



HAL
open science

Étude des écoulements diphasiques liquide-gaz dans un contact rugueux pour des applications d'étanchéité métallique hautes performances

Christian Kankolongo

► **To cite this version:**

Christian Kankolongo. Étude des écoulements diphasiques liquide-gaz dans un contact rugueux pour des applications d'étanchéité métallique hautes performances. Mécanique [physics]. Université de Bordeaux, 2024. Français. NNT : 2024BORD0467 . tel-04956622

HAL Id: tel-04956622

<https://theses.hal.science/tel-04956622v1>

Submitted on 19 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES PHYSIQUES ET DE
L'INGÉNIEUR

SPÉCIALITÉ : TRANSFERTS FLUIDES ET ÉNERGETIQUE

Par **Christian KANKOLONGO**

Étude des écoulements diphasiques liquide-gaz dans un
contact rugueux pour des applications d'étanchéité
métallique hautes performances

Sous la direction de **Didier LASSEUX** et de **Marc PRAT**

Soutenue le 18 décembre 2024

Membres du jury :

Mme. BIANCE Anne-Laure	Directrice de Recherche	CNRS - iLM	Présidente
M. BODIGUEL Hugues	Professeur	Grenoble INP	Rapporteur
M. SOULAINÉ Cyprien	Chargé de Recherche	CNRS - ISTO	Rapporteur
M. LASSEUX Didier	Directeur de Recherche	CNRS - I2M	Directeur
M. PRAT Marc	Directeur de Recherche	CNRS - IMFT	Co-directeur
M. LEDRAPPIER Florent	Ingénieur de Recherche	Technetics Group France	Invité
M. ZAOUTER Tony	Ingénieur de Recherche	CEA Pierrelatte	Invité

Remerciements

Trois ans de thèse, trois ans d'apprentissage de la rigueur scientifique aux côtés de Didier LASSEUX et de Marc PRAT, mes directeurs de thèse, que je tiens à remercier pour leur encadrement, leur disponibilité à répondre à mes questions et la richesse de nos échanges. Merci de m'avoir guidé dans la recherche de la méthodologie appropriée, permettant à ce projet de recherche de produire des résultats significatifs.

J'adresse mes sincères remerciements à l'ensemble des membres du jury pour la qualité de nos échanges lors de la soutenance. J'exprime toute ma gratitude à Hugues BODIGUEL et Cyprien SOULAINÉ pour avoir accepté le rôle de rapporteur et évalué mes travaux. Merci à Anne-Laure BIANCE d'avoir présidé ce jury, ainsi qu'à Florent LEDRAPPIER et Tony ZAOUTER, invités, pour leur présence lors de ma soutenance.

Je remercie l'ensemble des collègues du Laboratoire d'Étanchéité maestral pour nos différentes interactions, et plus particulièrement Tony ZAOUTER et Florent LEDRAPPIER pour leur accompagnement depuis mes débuts en tant que stagiaire, ainsi que pour la confiance qu'ils m'ont accordée pour poursuivre ces travaux de thèse. Philippe MYSLIK, merci pour ta disponibilité et pour toutes les discussions enrichissantes que nous avons eues sur ce sujet. À tous les collègues de l'I2M, je vous remercie également pour les échanges et partages autour de nos projets respectifs.

Tout au long de ce parcours, j'ai reçu un soutien précieux et de nombreux encouragements de la part de mes amis. Merci à vous tous.

À mes parents et toute ma famille, les KAJEBO, ce résultat est le fruit de votre confiance en moi et de tout ce que vous avez investi. Merci pour tous vos efforts ! Je tiens également à remercier ma belle-famille pour ses encouragements constants.

Enfin, à toi Naomie, ma chère épouse, nous venons d'achever un projet de plus grâce à ton soutien infailible et ta présence à mes côtés. Merci pour tout et j'ai hâte de réaliser d'autres projets avec toi. Je te remercie infiniment d'avoir agrandi notre famille et d'avoir donné à Karl, notre petit soleil, la chance de participer à ma soutenance. Merci à toi, mon fils, d'avoir illuminé nos vies.

Kajebo Christian

Résumé

Certaines applications industrielles sont soumises à des normes d'étanchéité strictes pour différentes raisons notamment sécuritaires. Les assemblages mécaniques qu'elles utilisent sont constitués de deux brides en matériau métallique dur et d'un joint en matériau métallique mou. Les brides possèdent des défauts de surface dus au procédé de fabrication (notamment par tournage), offrant des interfaces comportant des défauts multi-échelles qui persistent lors du serrage. A ce jour, l'étanchéité d'un joint est caractérisée par un test en gaz même si ce dernier doit étancher un liquide, à cause de la complexité d'analyse d'une fuite liquide (capillarité, mouillabilité, etc.). Dans un premier temps, nous abordons cette dernière problématique en réalisant des mesures de fuite liquide dans des microcanaux, idéalisant l'interface bride-joint. Ces microcanaux sont gravés sur une couche d'aluminium et recouverts d'un plan en verre. Lors de ces mesures, nous avons observé que la prédiction numérique d'une fuite liquide dépend de la bonne approximation des effets capillaires et de mouillabilité. Un autre effet, lié aux écoulements en film, est ensuite étudié en considérant un chemin de fuite résultant de l'interface bride-joint comme un canal de section triangulaire aplatie, en approximation de la strie d'usinage de la bride. La modélisation est basée sur la théorie de la lubrification en considérant deux scénarios où l'on impose soit un débit constant en entrée du canal soit une pression constante. Dans le premier cas, on montre que l'écoulement du liquide peut présenter deux régimes : un développement des films dans les coins avec une augmentation d'épaisseur en entrée suivi d'une invasion complète lorsque l'épaisseur en entrée atteint un certain seuil. Dans le deuxième scénario, selon le niveau de pression imposé, l'écoulement peut être dans un régime où l'écoulement ne se développe que dans les coins ou plutôt dans un régime où le liquide s'écoule dans tout le canal avec un film en amont. Partant de cette dernière étude, une analyse simplifiée permettant de prédire et d'estimer le temps d'apparition d'une fuite liquide est proposée. Nous développons ensuite un calcul de fuite lorsque l'écoulement se produit avec changement de phase sous une condition de pression

imposée dans le liquide à l'entrée du canal. L'ensemble de ces travaux mettent en évidence le rôle parfois très important joué par les films de coin dans le processus d'imbibition et qui doivent être considérés dans une étude fine des mécanismes de fuite en condition d'imbibition.

Mots-clés : Étanchéité, Capillarité, Film liquide.

Abstract

Some industrial applications are subject to strict sealing standards for various reasons, particularly safety. The mechanical assemblies they use consist of two flanges made of hard metallic material and a gasket made of soft metallic material. The flanges have surface imperfections due to the manufacturing process (notably turning), providing interfaces with multi-scale defects that persist during tightening. To date, the sealing performance of a gasket is characterized by a gas test, even if it is intended to seal a liquid, because of the complexity of analyzing a liquid leak (capillarity, wettability, etc.). First, we address this issue by measuring liquid leakage in microchannels that idealize the flange-gasket interface. These microchannels are engraved on an aluminum layer and covered with a glass plate. During these measurements, we observed that the numerical prediction of a liquid leak depends on an accurate approximation of the capillary and wettability effects. Another effect, related to film flows, is then studied by considering a leak path resulting from the flange-gasket interface as a flattened triangular cross-sectional channel, approximating the machining grooves of the flange. The modeling is based on the theory of lubrication, considering two scenarios in which a constant flow rate or a constant pressure is imposed at the inlet of the channel. In the first case, we show that the liquid flow can exhibit two regimes: a development of films in the corners with increasing thickness at the inlet, followed by complete invasion when the inlet thickness reaches a certain threshold. In the second scenario, depending on the imposed pressure level, the flow may occur only at the corners or in a regime where the liquid flows throughout the channel with an advancing film. Based on this study, a simplified analysis is proposed to predict and estimate the time for a liquid leak to appear. We then develop a leakage calculation when the flow occurs with phase change under an imposed pressure condition at the liquid inlet of the channel. All of these findings highlight the sometimes crucial role that corner films play in the imbibition process, which must be considered in a detailed study of leakage mechanisms under imbibition conditions. **Keywords:** Sealing, Capillarity, Liquid film.

Unité de recherche

UMR 5295 Institut de Mécanique et d'Ingénierie, 33405 Talence Cedex, France.

Sommaire

Remerciements	i
Résumé	ii
Introduction générale	1
1 État de l'art sur les écoulements liquide-gaz	6
1.1 Étude d'une fuite liquide en étanchéité statique	7
1.1.1 Fuite liquide en condition d'écoulement monophasique	7
1.1.2 Fuite liquide en condition d'écoulement diphasique	11
1.2 Travaux de la littérature sur l'imbibition	15
1.2.1 Modèle d'imbibition à l'échelle locale	15
1.2.2 Modèle d'imbibition à l'échelle macroscopique	31
1.3 Conclusion	36
2 Caractérisation d'une fuite dans une fracture modèle	38
2.1 Expérience microfluidique	39
2.1.1 Présentation et objectifs des dispositifs microfluidiques	39
2.1.2 Caractérisation de la géométrie des microcanaux	41
2.1.3 Protocole d'essai	42
2.2 Analyse d'une fuite dans une puce microfluidique	47
2.2.1 Fuite gazeuse	47
2.2.2 Fuite liquide	52
2.3 Conclusion	58
3 Dynamique d'imbibition d'un liquide mouillant avec écoulement en film	59
3.1 Définition du champ des ouvertures et hypothèses	60
3.2 Cinématique de l'interface liquide-gaz dans un coin	62
3.2.1 Établissement de l'équation de l'épaisseur du film	62

3.2.2	Stratégie de résolution de l'équation de l'épaisseur du film	66
3.3	Épaisseur maximale de raccordement	72
3.4	Dynamique d'imbibition à débit imposé	74
3.4.1	Régime du film liquide : Position du point triple	74
3.4.2	Simplification de l'équation de l'épaisseur de raccordement	77
3.4.3	Régime du film liquide et du ménisque central	80
3.4.4	Discussion sur le modèle	85
3.5	Dynamique d'imbibition à pression imposée	89
3.5.1	Régime du film liquide	89
3.5.2	Régime du film liquide et du ménisque central	92
3.5.3	Discussion sur le modèle	95
3.6	Validation du modèle	97
3.6.1	Présentation du processus expérimental de O. AMYOT	97
3.6.2	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux	98
3.7	Conclusion	102
4	Application de la dynamique d'imbibition en étanchéité	104
4.1	Contexte	105
4.2	Prédiction d'une fuite liquide	106
4.2.1	Transitoire d'une fuite liquide	106
4.2.2	Corrélation entre une fuite liquide et une fuite gazeuse	111
4.3	Fuite stationnaire en présence de l'évaporation	116
4.3.1	Condensation capillaire	116
4.3.2	Fuite par les coins	118
4.3.3	Cas d'une invasion centrale	131
4.4	Conclusion	138
	Conclusion générale et Perspectives	140
	Références bibliographiques	145

A Conservation de volume d'un liquide dans un canal triangulaire en présence d'écoulements en film liquide	154
B Taille d'un ménisque	157
B.1 Équation de la taille d'un ménisque	157
B.2 Débit imposé	158
B.3 Pression imposée	159
C Section occupée par le film liquide dans un canal triangulaire	160
D Dérivation des équations de Reynolds	163
D.1 Modèle d'écoulement	163
D.2 Simplification du modèle d'écoulement	167
D.2.1 Équations de REYNOLDS	167
D.2.2 Loi de LAPLACE	174

Nomenclature

Symboles de type grecque

κ	Double courbure moyenne	m^{-1}
κ_1	Courbure moyenne dans le plan (y, z)	m^{-1}
κ_2	Courbure moyenne dans le plan (x, y)	m^{-1}
σ	Tension de surface	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
ϵ	Pente d'un canal triangulaire	
σ_P	Coefficient de glissement visqueux	
θ_e	Angle de contact	$^\circ$
α	Phase fluide	
μ_α	Viscosité dynamique d'une phase fluide	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
ρ_α	Masse volumique d'une phase fluide	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Symboles de type latine

Q	Taux de fuite d'un gaz	$\text{Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
$v_{\beta\gamma}$	Vitesse de l'interface liquide-gaz	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
d_m	Diamètre moyen d'un joint	m
e_{\max}	Épaisseur caractéristique du film liquide	m
P_0	Pression constante	Pa
p_c	Pression capillaire	Pa
Q_0	Débit volumique constant	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
ℓ	Demie largeur d'un canal triangulaire	m
Ca	Nombre capillaire	

x

HR	Humidité relative	
Kn	Nombre de KNUDSEN	
M_μ	Rapport de viscosités	
Re	Nombre de REYNOLDS	
D	Coefficient de diffusion	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$h(y)$	Champ des ouvertures d'un canal triangulaire	m
h_0	Ouverture maximale d'un canal triangulaire	m
J_{evap}	Taux d'évaporation	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
M	Masse molaire	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
R	Constante universelle de gaz parfait	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
T	Température	K
t	Temps	s
u_β	Composante selon x de la vitesse d'une phase liquide	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
v_β	Composante selon y de la vitesse d'une phase liquide	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
w_β	Composante selon z de la vitesse d'une phase liquide	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\mathbf{n}_{\beta\gamma}$	Vecteur normal à l'interface liquide-gaz dans le plan (x, y)	
\mathbf{n}	Vecteur normal à l'interface liquide-gaz dans l'espace	
\mathbf{v}_α	Vitesse d'une phase fluide	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
\mathcal{A}_α	Zone occupée par une phase fluide	
p_α	Pression d'une phase fluide	Pa
q_α	Débit volumique par unité de largeur d'une phase fluide	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Introduction générale

Contexte

Face aux normes environnementales qui deviennent de plus en plus strictes ou encore à la sensibilisation pour la prévention contre les accidents, l'étanchéité des systèmes industriels est devenue un enjeu majeur dans le monde industriel. Dans certaines applications comme le domaine du nucléaire par exemple, la surveillance de l'étanchéité intervient dans une centrale nucléaire sur des assemblages boulonnés, qui raccordent des tuyauteries dans les circuits hydrauliques, pour lesquels le contrôle de l'étanchéité est réalisé pour minimiser les risques de contamination radiologique dans l'environnement. Le niveau d'étanchéité requis dans ces applications impose le

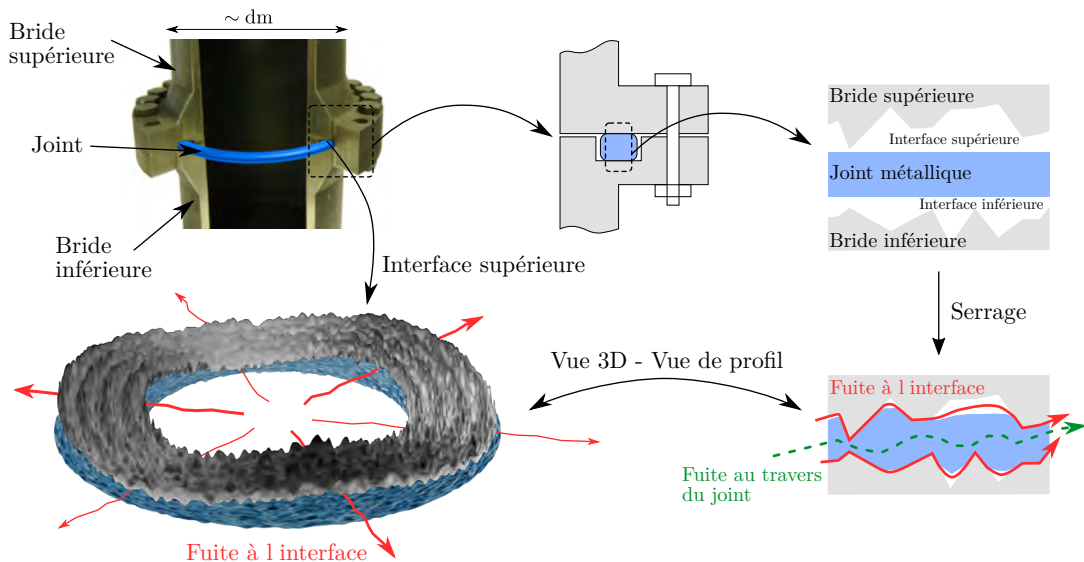


FIGURE 1 – Représentation de l'interface bride-joint résultant après une mise en contact avec un effort de serrage (Zaouter, 2018).

choix de matériaux qui doivent remplir cette fonction et ce choix est porté sur les matériaux métalliques, qui présentent des propriétés mécaniques meilleures grâce à leur

résistance aux contraintes de différentes natures (chimiques ou hautes températures) pouvant provenir des fluides sous pression qui s'écoulent dans les tuyauteries. Les types d'assemblages utilisés sont généralement constitués de deux brides qui sont en matériaux métalliques durs et d'un joint en matériau métallique mou (voir figure 1). Ces assemblages mécaniques possèdent des défauts de surface dus au procédé de fabrication des brides (généralement le tournage). Ils offrent des interfaces multi-échelles, après leur mis en contact par un effort de serrage. En effet, quel que soit le processus d'élaboration, une surface usinée comporte des défauts de fabrication (rugosité, défaut de forme, etc). A cause de ces derniers le contact ne se produit qu'en des zones très localisées, empêchant ainsi à la liaison composée par les deux brides et le joint d'être parfaitement étanche, ce qui forme un champ des ouvertures à l'interface brides-joint et qui caractérise le chemin préférentiel des fuites.

Problématiques et objectifs

Le joint, qui est en matériau métallique mou, a pour rôle d'améliorer les conditions de contact, c'est-à-dire qu'il doit épouser les défauts de surface qui existent sur les brides afin de minimiser le champ des ouvertures qui conduisent aux fuites. Pour assurer au mieux cette fonction, le joint doit être imperméable et résistant au fluide à étancher. Il doit de plus être suffisamment élastique pour corriger les éventuelles variations dimensionnelles tout en minimisant l'effort de serrage et avoir une faible résistance plastique pour épouser au mieux les rugosités. Il doit par ailleurs avoir une tenue au vieillissement suffisamment élevée. L'apparition d'une fuite sur un assemblage mécanique peut entraîner une explosion catastrophique, une fuite de fluide nocif ou encore des accidents. Il est alors très important d'étudier les performances d'un joint mécanique pour réduire les fuites et améliorer ainsi la prévisibilité et la fiabilité des fuites afin de prévoir une période de maintenance raisonnable.

L'optimisation de l'étanchéité des assemblages mécaniques passe successivement par la maîtrise de la mécanique du contact, qui consiste à caractériser les états de sur-

faces avant et après déformation, et la compréhension des écoulements fluides ayant des effets particuliers (raréfaction dans le cas des écoulements gazeux, capillarité ou mouillabilité des surfaces dans le cas des écoulements liquides, etc.) selon que les écoulements fluides s'effectuent en condition monophasique ou diphasique à travers des interfaces multi-échelles.

A ce jour, la caractérisation de la très haute étanchéité d'assemblages mécaniques s'effectue à l'aide de gaz traceurs comme de l'hélium, choisis pour leur grande mobilité, chimiquement inerte et à faible teneur dans l'atmosphère (faible risque de pollution des mesures). Les tests en liquide sur des assemblages de grande taille sont généralement plus complexes à mettre en œuvre lorsque qu'une grande précision est recherchée (rôle de la tension superficielle, récolte du liquide en aval, forte variation de pression liée à l'incompressibilité du liquide, etc.). Pour cette dernière raison, il s'avère commun de caractériser l'étanchéité d'un assemblage à l'aide d'un gaz traceur, même si cet assemblage est in fine destiné à étancher un liquide. Cependant, cette approche se heurte à ce jour à une difficulté pour définir et justifier un critère d'étanchéité au gaz pour garantir un niveau d'étanchéité de liquide. L'objectif de ces travaux de thèse est, d'une part, la compréhension de la physique d'une fuite liquide en condition diphasique liquide-gaz par une approche expérimentale et numérique dans des systèmes modèles représentatifs des interfaces bride-joint, la maîtrise du temps d'imbibition du liquide dans un chemin de fuite qui conduirait à l'obtention d'une fuite stabilisée et d'autre part, d'établir un lien entre la fuite liquide et celle en hélium pour répondre à l'enjeu industriel de justifier l'utilisation d'un test d'étanchéité gazeux sur des joints destinés à étancher un liquide.

Démarche utilisée

Dans ces travaux de thèse nous ne nous intéressons qu'à la partie écoulements diphasiques liquide-gaz à travers le champ d'ouvertures qui résulte de la mise en contact des brides avec le joint. La modélisation de ces écoulements dans ce champ d'ouver-

tures est effectuée en considérant ce dernier comme une fracture qui peut avoir une forme modèle (triangulaire ou rectangulaire), afin de faire une analyse simplifiée des phénomènes qui influencent ces écoulements (capillarité, mouillabilité, film des coins, etc). Une analyse expérimentale et numérique sera présentée.

Ce manuscrit de thèse présente dans le chapitre 1, premièrement, un état de l'art sur l'étude des fuites liquides dans des joints réalisée ces dernières années dans le domaine de l'étanchéité statique. On parlera en premier des travaux qui ont modélisé une fuite liquide en condition d'écoulement monophasique puis une synthèse des travaux qui ont abordé ce sujet en condition d'écoulement diphasique sera donnée. La deuxième partie de ce chapitre présentera d'autres études, sans lien direct avec l'étanchéité statique, qui ont analysé les écoulements diphasiques dans une *fracture modèle* et principalement de l'imbibition. L'analyse expérimentale de la problématique de caractérisation d'une fuite liquide, comparée à ce que l'on sait faire pour quantifier une fuite gazeuse sur un joint d'étanchéité, est rapportée dans le chapitre 2. Dans cette démarche, les mesures de fuite sont réalisées dans des fractures modèles constituées de microcanaux représentatifs des chemins de fuite d'une interface bride-joint réelle, qui sont gravés sur une couche d'aluminium et recouvert avec du verre dont l'ensemble forme un dispositif microfluidique. Les résultats présentés dans ce chapitre mettent en lumière l'influence de certains phénomènes propres aux écoulements diphasiques (mouillabilité et capillarité) dans l'analyse d'une fuite liquide. Toujours dans l'idée de comprendre l'impact de ces phénomènes dans une fracture modèle, le chapitre 3 présentera une modélisation mathématique d'écoulement diphasique en situation d'imbibition dans un chemin de fuite assimilé à un canal aplati de section transversale triangulaire, en prenant en compte les écoulements en film qui se développent dans les angles vifs. Ces modèles mathématiques sont basés sur la théorie de lubrification et on suppose que les forces interfaciales entre la phase liquide et la phase gazeuse sont dominantes par rapport aux forces visqueuses. On considérera que le liquide s'écoule soit sous l'effet d'un débit volumique constant imposé à l'entrée du canal, soit

sous l'effet d'une pression constante imposée et ou uniquement par capillarité. Enfin, on montrera dans le chapitre 4 l'application en étanchéité de la théorie de dynamique d'imbibition pour prévenir des fuites liquides par les coins qui peuvent potentiellement conduire à des situations dangereuses dans une installation. Un calcul explicite de la fuite d'un liquide volatil, lorsque l'écoulement se produit uniquement dans les coins d'un canal sous l'effet d'une pression imposée et avec changement de phase (évaporation), sera également présenté.

Chapitre 1

État de l'art sur les écoulements liquide-gaz

Sommaire

1.1 Étude d'une fuite liquide en étanchéité statique	7
1.1.1 Fuite liquide en condition d'écoulement monophasique	7
1.1.2 Fuite liquide en condition d'écoulement diphasique	11
1.2 Travaux de la littérature sur l'imbibition	15
1.2.1 Modèle d'imbibition à l'échelle locale	15
1.2.2 Modèle d'imbibition à l'échelle macroscopique	31
1.3 Conclusion	36

La modélisation des écoulements diphasiques liquide-gaz dans des espaces confinés a été abordée dans différents travaux ces dernières années et dans différentes configurations. Ce chapitre présente un état de l'art sur les travaux ayant mis l'accent sur certains phénomènes qui peuvent être pris en compte lorsque l'on souhaite analyser une fuite liquide dans un contact rugueux.

1.1 Étude d'une fuite liquide en étanchéité statique

D'un enjeu industriel majeur, l'étude d'une fuite liquide dans un assemblage métal-métal en étanchéité statique n'a fait l'objet que de quelques travaux ces dernières années dans les deux configurations d'écoulements fluides : monophasique et diphasique. La liaison à étancher est réalisée par une mise en contact directe de deux surfaces rugueuses rendant ainsi l'analyse de son comportement complexe. Les mécanismes responsables des fuites font intervenir des échelles très variées qui sont liées tant à la morphologie des surfaces en contact qu'au comportement des fluides à étancher, ce qui en fait ainsi un problème multi-échelle.

Dans cette partie on présente un état de l'art sur l'étude d'une fuite liquide à travers un contact rugueux, premièrement en faisant référence aux travaux de modélisation de ce phénomène en considérant que le liquide dans le contact s'écoule exclusivement en condition monophasique, puis un aperçu de travaux qui se sont intéressés à l'étude d'une fuite liquide en condition diphasique seront présentés.

1.1.1 Fuite liquide en condition d'écoulement monophasique

Par une approche expérimentale et numérique, [Marie \(2002\)](#) a étudié une fuite liquide en écoulement monophasique au travers d'un contact modèle, formé par l'assemblage d'une éprouvette en acier inoxydable 316L, portant une rugosité similaire à celle des brides, et d'un plan lisse indéformable en saphir. Les mesures de fuite ont été effectuées à l'aide de deux types d'éprouvettes, appelées famille A et famille B, issues d'un procédé par tournage et ayant des rugosités différentes ($R_a = 0.5 \mu\text{m}$ et $R_a = 1.1 \mu\text{m}$ respectivement pour la famille A et la famille B).

En faisant varier la pression imposée sur le contact rugueux et la pression d'injection du liquide, les mesures de la fuite ont été réalisées à l'aide d'une technique de dosage par chromatographie en phase gazeuse. Le débit de fuite d'un contact annulaire a été estimé en utilisant la formule (1.1) pour une spire unique de largeur ℓ et de

longueur L , en négligeant l'écoulement interspire.

$$\dot{q}_m = \rho \frac{K \ell}{\mu L} \Delta p \quad (1.1)$$

Dans cette expression, \dot{q}_m correspond au débit masse, ρ est la masse volumique du liquide, μ sa viscosité dynamique, Δp correspond à la différence de pression du liquide entre l'entrée et la sortie du contact rugueux et K correspond à la transmissivité globale du contact en $[m^3]$.

Les résultats présentés sur la figure 1.1, pour deux éprouvettes de la famille B, ont montré que lorsque le serrage est très fort dans la liaison, l'erreur relative entre le débit de fuite calculé numériquement et le débit de fuite mesuré expérimentalement est insignifiant. Par ailleurs, une divergence dans les résultats est observée lorsque le

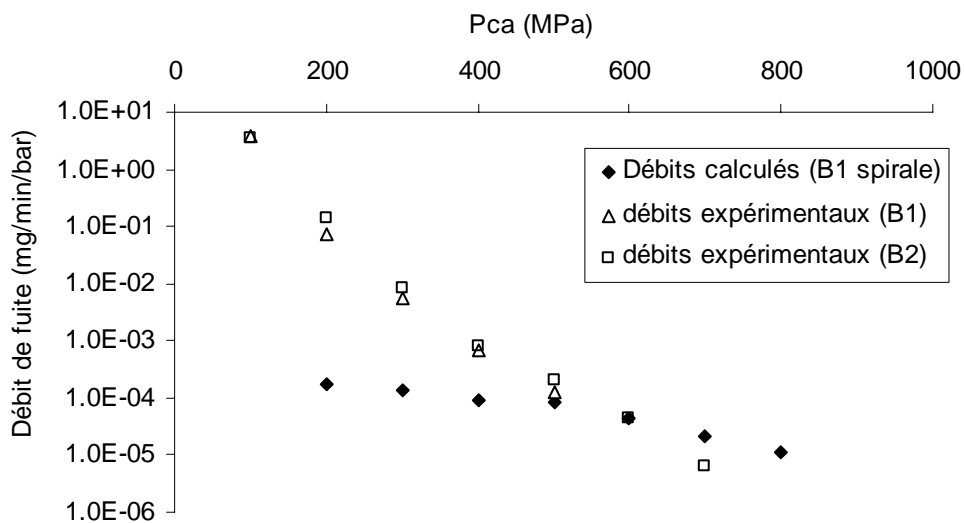


FIGURE 1.1 – Comparaison des débits de fuite numérique et expérimental en fonction de la pression de contact apparente, P_{ca} (Marie, 2002).

serrage est faible. Dans ce dernier cas, MARIE explique la divergence par la présence de défauts de forme et d'ondulations présents sur le faciès de contact de l'éprouvette, i.e., de défauts de longueurs d'ondes bien supérieures à ceux mis en jeu dans le processus de l'écoulement au travers du contact à fort serrage. En somme, ces travaux ont mis en évidence que les échelles de défauts pertinentes pour décrire la fuite vont décroissantes avec le niveau de serrage appliqué. Sur toute la gamme de serrage,

la proportionnalité entre le débit de fuite et la différence de pression exprimée sur la figure 1.1 reste pertinente.

Les travaux de Vallet (2008) et de Bourniquel (2017) ont été consacrés respectivement, toujours en condition d'écoulement monophasique liquide, au développement de modèles de prédictions d'une fuite liquide et à caractériser les fuites induites par des défauts d'ondulation des pièces en contact. Contrairement à MARIE qui s'est intéressé à des surfaces anisotropes, VALLET a constitué des modèles de contact à surface isotrope.

Les résultats de mesures et de calculs sur les modèles ont été présentés en termes de la transmissivité K fonction de la pression de contact apparente, P_{ca} , entre les surfaces (voir figure 1.2 pour une éprouvette en acier inoxydable). Les mesures de

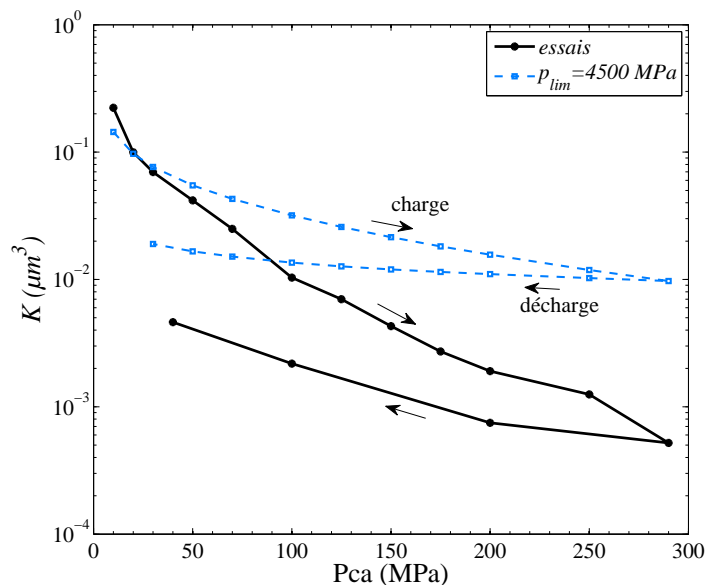


FIGURE 1.2 – Comparaison des mesures expérimentales et des calculs numériques de la transmissivité, K , sur une éprouvette en acier inoxydable (Z2 CND 18-12); p_{lim} correspond à la pression limite de l'éprouvette (Vallet, 2008).

répétabilité effectuées sur cette éprouvette ont permis de quantifier l'incertitude globale sur l'estimation de la transmissivité. VALLET a proposé ensuite de prendre en compte le caractère hétérogène des matériaux constituant l'assemblage (en particulier dans les rugosités par rapport au matériau en masse sous-jacent, en raison de l'opération d'usinage) afin de tenter d'expliquer les écarts importants observés entre les résultats

numériques et expérimentaux. Tout comme MARIE, une proportionnalité satisfaisante a été observée entre le débit de fuite du liquide et la différence de pression du liquide au bord du contact rugueux, confirmant la robustesse du modèle linéaire donné dans l'équation (1.1).

Dans les travaux de thèse de Bourniquel (2017), la prise en compte de l'anisotropie des surfaces en contact dans le calcul a mis en évidence l'impact non négligeable des défauts d'ondulation sur l'estimation de la transmissivité (voir la figure 1.3). En effet, l'auteur a proposé une approche permettant d'inclure ce défaut dans le calcul de la transmissivité du contact en partant de sa donnée initiale avant déformation. Cette prise en compte effectuée de manière approchée, a contribué à diminuer significativement la transmissivité du contact qui est autrement surestimée de manière assez sensible au regard des données expérimentales. Les mesures ont été réalisées dans trois

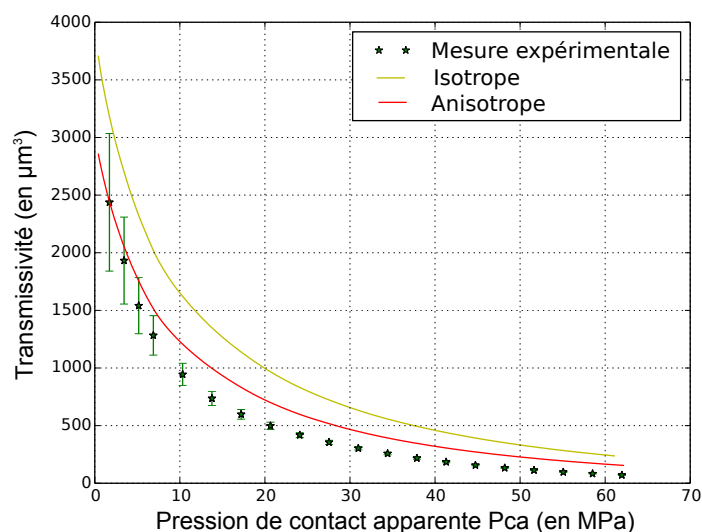


FIGURE 1.3 – Transmissivité du contact estimée avec et sans la prise en compte du caractère anisotrope de la transmissivité locale liée à la rugosité. Comparaison avec les données expérimentales sur l'éprouvette beta (Bourniquel, 2017).

types d'éprouvettes présentant un défaut d'ondulation crête-à-crête différent chacune, appelées alpha, delta et beta (30 µm, 40 µm et 50 µm, respectivement pour chacune d'éprouvette fabriquée).

1.1.2 Fuite liquide en condition d'écoulement diphasique

En étanchéité statique, les écoulements diphasiques ont été abordés de deux manières pour lesquelles l'on suppose que la fracture rugueuse est initialement saturée par l'un des deux fluides que l'on cherche ensuite à déplacer en injectant l'autre fluide. Le déplacement peut être qualifié de drainage ou d'imbibition. Le premier est le cas où un fluide mouillant est déplacé par un fluide non mouillant alors que le deuxième correspond au cas où le fluide non mouillant est déplacé par un fluide mouillant.

Dans ses travaux de thèse, [Amyot \(2004\)](#) a étudié les écoulements diphasiques liquide-gaz isothermes en fracture gaussienne ou plus généralement corrélée à courte portée. En ce qui concerne l'étanchéité, l'étude de ces écoulements était une étape préliminaire au cas où une fuite liquide s'effectuait via un changement de phase du liquide en vapeur à travers le contact développé dans les travaux de thèse de [Jolly \(2004\)](#).

Les résultats obtenus par AMYOT montrent que le drainage quasi-statique (qui a été bien compris dans ses travaux) dans une fracture gaussienne mal connectée peut être modélisé en utilisant un algorithme de percolation d'invasion sur un réseau aléatoire (voir figure 1.4). Le réseau est construit à partir de l'identification des points critiques du

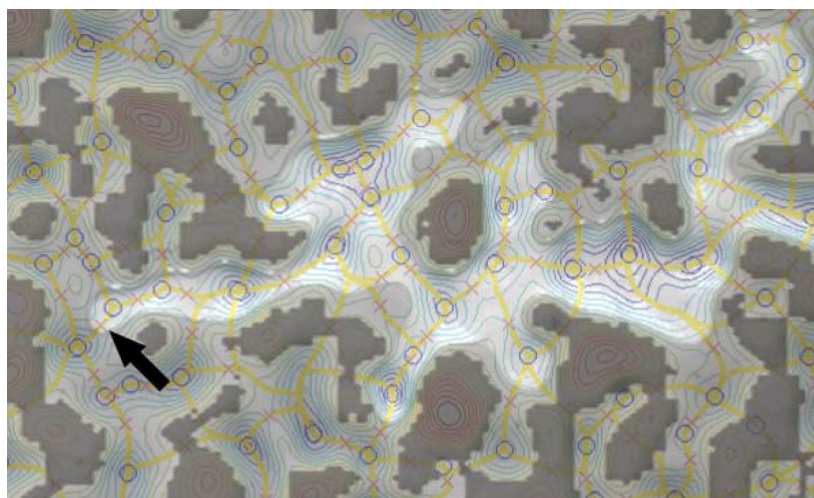


FIGURE 1.4 – Envahissement d'une surface gaussienne avec le réseau. Les surfaces en contact sont en noir. Le liquide (huile) en gris et l'air en blanc ([Amyot, 2004](#)).

champ des ouvertures que sont les maxima et les cols (points – selles). Le réseau ainsi construit est à coordinence variable et peut être vu comme le squelette topologique du champ des ouvertures. AMYOT explique que cette approche réseau est plus particulièrement adaptée aux fractures mal connectées ayant de larges zones de contact entre les deux surfaces de façon à avoir des constriction de col bien définies. Elle peut être aussi d'application pour la détermination de la conductance hydraulique des fractures corrélées à courte portée.

Le cas de l'imbibition à faible nombre capillaire (c'est-à-dire lorsque les forces capillaires sont plus importantes que les forces visqueuses) a été étudié expérimentalement et numériquement dans une fracture idéalisée, en assimilant les chemins de fuite à des canaux droits de section triangulaire. Les travaux de AMYOT se sont intéressés à l'imbibition forcée d'un fluide mouillant, principalement de l'huile, en imposant en entrée de la fracture idéalisée soit un débit constant soit une pression constante. Les mesures expérimentales réalisées ont permis de montrer l'influence des écoulements qui se développent dans les coins et qui peuvent sensiblement modifier la prédiction de la fuite.

Pour sa part, Jolly (2004) dans ses travaux de thèse s'est intéressé aux écoulements avec changement de phase liquide-vapeur où la différence de pression Δp est à la fois le terme moteur de l'écoulement et du changement de phase. Les situations où il existe une différence de température entre le contact à étancher et le milieu extérieur n'ont pas été prises en compte. Une analyse phénoménologique et une étude expérimentale ont été réalisées, permettant d'identifier les mécanismes de l'ébullition à l'échelle micrométrique du chemin de fuite. Le chemin de fuite a été assimilé à un capillaire de section circulaire afin de ne pas masquer les mécanismes fondamentaux par des difficultés analytiques sans rapport avec les phénomènes physiques étudiés. L'étude expérimentale a permis de mesurer un débit masse de vapeur d'eau contenue dans mélange gazeux, noté Q_m , comparé à un débit de fuite théorique prédite dans le cas d'un écoulement monophasique liquide. La mesure du débit masse en fonc-

tion de la différence de pression a révélé un comportement linéaire comme on peut le constater sur la figure 1.5.

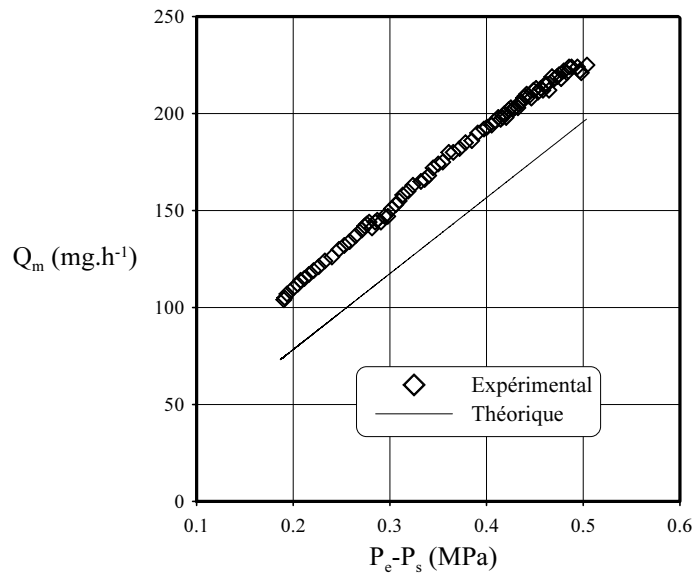


FIGURE 1.5 – Débit masse en fonction de la différence de pression dans un capillaire de diamètre intérieur nominal $20 \mu\text{m}$ comparé au débit masse théorique calculé en monophasique liquide en considérant un diamètre intérieur de $22 \mu\text{m}$ (Jolly, 2004).

Rostami et Streator (2017) ont étudié la fuite d'un liquide mouillant entre deux surfaces rugueuses annulaires élastiques en contact en incluant les effets capillaires. La distribution de la pression fluide entre les deux surfaces en contact est déterminée à partir de l'équation de Reynolds (1.2) en supposant un écoulement incompressible et axisymétrique avec une rugosité de surface isotrope. Dans leur approche, l'écoulement est régi par l'équation suivante

$$\frac{d}{dr} \left(\varphi h^3(r) \frac{dp}{dr} \right) = 0. \quad (1.2)$$

Dans l'équation (1.2), h est le champ des ouvertures, r est la coordonnée radiale et φ est un facteur d'écoulement qui prend en compte l'influence de la rugosité de surface, proposé par Patir et Cheng (1978) en faisant la moyenne sur plusieurs réalisations des valeurs calculées par résolution complète de l'équation de Reynolds sur des surfaces

statistiquement identiques et qui est déterminé de la manière suivante

$$\varphi = 1 - 0.9 \exp\left(\frac{-0.56h}{\sigma}\right), \quad (1.3)$$

avec σ l'écart-type de la rugosité des surfaces.

Les résultats numériques de ROSTAMI et STREATOR représentés sur la figure 1.6 ont également montré que le débit de fuite moyen diminue lorsque le serrage entre les deux surfaces est fort. Ces résultats ont aussi montré que l'augmentation de la force

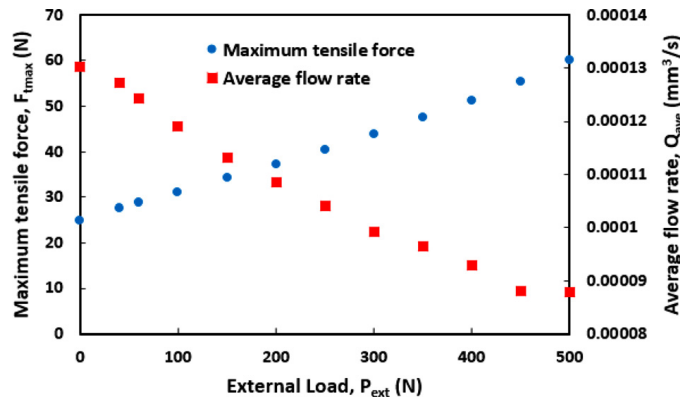


FIGURE 1.6 – Variation de la force de traction, $F_{t,max}$, et du débit volumique moyen du liquide, Q_{ave} , en fonction de la force de serrage, P_{ext} (Rostami et Streator, 2017).

de serrage, entraînant la diminution de l'ouverture de la fracture, engendre plus de pressions négatives à l'intérieur de la région mouillée en raison des effets capillaires et plus de résistance à l'écoulement du liquide entre les deux surfaces, explicité par la croissance de la force de traction $F_{t,max}$.

Dans cet état de l'art on a vu que la complexité du champ des ouvertures résultant d'un serrage de deux surfaces a conduit certains auteurs à modéliser les écoulements dans cette interface comme dans des canaux simples soit de section triangulaire ou circulaire (Amyot, 2004; Jolly, 2004). L'avantage de cette modélisation est d'élaborer des modèles de prédiction simples qui prennent en compte différents effets qui peuvent influencer une fuite liquide. Dans la partie suivante, un état de l'art de quelques travaux réalisés dans la littérature pour étudier les écoulements diphasiques principalement de l'imbibition et sans lien direct avec l'étanchéité, est présenté.

1.2 Travaux de la littérature sur l'imbibition

Le processus d'imbibition a été largement étudié ces dernières années en ingénierie notamment pour des applications en milieux poreux et fracturés (Morrow et Mason, 2001; Cheng *et al.*, 2015). De nombreux travaux ont été proposés ces dernières années tant expérimentaux que numériques, analysant différents phénomènes tels que le piégeage de gaz dans l'écoulement d'un liquide, l'effet de la rugosité des surfaces, les écoulements en film se développant dans les coins d'un capillaire ou encore l'influence d'un changement de phase à l'interface liquide-gaz.

Dans la littérature, la dynamique d'imbibition d'un liquide mouillant dans un canal ou une fracture initialement rempli d'un fluide non mouillant a été abordée de différentes manières soit en partant des équations macroscopiques soit tout simplement en faisant l'analyse à partir des équations microscopiques décrivant l'écoulement du liquide. Pour obtenir un modèle d'équations macroscopiques, on utilise à cet effet la méthode de changement d'échelle en partant des équations locales (microscopiques) de l'écoulement, à savoir les équations de Navier-Stokes (Whitaker, 1986; Lasseux *et al.*, 2008; Lasseux et Valdés-Parada, 2022). Dans un modèle local, qui comprend tous les détails physiques à l'échelle microscopique, la recherche de la solution globale peut s'avérer très complexe lorsqu'il s'agit de trouver la solution macroscopique à cause des différentes interfaces qui peuvent exister dans certaines configurations de l'imbibition d'un liquide. Le changement d'échelle permet ainsi d'obtenir des grandeurs effectives en utilisant différentes techniques telles que la méthode d'homogénéisation ou encore la méthode de prise de moyenne volumique. Cette partie va présenter un état de l'art non exhaustif des travaux qui ont étudié le phénomène d'imbibition par diverses approches.

1.2.1 Modèle d'imbibition à l'échelle locale

L'étude de l'imbibition d'un liquide dans une fracture peut être abordée en considérant cette dernière comme un canal étroit ou un capillaire tel qu'on a vu précédemment.

Le problème de l'imbibition d'un liquide a été étudié pour la première fois par [Bell et Cameron \(1906\)](#), puis successivement par [Lucas \(1918\)](#) et [Washburn \(1921\)](#), et le résultat principal donne la vitesse du front du front d'imbibition d'un liquide dans un capillaire de section circulaire sous la forme

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\Delta p (r^2 + 4\epsilon r)}{8\mu z(t)}, \quad (1.4)$$

et donc montre que le déplacement du front d'imbibition est proportionnel à la racine carré du temps ($z(t) \sim t^{1/2}$).

Dans cette équation, $z(t)$ représente la distance parcourue par un liquide de viscosité dynamique μ s'écoulant sous une différence de pression Δp , ϵ est un coefficient de glissement et r est le rayon du capillaire.

En raison de la simplicité de l'équation (1.4), cette dernière a été largement utilisée au-delà de son régime de validité pour modéliser des processus d'infiltration en milieux fracturés ou milieux poreux en ajustant certains paramètres. Dans la littérature, différents travaux tant numériques qu'expérimentaux ont étendu le modèle (1.4) pour l'adapter à des situations beaucoup plus complexes : on cite par exemple l'étude de l'imbibition d'un liquide dans des capillaires de sections arbitraires ([Weislogel, 2012](#); [Cai et al., 2022](#)) ou encore l'imbibition d'un liquide dans une fracture rugueuse ([Sun et al., 2021](#)).

Dans le cas où l'imbibition d'un liquide s'effectue dans un capillaire à section arbitraire, [Cai et al. \(2022\)](#) ont fait une revue des travaux qui ont attiré plus d'attention sur de l'imbibition dans des capillaires à géométries plus complexes, avec pour visée de décrire succinctement les principes fondamentaux des mécanismes de transport de fluide dans des milieux avec des topologies complexes, pour permettre ainsi d'aborder avec aisance la dynamique d'imbibition dans des travaux futurs.

Lorsque l'imbibition d'un liquide s'effectue par exemple dans un capillaire divergent de rayon $h(z) = h_0 + \alpha z^n$ tel que schématisé sur la figure 1.7, l'extension de l'équa-

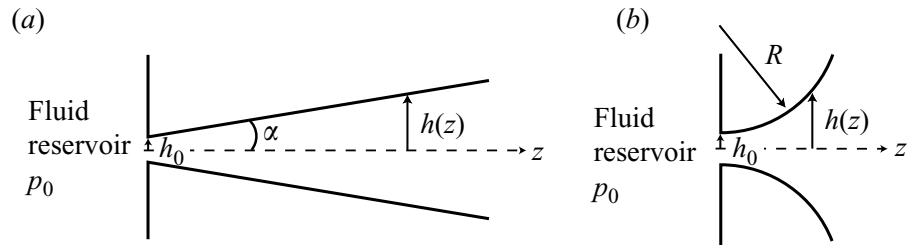


FIGURE 1.7 – Illustration d'un capillaire divergent à section arbitraire de forme (a) conique (b) parabolique (Reyssat *et al.*, 2008).

tion (1.4) après intégration est plutôt de la forme asymptotique donnée par l'expression suivante,

$$L^{2n+1} \sim \frac{2(2n+1)n^3 \sin(\frac{\pi}{n})}{3\pi(2n-1)(n-1)} T \quad (2D)$$

$$L^{3n+1} \sim \frac{3(3n+1)n^4 \sin(\frac{\pi}{n})}{4\pi(3n-1)(2n-1)(n-1)} T \quad (3D), \quad (1.5)$$

avec L la position adimensionnelle du ménisque variant avec le temps adimensionnel T , qui est une loi proposée dans les travaux de [Reyssat *et al.* \(2008\)](#) et n'est valable

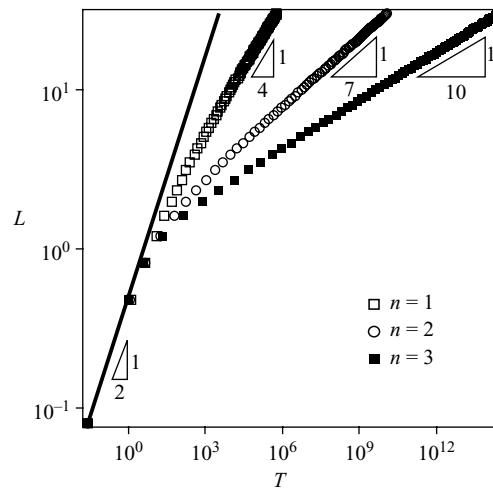


FIGURE 1.8 – Représentation en échelle logarithmique de la position adimensionnelle du front du ménisque, L , en fonction du temps adimensionnel, T , pour trois valeurs de n dans une géométrie axisymétrique tridimensionnelle. La loi classique $L \sim T^{1/2}$ est représentée par la ligne continue. Plus la géométrie diverge, plus la dynamique est lente sur des temps longs ([Reyssat *et al.*, 2008](#)).

qu'aux temps longs alors qu'aux temps courts on attend un comportement classique en $T^{1/2}$ comme prédit par Lucas (1918) et Washburn (1921). La figure 1.8 illustre les deux comportements.

Dans les travaux de Budaraju *et al.* (2016), une analyse similaire à celle effectuée par Reyssat *et al.* (2008) a été réalisée en prenant cette fois-ci en compte le rapport des viscosités dynamiques des deux fluides. Le modèle suivant,

$$z^{*3} + 3z^{*2} + \frac{3\mu_2}{\mu_1}z^* = 2t^* \quad (2D)$$

$$2z^{*4} + 8z^{*3} + 12z^{*2} + \frac{8\mu_2}{\mu_1}z^* = 3t^* \quad (3D), \quad (1.6)$$

proposé par Budaraju *et al.* (2016) a été également comparé avec une étude numérique utilisant la méthode de Lattice Boltzmann. Les résultats de ce modèle sont illus-

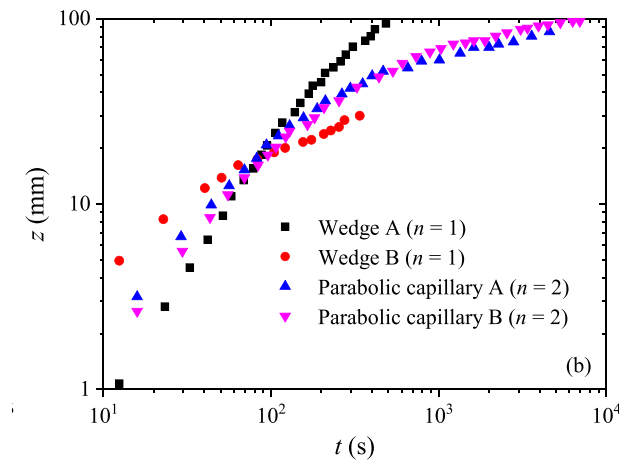


FIGURE 1.9 – Cinétique de la montée capillaire dans un canal divergent linéaire 2D, $n = 1$, et un canal divergent parabolique, $n = 2$ (Cai *et al.*, 2022).

trés sur la figure 1.9 où le liquide qui imbibe dans le canal a la même viscosité dynamique que le liquide qui sature le canal et montrent que la dynamique du ménisque est fortement perturbée lorsque h_0 varie brusquement plutôt que α (dans le cas linéaire, c'est-à-dire $n = 1$, les canaux A et B ont pour caractéristiques $\alpha = 4^\circ$, $h_0 = 9.6 \mu\text{m}$ et $\alpha = 8^\circ$, $h_0 = 1.5 \mu\text{m}$ respectivement ; dans le cas non linéaire, $n = 2$, les canaux A et B ont chacun $h_0 = 1.5 \mu\text{m}$ avec $\alpha = 157^\circ$ et $\alpha = 227^\circ$ respectivement).

Le cas d'un liquide qui imbibe dans un capillaire convergent de rayon $r = a(z)$ tel que représenté sur la figure 1.10 a été étudié dans les travaux de Gorce *et al.* (2016). Les résultats de la figure 1.11 ont montré que, pour $a(z) = a_0 A(Z)$ avec $Z = z/L$ où

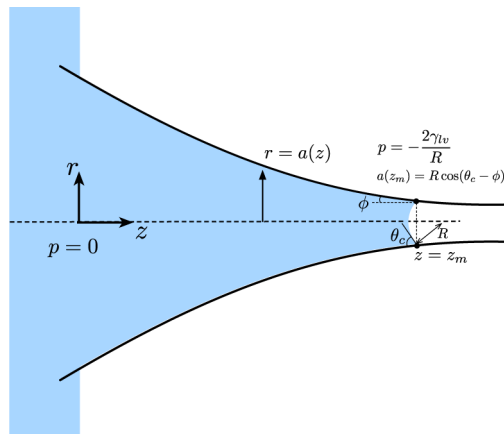


FIGURE 1.10 – Illustration d'un capillaire convergent (Gorce *et al.*, 2016).

L est la longueur du canal, à des temps courts l'invasion du ménisque, notée z_m suit la loi $t^{1/2}$ quelle que soit l'expression de la fonction $A(Z)$. Gorce *et al.* (2016) montrent

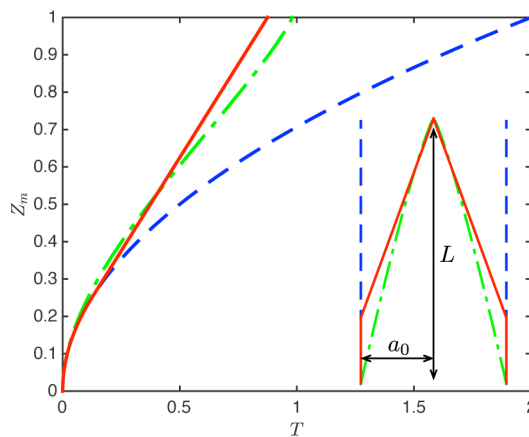


FIGURE 1.11 – Position du ménisque adimensionnelle, Z_m , en fonction du temps adimensionnel, T , dans un canal convergent (Gorce *et al.*, 2016).

que le ménisque se déplace beaucoup plus rapidement dans un canal convergent que dans le cas d'un capillaire ayant un rayon constant (les courbes rouge et verte correspondent au cas d'un convergent avec deux fonctions $A(Z)$ différentes, la courbe bleue

correspond au cas d'un canal de rayon constant), ce qui se justifie par une augmentation de la pression capillaire lorsque le rayon $a(z)$ diminue.

Les résultats de Czachor (2006) comparant la montée capillaire d'un liquide qui imbibe dans un canal cylindrique vertical et celui où l'imbibition s'effectue dans un canal sinusoïdal vertical sont représentés sur la figure 1.12. Le modèle d'imbibition d'un liquide dans un canal sinusoïdal vertical est élaboré en partant de la loi de POISEUILLE et en prenant en compte les forces de gravité. Les résultats obtenus ont montré que

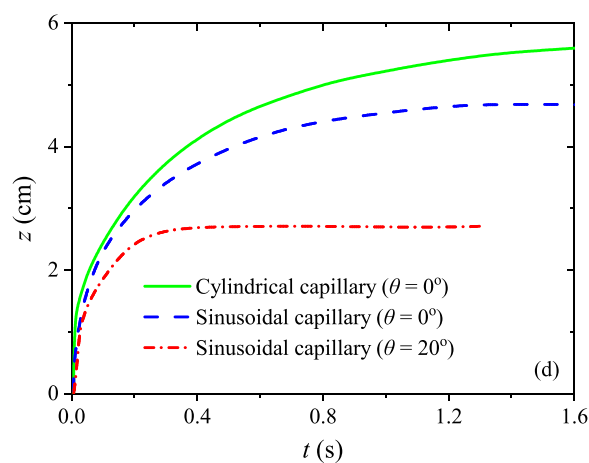


FIGURE 1.12 – Remontée capillaire dans un canal sinusoïdal (Cai et al., 2022).

la géométrie du capillaire et la mouillabilité influencent l'imbibition du liquide dans un canal. L'écoulement du liquide dans un canal cylindrique est beaucoup plus rapide que celui dans un canal sinusoïdal et ces résultats montrent également que pour un liquide complètement mouillant ($\theta = 0^\circ$), le liquide se déplace beaucoup plus vite que celui d'un liquide partiellement mouillant ($\theta = 20^\circ$).

Salama (2022) a également étudié le problème d'imbibition et du drainage d'un fluide dans des capillaires de sections transversales arbitraires axisymétriques, notamment un capillaire sinusoïdal, initialement remplis d'un autre fluide immiscible comme schématisé sur la figure 1.13. Le modèle développé prédit la position du ménisque, notée $h(t)$ dans ses travaux, et sa vitesse le long de la longueur du tube avec le temps. Les termes moteurs qui déclenchent l'écoulement sont la force capillaire, la force de

pression, la force gravitationnelle et une force visqueuse. L'équation (1.7) est développée

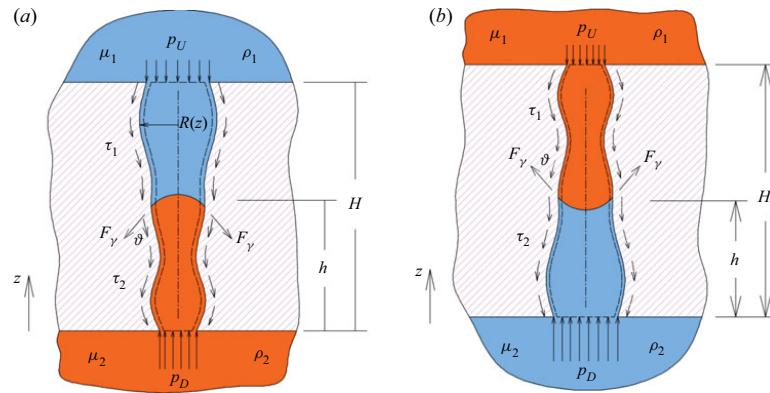


FIGURE 1.13 – Schéma du volume de contrôle (ligne en pointillés) sur lequel l'équilibre des forces est effectué : (a) Drainage et (b) imbibition.

pour décrire l'invasion du ménisque dans le canal en fonction du temps selon que l'écoulement est dans un cas d'imbibition ou de drainage (la pression capillaire est un terme moteur ou un frein à l'écoulement selon le cas).

$$(p_D r_p^2(0) - p_U r_p^2(H)) - 8\mu_1 r_p^2(h) \left(a + b \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \frac{dh}{dt} \pm \rho_1 g \left(c + e \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \pm 2r_p(h) \sigma \cos(\theta - \alpha) = 0 \quad (1.7)$$

Dans cette dernière équation, h est la position du ménisque, p_D et p_U représentent respectivement les pressions externes à l'entrée et à la sortie du tube, α est l'angle de la tangente au profil du tube, g correspond à la pesanteur, a, b, c et e sont des coefficients intégraux.

SALAMA a observé sur la figure 1.14, un comportement ondulatoire de la position du ménisque dans un canal sinusoïdal de section circulaire qui est dû au profil sinusoïdal du tube. Ces résultats ont montré que lorsqu'il y a ondulation dans le tube, les positions du ménisque sont comprises entre les positions au rayon minimal $r_{p_{min}}$ et au rayon maximal $r_{p_{max}}$.

Pour conclure sur les modèles d'imbibition dans des capillaires à sections arbitraires dans leurs travaux, Cai et al. (2022) ont ainsi proposé des modèles basés sur la condition de mouillage et la géométrie du capillaire pour décrire le processus d'im-

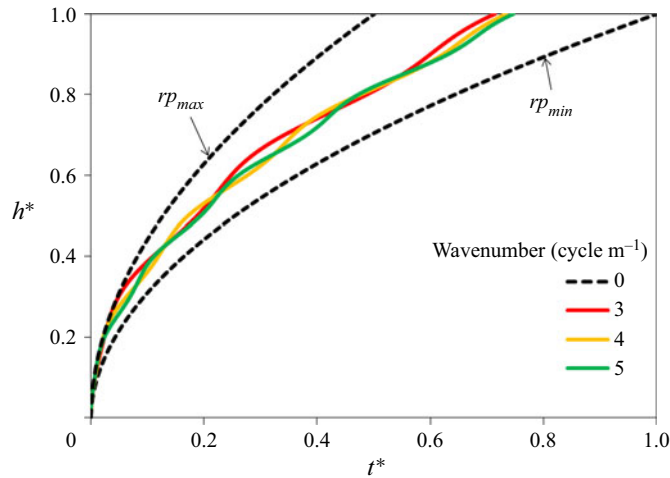


FIGURE 1.14 – Position adimensionnelle du ménisque h^* en fonction du temps adimensionnel t^* pour différentes nombres d'ondes.

bibition pour diverses topologies. Lorsque les effets inertiels sont pris en compte, le déplacement du ménisque est donné par

$$z(t) = t \sqrt{\frac{2\sigma \cos(\theta_d)}{\rho E r_e}}, \quad (1.8)$$

et pour un écoulement visqueux et inertiel par

$$z(t) = \sqrt{\frac{E r_e \sigma \cos(\theta_d)}{2\mu} \left(t - \frac{(E r_e)^2 \rho}{8\mu} \left(1 - \exp\left(-\frac{8\mu}{(E r_e)^2 \rho} t\right) \right) \right)}, \quad (1.9)$$

qui se réduit à l'équation (1.10) pour un écoulement purement visqueux,

$$z(t) = \sqrt{\frac{\sigma E r_e \cos(\theta_d)}{2\mu}} t. \quad (1.10)$$

Dans les expressions (1.8)-(1.10), la grandeur E représente un facteur de dimension valant respectivement 1.186 et 1.13 pour des capillaires de section transversale triangulaire et carrée ; $\cos(\theta_d)$ est l'angle de contact dynamique et r_e est le rayon équivalent. CAI ET AL. ont ensuite suggéré que les recherches futures se concentrent sur l'analyse de la dynamique d'imbibition en incluant l'écoulement en coin, le piégeage du gaz, la montée capillaire des fluides non newtoniens ou encore à l'application de méthodes

de simulation physique précises sur les processus d'imbibition.

Les écoulements en coin sont des écoulements particuliers qui peuvent se développer dans certaines configurations des capillaires tels que les capillaires à sections carrées ou triangulaires. Des travaux se sont intéressés ces dernières années à l'étude d'écoulement dans les coins dans des canaux de section carrée (Dong et Chatzis, 1995), section triangulaire (Weislogel et Lichter, 1998; Amyot, 2004; Higuera *et al.*, 2008) ou encore l'imbibition dans des canaux avec des coins à section quadratique (Ponomarenko *et al.*, 2011; Zhou et Doi, 2020).

Dong et Chatzis (1995) sont parmi les premiers à présenter une étude d'imbibition d'un liquide dans le coin d'un canal de section carrée, sans invasion du liquide dans tout le canal, telle que schématisé sur la figure 1.15. Le modèle développé est basé

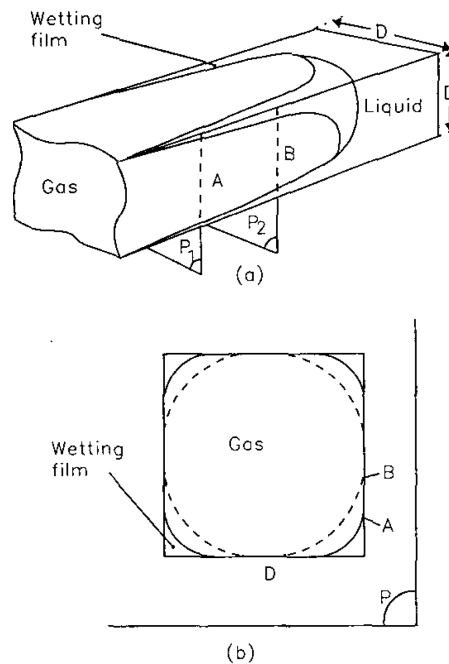


FIGURE 1.15 – Imbibition d'un liquide dans un coin d'un canal de section carrée (Dong et Chatzis, 1995).

sur la conservation de volume écrite sous la forme (1.11) telle que proposée dans les travaux de Lenormand *et al.* (1988).

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (1.11)$$

Dans l'équation (1.11), $q = q(x, t)$ représente le débit volumique qui est calculé en faisant le produit de la section occupée par le liquide dans le coin, notée $S = S(x, t)$, et la vitesse moyenne incluant le facteur de résistance proposée par [Ransohoff et Radke \(1988\)](#).

Le modèle a été obtenu en résolvant l'équation (1.11) par utilisation d'une solution de similarité proposée par [Mayer et al. \(1983\)](#), en considérant que l'imbibition s'effectue sous une condition de pression imposée en entrée du canal et conduisant à l'expression (1.12) donnant la position du point triple, notée $x_f(t)$, (à savoir le point le plus avancée du liquide dans le coin du canal de section carrée) en fonction du temps.

$$x_f(t) = \sqrt{2K \frac{\sigma}{\mu\beta} Rt} \quad (1.12)$$

Dans cette relation, K est un paramètre déterminé par une méthode variationnelle, σ est la tension de surface, μ est la viscosité dynamique du liquide, β est le facteur de résistance et R est le rayon de courbure du ménisque dans le coin.

Les résultats présentés sur la figure 1.16 comparant l'approche théorique, à savoir le

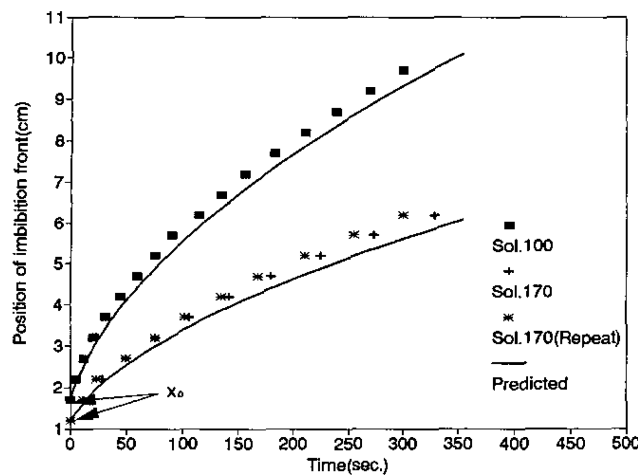


FIGURE 1.16 – Position du point triple en fonction du temps dans un coin d'un canal horizontal de section carrée ([Dong et Chatzis, 1995](#)).

modèle (1.12), et les mesures expérimentales ont confirmé que l'évolution temporelle du point triple suit une loi en $t^{1/2}$.

En partant des équations de NAVIER-STOKES et de la conservation de la masse sous la forme donnée à l'équation (1.11), Weislogel et Lichter (1998) ont généralisé l'étude de l'imbibition d'un liquide dans un coin en considérant que l'angle d'ouverture de ce dernier vaut 2α (avec $2\alpha = 90^\circ$ sur le coin d'un canal de section carrée de la figure 1.15). En considérant que l'imbibition se produit soit sous une condition de pression constante imposée soit sous une condition de débit constant imposé, l'analyse a confirmé de nouveau la loi en $t^{1/2}$ lorsque l'écoulement est à pression constante imposée alors que pour un débit constant imposé, la position du point triple adimensionnelle, notée $\mathcal{L}^*(t^*)$, suit plutôt une loi de la forme

$$\mathcal{L}^*(t^*) = 1.634 \left(\frac{\dot{Q}G^2}{F_A} \right)^{1/5} t^{*3/5}, \quad (1.13)$$

où \dot{Q} est le débit constant adimensionnel, G est un nombre adimensionnel qui dépend notamment de la tension de surface et de la viscosité dynamique et F_A est une grandeur adimensionnelle fonction des paramètres du canal.

Dans ses travaux de thèse, Amyot (2004) a fait des expériences d'imbibition dans des canaux à section transversale triangulaire pour des applications d'étanchéité métallique. Ces types de canaux peuvent être assimilés aux chemins de fuite de forme spirale présents à l'interface brides-joint. L'expression (1.14) donnant la position du point triple en fonction du temps, notée $L(t)$, a été développée dans le cas d'une imbibition à débit volumique Q_0 constant, en partant des équations de REYNOLDS, c'est-à-dire en simplifiant les équations de NAVIER-STOKES par la théorie de la lubrification.

$$L(t) = \left(\frac{5\epsilon}{12} Q_0 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \right)^{1/5} t^{3/5} \quad (1.14)$$

Dans l'équation (1.14), $\epsilon \ll 1$ correspond au rapport entre l'ouverture maximale du canal et sa demi largeur, μ est la viscosité dynamique et σ est la tension de surface. Les résultats de mesures expérimentales représentés sur la figure 1.17 ont donné une pente de 0.33 alors que de l'expression (1.14), on prédit une pente de 0.44, qui est elle-

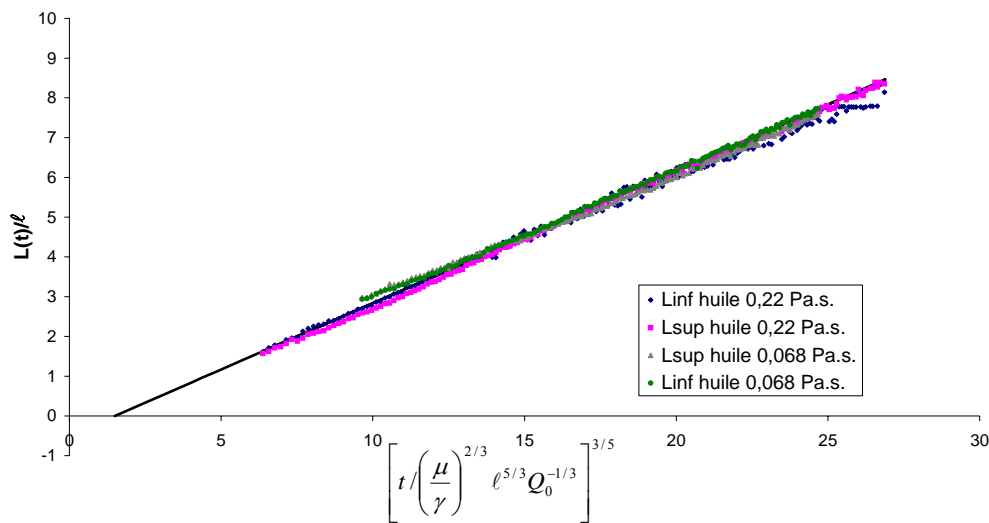


FIGURE 1.17 – Position du point triple, $L(t)$ adimensionnée par la demie largeur du canal, ℓ , en fonction du temps adimensionnel (Amyot, 2004).

même plus grande que la pente prédite par le modèle de Weislogel et Lichter (1998) qui vaut 0.36.

La théorie de la lubrification a été également utilisée par Higuera *et al.* (2008) pour analyser l'évolution temporelle du point triple en présence des forces de capillarité et de gravité, dans un coin d'un canal de section triangulaire. Les résultats numériques et expérimentaux ont montré qu'en début de l'imbibition du liquide, l'influence de la force de gravité est négligeable dans le coin et que le point triple a une évolution proportionnelle au temps. Ce phénomène change à des temps plus grands où l'évolution temporelle du point triple suit une loi en $t^{1/3}$.

Les travaux de Zhou et Doi (2020) se sont intéressés à l'imbibition d'un liquide dans un coin formé de deux parois incurvées, $y = cx^n$, comme représenté sur la figure 1.18. La méthodologie est également basée sur la conservation du volume (1.11) en utilisant un principe variationnel proposé par Onsager (1931a,b) et l'équation de STOKES, pour établir l'équation régissant l'évolution temporelle de la largeur du liquide, notée $G(z, t)$ sur la figure 1.18, dans le coin. Une solution asymptotique de la position du point triple

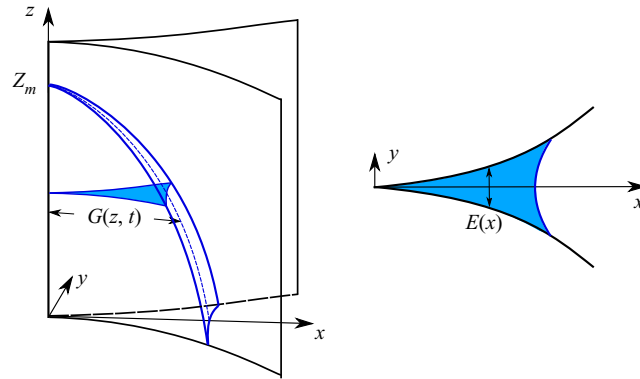


FIGURE 1.18 – Imbibition d'un liquide dans un coin formé deux parois incurvées ; Z_m est la position du point triple (Zhou et Doi, 2020).

suit la loi suivante

$$\frac{Z_m(t)}{a_c} = C \cos^{2/3}(\theta) \left(\frac{\sigma t}{\mu a_c} \right)^{1/3}, \quad \text{avec} \quad a_c = \sqrt{\sigma/\rho g}, \quad (1.15)$$

où θ représente l'angle de contact, σ est la tension de surface, μ est la viscosité dynamique, g est la pesanteur. De plus, $C = \chi_0(n^2/3)^{1/3}$ avec χ_0 qui est calculé numériquement et dépend de la valeur de la constante n considéré pour la forme du coin.

Les résultats du modèle (1.15) pour différentes formes du coin d'un canal, représentés sur la figure 1.19, ont rejoint l'observation expérimentale faite par Ponomarenko *et al.* (2011) sur des expériences d'imbibition dans des coins de différentes formes où il a été observé que la position du point triple suit une loi unique de la forme $\frac{Z_m(t)}{a_c} = C \left(\frac{\sigma t}{\mu a_c} \right)^{1/3}$, avec C un facteur numérique qui est quasiment indépendante de la forme du coin, c'est-à-dire de la puissance n . L'approche numérique de Zhou et Doi (2020) a montré que la constante C est de l'ordre de 1.2 pour des valeurs de n allant de 1 à 5, confirmant la conclusion selon laquelle le point triple suit une *loi universelle* telle qu'annoncé par Ponomarenko *et al.* (2011).

Très récemment Wu *et al.* (2024) ont montré que la loi donnée par l'expression (1.15) n'est pas tout à fait universelle au sens décrit par Zhou et Doi (2020) pour confirmer l'universalité de la loi observée expérimentalement dans les travaux de Po-

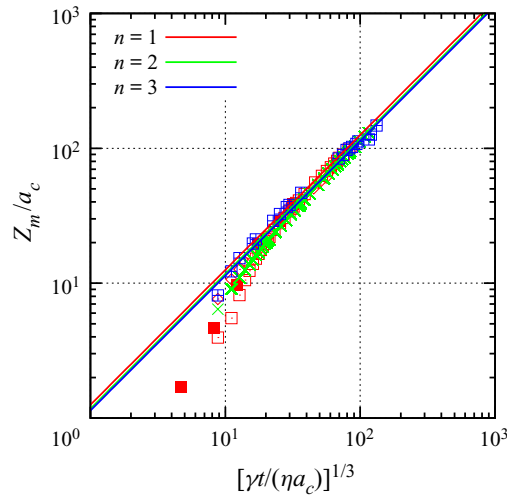


FIGURE 1.19 – Position du point triple adimensionnée, $\frac{Z_m(t)}{a_c}$, en fonction du temps adimensionnel, $\frac{\sigma t}{\mu a_c}$. Les différents points sont des mesures expérimentales issues des travaux de [Higuera *et al.* \(2008\)](#) et [Ponomarenko *et al.* \(2011\)](#) utilisées pour valider le modèle ([Zhou et Doi, 2020](#)).

[Ponomarenko *et al.* \(2011\)](#). En effet, en utilisant également la théorie de la lubrification [Wu *et al.* \(2024\)](#) retrouve la loi (1.15), qui indique que la position du point triple ne dépend pas de la constante c présente dans l'ouverture du coin décrit par $y = cx^n$. Les résultats numériques ont montré que le facteur numérique C présent dans l'expression (1.15) décroît de manière monotone et que sa valeur est comprise approximativement entre 1.6718 et 1.4350 pour $1 \leq n < \infty$. [Wu *et al.* \(2024\)](#) explique alors que pour une imbibition se produisant dans des coins avec la même puissance n mais de constante c différente, le liquide va s'écouler de la même manière puisque le facteur numérique C dans la loi (1.15) ne dépend que de la puissance n et non de la constante c . La loi donnée par l'expression (1.15) est donc universelle pour des coins ayant une même puissance n selon l'analyse de [Wu *et al.* \(2024\)](#).

Les travaux de [Weislogel \(2012\)](#) se sont intéressés au cas où un liquide s'écoule dans tout le canal avec un écoulement en film liquide qui se développe dans les coins du canal, sous l'effet de force de capillarité, comme représenté sur la figure 1.20. Le modèle développé se base sur les équations de STOKES et la conservation de volume

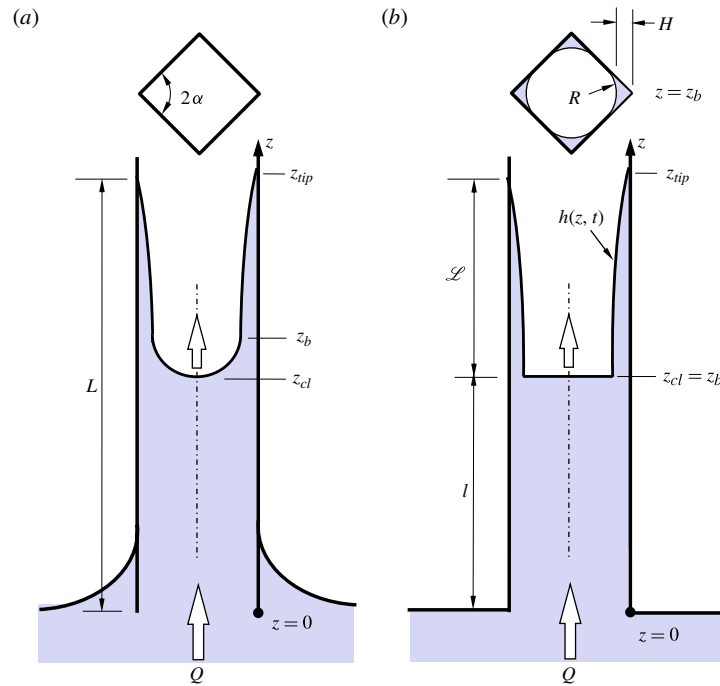


FIGURE 1.20 – Imbibition d'un liquide dans un canal de section carrée avec des écoulements en coin (Weislogel, 2012).

écrite sous la forme suivante

$$\int_0^t Q \, dt = A_b l + m \int_l^{l+\mathcal{L}} A_c \, dz, \quad (1.16)$$

où Q est le débit volume total dans le canal, $l = l(t)$ est la position la plus basse du ménisque et $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t)$ est la taille du film liquide dans les coins selon l'axe z , A_b et A_c sont respectivement les sections occupées par le liquide dans tout le canal et dans les coins du canal; le paramètre m représente le nombre des coins mouillés (voir figure 1.20). L'objectif est de déterminer $l(t)$ et $\mathcal{L}(t)$.

Par des solutions de similarité, Weislogel (2012) a montré que la position du point le plus bas du ménisque suit une loi de la forme

$$l(t) = \sqrt{2}(1 - 0.0134\phi + 0.0904\phi^2 - 0.2003\phi^3) \left(\frac{2\mathcal{H}\sigma F_i}{\mu\Delta_s} \right)_b^{1/2} t^{1/2}, \quad (1.17)$$

alors que la taille du film liquide dans les angles vifs du canal suit une loi de la forme

suivante

$$\mathcal{L}(t) = \sqrt{2}\phi^2(1 - 0.2733\phi) \left(\frac{2\mathcal{H}\sigma F_i}{\mu\Delta_s} \right)_b^{1/2} t^{1/2}. \quad (1.18)$$

Dans les expressions (1.17) et (1.18), $2\mathcal{H}$ est la double courbure moyenne, F_i est une constante numérique, Δ_s est la mise à l'échelle de l'opérateur Laplacien et ϕ représente le ratio des résistances visqueuses dans les coins par rapport à celles dans l'écoulement situé en bas de la position $l(t)$, la notation $(\dots)_b$ indique que le terme est calculé dans la région située entre $0 \leq z \leq l(t)$.

Ce modèle a montré que lorsque $\phi = 0$, c'est-à-dire en l'absence d'écoulement dans les coins du canal, la position du point le plus bas du ménisque donnée par l'expression (1.17) se comporte comme la loi classique de Lucas (1918) et Washburn (1921) mais pour des valeurs de $\phi > 0$, l'écoulement en film liquide qui se développe dans les coins perturbe (ralentit) celui derrière la position $l(t)$.

La présence des écoulements en film dans les coins d'un canal peut conduire à des situations d'écoulements plus complexe telles que le piégeage de gaz dans l'écoulement du liquide, lorsqu'il y a par exemple de la rugosité non négligeable dans les canaux ou des zones de constriction (Rossen, 2000; Sun *et al.*, 2021).

Dans ce contexte, Sun *et al.* (2021) ont étudié expérimentalement l'influence de la rugosité de surface sur l'imbibition d'un liquide dans un canal rugueux. Les expériences ont montré que la rugosité de surface et les écoulements de film liquide dans les coins influencent sensiblement l'avancée du ménisque et favorisent le piégeage d'air dans l'écoulement du liquide.

La figure 1.21 montre l'effet des dimensions d'un canal sur la dynamique d'imbibition d'un liquide. Pour un canal sans rugosité de surface, la saturation d'air piégé reste négligeable (quasiment nulle) alors que dans le cas d'un canal rugueux, les résultats de Sun *et al.* (2021) montre que le niveau de saturation de piégeage d'air augmente lorsque la largeur du canal diminue.

Zhao *et al.* (2022) ont développé une méthode de simulation numérique de la dynamique d'imbibition prenant en compte l'écoulement en coin, basée sur le réseau de

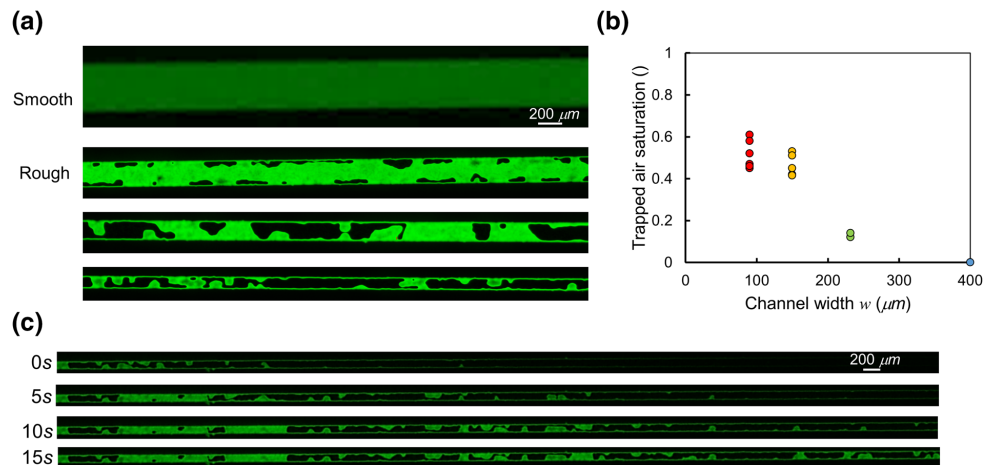


FIGURE 1.21 – (a) Comparaison du processus d’imbibition dans un canal non rugueux et un canal rugueux de profondeur moyenne de $6.5 \mu\text{m}$ et de rugosité arithmétique $0.89 \mu\text{m}$ mais de différentes largeurs (b) Variation de la saturation d’air piégé avec la largeur du canal rugueux (c) imbibition du liquide dans le canal rugueux à différents instants (Sun *et al.*, 2021).

pores. Les résultats numériques obtenus ont été validés par comparaison avec les résultats expérimentaux de Tsao *et al.* (2021). Les auteurs ont également observé que l’écoulement en film du liquide dans les coins se développe beaucoup plus rapidement avant l’apparition du ménisque principal, conduisant ainsi à un piégeage de gaz lorsque les films se croisent dans les zones plus rétrécies comme il a été observé expérimentalement par Sun *et al.* (2021) dans leurs travaux.

1.2.2 Modèle d’imbibition à l’échelle macroscopique

Certains travaux se sont intéressés à étudier l’imbibition d’un liquide dans un canal (fracture) lisse ou rugueux en utilisant des équations macroscopiques. Le concept consiste à modéliser une fracture comme un milieu poreux bidimensionnel, tel que suggéré par Pruess et Tsang (1990), conduisant à l’application de la loi de Darcy (1856) dans chaque phase fluide. Les travaux de Diomampo (2001) ont par exemple étudié expérimentalement les processus d’imbibition et de drainage dans des fractures lisses et rugueuses, constituées par l’assemblage des plaques en verre et en aluminium en utilisant les expressions (1.19) et (1.20) donnant la loi de Darcy (1856) dans

chaque phase fluide.

$$v_l = \frac{k_{abs}k_{rl}}{\mu_l L}(p_e - p_s) \quad (1.19)$$

$$v_g = \frac{k_{abs}k_{rg}}{\mu_g L} \frac{(p_e^2 - p_s^2)}{2p_s} \quad (1.20)$$

Dans ces expressions, v_l et v_g représentent respectivement les vitesses de filtration dans la phase liquide et dans la phase gazeuse, μ_l et μ_g sont les viscosités dynamiques, k_{abs} correspond à la perméabilité absolue de la fracture, k_{rl} et k_{rg} sont respectivement les perméabilités relatives de la phase liquide et de la phase gazeuse, p_e et p_s sont respectivement les pressions d'entrée et de sortie du liquide dans la fracture, et L correspond à la longueur de la fracture.

Des nombreux travaux de la littérature se sont intéressés à l'étude des paramètres k_{rl} et k_{rg} . Il existe par ailleurs trois modèles fondamentaux pour décrire ces paramètres à savoir le modèle linéaire dit X-modèle, le modèle de couplage visqueux et le modèle de COREY.

Le modèle linéaire donné par l'équation (1.21) a été proposé par Romm (1972) et consiste à considérer que les perméabilités relatives des phases fluides sont égales à leurs saturations (S_α , $\alpha = l, g$), ce qui revient à dire qu'il y a absence d'interférence entre les phases fluides durant l'écoulement.

$$k_{r\alpha} = S_\alpha, \quad \alpha = l, g \quad (1.21a)$$

$$k_{rl} + k_{rg} = 1. \quad (1.21b)$$

Physiquement, l'équation (1.21b) signifie que chaque phase fluide s'écoule suivant son propre chemin sans entraver l'écoulement de l'autre phase fluide ; ce qui n'est pas réellement le cas.

Le modèle de COREY, donné par l'équation (1.23), est un modèle non linéaire qui permet la prise en compte de l'interférence entre phases fluides due à la capillarité qui

règne entre les différentes interfaces (Corey, 1954; Diomampo, 2001). Le modèle fait intervenir une saturation effective, notée S_e , qui est une fonction définie de la manière suivante

$$S_e = \left(\frac{c}{p_c} \right)^2, \quad (1.22)$$

avec p_c la pression capillaire et c une constante.

Corey (1954) a ainsi proposé d'exprimer les perméabilités relatives de la manière suivante

$$\begin{aligned} k_{rl} &= S_e^4, \quad \text{avec} \quad S_e = \frac{S_l - S_{rl}}{1 - S_{rl} - S_{rg}}, \\ k_{rg} &= (1 - S_e)^2(1 - S_e^2). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Dans ces relations, S_{rl} et S_{rg} correspondent respectivement aux saturations résiduelles du liquide et du gaz dans le canal.

Brooks et Corey (1964) ont trouvé que le modèle donné par l'équation (1.23), pour lequel la saturation effective S_e est proportionnelle au terme $1/p_c^2$, n'est limité qu'à certains cas. Ils ont ainsi généralisé le modèle (1.23) en réécrivant que la saturation effective est plutôt définie par l'expression suivante

$$S_e = \left(\frac{p_b}{p_c} \right)^\lambda, \quad (1.24)$$

où λ et p_b sont les grandeurs caractéristiques du milieu. La correction du modèle (1.23) est alors

$$\begin{aligned} k_{rl} &= S_e^{\frac{2+3\lambda}{\lambda}}, \\ k_{rg} &= (1 - S_e)^2(1 - S_e^{\frac{2+\lambda}{\lambda}}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le modèle de couplage visqueux (voir l'équation (1.26)) proposé par Fourar et Le-

normand (1998), a été inspiré de la théorie de Fourar et Bories (1995) qui consiste à assimiler l'écoulement dans une fracture comme celui dans un tube. En effet, dans les travaux de Fourar et Bories (1995), il a été observé une similarité entre la structure d'écoulement dans une fracture et celle dans un tube et, les structures d'écoulement ont montré une forte interférence entre les deux phases fluides en écoulement. La modélisation physique de ce problème s'est avérée complexe à cause de la géométrie de l'interface entre les fluides et la discontinuité dans l'écoulement de l'une des deux phases fluides. Partant de ces observations, FOURAR et LENORMAND ont modélisé une fracture par deux plaques parallèles séparées par une petite ouverture (Fourar et Lenormand, 1998). Le modèle de couplage visqueux considère que les fluides s'écoulent simultanément avec une interface plane et sa particularité est la dépendance de la perméabilité relative de la phase non mouillante, à savoir le gaz, avec le ratio de viscosités de deux phases fluides en écoulement (voir l'équation (1.26)).

$$\begin{aligned}
 k_{rl} &= \frac{S_l^2}{2}(3 - S_l) \\
 k_{rg} &= (1 - S_l)^3 + \frac{3\mu_g}{2\mu_l}(1 - S_l)(2 - S_l)
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

La particularité de ces trois modèles, très célèbre dans la littérature, est qu'ils ont été établis dans l'étude d'un mécanisme de drainage. Dans le cas d'un processus d'imbibition, des modèles ont été également proposés (Honarpour *et al.*, 1982; Li et Horne, 2001). Dans leurs travaux, Honarpour *et al.* (1982) ont proposé le modèle (1.27) permettant d'approcher les perméabilités relatives dans les cas de l'imbibition et du drainage (Honarpour *et al.*, 1982; Diomampo, 2001).

$$\begin{aligned}
 k_{rl} &= k_{rlo} \left(\frac{S_l - S_{rl}}{1 - S_{rl} - S_{gr}} \right)^{n_l} \\
 k_{rg} &= k_{rgo} \left(\frac{S_l - S_{rg}}{1 - S_{rl} - S_{rg}} \right)^{n_g}
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

où

$$\begin{aligned} k_{rlo} &= k_{rl}(S_{li}), \\ k_{rgo} &= k_{rg}(S_{li}), \end{aligned} \quad (1.28)$$

et

$$\begin{aligned} k_{rlo} &= k_{rl}(S_{rg}), \\ k_{rgo} &= k_{rg}(S_{li}). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Les expressions (1.28) et (1.29) correspondent respectivement au drainage et à l'imbibition. S_{li} est la saturation initiale de la phase mouillante.

Dans ses travaux, [Diomampo \(2001\)](#) a ainsi observé qu'en pratique la somme des perméabilités relatives telle que donnée à l'équation (1.21b) est inférieure à l'unité à cause de l'interférence entre phases fluides que l'écoulement du liquide soit en processus de drainage ou d'imbibition, comme on peut le voir sur la figure 1.22, pour le cas d'imbibition. Ce même constat a été rapporté également dans d'autres travaux comme ceux de ([Hatami et Walsh, 2022](#); [Liao et al., 2024](#)).

Les travaux de [Li et Horne \(2001\)](#) ont pour leur part adapté le modèle de [Brooks et Corey \(1964\)](#), en réécrivant la saturation effective donnée à l'expression (1.24) sous la forme suivante

$$S_e = 1 - \left(\frac{p_{max}}{p_c} \right)^\lambda, \quad (1.30)$$

avec p_{max} la pression capillaire à la saturation résiduelle de la phase non mouillante. En comparant différentes données issues des mesures expérimentales et des modèles théoriques de perméabilité relative, [Li et Horne \(2006\)](#) ont également montré qu'un choix judicieux d'un modèle théorique de perméabilité relative, pourrait permettre d'approximer efficacement les courbes de perméabilités relatives.

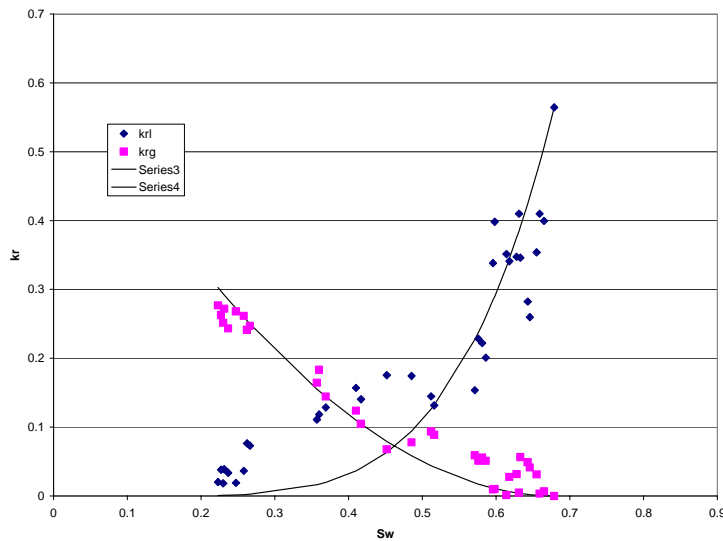


FIGURE 1.22 – Données de perméabilité relative en fonction de la saturation du liquide dans un canal lisse. Les points sont des mesures expérimentales et les courbes pleines sont une approximation en utilisant le modèle de perméabilité relative de [Honarpour *et al.* \(1982\)](#) en imbibition ([Diomampo, 2001](#)).

Récemment, ces modèles macroscopiques d'écoulement diphasiques ont été redéveloppés de manière plus détaillée, mettant en évidence que des termes complémentaires d'origine capillaire apparaissent dans les lois de Darcy généralisées classiquement utilisées ([Lasseux et Valdés-Parada, 2022](#); [Kelm *et al.*, 2024](#)) et que la pression capillaire macroscopique peut aussi être prédite ([Lasseux et Valdés-Parada, 2023](#)).

Si l'on introduisait une notion de transmissivité effective prenant en compte la transmissivité relative de chaque phase fluide, l'utilisation de l'approche continue pour modéliser les écoulements diphasiques en étanchéité pourrait se justifier en raison des faibles débits en écoulement et du caractère hétérogène des surfaces en contact, ce qui permettrait de bien prédire la fuite recherchée.

1.3 Conclusion

Dans cette analyse bibliographique, nous avons présenté dans la section 1.1 les travaux ayant un lien direct avec l'étanchéité statique, qui se sont consacrés à l'analyse d'une fuite liquide. La caractérisation de la fuite a été basée essentiellement sur

la maîtrise du tenseur de transmissivité K et en supposant que cette dernière ne dépend que du champ des ouvertures, dans les travaux ayant étudié le phénomène en considérant un écoulement monophasique. De ce fait, les écarts de résultats constatés expérimentalement et numériquement ont été attribués soit aux défauts de forme des surfaces en contact, soit aux propriétés des matériaux constituant le contact. Les travaux présentés dans la section 1.2 ont montré qu'en présence d'écoulements diphasiques à très faible nombre capillaire dans des canaux ayant des angles vifs, les écoulements en coin deviennent importants et peuvent conduire à des situations de piégeage d'air lorsqu'il y a par exemple une rugosité non négligeable dans les canaux ou encore des zones de constriction. Les travaux ayant étudié les écoulements diphasiques par une approche macroscopique ont également montré l'interférence entre les phases fluides en écoulement et la nécessité d'en tenir compte dans la modélisation. Pour des applications d'étanchéité, la compréhension des effets d'écoulement en film et par les coins, qui peuvent conduire à la non saturation dans le contact du fluide à étancher, permettrait une prédiction de la fuite plus détaillée qu'avec les modèles existants. Cette étude bibliographique a mis en évidence des facteurs qui impacteraient la fuite liquide et dont la prise en compte dans la modélisation reste incomplète à ce jour. Les chapitres qui suivent abordent quelques uns de ces aspects.

Chapitre 2

Caractérisation d'une fuite dans une fracture modèle

Sommaire

2.1	Expérience microfluidique	39
2.1.1	Présentation et objectifs des dispositifs microfluidiques	39
2.1.2	Caractérisation de la géométrie des microcanaux	41
2.1.3	Protocole d'essai	42
2.2	Analyse d'une fuite dans une puce microfluidique	47
2.2.1	Fuite gazeuse	47
2.2.2	Fuite liquide	52
2.3	Conclusion	58

Ce chapitre montre comment on peut mesurer une fuite liquide dans une fracture modèle ou idéalisée, représentative d'un chemin de fuite formé à l'interface bride-joint, et met en lumière des effets qui peuvent influencer la prédiction de cette fuite, à savoir la capillarité et la mouillabilité.

2.1 Expérience microfluidique

2.1.1 Présentation et objectifs des dispositifs microfluidiques

Lorsque l'on met en contact deux surfaces rugueuses l'une contre l'autre, à cause de leur état de surface présentant des défauts de fabrication, il apparaît alors de zones de contact (là où les surfaces se touchent) et des zones sans contact créant finalement un contact partiel. Les brides sont généralement issues d'un procédé par tournage,

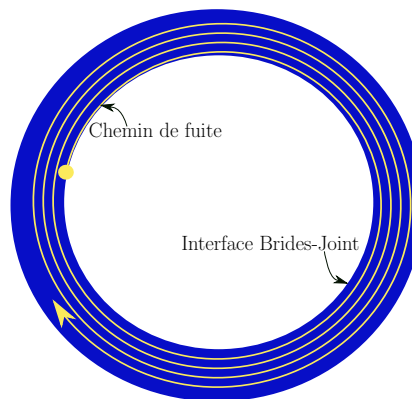


FIGURE 2.1 – Représentation de l'interface brides-joint.

produisant, à l'interface avec le joint, un motif de forme spiralée qui constitue un chemin de fuite préférentiel pour le fluide en écoulement, tel que représenté sur la figure 2.1.

L'interface brides-joint étant de dimensions (diamètres) de quelques centimètres avec un chemin de fuite pouvant être de l'ordre du nanomètre, il est donc préférable de mener l'étude des écoulements fluides dans une *géométrie contrôlée*. Dans ce cadre, [Zaouter \(2018\)](#) a fait des mesures de fuite gazeuse dans des *joints sur puces* qui sont des structures microfluidiques en silicium-verre, afin d'analyser les effets de raréfaction. Dans cette géométrie contrôlée dont le processus de fabrication est résumé sur la figure 2.2, les chemins de fuite sont assimilés soit à des canaux droits parallèles soit à un réseau des canaux droits.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, l'utilisation de ces types de dispositifs permet non seulement de mesurer des fuites liquides dans une géométrie contrôlée mais

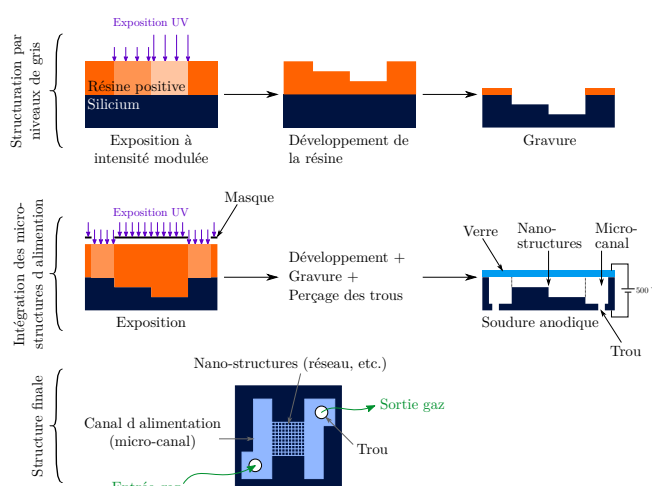


FIGURE 2.2 – Étapes de fabrication d'une puce microfluidique (Zaouter, 2018).

aussi de s'affranchir du caractère opaque des matériaux métalliques constituant l'assemblage et ainsi visualiser la structure de l'écoulement afin de prendre en compte les différents effets qui puissent influencer la fuite. Ainsi, des dispositifs microfluidiques

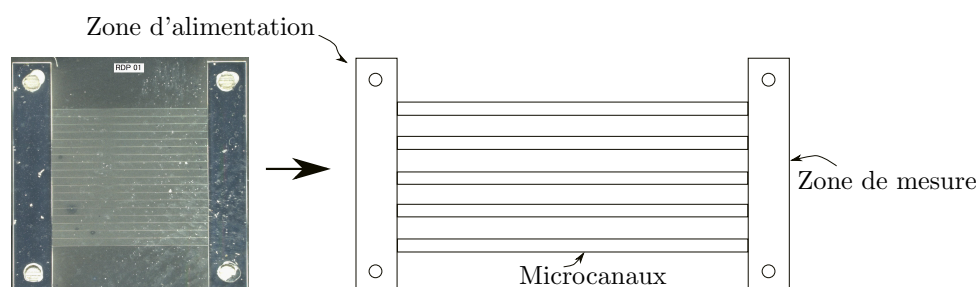


FIGURE 2.3 – Représentation de la puce microfluidique utilisée ayant 19 microcanaux de profondeur nominale $h = 2 \mu\text{m}$, largeur $\ell = 20 \mu\text{m}$ et de longueur $L = 8 \text{ mm}$.

(voir figure 2.3) ont été fabriqués et basés sur le même protocole de fabrication que celui présenté sur la figure 2.2, composés de canaux droits parallèles, de section transversale rectangulaire. Les microcanaux, de profondeur nominale $h = 2 \mu\text{m}$, de largeur nominale $\ell = 20 \mu\text{m}$ et de longueur nominale $L = 8 \text{ mm}$, sont gravés sur une couche d'aluminium qui recouvre la plaque en silicium et une plaque en verre vient ensuite fermer le dispositif permettant ainsi une visualisation de l'écoulement.

2.1.2 Caractérisation de la géométrie des microcanaux

Afin de caractériser la profondeur réelle des microcanaux, deux types de mesure ont été réalisés avec un profilomètre Altisurf© 520 (voir la figure 2.4) par l'équipe du laboratoire d'étanchéité Maestral.

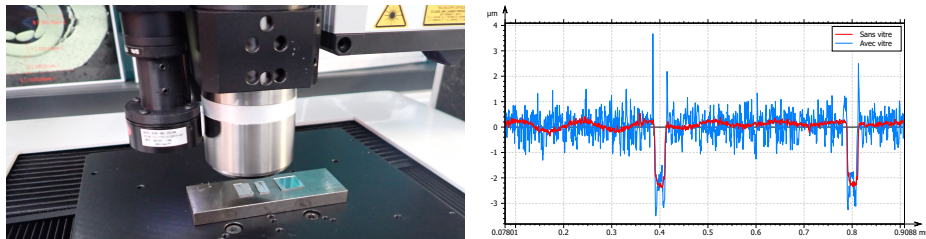


FIGURE 2.4 – Caractérisation de microcanaux sur un altimètre.

Un premier essai non-destructif, c'est-à-dire que la puce microfluidique reste intacte, est réalisé sur chaque microcanal en mesurant le profil de la profondeur dans sa largeur. Ces mesures montrent que la plaque de verre induit un bruit supplémentaire dans la mesure, conduisant à des valeurs moyennes de la profondeur et de la largeur données dans le tableau 2.1 où l'on voit que celles de la profondeur sont assez éloignées de la valeur nominale. Quant au deuxième essai, qui est destructif, les

TABLE 2.1 – Mesures obtenues des valeurs moyennes et écarts types de la profondeur et de la largeur des six microcanaux lors d'un essai non-destructif.

h [μm]	Valeur	3.016	2.936	2.865	2.859	2.819	2.806
	Écart type	0.0823	0.0598	0.0643	0.0456	0.04523	0.0530
ℓ [μm]	Valeur	20.31	20.57	19.98	19.93	20.14	20.33
	Écart type	0.0010	0.000798	0.000724	0.000692	0.00050	0.00062

différentes mesures réalisées sur neuf microcanaux ont donné des valeurs moyennes de la profondeur et de largeur de l'ordre de celles qui sont énumérées dans le tableau 2.2 pour six microcanaux et on voit que ces valeurs sont assez proche des valeurs nominales. Durant ce dernier essai, la puce microfluidique est scindée en deux parties et sur chaque partie, la plaque en verre est détachée et les mesures sont réalisées directement sur la couche d'aluminium sur laquelle est gravée les microcanaux. Ces

TABLE 2.2 – Mesures obtenues des valeurs moyennes et écarts types de la profondeur et de la largeur des six microcanaux lors d'un essai destructif.

h [μm]	Valeur	2.240	2.190	2.144	2.178	2.112	2.135
	Écart type	0.03516	0.0172	0.0236	0.0154	0.0135	0.0251
ℓ [μm]	Valeur	19.22	19.97	20.67	20.71	20.39	20.40
	Écart type	0.0004	0.0003	0.000393	0.000356	0.0004188	0.00046

mesures montrent également que la section transversale des microcanaux n'est pas tout à fait rectangulaire. Les valeurs moyennes et écarts types de la profondeur et de la largeur sur les neufs sont respectivement $2.169 \mu\text{m}$, $0.006087 \mu\text{m}$ et $20.3 \mu\text{m}$, $0.000107 \mu\text{m}$.

Puisque l'on souhaite trouver une corrélation entre une fuite gazeuse et une fuite liquide, cette même puce microfluidique, qui constitue l'élément central du banc d'essai conçu (voir figure 2.5), permet de faire des essais en condition monophasique gazeuse et en condition diphasique principalement de l'imbibition. Dans les paragraphes qui suivent, les protocoles d'essais permettant d'utiliser le montage de la figure 2.5 seront présentés. L'objectif est d'analyser la corrélation entre la fuite liquide et celle en gaz à travers la puce microfluidique.

2.1.3 Protocole d'essai

Dans cette partie on présente le protocole expérimental basé sur le banc d'essai de la figure 2.5, nécessaire à la mesure d'une fuite liquide en condition diphasique ou d'une fuite gazeuse.

A. Mesure d'une fuite gazeuse

Le protocole de réalisation d'essais en condition monophasique gazeuse est similaire à celui effectué lors de la qualification expérimentale des joints d'étanchéité : une pression est appliquée en amont du joint à tester tandis qu'un spectromètre de masse mesure en permanence la fuite en aval du joint. Le principe de fonctionnement d'un spectromètre de masse repose sur l'action d'un champ électromagnétique sur une particule chargée. L'analyse par spectrométrie de masse nécessite par conséquent la

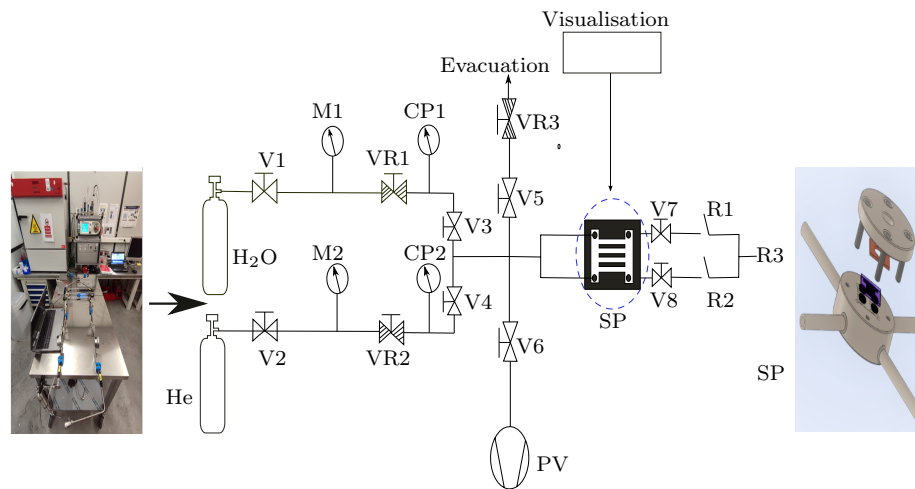


FIGURE 2.5 – Schéma du montage expérimental utilisé pour les essais sur les puces. La vue éclatée présente le support porte-puce dans lequel est placée la puce microfluidique.

formation initiale d'ions, à l'état gazeux, à partir d'un échantillon (Boucher et Sablier, 2005). Le gaz utilisé lors des essais est de l'hélium, qui est le seul mesurable par le spectromètre utilisé (Adixen ASM 142). Ce gaz est parfait, inerte et de petites taille et masse atomique. Le protocole d'essai monophasique gazeux se référant à la figure 2.5 est alors le suivant :

1. On place la puce dans le support porte-puce SP inférieur sur les quatre joints toriques en élastomère et on superpose un appui en acier inoxydable puis le support supérieur que l'on visse légèrement afin d'appliquer un effort de serrage permettant d'obtenir l'étanchéité nécessaire entre la puce et le support inférieur ;
2. On branche un tuyau d'évacuation en sortie de la vanne micro-débit VR3 pour éviter de polluer l'environnement de travail avec de l'hélium lors des essais ;
3. On raccorde les raccords R1 et R2, on vérifie que toutes les vannes sont fermées sauf les vannes V4, V5 et la vanne micro-débit VR2 puis on branche la bouteille d'hélium en entrée de la vanne V2 et le spectromètre de masse au raccord R3 ;
4. En vue d'évacuer de l'air dans le montage (ou de l'hélium résiduel lorsqu'il y a

déjà eu un autre essai), on branche une pompe à vide sur la vanne V6 qui va abaisser la pression dans le montage jusqu'à quelques pascals. On ouvre les vannes V7 et V8, le spectromètre est mis en fonctionnement et restera dans cet état tout au long de l'essai (pompage permanent et mesure de fuite au niveau de la sortie de la puce). On attend alors la stabilisation du signal de fuite qui correspond au bruit de fond du spectromètre (qui est de l'ordre de $10^{-8} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) avant de pressuriser le montage avec de l'hélium pour commencer à faire des mesures. Lorsque le bruit de fond du spectromètre n'est pas atteint, ceci implique soit une étanchéité insuffisante entre la puce et le support inférieur nécessitant d'appliquer un léger effort de serrage supplémentaire, soit la puce est cassée ;

5. On ferme la vanne micro-débit VR2 et on ouvre la vanne V2 puis on lit la pression du gaz au manomètre M2 ; on referme ensuite la vanne V2 et on rouvre progressivement VR2 pour transférer de l'hélium sous pression vers la puce. On répète cette opération autant de fois jusqu'à obtenir la pression de service souhaitée (entre 0 et 2.5 bar) ;
6. Pendant la réalisation de l'opération précédente, le spectromètre réalise les mesures et on fait l'acquisition de données de la pression grâce au capteur de pression CP2. Si l'on garde la vanne V2 fermée, la pression de service va décroître progressivement pendant la mesure de la fuite par le spectromètre ; si l'on souhaite faire les mesures à pression de service constante, il faut dans ce cas garder la vanne V2 ouverte ; le volume tampon emmagasiné dans la bouteille de gaz en entrée de V2 va ainsi permettre de maintenir la pression presque constante dans le montage ;
7. Lorsque l'on a atteint une fuite stabilisée après un certain temps (compris entre cinq et dix minutes), si la pression de service est inférieure à 2.5 bar, on la augmente pour atteindre la valeur supérieure. On effectue ainsi des mesures de fuite par palier ;

8. A la fin de l'étape précédente, on ferme les vannes V7, V8 pour arrêter les mesures et on ouvre les vannes V5 et VR3 pour évacuer de l'hélium et on les referme,
9. Pour s'assurer de la répétabilité des mesures, on reprend le protocole depuis l'étape 3.

B. Mesure d'une fuite liquide

Ce protocole consiste à mesurer les débits de fuite et d'observer l'écoulement à travers les chemins de fuite de la puce. Le système comprend une bouteille d'eau liquide mise en pression à partir d'une bouteille d'hélium et le liquide qui fuit à travers la puce est mesuré par l'hygromètre à miroir S 800 RS à partir d'un balayage d'air sec, qui évapore le liquide. Le protocole d'essai se présente comme suit.

1. On refait l'étape 1 du protocole gazeux ;
2. On vérifie que toutes les vannes sont fermées sauf la vanne micro-débit VR1 et les vannes V3 et V5 ; on branche la bouteille d'eau sur la vanne V1, l'arrivée d'air sec sur la vanne V7, l'entrée vers l'hygromètre sur la vanne V8 et la pompe à vide sur la vanne V6. On ouvre la vanne V6 pour tirer à vide jusqu'à quelques pascals pour évacuer le gaz résiduel dans le montage puis on referme V6 et on ouvre les vannes V7 et V8 pour faire traverser l'air sec dans le drain de sortie de la puce ;
3. On met en marche l'hygromètre qui va effectuer automatiquement les trois étapes suivantes :
 - DCC (Dynamique Contamination Correction) : le miroir de l'hygromètre est chauffé (environ 20 °C au-dessus du point de rosée) pour enlever le condensât à sa surface. Cette étape consiste à enlever un dépôt de condensât susceptible de s'être formé sur le miroir.
 - Maintien : l'hygromètre cherche son point de fonctionnement (point de rosée ou point de gelée) en refroidissant le miroir.

- Mesure : lorsqu'il détermine le point de fonctionnement, il passe en mode mesure. On commence l'acquisition de données du côté hygromètre et du côté banc diphasique. A ce stade, l'humidité relative indiquée doit être à 0% et la pression dans le montage soit de 1 bar soit de quelques pascals si l'on a tiré au vide.
- 4. On règle la pression de service (entre 1 et 10 bar) dans la bouteille d'eau et on ouvre la vanne V3 et la vanne micro-débit VR1. On ouvre ensuite doucement la vanne V1 pour mettre le montage sous pression et on la referme. On arrête l'essai lorsqu'on observe une légère variation de l'humidité relative après un certain temps.
- 5. On vidange le montage en ouvrant la vanne V5 et la vanne micro-débit VR3 puis on les referme,
- 6. Afin de s'assurer de la répétabilité des mesures, on démonte la puce puis on utilise une soufflette pour sécher le montage et la puce puis on refait toutes les étapes précédentes.

Les données fournies par l'hygromètre sont la température de gelée ou de rosée, la pression totale de l'air humide p_γ , le débit volumique d'air humide Q_γ , l'humidité spécifique, l'humidité absolue et l'humidité relative HR ; avec γ représentant le mélange gazeux d'air humide.

La température de gelée ou de rosée est la température pour laquelle la pression de vapeur saturante est égale à la pression partielle de la vapeur dans l'air humide ; en d'autres termes, lorsque l'on refroidit l'air humide en maintenant le rapport de mélange constant, on atteint l'état de saturation à cette température appelée point de rosée (notée θ_d) lorsque celle-ci est supérieure à 0°C ou de point de gelée (notée θ_f) lorsqu'elle est inférieure à 0°C . L'humidité spécifique, notée H_s , est le rapport de la masse de vapeur d'eau, notée $m_{v,\beta}$ (avec β représentant la phase liquide), à la masse de l'air

humide dans laquelle la masse de vapeur d'eau est contenue, c'est-à-dire

$$Hs = \frac{m_{v,\beta}}{m_\gamma}, \quad (2.1)$$

et elle est donnée en kilogrammes de vapeur d'eau par kilogramme d'air humide.

La concentration massique, notée $\rho_{v,\beta}$, caractérise la masse volumique de la vapeur d'eau,

$$\rho_{v,\beta} = \frac{m_{v,\beta}}{V}, \quad (2.2)$$

et elle est exprimée en kilogrammes de vapeur d'eau par mètre cube d'air humide, avec V le volume total d'air humide.

L'humidité relative HR correspond au rapport entre la pression partielle de vapeur d'eau à la température du miroir de l'hygromètre et la pression partielle de vapeur d'eau d'un air humide saturé à la température du mélange gazeux (pression de vapeur saturante), toutes à la même pression.

$$HR = \frac{p_{v,\beta}(T_f \text{ ou } T_d)}{p_{sat}(T_f \text{ ou } T_d)} \quad (2.3)$$

On peut alors déterminer le débit masse de vapeur d'eau \dot{q}_β à partir de la formule (2.2) réécrite sous la forme,

$$\dot{q}_\beta = \rho_{v,\beta} Q_\gamma, \quad (2.4)$$

avec Q_γ le débit volume d'air humide fourni également par l'hygromètre.

2.2 Analyse d'une fuite dans une puce microfluidique

2.2.1 Fuite gazeuse

Mesurer une fuite gazeuse sur la puce microfluidique selon le protocole présenté dans la partie 2.1.3 au point A ou d'une manière générale sur un joint d'étanchéité, présente une facilité dans l'analyse des résultats puisque l'on connaît la pression d'entrée du gaz et celle de sortie, qui est imposée par le spectromètre de masse. Le débit

masse traversant autant de microcanaux peut être déterminé, comme montré dans (Maurer *et al.*, 2003), par l'expression suivante en considérant une condition de glissement du premier ordre à l'interface solide-gaz

$$\dot{q} = \frac{nlh^3}{12\mu} \frac{P_m}{rT} \frac{(P_0 - P_s)}{L} (1 + 6\sigma_P \text{Kn}), \quad (2.5a)$$

où

$$\text{Kn} = \frac{\mu}{P_m} \sqrt{\frac{\pi r T}{2}} \frac{1}{h}. \quad (2.5b)$$

Dans (2.5), $P_m = (P_0 + P_s)/2$ est la pression moyenne, n est le nombre de microcanaux, r correspond à la constante spécifique du gaz, T est la température, σ_P est un coefficient de glissement visqueux, μ est la viscosité dynamique et Kn est le nombre de KNUDSEN. Ce dernier paramètre est celui qui permet de justifier si une condition de glissement doit être pris en compte ou non dans l'écoulement du gaz, selon qu'il est inférieur ou supérieur à une valeur seuil.

σ_P	Input Equation	Method of solution	Refs.
1.0162	BGK	Direct	33, 67, 68, 73, 79, 91, and 92
1.0073	BGK	Var.	34, 72, 73, 76, and 81
1.0184	S	Direct	33 and 93
0.9873	BE-HS	Direct	84, 87, 90, 94, and 95
0.9875	BE-HS	Var.	86
1.0073	BE-MM	Var.	86
0.996	BE-LJ(He, $T=293$ K)	Var.	86
1.00	BE-LJ(He, $T=300$ K)	Direct	32
0.997	BE-LJ(Ne, $T=293$ K)	Var.	86
1.00	BE-LJ(Ne, $T=300$ K)	Direct	32
1.01	BE-LJ(Ar, $T=293$ K)	Var.	86
1.02	BE-LJ(Ar, $T=300$ K)	Direct	32
1.02	BE-LJ(Kr, $T=300$ K)	Direct	32
1.02	BE-LJ(Xe, $T=293$ K)	Var.	86
1.03	BE-LJ(Xe, $T=300$ K)	Direct	32
0.9740	other	Direct	33, 80, and 91
1.0185	other	Direct	71
0.9950	other	Direct	71
0.9680	other	Var.	71
0.9825	other	Var.	71

FIGURE 2.6 – Valeurs numériques du coefficient σ_P , selon les approches utilisées par différents auteurs en considérant que les molécules du gaz présentent un comportement diffus sur la surface solide. Ces données correspondent au tableau 1 des travaux de Sharipov (2011).

Dans la littérature, plusieurs travaux se sont intéressés à la quantification du coefficient de glissement visqueux σ_P tant expérimentalement que numériquement. Les travaux de Sharipov (2011) font une revue de littérature dans laquelle les résultats numériques, basés sur l'équation de BOLTZMANN, ont montré que lorsque l'interaction entre les molécules du gaz et la surface solide est diffuse, le coefficient σ_P reste très proche de l'unité tel que indiqué dans les données de la figure 2.6. Mais lorsque

α_d	σ_P		
	(a)	(b)	(c)
0.1	17.103	17.048	17.07
0.2	8.2249	8.1725	8.194
0.3	5.2551	5.2056	5.228
0.4	3.7626	3.7161	3.739
0.5	2.8612	2.8176	2.840
0.6	2.2554	2.2148	2.237
0.7	1.8187	1.7810	1.803
0.8	1.4876	1.4529	1.475
0.9	1.2272	1.1954	1.216
1.0	1.0162	0.9873	1.007

FIGURE 2.7 – Valeurs numériques du coefficient σ_P , selon les approches utilisées par différents auteurs (a, b, c) en considérant que les molécules du gaz présentent un comportement spéculaire sur la surface solide. La grandeur α_d est un coefficient qui symbolise la partie réfléchi de manière diffuse. Ces données correspondent au tableau 2 des travaux de Sharipov (2011).

l'interaction est spéculaire, les différents modèles numériques issus de la littérature qui étaient répertoriés dans les travaux de Sharipov (2011) montrent sur la figure 2.7 que le paramètre σ_P varie significativement et ils ont proposé une loi en fonction du paramètre α_d , qui est décrite par l'expression

$$\sigma_P = \frac{\sqrt{\pi}(2 - \alpha_d)}{2\alpha_d}(1 + 0.1366\alpha_d). \quad (2.6)$$

Dans les travaux de Sharipov (2011), toujours à partir des résultats numériques, d'autres auteurs ont observé que le coefficient de glissement visqueux σ_P varie faiblement avec le coefficient d'accommodation normal, noté α_n , mais très significativement avec le coefficient d'accommodation tangentielle, noté α_t . Dans ce cas, le coefficient de glisse-

ment visqueux suit la loi suivante en fonction du coefficient d'accommodation tangentielle.

$$\sigma_P = \frac{1.772}{\alpha_t} - 0.754 \quad (2.7)$$

Une autre loi très classique qui est souvent utilisée dans la littérature est de la forme suivante (Maurer *et al.*, 2003).

$$\sigma_P = \frac{2 - \alpha_t}{\alpha_t} \quad (2.8)$$

A partir de l'expression (2.5a), on note K , la transmissivité du contact donnée par l'expression suivante (Zaouter, 2018)

$$K = \frac{\dot{q}rTL\mu}{n\ell P_m (P_0 - P_s)}, \quad (2.9a)$$

qui de plus doit satisfaire la relation suivante lorsque l'on considère un effet de glissement du premier ordre

$$\begin{aligned} K &= \frac{h^3}{12} (1 + 6\sigma_P Kn) \\ &= \frac{h^3}{12} \left(1 + 6\sigma_P \mu \sqrt{\frac{\pi r T}{2}} \frac{1}{h} \frac{1}{P_m} \right). \end{aligned} \quad (2.9b)$$

Sur la figure 2.8(a), on montre les mesures des fuites gazeuses réalisées en terme de transmissivité, obtenues en partant de l'expression (2.9a) où l'on connaît le taux de fuite $\mathcal{Q} = rT\dot{q}$ en $[\text{Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$ mesuré par le spectromètre de masse et les pressions en entrée et en sortie de la puce microfluidique. Les barres d'erreur indiquées sur la transmissivité sont issues du spectromètre de masse ($\Delta\mathcal{Q} = 1.3 \times 10^{-7} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$), de capteur de pression ($\Delta P = 0.2\%P$), de la largeur totale des microcanaux et de la longueur totale. Pour ces deux dernières grandeurs, nous avons considéré l'écart entre les valeurs nominales et les valeurs minimales mesurées. On observe que les mesures expérimentales de la transmissivité déduite de la fuite mesurée varient linéairement avec l'inverse de la pression moyenne, P_m , comme on s'y attendait selon l'équation (2.9b). La droite de régression linéaire représentée sur la figure 2.8(a) est donnée par

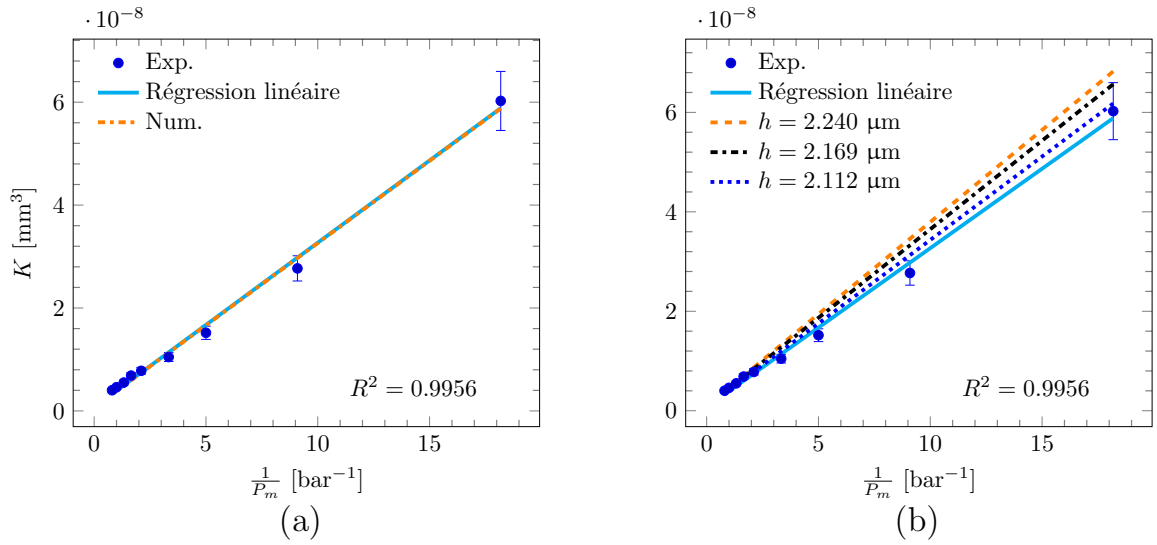


FIGURE 2.8 – Comparaison de la transmissivité globale expérimentale et celle numérique dans une puce microfluidique. Les données utilisées sont : $\mu = 1.9900 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $T = 293 \text{ K}$, $r = 2077 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\sigma_P = 7.6410$. (a) Les dimensions des microcanaux considérées sont les dimensions nominales pour le calcul numérique (b) On considère les dimensions mesurées en prenant les valeurs maximales et minimales de la profondeur dans le tableau 2.2, et la valeur de la profondeur moyenne des neuf microcanaux analysés. L'erreur sur $\frac{1}{P_m}$, qui peut être évaluée à $\frac{0.002}{P_m}$, conduit à des barres d'erreur insignifiantes, qui ne sont pas représentées sur cette figure.

l'équation suivante

$$K = 3.1954 \times 10^{-9} + \frac{7.3820 \times 10^{-10}}{P_m} \quad [\text{mm}^3]. \quad (2.10)$$

Dans cette dernière équation où la pression P_m est exprimée en [bar], la valeur de l'ordonnée à l'origine correspond au cas où les effets de glissement du gaz sur les parois de microcanaux sont négligeables. A partir de l'ordonnée à l'origine de l'équation (2.10), on déduit la valeur de la profondeur moyenne des microcanaux de la manière suivante

$$\begin{aligned} h &= (12 \times 3.1954 \times 10^{-9})^{1/3} \\ &= 2.0691 \times 10^{-3} \text{ [mm]}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Par rapport à la valeur nominale de la profondeur, qui vaut $h = 2 \text{ } \mu\text{m}$, on observe une

erreur relative de 3.34 %. On constate également que cette valeur de la profondeur des microcanaux est très proche de l'intervalle des mesures effectuées lors d'un essai destructif avec le profilomètre Altisurf© 520, soit 2.1 – 2.2 μm (voir tableau 2.2).

La courbe du résultat numérique sur la figure 2.8(a), représentée en prenant la profondeur nominale de microcanaux, c'est-à-dire $h = 2 \mu\text{m}$, est rendue parallèle à la droite de régression linéaire de résultats expérimentaux grâce à la valeur du paramètre σ_P déduite expérimentalement qui vaut 7.6410, correspondant à une valeur du coefficient α_d de 0.2132 en utilisant l'équation (2.6) (ou encore $\alpha_t = 0.2111$ en utilisant l'équation (2.7)).

La figure 2.8(b) présente pour sa part les transmissivités obtenues en utilisant une loi normale sur les valeurs de la profondeur maximale ($h = 2.240 \mu\text{m}$, écart type 0.03516 μm) et minimale ($h = 2.112 \mu\text{m}$, écart type 0.0135 μm) obtenues avec un essai destructif sur une puce microfluidique qui sont donnée dans le tableau 2.2 pour six microcanaux, et la transmissivité globale obtenue en utilisant une loi normale sur la valeur moyenne de la profondeur des neufs microcanaux analysés (2.169 μm , 0.006087 μm). On voit bien l'influence de la dispersion des profondeurs sur ces résultats où l'on observe que les pentes de ces droites diffèrent sensiblement.

2.2.2 Fuite liquide

En suivant la même démarche que celle utilisée par Maurer *et al.* (2003) mais en considérant un liquide, c'est-à-dire sans une condition de glissement à l'interface liquide-solide, on montre que le débit masse dans tous les microcanaux s'exprime sous la forme

$$\dot{q}_\beta = \frac{n\ell h^3 \rho_\beta}{12\mu_\beta L} (P_0 - p_\gamma) + \frac{n\ell h^3 \rho_\beta}{12\mu_\beta L} p_c, \quad (2.12)$$

où la pression capillaire p_c est approximée en négligeant le terme de courbure dans le plan (x, y) , c'est-à-dire

$$p_c = \pm \frac{2 \cos(\theta_e) \sigma}{h}. \quad (2.13)$$

Contrairement au cas d'analyse d'une fuite gazeuse où l'on peut représenter d'emblée la fuite mesurée en fonction de la différence de pression appliquée, la représentation d'une fuite liquide mesurée en fonction de la différence de pression est plus délicate car l'on ne connaît pas avec certitude la forme de l'interface liquide-gaz en sortie des microcanaux. Ainsi, la relation (2.12) permet de faire trois types d'analyses

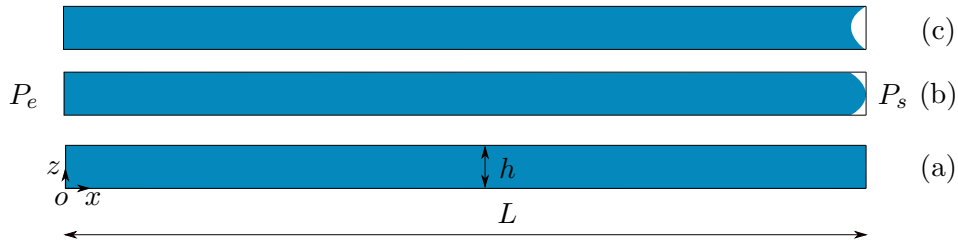


FIGURE 2.9 – Représentation de différentes configurations du ménisque en sortie avec (a) une pression capillaire nulle (b) une pression capillaire négative (c) une pression capillaire positive. P_0 et P_s sont respectivement les pressions d'entrée et de sortie.

différents : le premier cas est celui où la pression capillaire p_c est nulle, le deuxième est celui où cette pression est négative et le troisième correspond à une pression positive (voir respectivement les figures 2.9(a,b,c)), afin de prédire la forme de l'interface liquide-gaz en sortie des microcanaux vers la zone de mesure (voir figure 2.3) et bien estimer la fuite liquide.

Tout d'abord, on montre premièrement sur la figure 2.10(a) l'évolution de la concentration massique de la vapeur d'eau en fonction de la différence de pression dans la zone de mesure et on voit également que dans cette zone la vapeur d'eau ne sature pas l'air humide à travers l'humidité relative représentée sur la figure 2.10(b). Ces résultats montrent ainsi que le débit d'air sec injecté est suffisant pour évaporer tout le liquide qui fuit de la puce microfluidique. De suite, à partir de l'expression (2.4), on obtient le débit de fuite expérimental qui est représenté sur les figures 2.11 et que l'on compare au résultat analytique prédit par la relation (2.12) en considérant les trois configurations de forme de ménisque en sortie des microcanaux qui sont représentées sur les figures 2.9 (pression capillaire nulle, positive et négative).

Sur la figure 2.11(a), à première vue, les mesures expérimentales sont proches

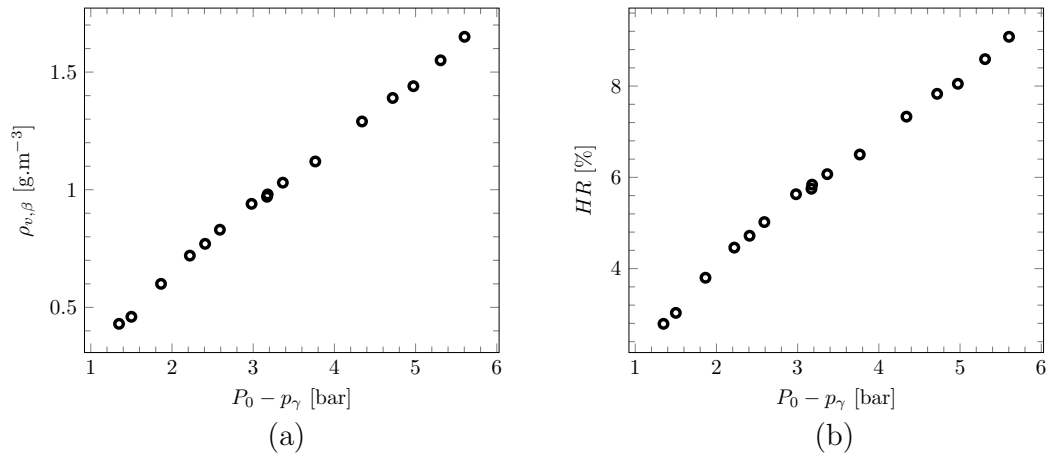


FIGURE 2.10 – Évolution en fonction de la différence de pression de (a) la concentration massique (b) de l'humidité relative.

des résultats de la prédiction numérique donnée par l'équation (2.12) avec une pression capillaire nulle, en considérant les dimensions nominales de fabrication des microcanaux, c'est-à-dire $h = 2 \mu\text{m}$, $\ell = 20 \mu\text{m}$, $L = 8 \text{ mm}$, pour une différence de pression $P_0 - p_\gamma < 5 \text{ bar}$, mais au delà de cette valeur, on constate que cette prédiction numérique s'écarte de la mesure. Cependant, vue les valeurs de la différence de pression qui sont de l'ordre de un à six bar, en considérant la valeur nominale de la profondeur h dans l'expression (2.13) et connaissant la tension de surface de l'eau ($\sigma = 72 \text{ mN}\cdot\text{m}^{-1}$) tout en supposant une mouillabilité parfaite ($\theta_e = 0^\circ$), on a une pression capillaire $p_c = \pm 0.7200 \text{ bar}$, ce qui implique que cette valeur devrait jouer un rôle dans la prédiction de la fuite liquide et donc la mesure expérimentale ne peut être prédite par la loi sans pression capillaire dans ce cas. Sur la figure 2.11(b), on observe en premier que toutes les droites sont maintenant parallèles. A partir de la droite de régression linéaire des résultats expérimentaux ayant pour équation

$$\dot{q}_\beta = 9.4795 \times 10^{-10} + 2.8161 \times 10^{-14}(P_0 - p_\gamma), \quad (2.14)$$

avec le débit \dot{q}_β qui est exprimé en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ est exprimée en Pa, on écrit l'égalité de la pente de cette équation avec celle de l'équation

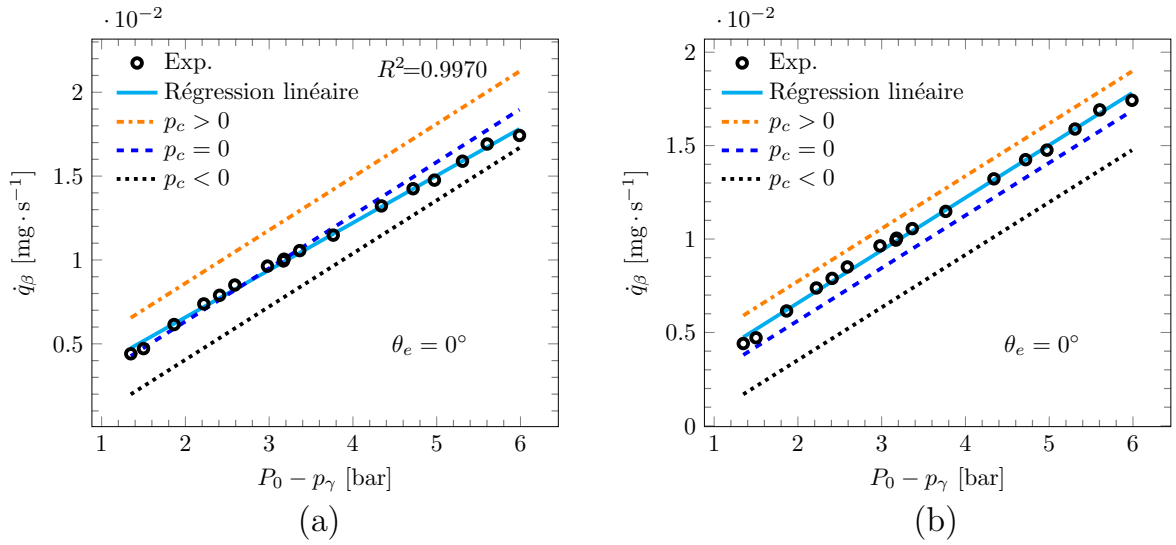


FIGURE 2.11 – Comparaison de la fuite liquide expérimentale et numérique dans une puce microfluidique avec $p_\gamma \approx 1$ bar. Les données utilisées sont : $Q_\gamma = 615 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$, $\rho_\beta = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$: (a) Les dimensions des microcanaux considérées sont les dimensions nominales (b) La valeur de la profondeur utilisée est celle issue de la pente de l'équation (2.14), $h = 1.9233 \text{ } \mu\text{m}$.

(2.12), notée a , qui correspond à

$$a = n \frac{\ell h^3 \rho_\beta}{12 \mu_\beta L}, \quad (2.15)$$

c'est-à-dire

$$n \frac{\ell h^3 \rho_\beta}{12 \mu_\beta L} = 2.8161 \times 10^{-14}, \quad (2.16)$$

et on en déduit la profondeur moyenne h des microcanaux qui vaut $1.9233 \text{ } \mu\text{m}$. Par rapport à la valeur nominale, on a une erreur relative de 3.98% .

Cette valeur de h , bien que dépendante de la longueur total L pour laquelle on a considéré la valeur nominale de 8 mm , est beaucoup plus réaliste puisqu'elle tient compte des paramètres réels d'écoulement du liquide dans les microcanaux. L'intérêt de déterminer l'ouverture h à partir de la pente issue des résultats expérimentaux est que cette dernière est une grandeur qui dépend des propriétés intrinsèques du fluide (à travers la viscosité dynamique) et de la géométrie (à travers la transmissivité globale $K = h^3/12$) comme on peut le voir à partir de l'expression (2.15).

En utilisant la valeur de $h = 1.9233 \mu\text{m}$ déduite expérimentalement dans la relation (2.12), on voit maintenant que la mesure expérimentale se situe entre la prédiction à pression capillaire positive et celle à pression capillaire nulle ; ce qui implique bel et bien que la pression capillaire qui est de l'ordre de 0.7487 bar joue un rôle prépondérant.

Comme mentionné sur la figure 2.11(b) ce résultat est obtenu en considérant que les parois de microcanaux sont parfaitement mouillants, c'est-à-dire que l'angle de contact $\theta_e = 0^\circ$, ce qui n'est pas réaliste sur des parois composées d'une couche d'aluminium et du verre. A titre d'exemple, les mesures d'angle de contact de l'eau sur

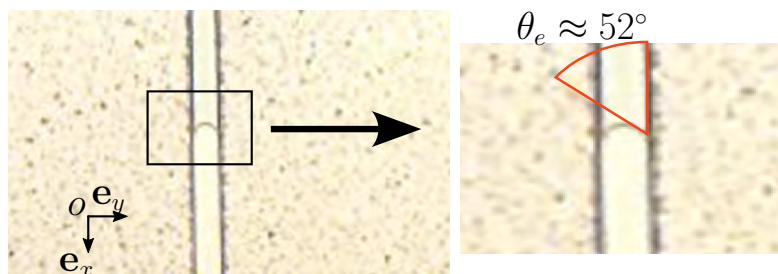


FIGURE 2.12 – Estimation de l'angle de contact d'un ménisque dans un microcanal.

une surface d'aluminium non traitée réalisées par [Khajavian et al. \(2022\)](#) montrent que cet angle est de l'ordre de 72.56° alors que celles réalisées par [Huang et al. \(2024\)](#) indiquent une valeur de l'ordre de 53.5° . [Quéré \(2003\)](#) a montré dans ses travaux que l'angle de contact sur une surface rugueuse est plus faible que celui sur une surface lisse (c'est-à-dire bonne mouillabilité sur une surface rugueuse). Sur la figure 2.12, on illustre une image enregistrée à l'aide d'un microscope lors de l'imbibition du liquide dans la puce microfluidique. L'estimation de l'angle de contact dans un microcanal montre qu'il est à peu près de 52° . Une valeur proche de celle mesurée par [Huang et al. \(2024\)](#).

Ainsi, sur les figures 2.13(a) et 2.13(b) on voit l'influence de l'angle de contact dans l'analyse d'une fuite liquide. La prédiction numérique avec une pression capillaire faisant partie du terme moteur à l'écoulement tend de plus en plus vers la mesure expérimentale lorsque la valeur de l'angle de contact tend vers sa valeur estimée sur

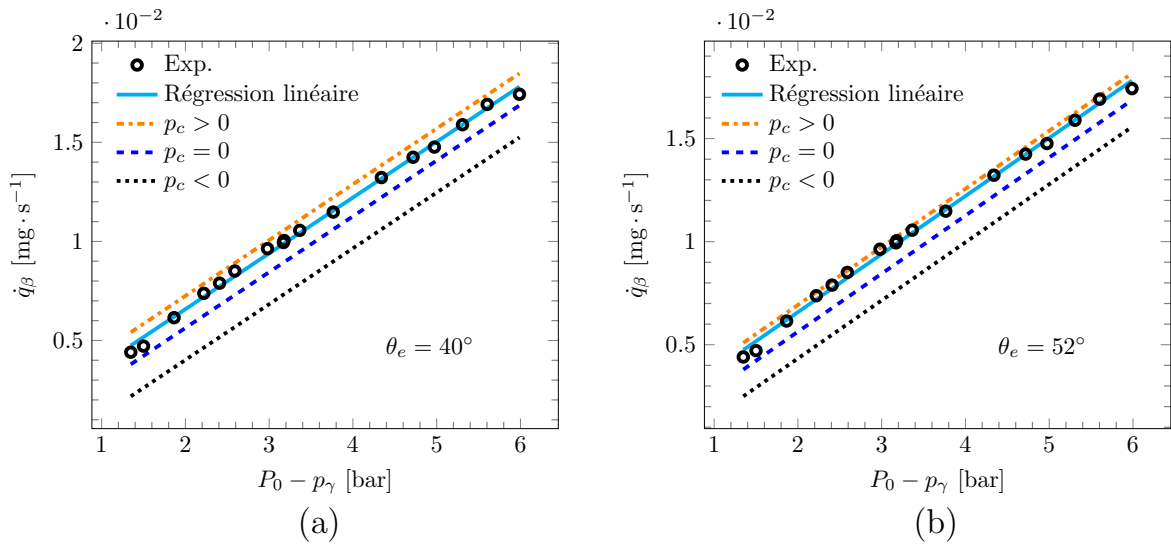


FIGURE 2.13 – Comparaison de la fuite liquide expérimentale et numérique dans une puce microfluidique pour différents angles de contact. Les données utilisées sont : $p_\gamma \approx 1$ bar, $Q_\gamma = 615$ ml \cdot min $^{-1}$, $\rho_\beta = 1000$ kg \cdot m $^{-3}$, $\mu_\beta = 1$ mPa \cdot s, $\sigma = 72$ mN \cdot m $^{-1}$. La valeur de la profondeur utilisée est celle issue de la pente de l'équation (2.14), $h = 1.9233$ μ m. (a) $\theta_e = 40^\circ$. (a) $\theta_e = 52^\circ$.

la figure 2.12. Il faut noter que les microcanaux étant gravés par laser, ce traitement tend à baisser la valeur de l'angle de contact c'est-à-dire diminuer la mouillabilité.

En comparant la valeur de la profondeur moyenne déduite à partir des mesures de fuite d'hélium, donnée par l'expression (2.11), et celle déduite à partir de la fuite liquide, on observe une erreur relative de 7.0465 % ; ce qui est donc un résultat acceptable. En terme de transmissivité, $K = h^3/12$, cette erreur devient de 19.6849 %. En terme de comparaison des fuites, la fuite en hélium peut être étudiée uniquement en terme de la transmissivité du contact comme cela a été fait dans les travaux de Zaouter (2018) et ensuite on peut comparer la mesure expérimentale avec la prédiction numérique connaissant le champ des ouvertures. La prédiction de la fuite liquide est pour sa part délicate et ne peut être décrite complètement par la connaissance de la transmissivité, à cause notamment des effets de capillarité ou encore de mouillabilité tel que montré sur les figures 2.11 et 2.13, et bien-sûr de la structure de l'écoulement. En effet, selon la configuration de cette dernière, il peut se passer un long moment où la fuite liquide n'est que transitoire. Cette situation peut se produire par exemple dans le cas où les

écoulements en film sont importants dans les angles vifs de chemins de fuites ou encore s'il y a présence de bulles de gaz dans l'écoulement du liquide et il devient alors complexe de prédire analytiquement une fuite liquide car l'expression (2.12) utilisée dans cette analyse n'est plus d'application dans une telle configuration.

2.3 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de montrer comment on peut réaliser des mesures de fuites gazeuses et liquides dans une fracture modèle. Tout d'abord, on a montré que la mesure d'une fuite gazeuse et l'interprétation des résultats par comparaison avec le modèle numérique sont relativement maîtrisées si l'on a bien défini le champ des ouvertures au préalable ; ce qui n'est pas tout à fait le cas pour une fuite liquide. Afin d'analyser l'impact de certains phénomènes, l'intérêt d'étudier une fuite liquide dans une géométrie contrôlée a été mis en lumière notamment par rapport aux effets de capillarité et de mouillabilité qui peuvent sensiblement influencer la prédiction d'une fuite liquide. Bien que les mesures de fuite (liquide et gazeux) réalisées ont montré une bonne cohérence dans la déduction de la profondeur des microcanaux, la prédiction numérique pour la fuite liquide a montré que la pression capillaire et l'angle de contact sont des paramètres importants dans cette analyse. Par ailleurs, le modèle analytique utilisé pour prédire la fuite liquide est adapté seulement au cas où le ménisque central est déjà arrivé au bout du canal. Des situations existent où une fuite *transitoire* peut se produire dans les angles vifs des microcanaux, à cause des écoulements en film liquide. Il est donc nécessaire de développer un modèle qui permet de prendre en compte ces types de situation, afin d'améliorer l'interprétation d'une fuite liquide.

Chapitre 3

Dynamique d'imbibition d'un liquide mouillant avec écoulement en film

Sommaire

3.1	Définition du champ des ouvertures et hypothèses	60
3.2	Cinématique de l'interface liquide-gaz dans un coin	62
3.2.1	Établissement de l'équation de l'épaisseur du film	62
3.2.2	Stratégie de résolution de l'équation de l'épaisseur du film	66
3.3	Épaisseur maximale de raccordement	72
3.4	Dynamique d'imbibition à débit imposé	74
3.4.1	Régime du film liquide : Position du point triple	74
3.4.2	Simplification de l'équation de l'épaisseur de raccordement	77
3.4.3	Régime du film liquide et du ménisque central	80
3.4.4	Discussion sur le modèle	85
3.5	Dynamique d'imbibition à pression imposée	89
3.5.1	Régime du film liquide	89
3.5.2	Régime du film liquide et du ménisque central	92
3.5.3	Discussion sur le modèle	95
3.6	Validation du modèle	97
3.6.1	Présentation du processus expérimental de O. AMYOT	97
3.6.2	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux	98
3.7	Conclusion	102

Nous avons souligné en introduction de ce manuscrit que les brides sont généralement issues d'un procédé par tournage. De ce fait, l'interface qu'elles forment avec le joint peut être assimilée à un motif en spirale qui est interconnecté d'une spire à l'autre à travers de la rugosité. L'effort de serrage appliqué à cet assemblage pour assurer l'étanchéité permet de simplifier davantage le champ des ouvertures résultant, que l'on peut assimiler à un chemin de fuite unique en forme de spirale et peut être vue comme un canal de section triangulaire qui est fortement aplati. La dynamique d'un liquide mouillant qui imbibe dans cette fracture modèle va être présentée dans ce chapitre.

3.1 Définition du champ des ouvertures et hypothèses

Dans cette partie, on s'intéresse à la dynamique d'imbibition d'un liquide mouillant dans une fracture modèle assimilée à un canal rectiligne de section transversale triangulaire et d'ouverture maximale, h_0 , constante tel que schématisé sur la figure 3.1, de telle sorte que le champ des ouvertures ne dépend que de la direction y . Par symétrie

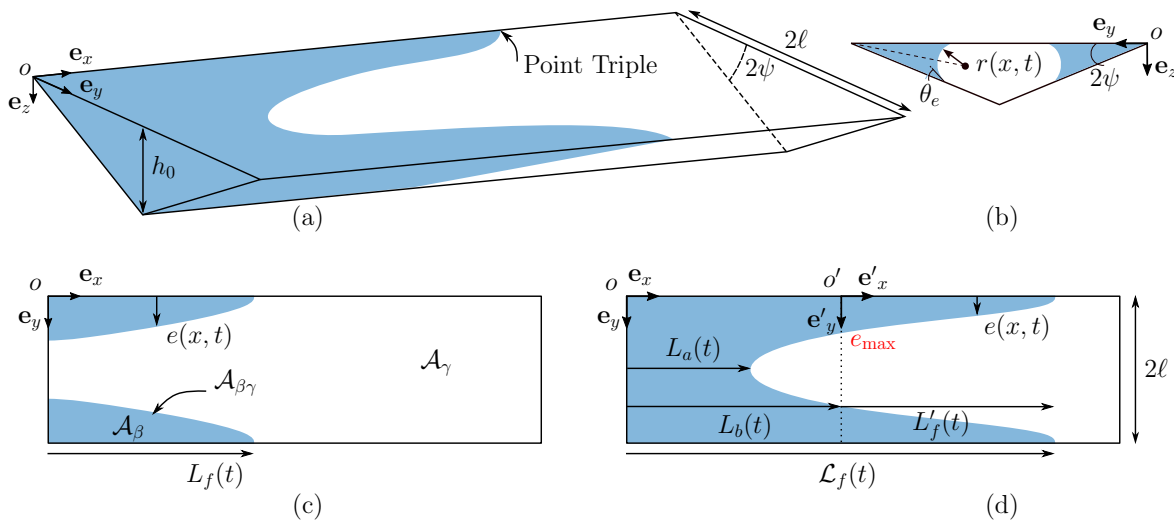


FIGURE 3.1 – (a) Représentation d'un canal de section triangulaire. (b) Vue représentative de la section occupée par le film liquide dans un coin. (c) Invasion du liquide par les coins du canal. (d) Invasion du liquide dans tout le canal.

du canal de section triangulaire, on définit ce champ des ouvertures de la manière

suivante

$$h(y) = \epsilon y, \quad (3.1)$$

où ϵ est la pente et définie par

$$\epsilon = \tan(2\psi) = \frac{h_0}{\ell} \ll 1. \quad (3.2)$$

Dans cette relation, ℓ est la demie largeur du canal.

Cette dernière contrainte permet d'assurer la validité des équations de REYNOLDS (D.41) et (D.42), données dans l'annexe D, dans une fracture de section triangulaire et on ne va s'intéresser qu'aux écoulements à bas nombres capillaires, c'est-à-dire $Ca \leq \epsilon$ (avec $Ca = u_c \mu_\beta / \sigma$ et u_c une vitesse caractéristique, μ_β la viscosité dynamique du liquide et σ la tension de surface), pour que ces dernières équations soient couplées avec la loi de LAPLACE donnée par ,

$$p_\gamma - p_\beta = \sigma \kappa, \quad Ca \leq \epsilon, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}, \quad (3.3)$$

où κ représente la double courbure moyenne, $\mathcal{A}_{\beta\gamma}$ représente l'interface liquide-gaz, p_γ est la pression de la phase gazeuse γ et p_β la pression de la phase liquide β .

Par ailleurs, on considère de plus que la pression dans la phase gazeuse est constante, ce qui conduit à un modèle d'équations de REYNOLDS uniquement dans la phase liquide, c'est-à-dire

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_\beta(x, y) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{A}_\beta, \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{q}_\beta(x, y) = -\frac{h^3(y)}{12\mu_\beta} \nabla p_\beta(x, y), \quad \text{dans } \mathcal{A}_\beta, \quad (3.4b)$$

avec \mathbf{q}_β le débit de la phase liquide par unité de largeur.

Ces hypothèses impliquent également que l'interface liquide-gaz se déplace à la

même vitesse que celle du liquide à cette interface, c'est-à-dire,

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_{\beta\gamma}, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}. \quad (3.5)$$

L'objectif de cette étude est de déterminer l'évolution temporelle de la position la plus avancée du ménisque, que l'on va appeler *point triple*, et celle de la position la plus basse du ménisque, appelée *ménisque central*. L'analyse sera abordée en considérant deux sortes de conditions aux limites en entrée du canal : une première où l'impose un débit constant et une deuxième où une pression constante est imposée.

L'étude de la dynamique d'imbibition, telle qu'illustré sur la figure 3.1(a), comprend deux étapes distinctes. La première étape implique l'écoulement du film liquide dans les coins du canal, que nous appellerons le "régime du film liquide", comme schématisé sur la figure 3.1(c). Ce cas se produit lorsque les effets capillaires sont plus importants dans les coins du canal où le champ des ouvertures tend vers zéro, favorisant l'invasion du liquide par les coins avant l'invasion complète du liquide dans tout le canal. La dernière étape, représentée sur la figure 3.1(d), appelée "régime du film liquide et du ménisque central", est une combinaison du régime du film avec la phase où le liquide commence à pénétrer dans tout le canal. Pour ce faire, la partie suivante va s'intéresser premièrement à la description de la dynamique de l'interface liquide-gaz lorsque le liquide envahit le canal par les coins comme schématisé sur la figure 3.1(c).

3.2 Cinématique de l'interface liquide-gaz dans un coin

L'objectif de cette partie est d'établir une équation qui caractérise la dynamique de l'interface liquide-gaz, à travers l'épaisseur du film liquide, $e(x, t)$.

3.2.1 Établissement de l'équation de l'épaisseur du film

Dans le régime du film liquide représenté sur la figure 3.1(c), on peut écrire la paramétrisation de l'interface sous la forme $\phi(x, y, t) = y - e(x, t)$. La condition cinématique

de l'interface, qui représente le fait qu'un point présent à l'interface reste à cette interface durant tout l'écoulement, peut alors s'écrire de la manière suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_{\beta\gamma} \cdot \nabla \phi = 0, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}, \quad (3.6a)$$

ou encore grâce à la continuité de vitesse donnée à l'équation (3.5), l'équation (3.6a) s'exprime de la manière suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_\beta \cdot \nabla \phi = 0, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}. \quad (3.6b)$$

En remplaçant la paramétrisation ϕ par son expression, on obtient

$$-\frac{\partial e}{\partial t} - u_\beta \frac{\partial e}{\partial x} + v_\beta = 0, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}. \quad (3.6c)$$

En intégrant cette équation suivant l'ouverture $h(e)$ (puisque l'on est à l'interface liquide-gaz), on obtient

$$-\frac{\partial e}{\partial x} \int_0^{h(e)} u_\beta dz + \int_0^{h(e)} v_\beta dz - \frac{\partial e}{\partial t} \int_0^{h(e)} dz = 0 \quad (3.6d)$$

et qui donne

$$-\frac{\partial e}{\partial x} q_{\beta x}(e) + q_{\beta y}(e) - h(e) \frac{\partial e}{\partial t} = . \quad (3.6e)$$

Pour simplifier l'équation (3.6e), il suffit de la combiner avec la forme intégrale de l'équation de la conservation de la masse (3.4a), en appliquant la règle de dérivation sous l'intégrale de LEIBNIZ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{e(x,t)} q_{\beta x}(x, y) dy \right) - q_{\beta x}(e) \frac{\partial e}{\partial x} + q_{\beta y}(e) = 0, \quad (3.6f)$$

ce qui donne,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{e(x,t)} q_{\beta x}(x, y) dy \right) + h(e) \frac{\partial e}{\partial t} = 0, \quad (3.6g)$$

c'est-à-dire,

$$-\frac{1}{12\mu_\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{e(x,t)} h^3(y) \frac{\partial p_\beta}{\partial x} dy \right) + h(e) \frac{\partial e}{\partial t} = 0. \quad (3.6h)$$

[Kantzas et al. \(1988\)](#) ont proposé une relation permettant de calculer la section $S(x, t)$ occupée par le film liquide dans un coin d'un canal. En suivant cette approche, on définit

$$S(x, t) = Ar^2(x, t), \quad (3.7a)$$

où le rayon $r(x, t)$ et la constante A sont respectivement donnés par les expressions suivantes,

$$r(x, t) = \frac{h(e(x, t))}{2B}, \quad (3.7b)$$

et

$$A = \frac{\cos \theta_e \cos (\theta_e + \psi)}{\sin(\psi)} - \frac{\pi - 2\psi - 2\theta_e}{2}, \quad (3.7c)$$

avec

$$B = \cos(\theta_e + \psi) \cos(\psi). \quad (3.7d)$$

Les angles ψ et θ_e doivent par ailleurs respectés la contrainte suivante,

$$2\psi + 2\theta_e \leq \pi. \quad (3.7e)$$

La condition (3.7e) établie dans les travaux de [Concus et Finn](#) stipule que le liquide imbibe spontanément dans les coins lorsque cette condition est satisfaite ([Concus et Finn, 1969, 1974](#)). L'établissement de l'expression de $S(x, t)$ est présenté dans l'annexe C. Dans la relation (3.3) donnant la loi de LAPLACE, la double courbure moyenne peut être définie par

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2, \quad (3.7f)$$

où κ_1 représente la courbure de l'interface liquide-gaz dans le plan (y, z) du canal et on définit κ_2 par

$$\kappa_2 = -\nabla \cdot \mathbf{n}_{\beta\gamma}. \quad (3.7g)$$

et à partir de l'expression (3.7b), on définit également

$$\kappa_1 = \frac{1}{r(x, t)}. \quad (3.7h)$$

Dans la région du film liquide, en négligeant la courbure dans le plan (x, y) (deuxième terme du membre de droite dans l'expression (3.7f)) puisque l'interface dans le plan (x, y) est quasi linéaire, la pression capillaire est tout simplement donnée sous la forme

$$\begin{aligned} p_c(x, t) &= \frac{\sigma}{r(x, t)} \\ &= \frac{2B\sigma}{\epsilon e(x, t)}. \end{aligned} \quad (3.7i)$$

A partir de cette relation, on voit que lorsque l'épaisseur du film liquide tend vers zéro, la pression capillaire tend vers l'infini. Cette pression est donc plus importante dans cette région de telle sorte qu'elle pilote entièrement l'écoulement. De la loi de LAPLACE (3.3), on peut donc admettre que

$$p_\beta(x, y) = p_\beta(x) = p_\gamma - p_c, \quad (3.7j)$$

de telle sorte que

$$\frac{\partial p_\beta}{\partial x} = -\frac{\partial p_c}{\partial x}, \quad (3.7k)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial p_\beta}{\partial x} = \frac{2\sigma B}{\epsilon e^2} \frac{\partial e}{\partial x}. \quad (3.7l)$$

Puisque le terme $\frac{\partial p_\beta}{\partial x}$ ne dépend pas de la direction y , l'intégration de l'équation (3.6h) donne

$$-\frac{1}{12\mu_\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon^3 e^4}{4} \frac{\partial p_\beta}{\partial x} \right) + h(e) \frac{\partial e}{\partial t} = 0, \quad (3.8)$$

ce qui conduit à l'équation

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\epsilon B \sigma}{24\mu_\beta e} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^2 \frac{\partial e}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.9)$$

et on obtient, après réarrangement, l'équation différentielle décrivant l'évolution temporelle et spatiale de l'épaisseur du film liquide sous la forme simplifiée suivante

$$\alpha \frac{\partial e^2}{\partial t} = \frac{\partial^2 e^3}{\partial x^2}, \quad (3.10)$$

avec

$$\alpha = \frac{36\mu_\beta}{\epsilon \sigma B}. \quad (3.11)$$

Cette équation décrit la dynamique de l'interface liquide-gaz, à travers l'épaisseur du film liquide, dans les angles vifs du canal triangulaire. Dans la partie suivante, on va s'intéresser à la stratégie de résoudre cette équation aux dérivées partielles, dans les deux cas de condition appliquée en entrée du canal triangulaire, à savoir soit à pression imposée, soit à débit imposé.

3.2.2 Stratégie de résolution de l'équation de l'épaisseur du film

Lorsque la dynamique d'imbibition s'effectue à pression imposée, une première condition aux limites associée à l'équation (3.10) est définie de la manière suivante au bout du film

$$e(L_f(t), t) = 0, \quad \text{en } x = L_f(t), \quad (3.12a)$$

avec L_f la position du point triple.

La deuxième condition est déterminée en utilisant la loi de LAPLACE donnée à l'équa-

tion (3.3) (avec le terme de courbure dans le plan (x, y) qui vaut zéro à cause du caractère quasi linéaire de la forme de l'interface dans le film liquide) au point $x = 0$, soit

$$p_\gamma - p_\beta(x = 0, t) = \frac{2B\sigma}{\epsilon e(x = 0, t)}. \quad (3.12b)$$

Puisque $p_\beta(x = 0, t) = P_0$, la pression imposée, on obtient ainsi l'épaisseur du film liquide en entrée du canal de la manière suivante.

$$e(x = 0, t) = \frac{2B\sigma}{\epsilon(p_\gamma - P_0)}, \quad \text{au point } x = 0 \quad (3.12c)$$

Dans le cas d'une dynamique d'imbibition à débit constant imposé, la condition (3.12a) reste valide mais il est important de déterminer d'abord l'expression du débit traversant le coin en fonction de l'épaisseur, pour définir la condition au point $x = 0$.

$$\begin{aligned} Q_{\beta x} &= \int_0^{e(x,t)} q_{\beta x} dy = -\frac{1}{12\mu_\beta} \int_0^{e(x,t)} h^3(y) \frac{\partial p_\beta}{\partial x} dy \\ &= -\frac{\epsilon^3 e^4}{48\mu_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.13a)$$

Ce qui donne en remplaçant le terme $\frac{\partial p_\beta}{\partial x}$ par l'expression (3.71),

$$Q_{\beta x} = -\frac{\epsilon^2 \sigma B e^2}{24\mu_\beta} \frac{\partial e}{\partial x}. \quad (3.13b)$$

Ainsi, pour une dynamique d'imbibition à débit imposé, on a une deuxième condition définie par

$$e^2 \frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{12\mu_\beta Q_0}{\epsilon^2 \sigma B}, \quad \text{en } x = 0. \quad (3.13c)$$

ou encore

$$\frac{\partial e^3}{\partial x} = -\frac{36\mu_\beta Q_0}{\epsilon^2 \sigma B}, \quad \text{en } x = 0. \quad (3.13d)$$

Langbein *et al.* (2002) ont montré qu'une équation de la forme de l'équation (3.10), établie dans le cas où un film liquide imbibe dans un coin, peut admettre des solutions de similarité. Pour ce faire, on pose

$$e(x, t) = \frac{f(\zeta)}{x^n}, \quad \zeta = \frac{x}{(2t)^{\frac{1}{n+2}}}, \quad (3.14)$$

et en remplaçant les relations (3.14) dans l'équation (3.10), on trouve une équation ne dépendant que d'une seule variable, c'est-à-dire

$$\frac{2\alpha}{n+2} \frac{1}{\zeta^{2n-1}} \frac{df^2}{d\zeta} + \frac{d^2}{d\zeta^2} \left(\frac{f}{\zeta^n} \right)^3 = 0. \quad (3.15)$$

Pour satisfaire la condition (3.12a), la constante n dans l'équation (3.14) doit être égale à zéro, comme démontré dans les travaux de (Mayer *et al.*, 1983; Weislogel, 1996), et ceci conduit à la forme

$$2\alpha\zeta \frac{df}{d\zeta} + 6 \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 + 3f \frac{d^2f}{d\zeta^2} = 0. \quad (3.16)$$

Une première stratégie pour résoudre l'équation (3.16) est d'adopter une solution asymptotique du premier ordre près de la pointe du film liquide dans le coin où l'épaisseur du film liquide tend vers zéro (ce qui implique que $f \rightarrow 0$) comme réalisé dans les travaux de (Weislogel, 1996; Weislogel et Lichter, 1998; Amyot, 2004) et ce, en faisant l'approximation

$$\left| 3f \frac{d^2f}{d\zeta^2} \right| \ll 6 \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2. \quad (3.17a)$$

Cette approximation permet de simplifier l'équation (3.16) de la manière suivante

$$\frac{\alpha\zeta}{3} + \frac{df}{d\zeta} = 0. \quad (3.17b)$$

On trouve après intégration et en utilisant la condition $f = 0$ à $\zeta = \frac{L_f}{\sqrt{2t}}$,

$$f(\zeta) = \frac{\alpha}{6} \left(\frac{L_f^2}{2t} - \zeta^2 \right), \quad (3.17c)$$

qui se traduit en fonction de l'épaisseur par

$$e(x, t) = \frac{\alpha L_f^2(t)}{12 t} \left(1 - \frac{x^2}{L_f^2(t)} \right). \quad (3.17d)$$

Cette solution simple est celle obtenue également dans le travaux de Amyot (2004) mais il est important de vérifier sa validité par rapport à la condition (3.17a). Pour ce faire, on revient à la condition (3.17a) et on écrit que

$$\left| - \left(\frac{L_f^2}{2t} - \zeta^2 \right) \frac{\alpha^2}{18} \right| \ll 2 \left(\frac{-\alpha\zeta}{3} \right)^2. \quad (3.18a)$$

De cette équation, on se ramène à la forme,

$$\frac{L_f^2}{2t} - \frac{x^2}{2t} \ll 4 \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right)^2. \quad (3.18b)$$

En partant de cette dernière équation, on définit ainsi la limite de validité de la solution (3.17d) donnant l'épaisseur du film liquide de la manière suivante.

$$x \gg \frac{L_f}{\sqrt{5}} \quad (3.18c)$$

On voit donc que la solution (3.17d) de l'épaisseur du film liquide n'est pas valide à des valeurs de x inférieures à $\frac{L_f}{\sqrt{5}}$. On ne peut donc pas utiliser cette solution en $x = 0$ où les conditions de pression ou de débit sont appliquées.

Quant à la deuxième stratégie, il convient premièrement de rendre adimensionnelle l'équation (3.16) en y remplaçant les grandeurs adimensionnelles suivantes

$$\bar{f} = \frac{ft}{\alpha L_f^2}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta \sqrt{2t}}{L_f}, \quad 0 \leq \bar{\zeta} \leq 1. \quad (3.19)$$

On obtient ainsi

$$2\alpha^2 \frac{L_f^2}{t} \frac{\sqrt{2t}}{L_f} \frac{L_f}{\sqrt{2t}} \bar{\zeta} \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} + 6\alpha^2 \frac{L_f^4}{t^2} \frac{2t}{L_f^2} \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 + 3\alpha^2 \frac{L_f^4}{t^2} \frac{2t}{L_f^2} \bar{f} \frac{d^2\bar{f}}{d\bar{\zeta}^2} = 0, \quad (3.20a)$$

et finalement

$$\bar{\zeta} \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} + 6 \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 + 3\bar{f} \frac{d^2\bar{f}}{d\bar{\zeta}^2} = 0, \quad 0 \leq \bar{\zeta} \leq 1. \quad (3.20b)$$

La condition (3.12a) sous cette forme adimensionnelle devient

$$\bar{f}(\bar{\zeta}) = 0, \quad \text{en} \quad \bar{\zeta} = 1. \quad (3.20c)$$

On voit que l'utilisation de la condition d'entrée en pression (équation (3.12c)) ou celle en débit (équation (3.13c)) pour résoudre l'équation (3.20b) s'avère encore complexe, car elle conduirait à déterminer deux solutions distinctes de l'épaisseur du film liquide pour chaque cas. Il est ainsi judicieux de trouver une solution globale applicable dans les deux cas. Pour ce faire, on évalue l'équation (3.20b) au point $\bar{\zeta} = 1$ où $\bar{f}(\bar{\zeta}) = 0$, c'est-à-dire

$$1 + 6 \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} = 0, \quad \text{à} \quad \bar{\zeta} = 1. \quad (3.20d)$$

La condition (3.20d) ne peut être vérifiée que si l'on a

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} = -\frac{1}{6}, \quad \text{à} \quad \bar{\zeta} = 1. \quad (3.20e)$$

On peut ainsi chercher une solution de l'équation (3.20b) avec les conditions aux limites données par les expressions (3.20c) et (3.20e). En suivant la démarche utilisée dans les travaux de (Boyd, 2000, chap.1, p. 14), on définit un polynôme du second degré

$$\bar{f}_P = a\bar{\zeta}^2 + b\bar{\zeta} + c, \quad (3.21a)$$

comme solution de l'équation (3.20b) pour lequel les constantes a, b, c doivent être déterminés. En utilisant les conditions (3.20c) et (3.20e), on obtient une première équation reliant les constantes a, b, c

$$a + b = -c, \quad (3.21b)$$

et une deuxième équation donnée par

$$2a + b = -\frac{1}{6}, \quad (3.21c)$$

et on trouve une troisième équation en calculant le résidu R_d et en minimisant ce dernier en un point.

$$\begin{aligned} R_d(\bar{\zeta}, a, b, c) &= \bar{\zeta} \frac{d\bar{f}_P}{d\bar{\zeta}} + 6 \left(\frac{d\bar{f}_P}{d\bar{\zeta}} \right)^2 + 3\bar{f}_P \frac{d^2\bar{f}_P}{d\bar{\zeta}^2} \\ &= (2a\bar{\zeta} + b)(\bar{\zeta} + 6(2a\bar{\zeta} + b)) + 6a(a\bar{\zeta}^2 + b\bar{\zeta} + c) \end{aligned} \quad (3.21d)$$

Boyd (2000) a montré qu'une solution précise peut être obtenue en imposant que

$$R_d\left(\bar{\zeta} = \frac{1}{2}, a, b, c\right) = 0, \quad (3.21e)$$

ce qui donne une troisième équation

$$0 = (a + b) \left(\frac{1}{2} + 6(a + b) \right) + 6a \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \right), \quad (3.21f)$$

qui donne après résolution les résultats suivants pour les trois constantes

$$a = \frac{\sqrt{6} - 4}{30} \simeq -0.0517, \quad (3.21g)$$

$$b = \frac{3 - 2\sqrt{6}}{30} \simeq -0.0633, \quad (3.21h)$$

$$c = \frac{1 + \sqrt{6}}{30} \simeq 0.1150. \quad (3.21i)$$

En ramenant la solution (3.21a) à la forme dimensionnelle on obtient la solution de l'épaisseur du film en fonction de la position du point triple.

$$e(x, t) = \frac{c\alpha L_f^2}{t} \left(\frac{a}{c} \left(\frac{x}{L_f} \right)^2 + \frac{b}{c} \frac{x}{L_f} + 1 \right) \quad (3.22)$$

La figure 3.2 montre une comparaison des solutions obtenues par les deux stratégies. On voit bien que la solution (3.17d) donne une bonne approximation proche du

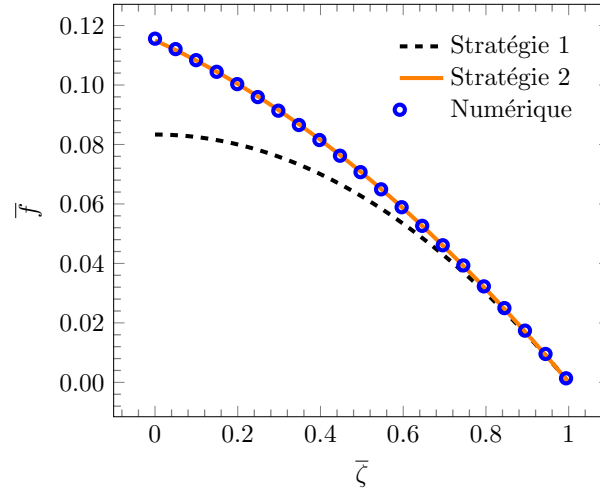


FIGURE 3.2 – Solution numérique de l'équation (3.20b) (symboles circulaires). Comparaison avec la solution approximative donnée à l'équation (3.17d) (ligne en pointillés) et l'estimation polynomiale fournie à l'équation (3.21a) (ligne pleine).

point triple mais qu'elle induit une sous-estimation de l'épaisseur en entrée du canal. On voit également une très bonne concordance des résultats obtenus en résolvant directement l'équation (3.20b), avec ceux obtenus en faisant le choix du polynôme (3.21a) par la méthode de Boyd (2000). Ces deux dernières approches nous permettent ainsi de considérer la solution analytique (3.22) dans la suite de cette étude, pour déterminer la position du point triple recherchée.

Cependant, la valeur maximale que peut atteindre l'épaisseur du film liquide est limitée. Lorsque le film liquide atteint une certaine valeur notée e_{\max} , le ménisque central pénètre dans le canal. L'épaisseur e_{\max} est donc la valeur seuil qui déclenche l'écoulement dans tout le canal et donc il convient de la déterminer. Le paragraphe suivant introduit la stratégie permettant d'évaluer cette valeur.

3.3 Épaisseur maximale de raccordement

Lorsque l'écoulement s'établit dans tout le canal, on distingue deux régions : une région du film liquide et une autre du ménisque central. Les deux régions sont raccor-

dées à une épaisseur e_{\max} (voir figure 3.1(b)). Dans les travaux de Amyot (2004), il a été observé expérimentalement que pour les écoulements à faible nombre capillaire ($Ca < \epsilon$), les déviations de l'interface liquide-gaz sont très faibles dans la région du ménisque central et le ménisque établit rapidement une forme constante, conduisant à une courbure constante. Une analyse similaire a été faite dans les travaux de Weislogel *et al.* (2011). Ainsi, pour raccorder la région du film liquide à celle du ménisque central, on exploite les résultats de (Amyot, 2004; Weislogel *et al.*, 2011) et on écrit que

$$\frac{\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{2B}{\epsilon e} = \frac{2B}{\epsilon e_{\max}}. \quad (3.23a)$$

Dans l'équation (3.23a), le membre de gauche représente la double courbure moyenne du ménisque central (le premier terme est obtenu à partir de l'expression (3.7g)) et celui de droite est la courbure moyenne du film liquide dans le plan (y, z) en $e = e_{\max}$ sachant que la courbure de ce dernier dans le plan (x, y) a été négligée.

En multipliant l'équation (3.23a) par $\frac{\partial e}{\partial x}$, le premier terme du membre de gauche peut se réécrire sous une forme simplifiée et cette équation devient

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)^2}} \right) + \frac{2B}{\epsilon e} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{2B}{\epsilon e_{\max}} \frac{\partial e}{\partial x} = 0. \quad (3.23b)$$

L'équation (3.23b) peut être intégrée entre e_{\max} , l'épaisseur de raccordement à calculer, et la demie largeur du canal, ℓ , de la manière suivante

$$-\int_{e_{\max}}^{\ell} d \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)^2}} \right) + \frac{2B}{\epsilon} \int_{e_{\max}}^{\ell} \frac{de}{e} - \frac{2B}{\epsilon e_{\max}} \int_{e_{\max}}^{\ell} de = 0. \quad (3.23c)$$

Après intégration, on obtient

$$-\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)^2}} \right]_{e_{\max}}^{\ell} + \frac{2B}{\epsilon} \left(\ln \frac{\ell}{e_{\max}} - \frac{\ell - e_{\max}}{e_{\max}} \right) = 0, \quad (3.23d)$$

ou encore

$$-\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)^2}} \right]_{e_{\max}}^{\ell} - \frac{2B}{\epsilon} \left(\ln \frac{\ell}{e_{\max}} + \frac{\ell - e_{\max}}{e_{\max}} \right) = 0. \quad (3.23e)$$

Dans l'équation (3.23e), grâce à la symétrie du canal, lorsque $e \rightarrow \ell$ le terme $\frac{\partial e}{\partial x}$ tend vers $+\infty$ en ce point. Cette équation se simplifie une première fois de la manière suivante

$$\left(1 + \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)_{e_{\max}}^2 \right)^{-1/2} - \frac{2B}{\epsilon} \left(\ln \frac{e_{\max}}{\ell} + \frac{\left(1 - \frac{e_{\max}}{\ell}\right)}{\frac{e_{\max}}{\ell}} \right) = 0. \quad (3.23f)$$

Dans cette équation, le terme $\frac{\partial e}{\partial x} \Big|_{e_{\max}}$ nécessite une analyse particulière dépendant de la dynamique d'imbibition qu'elle soit à débit imposé ou à pression imposée.

3.4 Dynamique d'imbibition à débit imposé

3.4.1 Régime du film liquide : Position du point triple

Dans le régime du film liquide tel que représenté sur la figure 3.1(c), l'objectif est de déterminer la position du point triple, notée par $L_f(t)$ sur la figure. Étant donné que l'écoulement se produit uniquement dans les coins lorsqu'un débit Q_0 est imposé à l'entrée du canal, la conservation du volume pour le liquide en considérant la symétrie du canal, peut être exprimée comme suit

$$\frac{d\Omega_f}{dt} = \frac{Q_0}{2}, \quad (3.24a)$$

avec Ω_f le volume occupé par le film liquide dans un coin.

L'équation (3.24a) s'intègre une première fois entre 0 et t en considérant un volume de fluide nul à l'instant initial et on intègre pour une deuxième fois de la manière suivante

$$\int_0^{L_f(t)} S(x, t) dx = \frac{Q_0}{2} t. \quad (3.24b)$$

En utilisant la définition de la section occupée par le film liquide dans un coin donnée à l'expression (3.7a), l'équation (3.24b) devient

$$\frac{\epsilon^2 A}{4B^2} \int_0^{L_f(t)} e^2(x, t) dx = \frac{Q_0}{2} t. \quad (3.24c)$$

Ce qui donne en remplaçant dans l'équation (3.24c) l'épaisseur $e(x, t)$ du film liquide par l'expression (3.22) :

$$\frac{A\epsilon^2}{4B^2} \left(\frac{\alpha^2 c^2 L_f^4}{t^2} \int_0^{L_f(t)} \left(\frac{a}{c} \left(\frac{x}{L_f} \right)^2 + \frac{b}{c} \frac{x}{L_f} + 1 \right)^2 dx \right) = \frac{Q_0}{2} t, \quad (3.24d)$$

$$\frac{A\epsilon^2 \alpha^2 c^2 L_f^5}{120B^2} \left(30 \left(1 + \frac{b}{c} \right) + 10 \left(2 \frac{a}{c} + \frac{b^2}{c^2} \right) + 15 \frac{ab}{c^2} + 6 \frac{a^2}{c^2} \right) = \frac{Q_0}{2} t^3 \quad (3.24e)$$

c'est à dire

$$L_f(t) = 0.7759 \left(\frac{B^4}{A} Q_0 \left(\frac{\sigma}{\mu_\beta} \right)^2 \right)^{1/5} t^{3/5}. \quad (3.24f)$$

Ce résultat est légèrement différent de celui obtenu dans les travaux de (Amyot, 2004) donné à l'équation (1.14) en raison du calcul différent de la section occupée par le film liquide et de l'utilisation de la solution de l'épaisseur du film liquide plus exacte donnée par l'équation (3.22). On note R^* le rapport entre ces deux solutions.

$$R^* = 0.9244 \left(\frac{B^4}{A \tan(\psi) \cos^2(\theta_e)} \right)^{1/5} \quad (3.25)$$

Sur la figure 3.3, on voit que les deux solutions restent proche l'une de l'autre pour $\theta_e = 0^\circ$ quelle que soit la valeur de ψ . On voit par ailleurs que l'écart s'accroît entre les deux solutions lorsque la mouillabilité, représentée par l'angle de contact θ_e , diminue ; la solution de AMYOT prédisant une position du point triple beaucoup plus grande.

Il est important de noter que l'invasion complète du liquide dans tout le canal commence lorsque l'épaisseur maximale du film liquide $e(x = 0, t)$ atteint la valeur e_{\max} .

À ce stade, il devient essentiel de développer une théorie de la dynamique d'imbibi-

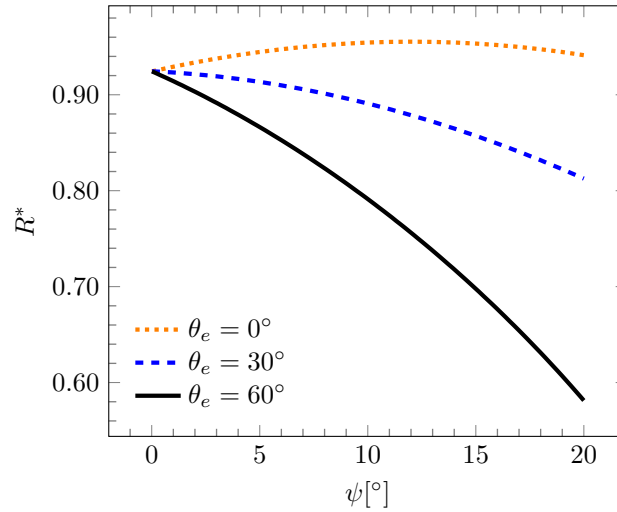


FIGURE 3.3 – Rapport entre la solution (3.24f) et la solution (1.14) de Amyot (2004).

tion dans deux zones fluides distinctes : la zone du film liquide et celle du ménisque central. Pour étudier cette dynamique d'imbibition, nous supposons que le film liquide maintient une épaisseur maximale constante, e_{\max} , déterminée à partir de l'équation (3.23f). Ainsi, on peut déterminer le temps t_{\max} qui caractérise la fin du régime de film liquide. En prenant l'expression (3.22) de l'épaisseur du film au point $x = 0$ et en remplaçant $L_f(t)$ par (3.24f), on trouve

$$e(x = 0, t) = \frac{2.4924}{\epsilon} \left(\frac{B^3 Q_0^2 \mu_\beta}{A^2 \sigma} \right)^{1/5} t^{1/5}, \quad (3.26)$$

et pour $e(x = 0, t) = e_{\max}$, on en déduit le temps t_{\max} de la manière suivante

$$\begin{aligned} t_{\max} &= \frac{(82 + 27\sqrt{6})^2}{4320(1 + \sqrt{6})^5} \frac{\epsilon^5 A^2 \sigma}{B^3 \mu_\beta} \frac{e_{\max}^5}{Q_0^2} \\ &\simeq 0.0104 \frac{\epsilon^5 A^2 \sigma}{B^3 \mu_\beta} \frac{e_{\max}^5}{Q_0^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La position maximale, $L_{f\max}$, atteinte par le point triple dans ce régime est également

obtenue par

$$\begin{aligned} L_{f_{\max}} = L_f(t_{\max}) &= \frac{82 + 27\sqrt{6}}{72(1 + \sqrt{6})^3} \frac{\epsilon^3 A}{B} \frac{\sigma}{\mu_\beta} \frac{e_{\max}^3}{Q_0} \\ &\simeq 0.0501 \frac{\epsilon^3 A}{B} \frac{\sigma}{\mu_\beta} \frac{e_{\max}^3}{Q_0}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le ménisque central commence ainsi à pénétrer dans le canal lorsque le temps t_{\max} est atteint. Par ailleurs, l'épaisseur e_{\max} est inconnue jusqu'à présent et nous allons montrer comment la déterminer dans la partie suivante.

3.4.2 Simplification de l'équation de l'épaisseur de raccordement

Dans cette partie, il est question de simplifier l'équation (3.23f) en déterminant premièrement le terme $\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e=e_{\max}}$. Pour ce faire, à partir de l'équation (3.22) donnant l'expression de l'épaisseur du film liquide, au moment où le ménisque central apparaît en entrée du canal lorsque le temps $t = t_{\max}$, on peut exprimer à cet instant que

$$\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e=e_{\max}} = \frac{\alpha b L_{f_{\max}}}{t_{\max}}. \quad (3.29a)$$

En remplaçant les expressions (3.28) et (3.27) respectivement de $L_{f_{\max}}$ et t_{\max} , la relation (3.29a) devient ainsi

$$\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e=e_{\max}} \simeq -10.9825 \frac{B}{\epsilon^3 A} \frac{\mu_\beta}{\sigma} \frac{Q_0}{e_{\max}^2}. \quad (3.29b)$$

En notant S_{\max} la section correspondant à l'épaisseur de raccordement e_{\max}

$$S_{\max} = \frac{A \epsilon^2 e_{\max}^2}{4B^2}, \quad (3.29c)$$

l'expression (3.29b) devient

$$\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e=e_{\max}} \simeq -5.4913 \frac{Ca_f}{\epsilon B}, \quad (3.29d)$$

où le nombre capillaire Ca_f est défini par

$$Ca_f = \frac{\mu_\beta Q_0}{2\sigma S_{\max}}. \quad (3.29e)$$

Lorsque cette dernière grandeur respecte la contrainte suivante

$$Ca_f \ll 0.1\epsilon B, \quad (3.29f)$$

on a finalement que le terme $\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e=e_{\max}} \ll 1$ à partir de l'expression (3.29d). L'équation (3.23e) devient alors

$$1 - \frac{2B}{\epsilon} \left(\ln \frac{e_{\max}}{\ell} + \frac{\left(1 - \frac{e_{\max}}{\ell}\right)}{\frac{e_{\max}}{\ell}} \right) = 0. \quad (3.30)$$

Une solution analytique de l'équation (3.30) est donnée sous la forme

$$\frac{e_{\max}}{\ell} = -\frac{1}{W\left(-e^{-\left(1+\frac{\epsilon}{2B}\right)}\right)}, \quad (3.31)$$

où W est la fonction de LAMBERT définie telle que $W(x)e^{W(x)} = x$ comme montré dans les travaux de [Corless et al. \(1996\)](#). Pour trouver la branche de la fonction de LAMBERT, on considère que si le terme $\frac{\epsilon}{2B} \rightarrow 0$ (avec $\frac{\epsilon}{2B} > 0$ puisque l'on s'intéresse à un fluide mouillant), on doit avoir $\frac{e_{\max}}{\ell} \rightarrow 1$ (ce qui signifie que $W(-e^{-1}) \rightarrow -1$). La solution (3.31) devient

$$\frac{e_{\max}}{\ell} = -\frac{1}{W_{-1}\left(-e^{-\left(1+\frac{\epsilon}{2B}\right)}\right)}, \quad (3.32)$$

où W_{-1} est la branche -1 de la fonction de Lambert.

En supposant que la contrainte suivante est satisfaite

$$\epsilon \ll 2B, \quad (3.33)$$

l'expression (3.32) donne le résultat suivant en faisant un développement limité au premier ordre

$$\frac{e_{\max}}{\ell} \simeq 1 - \sqrt{\frac{\epsilon}{B}}. \quad (3.34)$$

Sur la figure 3.4, on rapporte les résultats des différentes estimations utilisées pour l'obtention de l'épaisseur e_{\max} , à savoir les expressions (3.32) et (3.34), que l'on compare à la résolution numérique de l'équation (3.23f) prenant en compte l'expression (3.29d) du terme $\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e_{\max}}$. Dans cette analyse, on considère de l'eau comme fluide par-

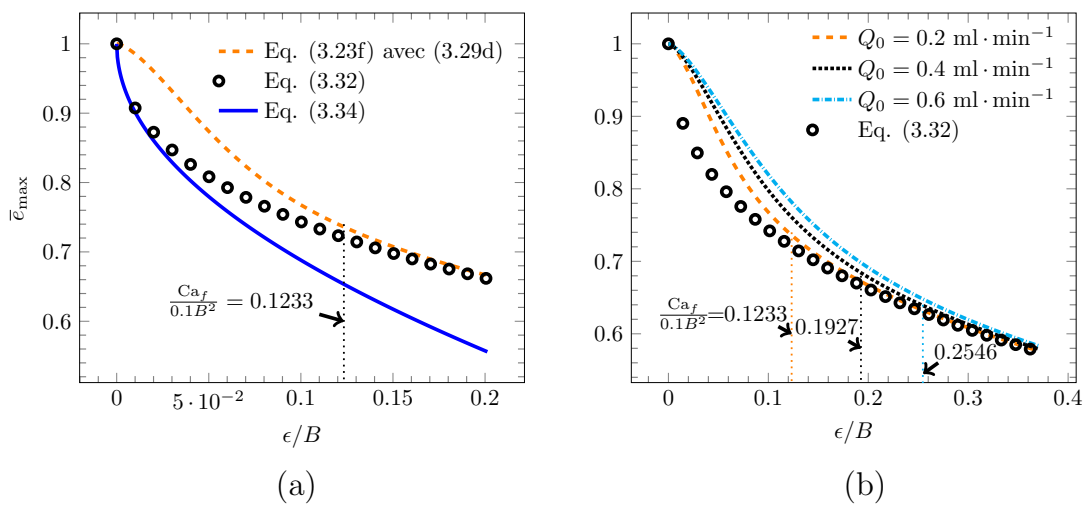


FIGURE 3.4 – Évolution de l'épaisseur $\bar{e}_{\max} = e_{\max}/\ell$ en fonction du paramètre ϵ/B dans un canal de largeur $2\ell = 500 \mu\text{m}$ (a) calculée à partir de l'équation (3.23f) avec l'expression (3.29d) de la pente (lignes pointillées), de l'expression (3.32) (symboles ouverts) et de l'expression (3.34) (ligne continue) : $Q_0 = 0.2 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ (b) $Q_0 = 0.2 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$, $Q_0 = 0.4 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ et $Q_0 = 0.6 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$. Les lignes pointillées verticales indiquent les valeurs de ϵ/B correspondant à la valeur critique extraite de (3.29f), c'est-à-dire, $\frac{\epsilon}{B} = \frac{\text{Ca}_f}{0.1B^2}$. Dans les deux cas, $\theta_e = 0^\circ$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ et $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$.

faitement mouillant ($\theta_e = 0^\circ$) dans un canal de largeur $2\ell = 500 \mu\text{m}$. La figure 3.4(a), pour laquelle un débit volumique $Q_0 = 0.2 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ est imposé, indique que l'estimation de l'épaisseur e_{\max} à partir de l'approximation (3.34) (ligne continue) n'est valide que dans la limite de très petites valeurs du paramètre ϵ/B , impliquant que la contrainte (3.33) est relativement sévère. À l'inverse, l'approximation donnée à l'expression (3.32) (symboles ouverts) est en bon accord avec la solution directe de l'équation (3.23f) (ligne pointillée) lorsque $\frac{\epsilon}{B} > \frac{\text{Ca}_f}{0.1B^2}$, c'est-à-dire la contrainte (3.29f) est satisfaite. Cette

dernière observation est également validée sur la figure 3.4(b) donnant les résultats obtenus à partir de (3.32) (symboles ouverts) et (3.23f) (lignes pointillées) pour trois valeurs de débits volumiques imposés, à savoir, $Q_0 = 0.2 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$, $Q_0 = 0.4 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ et $Q_0 = 0.6 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$. L'analyse de ces résultats révèle que la détermination de e_{\max} à partir de (3.23f) (avec la pente (3.29d)) reste la meilleure estimation possible pour évaluer cette grandeur mais que l'approximation donnée par l'expression (3.32) est aussi valide lorsque la contrainte (3.29f) est établie. Maintenant qu'on a déterminé la valeur de l'épaisseur maximale du film, la dynamique d'imbibition du liquide dans tout le canal peut être analysée. Cette étude présente deux étapes : la première consiste à analyser l'écoulement du film liquide dans un repère mobile de coordonnées (O', x', y) tel que schématisé sur la figure 3.1(b). L'origine O' par rapport au système de coordonnées fixe (O, x, y) , est définie par $e(x = x_{O'}, t) = e(x' = 0, t) = e_{\max}$ où $x_{O'}$ correspond à la position $L_b(t)$ du ménisque (voir figure 3.1(b)). La deuxième étape consiste par la suite d'utiliser la conservation de volume pour étudier l'influence du film liquide sur l'avancée du ménisque central et afin déterminer la position du point triple. La section suivante est consacrée à cette étude.

3.4.3 Régime du film liquide et du ménisque central

A. Dynamique dans la région du film liquide

L'hypothèse du ménisque de forme constante nous permet d'utiliser dans la région mobile du film, la même approche que celle utilisée dans le cas où le film se développe tout seul (voir la section 3.2.2). Vu du repère (O', x', y) , le point triple se déplace ainsi grâce à une pression imposée correspondant à la pression capillaire seuil, notée p_c^* , qui est fonction de l'épaisseur e_{\max} et donnée par

$$p_c^* = \frac{2B\sigma}{\epsilon e_{\max}}. \quad (3.35)$$

L'épaisseur du film liquide dans cette région est alors définie de la même manière que

dans la partie 3.2.2, c'est-à-dire,

$$e(x', t) = \frac{\alpha c L_f'^2}{t} \left(\frac{a}{c} \left(\frac{x'}{L_f'} \right)^2 + \frac{b}{c} \frac{x'}{L_f'} + 1 \right). \quad (3.36)$$

En utilisant la condition $e(x' = 0, t) = e_{\max}$, on obtient la position du point triple dans le repère mobile.

$$\begin{aligned} L_f'(t) &= \sqrt{\frac{\epsilon B e_{\max} \sigma}{36 c \mu_\beta} t}, \quad t \geq t_{\max} \\ &\simeq 0.4915 \sqrt{\epsilon B \frac{\sigma}{\mu_\beta} e_{\max} t}, \quad t \geq t_{\max} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dans le repère fixe (O, x, y) , la position du point triple est notée par $\mathcal{L}_f(t)$ sur la figure 3.1(b) et elle vaut

$$\mathcal{L}_f(t) = L_b(t) + L_f'(t), \quad t \geq t_{\max}. \quad (3.38)$$

A ce stade, on voit que si l'on détermine la position du ménisque au point de raccordement, notée $L_b(t)$, la dynamique du point triple sera également définie. Dans la partie suivante, on va ainsi s'intéresser à cette grandeur.

B. Dynamiques des positions du ménisque central et du point triple

La forme du ménisque étant supposée constante dans sa région, il découle que tous les points de cette partie de l'interface se déplacent à la même vitesse qu'on estime être la vitesse de la position du ménisque au point de raccordement, c'est-à-dire, $\frac{dL_b(t)}{dt}$. En utilisant la conservation du volume fluide dans le canal en partant de la figure 3.1(b), on obtient l'équation décrivant l'évolution temporelle de la vitesse de déplacement du ménisque central au point $e = e_{\max}$ (voir les détails dans l'annexe A) et donc de tout le ménisque par hypothèse de staticité, c'est-à-dire,

$$Q_0 = S_t \frac{dL_b(t)}{dt} + 2Q_f'(t), \quad (3.39a)$$

où

$$S_t = h_0 \ell = \epsilon \ell^2, \quad (3.39b)$$

est la section totale du canal et $Q'_f(t)$ correspond au débit dans la région mobile d'un coin du canal qui peut être calculé par l'expression suivante

$$\begin{aligned} Q'_f(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^{L'_f(t)} S(x', t) dx' \right) \\ &= \frac{A\epsilon^2}{4B^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha^2 c^2 L_f'^4}{t^2} \int_0^{L'_f(t)} \left(\frac{a}{c} \left(\frac{x'}{L'_f} \right)^2 + \frac{b}{c} \frac{x'}{L'_f} + 1 \right)^2 dx' \right). \end{aligned} \quad (3.39c)$$

En observant l'expression (3.39c), on voit que le terme $\frac{\alpha^2 c^2 L_f'^4}{t^2} = e_{\max}^2$, selon l'expression (3.36) de l'épaisseur du film liquide dans la région mobile. L'expression (3.39c) peut ainsi s'exprimer de la manière suivante

$$\begin{aligned} Q'_f(t) &= \frac{A\epsilon^2 e_{\max}^2}{4B^2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^{L'_f(t)} \left(\frac{a}{c} \left(\frac{x'}{L'_f} \right)^2 + \frac{b}{c} \frac{x'}{L'_f} + 1 \right)^2 dx' \right) \\ &= \frac{S_{\max}}{30} \left(30 \left(1 + \frac{b}{c} \right) + 10 \left(2 \frac{a}{c} + \frac{b^2}{c^2} \right) + 15 \frac{ab}{c^2} + 6 \frac{a^2}{c^2} \right) \frac{dL'_f}{dt} \\ &= \frac{10 + \sqrt{6}}{30} S_{\max} \frac{dL'_f}{dt}(t). \end{aligned} \quad (3.39d)$$

où la vitesse de déplacement du point triple dans le repère mobile est obtenue par dérivation temporelle de l'expression (3.37) de la position du point triple dans ce repère et est donnée par l'expression suivante

$$\frac{dL'_f}{dt}(t) \simeq 0.2458 \sqrt{\epsilon B \frac{\sigma e_{\max}}{\mu_\beta t}}, \quad t \geq t_{\max}. \quad (3.40)$$

En combinant l'équation (3.39a) de la conservation de masse avec l'expression (3.39d), on déduit ainsi la vitesse de déplacement du ménisque

$$\frac{dL_b}{dt}(t) = \frac{1}{S_t} \left(Q_0 - \frac{10 + \sqrt{6}}{15} S_{\max} \frac{dL'_f}{dt} \right), \quad t \geq t_{\max}. \quad (3.41)$$

En intégrant cette équation, après avoir dérivé par rapport au temps l'expression (3.37) de la position du point triple dans le repère mobile pour avoir la vitesse $\frac{dL'_f}{dt}$ et avec la condition $L_b(t_{\max}) = 0$, on établit finalement une expression permettant d'analyser la position du ménisque au point de raccordement avec le film liquide de la manière suivante,

$$\begin{aligned} L_b(t) &= \frac{1}{S_t} \left(Q_0(t - t_{\max}) - \frac{10 + \sqrt{6}}{15} S_{\max} (L'_f(t) - L_{f\max}) \right) \\ &\simeq \frac{1}{S_t} \left(Q_0 t - 0.1020A \left(\frac{\epsilon^5 e_{\max}^5 \sigma}{B^3 \mu_\beta} t \right)^{1/2} \right), \quad t \geq t_{\max}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

La connaissance de $L_b(t)$ permet ensuite de déterminer la position du point triple en remplaçant (3.42) dans (3.38) pour avoir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(t) &= \frac{1}{S_t} \left[Q_0 t - \frac{(10 + \sqrt{6})A}{12 (30(1 + \sqrt{6}))^{1/2}} \left(\frac{\epsilon^5 e_{\max}^5 \sigma}{B^3 \mu_\beta} t \right)^{1/2} \right] + \left(\frac{5}{6(1 + \sqrt{6})} \frac{\epsilon B e_{\max} \sigma t}{\mu_\beta} \right)^{1/2} \\ &\simeq \frac{1}{S_t} \left[Q_0 t + \left(0.4915 (\epsilon^3 B \ell^4 e_{\max})^{1/2} - 0.1020A \left(\frac{\epsilon^5 e_{\max}^5}{B^3} \right)^{1/2} \right) \left(\frac{\sigma}{\mu_\beta} t \right)^{1/2} \right], \quad t \geq t_{\max}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Par ailleurs, la mesure de la position $L_b(t)$ n'est pas évident en pratique et donc il est plutôt d'intérêt d'analyser la dynamique du point central du ménisque, noté $L_a(t)$ sur la figure 3.1(b). Cette position est déterminée par

$$\begin{aligned} L_a(t) &= L_b(t) - \ell_m \\ &\simeq \frac{1}{S_t} \left(Q_0 t - 0.1020A \left(\frac{\epsilon^5 e_{\max}^5 \sigma}{B^3 \mu_\beta} t \right)^{1/2} \right) - \ell_m, \quad t \geq t_{\max}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dans cette dernière relation, ℓ_m est la différence entre le point le plus avancé du ménisque $L_b(t)$ et celui le plus bas $L_a(t)$, correspondant ainsi à la taille du ménisque dans la direction x qui est donc supposée constante puisque le ménisque à une forme constante. La démarche permettant de déterminer ℓ_m est présentée dans l'annexe B. Il faut noter que la taille du ménisque ℓ_m est supposée au maximum d'ordre ℓ , ce qui implique que $L_a(t)$ est très proche de $L_b(t)$ et on peut vérifier cette hypothèse en remplaçant $L_b(t)$ par ℓ dans l'expression (3.42), c'est-à-dire,

$$t - 0.1020 \frac{A}{Q_0} \left(\frac{\epsilon^5 e_{\max}^5 \sigma}{B^3 \mu_\beta} \right)^{1/2} t^{1/2} \gg \frac{S_t \ell}{Q_0}. \quad (3.45)$$

Cette équation impose donc que le terme de gauche soit de loin supérieur à celui de droite pour que la taille du ménisque ℓ_m soit négligée. Pour illustrer cela, on montre que le terme de gauche de l'équation (3.45) est de loin supérieur (en considérant un canal des dimensions $\ell = 100 \mu\text{m}$ et $h_0 = 1 \mu\text{m}$ dans lequel s'écoule de l'eau ($\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$) ou de l'huile ($\mu_\beta = 100 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 20 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$) avec un débit $Q_0 = 10^{-4} \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ en considérant un mouillage parfait, c'est-à-dire, $\theta_e = 0^\circ$), dès que le temps $t \approx 0.66 \text{ s}$ pour l'eau ou $t \approx 0.60 \text{ s}$ pour l'huile. On voit ainsi que la taille du ménisque ℓ_m peut être considérée très négligeable par rapport à la position du ménisque au point de raccordement, $L_b(t)$. Ce qui veut dire qu'on aura généralement $L_a(t) \simeq L_b(t)$ à chaque fois que la contrainte décrite à l'équation (3.45) sera satisfaite.

Dans le cas où l'écoulement en film liquide dans le canal est négligé, la position du ménisque, noté $L_w(t)$, a un comportement linéaire en temps donné par

$$L_w(t) = \frac{Q_0}{S_t} t, \quad (3.46)$$

et ce, quel que soit le liquide en écoulement. Contrairement à cette dernière expression, l'expression (3.44) permet de prendre en compte les propriétés du liquide en écoulement lorsque le film n'est pas négligé.

Maintenant que le modèle d'imbibition à débit imposé est défini complètement, il est par ailleurs nécessaire de vérifier l'hypothèse de déplacement à vitesse constante du repère mobile (O', x', y) . Dans l'expression (3.41) de la vitesse du ménisque, on voit cependant qu'elle dépend avec le temps, ce qui semble contredire l'hypothèse de départ. Pour que cette hypothèse soit vérifiée, il faut que le premier terme dans la parenthèse soit de loin plus important que le deuxième. C'est-à-dire,

$$\frac{10 + \sqrt{6}}{15} S_{\max} \frac{dL'_f}{dt} \ll Q_0. \quad (3.47a)$$

En remplaçant S_{\max} et L'_f respectivement par (3.29c) et (3.37), on a

$$Q_0 \gg \frac{10 + \sqrt{6}}{120} \frac{A \epsilon^2 e_{\max}^2}{B^2} \left(\frac{5}{6(1 + \sqrt{6})} \right)^{1/2} \left(\epsilon B \frac{\sigma}{\mu_\beta} e_{\max} \right)^{1/2} t^{-1/2}, \quad (3.47b)$$

ce qui donne

$$t \gg \left(\frac{5}{6(1 + \sqrt{6})} \right) \left(\frac{10 + \sqrt{6}}{120} \right)^2 \frac{A^2 \epsilon^5 e_{\max}^5}{B^3 Q_0^2} \frac{\sigma}{\mu_\beta}, \quad (3.47c)$$

ou encore

$$t \gg \frac{t_{\max}}{4}. \quad (3.47d)$$

Cette contrainte est toujours vérifiée puisque le ménisque entre dans le canal lorsque $t = t_{\max}$.

3.4.4 Discussion sur le modèle

On s'intéresse à présent à l'étude de quelques paramètres qui influencent la dynamique du ménisque central et du point triple, notamment, la vitesse de référence $v_{\beta r}$ (voir l'expression (3.48b)) de chaque fluide (qui est inversement proportionnelle au nombre capillaire Ca^* défini à l'équation (3.48a)) et l'angle de contact θ_e , pour un débit

imposé Q_0 .

$$\text{Ca}^* = \frac{Q_0}{S_t v_{\beta r}}, \quad (3.48a)$$

$$v_{\beta r} = \frac{\sigma}{\mu_{\beta}}. \quad (3.48b)$$

La variation temporelle des positions du point triple ($\bar{\mathcal{L}}_f = \mathcal{L}_f/\ell$) et du ménisque central ($\bar{L}_a = L_a/\ell$) pour différentes vitesses de référence $v_{\beta r}$ est rapportée sur la figure 3.5(a). On considère pour cela deux fluides : de l'eau ayant pour $v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

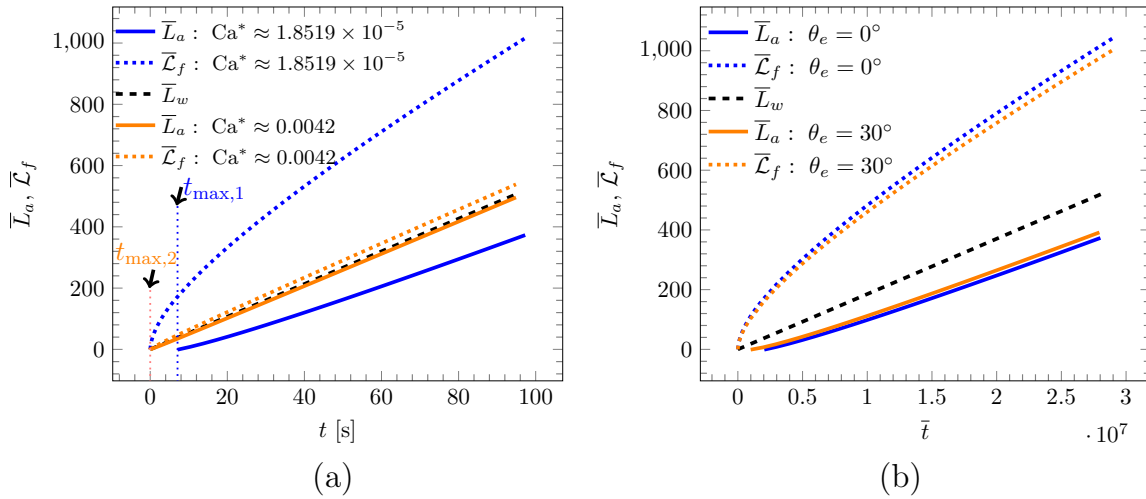


FIGURE 3.5 – Positions du point triple ($\bar{\mathcal{L}}_f = \mathcal{L}_f/\ell$), du ménisque central avec film liquide ($\bar{L}_a = L_a/\ell$) et sans film liquide ($\bar{L}_w = L_w/\ell$), en fonction du temps. (a) Deux fluides sont considérés : 1) $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_{\beta} = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\text{Ca}^* \simeq 1.8519 \times 10^{-5}$); 2) $\sigma = 21.7 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_{\beta} = 68 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} \simeq 0.3191 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\text{Ca}^* \simeq 0.0042$). $t_{\max,1}$ et $t_{\max,2}$ représentent les valeurs de t_{\max} correspondant à l'invasion du ménisque central dans le canal (voir l'équation (3.27)). Avec $\theta_e = 0^\circ$. (b) Influence de l'angle de contact : $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_{\beta} = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\text{Ca}^* \simeq 1.8519 \times 10^{-5}$), $\bar{t} = v_{\beta r} t / \ell$. Dans les deux cas (a) et (b), le canal a pour dimensions $2\ell = 500 \mu\text{m}$ et $h_0 = 20 \mu\text{m}$, et le débit imposé est $Q_0 = 4 \times 10^{-4} \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$.

et de l'huile ayant pour $v_{\beta r} \approx 0.3191 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), en imposant un même débit $Q_0 = 4 \times 10^{-4} \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$. On analyse également l'influence du film liquide sur la position du ménisque central lorsqu'il est ($\bar{L}_a = L_a/\ell$) ou n'est pas ($\bar{L}_w = L_w/\ell$) pris en compte. Ces résultats montrent que la dynamique du point triple devient de plus en plus rapide lorsque

la vitesse $v_{\beta r}$ augmente (c'est-à-dire Ca^* diminue) alors que le ménisque central voit son déplacement ralenti. Ceci s'explique à travers les expressions (3.48a) et (3.48b) où l'on voit que lorsque $v_{\beta r}$ augmente, les effets capillaires deviennent plus dominants par rapport aux effets visqueux, favorisant ainsi le développement des films liquides dans les coins durant les premiers instants. Ces résultats montrent ainsi que plus les effets capillaires sont dominants (pour des valeurs de Ca^* plus petits), plus le temps d'apparition du ménisque central dans le canal est beaucoup plus grand ($t_{\max,1}$ est plus grand par rapport à $t_{\max,2}$). Lorsque les effets visqueux deviennent significatifs par rapport aux effets capillaires, comme c'est le cas de l'huile avec $v_{\beta r} \simeq 0.3191 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, le flux des films liquides dans les coins est moins significatif et le point triple se déplace moins rapidement, conduisant au déplacement du ménisque central avec film liquide très proche au cas où le film n'est pas pris en compte ($\bar{L}_a \simeq \bar{L}_w$). Par ailleurs, bien que L_a , \mathcal{L}_f et t_{\max} ne dépendent pas uniquement de Ca^* , l'analyse faite en faisant varier uniquement $v_{\beta r}$ tout en maintenant Q_0 constant, restent qualitativement inchangée si l'on maintient la vitesse $v_{\beta r}$ constante et l'on fait varier le débit Q_0 .

L'influence de la mouillabilité sur la dynamique du ménisque central et celle du point triple, dans la plage $0^\circ \leq \theta_e \leq 30^\circ$, est analysée sur la figure 3.5(b). Ces résultats montrent que l'augmentation de l'angle de contact θ_e diminue les effets capillaires, ce qui implique que le déplacement du point triple est ralenti et le temps t_{\max} d'apparition du ménisque central diminue également. On voit tout de même que l'écart des résultats dans la plage de θ_e étudiée est relativement faible.

A présent, on illustre sur la figure 3.6 le rapport des temps, $t_p(L_a)/t_p(\mathcal{L}_f)$, en fonction du nombre capillaire global Ca^* pour différentes valeurs de ϵ ; $t_p(\mathcal{L}_f)$ et $t_p(L_a)$ étant respectivement des temps nécessaires pour que le point triple et le ménisque central puissent atteindre une même distance $x = 50\ell = \mathcal{L}_f = L_a$ depuis l'entrée du canal. Le liquide considéré est de l'eau ($v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et on suppose une mouillabilité parfaite. Comme on pouvait s'y attendre, on voit que ce rapport devient significativement élevé à des nombres capillaires plus faibles mais également il augmente avec ϵ . L'analyse

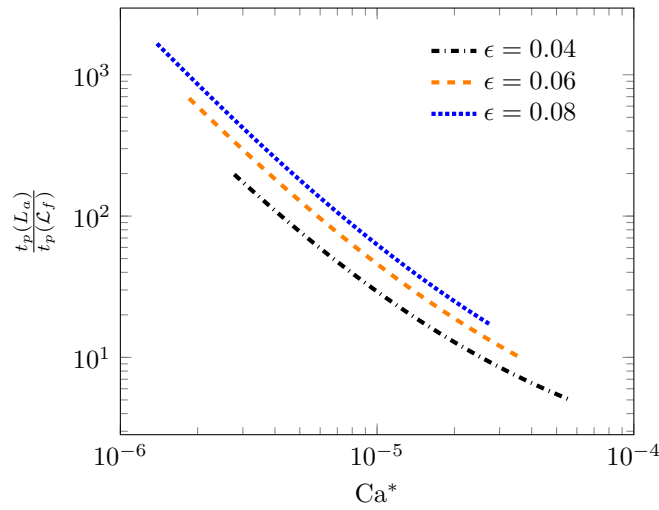


FIGURE 3.6 – Rapport entre les temps $t_p(L_a)$ et $t_p(L_f)$ représentant respectivement les temps nécessaire pour que le ménisque central et le point triple puissent atteindre une position située à $x = 50\ell$ de l'entrée du canal, en fonction de Ca^* . Les données utilisées sont : $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), $2\ell = 500 \text{ } \mu\text{m}$, $\theta_e = 0^\circ$.

est que le film liquide atteint très rapidement la sortie du canal bien avant l'arrivée en sortie du ménisque central; ce qui peut avoir des conséquences majeures dans certaines applications.

Les figures 3.7(a) et 3.7(b) représentent en fonction du temps adimensionnel l'évolution de la vitesse de déplacement du ménisque central adimensionnel dans le repère fixe, notée $\bar{v}_b = \frac{dL_b}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}}$, et celle du point triple à la fois dans le repère fixe, notée $\bar{v}_f = \frac{dL_f}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}}$, et dans le repère mobile, notée $\bar{v}'_f = \frac{dL'_f}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}}$. On considère de nouveau que le liquide qui imbibe dans le canal est de l'eau à un débit $Q_0 = 4 \times 10^{-4} \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ et qu'il y'a une mouillabilité parfaite entre les parois du canal et le liquide. On voit que le ménisque central accélère très rapidement durant les premiers instants puis ralentit et tend vers une valeur asymptotique correspondant à la vitesse de déplacement du ménisque central lorsqu'il n'y a pas de film, notée $\frac{dL_w}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}} = Ca^*$. Quant à la vitesse de déplacement du point triple, les résultats montrent qu'elle décroît dans les deux référentielles et la figure encadrée montre que la vitesse dans le référentiel fixe tend également vers la valeur asymptotique $\frac{dL_w}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}} = Ca^*$, alors que celle dans le repère mobile tend vers zéro.

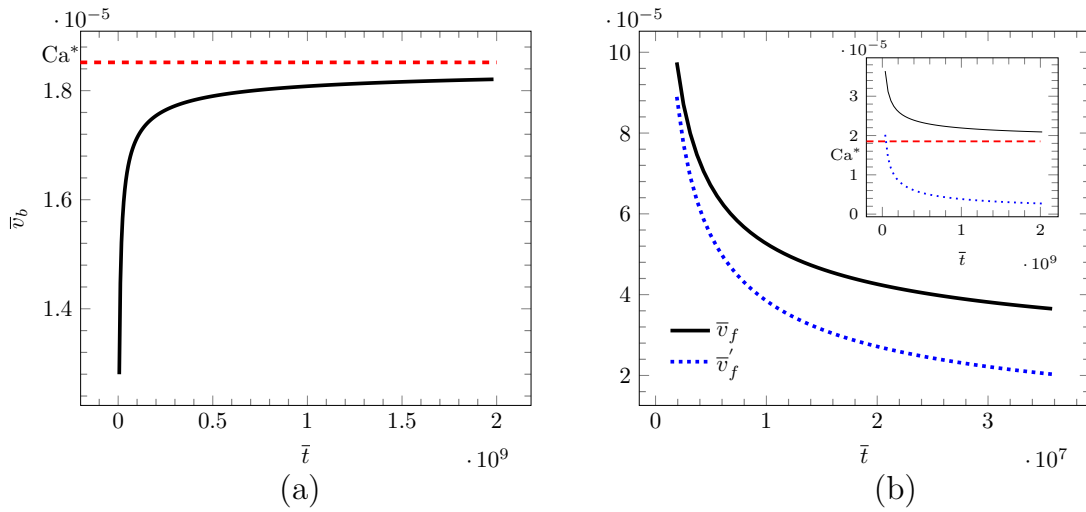


FIGURE 3.7 – Évolution temporelle de la vitesse de déplacement (a) du ménisque central ($\bar{v}_b = \frac{dL_b}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}}$) dans le référentiel fixe (O, x, y) , correspondant à l'équation (3.41) (b) du point triple dans le référentiel mobile (O', x', y) , $\bar{v}'_f = \frac{dL'_f}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}}$, (voir figures 3.1(b)), et dans le référentiel fixe (O, x, y) , $\bar{v}_f = \frac{dL_f}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}} = \bar{v}'_f + \bar{v}_b$. La figure encadrée représente l'évolution de \bar{v}_f et \bar{v}'_f à de temps suffisamment longs. La vitesse de déplacement du ménisque central sans film liquide, $\frac{dL_w}{dt} \frac{1}{v_{\beta r}} = Ca^*$, est représentée par une ligne pointillée rouge. Les données utilisées sont : $2\ell = 500 \mu\text{m}$ et $h_0 = 20 \mu\text{m}$, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), $Q_0 = 4 \times 10^{-4} \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ ($Ca^* \simeq 1.8519 \times 10^{-5}$) et $\theta_e = 0^\circ$.

3.5 Dynamique d'imbibition à pression imposée

On s'intéresse à présent au cas où une pression P_0 est imposée à l'entrée du canal.

3.5.1 Régime du film liquide

Pour déterminer la dynamique du point triple dans ce régime, on utilise directement la condition (3.12c) donnant l'épaisseur du film liquide au point $x = 0$ en fonction de la pression P_0 , avec l'expression (3.22) de l'épaisseur du film liquide prise au point $x = 0$, c'est-à-dire

$$e(0, t) = \frac{2B\sigma}{\epsilon(p_\gamma - P_0)}, \quad (3.49a)$$

ou encore

$$\frac{c\alpha L_f^2}{t} = \frac{2B\sigma}{\epsilon(p_\gamma - p_0)}, \quad (3.49b)$$

ce qui donne

$$L_f(t) = 0.6951B \sqrt{v_{\beta r} \frac{\sigma t}{p_\gamma - P_0}}. \quad (3.49c)$$

Amyot (2004) a proposé la relation (3.50) dans ses travaux et l'écart entre les deux solutions est analysé sur la figure 3.8.

$$L_f(t) = 0.816 \cos(\theta_e) \sigma \sqrt{\frac{t}{\mu_\beta (p_\gamma - P_0)}} \quad (3.50)$$

En notant R^* le rapport entre la solution (3.49c) et la solution (3.50),

$$R^* = 0.8517 \frac{B}{\cos(\theta_e)}, \quad (3.51)$$

on peut observer sur la figure 3.8 que la solution de AMYOT surestime la position du point triple dans le coin par rapport à la solution de l'équation (3.49c). On voit que lorsque l'angle de contact θ_e et l'angle ψ augmentent, cet écart devient de plus en plus grand. Une fois de plus, cette différence est due à l'approximation de l'épaisseur $e(x, t)$. L'expression (3.49c) montre que l'écoulement ne peut se produire que lorsque

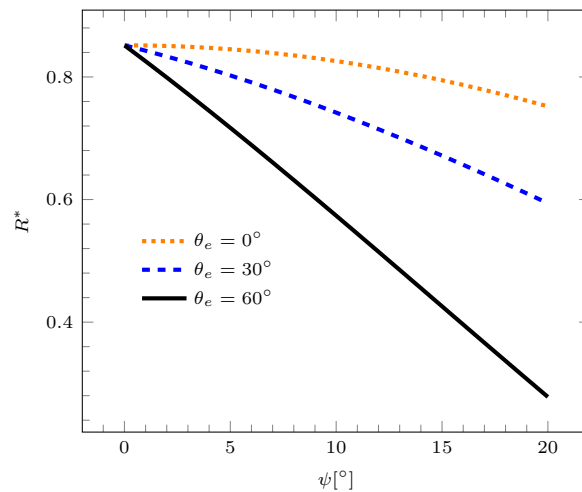


FIGURE 3.8 – Rapport entre la solution (3.50) de Amyot (2004) et la solution (3.49c).

la pression P_0 est strictement inférieure à celle dans le gaz qui sature le canal, c'est-à-dire

$$P_0 < p_\gamma. \quad (3.52)$$

Cette contrainte signifie dans la dynamique à pression imposée, on peut avoir soudainement une imbibition complète dans le canal si la pression appliquée est supérieure ou égale à la pression p_γ . Il est donc nécessaire à présent de définir la pression seuil qui ferait imbiber le liquide dans tout le canal. Cette pression, notée $P_{0\max}$, est donc celle en mesure d'imposer au point $x = 0$, une valeur de l'épaisseur du film correspondant à la valeur de e_{\max} . C'est-à-dire,

$$e_{\max} = \frac{2B\sigma}{\epsilon(p_\gamma - P_{0\max})}. \quad (3.53)$$

La détermination de e_{\max} développée dans la dynamique à débit imposé (voir la partie 3.4.2) basée sur le fait que le terme $\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e_{\max}}$ est très petit par rapport à un est également valide dans la dynamique à pression imposée puisque l'on s'intéresse toujours à un écoulement à très bas nombre capillaire. De ce fait, la valeur seuil de la pression $P_{0\max}$ nécessaire pour l'entrée du ménisque dans le canal peut être obtenue en remplaçant l'expression (3.31) dans (3.53) pour donner

$$\begin{aligned} P_{0\max} &= p_\gamma - \frac{2B\sigma}{\epsilon e_{\max}} \\ &= p_\gamma - \frac{2B\sigma}{\epsilon \ell} W_{-1} \left(-\exp \left(-1 - \frac{\epsilon}{2B} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Cette expression permet ainsi de définir la pression P_0 qu'il faut pour avoir un régime film pur tel que

$$P_0 \leq P_{0\max} < p_\gamma. \quad (3.55)$$

Par ailleurs si aucune hypothèse n'est effectuée sur le terme $\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e_{\max}}$, l'épaisseur e_{\max} est alors déterminée numériquement et en conséquence la pression $P_{0\max}$.

3.5.2 Régime du film liquide et du ménisque central

Lorsqu'on impose une pression P_0 supérieure ou égale à la pression $P_{0\max}$, le liquide imbibe spontanément dans le canal. Ainsi, la même méthodologie que celle utilisée dans la partie **B** du point 3.4.3 dans la dynamique d'imbibition à débit imposé est adoptée, avec cependant $t_{\max} = 0$ et $L_{f\max} = 0$. Par ailleurs, dans l'équation de conservation de volume donnée par l'équation (3.39a) il est nécessaire de redéfinir le débit Q_0 en fonction de la pression P_0 .

A partir de la composante selon x du débit de REYNOLDS donné par l'expression (D.41b) dans l'annexe, une expression de Q_0 peut être obtenue par intégration de cette dernière par rapport à y en aval du ménisque, c'est-à-dire, pour $0 \leq x \leq L_a(t)$.

$$Q_0(t) = 2 \int_0^\ell q_{\beta x} dy = -\frac{\epsilon^3}{6\mu_\beta} \int_0^\ell \left(y^3 \frac{\partial p_\beta}{\partial x} \right) dy \quad (3.56a)$$

En supposant que la pression reste uniforme dans chaque section dans cette région, on obtient

$$Q_0(t) = -\frac{h_0^3 \ell}{24\mu_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq L_a(t), \quad (3.56b)$$

et en intégrant cette relation entre $x = 0$ and $x = L_a(t)$ d'une part, et $P_{0\max}$ et P_0 d'autre part, on obtient finalement

$$Q_0(t) = \frac{h_0^3 \ell}{24\mu_\beta} \frac{(P_0 - P_{0\max})}{L_a(t)}. \quad (3.56c)$$

En utilisant la conservation de volume donnée à l'équation (3.39a), et en se rappelant que $\frac{dL_a(t)}{dt} = \frac{dL_b(t)}{dt}$ puisque le ménisque ne se déforme pas, l'équation décrivant la dynamique de $L_a(t)$ est ainsi définie par

$$L_a(t) \left(S_t \frac{dL_a(t)}{dt} + 2Q'_f \right) = \frac{h_0^3 \ell}{24\mu_\beta} (P_0 - P_{0\max}), \quad t \geq 0. \quad (3.57)$$

Cette dernière équation peut se résoudre numériquement mais sachant que le débit Q'_f est donné par

$$Q'_f(t) = 0.1020 S_{\max} \sqrt{\epsilon B \frac{\sigma e_{\max}}{\mu_\beta t}}, \quad t \geq t_{\max}. \quad (3.58)$$

et donc est proportionnel à $t^{-1/2}$, il est possible de déduire une expression simple donnant $L_a(t)$ en posant que

$$L_a(t) = at^{1/2}, \quad (3.59a)$$

puisque $L_a(t_{\max}) = 0$. En remplaçant cette dernière expression dans l'équation (3.57), on obtient une équation du second degré sur la constante a et on déduit que

$$L_a(t) = \left((a_1^2 + 2a_2)^{1/2} - a_1 \right) t^{1/2}, \quad (3.59b)$$

où les constantes a_1 and a_2 sont les deux solutions de l'équation sur a , définies par

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{10 + \sqrt{6}}{24\sqrt{30}(1 + \sqrt{6})} \frac{A}{S_t} \left(\frac{\epsilon^5 e_{\max}^5 \sigma}{B^3 \mu_\beta} \right)^{1/2} \\ &\simeq 0.0510 \frac{A}{S_t} \left(\frac{\epsilon^5 e_{\max}^5 \sigma}{B^3 \mu_\beta} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.59c)$$

$$a_2 = \frac{h_0^2}{24\mu_\beta} (P_0 - P_{0\max}). \quad (3.59d)$$

La position du point triple peut ainsi être obtenue à partir de l'expression (3.38) telle que

$$\mathcal{L}_f(t) = \left((a_1^2 + 2a_2)^{1/2} - a_1 + a_3 \right) t^{1/2} + \ell_m, \quad t \geq 0 \quad (3.60a)$$

où la constante a_3 est donnée par

$$a_3 \simeq 0.4915 \left(\epsilon B \frac{\sigma}{\mu_\beta} e_{\max} \right)^{1/2}. \quad (3.60b)$$

Dans la dynamique à pression imposée, il n'est pas évident de déterminer la taille du ménisque ℓ_m puisqu'on fait l'hypothèse que le ménisque entre directement dans le canal. Cette hypothèse revient à considérer que $L_{f \max}$ et t_{\max} sont nuls et donc il n'est pas possible d'obtenir une expression de la pente $\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e=e_{\max}}$ qui soit indépendant du temps. Sachant que $\ell_m = \mathcal{O}(\ell)$, on peut aisément négliger cette grandeur pour n'avoir que $\mathcal{L}_f(t) \simeq L_a(t) + L'_f(t)$ lorsque la contrainte suivante est respectée

$$\min(L_a(t), L'_f(t)) \gg \ell, \quad (3.60c)$$

c'est-à-dire,

$$t \gg \ell^2 \min \left(\frac{1}{((a_1^2 + 2a_2)^{1/2} - a_1)^2}, \frac{4.1395\mu_\beta}{\epsilon B e_{\max} \sigma} \right). \quad (3.60d)$$

Afin de vérifier cette contrainte, on considère un canal des dimensions $\ell = 100 \mu\text{m}$ et $h_0 = 1 \mu\text{m}$ dans lequel imbibe de l'eau ($\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$) ou de l'huile ($\mu_\beta = 100 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 20 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$) à une pression imposée de $P_0 - P_{0\max} = 10 \text{ Pa}$ et $\theta_e = 0^\circ$. Ces données conduit à $t \gg 6 \times 10^{-4} \text{ s}$ pour l'eau et $t \gg 0.2 \text{ s}$ pour l'huile.

L'expression (3.60a) se réduit finalement à la forme suivante

$$\mathcal{L}_f(t) = \left((a_1^2 + 2a_2)^{1/2} - a_1 + a_3 \right) t^{1/2}, \quad (3.60e)$$

avec le temps t respectant la contrainte (3.60d).

Dans le cas où le film liquide n'est pas pris en compte, on a que $Q'_f = 0$ et l'équation (3.57) conduit à la relation suivante

$$L_w(t) = h_0 \left(\frac{P_0 - P_{0\max}}{12\mu_\beta} t \right)^{1/2} = (2a_2 t)^{1/2}, \quad (3.61)$$

qui est le classique résultat de [Lucas \(1918\)](#) et [Washburn \(1921\)](#).

3.5.3 Discussion sur le modèle

Il est question à présent d'analyser la dynamique d'imbibition du point triple et du ménisque central lorsque l'on impose une pression telle que $P_0 \geq P_{0\max}$. On va également étudier l'impact de paramètres $v_{\beta r}$ et θ_e sur le modèle.

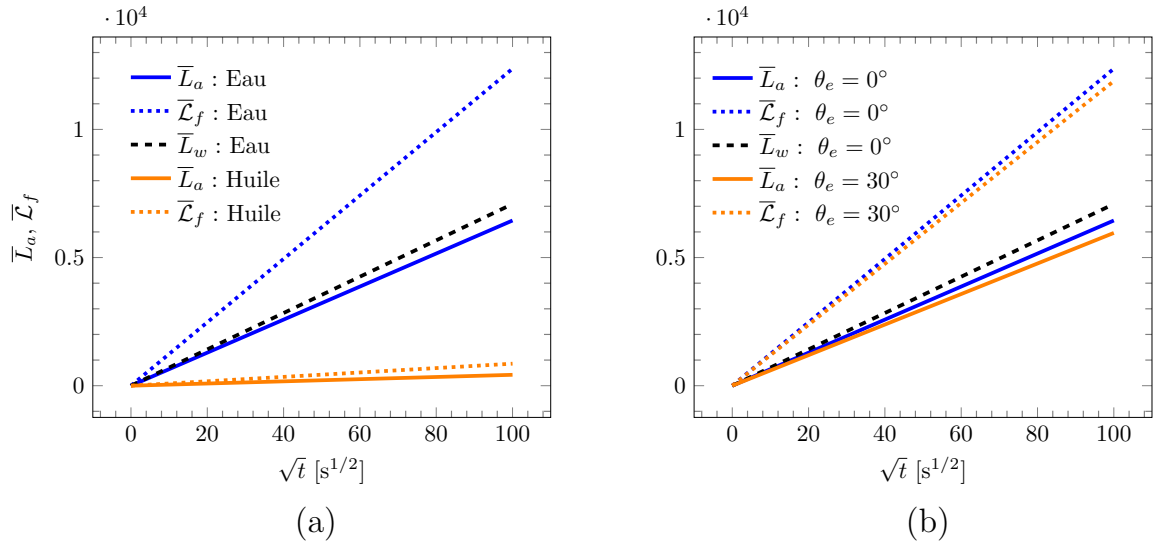


FIGURE 3.9 – Positions du point triple ($\bar{\mathcal{L}}_f = \mathcal{L}_f/\ell$), du ménisque central avec film liquide ($\bar{\mathcal{L}}_a = L_a/\ell$) et sans film liquide ($\bar{\mathcal{L}}_w = L_w/\ell$), en fonction de la racine carrée du temps pour $P_0 - P_{0\max} = 0.0940$ bar. (a) Deux fluides sont considérés : 1) $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$); 2) $\sigma = 21.7 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 68 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} \approx 0.3191 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). Avec $\theta_e = 0^\circ$. (b) Influence de l'angle de contact : $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). Dans les deux cas (a) et (b), le canal a pour dimensions $2\ell = 500 \text{ } \mu\text{m}$ et $h_0 = 20 \text{ } \mu\text{m}$.

On considère de nouveau de l'eau et de l'huile ayant pour propriétés, respectivement, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, c'est-à-dire $v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\sigma = 21.7 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 68 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, c'est-à-dire $v_{\beta r} \approx 0.3191 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On représente sur la figure 3.9(a) les positions du point triple et du ménisque central en fonction de la racine carrée du temps. On remarque à nouveau, comme pour le cas de l'imbibition à débit imposé, que l'écart entre le point triple et le ménisque central est plus important lorsque les effets capillaires sont dominants, c'est-à-dire une vitesse de référence $v_{\beta r}$ plus grande ; résultant du fait que la capillarité est la force motrice pour le développement des films dans les coins du canal et donc contribue à ralentir le déplacement du

ménisque central.

L'influence de l'angle de contact θ_e sur la percée du point triple et celle du ménisque central est abordée sur figure 3.9(b), dans une plage comprise entre 0° et 30° . Une fois de plus on observe que la dynamique du point triple et celle du ménisque central est légèrement ralentie dans cette plage à cause des effets capillaires qui diminuent lorsque l'angle de contact augmente.

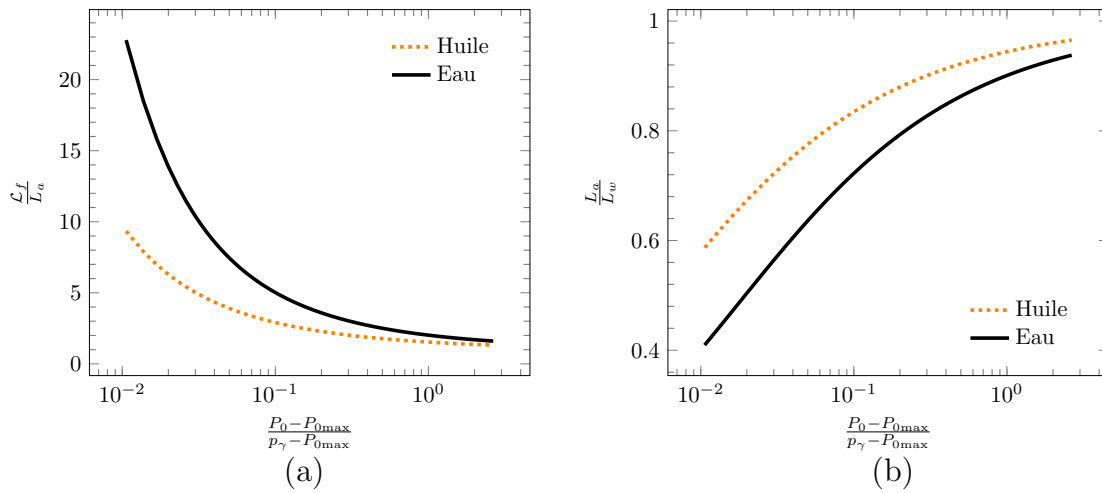


FIGURE 3.10 – Influence de la différence de pression $P_0 - P_{0\max}$ sur le rapport entre (a) les positions du point triple et du ménisque central, \mathcal{L}_f/L_a (b) les positions du ménisque avec et sans film liquide, L_a/L_w . Deux liquides parfaitement mouillants sont considérés, à savoir de l'eau ($\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, avec $v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et de l'huile ($\sigma = 21.7 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 68 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, avec $v_{\beta r} \approx 0.3191 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). Les caractéristiques du canal sont $2\ell = 500 \text{ }\mu\text{m}$ et $h_0 = 20 \text{ }\mu\text{m}$.

Bien que l'écart entre la position du ménisque central avec (voir (3.59b)) et sans (voir (3.61)) film soit moins significatif sur les figures 3.9(a) et (b), on analyse davantage ce rapport sur la figure 3.10 en gardant les mêmes fluides et caractéristiques du canal que ceux utilisés sur les figures 3.9. Premièrement, la dépendance du ratio \mathcal{L}_f/L_a en fonction de la différence de pression $P_0 - P_{0\max}$ est représentée sur la figure 3.10(a). Puisqu'on considère que la contrainte exprimée à l'équation (3.60d) est satisfaite, de sorte que la taille du ménisque ℓ_m soit négligeable tout le temps dans l'expression (3.60a) de la position du point triple, contrairement à la dynamique à débit imposé, on a cette fois-ci que le ratio \mathcal{L}_f/L_a est indépendant du temps. Tout d'abord, on voit que ce rapport est d'autant plus grand lorsque les effets capillaires sont importants (cas de

l'eau) et de plus en plus grand à des faibles valeurs de $P_0 - P_{0\max}$. Ce résultat montre que plus la pression d'injection du liquide est importante, moins les films liquides se développent et inversement. On remarque les mêmes effets sur la figure 3.10(b) qui montre que plus la différence de pression $P_0 - P_{0\max}$ est faible, plus le ratio L_a/L_w est petit, résultant du fait que le liquide imbibe essentiellement par les coins et donc la percée du ménisque central est ralentie. On voit également que ce rapport tend vers l'unité plus la différence de pression augmente.

3.6 Validation du modèle

Dans cette partie on compare les résultats observés expérimentalement dans les travaux de Amyot (2004) et ceux du modèle développé dans ce chapitre.

3.6.1 Présentation du processus expérimental de O. AMYOT

Dans ses travaux de thèse dédiés à l'étude des écoulements diphasiques dans un contact rugueux, Amyot (2004) a réalisé des expériences d'imbibition dans un canal de section triangulaire représentatif d'un contact rugueux, de longueur 300 mm, de largeur $2\ell = 50$ mm et de profondeur maximale $h_0 = 1$ mm, pour analyser expérimentalement l'influence des écoulements en film de coin. Ce canal, qui est le micromodèle du banc

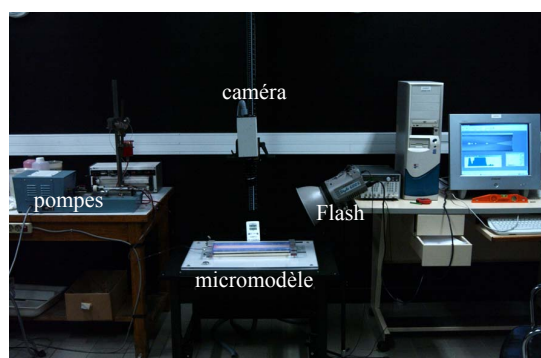


FIGURE 3.11 – Banc expérimental de Amyot (2004).

d'essai présenté sur la figure 3.11 et placé horizontalement afin de négliger les forces de gravité, est composé d'une plaque en résine époxy et une autre en plexiglas pour

permettre de visualiser le processus d'invasion du liquide à travers une caméra ou un appareil photo. Le système d'injection du liquide consiste à imposer soit un débit par utilisation d'un pousse seringue à débit variable (entre $0.019 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ et $10 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$), soit une pression en faisant varier la hauteur du liquide dans le réservoir, pour avoir la pression du liquide très proche de celle de l'air. Deux huiles mouillantes de propriétés différentes ont été utilisées pour ces expériences : une huile moins visqueuse ayant pour propriétés : $\mu_\beta = 68 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 21.7 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ ($v_{\beta r} \approx 0.3191 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), $\rho_\beta = 968 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, et une huile plus visqueuse de viscosité dynamique $\mu_\beta = 220 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, de tension de surface $\sigma = 23.3 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ ($v_{\beta r} \approx 0.1059 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et de masse volumique $\rho_\beta = 970 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; on appellera ces huiles par *liquide 1* et *liquide 2* respectivement pour le liquide moins visqueux et pour le liquide plus visqueux. L'injection du liquide est réalisée de telle que le nombre capillaire globale Ca^* donné à l'équation (3.48a) reste suffisamment petit.

3.6.2 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

A. Dynamique à débit imposé

En imposant un débit $Q_0 = 0.32 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ du liquide 1, on montre sur la figure 3.12

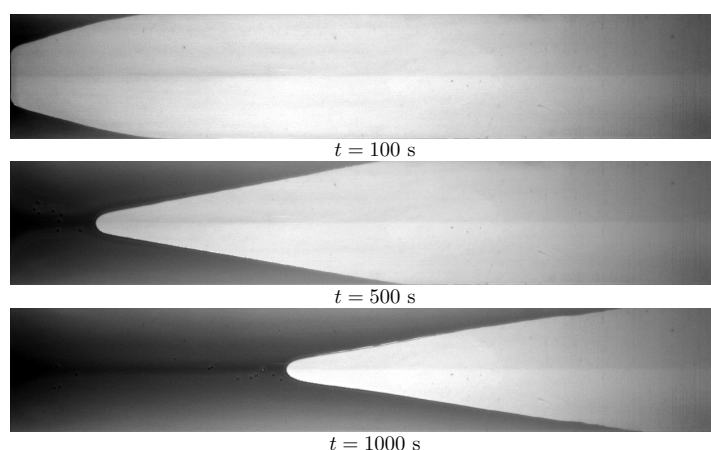


FIGURE 3.12 – Pénétration d'un liquide à différents instants dans un canal à débit imposé visualisée dans les travaux de Amyot (2004) : $2\ell = 50 \text{ mm}$, $h_0 = 1 \text{ mm}$, $\mu_\beta = 68 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 21.7 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $Q_0 = 0.32 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$.

trois exemples d'images enregistrées correspondant aux instants $t = 100 \text{ s}$, $t = 500 \text{ s}$

et $t = 1000$ s. L'image à l'instant $t = 100$ s reflète bien le régime du film liquide où l'on voit que l'écoulement se produit uniquement par le coin alors que les images aux instants $t = 500$ s et $t = 1000$ s sont représentatives du régime du film liquide et du ménisque. Partant de ces images, la position du ménisque central, $L_a(t)$, peut ainsi être représentée en fonction du temps.

Les mesures expérimentales de la position du ménisque central en fonction du temps sous forme adimensionnel, réalisées par Amyot (2004) sont représentées sur les figures 3.13(a) et 3.13(b) (par les symboles circulaires) respectivement pour le liquide 1 injecté à un débit $Q_0 = 0.32 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ (ce qui correspond à un nombre capillaire global $\text{Ca}^* \approx 6.6851 \times 10^{-4}$) et pour le liquide 2 injecté à un débit $Q_0 = 0.1 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ (correspondant à $\text{Ca}^* \approx 6.2947 \times 10^{-4}$). On représente également, par une ligne conti-

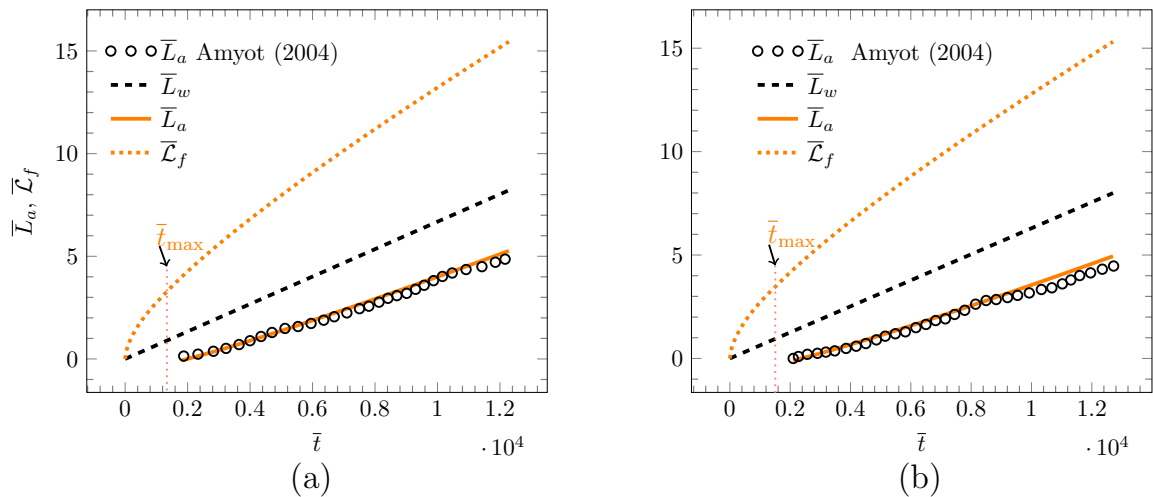


FIGURE 3.13 – Comparaison de la position du ménisque central, $\bar{L}_a = L_a/\ell$, du modèle établi dans la partie 3.4.3 et donné à l'expression (3.44) (ligne continue) et celle mesurée expérimentalement par Amyot (2004) (symboles circulaires) en fonction du temps $\bar{t} = v_{\beta r}t/\ell$. La position du point triple, $\bar{L}_f = \mathcal{L}_f/\ell$ (voir l'expression (3.43)) et celle du ménisque central sans film liquide, $\bar{L}_w = L_w/\ell$ (voir l'expression (3.46)) dérivant de la prédiction sont également représentées. Le canal triangulaire a pour caractéristiques $2\ell = 50 \text{ mm}$ et $h_0 = 1 \text{ mm}$, avec une mouillabilité parfaite ($\theta_e = 0^\circ$) du liquide. (a) Liquide 1 : $\sigma = 21.7 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 68 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} \approx 0.3191 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) avec $Q_0 = 0.32 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ ($\text{Ca}^* \approx 6.6851 \times 10^{-4}$); (b) Liquide 2 : $\sigma = 23.3 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 220 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ ($v_{\beta r} \approx 0.1059 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) avec $Q_0 = 0.1 \text{ ml} \cdot \text{min}^{-1}$ ($\text{Ca}^* \approx 6.2947 \times 10^{-4}$).

nue, la prédiction numérique du ménisque central établie à l'expression (3.44) dont on assure la validité par comparaison avec la mesure expérimentale, avec une erreur

relative inférieure à 10% dans les deux cas. Les mesures expérimentales confirment et mettent en évidence l'existence d'un régime du film, comme on peut le voir sur ces figures, la première mesure du ménisque central est réalisée à un temps différent de zéro, correspondant au temps $t = t_{\max}$ donné à l'expression (3.27). Avant $t = t_{\max}$, l'écoulement s'est produit essentiellement par le coin comme visualisé par exemple sur la figure 3.12 pour le liquide 1, jusqu'à l'instant $t = 100$ s. Le modèle établi dans ces travaux met en lumière tout son intérêt, en comparant la mesure expérimentale du ménisque central avec le modèle prédictif n'incluant pas de film liquide (ligne pointillée sur les figures 3.13(a) et (b)) donné par l'expression (3.46), $\bar{L}_w = L_w/\ell$, où l'on voit que ce dernier surestime sensiblement la position du ménisque central. La prédiction de la position du point triple est également rapportée sur ces figures où l'on voit bien évidemment que le liquide dans le coin devrait atteindre la sortie bien avant l'arrivée du ménisque central.

Pour vérifier davantage la validité du modèle théorique notamment l'hypothèse selon laquelle le ménisque dans la région du ménisque central conserve sa forme durant toute l'invasion du liquide, c'est-à-dire qu'il a une forme similaire à celle d'un ménisque en condition statique, la valeur de l'épaisseur de raccordement e_{\max} prédite à partir de l'équation (3.23f) en substituant l'expression (3.29b) de la pente $\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e=e_{\max}}$ a été positionnée à l'emplacement correspondant à l'interface sur quelques images enregistrées (voir les images types qui sont illustrées sur la figure 3.12). Partant de ce point, la taille du ménisque a été évaluée pour quelques instants pour l'imbibition du liquide 1, conduisant à $\bar{\ell}_m = \ell_m/\ell \approx 0.37, 0.31, 0.35, 0.33, 0.31$ pour $t = 400, 500, 600, 700, 800$ s, respectivement, c'est-à-dire pour une valeur moyenne de la taille du ménisque adimensionnelle $\bar{\ell}_m \approx 0.334$; ce qui est en accord satisfaisant puisque la différence relative est d'environ 7%.

B. Dynamique à pression imposée

Dans le cas d'une imbibition à pression imposée, les mesures réalisées par Amyot (2004) ont été présentées uniquement que pour le cas où le liquide imbibe par les

coins du canal triangulaire, c'est-à-dire le régime du film liquide. Le canal utilisé reste le même que celui dans lequel les expériences d'imbibition à débit imposé ont été réalisées (voir les dimensions de ce canal dans la partie **A**), dans lequel le liquide 2 ($\sigma = 23.3 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 220 \text{ mPa} \cdot \text{s}$) a été utilisé, en supposant également une mouillabilité parfaite ($\theta_e = 0^\circ$).

En imposant une différence de pression $p_\gamma - P_0 = 100 \text{ Pa}$, correspondant à la pression capillaire en entrée du canal, la mesure de la position du point triple a été réalisée et est représentée sur la figure 3.14 sous forme adimensionnelle (symboles circulaires) en fonction de la racine carrée du temps adimensionnel, $\sqrt{\bar{t}}$ (avec $\bar{t} = v_{\beta r} t / \ell$). Le résultat

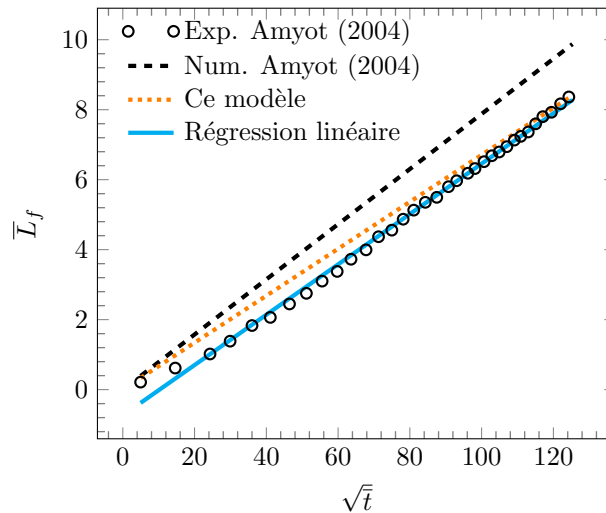


FIGURE 3.14 – Comparaison de la position du point triple dans le régime du film, $\bar{L}_f = L_f / \ell$, mesurée par Amyot (2004) (symboles circulaires) avec la prédiction donnée par l'expression (3.49c) (points oranges), en fonction de $\sqrt{\bar{t}}$ ($\bar{t} = v_{\beta r} t / \ell$). La prédiction donnée par l'expression (3.50) établie dans les travaux de Amyot (2004) est également présentée (ligne pointillée). Les caractéristiques du canal sont $2\ell = 50 \text{ mm}$, $h_0 = 1 \text{ mm}$ avec une différence de pression $p_\gamma - P_0 = 100 \text{ Pa}$ en entrée du canal, avec un liquide de propriétés $\sigma = 23.3 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_\beta = 220 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\theta_e = 0^\circ$.

expérimental montre que la mesure expérimentale de la position du point triple suit bien une loi linéaire en $\sqrt{\bar{t}}$ et on trouve un bon accord avec le modèle prédictif établi dans ces travaux et donné à l'expression (3.49c) lorsque $\sqrt{\bar{t}}$ devient à peu près supérieur à 70. Il faut noter que pour des valeurs de $\sqrt{\bar{t}}$ inférieures à 70, correspondant aux temps courts de la mesure expérimentale, les observations expérimentales montrent une variation de l'épaisseur du film au point $x = 0$ donnée par l'expression (3.49a),

c'est-à-dire que la pression capillaire au point $x = 0$ (correspondant à la différence de pression $p_\gamma - P_0$) ne vaut pas 100 Pa telle qu'elle a été estimée dans les travaux de AMYOT mais plutôt qu'elle varie en début de l'expérience ; c'est ce qui peut donc expliquer la divergence des résultats numériques et expérimentaux dans cette zone. Par ailleurs, la droite de régression linéaire de données mesurées donne une pente de 0.0719 alors que le modèle développé dans ces travaux donne une pente de 0.0671 et une pente de 0.0788 est obtenue pour le modèle numérique donné par l'expression (3.50) de Amyot (2004). Ici, l'écart entre les deux modèles numériques s'explique par la discussion réalisée sur la figure 3.2 dans la partie 3.2.2 sur l'approximation de la solution de l'épaisseur du film liquide.

3.7 Conclusion

La modélisation du processus d'imbibition dans un canal aplati de section triangulaire a été présentée dans ce chapitre, en prenant en compte les écoulements en film liquide se développant dans les coins du canal. En partant des équations de REYNOLDS qui se base sur la théorie de la lubrification, nous avons supposé que la phase gazeuse (constituée d'un gaz inerte) est à pression constante pour les équations de REYNOLDS ne soient définies que dans la phase liquide. Nous avons établi des solutions analytiques décrivant la dynamique du point le plus avancée de l'interface liquide-gaz (appelé point triple) et celle du point le plus reculé de cette même interface (appelé ménisque central), en considérant que le liquide s'écoule soit sous l'effet d'un débit constant imposé, soit d'une pression constante imposée à l'entrée d'un canal ou soit uniquement par capillarité. Dans le cas où la dynamique d'imbibition s'effectue sous une condition de débit constant imposé à l'entrée du canal, on a montré que deux régimes d'écoulements peuvent exister : un premier régime où l'écoulement se produit uniquement par les coins pendant lequel l'épaisseur du film à l'entrée du canal augmente avec le temps et un deuxième régime qui démarre lorsque cette dernière

épaisseur atteint un certain seuil, qui conduit à l'invasion du liquide dans tout le canal. Pour une condition de pression imposée, l'étude a montré que selon le niveau de pression imposée, si l'épaisseur du film en entrée du canal (qui ne dépend pas avec le temps dans ce cas) est inférieure à la valeur de l'épaisseur seuil, l'écoulement se produira uniquement par les coins sans invasion du liquide dans tout le canal. En revanche, si l'on impose une pression conduisant à une valeur de l'épaisseur du film liquide en entrée du canal supérieure ou égale à la valeur de l'épaisseur seuil, l'écoulement va se produire directement dans tout le canal avec un film liquide en amont. Dans les deux cas de conditions, les résultats obtenus ont montré qu'il s'avère nécessaire de prendre en compte les effets d'écoulements en film se développant dans les angles vifs du canal, du fait que le flux qui y circule ralentit significativement l'invasion du ménisque central lorsque le nombre capillaire est suffisamment petit. La comparaison des mesures expérimentales issues de la littérature avec le modèle a confirmé sa robustesse.

Chapitre 4

Application de la dynamique d'imbibition en étanchéité

Sommaire

4.1 Contexte	105
4.2 Prédiction d'une fuite liquide	106
4.2.1 Transitoire d'une fuite liquide	106
4.2.2 Corrélation entre une fuite liquide et une fuite gazeuse	111
4.3 Fuite stationnaire en présence de l'évaporation	116
4.3.1 Condensation capillaire	116
4.3.2 Fuite par les coins	118
4.3.3 Cas d'une invasion centrale	131
4.4 Conclusion	138

Ce chapitre présente l'intérêt de la dynamique d'imbibition développée dans le chapitre 3 pour analyser une fuite liquide sur un assemblage mécanique. Dans une première partie, il sera donc question de montrer la corrélation qui peut exister entre un débit de fuite liquide et un débit de fuite gazeuse sur un chemin de fuite caractéristique dans les mêmes conditions de pression. Dans une seconde partie, un calcul explicite de la fuite sera présenté dans le cas d'un liquide volatil en considérant le phénomène d'évaporation.

4.1 Contexte

Lorsqu'un effort de serrage est appliqué sur une bride et un joint, il résulte une interface entre les deux matériaux comme nous l'avons déjà souligné précédemment. L'assemblage mécanique brides-joint de diamètre moyen d_m et de largeur de piste ℓ_p , après application d'un effort de serrage, l'interface résultant constitue un chemin préférentiel de fuite du fluide à étancher. Au *Laboratoire d'Étanchéité Maestral* (laboratoire commun du CEA et de TECHNETICS Group France), la caractérisation de cette fuite est réalisée en faisant utiliser de l'hélium comme fluide et la mesure de la fuite est effectuée avec un spectromètre de masse. Le chemin de fuite est généralement de forme spiralée suite au procédé de tournage des brides, et est assimilée à un canal de section triangulaire dans ces travaux. Les dimensions typiques que l'on peut obtenir après serrage sont une profondeur maximale h_0 de l'ordre de $2 \mu\text{m}$ ou moins et de largeur 2ℓ de l'ordre de $20 \mu\text{m}$.

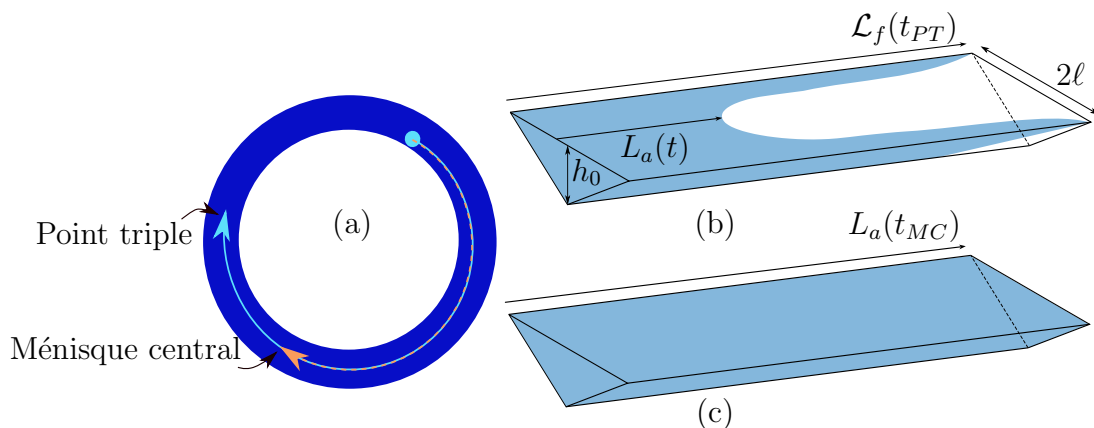


FIGURE 4.1 – (a) Représentation des positions du point triple et du ménisque central dans un canal formé par l'interface brides-joint (b) Situation où une fuite liquide transitoire débute par les coins du canal triangulaire (c) Situation d'une fuite liquide stabilisée.

A ce jour, la prédiction de l'étanchéité d'un assemblage mécanique est réalisée en faisant des mesures de fuite en hélium en appliquant une pression P_0 au gaz, même si l'assemblage mécanique doit fonctionner dans un environnement où il doit étancher un liquide. Par la représentation de la figure 4.1, on voit que l'analyse d'une fuite liquide sur

l'interface brides-joint peut se présenter de deux façons : une fuite dite transitoire qui peut être due aux écoulements en film qui se développent dans les coins (figure 4.1(b)) et une fuite dite stabilisée qui est une situation où le liquide a saturé complètement le canal (figure 4.1(c)).

Lorsqu'on réalise des essais en hélium pour qualifier l'étanchéité de l'assemblage mécanique brides-joint, l'apparition de la fuite en hélium sur l'appareil de mesure est quasi instantanée grâce notamment à la mobilité du gaz utilisé. En revanche, si l'on doit réaliser un test en liquide sur le même assemblage mécanique, le liquide va mettre un certain temps d'écoulement avant que la fuite n'apparaisse sur l'appareil de mesure. Ceci est dû notamment à la viscosité du liquide, à la masse volumique qui rend le liquide moins mobile que le gaz ou encore aux effets capillaires et à la dynamique d'invasion. La dynamique d'imbibition développée dans le chapitre 3 est donc un outil qui va permettre d'estimer le temps nécessaire pour qu'une fuite liquide apparaisse sur un appareil de mesure lors d'un essai en liquide pour qualifier l'étanchéité d'un assemblage mécanique brides-joint, dans les hypothèses considérées dans ce travail.

4.2 Prédiction d'une fuite liquide

4.2.1 Transitoire d'une fuite liquide

L'objectif de cette partie est de donner une estimation du temps que peut mettre un liquide qui s'écoule à l'interface bride-joint, c'est-à-dire dans le canal spiralé tel que schématisé sur la figure 4.1(a), pour qu'une fuite liquide apparaisse en considérant les deux configurations représentées sur les figures 4.1(b) et 4.1(c).

Dans la configuration d'une fuite liquide transitoire, c'est-à-dire le moment où le point triple arrive à la sortie du canal spiralé ($\mathcal{L}_f(t_{PT}) = L_s$, avec L_s correspondant à la longueur déroulée de la spirale qui peut être approximée par $L_s \simeq \pi n_s d_m$, avec n_s le nombre de spires), on peut déduire le temps t_{PT} que met le point triple pour arriver à la sortie du canal spiralé, à partir de l'expression (3.60e) donnant la position du point

triple établie dans l'étude de la dynamique d'imbibition avec une condition de pression imposée en entrée du canal triangulaire lorsque le liquide s'écoule dans tout le canal, de la manière suivante

$$t_{PT} = \frac{\pi^2 n_s^2 d_m^2}{\left((a_1^2 + 2a_2)^{1/2} - a_1 + a_3 \right)^2}, \quad (4.1a)$$

avec les constantes a_1 , a_2 , a_3 qui sont définies par les expressions (3.59) et (3.60), c'est-à-dire

$$a_1 \simeq 0.0510 \frac{A}{S_t} \left(\frac{\epsilon^5 e_{\max}^5}{B^3} v_{\beta r} \right)^{1/2}, \quad (4.1b)$$

$$a_2 = \frac{h_0^2}{24\mu_\beta} (P_0 - P_{0\max}); \quad (4.1c)$$

$$a_3 \simeq 0.4915 (\epsilon B v_{\beta r} e_{\max})^{1/2}. \quad (4.1d)$$

Lorsque le ménisque central à son tour arrive en sortie du canal spiralé ($L_a(t_{MC}) = L_s$), le temps nécessaire pour y arriver, noté t_{MC} , peut être approximé en partant de l'expression (3.59b) donnant la position du ménisque central établie également dans la dynamique à pression imposée lorsque le liquide s'écoule dans tout le canal, de la manière suivante

$$t_{MC} = \frac{\pi^2 n_s^2 d_m^2}{\left((a_1^2 + 2a_2)^{1/2} - a_1 \right)^2}, \quad (4.2)$$

avec les constantes a_1 et a_2 qui sont également définies par les expressions (4.1b) et (4.1c).

Les expressions (4.1a) et (4.2) dépendent de certaines grandeurs qui vont influencer l'apparition d'une fuite liquide à savoir la mouillabilité des matériaux qui constituent l'assemblage mécanique (θ_e) ou encore les dimensions de la spirale. Dans la suite de cette étude, on va considérer un joint typique de diamètre moyen $d_m = 318$ mm et de largeur de piste $\ell_p = 3$ mm.

Les résultats des figures 4.2 montrent d'abord l'écart de temps entre l'apparition d'une fuite transitoire (figure 4.2(a)) et celle d'une fuite stabilisée (figure 4.2(b)) pour différentes longueurs du canal spiralé, en faisant varier le nombre de spires n_s . Par exemple pour $n_s = 10$, on voit que la fuite transitoire peut être détectée au bout de 11 jours à peu près lorsque le liquide ne s'écoule que sous l'effet de la capillarité (c'est-à-dire $P_0 - p_\gamma = 0$), alors qu'il faut attendre à peu près 39 jours pour commencer à mesurer la fuite liquide stabilisée. Si dans la modélisation les écoulements en film liquide dans

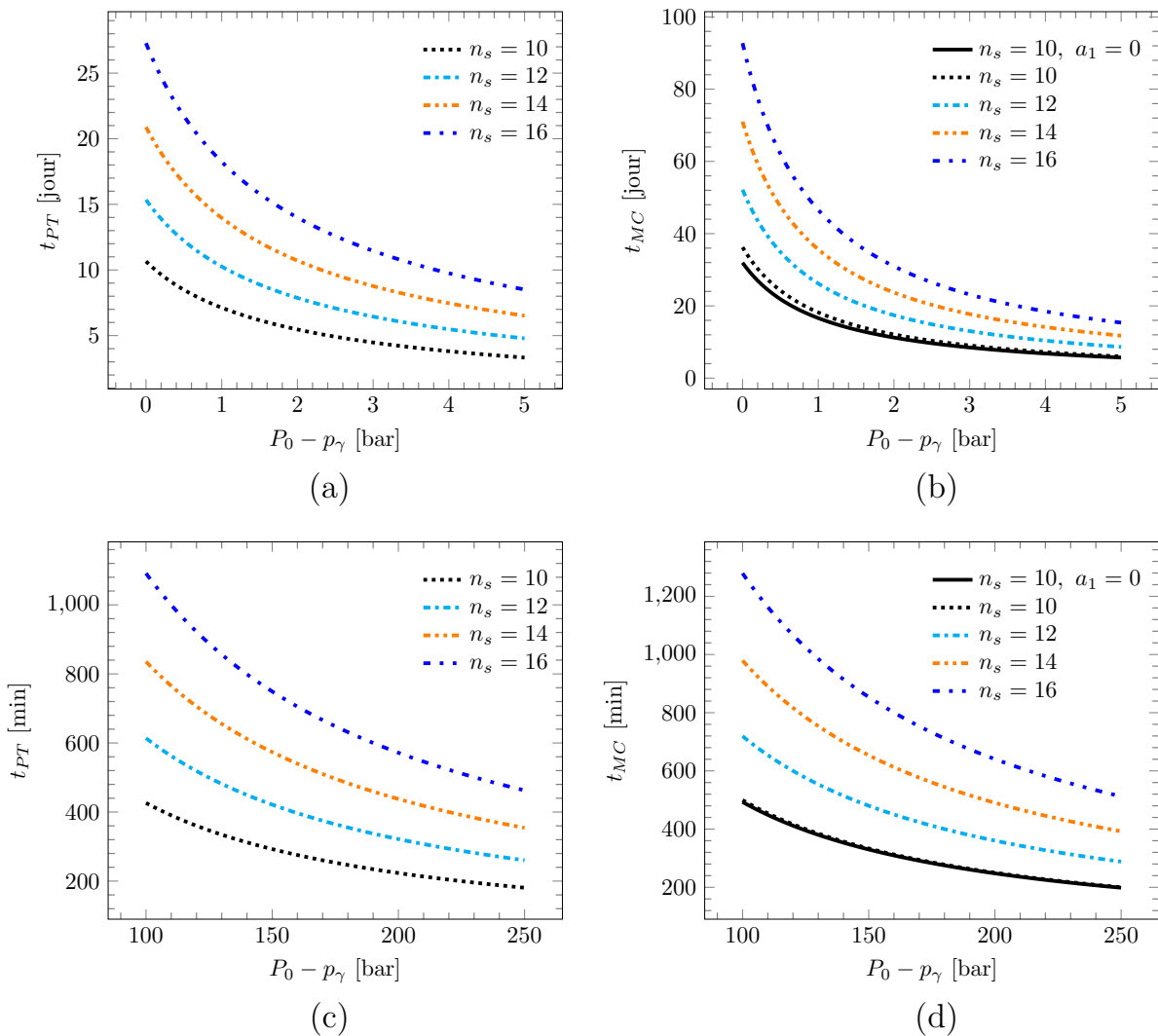


FIGURE 4.2 – Temps mis par le liquide de propriétés $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ pour arriver en sortie d'une spirale de dimensions $h_0 = 2 \text{ }\mu\text{m}$, $\ell = 10 \text{ }\mu\text{m}$ avec une mouillabilité parfaite, $\theta_e = 0^\circ$, en fonction de la différence de pression $P_0 - p_\gamma$: (a,c) Point triple (b,d) Ménisque central. Le cas $a_1 = 0$ correspond à un écoulement sans prise en compte de film liquide dans les coins.

les coins ne sont pas pris en compte (ce qui correspond au cas $a_1 = 0$ dans l'expression (4.2)), on voit sur la figure 4.2(b) que la prédiction de la fuite stabilisée est estimée à 38 jours à peu près lorsque l'écoulement s'effectue uniquement par capillarité. On remarque aussi que plus la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ augmente, la prédiction du temps d'apparition de la fuite stabilisée par l'expression qui inclut les effets d'écoulement en film de coins ($a_1 \neq 0$, correspondant à l'expression (4.2)) est quasiment la même que le cas où il n'y a pas de film liquide dans les coins ($a_1 = 0$). Les résultats des figures 4.2(a,b) montrent aussi que plus le nombre de spires n_s augmente, ce qui correspond à l'augmentation de la longueur du canal spiralé L_s , les temps d'apparition de la fuite augmente. Sur les figures 4.2(c,d), on illustre l'influence de la différence de pression $P_0 - p_\gamma$. On observe que pour des pressions suffisamment élevées, les temps d'apparition de fuites transitoire et stabilisé diminue sensiblement passant des jours à moins d'une journée.

L'effet de la mouillabilité sur l'apparition de la fuite liquide en sortie du canal spiralé est analysé sur les figures 4.3. On constate que la sensibilité à l'angle de contact θ_e est

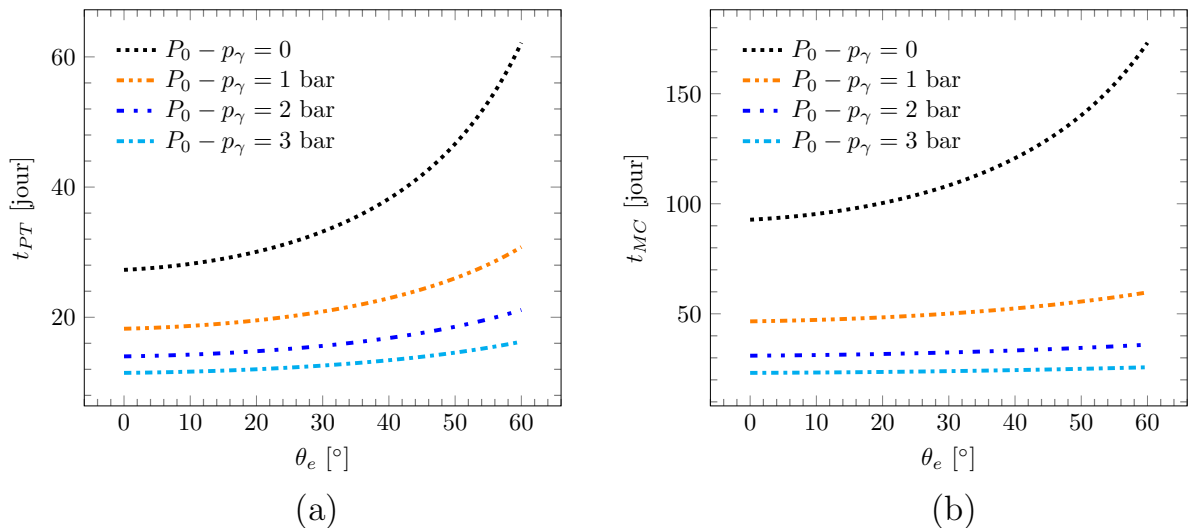


FIGURE 4.3 – Temps mis par le liquide de propriétés $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ pour arriver en sortie d'une spirale de dimensions $h_0 = 2 \text{ } \mu\text{m}$, $\ell = 10 \text{ } \mu\text{m}$, $n_s = 16$ en fonction de l'angle de contact θ_e : (a) Point triple (b) Ménisque central.

légèrement visible dans les coins du canal spiralé où l'on voit que plus la mouillabilité des surfaces en contact diminue (c'est-à-dire lorsque l'angle de contact θ_e augmente),

l'écoulement devient légèrement plus lent et donc la fuite transitoire apparaîtra un peu plus tardivement (voir figure 4.3(a)). Ce constat est par ailleurs plus accentué pour des valeurs de la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ plus faibles mais on observe aussi que l'influence de la mouillabilité devient négligeable lorsque les valeurs de la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ deviennent importantes. En revanche, l'apparition de la fuite liquide stabilisée est pour sa part quasi indépendante de la valeur de l'angle de contact lorsque la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ est plus importante (voir figure 4.3(b)).

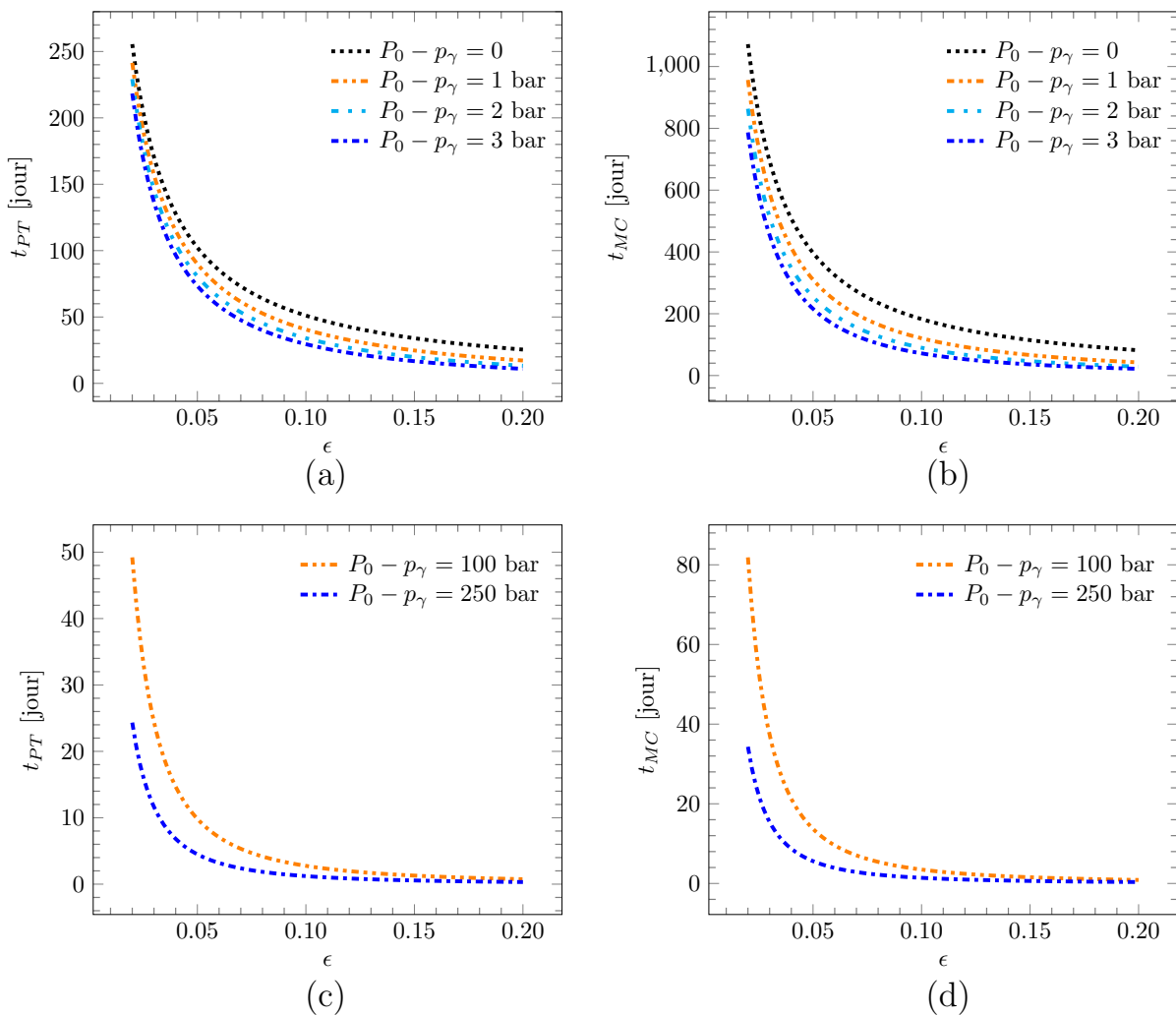


FIGURE 4.4 – Temps mis par le liquide de propriétés $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ pour arriver en sortie d'une spirale de largeur $2\ell = 20 \text{ }\mu\text{m}$, $n_s = 16$, avec $\theta_e = 0^\circ$, en fonction de la pente ϵ : (a,c) Point triple (b,d) Ménisque central.

Les figures 4.4(a,b) montrent l'influence des dimensions du canal spiralé, en l'occurrence son ouverture maximale h_0 à travers différentes valeurs de la pente $\epsilon = h_0/\ell$

pour une même largeur $2\ell = 20 \mu\text{m}$, sur les temps d'apparition de la fuite liquide en sortie du canal. Ici, on voit que l'écart en temps entre l'apparition de la fuite liquide transitoire et celle de la fuite liquide stabilisée est très grand pour des valeurs de ϵ plus petites. Ceci s'explique par l'augmentation de la pression capillaire qui est inversement proportionnelle à la pente ϵ et donc elle favorise encore davantage les écoulements de film liquide par les coins. On observe davantage sur les figures 4.4(c,d) l'influence des dimensions du canal même à des différences de pressions plus élevées, où l'on voit qu'il faut attendre par exemple pour des valeurs de $\epsilon < 0.05$, jusqu'à 50 jours pour voir une fuite liquide transitoire apparaître pour une différence de pression $P_0 - p_\gamma = 100 \text{ bar}$ et près de 80 jours pour l'apparition d'une fuite liquide stabilisée.

4.2.2 Corrélation entre une fuite liquide et une fuite gazeuse

Maintenant que l'on sait approximer le temps d'apparition d'une fuite liquide stabilisée, (ce qui correspond à une situation d'écoulement monophasique liquide tel que schématisé sur la figure 4.1(c)), on peut établir une corrélation entre une fuite liquide et une fuite gazeuse.

Lorsque l'écoulement du liquide atteint le régime d'écoulement monophasique, le débit volumique du liquide qui fuit à travers une interface formée par le contact brides-joint peut être approximée à l'aide de l'expression (3.56c), mais avec $L_a(t_{MC}) = L_s$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Q_0(t_{MC}) &= \frac{h_0^3 \ell}{24\mu_\beta} \frac{(P_0 - P_{0\max})}{L_s} \\ &= \frac{h_0^3 \ell}{24\pi n_s \mu_\beta} \frac{(P_0 - P_{0\max})}{d_m}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dans le cas où l'on considère que l'interface bride-joint forme un canal unique de section triangulaire, le débit massique de fuite de l'hélium peut être approximé, comme à l'expression (2.5a) donnée pour le cas d'un canal de section rectangulaire, de la

manière suivante.

$$\dot{q} = \frac{\ell h_0^3}{24\mu} \frac{P_m}{rT} \frac{(P_0 - P_s)}{L_s} (1 + 6\sigma_P K\eta) \quad (4.4)$$

Dans le monde industriel la mesure de la fuite de l'hélium, réalisée généralement avec un spectromètre de masse, est fournie plutôt en terme du taux de fuite, que l'on va noter Q et exprimé en $[\text{Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$, qui est une mesure d'un volume de fuite par seconde à une pression donnée.

$$Q = \dot{q}rT = \frac{\ell h_0^3}{24\pi n_s \mu d_m} P_m (P_0 - P_s) (1 + 6\sigma_P K\eta) \quad (4.5)$$

Lorsqu'on fait un essai en gaz, notamment de l'hélium, les figures 4.5 donnent la possibilité de prédire la fuite gazeuse attendue et l'équivalent de la fuite en liquide, notamment de l'eau, pour une même différence de pression en considérant que le chemin de fuite formé par le contact brides-joint est un canal spiralé de section transversale triangulaire et constante. Sur la figure 4.5(a), le taux de fuite de l'hélium Q est corrélé au débit massique de fuite de l'eau, noté $\dot{q}_\beta = \rho_\beta Q_0(t_{MC})$, en supposant que la différence de pression de l'hélium au bord du canal triangulaire $P_0 - P_s$ équivaut à la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ dans le cas de l'eau. Il faut noter que les valeurs de fuite liquide et gazeuse sont multipliées par un facteur 2 en raison de deux interfaces qui constituent les chemins de fuite, c'est-à-dire deux canaux spiralés, qui forment l'assemblage brides-joint. Ces résultats indiquent que si l'on fait un test d'étanchéité en hélium sur un assemblage mécanique dont le fonctionnement est prévu dans un environnement où il faut étancher un liquide, il est possible non seulement de prédire la fuite liquide attendue mais avant tout, l'analyse permet d'annoncer l'apparition d'une fuite liquide transitoire au bout d'un certain temps telle que montré sur la figure 4.5(b), qui va augmenter avec le temps jusqu'à atteindre la valeur stabilisée prédite qui est représentée sur la figure 4.5(a) au bout du temps donné sur la figure 4.5(c). Contrairement au cas du gaz où la fuite est nulle lorsqu'il n'y a aucune différence de pression appliquée,

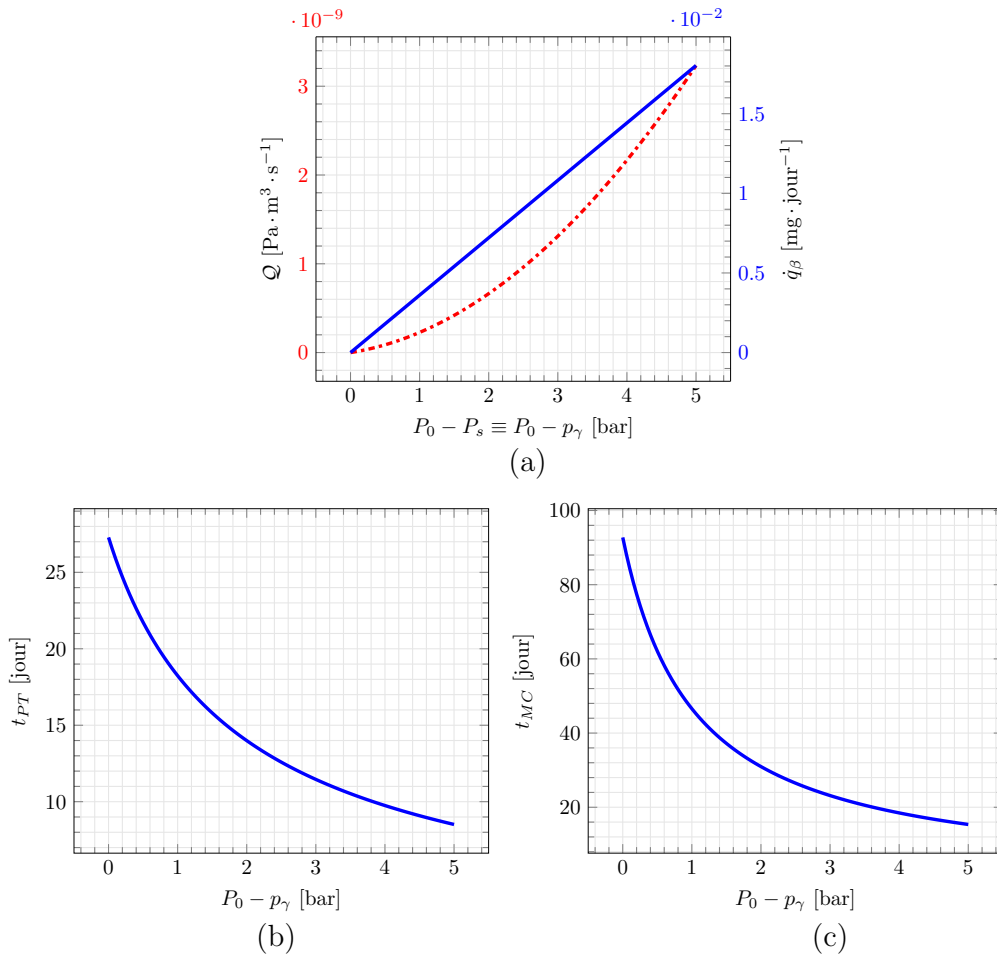


FIGURE 4.5 – (a) Corrélation entre le débit massique de fuite $\dot{q}_\beta = 2\rho_\beta Q_0(t_{MC})$ de l'eau ($\mu_\beta = 1$ mPa·s, $\sigma = 72$ mN·m⁻¹) et le taux de fuite Q de l'hélium ($\mu = 1.99 \times 10^{-2}$ mPa·s), dans une spirale de dimensions $2\ell = 20$ μm, $h_0 = 2$ μm, $n_s = 16$, avec $\theta_e = 0^\circ$, en supposant que la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ dans le liquide vaut la différence de pression $P_0 - P_s$ dans le gaz (b) Temps mis par le point triple (c) Temps mis par le ménisque central.

c'est-à-dire $P_0 - P_s = 0$, il existe par ailleurs une fuite liquide lorsque $P_0 - p_\gamma = 0$, qui est due uniquement par une imbibition de l'eau par la capillarité. On constate que pour la plage des pressions analysée sur les figures 4.5, il faut attendre plusieurs jours pour voir les fuites liquides apparaître. Si par ailleurs on augmente la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ comme c'est le cas pour les figures 4.6, on remarque que les fuites liquides peuvent apparaître au bout d'une centaine des minutes.

Cependant, il faut noter que le modèle de la dynamique d'imbibition développé dans le chapitre 3 ne permet pas de prédire une fuite liquide transitoire qui s'effectuerait par

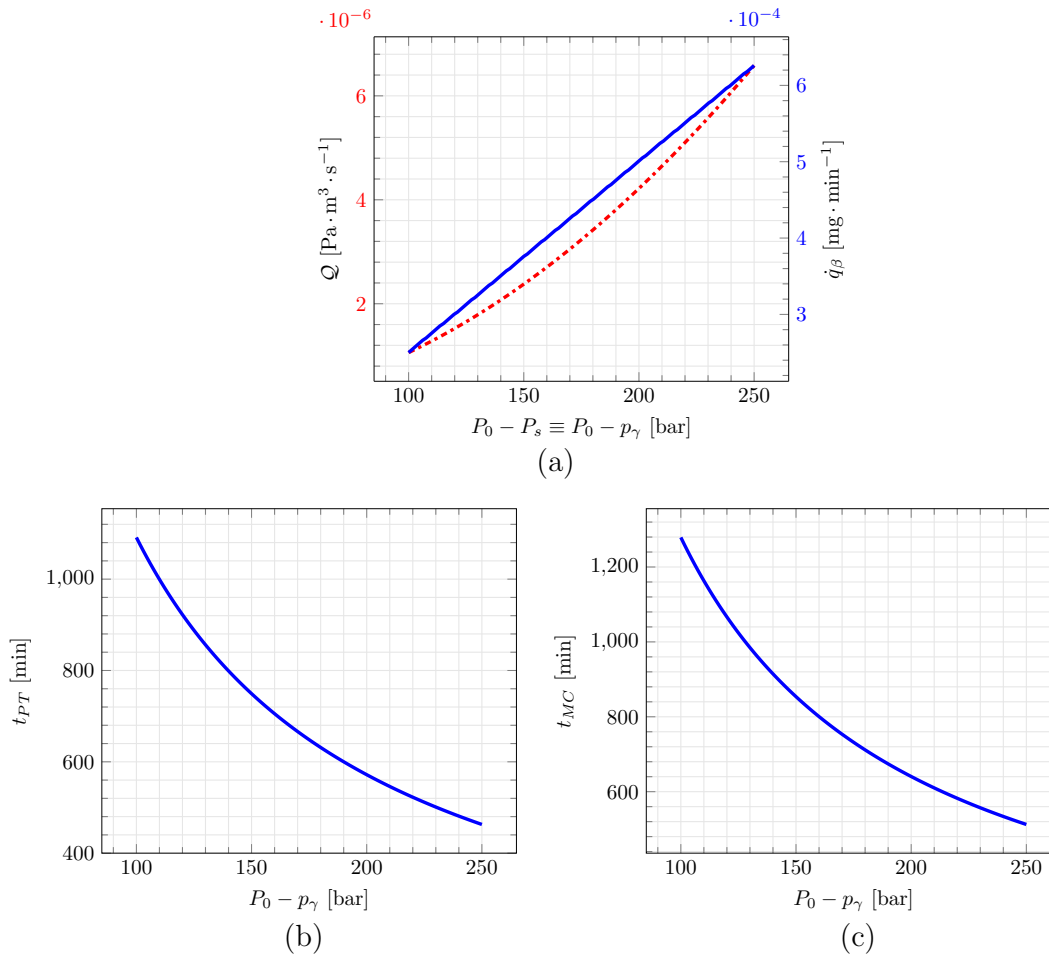


FIGURE 4.6 – (a) Corrélation entre le débit massique de fuite $\dot{q}_\beta = 2\rho_\beta Q_0(t_{MC})$ de l'eau ($\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$) et le taux de fuite Q de l'hélium ($\mu = 1.99 \times 10^{-2} \text{ mPa} \cdot \text{s}$), dans une spirale de dimensions $2\ell = 20 \text{ }\mu\text{m}$, $h_0 = 2 \text{ }\mu\text{m}$, $n_s = 16$, avec $\theta_e = 0^\circ$, en supposant que la différence de pression $P_0 - p_\gamma$ dans le liquide vaut la différence de pression $P_0 - P_s$ dans le gaz (b) Temps mis par le point triple (c) Temps mis par le ménisque central.

le coin, à cause du fait que lorsque le point triple arrive en sortie du canal, sa dynamique est modifiée et l'épaisseur du film en sortie commence à s'épaissir. Dans l'analyse effectuée dans ce chapitre, nous avons supposé que malgré l'augmentation de l'épaisseur du film liquide en sortie du canal, la dynamique de l'avancée du ménisque central reste non perturbée.

Nous avons vu au paragraphe 3.5.1 de la partie 3.5 que l'écoulement du film liquide peut se développer dans les coins du canal triangulaire sans que le liquide imbibe tout le canal pour certaines pressions, c'est-à-dire si la pression appliquée P_0 respecte la

contrainte (3.55), et ce mécanisme a conduit à l'établissement de la loi donnée par l'expression 3.49c qui exprime la percée du point triple en fonction du temps dans le régime pur de film liquide. Ce phénomène implique également un régime de fuite transitoire pur, c'est-à-dire que la fuite mesurée en sortie du canal va toujours augmenter avec le temps. On déduit pour cela le temps d'apparition de cette fuite à partir de l'expression 3.49c de la manière suivante.

$$t_{PT} = \frac{2.0697\pi^2 n_s^2 d_m^2}{B^2 \sigma v_{\beta r}} (p_\gamma - P_0) \quad (4.6)$$

Contrairement au cas où l'écoulement se produit dans tout le canal, on remarque premièrement que le temps d'apparition de la fuite transitoire dans le régime du film liquide pur ne dépend ni de l'ouverture maximale h_0 , ni de la largeur 2ℓ , mais uniquement de la longueur totale du canal, $L_s = \pi n_s d_m$. De plus, l'écoulement se produit sous une différence de pression écrite sous la forme $p_\gamma - P_0$ et qui est linéaire avec temps. Lorsque $p_\gamma - P_0$ tend vers zéro, cela implique que la pression imposée P_0 tend vers p_γ et donc le temps d'apparition de la fuite transitoire sera très court. D'après le modèle développé, le régime de film liquide pur demeure du moment que la pression appliquée P_0 ne dépasse pas la pression seuil donnée à l'expression (3.54), notée $P_{0\max}$, qui vaut la pression dans le gaz p_γ moins la pression capillaire seuil donnée par l'expression (3.35). Ceci signifie que si la pression appliquée au liquide est directement supérieure à la pression $P_{0\max}$, l'écoulement va se produire dans tout le canal et on va plutôt avoir les deux régimes de fuite liquide représentés sur les figures 4.1(b,c). Le modèle de dynamique d'imbibition développé dans le chapitre 3 ne permettant pas d'évaluer le débit de fuite par les coins, il est tout de même possible d'établir cette approximation du débit de fuite par les coins si l'on considère le cas d'un liquide volatil. La partie suivante s'intéresse à cette analyse.

4.3 Fuite stationnaire en présence de l'évaporation

4.3.1 Condensation capillaire

Considérons un chemin de fuite caractérisé par un canal de section triangulaire aplatie de longueur L_s , de demi-largeur ℓ , et d'ouverture maximale h_0 avec $h_0 = \epsilon \ell$ ($\epsilon \ll 1$) en contact avec de l'air humide à son extrémité. On suppose que l'air humide extérieur (dont l'humidité relative est notée HR) a diffusé dans le contact avant que le processus d'imbibition ait démarré. On s'attend alors à un phénomène de condensa-

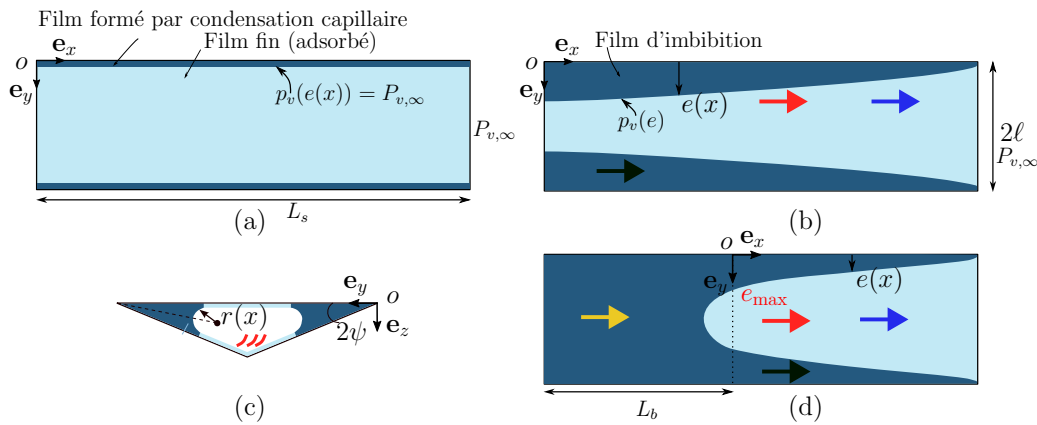


FIGURE 4.7 – (a) Représentation, à l'état initial, de films liquides par condensation capillaire qui occupent les coins du canal et de films fin (adsorbé) qui occupent le reste du canal. La pression $P_{v,\infty} = p_{sat}HR$. (b) Schéma de la situation stationnaire considérée où le taux d'évaporation en bout de canal est égal au débit circulant dans le canal. La flèche noire désigne le transport en phase liquide dans les films de coins, la flèche rouge représente le transport par diffusion en phase gazeuse et la flèche bleue illustre le transport en phase liquide dans les films adsorbés (c) Film de coin et film fin vu dans le plan (y, z) (d) Cas d'une invasion centrale : la flèche jaune désigne le transport en phase liquide dans la région du ménisque central.

tion capillaire, c'est-à-dire à la formation d'un film d'eau liquide capillaire le long des deux coins du canal comme illustré sur la figure 4.7(a).

L'épaisseur du film de coin formé par condensation capillaire est obtenue à partir de la relation de KELVIN,

$$\begin{aligned} HR &= \frac{p_v}{p_{sat}} = \exp\left(-\frac{M}{\rho_\beta RT} p_c\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon \ell}\right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

soit,

$$e = -\frac{2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon \ln(HR)}. \quad (4.8)$$

Dans ces expressions, la constante B est définie comme pour l'expression (3.7d), σ est la tension de surface, M la masse molaire de l'eau, ρ_β la masse volumique de l'eau liquide, R la constante des gaz parfait, T la température, p_v la pression de vapeur et p_{sat} la pression de vapeur saturante. Puisqu'on s'intéresse aux écoulement en film, on considère l'expression de la pression capillaire, p_c , donnée par l'équation (3.7i).

Comme cela est illustré sur la figure 4.8, l'épaisseur du film de coin résultant de ce

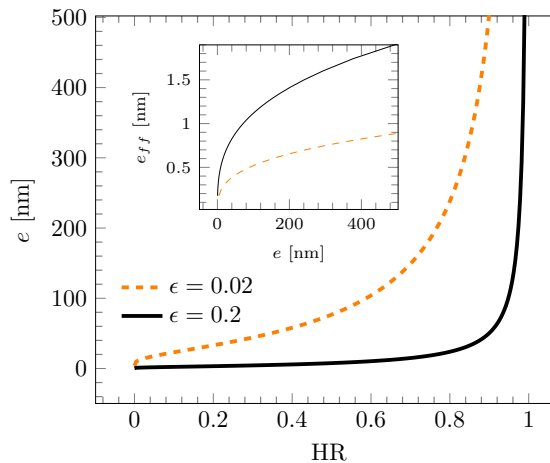


FIGURE 4.8 – Épaisseur du film de coin en fonction de l'humidité relative dans l'air externe. L'insert montre l'épaisseur du film adsorbé (ou film fin). Les données utilisées sont : $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\theta_e = 0^\circ$, $M = 18 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\rho_\beta = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

processus de condensation capillaire est typiquement inférieure au micromètre pour la géométrie considérée.

De plus, on s'attend aussi à ce que se forme un film liquide adsorbé sur les parois non en contact avec les films de coin. L'épaisseur de ce film, désigné par film fin dans la suite, est donnée par l'expression suivante (Eijkel *et al.*, 2005),

$$e_{ff} = \sqrt[3]{\frac{A_h}{6\pi p_c}} = \sqrt[3]{\frac{A_h \epsilon e}{12\pi \sigma B}}. \quad (4.9)$$

Dans cette expression, A_h est la constante de HAMAKER ($A_h = 1.9 \times 10^{-19}$ J pour l'eau).

Comme on peut le voir sur la figure 4.8, ce film est typiquement de l'ordre du nanomètre. Dans la suite de cette étude, le fluide utilisé est de l'eau ayant pour propriétés $\sigma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, $M = 18 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\rho_\beta = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\mu_\beta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}^{-1}$, $D = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $T = 293.15 \text{ K}$.

4.3.2 Fuite par les coins

A. Solution stationnaire de la fuite liquide

Compte tenu du processus d'imbibition par les coins analysé dans la partie 3.5.1, on peut considérer la situation stationnaire schématisée sur la figure 4.7(b) où l'évaporation en bout de canal est égale au débit circulant dans le canal. On suppose donc qu'il y a évaporation en bout de film (c'est-à-dire en $x = L_s$). Le taux d'évaporation (pour un demi-canal) en bout de canal est exprimé par,

$$\begin{aligned} J_{evap} &= D \frac{M}{RT} \frac{\ell h_0}{2} \frac{(p_v(L_s) - p_{sat})HR}{h_0} \\ &= D \frac{M}{RT} \frac{\ell}{2} p_{sat} (HR(L_s) - HR), \end{aligned} \quad (4.10)$$

où $HR(L_s)$ désigne l'humidité relative en bout de canal et HR est donc l'humidité relative dans l'air ambiant, D est le coefficient de diffusion moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air, $p_v(L_s)$ est la pression de vapeur à la sortie du canal ($x = L_s$) et p_{sat} est la pression de vapeur saturante à la température considérée.

L'expression (4.10) est obtenue en considérant que l'échelle de longueur caractéristique de diffusion dans l'air externe à partir de la section de sortie du canal est égale à h_0 , par analogie avec des résultats de la littérature pour des tubes capillaires montrant que cette échelle est de l'ordre de l'ouverture du tube (Chauvet *et al.*, 2009).

En introduisant le taux d'évaporation potentielle, correspondant au taux d'évaporation maximale (pression de vapeur égale à la pression de vapeur saturante à la sortie

du canal),

$$\begin{aligned} J_{evap-max} &= D \frac{M}{RT} \frac{\ell h_0}{2} \frac{(p_v(L_s) - p_{sat} HR)}{h_0} \\ &= D \frac{M}{RT} \frac{\ell}{2} p_{sat} (1 - HR), \end{aligned} \quad (4.11)$$

on peut aussi exprimer le taux d'évaporation de l'expression (4.10) en fonction du taux d'évaporation maximale de la manière suivante

$$\begin{aligned} J_{evap} &= J_{evap-max} \frac{HR(L_s) - HR}{1 - HR} \\ &= J_{evap-max} \frac{\exp\left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT e e(L_s)}\right) - HR}{1 - HR}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec $e(L_s)$ l'épaisseur du film de coin en sortie du canal.

Selon la schématisation de la figure 4.7(b) du transport en régime stationnaire, trois mécanismes contribuent à transporter le fluide (de l'eau dans cette étude) au sein du canal : le transport en phase liquide dans les coins sous l'action des forces capillaires, le transport par diffusion en phase vapeur et le transport en phase liquide dans le film fin sous l'action du gradient de pression de disjonction (Eijkel *et al.*, 2005; Chauvet *et al.*, 2009). Par la conservation de la masse, on écrit que,

$$\dot{q}_{film-coin} + \dot{q}_{vap} + \dot{q}_{film-fin} = J_{evap}, \quad (4.13)$$

avec les contributions de chaque transport $\dot{q}_{film-coin}$, \dot{q}_{vap} et $\dot{q}_{film-fin}$ qu'ils restent à déterminer.

Selon l'analyse faite dans la partie 3.2, le débit volumique dans un film de coin est donné par l'équation (3.13b),

$$Q_{\beta x} = -\frac{\epsilon^2 \sigma B}{72 \mu_\beta} \frac{de^3}{dx}, \quad (4.14)$$

ce qui permet d'exprimer le débit massique dans un film de coin de la manière suivante,

$$\dot{q}_{film-coin} = \rho_{\beta} Q_{\beta x} = -\rho_{\beta} \frac{\epsilon^2 \sigma B}{72\mu_{\beta}} \frac{de^3}{dx}. \quad (4.15)$$

Considérons maintenant le transport dans le film fin adsorbé sur les parois du canal non mouillé par le film de coin. En invoquant à nouveau l'équation de la lubrification établie dans l'annexe D, le débit massique dans le film fin peut s'exprimer de la manière suivante,

$$\dot{q}_{film-fin} = -\rho_{\beta} \frac{e_{ff}^3}{12\mu_{\beta}} (\ell - e(x)) \frac{dp_{\beta}}{dx} - \rho_{\beta} \frac{e_{ff}^3}{12\mu_{\beta}} \frac{(\ell - e(x))}{\cos(2\psi)} \frac{dp_{\beta}}{dx}. \quad (4.16a)$$

Dans cette expression, le premier terme du membre de droite correspond au débit massique traversant la section $e_{ff}(\ell - e(x))$ dans le film fin dans la partie supérieure du canal tel que montré sur la figure 4.7(c) alors que le deuxième terme est le débit au sein du film présent le long de l'hypoténuse de la section triangulaire du canal. L'expression (4.16a) se réécrit alors,

$$\dot{q}_{film-fin} = -\rho_{\beta} \frac{e_{ff}^3}{12\mu_{\beta}} (\ell - e(x)) k_{\psi} \frac{dp_{\beta}}{dx}, \quad (4.16b)$$

avec

$$k_{\psi} = 1 + \frac{1}{\cos(2\psi)}. \quad (4.16c)$$

Considérant que la pression p_{β} dans une section du film fin est identique à la pression dans le film de coin (égalité de la pression capillaire dans le film de coin et de la pression de disjonction dans le film adsorbé), le terme $\frac{dp_{\beta}}{dx}$ est approché comme pour l'expression (3.7). Ce qui donne,

$$\dot{q}_{film-fin} = -\rho_{\beta} k_{\psi} B \sigma \frac{e_{ff}^3}{6\epsilon\mu_{\beta}} (\ell - e) \frac{1}{e^2} \frac{de}{dx}. \quad (4.16d)$$

En utilisant l'expression (4.9) donnant l'épaisseur e_{ff} en fonction de l'épaisseur e , l'ex-

pression (4.16d) devient,

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_{film-fin} &= -\rho_{\beta} k_{\psi} \frac{A_h}{72\pi\mu_{\beta}} (\ell - e) \frac{1}{e} \frac{de}{dx} \\
 &= -\rho_{\beta} k_{\psi} \frac{A_h}{72\pi\mu_{\beta}} \left(\ell \frac{d \ln(e)}{dx} - \frac{de}{dx} \right) \\
 &= -\rho_{\beta} k_{\psi} \frac{A_h}{72\pi\mu_{\beta}} \frac{d}{dx} (\ell \ln(e) - e). \tag{4.16e}
 \end{aligned}$$

Concernant le transfert par diffusion en phase vapeur, on fait l'approximation que la pression de vapeur dans une section est identique à la pression de vapeur à l'interface avec les films liquides (de coin et film fin) si bien qu'à partir de la loi de FICK (en négligeant l'impact d'éventuels effets Knudsen), on a

$$\dot{q}_{vap} = -D \frac{M}{RT} \left(\frac{h_0 \ell}{2} - S(e(x)) \right) \frac{dp_v}{dx}, \tag{4.17}$$

où $S(e(x))$ est la section occupée par le film liquide dans un coin dont on suppose qu'elle reste définie comme à l'expression (3.7a) et le terme $(\frac{h_0 \ell}{2} - S(e(x)))$ correspond à la section occupée par le gaz dans une section du demi-canal en négligeant les films adsorbés.

En combinant cette dernière expression avec la relation de Kelvin (4.7) pour exprimer la pression p_v , on obtient,

$$\dot{q}_{vap} = -D \frac{M}{RT} \left(\frac{h_0 \ell}{2} - S(e(x)) \right) p_{sat} \frac{d}{dx} \left(\exp \left(-\frac{2B\sigma M}{\rho_{\beta} RT \epsilon e} \right) \right) \tag{4.18}$$

En combinant les expressions (4.15), (4.16e) et (4.18) donnant les débits masses des différentes contributions, la conservation de masse donnée par l'équation (4.13) devient,

$$\begin{aligned}
 -\rho_{\beta} \frac{\epsilon^2 \sigma B}{72\mu_{\beta}} \frac{de^3}{dx} - \rho_{\beta} k_{\psi} \frac{A_h}{72\pi\mu_{\beta}} \frac{d}{dx} (\ell \ln(e) - e) - D \frac{M}{RT} \left(\frac{h_0 \ell}{2} - S(e(x)) \right) \\
 p_{sat} \frac{d}{dx} \left(\exp \left(-\frac{2B\sigma M}{\rho_{\beta} RT \epsilon e} \right) \right) = J_{evap-max} \frac{HR(L_s) - HR}{1 - HR} \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 & -\rho_\beta \frac{\epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} \frac{de^3}{dx} - \rho_\beta k_\psi \frac{A_h}{72\pi\mu_\beta} \frac{d}{dx} (\ell \ln(e) - e) - D \frac{M}{RT} \left(\frac{h_0 \ell}{2} - S(e(x)) \right) \\
 p_{sat} \frac{d}{dx} \left(\exp \left(-\frac{2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e} \right) \right) &= J_{evap-max} \frac{\exp \left(-\frac{2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e(L_s)} \right) - HR}{1 - HR}
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pour résoudre l'équation (4.20), on note que généralement $\frac{h_0 \ell}{2} \gg S(e(x))$. De ce fait, l'équation (4.20) s'intègre le long du canal de 0 à L_s de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} (e_{P_0}^3 - e^3(L_s)) + \frac{\rho_\beta k_\psi A_h}{72\pi\mu_\beta} \left(\ell \ln \left(\frac{e_{P_0}}{e(L_s)} \right) - e_{P_0} + e(L_s) \right) + \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} \\
 & \left(\exp \left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e_{P_0}} \right) - \exp \left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e(L_s)} \right) \right) = L_s J_{evap-max} \frac{\exp \left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e(L_s)} \right) - HR}{1 - HR}.
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dans cette équation, e_{P_0} est l'épaisseur du film de coin en entrée du canal. On se place donc ici dans la configuration à pression imposée pour une condition de pression à l'entrée telle qu'il n'y ait pas formation d'un ménisque central (on rappelle que l'épaisseur e_{P_0} s'exprime par $e_{P_0} = \frac{2B\sigma}{\epsilon(p_\gamma - P_0)}$ où P_0 est la pression dans le liquide à l'entrée du canal et que l'épaisseur $e_{P_0} < e_{max}$ pour qu'il n'y ait pas formation d'un ménisque central, avec l'épaisseur maximale e_{max} donnée par l'expression (3.32)).

L'équation (4.21) permet ainsi de déterminer l'épaisseur du film en sortie du canal, notée $e(L_s)$. Une fois cette dernière déterminée, la structure du film de coin peut être obtenue en intégrant cette fois l'équation (4.20) de x à L_s pour obtenir l'épaisseur de film de coin le long du canal, ce qui donne,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} (e^3(L_s) - e^3(x)) + \frac{\rho_\beta k_\psi A_h}{72\pi\mu_\beta} \left[\ell \ln \left(\frac{e(L_s)}{e(x)} \right) - e(L_s) + e(x) \right] + \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} \\
 & \left[\exp \left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e(L_s)} \right) - \exp \left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e(x)} \right) \right] = (x - L_s) J_{evap-max} \frac{\exp \left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e(L_s)} \right) - HR}{1 - HR}.
 \end{aligned} \quad (4.22)$$

La résolution numérique des équations (4.21) et (4.22) permettra d'analyser ainsi le taux d'évaporation stationnaire (correspondant à la fuite stationnaire) en faisant varier différents paramètres ; cette étude est menée dans le paragraphe suivant.

B. Discussion

B.1. Analyse de la fuite stationnaire

Avant d'analyser la fuite résultant des considérations développées dans le paragraphe précédent, on s'intéresse d'abord aux résultats des équations (4.21) et (4.22) permettant de déterminer respectivement l'épaisseur du film dans le coin en sortie du canal et l'épaisseur du film dans les coins en chaque position de l'interface. La figure

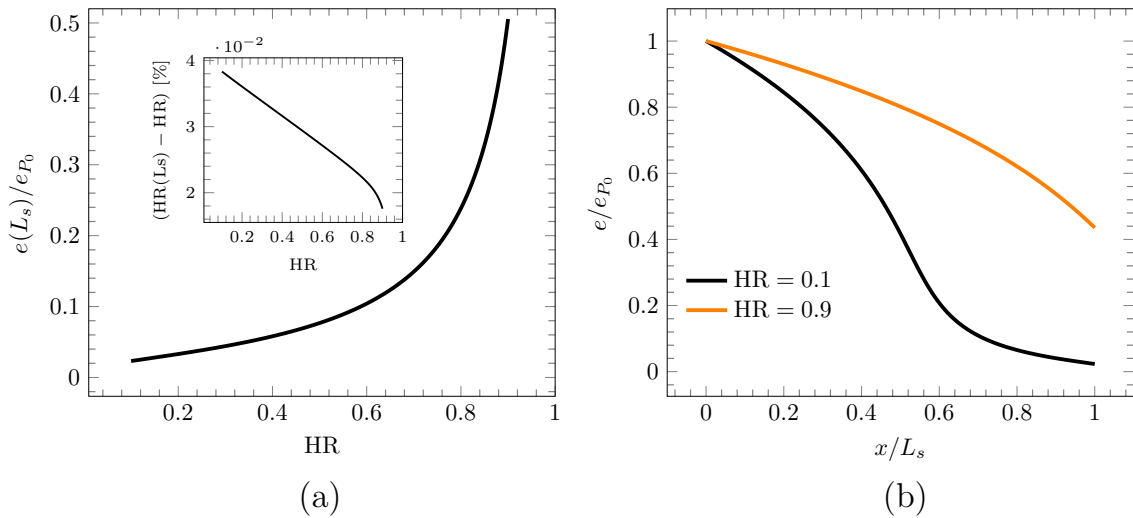


FIGURE 4.9 – (a) Épaisseur du film de coin en sortie du canal adimensionnalisée par l'épaisseur maximale en entrée du canal, $e(L_s)/e_{P_0}$, en fonction de l'humidité relative dans l'air externe. L'insert montre la différence entre l'humidité relative en sortie du canal et l'humidité dans l'air externe, $(HR(L_s) - HR) [\%]$. (b) Forme stationnaire de l'interface du film d'imbibition, $e(x)/e_{P_0}$, pour différentes valeurs de l'humidité relative dans l'air externe. Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $\ell = 10 \mu\text{m}$, $L_s = 100\ell$, $\epsilon = 0.02$, $e_{P_0} = \ell/10$.

4.9(a) présente l'évolution de l'épaisseur adimensionnelle du film liquide dans les coins en sortie du canal, $e(L_s)/e_{P_0}$, en fonction de l'humidité relative dans l'air externe et on constate que cette épaisseur augmente lorsque cette humidité relative augmente mais reste toujours inférieure à l'épaisseur en entrée du canal, $e_{P_0} = \ell/10$, dans l'exemple considéré. Pour les dimensions du canal considérées ($\ell = 10 \mu\text{m}$, $L_s = 100\ell$, $\epsilon = 0.02$),

on constate sur la figure 4.9(b) que la forme de l'interface liquide dans les coins, c'est-à-dire l'épaisseur stationnaire $e(x)$, varie significativement avec l'humidité relative dans l'air externe le long du canal. L'observation est que plus cette humidité relative est faible, plus le film liquide dans les coins est mince ce qui implique un effet KELVIN important tel que l'on a vu sur la figure 4.8, et donc une variation notable de la pression de vapeur le long de l'interface du film dans les coins et sur tout le canal, comme on l'observe sur la figure 4.10. Ces derniers résultats montrent que pour des valeurs

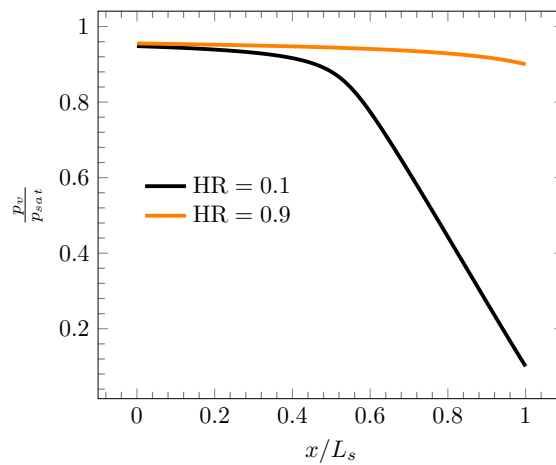


FIGURE 4.10 – Évolution de la pression de vapeur le long de l'interface du film dans les coins. Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $\ell = 10 \mu\text{m}$, $L_s = 100\ell$, $\epsilon = 0.02$, $e_{P_0} = \ell/10$.

d'humidité relative d'air externe plus importantes, en l'occurrence pour $HR = 0.9$, la pression de vapeur le long de l'interface est très proche de la pression de vapeur saturante.

L'influence de tous ces phénomènes (film de coins, film fin, diffusion de vapeur) sur le taux d'évaporation stationnaire (et donc sur la fuite stationnaire dans le contexte de l'étanchéité qui nous intéresse) est analysée sur les figures 4.11. On observe sur la figure 4.11(a) que la fuite stationnaire décroît légèrement (car étant de l'ordre de $10^{-5} \text{ mg} \cdot \text{jour}^{-1}$) avec l'augmentation de l'humidité relative dans l'air externe. Dans l'insert, on observe que le taux d'évaporation est beaucoup plus petit par rapport au taux d'évaporation potentiel (défini comme le taux d'évaporation maximal donné par l'équation (4.11)) et que ce rapport augmente avec l'humidité relative de l'air externe.

L'apport des contributions $\dot{q}_{film-coin}$, \dot{q}_{vap} , $\dot{q}_{film-fin}$ au taux d'évaporation est ensuite étudié sur la figure 4.11(b). On voit que le transport liquide dans les coins domine jusqu'à peu près la moitié du canal ($x/L_s \approx 0.5$) où le transport par diffusion de la vapeur commence à devenir de plus en plus dominant. Ce phénomène est dû à l'effet KELVIN, la variation de la pression de vapeur $p_v(e(x))$ devenant plus grande avec l'amincissement du film liquide comme nous l'avons vu sur la figure 4.10. En sortie

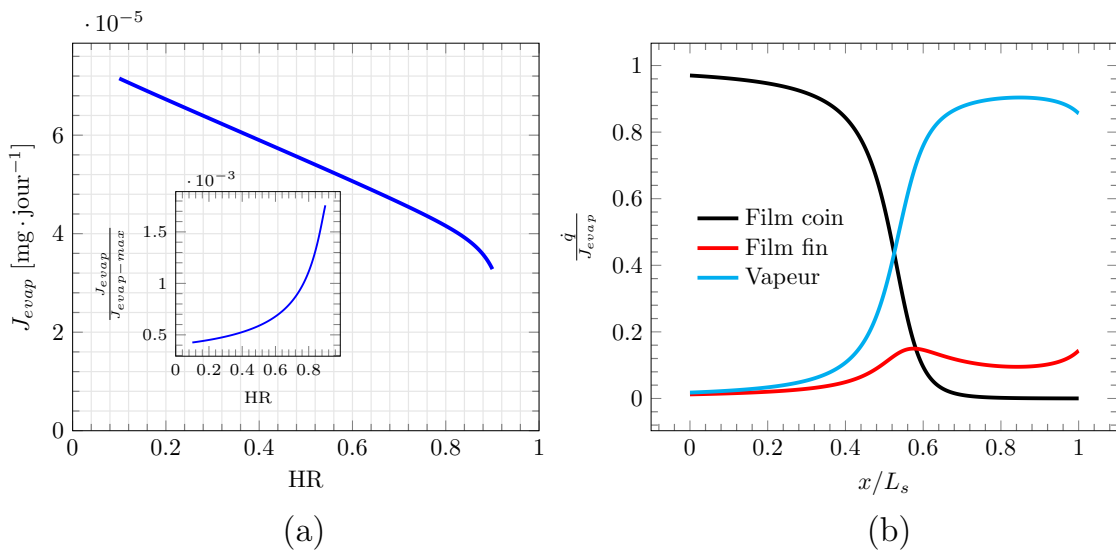


FIGURE 4.11 – (a) Évolution en fonction de l'humidité relative dans l'air externe du taux d'évaporation. L'insert montre l'évolution en fonction de l'humidité relative d'air externe du rapport entre le taux d'évaporation calculé et le taux d'évaporation maximal qu'on puisse avoir. (b) Contribution de chaque transport d'écoulement pour $HR = 0.1$ le long du canal (c'est-à-dire les débits calculés par les expressions (4.15), (4.16e) et (4.18), comparés au taux d'évaporation calculé). Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $\ell = 10 \mu\text{m}$, $L_s = 100\ell$, $\epsilon = 0.02$, $e_{P_0} = \ell/10$.

du canal, correspondant à $x/L_s = 1$, le transport par diffusion de la vapeur pilote en grande partie la fuite suivi du transport liquide dans le film fin.

On s'intéresse à présent au cas où la pente du canal vaut dix fois celle du canal précédent, c'est-à-dire $\epsilon = 0.2$, tout en gardant les autres grandeurs inchangées. On constate premièrement sur la figure 4.12(a) que la fuite augmente et est maintenant de l'ordre de $10^{-3} \text{ mg} \cdot \text{jour}^{-1}$. Dans l'insert, on voit aussi que le rapport entre la fuite calculée et la fuite potentielle ou maximale a également augmenté comparé à celui

qu'on a pour le cas $\epsilon = 0.02$. L'analyse de la contribution de chaque mode de transport à la fuite est faite sur la figure 4.12(b). Sur ce graphe, les lignes pleines caractérisent le comportement à $HR = 0.1$ alors que les lignes discontinues représentent celui à $HR = 0.9$. Contrairement aux résultats de la figure 4.11(b) donnés pour $HR = 0.1$ et $\epsilon = 0.02$, on observe que le transport en phase liquide dans les films de coin pilote l'écoulement jusqu'à peu près une distance de $0.9L_s = 90\ell$, et qu'au delà de cette position c'est le transport par diffusion de la vapeur qui devient complètement dominant. L'apport

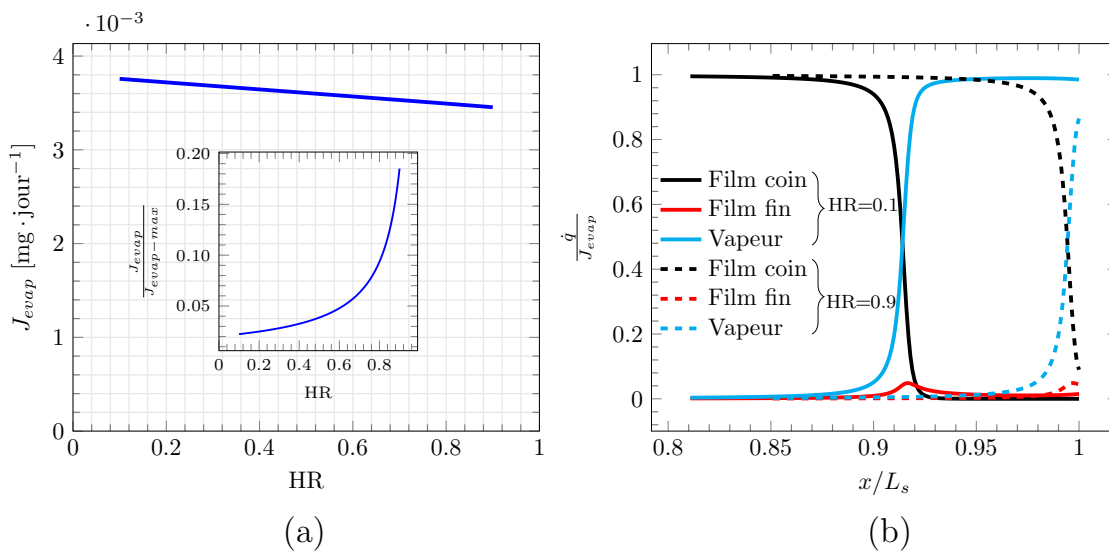


FIGURE 4.12 – (a) Évolution en fonction de l'humidité relative dans l'air externe du taux d'évaporation à $\epsilon = 0.2$. L'insert montre l'évolution en fonction de l'humidité relative d'air externe du rapport entre le taux d'évaporation calculé et le taux d'évaporation maximal qu'on puisse avoir. (b) Contribution de chaque transport d'écoulement (c'est-à-dire les débits calculés par les expressions (4.15), (4.16e) et (4.18), comparés au taux d'évaporation calculé) : les lignes pleines sont à $HR = 0.1$ et les lignes discontinues sont à $HR = 0.9$. Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $\ell = 10 \mu\text{m}$, $L_s = 100\ell$, $e_{P_0} = \ell/10$.

du transport en phase liquide dans le film fin est pour sa part insignifiant dans tout le processus. Pour $HR = 0.9$, où l'on a le débit de fuite le plus faible selon la figure 4.11(a), le transport en phase liquide dans le film de coin gouverne totalement l'écoulement jusqu'à une distance très proche de la sortie du canal, où le transport par diffusion en phase gazeuse prend le relais.

Comme nous l'avons déjà montré concernant l'impact de la mouillabilité des sur-

faces (angle de contact θ_e) sur l'analyse expérimentale d'une fuite liquide (voir dans la partie 2.2.2 du chapitre 2), les résultats numériques de la figure 4.13 montre de nouveau la nécessité de prendre en compte ce paramètre pour une bonne estimation de la fuite. Les résultats de la figure 4.13(a) montre une baisse significative de la fuite plus

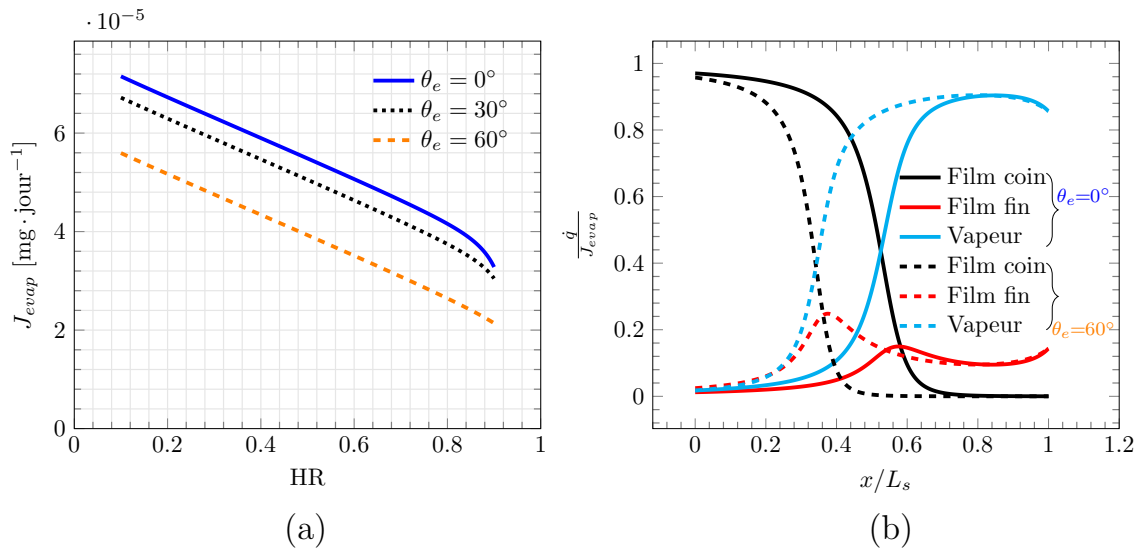


FIGURE 4.13 – Influence de l'angle de contact θ_e pour $\epsilon = 0.02$ sur (a) le taux d'évaporation (b) les contribution de chaque transport d'écoulement à HR = 0.1. Les données utilisées sont : $\ell = 10 \mu\text{m}$, $L_s = 100\ell$, $e_{P_0} = \ell/10$.

l'angle de contact augmente. On constate sur la figure 4.13(b) que c'est plus le transport en phase liquide dans les coins qui est impacté par la baisse de la mouillabilité et que la fuite résulte des transports en phase liquide dans le film fin et par diffusion en phase gazeuse, ce dernier étant dominant.

D'autres paramètres qui influencent le taux de fuite sont la longueur totale du canal, L_s , et la largeur du canal, 2ℓ . Sur la figure 4.14, on observe que pour $L_s = 1000\ell$, le taux d'évaporation obtenu correspond à celui de la figure 4.11(a) divisé par dix (obtenu pour une longueur totale $L_s = 100\ell$), sans changer les contributions de chaque transport. Ce qui veut dire que le taux d'évaporation varie d'une manière inversement proportionnelle avec la longueur totale L_s . Plus la longueur du canal est importante, plus le taux d'évaporation va être faible.

La figure 4.15(a) montre pour sa part que pour $\ell = 100 \mu\text{m}$, le taux d'évaporation est

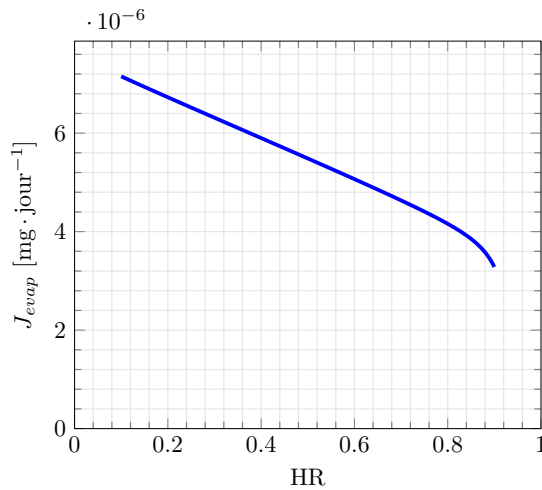


FIGURE 4.14 – Influence de la longueur totale du canal sur le taux d'évaporation. Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $\ell = 10 \mu\text{m}$, $L_s = 1000\ell$, $\epsilon = 0.02$, $e_{P_0} = \ell/10$.

de loin supérieur à celui obtenu sur la figure 4.11(a) (correspondant à $\ell = 10 \mu\text{m}$). On observe par ailleurs sur la figure 4.15(b) une baisse très significative de la contribution due au transport en phase liquide dans les films fins contrairement aux résultats de la figure 4.11(b).

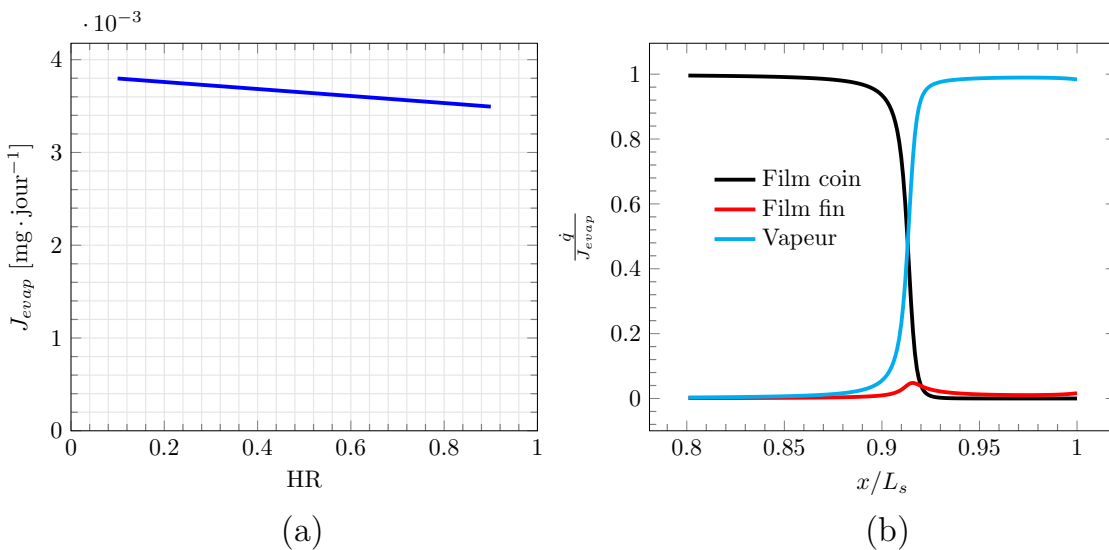


FIGURE 4.15 – Influence de la largeur du canal $2\ell = 200 \mu\text{m}$ sur (a) le taux d'évaporation. (b) les contribution de chaque transport d'écoulement pour $HR = 0.1$. Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $L_s = 100\ell$, $\epsilon = 0.02$, $e_{P_0} = \ell/10$.

B.2. Cas limite

Les résultats précédents montrent que le taux d'évaporation est majoritairement pilotée par le transport en phase gazeuse en sortie du canal. De ce fait, on peut négliger le transport en phase liquide dans le film fin de telle sorte que l'équation (4.21) devienne

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72 \mu_\beta} (e_{P_0}^3 - e^3(L_s)) + \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(e_{P_0}) - \text{HR}(L_s)) \\ & = L_s D \frac{M}{RT} \frac{\ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(L_s) - \text{HR}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec,

$$\text{HR}(L_s) = \exp\left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e(L_s)}\right), \quad \text{HR}(e_{P_0}) = \exp\left(\frac{-2B\sigma M}{\rho_\beta RT \epsilon e_{P_0}}\right). \quad (4.24)$$

Sachant que $e_{P_0}^3 \gg e^3(L_s)$ et que $\text{HR}(e_{P_0}) \approx 1$, l'équation (4.23) se ramène finalement à la forme

$$\text{HR}(L_s) - \text{HR} = \frac{1}{1 + \frac{h_0}{L_s}} \left(\frac{\rho_\beta RT \epsilon^2 \sigma B}{36 \mu_\beta p_{sat} MD} \frac{e_{P_0}^3}{\ell L_s} + \frac{\epsilon \ell}{L_s} (1 - \text{HR}) \right), \quad (4.25)$$

ce qui veut dire que le taux d'évaporation donné par l'équation (4.26) peut s'exprimer analytiquement

$$\begin{aligned} J_{evap} & = D \frac{M}{RT} \frac{\ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(L_s) - \text{HR}) \\ & = \frac{D}{1 + \frac{h_0}{L_s}} \frac{M}{RT} \frac{\ell}{2} p_{sat} \left(\frac{\rho_\beta RT \epsilon^2 \sigma B}{36 \mu_\beta p_{sat} MD} \frac{e_{P_0}^3}{\ell L_s} + \frac{\epsilon \ell}{L_s} (1 - \text{HR}) \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

On analyse sur la figure 4.16 la variation du taux d'évaporation exprimé par l'équation (4.26) en fonction de l'humidité relative, HR, de l'épaisseur du film de coin en entrée du canal, e_{P_0}/ℓ , et de la longueur totale du canal, L_s . La figure 4.16(a) révèle premièrement que l'approximation ayant conduit à la dérivation de l'expression (4.26) du taux d'évaporation donne des résultats (symboles circulaires) très proches du modèle numérique incluant les effets de film fin (lignes continues), pour un canal de longueur

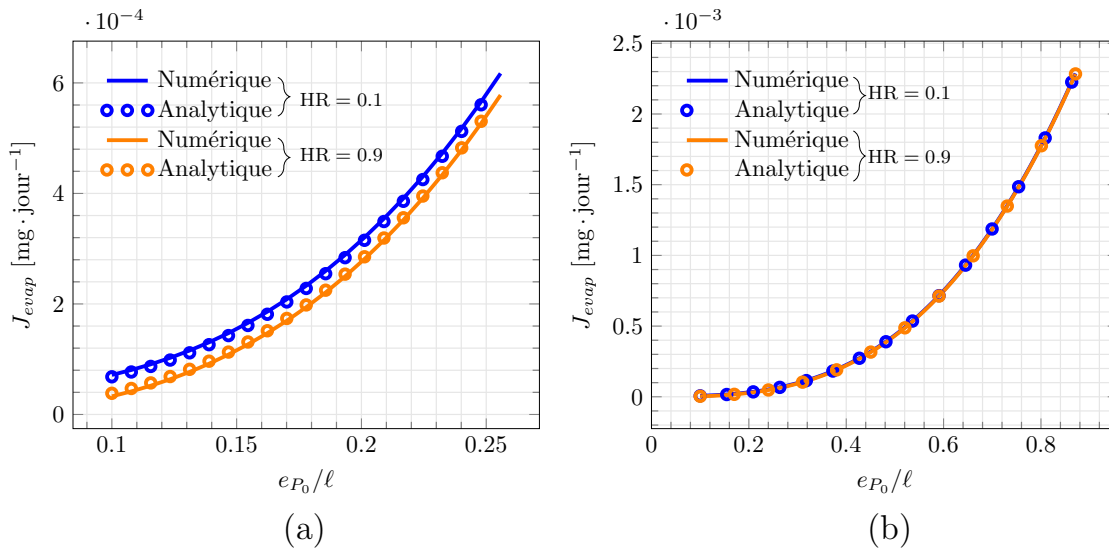


FIGURE 4.16 – Évolution du taux d'évaporation en fonction de l'épaisseur du film de coin en entrée du canal, e_{P_0}/ℓ , pour différentes valeurs d'humidité relative dans un canal de longueur (a) $L_s = 100\ell$ (b) $L_s = 1000\ell$. Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $\epsilon = 0.02$.

totale $L_s = 100\ell$. On observe que le taux d'évaporation augmente avec l'épaisseur du film de coin en entrée du canal e_{P_0}/ℓ , ce qui est cohérent car ceci correspond à une augmentation de pression, mais qu'en revanche il diminue avec l'augmentation de l'humidité relative comme il a été déjà illustré précédemment. Mais lorsqu'on augmente la longueur totale du canal, c'est-à-dire $L_s = 1000\ell$, on obtient un résultat remarquable qui se résume à l'équation

$$\begin{aligned}
 J_{lim} &= \frac{\ell}{1 + \frac{h_0}{L_s}} \frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} \frac{e_{P_0}^3}{\ell L_s} \\
 &\simeq \frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} \frac{e_{P_0}^3}{L_s} = \frac{B^4}{9\epsilon} \frac{\rho_\beta \sigma^4}{L_s \mu_\beta (p_\gamma - P_0)^3},
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

et qui montre que le taux d'évaporation ne varie pas avec l'humidité relative quelle que soit la valeur de e_{P_0}/ℓ (avec la valeur maximale de e_{P_0} correspondant à la valeur seuil de l'équation (3.32), pour laquelle une potentielle invasion du liquide dans tout le canal est possible). Ceci veut dire que le film de coin ajuste son épaisseur $e(L_s)$ en sortie de canal de façon à maintenir le même taux d'évaporation quelle que soit la valeur de

l'humidité relative, HR, dans la gamme étudiée.

4.3.3 Cas d'une invasion centrale

A. Détermination de la fuite

Lorsque la pression à l'entrée du canal P_0 atteint (ou devient supérieure) la valeur $P_{0\max}$, donnée par l'expression (3.54) et correspondant à une épaisseur à l'entrée du canal $e(x=0) = e_{\max}$, avec e_{\max} donnée par l'expression (3.32), il y a invasion centrale ; ce qui signifie que le canal est complètement envahi par le liquide sur au moins une partie de sa longueur à partir de la zone d'entrée. On considère pour ces conditions, c'est-à-dire $P_0 \geq P_{0\max}$, la situation schématisée sur la figure 4.7(d) où le ménisque centrale est présent dans le canal sur une distance L_b . La pression capillaire dans toute la zone du ménisque central correspond à la pression capillaire seuil donnée par l'expression (3.35).

Le débit volumique circulant dans une zone saturée est défini comme à l'expression (3.56c) et pour un demi-canal il est donné par

$$Q_{zs} = \frac{\epsilon^3 \ell^4 (P_0 - P_{0\max})}{48\mu_\beta L_b}. \quad (4.28)$$

Dans la zone diphasique (correspondant à $L_b \leq x \leq L_s$ sur la figure 4.7(d)) on exprime comme précédemment la continuité des différents débits (voir équation (4.13)), conduisant à la forme de l'équation (4.20). On intègre cette dernière équation de L_b à L_s (en notant que l'on s'attend à ce que $\frac{h_0 \ell}{2} \gg S(e(x))$ dans la zone où le transport en phase vapeur est significatif, c'est-à-dire le film de coin doit être suffisamment mince pour que l'effet Kelvin ait un impact non-négligeable sur le gradient longitudinal de pression de vapeur dans le canal) pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} (e_{\max}^3 - e^3(L_s)) + \frac{\rho_\beta k_\psi A_h}{72\pi\mu_\beta} \left(\ell \ln \left(\frac{e_{\max}}{e(L_s)} \right) - e_{\max} + e(L_s) \right) + \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} \times \\ (\text{HR}(e_{\max}) - \text{HR}(L_s)) = (L_s - L_b) \frac{DM}{RT} \frac{\ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(L_s) - \text{HR}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Comme dans la partie précédente une approche simplifiée consiste à négliger la contribution des films fins, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} (e_{\max}^3 - e^3(L_s)) + \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(e_{\max}) - \text{HR}(L_s)) = (L_s - L_b) \times \\ \frac{DM}{RT} \frac{\ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(L_s) - \text{HR}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

et on obtient,

$$\begin{aligned} J_{evap} &= \frac{DM}{RT} \frac{\ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(L_s) - \text{HR}) \\ &= \frac{1}{L_s - L_b + h_0} \left[\frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} (e_{\max}^3 - e^3(L_s)) + \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(e_{\max}) - \text{HR}) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sachant que la conservation de masse impose que $\rho_\beta Q_{zs} = J_{evap}$, la combinaison des expressions (4.10), (4.28) et (4.31) donne

$$\begin{aligned} \rho_\beta \frac{\epsilon^3 \ell^4}{48\mu_\beta} \frac{(P_0 - P_{0\max})}{L_b} = \frac{1}{L_s - L_b + h_0} \left[\frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} (e_{\max}^3 - e^3(L_s)) + \right. \\ \left. \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(e_{\max}) - \text{HR}) \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

ou encore

$$\begin{aligned} P_0 = P_{0\max} + \frac{48\mu_\beta L_b}{\rho_\beta \epsilon^3 \ell^4 (L_s - L_b + h_0)} \left[\frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} (e_{\max}^3 - e^3(L_s)) + \right. \\ \left. \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(e_{\max}) - \text{HR}) \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

qui est une expression permettant de calculer la pression d'entrée correspondant à la position L_b du ménisque central.

Pour L_b suffisamment grand (c'est-à-dire proche de L_s), on s'attend à ce que l'épaisseur du film de coin varie très peu. En d'autres termes, $e_{\max}^3 \approx e^3(L_s)$ lorsque la position du ménisque central L_b approche la longueur totale du canal L_s . Dans ces conditions,

à partir de l'expression (4.33) on a

$$P_{olim} = P_{0max} + \frac{24\mu_\beta L_b}{\rho_\beta \epsilon^2 \ell^2 h_0} \frac{DM}{RT} p_{sat} (\text{HR}(e_{max}) - \text{HR}), \quad (4.34)$$

où P_{olim} correspond à la pression à partir de laquelle $e_{max}^3 \approx e^3(L_s)$. Le taux d'évaporation attendu dans cette limite est donné par

$$J_{evap-lim} = \frac{\ell DM}{2RT} p_{sat} (\text{HR}(e_{max}) - \text{HR}). \quad (4.35)$$

La solution avec invasion centrale partielle est donc acceptable pour $L_b \leq L_{b-lim}$ où L_{b-lim} satisfait l'équation exprimant que le taux d'évaporation en présence du film de coin donné par l'expression (4.31) ne peut être supérieur à celui donné par l'expression (4.35), c'est-à-dire

$$\frac{\ell DM}{2RT} p_{sat} (\text{HR}(e_{max}) - \text{HR}) \approx \frac{1}{L_s - L_{b-lim} + h_0} \left[\frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} (\text{HR}(e_{max}) - \text{HR}) \right], \quad (4.36)$$

ce qui donne

$$L_{b-lim} \approx L_s. \quad (4.37)$$

La pression d'entrée marquant la fin du régime avec invasion centrale est alors donnée par l'expression (4.34) que l'on combine avec (4.37) pour avoir

$$P_{olim} \approx P_{0max} + \frac{24\mu_\beta L_s}{\rho_\beta \epsilon^3 \ell^3} \frac{DM}{RT} p_{sat} (\text{HR}(e_{max}) - \text{HR}). \quad (4.38)$$

Cette pression limite correspond à un canal complètement saturé avec le ménisque central à la courbure maximale en sortie (ménisque sur le point de reculer).

On peut aussi introduire la pression limite correspondant à un canal complètement saturé avec ménisque central plat en sortie.

$$\rho_\beta \frac{\epsilon^3 \ell^4}{48\mu_\beta} \frac{(P_{0s} - p_\gamma)}{L_s} = J_{evap-max} \quad (4.39)$$

Ce qui donne

$$P_{0s} = p_\gamma + \frac{48\mu_\beta L_s}{\rho_\beta \epsilon^3 \ell^4} J_{evap-max}. \quad (4.40)$$

En résumé, les différents régimes suivants sont attendus en fonction de la pression d'entrée, comme cela est montré dans le tableau 4.1 et illustré sur les figures 4.17. On voit sur ces dernières figures que suivant les dimensions du canal, les seuils de

TABLE 4.1 – Régime d'invasion en fonction de la pression imposée

$P_0 < P_{0max}$	Film uniquement, pas d'invasion centrale	Fuite inférieure à l'évaporation potentielle
$P_{0max} \leq P_0 \leq P_{0lim}$	Invasion centrale partielle avec film de coin	Fuite inférieure à l'évaporation potentielle mais plus élevée que dans le régime de film pur devenant égale au taux d'évaporation $J_{evap-max} \frac{HR(\epsilon_{max})-HR}{1-HR}$ pour $P_0 = P_{0lim}$
$P_{0lim} \leq P_0 \leq P_{0s}$	Invasion centrale complète	Fuite devenant égale au taux d'évaporation maximal pour $P_0 = P_{0s}$
$P_0 > P_{0s}$	Invasion complète du canal	Fuite supérieure au taux d'évaporation maximale $J_{evap-max}$

pression pour passer d'un régime à l'autre varie significativement. Sur la figure 4.17(a) où l'on considère que le canal a pour dimensions $\ell = 10 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0.02$, $L_s = 1000\ell$, on observe par exemple que la pression P_{0max} est négative, ce qui veut dire que la pression capillaire seuil qui est fonction de ϵ_{max} est supérieure à la pression dans le gaz ($p_\gamma = 1 \text{ bar}$). A l'inverse, la pression P_{0max} sur la figure 4.17(b) dans un canal de dimensions $\ell = 250 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0.01$, $L_s = 100\ell$, est quant à elle positive ce qui veut dire que la pression capillaire seuil vaut moins de 1 bar. D'autres observations telles que le niveau de pression pour passer d'un régime à l'autre peuvent être analysées sur ces figures. En résumé, lorsque les dimensions du canal sont plus étroites (cas de la figure 4.17(a)), il faut des pressions beaucoup plus grandes pour passer d'un régime à l'autre

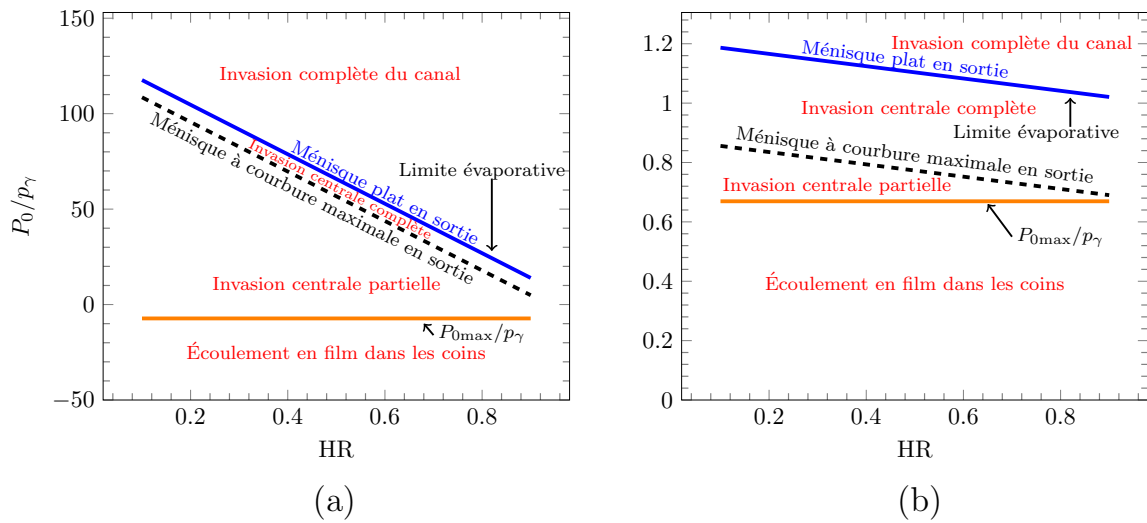


FIGURE 4.17 – Diagramme de phases des différents régimes d'invasion du liquide en fonction de la pression d'entrée et de l'humidité relative d'air externe (a) $\ell = 10 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0.02$, $L_s = 1000\ell$ (b) $\ell = 250 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0.02$, $L_s = 1000\ell$. Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $p_\gamma = 1 \text{ bar}$.

contrairement au cas de la figure 4.17(b).

B. Analyse de la fuite

On s'intéresse à présent à l'analyse de la fuite lorsqu'il y a invasion central du liquide en partant du modèle développé dans la partie précédente. Premièrement, en résolvant les équations (4.30) et (4.33), on montre sur la figure 4.18(a) l'évolution de la pression d'entrée du liquide, P_0 , en fonction de la position du ménisque centre, L_b , où l'on voit que cette pression augmente lorsque le ménisque central est de plus en plus avancé dans le canal. L'influence de l'humidité relative d'air externe est également montrée sur cette figure et on observe que si le HR est faible (cas de 0.8), il faut des pressions – suffisant élevées pour que le ménisque centrale occupe des positions plus proches de la sortie du canal, valant un peu plus de dix fois la pression du cas $HR = 0.9$ au delà de $L_b/L_s \approx 0.8$. On observe cependant que malgré l'augmentation de la pression (voir sur la figure 4.18(b)), l'épaisseur du film liquide en sortie du canal, $e(L_s)$, présente une légère variation en fonction de la position occupée par le ménisque centrale jusqu'à une distance à peu près $L_b/L_s \approx 0.9$, restant de loin inférieure à l'épaisseur maximale du film, e_{\max} pour le cas $HR = 0.8$. Au delà de $L_b/L_s \approx 0.9$,

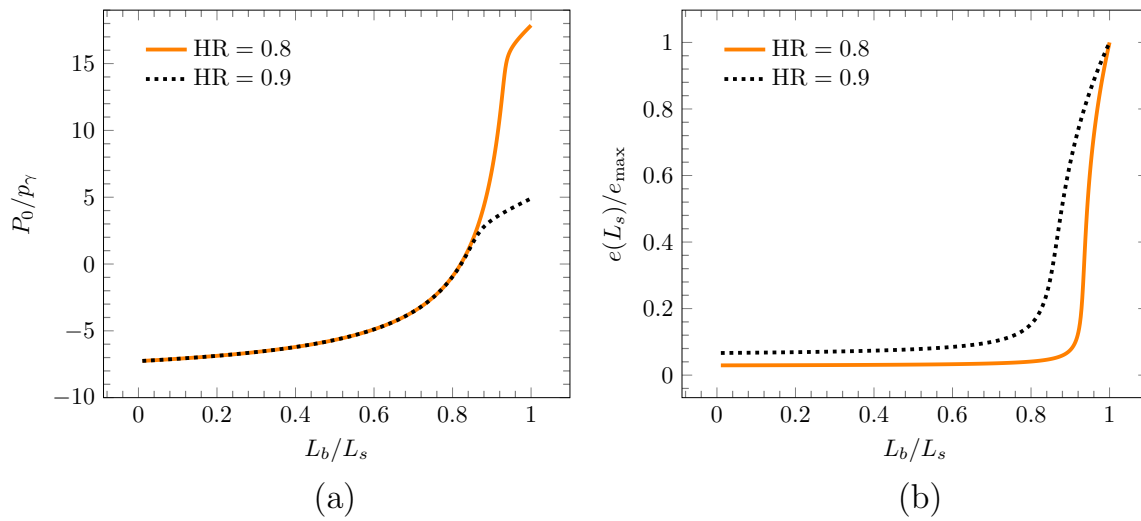


FIGURE 4.18 – Évolution, en fonction de la position du ménisque central L_b , pour $HR = 0.8$ et $HR = 0.9$ de (a) la pression d'entrée du liquide, P_0 . (b) l'épaisseur du film en sortie, $e(L_s)$, en résolvant les équations (4.30) et (4.33). Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $p_\gamma = 1 \text{ bar}$, $\ell = 10 \text{ }\mu\text{m}$, $\epsilon = 0.02$, $L_s = 1000\ell$.

on constate une augmentation brusque de l'épaisseur du film $e(L_s)$ qui tend rapidement vers la valeur de e_{\max} . Le même comportement est observé pour le cas $HR = 0.9$ où cependant l'épaisseur $e(L_s)$ reste très inférieure à e_{\max} jusqu'à $L_b/L_s \approx 0.8$.

L'analyse de la fuite en considérant les deux régimes d'écoulement (régime du film liquide et régime du ménisque central) est faite sur la figure 4.19(a) en fonction de la pression imposée en entrée du canal, où l'on considère un canal de dimensions $\ell = 10 \text{ }\mu\text{m}$, $\epsilon = 0.02$, $L_s = 1000\ell$. Lorsque la pression imposée est inférieure à la pression seuil (ici $P_0/|P_{0\max}| < -1$), on a dans ce cas une fuite qui résulte de l'invasion par les coins (régime du film liquide). Cette fuite est calculée en utilisant l'expression (4.26) où l'on a montré que le transport du liquide dans le film fin est négligeable, et on voit qu'elle est relativement faible par rapport à la fuite potentielle attendue, $J_{\text{evap-max}}$. Si l'on impose une pression telle que $P_0/|P_{0\max}| > -1$, il y a invasion du liquide dans tout le canal (régime du ménisque central) et dans ce cas on distingue différentes fuites comme nous l'avons résumé dans le tableau 4.1. Tout d'abord, le taux d'évaporation correspondant à la résolution des équations (4.30) et (4.33) est présenté et correspond à celui dans la zone *Invasion centrale partielle*. On observe que ce taux d'évaporation

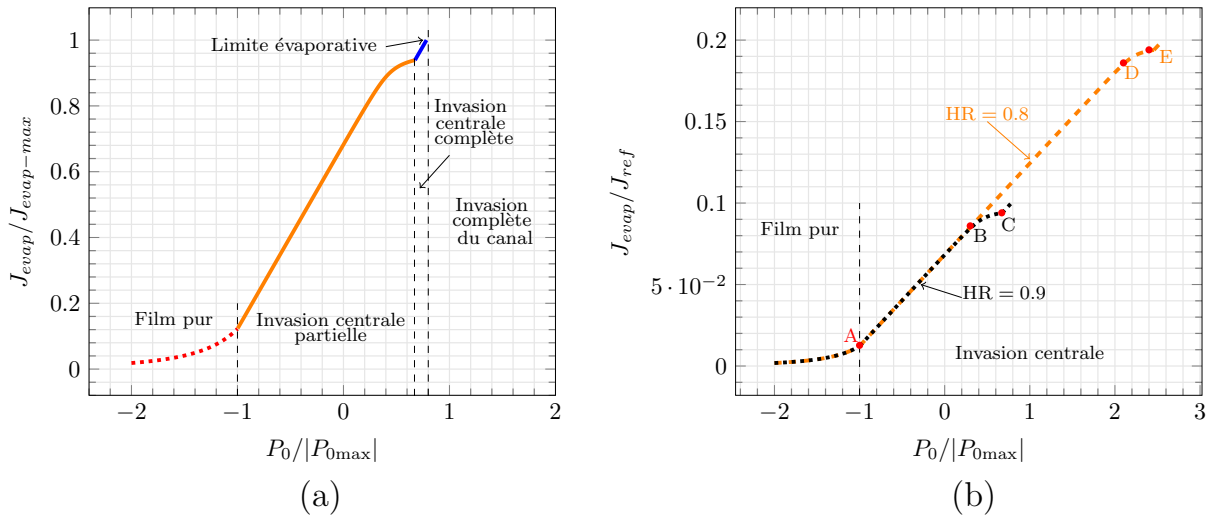


FIGURE 4.19 – Évolution du taux d'évaporation en fonction de la pression d'entrée, P_0 , en considérant tous les régimes d'écoulement (a) $HR = 0.9$ (b) $HR = 0.8$ et $HR = 0.9$ avec $J_{ref} = \frac{\ell DM}{2RT} p_{sat}$. Les données utilisées sont : $\theta_e = 0^\circ$, $p_\gamma = 1$ bar, $\ell = 10 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0.02$, $L_s = 1000\ell$.

augmente avec la pression P_0 en tendant vers la valeur de la fuite potentielle $J_{evap-max}$ et que ce taux présente une variation linéaire avec la pression d'entrée du liquide mais que cette dernière s'arrête pour des pressions $P_0/|P_{0max}| > 0.15$ à peu près. On retrouve ensuite une variation linéaire du taux d'évaporation avec la pression lorsque le liquide arrive en bout du canal et que la courbure du ménisque en cette sortie commence à tendre vers zéro, pour atteindre la valeur du taux potentielle d'évaporation.

La figure 4.19(b) évalue l'influence de l'humidité relative d'air externe sur la fuite dans les deux régimes d'écoulement. Le taux de fuite est normalisé dans ce cas par un taux de fuite de référence, $J_{ref} = \frac{\ell DM}{2RT} p_{sat}$, qui ne varie pas avec l'humidité relative d'air externe comme le taux potentiel $J_{evap-max}$. Puisque le canal est suffisamment long ($L_s = 1000\ell$), on observe premièrement que le taux de fuite dans le régime film ($P_0/|P_{0max}| < -1$) est indépendant de l'humidité relative d'air externe, résultat que nous avons démontré dans la partie 4.3.2 et donné à l'expression (4.27). Pour $HR = 0.8$, on atteint des valeurs de fuite plus élevées que pour le cas $HR = 0.9$, ce qui est dû au fait que dans le premier cas, on a des pressions beaucoup plus grandes que dans le deuxième cas (voir la figure 4.18(a)). Les droites passant par les points A, B, D, auront

toujours une même pente quelle que soit la valeur de l'humidité relative d'air externe, ce qui veut dire que le taux d'évaporation dans les zones A-B pour $HR = 0.9$ et A-D pour $HR = 0.8$ ne varie pas avec l'humidité relative d'air externe pour un canal suffisamment long. Dans ces zones, on a un comportement de la forme $e_{\max}^3 \gg e^3(L_s)$, que l'on peut observer sur la figure 4.18(b), si bien que l'on peut alors simplifier l'équation (4.33) de la manière suivante,

$$P_0 = P_{0\max} + \frac{48\mu_\beta L_b}{\epsilon^3 \ell^4 (L_s - L_b + h_0)} \left(\frac{\epsilon^2 \sigma B e_{\max}^3}{72\mu_\beta} + \frac{DM}{\rho_\beta RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} (HR(e_{\max}) - HR) \right). \quad (4.41)$$

Dans ces dernières conditions ($e_{\max}^3 \gg e^3(L_s)$), le taux d'évaporation, noté J , est donné par l'expression suivante

$$J_{evap} \simeq \frac{1}{L_s - L_b + h_0} \left(\frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} e_{\max}^3 + \frac{DM}{RT} \frac{h_0 \ell}{2} p_{sat} (HR(e_{\max}) - HR) \right), \quad (4.42)$$

ce qui donne le comportement du taux d'évaporation dans les zones A-B et A-D sous la forme

$$J_{evap} \simeq \frac{1}{L_s - L_b} \frac{\rho_\beta \epsilon^2 \sigma B}{72\mu_\beta} e_{\max}^3, \quad \text{pour } L_s \gg \ell. \quad (4.43)$$

Au delà des points B et D , le taux d'évaporation est influencé par l'humidité relative d'air externe jusqu'aux points C et E où la pression atteint la valeur de la pression limite donnée par l'expression (4.38) correspondant au taux d'évaporation limite donné par l'expression (4.35). On retrouve ensuite un comportement linéaire du taux d'évaporation avec la pression d'entrée lorsque $P_{olim} \leq P_0 \leq P_{0s}$.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a montré comment une prédiction de débit de fuite gazeuse sur un chemin de fuite caractéristique d'un assemblage mécanique constitué par deux brides et d'un joint en matériaux métalliques, peut être corrélée à une prédiction d'un débit

de fuite liquide. L'analyse a permis de montrer qu'avant l'apparition de la fuite liquide prédite, une fuite transitoire peut exister selon que les écoulements de film liquide dans les coins sont négligeables ou non. L'analyse sur certains paramètres qui influencent l'apparition d'une fuite liquide a permis également d'évaluer le temps d'écart qui peut exister entre le début d'une fuite transitoire et celui d'une fuite stabilisée.

Dans le cas où une fuite se produit essentiellement par les coins, nous avons montré qu'on peut estimer la fuite stabilisée (régime stationnaire) pour un liquide volatil en faisant un couplage avec le phénomène d'évaporation. Cette dernière analyse a montré que le taux de fuite devient indépendant de l'humidité relative dans l'air externe lorsque la longueur totale du canal augmente et qu'il varie de manière inversement proportionnelle avec la longueur totale du canal. Le cas où le liquide est présent dans tout le canal a montré que le taux de fuite dépend des valeurs de pressions imposées. Selon le cas, la fuite peut à nouveau être indépendante de l'humidité relative dans l'air externe lorsque l'épaisseur du film en sortie du canal est de loin inférieure à l'épaisseur maximale de ce dernier, ou encore être très dépendant de l'humidité relative dans l'air externe lorsque l'épaisseur du film en sortie du canal commence à tendre vers l'épaisseur maximale du film.

Conclusion générale et Perspectives

L'étanchéité des systèmes est un sujet au cœur des nombreuses discussions dans le monde industriel soit dans le but de réduire les émissions de substances toxiques, de faire des économies d'eau, d'énergie ou encore de prévenir contre les fuites accidentelles. Selon les applications, le niveau d'étanchéité requis pour garantir des performances optimales peut conduire à des exigences qui doivent répondre à différentes contraintes multiphysiques. Dans les circuits hydrauliques d'une centrale nucléaire, le critère d'étanchéité recherché sur des assemblages mécaniques boulonnés qui raccordent les tuyauteries impose un choix de matériaux, à savoir les métaux, pour répondre à diverses contraintes (mécanique, haute température, chimique, etc.). Ces assemblages mécaniques, formés par une mise en contact de deux surfaces rugueuses l'une contre l'autre (une bride et un joint), sont ainsi un système multiphysique et multi-échelle dont la maîtrise de l'intégrité vis à vis de la fuite reste un vrai défi. Dans la recherche d'un compromis sur un critère d'étanchéité, ces travaux de thèse se sont intéressés à la physique des fluides, notamment aux écoulements diphasiques liquide-gaz à l'interface bride-joint, sous certaines hypothèses, en considérant que cette dernière forme une fracture modèle pour laquelle le champ des ouvertures est défini.

Une première analyse a consisté à réaliser des mesures expérimentales de fuites gazeuses (hélium) et liquides (eau) dans une puce microfluidique dans laquelle sont gravés des microcanaux droits parallèles de section transversale rectangulaire et de profondeur maximale de l'ordre de $2\ \mu\text{m}$. Le choix de cette géométrie est faite afin de capturer des éléments géométriques essentiels d'une texture réelle de l'interface joint-bride. En ce qui concerne les mesures de fuites gazeuses, l'interprétation de ces dernières est souvent faite en terme de transmissivité globale du système puis com-

parée à la transmissivité déterminée à partir de la connaissance du champ des ouvertures. En adoptant cette démarche, nous avons trouvé que la profondeur moyenne des microcanaux gravés dans la puce microfluidique, déduite de mesures de fuites gazeuses et liquides présente une erreur relative d'environ 7%. Cependant, la comparaison de la fuite liquide mesurée (par hygrométrie) avec celle calculée par une loi de type REYNOLDS s'est avérée délicate notamment à cause des effets de capillarité et de mouillabilité qui entrent en jeu. On observe, comme attendu, qu'en régime d'imbibition, les forces capillaires contribuent à l'augmentation de la fuite et qu'en revanche, la baisse de la mouillabilité contribue à la diminution de la fuite liquide. Ces phénomènes indiquent que la prédiction d'une fuite liquide ne peut être obtenue avec certitude par la connaissance seule de la transmissivité. Par ailleurs, la caractérisation de la géométrie des microcanaux a montré que la section gravée n'est pas réellement rectangulaire et que les microcanaux présentent chacun une certaine dispersion géométrique, ce qui constitue une source d'incertitude qu'il convient de prendre en compte pour affiner la prédiction.

Un autre phénomène en lien avec les effets capillaires qui rend complexe la compréhension d'une fuite liquide réside dans les écoulements en film qui peuvent se développer dans un chemin de fuite. La dynamique d'imbibition d'un liquide mouillant en prenant en compte ce phénomène a été étudiée dans une fracture modèle, de section transversale triangulaire, afin d'évaluer le temps que met un ménisque pour arriver en sortie du canal. Le choix de cette forme de canal a été effectué pour approcher la forme des stries laissées par un outil de tournage, qui conduit à une empreinte spiralée sur les brides. Le modèle étudié est basé sur la théorie de la lubrification en supposant un nombre capillaire beaucoup plus petit que l'unité. Deux types de conditions d'entrée du liquide dans le canal ont été considérées, à savoir un débit constant et une pression constante.

L'analyse a montré que deux situations d'écoulements peuvent se produire : un écoulement en régime film où le liquide ne se déplace que par les angles vifs (les coins)

du canal triangulaire, et un régime où l'écoulement se produit dans tout le canal avec les films dans les coins. Lorsque le liquide se déplace sous un débit constant imposé, l'écoulement se produit premièrement dans les coins du canal (selon la valeur du débit) et l'épaisseur du film en entrée du canal augmente au fur et à mesure que le liquide continue d'avancer dans les coins. Une valeur seuil de l'épaisseur du film en entrée, dite épaisseur maximale, a été définie : si l'épaisseur en entrée du canal atteint cette valeur maximale, le liquide commence à pénétrer dans tout le canal. S'ensuit alors un écoulement du liquide qui sature le canal en aval du ménisque connecté aux films en amont de celui-ci. Les résultats de cette analyse ont montré que l'écoulement via ces films liquide peuvent significativement ralentir l'écoulement du liquide dans la zone centrale du ménisque suivant les valeurs du débit qui sont imposées et en parallèle, l'écoulement en films dans les coins est plus rapide à cause des effets capillaires qui y sont très importants. Cela conduit à une correction à la loi classique de WASHBURN. Le modèle développé a montré une très bonne concordance avec des résultats expérimentaux issus de la littérature, ce qui a permis sa validation.

Dans le cas où la dynamique d'imbibition s'effectue sous une pression constante imposée, si la pression appliquée est inférieure à la pression seuil correspondant à la valeur de l'épaisseur maximale en entrée, l'écoulement se produit uniquement dans les coins du canal. On a montré que dans cette dynamique, l'épaisseur du film en entrée est fixée, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas avec le temps, contrairement à la dynamique à débit imposé. Mais si en revanche la pression appliquée est supérieure ou égale à la pression seuil, un écoulement dans tout le canal est attendu avec un impact plus ou moins important des films dans les coins, selon la valeur de la pression appliquée. Ce modèle a également montré que lorsque les films dans les coins sont pris en compte, la prédiction de la position du ménisque par la loi classique de WASHBURN, qui prédit une dynamique en racine carrée du temps, peut être surestimée. L'écart entre la solution avec et sans film pour prédire l'évolution temporelle du ménisque devient cependant négligeable pour des valeurs de pression d'entrée suffisamment grandes.

Les tests en étanchéité sur des joints sont plutôt faits en imposant une pression au fluide dont on souhaite mesurer la fuite. Dans ce contexte, nous avons illustré comment le résultat précédent, pouvait être exploité de manière simplifiée pour déterminer, en première approche, le temps de la période transitoire nécessaire pour pouvoir détecter une fuite lors d'un essai. Cette analyse a montré qu'avec les hypothèses considérées, une fuite liquide se déroulerait en deux étapes : une première où l'on ne va mesurer qu'une fuite transitoire, due aux écoulements en films, dont le débit va croître avec le temps puis une fuite stabilisée ou stationnaire caractéristique de période où le liquide sature tout le chemin de fuite. Dans ce dernier cas, nous avons montré la corrélation qui peut y avoir entre une fuite liquide stabilisée et une fuite en gaz, tout en approximant le temps nécessaire pour mesurer cette fuite liquide stabilisée. La corrélation établie prévient aussi de l'apparition précoce d'une fuite transitoire par les coins du chemin de fuite.

Dans le cas d'un liquide volatil, nous avons poursuivi l'analyse en tenant compte des effets combinés de transfert de masse résultant de l'évaporation au sein du canal partiellement saturé. Nous avons mis en évidence que le taux de fuite varie de façon inversement proportionnelle avec la longueur du canal. Nous avons aussi montré que la fuite par les coins en régime stationnaire peut devenir indépendante de l'humidité relative de l'air externe lorsque la longueur totale du canal ou la pression d'entrée deviennent suffisamment grandes. Lorsque le ménisque central est présent dans le canal, l'analyse a montré que suivant la valeur de la pression que l'on impose, la fuite stationnaire présente différents régimes et peut être indépendante de l'humidité relative pour le cas où l'épaisseur du film en sortie est encore très petite par rapport à l'épaisseur maximale de raccordement.

Un ensemble de perspectives peuvent être proposées à ce stade de l'étude pour consolider encore ces analyses. Du point de vue expérimental, il conviendrait premièrement d'améliorer les moyens d'observation sur le banc d'essai diphasique pour pouvoir visualiser la forme des ménisques en sortie des microcanaux pendant que l'air

sec évapore le liquide en sortie des microcanaux. Cette donnée permettrait de mieux approximer la valeur de la pression capillaire et la fuite que l'on peut estimer numériquement. Un autre aspect serait de réaliser des échantillons en matériau métallique suffisamment mou pour faciliter sa fermeture par un plan supérieur lisse (cuivre, argent, etc.) représentatifs d'un joint d'étanchéité réel sur lequel un seul chemin de fuite de forme spiralée avec et sans interconnexions entre les spires pourrait être gravé. Cette configuration permettrait d'effectuer des expériences d'imbibition sur des canaux suffisamment longs pour que les temps d'imbibition soient compatibles avec une observation plus détaillée de la structure de l'écoulement au cours de l'invasion et aussi d'analyser le comportement des films liquides en sortie du chemin de fuite lorsqu'il n'y a pas d'évaporation.

D'un point de vue modélisation, il serait également intéressant de compléter le modèle de dynamique d'imbibition en tenant compte du débit de fuite transitoire qui s'échapperait par les coins en sortie de canal qui est nécessairement de taille finie en pratique. Une réflexion reste aussi à envisager dans le cas avec changement de phase à l'interface liquide-gaz comme abordé dans le dernier chapitre, mais en régime instationnaire, premièrement pour le cas des films seuls et deuxièmement dans le cas où le canal est partiellement saturé, i.e., en présence d'une zone saturée en aval du ménisque. Une étude plus approfondie est aussi à prévoir dans le cas où l'écoulement présenterait des zones de piégeages du gaz, résultant d'un phénomène connu dans la littérature sous le nom de *snap off*. Enfin, une simplification majeure dans la modélisation faite dans ce travail réside dans la configuration géométrique, typiquement un simple canal de section triangulaire aplatie.

Même si cela peut être considéré comme une approximation raisonnable de la strie d'usinage principale (strie en spirale), le champ des ouvertures d'un contact est en réalité bien plus complexe. Il est donc souhaitable d'étendre ces travaux en considérant des géométries du contact bride-joint intégrant progressivement davantage de complexité (ondulation, variation de section, courts circuits, etc).

Références bibliographiques

- Olivier AMYOT : Contribution à l'étude des écoulements diphasiques à travers un contact rugueux. *Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers*, 2004.
- J. M. BELL et F. K. CAMERON : The Flow of Liquids through Capillary Spaces. *The Journal of Physical Chemistry*, 10(8):658–674, novembre 1906. ISSN 0092-7325, 1541-5740.
- Guy BOUCHER et Michel SABLIER : Spectrométrie de masse - principe et appareillage. *Technique de l'ingénieur, P2645 V1*, 2005.
- Julien BOURNIQUEL : Propriétés de transfert d'un contact métallique : application à l'étanchéité interne de robinetterie industrielle. *Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux*, 2017.
- J.P. BOYD : *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover, Mineola, New York, 2000.
- R. H. BROOKS et A. T. COREY : Hydraulic properties of porous media. *HYdrology papers*, 1964.
- Aditya BUDARAJU, Jyoti PHIRANI, Sasidhar KONDARAJU et Supreet Singh BAHGA : Capillary Displacement of Viscous Liquids in Geometries with Axial Variations. *Langmuir*, 32(41):10513–10521, octobre 2016. ISSN 0743-7463. Publisher : American Chemical Society.
- Jianchao CAI, Yin CHEN, Yang LIU, Shuang LI et Chenhao SUN : Capillary imbibition and flow of wetting liquid in irregular capillaries : A 100-year review. *Advances in Colloid and Interface Science*, 304:102654, 2022.
- F. CHAUVET, P. DURU, S. GEOFFROY et M. PRAT : Three Periods of Drying of a Single Square Capillary Tube. *Physical Review Letters*, 103(12):124502, septembre 2009. Publisher : American Physical Society.

C.L. CHENG, E. PERFECT, B. DONNELLY, H.Z. BILHEUX, A.S. TREMSIN, L.D. MCKAY, V.H. DISTEFANO, J.C. CAI et L.J. SANTODONATO : Rapid imbibition of water in fractures within unsaturated sedimentary rock. *Advances in Water Resources*, 77:82–89, 2015.

P. CONCUS et R. FINN : On the behavior of a capillary surface in a wedge. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 63(2):292–299, juin 1969. ISSN 0027-8424.

Paul CONCUS et Robert FINN : On capillary free surfaces in the absence of gravity. *Acta Mathematica*, 132(0):177–198, 1974. ISSN 0001-5962.

Arthur T COREY : The interrelation between gas and oil relative permeabilities. *Producers monthly*, pages 38–41, 1954.

R. M. CORLESS, G. H. GONNET, D. E. G. HARE, D. J. JEFFREY et D. E. KNUTH : On the lambert w function. *Advances in Computational Mathematics*, 5(1):329–359, décembre 1996. ISSN 1572-9044.

Henryk CZACHOR : Modelling the effect of pore structure and wetting angles on capillary rise in soils having different wettabilities. *Journal of Hydrology*, 328(3):604–613, 2006. ISSN 0022-1694.

DARCY : Les fontaines publiques de la ville de dijon. *Paris.*, 1856.

Gracel P. DIOMAMPO : Relative permeability through fractures. *SGP-TR-170*, 2001.

M. DONG et I. CHATZIS : The imbibition and flow of a wetting liquid along the corners of a square capillary tube. *Journal of Colloid and Interface Science*, 172(2):278–288, juin 1995. ISSN 0021-9797.

J. C. T. EIJKEL, B. DAN, H. W. REEMEIJER, D. C. HERMES, J. G. BOMER et A. VAN DEN BERG : Strongly Accelerated and Humidity-Independent Drying of Nanochan-

nels Induced by Sharp Corners. *Physical Review Letters*, 95(25):256107, décembre 2005. ISSN 0031-9007, 1079-7114.

M. FOURAR et S. BORIES : Experimental study of air-water two-phase flow through a fracture (narrow channel). *International Journal of Multiphase Flow*, 21(4):621–637, août 1995. ISSN 0301-9322.

M. FOURAR et R. LENORMAND : A viscous coupling model for relative permeabilities in fractures. *SPE 49006, paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, 1998.

Jean-Baptiste GORCE, Ian J. HEWITT et Dominic VELLA : Capillary Imbibition into Converging Tubes : Beating Washburn's Law and the Optimal Imbibition of Liquids. *Langmuir*, 32(6):1560–1567, février 2016. ISSN 0743-7463. Publisher : American Chemical Society.

Sobhan HATAMI et Stuart D.C. WALSH : Relative permeability of two-phase flow through rough-walled fractures : Effect of fracture morphology and flow dynamics. *Journal of Hydrology*, 613:128326, octobre 2022. ISSN 00221694.

F. J. HIGUERA, A. MEDINA et A. LIÑÁN : Capillary rise of a liquid between two vertical plates making a small angle. *Physics of Fluids*, 20(10):102102, octobre 2008. ISSN 1070-6631. Publisher : American Institute of Physics.

Mehdi HONARPOUR, L.F. KOEDERITZ et A. Herbert HARVEY : Empirical Equations for Estimating Two-Phase Relative Permeability in Consolidated Rock. *Journal of Petroleum Technology*, 34(12):2905–2908, 12 1982. ISSN 0149-2136.

Yuhua HUANG, Xia YE, Xiaohong YANG, Mingxin KUANG et Kaijie XU : Molecular dynamics study on wetting behavior of aluminum plates with different surface energies by microstructure difference. *Computational Materials Science*, 232:112631, 2024. ISSN 09270256.

- Pascal JOLLY : Contribution à l'étude du changement de phase liquide-vapeur dans des capillaires micrométriques en vue des applications aux étanchéités statiques. *Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 2004.*
- A KANTZAS, I CHATZIS et F A L DULLIEN : Mechanisms of capillary displacement of residual oil by gravity-assisted inert gas injection. *Paper presented at the SPE Rocky Mountain Regional Meeting, Casper, Wyoming, pages SPE–17506–MS, 1988.*
- Mathis KELM, Carina BRINGEDAL et Bernd FLEMISCH : Upscaling and effective behavior for two-phase porous-medium flow using a diffuse interface model. *Transport in Porous Media, 151(9):1849 – 1886, 2024.*
- Ehsan KHAJAVIAN, Mohammad Reza ATTAR, Ehsan MOHAMMADI ZAHRANI, Wei LIU, Ali DAVOODI et Saman HOSSEINPOUR : Tuning surface wettability of aluminum surface and its correlation with short and long term corrosion resistance in saline solutions. *Surface and Coatings Technology, 429:127950, 2022. ISSN 02578972.*
- Dieter LANGBEIN, Gerhard HÖHLER, Johann H. KÜHN, Thomas MÜLLER, Hidetoshi FUKUYAMA, Frank STEINER, Joachim TRÜMPER, Peter WÖLFLE et Andrei RUCKENSTEIN, éditeurs. *Capillary Surfaces*, volume 178 de *Springer Tracts in Modern Physics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.
- D. LASSEUX, F. J. Valdes PARADA, J. A. Ochoa TAPIA et B. GOYEAU : A macroscopic model for slightly compressible gas slip-flow in homogeneous porous media. *Physics of Fluids, 26(5):053102, 2014.*
- Didier LASSEUX, Azita AHMADI et Ali Akbar Abbasian ARANI : Two-Phase Inertial Flow in Homogeneous Porous Media : A Theoretical Derivation of a Macroscopic Model. *Transport in Porous Media, 75(3):371–400, décembre 2008.*
- Didier LASSEUX et Francisco J. VALDÉS-PARADA : A macroscopic model for immiscible two-phase flow in porous media. *Journal of Fluid Mechanics, 944:A43, 2022.*

Didier LASSEUX et Francisco J. VALDÉS-PARADA : Upscaled dynamic capillary pressure for two-phase flow in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 959:R2, 2023. ISSN 0022-1120, 1469-7645.

Roland LENORMAND, Eric TOUBOUL et Cesar ZARCONE : Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 189:165–187, avril 1988. ISSN 1469-7645, 0022-1120. Publisher : Cambridge University Press.

Kewen LI et Roland N. HORNE : An Experimental and Analytical Study of Steam/Water Capillary Pressure. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 4(06):477–482, 2001. ISSN 1094-6470, 1930-0212.

Kewen LI et Roland N. HORNE : Comparison of methods to calculate relative permeability from capillary pressure in consolidated water-wet porous media. *Water Resources Research*, 42(6), 2006. ISSN 1944-7973. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2005WR004482>.

Zhen LIAO, Russell L. DETWILER, Esther S. COOKSON, Wanjun LEI et Yi-Feng CHEN : Quantitative Visualization of Two-Phase Flow in a Fractured Porous Medium. *Water Resources Research*, 60(4):e2023WR035806, 2024. ISSN 1944-7973. _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2023WR035806>.

Richard LUCAS : Ueber das zeitgesetz des kapillaren aufstiegs von flüssigkeiten. *Kolloid-Zeitschrift*, 23(1):15–22, 1918. ISSN 1435-1536.

C. MARIE : Fuite monophasique au travers d'un contact rugueux : contribution à l'étude de l'étanchéité statique. *Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.*, 2002.

Jean MAURER, Patrick TABELING, Pierre JOSEPH et Herve WILLAIME : Second-order slip laws in microchannels for helium and nitrogen. *Physics of Fluids*, 15(9):2613–2621, septembre 2003. ISSN 1070-6631, 1089-7666.

F J MAYER, J F MCGRATH et J W STEELE : A class of similarity solutions for the nonlinear thermal conduction problem. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 16(14):3393–3400, octobre 1983. ISSN 0305-4470, 1361-6447.

Van Dyke MILTON : Perturbation methods in fluid mechanics. *The Parabolic Press*, 1975.

N. MORROW et G. MASON : Recovery of oil by spontaneous imbibition. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 6(4):82–89, 2001.

Lars ONSAGER : Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. *Physical Review*, 37(4):405–426, février 1931a. ISSN 0031-899X.

Lars ONSAGER : Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II. *Physical Review*, 38(12):2265–2279, décembre 1931b. Publisher : American Physical Society.

Nadir PATIR et H. S. CHENG : An average flow model for determining effects of three dimensional roughness on partial hydrodynamic lubrication. *Trans ASME J Lubr Technol*;100 :12–7, 1978.

Alexandre PONOMARENKO, David QUÉRÉ et Christophe CLANET : A universal law for capillary rise in corners. *Journal of Fluid Mechanics*, 666:146–154, janvier 2011. ISSN 1469-7645, 0022-1120. Publisher : Cambridge University Press.

K. PRUESS et Y. W. TSANG : On two-phase relative permeability and capillary pressure of rough-walled rock fractures. *Water Resources Research*, 26(9):1915–1926, 1990. ISSN 1944-7973.

Michel QUINTARD et Stephen WHITAKER : Transport in chemically and mechanically heterogeneous porous media. i : Theoretical development of region-averaged equations for slightly compressible single-phase flow. *Advances in Water Resources*, 19(1):29–47, 1996.

David QUÉRÉ : Lois du mouillage et de l'imprégnation. *Formulation*, 2003.

T. C RANSOHOFF et C. J RADKE : Laminar flow of a wetting liquid along the corners of a predominantly gas-occupied noncircular pore. *Journal of Colloid and Interface Science*, 121(2):392–401, février 1988. ISSN 0021-9797.

O. REYNOLDS : On the theory of lubrication and its application to mr beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A117*, p.p 157-235, 1886.

Mathilde REYSSAT, Laurent COURBIN, Etienne REYSSAT et Howard A. STONE : Imbibition in geometries with axial variations. *Journal of Fluid Mechanics*, 615:335–344, 2008. ISSN 0022-1120, 1469-7645.

E.S. ROMM : *Fluid flow in fractured rocks*. Phillips Petroleum Company, 1972.

William R ROSSEN : Snap-off in constricted tubes and porous media. *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*, 166(1):101–107, juin 2000. ISSN 0927-7757.

Amir ROSTAMI et Jeffrey L. STREATOR : A model of capillary-driven flow between contacting rough surfaces. *Journal of Tribology*, 139(3):031401, 2017. ISSN 0742-4787, 1528-8897.

Amgad SALAMA : Investigation of the imbibition/drainage of two immiscible fluids in capillaries with arbitrary axisymmetric cross-sections : a generalized model. *Journal of Fluid Mechanics*, 947:A12, septembre 2022. ISSN 0022-1120, 1469-7645.

Felix SHARIPOV : Data on the Velocity Slip and Temperature Jump on a Gas-Solid Interface. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 40(2):023101, mai 2011. ISSN 0047-2689.

Zhonghao SUN, Ayaz MEHMANI et Carlos TORRES-VERDÍN : Subpore-Scale Trapping

Mechanisms Following Imbibition : A Microfluidics Investigation of Surface Roughness Effects. *Water Resources Research*, 57(2), 2021. ISSN 1944-7973.

Chia-Wen TSAO, Qun-Zhan HUANG, Chang-Ye YOU, Markus HILPERT, Shao-Yiu HSU, Krzysztof LAMORSKI, Liang-Cheng CHANG et Cezary SŁAWIŃSKI : The effect of channel aspect ratio on air entrapment during imbibition in soil-on-a-chip micromodels with 2D and 2.5D pore structures. *Lab on a Chip*, 21(2):385–396, 2021. ISSN 1473-0197, 1473-0189.

C. VALLET : Fuite liquide au travers d'un contact rugueux : Application à l'étanchéité interne d'appareils de robinetterie. *Thèse de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers*, 2008.

C. VALLET, D. LASSEUX, P. SAINSOT et H. ZAHOUANI : Real versus synthesized fractal surfaces : Contact mechanics and transport properties. *Tribology International*, 42(2):250–259, 2009.

E. WASHBURN : The dynamics of capillary flow. *The Physical review, second series*, 1921.

Mark M. WEISLOGEL : Compound capillary rise. *Journal of Fluid Mechanics*, 709:622–647, octobre 2012. ISSN 1469-7645, 0022-1120. Publisher : Cambridge University Press.

Mark M. WEISLOGEL, J. Alex BAKER et Ryan M. JENSON : Quasi-steady capillarity-driven flows in slender containers with interior edges. *Journal of Fluid Mechanics*, 685:271–305, octobre 2011. ISSN 1469-7645, 0022-1120. Publisher : Cambridge University Press.

Mark M. WEISLOGEL et Seth LICHTER : Capillary flow in an interior corner. *Journal of Fluid Mechanics*, 373:349–378, octobre 1998. ISSN 0022-1120, 1469-7645.

Mark Milton WEISLOGEL : *Capillary Flow in an Interior Corner*. Thèse de doctorat, Northwestern University, 1996. NTRS Author Affiliations : NASA Lewis Research Center NTRS Report/Patent Number : NAS 1.15 :107364 NTRS Document ID : 19970010346 NTRS Research Center : Legacy CDMS (CDMS).

Stephen WHITAKER : Flow in porous media II : The governing equations for immiscible, two-phase flow. *Transport in Porous Media*, 1(2):105–125, 1986. ISSN 0169-3913, 1573-1634.

Katie WU, C. DUPRAT et H. A. STONE : Capillary rise in sharp corners : not quite universal. *Journal of Fluid Mechanics*, 978:A26, janvier 2024. ISSN 0022-1120, 1469-7645.

Tony ZAOUTER : Étude des écoulements à l'interface joint-rugosité pour des applications de haute étanchéité. *Thèse de doctorat de l'université de Toulouse*, 2018.

Tony ZAOUTER, Didier LASSEUX et Marc PRAT : Gas slip flow in a fracture : local Reynolds equation and upscaled macroscopic model. *Journal of Fluid Mechanics*, 837:413–442, février 2018. ISSN 0022-1120, 1469-7645. Publisher : Cambridge University Press.

Jianlin ZHAO, Feifei QIN, Qinjun KANG, Chaozhong QIN, Dominique DEROME et Jan CARMELIET : A Dynamic Pore Network Model for Imbibition Simulation Considering Corner Film Flow. *Water Resources Research*, 58(7), 2022. ISSN 0043-1397, 1944-7973.

Jiajia ZHOU et Masao DOI : Universality of capillary rising in corners. *Journal of Fluid Mechanics*, 900:A29, octobre 2020. ISSN 0022-1120, 1469-7645.

Annexe A

Conservation de volume d'un liquide dans un canal triangulaire en présence d'écoulements en film liquide

On présente dans cette annexe une expression de la distribution du débit dans le canal de section triangulaire lorsque l'écoulement se produit dans le régime du ménisque central et film liquide sous un débit imposé en entrée Q_0 . En suivant les nota-

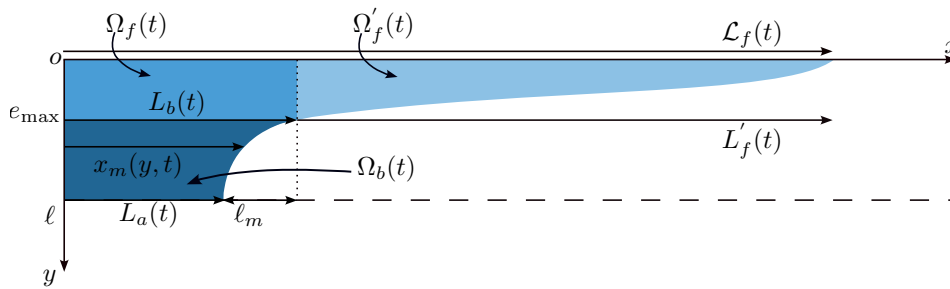


FIGURE A.1 – Notations utilisées dans le régime du ménisque central et du film liquide.

tions proposées sur la figure A.1, la conservation du volume de la phase β présente dans le canal lorsque l'écoulement se produit dans tout le canal peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{Q_0}{2} = \frac{d}{dt} (\Omega_b(t) + \Omega_f(t) + \Omega'_f(t)), \quad (\text{A.1})$$

Le volume $\Omega_b(t)$ de la phase β dans la région du ménisque centrale peut être exprimé de la manière suivante

$$\Omega_b(t) = \int_{e_{\max}}^{\ell} h(y) \left(\int_0^{x_m(y,t)} dx \right) dy = \epsilon \int_{e_{\max}}^{\ell} y x_m(y, t) dy, \quad (\text{A.2})$$

avec $x_m(y, t)$ représentant la coordonnée selon la direction x d'un point de l'interface liquide-gaz dans la région du ménisque central, c'est-à-dire $L_a(t) \leq x_m \leq L_b(t) = L_a(t) + \ell_m$.

En dérivant cette dernière expression par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d\Omega_b}{dt}(t) = \epsilon \int_{e_{\max}}^{\ell} y \frac{\partial x_m(y, t)}{\partial t} dy. \quad (\text{A.3})$$

Par l'hypothèse de staticité du mouvement du ménisque central dans la région du ménisque central (c'est-à-dire qu'on considère que le ménisque central dans cette région se déplace sans se déformer et conserve une forme constante similaire à celle de son état de repos), le terme $\frac{\partial x_m(y, t)}{\partial t}$ est donc indépendant de la direction y , et il vaut tout simplement $\frac{dL_b(t)}{dt}$, la vitesse du point du ménisque au point de raccordement.

$$\frac{d\Omega_b}{dt}(t) = \frac{\epsilon}{2} \frac{dL_b(t)}{dt} (\ell^2 - e_{\max}^2). \quad (\text{A.4})$$

Dans la région du film liquide, les volumes $\Omega_f(t)$ et $\Omega'_f(t)$ peuvent être exprimés de la manière suivante

$$\Omega_f(t) = \int_0^{e_{\max}} h(y) \left(\int_0^{L_b(t)} dx \right) dy = \frac{\epsilon}{2} L_b(t) e_{\max}^2, \quad (\text{A.5})$$

et

$$\Omega'_f(t) = \int_0^{L'_f(t)} S(x', t) dx'. \quad (\text{A.6})$$

Dans cette dernière expression, $S(x', t)$ est la section qu'occupe le film liquide dans un coin du canal triangulaire et elle est donnée par l'expression (3.7a) avec x' la coordonnée spatiale le long de l'axe du canal dans le repère mobile (O', x', y') . En dérivant également par rapport au temps les expressions (A.5) et (A.6), on obtient

$$\frac{d\Omega_f}{dt}(t) = \frac{\epsilon}{2} e_{\max}^2 \frac{dL_b(t)}{dt}, \quad (\text{A.7})$$

et

$$\frac{d\Omega'_f}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{L'_f(t)} S(x', t) dx'. \quad (\text{A.8})$$

En remplaçant ces deux dernières expressions dans l'équation (A.1) on obtient

$$\frac{Q_0}{2} = \frac{\epsilon}{2} \frac{dL_b(t)}{dt} \ell^2 + Q'_f(t), \quad (\text{A.9})$$

avec $Q'_f(t) = \frac{d\Omega'_f}{dt}$, ou encore

$$Q_0 = S_t \frac{dL_b(t)}{dt} + 2Q'_f(t), \quad (\text{A.10})$$

avec $S_t = \ell h_0 = \epsilon \ell^2$ la section totale du canal triangulaire.

Annexe B

Taille d'un ménisque

B.1 Équation de la taille d'un ménisque

La taille d'un ménisque dans la région $\Omega_b(t)$ telle que représentée sur la figure A.1, notée ℓ_m , dans la direction principale de l'écoulement (x) est nécessaire pour déterminer la position du point central du ménisque dans cette région, qui est exprimée par l'équation (3.44) dans la dynamique à débit imposé. Une approche numérique pour déterminer la taille du ménisque ℓ_m est proposée dans cette annexe.

Pour ce faire, on part de l'équation (3.23b), que l'on intègre par rapport à e entre e et ℓ , ce qui donne

$$\left(1 + \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2} - \frac{2B}{\epsilon} \left(\ln \frac{e}{\ell} + \frac{1 - \frac{e}{\ell}}{\frac{e_{\max}}{\ell}}\right) = 0. \quad (\text{B.1})$$

A partir de l'équation ci-dessus on peut extraire l'expression de la pente, $\frac{\partial e}{\partial x}$, en tout point du ménisque dans la région $\Omega_b(t)$, qui est donnée par

$$\frac{\partial e}{\partial x} = - \left[\left(\frac{2B}{\epsilon} \left(\ln \frac{e}{\ell} + \frac{1 - \frac{e}{\ell}}{\frac{e_{\max}}{\ell}} \right)^{-2} \right) - 1 \right]^{1/2}. \quad (\text{B.2})$$

L'équation (B.2) peut être intégrée numériquement avec les conditions aux limites suivantes

$$\frac{\partial e}{\partial x} \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow 0, \quad (\text{B.3a})$$

$$\frac{e}{\ell} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow 0. \quad (\text{B.3b})$$

L'intégration est effectuée en faisant varier la valeur de x à partir de 0 jusqu'à ce que la valeur de l'épaisseur du film e puisse atteindre celle de l'épaisseur maximale de raccordement e_{\max} , pour lequel la valeur de x vaut ℓ_m . Une autre approche pour déterminer la taille du ménisque, ℓ_m , peut être obtenue par l'évaluation numérique de l'expression suivante, qui résulte de l'intégration de l'équation (B.2) entre e_{\max} et ℓ , c'est-à-dire,

$$\ell_m = \ell \int_{e_{\max}/\ell}^1 \left[\left(\frac{2B}{\epsilon} \left(\ln u + \frac{1-u}{\ell} \right) \right)^{-2} - 1 \right]^{-1/2} du, \quad (\text{B.4})$$

avec $u = e/\ell$.

B.2 Débit imposé

Bien que la valeur de l'épaisseur e_{\max} que l'on obtient à partir de l'équation (3.32) utilisant la solution de LAMBERT n'induit pas d'erreur significative ou alors très négligeable dans tous les calculs effectués, la détermination de la taille du ménisque à partir de l'équation (B.2) ou l'équation (B.4) avec la valeur de e_{\max} provenant de l'équation (3.32), qui résulte de l'hypothèse $\frac{\partial e}{\partial x} \Big|_{e=e_{\max}} = 0$, est impossible. Cela est dû au fait que l'intégration diverge lorsque la valeur de l'épaisseur e atteint celle de l'épaisseur de raccordement e_{\max} (puisque ℓ_m a une dépendance logarithmique sur $\frac{\partial e}{\partial x} \Big|_{e=e_{\max}}$). Par conséquent, il est nécessaire d'évaluer e_{\max} à partir de la solution de l'équation (3.23f) après substitution de la pente (3.29d), avant de procéder à la solution numérique de l'équation (B.2) ou (B.4).

On analyse la dépendance de la taille adimensionnelle du ménisque, ℓ_m^* , par rapport au paramètre ϵ/B sur la figure B.1, en considérant de l'eau et un mouillage parfait ($\theta = 0^\circ$) dans un canal triangulaire de dimensions $2\ell = 500 \mu\text{m}$ et trois valeurs de débit imposé Q_0 . Cette figure montre que la taille du ménisque ℓ_m^* augmente avec lorsque le paramètre ϵ/B augmente aussi mais qu'elle devient extrêmement petite lorsque ce paramètre tend vers zéro. On voit également, ℓ_m^* augmente et tend vers la demie largeur

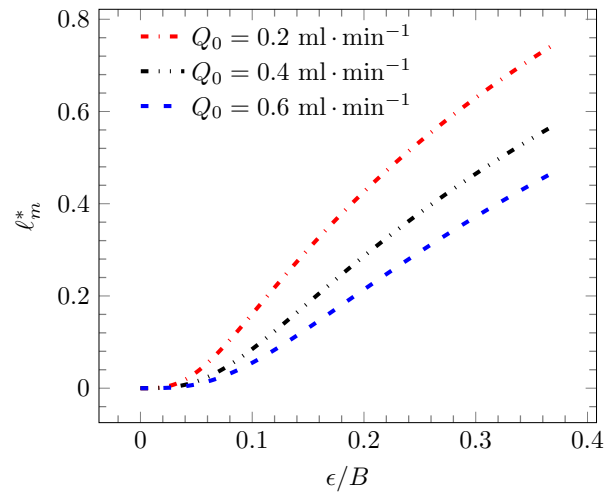


FIGURE B.1 – Dépendance de la taille adimensionnelle du ménisque , $\ell_m^* = \ell_m/\ell$, par rapport au paramètre ϵ/B pour différentes valeurs de débit Q_0 imposé à l'entrée du canal : $2\ell = 500 \mu\text{m}$, $\theta_e = 0^\circ$ et $v_{\beta r} = 72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

ℓ lorsque le débit Q_0 diminue.

B.3 Pression imposée

Dans le cas d'une pression imposée à l'entrée du canal, l'estimation de e_{\max} donnée par (3.34) reste valable (tant que (3.29f) est respectée). Cependant, comme le ménisque est censé pénétrer instantanément dans le canal et conserver sa forme statique lorsque $P_0 \geq P_{0\max}$, il n'existe aucune estimation de la pente $\left. \frac{\partial e}{\partial x} \right|_{e=e_{\max}}$ compatible avec cette hypothèse.

Annexe C

Section occupée par le film liquide dans un canal triangulaire

Sur la figure C.1, les distances $\overline{JK} = \overline{JM}$ et \overline{MN} correspondent respectivement au rayon $r(x, t)$ et à la hauteur du film à l'interface, c'est-à-dire $h(e)$.

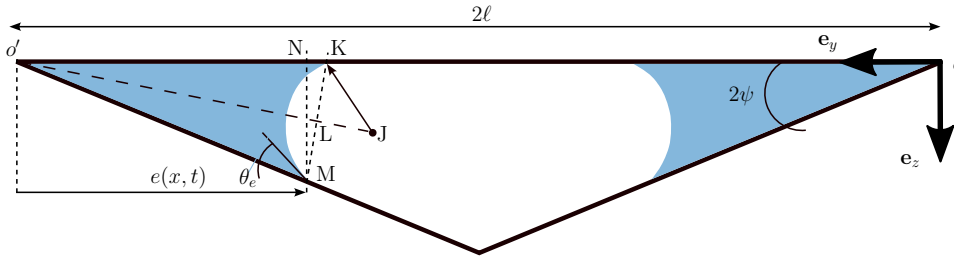


FIGURE C.1 – Section occupée par le film liquide dans un canal triangulaire.

Dans le triangle $d'KJ$, on peut écrire que

$$\frac{r}{\sin(\psi)} = \frac{\overline{d'J}}{\sin(\widehat{KJM}/2 + \psi)}, \quad (\text{C.1})$$

ce qui donne

$$\overline{d'J} = r \frac{\cos(\theta_e)}{\sin(\psi)}, \quad \text{avec} \quad \widehat{KJM} = \pi - 2\theta_e - 2\psi. \quad (\text{C.2})$$

Dans le triangle KLJ et $d'JM$, on note respectivement les relations

$$\begin{aligned} \overline{KL} &= r \sin(\widehat{KJM}/2) \\ &= r \cos(\theta_e + \psi), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

et

$$\overline{d'M} = r \frac{\sin(\widehat{KJM}/2)}{\sin(\psi)}. \quad (\text{C.4})$$

De même, dans le triangle $o'NM$, la relation suivante est donnée

$$\begin{aligned}\overline{o'M} &= \frac{\overline{MN}}{\sin(\psi)} \\ &= \frac{h}{\sin(\psi)}.\end{aligned}\tag{C.5}$$

La combinaison des relations (C.4) et (C.3) donne

$$\begin{aligned}r(x, t) &= \frac{h(e(x, t))}{2 \cos(\psi) \cos(\theta_e + \psi)} \\ &= \frac{h(e(x, t))}{2B},\end{aligned}\tag{C.6}$$

avec

$$B = \cos(\psi) \cos(\theta_e + \psi).\tag{C.7}$$

En écrivant que

$$\begin{aligned}S_{o'KJM o'} &= 2S_{o'K o'} \\ &= 2\overline{o'J} \frac{\overline{KL}}{2} \\ &= r^2 \frac{\cos(\psi) \cos(\theta_e + \psi)}{\sin(\psi)},\end{aligned}\tag{C.8}$$

et

$$S_{\widehat{JKM}} = r^2 \frac{\widehat{KJM}}{2},\tag{C.9}$$

on obtient

$$\begin{aligned}S(x, t) &= S_{o'KM} \\ &= S_{o'KJM o'} - S_{\widehat{JKM}}\end{aligned}\tag{C.10a}$$

ou encore

$$\begin{aligned} S(x, t) &= r^2(x, t) \left(\frac{\cos(\psi) \cos(\theta_e + \psi)}{\sin(\psi)} - \frac{\pi - 2\theta_e - 2\psi}{2} \right) \\ &= Ar^2(x, t), \end{aligned} \tag{C.10b}$$

qui est donc la section qu'occupe le film liquide dans le coin d'un canal de section triangulaire, avec

$$A = \frac{\cos(\psi) \cos(\theta_e + \psi)}{\sin(\psi)} - \frac{\pi - 2\theta_e - 2\psi}{2} \tag{C.10c}$$

Annexe D

Dérivation des équations de Reynolds

D.1 Modèle d'écoulement

Nous avons vu dans l'état de l'art présenté au premier chapitre des phénomènes, notamment géométriques, qui influencent la dynamique d'écoulement d'un liquide dans le milieu où il s'écoule. Dans le cas d'une fracture rugueuse telle que schématisée sur la figure D.1 dans un plan (x, z) , la forme de cette dernière ou plutôt ses dimensions caractéristiques offrent certaines particularités permettant de simplifier les équations qui régissent les écoulements. Sur cette figure, le liquide est représenté par la phase β

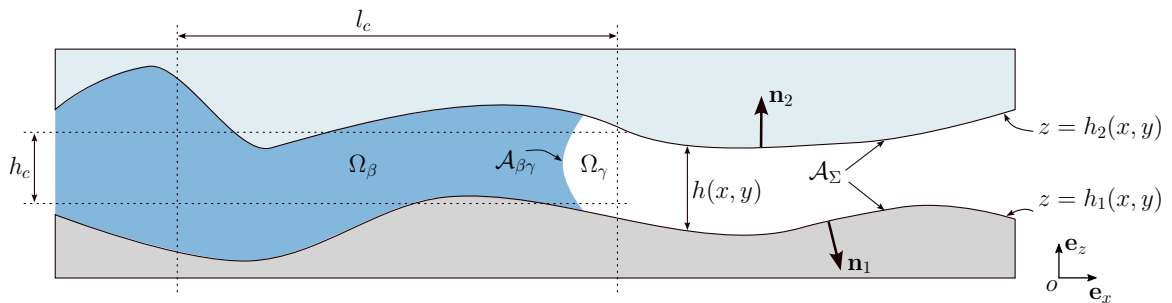


FIGURE D.1 – Illustration d'une fracture rugueuse dans le plan (x, z) constituée de deux surfaces rugueuses.

pour laquelle on considère un écoulement isotherme et incompressible. La phase gazeuse, notée γ , est supposée en écoulement isotherme, instationnaire et faiblement compressible. L'interface séparant les deux fluides, notée $\mathcal{A}_{\beta\gamma}$, forme une interface librement mobile en contact avec les deux parois constituant la fracture rugueuse et est entraînée par l'écoulement du liquide qui imbibe le milieu initialement sec.

Dans le domaine Ω_β de la phase liquide β , les équations (D.1a) et (D.1b) représentent

respectivement les conservations de la masse et de la quantité de mouvement.

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0, \quad \text{dans } \Omega_\beta \quad (\text{D.1a})$$

$$\rho_\beta \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + (\mathbf{v}_\beta \cdot \nabla) \mathbf{v}_\beta \right) = -\nabla p_\beta + \mu_\beta \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_\beta + (\nabla \mathbf{v}_\beta)^T), \quad \text{dans } \Omega_\beta \quad (\text{D.1b})$$

Dans le domaine Ω_γ de la phase gazeuse γ , les équations (D.2a) et (D.2b) représentent respectivement les conservations de la masse et de la quantité de mouvement.

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\gamma \mathbf{v}_\gamma) = 0, \quad \text{dans } \Omega_\gamma \quad (\text{D.2a})$$

$$\rho_\gamma \left(\frac{\partial \mathbf{v}_\gamma}{\partial t} + (\mathbf{v}_\gamma \cdot \nabla) \mathbf{v}_\gamma \right) = \mu_\gamma \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_\gamma + (\nabla \mathbf{v}_\gamma)^T) - \nabla p_\gamma + \left(\eta_\gamma - \frac{2}{3} \mu_\gamma \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_\gamma), \quad \text{dans } \Omega_\gamma \quad (\text{D.2b})$$

Dans les équations (D.1) et (D.2), pour chaque phase fluide ($\alpha = \beta, \gamma$), \mathbf{v}_α correspond au vecteur vitesse de composantes $(u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha)$ dans le repère orthonormé $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ selon la convention de la figure D.1, ρ_α est la masse volumique, μ_α est la viscosité dynamique et p_α la pression locale. η_γ est la viscosité de volume et t est le temps.

En considérant qu'il n'y a pas de changement de phase de la phase β qui s'opère à l'interface liquide-gaz, notée $\mathcal{A}_{\beta\gamma}$, on a ainsi la continuité de vitesse sous la forme

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}_\gamma = \mathbf{v}_{\beta\gamma}, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}. \quad (\text{D.3a})$$

Le bilan de quantité de mouvement à cette interface est défini de la manière suivante

$$\llbracket \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_{\beta\gamma}) \cdot \mathbf{n} + (-p_\alpha \mathbf{I} + \mu_\alpha (\nabla \mathbf{v}_\alpha + \nabla \mathbf{v}_\alpha^T)) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \sigma \kappa \mathbf{n}, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}, \quad (\text{D.3b})$$

où $\llbracket \dots \rrbracket$ représente le saut et \mathbf{n} est le vecteur normal à l'interface liquide-gaz dans l'espace.

Sur les parois de la fracture, notées \mathcal{A}_Σ , on considère une condition de non glissement pour chaque phase fluide, c'est-à-dire que le fluide adhère aux parois :

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \mathcal{A}_\Sigma. \quad (\text{D.3c})$$

On fait de plus une hypothèse que la phase gazeuse γ est un gaz parfait et on note la loi d'état

$$\rho_\gamma = \rho(p_\gamma). \quad (\text{D.3d})$$

Les équations (D.1b) et (D.2b) permettant de décrire complètement la dynamique de l'écoulement peuvent cependant être simplifiées en faisant une analyse d'ordre de grandeur de chaque terme (Quintard et Whitaker, 1996; Lasseux *et al.*, 2014). Dans ces dernières références, on montre que le terme

$$\mu_\alpha \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_\alpha) = \mu_\alpha \nabla^2 \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\alpha v_\alpha}{l_v^2} \right), \quad (\text{D.4})$$

où l_v est la longueur caractéristique pour laquelle le module du vecteur vitesse v_α varie significativement. En utilisant l'équation de la conservation de la masse (D.2a), on arrive à

$$\mu_\alpha \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}_\alpha)^T = \mu_\alpha \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{O} \left(\frac{\mu_\alpha \Delta \rho_\alpha}{\rho_\alpha L_\rho t_\rho}, \frac{\mu_\alpha \Delta \rho_\alpha v_\alpha}{\rho_\alpha L_\rho^2} \right), \quad (\text{D.5})$$

où L_ρ est la longueur caractéristique pour laquelle la masse volumique ρ_α varie significativement. La comparaison des équations (D.4) et (D.5) permet de définir les contraintes suivantes qui,

$$\frac{\Delta \rho_\alpha l_v}{\rho_\alpha v_\alpha t_\rho} \frac{l_v}{L_\rho} \ll 1, \quad \frac{\Delta \rho_\alpha}{\rho_\alpha} \left(\frac{l_v}{L_\rho} \right)^2 \ll 1, \quad (\text{D.6})$$

lorsqu'elles sont satisfaites, le terme $\mu_\alpha \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_\alpha^T$ dans chaque phase fluide α et le terme $(\eta_\gamma - \frac{2}{3}\mu_\gamma) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_\gamma)$ peuvent être négligés dans les équations (D.1b) et (D.2b).

Ceci est d'autant vrai dans notre étude puisque nous avons une phase liquide et une phase gazeuse que l'on considère, respectivement, incompressible et faiblement compressible. Enfin, les contraintes définies à l'équation (D.7) permettent également de négliger les termes inertiels dans les membres de gauche des équations de quantité de mouvement dans les deux phases fluides.

$$\frac{\rho_\alpha l_v^2}{\mu_\alpha t_v} \ll 1, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\alpha l_v v_\alpha}{\mu_\alpha} \ll 1 \quad (\text{D.7})$$

Dans ces dernières relations, t_v et t_ρ représentent les temps caractéristiques pour lesquelles, respectivement, la vitesse v_α et la masse volumique ρ_γ varient significativement.

Les problèmes (D.1) et (D.2) donnés à l'échelle microscopique par les équations de NAVIER-STOKES, sont ainsi simplifiés et conduisent à l'obtention des équations de STOKES respectivement dans la phase β

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_\beta = 0, \quad \text{dans } \Omega_\beta, \quad (\text{D.8a})$$

$$-\nabla p_\beta + \mu_\beta \nabla^2 \mathbf{v}_\beta = 0, \quad \text{dans } \Omega_\beta, \quad (\text{D.8b})$$

et dans la phase γ

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\gamma \mathbf{v}_\gamma) = 0, \quad \text{dans } \Omega_\gamma, \quad (\text{D.9a})$$

$$-\nabla p_\gamma + \mu_\gamma \nabla^2 \mathbf{v}_\gamma = 0, \quad \text{dans } \Omega_\gamma. \quad (\text{D.9b})$$

A ce stade, ces équations sont encore plus complexe à résoudre puisqu'étant des équations à résoudre dans un domaine tridimensionnel. La partie suivante s'intéresse à la simplification de ces équations.

D.2 Simplification du modèle d'écoulement

D.2.1 Équations de REYNOLDS

La fracture rugueuse représentée sur la figure D.1, est constituée de deux surfaces rugueuses composées d'une face d'un joint d'une part et une autre face d'une bride d'autre part, décrites par leur altitude $z = h_i(x, y)$, dans un système de coordonnées de référence sur lesquelles on définit un vecteur normal unitaire \mathbf{n}_i , avec $i = 1, 2$. Puisque le champ des ouvertures, noté $h(x, y)$, est beaucoup plus petit que les dimensions du canal dans le plan (x, y) , il est possible de simplifier davantage les équations (D.8) et (D.9) de STOKES dans les deux phases fluides pour tenir compte du caractère quasi-bidimensionnel de la microstructure de l'écoulement. Pour ce faire, on définit les grandeurs sans dimension suivantes

$$\begin{aligned} \bar{x} = x/l_c, \quad \bar{y} = y/l_c, \quad \bar{z} = z/h_c, \quad \bar{u}_\alpha = u_\alpha/u_c, \quad \bar{v}_\alpha = v_\alpha/v_c, \\ \bar{w}_\alpha = w_\alpha/w_c, \quad \bar{p}_\alpha = p_\alpha/p_{r\alpha}, \quad \bar{t} = t/t_\rho, \quad \bar{\rho}_\alpha = \rho_\alpha/\rho_\beta, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

où l_c est la longueur caractéristique selon laquelle l'ouverture du canal varie significativement dans le plan (x, y) et h_c est l'ouverture caractéristique de la fracture. Les grandeurs u_c , v_c et w_c correspondent aux vitesses caractéristiques de l'écoulement dans les directions x, y et z , respectivement. La pression caractéristique d'une phase fluide est notée $p_{r\alpha}$.

En insérant les équations (D.10) dans les équations de conservation de la masse (D.1a) et (D.2a), on obtient

$$\frac{u_c}{l_c} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{x}} + \frac{v_c}{l_c} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{y}} + \frac{w_c}{h_c} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (\text{D.11})$$

et

$$\frac{\rho_\beta}{t_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}_\gamma}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_\beta u_c}{l_c} \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{u}_\gamma)}{\partial \bar{x}} + \frac{\rho_\beta v_c}{l_c} \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{v}_\gamma)}{\partial \bar{y}} + \frac{\rho_\beta w_c}{h_c} \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{w}_\gamma)}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (\text{D.12})$$

Afin de garantir que tous les termes aient le même ordre de grandeur dans les équations (D.11) et (D.12), on applique le principe de moindre dégénérescence (Milton, 1975), en postulant que les vitesses caractéristiques u_c et v_c sont du même ordre de grandeur, c'est-à-dire $u_c = v_c$,

$$\frac{u_c}{l_c} = \frac{v_c}{l_c} = \frac{w_c}{h_c}, \quad (\text{D.13})$$

et on définit un paramètre

$$\varepsilon = \frac{h_c}{l_c} = \frac{w_c}{u_c} \ll 1, \quad (\text{D.14})$$

qui désigne le rapport entre la longueur caractéristique normale au plan (x, y) et celle dans ce dernier.

Les équations sans dimensions (D.11) et (D.12) de conservations de masse deviennent respectivement

$$\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (\text{D.15})$$

et

$$\frac{\partial \bar{\rho}_\gamma}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{u}_\gamma)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{v}_\gamma)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{w}_\gamma)}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (\text{D.16})$$

De même, en insérant les équations (D.10) dans les équations de la conservation de quantité de mouvement (D.1b) et (D.2b) et, en utilisant la définition (D.14) de la grandeur ε , on obtient les formulations sans dimension suivantes dans la phase liquide

$$-p_{r\beta} \frac{l_c \varepsilon^2}{u_c \mu_\beta} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\beta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\beta}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (\text{D.17a})$$

$$-p_{r\beta} \frac{l_c \varepsilon^2}{u_c \mu_\beta} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_\beta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\beta}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (\text{D.17b})$$

$$-p_{r\beta} \frac{l_c^2 \varepsilon^2}{h_c w_c \mu_\beta} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_\beta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_\beta}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (\text{D.17c})$$

et dans la phase gazeuse

$$-p_{r\gamma} \frac{l_c \varepsilon^2}{u_c \mu_\gamma} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (\text{D.18a})$$

$$-p_{r\gamma} \frac{l_c \varepsilon^2}{u_c \mu_\gamma} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}^2} = 0; \quad (\text{D.18b})$$

$$-p_{r\gamma} \frac{l_c^2 \varepsilon^2}{h_c w_c \mu_\gamma} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{z}^2} = 0. \quad (\text{D.18c})$$

Le principe de moindre dégénérescence nous permet de choisir, dans les équations (D.17a), (D.17b) et (D.18a), (D.18b), les pressions caractéristiques $p_{r\beta} = u_c \mu_\beta / l_c \varepsilon^2$ et $p_{r\gamma} = u_c \mu_\gamma / l_c \varepsilon^2$, afin de garantir le même ordre de grandeur pour tous les termes. Les équations (D.17) et (D.18) deviennent respectivement pour le liquide

$$-\frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\beta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\beta}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (\text{D.19a})$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_\beta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\beta}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (\text{D.19b})$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_\beta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_\beta}{\partial \bar{y}^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (\text{D.19c})$$

et pour le gaz

$$-\frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (\text{D.20a})$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}^2} = 0; \quad (\text{D.20b})$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{z}} + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{y}^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{z}^2} = 0. \quad (\text{D.20c})$$

En faisant une troncature du second ordre en ε , on obtient

$$-\frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \quad (\text{D.21a})$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \quad (\text{D.21b})$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{z}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \quad (\text{D.21c})$$

et

$$-\frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \quad (\text{D.22a})$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0; \quad (\text{D.22b})$$

$$-\frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{z}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0. \quad (\text{D.22c})$$

Les équations (D.21c) et (D.22c) nous apprennent que les pressions dans les fluides ne dépendent pas de la coordonnée \bar{z} ; ce qui nous permet d'intégrer selon \bar{z} les équations (D.21a), (D.21b) et (D.22a), (D.22b) pour obtenir

$$\bar{u}_\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{x}} (\bar{z}^2 + \mathcal{B}_1 \bar{z} + \mathcal{B}_2), \quad (\text{D.23a})$$

$$\bar{v}_\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{y}} (\bar{z}^2 + \mathcal{B}_3 \bar{z} + \mathcal{B}_4), \quad (\text{D.23b})$$

et

$$\bar{u}_\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{x}} (\bar{z}^2 + \mathcal{B}_1 \bar{z} + \mathcal{B}_2); \quad (\text{D.24a})$$

$$\bar{v}_\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{y}} (\bar{z}^2 + \mathcal{B}_3 \bar{z} + \mathcal{B}_4). \quad (\text{D.24b})$$

En appliquant la condition aux limites (D.3c) de non glissement à l'interface \mathcal{A}_Σ , on obtient les profils de vitesse fluide dans le plan (\bar{x}, \bar{y}) de la fracture tels que

$$\bar{u}_\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{x}} (\bar{z}^2 - \bar{h} \bar{z}), \quad (\text{D.25a})$$

$$\bar{v}_\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{y}} (\bar{z}^2 - \bar{h} \bar{z}), \quad (\text{D.25b})$$

et

$$\bar{u}_\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{x}} (\bar{z}^2 - \bar{h} \bar{z}); \quad (\text{D.26a})$$

$$\bar{v}_\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{y}} (\bar{z}^2 - \bar{h} \bar{z}). \quad (\text{D.26b})$$

Comme la pression dans le fluide est indépendante de la direction \bar{z} , la loi d'état (D.3d) nous permet d'affirmer que la masse volumique est également indépendante de la direction \bar{z} dans la phase γ . Les composantes des débits volumiques par unité de

largeur s'obtiennent par intégration selon \bar{z} dans le liquide

$$\bar{q}_{\beta\bar{x}} = \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \bar{u}_\beta d\bar{z} = -\frac{\bar{h}^3}{12} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{x}}, \quad (\text{D.27a})$$

$$\bar{q}_{\beta\bar{y}} = \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \bar{v}_\beta d\bar{z} = -\frac{\bar{h}^3}{12} \frac{\partial \bar{p}_\beta}{\partial \bar{y}}, \quad (\text{D.27b})$$

et dans le gaz, afin de prendre en compte la compressibilité, on détermine les débits massiques par unité de largeur

$$\bar{\dot{q}}_{\gamma\bar{x}} = \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \bar{\rho}_\gamma \bar{u}_\gamma d\bar{z} = -\frac{\bar{\rho}_\gamma \bar{h}^3}{12} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{x}}, \quad (\text{D.28a})$$

$$\bar{\dot{q}}_{\gamma\bar{y}} = \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \bar{\rho}_\gamma \bar{v}_\gamma d\bar{z} = -\frac{\bar{\rho}_\gamma \bar{h}^3}{12} \frac{\partial \bar{p}_\gamma}{\partial \bar{y}}. \quad (\text{D.28b})$$

La forme dimensionnelle donne ainsi

$$q_{\beta x} = -\frac{h^3}{12\mu_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial x}, \quad (\text{D.29a})$$

$$q_{\beta y} = -\frac{h^3}{12\mu_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial y}, \quad (\text{D.29b})$$

et

$$\dot{q}_{\gamma x} = -\frac{\rho_\gamma h^3}{12\mu_\gamma} \frac{\partial p_\gamma}{\partial x}; \quad (\text{D.30a})$$

$$\dot{q}_{\gamma y} = -\frac{\rho_\gamma h^3}{12\mu_\gamma} \frac{\partial p_\gamma}{\partial y}. \quad (\text{D.30b})$$

En intégrant les équations (D.15) et (D.16), on obtient pour la phase liquide

$$\int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{x}} d\bar{z} + \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{y}} d\bar{z} + \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0, \quad (\text{D.31})$$

et la phase gazeuse

$$\int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \frac{\partial \bar{\rho}_\gamma}{\partial t} d\bar{z} + \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{u}_\gamma)}{\partial \bar{x}} d\bar{z} + \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{v}_\gamma)}{\partial \bar{y}} d\bar{z} + \int_{\bar{h}_1}^{\bar{h}_2} \frac{\partial (\bar{\rho}_\gamma \bar{w}_\gamma)}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = 0. \quad (\text{D.32})$$

En appliquant la règle de LEIBNIZ de dérivation sous l'intégrale ainsi que les relations de débits masses (D.27) et (D.28), les formes intégrales données aux équations (D.31) et (D.32) donnent les équations différentielles suivantes respectivement pour le liquide

$$\frac{\partial \bar{q}_{\beta\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \bar{u}_{\beta,1} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \bar{x}} - \bar{u}_{\beta,2} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{q}_{\beta\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_{\beta,1} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \bar{y}} - \bar{v}_{\beta,2} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \bar{y}} + \bar{w}_{\beta,2} - \bar{w}_{\beta,1} = 0, \quad (\text{D.33})$$

et pour le gaz

$$\bar{h} \frac{\partial \bar{\rho}_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}_{\gamma\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho}_\gamma \bar{u}_{\gamma,1} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \bar{x}} - \bar{\rho}_\gamma \bar{u}_{\gamma,2} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{q}_{\gamma\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \bar{\rho}_\gamma \bar{v}_{\gamma,1} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \bar{y}} - \bar{\rho}_\gamma \bar{v}_{\gamma,2} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \bar{y}} + \bar{\rho}_\gamma (\bar{w}_{\gamma,2} - \bar{w}_{\gamma,1}) = 0, \quad (\text{D.34})$$

que l'on peut également noter

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_\beta + \bar{\mathbf{u}}_{\beta,i} \cdot \mathbf{m}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{D.35})$$

et

$$\bar{h} \frac{\partial \bar{\rho}_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_\gamma + \bar{\rho}_\gamma \bar{\mathbf{u}}_{\gamma,i} \cdot \mathbf{m}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{D.36})$$

où

$$\bar{\mathbf{u}}_{\alpha,i} = \bar{u}_{\alpha,i} \mathbf{e}_x + \bar{v}_{\alpha,i} \mathbf{e}_y + \bar{w}_{\alpha,i} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{m}_i = (-1)^{i-1} \left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{x}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{y}} \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \right), \quad i = 1, 2. \quad (\text{D.37})$$

Sur les parois de la fracture rugueuse représentée sur la figure D.1, on peut définir des vecteurs normaux unitaires \mathbf{n}_i à ces parois de la manière suivante

$$\mathbf{n}_i = (-1)^{i-1} \left(\left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{y}} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{x}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{y}} \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \right), \quad i = 1, 2. \quad (\text{D.38})$$

Le vecteur $\bar{\mathbf{u}}_{\alpha,i}$ est tangent à la surface $\bar{z} = \bar{h}_i$ et en observant que le vecteur \mathbf{m}_i est proportionnel au vecteur normal unitaire \mathbf{n}_i dans l'équation (D.38), le produit scalaire de $\bar{\mathbf{u}}_{\alpha,i}$ et \mathbf{m}_i dans les équations (D.35) et (D.36) est donc nul, ce qui donne

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_\beta = 0, \quad (\text{D.39})$$

et

$$\bar{h} \frac{\partial \bar{\rho}_\gamma}{\partial \bar{t}} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}}_\gamma = 0. \quad (\text{D.40})$$

Les problèmes tridimensionnels (D.1) et (D.2) sont ainsi réduits à une forme bidimensionnelle dans le plan moyen du canal. Si \mathcal{A}_α désigne la région bidimensionnelle occupée par la phase fluide α , on peut écrire les équations (D.1) et (D.2) sous les formes (D.41) et (D.42), qui est une approximation au second ordre en la pente locale des aspérités des surfaces rugueuses. Les équations définies dans la phase liquide par le problème suivant

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_\beta = 0, \quad \text{dans } \mathcal{A}_\beta, \quad (\text{D.41a})$$

$$\mathbf{q}_\beta = -\frac{h^3}{12\mu_\beta} \nabla p_\beta, \quad \text{dans } \mathcal{A}_\beta, \quad (\text{D.41b})$$

et celles définies dans la phase gazeuse données par

$$h \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_\gamma = 0, \quad \text{dans } \mathcal{A}_\gamma, \quad (\text{D.42a})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_\gamma = -\frac{\rho_\gamma h^3}{12\mu_\gamma} \nabla p_\gamma, \quad \text{dans } \mathcal{A}_\gamma, \quad (\text{D.42b})$$

forment le modèle d'équations de REYNOLDS dans chaque phase fluide α tel qu'établi pour un écoulement monophasique dans la théorie de la lubrification (Reynolds, 1886; Vallet *et al.*, 2009; Zaouter *et al.*, 2018), pour des écoulements à bas nombres de REYNOLDS et sans effets inertiels respectant les contraintes données par les expressions (D.6), (D.7) et (D.14).

A ce stade, on remarque qu'on a un système d'équations non couplé et donc il faut

établir une relation permettant de coupler la phase liquide à la phase gazeuse. Pour ce faire, on va s'intéresser à présent aux conditions données à l'interface liquide-gaz notamment la condition (D.3b) qui décrit la quantité de mouvement.

D.2.2 Loi de LAPLACE

Pour simplifier la condition de quantité de mouvement à l'interface liquide-gaz donnée par l'équation (D.3b), nous la réécrivons tout d'abord sous une forme détaillée de la manière suivante.

$$\begin{aligned}
 & - (p_\beta - p_\gamma) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \mu_\beta \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_\beta}{\partial x} & \frac{\partial u_\beta}{\partial y} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x} & \frac{\partial u_\beta}{\partial z} + \frac{\partial w_\beta}{\partial x} \\ & 2\frac{\partial v_\beta}{\partial y} & \frac{\partial v_\beta}{\partial z} + \frac{\partial w_\beta}{\partial y} \\ & & 2\frac{\partial w_\beta}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \\
 & \mu_\gamma \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_\gamma}{\partial x} & \frac{\partial u_\gamma}{\partial y} + \frac{\partial v_\gamma}{\partial x} & \frac{\partial u_\gamma}{\partial z} + \frac{\partial w_\gamma}{\partial x} \\ & 2\frac{\partial v_\gamma}{\partial y} & \frac{\partial v_\gamma}{\partial z} + \frac{\partial w_\gamma}{\partial y} \\ & & 2\frac{\partial w_\gamma}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \sigma \kappa \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{D.43a}$$

En remplaçant les grandeurs sans dimension données à l'équation (D.10) et en supposant que la double courbure moyenne sans dimension $\bar{\kappa} = \kappa \varepsilon l_c$, nous obtenons la forme adimensionnelle suivante

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_c}{\varepsilon^2 l_c} (-\mu_\beta \bar{p}_\beta + \mu_\gamma \bar{p}_\gamma) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \frac{u_c \mu_\beta}{l_c} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{x}} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{x}} \\ & 2\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{y}} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{y}} \\ & & 2\frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \\
 & \frac{u_c \mu_\gamma}{l_c} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{x}} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{x}} \\ & 2\frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{y}} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{y}} \\ & & 2\frac{\partial \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \sigma \frac{\bar{\kappa}}{\varepsilon l_c} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{D.43b}$$

En définissant le nombre capillaire par

$$\text{Ca} = \frac{u_c \mu_\beta}{\sigma}, \quad (\text{D.43c})$$

et le rapport de viscosité par

$$\text{M}_\mu = \frac{\mu_\gamma}{\mu_\beta}, \quad (\text{D.43d})$$

on obtient

$$\begin{aligned} & (-\bar{p}_\beta + \text{M}_\mu \bar{p}_\gamma) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{x}} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{x}} \\ & 2 \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{y}} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{y}} \\ & & 2 \frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \\ & \varepsilon^2 \text{M}_\mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{x}} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{x}} \\ & 2 \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{y}} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{y}} \\ & & 2 \frac{\partial \bar{w}_\gamma}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{\bar{\kappa} \varepsilon}{\text{Ca}} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.43e})$$

En négligeant dans les tenseurs visqueux tous les termes d'ordre 2 en ε , on a

$$\begin{aligned} & (-\bar{p}_\beta + \text{M}_\mu \bar{p}_\gamma) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} \\ & 0 & \varepsilon \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} \\ & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \\ & \text{M}_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} \\ & 0 & \varepsilon \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} \\ & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{\bar{\kappa} \varepsilon}{\text{Ca}} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.43f})$$

et on peut dès lors écrire un système d'équations différentielles selon les projections dans les directions x, y, z de la manière suivante

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_x - \bar{\kappa} \varepsilon n_x + \text{Ca} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_z = 0, \quad (\text{D.44a})$$

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_y - \bar{\kappa} \varepsilon n_y + \text{Ca} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_z = 0; \quad (\text{D.44b})$$

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_z - \bar{\kappa} \varepsilon n_z + \text{Ca} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_x + \text{Ca} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_y = 0. \quad (\text{D.44c})$$

Il est donc important d'analyser l'ordre de grandeur des différents termes dans les équations (D.44). Si le nombre capillaire Ca est très grand par rapport à ε ($\text{Ca} \gg \varepsilon$) et que M_μ est d'ordre ε , la contribution du terme $\bar{\kappa} \varepsilon$ peut être négligée dans ces dernières équations et on obtient dans ce cas

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_x + \text{Ca} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_z = 0, \quad (\text{D.45a})$$

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_y + \text{Ca} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_z = 0; \quad (\text{D.45b})$$

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_z + \text{Ca} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_x + \text{Ca} \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_y = 0. \quad (\text{D.45c})$$

ou encore

$$\left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_x + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_z = 0, \quad (\text{D.46a})$$

$$\left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_y + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_z = 0; \quad (\text{D.46b})$$

$$\left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_z + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{u}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_x + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial \bar{z}} - M_\mu \frac{\partial \bar{v}_\gamma}{\partial \bar{z}} \right) n_y = 0. \quad (\text{D.46c})$$

Les équations (D.46) caractérisent ainsi le saut de pression à l'interface liquide-gaz lorsque les effets visqueux sont très dominants par rapport aux effets capillaires.

Si en revanche $\text{Ca} \leq \varepsilon$ et $1 \geq M_\mu > \varepsilon$, le coefficient $\text{Ca} \varepsilon$ devient d'ordre supérieur ou égal à deux en ε , c'est-à-dire $\text{Ca} \varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, et dans ce cas, les équations (D.44)

deviennent

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_x - \bar{\kappa} \varepsilon n_x + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \quad (\text{D.47a})$$

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_y - \bar{\kappa} \varepsilon n_y + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \quad (\text{D.47b})$$

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) n_z - \bar{\kappa} \varepsilon n_z + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \quad (\text{D.47c})$$

qui est donc une seule équation de la forme

$$\text{Ca} \left(-\bar{p}_\beta + M_\mu \bar{p}_\gamma \right) - \bar{\kappa} \varepsilon = 0, \quad \text{Ca} \leq \varepsilon, \quad 1 \geq M_\mu > \varepsilon, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}. \quad (\text{D.48})$$

La forme dimensionnelle de cette dernière équation donne ainsi la loi classique de LAPLACE

$$p_\gamma - p_\beta = \sigma \kappa, \quad \text{Ca} \leq \varepsilon, \quad 1 \geq M_\mu > \varepsilon, \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\gamma}. \quad (\text{D.49})$$

Le modèle d'écoulement diphasique dans une fracture rugueuse telle que schématisé sur la figure [D.1](#) est alors régi par les équations de REYNOLDS ([D.41](#)) et ([D.42](#)) respectivement dans la phase β et dans la phase γ , qui est une forme simplifiée des équations de STOKES dans un plan bidimensionnel (x, y) et qui sont couplées entre elles à travers la loi de LAPLACE donnée par l'équation ([D.49](#)) si les contraintes $\text{Ca} \leq \varepsilon$, $1 \geq M_\mu > \varepsilon$ sont respectées ou par les équations ([D.46](#)) si les effets visqueux sont très dominant par rapport aux effets capillaires ($\text{Ca} \gg \varepsilon$, $1 \geq M_\mu > \varepsilon$).