intérêt de ce résultat réside dans le fait que si l'on arrive à donner une formule pour les coefficients de ce développement de Taylor, alors on obtient la constante de temps dans son intégralité. Une autre conséquence du Théorème 1.5.1 est qu'il n'y a pas de transition de phase dans le régime des graphes denses, contrairement à ce qui arrive lorsque l'on étudie la percolation dans

\mathbb{Z}^d . Dans le Chapitre 3, on étudiera numériquement ce développement de Taylor pour lequel peu de coefficients sont connus. Nous utiliserons également ce théorème dans la preuve de la continuité de la constante de temps (Théorème 1.5.3).

Pour montrer le Théorème 1.5.1, on utilisera des événements de reconstruction pour le MGS que nous introduirons dans le Chapitre 2. Grâce à ces événements de reconstruction, on obtiendra une formule similaire à la formule (1.10) de Mallein et Ramassamy [MR19] pour l'infinite bin model. Il suffira ensuite de montrer que la fonction génératrice des moments de l'écart entre deux temps de reconstruction consécutifs est bien défini sur un voisinage ouvert de 0 pour prouver le résultat. On montrera ce dernier fait en interprétant le premier temps de reconstruction dans le passé comme étant le temps d'extinction pour un cas particulier de processus de Bienaymé-Galton-Watson avec immigration et un résultat de Zubkov [Zub72] sur ces processus.

Dans le cas plus restreint où la mesure de poids est discrète et à support fini, on obtient l'analyticité de la constante de temps par rapport aux probabilités de tous les atomes :

Théorème 1.5.2 (Chapitre 2, Théorème 2.1.7). *Notons $C(p_1, \dots, p_N)$ la constante de temps pour la percolation de dernier passage où les poids des arêtes prennent les valeurs $a_1 > \dots > a_N$ avec probabilités respectives p_1, \dots, p_N . Alors, la fonction $(p_1, \dots, p_N) \mapsto C(p_1, \dots, p_N)$ est analytique sur l'ensemble $\{(p_1, \dots, p_N) \in [0, 1]^N : \sum_{k=1}^N p_k = 1, p_1 > 0\}$.*

Ce théorème se montre de façon similaire au Théorème 1.5.1. Il est en un sens plus puissant que le Théorème 1.5.1 car il nous donne l'analyticité de la constante de temps par rapport à la probabilité de plusieurs atomes, mais il s'applique à une classe plus restreinte de mesures. En particulier, ce résultat suggère qu'il est possible qu'il existe une formule close pour la constante de temps pour les distributions à support fini. Dans le cas où ν est supporté par deux atomes strictement positifs, on montrera que la constante de temps est une fraction rationnelle en les atomes et en les probabilités de ces atomes (voir Section 1.5.2). On verra également dans la même section que la constante de temps est une fraction rationnelle en les probabilités des atomes pour toute distribution à support fini dont les atomes sont tous des rationnels strictement positifs. Dans le cas où les deux atomes sont 1 et un entier négatif, on donnera une formule analytique pour la constante de temps et on présentera une méthode efficace pour calculer les premiers coefficients du développement de Taylor de cette constante au voisinage de $p = 1$ (voir Section 1.5.3).

Pour une classe de mesures plus large, on montre que la constante de temps est continue pour une certaine métrique sur l'espace des probabilités dont le support est borné supérieurement. Ce résultat est à rapprocher des résultats de Kesten [Kes86], Cox et Kesten [CK81], Dembin et Cerf [CD22] et Dembin [Dem21] pour la percolation de premier passage, bien que les outils employés dans notre cas sont différents. Plus précisément,

Théorème 1.5.3 (Chapitre 2, Théorème 2.1.3). *On considère la métrique d définie comme le maximum entre la distance de Lévy-Prokhorov et la différence en valeur absolue des supremum des supports des deux mesures de probabilité. Alors, la constante de temps $C(\nu)$ est continue en ν sur l'ensemble des mesures de probabilité dont le support est borné supérieurement.*

La preuve de ce résultat que nous présentons dans le Chapitre 2 utilise en particulier le résultat d'analyticité présenté dans le Théorème 1.5.1 ainsi que la formule pour la vitesse du front similaire à celle obtenue par Mallein et Ramassamy [MR19] pour l'infinite bin model.

Un autre résultat concerne la stricte croissance de la constante de temps (Théorème 1.5.4). Un résultat analogue est démontré dans le cadre de la percolation de premier passage dans le plan par Van den Berg et Kesten [BK93] et Marchand [Mar02]. Intuitivement, ce résultat implique que tous les poids de probabilité non nulle, même les poids négatifs, appartiennent en proportion positive à un chemin de poids maximal, lorsque n tend vers l'infini. On pourra également se référer à la remarque en dessous du Théorème 2.12 dans [ADH17] pour une explication de cette intuition dans le cadre de la percolation sur \mathbb{Z}^d .

Théorème 1.5.4 (Chapitre 2, Théorème 2.1.1). *On muni l'espace des probabilités de l'ordre stochastique. Alors la constante de temps $C(\nu)$ est strictement croissante en ν sur l'ensemble des probabilités pour lesquelles le supremum de leur support a une probabilité non nulle.*

La preuve de ce théorème repose sur l'existence d'événements de reconstruction. L'idée de preuve est la suivante : pour deux mesures ν_1 et ν_2 vérifiant les hypothèses du Théorème 1.5.4 telles que ν_1 est dominée stochastiquement par ν_2 , on peut construire un couplage tel qu'il existe des événements de reconstruction communs pour ces deux lois de probabilité. En découpant le poids du plus lourd chemin par rapport à ces événements de reconstruction et par le théorème ergodique, on obtient une formule analogue à la formule (1.12) obtenue dans le cadre des graphes de Barak-Erdős. En effet, on peut réécrire $C(\nu_1)$ et $C(\nu_2)$ comme les sommes, sur tous les événements de reconstruction possibles, de la probabilité de l'événement de reconstruction fois une fonction qui dépend de la loi des poids. Par couplage croissant, la fonction évaluée en ν_1 est plus petite que celle évaluée en ν_2 . Il suffit alors de trouver un seul événement de reconstruction pour lequel l'inégalité est stricte.

1.5.2. Cas particulier avec deux poids positifs

On considère à présent le cas où les poids valent soit 1 avec probabilité p , soit $m > 0$ avec probabilité $1 - p$. Comme dans le cas précédent, ce cas est équivalent au cas où l'on prend deux poids M et m strictement positifs, par propriété de "rescaling" (ii) de la Section 1.3.1. Dans le cas où m est un entier plus grand que 1 ou l'inverse d'un entier plus grand que 1, on montrera que ce modèle est équivalent à l'étude d'une chaîne de Markov sur un espace d'état fini. Grâce à des résultats de Foss, Konstantopoulos et Pyatkin [FKP23], nous montrons que la constante de temps s'obtient par interpolation pour tout $m \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $C_m(p)$ la constante de temps pour ce modèle.

Théorème 1.5.5 (Chapitre 2, Théorème 2.1.9). *Pour tout $m \in \mathbb{R}_+^*$, $p \mapsto C_m(p)$ est une fraction rationnelle en p sur $[0, 1]$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout m entre k et $k + 1$ (respectivement $1/k$ et $1/(k + 1)$), C_m s'obtient comme combinaison convexe de C_k et C_{k+1} (resp. de $C_{1/k}$ et $C_{1/(k+1)}$).*

Dans le cas où $m \geq 1$ est un entier, il est facile de voir que les particules dans le MGS sont à des positions entières. De plus, étant donnée que les propositions de chaque particule correspondantes à la dynamique du MGS (cf. Section 1.3.1) sont 1 et m à tout instant, seules les particules à distance au plus $m - 1$ du front importent pour la dynamique du système. On remarquera également qu'il ne

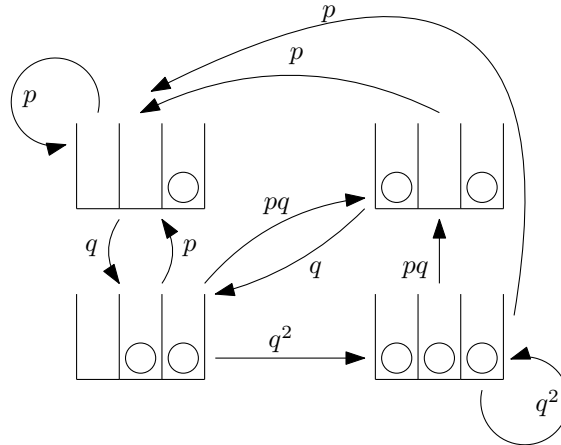


FIGURE 1.15 – Illustration de la chaîne de Markov obtenue pour la percolation de dernier passage sur les graphes complets avec deux poids positifs. Pour cet exemple, on suppose que ces poids valent 1 et 3 avec probabilités respectives q et $p = 1 - q$. Pour obtenir cette chaîne de Markov, on ne considère que les particules dont les positions sont à distance strictement inférieures à 3 du front, et on les représente dans des urnes de la même façon que pour l'IBM. Pour obtenir la vitesse du front dans ce cas, on calcule la mesure de probabilité stationnaire et on calcule l'espérance de l'avancée du front au coup suivant. Par exemple, si l'on est dans la configuration en haut à gauche, on avance soit de 3 avec probabilité p au prochain coup, soit de 1 avec probabilité q .

peut y avoir plus d'une particule à une position donnée pour ce système. Par conséquent, la constante de temps peut s'obtenir comme fonction de la probabilité stationnaire d'une chaîne de Markov dont l'espace d'état a cardinal 2^{m-1} . En Figure 1.15, on donne une illustration de cette chaîne de Markov lorsque $m = 3$. Par la propriété de "rescaling" (ii), on obtient le même résultat lorsque m est l'inverse d'un entier positifs plus grand ou égal à 2. Dans le Chapitre 2, on étudiera donc seulement le cas où les poids valent 1 et $1/k$ où $k \in \mathbb{N}$. On l'étendra ensuite au cas où les poids valent 1 et m avec $m \in]0, 1]$.

Par l'équivalence avec la chaîne de Markov, on peut calculer explicitement la constante de temps pour ce cas particulier pour des valeurs de m proches de 1. On donnera les formules pour $m = 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ dans le Chapitre 2, Section 2.4.1.

1.5.3. Cas particulier avec un poids entier négatif et poids 1

Considérons maintenant le cas où les poids peuvent prendre deux valeurs : 1 ou un entier négatif a avec probabilités respectives p et $1 - p$. Ce cas particulier n'est pas aussi simple que le cas avec deux poids positifs pour lequel le MGS est équivalent à une chaîne de Markov sur un espace d'état fini. Ici, le MGS est équivalent à une chaîne de Markov récurrente positive sur \mathbb{N}^{1-a} : il suffit de remarquer que les positions des particules sont entières et que la dynamique du système de particules ne dépend que des particules à une distance au plus $|a|$ du front de la configuration. Par la suite, on notera

$$N := 1 - a$$

le nombre d'urnes que l'on a besoin de considérer pour avoir un modèle Markovien. En Figure 1.22, on représente une partie du graphe de la chaîne de Markov du 2-bin model, où $q := 1 - p$. Avec les

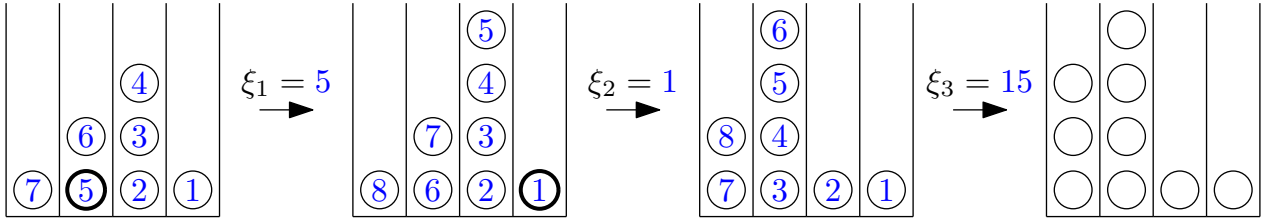


FIGURE 1.16 – Illustration de la dynamique du N -bin model avec $N = 4$. De la gauche vers la droite, on représente les configurations X_0, X_1, X_2 et X_3 . Si elle existe, la ξ_n -ème particule la plus à droite dans la configuration X_{n-1} est représentée en gras pour tout $n \in \{1, 2, 3\}$.

notations ci-dessous, on donne une illustration de la dynamique du 4-bin model en Figure 1.16.

Définissons plus précisément le N -bin model : une configuration $x \in \mathbb{N}^N$ du N -bin model représente N urnes contenant un nombre entier strictement positif de particules. Heuristiquement, on peut interpréter ce modèle comme les N urnes au front d'une version modifiée de l'IBM de loi géométrique pour laquelle on suppose que l'urne à distance N à gauche du front contient toujours une infinité de particules. On considère une configuration initiale X_0 et des variables aléatoires $(\xi_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi géométrique de paramètre p . Pour obtenir la configuration X_n à partir de la configuration X_{n-1} , on lui applique le coup ξ_n de la façon suivante : en numérotant les particules de la droite vers la gauche,

- s'il y a au moins ξ_n particules dans X_{n-1} , alors on ajoute une particule dans l'urne à immédiatement à droite de la ξ_n -ème particule (voir le passage entre les deux premières urnes dans la Figure 1.16).
- si la ξ_n -ème particule est dans l'urne la plus à droite dans X_{n-1} , alors la position du front avance de 1, et donc on ajoute une urne à droite contenant exactement une particule et on supprime l'urne la plus à gauche (voir le passage entre les deux urnes au centre dans la Figure 1.16).
- dans le cas où X_{n-1} contient moins de ξ_n particules, on ajoute une particule dans l'urne la plus à gauche (voir le passage entre les deux dernières urnes dans la Figure 1.16). Pour ce dernier cas, on peut imaginer qu'il y a une infinité de particule dans l'urne à distance N du front (on ne représente pas cette urne sur la Figure 1.16).

On montre à la fois des résultats théoriques et des résultats numériques pour ce modèle. Commençons par présenter les résultats théoriques.

En étudiant la fonction génératrice des probabilités stationnaires des configurations du N -bin model en tant que série formelle, on obtient une équation fonctionnelle pour cette fonction génératrice.

Théorème 1.5.6 (Chapitre 3, Proposition 3.3.1). *Soient $\pi_x(q)$ la probabilité stationnaire de la configuration $x \in \mathbb{N}^N$ pour le N -bin model, où $q := 1 - p$ et $N \in \mathbb{N}$. On note*

$$F(X_1, \dots, X_N) := \sum_{x \in \mathbb{N}^N} \pi_x(q) X_1^{x_1-1} \dots X_N^{x_N-1}$$

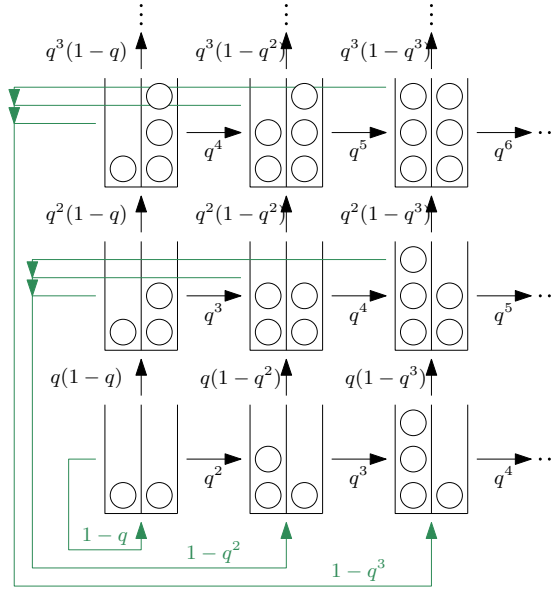


FIGURE 1.17 – Représentation du graphe de la chaîne de Markov pour le 2-bin model. En noir, on représente les transitions qui ne change pas la position du front. En vert, on représente les transitions qui font avancer le front de 1.

la fonction génératrice des probabilités stationnaires du N -bin model. Alors, F est solution de l'équation fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
 F(X_1, \dots, X_N) &= \sum_{i=1}^N X_i q^{N-i+1} F(X_1, \dots, X_{i-1}, qX_i, \dots, qX_N) \\
 &\quad - \sum_{i=2}^N X_i q^{N-i+2} F(X_1, \dots, X_{i-2}, qX_{i-1}, \dots, qX_N) \\
 &\quad + F(1, X_1, \dots, X_{N-1}) - qF(1, X_1, \dots, X_{N-2}, qX_{N-1}).
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ce type d'équation fonctionnelle est appelé une équation aux q -différences (ou q -équation) [Di +03]. Pour les équations de ce type à une seule variable, il existe des méthodes de résolution analogue à celles employées pour résoudre des équations différentielles. Donnons à présent une heuristique de preuve dans le cas le plus simple : le cas où $N = 1$, c'est-à-dire, avec poids 0 et 1. Dans ce cas, l'équation fonctionnelle (1.13) devient une q -équation à une seule variable :

$$F(X) = qXF(qX) + 1 - qF(q).$$

En évaluant cette fonction en $X = 0$, on remarque que $F(0) = 1 - qF(q)$. On peut alors ré-écrire l'équation fonctionnelle de la façon suivante :

$$F(X) = F(0) + qXF(qX).$$

Pour la résoudre cette q -équation, une idée simple consiste à réinjecter cette formule sur le dernier terme de la q -équation. On obtient alors que $F(X) = F(0) + qXF(0) + q^3X^2F(q^2X)$. En itérant ce procédé, on obtient que pour tout $n \geq 1$,

$$F(X) = F(0) + qXF(0) + q^3X^2F(0) + \dots + q^{n(n-1)/2}X^{n-1}F(0) + q^{n(n+1)/2}X^nF(q^nX).$$

Remarquons ensuite que si $x \in [0, 1]$, alors $F(x) \in [0, 1]$ par sa définition. On en déduit donc que pour $x \in [0, 1]$, $q \in [0, 1[$, et $n \geq 1$,

$$F(x) = F(0) \sum_{k=0}^{n-1} q^{\binom{k+1}{2}} x^k + O(q^{\binom{n+1}{2}}).$$

Par conséquent, pour $x \in [0, 1]$ et $q \in [0, 1[$,

$$F(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{k+1}{2}} x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{k+1}{2}}}.$$

Dans le cas où N vaut au moins deux, (1.13) n'est plus aussi simple à résoudre car elle devient une q -équation à plusieurs variables. En appliquant une méthode similaire à celle que nous venons de présenter dans le cas $N = 1$, on parvient néanmoins à donner une formule explicite pour la constante de temps sous forme d'une somme de polynômes explicites indexés par les chemins finis dans un graphe infini semblable à \mathbb{N}^N (cf. Théorème 1.5.7 ci-dessous). Dans le cas où $N = 1$, ce graphe est exactement le graphe dont les arêtes sont $(i, i + 1)$ pour $i \geq 0$, et on retrouve le résultat de Dutta [Dut20] (cf. Section 1.3.2).

Théorème 1.5.7 (Chapitre 3, Théorème 3.1.2). *Notons $\nu_{a,q}$ la loi de probabilité $(1 - q)\delta_1 + q\delta_a$. Pour tout $q \in [0, 1/N^2)$ et $a \leq 0$ entier,*

$$C(\nu_{a,q}) = \frac{1}{1 + q \sum_{\gamma \in F_a} p_{\gamma}(e_N)}. \quad (1.14)$$

où E_a est un ensemble de cardinal N^2 , F_a est l'ensemble de toutes les suite finies d'éléments de E_a , et $p_{\gamma}(e_N)$ est un polynôme explicite en q pour tout $\gamma \in F_a$. Ces notations sont définies plus précisément dans le Chapitre 3, Section 3.3.2.

Contrairement au cas où $a = 0$, la somme infinie dans la formule (1.14) ne semble pas se simplifier de manière simple dans le cas où a est strictement négatif. Notons que cette formule caractérise la constante de temps pour tout $p \in [0, 1]$ par prolongement analytique (cf. Théorème 1.5.2).

Un autre résultat théorique pour ce modèle est le suivant :

Lemme 1.5.8 (Chapitre 3, Lemme 3.2.8). *Pour toute configuration $x \in \mathbb{N}^N$, l'application $q \mapsto \pi_x(q)$ est analytique sur $[0, 1[$. De plus, en tout point $q \in [0, 1[$, il existe une borne inférieure strictement positive et indépendante de la configuration x pour le rayon de convergence de ces fonctions.*

Ce résultat se montre de la même manière que les Théorèmes 1.5.1 et 1.5.2 grâce aux événements de reconstruction introduits dans le Chapitre 2. Il nous permettra de justifier que l'algorithme que nous présentons en application numérique retourne les bonnes valeurs pour les développements asymptotiques des constantes de temps. Il nous servira également pour montrer le résultat suivant :

Théorème 1.5.9 (Chapitre 3, Proposition 3.1.3). *Pour tout $a \leq 0$ et $N = 1 - a$, les $\binom{N+2}{2}$ premiers coefficients des développements de Taylor des constantes de temps pour le cas avec poids 1 et a et pour le problème du plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős sont égaux.*

Pour des raisons numériques, ce théorème est important car il nous donne des informations sur la constante de temps pour le plus long chemin dans les graphes de Barak-Erdős, les coefficients du développement de Taylor étant plus faciles à calculer dans le cas où a est fini et proche de 1.

Présentons à présent les résultats numériques que nous obtenons pour ce modèle.

Dans la Section 1.4, nous avons donné différentes formules permettant de calculer les premiers termes du développement asymptotique de la constante de temps au voisinage de $p = 1$ dans le cas où les poids des arêtes valent 1 avec probabilité p et $a = -\infty$ avec probabilité $q = 1 - p$ (c'est-à-dire, les coefficients de la suite A321309). Dans le Chapitre 2, on montre que des formules analogues à (1.10) et (1.12) existent dans le cas où a est un entier négatif quelconque. Néanmoins, ces méthodes de calculs des coefficients restent limitées car elles ne permettent de calculer qu'une vingtaine de coefficients, et ce peu importe la valeur de a . Ceci est dû au nombre de mots triangulaires qui croît exponentiellement en fonction du nombre de coefficients que l'on cherche à calculer.

Étant donné que le cas avec poids 1 et a est équivalent à une chaîne de Markov sur \mathbb{N}^{1-a} , on pourrait penser qu'il est plus simple, d'une certaine manière, d'étudier le modèle lorsque a est proche de 0. Numériquement, c'est le cas. Pour a fixé et fini, nous présentons une méthode algorithmique permettant de calculer les coefficients de la constante de temps en temps polynomial (où l'exposant dans le polynôme est affine en a). Dans le cas où $a = -1$, on parvient à calculer un nombre de l'ordre de 10^4 coefficients pour le développement de Taylor de la constante de temps. En Figure 1.21, on donne une brève heuristique de cet algorithme dans le cas où $a = -1$. Les premiers termes de ces développements de Taylor sont en ligne sur le site de l'OEIS pour $a = -1$ (A373089), $a = -2$ (A373090) et $a = -3$ (A373091). Par le Théorème 1.5.9 et grâce à cette méthode, on réfute la conjecture de Mallein et Ramassamy [MR19] sur l'alternance des signes des coefficients de la constante de temps et la croissance de la suite des coefficients en valeur absolue dans le cas Barak-Erdős (voir Figure 1.18).

¹²Ce comportement semble similaire à un exemple donné dans [FS09] à la page 265 pour des fonctions ayant deux pôles complexes conjugués, à la différence que la fonction périodique dans [FS09] est bornée contrairement à celle présentée ici qui ne semble pas l'être.

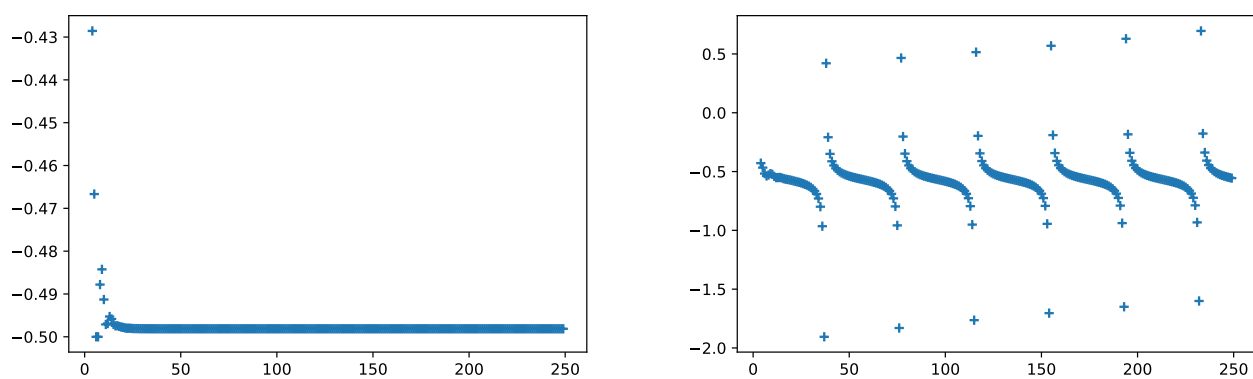


FIGURE 1.18 – Diagramme représentant les ratios de coefficients consécutifs pour le développement de Taylor de la constante de temps avec poids 1 et a de probabilités respective p et $q = 1 - p$ au voisinage de $p = 1$. À gauche, on donne le diagramme pour $a = -1$. À droite, on donne le même diagramme pour $a = -2$. On a une différence de comportement entre les cas $a = -1$ et $a = -2$. En particulier, tous les points tracés à gauche ont pour ordonnées des valeurs négatives, ce qui laisse penser que les coefficients pour $a = -1$ sont bien alternés. Par contre, à droite, on observe que certains points sont au dessus de l'axe $y = 0$, ce qui implique que l'on a des coefficients consécutifs de même signe dans la suite. On remarquera également qu'à gauche, la suite des ratios semble converger de façon exponentielle vers une valeur limite, alors qu'à droite, la suite des ratios semble correspondre à l'évaluation d'une fonction périodique sur \mathbb{N} .¹²

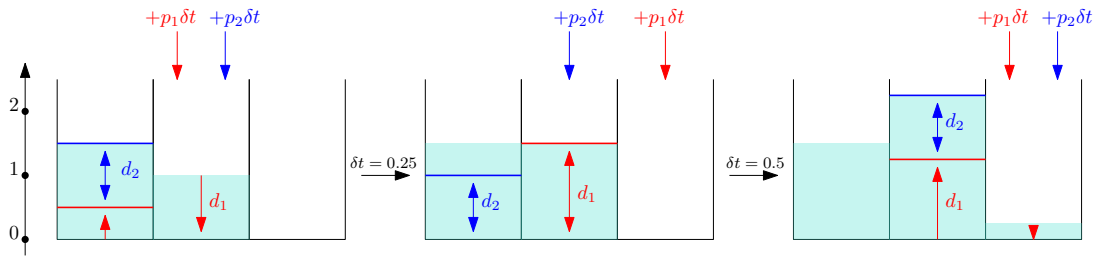


FIGURE 1.19 – Illustration de la dynamique du LBM pour les paramètres $N = 2$, $\underline{d} = (1.5, 1)$ et $\underline{p} = (0.5, 1.5)$. Le curseur rouge correspond aux paramètres de position d_1 et de débit p_1 . Le curseur bleu correspond aux paramètres de position d_2 et de débit p_2 . Au départ, une même urne contient les deux curseurs. Après avoir attendu une durée 0.25, on a ajouté une quantité de liquide 0.5 dans la seconde urne. Comme l'urne contient maintenant une quantité de liquide égale à 1, le curseur rouge change d'urne et saute de la première vers la seconde urne. Il y a maintenant deux possibilités : soit le prochain curseur à changer d'urne est le bleu, soit c'est le rouge. Ici, après un temps 0.5, c'est le bleu qui change d'urne.

1.5.4. Étude d'une limite d'échelle de l'infinite bin model

Nous étudions à présent une limite hydrodynamique de l'infinite bin model (cf. 1.2.5) : la *liquid bin model (LBM)*. Ces résultats sont le fruit d'une collaboration avec Sanjay Ramassamy. Dans cette section, le modèle étudié n'est plus stochastique mais déterministe.

Commençons par définir le liquid bin model.

On considère des urnes indexées par \mathbb{Z} contenant toutes une quantité positive ou nulle de liquide. On notera que les configurations de liquides pour lesquelles chaque urne contient une quantité entière de liquide sont exactement les configurations de l'IBM.

Comme pour l'IBM, on suppose que les configurations considérées contiennent une quantité totale infinie de liquide, et que leur front est bien défini.

Le LBM est paramétré par un entier $N \geq 1$ correspondant au nombre de barres dans le système (barres que l'on appellera par la suite "curseurs"), et par des réels strictement positifs $\underline{p} := (p_1, \dots, p_N)$ et $\underline{d} := (d_1, \dots, d_N)$. Les paramètres (p_1, \dots, p_N) correspondent à des débits de liquide. Les paramètres (d_1, \dots, d_N) correspondent aux écarts des distances entre les curseurs. La distance entre un curseur et le front est définie comme étant la quantité de liquide totale en dessous du curseur et à droite de l'urne contenant le curseur.

On notera souvent $\underline{q} := (q_1, \dots, q_N)$, où q_i correspond à la somme des débits des curseurs inférieurs ou égaux à i et $\underline{a} := (a_1, \dots, a_N)$, où a_i correspond à la distance entre le curseur i et le front :

$$a_i := d_1 + \dots + d_i,$$

$$q_i := p_1 + \dots + p_i.$$

Considérons tout d'abord une configuration fixée. On place les curseurs de façon déterministe dans

cette configuration de la façon suivante. Le premier curseur (indexée par 1) est placé à distance d_1 du front. Avec l'exemple de la Figure 1.19, le curseur 1 est placé à hauteur 0.5 dans l'urne de gauche car les urnes à sa droite contiennent une quantité de liquide égale à 1 et que $d_1 = 1.5$. Plus généralement, le curseur i est placé à distance $d_1 + \dots + d_i$ du front. On ne considérera par la suite que les configurations d'urnes contenant au total une quantité au moins égale à a_N de façon à ce que les curseurs soient tous bien définis. La dynamique du modèle est la suivante : à chaque instant, on ajoute du liquide à taux p_i dans l'urne immédiatement à droite de l'urne contenant le i -ème curseur. On notera que la position des curseurs dans le système évolue dans le temps étant donné que la quantité de liquide dans chaque urne varie dans le temps. On donne une illustration de cette dynamique en Figure 1.19.

Contrairement à l'infinite bin model pour lequel le modèle est stochastique à temps discret, le liquid bin model est un modèle déterministe à temps continu. Une autre différence entre ces deux modèles vient du fait que les urnes contiennent un nombre entier de particules pour l'IBM et une quantité réelle (pas forcément entière) de liquide pour le LBM.

Une façon d'obtenir ce modèle à partir de l'IBM est la suivante : si l'on considère un IBM de loi μ , où μ est une loi discrète (avec un nombre fini N d'atomes) dont les atomes sont tous de l'ordre de grandeur de $s > 0$, alors lorsque s tend vers l'infini, cet IBM converge en tant que processus vers un liquid bin model. Plus précisément, on montrera le résultat suivant (énoncé ci-dessous de manière informelle), qui sera le seul résultat probabiliste dans cette section :

Théorème 1.5.10 (Chapitre 4, Théorème 4.6.1). *Soit $N \geq 1$, $\underline{d} = (d_1, \dots, d_N)$ et $\underline{p} = (p_1, \dots, p_N)$ strictement positifs tels que $p_1 + \dots + p_N = 1$. Posons*

$$\mu_s := \sum_{i=1}^N p_i \delta_{(d_1 + \dots + d_i)s}.$$

L'IBM de loi μ_s renormalisé en temps et en quantité de particules par s converge en processus vers le liquid bin model de paramètres $(\underline{d}, \underline{p})$.

De façon analogue à l'IBM, on montrera que la vitesse du front existe et qu'elle ne dépend pas de la configuration initiale choisie. Plus précisément, on montrera que si $x_n(t)$ correspond à la quantité de liquide au temps t dans l'urne n , alors la fonction x_n converge vers une fonction x_∞ déterministe, qui ne dépend que des paramètres $(\underline{d}, \underline{p})$:

Théorème 1.5.11 (Chapitre 4, Théorème 4.3.8). *Pour tous paramètres $(\underline{d}, \underline{p}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2N}$, il existe une unique¹³ configuration $x = (x_n)$ telle que pour un certain temps $t_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$x_n(t + t_1) = x_{n-1}(t).$$

Une telle configuration est appelée configuration stationnaire. Si x est la configuration stationnaire, on note $\tilde{x}_\infty(t) := x_n(t + x_n^{-1}(0^+))$ la quantité de liquide dans une urne n telle que $x_n(0) = 0$ au temps $t + x_n^{-1}(0^+)$, où $x_n^{-1}(0^+)$ est le premier temps auquel l'urne n contient du liquide. Une telle fonction est appelée profil de remplissage stationnaire et ne dépend que des paramètres $(\underline{d}, \underline{p})$. En particulier, à paramètres fixées, elle est unique.

¹³à décalage dans le temps près



FIGURE 1.20 – Illustration des graphes d’assistances. Le graphe de gauche est bien un graphe d’assistances. Le graphe de droite n’en est pas un car, par exemple, l’arête $\{1, 3\}$ est dans le graphe mais pas la $\{1, 2\}$ qui est en dessous.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une configuration quelconque, notons \tilde{x}_n la fonction telle que $\tilde{x}_n(t) := x_n(t + x_n^{-1}(0^+))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On appelle \tilde{x}_n le profil de remplissage de l’urne n . Alors, la suite des profils de remplissage $(\tilde{x}_n)_n$ converge uniformément vers l’unique profil de remplissage stationnaire \tilde{x}_∞ lorsque n tend vers $+\infty$.

Ce résultat peut se voir comme la convergence d’un processus vers une version stationnaire du même processus. Contrairement à l’IBM, on n’atteint pas le régime stationnaire en un temps fini aléatoire, mais on s’en rapproche exponentiellement vite en fonction du temps. En particulier, ce résultat implique que le seul régime intéressant pour étudier la vitesse du front est le régime stationnaire.

Dans le régime stationnaire, on montrera que l’espace des paramètres est partitionné en différentes régions sur lesquelles la vitesse du front est une fonction rationnelle des paramètres (d, p) . À la frontière entre ces régions, on a une transition de phase pour la formule de la vitesse du front. C’est ce qu’on appelle un phénomène de passe-muraille (ou wall-crossing). Une autre raison pour laquelle ce modèle est intéressant est qu’il est possible de donner une formule explicite pour la vitesse du front sur chacune de ces régions.

Introduisons à présent quelques notations pour présenter les différentes régions de l’espace de paramètres. On considère les objets combinatoires suivants : un *graphe d’assistances* à N sommets est un graphe dont l’ensemble des sommets est $\llbracket 1, N \rrbracket$ et dont l’ensemble des arêtes E vérifie la propriété suivante : si $i \leq k < l \leq j$, alors $\{i, j\} \in E \implies \{k, l\} \in E$. Autrement dit, si l’on représente le graphe comme dans la Figure 1.20, un graphe est un graphe d’assistances s’il n’y a aucune arête manquante sous chacune des arêtes présente dans le graphe.

Il est facile de voir que ces graphes sont en bijection avec les chemins de Dyck de longueurs $2N$, c’est-à-dire les excursions positives de marches d’incrément $+1$ et -1 allant de 0 à $2N$. Cela montre qu’il y a bien $Catalan(N)$ régions sur laquelle la vitesse du front est différente.

Théorème 1.5.12 (Chapitre 4, Théorèmes 4.4.8 et 4.4.12). ¹⁴ Soit $DC(N)$ l’ensemble des graphes d’assistances à N sommets. Il existe une partition $(P_G)_{G \in DC(N)}$ de l’ensemble des paramètres de $(\mathbb{R}_+^*)^{2N}$ pour laquelle la vitesse du front est une fraction rationnelle en les paramètres sur P_G pour tout $G \in DC(N)$. De plus, P_G est d’intérieur non vide pour tout graphe d’assistances $G \in DC_N$.

¹⁴Ce théorème est similaire aux résultats sur la constante de temps pour la percolation de dernier passage avec poids 1 et m (cf. Théorème 1.5.5). Dans les deux cas, on a un phénomène de wall-crossing, c’est-à-dire que l’espace des paramètres est divisé en régions sur lesquelles la constante de temps est régulière, et on a une non-régularité aux frontières entre les régions. Dans le Théorème 2.1.9, on se place seulement en dimension 1 . Dans le Théorème 1.5.12, on est dans un espace de dimension $2N$, où $2N$ correspond au nombre de paramètres du modèle.

Les formules pour la vitesse du front sont données dans le Chapitre 4 en (4.41).¹⁵

Un dernier point que nous traitons consiste à déterminer à quelle condition deux régions différentes de l'espace des paramètres ont une frontière commune. Pour répondre à ce problème, on dira que deux arêtes $\{i, j\}$ et $\{i', j'\}$ où $i < j$ et $i' < j'$ sont *emboîtées* si et seulement si $i \leq i' < j' \leq j$ ou $i' \leq i < j \leq j'$. Cela revient à dire que l'une des arête est en dessous de l'autre comme dans l'exemple donné en Figure 1.20.

Théorème 1.5.13 (Chapitre 4, Théorème 4.5.2). *Soient G et G' deux graphes d'assistances. La frontière commune $\partial P_G \cap \partial P_{G'}$ entre les régions correspondantes aux graphes d'assistances G et G' est non vide si et seulement s'il n'existe pas de couple d'arêtes emboîtées dans la différence symétrique des ensembles d'arêtes de G et G' . De plus, si cette frontière est non vide, la codimension de cette frontière est égale au cardinal de la différence symétrique des deux ensembles d'arêtes :*

$$\text{codim}(\partial P_G \cap \partial P_{G'}) = |E(G) \Delta E(G')|.$$

Nous présentons à présent une façon de voir le LBM comme un modèle de voitures qui accélèrent sur une seule voie. Il s'agit d'un élément de preuve que nous utilisons durant tout le Chapitre 4 pour étudier ce modèle. Nous donnons une illustration de l'équivalence entre le LBM et le modèle de voitures en Figure 1.21, et une illustration de sa dynamique en Figure 1.22.

Le modèle de voitures se construit de la façon suivante : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit $y_k(t)$ comme étant la somme des $x_i(t)$ pour $i \geq k$. En d'autres termes, la position de la voiture k correspond à la quantité totale de liquide dans l'urne k et dans les urnes à sa droite.

Pour ce modèle, il y a donc une infinité de voitures indexées par \mathbb{Z} , toutes à positions dans \mathbb{R}_+ . De plus, les positions de ces voitures à tout temps t sont dans l'ordre décroissant par rapport à la numérotation. On notera qu'étant donné que la position du front est finie, le modèle de voitures est bien défini, et il existe une infinité de voitures étant à la position 0 à tout temps.

La dynamique du liquid bin model s'interprète alors de la manière suivante en termes de voitures : à chaque position $a_i = d_1 + \dots + d_i$ pour $1 \leq i \leq N$, il y a un panneau indiquant la vitesse $q_i = p_1 + \dots + p_i$. Chaque voiture évolue en suivant les mêmes règles :

- Le conducteur d'une voiture (disons la voiture k) peut voir un panneau si et seulement si la voiture devant elle (c'est-à-dire la voiture $k - 1$) a déjà dépassé le panneau.
- La vitesse d'une voiture correspond à la vitesse maximale que son conducteur a déjà vue sur un panneau.
- Si un conducteur a dépassé la position d'un panneau, on considère qu'il l'a déjà vu.

¹⁵Avec les notations du Chapitre 4, la vitesse du front correspond à $1/z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ sur la région P_G .

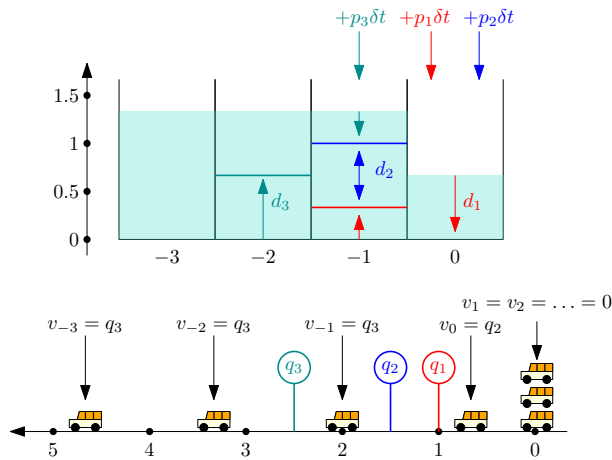


FIGURE 1.21 – Illustration de l'équivalence entre le liquid bin model et le modèle de voitures avec $N = 3$. Chaque urne correspond à une voiture, et chaque curseur à un panneau. La flèche étiquetée " $v_i = \dots$ " pointe vers la voiture i . Pour construire le modèle de voiture, on change de référentiel : plutôt que de prendre le référentiel des urnes, on considère le référentiel des curseurs. Les voitures placées en 0 correspondent aux urnes vides à droite du front. La voiture 0 avance à vitesse q_2 étant donné que l'urne 0 se remplit à taux $q_2 = p_1 + p_2$. Les voitures restantes correspondent aux urnes numérotées $i \leq -1$. La somme des débits de remplissage des urnes à droite et dans l'urne -1 vaut $p_1 + p_2 + p_3 = q_3$, donc les voitures i avec $i \leq -1$ avancent à vitesse q_3 . Le fait que les curseurs 1 et 2 sont dans la même urne s'interprète comme le fait qu'il n'y a aucune voiture entre les panneaux 1 et 2.

En particulier, la vitesse de chaque voiture est croissante, ce qui rend le modèle plus simple à comprendre et à étudier par rapport au modèle d'urne où le taux de remplissage d'une urne donnée n'est pas croissant en fonction du temps.

Pour ce modèle de voiture, on notera que le temps de démarrage de deux voitures consécutives correspond au temps entre deux changements de position du front dans le modèle d'urne. En d'autres termes, dans le régime stationnaire, la vitesse du front pour le modèle d'urne est égale à l'inverse de l'écart entre deux temps consécutifs de démarrages de voitures.

Le principal avantage du liquid bin model par rapport à l'infinite bin model vient du fait que ce modèle est soluble. En effet, pour le liquid bin model, toutes les quantités intéressantes (notamment la vitesse du front) sont des fractions rationnelles en les paramètres pour lesquelles on a des formules explicites. Il reste plusieurs questions ouvertes concernant ce modèle. L'une d'entre elles serait de voir si cette limite hydrodynamique pourrait nous donner des informations sur l'IBM, en particulier pour l'IBM de loi géométrique qui correspond au cas des graphes de Barak-Erdős. On pourrait également se demander s'il est possible d'étendre les résultats obtenus pour le liquid bin model dans le cas où le nombre de paramètres (c'est-à-dire le nombre de panneaux) est infini. Une condition simple pour que ce modèle soit bien défini serait de considérer que l'ensemble des vitesses des panneaux est borné. Dans ce cas, on peut alors se poser les mêmes questions que dans le cas avec un nombre fini de panneaux : est-ce que l'IBM converge vers le liquid bin model? Est-ce qu'il existe une unique configuration stationnaire pour le liquid bin model? Si oui, a-t-on une formule simple pour la vitesse

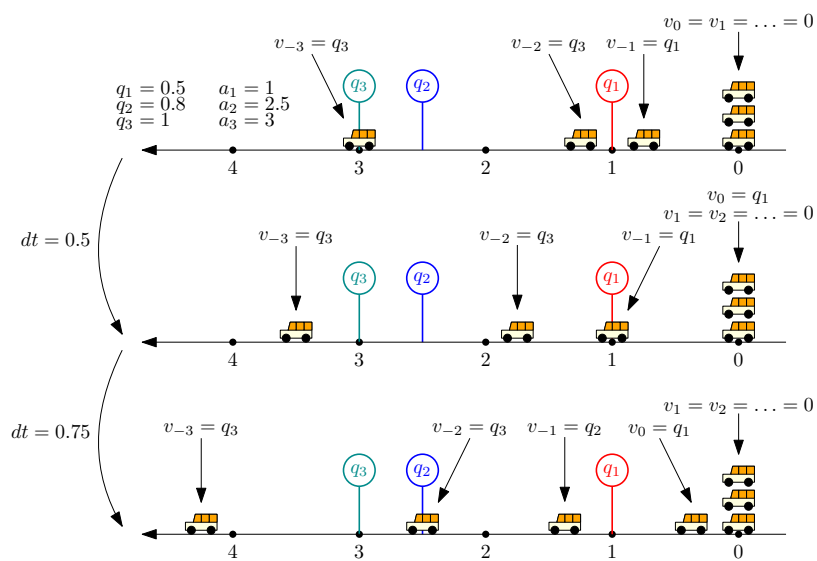


FIGURE 1.22 - Illustration de la dynamique du modèle de voitures. En haut, on représente la configuration initiale. La flèche étiquetée " $v_i = \dots$ " pointe vers la voiture i . Au départ, la voiture -1 ne voit que le panneau q_1 car la voiture -2 lui cache les deux autres. La voiture -2 voit le panneau q_3 car la voiture -3 vient de passer à côté. La voiture -3 et les voitures i avec $i \leq -3$ avancent à vitesse q_3 car elles ont déjà dépassé le panneau à position a_3 . Les voitures d'indice $i \geq 0$ ne voient aucun panneau, donc elles n'avancent pas. Après une durée 0.5 , la voiture -1 passe le premier panneau donc la voiture 0 commence à avancer à vitesse q_1 .

du front dans ce régime, et comment se partitionne l'espace des paramètres? On conjecture que les formules que l'on donne dans le Chapitre 4 pour la vitesse du front et les équations des régions entre les différentes régions de paramètres sont également valides dans le cas où $N = +\infty$.

Structure des chapitres :

Les résultats présentés en Sections 1.5.1 et 1.5.2 sont traités dans le Chapitre 2, qui est adapté de la prépublication [Ter23]. Les résultats de la Section 1.5.3 seront présentés dans le Chapitre 3. Le modèle de limite hydrodynamique de la Section 1.5.4 sera traité dans le Chapitre 4, qui est issu d'une collaboration avec Sanjay Ramassamy.

2 - Regularity of the time constant

Abstract

We study the time constant $C(\nu)$ of last passage percolation on the complete directed acyclic graph on the set of non-negative integers, where edges have i.i.d. weights with distribution ν with support included in $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. We show that $\nu \mapsto C(\nu)$ is strictly increasing in ν . We also prove that $C(\nu)$ is continuous in ν for a large set of measures ν . Furthermore, when ν is purely atomic, we show that $C(\nu)$ is analytic with respect to the weights of the atoms. In the special case of two positive atoms, it is an explicit rational function of these weights.

Keywords: last passage percolation, particle systems, renovation theory, coupling, stationarity, random graphs, Markov chains.

2.1. Introduction

We study the problem of last passage percolation on a complete directed acyclic graph. Let $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ denote the set of non-negative integers. We consider the directed graph with vertex set $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ and (directed) edge set $\{(i, j) : 0 \leq i < j\}$. Let ν be a probability distribution on $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ and let $X = (X_{i,j})_{0 \leq i < j}$ be i.i.d. random variables with distribution ν . For $0 \leq i < j$, we assign weight $X_{i,j}$ to the directed edge (i, j) . We call *directed path* a sequence of integers $\pi = (i_1, \dots, i_k)$ such that $0 \leq i_1 < \dots < i_k$. The associated weight w_π of the path π is defined by

$$w_\pi = X_{i_1, i_2} + \dots + X_{i_{k-1}, i_k}.$$

The quantity we are interested in is the weight of a heaviest path starting at 0 and ending at n (see Figure 2.1):

$$W_n = \max\{w_\pi : \pi = (i_1, \dots, i_k) \text{ is a directed path with } i_1 = 0 \text{ and } i_k = n\}. \quad (2.1)$$

As usual with last passage percolation models, the sequence of last passage times $(W_n)_{n \geq 0}$ satisfies a super-additive property, namely:

$$W_m \geq W_n + W_{n,m},$$

for all $n < m$ where

$$W_{n,m} = \max\{w_\pi : \pi = (i_1, \dots, i_k) \text{ directed path with } i_1 = n \text{ and } i_k = m\} \quad (2.2)$$

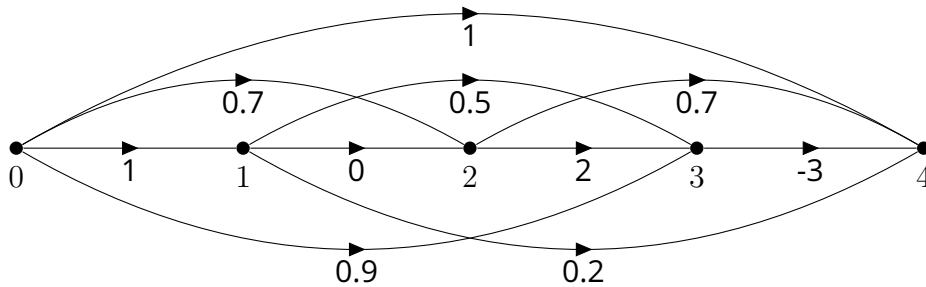


Figure 2.1 – Illustration of the last passage percolation problem on the complete graph with 5 vertices. With the weights given below each edge of this graph, $W_0 = 0$, $W_1 = W_2 = 1$, $W_3 = 3$, and $W_4 = 1.7$. A heaviest path from 0 to 4 is $\pi = (0, 1, 2, 4)$.

has the same distribution as W_{m-n} . Therefore, by Kingman’s sub-additive ergodic theorem¹, there exists a deterministic constant $C(\nu) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, called the *time constant for last passage percolation*, such that

$$\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} C(\nu). \quad (2.3)$$

The main goal of this chapter is to study the regularity of the function $\nu \mapsto C(\nu)$ and, in particular, study the analyticity of $C(\nu)$ with respect to the probabilities of some atoms of ν . Indeed, in statistical physics, the analyticity of observables is of particular importance because a breach of analyticity usually pinpoints a phase transition in the model. A canonical example is the non-differentiability of the function $p \mapsto \theta(p)$, the probability that the origin belongs to an infinite cluster in classical Bernoulli bond percolation on \mathbb{Z}^2 , at the critical value $p_c = \frac{1}{2}$. A similar result holds for the magnetization in the Ising model. One may refer to [Men86; AB87] and [ABF87] for more details. We also point out that results similar to those stated in this chapter were previously obtained in [CD22; Dem21] for Bernoulli first-passage percolation on the lattice \mathbb{Z}^d in the supercritical regime.

More precisely, it is proven that the time constant is Lipschitz continuous in [CD22; Dem21]. Similarly, one of the result that we will present in this chapter concerns the continuity of the time constant $C(\nu)$ seen as a function of ν . Although those results are similar, the methods employed to prove them are different due to the difference between the two models.

Let us note that there is a trivial scaling property of the model when multiplying all the weights by a deterministic constant $M > 0$: let X be a random variable with distribution ν and let ν_M denote the distribution of the random variable MX . It holds that

$$C(\nu_M) = M \cdot C(\nu). \quad (2.4)$$

¹Note that there are other conditions to check in order to apply Kingman’s sub-additive ergodic theorem. In the case where $\nu(\{-\infty\}) = 0$, all the assumptions of the theorem are satisfied (cf. Liggett’s version of the theorem [Lig85b]). The existence of the time constant in the general case is proved in [FMS14].

However, we point out that there is no such simplification when adding a deterministic constant to every weight (because the heaviest paths do not have a fixed number of edges). In particular, we do not know any simple relation between $C(\nu)$ and $C(\nu + M)$.

For $x \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, let us denote by δ_x the Dirac measure at x . We remark that setting an edge with weight $-\infty$ is equivalent to removing this edge from the graph (at least for computing the heaviest paths). As a consequence, when $\nu = (1 - p)\delta_{-\infty} + p\delta_1$, the last passage percolation problem is equivalent to the study of the longest path for the Barak-Erdős graph model [BE84], which is a directed acyclic version of the Erdős-Rényi model. This specific case has known applications in applied mathematics on stability in queues [FK03], in biology on food chains [New92; NCS86], and in computer science on parallel computing [Gel+86; IN94]. In [MR19; MR21], Mallein and Ramassamy proved that the function $p \in (0, 1] \mapsto C((1 - p)\delta_{-\infty} + p\delta_1)$ is analytic, that its Taylor expansion around $p = 1$ has integer coefficients, and they computed the first 17 terms of this Taylor expansion. They also computed the first two terms of the asymptotic expansion of $p \mapsto C((1 - p)\delta_{-\infty} + p\delta_1)$ around $p = 0$. Those results are consequences of the coupling between last passage percolation on Barak-Erdős graphs and the infinite bin model, which is an interacting particle system introduced by Foss and Konstantopoulos in [FK03].

A simple generalization of the last passage percolation problem for Barak-Erdős graphs is the case where $\nu = (1 - p)\delta_x + p\delta_1$ for $x \in \{\pm\infty\} \cup \mathbb{R}$. It is proved in [FKP23] that the time constant $C((1 - p)\delta_x + p\delta_1)$ seen as a function of x is strictly increasing and convex for all $p \in (0, 1)$, and that its non-differentiability points are the non-positive rational numbers, the integers greater than one and their reciprocals. Finite negative edge weights for last passage percolation on the complete graph were first considered in [FK18].

Kingman's sub-additive theorem ensures only that $C(\nu) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ so that the time constant may possibly be infinite. Let

$$M_\nu = \inf\{t \in \mathbb{R} : \nu([t, +\infty)) = 0\}$$

denote the essential supremum of ν . Obviously, we have $W_n \leq nM_\nu$ almost surely and therefore $C(\nu)$ is necessarily finite whenever ν has upper-bounded support. A less restrictive sufficient condition to ensure that $C(\nu) \in [0, +\infty)$ is given in [FMS14] for probability distributions with support included in $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_+$. It states that $C(\nu)$ is finite when $\mathbb{E}[\max(0, X_{1,2})^2] < +\infty$. Reciprocally, it has been shown in [FMS14] that if ν is regularly varying with index $s \in (0, 2)$ (which implies in particular that $\mathbb{E}[\max(0, X_{1,2})^2] = +\infty$), then $C(\nu) = +\infty$. In fact, the non-negativity of the time constant and the fact that it is finite which are both proved in [FMS14] can both easily be extended to all probability distributions ν on $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ by approximations and using the monotonicity of $\nu \mapsto C(\nu)$. However, the study of the time constant $C(\nu)$ is greatly simplified when the support of the weight distribution is upper-bounded and this will be our standing assumption throughout the chapter.

Let us mention that the assumption that ν has finite essential supremum was previously enforced in a work by Foss, Konstantopoulos, Mallein and Ramassamy in [Fos+23a] where they used this fact to study the last passage percolation model via a coupling with an interacting particle system called *max growth system* (MGS) which is a generalization of the infinite bin model introduced in [FK03]. Using

tools from renovation theory, they proved that it is possible to perform perfect simulations of the time constant $C(\nu)$ when $M_\nu < +\infty$. This connection between last passage percolation on a directed complete graph and the MGS is also an essential ingredient for several proofs of this chapter.

The remainder of the introduction is devoted to presenting the main results proved in the later sections of this chapter.

We first study the monotonicity of the function $\nu \mapsto C(\nu)$. If ν_1 and ν_2 are two probability distributions on $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ such that ν_1 is stochastically dominated by ν_2 , then $C(\nu_1) \leq C(\nu_2)$ by a trivial coupling. This means that the time constant $C(\nu)$ is a non-decreasing function for the stochastic (partial) order. The more delicate question is whether it is *strictly* increasing. Our first result provides a positive answer and generalizes a previous monotonicity result stated in [FKP23] concerning the function $m \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_M)$.

Let us denote by \mathcal{M}_1 the set of all probability distributions on $(\{-\infty\} \cup \mathbb{R}, \mathcal{B}(\{-\infty\} \cup \mathbb{R}))$, where $\mathcal{B}(\{-\infty\} \cup \mathbb{R})$ is the Borel algebra for the usual topology on $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. For every Borel set $A \in \mathcal{B}(\{-\infty\} \cup \mathbb{R})$, let us denote by $\mathcal{M}_1(A)$ the set of probability distributions $\nu \in \mathcal{M}_1$ such that $\nu(A) = 1$.

Theorem 2.1.1. *For every distributions ν_1 and ν_2 on $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, let us recall that ν_1 is stochastically dominated by ν_2 if and only if for all $t \in \mathbb{R}$,*

$$\nu_1([-\infty, t]) \geq \nu_2([-\infty, t]).$$

For all $M > 0$, $C(\nu)$ is strictly increasing for the stochastic order on the set of probability distributions $\nu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$ such that $\nu(\{M\}) > 0$.

Remark 2.1.2. • The theorem above tells us something about the geometry of the heaviest paths: because the time constant is strictly monotonic, edge weights with arbitrarily large negative values in the support of ν may contribute to a heaviest path. Thus, avoiding all the edges with weights below a certain cutoff is not the optimal strategy, as one could have naively expected. A similar phenomenon occurs for the model of first passage percolation on \mathbb{Z}^d with unbounded weight distributions: asymptotically, for this model, geodesics use arbitrary large positive values. For more details in the case of first passage percolation on \mathbb{Z}^d , one can refer to the remark above Theorem 2.12 in [ADH17].

- Let also remark that the assumption that $M > 0$ cannot be dropped without further assumptions because the strict monotonicity does not hold anymore for probability distributions $\nu \in \mathcal{M}_1([-\infty, 0])$. Indeed, for any such distribution different from $\delta_{-\infty}$, it is easy to check that $C(\nu) = 0$ (because in that case, every step is a penalty so the best strategy is to go from 0 to n with only a finite number of steps that does not increase to infinity with n), c.f. [Fos+23a] for details.
- Theorem 2.1.1 may still holds without the assumption $\nu(\{M\}) > 0$. However, the renovation events we introduced in this chapter exists only at the condition that $\nu(\{M\}) > 0$. Therefore, it would require different renovation events than the ones considered in this chapter to prove it. It may be possible to do so with the renovation events from [Fos+23a].

Denote by $\mathcal{M}_1^b = \{\nu \in \mathcal{M}_1 : M_\nu < \infty\}$ the set of all probability distributions in \mathcal{M}_1 with finite essential supremum and by d_{LP} the Lévy-Prokhorov metric on \mathcal{M}_1 . It is known that this metric corresponds to the topology of weak convergence of measures when working on a separable space, which is the case here. For $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_1$, we set

$$d(\nu_1, \nu_2) = \max(d_{LP}(\nu_1, \nu_2), |M_{\nu_1} - M_{\nu_2}|). \quad (2.5)$$

It is straightforward that d defines a metric on \mathcal{M}_1 .

Theorem 2.1.3. *The map $\nu \in \mathcal{M}_1^b \mapsto C(\nu)$ is continuous for the metric d defined in (2.5).*

Remark 2.1.4. One may notice that $\nu \mapsto C(\nu)$ is not continuous on \mathcal{M}_1 for the Lévy-Prokhorov metric. With $\nu_n = (1 - \varepsilon_n)\delta_1 + \varepsilon_n\delta_n$ and $\nu = \delta_1$, ν_n converges to ν for the Lévy-Prokhorov metric when ε_n tends to 0 as n tends to infinity. However, with $C_0(p) := C((1 - p)\delta_0 + p\delta_1)$, C_0^{-1} its inverse and $\varepsilon_n = C_0^{-1}(2n^{-1})$, one can show that $\liminf_{n \rightarrow \infty} C(\nu_n) \geq 2$ as follows: first, notice that the inverse of C_0 exists since C_0 is increasing by Theorem 2.1.1. In addition, since C_0 is continuous and equal to 0 at $p = 0$, ε_n tends to 0 as n goes to infinity. Then, by the rescaling property (2.4) and the monotonicity of the time constant (Theorem 2.1.1), one obtains

$$\frac{C(\nu_n)}{n} = C((1 - \varepsilon_n)\delta_{1/n} + \varepsilon_n\delta_1) \geq C((1 - \varepsilon_n)\delta_0 + \varepsilon_n\delta_1) = C_0(\varepsilon_n).$$

By definition of ε_n , $C_0(\varepsilon_n)$ is equal to $2n^{-1}$. Therefore, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} C(\nu_n) \geq 2$.

Remark 2.1.5. The fact that the essential supremum is an atom for the measures considered is crucial for our construction. This is why we consider the metric d instead of the Lévy-Prokhorov metric. It might be possible to prove the continuity for the Lévy-Prokhorov metric of the map $\nu \mapsto C(\nu)$ on $\{\nu \in \mathcal{M}_1 : C(\nu) \leq M\}$ for any fixed $M > 0$, but this might require a different construction.

The following technical result is a key ingredient for proving Theorem 2.1.3.

Theorem 2.1.6. *For all $M \in \mathbb{R}_+^* := (0, +\infty)$ and $\mu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$, the map $p \mapsto C((1 - p)\mu + p\delta_M)$ is analytic on $(0, 1]$. In other words, $p \mapsto C((1 - p)\mu + p\delta_M)$ is given by a convergent power series around each $p \in (0, 1]$.*

This result is also interesting in itself since it shows that it would suffice to know the coefficients of the Taylor expansion in p of the time constant at some $p_0 \in (0, 1]$ to obtain $C((1 - p)\mu + p\delta_M)$ for all $p \in (0, 1]$. The scope of Theorem 2.1.6 is rather general since every distribution with finite essential support can be decomposed as $(1 - p)\mu + p\delta_M$ for some $M \in \mathbb{R}$, $p \in [0, 1]$, and $\mu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$.

In addition, we give a lower bound for the radius of convergence of $p \mapsto C((1 - p)\mu + p\delta_M)$ at $p = 1$ in Remark 2.3.3, which improves the lower bound given in [MR21] in the case where $\mu = \delta_{-\infty}$.

In [MR19], Theorem 2.1.6 was proved in the specific case where $\mu = \delta_{-\infty}$, which corresponds to the case of the longest path in the Barak-Erdős graph. Our proof of Theorem 2.1.6 is an extension of the analyticity proof of [MR19]. It relies on a formula for $C((1 - p)\mu + p\delta_M)$ as a sum, over an infinite class of words, of polynomials in p whose coefficients depend on μ (Proposition 2.2.13).

For measures with finite support, we obtain the following result, which is a generalization in a different direction of the aforementioned analyticity result of [MR19]:

Theorem 2.1.7. *For all $N \in \mathbb{N}$ and $a_1 > a_2 > \dots > a_N \geq -\infty$, the map*

$$(p_2, \dots, p_N) \mapsto C\left(\sum_{i=1}^N p_i \delta_{a_i}\right)$$

is analytic on $\{(p_2, \dots, p_N) \in [0, 1]^N : 0 \leq p_2 + \dots + p_N < 1\}$, where $p_1 = 1 - (p_2 + \dots + p_N)$.

Remark 2.1.8. In general, we cannot extend the analyticity of the function considered in Theorem 2.1.7 to the set $\{(p_2, \dots, p_N) \in [0, 1]^N : 0 \leq p_2 + \dots + p_N \leq 1\}$. For instance, $p \mapsto C((1-p)\delta_{-\infty} + p\delta_1)$ is not analytic at 0 cf. [MR19; MR21].

Until now, we have considered general measures, possibly taking negative values. The model is easier to study when the support of ν is included in the set of all positive real numbers \mathbb{R}_+^* . For measures ν of the form $(1-p)\delta_m + p\delta_M$ with $0 < m \leq M$, the study of the time constant can be reduced to the study of a Markov chain on a finite state space, and we have the following result:

Theorem 2.1.9. *For all $0 < m \leq M$, $p \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_M)$ is a rational function on $[0, 1]$.*

In addition, we can compute the explicit numerical expression for $C((1-p)\delta_m + p\delta_M)$ for all positive values of m and M . The computational complexity of the algorithm used to compute these expressions increases exponentially fast in $\frac{M}{m}$. We provide in Subsections 2.4.1 and 2.4.2 these numerical expressions for m in $[\frac{M}{5}, M]$.

When $m = 0$, one can write the time constant as M times the reciprocal of the Ramanujan Ψ -function [Dut20]. We give in this chapter an alternative proof of that result:

Theorem 2.1.10 ([Dut20]). *For all $M > 0$ and $p \in (0, 1]$,*

$$C((1-p)\delta_0 + p\delta_M) = M \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{\binom{n}{2}} \right)^{-1}.$$

Organization of the paper

In Section 2.2, we recall the coupling from [Fos+23a] between last passage percolation and the MGS. We construct a time-stationary version of the MGS for measures $(1-p)\mu + p\delta_M$ with $p \in (0, 1]$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ and $\mu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$ (Proposition 2.2.3). To do so, we use different (yet of similar flavor) renovation events from those in [Fos+23a] and [MR19]. With these, we obtain a formula for $C(\nu)$ in Proposition 2.2.13 that we use in Section 2.3 to prove the regularity results on $\nu \mapsto C(\nu)$.

In Section 2.3, we study the regularity of $\nu \mapsto C(\nu)$. The main results proved in this section are Theorem 2.1.6, Theorem 2.1.7, Theorem 2.1.3 and Theorem 2.1.1.

In Section 2.4, we study the case of measures supported by two elements. Firstly, we prove Theorem 2.1.9 using results from [FKP23] and we give the expression of $C((1-p)\delta_m + p\delta_M)$ for values of m close to M . In the last subsection, we give an alternative proof of Theorem 2.1.10 using the stationary MGS.

2.2. Stationary max growth system and a formula for $C(\nu)$

This section is dedicated to the max growth system (MGS) which was introduced in [Fos+23a]. In Subsection 2.2.1, we recall the max growth system. This model was introduced by Foss, Konstantopoulos, Mallein and Ramassamy in order to perform perfect simulation of the time constant $C(\nu)$. In Subsection 2.2.2, we construct a stationary version of the MGS using tools from renovation theory. This construction differs from the one in [Fos+23a]. In Subsection 2.2.3, we use this construction in order to obtain a new formula for $C(\nu)$ as an infinite sum of quantities depending on ν .

2.2.1. The max growth system

The max growth system (MGS) is an interacting particle system in discrete time on $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ introduced in [Fos+23a]. A new particle is added to the configuration at each step according to a specific Markovian dynamics.

We consider \mathcal{N} the set of atomic measures λ on $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ taking values in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ and such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda([t, +\infty)) < +\infty.$$

An element of \mathcal{N} represents a configuration of particles on the real line in the following sense: if we consider $\lambda \in \mathcal{N}$ and $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(A)$ represents the number of particles with positions in A in the configuration λ . For instance, $\delta_{-1} + 2\delta_0$ is an element of \mathcal{N} . It corresponds to the configuration with one particle at position -1 and two at position 0 .

For $\lambda \in \mathcal{N}$, we set $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ the positions of the particles in λ in decreasing order (with repetitions). For example, $\lambda = \delta_{-1} + 2\delta_0$, we have $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ and $\lambda_3 = -1$. Notice that $\lambda(\mathbb{R})$ is the number of particles in the configuration λ .

We set $\mathcal{W} = (\{-\infty\} \cup \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ to be the set of weights. For $x = (x_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{W}$ and $\lambda \in \mathcal{N}$, we set

$$\mathfrak{m}(\lambda, x) = \max_{1 \leq i \leq \lambda(\mathbb{R})} (\lambda_i + x_i).$$

The deterministic dynamics of the MGS is defined as follows: the weights sequence x applied to the configuration λ adds a particle to λ at position $\mathfrak{m}(\lambda, x)$. Therefore, for all $x \in \mathcal{W}$, we define the map $\Phi_x : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ such that for all $\lambda \in \mathcal{N}$,

$$\Phi_x(\lambda) = \lambda + \delta_{\mathfrak{m}(\lambda, x)}.$$

See Figure 2.2 for an example.

An MGS with starting configuration $\lambda^{(0)} \in \mathcal{N}$ and weight distribution ν is a process $(\lambda^{(n)})_{n \geq 0}$ taking values in \mathcal{N} such that $\lambda^{(n+1)} = \Phi_{X^{(n+1)}}(\lambda^{(n)})$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, where $X^{(n)} = (X_i^{(n)})_{i \geq 1}$ and $(X_i^{(n)})_{(i,n) \in \mathbb{N}^2}$ are i.i.d. random variables with distribution ν .

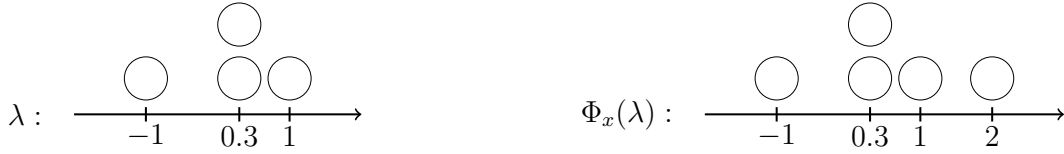


Figure 2.2 – On the left, the configuration $\lambda = \delta_{-1} + 2\delta_{0.3} + \delta_1$. On the right, the configuration $\Phi_x(\lambda)$, with $x = (0.5, -0.3, 1.7, 1, \dots)$. Here, $m(\lambda, x) = 0.3 + 1.7 = 2$.

Note that at all times, one needs to know the positions of all the particles' positions in the system in order to obtain the configuration at the next step. In the case corresponding to the longest the Barak-Erdos graph, these configurations can be seen as functions on \mathbb{Z} since all the particles have integer positions, and the resulting particle system is called the infinite bin model [FK03; MR21; MR19]. However, this representation of the configurations is less natural for the MGS with general weight distribution since the particles' positions may take any values in \mathbb{R} .

We are interested in this process because of the following coupling from [Fos+23a] relating the MGS to last passage percolation on complete directed acyclic graphs. It is an extension of the infinite bin model introduced in [FK03].

Proposition 2.2.1 ([Fos+23a]). *We consider W_n as defined in (2.1) where $X_{i,j}$ has distribution ν for all $0 \leq i < j$. Then, if we set*

$$\lambda^{(n)} = \sum_{j=0}^n \delta_{W_j}$$

for all $n \geq 0$, then $(\lambda^{(n)})_{n \geq 0}$ is an MGS with starting configuration $\lambda^{(0)} = \delta_0$ and weight distribution ν . In particular, $\lambda_1^{(n)} = \max\{W_j : j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$, where $\llbracket a, b \rrbracket$ denotes the set $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ for all $a < b \in \mathbb{Z}$.

Let us at least give some information about this coupling property. By construction, $(\lambda_j^{(n)})_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ is an enumeration in the decreasing order of the elements of the sequence $(W_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. More precisely, there exists a (random) permutation σ_n such that $\lambda_j^{(n)} = W_{\sigma_n(j)-1}$ for all $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. With the notations from Proposition 2.2.1, note that for all $n \geq 1$,

$$W_n = \max_{j \in \llbracket 0, \dots, n-1 \rrbracket} (W_j + X_{j,n}).$$

This is a clear consequence of the definition of W_n . The analog equality for the MGS comes from the definition of the MGS: for all $n \geq 1$,

$$m(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) = \max_{j \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket} (\lambda_j^{(n-1)} + X_j^{(n)}),$$

where $X_j^{(n)} := X_{\sigma_n(j)-1, n}$ and σ_n is the permutation corresponding to the re-ordering of the values of the heaviest paths previously defined. Then, by construction, for all $n \geq 1$,

$$W_n = m(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}).$$

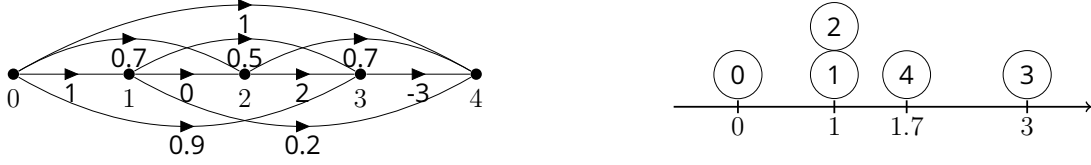


Figure 2.3 – On the left, the weighted graph from Figure 2.1. On the right, the corresponding configuration for the MGS via the coupling from Proposition 2.2.1.

In words, the position of the new particle in the MGS at time n corresponds to the weight of a heaviest path starting at 0 and ending at n .

See Figure 2.3 for an illustration of this coupling. Since ν has finite essential supremum, $\mathbb{E}[(X_{1,2})_+]$ is finite. We give in Remark 2.2.9 a self-contained proof of the fact that $(n^{-1} \max\{W_j, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\})$ and $(n^{-1}W_n)$ have the same limit almost surely and in L^1 . Then, by Proposition 2.2.1:

$$\frac{\lambda_1^{(n)}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s., } L^1} C(\nu). \quad (2.6)$$

This result is also derived in [Fos+23a].

Remark 2.2.2. In fact, the limit (2.6) also holds for any MGS with weight distribution ν , not necessarily with starting configuration δ_0 . We explain this fact more in details in Remark 2.2.10.

2.2.2. Stationary MGS for weight distributions with an atom at their essential supremum

For the remainder of this section, we assume that ν has the form $(1 - p)\mu + p\delta_M$ with $M > 0$, $p \in (0, 1]$ and μ a probability distribution on $[-\infty, M)$. We construct a stationary (in time) version of the max growth system (MGS) with weight distribution ν . Similar constructions have been done in [FK03; MR19] for the infinite bin model using tools from extended renovation theory. Another similar construction has been done for the observable describing the speed of the front in the MGS in [Fos+23a]. In both cases, the construction of the stationary process comes from renovation events, as introduced in [FK03], which consist in random times at which the future becomes independent from the past.

Let us denote by $F_s(\lambda)$ the configuration obtained by shifting all the particles in λ by $s \in \mathbb{R}$. In other words, $(F_s(\lambda))_i = \lambda_i - s$ for all i .

Proposition 2.2.3 (Time-stationary MGS). *We consider $M \in \mathbb{R}_+^*$ and $(X_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. random variables with distribution ν on $[-\infty, M]$ such that $\nu(\{M\}) := p > 0$. Almost surely, there exists a unique process $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ taking values in \mathcal{N} such that:*

$$\text{A.1 } \forall n \in \mathbb{Z}, \tilde{\lambda}^{(n+1)} = \Phi_{X^{(n+1)}}(\tilde{\lambda}^{(n)}),$$

$$\text{A.2 } \tilde{\lambda}_1^{(0)} = 0.$$

In addition, $F_{\tilde{\lambda}_1^{(n)}}(\tilde{\lambda}^{(n)})$ is \mathcal{F}_n -measurable for all $n \in \mathbb{Z}$, where \mathcal{F}_n is the σ -algebra generated by $(X_i^{(k)})_{i \in \mathbb{N}, k \leq n}$.

Let us explain in a few words how we will construct the stationary version $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ of the MGS using renovation events. The renovation events we will consider are $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ -measurable. The key property of the renovation events we will consider is the following: if one knows $(X^{(n)})_{n > n_1}$ and the front position at time n_1 , and if a renovation event starts at time n_1 , then one knows the position of every particle added after time n_1 . In addition, if the front at time n_1 is at a position f , all the particles added at a time $n_2 > n_1$ have their positions greater or equal to $f + M$. We detail this facts in Lemma 2.2.5. With that key property, we will then prove the existence and unicity of the stationary MGS. For any $n \in \mathbb{Z}$ and any $N \in \mathbb{N}$, consider the N greatest times before n at which a renovation event starts. By the fact that the positions of the new particles after a renovation event are greater or equal to M plus the front's position at the time where the renovation event starts, the N renovation events happening just before time n characterise the restriction of the MGS configuration $\tilde{\lambda}^{(n)}$ at time n to the interval $[\tilde{\lambda}_1^{(n)} - MN, \tilde{\lambda}_1^{(n)}]$. Since this holds for all $N \geq 1$, the restriction of $\tilde{\lambda}^{(n)}$ to the interval $[-\infty, \tilde{\lambda}_1^{(n)}]$ is characterised by the sequence $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{Z}}$. Since there is no particle with position greater than $\tilde{\lambda}_1^{(n)}$ in $\tilde{\lambda}^{(n)}$, we have proven that $\tilde{\lambda}^{(n)}$ is uniquely defined, up to the choice of $\tilde{\lambda}_1^{(n)}$. Then, if we impose that $\tilde{\lambda}^{(0)}$ has its front at position 0, then $\tilde{\lambda}^{(n)}$ is characterised by $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{Z}}$ for all $n \in \mathbb{Z}$, since the front's position at times n and 0 are linked by the recursion formula A.1.

Remark 2.2.4. Calling $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ a stationary process is an abuse of notation. The process $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ is stationary in the sense that the distribution of $(F_{\tilde{\lambda}_1^{(n)}}(\tilde{\lambda}^{(n)}))_{n \in \mathbb{Z}}$ is invariant by a shift in n . This is a consequence of the fact that $(X_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}}$ and $(X_i^{(n+1)})_{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}}$ have the same distribution since those are both i.i.d. random variables with distribution ν .

The proof of Proposition 2.2.3 relies on the existence of renovation events. They consist in particular sequences of weights, which are introduced in the following Lemma 2.2.5. Firstly, let us introduce some necessary notations.

A *word* is defined as a finite sequence of positive integers. Let $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{N}^n$ denote the set of all words. For $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{A}$, $|\alpha| := n$ is the *length* of the word α . We denote by $\mathcal{T} = \{\alpha \in \mathcal{A} : \forall i \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket, \alpha_i \leq i\}$ the set of all *triangular words*.

For $l \in \mathbb{N}$ and $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) \in \mathcal{W}^l$, where we remind that $\mathcal{W} = (\{-\infty\} \cup \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, we set $\Phi_x := \Phi_{x^{(l)}} \circ \dots \circ \Phi_{x^{(1)}}$ the map corresponding to the successive applications of the weight sequences $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(l)}$ on configurations in \mathcal{N} . Let us define $\alpha(x)$ *the word associated to the weight sequence* x as the word of length l , for which the n -th letter corresponds to the index of the first occurrence of the value M in the sequence $x^{(n)}$. More explicitly, for all $n \in \llbracket 1, l \rrbracket$,

$$\alpha_n(x) := \inf\{i \in \mathbb{N}, x_i^{(n)} = M\}.$$

Since $\nu(\{M\}) > 0$, it follows that $\alpha_i(X^{(a)}, \dots, X^{(b)})$ is finite a.s. for all $a < b \in \mathbb{Z}$ and $i \in \llbracket a, b \rrbracket$. We denote by $\mathcal{W}_{\leq M} := [-\infty, M]^{\mathbb{N}}$ the set of all the elements $x \in \mathcal{W}$ such that $x_i \leq M$ for all $i \geq 1$.

For every $a, b \in \mathbb{Z}$, recall that $\llbracket a, b \rrbracket$ consists in the set $\{a, a + 1, \dots, b\}$ of all integer between a and b . When $a > b$, we take the convention that $\llbracket a, b \rrbracket = \emptyset$.

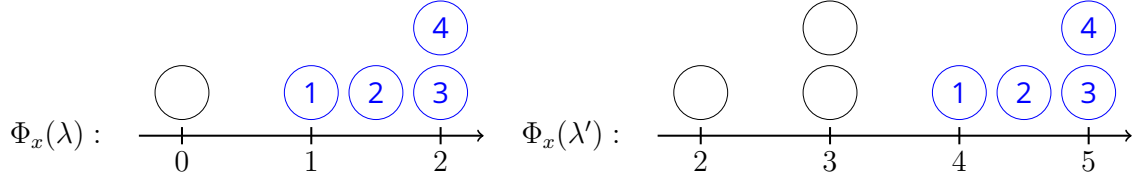


Figure 2.4 – Illustration of Lemma 2.2.5 for $M = 1$. The configurations $\Phi_x(\lambda)$ and $\Phi_x(\lambda')$ where $\lambda = \delta_0$, $\lambda' = \delta_2 + 2\delta_3$ and $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$, with $x^{(1)} = (1, 0.2, -3, \dots)$, $x^{(2)} = (0.5, 1, 0.5, \dots)$, $x^{(3)} = (-0.2, 1, 0.3, 1, \dots)$ and $x^{(4)} = (-1.5, 0.5, 0, 1, \dots)$. The configurations λ and λ' are represented in black. The particles added are in blue and indexed by their order of appearance (the particle indexed by i corresponds to the particle obtained from the weight sequence $x^{(i)}$). Here, changing the values appearing after the first 1 in the sequences $x^{(i)}$ would not change the obtained configurations. In this case, the word $\alpha(x) = (1, 2, 2, 4)$ is indeed triangular.

Lemma 2.2.5. *For all $l \in \mathbb{N}$ and $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) \in (\mathcal{W}_{\leq M})^l$ such that $\alpha(x) \in \mathcal{T}$, the quantity $\mathfrak{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(l-1)})}(\lambda), x^{(l)}) - \lambda_1$ depends only on $\alpha(x)$ and $(x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \llbracket 1, \alpha_i(x) - 1 \rrbracket}$. In particular, it does not depend on the configuration λ . In addition, $\mathfrak{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)})}(\lambda), x^{(i)}) - \lambda_1 \geq M$ for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$.*

We illustrate this Lemma 2.2.5 in Figure 2.4. In Remark 2.2.8, we give an interpretation of the renovation events presented in this lemma in terms of last passage percolation.

Proof. We proceed by induction on l . We consider $x = x^{(1)} \in \mathcal{W}_{\leq M}$ such that $\alpha(x) \in \mathcal{T}$. We have $x_1^{(1)} = M$ because $\alpha(x)$ is a triangular word. In this case, $\mathfrak{m}(\lambda, x^{(1)}) - \lambda_1 = M$ and the result is proved for $l = 1$.

We now assume that Lemma 2.2.5 holds for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ for some $l \in \mathbb{N}$. Consider $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(l+1)})$ in $(\mathcal{W}_{\leq M})^{l+1}$ such that $\alpha(x) \in \mathcal{T}$. Since $\alpha(x) \in \mathcal{T}$, there exists $k_0 \in \llbracket 1, l+1 \rrbracket$ such that $x_{k_0}^{(l+1)} = M$. In addition, $x^{(l+1)} \in \mathcal{W}_{\leq M}$. Therefore, $x_i^{(l+1)} \leq x_{k_0}^{(l+1)}$ for all $i \geq k_0$. As a consequence,

$$\mathfrak{m}(\Phi_{x'}(\lambda), x^{(l+1)}) = \max_{1 \leq i \leq k_0} ((\Phi_{x'}(\lambda))_i + x_i^{(l+1)})$$

where $x' = (x^{(1)}, \dots, x^{(l)})$. We set $y_i = \mathfrak{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)})}(\lambda), x^{(i)}) - \lambda_1$ for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, $y_{l+1} = 0$ and φ a permutation of $\llbracket 1, k_0 \rrbracket$ such that $y_{\varphi(1)} \geq \dots \geq y_{\varphi(k_0)}$. By induction hypothesis applied to $(x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$, for all $\lambda \in \mathcal{N}$ and $k \in \llbracket 1, l \rrbracket$, y_k depends only on $(\alpha_1(x), \dots, \alpha_l(x))$ and $(x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \llbracket 1, \alpha_i(x) - 1 \rrbracket}$. In addition, $y_k \geq M > 0$ for all $k \in \llbracket 1, l \rrbracket$. Then, we obtain

$$\mathfrak{m}(\Phi_{x'}(\lambda), x^{(l+1)}) = \max_{1 \leq i \leq k_0} (\lambda_1 + y_{\varphi(i)} + x_i^{(l+1)}).$$

Since y_1, \dots, y_l depends only on $(\alpha_1(x), \dots, \alpha_l(x))$ and $(x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \llbracket 1, \alpha_i(x) - 1 \rrbracket}$,

$$\mathfrak{m}(\Phi_{x'}(\lambda), x^{(l+1)}) - \lambda_1$$

depends only on $\alpha(x)$ and $(x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l+1 \rrbracket, j \in \llbracket 1, \alpha_i(x) - 1 \rrbracket}$. In addition, $y_i \geq 0$ for all i . Then,

$$\mathfrak{m}(\Phi_{x'}(\lambda), x^{(l+1)}) - \lambda_1 \geq y_{\varphi(k_0)} + x_{k_0}^{(l+1)} \geq x_{k_0}^{(l+1)} = M,$$

which concludes the inductive step. \square

Remark 2.2.6. As a consequence of Lemma 2.2.5, for all $\lambda \in \mathcal{N}$ and $x \in (\mathcal{W}_{\leq M})^l$ such that $\alpha(x) \in \mathcal{T}$, we have

$$\Phi_x(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^l \delta_{\lambda_1 + y_i},$$

where $y_i := \mathbf{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)})}(\lambda), x^{(i)}) - \lambda_1 \geq M > 0$ for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$. The important point here is that y_i does not depend on λ and that it is greater or equal to M . As a consequence, for $(x_j^{(i)})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ such that $\alpha((x^{(1)}, \dots, x^{(l)})) \in \mathcal{T}$ for all $l \in \mathbb{N}$, if we know only λ_1 and $(x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \mathbb{N}}$, then we can obtain the positions of all the particles with positions greater than λ_1 in $\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}(\lambda)$ for all $l \in \mathbb{N}$. Another consequence of Lemma 2.2.5 is that the front in $\lambda' := \Phi_x(\lambda)$ is greater or equal to the front's position in λ plus M since $y_i \geq M$ for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$:

$$\lambda'_1 \geq \lambda_1 + M.$$

We use Lemma 2.2.5 to construct the stationary version of the MGS. To do so, we set $\xi_n := \inf\{i \in \mathbb{N} : X_i^{(n)} = M\}$ for all $n \in \mathbb{Z}$, where $(X_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}}$ are i.i.d. random variables with distribution ν . With the previous notations, note that $\alpha_n(X) = \xi_n$. We now prove that there are almost surely infinite triangular words in the sequence $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. We consider $\mathcal{R} := \{n \in \mathbb{Z} : \forall i \in \mathbb{N}, \xi_{n+i-1} \leq i\}$ the set of all the times at which an infinite triangular word starts. By the previous Remark 2.2.6, those times are renovation events in the sense that, for all $n \in \mathcal{R}$, we are able to reconstruct the future of the process after time n knowing only the front's position at this time.

Lemma 2.2.7. For $p \in (0, 1]$, $\inf \mathcal{R} = -\infty$ and $\sup \mathcal{R} = +\infty$ almost surely.

Proof. We notice that the probability distribution of $(X_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}}$ is invariant by the shift map

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \\ (x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (x_i^{(n+1)})_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}} \end{array},$$

since $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ are i.i.d. In addition, $\mathbb{P}_p(0 \in \mathcal{R}) = \prod_{k \geq 1} (1 - (1-p)^k)$, which is positive for $p \in (0, 1]$. Then, by the Poincaré recurrence theorem [VO16], almost surely, there exists infinitely many values of $n \in \mathbb{N}$ such that $n \in \mathcal{R}$. Similarly, for the same reason, there exists infinitely many values of $n \in \mathbb{N}$ such that $-n \in \mathcal{R}$. Therefore, $\inf \mathcal{R} = -\infty$ and $\sup \mathcal{R} = +\infty$ almost surely. \square

Remark 2.2.8. One can give the following interpretation for an element of \mathcal{R} in terms of last passage percolation via the coupling from Proposition 2.2.1: consider $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ the MGS with initial configuration $\lambda^{(0)} = \delta_0$ and weight distribution ν as constructed in Proposition 2.2.1. Set $\xi_n := \min\{i \in \mathbb{N} : X_i^{(n)} = M\}$ for all $n \in \mathbb{N}$. One may prove that the word $(\xi_n, \dots, \xi_{n'})$ is triangular if and only if for every $k \in \llbracket n, n' \rrbracket$,

$$\exists l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \exists n \leq i_1 < \dots < i_l = k, \forall j \in \llbracket 1, l \rrbracket, X_{i_{j-1}, i_j} = M, \quad (2.7)$$

where $X_{i,j}$ is the weight of the edge (i, j) in the graph and where $i_0 := \sigma_{n-1}(1) - 1$ (with the notations of the coupling presented below Proposition 2.2.1). In words, this means that $(\xi_n, \dots, \xi_{n'})$ is triangular if and only for every k between n and n' , there exists a path going from i_0 to k in the graph such that the weight of each of its edges in the path is M , and such that the path can only contain the vertices in $\{i_0\} \cup \llbracket n, k \rrbracket$. Note that i_0 is a vertex in $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ such that $W_{i_0} = \max_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} W_i$. See Figure 2.5 for an illustration.

This last fact can be proved by induction on $n' - n \geq 0$ as follows. First, let us start with the initialisation. More precisely, let us prove that for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\xi_n = 1$ if and only $X_{i_0, n} = M$. By definition of i_0 and by construction of the coupling from Proposition 2.2.1, $X_{i_0, n} = X_1^{(n)}$. Therefore, by definition of ξ_n , initialisation is proved.

Now, assume that the equivalence holds for some $0 \leq n \leq n'$. First, let us assume that $(\xi_n, \dots, \xi_{n'+1})$ is triangular. A fortiori, $(\xi_n, \dots, \xi_{n'})$ is also triangular. Therefore, by induction hypothesis, for all k between n and n' , (2.7) is satisfied. Therefore, it remains to check that there also exists such a path going from i_0 to $n' + 1$ with vertices in $\{i_0\} \cup \llbracket n, n' + 1 \rrbracket$. Note that every term of $(W_j)_{j \in \llbracket n, n' \rrbracket}$ is greater or equal to $W_{i_0} + M$ by the existence of a path with edges' weights M from i_0 to any $j \in \llbracket n, n' \rrbracket$. Therefore, every term of $(W_j)_{j \in \llbracket n, n' \rrbracket}$ is greater than $\max_{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} W_j = W_{i_0}$. Since $(X_i^{(n'+1)})_{i \in \llbracket 1, n'+1 \rrbracket}$ is the permutation of the terms of $(X_{i, n'+1})_{i \in \llbracket 0, n' \rrbracket}$ where the relabeling of the indexes is done according to a permutation that makes the sequence $(W_i)_{i \in \llbracket 0, n' \rrbracket}$ non-decreasing by construction of the coupling, $(X_i^{(n'+1)})_{i \in \llbracket 1, n'-n+2 \rrbracket}$ is a relabeling of the sequence $(X_{i, n'+1})_{i \in \{i_0\} \cup \llbracket n, n' \rrbracket}$. As a consequence, since $\xi_{n'+1} \leq n' - n + 2$, there exists at least one element $i' \in \{i_0\} \cup \llbracket n, n' \rrbracket$ such that $X_{i', n'+1} = M$. Since there exists a path γ of edges with weight M ending at i' by induction hypothesis, and since $X_{i', n'+1} = M$, the concatenation of the path γ and the edge $(i', n' + 1)$ is a path made of edges with weights M , starting at i_0 and ending at $n' + 1$. This concludes the proof of the first implication.

Reciprocally, assume that $(\xi_n, \dots, \xi_{n'+1})$ is not triangular. Let us prove that (2.7) is not satisfied for some $k \in \llbracket n, n' + 1 \rrbracket$. There are two possible cases: either $(\xi_n, \dots, \xi_{n'})$ is not triangular, either $(\xi_n, \dots, \xi_{n'})$ is triangular and $\xi_{n'+1} > n' - n + 2$. In the first case, for some $k \in \llbracket n, n' \rrbracket$, (2.7) is not satisfied according to the induction hypothesis, which concludes the proof. In the second case, $(X_i^{(n'+1)})_{i \in \llbracket 1, n'-n+2 \rrbracket}$ is a permutation of the sequence $(X_{i, n'+1})_{i \in \{i_0\} \cup \llbracket n, n' \rrbracket}$ for the same reason as before since $(\xi_n, \dots, \xi_{n'})$ is triangular. As a consequence, and since $\xi_{n'+1} > n' - n + 2$, none of the terms of $(X_{i, n'+1})_{i \in \{i_0\} \cup \llbracket n, n' \rrbracket}$ are equal to M , which implies that (2.7) is not satisfied for $k = n' + 1$ since none of the edges starting at some vertex in $\{i_0\} \cup \llbracket n, n' \rrbracket$ and ending at $n' + 1$ have their weight equal to M .

By Lemma 2.2.7, we can enumerate the elements of \mathcal{R} as $\dots < T_{-1} < T_0 \leq 0 < T_1 < T_2 < \dots$

Remark 2.2.9. Let us give a proof that $(n^{-1} \max\{W_j, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\})$ and $(n^{-1} W_n)$ have the same limit, assuming those two sequences both converge to some constant². Let us recall that $(\lambda_k^{(n)})_{1 \leq k \leq n+1}$ is

²By Kingman's theorem, $(n^{-1} W_n)$ converges almost surely to some constant $C(\nu)$. If one wants to prove that $(\lambda_1^{(n)}) = (n^{-1} \max\{W_j, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\})$ also converges almost surely to some constant, one may proceed as follows: by Remark 2.2.9, $W_{T_{K_n}} \leq W_n \leq W_{T_{K_n+1}}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore, since $(\lambda_k^{(n)})_{1 \leq k \leq n+1}$ is a re-ordering

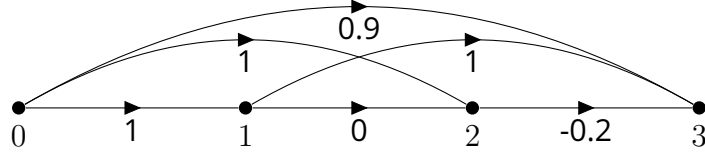


Figure 2.5 – Illustration of Remark 2.2.8 with $M = 1$. For the edge weights represented on the graph, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 2, 2)$ is a triangular word, and there is a directed path made of edges with weights 1 from 0 to any element of $\{1, 2, 3\}$.

a re-ordering of $(W_k)_{0 \leq k \leq n}$ by Proposition 2.2.1, and W_n corresponds to the position of the particle added at time n in the corresponding MGS. By Lemma 2.2.5, all the particles added after time T_k has their positions greater or equal to the front's position at time T_k . Therefore, $W_{T_{K_n}} \leq W_n \leq W_{T_{K_n+1}}$ for all $n \in \mathbb{N}$, where $(T_k)_{k \geq 1}$ enumerates the elements of \mathcal{R} for the MGS defined in Proposition 2.2.1 and $K_n := \max\{k \in \mathbb{Z} : T_k \leq n\}$. In addition, Lemma 2.2.5 also implies that $W_{T_k} = \max_{0 \leq m \leq T_k} W_m = \lambda_1^{(T_k)}$ for all $k \in \mathbb{N}$ since $W_{T_k} = M + \max_{0 \leq n \leq T_k-1} W_n$. The fact that $W_{T_k} = M + \max_{0 \leq n \leq T_k-1} W_n$ is a consequence of the fact that $X_1^{(T_k)} = M$ by definition of T_k and that $\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) = W_n$ for every $n \geq 1$ by Proposition 2.2.1. Now, since T_k tends to $+\infty$ as k tends to $+\infty$ and since $\lambda_1^{(T_k)}$ and W_{T_k} have the same value for all $k \geq 1$, $(n^{-1}\lambda_1^{(n)})_n$ and $(n^{-1}W_n)_n$ have the same limit as n tends to $+\infty$, which means that (2.6) is proved.

Remark 2.2.10. By Proposition 2.2.1, notice that the time constant $C(\nu)$ is equal to the limit of $n^{-1}(W_n - W_{T_1}) = \max_{T_1 \leq k \leq n} (\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(T_1)})$ as n tends to infinity. Since this quantity is independent of the initial configuration of the considered MGS by Lemma 2.2.5, (2.6) holds for any initial configuration $\lambda^{(0)}$ for λ .

Proof of Proposition 2.2.3. For $k \in \mathbb{Z}$, we set $Y^{(k)} = (X^{(T_k)}, \dots, X^{(T_{k+1}-1)})$, where $X^{(n)} = (X_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$. By definition of T_k , $\alpha(Y^{(k)}) \in \mathcal{T}$ for all $k \in \mathbb{Z}$. We set

$$y_j^{(k)} = \mathfrak{m}(\Phi_{(X^{(T_k)}, \dots, X^{(T_{j-1})})}(\theta), X^{(j)}) - \theta_1$$

for all $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \llbracket T_k, T_{k+1} - 1 \rrbracket$ and any $\theta \in \mathcal{N}$. Thanks to Lemma 2.2.5, $y_j^{(k)}$ depends only on $(X^{(i)})_{i \in \llbracket T_k, T_{k+1}-1 \rrbracket}$ and not on θ . As a consequence, if $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ verifies assumption A.1 from Proposition 2.2.3, then the position $\mathfrak{m}(\tilde{\lambda}^{(i-1)}, X^{(i)})$ of the particle added at time $i \in \llbracket T_0, T_1 - 1 \rrbracket$ depends only on $\tilde{\lambda}_1^{(T_0-1)}$ and $(X^{(T_0)}, \dots, X^{(T_1-1)})$:

$$\mathfrak{m}(\tilde{\lambda}^{(i-1)}, X^{(i)}) = \tilde{\lambda}_1^{(T_0-1)} + y_i^{(0)}. \quad (2.8)$$

Note that $\alpha((X^{(T_0)}, \dots, X^{(0)})) \in \mathcal{T}$ by definition of T_0 . By Lemma 2.2.5, the position of all the new particles added after time $T_0 - 1$ have their positions greater or equal to the front's position at time

of $(W_k)_{0 \leq k \leq n}$, $W_{T_{K_n}} \leq \lambda_1^{(n)} \leq W_{T_{K_n+1}}$ for every $n \geq 1$. Then, it remains to prove that $(n^{-1}T_{K_n})$ converges to 1 in order to obtain the convergence of $(\lambda_1^{(n)})$ to $C(\nu)$. We prove this last point in the proof of Proposition 2.3.7.

$T_0 - 1$ plus M . Therefore, since $T_0 \leq 0 < T_1$, the position of the front at time 0 corresponds to the position of a particle added at a time between T_0 and 0. More explicitly,

$$\tilde{\lambda}_1^{(0)} = \max_{i \in \llbracket T_0, 0 \rrbracket} (\tilde{\lambda}_1^{(T_0-1)} + y_i^{(0)}) = \tilde{\lambda}_1^{(T_0-1)} + \max_{i \in \llbracket T_0, 0 \rrbracket} y_i^{(0)}.$$

If we assume that $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ also verifies assumption A.2 from Proposition 2.2.3, then necessarily

$$\tilde{\lambda}_1^{(T_0-1)} = - \max_{i \in \llbracket T_0, 0 \rrbracket} y_i^{(0)}. \quad (2.9)$$

We set $z_i^{(0)} = y_i^{(0)} - \max_{j \in \llbracket T_0, 0 \rrbracket} y_j^{(0)}$ for all $i \in \llbracket T_0, T_1 - 1 \rrbracket$. By (2.8) and (2.9), for all $i \in \llbracket T_0, T_1 - 1 \rrbracket$, we have

$$\mathfrak{m}(\tilde{\lambda}^{(i-1)}, X^{(i)}) = z_i^{(0)}.$$

By Remark 2.2.6, we notice that

$$\tilde{\lambda}^{(0)} = \tilde{\lambda}^{(T_0-1)} + \sum_{i \in \llbracket T_0, 0 \rrbracket} \delta_{\tilde{\lambda}_1^{(T_0-1)} + y_i^{(0)}} = \tilde{\lambda}^{(T_0-1)} + \sum_{i \in \llbracket T_0, 0 \rrbracket} \delta_{z_i^{(0)}}.$$

For $i \in \llbracket T_0, T_1 - 1 \rrbracket$, $y_i^{(0)} \geq M$ by Lemma 2.2.5. Then $z_i^{(0)} \geq \tilde{\lambda}_1^{(T_0-1)} + M$. In addition, all the particles in the configuration $\tilde{\lambda}^{(T_0-1)}$ have their positions in $(-\infty, \tilde{\lambda}_1^{(T_0-1)}]$. Therefore, the positions of all the particles in $\tilde{\lambda}^{(0)}$ whose positions are in $(-M, 0]$ are all the $z_i^{(0)}$ for $i \in \llbracket T_0, 0 \rrbracket$ such that $z_i^{(0)} > -M$.

Now, we can iterate this method in order to obtain all the particles' positions in $(-2M, 0]$ of the configuration $\lambda^{(0)}$, and then in $(kM, 0]$ for all $k \leq -1$. Let us consider an integer $k \leq -1$. For all $i \in \llbracket T_k, T_{k+1} - 1 \rrbracket$,

$$\mathfrak{m}(\tilde{\lambda}^{(i-1)}, X^{(i)}) = \tilde{\lambda}_1^{(T_k-1)} + y_i^{(k)}, \quad (2.10)$$

As a consequence, since $\alpha((x^{(T_k)}, \dots, x^{(T_{k+1}-1)})) \in \mathcal{T}$, by Lemma 2.2.5,

$$\tilde{\lambda}_1^{(T_{k+1}-1)} = \tilde{\lambda}_1^{(T_k-1)} + \max_{j \in \llbracket T_k, T_{k+1}-1 \rrbracket} y_j^{(k)}.$$

Then, if we have $\tilde{\lambda}_1^{(T_{k+1}-1)}$, we obtain $\tilde{\lambda}_1^{(T_k-1)}$, and we can compute all $\mathfrak{m}(\tilde{\lambda}^{(i-1)}, X^{(i)})$ for $i \in \llbracket T_k, T_{k+1} - 1 \rrbracket$ by (2.10). As a consequence, by induction on k , we obtain $\mathfrak{m}(\tilde{\lambda}^{(i-1)}, X^{(i)})$ for all $T_k \leq i \leq 0$, and those positions contains all the particles' positions in $(kM, 0]$ since $\lambda_1^{(T_i)} - \lambda_1^{(T_{i-1})} \geq M$ for all $i \leq 0$. Therefore, $\tilde{\lambda}^{(0)}$ is almost surely uniquely defined by assumptions A.1 and A.2. In addition, we notice that by construction, $F_{\tilde{\lambda}_1^{(0)}}(\tilde{\lambda}^{(0)}) = \tilde{\lambda}^{(0)}$ is \mathcal{F}_0 -measurable.

Now that we have constructed $\tilde{\lambda}^{(0)}$, for all $n \geq 1$, $\tilde{\lambda}^{(n)}$ is obtained by iterating n times assumption A.1 (with $n = 1$ to obtain $\tilde{\lambda}^{(1)}$, then with $n = 2$ to obtain $\tilde{\lambda}^{(2)}$, etc.). By construction, it is clear that $F_{\tilde{\lambda}_1^{(n)}}(\tilde{\lambda}^{(n)})$ is \mathcal{F}_n -measurable for all $n \geq 1$.

Now, let us construct $\tilde{\lambda}^{(n)}$ and prove that it is uniquely defined for all $n \leq 0$ by induction on n . Initialisation is completed since $\tilde{\lambda}^{(n)}$ is constructed and is almost surely unique for all $n \geq 0$. For $n \leq -1$, assume that, almost surely, $\tilde{\lambda}^{(k)}$ is constructed for all $k \geq n+1$ and uniquely defined for all $k \geq n+1$. Consider $\hat{\lambda}^{(n)}$ the configuration constructed by the same way that we have constructed $\tilde{\lambda}^{(0)}$ but with the weight sequence $(X^{(k+n)})_{k \in \mathbb{Z}}$ instead of $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{Z}}$. Namely, $(\hat{\lambda}^{(k)})_{k \geq n}$ is the almost surely unique sequence of configurations for which there may be a sequence of configurations $(\hat{\lambda}^{(k)})_{k < n}$ such that

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \Phi_{X^{(k+1)}}(\hat{\lambda}^{(k)})$$

for all $k \in \mathbb{Z}$ and such that

$$\hat{\lambda}_1^{(n)} = 0.$$

Therefore, if we consider the configuration $\hat{\lambda}^{(k)} := F_{\hat{\lambda}_1^{(0)}}(\hat{\lambda}^{(k)})$ for all $k \geq n$, then $(\hat{\lambda}^{(k)})_{k \geq n}$ is the almost surely unique sequence of configurations for which there may be a sequence of configurations $(\hat{\lambda}^{(k)})_{k < n}$ such that

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \Phi_{X^{(k+1)}}(\hat{\lambda}^{(k)})$$

for all $k \in \mathbb{Z}$ and such that

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = 0.$$

As a consequence, by uniqueness, $(\hat{\lambda}^{(k)})_{k \geq n+1} = (\tilde{\lambda}^{(k)})_{k \geq n+1}$, and necessarily, $\tilde{\lambda}^{(n)} = \hat{\lambda}^{(n)}$ since $\hat{\lambda}^{(n)}$ is the only configuration that fits with the hypothesis satisfied by $\tilde{\lambda}^{(n)}$.

□

Now that we have constructed the stationary version $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ of the MGS, we can couple it with the standard MGS $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ using the same renovation events.

Proposition 2.2.11 (Coupling property). *We consider $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ the stationary version of the MGS introduced in Proposition 2.2.3 with weights $(X_j^{(i)})_{i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}}$. We consider a configuration $\lambda^{(0)} \in \mathcal{N}$ and we set $\lambda^{(n)} = \Phi_{X^{(n)}}(\lambda^{(n-1)})$ for all $n \geq 1$. Then, $(\lambda^{(n)})_{n \geq 0}$ is a standard MGS. For all $n \geq T_1$,*

$$\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) - \mathfrak{m}(\tilde{\lambda}^{(n-1)}, X^{(n)}) = \lambda_1^{(T_1-1)} - \tilde{\lambda}_1^{(T_1-1)}. \quad (2.11)$$

In addition, $\lambda_1^{(n)} - \tilde{\lambda}_1^{(n)} = \lambda_1^{(T_1-1)} - \tilde{\lambda}_1^{(T_1-1)}$ for all $n \geq T_1$.

In what follows, we call *front's position* the position of a particle with maximal position in a configuration.

Proof of Proposition 2.2.11. By definition of T_1 , $\alpha((x^{(T_1)}, \dots, x^{(n)})) \in \mathcal{T}$ for all $n \geq T_1$. As a consequence of Lemma 2.2.5, $\mathfrak{m}(\Phi_{(X^{(1)}, \dots, X^{(n-1)})}(\theta), X^{(n)}) - \theta_1$ does not depend on the configuration $\theta \in \mathcal{N}$. Then, for all $n \geq T_1$,

$$\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) - \lambda_1^{(T_1-1)} = \mathfrak{m}(\tilde{\lambda}^{(n-1)}, X^{(n)}) - \tilde{\lambda}_1^{(T_1-1)},$$

which completes the proof of (2.11). By Lemma 2.2.5, we also know that

$$\mathfrak{m}(\Phi_{(X^{(1)}, \dots, X^{(n-1)})}(\theta), X^{(n)}) - \theta_1 \geq M > 0$$

for all $n \geq T_1$. Therefore, all the particles added at a time $n \geq T_1$ in the two versions of the MGS have positions greater than the front's positions at time $T_1 - 1$ in both MGS. In addition, all the particles added at time $n < T_1$ have positions less or equal to the front's position at time $T_1 - 1$ for both MGS. Then, for all $n \geq T_1$, $\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(T_1-1)} = \tilde{\lambda}_1^{(n)} - \tilde{\lambda}_1^{(T_1-1)} = \max_{i \in \llbracket T_1, n \rrbracket} \mathbf{m}(\Phi_{(X^{(1)}, \dots, X^{(i-1)})}(\theta), X^{(i)}) - \theta_1$ where θ is any element of \mathcal{N} . \square

Remark 2.2.12. In [Fos+23a], a similar construction of the stationary MGS is done for all measures with $p \in [0, 1]$, which is a more general case: the stationary MGS is not constructed explicitly in [Fos+23a]. Instead, they construct a stationary version of the process $(\mathbf{m}(\lambda^{(n)}, X^{(n)}) - \lambda_1^{(n)})_{n \geq 0}$. In addition, we do not obtain the formula in Proposition 2.2.13 from that other construction since the renovation events considered are different. In [MR19], the weight distribution has form $p\delta_1 + (1-p)\delta_{-\infty}$, and the renovation events consist in “good” and “bad” words appearing in a sequence of i.i.d. random variables with geometric distribution. The construction leads to a formula for $C((1-p)\delta_{-\infty} + p\delta_1)$ as a sum, over an infinite class of words, of polynomials in p . This formula leads to the proof of the analyticity of $p \mapsto C((1-p)\delta_{-\infty} + p\delta_1)$. The renovation events used in this chapter are similar in shape to those of [Fos+23a]. However, the construction done in this chapter using those events looks more like what have been done in [MR19] where a stationary version of the infinite bin model is constructed: similarly, we constructed a stationary version of the MGS and we obtained a renovation events based formula for the time constant. In our case, the renovation events we use lead us to a formula for $C(\nu)$ as a sum, over an infinite class of words, of polynomials in p whose coefficients depend on μ .

2.2.3. An abstract formula for the time constant for last passage percolation

In this section, we give a formula for $C((1-p)\mu + p\delta_M)$ in terms of the renovation events given in Subsection 2.2.2.

For $\alpha \in \mathcal{A}$, we denote by $H(\alpha) = \sum_{i=1}^{|\alpha|} (\alpha_i - 1)$ the *height* of the word α . We set \mathcal{T}_m to be the set of all the words in \mathcal{T} with no strict suffix in \mathcal{T} . More precisely, $\alpha \in \mathcal{T}_m$ if and only if $\alpha \in \mathcal{T}$ and for all $i \in \llbracket 2, |\alpha| \rrbracket$, $(\alpha_i, \dots, \alpha_{|\alpha|}) \notin \mathcal{T}$. The elements of \mathcal{T}_m are called *minimal triangular words*. We will use the definition of minimal triangular words later on.

For $\beta \in \mathcal{T}$ and $x = (x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket}$ with $l := |\beta|$ and $x_j^{(i)} \in [-\infty, M]$ for all (i, j) , let $s_M^{\text{end}}(\beta, x)$ be the difference of front's positions between steps $l - 1$ and l when applying a weight sequence $x' \in (\mathcal{W}_{\leq M})^l$ such that $\alpha(x') = \beta$ and $x_j^{(i)} = x_j^{(i)}$ for all $1 \leq i \leq l$ and $1 \leq j \leq \beta_i - 1$ to any configuration $\lambda \in \mathcal{N}$. By Lemma 2.2.5, this quantity depends only on β and $(x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket}$. It is clear that $s_M^{\text{end}}(\beta, x) \in [0, M]$.

More precisely, Lemma 2.2.5 asserts that $\mathbf{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}(\lambda), x^{(l)}) - \lambda_1$ depends only on β and $(x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket}$. Then,

$$s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket}) := \max_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket} y_i - \max_{i \in \llbracket 1, l-1 \rrbracket} y_i, \quad (2.12)$$

where $y_i = \mathbf{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)})}(\lambda), x^{(i)}) - \lambda_1$ for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, any configuration $\lambda \in \mathcal{N}$ and any $x' \in (\mathcal{W}_{\leq M})^l$ such that $\alpha(x') = \beta$ and $x_j^{(i)} = x_j^{(i)}$ for all $1 \leq i \leq l$ and $1 \leq j \leq \beta_i - 1$.

Proposition 2.2.13. For all $p \in (0, 1]$, $M \in \mathbb{R}_+^*$ and $\mu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$,

$$C((1-p)\mu + p\delta_M) = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} p^{|\beta|} (1-p)^{H(\beta)} \int s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq |\beta| \\ 1 \leq j \leq \beta_i - 1}} d\mu(x_j^{(i)}).$$

Proof. By (2.6), for $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ an MGS with a starting configuration $\lambda^{(0)}$, we know that $(n^{-1}\lambda_1^{(n)})$ converges to $C(\nu)$ almost surely and in L^1 as n tends to infinity. Consider $\tilde{\lambda}$ the stationary MGS introduced in Proposition 2.2.3. Since $n^{-1}(\lambda_1^{(T_1-1)} - \tilde{\lambda}_1^{(T_1-1)})$ converges almost surely and L^1 to 0 as n tends to infinity by Proposition 2.2.11, we also have

$$\frac{\tilde{\lambda}_1^{(n)}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s., } L^1} C(\nu).$$

Then, by L^1 convergence,

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(n)}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C(\nu). \quad (2.13)$$

By stationarity of $(\tilde{\lambda}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ (see Remark 2.2.4), $\mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(k+1)} - \tilde{\lambda}_1^{(k)}] = \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(1)} - \tilde{\lambda}_1^{(0)}] = \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(1)}]$ for all $k \in \mathbb{Z}$. Therefore,

$$\mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(n)}] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(k+1)} - \tilde{\lambda}_1^{(k)}] = n \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(1)}].$$

As a consequence, by (2.13), $C(\nu) = \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(1)}]$. Now, we rewrite this formula in terms of triangular words and weights sequences. We set

$$T_{\text{past}} := \inf\{t \in \mathbb{N} : \alpha(X^{(-t+2)}, \dots, X^{(1)}) \in \mathcal{T}\}.$$

By definition of T_{past} , we have $\alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) \in \mathcal{T}_m$. Note that T_{past} is almost surely finite since $T_0 \leq 2 - T_{\text{past}} \leq 1$. In addition, for every $\beta \in \mathcal{T}_m$, since β has no strict triangular suffix by its definition,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta) &= \mathbb{P}(\alpha((X^{(2-|\beta|)}, \dots, X^{(1)})) = \beta) \\ &= \prod_{k=1}^{|\beta|} p(1-p)^{\beta_k-1} \\ &= p^{|\beta|} (1-p)^{H(\beta)} \end{aligned}$$

Then, by the law of total probability

$$\begin{aligned} C(\nu) &= \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \mathbb{P}(\alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta) \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(1)} \mid \alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta] \\ &= \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} p^{|\beta|} (1-p)^{H(\beta)} \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(1)} \mid \alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Conditionally to the event $\{\alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta\}$, $(X_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket, j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket}$ are i.i.d. with distribution μ . By definition of s_M , $s_M^{\text{end}}(\beta, (X_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket, j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket})$ corresponds to the increment $\tilde{\lambda}_1^{(1)} - \tilde{\lambda}_1^{(0)}$ of the front's position between times 0 and 1, conditionally to $\alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta$. Therefore, since $\tilde{\lambda}_1^{(0)} = 0$ almost surely,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(1)} \mid \alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta] \\
&= \mathbb{E}[\tilde{\lambda}_1^{(1)} - \tilde{\lambda}_1^{(0)} \mid \alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta] \\
&= \mathbb{E}[s_M^{\text{end}}(\beta, (X_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket, j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket}) \mid \alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)})) = \beta] \\
&= \int s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq |\beta| \\ 1 \leq j \leq \beta_i - 1}} d\mu(x_j^{(i)}). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Putting (2.14) and (2.15) together, we obtain the formula from Proposition 2.2.13, which completes the proof of the proposition. \square

2.3. Regularity properties of the time constant

The four subsections are devoted respectively to the proofs of Theorem 2.1.6, Theorem 2.1.7, Theorem 2.1.3 and Theorem 2.1.1.

2.3.1. Analyticity in p for measures of the form $(1-p)\mu + p\delta_M$

With the results from Section 2.2, we now prove Theorem 2.1.6 regarding the analyticity of $p \mapsto C((1-p)\mu + p\delta_M)$ on $(0, 1]$.

Proof of Theorem 2.1.6. We fix $M \in \mathbb{R}_+^*$. We denote by $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ the open disk of radius r and center z_0 . By Proposition 2.2.13, it suffices to show that for all $q_0 \in [0, 1)$, there exists a $\delta > 0$ such that for all $z \in D(0, \delta)$,

$$\sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} |q_0 + z|^{H(\beta)} |1 - q_0 - z|^{|\beta|} \int s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq |\beta| \\ 1 \leq j \leq \beta_i - 1}} d\mu(x_j^{(i)}) < +\infty.$$

Note that \mathcal{T}_m is the union over $l \in \mathbb{N}$ of the sets of all the triangular words of length l , and there are exactly $l!$ triangular words with length l for all $l \in \mathbb{N}$. Therefore, \mathcal{T}_m is countable.

We consider $q_0 \in [0, 1)$ and $z \in \mathbb{C}$. Since $s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j})$ takes values in $[0, M]$ and μ is a probability distribution, it suffices to show that for some $\delta > 0$ and all $z \in D(0, \delta)$,

$$\sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} |q_0 + z|^{H(\beta)} |1 - q_0 - z|^{|\beta|} < +\infty. \tag{2.16}$$

By the triangle inequality, we have

$$\sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} |q_0 + z|^{H(\beta)} |1 - q_0 - z|^{|\beta|} \leq \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} (q_0 + |z|)^{H(\beta)} (1 - q_0 + |z|)^{|\beta|}.$$

For z such that $1 - q_0 - |z| > 0$, we have

$$\sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} |q_0 + z|^{H(\beta)} |1 - q_0 - z|^{|\beta|} \leq \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} (q_0 + |z|)^{H(\beta)} (1 - q_0 - |z|)^{|\beta|} \left(\frac{1 - q_0 + |z|}{1 - q_0 - |z|} \right)^{|\beta|}.$$

For $p \in (0, 1]$ and μ a probability distribution such that $\mu([-\infty, M]) = 1$, we denote by $\mathbb{E}_{p,\mu}$ the expectation corresponding to a probability space where the weights $X_j^{(i)}$ have distribution $(1-p)\mu + p\delta_M$. Let us recall that $T_{\text{past}} = \inf\{t \in \mathbb{N} : (X^{(-t+2)}, \dots, X^{(1)}) \in \mathcal{T}\}$ is defined as the length of the shortest triangular word ending at time 1, where $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ are the random variables used to construct the stationary MGS. For $r > 1$, we notice that

$$\mathbb{E}_{p,\mu}[r^{T_{\text{past}}}] = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} (rp)^{|\beta|} (1-p)^{H(\beta)}$$

by the law of total probability applied to $\alpha((X^{(2-T_{\text{past}})}, \dots, X^{(1)}))$. Therefore,

$$\sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} |q_0 + z|^{H(\beta)} |1 - q_0 - z|^{|\beta|} \leq \mathbb{E}_{1-q_0-|z|,\mu} \left[\left(\frac{1 - q_0 + |z|}{1 - q_0 - |z|} \right)^{T_{\text{past}}} \right]. \quad (2.17)$$

If we show that the moment generating function of T_{past} is finite on an open neighborhood of 1, then we can show that both quantities in (2.17) are finite for $|z|$ small enough. To do so, we introduce $\xi_n = \inf\{i \in \mathbb{N}, X_i^{(n)} = M\}$ for all $n \in \mathbb{Z}$. We consider the random sequence $(M_n)_{n \geq 0}$, where M_n corresponds to the number of elements i in $\llbracket -n+2, 1 \rrbracket$ such that $\xi_i > i+n-1$. More explicitly, we consider $\mathcal{M}_0 = \emptyset$, and for all $n \geq 1$,

$$\mathcal{M}_n = \{i \in \llbracket -n+2, 1 \rrbracket : \xi_i > i+n-1\}.$$

For $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, we set $M_n = \#\mathcal{M}_n$. By definition of T_{past} , we notice that

$$T_{\text{past}} = \inf\{n \in \mathbb{N} : M_n = 0\}.$$

See Figure 2.6 for an illustration. Equivalently, by definition of $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{M}_n = \{i \in \llbracket -n+2, 1 \rrbracket : \forall j \in \llbracket 1, i+n-1 \rrbracket, X_j^{(i)} < M\}.$$

We also notice that for all $n \geq 1$,

$$\mathcal{M}_n = \{i \in \{-n+2\} \cup \mathcal{M}_{n-1} : X_{i+n-1}^{(i)} < M\}.$$

Let us prove this last recursive formula. First, note that if $i \in \llbracket -n+3, 1 \rrbracket$ and $i \notin \mathcal{M}_{n-1}$, then $i \notin \mathcal{M}_n$. Therefore, $\mathcal{M}_n = \{i \in \{-n+2\} \cup \mathcal{M}_{n-1} : \xi_i > i+n-1\}$. Since $\xi_i > i+n-2$ for all $i \in \mathcal{M}_{n-1}$, $\xi_i > i+n-1$ if and only if $X_{i+n-1}^{(i)} < M$, which concludes the proof of the recursive formula for \mathcal{M}_n .

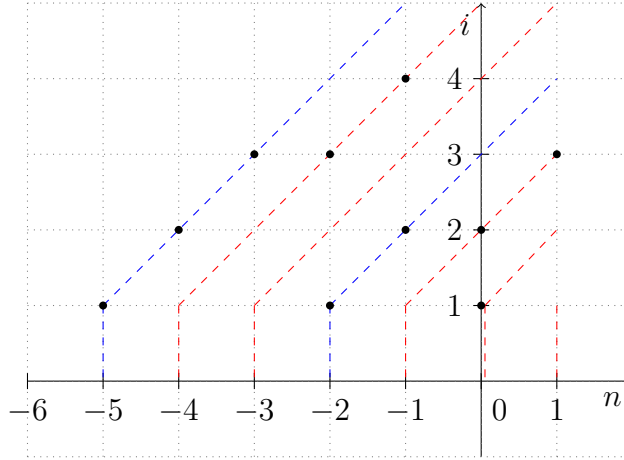


Figure 2.6 – A dot is represented at position (n, i) if and only if $X_i^{(n)} = M$. Notice that $(\xi_k, \dots, \xi_0, \xi_1)$ is triangular if and only if, for all $i \in \llbracket k, 1 \rrbracket$, there is at least one dot with abscissa i below or on the dashed line passing through $(k, 1)$. For $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{M}_n is the set of all $i \in \llbracket 2 - n, 1 \rrbracket$ for which there is no dot with abscissa i below or on the dashed line passing through $(2 - n, 1)$. Here, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \{1\}$, $\mathcal{M}_3 = \{-1\}$, $\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_7 = \emptyset$, $\mathcal{M}_5 = \{-3\}$ and $\mathcal{M}_6 = \{-4, -3\}$. Then, $T_{\text{past}} = 4$.

Since \mathcal{M}_{n-1} depends only on $(X_j^{(i)})_{i \in \llbracket -n+1, 1 \rrbracket, j \in \llbracket 1, i+n-2 \rrbracket}$, which is independent of $(X_{i+n-1}^{(i)})_{i \in \llbracket -n+2, 1 \rrbracket}$, the conditional distribution of M_n given M_{n-1} is Binomial($M_{n-1} + 1, 1 - p$).

We notice that M_n has the same law as a Galton-Watson process with immigration, with distribution Bernoulli($1 - p$) for the number of offspring of one particle and with distribution Bernoulli($1 - p$) for the immigration at each step. In other words, M_n has the same distribution as a process \widetilde{M}_n , where $\widetilde{M}_n := \sum_{k=1}^{\widetilde{M}_{n-1}+1} \widetilde{B}_{n,k}$, $(B_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ are i.i.d. with distribution Bernoulli($1 - p$) and $\widetilde{M}_0 = 0$ almost surely.

In [Zub72], Zubkov shows the following result :

Theorem 2.3.1 ([Zub72, Theorem 1]). *For any $p \in (0, 1)$, there exists a constant c such that for all $k > 0$,*

$$\mathbb{P}(T_{\text{past}} > k) \sim c(r_p)^{-(k+1)},$$

where r_p is the only element r of $(1, \frac{1}{1-p})$ such that $\sum_{k=0}^{\infty} (qr)^{k+1} \prod_{n=1}^k (1 - q^n) = 1$ with $q := 1 - p$.

As a consequence of Theorem 2.3.1, T_{past} has finite exponential moments. More precisely:

Lemma 2.3.2. *For all $p \in (0, 1]$, there is $\rho_p > 1$ such that for all $p' \in [p, 1]$ and $\mu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$,*

$$\mathbb{E}_{p', \mu}[\rho_p^{T_{\text{past}}}] < \infty.$$

Proof of Lemma 2.3.2. For $p = 1$, the result is trivial since $T_{\text{past}} = 1$ almost surely. Now, we assume that $p \in (0, 1)$. By Theorem 2.3.1, for any $1 < \rho_p < r_p$, $\mathbb{E}_{p,\mu}[\rho_p^{T_{\text{past}}}] < \infty$. In addition, T_{past} is a non-increasing function of p for the trivial coupling. Therefore, $\mathbb{E}_{p',\mu}[\rho_p^{T_{\text{past}}}] < \infty$ for all $p' \in [p, 1]$, since $r_p > 1$. \square

Now, we consider $1 < r < \rho_{\frac{1-q_0}{2}}$ from Lemma 2.3.2. Setting $\delta = \min(\frac{1-q_0}{2}, \frac{(1-q_0)(r-1)}{r+1})$ and $z \in D(0, \delta)$, we have $\mathbb{E}_{1-q_0-|z|,\mu}[r^{T_{\text{past}}}] < \infty$ by Lemma 2.3.2 since $|z| < \frac{1-q_0}{2}$. Furthermore, $\frac{1-q_0+|z|}{1-q_0-|z|} < r$ because $|z| < \frac{(1-q_0)(r-1)}{r+1}$. Then, we have (2.16) by (2.17), which concludes the proof of Theorem 2.1.6. \square

Remark 2.3.3. There is no easy way to compute r_p explicitly, but we can approximate its value. We can obtain a lower bound for the radius of convergence of $p \mapsto C((1-p)\mu + p\delta_M)$. This lower bound is valid for all $\mu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$ since T_{past} does not depend on μ . Let us consider $\varepsilon \in (0, 1)$, $q_0 \in [0, 1)$ and $r = r_{\varepsilon(1-q_0)}$. One can show by similar computations as above that $\delta = \min((1-q_0)(1-\varepsilon), \frac{(1-q_0)(r-1)}{r+1})$ is also a lower bound for the radius of convergence of $p \mapsto C((1-p)\mu + p\delta_M)$ around $1-q_0$. For $q_0 = 0$, we can numerically optimize this lower bound in ε . We obtain that the radius of convergence around 1 is lower bounded by 0.298167. This lower bound does not seem to be optimal according to numerical simulations, but it is a slight improvement over the previously known lower bound $\frac{\sqrt{2}-1}{2} \simeq 0,20710678$ from [MR21] for the case where $\mu = \delta_{-\infty}$.

2.3.2. Analyticity for measures with N atoms

We first simplify the formula from Proposition 2.2.13 in the specific case where ν has finite support:

Proposition 2.3.4. *We consider N weights $a_1 > a_2 > \dots > a_N \geq -\infty$ such that $a_1 > 0$, and $p_1, \dots, p_N \in [0, 1]$ such that $p_1 + \dots + p_N = 1$ and $p_1 > 0$. Then,*

$$C\left(\sum_{i=1}^N p_i \delta_{a_i}\right) = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \sum_{x \in E_\beta} s_{a_1}^{\text{end}}(\beta, x) p_1^{|\beta|} p_2^{c_{2,x}} \dots p_N^{c_{N,x}}, \quad (2.18)$$

where $E_\beta = \{(x_j^{(i)})_{i \in [1, |\beta|], j \in [1, \beta_i - 1]} : x_j^{(i)} \in \{a_2, \dots, a_N\} \text{ and } c_{k,x} = |\{(i, j) \in [1, |\beta|] \times [1, \beta_i - 1] : x_j^{(i)} = a_k\}|\}$ for all $k \in [1, N]$ and $x \in E_\beta$.

Proof. We apply Proposition 2.2.13 with $p = p_1$ and $\mu = \frac{1}{1-p_1} \sum_{i=2}^N p_i \delta_{a_i}$. We obtain

$$\begin{aligned}
C \left(\sum_{i=1}^N p_i \delta_{a_i} \right) &= \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} p_1^{|\beta|} (1-p_1)^{H(\beta)} \int s_{a_1}^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq |\beta| \\ 1 \leq j \leq \beta_i - 1}} d\mu(x_j^{(i)}) \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \sum_{x \in E_\beta} p_1^{|\beta|} (1-p_1)^{H(\beta)} s_{a_1}^{\text{end}}(\beta, x) \prod_{i=1}^{|\beta|} \prod_{j=1}^{\beta_i - 1} \mu(\{x_j^{(i)}\}) \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \sum_{x \in E_\beta} p_1^{|\beta|} (1-p_1)^{H(\beta)} s_{a_1}^{\text{end}}(\beta, x) \left(\prod_{i=1}^{|\beta|} \prod_{j=1}^{\beta_i - 1} (1-p_1)^{-1} p_2^{I_{i,j,2}} \cdots p_N^{I_{i,j,N}} \right) \\
&= \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \sum_{x \in E_\beta} s_{a_1}^{\text{end}}(\beta, x) \cdot p_1^{|\beta|} p_2^{c_{2,x}} \cdots p_N^{c_{N,x}},
\end{aligned}$$

where $I_{i,j,k} := \mathbb{1}_{x_j^{(i)} = a_k}$. □

Let us now prove Theorem 2.1.7:

Proof of Theorem 2.1.7. We consider N weights $a_1 > a_2 > \cdots > a_N \geq -\infty$ with $a_1 > 0$. By Hartogs' theorem on separate holomorphicity [Kra01], if f is a function defined on an open set $U \subseteq \mathbb{C}^n$ such that, for all $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_i \mapsto f(z_1, \dots, z_n)$ is analytic when the other coordinates z_k for $k \neq i$ are fixed, then f is analytic on U . Therefore, it suffices to show that for every $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$,

$$p_k \mapsto C \left(\sum_{i=2}^N p_i \delta_{a_i} + (1 - p_2 - \cdots - p_N) \delta_{a_1} \right)$$

is analytic on $\{p_k \in [0, 1], 0 \leq p_2 + \cdots + p_N < 1\}$ for all $p_2, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_N \in [0, 1]$ such that $p_2 + \cdots + p_{k-1} + p_{k+1} + \cdots + p_N < 1$.

Now, we fix $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$. By (2.18), it suffices to show that for all $(p_2, \dots, p_N) \in [0, 1]^N$ such that $0 \leq p_2 + \cdots + p_N < 1$, there exists $\delta > 0$ such that for all $z \in D(0, \delta)$,

$$(\star) := \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_m} \sum_{x \in E_\alpha} |1 - p_2 - \cdots - p_N - z|^{|\alpha|} p_2^{c_{2,x}} \cdots p_{k-1}^{c_{k-1,x}} |p_k + z|^{c_{k,x}} \cdot p_{k+1}^{c_{k+1,x}} \cdots p_N^{c_{N,x}} < \infty$$

since $0 \leq s_{a_1}^{\text{end}} \leq a_1$. We set $p_1 = 1 - p_2 - \cdots - p_N$. By the triangle inequality, we obtain the following upper bound

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_m} \sum_{x \in E_\alpha} (p_1 + |z|)^{|\alpha|} p_2^{c_{2,x}} \cdots p_{k-1}^{c_{k-1,x}} (p_k + |z|)^{c_{k,x}} \cdot p_{k+1}^{c_{k+1,x}} \cdots p_N^{c_{N,x}} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_m} \sum_{x \in E_\alpha} \left(\frac{p_1 + |z|}{p_1 - |z|} \right)^{|\alpha|} (p_1 - |z|)^{|\alpha|} p_2^{c_{2,x}} \cdots p_{k-1}^{c_{k-1,x}} (p_k + |z|)^{c_{k,x}} \cdot p_{k+1}^{c_{k+1,x}} \cdots p_N^{c_{N,x}}.
\end{aligned}$$

We take $\delta < \min(1 - p_k, 1 - p_1)$ so that $p_k + |z| \in [0, 1[$ and $1 - p_1 - |z| > 0$. If we denote by $\mathbb{E}_{p, \mu}$ the expectation corresponding to the probability space where the weights have distribution $(1 - p)\mu + p\delta_1$, then

$$(\star) \leq \mathbb{E}_{p_1 - |z|, \frac{|z|}{1 - p_1} \delta_{a_k} + \sum_{i=2}^N \frac{p_i}{1 - p_1} \delta_{a_i}} \left[\left(\frac{p_1 + |z|}{p_1 - |z|} \right)^{T_{\text{past}}} \right],$$

where T_{past} is the length of the first triangular word in the past for a word of i.i.d. random variables with distribution $\mathcal{G}(p_1 - |z|)$. This expectation is exactly the same as in (2.17), and its finiteness has already been proved by Lemma 2.3.2 for $|z| \leq \delta'$ for some δ' . Then, with $\delta < \min(1 - p_k, 1 - p_1, \delta')$, $(\star) < +\infty$.

Therefore, $p_k \mapsto C\left(\sum_{i=2}^N p_i \delta_{a_i} + (1 - p_2 - \dots - p_N) \delta_1\right)$ is analytic on $\{p_k \in [0, 1], 0 \leq p_2 + \dots + p_N < 1\}$. \square

2.3.3. Continuity

Proof of Theorem 2.1.3. We proceed by successive approximations to prove the theorem. Firstly, we show that it suffices to prove the result on the set of measures ν with essential supremum equal to a fixed M and with $\nu((M - \varepsilon, M)) = 0$ for some $\varepsilon > 0$. Secondly, we use Theorem 2.1.6 and we prove the continuity of $\mu \mapsto C((1 - p)\mu + p\delta_{M_\nu})$ via Proposition 2.2.13 in order to prove the continuity of $\nu \mapsto C(\nu)$ on this class of measures.

Let us recall that $M_\mu := \inf\{t \in \mathbb{R} : \mu([t, +\infty)) = 0\}$ is the essential supremum of μ for all distribution $\mu \in \mathcal{M}_1$ and let us consider $\nu_n, \nu \in \mathcal{M}_1$ such that $d(\nu_n, \nu)$ converges to 0 as n tends to $+\infty$. In other terms, $(\nu_n)_n$ weakly converges to ν and M_{ν_n} converges to M_ν as n tends to $+\infty$. We want to show that $C(\nu_n)$ converges to $C(\nu)$ as n tends to $+\infty$.

For $\varepsilon > 0$, we set $\nu^{(\varepsilon)} = (1 - p^{(\varepsilon)})\mu^{(\varepsilon)} + p^{(\varepsilon)}\delta_{M_\nu}$ where $p^{(\varepsilon)} = \nu([M_\nu - \varepsilon, M_\nu])$ and $\mu^{(\varepsilon)} = \frac{\nu([-\infty, M_\nu - \varepsilon] \cap \bullet)}{1 - p^{(\varepsilon)}}$. Similarly, we set $\nu_n^{(\varepsilon)} = (1 - p_n^{(\varepsilon)})\mu_n^{(\varepsilon)} + p_n^{(\varepsilon)}\delta_{M_{\nu_n}}$ where $p_n^{(\varepsilon)} = \nu_n([M_{\nu_n} - \varepsilon, M_{\nu_n}])$ and $\mu_n^{(\varepsilon)} = \frac{\nu_n([-\infty, M_{\nu_n} - \varepsilon] \cap \bullet)}{1 - p_n^{(\varepsilon)}}$. Notice that the probability distribution $\mu^{(\varepsilon)}$ is well-defined if and only if $p^{(\varepsilon)} < 1$. When $p^{(\varepsilon)} = 1$, set $\nu^{(\varepsilon)} = \delta_{M_\nu}$. Similarly, $\mu_n^{(\varepsilon)}$ is not well-defined when $p_n^{(\varepsilon)} = 1$, and we set $\nu_n^{(\varepsilon)} = \delta_{M_{\nu_n}}$ in that case.

Since a probability distribution has a set of atoms which is at most countable, we can assume that $\nu(\{M_\nu - \varepsilon\}) = 0$ for ε as small as we need. Then, $p_n^{(\varepsilon)}$ converges to $p^{(\varepsilon)}$ as n tends to $+\infty$ by Portmanteau theorem (c.f [Bil99]) for such ε . Then, $\mu_n^{(\varepsilon)}$ is also well-defined for n large enough when $p^{(\varepsilon)} < 1$ by convergence of $(p_n^{(\varepsilon)})_n$ to $p^{(\varepsilon)}$. Similarly, it is easy to show that $(\mu_n^{(\varepsilon)})_n$ weakly converges to $\mu^{(\varepsilon)}$ by the Portmanteau theorem when $p^{(\varepsilon)} < 1$. As a consequence, $(\nu_n^{(\varepsilon)})_n$ weakly converges to $\nu^{(\varepsilon)}$.

By the triangle inequality, for all $n \in \mathbb{N}$ and $\varepsilon > 0$,

$$|C(\nu_n) - C(\nu)| \leq |C(\nu_n) - C(\nu_n^{(\varepsilon)})| + |C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu^{(\varepsilon)})| + |C(\nu^{(\varepsilon)}) - C(\nu)|. \quad (2.19)$$

The first and last terms in the right-hand side of (2.19) are easy to control. We consider $(X_{i,j}^{(n)})_{i < j}$ i.i.d

random variables with distribution ν_n . If we set

$$\tilde{X}_{i,j}^{(n)} := M_\nu \mathbf{1}_{X_{i,j}^{(n)} \geq M_\nu - \varepsilon} + X_{i,j}^{(n)} \mathbf{1}_{X_{i,j}^{(n)} < M_\nu - \varepsilon},$$

then $(\tilde{X}_{i,j}^{(n)})_{i < j}$ are i.i.d random variables with distribution $\nu_n^{(\varepsilon)}$. For $\pi_N = (i_{N,1}, \dots, i_{N,k_N})$ a heaviest path starting at 0 and ending at N for the weights $(X_{i,j}^{(n)})_{i < j}$, we have

$$C(\nu_n) - C(\nu_n^{(\varepsilon)}) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{k_N-1} (X_{i_{N,l}, i_{N,l+1}}^{(n)} - \tilde{X}_{i_{N,l}, i_{N,l+1}}^{(n)})$$

by (2.3). Note that $k_N \leq N$. For all $i < j$, $(X_{i,j}^{(n)} - \tilde{X}_{i,j}^{(n)})$ is positive only when $M_\nu < X_{i,j}^{(n)} \leq M_{\nu_n}$. In this case, $\tilde{X}_{i,j}^{(n)} = M_\nu$. Then, we obtain the following domination

$$C(\nu_n) - C(\nu_n^{(\varepsilon)}) \leq \max(M_{\nu_n} - M_\nu, 0). \quad (2.20)$$

Similarly, if $\pi'_N = (i'_{N,1}, \dots, i'_{N,k'_N})$ is a heaviest path starting at 0 and ending at N for the weights $(\tilde{X}_{i,j}^{(n)})_{i < j}$, then

$$C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu_n) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{k'_N-1} (\tilde{X}_{i'_{N,l}, i'_{N,l+1}}^{(n)} - X_{i'_{N,l}, i'_{N,l+1}}^{(n)})$$

by (2.3). Since $(\tilde{X}_{i,j}^{(n)} - X_{i,j}^{(n)})$ is positive only when $M_\nu - \varepsilon \leq X_{i,j}^{(n)} < M_\nu$, we obtain

$$C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu_n) \leq M_\nu - (M_\nu - \varepsilon) \leq \varepsilon. \quad (2.21)$$

As a consequence of (2.20) and (2.21), $|C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu_n)| \leq \varepsilon + |M_{\nu_n} - M_\nu|$. A similar reasoning shows that $0 \leq C(\nu^{(\varepsilon)}) - C(\nu) \leq \varepsilon$. Then, $|C(\nu_n) - C(\nu)| \leq |C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu^{(\varepsilon)})| + 2\varepsilon + |M_{\nu_n} - M_\nu|$ for all $n \geq 0$ by (2.19). By convergence of $(M_{\nu_n})_n$ to M_ν , we obtain

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |C(\nu_n) - C(\nu)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu^{(\varepsilon)})| + 2\varepsilon.$$

Since we can take ε as small as we want, it remains to see that $|C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu^{(\varepsilon)})|$ converges to 0 as n tends to $+\infty$. To do so, we use the following two lemmas:

Lemma 2.3.5. *For all $p \in (0, 1]$ and $M > 0$, $\mu \mapsto C((1-p)\mu + p\delta_M)$ is continuous for the Lévy-Prokhorov metric on the space of probability distributions in $\mathcal{M}_1([-\infty, M])$.*

Lemma 2.3.6. *For all $M > 0$ and $p \in (0, 1]$, there exist $L \in \mathbb{R}^+$ and $p_- < p_+ \in \mathbb{R}_+^*$ such that $p_- < p < p_+$ and such that for all $\mu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$, $p \mapsto C((1-p)\mu + p\delta_M)$ is L -Lipschitz on $[p_-, \min(1, p_+)]$.*

Assuming that those two lemmas are true, we obtain the result as follows. We set

$$\hat{\nu}_n^{(\varepsilon)} = (1 - p^{(\varepsilon)})\mu_n^{(\varepsilon)} + p^{(\varepsilon)}\delta_{M\nu}.$$

By the triangle inequality,

$$|C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu^{(\varepsilon)})| \leq |C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\hat{\nu}_n^{(\varepsilon)})| + |C(\hat{\nu}_n^{(\varepsilon)}) - C(\nu^{(\varepsilon)})|. \quad (2.22)$$

By Lemma 2.3.5, the second term in (2.22) converges to 0 as n tends to $+\infty$, since $(\mu_n^{(\varepsilon)})_n$ weakly converges to $\mu^{(\varepsilon)}$ when $p^{(\varepsilon)} < 1$. When $p^{(\varepsilon)} = 1$, the second term vanishes. For the first term, we apply Lemma 2.3.6 with $p = p^{(\varepsilon)}$: since $(p_n^{(\varepsilon)})_n$ converges to $p^{(\varepsilon)}$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that for all $n \geq N$, $p_n^{(\varepsilon)} \in [p_-, \min(1, p_+)]$. Then, there exists $L \in \mathbb{R}_+$ such that for all $n \geq N$, $|C(\nu_n^{(\varepsilon)}) - C(\hat{\nu}_n^{(\varepsilon)})| \leq L|p_n^{(\varepsilon)} - p^{(\varepsilon)}|$ by Lemma 2.3.6. Therefore, the first term in (2.22) converges to 0, which concludes the proof of Theorem 2.1.3. \square

Let us now prove Lemmas 2.3.5 and 2.3.6.

Proof of Lemma 2.3.5. We consider fixed $p \in (0, 1]$ and $M > 0$. For μ a probability distribution on $[-\infty, M)$, we denote by $\mathbb{E}_{p,\mu}$ the expectation corresponding to a probability space where the weights $(X_{i,j})_{i < j}$ are i.i.d. with distribution $(1 - p)\mu + p\delta_M$. By Proposition 2.2.13,

$$C((1 - p)\mu + p\delta_M) = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} p^{|\beta|} (1 - p)^{H(\beta)} \int s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq |\beta| \\ 1 \leq j \leq \beta_{i-1}}} d\mu(x_j^{(i)}),$$

where s_M is defined in (2.12). Notice that for all $\beta \in \mathcal{T}_m$ and $M > 0$, $s_M^{\text{end}}(\beta, \bullet)$ is continuous and bounded by M . As a consequence,

$$\int s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq |\beta| \\ 1 \leq j \leq \beta_{i-1}}} d\mu(x_j^{(i)})$$

is a continuous function of μ for the Lévy-Prokhorov metric. Since this last quantity is bounded by M , we obtain the continuity of $\mu \mapsto C((1 - p)\mu + p\delta_M)$ by the dominated convergence theorem. \square

Proof of Lemma 2.3.6. Let us consider $M > 0$, $p \in (0, 1]$ and $\mu \in \mathcal{M}_1([-\infty, M))$. Assume that $0 < p_- < p < p_+$ where p_- and p_+ will be adjusted later. By Theorem 2.1.6, the map $p \mapsto C((1 - p)\mu + p\delta_M)$ is analytic on $(0, 1]$. Then, by the mean value theorem,

$$|C((1 - p_1)\mu + p_1\delta_M) - C((1 - p_2)\mu + p_2\delta_M)| \leq L_{\mu,p_1,p_2}|p_2 - p_1|, \quad (2.23)$$

for all $p_- \leq p_1 < p_2 \leq \min(1, p_+)$, where

$$L_{\mu,p_1,p_2} := \sup \left\{ \left| \left(\frac{\partial}{\partial p} C((1 - p)\mu + p\delta_M) \Big|_{p=p'} \right) \right| : p' \in (p_1, p_2) \right\}.$$

We need to dominate L_{μ, p_1, p_2} by some quantity which does not depend on μ . For all $\beta \in \mathcal{T}_m$, $p \in (0, 1]$ and $x_j^{(i)} \in [-\infty, M)$, we set $g(\beta, p, (x_j^{(i)})_{i,j}) = p^{|\beta|}(1-p)^{H(\beta)} s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j})$. Then, by Proposition 2.2.13,

$$C((1-p)\mu + p\delta_M) = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \int g(\beta, p, (x_j^{(i)})_{i,j}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq |\beta| \\ 1 \leq j \leq \beta_{i-1}}} d\mu(x_j^{(i)}).$$

The function $p \mapsto g(\beta, p, (x_j^{(i)})_{i,j})$ is differentiable on $(0, 1]$ since it is polynomial, and we have

$$\frac{\partial}{\partial p} g(\beta, p, (x_j^{(i)})_{i,j}) = \left(|\beta| p^{|\beta|-1} (1-p)^{H(\beta)} - H(\beta) p^{|\beta|} (1-p)^{H(\beta)-1} \right) \cdot s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j})$$

for all $\beta \in \mathcal{T}_m \setminus \{1\}$. We exclude the choice of the word 1 from \mathcal{T}_m since $H(1) - 1 = -1$ and $H(1)(1-p)^{H(1)-1}$ is not well defined at $p = 1$. In that case, $\frac{\partial}{\partial p} g(1, p, (x_j^{(i)})_{i,j}) = M$ since $g(1, p, (x_j^{(i)})_{i,j}) = Mp$. Since $s_M^{\text{end}}(\beta, (x_j^{(i)})_{i,j}) \in [0, M]$, for all $\beta \in \mathcal{T}_m$, by the triangle inequality,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial p} g(\beta, p, (x_j^{(i)})_{i,j}) \right| &\leq M \left(|\beta| p_+^{|\beta|-1} (1-p_-)^{H(\beta)} + H(\beta) p_+^{|\beta|} (1-p_-)^{H(\beta)-1} \right) \\ &\leq M \left(\frac{|\beta|}{p_+} + \frac{H(\beta)}{1-p_-} \right) p_+^{|\beta|} (1-p_-)^{H(\beta)} \\ &\leq M \left(\frac{|\beta|}{p_+} + \frac{H(\beta)}{1-p_-} \right) p_-^{|\beta|} (1-p_-)^{H(\beta)} \cdot \left(\frac{p_+}{p_-} \right)^{|\beta|}. \end{aligned}$$

Since β is triangular, $H(\beta) \leq \frac{|\beta|(|\beta|-1)}{2}$. Then, $H(\beta) \leq |\beta|^2$ and we have

$$\left| \frac{\partial}{\partial p} g(\beta, p, (x_j^{(i)})_{i,j}) \right| \leq M \left(\frac{1}{p_+} + \frac{1}{1-p_-} \right) p_-^{|\beta|} (1-p_-)^{H(\beta)} \cdot |\beta|^2 \left(\frac{p_+}{p_-} \right)^{|\beta|} \quad (2.24)$$

for all $\beta \in \mathcal{T}_m$. Since the term on the right in (2.24) does not depend on p , it suffices to show that it is integrable in order to exchange the derivative and the sum by the Leibniz integral rule. With $\mathbb{E}_{p, \mu}$ the expectation corresponding to the probability space where the weights have distribution $(1-p)\mu + p\delta_M$, we obtain

$$\sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} p_-^{|\beta|} (1-p_-)^{H(\beta)} \cdot |\beta|^2 \left(\frac{p_+}{p_-} \right)^{|\beta|} = \mathbb{E}_{p, \mu} \left[T_{\text{past}}^2 \left(\frac{p_+}{p_-} \right)^{T_{\text{past}}} \right] \quad (2.25)$$

by the law of total probability. Now, let us consider a $p_0 \in (0, p)$. By Theorem 2.3.1, if $p_0 r_{p_0} > p$, the quantity in (2.25) is finite with $p_- = p_0$ and any $p_+ \in (p, p_0 r_{p_0})$. If $p_0 r_{p_0} \leq p$, let us consider p_- such that $p - p_0(r_{p_0} - 1) < p_- < p$. Since $r_p = \sup\{r \geq 1 : \mathbb{E}_{p, \mu}[r^{T_{\text{past}}}] < +\infty\}$, $p \mapsto r_p$ is non-decreasing on $(0, 1]$ since T_{past} is non-increasing in p by trivial coupling. Then, $0 < p - p_- < p_0(r_{p_0} - 1) \leq p_-(r_{p_-} - 1)$, which implies that $p < p_- r_{p_-}$. Therefore, for any $p_+ \in (p, p_- r_{p_-})$, the quantity in (2.25) is finite. We set $L = M \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \left(\frac{1}{p_+} + \frac{1}{1-p_-} \right) p_-^{|\beta|} (1-p_-)^{H(\beta)} \cdot |\beta|^2 \left(\frac{p_+}{p_-} \right)^{|\beta|}$, which is finite and depends only on p_- and p_+ . Then, by (2.23) and the Leibniz integral rule, $p \mapsto C((1-p)\mu + p\delta_M)$ is L -Lipschitz on $[p_-, \min(1, p_+)]$. \square

2.3.4. Strict monotonicity of $C(\nu)$

In this subsection, we consider $\nu_j \in \mathcal{M}_1$ of the form $(1 - p_j)\mu_j + p_j\delta_M$ for $j = 1, 2$, where $M > 0$, $p_1, p_2 \in (0, 1]$ and $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1([-\infty, M])$. Recall that ν_1 is stochastically dominated by ν_2 if for all $t \in \mathbb{R}$,

$$\nu_1([t, +\infty)) \leq \nu_2([t, +\infty)).$$

In that case, note that $p_1 \leq p_2$. Assuming that ν_1 is dominated by ν_2 for the stochastic order, there exists $(X_i^{(n)}(\nu_1), X_i^{(n)}(\nu_2))_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. random variables such that $X_i^{(n)}(\nu_1)$ (resp. $X_i^{(n)}(\nu_2)$) has distribution ν_1 (resp. ν_2) and such that $X_i^{(n)}(\nu_1) \leq X_i^{(n)}(\nu_2)$ almost surely for all $i, n \geq 1$ by trivial coupling. More precisely, the trivial coupling is constructed as follows: assume that $X_i^{(n)}(\nu_k) = F_{\nu_k}^{-1}(U_i^{(n)})$, where $(U_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}}$ are i.i.d. with uniform distribution on $[0, 1]$ and $F_{\nu_k}^{-1}$ is the inverse distribution function of ν_k for $k \in \{1, 2\}$. We set λ and θ to be the MGS with respective weights sequences $(X_i^{(n)}(\nu_1))_{i, n \geq 1}$ and $(X_i^{(n)}(\nu_2))_{i, n \geq 1}$, and starting configuration δ_0 .

Proposition 2.3.7. *With λ and θ as previously defined, consider*

$$\xi_n := \inf\{i \in \mathbb{N}, X_i^{(n)}(\nu_1) = M\}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Let $T_1 < T_2 < \dots$ be the enumeration of the elements of

$$\mathcal{R} = \{n \in \mathbb{N} : \forall i \in \mathbb{N}, \xi_{n+i-1} \leq i\}.$$

Then,

$$C(\nu_1) = \gamma_{1-p_1} \mathbb{E}[\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)}], \quad (2.26)$$

$$C(\nu_2) = \gamma_{1-p_1} \mathbb{E}[\theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)}], \quad (2.27)$$

where $\gamma_q := \prod_{k \geq 1} (1 - q^k)$ for all $q \in [0, 1)$.

Note that the coefficient γ_{1-p_1} is common to the two equations (2.26) and (2.27). This is due to the fact that, with the trivial coupling, the renovation events that we consider for the weight distribution ν_1 also are renovation events for the weight distribution ν_2 .

Proof. For $j = 1, 2$, the sequences $((X^{(l)}(\nu_j))_{T_k \leq l < T_{k+1}})_{k \in \mathbb{N}}$ are stationary by definition of $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Also note that $\alpha(X^{(T_1)}(\nu_1), \dots, X^{(T_2-1)}(\nu_1))$ is a minimal triangular word by definition of T_1 and T_2 . Then, by Lemma 2.2.5 and Remark 2.2.6, $(\lambda_1^{(T_{k+1}-1)} - \lambda_1^{(T_k-1)})_{k \in \mathbb{N}}$ depends only on $(X^{(l)}(\nu_1))_{T_k \leq l < T_{k+1}}$. Therefore, $(\lambda_1^{(T_{k+1}-1)} - \lambda_1^{(T_k-1)})_{k \in \mathbb{N}}$ is a stationary sequence. Set $K_n := \max\{k \geq 0 : T_k - 1 \leq n\}$ with the convention that $T_0 = 0$. Note that

$$K_n = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{1}_{k \in \mathcal{R}}.$$

Recall that a transformation is ergodic if and only if any event that is invariant by that transformation has probability 0 or 1. Therefore, by Kolmogorov's zero-one law, the shift σ defined in the proof of Lemma 2.2.7 is an ergodic transformation of $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ since those random variables are i.i.d. As a consequence, by Birkhoff's ergodic theorem [VO16],

$$\frac{K_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \mathbb{P}(1 \in \mathcal{R}) = \gamma_{1-p_1} > 0$$

By definition of K_n ,

$$\lambda_1^{(n)} = \lambda_1^{(T_1-1)} + \sum_{k=1}^{K_n-1} (\lambda_1^{(T_{k+1}-1)} - \lambda_1^{(T_k-1)}) + (\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(T_{K_n}-1)}).$$

It is easy to see that $n^{-1}T_1$ almost surely goes to 0 as n goes to infinity since T_1 does not depend on n . Also note that $n+1 - T_{K_n}$ has the same distribution as $T_{\text{past}} - 1$, where we recall that $T_{\text{past}} = \inf\{t \in \mathbb{N} : (X^{(-t+2)}(\nu_1), \dots, X^{(1)}(\nu_1)) \in \mathcal{T}\}$. In addition, T_{past} has finite second moment by Theorem 2.3.1. This implies that $n^{-1}(n - T_{K_n})$ almost surely goes to 0 as n goes to infinity by the Borel–Cantelli lemma. Therefore, since $0 \leq \lambda_1^{(t')} - \lambda_1^{(t)} \leq M(t' - t)$ for all $t < t' \in \mathbb{N}$, $n^{-1}\lambda^{(T_1-1)}$ and $n^{-1}(\lambda^{(n)} - \lambda^{(T_{K_n}-1)})$ both almost surely goes to zeros as n goes to infinity. Since K_n goes to infinity as n goes to infinity, one obtains that

$$C(\nu_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K_n-1} \mathbb{E}[\lambda_1^{(T_{k+1}-1)} - \lambda_1^{(T_k-1)}].$$

In addition, $\mathbb{E}[\lambda_1^{(T_{k+1}-1)} - \lambda_1^{(T_k-1)}]$ does not depend on $k \geq 1$ by stationarity. Therefore, we obtain (2.26). To obtain (2.27), we notice that $X_i^{(n)}(\nu_1) = M$ implies that $X_i^{(n)}(\nu_2) = M$ with the trivial coupling since $p_1 = \nu_1(\{M\}) = \nu_1([M, +\infty)) \leq \nu_2([M, +\infty)) = \nu_2(\{M\}) = p_2$. As a consequence, $\alpha(X^{(T_1)}(\nu_2), \dots, X^{(T_2-1)}(\nu_2))$ is also a triangular word. Therefore, $(\theta_1^{(T_{k+1}-1)} - \theta_1^{(T_k-1)})_{k \in \mathbb{N}}$ is also stationary by Lemma 2.2.5 and Remark 2.2.6. Finally, the same argument as for (2.26) allows us to obtain (2.27). \square

The following lemma allows us to compare the positions of the fronts in two MGS with comparable weights sequences:

Lemma 2.3.8. *Consider $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ and $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ two deterministic sequences of elements of $\mathcal{W}_{\leq M}$. Set $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ and $(\theta^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ the deterministic MGS with starting configurations $\lambda^{(0)}$ and $\theta^{(0)}$ satisfying $\lambda_1^{(0)} = \theta_1^{(0)}$ and respective weights sequences $(x_i^{(n)})_{i, n \in \mathbb{N}}$ and $(y_i^{(n)})_{i, n \in \mathbb{N}}$. More explicitly, for all $n \in \mathbb{N}$, set $\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} + \delta_{\mathbf{m}(\lambda^{(n-1)}, x^{(n)})}$ and $\theta^{(n)} = \theta^{(n-1)} + \delta_{\mathbf{m}(\theta^{(n-1)}, y^{(n)})}$. Assume that $\alpha((x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}})$ and $\alpha((y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}})$ are triangular (infinite) words. If $x_i^{(n)} \leq y_i^{(n)}$ for all $i, n \in \mathbb{N}$, then $\lambda_i^{(n)} \leq \theta_i^{(n)}$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $1 \leq i \leq n+1$.*

Proof. By Lemma 2.2.5 and Remark 2.2.6, the position of the particles in the system λ (resp. θ) added at any time $n \geq 1$ depends only on $(x^{(k)})_{1 \leq k \leq n}$ and $\lambda_1^{(0)}$ (resp. $(y^{(k)})_{1 \leq k \leq n}$ and $\theta_1^{(0)}$). In addition, all those positions are greater or equal than $\lambda_1^{(0)}$ (resp. $\theta_1^{(0)}$). As a consequence, one may assume without loss of generality that $\lambda^{(0)} = \theta^{(0)} = \delta_0$.

Let us show that $\lambda_i^{(n)} \leq \theta_i^{(n)}$ for all $1 \leq i \leq n+1$ by induction on n . For $n = 0$, the result is clearly true. Assume that the result is true for $n-1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $\lambda_i^{(n-1)} \leq \theta_i^{(n-1)}$ for all $1 \leq i \leq n$. Therefore, by definition of \mathbf{m} ,

$$\mathbf{m}(\lambda^{(n-1)}, x^{(n)}) = \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i^{(n-1)} + x_i^{(n)}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\theta_i^{(n-1)} + y_i^{(n)}) = \mathbf{m}(\theta^{(n-1)}, y^{(n)}).$$

Note that $(\lambda_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n+1}$ (resp. $(\theta_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n+1}$) corresponds to the elements of $\{\lambda_i^{(n-1)} : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, x^{(n)})\}$ (resp. $\{\theta_i^{(n-1)} : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\mathfrak{m}(\theta^{(n-1)}, y^{(n)})\}$) counted with repetitions in non-increasing order.

Now that we have compared the positions of the new particles at time n , let us show that $\lambda_i^{(n)} \leq \theta_i^{(n)}$ for all $1 \leq i \leq n+1$. Consider $\Lambda_n = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_{\lambda_i^{(n)}}$ and $\Theta_n = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_{\theta_i^{(n)}}$. To prove that $\lambda_i^{(n)} \leq \theta_i^{(n)}$ for all $1 \leq i \leq n+1$ is equivalent to prove that $\Lambda_n([t, +\infty)) \leq \Theta_n([t, +\infty))$ for all $t \in \mathbb{R}$. Note that $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \delta_{\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, x^{(n)})}$ and $\Theta_n = \Theta_{n-1} + \delta_{\mathfrak{m}(\theta^{(n-1)}, y^{(n)})}$ in view of what above. Since $\Lambda_{n-1} = \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i^{(n-1)}}$ and $\Theta_{n-1} = \sum_{i=1}^n \delta_{\theta_i^{(n-1)}}$, for all $t \in \mathbb{R}$,

$$\Lambda_n([t, +\infty)) = |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \lambda_i^{(n-1)} \geq t\}| + \mathbf{1}_{\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, x^{(n)}) \geq t}$$

and

$$\Theta_n([t, +\infty)) = |\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : \theta_i^{(n-1)} \geq t\}| + \mathbf{1}_{\mathfrak{m}(\theta^{(n-1)}, y^{(n)}) \geq t}.$$

Since $\lambda_i^{(n-1)} \leq \theta_i^{(n-1)}$ by induction hypothesis and $\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, x^{(n)}) \leq \mathfrak{m}(\theta^{(n-1)}, y^{(n)})$, then $\Lambda_n([t, +\infty)) \leq \Theta_n([t, +\infty))$ for all $t \in \mathbb{R}$, which concludes the proof of the lemma. \square

Proof of Theorem 2.1.1. Assume that ν_2 strictly dominates ν_1 for the stochastic order. More precisely, $\mu_1([-\infty, t]) \geq \mu_2([-\infty, t])$ for all $t \in \mathbb{R}$, and this inequality is strict for at least one $t \in \mathbb{R}$.

By Proposition 2.3.7, it suffices to prove that $\mathbb{E}[\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)}] < \mathbb{E}[\theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)}]$. By the law of total probabilities,

$$\mathbb{E}[\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)}] = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} p_1^{|\beta|} (1-p_1)^{H(\beta)} \mathbb{E}[\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)} | D_\beta],$$

where $D_\beta := \{\alpha((X^{(T_1)}(\nu_1), \dots, X^{(T_2-1)}(\nu_1))) = \beta\}$ for all $\beta \in \mathcal{T}_m$. A similar formula holds for $(\theta^{(n)})$:

$$\mathbb{E}[\theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)}] = \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} p_1^{|\beta|} (1-p_1)^{H(\beta)} \mathbb{E}[\theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)} | D_\beta].$$

Notice that $\alpha((X^{(T_1)}(\nu_j), \dots, X^{(T_2-1)}(\nu_j)))$ is a minimal triangular word for $j = 1$ by definition of T_1 and triangular for $j = 2$ since $X_i^{(n)}(\nu_1) \leq X_i^{(n)}(\nu_2)$ for all $i, n \geq 1$. Therefore, by Lemma 2.2.5, $\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)}$ (resp. $\theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)}$) depends only on $\lambda_1^{(T_1-1)}$ and $(X^{(n)}(\nu_1))_{n \geq T_1}$ (resp. $\theta_1^{(T_1-1)}$ and $(X^{(n)}(\nu_2))_{n \geq T_1}$). As a consequence, $\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)} \leq \theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)}$ almost surely by application of the Lemma 2.3.8 to the processes $(F_{\lambda_1^{(T_1-1)}}(\lambda^{(n+T_1-1)}))_{n \geq 0}$ and $(F_{\theta_1^{(T_1-1)}}(\theta^{(n+T_1-1)}))_{n \geq 0}$. Therefore, it suffices to find $\beta \in \mathcal{T}_m$ such that

$$\mathbb{E}[\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)} | D_\beta] < \mathbb{E}[\theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)} | D_\beta].$$

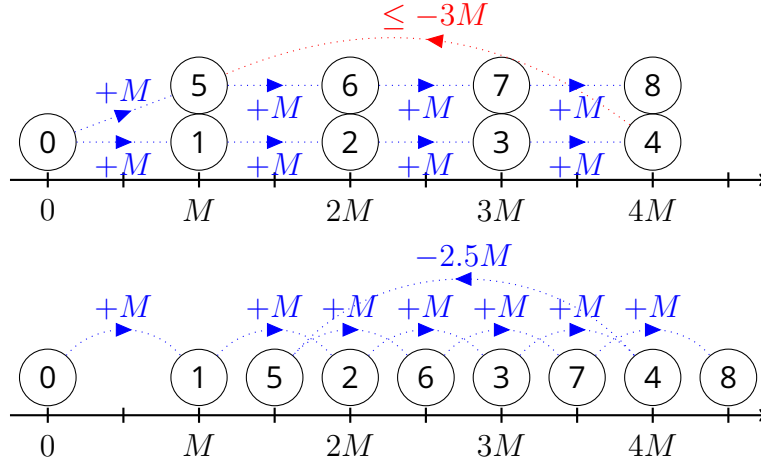


Figure 2.7 – Illustration of the particles added between steps $T_1 = 1$ and $T_2 - 1 = 8$ for an MGS with weight distribution ν_1 at the top and ν_2 at the bottom conditionally on the event $A_{k,t}$, with $k = 4$ and $-3M < t \leq -2.5M$. We also assume here that $\lambda_1^{(0)} = \theta_1^{(0)} = 0$. The particles are labeled by their appearance times. For this realization, $X_1^{(T_1+k)}(\nu_2) = -2.5M$ and $X_1^{(T_1+k)}(\nu_1) \leq -3M$.

For $k \in \mathbb{N}$, we consider the word $\beta^{(k)} = (1, \dots, 1, (k+1), k, \dots, 3, 2) \in \mathcal{T}_m$ of size $2k$. For $k \in \mathbb{N}$ and $t \in \mathbb{R}$ such that $M(1-k) < t \leq M(2-k)$, we also set $A_{k,t}$ to be the intersection of the events

$$\begin{aligned} & \{X_1^{(T_1)}(\nu_1) = \dots = X_1^{(T_1+k-1)}(\nu_1) = M\}, \\ & \{X_{k+1}^{(T_1+k)}(\nu_1) = X_k^{(T_1+k+1)}(\nu_1) = \dots = X_2^{(T_1+2k-1)}(\nu_1) = M\}, \\ & \{X_1^{(T_1+k)}(\nu_2) \in [t, M(2-k)]\}, \\ & \{X_1^{(T_1+k)}(\nu_1) < X_1^{(T_1+k)}(\nu_2)\}, \\ & \bigcap_{\substack{1 \leq n \leq 2k \\ 1 \leq i < \beta_n^{(k)} \\ (i,n) \neq (1,k+1)}} \{X_i^{(T_1+n-1)}(\nu_2) \leq t\}. \end{aligned}$$

Let us explain the reason why we consider this event in the case where $T_1 = 1$, $\lambda_1^{(T_1-1)} = 0$ and $\theta_1^{(T_1-1)} = 0$ (which is easy to extend to the general case). Assume that the event $A_{k,t}$ is realized. Then for both processes λ and θ , the particle added at time n for $1 \leq n \leq k$ is placed at position nM . The particle added at time $k+1$ for λ (resp. for θ) is placed at some position P_λ such that $M \leq P_\lambda \leq 2M$ (resp. P_θ such that $M < P_\theta \leq 2M$). Note that $P_\lambda < P_\theta$. Finally, the particle added at time $k+1+n$ for $1 \leq n \leq k-1$ is placed at position $P_\lambda + nM$ for the process λ and at position $P_\theta + nM$ for the process θ . See Figure 2.7 for an illustration.

We have $\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)} = P_\lambda + (k-1)M$ and $\theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)} = P_\theta + (k-1)M$, hence $\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)} < \theta_1^{(T_2-1)} - \theta_1^{(T_1-1)}$. To complete the proof, it suffices to find t and k such that $\mathbb{P}(A_{k,t}) > 0$ and $M(1-k) < t \leq M(2-k)$.

For any $t \in \mathbb{R}$, we set $k_t = \lceil tM^{-1} \rceil$ so that $M(k_t - 1) < t \leq Mk_t$. Let X and \tilde{X} be two random variables of respective laws ν_1 and ν_2 coupled by trivial coupling such that $X \leq \tilde{X}$. For $t \in \mathbb{R}$, we define the events:

- $B_t = \{\tilde{X} \leq t\}$,
- $C_t = \{X < \tilde{X}\} \cap \{t \leq \tilde{X} \leq Mk_t\}$.

We search for some $t \in \mathbb{R}$ such that $\mathbb{P}(B_t) > 0$ and $\mathbb{P}(C_t) > 0$. If such a t exists, then we would have $\mathbb{P}(A_{k_t, t}) > 0$: let us recall that $A_{k_t, t}$ is defined as the intersection of the five events presented above. The first two events occurs with positive probability since $\nu_1(\{M\})$ and $\nu_2(\{M\})$ are positive. The intersection of the third and fourth events occurs with positive probability if $\mathbb{P}(C_t) > 0$. Any event in the intersection describing the last of the five events occurs with positive probability since $\mathbb{P}(B_t) > 0$. Then, the probability of the intersection of those five event is positive by independence of the random variables $(X_i^{(n)}(\nu_1), X_i^{(n)}(\nu_2))_{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}}$. Since $\mathbb{P}(X < \tilde{X}) > 0$, there exists $t \in \mathbb{R}$ such that $\mathbb{P}(C_t) > 0$. Let us consider

$$k' = \max\{k \in \mathbb{Z} : \exists t \in \mathbb{R}, k = k_t \text{ and } \mathbb{P}(C_t) > 0\}.$$

Notice that $t \mapsto \mathbb{P}(B_t)$ and $t \mapsto \mathbb{P}(C_t)$ are respectively right continuous non-decreasing and left continuous non-increasing functions on $(M(k' - 1), Mk']$. We define

$$t_B = \inf\{t \in (M(k' - 1), Mk'] : \mathbb{P}(B_t) > 0\}$$

and

$$t_C = \sup\{t \in (M(k' - 1), Mk'] : \mathbb{P}(C_t) > 0\}.$$

Let us prove that $M(k' - 1) \leq t_B \leq t_C \leq Mk'$. If $M(k' - 1) = t_B$, these inequalities are clearly true. Assume that $M(k' - 1) < t_B$. Notice that $\nu_2([-\infty, t_B)) = 0$ by definition of t_B . Therefore, $t \mapsto \mathbb{P}(C_t)$ is constant on $(M(k' - 1), t_B)$ by definition of C_t . Since $t \mapsto \mathbb{P}(C_t)$ is non-increasing and non-zero on $(M(k' - 1), Mk']$, we have $\mathbb{P}(C_{t_B - \varepsilon}) > 0$ for all small enough $\varepsilon > 0$, which implies that $t_B \leq t_C$ by definition of t_C .

If $t_B < t_C$, then we take $t \in (t_B, t_C)$ and we have $\mathbb{P}(B_t) > 0$ and $\mathbb{P}(C_t) > 0$. If $t_B = t_C$ (which implies that $M(k' - 1) < t_B$), we notice that

$$\mathbb{P}(\{X < \tilde{X}\} \cap \{t_B < \tilde{X} \leq Mk'\}) = 0$$

by definition of t_C . In addition,

$$\mathbb{P}(\{X < \tilde{X}\} \cap \{M(k' - 1) < \tilde{X} \leq Mk'\}) > 0$$

by definition of k' . Therefore,

$$\mathbb{P}(\{X < \tilde{X}\} \cap \{M(k' - 1) < \tilde{X} \leq t_B\}) > 0$$

Since

$$\mathbb{P}(\{X < \tilde{X}\} \cap \{M(k' - 1) < \tilde{X} \leq t_B\}) = \mathbb{P}(\{X < \tilde{X}\} \cap \{\tilde{X} = t_B\})$$

by definition of t_B , we conclude that $\mathbb{P}(B_t) > 0$ and $\mathbb{P}(C_t) > 0$ for $t = t_B = t_C$. \square

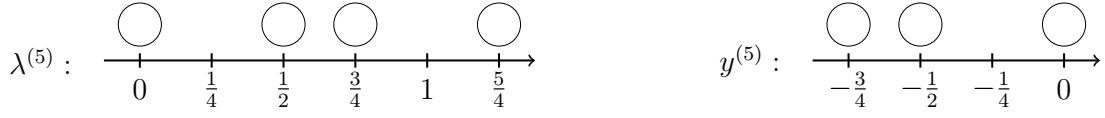


Figure 2.8 – Illustration of the reduction of the MGS to a Markov chain on a finite state space when $M = 1$ and $k = 4$. Since the dynamics of the MGS depends only on the particles at a distance less than 1 from the front, only particles at positions $\lambda_1^{(n)}$, $\lambda_1^{(n)} - 0.25$, $\lambda_1^{(n)} - 0.5$ and $\lambda_1^{(n)} - 0.75$ matter for the evolution of the system at time n by Lemma 2.4.2.

2.4. The case of probability distributions supported by two non-negative real numbers

In this section, we study the case where two non-negative real numbers support ν .

In Subsection 2.4.1 and Subsection 2.4.2, we study the case where two elements $0 < m < M$ support ν . We prove Theorem 2.1.9 in two steps. The first step consists in proving the theorem for $m = \frac{M}{k}$ for some $k \in \mathbb{N}$. In this case, the MGS reduces to a Markov chain on a finite state space which makes explicit computations possible. The second step consists in extending this result to all $0 < m < M$. To do so, we use results from [FKP23] in Subsection 2.4.2 to show that for $\frac{M}{k+1} < m < \frac{M}{k}$, $C((1-p)\delta_m + p\delta_M)$ is obtained by linear interpolation of $C((1-p)\delta_{\frac{M}{k}} + p\delta_1)$ and $C((1-p)\delta_{\frac{M}{k+1}} + p\delta_1)$.

We give formulas for $C((1-p)\delta_m + p\delta_M)$ for values of $m \in \{\frac{M}{i} : i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket\}$ at the ends of Subsections 2.4.1 and 2.4.2. By linear interpolation, note that one can also obtain an explicit formula for $C((1-p)\delta_m + p\delta_M)$ for any $m \in [\frac{M}{5}, M]$ (see (2.30)). In Subsection 2.4.3, we consider the case where ν is supported by 0 and $M > 0$ and we give an alternative proof of Theorem 2.1.10 via the MGS.

2.4.1. Rationality in p for measures of the form $(1-p)\delta_{\frac{M}{k}} + p\delta_M$

By the rescaling property (2.4), it suffices to prove Theorem 2.1.9 for $M = 1$. The following proposition is equivalent to Theorem 2.1.9 in the particular case when $M = 1$ and $m = \frac{1}{k}$ for some $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.4.1. *For all $k \in \mathbb{N}$, $p \mapsto C((1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1)$ is a rational function on $[0, 1]$.*

If $k = 1$, then $C((1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1) = C(\delta_1) = 1$ is clearly a rational function of p .

Now, we fix $k \geq 2$ and we set $\nu = (1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1$. By (2.6), it suffices to study the front's position of $(\lambda^{(n)})_{n \geq 0}$ an MGS with weight distribution ν and starting configuration $\lambda^{(0)} = \delta_0$ in order to study $C(\nu)$. In our case, the study of the MGS is easier than in the general case by the following lemma:

Lemma 2.4.2. *We consider a starting configuration $\lambda^{(0)} = \delta_0$ and $(X_j^{(n)})_{n, j \in \mathbb{N}}$ i.i.d. random variables with distribution $\nu = (1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1$. We consider $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ the MGS defined by $\lambda^{(n)} = \Phi_{X^{(n)}}(\lambda^{(n-1)})$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then, for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, if $k_n = |\{i \in \llbracket 1, \lambda^{(n)}(\mathbb{R}) \rrbracket : \lambda_i^{(n)} > \lambda_1^{(n)} - 1\}|$ is the number of particles at distance less than 1 from the front at time n ,*

$$m(\lambda^{(n)}, X^{(n+1)}) = \max_{i \in \llbracket 1, k_n \rrbracket} (\lambda_i^{(n)} + X_i^{(n+1)}). \quad (2.28)$$

As a consequence, almost surely, for all $n \in \mathbb{N}$,

B.1 *The dynamics of the MGS at each step depends only on the particles at a distance less than 1 from the front.*

B.2 *The position $\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)})$ of the new particle at time n satisfies:*

$$\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) - \lambda_1^{(n-1)} \in \left\{ \frac{i}{k} : i \in \llbracket 1, k \rrbracket \right\}.$$

B.3 *The front moves at each step: $\lambda_1^{(n)} = \mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) > \lambda_1^{(n-1)}$.*

B.4 *All particles have positions in $\frac{1}{k}\mathbb{Z}$: $\lambda_j^{(n-1)} \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $j \in \mathbb{N}$.*

B.5 *There is at most one particle at a given position.*

Proof. We notice that $X_1^{(n+1)} \geq \frac{1}{k}$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Therefore, if $\lambda_i^{(n)} \leq \lambda_1^{(n)} - 1$, then $\lambda_i^{(n)} + X_i^{(n+1)} \leq \lambda_1^{(n)} + X_1^{(n+1)}$. Therefore, by definition of \mathfrak{m} , we obtain (2.28):

$$\mathfrak{m}(\lambda^{(n)}, X^{(n+1)}) = \max_{i \in \llbracket 1, k_n \rrbracket} (\lambda_i^{(n)} + X_i^{(n+1)}).$$

Points B.1 to B.5 are simple consequences of (2.28) and of the fact that $X_i^{(j)} \in \{\frac{1}{k}, 1\}$ almost surely. \square

For a configuration $\lambda \in \mathcal{N}$, we set $u(\lambda)$ the configuration obtained by removing from λ all the particles at positions smaller or equal to $\lambda_1 - 1$ and by shifting all the particles so that the front's position in $u(\lambda)$ is 0. More explicitly, for all $\lambda \in \mathcal{N}$,

$$u(\lambda) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{\lambda_i - \lambda_1} \mathbb{1}_{\lambda_1 - \lambda_i < 1}.$$

See Figure 2.8 for an illustration. By Lemma 2.4.2, we can now define our Markov chain $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$:

Proposition 2.4.3. *Let us consider $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ an MGS with starting configuration $\lambda^{(0)} = \delta_0$ and measure $\nu = (1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1$. If $y^{(n)} := u(\lambda^{(n)})$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, then $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ is a Markov chain on the finite state space $E_k = \{\delta_0 + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \delta_{-\frac{i}{k}} : (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \{0, 1\}^{k-1}\}$. In addition, there is a unique recurrent class for this Markov chain, and for all $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lambda_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n -y_2^{(i)}. \tag{2.29}$$

Proof. It is easy to check that $u(\Phi_{X^{(n)}}(\lambda^{(n-1)})) = u(\Phi_{X^{(n)}}(u(\lambda^{(n-1)})))$ for all $n \in \mathbb{N}$ since the dynamics of the MGS depends only on the particles at a distance less than 1 from the particle(s) at the front by (2.28). Therefore, $u(\lambda^{(n)}) = u(\Phi_{X^{(n)}}(u(\lambda^{(n-1)})))$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then,

$$y^{(n)} = u \circ \Phi_{X^{(n)}}(y^{(n-1)})$$

for all $n \in \mathbb{N}$ by definition of $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Since $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ are i.i.d., $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ is a Markov chain.

By construction, for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $y^{(n)}$ is the configuration consisting of all the particles in $\lambda^{(n)}$ at distance less than one from the front's position, and where all the particles are shifted in space by $\lambda_1^{(n)}$ so that the front's position of $y^{(n)}$ is 0. By B.4 from Lemma 2.4.2, all the particles in $y^{(n)}$ have their positions in $\{-i/k : i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket\}$, and there is at least one particle at position 0 since it is the front's position. In addition, there is at most one particle at each of those positions by B.5 from 2.4.2. Therefore, $y^{(n)} \in E_k$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

We prove the uniqueness of the recurrent class by proving that, starting from any configuration in E_k for the Markov chain, there is a non-zero probability for the next configuration to be δ_0 . For all $\lambda_0 \in E_k$, it is easy to compute that $\mathbb{P}(y^{(n)} = \delta_0 \mid y^{(n-1)} = \lambda_0) = \mathbb{P}(X_1^{(n)} = 1) = p > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$.

It remains to prove (2.29). By B.3, $\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n-1)} = \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)}$ for all $n \in \mathbb{N}$. As a consequence, $\lambda_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n (\lambda_1^{(i)} - \lambda_2^{(i)})$. Therefore, by construction of $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, $\lambda_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n (y_1^{(i)} - y_2^{(i)})$. Since $y_1^{(i)} = 0$ for all $i \in \mathbb{N}$, we obtain (2.29). \square

Proof of Proposition 2.4.1. We can now complete the proof of Proposition 2.4.1. By Lemma 2.4.2, there exists a unique stationary distribution for the Markov chain $(y^{(n)})$. Let us denote by $\mu_{p,k}$ this stationary distribution. Then, by Proposition 2.4.3 and (2.6),

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n -y_2^{(i)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} C(\nu).$$

By the ergodic theorem for Markov chains, $C(\nu) = \mathbb{E}[-\tilde{y}_2]$ where \tilde{y} has distribution $\mu_{p,k}$. Since $(X_i^{(n)})_{i, n \in \mathbb{N}}$ are i.i.d. with distribution $\nu = (1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1$, the transition probabilities for this Markov chain are polynomials in p . As a consequence, since one can obtain $\mu_{p,k}$ as an eigenvector for the eigenvalue 1 of the transition matrix of $(y^{(n)})_{n \geq 1}$, its coefficients are rational functions in p . Therefore, the theorem is proved. \square

Since $(y^{(n)})_{n \geq 1}$ is a Markov chain on a finite state space, one can explicitly compute the stationary distribution for this model by computing the eigenspace of the transition matrix for the eigenvalue 1.

As a consequence, we can give an explicit formula for $C((1-p)\frac{1}{k} + p\delta_1)$ for small values of k :

$$\begin{aligned}
C(\delta_1) &= 1, \\
C((1-q)\delta_1 + q\delta_{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2}(2-q), \\
C((1-q)\delta_1 + q\delta_{\frac{1}{3}}) &= \frac{3+q-4q^2+q^3}{3(1+q-q^2)}, \\
C((1-q)\delta_1 + q\delta_{\frac{1}{4}}) &= \frac{4-3q+2q^2-q^4+4q^5-11q^6+7q^7-q^8}{4(1+q^3-q^4+2q^5-3q^6+q^7)}, \\
C((1-q)\delta_1 + q\delta_{\frac{1}{5}}) &= \frac{1}{5}(5+q-6q^2+11q^3-8q^4-7q^5+q^6+14q^7-23q^8+16q^9+23q^{10} \\
&\quad -68q^{11}+81q^{12}-68q^{13}+33q^{14}+28q^{15}-85q^{16}+90q^{17}-48q^{18}+12q^{19}-q^{20}) \\
&\quad \times (1+q-q^2+2q^3-3q^5+q^6+q^7-2q^8-q^9+10q^{10}-16q^{11}+12q^{12}-2q^{13}-11q^{14} \\
&\quad +23q^{15}-27q^{16}+19q^{17}-7q^{18}+q^{19})^{-1}.
\end{aligned}$$

2.4.2. Rationality in p for measures of the form $(1-p)\delta_m + p\delta_M$ for $0 < m < M$

In this subsection, we complete the proof of Theorem 2.1.9. To do so, we recall the notion of skeleton points from [FKP23], which are the renovation events used by Foss, Konstantopoulos and Pyatkin to prove the convexity of $m \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_1)$ and to characterize its points of non-differentiability for all $p \in (0, 1)$.

We consider $(X_{i,j})_{i < j \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. random variables with distribution $\nu = (1-p)\delta_m + p\delta_1$ with $m \leq 1$. An integer $n \in \mathbb{Z}$ is a *skeleton point on the left* if for every integer $k < n$, there exists a directed path from k to n made of edges with weight 1. Similarly, $n \in \mathbb{Z}$ is a *skeleton point on the right* if for every integer $k > n$, there exists a directed path from n to k made of edges with weight 1. A *skeleton point* is a skeleton point on the left and the right. In other words, $n \in \mathbb{Z}$ is a skeleton point if, for all $a < n < b$, there is a directed path of edges with weights 1 from a to n and a directed path of edges with weights 1 from n to b . Analogously, one could define the notion of skeleton points in other weighted directed acyclic graphs. We give an example of skeleton points for a complete graph with 6 vertices in Figure 2.9.

Remark 2.4.4. Notice that the renovation events that we use in Subsection 2.2.2, which consist in triangular words, precisely correspond to the skeleton points on the right when $\nu = (1-p)\delta_m + p\delta_1$ by Remark 2.2.8.

For $n_1 < n_2 \in \mathbb{Z}$, let W_{n_1, n_2} be the weight of a heaviest path between the vertices n_1 and n_2 as defined in (2.2). We also denote by $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ the sequence of all the skeleton points in \mathbb{Z} with the convention that $\dots < \Gamma_{-1} < \Gamma_0 \leq 0 < \Gamma_1 < \dots$. To prove Theorem 2.1.9 for all $m \in (0, 1]$, we use the following result from [FKP23]:

Proposition 2.4.5 ([FKP23, Proposition 4]). *For all $0 < m \leq 1$ and $p \in (0, 1]$,*

$$C((1-p)\delta_m + p\delta_1) = \gamma_{1-p}^2 \mathbb{E}[W_{\Gamma_1, \Gamma_2}],$$

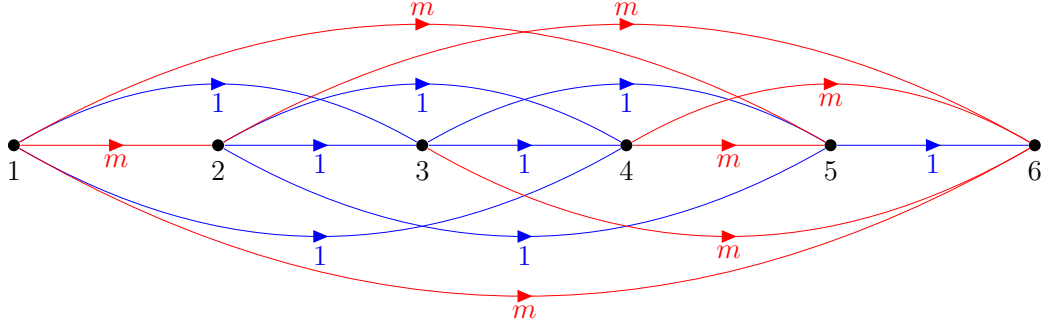


Figure 2.9 – Illustration of skeleton points in a graph with 6 vertices. The red edges have weights m , the blue ones have weights 1. In this graph, 2 is a skeleton point on the right, 4 is a skeleton point on the left, and 3 is a skeleton point.

where $\gamma_q = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ for all $q \in [0, 1[$.

By Proposition 2.4.5, we only need to study the expectation of the heaviest path between two consecutive skeleton points. For $n \in \mathbb{N}$, let \mathcal{SP}_n be the set of weights $(x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \in \{m, 1\}^{\binom{n}{2}}$ such that 1 and n are the only two skeleton points for those edge weights in a complete graph with n vertices. Let us consider $\mathcal{SP} := \cup_{n \geq 2} \mathcal{SP}_n$. For $x = (x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathcal{SP}$ and $\pi = (i_1, \dots, i_k)$ a directed path from $i_1 = 1$ to $i_k = n$, denote by $N_x(\pi) = |\{j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket : x_{i_j, i_{j+1}} = 1\}|$ and $\bar{N}_x(\pi) = |\{j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket : x_{i_j, i_{j+1}} = m\}|$ the respective numbers of edges with weights 1 and m in the path π , and denote by $w_x(\pi) = \sum_{c=1}^{k-1} x_{i_c, i_{c+1}}$ the weight of the path π . For π_{\max} a directed path from 1 to n maximising w_x , we set $N_x = N_x(\pi_{\max})$ and $\bar{N}_x = \bar{N}_x(\pi_{\max})$. With those notations, $W_{\Gamma_1, \Gamma_2} = N_{X'} + m\bar{N}_{X'}$, where $X' = (X_{i,j})_{\Gamma_1 \leq i < j \leq \Gamma_2}$.

In general, $N_{X'}$ and $\bar{N}_{X'}$ are not uniquely defined since there could be several ways to obtain the maximal weight in terms of the number of edges with weight 1 and m in a maximal path for fixed weights. Yet, it is possible to show that those two quantities are uniquely defined for all $0 < m \leq 1$ such that m is not the reciprocal of an integer greater or equal to 2. If

$$\mathbb{P}_{p,m}(N_{X'} \text{ and } \bar{N}_{X'} \text{ are not uniquely defined}) > 0$$

for some $p \in (0, 1)$, then m is called a *critical point*. It has been proved in [FKP23] that the positive critical points are all integers greater than 1 and their reciprocals:

Proposition 2.4.6 ([FKP23, Theorem 5]). *For $0 < m \leq 1$, m is critical if and only if $m = \frac{1}{k}$ for some integer $k \geq 2$.*

The proof of Proposition 2.4.6 from [FKP23] is based on a combinatorial analysis of the possible maximal paths between times Γ_1 and Γ_2 . To prove that the points $1/k$ for $k \geq 2$ are critical, it suffices to find some element of \mathcal{SP} for which the number of weights 1 and m in a maximal path is not uniquely defined at $m = 1/k$. For instance, if we consider the weights $(x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 5} \in \mathcal{SP}$ such that $x_{i,j} = 1$ if and only if $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\}$, then a heaviest path is $\pi^+ := (1, 2, 3, 4, 5)$ for

$m \geq 1/2$ and $\pi^- := (1, 2, 4, 5)$ for $m \leq 1/2$. This implies that $1/2$ is a critical point since $N_x(\pi^+) = 2$ and $N_x(\pi^-) = 3$. A similar argument can be used to prove that $1/k$ is critical for all $k \geq 2$. The fact that the other points are not critical requires a more precise analysis of the elements of \mathcal{SP} .

Since the probability that $X' = x$ is positive for all $x \in \mathcal{SP}$ and $p \in (0, 1)$, there is a deterministic definition of the critical points: m is a critical point if and only if there exists $x \in \mathcal{SP}$ and $\pi_1 = (i_1, \dots, i_d)$ and $\pi_2 = (j_1, \dots, j_r)$ two directed paths with $i_1 = j_1 = 1$ and $i_d = j_r = n$ such that $w_x(\pi_1) = w_x(\pi_2) = \max_{\pi} w_x(\pi)$ and $N_x(\pi_1) \neq N_x(\pi_2)$. With our notations, notice that $\max_{\pi} w_x(\pi) = N_x + m\bar{N}_x$.

In Subsection 2.4.1, we proved that $p \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_1)$ is a rational function for any critical point $0 < m < 1$. The following lemma enables us to extend this result to all $m \in (0, 1)$.

Lemma 2.4.7. *For any $k \in \mathbb{N}$ and $x \in \mathcal{SP}$, N_x and \bar{N}_x are constant functions of m on $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$.*

Proof. Consider an integer $k \geq 1$ and $x = x(m) \in \mathcal{SP}_n$ for some $n \in \mathbb{N}$. By Proposition 2.4.6, every element $m \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ is non-critical. Therefore, $N_{x(m)}$ and $\bar{N}_{x(m)}$ are well-defined for all $m \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. Let us fix c an element of $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ (for instance, $c := (\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k})/2$) and set

$$U_{x,c} = \left\{ m \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right) : N_{x(m)} = N_{x(c)} \text{ and } \bar{N}_{x(m)} = \bar{N}_{x(c)} \right\}.$$

To prove Lemma 2.4.7, let us show that $U_{x,c} = (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. We show that $U_{x,c}$ is non-empty, closed and open relatively to $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. The first point is clear since $c \in U_{x,c}$.

Firstly, let us show that $U_{x,c}$ is closed relatively to $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. If $(m_l)_{l \geq 1} \in (U_{x,c})^{\mathbb{N}}$ converges to some $m \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ as l tends to infinity, then $\max_{\pi} w_{x(m_l)}(\pi)$ converges to $\max_{\pi} w_{x(m)}(\pi)$ by continuity of $m \mapsto \max_{\pi} w_{x(m)}(\pi)$, where we take the max over all directed paths starting at 1 and ending at n . Since $m_l \in U_{x,c}$ for all $l \geq 1$, $\max_{\pi} w_{x(m_l)}(\pi) = N_{x(c)} + m_l \bar{N}_{x(c)}$, which converges to $N_{x(c)} + m \bar{N}_{x(c)}$ as l tends to infinity. Therefore, $\max_{\pi} w_{x(m)}(\pi) = N_{x(c)} + m \bar{N}_{x(c)}$. By the non-criticality of m and the definition of N and \bar{N} , we have proved that $m \in U_{x,c}$, since there is a path with $N_{x(c)}$ edges with weight 1 and $\bar{N}_{x(c)}$ edges with weight m in the sequence x . Then, $U_{x,c}$ is closed relatively to $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$.

Now, we prove that $U_{x,c}$ is open relatively to $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. By contradiction, let us assume there exists $m \in U_{x,c}$ and $(m_l)_{n \geq 1} \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})^{\mathbb{N}}$ such that m_l converges to m as l tends to infinity and such that $m_l \notin U_{x,c}$ for all $l \geq 1$. Since $N_{x(m_l)}$ and $\bar{N}_{x(m_l)}$ are bounded by the number of vertices in the graph with weights x , there is an extraction $(m_{\varphi(l)})_l$ of $(m_l)_l$ such that $(N_{x(m_{\varphi(l)})})$ and $(\bar{N}_{x(m_{\varphi(l)})})$ both converge. Let us denote their respective limits by n_0 and \bar{n}_0 . Since those sequences are integer-valued, they are equal to respectively n_0 and \bar{n}_0 for n large enough. Then, $\max_{\pi} w_{x(m)}(\pi) = n_0 + m \bar{n}_0$ by continuity of $m \mapsto \max_{\pi} w_{x(m)}(\pi)$. By definition of $N_{X'}$ and $\bar{N}_{X'}$, and since m is non-critical, we have $N_{x(m)} = n_0$ and $\bar{N}_{x(m)} = \bar{n}_0$, which contradicts the fact that $m_l \notin U_{x,c}$. As a consequence, $U_{x,c}$ is open relatively to $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$.

Since $U_{x,c}$ is open and closed relatively to $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ which is connected, $U_{x,c} = (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. Equivalently, $m \mapsto N_{x,m}$ and $m \mapsto \bar{N}_{x,m}$ are constant functions on $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. \square

Proof of Theorem 2.1.9. We consider an integer $k \geq 1$ and $p \in (0, 1)$. By Lemma 2.4.7, if $\Gamma_1 < \Gamma_2$ are the first two positive skeleton points, then $\mathbb{E}_{p,m}[N_{X'}]$ and $\mathbb{E}_{p,m}[\overline{N}_{X'}]$ are constant functions of m on $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ for fixed p . Therefore, by Proposition 2.4.5, if we set $f_{\frac{1}{k}}(p) = \gamma_{1-p}^2 \mathbb{E}_{p,c}[N_{X'}]$ and $g_{\frac{1}{k}}(p) = \gamma_{1-p}^2 \mathbb{E}_{p,c}[\overline{N}_{X'}]$ where $c = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})$, then

$$C((1-p)\delta_m + p\delta_1) = f_{\frac{1}{k}}(p) + m \cdot g_{\frac{1}{k}}(p) \quad (2.30)$$

for all $m \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$ and $p \in (0, 1)$. Since $m \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_1)$ is continuous on \mathbb{R} according to Theorem 2.1.3, (2.30) is also true for $m \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ and $p \in (0, 1]$. Therefore, considering (2.30) with $m = \frac{1}{k}$ and then with $m = \frac{1}{k+1}$, we get

$$\begin{cases} C((1-p)\frac{1}{k} + p\delta_1) &= f_{\frac{1}{k}}(p) + \frac{1}{k} \cdot g_{\frac{1}{k}}(p) \\ C((1-p)\frac{1}{k+1} + p\delta_1) &= f_{\frac{1}{k}}(p) + \frac{1}{k+1} \cdot g_{\frac{1}{k}}(p), \end{cases}$$

which is equivalent to

$$\begin{cases} f_{\frac{1}{k}}(p) &= (k+1) \cdot C((1-p)\frac{1}{k+1} + p\delta_1) - k \cdot C((1-p)\frac{1}{k} + p\delta_1) \\ g_{\frac{1}{k}}(p) &= k(k+1)(C((1-p)\frac{1}{k} + p\delta_1) - C((1-p)\frac{1}{k+1} + p\delta_1)). \end{cases} \quad (2.31)$$

By Proposition 2.4.1, $p \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_1)$ is a rational function for all $m = \frac{1}{k}$ with $k \geq 1$. Then, $f_{\frac{1}{k}}$ and $g_{\frac{1}{k}}$ are also rational functions on $(0, 1)$ by (2.31), which implies that $p \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_1)$ is rational on $(0, 1)$. By Theorem 2.1.6, this function is continuous at $p = 1$. Therefore, $p \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_1)$ is rational on $(0, 1]$. It remains to prove that $p \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_1)$ is rational at $p = 0$. Note that for every $p \in (0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in [0, 1]$, if $m := \frac{\lambda}{k} + \frac{1-\lambda}{k+1}$, then

$$C((1-p)\delta_m + p\delta_1) = \lambda C((1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1) + (1-\lambda)C((1-p)\delta_{\frac{1}{k+1}} + p\delta_1).$$

This is a consequence of the fact that (2.30) holds for every $m \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ and $p \in (0, 1]$. In addition, note that this last equality also holds for $p = 0$ since $C(\delta_m) = m$ for every $m \geq 0$. As a consequence, since $p \mapsto C((1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1)$ is rational on $[0, 1]$ for every $k \in \mathbb{N}$ by Proposition 2.4.1, one obtains that $p \mapsto C((1-p)\delta_m + p\delta_1)$ is rational on $[0, 1]$. \square

Since $C((1-p)\delta_{\frac{1}{k}} + p\delta_1)$ has been computed for $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ (c.f. Subsection 2.4.1), we obtain the following formulas for $f_{\frac{1}{k}}$ and $g_{\frac{1}{k}}$ by (2.31):

$$\begin{aligned} f_1(1-q) &= 1-q, & g_1(1-q) &= q, \\ f_{\frac{1}{2}}(1-q) &= \frac{(1-q)(1+q)}{1+q-q^2}, & g_{\frac{1}{2}}(1-q) &= \frac{q(1-q+q^2)}{1+q-q^2}, \\ f_{\frac{1}{3}}(1-q) &= \frac{(1-q)(1+q+q^3+2q^5-2q^6-q^7+q^8)}{(1+q-q^2)(1+q^3-q^4+2q^5-3q^6+q^7)} \\ g_{\frac{1}{3}}(1-q) &= \frac{q(1-q+q^2)(1+q^3-4q^4+5q^5-3q^6+q^7)}{(1+q-q^2)(1+q^3-q^4+2q^5-3q^6+q^7)}. \end{aligned}$$

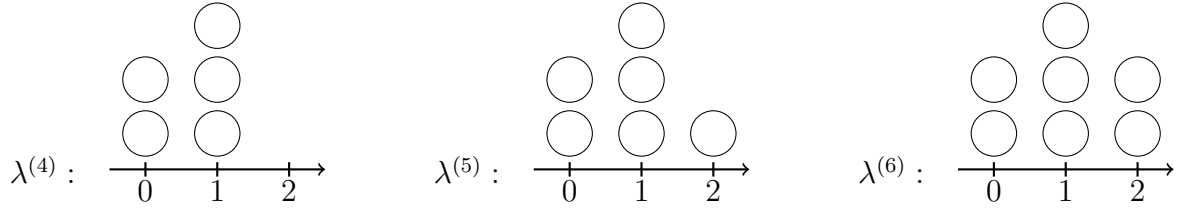


Figure 2.10 – Illustration of the case $\nu = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$. Here, $Y_4 = 3$, $Y_5 = 1$ and $Y_6 = 2$ with notations from the proof of Theorem 2.1.10. Knowing $\lambda^{(4)}$, the probability to obtain $\lambda^{(5)}$ as above is $1 - q^3$ since there are 3 front particles in $\lambda^{(4)}$.

One could also compute $f_{\frac{1}{4}}(p)$ and $g_{\frac{1}{4}}(p)$ using (2.31) and the formulas we give for $C((1 - p)\delta_{\frac{1}{4}} + p\delta_1)$ and $C((1 - p)\delta_{\frac{1}{5}} + p\delta_1)$. As a consequence, we get an explicit formula for $p \mapsto C((1 - p)\delta_m + p\delta_1)$, for $m \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ by (2.30).

Remark 2.4.8. By the rescaling property (2.4) and (2.30), $C((1 - p)\delta_m + p\delta_1) = g_{\frac{1}{k}}(1 - p) + m \cdot f_{\frac{1}{k}}(1 - p)$ for all $k \geq 2$ and $m \in [k, k + 1]$.

2.4.3. A formula for the time constant for measures of the form $\nu = (1 - p)\delta_0 + p\delta_M$

One can give an explicit formula for $p \mapsto C((1 - p)\delta_0 + p\delta_1)$. Dutta first found such a formula in [Dut20]. We give here an alternative proof of Theorem 2.1.10 via the coupling with the MGS with weights 0 and 1.

Proof of Theorem 2.1.10. By the rescaling property (2.4), it suffices to prove the result for $M = 1$.

We consider an MGS $(\lambda^{(n)})_{n \geq 0}$ with weight sequences $(X^{(n)})_{n \geq 0}$ with distribution $\nu = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$ and starting configuration $\lambda^{(0)} = \delta_0$. Since $X_i^{(n)} \in \{0, 1\}$ almost surely for all $n, i \in \mathbb{N}$, it is easy to show that $\lambda_i^{(n)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ almost surely and that (2.28) still holds in this case. Therefore,

$$m(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) = \lambda_1^{(n-1)} + \max_{i \in \llbracket 1, Y_{n-1} \rrbracket} X_i^{(n)}$$

where $Y_k = |\{i \in \llbracket 1, \lambda^{(k)}(\mathbb{R}) \rrbracket : \lambda_i^{(k)} = \lambda_1^{(k)}\}|$ for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (see Figure 2.10 for an illustration). Since $X_i^{(n)} \in \{0, 1\}$ almost surely, $\max_{i \in \llbracket 1, Y_{n-1} \rrbracket} X_i^{(n)} \in \{0, 1\}$ and $m(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) = \lambda_1^{(n)}$ almost surely for all $n \in \mathbb{N}$. Notice that $Y_n = 1$ if and only if the front's position moved from time $n - 1$ to time n . Then, for all $n \in \mathbb{N}$, we obtain

$$\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^{(n-1)} = \mathbb{1}_{Y_n=1}. \quad (2.32)$$

We consider \mathcal{F}_n the σ -algebra generated by $(X^{(k)})_{k \leq n}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Since Y_{n-1} is \mathcal{F}_{n-1} -measurable, Y_{n-1} and $X^{(n)}$ are independent by construction. As a consequence, it is easy to show that $(Y_n)_{n \geq 1}$ is a discrete-time Markov chain on \mathbb{N} with transitions $(p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ where $p_{i,i+1} = (1 - p)^i$ and $p_{i,1} = 1 - (1 - p)^i$. The result of Theorem 2.1.10 is trivial for $p = 1$. For $p \in (0, 1)$, this Markov chain is clearly irreducible.

Furthermore, a distribution π on \mathbb{N} is stationary if and only if

$$\begin{cases} \forall j \geq 2, \pi_j = \pi_{j-1}(1-p)^{j-1}, \\ \pi_1 = \sum_{j \geq 1} \pi_j(1 - (1-p)^j). \end{cases}$$

As a consequence, there is a unique stationary probability distribution π defined by

$$\pi_j = \frac{(1-p)^{\binom{j}{2}}}{\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{\binom{n}{2}}}$$

for all $j \in \mathbb{N}$, with the convention that $\binom{2}{n} = 0$ for every $n \leq 1$. By (2.32), $\lambda_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{Y_i=1}$. Then, by the ergodic theorem for Markov chains and (2.6), $C((1-p)\delta_0 + p\delta_1) = \pi_1$, which completes the proof. \square

Acknowledgements for Chapter 2

I warmly thank Sanjay Ramassamy and Arvind Singh for introducing me to the subject, for their constant support and guidance, and for their comments on the previous versions of this paper. We are thankful to the anonymous referee for their careful reading of the paper, and their various comments.

3 - Theoretical and numerical results on the time constant for a non-trivial class of weight distribution

Abstract

Let a and q be respectively a non-positive integer and a real number in $[0, 1]$, and consider the problem of last passage percolation on complete directed graphs in the case where the weights of the edges are equal to 1 or a with respective probabilities $p = 1 - q$ and q . In this chapter, we present both theoretical and numerical results on the time constant. First, we provide an analytic expression for the time constant obtained by studying the generating function of a particle system. Using renovation theory, we prove that the Taylor expansions of the time constants for last passage percolation with weights 1 and a and for the longest path in Barak-Erdős graphs coincide up to order $\binom{3-a}{2}$. In a second time, we present an efficient computation method for the Taylor expansion of the time constant for last passage percolation with weights 1 and a .

3.1. Introduction

Denote by $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ the set of non-positive integers. Consider $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $q \in [0, 1]$ and set the probability distribution

$$\nu_{a,q} := q\delta_a + (1 - q)\delta_1.$$

As in Chapter 2, we consider the problem of last passage percolation on the complete graph. However, in this chapter, we assume that edges' weights are distributed as $\nu_{a,q}$. More precisely, consider the graph with vertex set $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ and (directed) edges set $\{(i, j) : 0 \leq i < j\}$. Let $(X_{i,j})_{0 \leq i < j}$ be i.i.d. random variables with distribution $\nu_{a,q}$. For all $0 \leq i < j$, assign the weight $X_{i,j}$ to the edge (i, j) . We call *directed path* a sequence of integers $\pi = (i_1, \dots, i_k)$ such that $0 \leq i_1 < \dots < i_k$. The associated weight w_π of the path π is defined by

$$w_\pi := X_{i_1, i_2} + \dots + X_{i_{k-1}, i_k}.$$

The quantity we are interested in is the weight of a heaviest path starting at 0 and ending at n :

$$W_n := \max\{w_\pi : \pi = (i_1, \dots, i_k) \text{ is a directed path with } i_1 = 0 \text{ and } i_k = n\}. \quad (3.1)$$

Note that W_n satisfies the following super-additive property:

$$\forall 1 \leq n < m, W_n \geq W_m + W_{m,n},$$

where $W_{m,n}$ is the weight of an heaviest path from m to n , and has the same distribution as W_{n-m} . Therefore, by Kingman's sub-additive ergodic theorem¹ [Lig85b], there exists a deterministic constant $C(\nu_{a,q})$, called the *time constant for last passage percolation*, such that

$$\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} C(\nu_{a,q}). \quad (3.2)$$

The most interesting case in terms of applications is the case where $a = -\infty^2$. This case has known applications in applied mathematics on stability in queues [FK03], in biology on food chains [New92; NCS86], and in computer science on parallel computing [Gel+86; IN94]. In [FK03], Foss and Konstantopoulos computed the 5 first terms of the Taylor expansion of $q \mapsto C(\nu_{-\infty,q})$ at 0. In [MR21], Mallein and Ramassamy later computed the 17 first terms of this expansion (c.f. the sequence A321309 on the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences):

$$C(\nu_{-\infty,q}) = 1 - q + q^2 - 3q^3 + 7q^4 - 15q^5 + 29q^6 - 54q^7 + 102q^8 + O(q^9)$$

In addition, Mallein and Ramassamy proved that the coefficients of this expansion are integers. In [MR21], they also conjectured that the signs of those coefficients alternate, and that the absolute value of those coefficients are strictly increasing after the third term.

Another case that has been studied is the case where $a = 0$. In [Dut20], Dutta expressed the time constant in terms of an elliptic function in the case where $a = 0$: the Ramanujan theta function. Namely, for all $q \in [0, 1)$,

$$C(\nu_{0,q}) = \frac{1}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} q^{\binom{k}{2}}}. \quad (3.3)$$

Currently, there is no such closed expression known for values of a strictly less than 0. However, some results are known on the regularity of the time constant $C(\nu_{a,q})$ seen as a function of a and q . In [FKP23], it is proven that for all $q \in (0, 1)$, $a \mapsto C(\nu_{a,q})$ is a strictly convex function that is not differentiable at a if and only if a is a non-positive rational, a positive integer different than 1 or the reciprocal of a positive integer different than 1. As a consequence, one may not expect to obtain a formula for $a \in [-\infty, 0] \mapsto C(\nu_{a,q})$ in terms of usual functions. However, for every $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, the map $q \mapsto C(\nu_{a,q})$ is analytic on $[0, 1)$. This result was proved for the first time in [MR21] (for $q \in [0, 1/2)$) and [MR19] in the case where $a = -\infty$ using tools from extended renovation theory introduced by Foss and Konstantopoulos in [FK03]. In Chapter 2, we extended this analyticity result of the time constant in q for every value of $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ (c.f. Theorem 2.1.6).

The main goal of this chapter is to present theoretical and numerical results on the time constant $C(\nu_{a,q})$. We will then leverage those numerical results to obtain information on $C(\nu_{-\infty,q})$.

Let us now present the main results in the later sections of this chapter.

¹There are other conditions to be verified in order to apply the sub-additive ergodic theorem. However, those are easy to check in this case, since all the edges' weights are finite.

²Although it is less clear that the sub-additive ergodic theorem applies in this case since the expectation of the heaviest path may take the value $-\infty$, the time constant also exists in that case (see [FK03; FMS14]).

3.1.1. Theoretical results

We will prove that the problem of last passage percolation on the complete graph with weight distribution $\nu_{a,q}$ is equivalent to the study of a Markov chain on \mathbb{N}^N , where $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ and

$$N := 1 - a.$$

We call this Markov chain the *N-bin model*. Denote by $\mathcal{C}_N := \mathbb{N}^N$ the state space. The transition probabilities $(P_{x,y})_{x,y \in \mathcal{C}_N}$ of the *N-bin model* are defined as follows. For all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, consider e_i the i -th canonical basis vector of \mathbb{R}^N . Denote by σ_1 the map from \mathcal{C}_N to \mathcal{C}_N , such that

$$\forall y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathcal{C}_N, \sigma_1(y) = (y_2, \dots, y_N, 1).$$

For all $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathcal{C}_N$ and $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$, set

$$\begin{cases} P_{y, y+e_1}(q) & := q^{y_N + \dots + y_1}, \\ P_{y, y+e_i}(q) & := q^{y_N + \dots + y_i} (1 - q^{y_{i-1}}), \\ P_{y, \sigma_1(y)}(q) & := (1 - q^{y_N}). \end{cases} \quad (3.4)$$

If y' is not of the form $\sigma_1(y)$ or $y + e_i$ for some $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, set $P_{y, y'}(q) = 0$. We illustrate the dynamics of the *N-bin model* in Figure 3.9 with the notations from Section 3.2.1 in the case where $N = 2$.

The Markov chain with transition probabilities (3.4) is clearly irreducible, aperiodic and positive recurrent³. Therefore, there exists a unique stationary distribution $\pi(q) = (\pi_x(q))_{x \in \mathcal{C}_N}$ ⁴. The following Theorem 3.1.1 links last passage percolation with weight distribution $\nu_{a,q}$ and the *N-bin model*. It is a consequence of the coupling between the max growth system and last passage percolation, and of existence of the stationary distribution. We will prove this theorem in Section 3.2.3.

Theorem 3.1.1. *For every $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ and $q \in [0, 1)$,*

$$C(\nu_{a,q}) = \sum_{x \in \mathcal{C}_N} \pi_x(q) (1 - q^{x_N}). \quad (3.5)$$

Since the stationary distribution $(\pi_x(q))_{x \in \mathcal{C}_N}$ is not explicit, the formula (3.5) is not explicit either. Using analytic methods, we will obtain a formula for the time constant $C(\nu_{a,q})$:

Theorem 3.1.2. *For all $q \in [0, 1/N^2)$,*

$$C(\nu_{a,q}) = \frac{1}{1 + q \sum_{\gamma \in F_a} p_\gamma(e_N)}. \quad (3.6)$$

where F_a is the set of all finite sequences of element of E_a , E_a is a finite set with N^2 elements and $p_\gamma(e_N)$ is an explicit polynomial in q defined in Section 3.3.2 below (3.25).

³The fact that it is irreducible and positive recurrent comes from the fact that at any time, the state $(1, 1, \dots, 1)$ can be reached by repeating N times the last move described in (3.4), and each of those moves occurs with probability at least $1 - q$. Aperiodicity comes from the fact that the transition probability from $(1, 1, \dots, 1)$ to itself is positive.

⁴Note that $\pi(q)$ implicitly depends on a since the state space of this Markov chain is \mathcal{C}_N .

In Chapter 2, we obtained formulas for the time constants as sums over renovation events, which are implicitly defined. Unlike those formulas, the improvement of the formula from Theorem 3.1.2 is that the indexes of the sum in this new formula are explicit.

One can interpret Theorem 3.1.2 as follows. There exists a directed weighed graph which vertex set is $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ for which each $((i, j), n) \in E_a \times (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ corresponds to an edge (n, n') in the graph⁵. Assume that the weight of this edge (n, n') is given by the polynomial $p_{i,j}(n)$. A finite path in this graph consists in a finite sequence (n_1, \dots, n_l) such that (n_i, n_{i+1}) is an edge of this graph for all $i \in \llbracket 1, l-1 \rrbracket$. We consider that the weight of a path in that graph is defined as the product of its edges' weights. Then, the sum in (3.6) corresponds to the sum of the weights of all the finite paths in the graph starting at the vertex e_N .

Note that in the case where $a = 0$, there is only one edge going out of n for every n in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ in the graph presented in the heuristics. Its weight is $p_{1,0}(n) = q^{n+1}$ by (3.25). Therefore, there is only one path of length $l \geq 0$ starting at vertex 1 in this graph, and its weight is $q^{2+3+\dots+(l+1)} = q^{\binom{l+2}{2}-1}$. As a consequence, we recovers formula (3.3) first proved in [Dut20]. Unfortunately, for negative values of a , formula (3.6) does not simplify any further.

3.1.2. Numerical results

In this section, we present the numerical results obtained on the Taylor expansion of the time constant.

From now on, let us denote by $(b_{a,n})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ the terms in the Taylor expansion of $C(\nu_{a,q})$ at $q = 0$. Denote by r_a its radius of convergence at $q = 0$. Since $C(\nu_{a,q})$ is analytic on $(0, 1]$ for all $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ by Theorem 2.1.6, r_a is positive for all $a \leq 0$. Then, for all $q \in [0, r_a)$,

$$C(\nu_{a,q}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{a,n} q^n. \quad (3.7)$$

Using the renovation theory, we will prove that $q \mapsto \pi_x(q)$ is also analytic on $[0, 1)$ in Section 3.2.6 (see Lemma 3.2.8).

The last main result of this chapter is the algorithm to compute the coefficients of the Taylor expansion of $q \mapsto \pi_x(q)$ at $q = 0$ for all $x \in \mathcal{C}_N$ up to an arbitrary fixed order. By Lemma 3.2.8 and Theorem 3.1.1, this algorithm also provides the Taylor expansion $(b_{a,n})_{0 \leq n \leq k_0}$ of $q \mapsto C(\nu_{a,q})$ at $q = 0$ up to any arbitrary fixed order k_0 .

Using renovation events based methods, it is manageable to compute only about the 20 first coefficients for the time constant $C(\nu_{a,q})$ for every $a \leq -1$ due to the non-polynomial complexity of the algorithm. With this new method, for $a = -1, -2, -3$, we computed about 1000 coefficients for the Taylor expansion of the stationary distribution of every configuration and of the time constant. The first terms of the time constant's Taylor expansion are published on the OEIS (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) for $a = -1$ (A373089), $a = -2$ (A373090) et $a = -3$ (A373091). All our attempts

⁵With the notations from Section 3.3.2, $n' = \sigma_0^j(n) + e_i$.

to guess a formula for those integer sequences using tools such as the gfun package of Bruno Salvy and the superseeker from OEIS provided no significant result. Therefore, it seems unlikely that one of those time constants is rational in q , or that it satisfies a simple differential equation. The eleven first terms of the Taylor expansion of $C(\nu_{a,q})$ for $a \in \{0, -1, -2, -3\}$ are respectively given in (3.8), (3.9), (3.10) and (3.11).

$$C(\nu_{0,q}) = 1 - q + q^2 - 2q^3 + 3q^4 - 4q^5 + 5q^6 - 7q^7 + 10q^8 - 13q^9 + 16q^{10} + o(q^{10}), \quad (3.8)$$

$$C(\nu_{-1,q}) = 1 - q + q^2 - 3q^3 + 7q^4 - 15q^5 + 30q^6 - 60q^7 + 123q^8 - 254q^9 + 517q^{10} + o(q^{10}), \quad (3.9)$$

$$C(\nu_{-2,q}) = 1 - q + q^2 - 3q^3 + 7q^4 - 15q^5 + 29q^6 - 54q^7 + 102q^8 - 197q^9 + 376q^{10} + o(q^{10}), \quad (3.10)$$

$$C(\nu_{-3,q}) = 1 - q + q^2 - 3q^3 + 7q^4 - 15q^5 + 29q^6 - 54q^7 + 102q^8 - 197q^9 + 375q^{10} + o(q^{10}). \quad (3.11)$$

Note that the sequence of coefficients obtained in (3.8) corresponds to the sequence A006950. The n -th term of this sequence corresponds to the numbers of partitions the integer n into triangular numbers. This is an easy consequence of (3.3).

A first property that we observed is the fact that the coefficients of $C(\nu_{a,q})$ are the same as the coefficients of $C(\nu_{-\infty,q})$ up to order $\binom{3-a}{2} - 1$.

Proposition 3.1.3. *For every $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ and $0 \leq n < \binom{3-a}{2}$,*

$$b_{a,n} = b_{-\infty,n}.$$

Equivalently, for every $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$,

$$C(\nu_{a,q}) - C(\nu_{-\infty,q}) = O(q^{\binom{3-a}{2}}) \quad \text{when } q \text{ goes to } 0.$$

With this proposition and according to our numerical results, we will prove that the signs of the terms in the Taylor expansion for $a \leq -2$ does not alternate as conjectured by Mallein and Ramassamy (see the discussion bellow).

Denote by $(r_{a,n})_{n \geq 0}$ and $(l_{a,n})_{n \geq 0}$ the sequences respectively defined as the ratio of the consecutive terms of $(b_{a,n})_{n \geq 0}$ and the logarithm of the terms of $(|b_{a,n}|)_{n \geq 0}$. More precisely, for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$r_n = \frac{b_{a,n+1}}{b_{a,n}}, \quad l_n = \log(|b_{a,n}|). \quad (3.12)$$

In Figures 3.1, 3.3, 3.5 and 3.7, we present the plots of the ratios of consecutive coefficients $(r_{a,n})_n$ for $a = 0, -1, -2, -3$. In Figures 3.2, 3.4, 3.6 and 3.8, we represented the plots of $(l_{a,n})_n$ for $a = 0, -1, -2, -3$. Those numerical values reveal some surprising properties for those time constants. A first thing to note is the apparent change of behavior between the case $a = 0$, the case $a = -1$ and the cases $a \leq -2$. For $a = 0$, the ratio of consecutive coefficients seems to converge slowly to -1 (at speed $n^{1/2}$ according to our simulations). However, the convergence is much faster for $a = -1$. According to our simulations, it converges at exponential speed to some constant lying strictly between -0.49 and

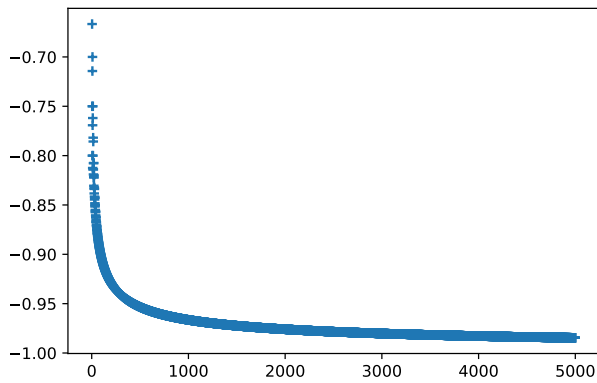


Figure 3.1 – Plots of $(r_{0,n})_n$ for n in $\llbracket 4, 5000 \rrbracket$

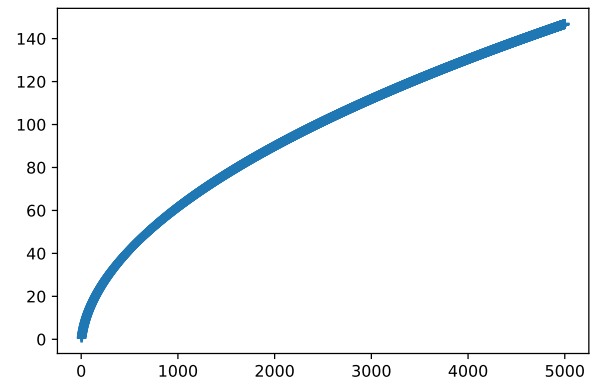


Figure 3.2 – Plots of $(l_{0,n})_n$ for n in $\llbracket 4, 5000 \rrbracket$

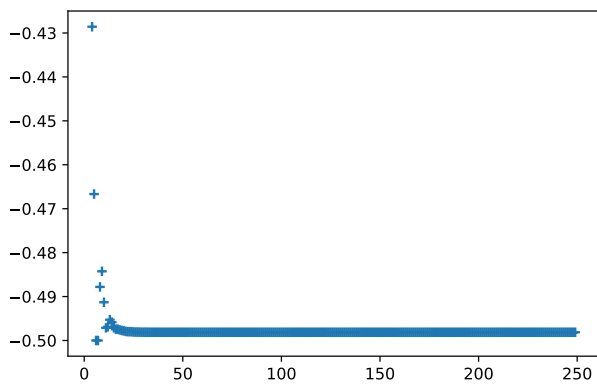


Figure 3.3 – Plots of $(r_{-1,n})_n$ for n in $\llbracket 4, 250 \rrbracket$

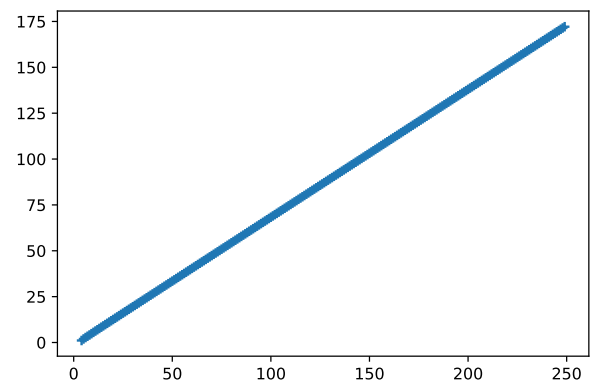


Figure 3.4 – Plots of $(l_{-1,n})_n$ for n in $\llbracket 4, 250 \rrbracket$

-0.5 . For the other values of a , it seems that the ratio of consecutive terms does not converges. In addition, the plots of $(r_{a,n})_n$ for $a = -2$ and $a = -3$ look like the evaluation of some periodic function on the set of positive integers (see Figures 3.5 and 3.7). According to our numerical results, the period of that hypothetical function seems to be comprised between 39 and 40 for $a = -2$ and between 28 and 29 for $a \leq -3$.

Another striking property concerns the sign of those coefficients. In [MR21], Mallein and Ramassamy conjectured that the sequence $((-1)^n b_{a,n})_{n \geq 0}$ is non-negative and non-decreasing in the case where $a = -\infty$. By (3.3), it is known that this conjecture holds for $a = 0$. By our computations, this conjecture seems to hold for $a = -1$. However, it is not the case for $a \leq -2$ according to those new simulations. See Figures 3.5 and 3.7 for an illustration in the case where $a = -2$ and $a = -3$: the ratio of consecutive terms $(r_{a,n})_{n \geq 0}$ takes positive values, which indicates that some consecutive terms in the sequence $(b_{a,n})_{n \geq 0}$ have the same sign. For every values of $a \in \llbracket -6, -3 \rrbracket$, our numerical simulations reveals that

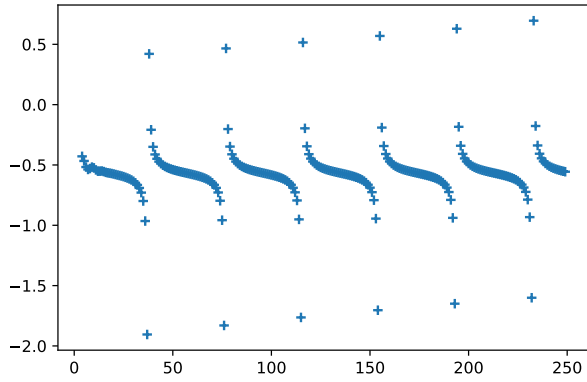


Figure 3.5 – Plots of $(r_{-2,n})_n$ for n in $\llbracket 4, 250 \rrbracket$

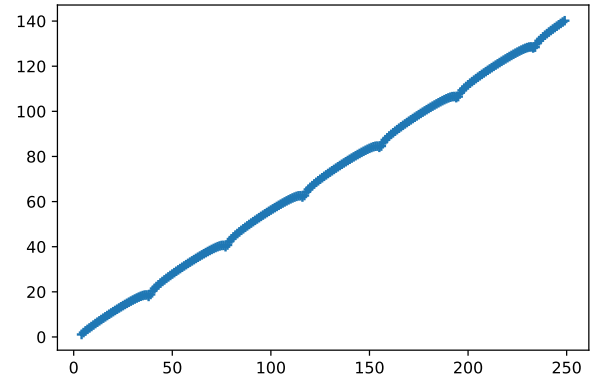


Figure 3.6 – Plots of $(l_{-2,n})_n$ for n in $\llbracket 4, 250 \rrbracket$

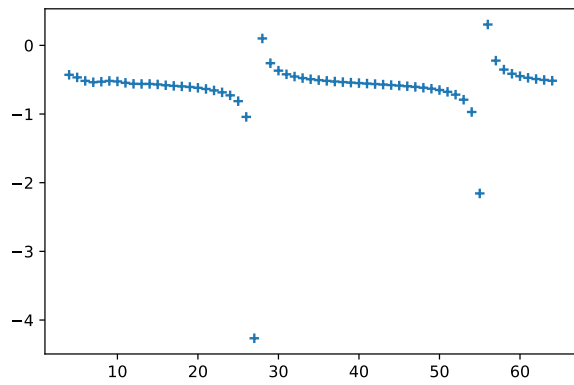


Figure 3.7 – Plots of $(r_{-3,n})_n$ for n in $\llbracket 4, 65 \rrbracket$

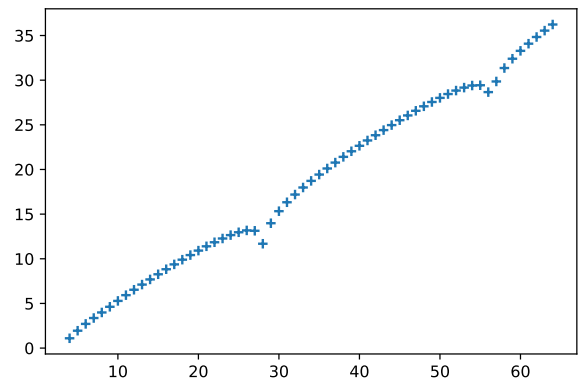


Figure 3.8 – Plots of $(l_{-3,n})_n$ for n in $\llbracket 4, 65 \rrbracket$

$b_{a,27}$ and $b_{a,28}$ are both negative. As a consequence, since $28 < \binom{3-a}{2}$ for $a = -6$, the fact that $b_{a,27}$ and $b_{a,28}$ are both negative holds for all $a \leq -3$ by Proposition 3.1.3. In addition, with the first terms of $(b_{a,n})_{n \geq 0}$ for $a \in \llbracket -6, -2 \rrbracket$ and by Proposition 3.1.3, $(|b_{-\infty,n}|)_{n \geq 0}$ is not non-decreasing (see Figures 3.6 and 3.8 for an illustration in the case where $a = -2$ and $a = -3$). This refutes the conjecture of Mallein and Ramassamy on the non-negativity and monotony of the sequence $((-1)^n b_{-\infty,n})_{n \geq 0}$.

Those numerical data bring to light several new questions about this model:

- How can we prove that the signs of the terms in the Taylor expansion of the time constant alternate in the case where $a = -1$?
- Why does the Taylor expansion of the time constant behave differently in the case $a = -1$ and the case $a \leq -2$?
- Why does the ratio of its consecutive terms looks like the plot of a periodic function with poles when $a \leq -2$?
- Can we use this information to obtain a nice formula (such as a closed form expression) for the time constant for $a \leq -1$?

Organization of the chapter In Section 3.2, we will prove the equivalence between the N -bin model and the max growth system which is equivalent to the problem of last passage percolation on complete graphs. In particular, we will prove Theorem 3.1.1 in this section. Then, using the renovation events introduced in Chapter 2 for the max growth system, we will prove that the stationary probability of each configuration is analytic in q on $[0, 1)$ (see Lemma 3.2.8) and Proposition 3.1.3.

In Section 3.3, we will prove the new formula (3.6) for the time constant: first, we will prove that the generating function of the stationary distribution of the N -bin model satisfies a functional equation. Then, with this functional equation, we will prove Theorem 3.1.2.

In Section 3.4, we will present our algorithm to compute the Taylor expansion of the stationary probability for all the configurations of bins up to a fixed order. In particular, we will prove that this algorithm terminates and has a polynomial computational complexity.

3.2. The N -bin model and renovation theory

In [Fos+23a], a coupling between last passage percolation on complete directed acyclic graphs with general weight measures and a particle system called the max-growth system (MGS) is introduced. In the case where $a = -\infty$, this particle system is equivalent to the infinite bin model introduced in [FK03]. In the case where a is a non-positive integer, the max-growth system can also be seen as a similar model, which corresponds to the N -bin model presented in the introduction. We will see that the N -bin model can be seen as a particle system which dynamics is exactly the same as for the infinite bin model, except we will assume that, at all time, there is an infinite number of particles in the bin at distance N of the front, where $N := 1 - a$.

This section is articulated as follows. In Section 3.2.1, we give an interpretation of the N -bin model as a particle system. After introducing the MGS in Section 3.2.2, we prove the equivalence of the MGS and N -bin model in Section 3.2.3. In particular, we prove Theorem 3.1.1 in Subsection 3.2.3. Afterward, we recall the renovation events from Chapter 2 in Section 3.2.4. Using those renovation events, we prove Proposition 3.1.3 and the Lemma 3.2.8 respectively in Sections 3.2.5 and 3.2.6.

3.2.1. The N -bin model seen as a particle system

The N -bin model defined as the Markov chain with transition probabilities (3.4) has an interpretation in terms of particle system. Represent a configuration Y in \mathcal{C}_N as N bins indexed from 1 to N , where Y_i is the number of particles in the i -th bin. Consider $Y^{(0)} \in \mathcal{C}_N$ an initial configuration of bins, and let us construct $(Y^{(n)})_{n \geq 0}$ as follows. Consider $(\xi_n)_{n \geq 0}$ i.i.d. random variables with geometric distribution on \mathbb{N} with parameter $1 - q$. By induction, one obtains $Y^{(n)}$ from $Y^{(n-1)}$ as follows. Consider the ξ_n -th rightmost particle in the configuration $Y^{(n-1)}$ and denote by $j_n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ the index of the bin containing this particle. If $j_n = N$, then add a bin containing 1 particle on the right of the configuration and delete the leftmost bin. Otherwise, add a particle in the $(j_n + 1)$ -th bin. If there is less than ξ_n particles in $Y^{(n-1)}$, add a particle in the leftmost bin.

More precisely, for all $i \in \mathbb{N}$ and $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathcal{C}_N$, set

$$\Psi_i(y) = \begin{cases} \sigma_1(y) & \text{if } i \leq y_N, \\ y + e_i & \text{if } \sum_{k=j}^N y_k < i \leq \sum_{k=j-1}^N y_k \text{ for some } j \in \llbracket 2, N \rrbracket \\ y + e_1 & \text{if } i > \sum_{k=1}^N y_k. \end{cases} \quad (3.13)$$

Then, if we have $Y^{(n)} = \Psi_{\xi_n}(Y^{(n-1)})$ for all $n \in \mathbb{N}$, $(Y^{(n)})_{n \geq 0}$ is a Markov chain with transitions given in (3.4). See Figure 3.9 for an illustration of this particle system in the case where $N = 2$.

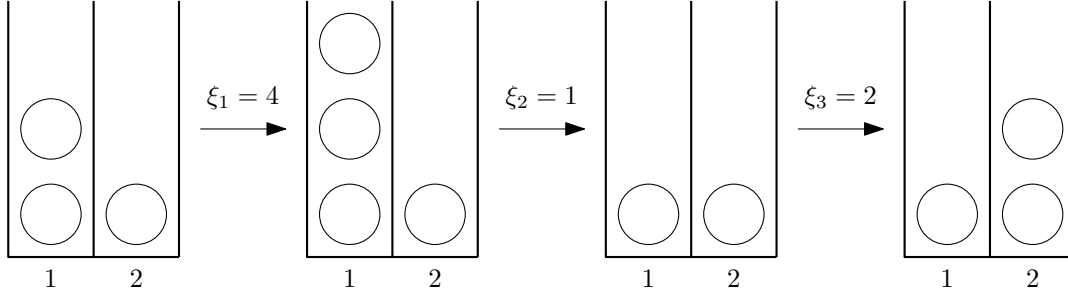


Figure 3.9 – Illustration of the 2-bin model. With the notations from Section 3.2.1, assume that $Y^{(0)} = (2, 1)$ and that $\xi_1 = 4$, $\xi_2 = 1$ and $\xi_3 = 2$. Then, $Y^{(1)} = (3, 1)$ since there is less than 4 particles in $Y^{(0)}$. At the next step, $\xi_2 = 1$. Since the 1-st rightmost particle is in the rightmost bin, we add a bin containing one particle on the right and we delete the rightmost bin: $Y^{(2)} = (1, 1)$. At the third step, the second rightmost particle is bin 1. Therefore, we add a particle in bin 2: $Y^{(3)} = (1, 2)$.

3.2.2. The max growth system

As in Chapter 2, let us first recall the notations of the MGS. We consider \mathcal{N} the set of atomic measures λ on $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ taking values in \mathbb{Z}_+ and such that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda([t, +\infty)) < +\infty.$$

An element of \mathcal{N} represents a configuration of particles on the real line in the following sense: if we consider $\lambda \in \mathcal{N}$ and $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda(A)$ represents the number of particles with positions in A in the configuration λ . For instance, $\delta_{-1} + 2\delta_0$ is an element of \mathcal{N} . It corresponds to the configuration with one particle at position -1 and two at position 0 .

For $\lambda \in \mathcal{N}$, denote by $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ the positions of the particles in λ in decreasing order (with repetitions). For example, $\lambda = \delta_{-1} + 2\delta_0$, we have $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ and $\lambda_3 = -1$. Notice that $\lambda(\mathbb{R})$ is the number of particles in the configuration λ .

We set $\mathcal{W} = (\{-\infty\} \cup \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ to be the set of weights sequences. For $x = (x_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{W}$ and $\lambda \in \mathcal{N}$, we set

$$m(\lambda, x) = \max_{1 \leq i \leq \lambda(\mathbb{R})} (\lambda_i + x_i).$$

The deterministic dynamics of the MGS is defined as follows: the weights sequence x applied to the configuration λ adds a particle to λ at position $m(\lambda, x)$. One may interpret this dynamics as follows: the i -st rightmost particle in λ with position λ_i proposes to add the new particule at position $\lambda_i + x_i$. Then, we set $\Phi_x(\lambda)$ to be a copy of the configuration λ with an additional particle which position corresponds to the maximum of the proposed positions. More precisely, for all $x \in \mathcal{W}$, we define the map $\Phi_x : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ such that for all $\lambda \in \mathcal{N}$,

$$\Phi_x(\lambda) = \lambda + \delta_{m(\lambda, x)}.$$

See Figure 2.2 for an example.

An MGS with starting configuration $\lambda^{(0)} \in \mathcal{N}$ and weight distribution ν is a process $(\lambda^{(n)})_{n \geq 0}$ taking values in \mathcal{N} such that $\lambda^{(n+1)} = \Phi_{X^{(n+1)}}(\lambda^{(n)})$ for all $n \in \mathbb{Z}_+$, where $X^{(n)} := (X_i^{(n)})_{i \geq 1}$ for all $n \in \mathbb{Z}_+$, and where $(X_i^{(n)})_{(i,n) \in \mathbb{N}^2}$ are i.i.d. random variables with distribution ν .

3.2.3. From the MGS to the N -bin model

Now, let us construct the mapping from the MGS to the N -bin model. First, let us prove some properties of the MGS with weight distribution $\nu_{a,q}$.

Lemma 3.2.1. *Consider an integer $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ and a starting configuration $\lambda^{(0)}$ such that all the particles have integer valued positions, namely, $\lambda^{(0)}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$. Consider $(X_j^{(n)})_{n,j \in \mathbb{N}}$ i.i.d. random variables with distribution $\nu_{a,q}$. Set $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ to be the MGS defined by $\lambda^{(n)} = \Phi_{X^{(n)}}(\lambda^{(n-1)})$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then, for all $n \in \mathbb{Z}_+$, if $k_n = |\{i \in \llbracket 1, \lambda^{(n)}(\mathbb{R}) \rrbracket : \lambda_i^{(n)} > \lambda_1^{(n)} - N\}|$ is the number of particles at distance less than $N = 1 - a$ from the front at time n , the position of the particle added between times n and $n + 1$ is*

$$m(\lambda^{(n)}, X^{(n+1)}) = \max_{i \in \llbracket 1, k_n \rrbracket} (\lambda_i^{(n)} + X_i^{(n+1)}). \quad (3.14)$$

As a consequence, almost surely, for all $n \in \mathbb{N}$,

C.1 All particles have integer valued positions: $\lambda_j^{(n)} \in \mathbb{Z}$ for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $j \in \llbracket 1, \lambda^{(n)}(\mathbb{R}) \rrbracket$.

C.2 The dynamics of the MGS at each step depends only on the particles at a distance less than N from the front.

C.3 The position $m(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)})$ of the new particle at time n verifies:

$$m(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) - \lambda_1^{(n-1)} \in \{a, a + 1, \dots, 0, 1\}.$$

C.4 There is a particle at each position between the front positions at time 0 and n for all $n \geq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall k \in \llbracket \lambda_1^{(0)}, \lambda_1^{(n)} \rrbracket, \lambda^{(n)}(\{k\}) \geq 1.$$

Proof. Let us prove point (3.14). To do so, it suffices to prove that for every $n \in \mathbb{N}$ and $i > k_n$,

$$\lambda_i^{(n)} + X_i^{(n+1)} \leq \lambda_1^{(n)} + X_1^{(n+1)}.$$

Since $a \leq X_i^{(n+1)} \leq 1$ for all $i \geq 1$,

$$\lambda_i^{(n)} + X_i^{(n+1)} \leq \lambda_i^{(n)} + 1 \quad \text{and} \quad \lambda_1^{(n)} + a \leq \lambda_1^{(n)} + X_1^{(n+1)}.$$

By definition of k_n , and since $N = 1 - a$,

$$\lambda_i^{(n)} + 1 \leq \lambda_1^{(n)} + a$$

for every $i > k_n$, which concludes the proof of point (3.14).

Point C.1 is a simple consequence of the fact that $\lambda^{(0)}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$ and of the fact that $X_i^{(n)} \in \{1, a\} \subseteq \mathbb{Z}$. Point C.2 is an interpretation of (3.14). Point C.3 is a consequence of (3.14), C.1 and the fact that $X_i^{(n)} \in \{1, a\}$ for all $i, n \geq 1$. Point C.4 is a consequence of point C.3 since the front's position increase by 0 or 1 at each step. \square

By Lemma 3.2.1, the dynamics of the MGS with distribution of the weights $\nu_{a,q}$ depends only on the particles with integer positions at distance less than N from the front. Therefore, one can reduce this particle system to a model with N bins, which corresponds to the N greatest integer position at which there are particle in the MGS. Now, let us check that the bin model obtained is an N -bin model as described in the introduction, i.e a Markov chain with transition probabilities (3.4).

Lemma 3.2.2. *Consider a MGS $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ with the same hypothesis as in Lemma 3.2.1 for $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Assume that there is at least a particle in each bin at distance less than N from the front at time 0, namely $\lambda_k^{(0)}(\{i\}) \geq 1$ for all $i \in \llbracket \lambda_1^{(0)} - N + 1, \lambda_1^{(0)} \rrbracket$.*

For all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, set $Y^{(n)} := (Y_1^{(n)}, \dots, Y_N^{(n)})$, where for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $Y_i^{(n)}$ is the number of particles at distance $N - i$ of the front's position, namely $Y_i^{(n)} = \lambda^{(n)}(\{\lambda_1^{(n)} - N + i\})$. Then, $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ is a N -bin model. In addition,

$$C(\nu_{a,q}) = \mathbb{E}_{\pi(q)} \left[1 - q^{Y_N^{(0)}} \right], \quad (3.15)$$

where $\pi(q)$ is the unique stationary distribution of the N -bin model and $\mathbb{E}_{\pi(q)}$ is the expectation on the probability space where $Y^{(0)}$ is distributed as $\pi(q)$.

Proof. Let us check that the bin model $(Y^{(n)})_{n \geq 0}$ is a Markov chain with transition probabilities defined in (3.4). By the point C.4 of Lemma 3.2.1 and by hypothesis on $Y^{(0)}$, note that $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ takes values in \mathcal{C}_N .

Set $\xi_n := \min\{i \in \mathbb{N} : X_i^{(n)} = 1\}$ for all $n \geq 0$. Note that $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are i.i.d. random variables with geometric distribution on \mathbb{N} with parameter $1 - q$ since $(X_i^{(n)})_{i, n \in \mathbb{N}}$ are i.i.d and are equal to 1 with probability $1 - q$. In order to prove that $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ is a N -bin model, by Section 3.2.1, it suffices to prove that for all $n > 0$,

$$\Psi_{\xi_n}(Y^{(n-1)}) = Y^{(n)},$$

since $Y^{(0)}$ is independant of $(\xi_n)_{n \geq 1}$. Let us now prove this fact.

According to point C.3 of Lemma 3.2.1, the only case when the front's positions in the MGS are different between times $n - 1$ and n is when $\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) = \lambda_1^{(n)} + 1$. In that case, $Y^{(n)} = \sigma_1(Y^{(n-1)})$ by construction. In the case where the front's positions at time $n - 1$ and n are the same, then $\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, X^{(n)}) = \lambda_1^{(n)} + k - N$ for some $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ by point C.3 of Lemma 3.2.1. By construction, in that case, $Y^{(n)} = Y^{(n-1)} + e_k$. Therefore, one obtains that for all $n \in \mathbb{N}$, $Y^{(n)} = \Psi_{\xi_n}(Y^{(n-1)})$. Since $(\xi_n)_{n \geq 1}$ are i.i.d. random variables with geometric distribution on \mathbb{N} with parameter $1 - q$, $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ is a Markov chain with transition probabilities given by (3.4).

Equation (3.15) is a consequence of the coupling property Proposition 2.2.1 and (2.6). By the coupling property, the front's position rescaled by the time n converges to the time constant $C(\nu_{a,q})$ as n goes to infinity. Since the front's position is increasing only when a transition of the type $P_{y,\sigma_1(y)}(q)$ occurs according to point C.3 of Lemma 3.2.1, and that it increase by 1 in that case, one obtains (3.15). \square

The proof of Theorem 3.1.1 is now straightforward:

Proof of Theorem 3.1.1. It suffices to apply the law of total probabilities on $Y^{(0)}$ in (3.15) from Lemma 3.2.2. \square

3.2.4. Renovation events for the N -bin model

In Chapter 2, we give a formula for $C(\nu_{a,q})$ in terms of the expectation of the difference of the front's positions between two renovation times (see Proposition 2.3.7). In this subsection, we give an analog of this result for the N -bin model (see the following Proposition 3.2.4).

A *word* is defined as a finite sequence of positive integers. Let $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{N}^n$ denote the set of all words. For $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{A}$, $|\alpha| := n$ is the *length* of the word α . Denote by $\mathcal{T} = \{\alpha \in \mathcal{A} : \forall i \in \llbracket 1, |\alpha| \rrbracket, \alpha_i \leq i\}$ the set of all *triangular words*. For every word $\alpha \in \mathcal{A}$ of size $n \in \mathbb{N}$, set $\Psi_\alpha = \Psi_{\alpha_n} \circ \dots \circ \Psi_{\alpha_1}$.

Recall that $\mathcal{W} := (\{-\infty\} \cup \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. For every $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) \in \mathcal{W}^l$, the word $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_l(x))$ is defined by $\alpha_i(x) = \inf\{j \in \mathbb{N} : x_j^{(i)} = 1\}$ for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$.

An important feature of those triangular words is that they are renovation events in the sense of Lemma 3.2.3.

Lemma 3.2.3. *For all $l \in \mathbb{N}$, $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{Z}_{<0}$ and $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) \in (\{1, a\}^{\mathbb{N}})^l$ such that $\alpha(x) \in \mathcal{T}$, the quantity $\mathfrak{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(l-1)})}(\lambda), x^{(l)}) - \lambda_1$ depends only on $\alpha(x)$. In particular, it does not depend on the configuration λ . In addition, $\mathfrak{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)})}(\lambda), x^{(i)}) - \lambda_1 \geq 1$ for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$.*

Proof. This lemma is a simple consequence of Lemma 2.2.5 from Chapter 2. Note that the quantity $\mathfrak{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(l-1)})}(\lambda), x^{(l)}) - \lambda_1$ does not depend on $(x_j^{(i)})_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket, j \in \llbracket 1, \alpha_i(x) - 1 \rrbracket}$ since all those $x_j^{(i)}$ are equal to a . \square

Proposition 3.2.4. *Consider a MGS λ with weight distribution $\nu_{a,q}$ and set*

$$\xi_n := \inf\{i \in \mathbb{N}, X_i^{(n)} = 1\}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Let $T_1 < T_2 < \dots$ be the enumeration of the elements of

$$\mathcal{R} = \{n \in \mathbb{N} : \forall i \in \mathbb{N}, \xi_{n+i-1} \leq i\}.$$

Then,

$$C(\nu_{a,q}) = \gamma_q \mathbb{E}[\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)}], \quad (3.16)$$

where $\gamma_q := \prod_{k \geq 1} (1 - q^k)$ for all $q \in [0, 1)$.

Proof. This proposition is a simple consequence of Proposition 2.3.7 from Chapter 2. \square

With Lemma 3.2.3 and Proposition 3.2.4, let us give a formula for $C(\nu_{a,q})$ in terms of renovation events.

By Lemma 3.2.3, the front's position difference between configurations $\lambda^{(0)}$ and $\Phi_x(\lambda^{(0)})$ depends only on $\alpha(x)$ for all $l \in \mathbb{N}$ and $x \in (\{1, a\}^{\mathbb{N}})^l$ such that $\beta := \alpha(x) \in \mathcal{T}$. Let us denote by $L_a(\beta)$ this front's position difference. Namely, for all $l \in \mathbb{N}$ and all $\beta \in \mathcal{T}$ with $|\beta| = l$, set

$$L_a(\beta) := \max_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket} \left(\mathfrak{m}(\Phi_{(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}(\lambda), x^{(l)}) - \lambda_1 \right)$$

where λ is any configuration in \mathcal{N} and $x \in \mathcal{W}^l$ is such that $\alpha(x) = \beta$ and $x_j^{(i)} \in \{1, a\}$ for all $(i, j) \in \llbracket 1, l \rrbracket \times \mathbb{N}$ (take for instance $x_j^{(i)} = 1$ if and only if $j \geq \beta_i$ for all $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$).

Recall that a word $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ is minimal triangular if it belongs to \mathcal{T} and if $(\beta_i, \dots, \beta_l)$ does not belong to \mathcal{T} for every $i \in \llbracket 2, l \rrbracket$. By Proposition 3.2.4, one obtains the following formula for $C(\nu_{a,q})$.

Proposition 3.2.5. For all $q \in [0, 1)$ and $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$,

$$C(\nu_{a,q}) = \gamma_q \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} q^{H(\beta)} (1 - q)^{|\beta|} L_a(\beta), \quad (3.17)$$

where $H(\beta) = \sum_{i=1}^{|\beta|} (\beta_i - 1)$ is called the height of the word β , and \mathcal{T}_m is the set of minimal triangular words.

Proof. Note that $\alpha((X^{(i)}, \dots, X^{(j)})) = (\xi_i, \dots, \xi_j)$ with the notations of Proposition 3.2.4. By definition of T_1 and $T_2, (\xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_2-1}) \in \mathcal{T}_m$. By the law of total probability, (3.16) re-writes as

$$C(\nu_{a,q}) = \gamma_q \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} \mathbb{P}((\xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_2-1}) = \beta) \mathbb{E} \left[\lambda_1^{(T_2-1)} - \lambda_1^{(T_1-1)} \middle| (\xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_2-1}) = \beta \right].$$

By Lemma 3.2.3, $\mathbb{E} \left[\lambda^{(T_2-1)} - \lambda^{(T_1-1)} \middle| (\xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_2-1}) = \beta \right]$ is equal to $L_a(\beta)$. A simple computation gives that $\mathbb{P}((\xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_2-1}) = \beta)$ is equal to $q^{H(\alpha)} (1 - q)^{|\beta|}$ since $(\xi_n)_{n \geq 1}$ are i.i.d. geometric random

variables with parameter $1 - q$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}((\xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_2-1}) = \beta) \\
&= \sum_{1 \leq t} \mathbb{P}(((\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_1+|\beta|-1}) = \beta) \cap (T_1 = t_1) \cap (T_2 = t_1 + |\beta|)) \\
&= \sum_{t_1 \geq 1} \mathbb{P}(((\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_1+|\beta|-1}) = \beta) \cap (\forall t \in \llbracket 1, t_1 - 1 \rrbracket, (\xi_t, \dots, \xi_{t-1}) \notin \mathcal{T}) \cap (\xi_{t_1+|\beta|}, \dots) \in \mathcal{T}) \\
&= q^{H(\alpha)}(1 - q)^{|\beta|} \sum_{t_1 \geq 1} \mathbb{P}(\forall t \in \llbracket 1, t_1 - 1 \rrbracket, (\xi_t, \dots, \xi_{t-1}) \notin \mathcal{T}) \mathbb{P}((\xi_{t_1+|\beta|}, \dots) \in \mathcal{T}) \\
&= q^{H(\alpha)}(1 - q)^{|\beta|} \sum_{t_1 \geq 1} \mathbb{P}(\forall t \in \llbracket 1, t_1 - 1 \rrbracket, (\xi_t, \dots, \xi_{t-1}) \notin \mathcal{T}) \mathbb{P}((\xi_{t_1}, \dots) \in \mathcal{T}) \\
&= q^{H(\alpha)}(1 - q)^{|\beta|} \sum_{t_1 \geq 1} \mathbb{P}(T_1 = t_1) \\
&= q^{H(\alpha)}(1 - q)^{|\beta|}.
\end{aligned}$$

Therefore, one obtains (3.17). \square

Remark 3.2.6. Note that formula (3.17) provides a way to compute the Taylor expansion of $C(\nu_{a,q})$ around $q = 0$ up to any fixed order k_0 . To compute those coefficients, it suffices to compute all the triangular words α with height at most k_0 and to compute $L_a(\alpha)$ for all those α . However, this method is not efficient since the number of such words growth exponentially with the order.

3.2.5. Proof of Proposition 3.1.3

By Proposition 3.2.5, it suffices to prove that $L_a(\beta) = L_{-\infty}(\beta)$ for all $\beta \in \mathcal{T}_m$ such that $H(\beta) < \binom{3-a}{2}$: Assume that this holds, then by Proposition 3.2.5 and the fact that $L_a(\beta) < |\beta|$ for every word β and every $a \leq 0$,

$$|C(\nu_{a,q}) - C(\nu_{-\infty,q})|q^{-\binom{3-a}{2}} \leq 2 \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{T}_m \\ H(\beta) \geq \binom{3-a}{2}}} q^{H(\beta) - \binom{3-a}{2}}(1 - q)^{|\beta|}|\beta|$$

We need to prove that this quantity is bounded on a neighborhood of $q = 0$. Fix a positive $q_0 \in (0, 1)$ that we will adjust later and consider $0 \leq q < q_0$. By the previous inequality,

$$\begin{aligned}
|C(\nu_{a,q}) - C(\nu_{-\infty,q})|q^{-\binom{3-a}{2}} &\leq 2 \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{T}_m \\ H(\beta) \geq \binom{3-a}{2}}} q_0^{H(\beta) - \binom{3-a}{2}}(1 - q)^{|\beta|}|\beta| \\
&\leq 2q_0^{-\binom{3-a}{2}} \sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} q_0^{H(\beta)}(1 - q_0)^{|\beta|} \left(\frac{1 - q}{1 - q_0}\right)^{|\beta|} |\beta| \\
&\leq 2q_0^{-\binom{3-a}{2}} \mathbb{E}_{1-q_0} \left[\left(\frac{1 - q}{1 - q_0}\right)^{T_{\text{past}}} T_{\text{past}} \right] \\
&\leq 2q_0^{-\binom{3-a}{2}} \mathbb{E}_{1-q_0} \left[\left(\frac{1}{1 - q_0}\right)^{T_{\text{past}}} T_{\text{past}} \right],
\end{aligned}$$

where T_{past} is the quantity defined in Chapter 2 in the proof of Proposition 2.2.13 which distribution depends only on q_0 , and \mathbb{E}_{1-q_0} corresponds to the expectation where the weight distribution is $\nu_{a,q}$. By Theorem 2.3.1, there exists $r_{1-q_0} > 1$ and a constant c such that $\mathbb{P}(T_{\text{past}} > k) \sim c(r_{1-q_0})^{-(k+1)}$ as k goes to infinity. In addition, r_{1-q_0} is defined as the only element r between 1 and q_0^{-1} such that $\sum_{k=0}^{\infty} (rq_0)^{k+1} \prod_{n=1}^k (1 - q_0^n) = 1$. Therefore, it remains to prove that $(1 - q_0)^{-1} < r_{1-q_0}$ and $(1 - q_0)^{-1} < q_0^{-1}$ for some $q_0 \in (0, 1)$ to obtain that $|C(\nu_{a,q}) - C(\nu_{-\infty,q})|q^{-\binom{3-a}{2}}$ is bounded on a neighborhood of $q = 0$. The second condition on q_0 imposes that $q_0 < 1/2$. For the first condition, note that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q_0}{1 - q_0} \right)^{k+1} \prod_{n=1}^k (1 - q_0^n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q_0}{1 - q_0} \right)^{k+1} = \frac{q_0}{2q_0 - 1}.$$

Fix some $q_0 \in (0, 1/3)$ (for instance, set $q_0 = 1/6$). By this last inequality, this last quantity is strictly less than one. Then, by monotony of $r \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (rq_0)^{k+1} \prod_{n=1}^k (1 - q_0^n)$, $(1 - q_0)^{-1} < r_{1-q_0}$. Now, since $\mathbb{E}_{1-q_0}[r^{T_{\text{past}}}] < \infty$ for any $r \in ((1 - q_0)^{-1}, r_{1-q_0})$, $\mathbb{E}_{1-q_0}[(1 - q_0)^{-T_{\text{past}}} T_{\text{past}}] < \infty$. To conclude, we proved that there exists a constant

$$L := 2q_0^{-\binom{3-a}{2}} \mathbb{E}_{1-q_0} \left[\left(\frac{1}{1 - q_0} \right)^{T_{\text{past}}} T_{\text{past}} \right] < \infty$$

such that for any $q \in [0, q_0)$, $|C(\nu_{a,q}) - C(\nu_{-\infty,q})|q^{-\binom{3-a}{2}} \leq L$.

Now, consider $\beta \in \mathcal{T}_m$ such that $L_a(\beta) \neq L_{-\infty}(\beta)$. Let us prove that $H(\beta) \geq \binom{3-a}{2} = 1+2+\dots+(N+1)$.

For $w \in \{-\infty, a\}$, consider the sequence $x(w) = (x_j^{(i)}(w))_{i \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket, j \in \mathbb{N}}$ such that $x_j^{(i)}(w) = w$ for all $i \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket$ and $j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket$ and such that $x_{\beta_i}^{(i)}(w) = 1$ for all $i \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket$. By construction, $\alpha(x) = \beta$. Consider $\lambda^{(0)} = \theta^{(0)} \in \mathcal{N}$ an initial configuration and set by induction $\lambda^{(n)} = \Phi_{x^{(i)}(-\infty)}(\lambda^{(n-1)})$ and $\theta^{(n)} = \Phi_{x^{(i)}(a)}(\theta^{(n-1)})$ for all $n \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket$. For instance, let us consider $\lambda^{(0)} = \sum_{k \leq 0} \delta_k$ to be the configuration with exactly one particle on each non-positive position. By definition of \mathfrak{m} and by induction on $n \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket$, note that

$$\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, x^{(n)}(-\infty)) \leq \mathfrak{m}(\theta^{(n-1)}, x^{(n)}(a)) \quad \text{and} \quad \lambda_i^{(n)} \leq \theta_i^{(n)}$$

for all $i \in \mathbb{N}$ (see Lemma 2.3.8 for more details). By definition of L_a and $L_{-\infty}$,

$$L_{-\infty}(\beta) = \lambda_1^{(|\beta|)} \quad \text{and} \quad L_a(\beta) = \theta_1^{(|\beta|)}.$$

In addition, in that specific case, one easily checks that

$$\mathfrak{m}(\lambda^{(n-1)}, x^{(n)}(-\infty)) = \lambda_{\beta_n}^{(n-1)} + 1 \tag{3.18}$$

and

$$\mathfrak{m}(\theta^{(n-1)}, x^{(n)}(a)) = \max(\theta_{\beta_n}^{(n-1)} + 1, \theta_1^{(n-1)} + a) \tag{3.19}$$

since β_n corresponds to the rank of the first particle on the right proposing a weight +1 for the position of the new particle at step n .

Denote by

$$j_{N+1} := \min\{j \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket : \lambda_1^{(j)} \neq \theta_1^{(j)}\}$$

the first step at which the front's position is different for the two systems. For every $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, set

$$j_k := \min\{j \in \llbracket 1, |\beta| \rrbracket : \lambda^{(j)}(\{\lambda_1^{(j)} - N + k\}) \neq \theta^{(j)}(\{\theta_1^{(j)} - N + k\})\}$$

to be the first time at which the number of particles at distance $N - k$ from the front's position is different for the two systems.

Let us check that all the j_k for $k \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$ are well-defined, and that $j_1 < \dots < j_{N+1}$. Let us proceed by descending induction on $k \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Since $\lambda_1^{(|\beta|)} = L_a(\beta) \neq L_{-\infty}(\beta) = \theta_1^{(|\beta|)}$, j_{N+1} is well-defined. Let us prove that j_N is also well-defined: by definition, the front's position for one of the two systems λ and θ changes at time j_{N+1} , and the front's positions are different between the two systems. As a consequence, the position of the particle added at time j_{N+1} in θ is necessarily the new position of the front, and

$$\mathfrak{m}(\lambda^{(j_{N+1}-1)}, x^{(j_{N+1})}(-\infty)) < \mathfrak{m}(\theta^{(j_{N+1}-1)}, x^{(j_{N+1})}(a)).$$

Note that the front's position increase of either 0 or 1 at each step, and takes only integer values by Lemma 3.2.1. As a consequence, since j_{N+1} is the first time at which the front's positions are different,

$$\lambda_1^{(j_{N+1})} = \lambda_1^{(j_{N+1}-1)} \quad \text{and} \quad \theta_1^{(j_{N+1})} = \mathfrak{m}(\theta^{(j_{N+1}-1)}, x^{(j_{N+1})}(a)) = \theta_1^{(j_{N+1}-1)} + 1.$$

Since $\mathfrak{m}(\theta^{(j_{N+1}-1)}, x^{(j_{N+1})}(a)) = \theta_1^{(j_{N+1}-1)} + 1$ and since $a \leq 0$, there is at least $\beta_{j_{N+1}}$ particles at position $\theta_1^{(j_{N+1}-1)}$ in θ at time $j_{N+1} - 1$. In addition, if there were at least $\beta_{j_{N+1}}$ particles in λ at time $j_{N+1} - 1$, then $\mathfrak{m}(\lambda^{(j_{N+1}-1)}, x^{(j_{N+1})}(-\infty))$ would be equal to $\lambda_1^{(j_{N+1}-1)} + 1$ since a particle at the front would propose $\lambda_1^{(j_{N+1}-1)} + 1$ for the position of the new particle. This contradicts the fact that $\lambda_1^{(j_{N+1}-1)} = \lambda_1^{(j_{N+1})}$. Therefore, there is strictly less than $\beta_{j_{N+1}}$ particles in λ at time $j_{N+1} - 1$. As a consequence, we proved that there exists a time $n < j_{N+1}$ at which the number of particles at the front position in λ and θ are different, which means that j_N is well-defined.

Now, assume that j_k is well-defined for some $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$ and that $j_k < \dots < j_{N+1}$. Let us prove that j_{k-1} is well-defined and that $j_{k-1} < j_k$.

Necessarily, since j_k is the first time at which the number of particles at distance $N - k$ from the front's position in the two system λ and θ is different, the position of the new particle at time j_k is different between the two systems:

$$\mathfrak{m}(\lambda^{(j_k-1)}, x^{(j_k)}(-\infty)) < \mathfrak{m}(\theta^{(j_k-1)}, x^{(j_k)}(a)). \quad (3.20)$$

In addition, one of those two new particles is necessarily at distance $N - k$ from the front by definition of j_k . Since the number of particles in the bins at distance strictly less than $N - k$ from the front is the same in the two configurations up to time $j_k - 1$, and since we have (3.20), the new particle at distance $N - k$ from the front is necessarily in θ :

$$\mathfrak{m}(\theta^{(j_k-1)}, x^{(j_k)}(a)) = \theta_1^{(j_k-1)} - N + k$$

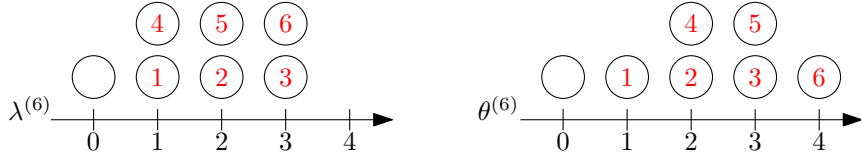


Figure 3.10 – Illustration of the application of the triangular minimal word $\beta = (1, 1, 1, 4, 3, 2)$ with the dynamics of the MGS with weight distribution $\nu_{-\infty, q}$ (on the left) and the MGS with weight distribution $\nu_{-1, q}$ (on the right). This illustrates what appends with the notations of Section 3.2.5 assuming that $\beta = (1, 1, 1, 4, 3, 2)$. Here, $L_{-1}(\beta) \neq L_{-\infty}(\beta)$ and $H(\beta) = \binom{3-a}{2}$.

Since $a = 1 - N$ and $k \geq 2$, $\theta_1^{(j_k-1)} + a < \theta_1^{(j_k-1)} - N + k$. Therefore, by (3.18) and (3.19),

$$m(\lambda^{(j_k-1)}, x^{(j_k)}(-\infty)) = \lambda_{\beta_{j_k-1}}^{(j_k-1)} + 1 \quad \text{and} \quad m(\theta^{(j_k-1)}, x^{(j_k)}(a)) = \theta_{\beta_{j_k-1}}^{(j_k-1)} + 1. \quad (3.21)$$

By induction hypothesis, $j_k < \dots < j_{N+1}$. Therefore, at time $j_k - 1$, the number of particles in the bins at distance at most $N - k$ of the front's position in each system is the same, and the front's position is the same for both system. As a consequence of (3.20) and (3.21), the number of particles at time $j_k - 1$ at distance $N - k + 1$ from the front's position is different for the two systems. This implies that j_{k-1} is well-defined and that $j_{k-1} \leq j_k - 1 < j_k$.

To conclude the proof of the proposition, it remains to note that $\beta_{j_k} \geq N - k + 3$ for all $k \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$, since this implies that $H(\beta) \geq (\beta_{j_1} - 1) + \dots + (\beta_{j_{N+1}} - 1) \geq \binom{N+2}{2} = \binom{3-a}{2}$. Let us prove that $\beta_{j_k} \geq N - k + 3$ for all $k \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$: between times $j_k - 1$ and j_k , a particle is added at position lower or equal to $\lambda_1^{(j_k-1)} - N + k - 1$ in λ . In addition, there is at least one particle at each position $\lambda_1^{(j_k-1)} + j$ for $j \in \llbracket -N + k - 1, 0 \rrbracket$ by Point C.4 of Lemma 3.2.1. As a consequence, since the new particle between times $j_k - 1$ and j_k is added in the bin on the right of the β_{j_k} -th rightmost particle, one obtains that $\beta_{j_k} > N - k + 2$. Therefore, $\beta_{j_k} \geq N - k + 3$.

Remark 3.2.7. The word $\beta = (1, 1, 1, \dots, 1, (N + 2), (N + 1), \dots, 2)$ where the 1's are repeated $(N + 1)$ times is an example of word in \mathcal{T}_m such that $L_a(\beta) \neq L_{-\infty}(\beta)$ (see Figure 3.10 for an illustration). Its height is $\binom{3-a}{2}$. In addition, one may prove as an exercise that it is the only word with this height such that $L_a(\beta) \neq L_{-\infty}(\beta)$. A consequence of that is that Proposition 3.1.3 is optimal in the sense that $b_{a, n} \neq b_{-\infty, n}$ for $n = \binom{3-a}{2}$.

3.2.6. Analyticity of the stationary distribution of the N -bin model

The main result of this section is the following lemma:

Lemma 3.2.8. *For all $x \in \mathcal{C}_N$, $q \mapsto \pi_x(q)$ is analytic on $[0, 1)$. In addition, for all $q_0 \in [0, 1)$, if we denote by $r_{a, q_0, x}$ the convergence radius of $q \mapsto \pi_x(q)$ around q_0 , there exist a constant $r_{q_0} > 0$ such that for all $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ and $x \in \mathcal{C}_N$, $r_{a, q_0, x} \geq r_{q_0}$.*

Let us give a scheme of proof for Lemma 3.2.8. The proof of Lemma 3.2.8 is based on the existence of a stationary in time version of the max growth system (see Proposition 2.2.3). From the stationary version of the MGS with distribution $\nu_{a, q}$, we obtain a stationary version of the N -bin model by Lemma

3.2.2, i.e. a process $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ such that for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$Y^{(n)} = \Psi_{\xi_n}(Y^{(n-1)}),$$

where $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ are i.i.d. random variables with geometric distribution with parameter p , with the notations from Section 3.2.1. First, note that the application of a triangular word via the application Ψ to any configuration $y \in \mathcal{C}_N$ characterizes at least the rightmost bin in the N -bin model by Lemma 3.2.3. Then, it is easy to check that the configuration obtained by the successive application of N triangular words to any configuration $y^{(0)}$ in \mathcal{C}_N does not depend on the initial configuration $y^{(0)}$ since a configuration in \mathcal{C}_N consists only in N bins. By an application of the law of total probability on the N rightmost triangular words in the sequence $(\xi_n)_{n \leq 0}$, we obtain a formula for the stationary probability of any configuration $x \in \mathcal{C}_N$ in terms of renovation events (c.f. Lemma 3.2.9). Using this formula, we prove Lemma 3.2.8 by the same way that we proved the analyticity of $q \mapsto C(\nu_{a,q})$ in Chapter 2.

Now, let us prove Lemma 3.2.8. To do so, we need to prove an intermediate result: the Lemma 3.2.9 stated below. For $\beta = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(N)}) \in (\mathcal{T}_m)^N$, denote by $y(\beta)$ the configuration of particles at distance less than N from the front's position in the configuration $\Phi_{\beta^{(N)}} \circ \dots \circ \Phi_{\beta^{(1)}}(\theta^{(0)})$, where $\theta^{(0)}$ is any configuration in \mathcal{N} . More precisely, if $\theta^{(|\beta|)} := \Phi_{\beta^{(N)}} \circ \dots \circ \Phi_{\beta^{(1)}}(\theta^{(0)})$, then $y(\beta) = (y_1(\beta), \dots, y_N(\beta)) \in \mathcal{C}_N$, where for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$y_i(\beta) = \theta^{(|\beta|)}(\{\theta_1^{(|\beta|)} + k - N\}).$$

By Lemma 3.2.1, note that $y(\beta)$ does not depend on the choice of the initial configuration $\lambda^{(0)}$. With those notations, let us now state Lemma 3.2.9.

Lemma 3.2.9. *For all $x \in \mathcal{C}_N$ and $q \in [0, 1)$,*

$$\pi_x(q) = \sum_{\beta \in (\mathcal{T}_m)^N} (1-q)^{|\beta|} q^{H(\beta)} \mathbb{1}_{y(\beta)=x},$$

where $|\beta| := |\beta^{(1)}| + \dots + |\beta^{(N)}|$ and $H(\beta) := H(\beta^{(1)}) + \dots + H(\beta^{(N)})$ for all $\beta = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(N)}) \in (\mathcal{T}_m)^N$.

Proof. Consider $(X_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}}$ with distribution $\nu_{a,q}$ and consider $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ the associated stationary MGS from Proposition 2.2.3 such that for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lambda^{(n)} = \Phi_{X^{(n)}}(\lambda^{(n-1)}).$$

As in Lemma 3.2.2, set $Y^{(n)} = (Y_1^{(n)}, \dots, Y_N^{(n)})$, where $Y_i^{(n)} = \lambda^{(n)}(\{\lambda_1^{(n)} - N + i\})$. By Lemma 3.2.2, $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ is a N -bin model. In addition, since $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ is a stationary process, $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ is also a stationary process.

With $\xi_n = \inf\{i \in \mathbb{N} : X_i^{(n)} = 1\}$, note that for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$Y^{(n)} = \Psi_{\xi_n}(Y^{(n-1)}),$$

with the notations from Section 3.2.1 and $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ are i.i.d. random variables with geometric distribution with parameter $p = 1 - q$.

Set $T_0 = 1$ and

$$T_{-1} = \max\{n \leq 0 : \forall i \in \llbracket 1, 1 - n \rrbracket, \xi_{i+n-1} \leq i\}.$$

By descending induction on $k \leq -2$, set

$$T_k = \max\{n < T_{k+1} : \forall i \in \llbracket 1, 1 - n \rrbracket, \xi_{i+n-1} \leq i\}.$$

Note that by definition of T_k and T_{k+1} ,

$$T_k = \max\{n < T_{k+1} : \forall i \in \llbracket 1, T_{k+1} - n \rrbracket, \xi_{i+n-1} \leq i\}.$$

Denote by $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(N)})$ the N first triangular minimal words in the past of sequence $(\xi_n)_{n \leq 0}$, namely

$$B^{(i)} = (\xi_{T_{i-N-1}}, \dots, \xi_{T_{i-N}-1})$$

for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. By definition of $(T_k)_{k \leq 0}$, $B^{(i)} \in \mathcal{T}_m$ almost surely for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. As a consequence of Lemma 3.2.3, each triangular word increase the front's position of the MGS by at least one, and all the positions of the added particles do not depend on the initial configuration. Since $Y^{(0)}$ consists in N bins corresponding to the particles' positions at distance less than N from the front in the MGS, $Y^{(0)}$ depends only on B . Then, the law of total probability applied on B ,

$$\pi_x(q) = \sum_{\beta \in (\mathcal{T}_m)^N} \mathbb{P}(B = \beta) \mathbf{1}_{y(\beta)=x}.$$

It remains to prove that $\mathbb{P}(B = \beta) = \prod_{k=1}^N (1 - q)^{|\beta^{(k)}|} q^{H(\beta^{(k)})}$.

Denote by $(\mathcal{F}_l)_{l \leq 0}$ the filtration generated by the random variables $(\xi_n)_{l \leq n \leq 0}$. Note that for all $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, T_k is a stopping time for this filtration: namely, the event $(T_k = l)$ is \mathcal{F}_l -measurable for every $l \leq 0$. In addition, note that $B^{(i)}$ conditional to $\mathcal{F}_{T_{i-N}}$ has the same distribution that $B^{(N)}$. Therefore, since $\mathbb{P}(B^{(N)} = \beta') = q^{H(\beta')}(1 - q)^{|\beta'|}$ for every $\beta' \in \mathcal{T}_m$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B = \beta) &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^N \mathbf{1}_{B^{(k)} = \beta^{(k)}} \right], \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^N \mathbf{1}_{B^{(k)} = \beta^{(k)}} \middle| \mathcal{F}_{T_{1-N}} \right] \right], \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=2}^N \mathbf{1}_{B^{(k)} = \beta^{(k)}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{B^{(1)} = \beta^{(1)}} \middle| \mathcal{F}_{T_{1-N}} \right] \right], \\ &= q^{H(\beta^{(1)})} (1 - q)^{|\beta^{(1)}|} \mathbb{P}((B^{(2)}, \dots, B^{(N)}) = (\beta^{(2)}, \dots, \beta^{(N)})). \end{aligned}$$

By induction, one obtains that $\mathbb{P}(B = \beta) = \prod_{k=1}^N (1 - q)^{|\beta^{(k)}|} q^{H(\beta^{(k)})}$. This concludes the proof of Lemma 3.2.9. \square

With the formula from Lemma 3.2.9, let us prove Lemma 3.2.8.

Proof of Lemma 3.2.8. By Lemma 3.2.9, it suffices to prove that for all $q_0 \in [0, 1)$, there exists a constant $r_{q_0} \in \mathbb{R}_+^*$ such that for every $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{C}_N$ and $z \in \mathbb{C}$ such that $|z| < r_{q_0}$,

$$(\star) := \sum_{\beta \in (\mathcal{T}_m)^N} |1 - q_0 - z|^{|\beta|} |q_0 + z|^{H(\beta)} < +\infty.$$

Consider $q_0 \in [0, 1)$, $N \geq 1$ and $x \in \mathcal{C}_N$. Consider also $z \in \mathbb{C}$. Then,

$$\begin{aligned} (\star) &\leq 2 \sum_{\beta \in (\mathcal{T}_m)^N} |1 - q_0 - z|^{|\beta^{(1)}| + \dots + |\beta^{(N)}|} |q_0 + z|^{H(\beta^{(1)}) + \dots + H(\beta^{(N)})} \\ &\leq 2 \left(\sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} |1 - q_0 - z|^{|\beta|} |q_0 + z|^{H(\beta)} \right)^N. \end{aligned}$$

By the triangular inequality, $|1 - q_0 - z| \leq (1 - q_0) + |z|$ and $|q_0 + z| \leq q_0 + |z|$. Then,

$$\begin{aligned} (\star) &\leq \left(\sum_{\beta \in \mathcal{T}_m} ((1 - q_0) + |z|)^{|\beta|} (q_0 + |z|)^{H(\beta)} \right)^N \\ &\leq \mathbb{E}_{1 - q_0 - |z|} \left[\left(\frac{1 - q_0 + |z|}{1 - q_0 - |z|} \right)^{T-1} \right]^N, \end{aligned}$$

where \mathbb{E}_{1-q} corresponds to the expectation where the weight distribution is $\nu_{a,q}$. Note that this last quantity depends only on q_0 and $|z|$. In addition, there exists r_q depending only on q such that this last expectation is finite for all $|z| \leq r_q$ since T_{-1} has the same distribution that T_{past} defined in Chapter 2 (see Section 2.3.1 starting from (2.17) in Chapter 2 for more details). \square

3.3. A formula for the time constant via the generating function method

Assume that $F(X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_N]]$ is the generating function of the stationary distribution:

$$F(X_1, \dots, X_N) := \sum_{x \in \mathcal{C}_N} \pi_x(q) \prod_{k=1}^N X_k^{x_k - 1}. \quad (3.22)$$

We will now prove that this generating function satisfies the following functional equation:

Proposition 3.3.1. *As an element of $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_N]]$ and for all $q \in [0, 1)$,*

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_N) &= \sum_{i=1}^N X_i q^{N-i+1} F(X_1, \dots, X_{i-1}, qX_i, \dots, qX_N) \\ &\quad - \sum_{i=2}^N X_i q^{N-i+2} F(X_1, \dots, X_{i-2}, qX_{i-1}, \dots, qX_N) \\ &\quad + F(1, X_1, \dots, X_{N-1}) - qF(1, X_1, \dots, X_{N-2}, qX_{N-1}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

In addition, this equality holds for every $(X_1, \dots, X_N) \in [0, 1]^N$ and $q \in [0, 1]$.

Remark 3.3.2. Note that $F(1, \dots, 1) = 1$ since $(\pi_x(q))_{x \in \mathcal{C}_N}$ is a probability. In addition, by (3.5),

$$C(\nu_{a,q}) = F(1, \dots, 1) - qF(1, \dots, 1, q).$$

In a second time, we will prove Theorem 3.1.2 using the functional equation (3.23) from Proposition 3.3.1.

3.3.1. Proof of Proposition 3.3.1

With the convention that $\pi_x(q) = 0$ for all $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N - \mathcal{C}_N$, by definition of π , for all $x \in \mathcal{C}_N$,

$$\begin{aligned} \pi_x(q) &= q^{x_N + \dots + x_1 - 1} \pi_{x - e_1}(q) + \sum_{i=2}^N q^{x_N + \dots + x_i - 1} (1 - q^{x_{i-1}}) \pi_{x - e_i}(q) \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{x_N=1\}} (1 - q^{x_{N-1}}) \sum_{x_0 \geq 1} \pi_{x_0, \dots, x_{N-1}}(q), \end{aligned}$$

or equivalently,

$$\begin{aligned} \pi_x(q) &= \sum_{i=1}^N q^{x_N + \dots + x_i - 1} \pi_{x - e_i}(q) - \sum_{i=2}^N q^{x_N + \dots + x_{i-1} - 1} \pi_{x - e_i}(q) \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{x_N=1\}} (1 - q^{x_{N-1}}) \sum_{x_0 \geq 1} \pi_{x_0, \dots, x_{N-1}}(q). \end{aligned} \tag{3.24}$$

By multiplying (3.24) by $X_1^{x_1-1} \dots X_N^{x_N-1}$ and taking the sum over all $(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{C}_N$, one obtains that the generating function $F(X_1, \dots, X_N)$ satisfies the functional equation (3.23).

To conclude, it remains to see that all those series are convergent for $(X_1, \dots, X_N) \in [0, 1]^N$ and $q \in [0, 1)$. This is a simple consequence of the fact that $\sum_{x \in \mathcal{C}_N} \pi_x(q) = 1$ for all $q \in [0, 1)$.

3.3.2. Proof of Theorem 3.1.2

The heuristic of the method to obtain Theorem 3.1.2 for $a = 0$ is the following. In that case, the functional equation (3.23) satisfied by the generating function becomes

$$F(X) = XqF(qX) + (F(1) - qF(q)).$$

Therefore, by Remark 3.3.2, for all $x' \in [0, 1)$ and $q \in [0, 1)$,

$$F(x') = x'qF(qx') + C(\nu_{0,q}).$$

The main idea consists in injecting the formula for $x' = qx$ in the formula for $x' = x$. Then, we inject the formula for $x' = q^2x$ in the formula obtained at the previous step, etc. One obtains by induction on n that for all $(q, x) \in [0, 1)^2$,

$$F(x) = (1 + xq + x^2q^{(1+2)} + \dots + x^nq^{(1+2+\dots+n)})C(\nu_{0,q}) + x^{n+1}q^{(1+2+\dots+(n+1))}F(q^{n+1}x).$$

Note that $0 \leq F(x) \leq 1$ for all $x \in [0, 1]$. In addition, $F(q) = q^{-1}(1 - C(\nu_{0,q}))$ by Remark 3.3.2. Therefore, with $x = q$ in the last equation, one gets that

$$\left| \left(\sum_{k=1}^{n+2} q^{\binom{k}{2}} \right) C(\nu_{0,q}) - 1 \right| \leq q^{\binom{n+3}{2}}.$$

This lead to formula (3.3) as n goes to infinity.

Now, let us prove Theorem 3.1.2 in the general case. First, let us detail the notations from Theorem 3.1.2. Let us recall that $(e_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ is the canonical basis of \mathbb{R}^N . Consider the map σ_0 from $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ to $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ such that for all $n = (n_1, \dots, n_N) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$,

$$\sigma_0(n) := (0, n_1, \dots, n_{N-1}).$$

Set $E_a = \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. For $(i, j) \in E_a$ and $n \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$, set

$$p_{i,j}(n) = \begin{cases} q^{n_1 + \dots + n_{i-j} + (N-i+1)}(1 - q^{n_{i-j+1}}) & \text{if } \max(1, j) \leq i \leq N-1, \\ -q(1 - q^{n_1 + \dots + n_{N-j}}) & \text{if } i = N \text{ and } j \geq 1, \\ q^{n_1 + \dots + n_{N+1}} & \text{if } i = N \text{ and } j = 0, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (3.25)$$

In words, we consider the weighted graph which vertices set is $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ and where $p_{i,j}(n)$ is the weight of the edge from the vertex n to the vertex $\sigma_0^j(n) + e_i$.

Let us now define the weight of a path in this graph as a product of its edges' weights: set $F_a := \cup_{l=0}^{\infty} (E_a)^l$ the set of all finite sequences of elements in E_a . For every length $l \in \mathbb{N}$, every starting point $n_0 \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ and every sequence $\gamma = ((i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)) \in F_a$, set $n_0^\gamma := n_0$ and, by induction on $s \in \llbracket 1, l \rrbracket$, set:

$$n_s^\gamma := \sigma_0^{j_s}(n_{s-1}^\gamma) + e_{i_s}.$$

Denote by $p_\gamma(n_0)$ the weight of the path $(n_0^\gamma, \dots, n_l^\gamma)$:

$$p_\gamma(n_0) = \prod_{s=1}^l p_{i_s, j_s}(n_{s-1}^\gamma).$$

In order to simplify the notations, we consider the following substitution of formal variables: set $G(Y_1, \dots, Y_N) \in \mathbb{C}[[Y_1, \dots, Y_N]]$ the formal power series defined by

$$G(Y_1, \dots, Y_N) := F(Y_1, Y_1 Y_2, \dots, Y_1 Y_2 \dots Y_N).$$

By Proposition 3.3.1, if we denote by $G_i(Y_1, \dots, Y_N)$ the quantity $G(Y_1, \dots, Y_{i-1}, qY_i, Y_{i+1}, \dots, Y_N)$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, then G satisfies the following formal equation:

$$G(Y) = \sum_{i=1}^N Y_1 \dots Y_i q^{N-i+1} G_i(Y) - \sum_{i=2}^N Y_1 \dots Y_i q^{N-i+2} G_{i-1}(Y) + G(Y') - qG_N(Y'), \quad (3.26)$$

where $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ and $Y' = (1, Y_1, \dots, Y_{N-1})$, and this equation holds for all $(Y_1, \dots, Y_N) \in [0, 1]^N$ and $q \in [0, 1)$.

For all $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$, consider

$$g(n) = g(n_1, \dots, n_N) := G(q^{n_1}, \dots, q^{n_N}).$$

Then, by (3.26), for all $n \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$,

$$\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{i=1}^N q^{n_1+\dots+n_i+N-i+1} g(n+e_i) - \sum_{i=2}^N q^{n_1+\dots+n_i+N-i+2} g(n+e_{i-1}) \\
&\quad - qg(\sigma_0(n)+e_N) + g(\sigma_0(n)), \\
\iff g(n) &= \sum_{i=1}^{N-1} q^{n_1+\dots+n_i+(N-i+1)} (1-q^{n_{i+1}}) g(n+e_i) + q^{n_1+\dots+n_{N+1}} g(n+e_N) \\
&\quad - qg(\sigma_0(n)+e_N) + g(\sigma_0(n)). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

By iterating $N-1$ times (3.27) on the last term $g(\sigma_0(n))$, one obtains:

$$\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{N-1} q^{(\sigma_0^j(n))_1+\dots+(\sigma_0^j(n))_i+(N-i+1)} (1-q^{(\sigma_0^j(n))_{i+1}}) g(\sigma_0^j(n)+e_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + q^{(\sigma_0^j(n))_1+\dots+(\sigma_0^j(n))_{N+1}} g(\sigma_0^j(n)+e_N) - qg(\sigma_0^{j+1}(n)+e_N) \right] + g(\sigma_0^N(n)).
\end{aligned}$$

Since $(\sigma_0^j(n))_i = n_{i-j} \mathbf{1}_{i>j}$,

$$(\sigma_0^j(n))_1 + \dots + (\sigma_0^j(n))_i = \mathbf{1}_{i>j} \sum_{k=1}^{i-j} n_k.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} q^{N-i+1} (1-q^{(\sigma_0^j(n))_{i+1}}) g(\sigma_0^j(n)+e_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=\max(1,j)}^{N-1} q^{n_1+\dots+n_{i-j}+(N-i+1)} (1-q^{(\sigma_0^j(n))_{i+1}}) g(\sigma_0^j(n)+e_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + q^{n_1+\dots+n_{N-j+1}} g(\sigma_0^j(n)+e_N) - qg(\sigma_0^{j+1}(n)+e_N) \right] + g(\sigma_0^N(n)).
\end{aligned}$$

Since $(\sigma_0^j(n))_{i+1}$ is non-zero if and only if $i+1 > j$,

$$\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(\sum_{i=\max(1,j)}^{N-1} q^{n_1+\dots+n_{i-j}+(N-i+1)} (1-q^{n_{i-j+1}}) g(\sigma_0^j(n)+e_i) \right) \right. \\
&\quad \left. + q^{n_1+\dots+n_{N-j+1}} g(\sigma_0^j(n)+e_N) - qg(\sigma_0^{j+1}(n)+e_N) \right] + g(\sigma_0^N(n)).
\end{aligned}$$

Since $g(\sigma_0^N(n)) = g(0, \dots, 0) = 1$,

$$g(n) = 1 + \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(\sum_{i=\max(1,j)}^{N-1} q^{n_1+\dots+n_{i-j}+(N-i+1)}(1 - q^{n_{i-j+1}})g(\sigma_0^j(n) + e_i) \right) + q^{n_1+\dots+n_{N-j+1}}g(\sigma_0^j(n) + e_N) - qg(\sigma_0^{j+1}(n) + e_N) \right].$$

Equivalently,

$$g(n) = 1 + \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=\max(1,j)}^{N-1} q^{n_1+\dots+n_{i-j}+(N-i+1)}(1 - q^{n_{i-j+1}})g(\sigma_0^j(n) + e_i) \right) - \left(\sum_{j=1}^{N-1} q(1 - q^{n_1+\dots+n_{N-j}})g(\sigma_0^j(n) + e_N) \right) + q^{n_1+\dots+n_{N+1}}g(n + e_N) - qg(e_N).$$

By (3.5) and the definitions of g and G ,

$$\frac{1 - C(\nu_{a,q})}{q} = g(e_N). \quad (3.28)$$

Then, for all $n \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$,

$$g(n) = C(\nu_{a,q}) + \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=\max(1,j)}^{N-1} q^{n_1+\dots+n_{i-j}+(N-i+1)}(1 - q^{n_{i-j+1}})g(\sigma_0^j(n) + e_i) \right) - \left(\sum_{j=1}^{N-1} q(1 - q^{n_1+\dots+n_{N-j}})g(\sigma_0^j(n) + e_N) \right) + q^{n_1+\dots+n_{N+1}}g(n + e_N). \quad (3.29)$$

Note that all the polynomial coefficients in q in the sums on the right are divisible by q . If one iterates k times (3.29) starting from $n \in (\mathbb{Z}_{>0})^N$, one obtains the k first terms of the Taylor expansion in q of $g(n) = G(q^{n_1}, \dots, q^{n_N})$ at $q = 0$, assuming it exists.

With the notations from (3.25), note that (3.29) re-writes as

$$g(n) = C(\nu_{a,q}) + \sum_{(i,j) \in E_a} p_{i,j}(n)g(\sigma_0^j(n) + e_i). \quad (3.30)$$

Then, for all $n_0 \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$, using (3.29), one obtains by induction on $k \in \mathbb{N}$ that:

$$g(n_0) = C(\nu_{a,q}) \sum_{\substack{\gamma \in F_a \\ |\gamma| \leq k-1}} p_\gamma(n_0) + \sum_{\gamma \in (E_a)^k} p_\gamma(n_0)g(n_{|\gamma|}^\gamma).$$

Since π is a probability distribution, $g(n) \leq 1$ for all $n \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ and $q \in [0, 1)$. In addition, by (3.25), $|p_{i,j}(n)| \leq q$ for all $(i, j) \in E_a$. Therefore,

$$\sum_{\gamma \in (E_a)^k} |p_\gamma(n_0) g(n_{|\gamma|}^\gamma)| \leq q^k |E_a| = (qN^2)^k.$$

As a consequence, for all $n_0 \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ and $q \in [0, N^{-2})$,

$$g(n_0) = C(\nu_{a,q}) \sum_{\gamma \in F_a} p_\gamma(n_0).$$

By (3.28), with $n_0 = e_N$ and $q \in [0, N^{-2})$,

$$\frac{1 - C(\nu_{a,q})}{q} = C(\nu_{a,q}) \sum_{\gamma \in F_a} p_\gamma(e_N). \quad (3.31)$$

Therefore, one obtains that formula (3.6) for $C(\nu_{a,q})$ holds for all $q \in [0, N^{-2})$.

3.4. An efficient computation method for the Taylor expansion of the stationary distribution

In this section, we present an efficient method to compute the Taylor expansion's coefficients of the stationary distribution and of the time constant. This algorithm is based on two key points:

- There exists a strong recursion formula for the coefficients of the Taylor expansion of the $\pi_x(q)$ up to any fixed order k_0 .
- For all $k_0 \in \mathbb{N}$ and $N \geq 1$, there are only a finite (but polynomial in k_0) number of configurations $x \in \mathcal{C}_N$ such that $\pi_x(q)$ is not negligible compared to q^{k_0} .

Those results are respectively presented in Lemmas 3.4.2 and 3.4.3. Using those two facts, one obtains an algorithm to compute the Taylor expansion's coefficients of the stationary distribution. By Theorem 3.1.1, one then obtains the the Taylor expansion's coefficients of the time constant (cf. the following Remark 3.4.1).

The section is organized as follows: in Section 3.4.1, we prove Lemma 3.4.2 and Lemma 3.4.3. The algorithm in itself is presented in Section 3.4.2. In Section 3.4.3, we prove that the computational complexity of the algorithm is polynomial in k_0 , where k_0 is the order of the Taylor expansions.

3.4.1. Preliminary results

For $N \geq 1$ and $x \in \mathcal{C}_N$, denote by $(c_{k,x}^{(N)})_{k \geq 0}$ the Taylor expansion's coefficients of $q \mapsto \pi_x(q)$ at $q = 0$. By Lemma 3.2.8, there exists a $r_0 > 0$ such that for all $x \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ and $q \in [0, r_0)$,

$$\pi_x(q) = \sum_{k \geq 0} c_{k,x}^{(N)} q^k.$$

In addition, π_x is characterized by its Taylor expansion at $q = 0$ by analytic continuation.

Remark 3.4.1. By Theorem 3.1.1 and Lemma 3.2.8, one obtains the Taylor expansion of $q \mapsto C(\nu_{a,q})$ around $q = 0$ from the coefficients $(c_{k,x}^{(N)})_{x \in \mathcal{C}_N, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$: if $(b_{a,k})_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ are the coefficients of the Taylor expansion of the time constant as defined in (3.7), then for every $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$b_{a,n} = \mathbb{1}_{n=0} - \sum_{k=0}^n \sum_{x \in \mathcal{C}_N} c_{k,x}^{(N)} \mathbb{1}_{x_N = n-k}. \quad (3.32)$$

Note that for $q = 0$, the stationary distribution is $\delta_{(1,\dots,1)}$. Therefore, for all $x \in \mathcal{C}_N$,

$$c_{0,x}^{(N)} = \begin{cases} 1 & \text{if } x = (1, \dots, 1), \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (3.33)$$

The first key point on which the algorithm is based on is the following Lemma 3.4.2. First, let us introduce the necessary notations. For all $i \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$, set H_i the set of configurations with N bins ending with exacty $N+1-i$ ones, namely

$$H_i := \{x \in \mathcal{C}_N : x_i = \dots = x_N = 1, x_{i-1} \neq 1\}$$

and

$$H_{N+1} := \{x \in \mathcal{C}_N : x_N \neq 1\}.$$

Note that $\{H_i\}_{i \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket}$ forms a partition of \mathcal{C}_N , and that $H_1 = \{(1, \dots, 1)\}$.

Lemma 3.4.2. Consider $i \in \llbracket 2, N+1 \rrbracket$ and $k \in \mathbb{N}$. Then, for all $x \in H_i$,

$$c_{k,x}^{(N)} = \sum_{x' \in \mathcal{C}_N} \sum_{k'=0}^{k-1} c_{k',x'}^{(N)} \cdot [q^{k-k'}] P_{x',x}(q) + \sum_{x' \in \bigcup_{j=i+1}^{N+1} H_j} c_{k,x'}^{(N)} P_{x',x}(0), \quad (3.34)$$

where $[X^i]P(X) := a_i$ for every polynomial $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$. In addition, for all $k \in \mathbb{N}$,

$$c_{k,(1,\dots,1)}^{(N)} = - \sum_{x \in \mathcal{C}_N \setminus \{(1,\dots,1)\}} c_{k,x}^{(N)}. \quad (3.35)$$

Proof. By definition of π_x , for all $q \in [0, 1)$,

$$\pi_x(q) = \sum_{x' \in \mathcal{C}_N} \pi_{x'}(q) P_{x',x}(q) \quad (3.36)$$

and

$$\sum_{x \in \mathcal{C}_N} \pi_x(q) = 1. \quad (3.37)$$

By considering the terms at the order q^k in (3.37) for any $k \geq 1$, one obtains (3.35). Similarly, for all $x \in \mathcal{C}_N$ and $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, by considering the terms at the order q^k in (3.36),

$$c_{k,x}^{(N)} = \sum_{x' \in \mathcal{C}_N} \sum_{k'=0}^k c_{k',x'}^{(N)} \cdot [q^{k-k'}] P_{x',x}(q). \quad (3.38)$$

Note that for all $x, x' \in \mathcal{C}_N$, $P_{x',x}(0) = 0$ if and only if $\sigma_1(x') \neq x$ by (3.4). In addition, if $x \in H_i$ for some $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$, then $\sigma_1(x) \in H_{i-1}$. With those remarks, one notices that $[q^0] P_{x',x}(q) = P_{x',x}(0)$ vanishes for all $x' \in \cup_{j=1}^i H_j$ for all $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$, and $x \in H_i$. Therefore, one obtains (3.34) by (3.38). \square

Now, let us prove the second key point on which the algorithm is based on. This point is necessary so that the algorithm terminates. For all $x \in \mathcal{C}_N$, call $h(x)$ the *height of the configuration* x , where

$$h(x) := \sum_{i=1}^N \binom{x_i}{2}.$$

Lemma 3.4.3. *For every $x \in \mathcal{C}_N$ and $0 \leq k \leq h(x) - 1$, $c_{k,x}^{(N)} = 0$.*

Proof. Let us prove by induction on $k \geq 0$ that

$$\forall x \in \mathcal{C}_N, k < h(x) \Rightarrow c_{k,x}^{(N)} = 0. \quad (3.39)$$

First, assume that $k = 0$. In that case, $c_{0,x}^{(N)} = 0$ for all $x \in \mathcal{C}_N \setminus \{(1, \dots, 1)\}$ by (3.33). In addition, $h((1, \dots, 1)) = 0 = k$. This implies that (3.39) holds for $k = 0$.

Now, assume that for some $k_0 > 0$, (3.39) holds for all $k \leq k_0 - 1$. Let us prove that (3.39) holds for $k = k_0$.

To do so, let us prove by descending induction on $i \in \llbracket 2, N + 1 \rrbracket$ that

$$\forall x \in H_i, k_0 < h(x) \Rightarrow c_{k_0,x}^{(N)} = 0. \quad (3.40)$$

For $i = N + 1$, by (3.34),

$$c_{k_0,x}^{(N)} = \sum_{x' \in \mathcal{C}_N} \sum_{k'=0}^{k_0-1} c_{k',x'}^{(N)} \cdot [q^{k_0-k'}] P_{x',x}(q).$$

Therefore, if one of the terms $c_{k',x'}^{(N)} \cdot [q^{k_0-k'}] P_{x',x}(q)$ is non zero, then both $c_{k',x'}^{(N)}$ and $[q^{k_0-k'}] P_{x',x}(q)$ are non-zero. Since $c_{k',x'}^{(N)} \neq 0$,

$$k' \geq h(x') \quad (3.41)$$

by induction hypothesis. Note that by definition of $\{H_i\}_{1 \leq i \leq N+1}$, $x \neq \sigma_1(x')$. Therefore, $x = x' + e_i$ for some $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ and $k_0 - k' \geq x'_N + \dots + x'_i$ by definition (3.4) of $P_{x',x}(q)$ since $[q^{k_0-k'}]P_{x',x}(q) \neq 0$. Since $x_i = x'_i + 1$ and $x'_j \geq 0$ for all $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$k_0 - k' \geq x_i - 1. \quad (3.42)$$

Since $x = x' + e_i$, the following equality also holds:

$$h(x) = h(x') + x_i - 1. \quad (3.43)$$

Therefore, by (3.41), (3.42) and (3.43), one obtains that $k_0 \geq h(x)$.

The proof of the inductive step in i is similar to the proof of initialisation. Assume that $c_{k_0,x}^{(N)} \neq 0$ for some $i \geq 2$ and $x \in H_i$, and that (3.40) holds for all $j \in \llbracket i+1, N+1 \rrbracket$. By (3.34),

$$c_{k_0,x}^{(N)} = \sum_{x' \in \mathcal{C}_N} \sum_{k'=0}^{k_0-1} c_{k',x'}^{(N)} \cdot [q^{k_0-k'}]P_{x',x}(q) + \sum_{x' \in \cup_{j=i+1}^{N+1} H_j} c_{k_0,x'}^{(N)} P_{x',x}(0).$$

Either one term of the first sum is non zero, or one term of the second sum is non zero. In the first case, $h(x) \geq k_0$ for the exact same reason as for the inductive step. In the second case, $c_{k_0,x}^{(N)}$ is non zero for some $x \in \cup_{j=i+1}^{N+1} H_j$. By induction hypothesis on i , (3.40) holds for all $j \geq i+1$. Therefore, $k_0 \geq h(x)$.

It is now proven that for all $x \in \cup_{j=2}^{N+1} H_j = \mathcal{C}_N \setminus \{(1, \dots, 1)\}$,

$$k_0 < h(x) \Rightarrow c_{k_0,x}^{(N)} = 0.$$

It remains to prove it for $x = (1, \dots, 1)$ which is the only configuration in H_1 . Since $h((1, \dots, 1)) = 0$, this implication also holds in that case, which concludes the proof of Lemma 3.4.3. \square

3.4.2. Presentation of the algorithm

Now, let us present the algorithm to compute $(c_{k,x}^{(N)})_{0 \leq k \leq k_0, x \in \mathcal{C}_N}$ and $(b_{a,n})_{0 \leq n \leq k_0}$ for any $k_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Assume that $N \geq 1$ and $k_0 \geq 0$ are fixed in this section.

Denote by \mathcal{C}_{N,k_0} a finite class of configurations containing all the configuration with stationary probability non negligible compared to q^{k_0} . Namely, assume that $\mathcal{C}_{N,k_0} \subseteq \mathcal{C}_N$ is finite and satisfies the following assumption:

$$\{x \in \mathcal{C}_N : \exists k \in \llbracket 0, k_0 \rrbracket, c_{k,x}^{(N)} \neq 0\} \subseteq \mathcal{C}_{N,k_0}.$$

By Lemma 3.4.3, such a class of configuration exists: set

$$\mathcal{C}_{N,k_0} := \{x \in \mathcal{C}_N : h(x) \leq k_0\}. \quad (3.44)$$

It is easy to check that this set is finite (see the following Lemma 3.4.4 for a more detailed result on the cardinal of this set).

By Lemmas 3.4.2 and 3.4.3, one obtains that for all $k \in \llbracket 1, k_0 \rrbracket$ and $x \in \mathcal{C}_{N, k_0} \setminus \{(1, \dots, 1)\}$,

$$c_{k,x}^{(N)} = \sum_{x' \in \mathcal{C}_{N, k_0}} \sum_{k'=0}^{k-1} c_{k',x'}^{(N)} \cdot [q^{k-k'}] P_{x',x}(q) + \sum_{x' \in \bigcup_{j=i+1}^{N+1} \mathcal{C}_{N, k_0} \cap H_j} c_{k,x'}^{(N)} P_{x',x}(0) \quad (3.45)$$

and

$$c_{k,(1,\dots,1)}^{(N)} = - \sum_{x \in \mathcal{C}_{N, k_0} \setminus \{(1,\dots,1)\}} c_{k,x}^{(N)}. \quad (3.46)$$

Before we give more details about the algorithm, let us give an example to illustrate the idea behind it. Let us assume that $N = 2$ and that we want to compute the coefficients of the stationary distribution up to the order $k_0 = 2$. It is easy to check that $\mathcal{C}_{N,2} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ by its definition. By Lemma 3.4.3, the configurations of $\mathcal{C}_{N,2}$ are the only ones for which the Taylor expansion in q of their stationary probabilities have non-zero terms at the order 2. In addition, $H_1 \cap \mathcal{C}_{N, k_0} = \{(1, 1)\}$, $H_2 \cap \mathcal{C}_{N, k_0} = \{(2, 1)\}$ and $H_3 \cap \mathcal{C}_{N, k_0} = \{(1, 2), (2, 2)\}$. By (3.33), we know that the terms at the order 0 of $c_{0,x}^{(2)}$ is equal to 1 if $x = (1, 1)$ and to 0 in the other cases. Therefore, we know the Taylor expansion at the order 0 of the stationary probability for every configuration in \mathcal{C}_N . Now, let us apply (3.45) to every configuration of $H_3 \cap \mathcal{C}_{N, k_0}$ for $k = 1$. Note that all the terms in the right-hand side of the equation are known since the configurations are in H_3 . Then, one obtains $c_{1,(1,2)}^{(2)} = 1$ by the contribution of the transition probability going from $(1, 1)$ to $(1, 2)$ and the term at the order 0 in $(1, 1)$, and $c_{1,(2,2)}^{(2)} = 0$. Once we know the Taylor expansion of stationary probability at the order 1 for every configuration in H_3 , formula (3.45) gives us the value of $c_{1,x}^{(2)}$ for every $x \in H_2 \cap \mathcal{C}_{N, k_0}$: we obtain that $c_{1,(2,1)}^{(2)} = 1$ by the contribution of the transition probability going from $(1, 2)$ to $(2, 1)$ and the term at the order 1 in $(1, 2)$. Now, it remains to compute the Taylor expansion of the stationary probability at the order 1 for $x = (1, 1)$, which is the only element of H_1 . By (3.46), $c_{1,(1,1)}^{(2)} = -2$. To conclude, we obtained the following Taylor expansions at the order 1:

$$\begin{aligned} \pi_{(1,2)}(q) &= q + o(q) \\ \pi_{(2,2)}(q) &= o(q) \\ \pi_{(2,1)}(q) &= q + o(q) \\ \pi_{(1,1)}(q) &= 1 - 2q + o(q) \end{aligned}$$

By applying the same method again in order to compute the coefficients at the order 2, one obtains:

$$\begin{aligned} \pi_{(1,2)}(q) &= q - 3q^2 + o(q^2) \\ \pi_{(2,2)}(q) &= q^2 + o(q^2) \\ \pi_{(2,1)}(q) &= q - q^2 + o(q^2) \\ \pi_{(1,1)}(q) &= 1 - 2q + 3q^2 + o(q^2) \end{aligned}$$

Now, let us give more details on the algorithm. The main idea consists in the construction of an enumeration

$$(k(i), x(i))_{i \in \llbracket 1, (k_0+1) |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket}$$

of $\llbracket 0, k_0 \rrbracket \times \mathcal{C}_{N, k_0}$ such that $c_{k(i), x(i)}^{(N)}$ depends only on $(c_{k(j), x(j)}^{(N)})_{1 \leq j \leq i-1}$ for all $1 \leq i \leq k_0 |\mathcal{C}_{N, k_0}|$. Once this enumeration is constructed, one may compute $(c_{k(i), x(i)}^{(N)})_{i \in \llbracket 1, (k_0+1) |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket}$ recursively.

More precisely, let us construct the enumeration $(k(i), x(i))_{i \in \llbracket 1, (k_0+1) |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket}$ as presented before in the heuristics. First, consider $(x(i))_{1 \leq i \leq |\mathcal{C}_{N, k_0}|}$ an enumeration of \mathcal{C}_{N, k_0} such that $(x(i))_{1 \leq i \leq |\mathcal{C}_{N, k_0}| \cap H_{N+1}}$ is an enumeration of $\mathcal{C}_{N, k_0} \cap H_{N+1}$ and such that for all $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$(x(i))_{|\mathcal{C}_{N, k_0} \cap (\cup_{k=j+1}^{N+1} H_k)| + 1 \leq i \leq |\mathcal{C}_{N, k_0} \cap (\cup_{k=j}^{N+1} H_k)|}$$

is an enumeration of $\mathcal{C}_{N, k_0} \cap H_j$. In other words, $(x(i))_{1 \leq i \leq |\mathcal{C}_{N, k_0}|}$ is a concatenation of enumerations of $\mathcal{C}_{N, k_0} \cap H_{N+1}, \dots, \mathcal{C}_{N, k_0} \cap H_1$. Then, set $k(i|\mathcal{C}_{N, k_0}| + j) = i$ and $x(i|\mathcal{C}_{N, k_0}| + j) = x(j)$ for all $i \in \llbracket 0, k_0 \rrbracket$ and $j \in \llbracket 1, |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket$. With such a construction, (3.45) becomes

$$c_{k(i), x(i)}^{(N)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{k(j), x(j)}^{(N)} \cdot [q^{k(i)-k(j)}] P_{x(j), x(i)}(q) \quad (3.47)$$

for all $i \in \llbracket |\mathcal{C}_{N, k_0}| + 1, (k_0 + 1) |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket$ such that $i \notin |\mathcal{C}_{N, k_0}| \mathbb{Z}$. In addition, if $i = j|\mathcal{C}_{N, k_0}|$ for some $j \in \llbracket 2, k_0 + 1 \rrbracket$, then $x(i) = (1, \dots, 1)$ and (3.46) becomes

$$c_{k(i), x(i)}^{(N)} = - \sum_{k \in \llbracket (j-1) |\mathcal{C}_{N, k_0}| + 1, j |\mathcal{C}_{N, k_0}| - 1 \rrbracket} c_{k(j), x(j)}^{(N)}. \quad (3.48)$$

Those formulas allow us to compute recursively the coefficients. Note that the total number of terms of the form $[q^k] P_{x,y}(q)$ that really contributes in the sums from (3.47) (i.e. the number of couples (i, j) with $1 \leq j < i \leq (k_0 + 1) |\mathcal{C}_{N, k_0}|$ such that $[q^{k(i)-k(j)}] P_{x(j), x(i)}(q) \neq 0$) is at most $2(N + 1) |\mathcal{C}_{N, k_0}| k_0$. Heuristically, the idea is the following: in order to compute the terms $(c_{k,x}^{(N)})_{x \in \mathcal{C}_{N, k_0}}$ for a fixed $k \in \llbracket 1, k_0 \rrbracket$, one needs to browse each of the transition $P_{x,y}(q)$ exactly once. Since for any fixed x there is at most $(N + 1)$ configuration y such that $P_{x,y}(q) \neq 0$, the total number of non-zero transitions is at most $(N + 1) |\mathcal{C}_{N, k_0}|$. Since all those transitions are of the form q^k or $q^{k_1} - q^{k_2}$ for $k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, there is at most $2(N + 1) |\mathcal{C}_{N, k_0}|$ terms of the form $[q^k] P_{x,y}(q)$ that do not vanish in the sums used to compute the coefficients $(c_{k,x}^{(N)})_{x \in \mathcal{C}_{N, k_0}}$ for a fixed k . Then, to compute the coefficients $(c_{k,x}^{(N)})_{x \in \mathcal{C}_{N, k_0}, k \in \llbracket 1, k_0 \rrbracket}$, there are at most $2(N + 1) |\mathcal{C}_{N, k_0}| k_0$ terms that do not vanish.

The main steps of the algorithm are the following:

D.1 Construct the list $L = (k(i), x(i))_{i \in \llbracket 1, (k_0+1) |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket}$.

D.2 For every configuration $x \in \mathcal{C}_{N, k_0}$, construct the list of indexes $j \in \llbracket 1, |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket$ such that

$$[q^k] P_{x(j), x}(q) \neq 0$$

for some $k \in \llbracket 0, k_0 \rrbracket$.

D.3 Construct the list of $(c_{k(i), x(i)}^{(N)})_{1 \leq i \leq |\mathcal{C}_{N, k_0}|}$ which is equal to $(0, 0, \dots, 0, 1)$ by (3.33).

D.4 For all $j \in \llbracket 1, k_0 \rrbracket$, construct recursively the list of $(c_{k(i), x(i)}^{(N)})_{j|\mathcal{C}_{N, k_0}|+1 \leq i \leq (j+1)|\mathcal{C}_{N, k_0}|}$ using D.2, (3.47) and (3.48).

D.5 Compute $(b_{a, n})_{0 \leq n \leq k_0}$ using formula (3.32).

Let us now detail more precisely the steps of the algorithm.

Step D.1 consists in the construction of the list $(k(i), x(i))_{i \in \llbracket 1, (k_0+1)|\mathcal{C}_{N, k_0} \rrbracket}$. By definition of the enumeration, the hardest part consists in the construction of an enumeration of $(x(i))_{i \in \llbracket 1, |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket}$. We proceed as follows. First, we encode configurations by binary words: to every configuration $(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{C}_N$, associate the binary word obtained by concatenation of $b(x(1)), \dots, b(x(N))$, where $b(j)$ is the binary word of size j such that $b(j) = (0, \dots, 0, 1)$. This construction is clearly injective. Denote by $b(x)$ the word obtained by this method for all $x \in \mathcal{C}_N$. Note that the number of ones in $b(x)$ is exactly the number of bins in x . With these notations, one easily obtains $(x(i))_{i \in \llbracket 1, |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket}$ as a concatenation of enumerations of $\mathcal{C}_{N, k_0} \cap H_{N+1}, \dots, \mathcal{C}_{N, k_0} \cap H_1$ since $x \in H_j$ if and only if $b(x)$ ends with $N + 1 - j$ ones. Therefore, it suffices to explore of the binary tree in depth to construct $(x(i))_{i \in \llbracket 1, |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket}$, while stopping each time that the height of the browsed configuration goes beyond k_0 or that the number of ones in $b(x)$ goes beyond N .

Step D.2 is done as follows: construct an empty list L_j for each configuration in $x(j) \in \mathcal{C}_{N, k_0}$, and browse all the configurations $x(i) \in \mathcal{C}_{N, k_0}$, where $i, j \in \llbracket 1, |\mathcal{C}_{N, k_0}| \rrbracket$. Then, for every i , search for the indexes (j_1, \dots, j_{N+1}) corresponding to the configurations $x(i) + e_k$ and $\sigma_1(x(i))$. Finally, add i to each of the lists $L_{j_1}, \dots, L_{j_{N+1}}$.

Step D.3 is straightforward. Step D.4 is done using the recursive formulas (3.47) and (3.48), optimized with the step D.2 in order to reduce the algorithmic complexity since there is at most $(N + 1)|\mathcal{C}_{N, k_0}|$ couples (x, x') with $P_{x, x'}(q) \neq 0$ and the (x') 's such that $P_{x, x'}(q) \neq 0$ for a fixed x are known by step D.2. Step D.5 is also straightforward.

It is clear that this algorithm terminates since \mathcal{C}_{N, k_0} is finite (see the following Lemma 3.4.4). In the next section, we give the asymptotic computational complexity of this algorithm.

3.4.3. Asymptotic computational complexity

For all finite values of a , the algorithm presented in Section 3.4.2 has the interest to have polynomial complexity in the order k_0 of the Taylor expansion. We prove this fact in this section.

Lemma 3.4.4. *The set \mathcal{C}_{N, k_0} defined in (3.44) is finite. In addition,*

$$|\mathcal{C}_{N, k_0}| \sim \kappa_N k_0^{N/2} \text{ as } k_0 \text{ goes to infinity,}$$

where $\kappa_N = (\pi/2)^{N/2} \Gamma(N/2 + 1)^{-1}$.

Proof. Denote by $B_d(r)$ the closed ball with center 0 and radius r in dimension d for the euclidean norm. Since $|\mathcal{C}_{N, k_0}|$ denotes the number of $(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$ such that $\binom{n_1}{2} + \dots + \binom{n_N}{2} \leq k_0$. Since

$\binom{n}{2}$ is between $(n-1)^2/2$ and $n^2/2$ for every $n \in \mathbb{N}$, one obtains the following implications:

$$\|(n_1, \dots, n_N)\|_2 \leq \sqrt{2k_0} \Rightarrow \binom{n_1}{2} + \dots + \binom{n_N}{2} \leq k_0 \Rightarrow \|(n_1 - 1, \dots, n_N - 1)\|_2 \leq \sqrt{2k_0}.$$

Therefore, one has the following upper and lower bounds for $|\mathcal{C}_{N,k_0}|$:

$$|\mathbb{N}^d \cap B_N(\sqrt{2k_0})| \leq |\mathcal{C}_{N,k_0}| \leq |(\mathbb{Z}_{\geq 0})^d \cap B_N(\sqrt{2k_0})|.$$

Since the volume of $B_N(r)$ is $\frac{\pi^{N/2} r^N}{\Gamma(N/2+1)}$, by Riemann sum, $|\mathcal{C}_{N,k_0}|$ is equivalent to $\kappa_N k_0^{N/2}$ as k_0 goes to infinity. \square

Proposition 3.4.5. *The asymptotic computational complexity of the algorithm presented in section 3.4.2 is polynomial in k_0 as k_0 goes to infinity.*

Proof. Recall that by Lemma 3.4.4, $|\mathcal{C}_{N,k_0}|$ is equivalent to $\kappa_N k_0^N$, where κ_N depends only on N .

It is easy to check that step D.3 has asymptotic complexity on the order of $|\mathcal{C}_{N,k_0}|$, which is on the order of $k_0^{N/2}$.

Step D.5 has order $k_0 \times |\mathcal{C}_{N,k_0}|$ which is on the order of $k_0^{N/2+1}$ since one only needs to browse the coefficients obtained at step D.4.

Step D.2 has complexity of order at most $|\mathcal{C}_{N,k_0}|^2$, since there are $|\mathcal{C}_{N,k_0}|$ configurations to browse, and for each of those, there are $(N+1)$ researches of configurations to do in a list of $|\mathcal{C}_{N,k_0}|$ configurations.

Let us prove that step D.1 has complexity of order at most $k_0 |\mathcal{C}_{N,k_0}|$. Note that this is equivalent to count the number of vertices in the binary tree used in that step, and each of those steps corresponds to a configuration with at most N bins and height at most k_0 . In addition, if a configuration has height at most k_0 , it contains at most $2k_0 + N$ particles by definition of the height. Therefore, the number of vertices in the binary tree is dominated by the sum over $n \leq N$ of the number of ways to put a number $l \leq 2k_0 + N$ particles in n bins:

$$\sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^{2k_0+N} \binom{n-1+l}{n-1}.$$

Since $\binom{n-1+l}{n-1} \leq (2k_0 + 2N - 1)^N$, this sum is on the order of k_0^{N+1} as k goes to infinity.

It remains to give the asymptotic complexity of D.4. Since the list of the indexes of the configurations x' such that $P_{x',x}(q) \neq 0$ are computed at step C.2 for every x , the sums over $x \in \mathcal{C}_{N,k_0}$ (3.34) and (3.35) re-writes as sum over all configuration in the list L_i corresponding to the configuration $x(i)$ for every $k \in \llbracket 1, k_0 \rrbracket$. By construction, the union of the L_i 's for $i \in \llbracket 1, |\mathcal{C}_{N,k_0}| \rrbracket$ contains at most $(N+1)|\mathcal{C}_{N,k_0}| = (N+1)k_0^{N/2}$ elements. Therefore, the complexity of this step is on the order of $k_0^{N/2+1}$. \square

Remark 3.4.6. Note that the complexity of step *D.2* may be reduced to a complexity of order $|\mathcal{C}_{N,k_0}|$ if one indexes the list of entering edges by the configurations instead of their indices. This may be done using for instance a dictionary (python) instead of a list.

Acknowledgements for Chapter 3

I warmly thank Andrew Elvey Price, Sanjay Ramassamy and Arvind Singh for fruitful discussions. We are thankful to Marie Th  ret and Régine Marchand for their careful reading of the paper, and their various comments.

4 - A hydrodynamic limit of the infinite bin model: the liquid bin model

Abstract

In this chapter, we introduce a hydrodynamic limit of the infinite bin model called the liquid bin model. This hydrodynamic limit is a time-continuous deterministic process. We will prove the convergence in distribution of the infinite bin model (seen as a stochastic process) to the liquid bin model. Additionally, we will prove the convergence in time of the liquid bin model to a stationary configuration. Contrary to the infinite bin model, the liquid bin model is exactly solvable: in the stationary regime, we will compute the formula for the front's speed of the liquid bin model. This front's speed satisfies a "wall-crossing" phenomena. More precisely, it is a continuous function of the parameters, and the space of parameters is partitioned in regions on which the front's speed coincides with a rational function on each of those regions. We will prove that those regions are indexed by combinatorial objects counted by Catalan numbers.

4.1. Introduction

The infinite bin model is an interacting particle system corresponding to a rank-biased discrete-time branching random walk. It was introduced in 2003 by Foss and Konstantopoulos [FK03] and further studied in [FZ13; CR17; MR21; MR19; FKP23; MRS24]. The state space consists of infinitely many bins indexed by \mathbb{Z} , with each of them containing a finite number of particles. We require that there exists a non-empty bin such that all the bins to its right are empty. Such a bin is called the *front* of the system. The infinite bin model is parameterized by a probability measure μ on $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. At each time step $n \geq 1$, we find the ξ_n -th rightmost particle, where the $(\xi_n)_{n \geq 1}$ are i.i.d. distributed like μ , and we add a particle in the bin immediately to its right. It doesn't matter how ties are broken within a bin to determine which particle is the ξ_n -th rightmost one. One may show using sub-additivity that the front moves to the right at a linear speed $v_\mu \in (0, 1]$, a constant depending only on μ and not on the starting configuration [FK03; MR21]. For more information on this model, one can refer to Chapter 1, Section 1.2.5.

Special cases of interest for μ include:

1. geometric distributions, where the infinite bin model can be coupled to Barak-Erdős random graphs and v_μ gives the linear growth rate of the length of the longest path in such graphs ;
2. the uniform distribution on $\llbracket 1, k \rrbracket$ for some $k \in \mathbb{N}$, which can be coupled with a branching random walk with selection of the rightmost k individuals [AP83; MR21].

In general, computing v_μ for a given μ is difficult. When μ has a finite support bounded by $K \geq 1$, v_μ is a rational function of the probabilities of each integer in the support. However the formulas quickly become very intricate as K grows, even if we restrict ourselves to measures supported by just two integers.

In this chapter, we study a hydrodynamic limit of the infinite bin model, which we call the liquid bin model. It is a continuous-time deterministic model of liquid in bins, where liquid gets added according to some rules that arise as the hydrodynamic limits of the rule “Add a particle to the right of the k th particle with probability $\mu(k)$ ”. The precise definition of the liquid bin model is given in Subsection 4.2.1. In words, a configuration for the liquid bin model consists in infinitely many bins indexed by \mathbb{Z} . Each bin contains a non-negative real-valued quantity of liquid. Contrary to the infinite bin model, the content of each bin is not necessary integer valued. As for the infinite bin model, we assume that there exists a non-empty bin such that all the bins on its right are empty. This bin is said to be at the *front*. The model evolves in continuous time and in a deterministic way. The parameters of the model are an integer $N \geq 1$ corresponding to the number of rules, positive real numbers $a_1 < \dots < a_N$ describing the location where liquid is added and $p_1, \dots, p_N > 0$ describing the rate at which liquid is added. For each couple of parameters (a_i, p_i) and at each time $t \geq 0$, we associate a bin depending on a_i and of the configuration at time t according to some deterministic rule. In this bin, we add liquid at rate p_i . Since the quantity of liquid in the bins changes with time, the index of the bin associated to (a_i, p_i) will also change with time. As for the infinite bin model, we will see that the front moves to the right at a linear speed that depends on the parameters of the model. In this setting, the computation of the speed becomes more tractable and some nice combinatorial structures emerge.

In Section 4.6 (Theorem 4.6.1), we show the convergence of the stochastic discrete-time infinite bin model with distribution $\nu^{(s)}$ to the deterministic continuous-time liquid bin model with parameters $(a_1, \dots, a_N, p_1, \dots, p_N)$, where

$$\nu^{(s)} := \sum_{i=1}^N p_i \delta_{\lfloor sa_i \rfloor}.$$

The remaining results from this chapter are deterministic results on the liquid bin model.

We show that for a fixed choice of parameters, there exists a unique stationary trajectory and that starting from any initial configuration, the system converges exponentially fast to the stationary regime (Theorem 4.3.8). The stationary liquid bin model may be interpreted as a travelling wave.

Moreover, we show that the parameter space is divided into regions that are labelled by Dyck paths, combinatorial objects counted by Catalan numbers. Inside each region, the speed of the liquid bin model is an explicit rational function of the parameters readily computable from the Dyck path labelling the region (Theorem 4.4.8). Finally we show that each region has a non-empty interior (Theorem 4.4.12).

The fact that the speed of the front of the liquid bin model is a piecewise rational function on the parameter space (we also show in Lemma 4.4.13 that this function is continuous on the entire space) corresponds to a *wall-crossing phenomenon*. The space is divided into regions by “walls” (hypersurfaces)

and the formulas are different inside each region. Similar wall-crossing phenomena where the regions are labelled by combinatorial objects have appeared in other fields. In enumerative geometry, double Hurwitz numbers were shown to be piecewise polynomial functions of the parts of the partitions which index them [GJV05; SSV08; CJM10; CJM11; Joh15]. In mathematical physics, correlation functions for the quantum symmetric simple exclusion process were shown to be piecewise polynomial, with regions of polynomiality indexed by cyclic permutations [BJ21; Bia24]. We point out that a phenomenon with a similar flavor appears in [Hup+19], where the authors count equivalence classes of periodic stationary travelling wave solutions to the lattice Nagumo equation and label such equivalence classes by combinatorial objects that are words. In the case of the liquid bin model, another way to interpret this wall-crossing phenomenon is to see it as a phase transition for an out-of-equilibrium system.

In Theorem 4.5.2, we characterize when two regions are adjacent and we compute the dimension of their common boundary as an elementary function of the Dyck paths indexing the regions. The adjacency structure of the regions corresponds exactly to the Stanley lattice for Dyck paths [BB09].

The results for the liquid bin model are proved by mapping it to a more tractable model of cars driving one behind the other on a semi-infinite road. See Section 4.2 for the definition of the car model and its mapping to the liquid bin model. In the remainder of this chapter, we will state the results in terms of the car model instead of in terms of the liquid bin model: since those two models are equivalent by Proposition 4.2.4, one can translate all the results on the car model into results on the liquid bin model.

Organization of the paper

In Section 4.2, we give the definition of the liquid bin model (Subsection 4.2.1). Then, we define the car model and we prove the equivalence between the two models (Subsection 4.2.2).

In Section 4.3, we prove basic properties on the car model that we will use in Subsection 4.3.3 in order to prove the convergence in time of the stationary configuration to the unique stationary configuration.

In Section 4.4, we introduce the combinatorial objects indexing the regions of parameters on which the front's speed is a rational function of the parameter (Subsection 4.4.1). Then, we give the formula of the front's speed on each region (Subsection 4.4.2) and we prove that each of those region has non-empty interior 4.4.3. In Section 4.5, we characterize the frontier of each of those regions, and we compute the dimension of the common frontier between any two of those regions. We give some examples of formulas for the front's speed and for the boundaries of the region of parameters on which this formula hold in Subsection 4.5.3. In Section 4.6, we prove the convergence of the infinite bin model to the liquid bin model.

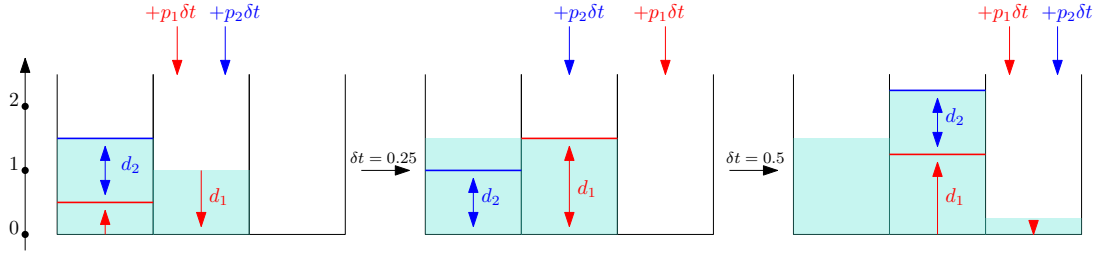


Figure 4.1 – Illustration of the dynamics of the liquid bin model with parameters $N = 2$, $a_1 = 1.5$, $p_1 = 0.5$, $a_2 = 2.5$, $p_2 = 1.5$. The cursor 1 (respectively 2) is represented in red (resp. blue): under and on its right, there is always a_1 (resp. a_2) quantity of liquid. After a time 0.25, starting from the configuration on the left, the cursor 1 goes from bin 1 to bin 2. Here $d_1 = a_1$ and $d_2 = a_2 - a_1$.

4.2. The liquid bin model

4.2.1. Definition of the liquid bin model

Say that a *configuration* is an element $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ of $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{Z}}$. One may interpret x as a configuration of liquid in bins indexed by \mathbb{Z} , where $x_k \geq 0$ represents the quantity of liquid in the k -th bin, for all $k \in \mathbb{Z}$. A configuration x is called *admissible* if the following two conditions are satisfied:

- There is an infinite quantity of liquid in the configuration: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = +\infty$.
- There exists $f(x) \in \mathbb{Z}$ such that for all $k \in \mathbb{Z}$, x_k is positive if and only if $k \leq f(x)$. $f(x)$ is called the *front* of x .

Denote the set of admissible configurations of bins by \mathcal{A} .

Throughout the chapter, we will fix $N \in \mathbb{N}$ and denote N -tuples using the underline notation. For example the N -tuple (a_1, \dots, a_N) will be denoted by \underline{a} . Using this notation, $(\underline{a}, \underline{p})$ will denote the $2N$ -tuple $(a_1, \dots, a_N, p_1, \dots, p_N)$.

Let P^{2N} denote the set of all the $2N$ -tuples $(\underline{a}, \underline{p})$ of positive real numbers such that $a_i < a_{i+1}$ for all $1 \leq i \leq N - 1$. We adopt the convention that $a_0 := 0$ and $a_{N+1} := \infty$. We will also use the alternative parameters \underline{d} and \underline{q} , where for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $d_i := a_i - a_{i-1}$ and $q_i := \sum_{j=1}^i p_j$. By convention, $q_0 := 0$.

Let us introduce a deterministic dynamics associated to the parameters $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ on the set of configurations \mathcal{A} . For $x \in \mathcal{A}$ and $1 \leq i \leq N$, the i -th *cursor* $c_i(x)$ is defined as the highest index among bins, such that the total amount of liquid in that bin and to its right is at least a_i . More precisely,

$$c_i(x) := \max \left\{ m \in \mathbb{Z} \mid \sum_{k \geq m} x_k \geq a_i \right\}.$$

for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Notice that $-\infty < c_i(x) < +\infty$ for all $x \in \mathcal{A}$ since there is an infinite amount of liquid in x and the front of x is non-trivial. By definition of the i -th cursor,

$$\sum_{k \geq c_i(x)+1} x_k < a_i \leq \sum_{k \geq c_i(x)} x_k.$$

Heuristically, we define the dynamics as follows: from time t to $t+\delta t$, if $x(t)$ represents the configuration at time t , liquid is added to the bin $c_i(x(t)) + 1$ at rate p_i for all $1 \leq i \leq N$. It is important to note that the positions of the cursors are nondecreasing functions of time. In the above heuristics, we take δt to be small enough so that for all i , $c_i(x(\cdot))$ stays constant between times t and $t + \delta t$. We provide an illustration of this dynamical process in Figure 4.1.

Let us now construct the dynamics Φ of the liquid bin model in more rigorous terms. More precisely, denote by $e(j) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$ the sequence such that $e_k(j) = \mathbf{1}_{k=j}$. Define $\Phi^{(0)}$ as the map from $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{A}$ to \mathcal{A} , such that for all $x \in \mathcal{A}$ and $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\Phi^{(0)}(t, x) := x + t \sum_{i=1}^N p_i \cdot e(c_i(x) + 1). \quad (4.1)$$

Let $\tau_1(x)$ be the first positive time at which a cursor changes position starting from the configuration x for the dynamics $\Phi^{(0)}$:

$$\tau_1(x) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* \mid \exists i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \sum_{k \geq c_i(x)+1} (\Phi^{(0)}(t, x))_k = a_i \right\}. \quad (4.2)$$

Remark 4.2.1. By definition of τ_1 , notice that

$$\tau_1(x) := \min_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{a_i - \sum_{k \geq c_i(x)+1} x_k}{\sum_{j, c_j(x) \geq c_i(x)} p_j} \right).$$

For all times $t \leq \tau_1(x)$, $\Phi^{(0)}(t, x)$ corresponds to the dynamics of the bin model. After time $\tau_1(x)$, at least one cursor position changed. Therefore, $\Phi^{(0)}(t, x)$ no longer aligns with the dynamics of the liquid bin model as previously heuristically defined. Then, set the map Φ such that for all $x \in \mathcal{A}$ and $0 \leq t \leq \tau_1(x)$,

$$\Phi(t, x) := \Phi^{(0)}(t, x).$$

By induction on l , let us construct the sequence of times at which a cursor jumps $(\tau_k(x))_{1 \leq k \leq l}$ and the restriction of $\Phi(\cdot, x)$ to the interval of time $[0, \tau_l(x)]$. Set $\tau_l(x) = \tau_{l-1}(x) + \tau_1(\Phi(\tau_{l-1}(x), x))$ for all $l \geq 2$, with the convention that $\tau_0(x) = 0$. Let us construct the dynamics Φ by induction, resetting the dynamics according to the cursors at each time $\tau_l(x)$. We define $\Phi(t, x)$ for all values of $t \in [\tau_l(x), \tau_{l+1}(x)]$ by induction on l as

$$\Phi(t, x) := \Phi^{(0)}(t - \tau_l(x), \Phi(\tau_l(x), x)).$$

Heuristically, one may define $\Phi(t, x)$ as the unique function such that $\Phi(0, x) = x$ and such that for every $k, t \mapsto \Phi(t, x)$ is the piecewise affine function satisfying $\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N p_i \mathbb{1}_{c_i(x(t))=k-1}$ away from the times when a cursor jumps.

Remark 4.2.2. With this definition, $\Phi(t, x)$ is well defined for all $t \in \mathbb{R}_+$ for all $x \in \mathcal{A}$. To prove this, let us show that $\tau_l(x)$ converges to $+\infty$ as l tends to $+\infty$ for every configuration $x \in \mathcal{A}$. Consider $(t_l)_{l \geq 1}$ the sub-sequence of $(\tau_l(x))_{l \geq 1}$ consisting of all times at which cursor 1 changes its position. Notice that at all times, the rate of liquid added to the right of cursor 1 is lower bounded by $q_1 = p_1$ and upper bounded by $q_N = p_1 + \dots + p_N$. Therefore, for all $l \geq 1$, $\frac{q_1}{q_N} \leq t_l - t_{l-1} \leq \frac{q_1}{q_1}$. As a consequence, the sequence $(t_l)_{l \geq 1}$ tends to infinity as l goes to infinity. Since $(\tau_l(x))_{l \geq 1}$ is increasing, it tends to infinity as l goes to infinity.

Example 4.2.3. Let $x^{(0)}$ be the configuration such $x_k^{(0)} = 1.5$ for $k \leq 1$, $x_2^{(0)} = 1$ and $x_k^{(0)} = 0$ for $k \geq 3$, as illustrated on the left in Figure 4.1. Then the three bins represented in the middle of Figure 4.1 correspond to the bins 1, 2 and 3 of the configuration $x^{(1)} := \Phi(0.25, x^{(0)})$. The three bins on the right in Figure 4.1 correspond to the configuration $\Phi(0.5, x^{(1)}) = \Phi(0.75, x^{(0)})$. Note that $\tau_1(x^{(0)}) = 0.25$ and $\tau_1(x^{(1)}) = 0.5$, as these are the first two times at which a cursor changes bins.

4.2.2. Coupling with a car model

The dynamics of the car model

In this sub-section, we give an interpretation of the liquid bin model in terms of a model of cars evolving on $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

The car model is defined heuristically as follows: at position a_i , there is a road sign telling cars to move at speed $q_i = p_1 + \dots + p_i$. A road sign is visible to a car if and only if there is no other car between it and the car (one may imagine that the speed limits are painted on the floor, with cars hiding them from those behind). At any time, the speed of each car is equal to the maximal speed restriction that they have seen or can see: A car moves at speed q_i if and only if i is the greatest index of road signs visible to this car, or already passed by this car. See Figure 4.2 for an illustration of the car model. As will be apparent when we describe the coupling between the bin model and the car model, it is more convenient to direct the positive real half-line towards the left for the car model.

More precisely, denote by \mathcal{C} the set consisting of all the elements $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})^{\mathbb{Z}}$ such that for some $f \in \mathbb{Z}$,

- $y_k = 0$ for all $k > f$,
- $0 < y_f < y_{f-1} < \dots$,
- $y_k \xrightarrow[k \rightarrow -\infty]{} +\infty$.

An element y of \mathcal{C} can be seen as a configuration of cars, where y_k is the position of the k -th car. When $y_k = +\infty$, assume there is no car with index k or less in the configuration y . For $y \in \mathcal{C}$, denote by $f(y) = \max\{k \in \mathbb{Z} : y_k > 0\}$ the index of the car closest to 0 among cars with positive positions. Note

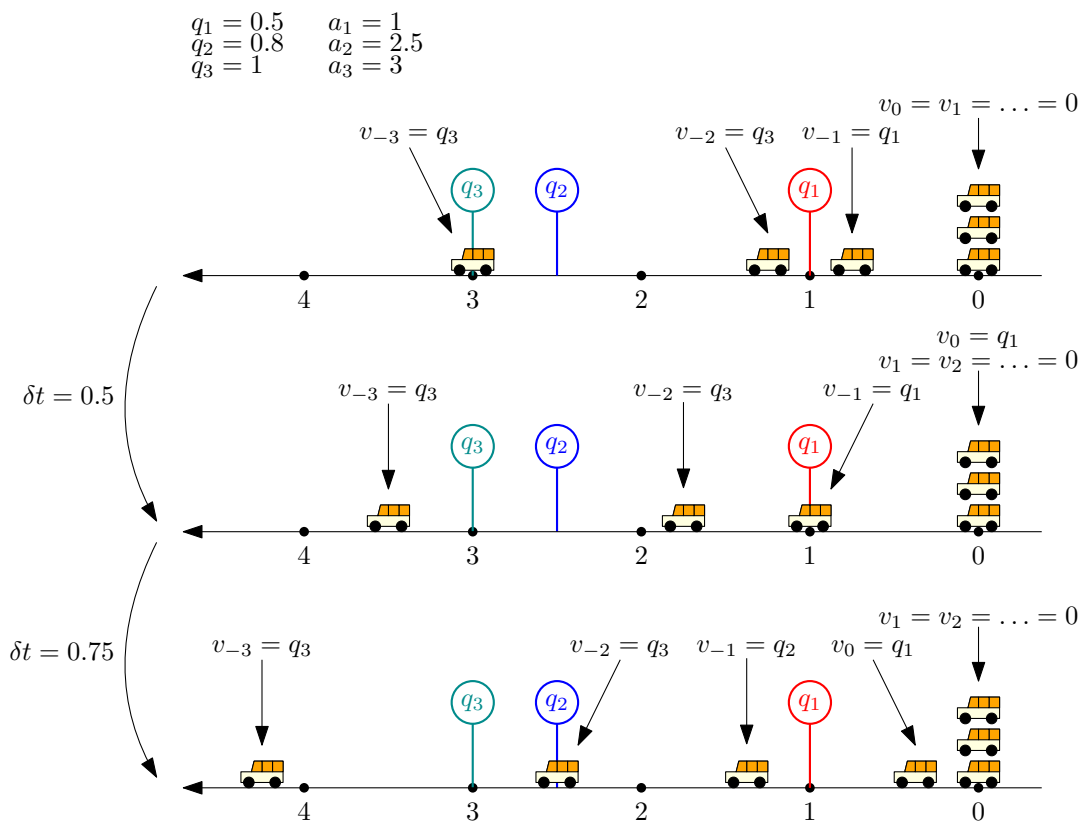


Figure 4.2 – Illustration of the dynamics of the car model for $N = 3$. The initial configuration is depicted at the top. On the figure, v_i denotes the speed of the car with index i . After 0.5 units of time, the car -1 arrives at position a_1 . Therefore, the car 0 starts moving at speed q_1 . Then, after 0.75 units of time, the car -2 arrives at position a_2 . Therefore, the car -1 now moves at speed q_2 .

that by definition of \mathcal{C} , for any configuration $y \in \mathcal{C}$, there is an infinite number of cars at position 0. Moreover, by the third point, there is a finite number of cars with position in any compact subset of \mathbb{R}_+^* .

As we did for the liquid bin model, let us construct the dynamics Ψ of the car model. For $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, set

$$\widehat{c}_i(y) := \max \{ k \in \mathbb{Z} \mid y_k \geq a_i \}.$$

By definition of \mathcal{C} , $-\infty < \widehat{c}_i(y) < +\infty$ for all $y \in \mathcal{C}$. According to the heuristic of the dynamics, since $\widehat{c}_i(y)$ is the last car which passed by the road sign at position a_i , we want $\widehat{c}_i(y) + 1$ to be the largest index among indices of cars moving at speed at least q_i . Then, consider the map $\Psi^{(0)}$ such that for all $t \in \mathbb{R}_+$ and $y \in \mathcal{C}$,

$$\Psi^{(0)}(t, y) = y + t \sum_{i=1}^N p_i \cdot \widehat{e}(\widehat{c}_i(y) + 1), \quad (4.3)$$

where for all $j \in \mathbb{Z}$, $\widehat{e}(j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ is the sequence where $\widehat{e}_k(j) = \mathbf{1}_{k \leq j}$.

One may give an alternative definition of $\Psi^{(0)}$ that is equivalent to (4.3). We adopt the convention that $a_0 = 0$. For $k \in \mathbb{Z}$, set

$$\widehat{i}_k(y) := \max \{ i \in \llbracket 0, N \rrbracket : a_i \leq y_{k-1} \},$$

representing the greatest index of the road signs passed by the $(k - 1)$ -th car. For $t \in \mathbb{R}_+$, notice that

$$\Psi_k^{(0)}(t, y) = y_k + t \cdot q_{\widehat{i}_k(y)}, \quad (4.4)$$

where $\Psi_k^{(0)}(t, y)$ corresponds to the position of the k -th car in $\Psi^{(0)}(t, y)$. With this definition, $\widehat{i}_k(y)$ is the index of the leftmost road sign that is or was visible to the k -th car in the configuration $y \in \mathcal{C}$.

Set $\widehat{\tau}_1(y)$ to be the first time at which a car crosses a road sign:

$$\widehat{\tau}_1(y) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \exists (k, i) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 1, N \rrbracket, \Psi_k^{(0)}(t, y) = a_i \right\}. \quad (4.5)$$

After this time, the speed of at least one of the cars changes. Then, define the map Ψ such that for all $y \in \mathcal{C}$ and $0 \leq t \leq \widehat{\tau}_1(y)$,

$$\Psi(t, y) := \Psi^{(0)}(t, y).$$

To construct $\Psi(t, y)$ for all $t > 0$, proceed recursively as done with the liquid bin model: set by induction $\widehat{\tau}_l(y) = \widehat{\tau}_{l-1}(y) + \widehat{\tau}_1(\Psi(\widehat{\tau}_{l-1}(y), y))$ for all $l \geq 2$. We define $\Psi(t, y)$ for all values of $t \in [\widehat{\tau}_l(y), \widehat{\tau}_{l+1}(y)]$ by induction on l as

$$\Psi(t, y) := \Psi^{(0)}(t - \widehat{\tau}_l(y), \Psi(\widehat{\tau}_l(y), y)).$$

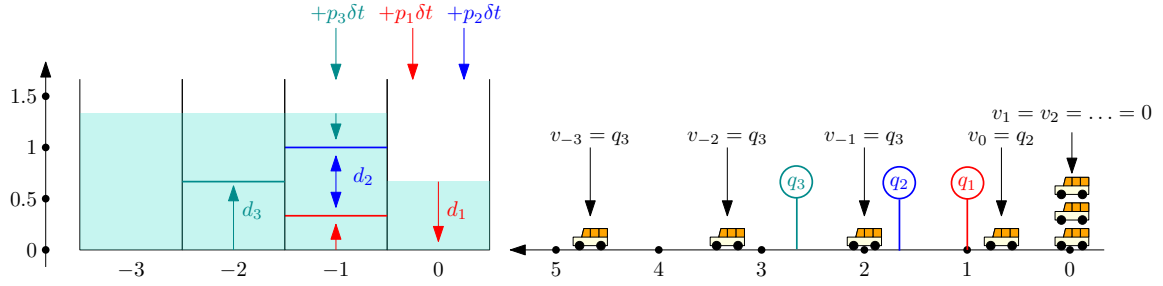


Figure 4.3 – Illustration of the coupling between the liquid bin model and the car model with parameters $N = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{2}{3}$, $d_3 = 1$. For this bin configuration, we assume that the bins with indices greater than zero are empty so that the front position is 0. The difference of positions between consecutive cars in the car model corresponds to the quantity of liquid in the bins in the liquid bin model. The speed of each car is indicated above each of them.

The coupling between the liquid bin model and the car model

Denote by $\Sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ the map such that for any bin configuration $x \in \mathcal{A}$,

$$\Sigma x = \left(\sum_{j=k}^{+\infty} x_j \right)_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (4.6)$$

It is easy to check that Σ is a one-to-one correspondence from \mathcal{A} to \mathcal{C} . In this subsection, we prove the equivalence of the liquid bin model and the car model via the following coupling property:

Proposition 4.2.4 (coupling property). *For all $t \in \mathbb{R}_+$, $\Psi(t, \cdot) \circ \Sigma = \Sigma \circ \Phi(t, \cdot)$.*

We give an illustration of this coupling property in Figure 4.3. Heuristically, the car at position y_k is associated to the wall separating the bins of indices $k - 1$ and k , in such a way that the amount of liquid x_k in the bin of index k is given by the difference $y_k - y_{k+1}$.

Proof. Since the liquid bin model and the car model are constructed recursively, it suffices to show that:

1. for all $t \geq 0$, $\Psi^{(0)}(t, \cdot) \circ \Sigma = \Sigma \circ \Phi^{(0)}(t, \cdot)$,
2. $\tau_1 = \hat{\tau}_1 \circ \Sigma$.

We start with the proof of the first point. Note that $e(j) \notin \mathcal{A}$ for any $j \in \mathbb{Z}$, because it contains only a finite total amount of liquid. We define \mathcal{A}' to be the set of all the configurations of liquid in bins which have a finite front (but may have a finite total amount of liquid). The definition of the map Σ can be extended to \mathcal{A}' , thus $\Sigma e(j)$ becomes well-defined for any $j \in \mathbb{Z}$. It is straightforward that

$c_i(x) = \widehat{c}_i(\Sigma x)$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, that Σ is linear and that $\widehat{e}(j) = \Sigma e(j)$ for all $j \in \mathbb{Z}$. Therefore,

$$\begin{aligned}
\Psi^{(0)}(t, \Sigma x) &= \Sigma x + \sum_{i=1}^N p_i \cdot \widehat{e}(\widehat{c}_i(\Sigma x) + 1) \\
&= \Sigma x + \sum_{i=1}^N p_i \cdot \Sigma e(\widehat{c}_i(\Sigma x) + 1) \\
&= \Sigma x + \sum_{i=1}^N p_i \cdot \Sigma e(c_i(x) + 1) \\
&= \Sigma \left(x + \sum_{i=1}^N p_i \cdot e(c_i(x) + 1) \right) \\
&= \Sigma \left(\Phi^{(0)}(t, x) \right)
\end{aligned}$$

Since the car with index $\widehat{c}_i(y)$ is the closest car lying to the left of road sign i , by (4.5), notice that

$$\widehat{\tau}_1(x) = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \exists i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \Psi_{\widehat{c}_i(y)+1}^{(0)}(t, y) = a_i \right\}.$$

Therefore, the second point is a straightforward consequence of the first point by (4.2). \square

Remark 4.2.5. Since $\widehat{\tau}_l(\Sigma x) = \tau_l(x)$ for all $l \geq 1$ and $x \in \mathcal{A}$, $\Psi(t, y)$ is also well-defined for all $t \in \mathbb{R}_+$ and $y \in \mathcal{C}$ by Remark 4.2.2.

4.3. Properties of the car model

In this section, the parameters $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ are kept constant. The goal of this section is to establish the convergence in time of the car model, and consequently, of the liquid bin model, to a stationary configuration. The main result of this section is Theorem 4.3.8, stating the uniqueness of the stationary configuration and the convergence result.

4.3.1. Stationary configurations and trajectories

From now on, consider an initial configuration of cars $y(0) \in \mathcal{C}$ and set

$$y(t) := \Psi(t, y(0))$$

to be the configuration of cars obtained after time $t \geq 0$. Denote by

$$y_k(t) := \Psi_k(t, y(0))$$

the position of the k -th car at time t for all $k \in \mathbb{Z}$. We say that $t \mapsto y_k(t)$ is the *trajectory* of the k -th car.

Let us show some basic results on trajectories. Consider $k \in \mathbb{Z}$. If $y_k(0) \geq a_1$, then the k -th car moves at least at speed q_1 at any time $t \geq 0$ by construction of the car model. Moreover, among all cars with positions in $[0, a_1]$, only the one with maximal position moves. Since there are finitely many cars with positions in $(0, a_1]$ in any configuration in \mathcal{C} , each car in the system will eventually move. As a consequence, for any $k \in \mathbb{Z}$ and for any position $x > y_k(0)$, there exists a unique time at which the k -th car is at position x . Denote by

$$T_k := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : y_{k-1}(t) \geq a_1\}$$

the time at which the k -th car starts moving. Then, the restriction of y_k provides an increasing bijective function from $[T_k, +\infty)$ to $[y_k(0), +\infty)$. Let us denote by $t_k := y_k^{-1}$ the inverse of this bijection. Notice that for all $x > y_k(0)$, $t_k(x)$ is the only time at which the k -th car is at position x . For $0 \leq x < y_k(0)$, set $t_k(x) := 0$ by convention. For any $x \in \mathbb{R}$, we define the positive part of x to be $x_+ := \max(x, 0)$.

With these notations, one may give a recursive formula for the sequence of trajectories:

Proposition 4.3.1 (recursive formula). *With the above notations, for all $t \geq 0$ and $k \in \mathbb{Z}$ we have*

$$y_k(t) = y_k(0) + \sum_{i=1}^N p_i(t - t_{k-1}(a_i))_+. \quad (4.7)$$

Proof. It suffices to note that the k -th car gets from speed q_{i-1} to speed q_i as soon as car $k-1$ passes the road sign at position a_i for all $k \in \mathbb{Z}$ and $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, with the convention that $q_0 = 0$.

Fix $k \in \mathbb{Z}$. For all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, note that $t_{k-1}(a_i) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : y_{k-1}(t) \geq a_i\}$. Moreover, for all $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ and $t \in [t_{k-1}(a_i), t_{k-1}(a_{i+1}))$, $a_i \leq y_{k-1}(t) < a_{i+1}$. Thus, by (4.4), for all $t \in [t_{k-1}(a_i), t_{k-1}(a_{i+1}))$,

$$y_k(t) = y_k(t_{k-1}(a_i)) + (t - t_{k-1}(a_i))q_i.$$

As a consequence, for all $t \in [t_{k-1}(a_i), t_{k-1}(a_{i+1}))$, by induction on $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned} y_k(t) &= y_k(t_{k-1}(a_1)) + (t - t_{k-1}(a_1))q_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (t_{k-1}(a_{j+1}) - t_{k-1}(a_j))q_j \\ &= y_k(t_{k-1}(a_1)) + \sum_{j=1}^i (t - t_{k-1}(a_j))p_j, \end{aligned}$$

which coincides with (4.7) for $t \in [t_{k-1}(a_i), t_{k-1}(a_{i+1}))$, since $y_k(0) = y_k(t_{k-1}(a_1))$. \square

For all $k \in \mathbb{Z}$ and $t \in \mathbb{R}_+$, let \bar{y}_k be the trajectory of the k -th car in y shifted in time so that a car with this trajectory starts moving at time 0:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \bar{y}_k(t) := y_k(t + T_k). \quad (4.8)$$

The function \bar{t}_k defined as $\bar{t}_k(x) := t_k(x) - T_k$ for all $x \geq y_k(0)$ corresponds to the inverse function of \bar{y}_k from \mathbb{R}_+ to $[y_k(0), +\infty)$. We also adopt the convention that $\bar{t}_k(x) := 0$ for all $x < y_k(0)$.

Consider $k \in \mathbb{Z}$ such that $y_k(0) = 0$. By construction of the car model, $T_k = t_{k-1}(a_1)$ since the time at which the k -th car starts moving is the time at which the car of index $k - 1$ passes by the road sign at position a_1 . Then, by Proposition 4.3.1, for all $t \geq 0$ and $k \in \mathbb{Z}$ such that $y_k(0) = 0$, we have

$$\bar{y}_k(t) = \sum_{j=1}^N p_j(t - \bar{t}_{k-1}(a_j) + \bar{t}_{k-1}(a_1))_+. \quad (4.9)$$

Definition 4.3.2. A *stationary trajectory* is a continuous increasing map $t \mapsto \tilde{y}_\infty(t)$ from \mathbb{R}_+ to \mathbb{R}_+ such that for all $t \geq 0$,

$$\tilde{y}_\infty(t) = \sum_{j=1}^N p_j(t - \tilde{t}_\infty(a_j) + \tilde{t}_\infty(a_1))_+, \quad (4.10)$$

where $\tilde{t}_\infty := \tilde{y}_\infty^{-1}$ is the inverse function of \tilde{y}_∞ . In other words, \tilde{y}_∞ is a stationary trajectory if and only if it is a fixed point of (4.9).

Say that $(y_k(0))_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$ is a *stationary configuration* if there exists a stationary trajectory \tilde{y}_∞ such that for all $k \in \mathbb{Z}$ and $t \geq 0$, $\bar{y}_k(t) = \tilde{y}_\infty(t + \tilde{t}_\infty(y_k(0)))$.

4.3.2. Monotonicity property and existence of stationary trajectories

Definition 4.3.3. We say that a sequence of functions $(\check{y}_k)_{k \geq 0}$ from \mathbb{R}_+ to \mathbb{R}_+ satisfies *recurrence (R)* if the following statements all hold true:

- $\check{y}_0(0) = 0$;
- the function \check{y}_0 is continuous, piecewise linear and has at most N points of non-differentiability;
- the right derivative of \check{y}_0 is non-decreasing and takes values in $\{q_1, \dots, q_N\}$;
- for every $k \geq 1$, denoting by \check{t}_{k-1} the inverse function of \check{y}_{k-1} , we have

$$\check{y}_k(t) = \sum_{j=1}^N p_j(t - \check{t}_{k-1}(a_j) + \check{t}_{k-1}(a_1))_+. \quad (4.11)$$

To be a fully rigorous definition, one should check inductively that \check{y}_k is indeed a bijection from \mathbb{R}_+ to \mathbb{R}_+ . This holds true for $k = 0$ by the first three assumptions of the definition, since it is continuous, increasing and takes value 0 at 0. Moreover, it is easy to see from (4.11) that \check{y}_k takes value 0 at 0, is continuous and increasing. For functions \check{y}_k satisfying recurrence (R), we shall always denote their inverse functions by \check{t}_k and their right derivative functions by \check{v}_k . Right-differentiating (4.11), we get that for all $t \in \mathbb{R}_+$ and $k \in \mathbb{Z}$,

$$\check{v}_k(t) = \sum_{j=1}^N p_j \mathbb{1}_{t \geq \check{t}_{k-1}(a_j) - \check{t}_{k-1}(a_1)}. \quad (4.12)$$

It follows from (4.9) that the shifted car trajectories $(\check{y}_k)_{k \geq k_0}$ satisfy recurrence (R) whenever $y_{k_0}(0) = 0$. The following Lemma 4.3.4 shows that recurrence (R) is monotonous in the right derivative \check{v}_0 of \check{y}_0 . After that, we will consider the behavior of a minimal and a maximal solution to recurrence (R) and deduce from it the convergence in time to a stationary configuration (Theorem 4.3.8).

Lemma 4.3.4 (Monotonicity property). *Let $(\check{y}_k^{(1)})_{k \geq 0}$ and $(\check{y}_k^{(2)})_{k \geq 0}$ be two sequences of functions satisfying recurrence (R), with inverses and right derivatives respectively denoted by $\check{t}_k^{(m)}$ and $\check{v}_k^{(m)}$ for $m = 1, 2$. Assume that*

$$\check{v}_0^{(1)} \circ \check{t}_0^{(1)} \leq \check{v}_0^{(2)} \circ \check{t}_0^{(2)}. \quad (4.13)$$

Then for all $k \in \mathbb{N}$,

$$\check{v}_k^{(1)} \circ \check{t}_k^{(1)} \leq \check{v}_k^{(2)} \circ \check{t}_k^{(2)}. \quad (4.14)$$

In other words, if for all $x \in \mathbb{R}_+^*$, the speed of the car 0, at the moment it reaches position x , is greater with initial condition $\check{v}_0^{(2)}$ than with initial condition $\check{v}_0^{(1)}$, then it also holds for the k -th car for every $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

In order to prove Lemma 4.3.4, let us first introduce some notations and make some useful remarks. Consider $j \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$, $m \in \{1, 2\}$ and $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Set

$$z_{k,j}^{(m)} := \check{t}_k^{(m)}(a_j) - \check{t}_k^{(m)}(a_{j-1}).$$

By definition, $z_{k,j}^{(m)}$ is the amount of time spent by the k -th car between positions a_{j-1} and a_j , when the car of index 0 has $\check{y}_0^{(m)}$ as a trajectory, with the conventions that $a_0 = 0$ and $a_{N+1} = +\infty$. By right differentiating $\check{t}_k^{(m)}$, we get

$$z_{k,j}^{(m)} = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{1}{\check{v}_k^{(m)} \circ \check{t}_k^{(m)}(s)} ds. \quad (4.15)$$

Notice that $z_{k,j+1}^{(m)}$ also corresponds to the amount of time during which the $(k+1)$ -th car moves at speed q_j , assuming that the car of index 0 has trajectory $\check{y}_0^{(m)}$. For all $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ and $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, set $\delta_{k,j}^{(m)} = q_j z_{k,j+1}^{(m)}$ to be the distance traveled by the $(k+1)$ -th car at speed q_j for the car model with initial car trajectory $\check{y}_0^{(m)}$. Note that $\delta_{k,N}^{(m)} = +\infty$ for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Consider $x \in \mathbb{R}_+$. If $\delta_{k,1}^{(m)} + \dots + \delta_{k,j-1}^{(m)} < x \leq \delta_{k,1}^{(m)} + \dots + \delta_{k,j}^{(m)}$, then $\check{v}_{k+1}^{(m)} \circ \check{t}_{k+1}^{(m)}(x) = q_j$. Therefore, for all $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\check{v}_{k+1}^{(m)} \circ \check{t}_{k+1}^{(m)}(x) = q_{j_k^{(m)}(x)}, \quad (4.16)$$

where $j_k^{(m)}(x) := \min\{j \in \llbracket 1, N \rrbracket : x \leq \delta_{k,1}^{(m)} + \dots + \delta_{k,j}^{(m)}\}$.

Proof of Lemma 4.3.4. Let us prove (4.14) by induction on k . The case $k = 0$ corresponds to assumption (4.13). Now, let us assume that (4.14) holds true for some $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. It follows from (4.15) and the induction hypothesis that for all $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $z_{k,j+1}^{(2)} \leq z_{k,j+1}^{(1)}$. Therefore $\delta_{k,j}^{(2)} \leq \delta_{k,j}^{(1)}$ for all $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, hence $j_k^{(1)}(x) \leq j_k^{(2)}(x)$ for all $x \in \mathbb{R}_+$. Since the sequence \underline{q} is increasing, it follows from (4.16) that for all $x \in \mathbb{R}_+$

$$\check{v}_{k+1}^{(1)} \circ \check{t}_{k+1}^{(1)}(x) \leq \check{v}_{k+1}^{(2)} \circ \check{t}_{k+1}^{(2)}(x),$$

which concludes the proof of the inductive step. \square

The following proposition is a consequence of Lemma 4.3.4. It provides a way to compare the trajectories of the k -th car for two initial trajectories satisfying some assumption.

Proposition 4.3.5. *We keep the notations of Lemma 4.3.4 and assume that (4.13) holds. Then, for all $k \in \mathbb{N}$,*

$$\check{y}_k^{(1)} \leq \check{y}_k^{(2)}. \quad (4.17)$$

Proof. By Lemma 4.3.4 and (4.15), we have that for all $k \in \mathbb{N}$ and $j \in \llbracket 2, N \rrbracket$

$$\check{t}_k^{(2)}(a_j) - \check{t}_k^{(2)}(a_1) = \int_{a_1}^{a_j} \frac{1}{\check{v}_k^{(2)} \circ \check{t}_k^{(2)}(s)} ds \leq \int_{a_1}^{a_j} \frac{1}{\check{v}_k^{(1)} \circ \check{t}_k^{(1)}(s)} ds = \check{t}_k^{(1)}(a_j) - \check{t}_k^{(1)}(a_1).$$

Inequality (4.17) follows from formula (4.11). \square

The following two Propositions 4.3.6 and 4.3.7 are corollaries of Proposition 4.3.5. Recall that for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $d_i = a_i - a_{i-1}$. Define

$$v_0^-(t) := p_1 + \sum_{i=2}^N p_i \mathbb{1}_{(t-d_1 q_1^{-1} \geq d_2 q_1^{-1} + d_3 q_2^{-1} + \dots + d_i q_{i-1}^{-1})} \quad \text{and} \quad v_0^+(t) := q_N. \quad (4.18)$$

Observe that v_0^- corresponds to the speed of a car that moves at speed q_1 between positions 0 and a_1 and at speed q_i between positions a_i and a_{i+1} for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Set also $y_0^\pm(t) := \int_0^t v_0^\pm(s) ds$ for all $t \in \mathbb{R}_+$, where \pm can be replaced either by $-$ or $+$. Finally define t_0^\pm to be the inverse function of y_0^\pm . Then for all $x \geq 0$,

$$(v_0^- \circ t_0^-)(x) = p_1 + \sum_{i=2}^N p_i \mathbb{1}_{x \geq a_i} \quad \text{and} \quad (v_0^+ \circ t_0^+)(x) = q_N. \quad (4.19)$$

Let $(y_k^\pm)_{k \geq 0}$ be the sequences satisfying recurrence (R) with first terms equal y_0^\pm . Set $(t_k^\pm)_{k \geq 0}$ to be their inverse functions and $(\bar{y}_k^\pm)_{k \geq 0}$ to be their right derivatives.

Proposition 4.3.6 (bounding trajectories). *Consider an initial configuration $y(0) \in \mathcal{C}$ and set $y(t) = \Psi(t, y(0))$ for every $t \in \mathbb{R}_+^*$. Consider $(\bar{y}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ as previously defined in (4.8). Set \bar{v}_k to be the right derivative of \bar{y}_k for all $k \in \mathbb{Z}$. Assume that for some $k_0 \in \mathbb{Z}$, $y_{k_0}(0) = 0$. Then, for all $k \geq k_0$,*

$$y_{k-k_0}^- \leq \bar{y}_k \leq y_{k-k_0}^+. \quad (4.20)$$

Proof. No matter what the initial configuration $y(0)$ is, when a car has position greater than a_i , its speed is at least q_i . Moreover, the speed of a car in motion is always at least q_1 and at most q_N . As a consequence, $v_0^- \circ t_0^- \leq \bar{v}_k \circ \bar{t}_k \leq v_0^+ \circ t_0^+$ for all $k \in \mathbb{Z}$.

Fix k_0 such that $y_{k_0}(0) = 0$. Since all three sequences $(\bar{y}_k)_{k \geq k_0}$ and $(y_{k-k_0}^\pm)_{k \geq k_0}$ satisfy the recursive formula (4.11), it follows from Proposition 4.3.5 that for the bounds (4.20) hold for all $k \geq k_0$. \square

Proposition 4.3.7 (Monotonicity and asymptotics of the bounds). *For all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,*

$$y_k^- \leq y_{k+1}^- \quad \text{and} \quad y_{k+1}^+ \leq y_k^+. \quad (4.21)$$

Denote by y_∞^\pm the pointwise limit of $(y_k^\pm)_k$ as k tends to infinity. Then both y_∞^- and y_∞^+ are stationary trajectories.

Proof. By Proposition 4.3.5, it suffices to show that $v_0^- \circ t_0^- \leq v_1^- \circ t_1^-$ and $v_1^+ \circ t_1^+ \leq v_0^+ \circ t_0^+$. Since $v_0^+ = q_N$ and $v_1^+ \circ t_1^+$ takes values in $\{q_1, \dots, q_N\}$, the second point is straightforward.

Let us turn to the first point. Since y_1^- is constructed according to the dynamics of the car model, when the corresponding car is at a position x in $(a_i, a_{i+1}]$ for $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, it moves at speed at least $q_i = v_0^- \circ t_0^-(x)$. Since this car starts from 0, when it is at a position x in $(0, a_1]$, its speed is at least $q_1 = v_0^- \circ t_0^-(x)$. This proves the first point.

Therefore, by Proposition 4.3.5 and by induction on $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$y_k^- \leq y_{k+1}^- \quad \text{and} \quad y_{k+1}^+ \leq y_k^+.$$

By (4.21), $(y_k^\pm)_{k \geq 0}$ converge to trajectories y_∞^\pm by monotonicity. Since $(y_k^\pm)_{k \geq 0}$ satisfy formula (4.11), it implies that y_∞^\pm are stationary trajectories. \square

At this point, there is no reason for the two stationary trajectories y_∞^\pm to be equal. In Subsection 4.3.3, we prove that they are equal, by uniqueness of the stationary configuration, and that the convergence in time starting from any initial trajectory to that stationary trajectory occurs exponentially fast.

4.3.3. Uniqueness of the stationary configuration and exponential convergence

The main result of this subsection is the following theorem, the proof of which is completed at the end of this section:

Theorem 4.3.8. *For any $(a, p) \in P^{2N}$, there is a unique stationary trajectory \tilde{y}_∞ for the car model. Moreover, there exists a constant $\kappa > 0$ such that for any initial configuration $y(0) \in \mathcal{C}$, any $k_0 \in \mathbb{Z}$ such that $y_{k_0}(0) = 0$ and any $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,*

$$\|\bar{y}_{k+k_0} - \tilde{y}_\infty\|_\infty \leq \kappa \cdot \left(1 - \frac{q_1}{q_N}\right)^k, \quad (4.22)$$

with $1 - \frac{q_1}{q_N} \in [0, 1)$.

Consider

loss of generality that $k_0 = 0$, namely that $y_0(0) = 0$. Recall that the shifted trajectories \bar{y}_k for $k \geq 0$ satisfy the recursive formula (4.9). Denoting the inverse function of each \bar{y}_k by \bar{t}_k and applying formula (4.9) at time $t = \bar{t}_k(a_i)$, we get

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, a_i = \sum_{j=1}^N p_j (\bar{t}_k(a_i) - \bar{t}_{k-1}(a_j) + \bar{t}_{k-1}(a_1))_+. \quad (4.23)$$

Knowing $(\bar{t}_{k-1}(a_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$, it is easy to deduce $(\bar{t}_k(a_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ from (4.23) if we know for which values of (i, j) we have

$$\bar{t}_k(a_i) > \bar{t}_{k-1}(a_j) - \bar{t}_{k-1}(a_1). \quad (4.24)$$

The car of index k starts moving when the car of index $k - 1$ reaches position a_1 . From that moment on, the car of index $k - 1$ takes an amount of time $\bar{t}_{k-1}(a_j) - \bar{t}_{k-1}(a_1)$ to reach position a_j . Inequality (4.24) is equivalent to requiring that the car of index k has not yet reached position a_i when the car of index $k - 1$ is at position a_j . For a fixed $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, the collection of values j such that (4.24) holds is thus some interval of the form $\llbracket 1, j_{\max} \rrbracket$ for some $j_{\max} \in \llbracket i, N \rrbracket$. In particular, if (4.24) holds for some $1 \leq i < j \leq N$, then

$$\bar{t}_k(a_{i'}) - \bar{t}_{k-1}(a_{j'}) + \bar{t}_{k-1}(a_1) \geq 0$$

for all $i \leq i' < j' \leq j$ by monotonicity of \bar{t}_k and \bar{t}_{k-1} . We shall encode by a graph all the pairs (i, j) with $i < j$ such that (4.24) holds.

Definition 4.3.9 (Downward closed graph). Consider a directed graph $G = (\llbracket 1, N \rrbracket, E(G))$ where all the edges $(i, j) \in E(G)$ are such that $i < j$. Then, G is called a *downward closed graph* (or *DC graph* for short) with N vertices if for all $i \leq i' < j' \leq j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, (i, j) is in $E(G)$ implies that (i', j') is in $E(G)$. Denote by DC_N the set of all downward closed graphs on N vertices.

For G a DC graph, denote by $b_G(i)$ the greatest vertex $j > i$ such that (i, j) is an edge of G . If there is no vertex $j > i$ linked to i in G , set $b_G(i) = i$. See Figure 4.4 for two examples.

Remark 4.3.10. There is a partial order \prec on the collection of pairs (i, j) such that $1 \leq i < j \leq N$, which is defined by $(i', j') \prec (i, j)$ if and only if $1 \leq i \leq i' < j' \leq j$. One may see this partial order more visually by drawing each vertex $1 \leq i \leq N$ of the graph at the point of coordinates $(i, 0)$ in the plane and drawing each edge (i, j) with $i < j$ as the semi-circle in the upper half-plane centered at the point of coordinates $(\frac{i+j}{2}, 0)$. Then $(i', j') \prec (i, j)$ whenever the edge (i', j') is drawn below the edge (i, j) . See Figure 4.4 for an illustration (on that figure we drew the edges $(i, i + 1)$ as straight line segments rather than semi-circles). The terminology downward closed graph was chosen to illustrate the fact that the edge set of such a graph is a downward closed set (aka lower set), namely if a pair (i, j) is present as an edge, then all the pairs below it are also present as edges.

Let G_k be the graph on the vertex set $\llbracket 1, N \rrbracket$ with edge set

$$E(G_k) = \{ (i, j) : 1 \leq i < j \leq N, \bar{t}_k(a_i) - \bar{t}_{k-1}(a_j) + \bar{t}_{k-1}(a_1) > 0 \}$$

Then $G_k \in \text{DC}_N$. Formula (4.24) holds if either $i \geq j$ or if (i, j) is an edge of G_k .

For any $G \in \text{DC}_N$, set $T(G)$ to be the map from \mathbb{R}^N to \mathbb{R}^N such that

$$\forall s = (s(1), \dots, s(N)) \in \mathbb{R}^N, \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, T(G)(s)(i) := \frac{1}{q_{b_G(i)}} \left(a_i + \sum_{j=1}^{b_G(i)} p_j (s(j) - s(1)) \right).$$

It follows from (4.23) that the sequence $((\bar{t}_k(a_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket})_{k \geq 0}$ is recursively defined by

$$\forall k \in \mathbb{N}, (\bar{t}_k(a_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} = T(G_k)((\bar{t}_{k-1}(a_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}). \quad (4.25)$$

The following lemma states that for a fixed DC graph G , the map $T(G)$ mainly behaves like a contraction. It is a first step in the proof of Theorem 4.3.8.

Lemma 4.3.11. *Consider $s^{(m)} = (s^{(m)}(i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \in (\mathbb{R}_+)^N$ with $m \in \{0, 1\}$. Assume that $0 < s^{(0)}(i) - s^{(0)}(i-1) \leq s^{(1)}(i) - s^{(1)}(i-1)$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, with the convention that $s^{(m)}(0) = 0$. Then for all $G \in \text{DC}_N$ and $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,*

$$T(G)(s^{(0)})(i) \leq T(G)(s^{(1)})(i).$$

Moreover,

$$\|T(G)(s^{(1)}) - T(G)(s^{(0)})\|_\infty \leq \left(1 - \frac{q_1}{q_N}\right) \|s^{(1)} - s^{(0)}\|_\infty.$$

Proof. Consider $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. By definition of $T(G)$,

$$T(G)(s^{(1)})(i) - T(G)(s^{(0)})(i) = \frac{1}{q_{b_G(i)}} \sum_{j=1}^{b_G(i)} p_j \left[s^{(1)}(j) - s^{(0)}(j) - (s^{(1)}(1) - s^{(0)}(1)) \right].$$

By assumption on $s^{(0)}$ and $s^{(1)}$, $s^{(0)}(j) - s^{(0)}(1) \leq s^{(1)}(j) - s^{(1)}(1)$ for all $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Therefore, we obtain the first part of the lemma:

$$0 \leq T(G)(s^{(1)})(i) - T(G)(s^{(0)})(i).$$

Moreover, notice that the term for $j = 1$ vanishes. We assumed that $s^{(0)}(1) \leq s^{(1)}(1)$, thus

$$0 \leq T(G)(s^{(1)})(i) - T(G)(s^{(0)})(i) \leq \frac{1}{q_{b_G(i)}} \sum_{j=2}^{b_G(i)} p_j \left[s^{(1)}(j) - s^{(0)}(j) \right].$$

Since $\frac{q_{b_G(i)} - q_1}{q_{b_G(i)}} \leq 1 - \frac{q_1}{q_N}$, we conclude that

$$\|T(G)(s^{(1)}) - T(G)(s^{(0)})\|_\infty \leq \left(1 - \frac{q_1}{q_N}\right) \|s^{(1)} - s^{(0)}\|_\infty.$$

□

Lemma 4.3.11 holds for a fixed graph G . Since the graph G_k used to construct $(\bar{t}_k(a_i))_k$ via the recursive formula (4.25) depends on k , we need to prove a stronger version of Lemma 4.3.11. For $m \in \{0, 1\}$ and $s^{(m)} \in (\mathbb{R}_+^*)^N$ such that $0 < s^{(m)}(1) < \dots < s^{(m)}(N)$, let $G^{(m)}$ be the DC graph with N vertices such that

$$E(G^{(m)}) = \{ (i, j) : 1 \leq i < j \leq N, t^{(m)}(a_i) - s^{(m)}(j) + s^{(m)}(1) > 0 \},$$

where $t^{(m)}$ is the inverse function of

$$y^{(m)} : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{j=1}^N p_j (t - s^{(m)}(j) + s^{(m)}(1))_+. \quad (4.26)$$

For all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, by evaluating the function $y^{(m)}$ at $t^{(m)}(a_i)$ and using the definition of $G^{(m)}$, we get

$$t^{(m)}(a_i) = T(G^{(m)})(s^{(m)})(i). \quad (4.27)$$

Lemma 4.3.12. Consider $(s^{(m)}(i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \in (\mathbb{R}_+^*)^N$ with $m \in \{0, 1\}$. Assume that $0 < s^{(0)}(i) - s^{(0)}(i-1) \leq s^{(1)}(i) - s^{(1)}(i-1)$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, with the convention that $s^{(m)}(0) = 0$. Then,

$$\|T(G^{(1)})(s^{(1)}) - T(G^{(0)})(s^{(0)})\|_\infty \leq \left(1 - \frac{q_1}{q_N}\right) \|s^{(1)} - s^{(0)}\|_\infty.$$

Proof. For all $\tau \in (0, 1)$, set $s^{(\tau)} := \tau s^{(1)} + (1 - \tau)s^{(0)}$ and

$$y^{(\tau)} : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{j=1}^N p_j (t - s^{(\tau)}(j) + s^{(\tau)}(1))_+. \quad (4.28)$$

Denote the inverse function of $y^{(\tau)}$ by $t^{(\tau)}$. Let $G^{(\tau)}$ be the DC graph with N vertices such that

$$E(G^{(\tau)}) = \{ (i, j) : 1 \leq i < j \leq N, t^{(\tau)}(a_i) - s^{(\tau)}(j) + s^{(\tau)}(1) > 0 \}.$$

For all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, by evaluating the function $y^{(\tau)}$ at $t^{(\tau)}(a_i)$ and using the definition of $G^{(\tau)}$, we get

$$t^{(\tau)}(a_i) = T(G^{(\tau)})(s^{(\tau)})(i). \quad (4.29)$$

Let us first prove that $\tau \in [0, 1] \mapsto T(G^{(\tau)})(s^{(\tau)})$ is continuous. By (4.29) and since $t^{(\tau)}$ is the inverse function of $y^{(\tau)}$, it suffices to prove that $\varphi : (\tau, t) \mapsto (\tau, y^{(\tau)}(t))$ is a homeomorphism from $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$ to itself. The continuity of φ follows from the definition (4.28) of $y^{(\tau)}(t)$. Since $t \mapsto y^{(\tau)}(t)$ is continuous, strictly increasing, bounded below by $q_1 t$ and equal to 0 at $t = 0$ for all $\tau \in [0, 1]$, φ is invertible. It remains to prove that φ^{-1} is continuous. Consider $M > 0$. Since $y^{(\tau)}(t)$ is bounded below by $q_1 t$ for all $t \in \mathbb{R}_+$ and $\tau \in [0, 1]$, the image of $[0, 1] \times [0, M]$ by φ contains $[0, 1] \times [0, q_1 M]$. Since $[0, 1] \times [0, M]$ is a compact, the restriction of φ to this set is a closed function. In particular, this implies that the restriction of φ^{-1} to $[0, 1] \times [0, q_1 M]$ is continuous. Since this result holds for all $M > 0$, φ^{-1} is continuous.

Next, let us show that there exist $r \geq 0$ and $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_r < \tau_{r+1} = 1$ such that $G^{(\tau)}$ is constant on each interval of the form (τ_h, τ_{h+1}) . If $\hat{\tau} \in (0, 1)$ is a value at which $G^{(\tau)}$ is not constant on an open neighborhood of $\hat{\tau}$, then there exist two distinct DC graphs G_0 and G'_0 which are accumulation points of $\tau \mapsto G^{(\tau)}$ at $\hat{\tau}$.

Consider $(u_n)_{n \geq 1}$ and $(u'_n)_{n \geq 1}$ two sequences of elements of $[0, 1]$ both converging to $\hat{\tau}$ such that $G^{(u_n)} = G_0$ and $G^{(u'_n)} = G'_0$ for all $n \geq 1$.

For every $1 \leq i < j \leq N$, $\tau \in [0, 1]$ and $G \in \text{DC}_N$, set

$$f_{G,i,j}(\tau) := T(G)(s^{(\tau)})(i) - s^{(\tau)}(j) + s^{(\tau)}(1).$$

Note that $f_{G^{(u_n)},i,j}(u_n) = f_{G_0,i,j}(u_n)$ and $f_{G^{(u'_n)},i,j}(u'_n) = f_{G'_0,i,j}(u'_n)$ for all $n \geq 1$. Moreover, for any fixed $(i, j) \in E(G_0) \Delta E(G'_0)$, one of the two quantities $f_{G_0,i,j}(u_n)$ and $f_{G'_0,i,j}(u'_n)$ is positive while the other is non-positive. Without loss of generality, let us assume that $f_{G_0,i,j}(u_n) > 0$ and $f_{G'_0,i,j}(u'_n) \leq 0$. By continuity of the maps $\tau \mapsto T(G^{(\tau)})(s^\tau)$ and $\tau \mapsto s^\tau$, the map $\tau \mapsto f_{G^{(\tau)},i,j}(\tau)$ is also continuous. As a consequence,

$$\forall (i, j) \in E(G_0) \Delta E(G'_0), f_{G_0,i,j}(\hat{\tau}) = f_{G'_0,i,j}(\hat{\tau}) = 0. \quad (4.30)$$

The map $\tau \mapsto f_{G_0,i,j}(\tau)$ is linear in τ , vanishes at $\hat{\tau}$ and is positive along the sequence u_n , hence this linear map is non-constant and one can express its root $\hat{\tau}$ as

$$\hat{\tau} = \frac{f_{G_0,i,j}(0)}{f_{G_0,i,j}(0) - f_{G_0,i,j}(1)}.$$

Since there is a finite number of DC graphs G with N vertices, and a finite number of (i, j) with $1 \leq i < j \leq N$, there is a finite number of possible $\hat{\tau} \in [0, 1]$ such that $\tau \mapsto G^{(\tau)}$ has more than one accumulation point around $\hat{\tau}$.

By the triangle inequality, we have

$$\|T(G^{(1)})(s^{(1)}) - T(G^{(0)})(s^{(0)})\|_\infty \leq \sum_{h=0}^r \|T(G^{(\tau_{h+1})})(s^{(\tau_{h+1})}) - T(G^{(\tau_h)})(s^{(\tau_h)})\|_\infty. \quad (4.31)$$

Now, for $h \in \llbracket 0, r \rrbracket$, set G_h to be the DC graph equal to $G^{(\tau)}$ for all $\tau \in (\tau_h, \tau_{h+1})$. By continuity of $\tau \mapsto T(G^{(\tau)})(s^{(\tau)})$, for all $h \in \llbracket 0, r \rrbracket$,

$$T(G^{(\tau_h)})(s^{(\tau_h)}) = T(G_{h-1})(s^{(\tau_h)}) = T(G_h)(s^{(\tau_h)}).$$

As a consequence, by (4.31),

$$\|T(G^{(1)})(s^{(1)}) - T(G^{(0)})(s^{(0)})\|_\infty \leq \sum_{h=0}^r \|T(G_h)(s^{(\tau_{h+1})}) - T(G_h)(s^{(\tau_h)})\|_\infty.$$

By Lemma 4.3.11,

$$\|T(G^{(1)})(s^{(1)}) - T(G^{(0)})(s^{(0)})\|_\infty \leq \left(1 - \frac{q_1}{q_N}\right) \sum_{h=0}^r \|s^{(\tau_{h+1})} - s^{(\tau_h)}\|_\infty.$$

By collinearity of the $s^{(\tau_{h+1})} - s^{(\tau_h)}$ for $h \in \llbracket 0, r \rrbracket$,

$$\|s^{(\tau_{h+1})} - s^{(\tau_h)}\|_\infty = (\tau_{h+1} - \tau_h) \|s^{(1)} - s^{(0)}\|_\infty.$$

Thus

$$\|T(G^{(1)})(s^{(1)}) - T(G^{(0)})(s^{(0)})\|_\infty \leq \left(1 - \frac{q_1}{q_N}\right) \|s^{(1)} - s^{(0)}\|_\infty.$$

□

Now, let us complete the proof of Theorem 4.3.8. Recall that $y_0(0) = 0$. By Proposition 4.3.6,

$$y_k^- \leq \bar{y}_k \leq y_k^+.$$

Consider \tilde{y}_∞ any stationary trajectory, which exists by Proposition 4.3.7 and satisfies

$$y_k^- \leq \tilde{y}_\infty \leq y_k^+.$$

As a consequence,

$$\|\bar{y}_k - \tilde{y}_\infty\|_\infty \leq \|y_k^+ - y_k^-\|_\infty.$$

By (4.11), for all $t \in \mathbb{R}_+$ and $k \geq 1$,

$$0 \leq y_k^+(t) - y_k^-(t) = \sum_{j=1}^N p_j \left[(t - t_{k-1}^+(a_j) + t_{k-1}^+(a_1))_+ - (t - t_{k-1}^-(a_j) + t_{k-1}^-(a_1))_+ \right].$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \|y_k^+ - y_k^-\|_\infty &\leq q_N \max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} |t_{k-1}^-(a_j) - t_{k-1}^-(a_1) - t_{k-1}^+(a_j) + t_{k-1}^+(a_1)| \\ &\leq 2q_N \max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} |t_{k-1}^-(a_j) - t_{k-1}^+(a_j)|. \end{aligned}$$

Now, let us apply Lemma 4.3.12 with $s^{(0)} := (t_{k-1}^+(a_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ and $s^{(1)} := (t_{k-1}^-(a_i))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ (note that the assumptions of Lemma 4.3.12 are satisfied by the proof of Proposition 4.3.6 and (4.15)). Writing $G^+ := G^{(0)}$ and $G^- := G^{(1)}$, we have that for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$T(G^\pm)((t_{k-1}^\pm(a_j))_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket})(i) = t_k^\pm(a_i).$$

Hence

$$\max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} |t_{k-1}^-(a_j) - t_{k-1}^+(a_j)| \leq \left(1 - \frac{q_1}{q_N}\right)^{k-1} \max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} |t_0^+(a_j) - t_0^-(a_j)|.$$

With $\kappa = \frac{2q_N^2}{q_N - q_1} \max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} |t_0^+(a_j) - t_0^-(a_j)|$, we obtain (4.22). The uniqueness of the stationary trajectory \tilde{y}_∞ follows from the uniqueness of the limit. This concludes the proof of Theorem 4.3.8.

Remark 4.3.13. In some cases, the stationary regime is reached in finite time. For instance, this is the case when the DC graph of the stationary configuration is complete. In this case, there is a time at which there is no car between road signs 1 and N . Then, one may check that any car starting to move after this time has the stationary trajectory. We conjecture that the complete graph is the only connected graph for which the stationary regime is reached in finite time.

4.4. Formula for the front's speed and study of parameter space partitioning

4.4.1. Partitioning the parameter space

Let $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ and set \tilde{y}_∞ to be the stationary trajectory associated to these parameters. Set $\tilde{t}_\infty = (\tilde{y}_\infty)^{-1}$ to be the inverse function of \tilde{y}_∞ . Note that $1/\tilde{t}_\infty(a_1)$ corresponds to the front's speed in the stationary regime since every car k starts moving when the car $k - 1$ reaches the position a_1 . Given $\tilde{t}_\infty(a_i)$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, one can easily recover \tilde{y}_∞ , since it is a piecewise linear continuous function which is differentiable away from the points $\tilde{t}_\infty(a_i) - \tilde{t}_\infty(a_1)$, with derivative equal to q_i on each interval of the form $(\tilde{t}_\infty(a_i) - \tilde{t}_\infty(a_1), \tilde{t}_\infty(a_{i+1}) - \tilde{t}_\infty(a_1))$. It follows from (4.10) that $(\tilde{t}_\infty(a_i))_{1 \leq i \leq N}$ satisfies the following non-linear system of equations:

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, a_i = \sum_{j=1}^N p_j (\tilde{t}_\infty(a_i) - \tilde{t}_\infty(a_j) + \tilde{t}_\infty(a_1))_+. \quad (4.32)$$

Consider $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ the canonical stationary configuration associated to \tilde{y}_∞ defined as follows: $y_{-k}(0) := \tilde{y}_\infty(k\tilde{t}_\infty(a_1))$ for all $k \geq 1$ and $y_k(0) := 0$ for all $k \geq 0$. As in Subsection 4.3.3, one may associate a downward closed graph (DC graph) to each car of the canonical stationary configuration. This time, the DC graph is independent of the index of the car because of stationarity.

Definition 4.4.1. Let $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$. We define the downward closed graph $\text{Gr}(\underline{a}, \underline{p}) \in \text{DC}_N$ associated to $(\underline{a}, \underline{p})$ to be the directed graph with vertex set $\llbracket 1, N \rrbracket$ and edge set given by all the pairs (i, j) with $i < j$ satisfying

$$\tilde{t}_\infty(a_i) > \tilde{t}_\infty(a_j) - \tilde{t}_\infty(a_1). \quad (4.33)$$

Recall that inequality (4.33) is also satisfied whenever $i \geq j$, but we do not add such directed edges (i, j) to the DC graph. We have the following useful interpretation of $\text{Gr}(\underline{a}, \underline{p})$ in terms of the stationary car model. For every $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ and $1 \leq i \leq N$, define

$$\chi_i := \tilde{y}_\infty(\tilde{t}_\infty(a_1) + \tilde{t}_\infty(a_i)). \quad (4.34)$$

The quantity χ_i corresponds to the position of the car of index -1 in a stationary configuration where the car of index 0 is at position a_i . The following lemma is a straightforward reformulation of the definition in (4.33):

Lemma 4.4.2. Let $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ and $1 \leq i < j \leq N$. Then $\chi_i > a_j$ if and only if $(i, j) \in E(\text{Gr}(\underline{a}, \underline{p}))$.

Remark 4.4.3. Lemma 4.4.2 may be reformulated in terms of the stationary liquid bin model as follows. The edge (i, j) with $1 \leq i < j \leq N$ is present in $\text{Gr}(\underline{a}, \underline{p})$ if and only if there exists a time t in the stationary cycle at which both cursors i and j are in the same bin: $c_i(x(t)) = c_j(x(t))$.

For any DC graph G , set

$$P_G := \{ (\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N} : \text{Gr}(\underline{a}, \underline{p}) = G \}$$

to be the set of all parameters for which the DC graph of the stationary trajectory is G . Since there is exactly one stationary trajectory for given $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ by Theorem 4.3.8, we obtain the following partition of the parameter space P^{2N} by the sets P_G :

$$P^{2N} = \bigsqcup_{G \in \text{DC}_N} P_G.$$

If we know that $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$ for some graph G , then the system (4.32) becomes linear:

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, a_i = \sum_{j=1}^{b_G(i)} p_j (\tilde{t}_\infty(a_i) - \tilde{t}_\infty(a_j) + \tilde{t}_\infty(a_1)) \quad (4.35)$$

where we recall that $b_G(i)$ is either the largest j such that there exists some edge (i, j) in G , or i if no such edge exists.

Remark 4.4.4. The linear system (4.35) is defined for every $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$. When $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$, the solutions of (4.35) coincide with the evaluations at the a_i of the inverse function of the stationary trajectory.

The next proposition shows that DC graphs are enumerated by Catalan numbers. The N -th *Catalan number* is defined to be

$$C_N := \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N}.$$

Proposition 4.4.5. For every $N \geq 1$, $|\text{DC}_N| = C_N$.

Catalan numbers are known to enumerate a wide array of common combinatorial objects, see [Sta15]. In particular, C_N enumerates *Dyck paths* of length $2N$, which are sequences of N up steps (also denoted by a plus symbol) and N down steps (also denoted by a minus symbol) arranged in such a way that the path never goes below its starting point (alternatively such that each prefix contains at least as many pluses as minuses). We will prove Proposition 4.4.5 by defining a bijection between DC_N and the set of Dyck paths of length $2N$. See Figure 4.4 for two examples.

Proof of Proposition 4.4.5. Observe on the one hand that graphs $G \in \text{DC}_N$ are in one-to-one correspondence with non-decreasing sequences of N numbers $\underline{b} \in \llbracket 1, N \rrbracket^N$ such that $b_i \geq \max(b_{i-1}, i)$ for every i . Such a correspondence is simply given by the numbers $b_G(i)$.

Observe on the other hand that Dyck paths of length $2N$ are in one-to-one correspondence with sequences \underline{b}' of N non-negative numbers summing to N and such that $b'_1 + \dots + b'_i \geq i$ for every i , by decomposing the Dyck path as

$$+^{b'_1} - +^{b'_2} - \dots +^{b'_N} - ,$$

namely b'_i is the length of the sequence of pluses immediately before the i th minus.

With the convention that $b_0 = 0$, setting $b'_i = b_i - b_{i-1}$ for every $1 \leq i \leq N$ provides a map from DC_N to the set of Dyck paths of length N , which can easily be seen to be a bijection. \square

Identifying each Dyck path of length $2N$ with the function from $[0, 2N]$ to $\mathbb{R}_{\geq 0}$ of which it is the graph, we obtain a partial order on the set of Dyck paths of length $2N$: two Dyck paths are comparable if the graph of one of them is bellow the graph of the other one. For instance, the Dyck path at the top of Figure 4.4 is greater than the Dyck path at the bottom of Figure 4.4 since the Dyck path's graph at the top is included in the epigraph of the Dyck path at the bottom. We give the Hasse diagram for this partial order for $N = 3$ in Figure 4.5. This poset is a lattice called the *Stanley lattice* (the terminology comes from [BB09], see also [Woo10]). The bijection described in the proof of Proposition 4.4.5 carries over the structure of Stanley lattice to the set DC_N of DC graphs on N vertices. If G_1 and G_2 are two DC graphs in DC_N , we have that G_1 is less than or equal to G_2 for that partial order if and only if $E(G_1) \subset E(G_2)$. Moreover, G_2 covers G_1 if and only if there exists a maximal edge $e \in E(G_2)$ such that $E(G_2) = E(G_1) \cup \{e\}$. In Theorem 4.5.2 from Section 4.5, we prove that this Stanley lattice structure provides the description of the adjacency structure of the regions P_G in their partition of the parameter space P^{2N} (see also Theorem 1.5.13 from Chapter 1).

Remark 4.4.6. The reciprocal of the front's speed in the stationary liquid bin model corresponds to the time elapsed between two consecutive jumps of the cursor c_1 . In terms of the stationary car model, it corresponds to the time elapsed between two consecutive departures of cars from 0, namely $\tilde{t}_\infty(a_1)$. This is readily computed by matrix inversion as soon as one knows in which region P_G the parameters lie (see Section 4.4.2). Moreover, if we denote by $N' \in \llbracket 1, N \rrbracket$ the largest vertex of G reachable from 1, then the linear system (4.35) is lower-block-triangular, with a top-left block of size N' , thus $\tilde{t}_\infty(a_1)$ only depends on the $2N'$ parameters $a_1, \dots, a_{N'}, p_1, \dots, p_{N'}$. As a consequence, the number of possible formulas for the speed of the liquid bin model is equal to the number of connected DC graphs with at most N vertices, namely $C_0 + C_1 + \dots + C_{N-1}$. Indeed, via the above bijection, the value N' of the largest vertex of G reachable from 1 corresponds to the number of down steps in the associated Dyck path until the first return to 0. The first $2N'$ steps can be decomposed as an up step followed by an arbitrary Dyck path of length $2N' - 2$ followed by a down step, hence there are $C_{N'-1}$ possibilities for these first $2N'$ steps.

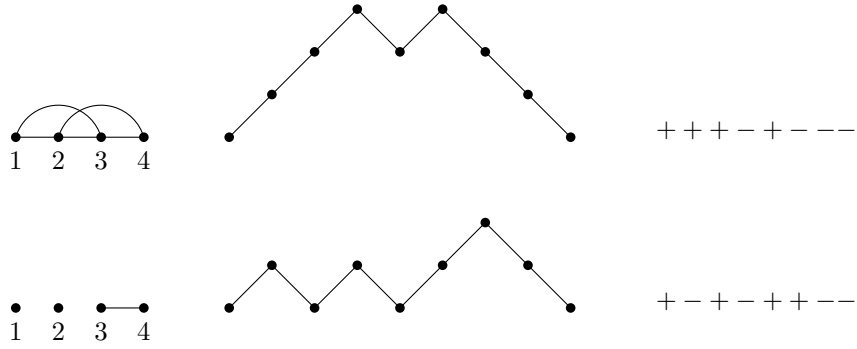


Figure 4.4 – One-to-one correspondence between downward closed graphs and Dyck paths. On the left, two DC graphs with 4 vertices. In the middle, the corresponding Dyck paths. On the right, the words on pluses and minuses associated to these Dyck paths. For the top line, $b_G(1) = 3$ and $b_G(2) = b_G(3) = b_G(4) = 4$. For the bottom line, $b_G(1) = 1$, $b_G(2) = 2$ and $b_G(3) = b_G(4) = 4$.

4.4.2. Solving the linear system

In this subsection we shall solve the linear system (4.35) with unknowns $\tilde{t}_\infty(a_i)$, which holds whenever the parameters $(\underline{a}, \underline{p})$ are restricted to the region P_G for a fixed DC graph $G \in \text{DC}_N$.

Let us first perform a change of variables. For all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, set

$$z_i(\underline{a}, \underline{p}) := \tilde{t}_\infty(a_i) - \tilde{t}_\infty(a_{i-1}) \quad (4.36)$$

with the convention that $a_0 = 0$ (implying that $\tilde{t}_\infty(a_0) = 0$). With these new variables, (i, j) is an edge in $\text{Gr}(\underline{a}, \underline{p})$ if and only if

$$z_1(\underline{a}, \underline{p}) > z_{i+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j(\underline{a}, \underline{p}). \quad (4.37)$$

Definition 4.4.7. Let $G \in \text{DC}_N$ and let $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$. The linear system $\mathcal{S}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ associated with G and $(\underline{a}, \underline{p})$ is the following system of equations with unknowns ζ_1, \dots, ζ_N :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, a_i = \sum_{j=1}^{b_G(i)} p_j ((\zeta_1 + \cdots + \zeta_i) - (\zeta_1 + \cdots + \zeta_j) + \zeta_1). \quad (4.38)$$

It follows from (4.35) that the $(z_i(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ are solutions of $\mathcal{S}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ if $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$.

We will define rational functions $z_i^{(G)}$ on P^{2N} for all $1 \leq i \leq N$ and $G \in \text{DC}_N$. Then we will show in Theorem 4.4.8 that z_i coincides with $z_i^{(G)}$ on each P_G for all $1 \leq i \leq N$.

For every $1 \leq i < j \leq N$ and every DC graph $G \in \text{DC}_N$, set the weight of the edge (i, j) to be equal to

$$\gamma_{i,j}^{(G)} := \frac{q_{b_G(i)} - q_{\max(j-1, b_G(i-1))}}{q_{b_G(i-1)}}. \quad (4.39)$$

For every graph $G \in \text{DC}_N$, denote by $\mathcal{P}_{i,j}^{(G)}$ the set of directed paths from i to j in G . For all $1 \leq i < j \leq N$, set

$$\Gamma_{i,j}^{(G)} := \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{i,j}^{(G)}} \prod_{(i',j') \in \pi} \gamma_{i',j'}^{(G)}, \quad (4.40)$$

Set also $\Gamma_{i,i}^{(G)} := 1$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Note that by construction, $\Gamma_{i,j}^{(G)}$ is non-negative for all $1 \leq i < j \leq N$.

We adopt the convention that $b_G(0) = 1$. For every DC graph $G \in \text{DC}_N$ and every $2 \leq i \leq N$, define

$$z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) := \frac{\sum_{j=1}^N \Gamma_{1,j}^{(G)} \frac{d_j}{q_{b_G(j-1)}}}{1 + \sum_{j=1}^N \Gamma_{1,j}^{(G)} \frac{q_{b_G(j)} - q_{b_G(j-1)}}{q_{b_G(j-1)}}} \quad (4.41)$$

and

$$z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) := \left(\sum_{j=i}^N \Gamma_{i,j}^{(G)} \frac{d_j}{q_{b_G(j-1)}} \right) - z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \left(\sum_{j=i}^N \Gamma_{i,j}^{(G)} \frac{q_{b_G(j)} - q_{b_G(j-1)}}{q_{b_G(j-1)}} \right) \quad (4.42)$$

$$= \left(\sum_{j=i}^N \Gamma_{i,j}^{(G)} \frac{d_j}{q_{b_G(j-1)}} \right) - \frac{\left(\sum_{j=i}^N \Gamma_{i,j}^{(G)} \frac{q_{b_G(j)} - q_{b_G(j-1)}}{q_{b_G(j-1)}} \right) \left(\sum_{j=1}^N \Gamma_{1,j}^{(G)} \frac{d_j}{q_{b_G(j-1)}} \right)}{1 + \sum_{j=1}^N \Gamma_{1,j}^{(G)} \frac{q_{b_G(j)} - q_{b_G(j-1)}}{q_{b_G(j-1)}}}. \quad (4.43)$$

Then the linear system $\mathcal{S}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ can be solved as follows.

Theorem 4.4.8. *For every DC graph $G \in \text{DC}_N$ and every $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$, the linear system $\mathcal{S}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ has a unique solution, given by $(z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$. Thus, when $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$, for every $1 \leq i \leq N$ we have*

$$z_i(\underline{a}, \underline{p}) = z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}). \quad (4.44)$$

Proof. Let us prove the first statement. The second statement will follow from (4.35).

By considering the difference of rows i and $i-1$ in the linear system $\mathcal{S}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ and with the conventions that $b_G(0) = 1$ and $q_0 = 0$, we have for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$d_i = (q_{b_G(i)} - q_{b_G(i-1)})\zeta_1 + q_{b_G(i-1)}\zeta_i - \sum_{j=b_G(i-1)+1}^{b_G(i)} p_j \sum_{l=i+1}^j \zeta_l.$$

The sum over j on the right-hand side can be rewritten as follows :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=b_G(i-1)+1}^{b_G(i)} p_j \sum_{l=i+1}^j \zeta_l = \sum_{j=b_G(i-1)+1}^{b_G(i)} (q_j - q_{j-1}) \sum_{l=i+1}^j \zeta_l \\
&= q_{b_G(i)} \sum_{l=i+1}^{b_G(i)} \zeta_l - q_{b_G(i-1)} \sum_{l=i+1}^{b_G(i-1)+1} \zeta_l - \sum_{j=b_G(i-1)+2}^{b_G(i)} q_{j-1} \zeta_j \\
&= \sum_{j=i+1}^{b_G(i)} q_{b_G(i)} \zeta_j - \sum_{j=i+1}^{b_G(i-1)+1} q_{b_G(i-1)} \zeta_j - \sum_{j=b_G(i-1)+2}^{b_G(i)} q_{j-1} \zeta_j \\
&= \sum_{j=i+1}^{b_G(i)} (q_{b_G(i)} - q_{\max(j-1, b_G(i-1))}) \zeta_j.
\end{aligned}$$

Putting everything together, we obtain the following linear system for the ζ_i :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, d_i = (q_{b_G(i)} - q_{b_G(i-1)}) \zeta_1 + q_{b_G(i-1)} \zeta_i - \sum_{j=i+1}^{b_G(i)} (q_{b_G(i)} - q_{\max(j-1, b_G(i-1))}) \zeta_j. \quad (4.45)$$

Notice that if we assume that we know ζ_1 , this linear system in $(\zeta_2, \dots, \zeta_N)$ becomes upper-triangular. For all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, set

$$\alpha_i := \frac{d_i - (q_{b_G(i)} - q_{b_G(i-1)}) \zeta_1}{q_{b_G(i-1)}}.$$

Then the linear system (4.45) becomes

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \alpha_i = \zeta_i - \sum_{j=i+1}^{b_G(i)} \gamma_{i,j}^{(G)} \zeta_j.$$

By descending induction on i from N to 1, one obtains that for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\zeta_i = \sum_{j=i}^N \Gamma_{i,j}^{(G)} \alpha_j. \quad (4.46)$$

In passing we make use of the formula

$$\Gamma_{i,j}^{(G)} = \sum_{h=i+1}^{\min(j, b_G(i))} \gamma_{i,h}^{(G)} \Gamma_{h,j}^{(G)}$$

which holds true by decomposing any increasing path from i to j according to its first step (i, h) .

Formula (4.46) entails that ζ_i equals the right-hand side of (4.42) for $2 \leq i \leq N$. Taking $i = 1$ in (4.46) gives

$$\zeta_1 = \sum_{j=1}^N \Gamma_{1,j}^{(G)} \frac{d_j - (q_{b_G(j)} - q_{b_G(j-1)}) \zeta_1}{q_{b_G(j-1)}}.$$

Solving this linear equation in ζ_1 shows that ζ_1 equals the right-hand side of (4.41). \square

We stress that the linear system $\mathcal{S}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ is defined for every $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$, not only for $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$. We will sometimes need to consider its solutions $(z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ for parameters $(\underline{a}, \underline{p}) \notin P_G$.

Remark 4.4.9. Recall from Remark 4.3.10 that the edges of a DC graph G have a poset structure. An edge (i, j) is called a *maximal edge* of G if it is a maximal element in this poset. Define

$$B = \{i \in \llbracket 1, N \rrbracket : b_G(i-1) \neq b_G(i)\}.$$

The elements i of B are either isolated vertices in G (if $b_G(i) = i$) or the starting point of a maximal edge (if $b_G(i) > i$). For all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket \setminus B$, it follows from (4.45) that

$$z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = \frac{d_i}{q_{b_G(i-1)}}.$$

Therefore, one can reduce the size of the system from N to $|B|$ equations.

Example 4.4.10. In the case where $G = K_N$ is the complete graph with N vertices, $\Gamma_{i,j}^{(G)} = \mathbb{1}_{i=1} \frac{q_N - q_{j-1}}{q_1}$ for all $1 \leq i < j \leq N$. Thus for every $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_{K_N}$, the speed of the front is given by

$$\frac{1}{z_1^{(K_N)}(\underline{a}, \underline{p})} = \frac{q_N^2}{\sum_{j=1}^N (q_N - q_{j-1}) d_j}. \quad (4.47)$$

Example 4.4.11. If $G = L_N$ is the graph with N vertices such that $E(L_N) = \{(i, i+1) : i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket\}$ (we call such a graph a line graph), then $\gamma_{i,j}^{(L_N)} = \mathbb{1}_{j=i+1} \frac{p_{i+1}}{q_i}$ for all $1 \leq i < j \leq N$. Therefore,

$$\Gamma_{i,j}^{(L_N)} = \frac{p_{i+1} \cdots p_j}{q_i \cdots q_{j-1}}$$

for all $1 \leq i < j \leq N$. As a consequence, with the convention that the empty product equals 1, the front speed is

$$\frac{1}{z_1^{(L_N)}(\underline{a}, \underline{p})} = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} p_{j+1} \left(\prod_{h=1}^j \frac{p_h}{q_h} \right)}{\sum_{j=1}^N d_j \left(\prod_{h=1}^j \frac{p_h}{q_h} \right)}. \quad (4.48)$$

4.4.3. Every region has non-empty interior

The goal of this subsection is to prove the following result:

Theorem 4.4.12. *For every $G \in \text{DC}_N$, the interior of P_G is non-empty.*

Let us first prove a lemma on the regularity of the z_i in the parameters $(\underline{a}, \underline{p})$.

Lemma 4.4.13. *For every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, the map $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N} \mapsto z_i(\underline{a}, \underline{p})$ is continuous.*

Proof. Fix $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. By Subsection 4.4.1, for every $G \in \text{DC}_N$, the restriction of z_i to the region P_G is a rational function of the parameters $(\underline{a}, \underline{p})$. It remains to prove that z_i is continuous across boundaries of regions. Let G_1 and G_2 be two distinct DC graphs with N vertices such that $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$ is non-empty. Pick $(\underline{a}, \underline{p})$ in $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$. The functions z_i and $z_i^{(G_l)}$ coincide on P_{G_l} for $l \in \{1, 2\}$. Therefore, it suffices to show that $z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p})$.

Since $(\underline{a}, \underline{p}) \in \partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$, there exists a sequence $(\underline{a}^{s,1}, \underline{p}^{s,1})_{s \in \mathbb{Z}_+}$ (resp. $(\underline{a}^{s,2}, \underline{p}^{s,2})_{s \in \mathbb{Z}_+}$) of elements of P_{G_1} (resp. P_{G_2}) converging to $(\underline{a}, \underline{p})$ as s goes to infinity. If for every $s \in \mathbb{Z}_+$ and $l \in \{1, 2\}$ we set

$$\tilde{y}_\infty^{s,l}(t) := \sum_{j=1}^N p_j^{s,l} \left(t - \left(z_2^{(G_l)}(\underline{a}^{s,l}, \underline{p}^{s,l}) + \cdots + z_j^{(G_l)}(\underline{a}^{s,l}, \underline{p}^{s,l}) \right) \right)_+,$$

then $\tilde{y}_\infty^{s,l}$ is the only stationary trajectory for parameters $(\underline{a}^{s,l}, \underline{p}^{s,l})$. In other words, $\tilde{y}_\infty^{s,l}$ is the only function satisfying (4.10) for parameters $(\underline{a}^{s,l}, \underline{p}^{s,l})$. The functions $t \mapsto \tilde{y}_\infty^{s,l}(t)$ and its inverse $x \mapsto \tilde{t}_\infty^{s,l}(x)$ are both continuous piecewise affine functions with N points of non-differentiability. The coordinates of these points of non-differentiability are rational functions of the parameters $(\underline{a}, \underline{p})$. When s goes to infinity, we denote by $\tilde{y}_\infty^l(t)$ and $\tilde{t}_\infty^l(x)$ the pointwise limits of $\tilde{y}_\infty^{s,l}(t)$ and $\tilde{t}_\infty^{s,l}(x)$. The functions $t \mapsto \tilde{y}_\infty^l(t)$ and $x \mapsto \tilde{t}_\infty^l(x)$ are still inverses of each other and they satisfy (4.10) for parameters $(\underline{a}, \underline{p})$.

Since the stationary trajectory for parameters $(\underline{a}, \underline{p})$ is unique by Theorem 4.3.8, $\tilde{y}_\infty^1 = \tilde{y}_\infty^2$. As a consequence, the coordinates of the points of non-differentiability of \tilde{y}_∞^1 and \tilde{y}_∞^2 are the same, which means that $z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p})$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. \square

We will also need the continuity lemma below. Whenever we have some finite sequence \underline{s} of real numbers of length at least 2, we shall denote by \underline{s}^\dagger the sequence obtained from \underline{s} by removing its last element. For example, if $\underline{p} = (p_1, \dots, p_N)$, then $\underline{p}^\dagger = (p_1, \dots, p_{N-1})$.

Lemma 4.4.14. *Fix $N \geq 2$. Let $(z_i(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ (resp. $z'_i(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger)_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket}$) be the functions defined by (4.36) for $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ (resp. $(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger) \in P^{2N-2}$). Then we have*

$$\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, z_i(\underline{a}, \underline{p}) \xrightarrow{p_N \rightarrow 0} z'_i(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger).$$

Moreover

$$z_N(\underline{a}, \underline{p}) \xrightarrow{p_N \rightarrow 0} \frac{a_N - a_{N-1}}{q_{N-1}}.$$

Proof. Since $(\underline{a}, \underline{p}^\dagger, 0)$ lies in the closure $\overline{P^{2N}}$ of $P^{2N} = \bigsqcup_{G \in \text{DC}_N} P_G$, there exists some $G \in \text{DC}_N$ such that $(\underline{a}, \underline{p}^\dagger, 0) \in \overline{P_G}$. Pick a sequence $(\underline{a}^s, \underline{p}^s)_{s \in \mathbb{Z}_{>0}}$ of elements of P_G converging to $(\underline{a}, \underline{p}^\dagger, 0)$. On P_G , z_i coincides with $z_i^{(G)}$ for every $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

Set $\tilde{y}_\infty^{s,G}$ to be the unique solution of the system (4.10):

$$\tilde{y}_\infty^{s,G}(t) := \sum_{j=1}^N p_j^s \left(t - \left(z_2^{(G)}(\underline{a}^s, \underline{p}^s) + \cdots + z_j^{(G)}(\underline{a}^s, \underline{p}^s) \right) \right)_+.$$

By definition of a stationary trajectory (4.10),

$$\tilde{y}_\infty^{s,G}(t) = \sum_{j=1}^N p_j^s \left(t - \tilde{t}_\infty^{s,G}(a_j^s) + \tilde{t}_\infty^{s,G}(a_1^s) \right)_+, \quad (4.49)$$

where $\tilde{t}_\infty^{s,G}$ is the inverse bijection of $\tilde{y}_\infty^{s,G}$, and $(\tilde{t}_\infty^{s,G}(a_j^s))_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ is non-decreasing.

For every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, the function $z_i^{(G)}$ is rational hence continuous in the parameters $(\underline{a}, \underline{p})$. Thus, when s goes to infinity, $\tilde{y}_\infty^{s,G}$ pointwise converges on $\mathbb{R}_{\geq 0}$ to \tilde{y}_∞^G defined by

$$\tilde{y}_\infty^G(t) := \sum_{j=1}^{N-1} p_j \left(t - \left(z_2^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}^\dagger, 0) + \cdots + z_j^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}^\dagger, 0) \right) \right)_+.$$

The function \tilde{y}_∞^G is a bijection since $p_1 > 0$. Since $\tilde{y}_\infty^{s,G}$ is a piecewise affine function for which the slopes and the coordinates of the points of non-differentiability are continuous functions of the parameters, $\tilde{t}_\infty^{s,G}$ also pointwise converges to \tilde{t}_∞^G , where \tilde{t}_∞^G is the inverse bijection of \tilde{y}_∞^G . By taking the limit s goes to infinity in (4.49), one obtains that

$$\tilde{y}_\infty^G(t) = \sum_{j=1}^{N-1} p_j \left(t - \tilde{t}_\infty^G(a_j) + \tilde{t}_\infty^G(a_1) \right)_+, \quad (4.50)$$

where \tilde{t}_∞^G is the inverse bijection of \tilde{y}_∞^G . Therefore, \tilde{y}_∞^G is a stationary trajectory for parameters $(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger)$.

Since the stationary trajectory is unique by Theorem 4.3.8, $\tilde{y}_\infty^G = \tilde{y}'_\infty$, where \tilde{y}'_∞ is the stationary trajectory for parameters $(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger)$, with inverse denoted by \tilde{t}'_∞ . By comparing the points of non-differentiability of \tilde{y}_∞^G and \tilde{y}'_∞ , one obtains that $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}^\dagger, 0) = z'_i(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger)$ for all $i \in \llbracket 2, N-1 \rrbracket$. To get this equality for $i = 1$, observe that $z_1^{(G)}(\underline{a}^s, \underline{p}^s) = \tilde{t}_\infty^{s,G}(a_1)$ for all $s > 0$, which implies that

$$z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}^\dagger, 0) = \tilde{t}_\infty^G(a_1) = \tilde{t}'_\infty(a_1) = z'_1(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger).$$

The result for z_N follows from taking the limit p_N goes to 0 in the formula

$$z_N = \int_{a_{N-1}}^{a_N} \frac{1}{\tilde{v}_\infty \circ \tilde{t}_\infty(s)} ds,$$

since every car beyond position a_{N-1} has a speed equal to either q_{N-1} or $q_{N-1} + p_N$. \square

Proof of Theorem 4.4.12. Let us proceed by induction on $N = |V(G)|$. For $N = 1$, the only possible graph is the one with a single vertex $G = (\{1\}, \emptyset)$. In this case, \mathring{P}_G is the whole parameter space P^2 which is non-empty.

Now, fix $N \geq 2$ and assume that $\mathring{P}_{G'}$ is non-empty for every DC graph G' with at most $N-1$ vertices. Let $(z_i(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ (resp. $(z'_i(\underline{a}', \underline{p}'))_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket}$) be the functions defined by (4.36) for $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ (resp. $(\underline{a}', \underline{p}') \in P^{2N-2}$).

Let $G \in \text{DC}_N$ and define G' to be the restriction of G to the vertex set $\llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

It suffices to find $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ satisfying the following two conditions:

1. For every $1 \leq i < j \leq N$ such that $(i, j) \in E(G)$,

$$z_1(\underline{a}, \underline{p}) > z_{i+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j(\underline{a}, \underline{p}). \quad (4.51)$$

2. For every $1 \leq i < j \leq N$ such that $(i, j) \notin E(G)$,

$$z_1(\underline{a}, \underline{p}) < z_{i+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j(\underline{a}, \underline{p}). \quad (4.52)$$

Indeed, by the definition (4.37) of $\text{Gr}(\underline{a}, \underline{p})$ in terms of the z_i , this will imply that $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$. Since the inequalities are strict and the z_i are continuous functions of $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ by Lemma 4.4.13, every collection of parameters in a neighborhood of $(\underline{a}, \underline{p})$ will satisfy the same inequalities, thus we will conclude that $\overset{\circ}{P}_G$ is non-empty.

By induction hypothesis, $\overset{\circ}{P}_{G'}$ is non-empty. By (4.37), this implies that for every $(\underline{a}', \underline{p}') \in \overset{\circ}{P}_{G'}$ and every $1 \leq i < j \leq N - 1$ such that $(i, j) \in E(G')$, we have

$$z'_1(\underline{a}', \underline{p}') > z'_{i+1}(\underline{a}', \underline{p}') + \cdots + z'_j(\underline{a}', \underline{p}'). \quad (4.53)$$

Moreover, for every $(\underline{a}', \underline{p}') \in \overset{\circ}{P}_{G'}$ and every $1 \leq i < j \leq N - 1$ such that $(i, j) \notin E(G')$, we have by (4.37)

$$z'_1(\underline{a}', \underline{p}') \leq z'_{i+1}(\underline{a}', \underline{p}') + \cdots + z'_j(\underline{a}', \underline{p}'). \quad (4.54)$$

The functions $z'_{i+1} + \cdots + z'_j - z'_1$ are non-constant rational functions on the non-empty open set $\overset{\circ}{P}_{G'}$, thus one can find $(\underline{a}', \underline{p}') := (a_1, \dots, a_{N-1}, p_1, \dots, p_{N-1}) \in \overset{\circ}{P}_{G'}$ such that for every $1 \leq i < j \leq N - 1$ with $(i, j) \notin E(G')$, we have

$$z'_1(\underline{a}', \underline{p}') < z'_{i+1}(\underline{a}', \underline{p}') + \cdots + z'_j(\underline{a}', \underline{p}'). \quad (4.55)$$

From now on, the values of $(\underline{a}', \underline{p}')$ are fixed as in the previous paragraph. We complete $(\underline{a}', \underline{p}')$ to $(\underline{a}, \underline{p})$, where $a_N > a_{N-1}$ and $p_N > 0$ are not fixed for the moment and will be appropriately chosen later. With this completion, $(\underline{a}', \underline{p}') = (\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger)$.

By Lemma 4.4.14, for every $1 \leq i \leq N$, the function z_i can be extended by continuity to the case when $p_N = 0$ by setting

$$z_i(\underline{a}^\dagger, a_N, \underline{p}^\dagger, 0) := z'_i(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger) \quad \text{if } i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket; \quad (4.56)$$

$$z_N(\underline{a}^\dagger, a_N, \underline{p}^\dagger, 0) := \frac{a_N - a_{N-1}}{q_{N-1}}. \quad (4.57)$$

With this extension, we have all the inequalities (4.51) and (4.52) whenever $j \neq N$ and $p_N = 0$, regardless of the choice of $a_N > a_{N-1}$.

Consider the parameters $(\underline{a}, \underline{p})$, with $(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger)$ fixed as above and $a_N > a_{N-1}$ and $p_N \geq 0$ free parameters for now. Recall that for every $1 \leq i \leq N$, the position of the car of index -1 in a stationary configuration where the car of index 0 is at position a_i is given by $\chi_i = \tilde{y}_\infty(\tilde{t}_\infty(a_1) + \tilde{t}_\infty(a_i))$. We extend this definition to the case $i = 0$ by setting $\chi_0 := a_1$. Consider the quantities χ_i as functions of (a_N, p_N) . Observe that for every $i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$, $\chi_i(a_N, 0)$ is independent of the value of $a_N > a_{N-1}$. We denote it by $\chi_i(\cdot, 0)$.

Define

$$i_0 := \min\{i \in \llbracket 1, N \rrbracket : b_G(i) = N\}.$$

If $i_0 \leq N - 2$, since G is a DC graph containing the edge (i_0, N) , we also have $(i_0, N - 1) \in E(G')$. Since $(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger) \in P_{G'}$, Lemma 4.4.2 implies that $\chi_{i_0}(\cdot, 0) > a_{N-1}$ whenever $i_0 \leq N - 2$. This inequality also clearly holds when $i_0 = N - 1$. We also have that $\chi_{i_0}(\cdot, 0) > \chi_{i_0-1}(\cdot, 0)$. Pick a_N such that

$$\max(a_{N-1}, \chi_{i_0-1}(\cdot, 0)) < a_N < \chi_{i_0}(\cdot, 0).$$

The value of a_N is now fixed and we now consider $\chi_{i_0}(a_N, p_N)$ and $\chi_{i_0-1}(a_N, p_N)$ as functions of a single variable $p_N \geq 0$. It follows from (4.34) that $\chi_{i_0}(a_N, p_N)$ and $\chi_{i_0-1}(a_N, p_N)$ may be entirely expressed as continuous functions of the z_i . By Lemma 4.4.13 and Lemma 4.4.14, we have that $\chi_{i_0}(a_N, p_N)$ and $\chi_{i_0-1}(a_N, p_N)$ are continuous functions of $p_N \geq 0$. Thus, the inequalities

$$\max(a_{N-1}, \chi_{i_0-1}(a_N, p_N)) < a_N < \chi_{i_0}(a_N, p_N),$$

which hold for $p_N = 0$ also hold for every $p_N \in (0, 2\epsilon)$ for some $\epsilon > 0$. Fix $p_N = \epsilon$. Up to reducing the value of $\epsilon > 0$, by continuity, we may assume that inequalities (4.51) and (4.52) also hold for all $j < N$ for this choice of $(\underline{a}, \underline{p})$. The $2N$ -tuple $(\underline{a}, \underline{p})$ is now completely fixed.

Since $a_N < \chi_{i_0}(a_N, p_N)$, Lemma 4.4.2 implies that (i_0, N) is an edge of $\text{Gr}(\underline{a}, \underline{p})$. Hence inequality (4.51) holds for $(i, j) = (i_0, N)$ and thus also for all (i, N) with $i \in \llbracket i_0, N - 1 \rrbracket$, which are precisely the pairs of the form (i, N) in $E(G)$.

Since $a_N > \chi_{i_0-1}(a_N, p_N)$, Lemma 4.4.2 implies that $(i_0 - 1, N)$ is not an edge of $\text{Gr}(\underline{a}, \underline{p})$. Hence inequality (4.52) holds for $(i, j) = (i_0 - 1, N)$ and thus also for all (i, N) with $i \in \llbracket 1, i_0 - 1 \rrbracket$, which are precisely the pairs of the form (i, N) which are not in $E(G)$.

Collecting everything, we have found $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ such that, in the case when there exists an edge of the form $(i, N) \in E(G)$, all the inequalities (4.51) and (4.52) hold.

If $i_0 = N$, we pick $a_N > \chi_{N-1}(\cdot, 0)$ and we conclude using the same line of proof as above. \square

4.5. Adjacency structure of the regions

In this section we characterize when two regions P_{G_1} and P_{G_2} are adjacent and we compute the dimension of their common boundary.

The notion of dimension that we will use here is the Lebesgue covering dimension, also known as the topological dimension. The sets for which we compute the dimension are subsets of P^{2N} and they possess the induced topology of P^{2N} .

Definition 4.5.1. Denote by E_N the collection of all pairs (i, j) such that $1 \leq i < j \leq N$. Given two pairs (i, j) and (i', j') in E_N , we say that (i', j') is *nested* in (i, j) if $i \leq i' < j' \leq j$. We denote it by $(i', j') \preceq_E (i, j)$. The relation \preceq_E equips E_N with a partial order.

Let $m(G)$ denote the set of maximal edges of G . Denote by $M(G)$ the set of pairs $(i, j) \in E_N \setminus E(G)$ such that $G' = (\llbracket 1, N \rrbracket, E(G) \cup \{(i, j)\})$ is a DC graph. Equivalently, $M(G)$ is the set of minimal elements of $E_N \setminus E(G)$ for the partial order \preceq_E . For any two sets A and A' , we denote by $A \Delta A'$ the symmetric difference of these two sets.

We can now state the main result of this section:

Theorem 4.5.2 (Adjacency between regions). *Let G_1 and G_2 be two distinct DC graphs in DC_N . Then $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$ is non-empty if and only if*

$$E(G_1) \setminus E(G_2) \subseteq m(G_1) \quad \text{and} \quad E(G_2) \setminus E(G_1) \subseteq M(G_1). \quad (4.58)$$

In this case, the codimension of $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$ is $|E(G_1) \Delta E(G_2)|$.

Remark 4.5.3. Recall that an element x is said to cover an element y in some poset (X, \leq) if $y < x$ and if there exists no element $z \in X$ such that $y < z < x$. By Theorem 4.5.2, two graphs G_1 and G_2 have a common boundary of codimension 1 if and only if one covers the other in the Stanley lattice.

It may look surprising at first glance that condition (4.58) is not symmetric in G_1 and G_2 . One can actually check that condition (4.58) is equivalent to the more symmetric condition that one cannot find a pair of nested edges both contained in the symmetric difference of the edge sets of the two DC graphs.

Proposition 4.5.4. *Condition (4.58) holds if and only if $E(G_1) \Delta E(G_2)$ is an antichain for the poset (E_N, \preceq_E) .*

Proof. Let us prove that equivalence. First, assume that (4.58) does not hold. Therefore, either there is an edge e' in $E(G_1) \setminus E(G_2)$ which is not maximal in G_1 , or there is an edge e in $E(G_1) \setminus E(G_2)$ which is not in $M(G_1)$. In the first case, since $e' = (i', j')$ is in $E(G_1)$ but not in $m(G_1)$, there exists an $(i, j) \in E(G_1)$ such that $(i, j) \neq (i', j')$ and $i \leq i' < j' \leq j$. In addition, since (i', j') is not in $E(G_2)$ and since G_2 is a DC graph, (i, j) is not in G_2 . Therefore, $\{(i, j), (i', j')\} \subseteq E(G_1) \setminus E(G_2) \subseteq E(G_1) \Delta E(G_2)$. In the second case, since $e = (i, j)$ is not in $E(G_1)$ and not in $M(G_1)$, there exists an edge $(i', j') \notin E(G_1)$ such that $(i, j) \neq (i', j')$ and $i \leq i' < j' \leq j$. Since G_2 is a DC graph and since (i, j) is in $E(G_2)$, (i', j') is also in $E(G_2)$. Therefore, $\{(i, j), (i', j')\} \subseteq E(G_2) \setminus E(G_1) \subseteq E(G_1) \Delta E(G_2)$.

Reciprocally, assume that the rightmost term in the equivalence does not hold. Then there exists distinct edges $(i, j) \neq (i', j')$ which are both contained in $E(G_1) \Delta E(G_2)$. There are four possibilities:

- $\{(i, j), (i', j')\} \subseteq E(G_1) \setminus E(G_2)$,
- $\{(i, j), (i', j')\} \subseteq E(G_2) \setminus E(G_1)$,
- $(i, j) \in E(G_2) \setminus E(G_1)$ and $(i', j') \in E(G_1) \setminus E(G_2)$,
- $(i, j) \in E(G_1) \setminus E(G_2)$ and $(i', j') \in E(G_2) \setminus E(G_1)$.

The third case is impossible since G_2 is a DC graph: if (i, j) is in $E(G_2)$, then (i', j') must be in $E(G_2)$. Similarly, the fourth point is also impossible since G_1 is a DC graph. In the first (resp. second) case, it is easy to check that (i', j') is not in $m(G_1)$ (resp. that (i, j) is not in $M(G_1)$) which implies that (4.58) does not hold. \square

In Subsection 4.5.1, we will characterize the boundary of a region P_G (Corollary 4.5.11) and the intersection of the boundaries of two regions P_{G_1} and P_{G_2} (Proposition 4.5.12). Using this, we will prove Theorem 4.5.2 in Subsection 4.5.2.

4.5.1. Characterization of the boundaries

Let $G \in \text{DC}_N$ be a DC graph and let $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$. For every $0 \leq i < j \leq N$, define

$$Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) := z_{i+1}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$$

and

$$Z_{i,j}(\underline{a}, \underline{p}) := z_{i+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j(\underline{a}, \underline{p}).$$

The following notation will be intensively used in the rest of this section.

Definition 4.5.5. For every subset $S \subset E_N$ and every binary relation $\mathcal{R} \in \{>, <, \leq, \geq, =\}$, we say $(G, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies the condition $(C_S^{\mathcal{R}})$ if

$$\forall (i, j) \in S, \quad z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \mathcal{R} Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

For example, $(G, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies the condition $(C_{m(G)}^>)$ if

$$\forall (i, j) \in m(G), \quad z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) > Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

Note that we do not require in this definition that $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$.

The following lemma will be useful in the remainder of this subsection.

Lemma 4.5.6. Consider a graph $G \in \text{DC}_N$ and parameters $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ such that $(G, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies $(C_{m(G)}^{\geq})$ and $(C_{M(G)}^{\leq})$. Then for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i(\underline{a}, \underline{p})$. As a consequence, for such a choice of parameters $(\underline{a}, \underline{p})$, we have $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) > 0$.

Proof. Let us first prove that $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ is non-negative for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. By (4.41), $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ is positive. Recall from Remark 4.4.9 that B denotes the set of vertices that are either isolated or the starting point of a maximal edge. If $i \in \llbracket 2, N \rrbracket \setminus B$, the positivity of $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ follows from Remark 4.4.9. If $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$ is an isolated vertex, then $(i-1, i) \in M(G)$. Thus condition $(C_{M(G)}^{\leq})$ implies that

$$z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \geq z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) > 0.$$

Assume that $i \in \llbracket 2, N-1 \rrbracket$ is the starting point of a maximal edge. Then $(i, b_G(i)) \in m(G)$ and $(i-1, b_G(i-1)+1) \in M(G)$, thus $(C_{M(G)}^{\leq})$ and $(C_{m(G)}^{\geq})$ imply that

$$\begin{aligned} z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) &\leq Z_{i-1, b_G(i-1)+1}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \\ z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) &\geq Z_{i, b_G(i)}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}). \end{aligned}$$

Therefore,

$$Z_{i,b_G(i)}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \leq Z_{i-1,b_G(i-1)+1}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

Since $b_G(i-1) < b_G(i)$, we have

$$Z_{b_G(i-1)+1,b_G(i)}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \leq z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}), \quad (4.59)$$

with the convention that the sum on the left-hand side vanishes if $b_G(i-1) + 2 > b_G(i)$. Since the indices j of the $z_j^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ that appear on the left-hand side of (4.59) are greater than i , descending induction on i yields that $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \geq 0$ for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Now, let us prove that the function

$$\hat{y}_\infty : t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto \sum_{j=1}^N p_j \left(t - Z_{0,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) + z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \right)_+$$

is the stationary trajectory for parameters $(\underline{a}, \underline{p})$. It is clear that \hat{y}_∞ is a continuous increasing map since p_j is positive for all $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Therefore, the inverse function \hat{t}_∞ of \hat{y}_∞ exists. Following Definition 4.3.2, it remains to prove that $Z_{1,i}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ is equal to $\hat{t}_\infty(a_i) - \hat{t}_\infty(a_1)$ for all $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$. Let us prove the stronger statement that for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$Z_{0,i}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = \hat{t}_\infty(a_i).$$

By definition of $m(G)$, for all $(i, j) \in E(G)$, there exists an edge $(i', j') \in m(G)$ such that $(i, j) \preceq_E (i', j')$. Similarly, for all $(i, j) \in E_N \setminus E(G)$, there exists $(i', j') \in M(G)$ such that $(i', j') \preceq_E (i, j)$. The above non-negativity property implies that

$$\forall (i, j) \in E(G), z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \geq Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}). \quad (4.60)$$

$$\forall (i, j) \in E_N \setminus E(G), z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \leq Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}). \quad (4.61)$$

It follows from (4.60), (4.61) and the non-negativity of the $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ that for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned} & \hat{y}_\infty(Z_{0,i}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})) \\ &= \sum_{j=1}^{b_G(i)} p_j (Z_{0,i}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) - Z_{0,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) + z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})). \end{aligned}$$

By Theorem 4.4.8, the $(z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ are solutions of the linear system $\mathcal{S}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$. As a consequence, $\hat{y}_\infty(Z_{0,i}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})) = a_i$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Equivalently, $\hat{t}_\infty(a_i) = Z_{0,i}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. This concludes the proof of the fact that \hat{y}_∞ is the stationary trajectory.

Since $Z_{0,i}(\underline{a}, \underline{p})$ is defined as the image of a_i by the inverse function of the stationary trajectory, one obtains that

$$Z_{0,i}(\underline{a}, \underline{p}) = Z_{0,i}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$$

for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, which implies that $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i(\underline{a}, \underline{p})$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

The quantity $z_i(\underline{a}, \underline{p})$ corresponds to the amount of time spent by a car between positions a_{i-1} and a_i in the stationary regime. Since the speeds of the cars remain finite, $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i(\underline{a}, \underline{p}) > 0$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. \square

The following proposition gives criteria for parameters to be in the region P_G .

Proposition 4.5.7 (Inequalities characterizing P_G). *Let $G \in \text{DC}_N$ and $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$. Then $(\underline{a}, \underline{p})$ belongs to the region P_G if and only if $(G, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies both conditions $(C_{m(G)}^>)$ and $(C_{M(G)}^{\leq})$.*

Proof. By definition of $m(G)$ and $M(G)$, $m(G) \subseteq E(G)$ and $M(G) \subseteq E_N \setminus E(G)$. Therefore, it follows from the definition of P_G , from Theorem 4.4.8 and from (4.37) that, if $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$, then $(G, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies conditions $(C_{m(G)}^>)$ and $(C_{M(G)}^{\leq})$.

Conversely, assume that $(G, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies conditions $(C_{m(G)}^>)$ and $(C_{M(G)}^{\leq})$. Then, $(G, \underline{a}, \underline{p})$ also satisfies conditions $(C_{m(G)}^{\geq})$, thus by Lemma 4.5.6, $z_i^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i(\underline{a}, \underline{p}) > 0$ for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Hence conditions $(C_{m(G)}^>)$ and $(C_{M(G)}^{\leq})$ become:

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in m(G), z_1(\underline{a}, \underline{p}) &> Z_{i,j}(\underline{a}, \underline{p}), \\ \forall (i, j) \in M(G), z_1(\underline{a}, \underline{p}) &\leq Z_{i,j}(\underline{a}, \underline{p}). \end{aligned}$$

Since $z_i(\underline{a}, \underline{p})$ is positive for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, one obtains that

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in E(G), z_1(\underline{a}, \underline{p}) &> Z_{i,j}(\underline{a}, \underline{p}), \\ \forall (i, j) \in E_N \setminus E(G), z_1(\underline{a}, \underline{p}) &\leq Z_{i,j}(\underline{a}, \underline{p}). \end{aligned}$$

By definition of P_G , $(\underline{a}, \underline{p})$ is in P_G . \square

Let us now characterize the interior and the closure of P_G .

Proposition 4.5.8. *For every $G \in \text{DC}_N$, denote by $\overset{\circ}{P}_G$ (resp. \overline{P}_G) the interior (resp. the closure) of P_G in P^{2N} . Then,*

$$\overset{\circ}{P}_G = \{ (\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N} : (G, \underline{a}, \underline{p}) \text{ satisfies } (C_{m(G)}^>) \text{ and } (C_{M(G)}^{\leq}) \}$$

and

$$\overline{P}_G = \{ (\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N} : (G, \underline{a}, \underline{p}) \text{ satisfies } (C_{m(G)}^{\geq}) \text{ and } (C_{M(G)}^{\leq}) \}.$$

In order to prove this proposition, let us introduce some additional notation.

For every DC graph $G \in \text{DC}_N$ and $1 \leq i < j \leq N$, set

$$\tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) := z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) + \frac{Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) - z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})}{1 + \sum_{k=i+1}^j \sum_{l=k}^N \Gamma_{k,l}^{(G)} \frac{q_{b_G(l)} - q_{b_G(l-1)}}{q_{b_G(l-1)}}}. \quad (4.62)$$

Remark 4.5.9. This definition immediately implies that the two quantities $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) - Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ and $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) - \tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ have the same strict sign (either they are simultaneously positive, or they are simultaneously negative, or they simultaneously vanish).

Remark 4.5.10. Let $G \in \text{DC}_N$ be a DC graph and let $1 \leq i < j \leq N$. Using (4.42), we have that

$$\tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = \frac{\sum_{k=i+1}^j \sum_{l=k}^N \Gamma_{k,l}^{(G)} \frac{d_l}{q_{b_G(l-1)}}}{1 + \sum_{k=i+1}^j \sum_{l=k}^N \Gamma_{k,l}^{(G)} \frac{q_{b_G(l)} - q_{b_G(l-1)}}{q_{b_G(l-1)}}}. \quad (4.63)$$

It follows from (4.41) (resp. (4.63)) that $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ (resp. $\tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$) is a linear combination of d_1, \dots, d_N (resp. d_{i+1}, \dots, d_N) with positive coefficients:

$$z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = \sum_{l=1}^N f_{1,l}^{(G)}(\underline{p}) d_l \quad (4.64)$$

$$\tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = \sum_{l=i+1}^N f_{i,j,l}^{(G)}(\underline{p}) d_l, \quad (4.65)$$

where the coefficients $f_{1,l}^{(G)}(\underline{p})$ and $f_{i,j,l}^{(G)}(\underline{p})$ are positive for all l and \underline{p} .

Proof of Proposition 4.5.8. By Proposition 4.5.7 and by continuity of $z_i^{(G)}$ and $Z_{i,j}^{(G)}$ for all $i < j$, one obtains that

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{P}_G &\supseteq \{(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N} : (G, \underline{a}, \underline{p}) \text{ satisfies } (C_{m(G)}^>) \text{ and } (C_{M(G)}^<)\}, \\ \overline{P}_G &\subseteq \{(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N} : (G, \underline{a}, \underline{p}) \text{ satisfies } (C_{m(G)}^{\geq}) \text{ and } (C_{M(G)}^{\leq})\}. \end{aligned}$$

Reciprocally, let us prove that

$$\overset{\circ}{P}_G \subseteq \{(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N} : (G, \underline{a}, \underline{p}) \text{ satisfies } (C_{m(G)}^>) \text{ and } (C_{M(G)}^<)\}.$$

Consider $(\underline{a}, \underline{p}) \in \overset{\circ}{P}_G$. Since $(\underline{a}, \underline{p}) \in P_G$, $(G, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies $(C_{m(G)}^>)$ and $(C_{M(G)}^{\leq})$. Let us prove that $(G, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies $(C_{M(G)}^<)$. Assume by contradiction that $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ for some $(i, j) \in M(G)$. By Remark 4.5.9 this is equivalent to having $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = \tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$. By Remark 4.5.10, $\tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ does not depend on d_1 while $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ is linear in d_1 with a positive coefficient in front of d_1 . Therefore, there exists some $\varepsilon > 0$ such that for all $d_1' \in (d_1, d_1 + \varepsilon)$,

$$z_1^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}') > \tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}')$$

and

$$(\underline{a}', \underline{p}') \in \overset{\circ}{P}_G,$$

where $d'_i = d_i$ for all $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$ and $p'_i = p_i$ for all $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Since $(\underline{a}', \underline{p}')$ is in P_G , $(G, \underline{a}', \underline{p}')$ should satisfy $(C_{M(G)}^{\leq})$, which is a contradiction with the previous inequality.

It remains to prove that

$$\overline{P_G} \supseteq \{ (\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N} : (G, \underline{a}, \underline{p}) \text{ satisfies } (C_{m(G)}^{\geq}) \text{ and } (C_{M(G)}^{\leq}) \}.$$

Let $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ be such that $(C_{m(G)}^{\geq})$ and $(C_{M(G)}^{\leq})$ are satisfied by $(G, \underline{a}, \underline{p})$. Observe that the dynamics is unchanged by re-scaling all the distances by a common multiplicative factor. Without loss of generality, let us choose this scaling such that $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = 1$. Define the following four sets:

$$\begin{aligned} A_M^{\overline{=}} &:= \{ (i, j) \in M(G) : 1 = Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \} \\ A_M^{\overline{<}} &:= \{ (i, j) \in M(G) : 1 < Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \} \\ A_m^{\overline{=}} &:= \{ (i, j) \in m(G) : 1 = Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \} \\ A_m^{\overline{>}} &:= \{ (i, j) \in m(G) : 1 > Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) \}. \end{aligned}$$

By continuity of the $z_i^{(G)}$ and $Z_{i,j}^{(G)}$ for all i and j , there exists $\eta > 0$ such that for every $(\underline{a}', \underline{p}') \in P^{2N}$ satisfying $\|(\underline{a}', \underline{p}') - (\underline{a}, \underline{p})\|_{\infty} < \eta$, we have

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in A_M^{\overline{<}}, z_1^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}') < Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}'), \\ \forall (i, j) \in A_m^{\overline{>}}, z_1^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}') > Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}'). \end{aligned}$$

Let $\varepsilon \in (0, \eta)$. We want to find $(\underline{a}', \underline{p}') \in P^{2N}$ with $\|(\underline{a}', \underline{p}') - (\underline{a}, \underline{p})\|_{\infty} < \varepsilon$ such that the following three conditions hold:

$$(C_1) \quad z_1^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}') = 1,$$

$$(C_2) \quad \forall (i, j) \in A_M^{\overline{=}}, 1 = \tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}'),$$

$$(C_3) \quad \forall (i, j) \in A_m^{\overline{=}}, 1 > \tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}').$$

Combined with Remark 4.5.9, it will entail that $(G, \underline{a}', \underline{p}')$ satisfies $(C_{M(G)}^{\leq})$ and $(C_{m(G)}^{\geq})$, and thus by Proposition 4.5.7 we will conclude that $(\underline{a}', \underline{p}') \in P_G$.

Let us first prove that the map $s : (i, j) \in A_M^{\overline{=}} \cup A_m^{\overline{=}} \mapsto i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ is injective. Assume that (i, j) and (i, j') are two elements of $A_M^{\overline{=}} \cup A_m^{\overline{=}}$. We distinguish three cases.

- If (i, j) and (i, j') are both in $A_m^{\overline{=}}$, then $j = j' = b_G(i)$.
- If they are both in $A_M^{\overline{=}}$, let us reason by contradiction and assume that $j \neq j'$. Without loss of generality assume $j < j'$. Since (i, j') is a minimal element of $E_N \setminus E(G)$ for the order \preceq_E , we have that $(i, j' - 1) \in E(G)$. Since $j \leq j' - 1$ and G is a DC graph, it implies that $(i, j) \in E(G)$, which is a contradiction.

- Let us show that (i, j) and (i, j') cannot be for one in A_m^- and for the other in A_M^- . Reason by contradiction and assume that $(i, j) \in A_m^-$ and $(i, j') \in A_M^-$. Then $(i, j) \in m(G)$ implies $j = b_G(i)$ and $(i, j') \in M(G)$ implies $j' = b_G(i)+1 = j+1$. By definition of A_m^- and A_M^- , we have $z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = Z_{i,j+1}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$. This would imply that $z_{j+1}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = Z_{i,j+1}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) - Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = 0$, which contradicts the positivity of $z_{j+1}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p})$ when (C_M^{\leq}) and (C_m^{\geq}) are satisfied by $(G, \underline{a}, \underline{p})$ (Lemma 4.5.6).

Set $\underline{p}' := \underline{p}$ and $d'_{i+1} := d_{i+1}$ for every $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \setminus s(A_M^- \cup A_m^-)$. Define condition

$$(C'_3) \quad \forall (i, j) \in A_m^-, 1 = \tilde{Z}_{i,j}^{(G)}(\underline{a}', \underline{p}').$$

Then the conditions (C_1) , (C_2) and (C'_3) form a linear system of equations in the unknowns d'_1 and $(d'_{i+1})_{i \in s(A_M^- \cup A_m^-)}$. Since the map s is injective on $A_M^- \cup A_m^-$, there are as many unknowns as equations. By (4.64) and (4.65), this system is triangular with non-zero coefficients on the diagonal. It has a unique solution, which we know to be $d'_1 = d_1$ and $d'_{i+1} = d_{i+1}$ for every $i \in s(A_M^- \cup A_m^-)$. If we now consider conditions (C_1) , (C_2) and (C_3) , they form a system of linear equations and inequations, defined by hyperplanes that intersect transversely. Thus they possess solutions arbitrarily close to the intersection point. \square

Denote by $\partial P_G := \overline{P_G} \setminus \overset{\circ}{P_G}$ the boundary of P_G . As an immediate consequence of Proposition 4.5.8, one obtains the following characterisation of ∂P_G :

Corollary 4.5.11. *We have that $(\underline{a}, \underline{p})$ is in ∂P_G if and only if $(C_{m(G)}^{\geq})$ and $(C_{M(G)}^{\leq})$ are satisfied by $(G, \underline{a}, \underline{p})$ and there exists $(i, j) \in m(G) \cup M(G)$ such that*

$$z_1^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}) = Z_{i,j}^{(G)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

Now, assume that G_1 and G_2 are two distinct DC graphs and let us characterize the common boundary of the two regions P_{G_1} and P_{G_2} . In what follows, we denote by $(z_1 = 1)$ the set of parameters $(\underline{a}, \underline{p})$ such that $z_1(\underline{a}, \underline{p}) = 1$.

Proposition 4.5.12. *Consider $G_1 \neq G_2$ in DC_N satisfying (4.58). For every $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$, $(\underline{a}, \underline{p})$ is in $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2} \cap (z_1 = 1)$ if and only if $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies the four conditions below:*

$$(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-) \tag{4.66}$$

$$(C_{m(G_1)\cap E(G_2)}^{\geq}) \tag{4.67}$$

$$(C_{M(G_1)\cap E(G_2)^c}^{\leq}) \tag{4.68}$$

$$z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = 1. \tag{4.69}$$

Observe that the three sets $E(G_1)\Delta E(G_2)$, $m(G_1) \cap E(G_2)$ and $M(G_1) \cap E(G_2)^c$ form a partition of $m(G_1) \cup M(G_1)$ by (4.58).

Remark 4.5.13. We could remove the normalization $\{z_1 = 1\}$ from the statement of Proposition 4.5.12, in the sense that $(\underline{a}, \underline{p}) \in \partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$ if and only if conditions (4.66)-(4.68) are satisfied. However, as in the proof of Proposition 4.5.8, we will later need such a scaling to ensure that a certain linear system is triangular.

Proof of Proposition 4.5.12. First, let us prove that if $(\underline{a}, \underline{p})$ is in $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2} \cap \{z_1 = 1\}$, then (4.66)-(4.69) are satisfied. Since $(\underline{a}, \underline{p})$ is in ∂P_{G_1} , $(C_{m(G_1)}^{\geq})$ and $(C_{M(G_1)}^{\leq})$ are satisfied by $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ by Corollary 4.5.11. Therefore, (4.67) and (4.68) are satisfied. Note that $(\underline{a}, \underline{p})$ belongs to $\overline{P_{G_1}} \cap \overline{P_{G_2}}$. Then, by Lemma 4.5.6 and Proposition 4.5.8, for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i(\underline{a}, \underline{p}). \quad (4.70)$$

Therefore, (4.69) is satisfied since $(\underline{a}, \underline{p}) \in \{z_1 = 1\}$. Now, it remains to prove (4.66). Consider $(i, j) \in E(G_1) \Delta E(G_2)$ and let us prove that

$$z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) - Z_{i,j}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = 0. \quad (4.71)$$

Note that the edges of $E(G_1) \Delta E(G_2)$ are either in $m(G_1) \cap M(G_2)$ or in $M(G_1) \cap m(G_2)$ by hypothesis (4.58). Let us assume that (i, j) belongs to $m(G_1) \cap M(G_2)$ (the other case is treated similarly by symmetry). Then,

$$z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) - Z_{i,j}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) \geq 0 \quad (4.72)$$

and

$$z_1^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}) - Z_{i,j}^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}) \leq 0. \quad (4.73)$$

Equality (4.71) follows from combining (4.70) with (4.72) and (4.73).

Now, assume that $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ satisfies (4.66)-(4.69). Let us prove that $(\underline{a}, \underline{p})$ belongs to $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2} \cap \{z_1 = 1\}$. Since $G_1 \neq G_2$, the set $E(G_1) \Delta E(G_2)$ is non-empty. Combining (4.66)-(4.68) with Corollary 4.5.11, we get that $(\underline{a}, \underline{p}) \in \partial P_{G_1}$. Since $\partial P_{G_1} \subseteq \overline{P_{G_1}}$ and by Lemma 4.5.6 and Proposition 4.5.8, for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$z_i(\underline{a}, \underline{p}) = z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

As a consequence, with $i = 1$, one obtains that $(\underline{a}, \underline{p}) \in \{z_1 = 1\}$. It remains to prove that $(\underline{a}, \underline{p}) \in \partial P_{G_2}$.

By definition of $m(G_1)$, for every $(i, j) \in E(G_1)$, there exists $(i', j') \in m(G_1)$ such that $i' \leq i < j \leq j'$. Similarly, by definition of $M(G_1)$, for every $(i, j) \in E(G_1)^c$, there exists $(i', j') \in M(G_1)$ such that $i \leq i' < j' \leq j$. As a consequence, since $z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p})$ is positive for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ by Lemma 4.5.6, and by definition of $m(G)$ and $M(G)$, we have that $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies conditions $(C_{E(G_1) \cap E(G_2)}^{\geq})$ and $(C_{E(G_1)^c \cap E(G_2)^c}^{\leq})$.

Since $(z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ is the unique solution of the system $\mathcal{S}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p})$, one obtains that for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$a_i = \sum_{j=1}^{b_{G_1}(i)} p_j \left(z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) + z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) - (z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p})) \right). \quad (4.74)$$

Let $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. We want to show that

$$a_i = \sum_{j=1}^{b_{G_2}(i)} p_j \left(z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) + z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) - (z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p})) \right). \quad (4.75)$$

This is clearly true if $b_{G_1}(i) = b_{G_2}(i)$. Otherwise, hypothesis (4.58) implies that $j := \max(b_{G_1}(i), b_{G_2}(i)) = \min(b_{G_1}(i), b_{G_2}(i)) + 1$. In that case, (4.74) and (4.75) differ by a single term, which is $z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) - Z_{i,j}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p})$. Since $(i, j) \in E(G_1) \Delta E(G_2)$, condition (4.66) implies that the extra term vanishes, hence (4.75) also holds in that case.

As a consequence, $(z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ is a solution of the linear system $\mathcal{S}^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p})$. Since the unique solution of this system is $(z_i^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$, we have that $z_i(\underline{a}, \underline{p}) = z_i^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_i^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p})$ for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Thus $Z_{i,j}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = Z_{i,j}^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p})$ for every $1 \leq i < j \leq N$. The facts that $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies conditions $(C_{E(G_1) \Delta E(G_2)}^=)$, $(C_{E(G_1) \cap E(G_2)}^>)$ and $(C_{E(G_1)^c \cap E(G_2)^c}^<)$ then imply that $(G_2, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies respectively conditions $(C_{E(G_1) \Delta E(G_2)}^=)$, $(C_{m(G_2) \cap E(G_1)}^>)$ and $(C_{M(G_2) \cap E(G_1)^c}^<)$. We deduce from Corollary 4.5.11 that $(\underline{a}, \underline{p}) \in \partial P_{G_2}$. To conclude, $(\underline{a}, \underline{p}) \in \partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2} \cap \{z_1 = 1\}$. \square

4.5.2. Proof of Theorem 4.5.2

We decompose the proof of Theorem 4.5.2 into three lemmas: Lemmas 4.5.14, 4.5.15 and 4.5.16. For the rest of the subsection, let us fix G_1 and G_2 two distinct DC graphs.

Lemma 4.5.14. $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2} = \emptyset$ if (4.58) is not verified.

Lemma 4.5.15. $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2} \neq \emptyset$ if (4.58) is verified.

Lemma 4.5.16. If $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2} \neq \emptyset$, then

$$\dim \partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2} = 2N - |E(G_1) \Delta E(G_2)|.$$

Proof of Lemma 4.5.14

Assume that (4.58) is not verified. More explicitly, assume that $(E(G_1) - E(G_2)) \cap (m(G_1))^c \neq \emptyset$ or $(E(G_2) - E(G_1)) \cap (M(G_1))^c \neq \emptyset$ and let us show that $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$ is empty.

In the first case, there is an edge (i, j) of G_1 which is not in G_2 and which is not maximal in G_1 . Therefore, there exists $(i', j') \in m(G_1)$ a maximal edge of G_1 distinct of (i, j) such that $i' \leq i < j \leq j'$. Since G_2 is a DC graph and (i, j) is not in G_2 , (i', j') is not in G_2 .

Now, we know that (i, j) and (i', j') are both in G_1 and both not in G_2 . By contradiction, assume there exists $(\underline{a}, \underline{p}) \in \partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$. Then, by Proposition 4.5.8, for $(i_0, j_0) \in \{(i, j), (i', j')\}$,

$$z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) \geq z_{i_0+1}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j_0}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

and

$$z_1^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}) \leq z_{i_0+1}^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j_0}^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

Let $l \in \llbracket 1, N \rrbracket$. For every $(\underline{a}', \underline{p}') \in P_{G_1}$, $z_l(\underline{a}', \underline{p}') = z_l^{(G_1)}(\underline{a}', \underline{p}')$ and for every $(\underline{a}', \underline{p}') \in P_{G_2}$, $z_l(\underline{a}', \underline{p}') = z_l^{(G_2)}(\underline{a}', \underline{p}')$. Therefore, by continuity of z_l , $z_l^{(G_1)}$ and $z_l^{(G_2)}$, since $(\underline{a}, \underline{p}) \in \overline{P_{G_1}} \cap \overline{P_{G_2}}$, $z_l(\underline{a}, \underline{p}) = z_l^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_l^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p})$. As a consequence,

$$z_{i'+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j'}(\underline{a}, \underline{p}) = z_{i+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j(\underline{a}, \underline{p}) = z_1(\underline{a}, \underline{p}).$$

$$\begin{aligned} z_{i'+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j'}(\underline{a}, \underline{p}) &= (z_{i'+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_i(\underline{a}, \underline{p})) + (z_{i+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j(\underline{a}, \underline{p})) \\ &\quad + (z_{j+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j'}(\underline{a}, \underline{p})) \\ \iff 0 &= (z_{i'+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_i(\underline{a}, \underline{p})) + (z_{j+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j'}(\underline{a}, \underline{p})). \end{aligned}$$

Since the speed of a car is at most q_N after it started, each $z_l(\underline{a}, \underline{p})$ is bounded below by $\frac{d_l}{q_N} > 0$. Since $(i', j') \neq (i, j)$, the previous equation leads to a contradiction.

In the second case, there exists an edge (i, j) of G_2 which is not in $M(G_1)$. Therefore, there exists an edge (i', j') in $M(G_1)$ distinct of (i, j) such that $i \leq i' < j' \leq j$. Then, by Proposition 4.5.8, for $(i_0, j_0) \in \{(i, j), (i', j')\}$,

$$z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) \leq z_{i_0+1}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j_0}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

and

$$z_1^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}) \geq z_{i_0+1}^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j_0}^{(G_2)}(\underline{a}, \underline{p}).$$

As previously, one obtains that

$$z_{i'+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_{j'}(\underline{a}, \underline{p}) = z_{i+1}(\underline{a}, \underline{p}) + \cdots + z_j(\underline{a}, \underline{p}) = z_1(\underline{a}, \underline{p}),$$

which leads to a contradiction as for the previous case.

Proof of Lemma 4.5.15

Assume that (4.58) is satisfied. It suffices to find $(\underline{a}, \underline{p}) \in (z_1 = 1)$ such that $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies conditions $(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-)$, $(C_{m(G_1)\cap E(G_2)}^>)$ and $(C_{M(G_1)\cap E(G_2)^c}^<)$. Indeed, by Proposition 4.5.12, it will imply that $(\underline{a}, \underline{p}) \in \partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$.

Let us proceed by induction on N , along similar lines as the proof of Theorem 4.4.12.

For $N = 1$, there is nothing to prove since there is only one DC graph. For $N = 2$, assume that $G_1 = (\{1, 2\}, \emptyset)$ and $G_2 = (\{1, 2\}, \{(1, 2)\})$. In this case, $E(G_1)\Delta E(G_2) = \{(1, 2)\}$ does not contain any pair of nested edges. Set $\underline{a} = (1, 3)$ and $\underline{p} = (1, 1)$. Then one computes $z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) - Z_{1,2}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) - z_2^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = 0$ and $z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = 1$. Thus $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies $(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-)$, $(C_{m(G_1)\cap E(G_2)}^>)$, $(C_{M(G_1)\cap E(G_2)^c}^<)$ and (4.69).

Now fix $N \geq 3$ and assume that the result holds for every pair of distinct DC graphs with $N - 1$ vertices.

Consider G_1, G_2 two distinct DC graphs with N vertices satisfying (4.58). Define G'_1 (resp. G'_2) to be the restriction of G_1 (resp. G_2) to the vertex set $\llbracket 1, N - 1 \rrbracket$. Then G'_1 and G'_2 satisfy (4.58). By induction hypothesis, there exists $(\underline{a}', \underline{p}') \in P^{2N-2}$ such that $(G'_1, \underline{a}', \underline{p}')$ satisfies conditions $(C_{E(G'_1)\Delta E(G'_2)}^-)$, $(C_{m(G'_1)\cap E(G'_2)}^>)$, $(C_{M(G'_1)\cap E(G'_2)^c}^<)$ and (4.69). Define

$$(a_1^{(0)}, \dots, a_{N-1}^{(0)}, p_1^{(0)}, \dots, p_{N-1}^{(0)}) := (\underline{a}', \underline{p}').$$

Let $l \in \{1, 2\}$. For every $1 \leq i \leq N$, by definition of $z_i^{(G_l)}$, this function can be extended by continuity to the case when $p_N = 0$ by setting

$$z_i^{(G_l)}(\underline{a}^\dagger, a_N, \underline{p}^\dagger, 0) := z_i^{(G_l)}(\underline{a}^\dagger, \underline{p}^\dagger) \quad \text{if } i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket; \quad (4.76)$$

$$z_N^{(G_l)}(\underline{a}^\dagger, a_N, \underline{p}^\dagger, 0) := \frac{d_N}{q_{N-1}}. \quad (4.77)$$

With this extension, we have that $(G_1, \underline{a}^{(0)}, \underline{p}^{(0)})$ satisfies the four conditions $(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-)$, $(C_{m(G_1)\cap E(G_2)}^>)$, $(C_{M(G_1)\cap E(G_2)^c}^<)$ and (4.69) whenever $j \neq N$ and $p_N^{(0)} = 0$, regardless of the choice of $a_N^{(0)} > a_{N-1}^{(0)}$. Let us fix $p_N^{(0)} = 0$ and let $a_N^{(0)} > a_{N-1}^{(0)}$ be a free parameter that will be chosen appropriately below.

For every $1 \leq i \leq N$, we denote by $\chi_i = \tilde{y}_\infty(\tilde{t}_\infty(a_1^{(0)}) + \tilde{t}_\infty(a_i^{(0)}))$ the position of the car of index -1 in a stationary configuration where the car of index 0 is at position $a_i^{(0)}$. We extend this definition to the case $i = 0$ by setting $\chi_0 := a_1^{(0)}$. Consider the quantities χ_i as functions of $(a_N^{(0)}, p_N^{(0)})$. Observe that for every $i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$, $\chi_i(a_N^{(0)}, 0)$ is independent of the value of $a_N^{(0)} > a_{N-1}^{(0)}$. We denote it by $\chi_i(\cdot, 0)$.

Let $(z_i(\underline{a}, \underline{p}))_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ (resp. $z'_i(\underline{a}', \underline{p}')_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket}$) be the functions defined by (4.36) for $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ (resp. $(\underline{a}', \underline{p}') \in P^{2N-2}$). By using the definition of the continuous extensions (4.56), (4.57), (4.76) and (4.77) of z_i and z'_i to the case when $p_N = 0$ and combining Lemma 4.5.6 with the induction hypothesis,

we obtain that for every $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$,

$$z_i(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}^{(0)}) = z_i(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) = z'_i(\underline{a}', \underline{p}') = z_i^{(G'_1)}(\underline{a}', \underline{p}') = z_i^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) = z_i^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}^{(0)}).$$

We also have that

$$z_N(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}^{(0)}) = \frac{a_N^{(0)} - a_{N-1}^{(0)}}{q_{N-1}^{(0)}} = z_N^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}^{(0)}).$$

Set $i_l := \min\{i \in \llbracket 1, N \rrbracket : b_{G_l}(i) = N\}$ for $l = 1, 2$. By (4.58), $i_1 - i_2 \in \{-1, 0, 1\}$. By symmetry, assume without loss of generality that $i_1 \leq i_2$. We shall now prove that $(G_1, \underline{a}^{(0)}, \underline{p}^{(0)})$ satisfies conditions $(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-)$, $(C_{m(G_1)\cap E(G_2)}^>)$ and $(C_{M(G_1)\cap E(G_2)^c}^<)$ when $j = N$ and $p_N^{(0)} = 0$. We consider three cases.

Case 1: $i_1 = i_2 \leq N-1$. The only edges of the form (i, N) in $m(G_1) \cup M(G_1)$ are $(i_1, N) \in m(G_1) \cap E(G_2)$ and $(i_1-1, N) \in M(G_1) \cap E(G_2)^c$ thus it suffices to find $a_N^{(0)} > a_{N-1}^{(0)}$ satisfying the following inequalities:

$$Z_{i_1, N}^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) < z_1^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) < Z_{i_1-1, N}^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0). \quad (4.78)$$

If $i_1 \leq N-2$, since (i_1, N) is an edge of both DC graphs G_1 and G_2 , $(i_1, N-1)$ is also an edge of G_1 and G_2 , hence also of G'_1 and G'_2 . Since $(i_1, N-1) \in m(G'_1) \cap E(G'_2)$ and $(G'_1, \underline{a}', \underline{p}')$ satisfies $(C_{m(G'_1)\cap E(G'_2)}^>)$ by induction hypothesis, we have that, if $i_1 \leq N-2$,

$$z_1^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) > Z_{i_1, N-1}^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0),$$

which can be rewritten as

$$z_1(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) > Z_{i_1, N-1}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0).$$

Lemma 4.4.2 implies that $a_{N-1}^{(0)} < \chi_{i_1}(\cdot, 0)$ if $i_1 \leq N-2$. This inequality also clearly holds for $i_1 = N-1$. We also have that $\chi_{i_1}(\cdot, 0) > \chi_{i_1-1}(\cdot, 0)$. Pick $a_N^{(0)}$ such that

$$\max(a_{N-1}^{(0)}, \chi_{i_1-1}(\cdot, 0)) < a_N^{(0)} < \chi_{i_1}(\cdot, 0).$$

Since $\chi_{i_1-1}(\cdot, 0) < a_N^{(0)} < \chi_{i_1}(\cdot, 0)$, it follows from Lemma 4.4.2 that

$$Z_{i_1, N}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) < z_1(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) < Z_{i_1-1, N}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0),$$

which yields (4.78).

Case 2: $i_1 = i_2 = N$. The only edge of the form (i, N) in $m(G_1) \cup M(G_1)$ is $(N-1, N) \in M(G_1) \cap E(G_2)$. We pick $a_N^{(0)} > \chi_{N-1}(\cdot, 0)$ and conclude as above that

$$z_1^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) < Z_{N-1, N}^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0).$$

Case 3: $i_2 = i_1 + 1$. The proof follows the same lines as the one of case 1, replacing a strict inequality by an equality. The only edges of the form (i, N) in $m(G_1) \cup M(G_1)$ are $(i_1, N) \in E(G_1)\Delta E(G_2)$ and $(i_1 - 1, N) \in M(G_1) \cap E(G_2)$, thus it suffices to find $a_N^{(0)} > a_{N-1}^{(0)}$ satisfying

$$Z_{i_1, N}^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) = z_1^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0) < Z_{i_1-1, N}^{(G_1)}(\underline{a}^{(0)}, \underline{p}', 0). \quad (4.79)$$

Assume first that $i_1 \leq N - 2$. Since (i_1, N) is in $E(G_1)\Delta E(G_2)$, which contains no pair of nested edges by assumption (4.58), we have that $(i_1, N - 1) \notin E(G_1)\Delta E(G_2)$. Since $(i_1, N) \in E(G_1)$ with $i_1 \leq N - 2$, we have that $(i_1, N - 1) \in E(G_1)$, hence $(i_1, N - 1) \in E(G_2)$ too. As in case 1, we deduce that $a_{N-1}^{(0)} < \chi_{i_1}(\cdot, 0)$. The latter inequality automatically holds when $i_1 = N - 1$. We then set $a_N^{(0)} := \chi_{i_1}(\cdot, 0) > \max(a_{N-1}^{(0)}, \chi_{i_1-1}(\cdot, 0))$, which yields (4.79).

Wrapping up the three cases, we have found in each case a value of $a_N^{(0)}$ such that the triple $(G_1, \underline{a}^{(0)}, \underline{p}^{(0)})$ satisfies conditions $(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-)$, $(C_{m(G_1)\cap E(G_2)}^>)$, $(C_{M(G_1)\cap E(G_2)^c}^<)$ and (4.69) for $p_N^{(0)} = 0$. The requirement that $(C_{m(G_1)\cap E(G_2)}^>)$ and $(C_{M(G_1)\cap E(G_2)^c}^<)$ be satisfied by $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ forms a collection of strict inequalities involving continuous functions of $(\underline{a}, \underline{p})$ all the way up to $p_N = 0$, thus this holds true for $(\underline{a}, \underline{p})$ in a neighborhood U of $(\underline{a}^0, \underline{p}^0)$ in the closure $\overline{P^{2N}}$ of P^{2N} .

We fix $p_i = p_i^{(0)}$ for every $i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$ and we let $p_N \geq 0$ be a free parameter for now. Let us consider a linear system of equations with unknowns \underline{d} , where $d_i = a_i - a_{i-1}$ for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. One equation is given by (4.69). The equations

$$\forall (i, j) \in E(G_1)\Delta E(G_2), z_1^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) - \tilde{Z}_{(i, j)}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = 0, \quad (4.80)$$

are equivalent, by Remark 4.5.9, to the fact that $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies $(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-)$. Combining them with (4.69), we get the following equations:

$$\forall (i, j) \in E(G_1)\Delta E(G_2), \tilde{Z}_{(i, j)}^{(G_1)}(\underline{a}, \underline{p}) = 1, \quad (4.81)$$

Finally we also require that

$$\forall i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \setminus s(E(G_1)\Delta E(G_2)), d_{i+1} = a_{i+1}^{(0)} - a_i^{(0)}. \quad (4.82)$$

The map $s : (i, j) \in E(G_1)\Delta E(G_2) \mapsto i$ is injective by assumption (4.58). Thus the linear system consisting of (4.69), (4.81) and (4.81) has N equations and N unknowns \underline{d} , and it is triangular with non-zero diagonal elements, as in the proof of Proposition 4.5.8. Hence it has a unique solution for every choice of $p_N \geq 0$ and this solution is a continuous function of p_N . When $p_N = 0$, this solution is given by $d_i = a_i^{(0)} - a_{i-1}^{(0)}$ for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Thus by continuity, we can find $(\underline{a}, \underline{p}) \in U \cap P^{2N}$ such that $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies $(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-)$ and (4.69).

Putting everything together, we have found $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ such that $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies conditions $(C_{E(G_1)\Delta E(G_2)}^-)$, $(C_{m(G_1)\cap E(G_2)}^>)$, $(C_{M(G_1)\cap E(G_2)^c}^<)$ and (4.69), which concludes the proof of the inductive step.

Proof of Lemma 4.5.16

Recall that $(z_1 = 1)$ denotes the set of parameters $(\underline{a}, \underline{p})$ in P^{2N} such that $z_1(\underline{a}, \underline{p}) = 1$. The map

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}_{>0} \times (z_1 = 1) &\rightarrow P^{2N} \\ (\lambda, (\underline{a}, \underline{p})) &\mapsto (\lambda \underline{a}, \underline{p}) \end{aligned}$$

is a homeomorphism with inverse function

$$\begin{aligned} h^{-1}: P^{2N} &\rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times (z_1 = 1) \\ (\underline{a}, \underline{p}) &\mapsto \left(z_1(\underline{a}, \underline{p}), \left(\frac{\underline{a}}{z_1(\underline{a}, \underline{p})}, \underline{p} \right) \right). \end{aligned}$$

The fact that h^{-1} is well-defined and is the inverse function of h is a consequence of the following re-scaling property: for every $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ and $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$z_i(\lambda \underline{a}, \underline{p}) = \lambda z_i(\underline{a}, \underline{p})$$

Moreover, h and h^{-1} are both continuous since z_1 is continuous by Lemma 4.4.13 and positive.

By Proposition 4.5.12, $(\underline{a}, \underline{p})$ is in $(\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}) \cap (z_1 = 1)$ if and only if (4.66)-(4.69) are satisfied. Set $\delta := |E(G_1) \Delta E(G_2)|$. As was the case in the end of the proof of Lemma 4.5.15, (4.69) and (4.66) can be replaced by $\delta + 1$ equalities expressing d_1 and $(d_{i+1})_{i \in s(E(G_1) \Delta E(G_2))}$ in terms of the $2N - 1 - \delta$ free parameters $(d_i)_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \setminus s(E(G_1) \Delta E(G_2))}$ and \underline{p} . Thus

$$\dim((\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}) \cap (z_1 = 1)) \leq 2N - 1 - \delta.$$

The dimension of $(\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}) \cap (z_1 = 1)$ is bounded below by the dimension of the set of parameters $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ satisfying the following two conditions:

- $(G_1, \underline{a}, \underline{p})$ satisfies $(C_{m(G_1) \cap E(G_2)}^>)$ and $(C_{M(G_1) \cap E(G_2)^c}^<)$
- $(\underline{a}, \underline{p})$ satisfies the $\delta + 1$ equalities expressing d_1 and $(d_{i+1})_{i \in s(E(G_1) \Delta E(G_2))}$ in terms of $(d_i)_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \setminus s(E(G_1) \Delta E(G_2))}$ and \underline{p} .

This set is non-empty by Lemma 4.5.15. Moreover, by continuity of the $z_i^{(G_1)}$ and $Z_{i,j}^{(G_1)}$, the strict inequalities remain satisfied on an open neighborhood of the free parameters $(d_i)_{i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \setminus s(E(G_1) \Delta E(G_2))}$ and \underline{p} around any point $(\underline{a}, \underline{p})$ satisfying the above conditions. Therefore, this set contains an open subset of $\mathbb{R}^{N-1-\delta}$. As a consequence, the topological dimension of $(\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}) \cap (z_1 = 1)$ is equal to $N - 1 - \delta$.

The conclusion follows from the fact that the homeomorphism h maps $\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}$ to $\mathbb{R}_{>0} \times (\partial P_{G_1} \cap \partial P_{G_2}) \cap (z_1 = 1)$.

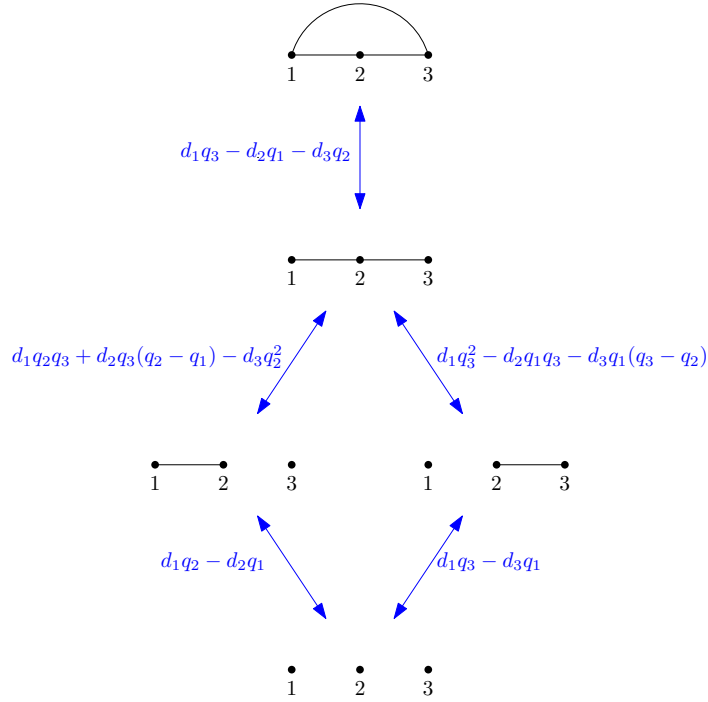


Figure 4.5 – The Hasse diagram of the Stanley lattice for DC graphs with 3 vertices. Next to each edge is given a polynomial in the variables $(\underline{d}, \underline{q})$. This polynomial vanishes on the boundary between the regions labelled by the two DC graphs at each end of the edge. This polynomial is positive on the region labelled by the graph which is on the top end of the edge.

4.5.3. Examples of boundary equations

In this subsection, we derive from Proposition 4.5.7 examples of formulas for boundary equations.

Example 4.5.17. Continuing Example 4.4.10, when $G = K_N$, $m(K_N)$ consists of the single edge $(1, N)$ and $M(K_N)$ is the empty set. Thus the speed of the front is given by (4.47) as soon as $(\underline{a}, \underline{p})$ satisfies $q_N d_1 > \sum_{j=2}^N q_{j-1} d_j$.

Example 4.5.18. Continuing Example 4.4.11 for the line graph L_N , the speed of the front is given by (4.48) as soon as the following $2N - 3$ equations are satisfied:

$$\forall i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, \frac{\sum_{j=1}^N d_j \left(\prod_{h=1}^j \frac{p_h}{q_h} \right)}{\sum_{j=0}^{N-1} p_{j+1} \left(\prod_{h=1}^j \frac{p_h}{q_h} \right)} > \frac{\sum_{j=i+1}^N d_j \left(\prod_{h=i+1}^j \frac{p_h}{q_h} \right)}{\sum_{j=i}^{N-1} p_{j+1} \left(\prod_{h=i+1}^j \frac{p_h}{q_h} \right)}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, N - 2 \rrbracket, \frac{\sum_{j=1}^N d_j \left(\prod_{h=1}^j \frac{p_h}{q_h} \right)}{\sum_{j=0}^{N-1} p_{j+1} \left(\prod_{h=1}^j \frac{p_h}{q_h} \right)} \leq \frac{d_{i+1} + \sum_{j=i+2}^N d_j \left(\prod_{h=i+3}^j \frac{p_h}{q_h} \right)}{q_{i+2} + \sum_{j=i+2}^{N-1} p_{j+1} \left(\prod_{h=i+3}^j \frac{p_h}{q_h} \right)}$$

Example 4.5.19. In Figure 4.5, we depict the Hasse diagram of the Stanley lattice, representing all the DC graphs with 3 vertices. By Theorem 4.5.2, the boundaries of codimension 1 between two

regions correspond to the edges of this Hasse diagram. Next to each edge of the graph, we represent the numerator of the rational function $z_1^{(G)} - Z_{i,j}^{(G)}$, where G is the graph located at one end of the edge (it does not matter which one). By Proposition 4.5.7, P_G consists of all the parameters such that for every G' adjacent to G in the Hasse diagram, $z_1^{(G')} - F_{(i,j)}^{(G')}$ is positive (resp. non-positive) if and only if the edge from G and G' is ascending (resp. descending) in the Hasse diagram. For instance, $d_1q_3 - d_2q_1 - d_3q_2 = 0$ is the equation of the boundary between the two regions indexed by the complete graph K_3 and the line graph L_3 . If $d_1q_3 - d_2q_1 - d_3q_2 > 0$, the DC graph of the stationary solution is the complete graph K_3 .

4.6. Convergence of the infinite bin model to the liquid bin model

In this section, we prove the convergence in distribution of the infinite bin model to the liquid bin model, when the distribution of the infinite bin model is some discrete distribution with finite support.

Let us recall the definition of the infinite bin model. A *configuration of particles* is an element $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathbb{Z}}$. A configuration of particles X is called *admissible* if there exists $F(X) \in \mathbb{Z}$ such that for all $k \in \mathbb{Z}$, X_k is positive if and only if $k \leq F(X)$. $F(X)$ is called the *front* of X . Since each bin to the left of the front is non-empty, there are infinitely many particles in the system.

Note that admissible configurations of particles are simply those admissible configurations of liquid which take only integer values. Consider the following dynamics on admissible configurations of particles. For $\xi \in \mathbb{Z}_{>0}$, let $\tilde{\Phi}_\xi$ be the map such that for any admissible configuration X ,

$$\tilde{\Phi}_\xi(X) := X + e(B(X, \xi)), \quad (4.83)$$

where $e(j) = (\mathbf{1}_{k=j})_{k \in \mathbb{Z}}$ is the j -th vector in the canonical Hilbert basis of $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ and $B(X, \xi) = \min\{j \in \mathbb{Z} : \sum_{k \geq j} X_k < \xi\}$ corresponds to the position of the leftmost bin such that there are strictly less than ξ particles in the bin and to its right. Heuristically, the configuration $\tilde{\Phi}_\xi(X)$ is a copy of the configuration X in which we added a particle in the bin immediately on the right of the bin containing the ξ -th rightmost particle.

For μ a probability distribution on $\mathbb{Z}_{>0}$, consider $(\xi_n)_{n \geq 1}$ i.i.d random variables with distribution μ and $X(0)$ an admissible configuration of particles. Set $(X(n))_{n \geq 0}$ the sequence of configurations of particles such that for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$X(n+1) = \tilde{\Phi}_{\xi_{n+1}}(X(n)). \quad (4.84)$$

Then $(X(n))_{n \geq 0}$ is called an *infinite bin model* with distribution μ .

For $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, set $X(t) := X(\lfloor t \rfloor) + (t - \lfloor t \rfloor)e(B(X(\lfloor t \rfloor), \xi_{\lfloor t \rfloor + 1}))$ to be the continuous-time process obtained by interpolation.

Now, let us introduce a stochastic process which is analogous to the car model introduced in Section 4.2. Recall that $\Sigma x = (\sum_{j=k}^{\infty} x_j)_{k \in \mathbb{Z}}$ for every admissible configuration x in $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. If $(X(n))_{n \geq 0}$ is an infinite bin model with distribution μ , denote by $(Y(n))_{n \geq 0}$ the stochastic process such that for every

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$Y(n) := \Sigma X(n).$$

One may interpret the process $(Y(n))_{n \geq 0}$ as a model of cars moving on $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, where $Y_k(n)$ corresponds to the position of the k -th car at time n . Note that by linear interpolation, $Y(t)$ is also defined for every $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. We shall henceforth assume that μ has finitely many atoms $b_1 < \dots < b_N$ with respective probabilities (p_1, \dots, p_N) .

We place a road sign at position b_i for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ indicating the speed q_i , where $q_i = p_1 + \dots + p_i$. We say that the sign i influences a car at position $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ if either $x \geq b_i$ or if $x < b_i$ and there is no car between x and b_i . The dynamics is the following: at each time, one sign is chosen. The probability of choosing the sign i is p_i , and the signs are chosen independently at each step. If the sign i is the chosen one between times n and $n + 1$, then the position of every car influenced by the sign i at time n increases by 1 at time $n + 1$. The other cars stay where they are.

With these notations, we will now prove the convergence of the infinite bin model to the liquid bin model.

Theorem 4.6.1 (Law of large numbers). *Consider $(\underline{a}, \underline{p}) \in P^{2N}$ such that $p_1 + \dots + p_N = 1$, and consider the probability measure*

$$\nu := \sum_{i=1}^N p_i \delta_{a_i}.$$

Fix an admissible liquid configuration $x(0) \in \mathcal{A}$ and let $x(t) := \Phi(t, x(0))$ be the configuration at time t of the liquid bin model associated with parameters $(\underline{a}, \underline{p})$ and with initial configuration $x(0)$. Consider $(\xi_n)_{n \geq 0}$ i.i.d. random variables with distribution ν . For any given $s \in \mathbb{R}_{> 0}$, the random variables $\xi_n^{(s)} := \lfloor s \xi_n \rfloor$ are i.i.d. distributed like

$$\nu^{(s)} := \sum_{i=1}^N p_i \delta_{\lfloor s \cdot a_i \rfloor}.$$

Let $X^{(s)} = (X^{(s)}(n))_{n \geq 0}$ be the infinite bin model with some initial configuration $X^{(s)}(0)$ which uses the variables $\xi_n^{(s)}$, namely satisfying

$$X^{(s)}(n+1) = \tilde{\Phi}_{\xi_{n+1}^{(s)}}(X^{(s)}(n)).$$

With the previous notations, set $y(t) := \Sigma x(t)$ and $Y^{(s)}(n) := \Sigma X^{(s)}(n)$ for all $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $s \in \mathbb{R}_{> 0}$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. If

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} - y_k(0) \right| \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0, \quad (4.85)$$

then for every $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [0, t_0]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.86)$$

As a consequence, for every $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, the process $(s^{-1}Y_k^{(s)}(st))_{k \in \mathbb{Z}, t \in [0, t_0]}$ converges in distribution to $(y_k(t))_{k \in \mathbb{Z}, t \in [0, t_0]}$ for the uniform norm on $\mathbb{Z} \times [0, t_0]$ as s goes to infinity.

Remark 4.6.2. For instance, note that (4.85) is satisfied when $X_k^{(s)}(0) := \lfloor sy_k(0) \rfloor - \lfloor sy_{k+1}(0) \rfloor$ for all $s \in \mathbb{R}_{> 0}$ and $k \in \mathbb{Z}$.

Remark 4.6.3. As a consequence of Theorem 4.6.1, with the same assumptions, one obtains the following convergence for the infinite bin model $X^{(s)}$ to the liquid bin model x : for every $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [0, t_0]} \left| \frac{X_k^{(s)}(st)}{s} - x_k(t) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

This follows from the fact that $X_k^{(s)} = Y_k^{(s)} - Y_{k+1}^{(s)}$ for all $k \in \mathbb{Z}$.

Remark 4.6.4. We conjecture that the fluctuations of the processes $(X_k^{(s)}(n))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ and $(Y_k(n)^{(s)})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ are piecewise Gaussian. To prove this, it is necessary to control more precisely the times when a cursor changes bins, or in terms of cars, the times when a sign is passed by a car. An intermediate result, which can be proved in a manner similar to Theorem 4.6.1, is the following: if for some $\alpha \in [0, 1/2)$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} - y_k(0) \right| s^\alpha \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0,$$

then for all $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [0, t_0]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| s^\alpha \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

This result is consistent with the fact that the fluctuations should be of the order of \sqrt{s} . For the sake of readability and clarity, we have only proved the case where $\alpha = 0$ but the proof of Theorem 4.6.1 can be adapted to prove this intermediate result.

Now, let us prove the main result of the section.

Proof of Theorem 4.6.1. As in Section 4.2, denote by $(\tau_l)_{l \geq 0}$ the increasing sequence of the times at which a cursor changes position in the liquid bin model starting with configuration $x(0)$ and with parameters $(\underline{a}, \underline{p})$. With the notations from Section 4.2.1, $\tau_0 = 0$ and $\tau_l = \tau_l(x(0))$ for every $l \geq 1$. By Proposition 4.2.4, τ_l also corresponds to the l -th positive time at which a car passes a sign in the deterministic car model. More precisely, for every $l \geq 1$,

$$\tau_l = \min \{ t > \tau_{l-1} : \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \llbracket 1, N \rrbracket, y_k(t) = a_i \}.$$

For the deterministic car model, it is known that the car k moves at speed q_i if and only if the car $k - 1$ is between the signs i and $i + 1$. Moreover, the speed of the car is constant on each interval (τ_l, τ_{l+1}) by definition of the model (since no car passes a sign between times τ_l and τ_{l+1}). Therefore, if one denotes by $\widehat{i}_{k,l}$ the index i such that the car $k - 1$ is between the signs i and $i + 1$ at time τ_l , then the speed of the car k is equal to $q_{\widehat{i}_{k,l}}$ at each time $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$. More precisely, for all $k \in \mathbb{Z}$, set

$$\widehat{i}_{k,l} := \max\{i \in \llbracket 0, N \rrbracket : a_i \leq y_{k-1}(\tau_l)\}, \quad (4.87)$$

with the convention that $a_0 = 0$. Then, for all $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$,

$$y_k(t) = y_k(\tau_l) + (t - \tau_l)q_{\widehat{i}_{k,l}}. \quad (4.88)$$

For all $s \in \mathbb{R}_{>0}$, $t \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{Z}$, one obtains by induction on $\lfloor st \rfloor$ that

$$\frac{Y_k^{(s)}(\lfloor st \rfloor)}{s} = \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} + \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{\lfloor st \rfloor - 1} \mathbb{1}_{Y_{k-1}^{(s)}(m) \geq \lfloor s\xi_{m+1} \rfloor}. \quad (4.89)$$

The main idea to prove the theorem is the following: heuristically, $(Y_k^{(s)}(n))_n$ behaves like a random walk with drift rate $q_{\widehat{i}_{k,l}}$ at time n , as long as $Y_{k-1}^{(s)}(n)$ stays between $\lfloor sa_{\widehat{i}_{k,l}} \rfloor$ and $\lfloor sa_{\widehat{i}_{k,l}+1} \rfloor$. This is a consequence of (4.89) since ξ_{m+1} takes values in $\{a_i : i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$, and is less or equal than a_i with probability q_i . Furthermore, the derivative of y_k (which corresponds to the speed of the k -th car) is equal to $q_{\widehat{i}_{k,l}}$ between times τ_l and τ_{l+1} by (4.88). Therefore, if one denotes by $\llbracket T_l^{(s)-}, T_l^{(s)+} - 1 \rrbracket$ the random interval consisting of the times n such that $Y_{k-1}^{(s)}(n)$ lies between $\lfloor sa_{\widehat{i}_{k,l}} \rfloor$ and $\lfloor sa_{\widehat{i}_{k,l}+1} \rfloor$ for every $k \in \mathbb{Z}$, then it will suffice to prove that $T_l^{(s)-}$ is close to $s\tau_l$ and that $T_l^{(s)+}$ is close to $s\tau_{l+1}$. Once this is done, one can obtain the convergence result by Donsker's Theorem.

Now, let us define $T_l^{(s)-}$ and $T_l^{(s)+}$ more rigorously. For all $s > 0$, set

$$T_0^{(s)-} := \inf\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \forall k \in \mathbb{Z}, \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor \leq Y_{k-1}^{(s)}(n) < \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}+1} \rfloor\},$$

$$T_0^{(s)+} := \inf\{n \geq T_0^{(s)-} + 1 : \exists k \in \mathbb{Z}, Y_{k-1}^{(s)}(n) \geq \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}+1} \rfloor\}.$$

Similarly, set by induction on $l \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$T_l^{(s)-} := \inf\{n \geq T_{l-1}^{(s)+} + 1 : \forall k \in \mathbb{Z}, \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,l}} \rfloor \leq Y_{k-1}^{(s)}(n) < \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,l}+1} \rfloor\},$$

$$T_l^{(s)+} := \inf\{n \geq T_l^{(s)-} + 1 : \exists k \in \mathbb{Z}, Y_{k-1}^{(s)}(n) \geq \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,l}+1} \rfloor\}.$$

See Figure 4.6 for an illustration.

With the convention that $\tau_0 = 0$, let us prove by induction on $l \geq 0$ that:

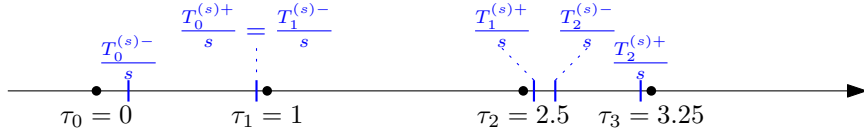


Figure 4.6 – A typical example of values for τ_l , $T_l^{(s)-}$ and $T_l^{(s)+}$ for $0 \leq l \leq 3$. The relative positions of the cars and the road signs are the same in the stochastic car model between times $T_l^{(s)-}$ and $T_l^{(s)+}$ and in the deterministic car model between times τ_l and τ_{l+1} . Assume that at time τ_1 there is only one sign that is passed by a car in the deterministic car model. Then with high probability when s is large, we will have $T_0^{(s)+} = T_1^{(s)-}$ since there is only one car that passes a sign around time τ_1 in the stochastic model. Assume that at time τ_2 there are several cars which are passing a sign in the deterministic car model (each car k passing a different sign i_k). Then with high probability $T_1^{(s)+}$ would correspond to the first time at which, in the stochastic car model, one of these cars k passes the sign i_k , while $T_2^{(s)-}$ would correspond to the time at which each car k has passed the sign i_k .

1. $\left| s^{-1}T_l^{(s)-} - \tau_l \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$.
2. $\left| s^{-1}T_l^{(s)+} - \tau_{l+1} \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$.
3. (4.86) is satisfied for $t_0 = \tau_{l+1}$.

By statement 3, this will prove Theorem 4.6.1.

In Section 4.6.1, we prove the initialisation for $l = 0$. The three subsections of Section 4.6.1 respectively correspond to the proofs of 1, 2 and 3 for $l = 0$. The inductive step has the same proof as the initialisation, up to minor details, which we explain in Subsection 4.6.2.

4.6.1. Initialisation for $l = 0$

Proof of 1 for $l = 0$

Note that 1 is straightforward when there is no car at the position of a sign at time 0 by hypothesis (4.85). The only case requiring work is if a car is passing a sign in $y(0)$. As we will see in the proof of the inductive step, this will be the generic case when $l \geq 1$, so we treat it in full detail here when $l = 0$.

Fix $\varepsilon > 0$ and let us prove that

$$\mathbb{P}(T_0^{(s)-} > \varepsilon s) \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{} 0.$$

For all $s \in \mathbb{R}_{>0}$ and $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, if $T_0^{(s)-} > t$, then either $Y_{k-1}^{(s)}(\lfloor t \rfloor) < \lfloor sa_{i_k,0} \rfloor$ or $Y_{k-1}^{(s)}(\lfloor t \rfloor) \geq \lfloor sa_{i_k,0+1} \rfloor$ for some $k \in \mathbb{Z}$. In words, either one car $k-1$ in the stochastic model has not passed the sign at position $\lfloor sa_{i_k,0} \rfloor$ at time $\lfloor t \rfloor$, or one car $k-1$ has already passed the sign at position $\lfloor sa_{i_k,0+1} \rfloor$ at time $\lfloor t \rfloor$.

By union bound,

$$\mathbb{P}(T_0^{(s)-} > \varepsilon s) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (Y_{k-1}^{(s)}(\lfloor \varepsilon s \rfloor) < \lfloor sa_{i_k,0} \rfloor)\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (Y_{k-1}^{(s)}(\lfloor \varepsilon s \rfloor) \geq \lfloor sa_{i_k,0+1} \rfloor)\right). \quad (4.90)$$

Since $Y_{k-1}^{(s)}$ is 1-Lipschitz, the second term of the r.h.s. of (4.90) is bounded above by

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(Y_{k-1}^{(s)}(0) + \lfloor \varepsilon s \rfloor \geq \lfloor s a_{\widehat{i}_{k,0}+1} \rfloor \right) \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{Y_{k-1}^{(s)}(0)}{s} - y_{k-1}(0) + \varepsilon \geq \frac{\lfloor s a_{\widehat{i}_{k,0}+1} \rfloor}{s} - y_{k-1}(0) \right) \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{Y_{k-1}^{(s)}(0)}{s} - y_{k-1}(0) \right| + \varepsilon \geq \inf_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\lfloor s a_{\widehat{i}_{k,0}+1} \rfloor}{s} - y_{k-1}(0) \right) \right) \end{aligned}$$

By definition of $\widehat{i}_{k,0}$, $a_{\widehat{i}_{k,0}+1} - y_{k-1}(0) > 0$ for every given $k \in \mathbb{Z}$. Since there are only finitely many values of $k \in \mathbb{Z}$ such that $0 < y_{k-1}(0) < a_{N+1}$, and recalling that $a_{N+1} = \infty$, we have

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}} \left(a_{\widehat{i}_{k,0}+1} - y_{k-1}(0) \right) > 0.$$

Then, using assumption (4.85), the second term of the r.h.s. of (4.90) goes to 0 as s goes to infinity for every $\varepsilon < \inf_{k \in \mathbb{Z}} (a_{\widehat{i}_{k,0}+1} - y_{k-1}(0))$.

The first term of the r.h.s. of (4.90) is a bit harder to control. Let us recall that by definition of $\widehat{i}_{k,0}$, $y_{k-1}(0) \geq a_{\widehat{i}_{k,0}}$.

In the case when $y_{k-1}(0) > a_{\widehat{i}_{k,0}}$ for all $k \in \mathbb{Z}$, the fact that this term goes to 0 as s goes to infinity follows from assumption (4.85) and the fact that $s^{-1}Y_{k-1}^{(s)}(\varepsilon s)$ is bounded below by $s^{-1}Y_{k-1}^{(s)}(0)$. When $y_{k-1}(0) = a_{\widehat{i}_{k,0}}$ for some k , an issue is that $s^{-1}Y_{k-1}^{(s)}(0)$ converges to $a_{\widehat{i}_{k,0}}$ as s goes to infinity. Therefore, it may be less than $a_{\widehat{i}_{k,0}}$ with non-zero probability. The idea is that $Y_{k-1}^{(s)}(0)$ is close to the position of the sign at position $\lfloor s a_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor$, but it is possible that it has not passed the sign due to the fluctuation at time $n = 0$ when s grows. However, all the cars with non-zero position in the stochastic model moves at positive rate, which is bounded below by q_1 . Therefore, if we consider the system at time ε , the position of all the cars that cause a problem would have moved of at least $q_1 \varepsilon$ in expectation.

Consider $D = \{k \in \mathbb{Z} : y_{k-1}(0) = a_{\widehat{i}_{k,0}}, \widehat{i}_{k,0} \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ the set of all problematic cars indices. Note that D contains at most N elements. Define the events

$$A_{\mathbb{Z} \setminus D}^{(s)} := \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus D} \left(Y_{k-1}^{(s)}(0) < \lfloor s a_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor \right)$$

and

$$A_D^{(s)} := \bigcup_{k \in D} \left(Y_{k-1}^{(s)}(\lfloor \varepsilon s \rfloor) < \lfloor s a_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor \right).$$

To prove that the first term of the r.h.s. of (4.90) converges to 0, it suffices to prove that $\mathbb{P}(A_{\mathbb{Z} \setminus D}^{(s)})$ and $\mathbb{P}(A_D^{(s)})$ converges to 0.

By (4.85), it is clear that $\mathbb{P}(A_{\mathbb{Z} \setminus D}^{(s)})$ goes to 0 as s goes to infinity since the limit of $s^{-1}Y_{k-1}^{(s)}(0)$ is strictly more than $a_{\widehat{i}_{k,0}}$ by definition of D .

On the other hand, by union bound,

$$\mathbb{P}(A_D^{(s)}) \leq \sum_{k \in D} \mathbb{P}\left(Y_{k-1}^{(s)}(\lfloor \varepsilon s \rfloor) < \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor\right).$$

It remains to prove that $\mathbb{P}\left(Y_{k-1}^{(s)}(\lfloor \varepsilon s \rfloor) < \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor\right)$ goes to 0 as s goes to infinity for every k in the finite set D . Consider k in D . Then, for every $n \geq 0$,

$$Y_{k-1}^{(s)}(n) = Y_{k-1}^{(s)}(0) + \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Y_{k-2}^{(s)}(m) \geq \lfloor s\xi_{m+1} \rfloor}.$$

Since $k \in D$, $y_{k-1}(0) \geq a_1$. Therefore, $y_{k-2}(0) > a_1$ for every $k \in D$. As a consequence, $s^{-1}Y_{k-2}^{(s)}(m)$ is almost surely greater than a_1 for every $k \in D$ and $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ when s is large enough. Therefore, for s large enough,

$$Y_{k-1}^{(s)}(n) \geq Y_{k-1}^{(s)}(0) + \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\xi_{m+1}=a_1}$$

Then $(Y_{k-1}^{(s)}(n))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ is stochastically bounded below by a random walk with positive drift rate q_1 for s large enough. This last inequality can be interpreted with the dynamics of the infinite bin model: at each step and with probability at least q_1 , a particle is added in the front bin. This translates in terms of cars as follows: each car that has started to move increases its position by 1 with probability q_1 at each step. By this stochastic domination,

$$\begin{aligned} \limsup_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(Y_{k-1}^{(s)}(\lfloor \varepsilon s \rfloor) < \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor\right) &\leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(Y_{k-1}^{(s)}(0) + \sum_{m=0}^{\lfloor \varepsilon s \rfloor - 1} \mathbb{1}_{\xi_{m+1}=a_1} < \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor\right) \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_{k-1}^{(s)}(0)}{s} + \frac{1}{s} \sum_{m=0}^{\lfloor \varepsilon s \rfloor - 1} \mathbb{1}_{\xi_{m+1}=a_1} < \frac{\lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor}{s}\right). \end{aligned}$$

The l.h.s. in the last probability goes to $y_{k-1}(0) + \varepsilon q_1$ while the r.h.s. goes to $a_{\widehat{i}_{k,0}}$. Since $y_{k-1}(0) = a_{\widehat{i}_{k,0}}$ by definition of D for every $k \in D$, this probability goes to 0 as s goes to infinity, which concludes the proof of 1.

Proof of 2 for $l = 0$

The idea is the following: in order to prove 2, we will use Donsker's theorem and standard results on drifting random walks. After time $T_0^{(s)-}$, we know that $(Y_k(n))_{n \geq 0}$ behaves like a random walk until we reach time $T_0^{(s)+}$. By definition, $T_0^{(s)+}$ corresponds to the first time at which one car $k-1$ passes the sign at position $\lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}+1} \rfloor$. Therefore, we can interpret $T_0^{(s)+}$ as the time at which a random walk with drift reaches some quantity of the order of s , which allows us to obtain the asymptotic behavior of $T_0^{(s)+}$ when s goes to infinity.

Let us now prove 2. Since $(Y_{k-1}^{(s)}(n))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ is increasing for all $k \in \mathbb{Z}$ and $s \in \mathbb{R}_{>0}$, it is clear that for all $n \in \llbracket T_0^{(s)-}, T_0^{(s)+} - 1 \rrbracket$,

$$\lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor \leq Y_{k-1}^{(s)}(n) < \lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}+1} \rfloor.$$

By (4.89), for every $k \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$Y_k^{(s)}(n) = Y_k^{(s)}(0) + \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Y_{k-1}^{(s)}(m) \geq \lfloor s\xi_{m+1} \rfloor}.$$

Fix $m \in \llbracket T_0^{(s)-}, T_0^{(s)+} - 1 \rrbracket$ and $k \in \mathbb{Z}$. By the previous inequality and since $\xi_i \in \{a_1, \dots, a_N\}$ for every $i \in \mathbb{Z}$, $Y_{k-1}^{(s)}(m) \geq \lfloor s\xi_{m+1} \rfloor$ if and only if $\lfloor sa_{\widehat{i}_{k,0}} \rfloor \geq \lfloor s\xi_{m+1} \rfloor$. Consider $s_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ such that for every $s > s_0$, the elements of $(\lfloor sa_i \rfloor)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ are distinct. Then for every $s > s_0$, $Y_{k-1}^{(s)}(m) \geq \lfloor s\xi_{m+1} \rfloor$ if and only if $a_{\widehat{i}_{k,0}} \geq \xi_{m+1}$. Since we consider the limit as s goes to infinity and since s_0 depends only on \underline{a} , let us assume that $s > s_0$ for the rest of the proof. As a consequence, on the time interval $\llbracket T_0^{(s)-}, T_0^{(s)+} - 1 \rrbracket$, $(Y_k^{(s)}(n))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ is distributed like a random walk with i.i.d. increments with Bernoulli distribution of parameter $q_{\widehat{i}_{k,0}}$: if we set for all $n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$S_i(n') = \sum_{n=0}^{n'-1} \mathbb{1}_{\xi_{n+1} \leq a_i},$$

$$Y_k^{(s)}(n') - Y_k^{(s)}(T_0^{(s)-}) \stackrel{(d)}{=} S_{\widehat{i}_{k,0}}(n') - S_{\widehat{i}_{k,0}}(T_0^{(s)-}). \quad (4.91)$$

The following result will be needed here and in the proof of 3.

Lemma 4.6.5. *For all $i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$, set*

$$S_i^{(s)}(t) := \frac{S_i(\lfloor st \rfloor) - tq_i}{\sqrt{sq_i(1 - q_i)}},$$

for all $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. For all $t_0 > 0$ and $i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$, the stochastic process $(S_i^{(s)}(t))_{t \in [0, t_0]}$ converges in distribution in $\mathcal{C}([0, t_0], \mathbb{R})$ to a standard Brownian motion $(B_t)_{0 \leq t \leq t_0}$. As a consequence, for all $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ and $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, with the convention that $a_0 = q_0 = 0$,

$$\sup_{t \in [0, t_0]} |s^{-1} S_i(\lfloor st \rfloor) - tq_i| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{a.s.} 0.$$

Proof of Lemma 4.6.5. For $i \in \{0, N\}$, the result is trivial since $S_0(n') = 0$ and $S_N(n') = n'$ for every $n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. For $i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$, it is a simple consequence of Donsker's theorem since the random variables $(\xi_n)_{n \geq 0}$ are i.i.d. and $\mathbb{P}(a_i \geq \xi_0) = q_i$. \square

With these facts, let us control $T_0^{(s)+}$. Denote by $E = \{i_1 < \dots < i_{|E|}\}$ the set of i such that there is a car between the position of the $(i - 1)$ -th and the i -th signs at time 0 for the car model starting with configuration $y(0)$. More explicitly, $E = \{i \in \llbracket 1, N \rrbracket : \exists k \in \mathbb{Z}, a_{i-1} \leq y_k(0) < a_i\}$. For all $1 \leq j \leq |E|$, set $k_j = \min\{k \in \mathbb{Z} : y_k(0) < a_{i_j}\}$ the index of the next car to pass by the i_j -th sign. Then, by definition of $T_0^{(s)+}$,

$$T_0^{(s)+} = \min\{n \geq T_0^{(s)-} + 1 : \exists j \in \llbracket 1, |E| \rrbracket, Y_{k_j}^{(s)}(n) \geq \lfloor sa_{i_j} \rfloor\}. \quad (4.92)$$

For all $j \in \llbracket 1, |E| \rrbracket$, set

$$T_{0,j}^{(s)+} := \min\{n \geq T_0^{(s)-} + 1 : Y_{k_j}^{(s)}(T_0^{(s)-}) + \mathcal{S}_{\hat{i}_{k_j,0}}(n) - \mathcal{S}_{\hat{i}_{k_j,0}}(T_0^{(s)-}) \geq \lfloor sa_{i_j} \rfloor\}. \quad (4.93)$$

By (4.92) and (4.91), $T_0^{(s)+} \stackrel{(d)}{=} \min(T_{0,1}^{(s)+}, \dots, T_{0,|E|}^{(s)+})$. For all $j \in \llbracket 1, |E| \rrbracket$, set

$$\tau_{0,j} := \frac{a_{i_j} - y_{k_j}(0)}{q_{\hat{i}_{k_j,0}}}.$$

By definition, $\tau_{0,j}$ corresponds to the time it would take for the car k_j to reach the sign at position a_{i_j} assuming that every car in the system keeps its initial speed. Note that $\tau_1 = \min(\tau_{0,1}, \dots, \tau_{0,|E|})$. To conclude the proof of 2, it suffices to show that for every $j \in \llbracket 1, |E| \rrbracket$,

$$\left| \frac{T_{0,j}^{(s)+}}{s} - \tau_{0,j} \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0. \quad (4.94)$$

The heuristics is the following: since 1 holds for $l = 0$, $s^{-1}T_{0,j}^{(s)-}$ converges to 0 in probability as s goes to infinity. Therefore, by (4.93), $T_{0,j}^{(s)+}$ is the reaching time for a random walk with positive drift $q_{\hat{i}_{k_j,0}}$ to the quantity $\lfloor sa_{i_j} \rfloor - Y_{k_j}^{(s)}(0)$, plus a quantity negligible compared to s due to the fluctuations of $T_0^{(s)-}$. Note that $T_0^{(s)-}$ is infinite with positive probability for every $s > 0$, but this probability goes to 0 as s goes to infinity. Therefore, we need to consider the conditional probability given the event $B^{(s)} := \{T_0^{(s)-} < \infty\}$.

Consider $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Then, if $\mathbb{P}_{B^{(s)}}$ denotes the conditional probability given $B^{(s)}$,

$$\mathbb{P}_{B^{(s)}} \left(\left| \frac{T_{0,j}^{(s)+}}{s} - \tau_{0,j} \right| \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P}_{B^{(s)}} \left(\frac{T_{0,j}^{(s)+}}{s} \leq \tau_{0,j} - \varepsilon \right) + \mathbb{P}_{B^{(s)}} \left(\frac{T_{0,j}^{(s)+}}{s} \geq \tau_{0,j} + \varepsilon \right).$$

Let us prove that the first term in the r.h.s. converges to 0. By (4.93), since $Y_{k_j}^{(s)}(T_0^{(s)-}) \leq Y_{k_j}^{(s)}(0) + T_0^{(s)-}$ and $\mathcal{S}_{\hat{i}_{k_j,0}}(T_0^{(s)-}) \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{B^{(s)}} \left(\frac{T_{0,j}^{(s)+}}{s} \leq \tau_{0,j} - \varepsilon \right) \\ & \leq \mathbb{P}_{B^{(s)}} \left(\mathcal{S}_{\hat{i}_{k_j,0}}(s(\tau_{0,j} - \varepsilon)) \geq \lfloor sa_{i_j} \rfloor - Y_{k_j}^{(s)}(0) - T_0^{(s)-} \right) \\ & \leq \mathbb{P}_{B^{(s)}} \left(\mathcal{S}_{\hat{i}_{k_j,0}}(s(\tau_{0,j} - \varepsilon)) - s\tau_{0,j}q_{\hat{i}_{k_j,0}} \geq \lfloor sa_{i_j} \rfloor - Y_{k_j}^{(s)}(0) - s\tau_{0,j}q_{\hat{i}_{k_j,0}} - T_0^{(s)-} \right). \end{aligned} \quad (4.95)$$

By Lemma 4.6.5,

$$s^{-1} \left| \mathcal{S}_{\hat{i}_{k_j,0}}(s(\tau_{0,j} - \varepsilon)) - s\tau_{0,j}q_{\hat{i}_{k_j,0}}(\tau_{0,j} - \varepsilon) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{a.s.} 0.$$

In addition,

$$s^{-1} \left| \lfloor sa_{i_j} \rfloor - Y_{k_j}^{(s)}(0) - s\tau_{0,j} \widehat{q}_{i_{k_j},0} - T_0^{(s)-} \right| \leq s^{-1} \left| \lfloor sa_{i_j} \rfloor - Y_{k_j}^{(s)}(0) - s\tau_{0,j} \widehat{q}_{i_{k_j},0} \right| + s^{-1} T_0^{(s)-}.$$

By point 1 for $l = 0$, $s^{-1} T_0^{(s)-}$ converges to 0 in probability as s goes to infinity. In addition, by (4.85) and by definition of $\tau_{0,j}$,

$$s^{-1} \left| \lfloor sa_{i_j} \rfloor - Y_{k_j}^{(s)}(0) - s\tau_{0,j} \widehat{q}_{i_{k_j},0} \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{a.s.} \left| a_{i_j} - y_{k_j}(0) - \tau_{0,j} \widehat{q}_{i_{k_j},0} \right| = 0.$$

Therefore, by (4.95),

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{B(s)} \left(\frac{T_{0,j}^{(s)+}}{s} \leq \tau_{0,j} - \varepsilon \right) \leq \mathbb{P} \left(-\varepsilon \widehat{q}_{i_{k_j},0} \geq 0 \right) = 0.$$

Since $\mathbb{P}(B(s)) \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{} 1$, we get

$$\mathbb{P} \left(\frac{T_{0,j}^{(s)+}}{s} \leq \tau_{0,j} - \varepsilon \right) \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Using similar arguments, one obtains that

$$\mathbb{P} \left(\frac{T_{0,j}^{(s)+}}{s} \geq \tau_{0,j} + \varepsilon \right) \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{} 0.$$

This concludes the proof of 2.

Proof of 3 for $l = 0$

To conclude the proof of the initialisation, it remains to prove 3 when $l = 0$, namely that

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

First, let us show the following lemma stating that it suffices to prove that for every $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0. \tag{4.96}$$

Lemma 4.6.6. *Assuming that (4.96) holds for every $k \in \mathbb{Z}$, one obtains*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Proof. Assume that the convergence (4.96) holds for every $k \in \mathbb{Z}$. Then, consider k_+ and $k_- \in \mathbb{Z}$ such that $y_{k_+}(\tau_1) = 0$ and $y_{k_-}(0) > a_N$. The idea is to use the monotony of $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ and $(Y_k^{(s)})_{k \in \mathbb{Z}}$ in k and in time in order to obtain the uniform convergence in k . First, note that $Y_k^{(s)}(n) \leq Y_{k_+}^{(s)}(n')$ for every $k \geq k_+$ and every non-negative integers $n < n'$. Similarly, for every $t \in [0, \tau_1]$ and $k \geq k_+$, $y_k(t) \leq y_{k_+}(\tau_1) = 0$, which implies that $y_k(t) = 0$ for every k by positiveness of y_k . Therefore,

$$\sup_{k \geq k_+} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(\lfloor st \rfloor)}{s} - y_k(t) \right| = \sup_{k \geq k_+} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(\lfloor st \rfloor)}{s} \right| = \left| \frac{Y_{k_+}^{(s)}(\lfloor s\tau_1 \rfloor)}{s} \right|.$$

If we assume that (4.96) holds for every k , then

$$\sup_{k \geq k_+} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(\lfloor st \rfloor)}{s} - y_k(t) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0 \quad (4.97)$$

by the last inequality and (4.96) applied for $k = k_+$.

Similarly, let us control the term from (4.96) uniformly in $k \leq k_-$. First, let us prove that for every $k \leq k_-$ and $n \geq 0$, $Y_k^{(s)}(n) = Y_k^{(s)}(0) + q_N n$ conditionally to that fact that $Y_{k_-}^{(s)}(0) \geq \lfloor sa_N \rfloor$. Note that if $Y_{k_-}^{(s)}(0) \geq \lfloor sa_N \rfloor$, then $Y_{k_-}^{(s)}(m) \geq \lfloor sa_i \rfloor$ for every $0 \leq m \leq n$ and $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ by monotony of $Y_k^{(s)}(m)$ in k and m and since $a_i \leq a_N$ for every $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Then, it remains to note that the indicator functions from (4.89) are all equal to 1 in order to obtain $Y_k^{(s)}(n) = Y_k^{(s)}(0) + q_N n$, conditionally to that fact that $Y_{k_-}^{(s)}(0) \geq \lfloor sa_N \rfloor$. Similarly, for every $k \leq k_-$ and $t \in [0, \tau_1]$, $y_k(t) = y_k(0) + q_N t$ since a car which have crossed the sign a_N at time 0 moves at speed q_N by construction. As a consequence, one obtains that

$$\begin{aligned} \sup_{k \leq k_-} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| &= \sup_{k \leq k_-} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} + tq_N - y_k(0) - tq_N \right| \\ &= \sup_{k \leq k_-} \left| \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} - y_k(0) \right| \end{aligned}$$

conditionally to $(Y_{k_-}^{(s)}(0) \geq \lfloor sa_N \rfloor)$.

Since $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |s^{-1} Y_k^{(s)}(0) - y_k(0)|$ converges to 0 by the hypothesis (4.85), the last term converges to 0 in probability as s goes to infinity. In addition, by (4.85) and since $y_{k_-}(0) > a_N$, the event $(Y_{k_-}^{(s)}(0) \geq \lfloor sa_N \rfloor)$ occurs with high probability as s goes to infinity. Then, one obtains that

$$\sup_{k \geq k_+} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(\lfloor st \rfloor)}{s} - y_k(t) \right|. \quad (4.98)$$

Now, since we proved (4.97) and (4.98), and since (4.96) holds for every $k \in \llbracket k_-, k_+ \rrbracket$ by hypothesis, we obtain that

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$$

by union bound. □

By Lemma 4.6.6, it remains to prove that (4.96) holds for every $k \in \mathbb{Z}$ to conclude the proof of 3 for $l = 0$. Since $s^{-1}T_0^{(s)-}$ converges to 0 in probability as s goes to infinity, we can assume that $s^{-1}T_0^{(s)-}$ is lower than τ_1 if we consider the limit as s goes to infinity. Let us bound above the l.h.s. of (4.96) by the sum of two terms:

$$\sup_{t \in [0, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \leq \sup_{t \in [0, s^{-1}T_0^{(s)-}]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| + \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right|. \quad (4.99)$$

Since $Y_k^{(s)}$ and y_k are 1-Lipschitz (since $q_N = 1$ for y_k), the first term converges in probability to 0 as s goes to infinity since 1 holds for $l = 0$:

$$\sup_{t \in [0, s^{-1}T_0^{(s)-}]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \leq 2s^{-1}T_0^{(s)-} \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

It remains to control the second term from (4.99). Namely, we need to prove that

$$\sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0. \quad (4.100)$$

Let us distinguish the case where $s^{-1}T_0^{(s)+}$ is smaller than τ_1 from the case where $s^{-1}T_0^{(s)+}$ is greater than τ_1 . In the first case,

$$\sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \leq \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, s^{-1}T_0^{(s)+}]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| + \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \quad (4.101)$$

By the triangular inequality, the last term in the previous inequality is bounded above as follows:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| &\leq \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1]} \left| \left(\frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right) - \left(\frac{Y_k^{(s)}(T_0^{(s)+})}{s} - y_k(s^{-1}T_0^{(s)+}) \right) \right| \\ &\quad + \left| \frac{Y_k^{(s)}(T_0^{(s)+})}{s} - y_k(s^{-1}T_0^{(s)+}) \right| \end{aligned}$$

Since $Y_k^{(s)}$ and y_k are 1-Lipschitz, the first term in this last in equality is almost surely lower than $|s^{-1}T_0^{(s)+} - \tau_1|$, which converges to 0 in probability as s goes to infinity since 2 holds for $l = 0$. By this last inequality and (4.101), we get

$$\sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \leq 2 \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, s^{-1}T_0^{(s)+}]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| + |s^{-1}T_0^{(s)+} - \tau_1|.$$

In the case where $s^{-1}T_0^{(s)+}$ is greater than τ_1 , similar arguments lead to the following inequality:

$$\sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \leq 2 \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| + |s^{-1}T_0^{(s)+} - \tau_1|.$$

In other words, in both cases, we have

$$\sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \tau_1]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \leq 2 \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \min(s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1)]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| + |s^{-1}T_0^{(s)+} - \tau_1|.$$

Since $|s^{-1}T_0^{(s)+} - \tau_1|$ converges to 0 in probability as s goes to infinity, it remains to prove that

$$\sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \min(s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1)]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$$

In order to do so, we will use Donsker's theorem since $(Y_k(n))_n$ behaves like a random walk on the interval of time $\llbracket T_0^{(s)-}, T_0^{(s)+} - 1 \rrbracket$ and since $y_k(t) = y_k(0) + q_{\hat{i}_k, 0} t$ for every $t \in [0, \tau_1]$, where $q_{\hat{i}_k, 0}$ corresponds to the drift of the random walk $(Y_k(n))_n$ on the interval of time $\llbracket T_0^{(s)-}, T_0^{(s)+} - 1 \rrbracket$.

By the triangle inequality, for every $t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \min(s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1)]$

$$\begin{aligned} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| &= \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - \frac{Y_k^{(s)}(T_0^{(s)-})}{s} + \frac{Y_k^{(s)}(T_0^{(s)-})}{s} - \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} + \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} - y_k(0) - q_{\hat{i}_k, 0} t \right| \\ &\leq \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - \frac{Y_k^{(s)}(T_0^{(s)-})}{s} - q_{\hat{i}_k, 0} t \right| + \left| \frac{Y_k^{(s)}(T_0^{(s)-})}{s} - \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} \right| + \left| \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} - y_k(0) \right|. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \min(s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1)]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - y_k(t) \right| &\leq \sup_{t \in [s^{-1}T_0^{(s)-}, \min(s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1)]} \left| \frac{Y_k^{(s)}(st)}{s} - \frac{Y_k^{(s)}(T_0^{(s)-})}{s} - q_{\hat{i}_k, 0} t \right| \\ &\quad + \left| \frac{Y_k^{(s)}(T_0^{(s)-})}{s} - \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} \right| + \left| \frac{Y_k^{(s)}(0)}{s} - y_k(0) \right|. \end{aligned}$$

By Lemma 4.6.5 and (4.91), the first term converges almost surely to 0 as s goes to infinity. The second term also converges in probability to 0 since it is dominated by $s^{-1}T_0^{(s)-}$ since $Y_k^{(s)}$ is 1-Lipschitz. By hypothesis (4.85), the last term also converges almost surely to 0.

This concludes the initialisation for $l = 0$.

4.6.2. Inductive step

The proof of the inductive step is the same as the one of the initialisation applied to the process started at $t = \tau_l$ at step l , except for some minor details that we explain bellow. Note that (4.85) is still verified for this process by the part 3 of induction hypothesis.

One technical difference for the inductive step for 1 is the constraint that $T_l^{(s)-} > T_{l-1}^{(s)+}$ when $l \geq 1$. One needs to prove that for all $\varepsilon > 0$, the following probability goes to 0 as s goes to infinity:

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{T_l^{(s)-}}{s} - \tau_l \right| > \varepsilon \right).$$

Since $T_l^{(s)-} > T_{l-1}^{(s)+}$ and since $\left|s^{-1}T_{l-1}^{(s)+} - \tau_l\right|$ goes almost surely to 0 as s goes to infinity by induction hypothesis, it suffices to prove that for every $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(T_l^{(s)-} > s\tau_l + \varepsilon s\right) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0.$$

This can be proved in the same way as we proved that $\mathbb{P}(T_0^{(s)-} > \varepsilon s)$ goes to 0 in the initialisation.

Another technical difference for the inductive step for 3 is the fact that the interval of time on which the dynamics of the infinite bin model corresponds to the dynamics of the liquid bin model is no longer $[s^{-1}T_0^{(s)-}, \min(s^{-1}T_0^{(s)+}, \tau_1)]$, but $[\max(s^{-1}T_l^{(s)-}, \tau_l), \min(s^{-1}T_l^{(s)+}, \tau_{l+1})]$. However, the proof still holds since $\max(s^{-1}T_l^{(s)-}, \tau_l)$ still converges in probability to τ_l as s goes to infinity at this step. \square

Acknowledgements for Chapter 4

We are grateful to Ksenia Chernysh, Bastien Mallein, Arvind Singh and Damien Thomine for many very fruitful discussions at various stages of this project. We also thank Régine Marchand and Marie Th  ret for comments on an early version of this manuscript. Part of this research was performed while the first author was visiting the Institute for Pure and Applied Mathematics (IPAM), which is supported by the National Science Foundation (Grant No. DMS-1925919).

Bibliography

- [AB87] M. Aizenman and D. J. Barsky. “Sharpness of the phase transition in percolation models”. In: *Comm. Math. Phys.* 108.3 (1987), pp. 489–526. ISSN: 0010-3616.
- [ABF87] M. Aizenman, D. J. Barsky, and R. Fernández. “The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp”. In: *J. Statist. Phys.* 47.3-4 (1987), pp. 343–374. ISSN: 0022-4715.
- [AD95] D. Aldous and P. Diaconis. “Hammersley’s interacting particle process and longest increasing subsequences”. In: *Probab. Theory Related Fields* 103.2 (1995), pp. 199–213. ISSN: 0178-8051.
- [ADH17] A. Auffinger, M. Damron, and J. Hanson. *50 years of first-passage percolation*. Vol. 68. University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, pp. v+161. ISBN: 978-1-4704-4183-8.
- [AF21] M. Anastos and A. Frieze. “A scaling limit for the length of the longest cycle in a sparse random graph”. In: *J. Combin. Theory Ser. B* 148 (2021), pp. 184–208. ISSN: 0095-8956.
- [AF89] M. H. Albert and A. M. Frieze. “Random graph orders”. In: *Order* 6.1 (1989), pp. 19–30. ISSN: 0167-8094.
- [AK97] V. Anantharam and T. Konstantopoulos. “Stationary solutions of stochastic recursions describing discrete event systems”. In: *Stochastic Process. Appl.* 68.2 (1997), pp. 181–194. ISSN: 0304-4149.
- [AK99] V. Anantharam and T. Konstantopoulos. “Corrigendum: “Stationary solutions of stochastic recursions describing discrete event systems” [*Stochastic Process. Appl.* 68 (1997), no. 2, 181–194; MR1454831 (98d:60172)]”. In: *Stochastic Process. Appl.* 80.2 (1999), pp. 271–278. ISSN: 0304-4149.
- [AKS81] M. Ajtai, J. Komlós, and E. Szemerédi. “The longest path in a random graph”. In: *Combinatorica* 1.1 (1981), pp. 1–12. ISSN: 0209-9683.
- [Alo+94] N. Alon et al. “Linear extensions of a random partial order”. In: *Ann. Appl. Probab.* 4.1 (1994), pp. 108–123. ISSN: 1050-5164.
- [AP83] D. Aldous and J. Pitman. “The asymptotic speed and shape of a particle system”. In: *Probability, statistics and analysis*. Vol. 79. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1983, pp. 1–23.

- [Bas+16] A.-L. Basdevant et al. “Discrete Hammersley’s lines with sources and sinks”. In: *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 13 (2016), pp. 33–52.
- [BB09] O. Bernardi and N. Bonichon. “Intervals in Catalan lattices and realizers of triangulations”. In: *J. Combin. Theory Ser. A* 116.1 (2009), pp. 55–75. ISSN: 0097-3165.
- [BB95] B. Bollobás and G. Brightwell. “The width of random graph orders”. In: *Math. Sci.* 20.2 (1995), pp. 69–90. ISSN: 0312-3685.
- [BB97a] B. Bollobás and G. Brightwell. “The dimension of random graph orders”. In: *The mathematics of Paul Erdős, II*. Vol. 14. Algorithms Combin. Springer, Berlin, 1997, pp. 51–69.
- [BB97b] B. Bollobás and G. Brightwell. “The structure of random graph orders”. In: *SIAM J. Discrete Math.* 10.2 (1997), pp. 318–335. ISSN: 0895-4801.
- [BD12] V. Beffara and H. Duminil-Copin. “The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$ ”. In: *Probab. Theory Related Fields* 153.3-4 (2012), pp. 511–542. ISSN: 0178-8051.
- [BD97] E. Brunet and B. Derrida. “Shift in the velocity of a front due to a cutoff”. In: *Phys. Rev. E* (3) 56.3, part A (1997), pp. 2597–2604. ISSN: 1539-3755.
- [BE84] A. B. Barak and P. Erdős. “On the maximal number of strongly independent vertices in a random acyclic directed graph”. In: *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 5.4 (1984), pp. 508–514. ISSN: 0196-5212.
- [BF95] F. Baccelli and S. Foss. “On the saturation rule for the stability of queues”. In: *J. Appl. Probab.* 32.2 (1995), pp. 494–507. ISSN: 0021-9002.
- [BG10] J. Bérard and J.-B. Gouéré. “Brunet-Derrida behavior of branching-selection particle systems on the line”. In: *Comm. Math. Phys.* 298.2 (2010), pp. 323–342. ISSN: 0010-3616.
- [BH57] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. “Percolation processes. I. Crystals and mazes”. In: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 53 (1957), pp. 629–641. ISSN: 0008-1981.
- [Bia24] P. Biane. “Combinatorics of the quantum symmetric simple exclusion process, associahedra and free cumulants”. In: *Ann. Inst. Henri Poincaré D* (2024). To appear.
- [Bil99] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Second. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. x+277. ISBN: 0-471-19745-9.
- [BJ21] D. Bernard and T. Jin. “Solution to the quantum symmetric simple exclusion process: the continuous case”. In: *Comm. Math. Phys.* 384.2 (2021), pp. 1141–1185. ISSN: 0010-3616.

- [BK93] J. van den Berg and H. Kesten. “Inequalities for the time constant in first-passage percolation”. In: *Ann. Appl. Probab.* 3.1 (1993), pp. 56–80. ISSN: 1050-5164.
- [Bor78] A. A. Borovkov. “Ergodic theorems and stability theorems for a class of stochastic equations and their applications”. In: *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 23.2 (1978), pp. 241–262. ISSN: 0040-361x.
- [Boy22] A. Boyer. “Bidimensional stationarity of random models in the plane”. 2022UP-ASM011. PhD thesis. 2022.
- [CBN90] J. E. Cohen, F. Briand, and C. M. Newman. *Community food webs*. Vol. 20. Biomathematics. Data and theory, With a contribution by Zbigniew J. Palka. Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. xii+308. ISBN: 3-540-51129-6.
- [CD22] R. Cerf and B. Dembin. “The time constant for Bernoulli percolation is Lipschitz continuous strictly above p_c ”. In: *Ann. Probab.* 50.5 (2022), pp. 1781–1812. ISSN: 0091-1798.
- [CD81] J. T. Cox and R. Durrett. “Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions”. In: *Ann. Probab.* 9.4 (1981), pp. 583–603. ISSN: 0091-1798.
- [CFF02] F. Comets, R. Fernández, and P. A. Ferrari. “Processes with long memory: regenerative construction and perfect simulation”. In: *Ann. Appl. Probab.* 12.3 (2002), pp. 921–943. ISSN: 1050-5164.
- [CJM10] R. Cavalieri, P. Johnson, and H. Markwig. “Tropical Hurwitz numbers”. In: *J. Algebraic Combin.* 32.2 (2010), pp. 241–265. ISSN: 0925-9899.
- [CJM11] R. Cavalieri, P. Johnson, and H. Markwig. “Wall crossings for double Hurwitz numbers”. In: *Adv. Math.* 228.4 (2011), pp. 1894–1937. ISSN: 0001-8708.
- [CK81] J. T. Cox and H. Kesten. “On the continuity of the time constant of first-passage percolation”. In: *J. Appl. Probab.* 18.4 (1981), pp. 809–819. ISSN: 0021-9002.
- [CN91] J. E. Cohen and C. M. Newman. “Community Area and Food-Chain Length: Theoretical Predictions”. In: *The American Naturalist* 138.6 (1991), pp. 1542–1554. ISSN: 00030147, 15375323.
- [CNN24] V. H. Can, S. Nakajima, and V. Q. Nguyen. *Lipschitz-continuity of time constant in generalized First-passage percolation*. 2024.
- [CR17] K. Chernysh and S. Ramassamy. “Coupling any number of balls in the infinite-bin model”. In: *J. Appl. Probab.* 54.2 (2017), pp. 540–549. ISSN: 0021-9002.
- [Dem21] B. Dembin. “Regularity of the time constant for a supercritical Bernoulli percolation”. In: *ESAIM Probab. Stat.* 25 (2021), pp. 109–132. ISSN: 1292-8100.

- [DF99] P. Diaconis and D. Freedman. “Iterated random functions”. In: *SIAM Rev.* 41.1 (1999), pp. 45–76. ISSN: 0036-1445.
- [DFK12] D. Denisov, S. Foss, and T. Konstantopoulos. “Limit theorems for a random directed slab graph”. In: *Ann. Appl. Probab.* 22.2 (2012), pp. 702–733. ISSN: 1050-5164.
- [Di +03] L. Di Vizio et al. “Équations aux q -différences”. In: *Gaz. Math.* 96 (2003), pp. 20–49. ISSN: 0224-8999.
- [Dum18] H. Duminil-Copin. “Introduction to Bernoulli percolation”. In: 2018.
- [Dut20] K. Dutta. “On Limit Constants in Last Passage Percolation in Transitive Tournaments”. In: *arXiv preprint arXiv:2005.09922* (2020).
- [ER59] P. Erdős and A. Rényi. “On random graphs. I”. In: *Publ. Math. Debrecen* 6 (1959), pp. 290–297. ISSN: 0033-3883.
- [FK03] S. Foss and T. Konstantopoulos. “Extended renovation theory and limit theorems for stochastic ordered graphs”. In: *Markov Process. Related Fields* 9.3 (2003), pp. 413–468. ISSN: 1024-2953.
- [FK18] S. Foss and T. Konstantopoulos. “Limiting properties of random graph models with vertex and edge weights”. In: *J. Stat. Phys.* 173.3-4 (2018), pp. 626–643. ISSN: 0022-4715.
- [FK72] C. M. Fortuin and P. W. Kasteleyn. “On the random-cluster model. I. Introduction and relation to other models”. In: *Physica* 57 (1972), pp. 536–564. ISSN: 0031-8914.
- [FKM83] G. Fayolle, P. King, and I. Mitrani. “On the Execution of Programs by Many Processors.” In: Jan. 1983, pp. 217–228.
- [FKP23] S. Foss, T. Konstantopoulos, and A. Pyatkin. “Probabilistic and analytical properties of the last passage percolation constant in a weighted random directed graph”. In: *Ann. Appl. Probab.* 33.2 (2023), pp. 731–753. ISSN: 1050-5164.
- [FMS14] S. Foss, J. B. Martin, and P. Schmidt. “Long-range last-passage percolation on the line”. In: *Ann. Appl. Probab.* 24.1 (2014), pp. 198–234. ISSN: 1050-5164.
- [Fos+23a] S. Foss et al. “Estimation of the last passage percolation constant in a charged complete directed acyclic graph via perfect simulation”. In: *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 20.1 (2023), pp. 547–560.
- [Fos+23b] S. Foss et al. “Last passage percolation and limit theorems in Barak-Erdős directed random graphs and related models”. In: *arXiv preprint arXiv:2312.02884* (2023).
- [FS09] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009, pp. xiv+810. ISBN: 978-0-521-89806-5.

- [FZ13] S. Foss and S. Zachary. "Stochastic sequences with a regenerative structure that may depend both on the future and on the past". In: *Adv. in Appl. Probab.* 45.4 (2013), pp. 1083–1110. ISSN: 0001-8678.
- [Gel+86] E. Gelenbe et al. "An Approximation of the Processing Time for a Random Graph Model of Parallel Computation". In: *Proceedings of 1986 ACM Fall Joint Computer Conference*. ACM '86. Dallas, Texas, USA: IEEE Computer Society Press, 1986, pp. 691–697. ISBN: 0818647434.
- [Gil59] E. N. Gilbert. "Random graphs". In: *Ann. Math. Statist.* 30 (1959), pp. 1141–1144. ISSN: 0003-4851.
- [GJV05] I. P. Goulden, D. M. Jackson, and R. Vakil. "Towards the geometry of double Hurwitz numbers". In: *Adv. Math.* 198.1 (2005), pp. 43–92. ISSN: 0001-8708.
- [Gri89] G. Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag, New York, 1989, pp. xii+296. ISBN: 0-387-96843-1.
- [GW91] P. W. Glynn and W. Whitt. "Departures from many queues in series". In: *Ann. Appl. Probab.* 1.4 (1991), pp. 546–572. ISSN: 1050-5164.
- [Ham57] J. M. Hammersley. "Percolation processes: Lower bounds for the critical probability". In: *Ann. Math. Statist.* 28 (1957), pp. 790–795. ISSN: 0003-4851.
- [Ham59] J. M. Hammersley. "Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration". In: *Le calcul des probabilités et ses applications. Paris, 15-20 juillet 1958*. Colloq. Internat. CNRS, LXXXVII. CNRS, Paris, 1959, pp. 17–37.
- [Ham72] J. M. Hammersley. "A few seedlings of research". In: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. I: Theory of statistics*. Univ. California Press, Berkeley, CA, 1972, pp. 345–394.
- [Har60] T. E. Harris. "A lower bound for the critical probability in a certain percolation process". In: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 56 (1960), pp. 13–20. ISSN: 0008-1981.
- [Hup+19] H. J. Hupkes et al. "Counting and ordering periodic stationary solutions of lattice Nagumo equations". In: *Appl. Math. Lett.* 98 (2019), pp. 398–405. ISSN: 0893-9659.
- [HW65] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh. "First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory". In: *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif., 1963*. Springer, New York, 1965, pp. 61–110.
- [IK12] Y. Itoh and P. L. Krapivsky. "Continuum cascade model of directed random graphs: traveling wave analysis". In: *J. Phys. A* 45.45 (2012), pp. 455002, 10. ISSN: 1751-8113.
- [IN94] M. Isopi and C. M. Newman. "Speed of parallel processing for random task graphs". In: *Comm. Pure Appl. Math.* 47.3 (1994), pp. 361–376. ISSN: 0010-3640.

- [Ito18] Y. Itoh. “Continuum Cascade Model: Branching Random Walk for Traveling Wave”. In: *arXiv preprint arXiv:1507.04379* (2018).
- [Joh15] P. Johnson. “Double Hurwitz numbers via the infinite wedge”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 367.9 (2015), pp. 6415–6440. ISSN: 0002-9947.
- [Kes80] H. Kesten. “The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$ ”. In: *Comm. Math. Phys.* 74.1 (1980), pp. 41–59. ISSN: 0010-3616.
- [Kes82] H. Kesten. *Percolation theory for mathematicians*. Vol. 2. Progress in Probability and Statistics. Birkhäuser, Boston, MA, 1982, pp. iv+423. ISBN: 3-7643-3107-0.
- [Kes86] H. Kesten. “Aspects of first passage percolation”. In: *École d’été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*. Vol. 1180. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1986, pp. 125–264.
- [Kin68] J. F. C. Kingman. “The ergodic theory of subadditive stochastic processes”. In: *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 30 (1968), pp. 499–510. ISSN: 0035-9246.
- [Kra01] S. G. Krantz. *Function theory of several complex variables*. Reprint of the 1992 edition. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001, pp. xvi+564. ISBN: 0-8218-2724-3.
- [KT13] T. Konstantopoulos and K. Trinajstić. “Convergence to the Tracy-Widom distribution for longest paths in a directed random graph”. In: *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 10.2 (2013), pp. 711–730.
- [Lig85a] T. M. Liggett. “An improved subadditive ergodic theorem”. In: *Ann. Probab.* 13.4 (1985), pp. 1279–1285. ISSN: 0091-1798.
- [Lig85b] T. M. Liggett. *Interacting particle systems*. Vol. 276. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, New York, 1985, pp. xv+488. ISBN: 0-387-96069-4.
- [LS77] B. F. Logan and L. A. Shepp. “A variational problem for random Young tableaux”. In: *Advances in Math.* 26.2 (1977), pp. 206–222. ISSN: 0001-8708.
- [Mar02] R. Marchand. “Strict inequalities for the time constant in first passage percolation”. In: *Ann. Appl. Probab.* 12.3 (2002), pp. 1001–1038. ISSN: 1050-5164.
- [Men86] M. V. Menshikov. “Coincidence of critical points in percolation problems”. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 288.6 (1986), pp. 1308–1311. ISSN: 0002-3264.
- [MN84] P. Mussi and P. Nain. “Evaluation of Parallel Execution of Program Tree Structures”. In: *SIGMETRICS Perform. Eval. Rev.* 12.3 (Jan. 1984), pp. 78–87. ISSN: 0163-5999.
- [MR19] B. Mallein and S. Ramassamy. “Two-sided infinite-bin models and analyticity for Barak-Erdős graphs”. In: *Bernoulli* 25.4B (2019), pp. 3479–3495. ISSN: 1350-7265.

- [MR21] B. Mallein and S. Ramassamy. “Barak-Erdős graphs and the infinite-bin model”. In: *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 57.4 (2021), pp. 1940–1967. ISSN: 0246-0203.
- [MRS24] B. Mallein, S. Ramassamy, and A. Singh. “Freezing in the Infinite-Bin Model”. In: *arXiv preprint arXiv:2402.03489* (2024).
- [NCS86] C. M. Newman, J. E. Cohen, and J. H. Steele. “A stochastic theory of community food webs IV: theory of food chain lengths in large webs”. In: *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. B Biol. Sci* 228.1252 (1986), pp. 355–377.
- [New92] C. M. Newman. “Chain lengths in certain random directed graphs”. In: *Random Structures Algorithms* 3.3 (1992), pp. 243–253. ISSN: 1042-9832.
- [PW96] J. G. Propp and D. B. Wilson. “Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics”. In: *Proceedings of the Seventh International Conference on Random Structures and Algorithms (Atlanta, GA, 1995)*. Vol. 9. 1-2. 1996, pp. 223–252.
- [Rol+10] L. T. Rolla et al. “The discrete and continuum broken line process”. In: *Markov Process. Related Fields* 16.1 (2010), pp. 79–116. ISSN: 1024-2953.
- [SCC93] K. Simon, D. Crippa, and F. Collenbergh. “On the distribution of the transitive closure in a random acyclic digraph”. In: *Algorithms—ESA '93 (Bad Honnef, 1993)*. Vol. 726. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 1993, pp. 345–356.
- [SE64] M. F. Sykes and J. W. Essam. “Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions”. In: *J. Mathematical Phys.* 5 (1964), pp. 1117–1127. ISSN: 0022-2488.
- [SSV08] S. Shadrin, M. Shapiro, and A. Vainshtein. “Chamber behavior of double Hurwitz numbers in genus 0”. In: *Adv. Math.* 217.1 (2008), pp. 79–96. ISSN: 0001-8708.
- [Sta15] R. P. Stanley. *Catalan numbers*. Cambridge University Press, New York, 2015, pp. viii+215. ISBN: 978-1-107-42774-7; 978-1-107-07509-2.
- [Ter23] B. Terlat. “Regularity of the time constant for last passage percolation on complete directed acyclic graphs”. In: *arXiv preprint arXiv:2303.11927* (2023).
- [Ula61] S. M. Ulam. “Monte Carlo calculations in problems of mathematical physics”. In: *Modern Mathematics for the Engineers* (1961), pp. 261–281.
- [VK77] A. M. Vershik and S. V. Kerov. “Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux”. In: *Doklady akademii nauk*. Vol. 233. 6. Russian Academy of Sciences. 1977, pp. 1024–1027.
- [VO16] M. Viana and K. Oliveira. *Foundations of ergodic theory*. Vol. 151. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2016, pp. xvi+530. ISBN: 978-1-107-12696-1.

- [Wer08] W. Werner. *Lectures on two-dimensional critical percolation*. 2008.
- [Wie81] J. C. Wierman. "Bond percolation on honeycomb and triangular lattices". In: *Adv. in Appl. Probab.* 13.2 (1981), pp. 298–313. ISSN: 0001-8678.
- [Woo10] J. Woodcock. "Properties of the poset of Dyck paths ordered by inclusion". In: *arXiv preprint arXiv:1011.5008* (2010).
- [Zub72] A. M. Zubkov. "The life spans of a branching process with immigration". In: *Teor. Verojatnost. i Primenen.* 17 (1972), pp. 179–188. ISSN: 0040-361x.