



HAL
open science

Une approche par modèles réduits pour la résolution de problèmes paramétrés multiphysiques fortement couplés

Floriane Wurtzer

► To cite this version:

Floriane Wurtzer. Une approche par modèles réduits pour la résolution de problèmes paramétrés multiphysiques fortement couplés. Mécanique statistique [cond-mat.stat-mech]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT : 2024UPAST112 . tel-04958967

HAL Id: tel-04958967

<https://theses.hal.science/tel-04958967v1>

Submitted on 20 Feb 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une approche par modèles réduits pour la résolution de problèmes paramétrés multiphysiques fortement couplés

*A model-order reduction approach for the solution of
parametrized strongly-coupled multiphysics problems*

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n°579 : Sciences Mécaniques et Énergétiques,
Matériaux et Géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Mécanique des solides et des structures
Graduate School : Sciences de l'ingénierie et des systèmes.
Réfèrent : ENS Paris-Saclay

Thèse préparée dans l'unité de recherche **LMPS** – Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay
(Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS),
sous la direction de **Pierre-Alain BOUCARD**, Professeur des Universités,
et le co-encadrement de **David NÉRON**, Professeur des Universités

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 6 décembre 2024, par

Floriane WURTZER

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Emmanuelle ABISSET-CHAVANNE Professeure des Universités, Arts et Métiers – Campus de Bordeaux	Présidente & Examinatrice
Marianne BERINGHIER Maîtresse de Conférences HDR, Arts et Métiers – Campus d'Angers	Rapporteuse & Examinatrice
Jean-Charles PASSIEUX Professeur des Universités, INSA Toulouse	Rapporteur & Examineur
David DUREISSEIX Professeur des Universités, INSA Lyon	Examineur

Titre : Une approche par modèles réduits pour la résolution de problèmes paramétrés multiphysiques fortement couplés

Mots clés : Réduction de modèle, Multiphysique, Problèmes paramétrés, LATIN-PGD

Résumé : Dans les phases de conception, d'optimisation ou de maintenance prédictive, les ingénieurs sont amenés à tester diverses configurations de chargement, de géométrie ou de propriétés matériaux pour construire des métamodèles, effectuer des analyses de sensibilité ou ajuster des paramètres incertains. Pour ce faire, des appels répétés à des modèles numériques sont requis afin de résoudre un grand nombre de problèmes physiques semblables. Cependant, une telle démarche peut entraîner un coût de calcul prohibitif, surtout dans un cadre multiphysique — au cœur des études réalisées aujourd'hui dans les industries de pointe. En effet, chaque simulation comporte alors des millions de degrés de liberté, et doit intégrer plusieurs physiques ainsi que leurs interactions mutuelles. Dans ce contexte, cette thèse propose une stratégie de calcul

performante pour résoudre de nombreux problèmes multiphysiques similaires. La stratégie développée repose sur l'association de la méthode LATIN-PGD et d'un processus d'initialisation qui tire partie des calculs précédemment réalisés pour aborder un nouveau jeu de paramètres. En particulier, une base réduite est construite indépendamment pour chaque physique; chacune de ces bases est réutilisée et enrichie au fil des calculs lorsque cela s'avère nécessaire. Les performances de la méthode sont illustrées sur un cas test thermomécanique fortement couplé de taille représentative. Une étude paramétrique complète, comportant une centaine de résolutions, est accélérée d'un facteur 5 par rapport à une application naïve de la méthode LATIN-PGD, et d'un facteur 45 comparé à une approche monolithique classique.

Title: A model-order reduction approach for the solution of parametrized strongly-coupled multiphysics problems

Keywords: Reduced-order modeling, Multiphysics, Parametric problems, LATIN-PGD

Abstract: During design, optimization or predictive maintenance stages, engineers need to test various configurations of loading, geometry or material properties in order to build metamodels, perform sensitivity analyses or adjust uncertain parameters. Repeated calls to numerical models are then required to solve numerous related physical problems. However, such an approach can lead to prohibitive computational costs, especially in a multiphysics framework, which is a major focus of today's studies in cutting-edge industries. Indeed, each simulation involves millions of degrees of freedom, and must encompass several physics and their mutual interactions. In this context, this thesis proposes a computational strategy for efficiently solving many similar multiphysics

problems. The developed approach is based on the combination of the LATIN-PGD solver and an initialization procedure that takes advantage of previously performed calculations to tackle a new set of parameters. More specifically, a reduced-order basis is built independently for each physics; each basis is then reused and enriched throughout the calculations when deemed necessary. The performances of the method are illustrated on a test case of representative size involving a strong thermomechanical coupling. A complete parametric study, involving around a hundred resolutions, is accelerated by a factor of 5 compared with a naive application of the LATIN-PGD method, and by a factor of 45 in comparison with a conventional monolithic approach.

Remerciements

Il est temps d'écrire les derniers mots du manuscrit, qui marquent non seulement l'aboutissement de ma thèse, mais aussi la fin de sept années enrichissantes passées au sein de l'ENS Paris-Saclay. J'espère trouver ici les mots justes pour exprimer ma profonde gratitude envers les personnes qui m'ont accompagnée, soutenue et inspirée durant cette période.

Mes premiers remerciements s'adressent à Marianne Beringhier et Jean-Charles Passieux pour avoir accepté d'être mes rapporteurs. Je suis honorée du temps que vous avez consacré à la lecture attentive de mon manuscrit, et vos commentaires éclairés m'ont été d'une aide précieuse lors de la préparation de la soutenance. Je remercie également chaleureusement Emmanuelle Abisset-Chavanne, David Dureisseix et Philippe Barabinot d'avoir accepté de prendre part à mon jury. Merci pour l'attention que vous avez portée à mon travail et la bienveillance dont vous avez fait preuve.

J'ai eu la chance d'être encadrée durant cette thèse par un duo de choc qui, malgré des emplois du temps très chargés, a toujours su se rendre disponible. PAB, merci d'avoir managé cette équipe d'une main de maître et d'avoir toujours été à l'écoute en cas de besoin. Je n'aurais pas pu rêver meilleur directeur de thèse. David, quel plaisir de profiter de ta bonne humeur permanente et de ta pédagogie hors pair. Merci du fond du cœur pour vos précieux conseils, votre gentillesse et vos encouragements tout au long de cette aventure.

Je remercie également l'ensemble des membres du laboratoire, qui lui confèrent cette atmosphère si chaleureuse et agréable. Il me tient particulièrement à cœur de remercier ceux qui ont partagé et égayé mon quotidien durant ces trois années, entre « l'ilôt LATIN-PGD » du CdS et le café lab'. Daby, merci d'avoir toujours répondu présent pour discuter LATIN-PGD, même à la mi-août quand il devenait urgent de finir. Flavien, qu'aurais-je fait sans tes immenses connaissances informatiques qui m'ont tant de fois sauvée? (Certainement pas choisi un PC sous Linux). Merci à vous deux pour ce beau template. Aurélia, tu as été un modèle pour moi. Victor, Quentin et Pierrot, merci pour l'ambiance joviale que vous avez apportée au CdS et les folles aventures dans lesquelles vous m'avez entraînée – vous accompagner dans un bar à mes risques et périls ou escalader un viaduc, par exemple. Tatiana, ma compatriote alsacienne, merci pour toutes nos virées à bord de *Triesta la Fiesta*.

Je remercie également tous les autres avec qui j'ai partagé de bons moments : Amandine, Xiaofei, Matthieu, Louis, Claire, Julien, Karim, Thomas, Daniel, et j'en oublie certainement... Spéciale dédicace à la team ROMlab; merci Ronan de m'avoir mis le pied à l'étrier durant mon stage. Élise, cela a été un réel plaisir de te transmettre mon travail et de voir les améliorations

que tu y as déjà apportées. Je quitte le laboratoire en sachant ROMlab entre de bonnes mains!

Je profite également de cette occasion pour remercier l'équipe pédagogique du D(ER) GM, qui m'a offert, tout au long de ma scolarité, des modèles de pédagogie inégalés, avant de m'accueillir pour mes premiers pas d'enseignante, le tout dans une ambiance familiale. Emmanuel H., François L., Emeline, Federica, PAG, Karine, Ludovic, j'ai été ravie de prolonger l'expérience quelques années de plus en vous croisant au café lab' tout au long de ma thèse. Merci à tous de m'avoir accompagnée et aidée à atteindre mon objectif professionnel. J'en profite pour remercier mes collègues et élèves du lycée Jeanne d'Albret pour leurs encouragements avant la soutenance (mention spéciale au super pull offert par les PCSI!). Dans cette lignée, un immense merci à Chloé pour toutes les ressources partagées et les précieux conseils tout au long de l'année. Sans ton aide, je n'aurais jamais pu gérer la préparation de la soutenance en parallèle d'un nouveau métier aussi prenant.

Enfin, un grand merci à mes parents et à ma sœur pour leur soutien indéfectible et leurs petites attentions qui ont été des sources de réconfort et de motivation tout au long de cette période intense. Mention spéciale à ma maman, non seulement pour la relecture finale du manuscrit, mais aussi pour la production industrielle de *bredele* et autres spécialités alsaciennes pour mon pot de thèse.

Évidemment, je ne saurais finir sans une pensée pleine d'émotion pour mon Théodore. Je te suis infiniment reconnaissante pour ton soutien moral inconditionnel, même à distance durant l'année passée, ainsi que pour ton aide sur tant d'aspects... Merci d'illuminer mon quotidien avec tes compositions musicales à ma gloire (aux paroles limitées, certes, mais tout est dans le rythme!). Tu es, sans conteste, la plus belle chose que cette thèse m'ait apportée.

Table des matières

Remerciements	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Notations	xi
Introduction	1
Contexte	1
Verrous et positionnement	4
Organisation du manuscrit	6
1 État de l'art – résolution de problèmes multiphysiques couplés paramétrés	9
1 Résolution de problèmes paramétrés	10
1.1 Écriture générique d'un problème paramétré	10
1.2 Résolution à l'aide de modèles de substitution	11
1.3 Résolution à l'aide de modèles réduits	13
2 Méthodes de réduction de modèle (ROM)	14
2.1 Proper Orthogonal Decomposition (POD)	15
2.2 Méthode Reduced Basis (RB)	17
2.3 Proper Generalized Decomposition (PGD)	19
3 Résolution de problèmes multiphysiques	24
3.1 Classification des problèmes multiphysiques couplés	24
3.2 Approche monolithique	26
3.3 Approches partitionnées	28
3.4 Approche partitionnée basée sur la méthode LATIN	32
4 Application des méthodes de ROM à des problèmes multiphysiques	35
4.1 Méthodes <i>a posteriori</i>	36
4.2 Méthodes <i>a priori</i>	38
> Bilan du chapitre	39
2 Problème multiphysique de référence : présentation et implémentation	41
1 Les équations de la thermo-élasticité linéaire	42
1.1 Hypothèses et quantités mises en jeu	43
1.2 Équations de la mécanique	44
1.3 Équations de la thermique – formalisme thermodynamique	45
1.4 Bilan des équations	49

1.5	Remarques sur le problème couplé	50
2	Formulation discrète	52
2.1	Écriture sous forme faible	53
2.2	Discrétisation par éléments finis	54
3	Implémentation numérique	56
3.1	ROMlab : une plateforme collaborative	56
3.2	Comparaison à un <i>benchmark</i> : validation et discussion	60
➤	Bilan du chapitre	64
3	La méthode LATIN-PGD : cas d'application multiphysique	67
1	La méthode LATIN-PGD appliquée à la thermo-élasticité	68
1.1	Séparation des difficultés	69
1.2	Algorithme itératif à deux étapes	70
1.3	L'étape couplée locale	73
1.4	L'étape découplée linéaire	74
1.5	Réduction de modèle	77
2	Implémentation numérique sur un exemple académique	83
2.1	Description du cas test	83
2.2	Validation de la méthode	84
2.3	Choix des directions de recherche	88
2.4	Influence de la force de couplage	91
3	Application à un cas d'échelle	92
3.1	Description du cas test	92
3.2	Résultats numériques et analyse des performances	94
➤	Bilan du chapitre	97
4	Résolution de problèmes multiphysiques paramétrés	99
1	Méthode multiparamétrique basée sur le solveur LATIN-PGD	100
1.1	Idées générales et historique des développements	100
1.2	Extension aux problèmes multiphysiques	103
2	Variation d'un paramètre influençant la force du couplage	105
2.1	Motivations	105
2.2	Étude paramétrique	107
3	Variation de deux paramètres matériaux	111
3.1	Description de l'étude	111
3.2	Analyse des résultats	113
3.3	Limites	115
➤	Bilan du chapitre	116
	Conclusion générale et perspectives	119
	A Sélection de contributions à ROMlab	123
	B Opérateurs éléments finis dans ROMlab	131
	Bibliographie	139

Table des figures

1	Exemples de systèmes complexes multiphysiques	2
2	Variabilité du module d'Young de l'artère coronaire mesuré expérimentalement et son influence sur une quantité d'intérêt	3
1.1	Représentation schématique du processus d'élaboration <i>offline</i> et d'utilisation <i>online</i> d'un métamodèle	11
1.2	Illustration des espaces intervenant dans la définition de l'épaisseur de Kolmogorov	14
1.3	Principe des méthodes de projection basées sur la POD	15
1.4	Principe de la méthode Reduced Basis (RB)	18
1.5	Décomposition espace-temps-paramètres (d'après [DABY-SEESARAM, 2023])	21
1.6	Principe de la méthode PGD avec décomposition espace-temps-paramètres	22
1.7	Décomposition espace-temps pour chaque valeur de paramètre (d'après [DABY-SEESARAM, 2023])	23
1.8	Interprétation graphique de la méthode LATIN dans le cadre de deux résolutions d'un problème paramétré (issue de [HEYBERGER, 2014])	23
1.9	Méthode de résolution monolithique	26
1.10	Principe des méthodes de partitionnement standard	30
1.11	Échanges entre solveurs monophysiques au cours de l'avancement en temps des approches partitionnées « à sens unique »	30
1.12	Principe des méthodes de partitionnement itératives	31
1.13	Échanges entre solveurs monophysiques au cours de l'avancement en temps des approches partitionnées itératives	32
1.14	Interface entre physiques couplées dans le cas d'une interaction sur une surface commune ou dans le volume	33
1.15	Principe de la méthode LATIN appliquée au problème de poro-élasticité avec des discrétisations différentes (tirées de [NÉRON & DUREISSEIX, 2008b])	33
2.1	Quantités en interaction lors du couplage thermo-mécanique	42
2.2	Flambement d'un rail de chemin de fer sous forte chaleur	42
2.3	Échauffement d'un polymère durant un essai de compression [HAO et al., 2022]	42
2.4	Conditions aux limites du problème de thermo-mécanique	44
2.5	Développements des principaux contributeurs à ROMlab, d'après [RUDA, 2023]	57
2.6	Architecture du code ROMlab adapté à la résolution de problèmes multiphysiques, d'après [RUDA, 2023]	59

2.7	Définition du second problème de Danilovskaya	60
2.8	Comparaison des résultats obtenus avec ROMlab à ceux de [SHU & STANCIULESCU, 2019]	62
2.9	Comparaison des solutions au problème de Danilovskaya pour différentes hypothèses sur le terme de couplage dans l'équation thermique	63
2.10	Écart relatifs entre les résultats de ROMlab et du code NGSolve pour le <i>benchmark</i> de Danilovskaya	64
3.1	Illustration historique du schéma itératif de la méthode LATIN	71
3.2	Algorigramme de la méthode LATIN pour la résolution du problème de thermo-mécanique	77
3.3	Cas test académique tri-dimensionnel	83
3.4	Cartes d'erreur relative (en pourcentage) de champs LATIN-PGD par rapport à la référence monolithique à $t = 600$ s	85
3.5	Comparaison de l'évolution temporelle du déplacement longitudinal monolithique et LATIN-PGD en un point donné	85
3.6	Évolution de l'erreur, de l'indicateur de convergence et du nombre de modes PGD au fil des itérations	86
3.7	Modes PGD pour la partie thermique du problème. Des échelles différentes sont utilisées pour les fonctions temporelles des deux lignes	87
3.8	Décroissance des valeurs singulières des bases réduites construites par PGD	88
3.9	Impact de la direction de recherche sur la convergence de la méthode	88
3.10	Nombre d'itérations jusqu'à convergence ($\eta_c = 10^{-4}$) et temps de calcul en fonction du temps caractéristique de la direction de recherche (3.8c)	89
3.11	Influence du temps caractéristique fluide t_f sur la convergence du problème de poro-élasticité, par [FOULATIER, 2024]	89
3.12	Influence du temps caractéristique de la direction de recherche (3.8c) sur le nombre d'itérations à convergence ($\eta_c = 10^{-4}$) pour différentes discrétisations	90
3.13	Influence de la force de couplage sur l'algorithme LATIN-PGD	92
3.14	Description du chargement appliqué à l'aube de turbine	93
3.15	champs solutions obtenus avec la méthode LATIN-PGD à $t = 60$ s sur l'aube de turbine	94
3.16	Influence du nombre de <i>threads</i> sur les performances des approches monolithique et LATIN-PGD	95
3.17	Répartition du temps de calcul sur l'exemple de l'aube de turbine en utilisant 12 <i>threads</i>	96
4.1	Différentes stratégies d'initialisation d'un calcul (d'après [HEYBERGER, 2014])	102
4.2	Influence du coefficient de dilatation thermique α sur le déplacement longitudinal u_x au point M	106
4.3	Matrices MAC des bases PGD construites pour $\alpha = \alpha_0 = 1.1 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$ et $\alpha = 5\alpha_0$	107
4.4	Évolution de l'erreur vraie et de l'indicateur de convergence en fonction des itérations cumulées (critère d'arrêt $e_c = 10^{-3}$)	108
4.5	Modes PGD générés au cours de l'étude paramétrique	109

4.6	Temps de calcul cumulé normalisé pour l'étude paramétrique, avec huit <i>threads</i> et un critère d'arrêt $e_c = 10^{-3}$ pour les calculs LATIN-PGD	109
4.7	Influence de la discrétisation de l'espace paramétrique \mathcal{D}_α sur le nombre d'itérations et de modes générés lors d'une étude paramétrique	110
4.8	Champs de contrainte équivalente de Von Mises obtenus pour plusieurs jeux de paramètres $(E, k) \in \mathcal{D}_E \times \mathcal{D}_k$	112
4.9	Différence des champs de contrainte équivalente de Von Mises obtenus pour plusieurs jeux de paramètres (E, k) avec celui associé à (E_0, k_0)	112
4.10	Ordre des calculs dans l'espace paramétrique bidimensionnel \mathcal{D}	113
4.11	Itérations et temps de calcul pour chaque jeu de paramètres de l'étude	114
4.12	Modes PGD ajoutés à chaque calcul au cours de l'étude à deux paramètres	114
4.13	Itérations et temps de calcul pour chaque jeu de paramètres avec $n_j = 441$	116
A.1	Formalisme tensoriel de ROMlab illustré sur le tenseur des déformations en 2D	123
A.2	Principe du produit matriciel par page de la fonction <i>pagetimes</i> appliqué au calcul des contraintes élastiques	126
A.3	Structure du tableau \mathbf{B}_{5D} avant assemblage	127
A.4	Position d'un terme (c, i, n, g, e) du tableau \mathbf{B}_{5D} dans la matrice \mathbf{B}_{2D}	128
A.5	Définition du problème de thermique avec convection	129
A.6	Validation de l'implémentation des conditions de Robin dans ROMlab par rapport à une solution analytique	130

Liste des tableaux

2.1	Quantités d'intérêt du problème thermoélastique et leur unité SI	43
2.2	Analogie entre les équations de thermo-élasticité et de poro-élasticité linéaire	51
2.3	Analogie entre les quantités thermiques et fluides	51
2.4	Comparatif des paramètres de simulation du second problème de Danilovskaya dans la littérature	61
2.5	Équation d'équilibre thermique associée à différentes hypothèses sur le terme source d'origine mécanique	63
3.1	Dimensions de la géométrie représentée en Figure 3.3a	84
3.2	Paramètres matériaux thermomécaniques	84
3.3	Caractéristiques des maillages générés pour la géométrie de la Figure 3.3a	90
3.4	Coefficient TCP (voir eq. (2.39), p. 52) associé aux valeurs extrêmes du coefficient de dilatation thermique considéré α	91
3.5	Valeurs numériques des coefficients de convection thermique h et températures du fluide ambiant θ_∞	93
4.1	Ratio entre les nombres d'itérations et de modes générés par approche naïve et multiparamétrique pour un nombre croissant de calculs	111
4.2	Variations des deux paramètres considérés dans l'étude paramétrique	111
4.3	Gain estimé en temps de calcul de la stratégie proposée par rapport à une approche naïve effectuant les $n_j = 121$ calculs de manière indépendante	115
A.1	Notations adoptées pour décrire les dimensions des tableaux manipulés	124

Notations

Grandeurs mécaniques

\underline{u}	Vecteur déplacement
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations linéarisées
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy
\mathcal{K}	Tenseur d'élasticité de Hooke
λ, μ	Coefficients de Lamé

Grandeurs thermiques

T_0	Température à l'état initial non déformé
θ	Incrément de température par rapport à T_0
\underline{g}	Gradient de la température
\underline{q}	Vecteur flux de chaleur
k	Conductivité thermique
ρ	Masse volumique
c	Capacité thermique massique

Grandeurs de couplage thermomécaniques

α	Coefficient de dilatation thermique linéique
β	Coefficient de couplage ; $\beta \equiv \alpha(2\mu + 3\lambda)$ en 3D

Grandeurs associées à la méthode LATIN-PGD

$\hat{\square}_{n+1}$	Quantités relatives à l'étape <i>couplée</i> de l'itération $n + 1$
\square_{n+1}	Quantités relatives à l'étape <i>découplée</i> de l'itération $n + 1$
$\mathcal{A}_d^M, \mathcal{A}_d^{Th}$	Espace des solutions mécaniques (resp. thermiques) admissibles ; $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_d^M \times \mathcal{A}_d^{Th}$
Γ	Espace des solutions des relations de comportement couplées
E^+, E^-	Directions de recherche de montée et de descente
$\mathbf{s}^M, \mathbf{s}^{Th}$	Ensemble des champs mécanique (resp. thermiques) recherchés ; $\mathbf{s} = (\mathbf{s}^M, \mathbf{s}^{Th})$
$\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\theta}_i$	i -ème fonction spatiale mécanique (resp. thermique)
η	Indicateur de convergence

Grandeurs associées aux études paramétriques

$\underline{\mu}$	Ensemble de p paramètres
$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$	Domaine de variation des p paramètres
$\square^{(\underline{\mu}_i)}$	Quantité associée au i -ème jeu de paramètres $\underline{\mu}_i$

Grandeurs mathématiques

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	Domaine spatial, $d = 2, 3$
$\partial\Omega$	Frontière du domaine Ω
$\partial\bullet\Omega$	Portion de la frontière $\partial\Omega$ sur laquelle la quantité \bullet est imposée
\underline{n}	Vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$
$I \subset \mathbb{R}^+$	Intervalle temporel
$\mathcal{L}^2(\Omega)$	Espace des fonctions de carré intégrable sur Ω
$\mathcal{H}^1(\Omega)$	Espace des fonctions $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et de gradient $\mathcal{L}^2(\Omega)$
$\mathcal{U}, \mathcal{U}_0$	Espace des champs de déplacements admissibles (resp. à zéro)
$\mathcal{T}, \mathcal{T}_0$	Espace des champs de température admissibles (resp. à zéro)
\square^*	Fonction test associée à la quantité \square

Opérateurs

div	Opérateur de divergence
∇	Opérateur de gradient
\cdot	Produit scalaire
:	Produit doublement contracté
Tr	Opérateur de trace
\square^T	Transposée de \square
$\frac{d\square}{dt} = \dot{\square}$	Dérivée temporelle de \square
$\ \square\ $	Norme de \square au sens de l'opérateur \bullet

Acronymes

(M)EF	(Méthode) des Éléments Finis
PGD	<i>Proper Generalized Decomposition</i>
POD	<i>Proper Orthogonal Decomposition</i>
ROM	<i>Reduced Order Modeling</i>
TCP	<i>Thermoelastic Coupling Parameter</i>

Introduction

Contexte

Problèmes multiphysiques. Les défis sociétaux et techniques auxquels doivent aujourd’hui répondre les ingénieurs impliquent la conception, la compréhension et l’optimisation de systèmes d’une complexité de plus en plus importante. En particulier, le fonctionnement de la plupart des dispositifs technologiques modernes fait intervenir de façon simultanée des phénomènes physiques de différentes natures ; on parle alors de systèmes *multiphysiques*. Les départements de recherche et développement des entreprises de haute technologie sont souvent structurés en bureaux d’études, dont chacun est spécialisé dans l’étude approfondie d’une discipline : mécanique des solides ou des fluides, thermique, chimie, compatibilité électromagnétique... Cependant, dans de nombreuses applications, ces phénomènes physiques ne coexistent pas simplement au sein d’un même système, mais interagissent entre eux. De tels exemples, balayant volontairement des domaines d’application variés, sont illustrés en [Figure 1](#) et détaillés ci-après.

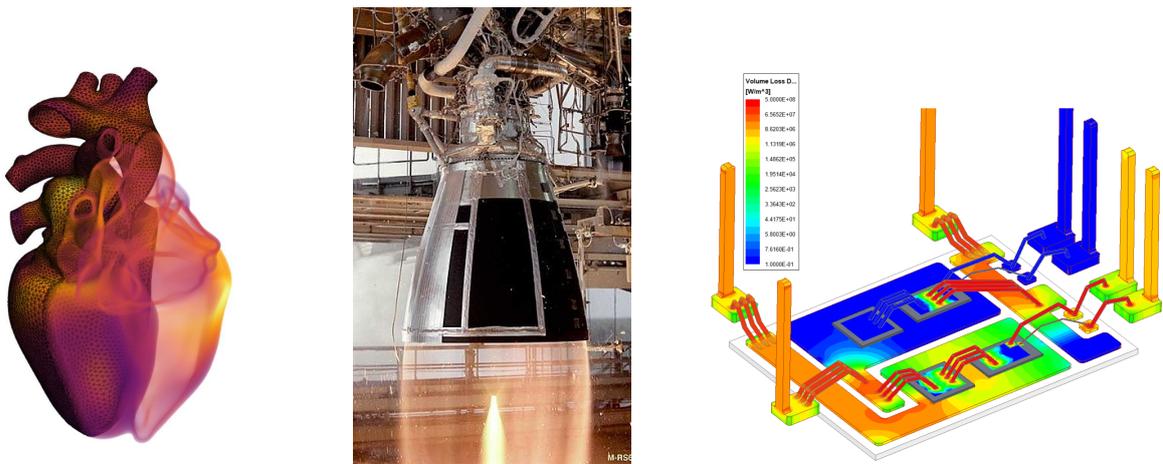
- Le fonctionnement du cœur ([Figure 1a](#)) permet l’écoulement du sang (*mécanique des fluides*) au sein de l’organisme grâce à un mouvement de pompage résultant de la contraction des muscles cardiaques. Ce mouvement est contrôlé par une interaction complexe entre des processus chimiques (*chimie*) et des signaux électriques (*électricité*) à l’échelle cellulaire, qui sont impactés en retour par la déformation des tissus biologiques (*mécanique*) [[QUARTERONI et al., 2017](#)]. La construction d’un modèle numérique complet et réaliste du cœur, décrivant les interactions qui y ont lieu et prenant en compte les spécificités de chaque patient, constitue un enjeu important de la recherche médicale et fait actuellement l’objet de plusieurs projets ambitieux, comme l’ERC *iHeart*¹ ou le projet *Living Heart*² de Dassault Systèmes. Un tel modèle permettrait à terme de guider le choix de traitements, ainsi que de concevoir et tester en toute sécurité des dispositifs médicaux tels que des pacemakers.
- La poussée nécessaire au déplacement d’un véhicule spatial résulte de l’écoulement des gaz d’échappement (*mécanique des fluides*) brûlants et à des vitesses supersoniques à travers une tuyère ([Figure 1b](#)) qui se déforme (*mécanique*) sous l’action des fortes variations de pression [[KUHLE et al., 2002](#)]. Par ailleurs, les conditions de température extrêmes (*thermique*) ainsi que des réactions chimiques (*chimie*) peuvent engendrer

1. <https://iheart.polimi.it/en/home/>

2. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/solutions/life-sciences-healthcare/the-living-heart-project/>

l'érosion de la surface de la tuyère, impactant en retour l'écoulement des gaz et donc la poussée fournie [ZHANG et al., 2009].

- Le passage d'un courant électrique (*électricité*) dans un dispositif d'électronique de puissance (hacheur, onduleur... – voir Figure 1c) engendre des pertes sous forme de chaleur (*thermique*) qui, du fait de la disparité importante des propriétés matériaux au sein du système, entraînent des contraintes pouvant initier et propager des fissures (*mécanique*). Cet endommagement influence à son tour le comportement électrique et thermique [DEDE et al., 2014]. Les modules d'électronique de puissance sont des composants essentiels au sein de systèmes électriques variés, dont l'utilisation est en pleine expansion dans le contexte de la transition énergétique.



(a) Secteur biomédical : cœur humain³ (b) Secteur aérospatial : tuyère de fusée⁴ (c) Secteur de l'énergie : module d'électronique de puissance⁵

FIGURE 1 • Exemples de systèmes complexes multiphysiques

Dans chacun de ces systèmes complexes – industriels ou biologiques – l'interdépendance entre des phénomènes physiques différents est cruciale. Par exemple, [BLADES et al., 2012] montrent qu'en plus du chargement induit par l'écoulement des gaz sur la tuyère, causant sa déformation, il est essentiel de tenir compte de l'impact de cette déformation sur l'écoulement du fluide. Le problème multiphysique est alors dit *fortement couplé*.

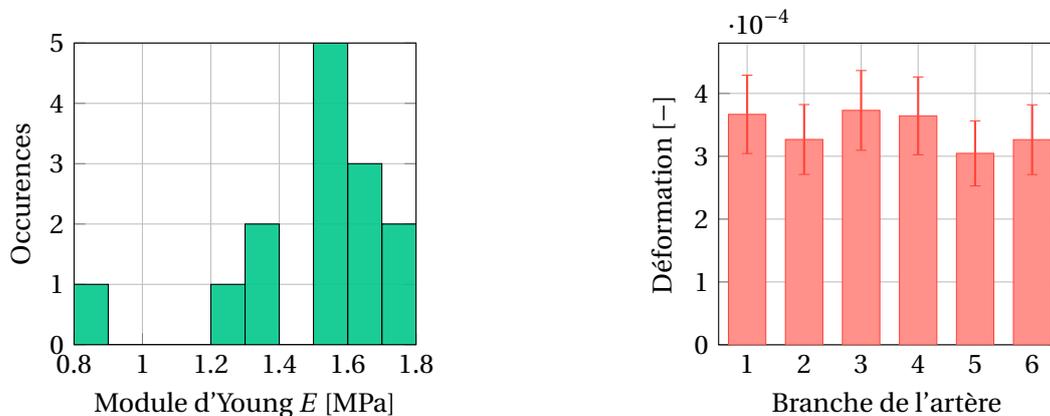
Problèmes paramétrés. Dans de tels systèmes complexes, certains paramètres demeurent mal connus. Cela peut être le cas de propriétés matériaux (difficilement identifiables ou que le fabricant ne peut pas garantir de manière exacte), de caractéristiques géométriques variables (potentielle conséquence du procédé de fabrication), ou encore des conditions aux limites qui doivent traduire les relations du système avec son environnement. À titre d'exemple, la Figure 2a représente les valeurs de module d'Young mesurées expérimentalement par [KARIMI et al., 2013] sur 14 artères coronaires humaines, irrigant le cœur. Il a été conclu que ces artères présentent un module d'élasticité physiologique de 1.48 ± 0.24 MPa, ce

3. Crédits photo : Politecnico di Milano. Source : Healthcare-in-Europe.com

4. Crédits photo : NASA. Domaine Public. Source : Wikimedia Commons

5. Source : Econ Engineering

qui représente une variabilité de $\pm 16\%$ par rapport à la valeur moyenne. L'impact de cette variabilité sur diverses quantités d'intérêt a été étudiée par [SEO et al., 2020]. En particulier, un écart-type de 17% est obtenu sur la déformation des parois vasculaires de différentes branches de l'artère coronaire gauche (voir Figure 2b). La conception d'un pacemaker se doit de prendre en compte ces incertitudes.



(a) Modules d'élasticité E mesurés sur 14 artères coronaires, d'après les résultats de [KARIMI et al., 2013] (b) Moyennes et écarts-types sur la déformation de la paroi résultant de l'incertitude sur E , adaptés de [SEO et al., 2020]

FIGURE 2 • Variabilité du module d'Young de l'artère coronaire mesuré expérimentalement et son influence sur une quantité d'intérêt

De manière alternative, la phase de conception d'un système industriel s'accompagne de nombreuses contraintes liées à un cahier des charges de plus en plus exigeant afin de satisfaire les performances attendues, potentiellement en différents points de fonctionnement, tout en respectant les normes en constante évolution. Ce processus rend nécessaire le recours à des méthodologies d'optimisation, dont le but est de trouver la combinaison de paramètres offrant des performances optimales sous certaines contraintes. Là encore, des paramètres géométriques ou matériaux sont amenés à varier.

Afin d'appréhender les répercussions de la variabilité de paramètres dans ces deux situations (variabilité imposée dans le cas de paramètres incertains ou voulue au cours d'une démarche d'optimisation), la simulation numérique apparaît comme un outil puissant pour explorer à moindre frais un grand nombre de combinaisons possibles. Un modèle numérique devient même indispensable lorsqu'il est difficile de reproduire fidèlement les conditions de fonctionnement réelles en laboratoire, comme pour la tuyère de fusée. Ces résultats numériques peuvent ensuite alimenter un métamodèle, sous la forme d'une surface de réponse par exemple, ou servir à l'apprentissage d'un réseau de neurones, permettant d'évaluer de manière quasi-instantanée l'influence de paramètres sur une quantité d'intérêt.

Verrou : temps de calcul. La mise en place d'une démarche d'optimisation, de recalage de paramètres incertains ou la construction d'un abaque virtuel nécessite de nombreux appels au modèle numérique. Cela peut rapidement mener à des temps de calcul prohibitifs, particulièrement lorsque le coût d'une unique résolution est déjà élevé. C'est notamment

le cas lors de simulations multiphysiques 3D, non-linéaires, sur des géométries complexes comptant plusieurs millions de degrés de liberté et/ou avec un intervalle temporel d'étude discrétisé finement.

Par exemple, la simulation tri-dimensionnelle d'un module de puissance (tel qu'en [Figure 1c](#)) avec 3.83 millions de degrés de liberté et tenant compte du couplage électro-thermique nécessite environ 12 minutes par pas de temps; la simulation complète de 50 cycles de chargement, chacun discrétisé avec 30 pas de temps, demanderait ainsi environ 300 heures de calcul [[SCHULER, 2023](#)]. Par ailleurs, un calcul d'interaction fluide-structure simulant une partie de la séquence de démarrage de l'un des moteurs principaux de la navette spatiale américaine est présenté dans [[BLADES et al., 2012](#)]. Avec une discrétisation extrêmement fine de l'intervalle temporel (de l'ordre de 10^{-4} s) et un maillage comptant 12.34 millions d'éléments, la simulation d'une durée de 0.02 s a nécessité environ 22 000 heures de temps CPU (réalisées sur 128 cœurs de calcul). Par conséquent, des stratégies performantes sont indispensables pour aborder des démarches demandant de nombreuses évaluations du modèle numérique pour des valeurs de paramètres différentes.

C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux présentés dans ce manuscrit, qui portent sur la **résolution numérique efficace de multiples problèmes multiphysiques fortement couplés dépendant de paramètres.**

Positionnement des travaux

Deux leviers d'action apparaissent logiquement pour diminuer les coûts de calcul. D'une part, on peut chercher à réduire le nombre d'appels au solveur. C'est ce que tentent de faire les algorithmes d'optimisation ou les stratégies de tirages « intelligents » de points dans l'espace paramétrique (par exemple avec la méthode *Latin Hypercube Sampling*). Cet axe n'est pas exploré dans ce travail; on supposera que les calculs à réaliser nous sont imposés. D'autre part, on peut jouer sur la réalisation efficace des calculs nécessaires; c'est sur cet aspect que se concentrent ces travaux de thèse, en utilisant des techniques de réduction de modèle (*Reduced Order Modeling* (ROM) en anglais).

Réduction de modèle. Les méthodes de ROM [[CHINESTA et al., 2017](#); [BENNER et al., 2021a](#)] permettent de tirer parti de la redondance d'informations présentes dans la physique du problème et s'avèrent donc particulièrement intéressantes pour la résolution d'équations aux dérivées partielles paramétrées. Ces méthodes consistent à rechercher une solution approchée du problème initial de grande dimension dans un espace de dimension beaucoup plus faible, et ce avec une perte d'information négligeable.

Plusieurs approches existent pour construire une base générant un tel espace réduit. Les méthodes basées sur la Proper Orthogonalized Decomposition (POD) [[CHATTERJEE, 2000](#)] se caractérisent par une phase d'apprentissage durant laquelle quelques solutions haute-fidélité, appelées *snapshots*, sont calculées pour certaines configurations de paramètres. Dans ces méthodes, le choix des *snapshots* est crucial. L'automatisation de leur sélection a été proposée dans la méthode Reduced Basis (RB) [[MADAY & RØNQUIST, 2002](#)] au moyen d'un

algorithme glouton. La base d'ordre réduit, construite par l'une de ces approches, est ensuite exploitée dans un second temps pour trouver à moindre coût des solutions au problème initial pour un nouvel ensemble de paramètres à l'aide de techniques de projection [BENNER et al., 2021a]. Des applications récentes à des problèmes multiphysiques incluent [BALLARIN et al., 2024; LARION et al., 2020].

À l'inverse, la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) [CHINESTA et al., 2014] construit la base à la volée, en même temps que la résolution du problème. Cette méthode s'affranchit donc de toute phase d'apprentissage, potentiellement coûteuse, et du délicat choix de *snapshots*. Pour ces raisons, et compte tenu des nombreux travaux qui lui ont été consacrés au laboratoire LMPS, cette dernière approche est privilégiée dans ces travaux.

Pour résoudre un problème paramétré avec la méthode PGD, deux approches sont envisageables. La première, dite multi-dimensionnelle, se base sur la décomposition canonique d'un tenseur et consiste à traiter les paramètres comme des variables supplémentaires dans la décomposition à variables séparées. Cette technique, qui permet de s'affranchir de la « malédiction de la dimension », a fait ses preuves dans de nombreux exemples, *e.g.*, [CHINESTA et al., 2010; PRULIÈRE et al., 2010a], y compris dans un contexte multiphysique [QIN et al., 2016b]. La seconde approche consiste à construire une décomposition espace-temps pour chaque valeur de paramètre, en réutilisant et enrichissant la base réduite au fil de l'étude paramétrique [NÉRON et al., 2015]. Cette stratégie se situe à mi-chemin entre la PGD multi-dimensionnelle, qui fournit un modèle réduit pour l'espace des paramètres entier en un seul calcul, et les approches basées sur la projection sur une base réduite pré-calculée.

Solveur multiphysique. Dans le cadre de cette thèse, chaque jeu de paramètres implique la résolution d'un problème multiphysique fortement couplé, *i.e.*, tel qu'aucune physique ne peut être résolue indépendamment des autres, nécessitant d'avoir recours à des stratégies particulières. Classiquement, un tel problème peut-être résolu soit de manière *monolithique*, c'est-à-dire en assemblant et en résolvant simultanément l'ensemble des équations couplées à chaque pas de temps à l'aide d'un solveur dédié, ou de façon *partitionnée* en traitant les physiques indépendamment [FELIPPA et al., 2001]. Dans ce dernier cas, le défi réside bien entendu dans la communication entre physiques pour correctement prendre en compte le couplage. Afin d'appliquer la méthode de réduction de modèle par PGD, qui nécessite de manier des quantités définies sur l'intervalle temporel entier, ces méthodes classiques résolvant un pas de temps après l'autre ne peuvent pas être utilisées directement.

Une approche alternative se base sur la méthode LATIN [LADEVÈZE, 1999], adaptée à la résolution de problèmes multiphysiques par le concept d'*interface entre physiques* [DUREISSEIX et al., 2003b; NÉRON & DUREISSEIX, 2008b]. La solution du problème couplé y est construite par une procédure itérative en cherchant alternativement des solutions aux relations de comportement couplées et aux équations d'équilibre monophysiques. Cette approche peut s'apparenter aux méthodes de partitionnement précédemment évoquées dans la mesure où les physiques sont traitées séparément, mais elle s'en distingue néanmoins en résolvant des problèmes définis sur tout le domaine espace-temps. Cette particularité permet d'intégrer naturellement la méthode PGD, qui peut être appliquée indépendamment à chaque physique. La flexibilité offerte lors de la construction des bases réduites, ainsi que l'expertise du

laboratoire LMPS pour l'utilisation de cette méthode à la fois dans le cadre de problèmes multiphysiques et mécaniques paramétrés (e.g., [HEYBERGER et al., 2013 ; SCANFF et al., 2022]) motivent son choix pour proposer une stratégie de résolution efficace pour des problèmes multiphysiques paramétrés, capable de fournir une réponse précise et rapide à une variation des paramètres.

Organisation du manuscrit

Dans cette thèse, on propose une **approche par modèles réduits pour la résolution de problèmes paramétrés avec un couplage multiphysique fort**, fondée sur la méthode LATIN-PGD. Afin de présenter les travaux réalisés, ce manuscrit s'articule autour de quatre chapitres :

- Le **Chapitre 1** dresse un **état de l'art** des outils nécessaires à la **résolution de problèmes multiphysiques paramétrés au moyen de méthodes de réduction de modèle**, qui seront successivement introduits et développés. Parmi les différentes approches possibles pour traiter des problèmes paramétrés, nous nous focalisons sur les approches de ROM, fournissant une solution riche à un coût réduit. Une revue bibliographique générale des méthodes de ROM les plus courantes nous conduira vers le choix de la méthode *PGD espace-temps*. Enfin, les principales techniques pour résoudre un problème multiphysique couplé seront détaillées, tout en portant une attention particulière à leur utilisation au sein de stratégies de ROM. En particulier, parmi les différentes approches envisageables pour utiliser la méthode PGD, nous nous concentrerons sur la méthode LATIN, dont nous exposerons les grands principes et les développements antérieurs dans le cadre multiphysique.
- Le **Chapitre 2** se focalise sur l'exemple de la **thermo-élasticité linéaire fortement couplée**, sur lequel est illustrée la stratégie générale développée dans ce manuscrit. Les hypothèses ainsi que les équations qui régissent ce problème d'évolution couplant deux physiques seront rappelées en se basant sur un formalisme thermodynamique. Ces équations seront ensuite discrétisées par la méthode des éléments finis puis résolues par une approche monolithique classique, dont l'implémentation sera validée sur un *benchmark* courant en thermo-élasticité. Nous présenterons également la plateforme collaborative dans laquelle les développements numériques de cette thèse ont été intégrés, et en particulier son extension à un cadre multiphysique générique.
- Le **Chapitre 3** détaille la **méthode LATIN-PGD pour les problèmes multiphysiques** et son application au problème de thermo-élasticité. Le formalisme particulier de la méthode permet naturellement d'appliquer la réduction de modèle par PGD indépendamment à chaque physique, en utilisant les mêmes routines numériques pour chacune. En se basant sur la méthodologie proposée initialement dans [DUREISSEIX et al., 2003b], seules les inconnues primales de chaque physique sont recherchées sous une forme à variables séparées. Une première illustration sur un cas test académique est présentée afin de valider l'implémentation et d'observer l'influence du choix d'un

paramètre numérique clé de l'algorithme, ainsi que de la force du couplage. Pour finir, une analyse détaillée des performances de la méthode lors d'un calcul associé à un jeu de paramètres est fournie sur un cas test de taille représentative.

- Le **Chapitre 4 combine le solveur multiphysique introduit au chapitre précédent à l'approche PGD espace-temps** pour résoudre des problèmes paramétrés. Cette dernière approche a été jusqu'alors exploitée uniquement pour des problèmes monophysiques. La stratégie développée dans ce chapitre permet ainsi de générer efficacement un modèle réduit *multiphysique* sur un espace de paramètres. Dans un premier temps, les similarités entre solutions associées à des valeurs de paramètres différentes, qui motivent l'approche mise en œuvre, seront mises en lumière dans le cas d'un paramètre matériau influençant le couplage. Des développements originaux exploitent la modularité offerte par le solveur LATIN-PGD multiphysique pour cibler l'enrichissement de la solution selon les physiques lors du parcours de l'espace des paramètres. Des illustrations basées sur les deux cas tests introduits au chapitre précédent mettront en avant les points forts de l'approche proposée. En particulier, une réduction de temps de calcul significative est observée par rapport à une approche naïve dans une étude à deux paramètres matériau portant sur le cas test quasi-industriel à plus de deux millions de degrés de liberté.

Les **conclusions et perspectives** de ce travail sont présentées dans une dernière section.

1

État de l'art sur la résolution de problèmes multiphysiques couplés paramétrés

Ce chapitre dresse un état de l'art des outils mathématiques et numériques pour la résolution efficace de problèmes paramétrés multiphysiques. Parmi les manières d'aborder un problème dépendant de paramètres, on présente tout particulièrement les techniques de réduction de modèle couramment utilisées en mécanique. Les spécificités de la résolution des problèmes multiphysiques fortement couplés, sur lesquels porte ce manuscrit, sont ensuite abordées. Enfin, les travaux de la littérature appliquant la réduction de modèle à ces problèmes multiphysiques (potentiellement paramétrés) sont recensés.

Sommaire

1	Résolution de problèmes paramétrés	10
1.1	Écriture générique d'un problème paramétré	10
1.2	Résolution à l'aide de modèles de substitution	11
1.3	Résolution à l'aide de modèles réduits	13
2	Méthodes de réduction de modèle (ROM)	14
2.1	Proper Orthogonal Decomposition (POD)	15
2.2	Méthode Reduced Basis (RB)	17
2.3	Proper Generalized Decomposition (PGD)	19
3	Résolution de problèmes multiphysiques	24
3.1	Classification des problèmes multiphysiques couplés	24
3.2	Approche monolithique	26
3.3	Approches partitionnées	28
3.4	Approche partitionnée basée sur la méthode LATIN	32
4	Application des méthodes de ROM à des problèmes multiphysiques	35
4.1	Méthodes <i>a posteriori</i>	36
4.2	Méthodes <i>a priori</i>	38
➤	Bilan du chapitre	39

1 Résolution de problèmes paramétrés

L'optimisation d'une conception [ABISSET-CHAVANNE & CHINESTA, 2013; NACHAR et al., 2020b; DEMO et al., 2020], l'identification de paramètres incertains à partir de données expérimentales [NADAL et al., 2015; LARION et al., 2022], le contrôle en temps réel basé sur la synergie entre simulations et mesures¹ [GHNATIOS et al., 2012; MARCHAND et al., 2016; RUBIO et al., 2019], ou encore la construction d'abaques virtuels [LU et al., 2018; VITSE et al., 2019] constituent des thématiques majeures en ingénierie. Toutes ces problématiques conduisent à la résolution répétée d'un même problème pour un grand nombre de variables d'entrée ou de configurations; c'est ce qu'on qualifiera de problème paramétré. Des stratégies dédiées, abordées dans cette section, sont alors requises pour maintenir un coût de calcul acceptable voire satisfaire la contrainte de réponse en temps réel. Les différentes approches résultent d'un compromis entre richesse de la solution obtenue et coût de calcul.

1.1 Écriture générique d'un problème paramétré

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) supposé borné et régulier, de frontière $\partial\Omega$, et soit un intervalle temporel $I \subset \mathbb{R}^+$. On s'intéresse à la solution u d'un problème satisfaisant une équation aux dérivées partielles représentative du problème physique étudié. En général, le champ u recherché dépend de la variable spatiale $\underline{x} \in \Omega$, du temps $t \in I$ et d'un certain nombre de paramètres $\underline{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$, où $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_p$ désigne leur domaine borné de variation. Ces paramètres englobent toute donnée susceptible de modifier la solution du problème de référence : caractéristiques matériaux, données de chargement, paramètres géométriques, etc. Le champ solution est donc de la forme : $u = u(\underline{x}, t; \underline{\mu})$.

Problème paramétré. Le champ $u(\underline{x}, t; \underline{\mu})$, recherché dans un espace fonctionnel adapté \mathcal{W} , est la solution d'un problème s'écrivant de manière générique :

$$\mathcal{L}(u, t; \underline{\mu}) = 0, \quad (1.1)$$

avec des conditions initiales $u(\underline{x}, t = 0; \underline{\mu}) = u_0(\underline{x}; \underline{\mu})$ et des conditions aux limites adaptées. Dans le cas où \mathcal{L} représente une équation aux dérivées partielles du second ordre, on a $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$, où $\mathcal{H}^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable sur Ω et dont le gradient est de carré intégrable.

La solution exacte du problème (1.1) dans l'espace de dimension infinie \mathcal{W} est généralement hors de portée. Une approximation en est alors classiquement recherchée dans un espace $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ de dimension n finie, construit par la méthode des éléments finis (MEF).

Résolution directe du problème paramétré. Une approche directe (également dite de « force brute »), qui consiste à résoudre indépendamment les problèmes pour chacun des jeux de paramètres $\underline{\mu}$, conduit rapidement à un coût de calcul prohibitif. En effet, si l'on note :

- n_x le nombre de degrés de liberté spatiaux du problème,

1. On parle de *Dynamic Data Driven Applications Systems* (DDDAS)

- n_t le nombre d'instants temporels dans I ,
- n_p le nombre de points utilisés pour discrétiser chaque paramètre μ_i dans son intervalle \mathcal{D}_i associé, avec $i = \{1, \dots, p\}$,

alors l'utilisation d'une approche directe conduirait à la résolution de $n_t \times (n_p)^p$ problèmes éléments finis de taille $n_x \times n_x$. Le nombre de degrés de liberté n_x pouvant être grand, de l'ordre de plusieurs millions pour les problèmes industriels, le temps de calcul associé à cette approche est rédhibitoire. De plus, le coût de calcul augmente de façon exponentielle avec le nombre p de paramètres; on parle de « malédiction de la dimension ».

Dès lors, des stratégies de calcul permettant de pallier ce verrou sont nécessaires. Elles résultent d'un compromis entre précision (par rapport à la solution directe qualifiée de *haute fidélité*), coût de calcul, et richesse de l'information fournie en sortie. Les approches détaillées dans les sections suivantes correspondent à des choix différents au sens de ce compromis et répondent à des besoins différents.

1.2 Résolution à l'aide de modèles de substitution

Une première approche, lorsqu'on ne s'intéresse qu'à certaines grandeurs de sortie clairement identifiées, consiste à s'appuyer sur des modèles de substitution (ou *métamodèles*) qui peuvent être vus comme des « boîtes noires » remplaçant le problème de départ. Une fois construit, ce métamodèle peut être utilisé en temps réel par l'ingénieur et fournit la valeur des quantités d'intérêt scalaires associées à un nouveau jeu de paramètres d'entrée $\underline{\mu}^* \in \mathcal{D}$. On distingue donc une phase *offline* durant laquelle le modèle de substitution est construit, de son utilisation intensive *online*, comme schématisé sur la Figure 1.1.

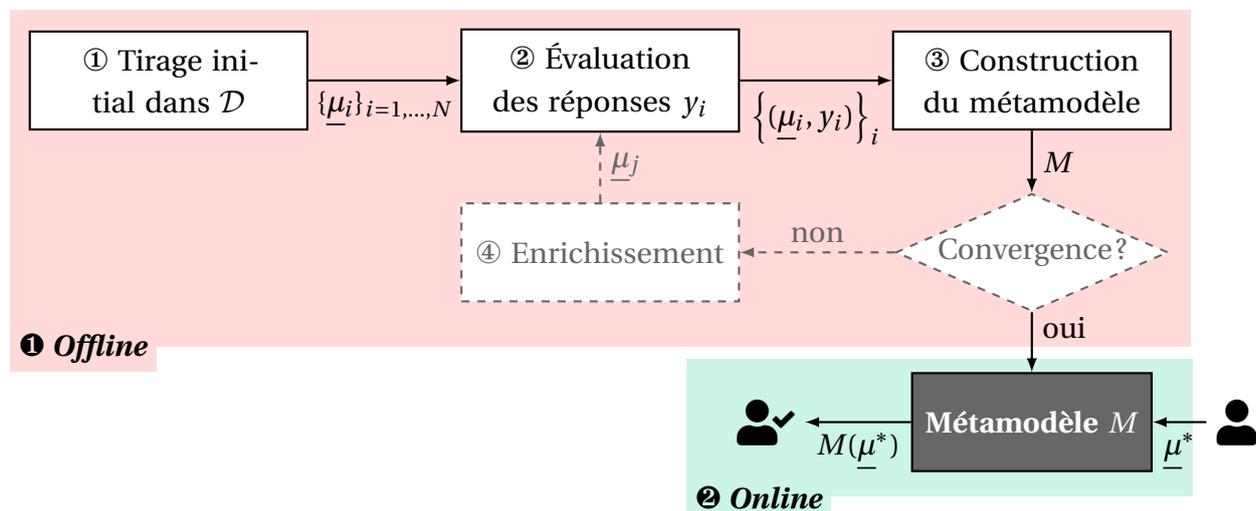


FIGURE 1.1 • Représentation schématique du processus d'élaboration *offline* et d'utilisation *online* d'un métamodèle

On propose dans la suite un bref aperçu des étapes de construction d'un métamodèle, listées dans la Figure 1.1, et des méthodes les plus communément utilisées, sans viser l'exhaustivité. Pour des informations plus détaillées, on pourra par exemple se référer à l'ouvrage de [FORRESTER et al., 2008].

Construction du métamodèle. La construction du métamodèle nécessite quelques évaluations de la quantité d'intérêt scalaire, que l'on notera $y \in \mathbb{R}$, pour certains points $\underline{\mu}_i \in \mathcal{D}$ dans l'espace des paramètres. La première étape (numérotée ① sur la Figure 1.1) consiste à choisir judicieusement un ensemble de jeux de paramètres $\{\underline{\mu}_i\}_{i=1,\dots,N}$ dans l'espace \mathcal{D} . Pour que ce tirage initial permette de construire un modèle de substitution représentatif de la quantité d'intérêt à approximer, tout en maintenant un coût de calcul raisonnable, il est essentiel de couvrir au mieux l'espace \mathcal{D} avec un minimum de points. Une multitude de stratégies d'échantillonnage existent dans la littérature, dont les plus connues sont les méthodes de type plans d'expériences (*Design of Experiments*) [MYERS et al., 2016] et la technique *Latin Hypercube Sampling* (LHS) [MCKAY et al., 1979].

L'étape suivante (② sur la Figure 1.1) nécessite l'appel à un solveur pour déterminer la solution $u(\underline{x}, t; \underline{\mu}_i)$ au problème paramétré (1.1) pour les jeux de paramètres $\{\underline{\mu}_i\}_{i=1,\dots,N}$ déterminés par la stratégie de tirage. Pour chacun, la quantité d'intérêt y_i est généralement obtenue par post-traitement de la solution $u(\underline{x}, t; \underline{\mu}_i)$.

Une fois le tirage de points dans l'espace de conception \mathcal{D} effectué et les réponses associées obtenues, on dispose d'un ensemble de N couples entrée-sortie $\{(\underline{\mu}_i, y_i)\}_{i=1,\dots,N}$ constituant l'échantillon d'apprentissage. Il est donc possible de construire le métamodèle (étape ③). À nouveau, le panorama des méthodologies disponibles est très vaste. On peut citer la régression par processus gaussiens (aussi connue sous le nom de krigeage) [KRIGE, 1951; SACKS et al., 1989], l'utilisation de fonctions de bases radiales (RBF) [HARDY, 1971; POWELL, 1981], ou encore les réseaux de neurones [McCULLOCH & PITTS, 1943; ROSENBLATT, 1958]. Cette phase de construction implique le choix d'un certain nombre d'opérateurs et de paramètres, spécifiques au type de métamodèle utilisé.

Une fois le métamodèle obtenu, il peut être utilisé pour fournir à un coût extrêmement faible (sans appel au solveur) une prédiction de la quantité d'intérêt $M(\underline{\mu}^*)$ pour un point quelconque $\underline{\mu}^*$ de \mathcal{D} .

Améliorations possibles. Une première extension à la stratégie de base présentée au paragraphe précédent consiste à introduire une procédure d'enrichissement [TEIXEIRA et al., 2021] (étape optionnelle ④ sur la Figure 1.1). Cette étape permet d'enrichir le métamodèle déjà généré en ajoutant séquentiellement des observations additionnelles qui complètent l'ensemble initial. La sélection de nouveaux points peut viser soit à améliorer globalement la capacité d'estimation du métamodèle sur l'ensemble de l'espace \mathcal{D} , soit à enrichir spécifiquement les zones proches d'un potentiel extremum dans le cadre d'une démarche d'optimisation.

Une autre amélioration de la méthode se base sur la prise en compte de données multi-fidélité, c'est-à-dire de qualités variées [FORRESTER et al., 2006; NACHAR et al., 2020a]. En effet, lors de la génération du métamodèle, il n'est pas nécessaire d'avoir des solutions haute fidélité pour l'ensemble des observations. Afin d'obtenir une première idée de l'évolution de la quantité d'intérêt dans l'espace des paramètres, un modèle basse fidélité peut être suffisant. Cette solution basse fidélité peut résulter de l'utilisation de modèles plus simples (linéarisés, poutre, etc.), de maillages grossiers, ou de résultats partiellement convergés.

1.3 Résolution à l'aide de modèles réduits

Pour répondre à la problématique de résolution de problèmes complexes semblables au cours d'une étude paramétrique, l'approche par modèles d'ordre réduit (MOR) permet, contrairement aux métamodèles ne fournissant que certaines quantités d'intérêt prédéfinies, d'avoir accès aux champs solutions complets du problème (ou une approximation de ceux-ci) pour l'ensemble des valeurs des paramètres. L'information fournie est donc plus riche, et permet de s'adapter aux besoins de post-traitement potentiellement évolutifs de l'industriel.

Principe. Les méthodes de réduction de modèle (*Reduced-Order Modeling* (ROM) en anglais) exploitent le fait que la réponse d'un modèle complexe (ou d'une famille de modèles semblables) peut souvent être estimée avec une précision satisfaisante à l'aide d'un petit nombre de degrés de liberté. Fort de ce constat, il s'agit alors de rechercher la solution du problème paramétré dans une base de dimension réduite, dont la combinaison linéaire des vecteurs permet de représenter la solution pour n'importe quelles valeurs des paramètres. Le défi repose bien évidemment sur le choix pertinent des vecteurs de base générant cet espace de faible dimension.

Q Remarque 1.1

La dénomination française de *réduction de modèle* peut prêter à confusion. En effet, il ne s'agit pas de réduire la complexité du modèle initial, par exemple en adoptant une modélisation de type plaque ou poutre, ou en négligeant certains couplages entre physiques. La richesse du modèle mathématique est conservée; c'est la dimension de l'espace dans lequel la solution est recherchée qui est réduite.

Les méthodes de ROM basées sur la séparation des variables consistent à rechercher la solution au problème (1.1) sous la forme d'une somme finie de m produits d'une fonction de l'espace Φ_i pondérée par une fonction dépendant du temps et des éventuels paramètres :

$$u(\underline{x}, t; \underline{\mu}) \approx u_m(\underline{x}, t; \underline{\mu}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t, \underline{\mu}) \Phi_i(\underline{x}). \quad (1.2)$$

Nous verrons plus loin que les fonctions $\alpha_i(t, \underline{\mu})$ sont parfois elles-mêmes décomposées sous une forme à variables séparées. L'approximation introduite au niveau de la représentation des inconnues est directement liée à l'ordre de troncature m , que l'on souhaite avoir tel que $m \ll n$ afin de réduire significativement les temps de calcul par rapport à une résolution directe avec la MEF. Plutôt que de considérer ces fonctions connues *a priori* (polynômes de Legendre ou de Chebychev, fonctions trigonométriques, séries de Fourier, etc.), les méthodes de ROM consistent à trouver la « meilleure » décomposition possible pour le problème traité.

Existence d'un bon espace d'approximation. Une décomposition de la forme de l'équation (1.2) est pertinente lorsque l'ensemble \mathcal{M} des solutions exactes pour toutes les valeurs de paramètres, défini par

$$\mathcal{M} = \{u(\underline{\mu}) \text{ vérifiant (1.1)}, \underline{\mu} \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{W}, \quad (1.3)$$

peut être représenté avec une bonne précision à l'aide d'un nombre de modes m réduit. Du point de vue mathématique, la notion d'*épaisseur de Kolmogorov* [KOLMOGOROFF, 1936] permet d'appréhender ce point. La m -épaisseur de Kolmogorov, définie suivant l'équation

$$d_m(\mathcal{M}) = \inf_{\mathcal{W}_m \subset \mathcal{W}} \left[\sup_{u \in \mathcal{M}} \left(\inf_{u_m \in \mathcal{W}_m} \|u - u_m\|_{\mathcal{W}} \right) \right], \quad (1.4)$$

permet de quantifier la façon selon laquelle l'ensemble de dimension infinie \mathcal{M} peut être approché par un sous-espace de \mathcal{W} de dimension m , noté \mathcal{W}_m . La Figure 1.2 propose une représentation graphique des différents espaces intervenant dans l'équation (1.4).

Une épaisseur de Kolmogorov petite signifie que $\mathcal{W}_m \equiv \text{Vect}\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,m}$ fournit une assez bonne connaissance de l'espace entier des solutions \mathcal{M} . Les méthodes de ROM sont donc particulièrement adaptées aux problèmes pour lesquels d_m décroît rapidement à mesure que la dimension m de l'espace \mathcal{W}_m augmente.

En pratique, sauf dans quelques rares cas particuliers, il n'est pas possible de calculer cette épaisseur de Kolmogorov; la recherche du sous-espace vectoriel optimal \mathcal{W}_m est donc infaisable. L'application des méthodes de réduction de modèle repose alors sur des algorithmes susceptibles de fournir un sous-espace vectoriel proche du sous-espace optimal. La décomposition sous la forme d'une somme finie de fonctions à variables séparées (1.2) n'étant pas unique, les différentes méthodes de réduction de modèle diffèrent par la manière de construire cette décomposition. Les méthodes les plus communes sont présentées dans la section suivante.

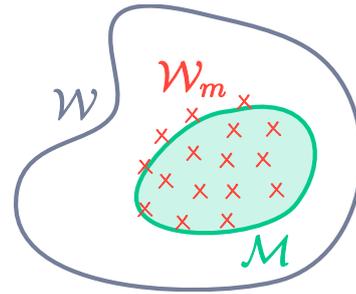


FIGURE 1.2 • Illustration des espaces intervenant dans la définition de l'épaisseur de Kolmogorov

2 Méthodes de réduction de modèle (ROM)

Cette section présente succinctement les méthodes de réduction de modèle les plus couramment utilisées en mécanique pour la résolution de problèmes paramétrés définis par des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ce type de problème s'écrit de manière générique sous la forme de l'équation (1.1). L'application de ces techniques à des problèmes multiphysiques fait l'objet de la Section 4 de ce chapitre.

Parmi les méthodes développées dans la suite, deux catégories sont classiquement distinguées : les méthodes *a posteriori* et *a priori*. Cette classification porte sur la manière dont est construite la base réduite. Les méthodes *a posteriori* construisent la base réduite en exploitant les résultats de calculs haute fidélité balayant l'espace paramétrique dans une phase d'apprentissage dite *offline*. Une fois cette base générée, le problème initial y est projeté, permettant d'obtenir des solutions pour de nouveaux jeux de paramètres à moindre coût durant une phase d'utilisation dite *online*. À l'inverse, les méthodes *a priori* permettent de calculer directement la solution du problème d'intérêt, et le modèle réduit associé, sans nécessiter la résolution préalable de problèmes connexes.

2.1 Proper Orthogonal Decomposition (POD)

La dénomination POD regroupe différentes techniques proposées dans des domaines d'application variés et connues sous les noms de décomposition de Karhunen-Loève [LOÈVE, 1955; KARHUNEN, 1947], analyse en composantes principales [PEARSON, 1901; JOLLIFFE, 2011] ou décomposition en valeurs singulières (*Singular Values Decomposition*, SVD) [STEWART, 1993]. L'équivalence entre toutes ces méthodes en dimension finie et en considérant la norme \mathcal{L}^2 a été démontrée par différentes approches dans [LIANG et al., 2002; WU et al., 2003].

La POD consiste à construire une base orthonormée de vecteurs ordonnés tels qu'un ensemble de données (expérimentales ou issues de simulations) peut être exprimé de manière optimale (par rapport à une certaine norme) en utilisant les m premiers vecteurs de base [CHATTERJEE, 2000]. Il s'agit donc de « compresser » une quantité d'information importante tout en conservant les phénomènes prépondérants. La POD est largement utilisée en mécanique pour le développement de techniques de réduction de modèle [LU et al., 2019; GRÄSSLE et al., 2021], dont les premières applications remontent à la fin des années 1960 [LUMLEY, 1967]. Ces méthodes comportent deux phases, qui sont représentées sur la Figure 1.3 et détaillées dans la suite :

- ❶ Phase *offline* : construction de la base réduite à partir de simulations haute fidélité,
- ❷ Phase *online* : utilisation de cette base pour déterminer une solution approchée pour un nouveau jeu de paramètres à faible coût.

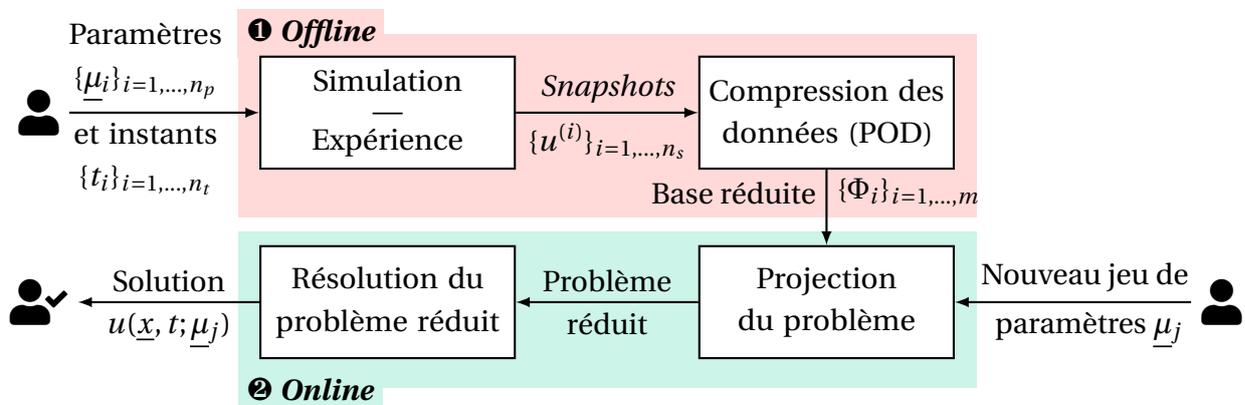


FIGURE 1.3 • Principe des méthodes de projection basées sur la POD

❶ **Construction de la base réduite.** La première phase d'apprentissage, dite *offline*, consiste à construire par application de la POD la famille orthonormée $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,m}$ génératrice d'un espace de faible dimension \mathcal{W}_m approximant l'espace des solutions \mathcal{M} . Pour ce faire, on se munit d'un ensemble d'observations, usuellement appelées *snapshots*, issues de données expérimentales ou de solutions numériques haute fidélité calculées par la méthode des éléments finis par exemple. Ces $n_s > m$ *snapshots*, notés $\{u^{(k)}\}_{k=1,\dots,n_s}$, correspondent à des réalisations obtenues pour n_p jeux de paramètres spécifiques $\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_{n_p}$ et à n_t instants t_1, \dots, t_{n_t} (avec $n_s = n_p \times n_t$). On espère que ces observations soient suffisamment représentatives de l'espace des solutions \mathcal{M} .

Parmi l'ensemble de ces *snapshots*, on cherche ensuite à déceler la structure de rang faible sous-jacente de la forme (1.2). La POD fournit une base orthonormée qui représente l'ensemble de *snapshots* de manière optimale au sens des moindres carrés. La POD à l'ordre m revient alors à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,m} = \arg \min_{\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle = \delta_{ij}} \sum_{k=1}^{n_s} \left\| \mathbf{u}^{(k)} - \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{u}^{(k)}, \Psi_i \rangle \Psi_i \right\|_{\mathcal{W}}^2 \quad (1.5)$$

où la notation $\langle \bullet, \bullet \rangle$ représente un produit scalaire de \mathcal{W} et $\|\bullet\|$ la norme associée. Cette décomposition est optimale au sens de la norme $\|\bullet\|$ dans la mesure où elle minimise la distance au jeu d'observations pour un ordre m de décomposition donné [CHATTERJEE, 2000].

En concaténant l'ensemble des observations semi-discrétisées en espace $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k=1,\dots,n_s}$ – correspondant à des jeux de paramètres et instants particuliers – on définit la matrice des observations $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_s}$:

$$\mathbf{X} \equiv \text{Col}(\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n_s)}) = \left[\mathbf{u}(t_1, \underline{\mu}_1) \mid \dots \mid \mathbf{u}(t_{n_t}, \underline{\mu}_1) \mid \dots \mid \mathbf{u}(t_1, \underline{\mu}_{n_p}) \mid \dots \mid \mathbf{u}(t_{n_t}, \underline{\mu}_{n_p}) \right], \quad (1.6)$$

ainsi que sa matrice d'auto-corrélation $\mathbf{S} \equiv \mathbf{X}\mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$. On peut montrer que le problème de minimisation (1.5) est équivalent à la résolution d'un problème aux valeurs propres [GRÄSSLE et al., 2021]. La base orthonormée $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,m}$ correspond aux m premiers vecteurs propres de la matrice \mathbf{S} . Il est également possible de construire cette base à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice des observations \mathbf{X} . Néanmoins, dans le cas – courant pour les problèmes de mécanique – où $n_s \ll n_x$, il est plus avantageux de déterminer les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{X}^T\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$, dont on peut également déduire la famille génératrice $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,m}$ (voir [CHATTERJEE, 2000]).

② Utilisation du modèle réduit. Cette seconde phase consiste à déterminer les amplitudes $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,m}$ associées aux fonctions $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,m}$ de la décomposition (1.2) pour de nouveaux jeux de paramètres $\underline{\mu}$. Pour ce faire, une première façon de procéder est d'interpoler l'espace paramétrique (par exemple avec un réseau de neurones [SHAH et al., 2022]), tandis qu'une autre possibilité consiste à projeter les équations du problème sur la base réduite pour former un système de petite taille. Les deux approches ont été comparées dans [WANG et al., 2012]. L'utilisation d'une technique de projection s'est avérée plus robuste, c'est pourquoi on se concentre sur cette approche dans la suite.

Pour fixer les idées, considérons un problème d'évolution semi-discrétisé en espace, de la forme classique

$$\mathbf{C}(\underline{\mu})\dot{\mathbf{u}}(t, \underline{\mu}) + \mathbf{K}(\underline{\mu})\mathbf{u}(t, \underline{\mu}) = \mathbf{f}(t, \underline{\mu}). \quad (1.7)$$

En introduisant la matrice des fonctions de base discrétisées $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_m]$, de taille $n_x \times m$, le champ solution est approximé sous la forme :

$$\mathbf{u}(t, \underline{\mu}) \approx \Phi \boldsymbol{\alpha}(t, \underline{\mu}), \quad (1.8)$$

où $\boldsymbol{\alpha}(t, \underline{\mu})$ est le vecteur des m coefficients inconnus de la décomposition (1.2).

L'approche POD-Galerkin consiste à projeter l'équation du problème (1.7) sur la base réduite issue de l'application de la POD. Une alternative consiste à projeter l'équation (1.7) sur d'autres fonctions de base que celles issues de la POD; on parle alors de POD-Petrov-Galerkin, qui peut avoir de meilleures propriétés de stabilité et de précision [COLLINS et al., 2020]. La méthode POD-Galerkin mène à la résolution du système suivant, d'inconnue $\alpha(t, \underline{\mu})$ et pour $\underline{\mu} \in \mathcal{D}$ donné :

$$\underbrace{\left[\Phi^T \mathbf{C}(\underline{\mu}) \Phi \right]}_{\mathbf{K}_m(\underline{\mu})} \dot{\alpha}(t, \underline{\mu}) + \underbrace{\left[\Phi^T \mathbf{K}(\underline{\mu}) \Phi \right]}_{\mathbf{C}_m(\underline{\mu})} \alpha(t, \underline{\mu}) = \underbrace{\left[\Phi^T \mathbf{F}(t, \underline{\mu}) \right]}_{\mathbf{F}_m(t, \underline{\mu})}. \quad (1.9)$$

Le problème (1.9), à résoudre à chaque pas de temps pour déterminer les coefficients $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, m}$, est de taille $m \times m$. Sa résolution est bien plus rapide que le système haute fidélité de taille $n_x \times n_x$ puisqu'en général on a $m \ll n_x$.

Discussion. Pour garantir l'efficacité de la méthode, il est essentiel que la construction du modèle réduit projeté ne nécessite pas elle-même un coût trop important, ou ne doive pas être répétée à maintes reprises. Cela fonctionne très bien lorsqu'une dépendance affine aux paramètres existe. Dans le cas contraire, ou plus généralement en présence de non-linéarités, l'évaluation des matrices du problème réduit (1.9) s'avère coûteuse. Des techniques d'hyper-réduction sont alors préférées [RYCKELYNCK, 2005; FARHAT et al., 2021]. Les méthodes basées sur la POD sont donc particulièrement adaptées lorsqu'un même modèle réduit est utilisé de manière intensive durant la phase *online*, permettant d'amortir le coût de la première phase d'apprentissage (e.g., [QUESADA et al., 2021]).

Un autre point de vigilance concerne le choix des *snapshots*, dont la pertinence affecte directement la qualité de la solution finale. En effet, c'est leur analyse qui permet de construire, avec une certaine précision, une base réduite représentative des phénomènes physiques observés. La base générée ne pourra pas contenir d'information qui n'est pas présente dans les *snapshots*. Par exemple, dans un problème d'évolution temporelle, si toutes les observations sont issues du régime stationnaire, la base construite par POD représentera mal le régime transitoire. La méthode Reduced Basis, abordée dans la sous-section suivante, propose une réponse à cette difficulté.

2.2 Méthode Reduced Basis (RB)

Tout comme la méthode POD-Galerkin, la méthode Reduced Basis (RB) [MADAY & RØNQUIST, 2002; ROZZA et al., 2007] repose sur la construction *offline* d'une base réduite sur laquelle le problème est ensuite projeté afin d'en réduire la dimension. Cependant, elle s'en distingue en proposant une procédure pour la sélection automatique des *snapshots* à partir desquels cette base est construite, permettant ainsi de pallier un des inconvénients majeurs des méthodes basées sur la POD. Ce choix ciblé de jeux de paramètres permet de limiter le nombre de solutions haute fidélité à évaluer. La procédure globale de la méthode RB, détaillée dans la suite, est schématisée sur la Figure 1.4.

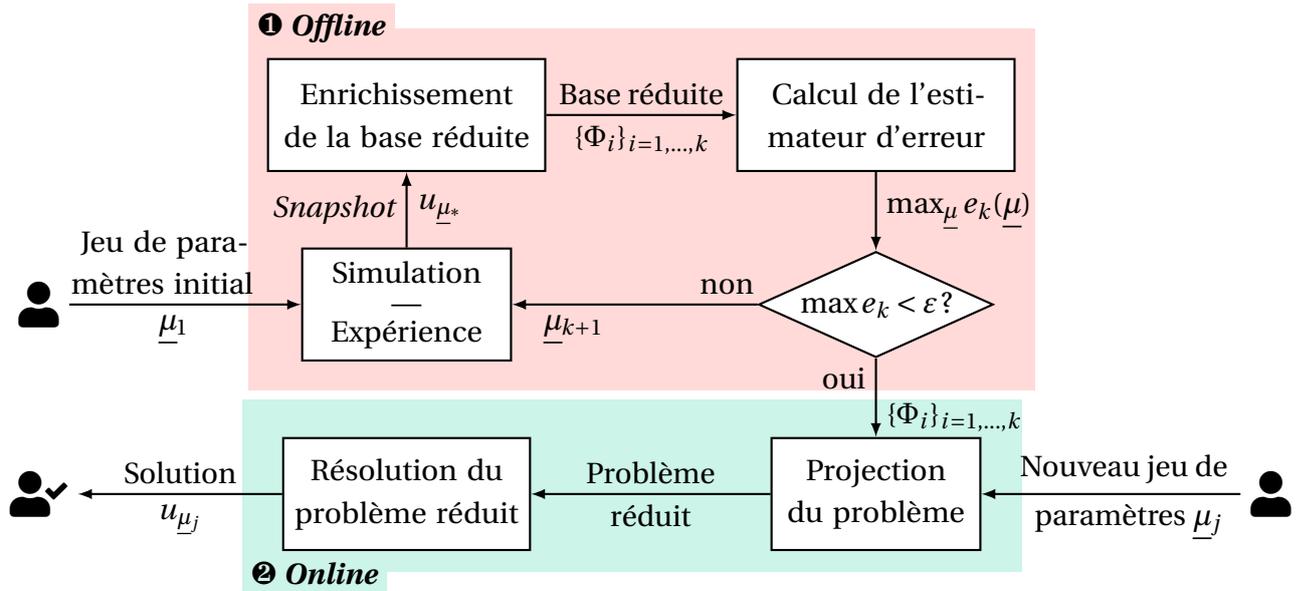


FIGURE 1.4 • Principe de la méthode Reduced Basis (RB)

Q Remarque 1.2

Le cas d'un problème d'évolution (défini par une équation parabolique), dans lequel le temps ne peut pas être traité comme les autres paramètres, pose une difficulté supplémentaire dans le cadre de la méthode RB. Cette dépendance au temps implique la résolution d'un problème adjoint auxiliaire à rebours dans le temps [GREPL & PATERA, 2005]. Ces développements ne sont pas abordés ici et on se contentera de présenter la philosophie générale de la méthode sur un problème stationnaire.

La base réduite est construite au moyen d'un algorithme glouton (*greedy* en anglais), qui consiste à l'enrichir progressivement en choisissant à chaque fois le jeu de paramètres qui maximise l'erreur de projection de la solution u sur la base réduite déjà constituée. Cela revient à identifier le jeu de paramètres dont la solution est la moins bien représentée par la base réduite actuelle et à ajouter l'information manquante. La procédure est typiquement initialisée avec un jeu de paramètres $\underline{\mu}_1$ tiré aléatoirement. Si à l'itération k une base réduite $\mathcal{W}_k = \text{vect} \{\Phi_k\}_{i=1,\dots,k}$ est connue, le jeu de paramètres $\underline{\mu}_{k+1}$ est déterminé tel que :

$$\underline{\mu}_{k+1} = \arg \max_{\underline{\mu} \in \mathcal{D}} \underbrace{\|u(\underline{x}, \underline{\mu}) - \Pi_k u(\underline{x}, \underline{\mu})\|}_{e_k}, \quad (1.10)$$

avec Π_k la projection orthogonale sur l'espace \mathcal{W}_k .

Puisque la solution u sur l'ensemble de l'espace paramétrique \mathcal{D} n'est pas connue à l'avance, il faut avoir recours à un *estimateur* de l'erreur de projection. Cet estimateur constitue le point clé de la méthode. Pour assurer sa performance, il doit être à la fois précis – pour choisir le meilleur jeu de paramètres – et peu coûteux, car il devra être évalué pour de nombreux jeux de paramètres $\underline{\mu}$ échantillonnés dans l'espace \mathcal{D} . Le choix le plus courant consiste à utiliser le résidu d'équilibre [PRUD'HOMME et al., 2001 ; ZHANG et al., 2015], mais des estimateurs se focalisant sur des quantités d'intérêt ont aussi été développés récemment

[JANON et al., 2015; LARION et al., 2020]. Cet estimateur est utile *a priori* pour le choix des échantillons, mais également *a posteriori* pour certifier le modèle réduit construit en permettant de quantifier l'erreur commise lors de son utilisation. Pour cette raison, la méthode est également qualifiée de « *Certified Reduced Basis Method* ».

Étant donné que les *snapshots* ont été choisis suivant un cheminement optimal dans l'espace paramétrique, une compression par POD n'est en général pas nécessaire. La base réduite est directement enrichie par la solution $u(\underline{x}, t, \underline{\mu}_{k+1})$ après une étape d'orthonormalisation avec les vecteurs existants de la base \mathcal{W}_k . Une fois que la qualité de la base réduite est considérée comme suffisante, son utilisation en phase *online* ne diffère pas de la méthode POD-Galerkin (voir Figure 1.4).

2.3 Proper Generalized Decomposition (PGD)

Les méthodes de ROM présentées dans les sous-sections précédentes nécessitent une connaissance au moins partielle de la solution du problème multiparamétrique à partir de la résolution de problèmes coûteux. Une autre famille de méthodes de réduction de modèle ne nécessite pas de solution préalable pour construire sa base réduite et s'appuie uniquement sur les équations aux dérivées partielles du modèle. Une base réduite pertinente est alors construite progressivement durant la résolution du problème d'intérêt, jusqu'à atteindre le niveau d'erreur souhaité : c'est l'idée de la PGD.

Q Remarque 1.3

En plus de son utilisation directement pour la résolution d'équations aux dérivées partielles, la PGD peut, comme la POD, compresser des champs connus. Dans le cas d'un champ $u(\underline{x}, t)$ connu sur $\Omega \times I$, la PGD utilisée de manière *a posteriori* consisterait à chercher les familles $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,m}$ et $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,m}$ satisfaisant le problème de minimisation :

$$\{(\lambda_i, \Phi_i)\}_{i=1,\dots,m} = \arg \min_{\mathcal{L}^2(I) \times \mathcal{L}^2(\Omega)} \left\| u(\underline{x}, t) - \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Phi_i(\underline{x}) \right\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, I)}^2 \quad (1.11)$$

avec $\|\bullet\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, I)}^2 = \int_{\Omega \times I} \bullet^2 d\Omega dt$. Contrairement à la POD, l'orthogonalité des fonctions de l'espace n'est pas imposée; c'est pourquoi on recherche également une fonction du temps dans l'équation (1.11). En pratique, une telle approximation est souvent construite par un algorithme glouton, qui fournit une approximation de rang 1 à ajouter à l'approximation existante (de manière similaire à ce qui est développé dans la suite). Cette utilisation de la PGD est mise en œuvre dans [MATRAY et al., 2024].

Initialement introduite sous le nom d'*approximation radiale* [LADEVÈZE, 1985] dans le cadre de la méthode itérative LATIN pour traiter des problèmes non linéaires dépendant du temps, ce n'est que dans les années 2010 que la méthode prend le nom de Proper Generalized Decomposition pour souligner son caractère général, aussi bien dans la forme de la décomposition à variables séparées que dans la variété de ses applications. Une revue complète de la méthode et de ses applications peut être trouvée dans [CHINESTA et al., 2011; CHINESTA & LADEVÈZE, 2021].

Principe général – PGD espace-temps. Dans un premier temps, on omet la dépendance aux paramètres $\underline{\mu} \in \mathcal{D}$ dans l'équation (1.1) de sorte à se concentrer sur les variables de l'espace \underline{x} et du temps t ; c'est dans ce formalisme que la PGD a été introduite dans [LADEVÈZE, 1985]. La résolution de problèmes paramétrés avec la PGD sera abordée ultérieurement. Le problème générique (1.1) sans dépendance aux paramètres s'écrit sous forme variationnelle : trouver $u \in \mathcal{W}$, tel que

$$\forall u^* \in \mathcal{W}_0, \quad a(u, u^*) = \ell(u^*), \quad (1.12)$$

avec a la forme bilinéaire et ℓ la forme linéaire associées à l'équation aux dérivées partielles du problème modélisé. Le champ solution $u(\underline{x}, t)$ est recherché sous la forme d'une somme finie de fonctions de l'espace pondérées par des fonctions du temps :

$$u(\underline{x}, t) \approx u_m(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Phi_i(\underline{x}). \quad (1.13)$$

Chaque produit $\lambda_i(t) \Phi_i(\underline{x})$ est usuellement qualifié de *mode*.

Plutôt que de calculer les m modes simultanément, ce qui garantirait une décomposition optimale sous la forme (1.13) (cf. [NOUY, 2010]) mais serait extrêmement coûteux en pratique, ces derniers sont générés par un algorithme glouton, c'est-à-dire les uns après les autres. Supposons que la décomposition u_k de rang k soit connue. L'approche progressive consiste à rechercher un nouveau couple, noté (λ, Φ) , qui apporte une correction de rang 1 à la décomposition existante, soit :

$$u_{k+1}(\underline{x}, t) = u_k(\underline{x}, t) + \lambda(t) \Phi(\underline{x}). \quad (1.14)$$

Plusieurs variantes ont été proposées dans la littérature pour la construction progressive de la décomposition (1.13) et décrites dans [NOUY, 2010] : Galerkin, Petrov-Galerkin, et minimisation de résidu. Dans la suite, on se concentre sur l'approche Galerkin progressive, qui consiste à prendre le champ test sous la forme :

$$u^*(\underline{x}, t) = \lambda^*(t) \Phi(\underline{x}) + \lambda(t) \Phi^*(\underline{x}). \quad (1.15)$$

Pour éviter d'avoir un problème sur-contraint par la forme imposée du champ solution, la PGD espace-temps se base sur une formulation faible globalisée sur le temps. On cherche alors $u \in \mathcal{L}^2(I, \mathcal{W})$ tel que :

$$\forall u^* \in \mathcal{L}^2(I, \mathcal{W}_0), \quad \int_I a(u, u^*) dt = \int_I \ell(u^*) dt. \quad (1.16)$$

En substituant les formes (1.14) pour le champ inconnu u et (1.15) pour le champ test u^* dans la forme faible intégrée sur le temps (1.16), on obtient deux sous-problèmes couplés, dont on peut exhiber la solution à l'aide d'un algorithme de type point fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_I a(u_k + \lambda \Phi, \lambda^* \Phi) dt = \int_I \ell(\lambda^* \Phi) dt, \quad \forall \lambda^* \in \mathcal{L}^2(I) \\ \int_I a(u_k + \lambda \Phi, \lambda \Phi^*) dt = \int_I \ell(\lambda \Phi^*) dt \quad \forall \Phi^* \in \mathcal{W}_0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda(t) = f(\Phi) \quad (1.17c) \\ \Phi(\underline{x}) = g(\lambda) \quad (1.17d) \end{array} \right.$$

Dans le cas où l'équation (1.12) représente un problème d'évolution, l'équation (1.17c) est une équation différentielle ordinaire, tandis que l'équation (1.17d) implique la résolution d'un problème global sur l'espace, typiquement à l'aide de la méthode des éléments finis. Ces problèmes couplés sont généralement résolus alternativement par une méthode de type point fixe. En pratique, seules quelques itérations sont nécessaires ; une convergence stricte n'est pas requise dans la mesure où l'ajout du couple suivant pourra venir corriger l'éventuelle erreur commise à cette étape.

Contrairement à la POD, aucune contrainte d'orthogonalité n'est imposée lors de la recherche des fonctions spatiales avec la PGD. Néanmoins, une étape d'orthonormalisation par procédé de Gram-Schmidt est usuellement ajoutée pour éviter que la décomposition construite au fil des enrichissements ne contienne des redondances [LADEVÈZE & CHAMOIN, 2011]. Par ailleurs, une étape optionnelle couramment mise en œuvre consiste à mettre à jour les fonctions temporelles calculées jusqu'à présent en considérant les fonctions spatiales fixées. Cette étape, appelée *update*, permet d'améliorer la convergence globale de l'algorithme et est relativement peu coûteuse comparée au calcul d'ajout d'un nouveau mode [NOUY, 2010 ; LADEVÈZE & CHAMOIN, 2011 ; QIN et al., 2016b]. Ces points seront abordés plus en détail durant le Chapitre 3 consacré à la méthode LATIN-PGD.

On s'intéresse à présent à la résolution de problèmes paramétrés de la forme de l'équation (1.1) avec la PGD. Pour cela, deux approches coexistent.

PGD espace-temps-paramètres. Une première manière, introduite dans [PRULIÈRE et al., 2010a], consiste à obtenir explicitement la solution du problème paramétré en introduisant les paramètres comme variables supplémentaires dans la forme de la solution recherchée, au même titre que les variables du temps t et de l'espace \underline{x} :

$$u(\underline{x}, t; \underline{\mu}) \approx u_m(\underline{x}, t; \underline{\mu}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Phi_i(\underline{x}) \prod_{k=1}^p \gamma_i^k(\mu_k). \quad (1.18)$$

On parle de décomposition tensorielle canonique, dont une représentation schématique est proposée sur la Figure 1.5 dans le cas d'un unique paramètre μ .

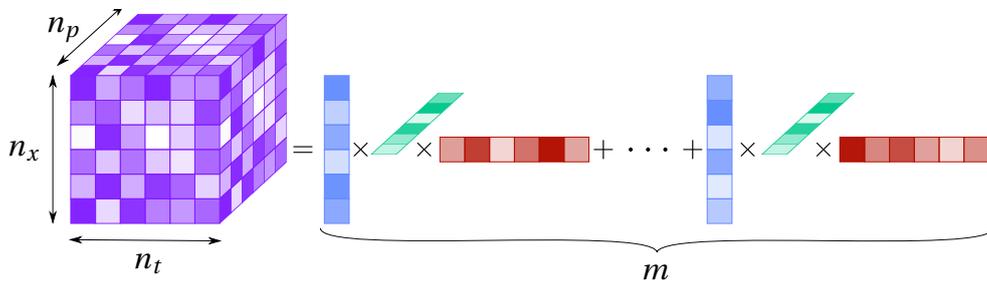


FIGURE 1.5 • Décomposition espace-temps-paramètres (d'après [DABY-SEESARAM, 2023])

La prise en compte de la variabilité des paramètres conduit à affaiblir le précédent problème (1.16) en intégrant également sur l'espace des paramètres :

$$\forall u^* \in \mathcal{L}^2(I, \mathcal{D}, \mathcal{W}_0), \quad \int_{I \times \mathcal{D}} a(u, u^*; \underline{\mu}) dt d\underline{\mu} = \int_{I \times \mathcal{D}} \ell(u^*; \underline{\mu}) dt d\underline{\mu}. \quad (1.19)$$

Les formes linéaire ℓ et bilinéaire a peuvent à présent dépendre des paramètres collectés dans $\underline{\mu}$. À nouveau, le champ test u^* est écrit sous une forme adéquate. On aboutit alors à la résolution d'un certain nombre de problèmes couplés, traités par un algorithme de type point fixe. En plus de l'équation différentielle pour le temps et du problème global en espace, une équation algébrique doit être résolue pour chaque paramètre [CHINESTA et al., 2010].

La solution du problème est alors générée *offline* sur toute la plage de variation des paramètres. Il est ensuite possible d'obtenir la solution approchée pour n'importe quel jeu de paramètres en évaluant simplement la représentation à variables séparées (1.18). Cette approche a déjà fait ses preuves dans de nombreux travaux, par exemple [GHNATIOS et al., 2012; ZLOTNIK et al., 2015; NADAL et al., 2015; VITSE et al., 2019]. La stratégie complète est résumée sur la Figure 1.6.

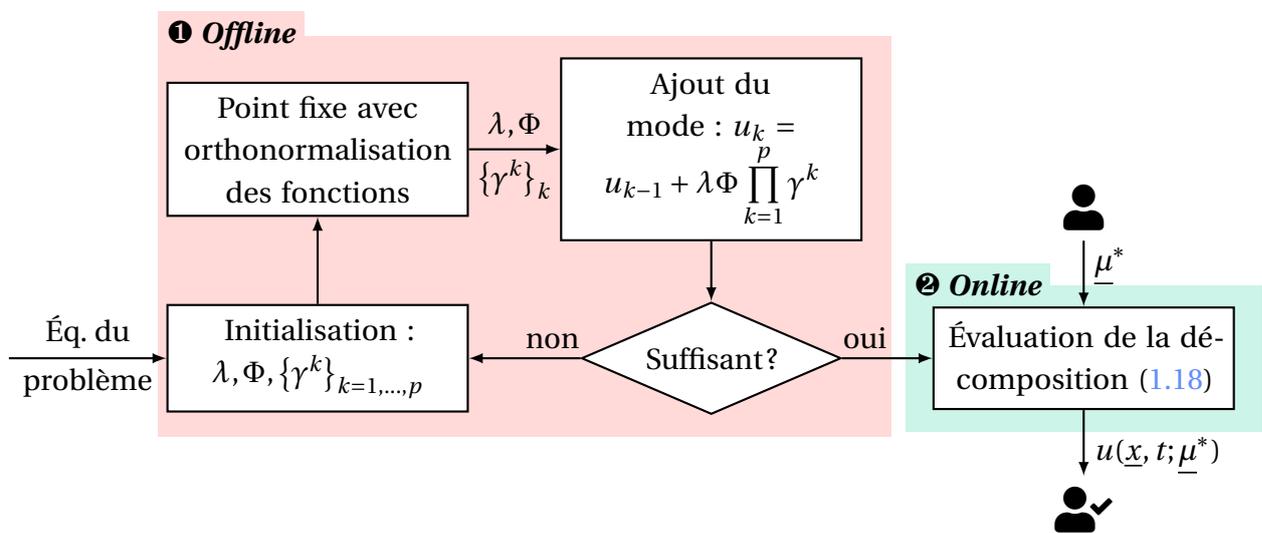


FIGURE 1.6 • Principe de la méthode PGD avec décomposition espace-temps-paramètres

Q Remarque 1.4

L'utilisation *online* du modèle réduit construit par PGD est donc encore plus rapide que dans le cadre des méthodes POD-Galerkin ou RB, dont la phase *online* requiert tout de même la résolution d'un problème, certes de taille réduite. Le modèle réduit espace-temps-paramètres peut être utilisé en temps réel, et se rapproche en ce sens de l'utilisation *online* d'un métamodèle telle que présentée en Section 1.2 à la page 11.

PGD espace-temps pour la résolution de problèmes paramétrés. Une approche alternative pour la résolution de problèmes paramétrés à l'aide de la PGD repose uniquement sur une décomposition espace-temps, à réaliser pour chaque jeu de paramètres $\underline{\mu}$, comme représenté sur la Figure 1.7. Pour être efficace, cette approche doit s'intégrer dans une stratégie de résolution permettant de réutiliser et d'enrichir la base réduite des fonctions spatiales au fil des calculs. Chaque nouvelle simulation, associée à un nouveau jeu de paramètres $\underline{\mu}$, est abordée à l'aide de la base réduite construite lors des calculs précédents et n'est enrichie que si nécessaire.

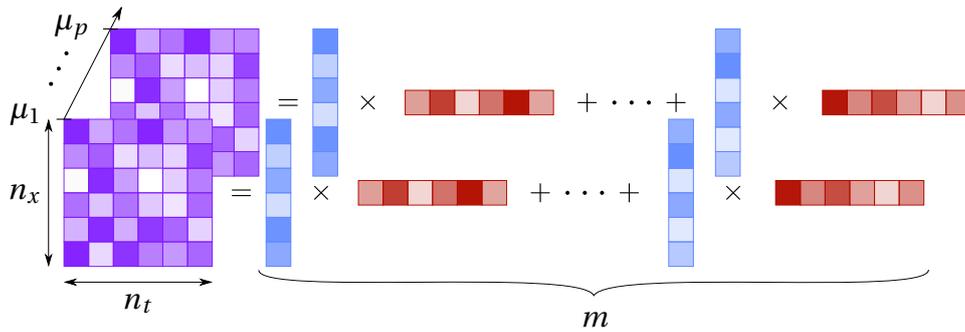


FIGURE 1.7 • Décomposition espace-temps pour chaque valeur de paramètre (d'après [DABY-SEESARAM, 2023])

Une telle stratégie de simulation a été mise en place en utilisant la méthode itérative LATIN [LADEVÈZE, 1985; LADEVÈZE, 1999]. Introduite pour la résolution de problèmes d'évolution mécanique avec des non-linéarités matériaux, cette stratégie se base sur une séparation des équations d'équilibre linéaires et des relations de comportement non linéaires, définissant deux espaces \mathcal{A}_d et Γ , respectivement. La solution est recherchée alternativement dans \mathcal{A}_d et Γ , avec la particularité que chacune de ces solutions intermédiaires est définie sur le domaine espace-temps entier. Dans le cadre d'une étude paramétrique, cette spécificité permet d'initialiser aisément le schéma itératif avec la solution espace-temps d'un calcul précédent, permettant de réduire le nombre d'itérations nécessaires à la convergence [BOUCARD & CHAMPANEY, 2003]. La Figure 1.8 propose une interprétation graphique de la méthode (sous une forme habituellement rencontrée dans la littérature sur la méthode LATIN) dans le cas de deux jeux de paramètres $\underline{\mu}_0$ et $\underline{\mu}_1$ influençant uniquement l'espace Γ . La solution $s_{ref}^{(0)}$ obtenue pour $\underline{\mu}_0$ sert à initialiser le calcul suivant, associé à $\underline{\mu}_1$.

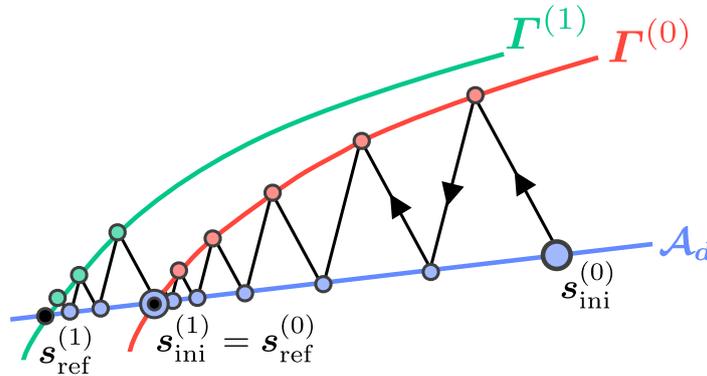


FIGURE 1.8 • Interprétation graphique de la méthode LATIN dans le cadre de deux résolutions d'un problème paramétré (issue de [HEYBERGER, 2014])

La PGD s'intègre naturellement dans la méthode LATIN lors de la recherche d'une solution appartenant à l'espace \mathcal{A}_d . Dans le cadre d'une étude paramétrique, il est donc possible de réutiliser la base réduite générée pour une simulation précédente, ce qui a permis de réduire significativement le temps de calcul dans divers contextes [HEYBERGER et al., 2012; NÉRON et al., 2015; SCANFF et al., 2022; DABY-SEESARAM et al., 2025]. Cette approche est retenue dans les travaux de cette thèse et sera étendue à la résolution de problèmes multiphysiques dans le Chapitre 4, dans lequel elle sera abordée plus en détails.

3 Résolution de problèmes multiphysiques

Dans le cadre de cette thèse, chaque jeu de paramètres implique la résolution d'un problème multiphysique couplé, qui traduit les interactions entre plusieurs phénomènes physiques de natures différentes (mécanique, thermique, hydraulique, chimique, électromagnétique, etc.). Cette section se concentre alors sur ce type de problèmes et les méthodes de résolution associées en omettant l'aspect paramétrique.

3.1 Classification des problèmes multiphysiques couplés

On introduit brièvement quelques notions sur les problèmes multiphysiques couplés, afin de préciser le cadre dans lequel s'applique la méthodologie développée dans cette thèse.

Localisation du couplage. Les problèmes multiphysiques peuvent être classés selon la « localisation » de l'interaction entre les différentes physiques, en distinguant un couplage *en surface* ou *en volume* (voir Figure 1.14, page 33, pour une représentation graphique). Dans le cas d'un couplage en surface, les différents phénomènes physiques se déroulent sur des domaines distincts qui partagent uniquement une frontière commune (aussi appelée *interface*), sur laquelle a lieu le couplage. Un exemple classique est celui de l'interaction fluide-structure en aéroélasticité (voir Figure 1.14a). La seconde catégorie regroupe les problèmes avec recouvrement partiel ou total des domaines associés à chaque phénomène physique, le couplage ayant lieu à travers les équations gouvernant ces différents phénomènes. On peut notamment citer les cas des matériaux piézoélectriques [QIN et al., 2016b], de la thermoélasticité [MARTINS et al., 2017; AHN et al., 2022; VILA-CHÃ et al., 2023] ou encore de l'interaction fluide-structure dans les milieux poreux [WHITE et al., 2016; NASIKA et al., 2023].

Force du couplage. Une autre distinction porte sur la nature des interactions entre physiques (mono- ou bidirectionnelles). En guise d'illustration, considérons un problème multiphysique couplé en volume à deux champs. Il s'agit alors de trouver $u_1 : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}$, $u_2 : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$ définis sur le même domaine espace-temps, avec d_1, d_2 qui peuvent chacun valoir 1 dans le cas d'un champ scalaire ou $d = 1, 2, 3$ pour un champ vectoriel.

On parle de *couplage faible* ou *monodirectionnel* lorsque l'un des champs inconnus peut être déterminé indépendamment de l'autre en résolvant une équation de la forme :

$$\mathcal{L}_1(u_1) = f_1 \quad \text{sur } \Omega \times I. \quad (1.20)$$

La solution u_1 est ensuite utilisée pour résoudre l'équation aux dérivées partielles associée à la deuxième physique :

$$\mathcal{L}_2(u_1, u_2) = f_2 \quad \text{sur } \Omega \times I. \quad (1.21)$$

Nous nous plaçons dans le cas d'un *couplage fort*, ou *bidirectionnel*, dans lequel chaque physique a une influence sur l'autre. Le problème à résoudre, dicté par les lois de la physique, se présente sous la forme d'un système couplé d'équations aux dérivées partielles, qui s'écrit de la manière générique :

Trouver $(u_1, u_2) \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$ tel que :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(u_1, u_2) = f_1 & \text{sur } \Omega \times I, \\ \mathcal{L}_2(u_1, u_2) = f_2 & \text{sur } \Omega \times I, \end{cases} \quad (1.22a)$$

$$(1.22b)$$

avec les conditions aux limites et initiales pour que le problème soit bien posé.

Dans le cas d'un couplage fort, des techniques de résolution dédiées sont requises. On distingue habituellement deux stratégies pour la résolution d'un tel problème couplé :

- la résolution *monolithique* (ou *directe*);
- la résolution *partitionnée*.

Ces approches et leurs variantes sont abordées dans la suite.

Q Remarque 1.5

Dans la littérature, il est aussi question d'approches *tightly* ou *loosely coupled*, respectivement. Cette dénomination peut porter à confusion, puisque la notion de force de couplage est alors *numérique*, contrairement à la force de couplage *physique*, intimement liée à la physique du problème traité.

Discrétisation. Pour la présentation de ces méthodes, on considère que les équations du problème fortement couplé (1.22) ont été discrétisées en espace et en temps. La discrétisation spatiale est usuellement réalisée par la méthode des éléments finis, bien que des approches alternatives ont également été mises en œuvre sur des problèmes multiphysiques : éléments de frontière en thermo-mécanique [TANAKA et al., 1995], analyse iso-géométrique sur un problème de poro-mécanique [BEKELE et al., 2022].

Dans le cas du couplage générique de deux champs décrit par l'équation (1.22), on aboutit après discrétisation à un système de la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}^{i+1} \quad (1.23)$$

où \square^{i+1} désigne une quantité discrète à l'instant $t_{i+1} \in I$. La matrice \mathbf{A} du système présente une structure par blocs particulière : les sous-matrices \mathbf{A}_{11} et \mathbf{A}_{22} , relatives à la physique 1 et 2 respectivement, représentent des opérateurs monophysiques standard (par exemple la matrice de rigidité mécanique), tandis que les blocs hors diagonale \mathbf{A}_{12} et \mathbf{A}_{21} traduisent le couplage entre les physiques 1 et 2.

Q Remarque 1.6

Dans le cas où \mathcal{L}_1 et/ou \mathcal{L}_2 sont des opérateurs non linéaires, une étape de linéarisation est nécessaire à chaque pas de temps. On se ramène alors à la résolution d'un système linéaire de la forme (1.23) à chaque pas de temps et à chaque itération non linéaire (voir e.g., [VERDUGO & WALL, 2016]).

3.2 Approche monolithique

Une première approche pour résoudre un problème multiphysique consiste à assembler et traiter simultanément l'ensemble des équations couplées du problème. Cela implique de résoudre à chaque pas de temps le système (1.23) complet, d'inconnue le vecteur combiné $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]^T$, tout en respectant les conditions initiales et aux limites. Cette approche, dite *monolithique* ou *directe*, est résumée sur l'algorithme de la Figure 1.9a. Les quantités \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 « avancent » simultanément sur l'intervalle temporel, comme représenté sur la Figure 1.9b.

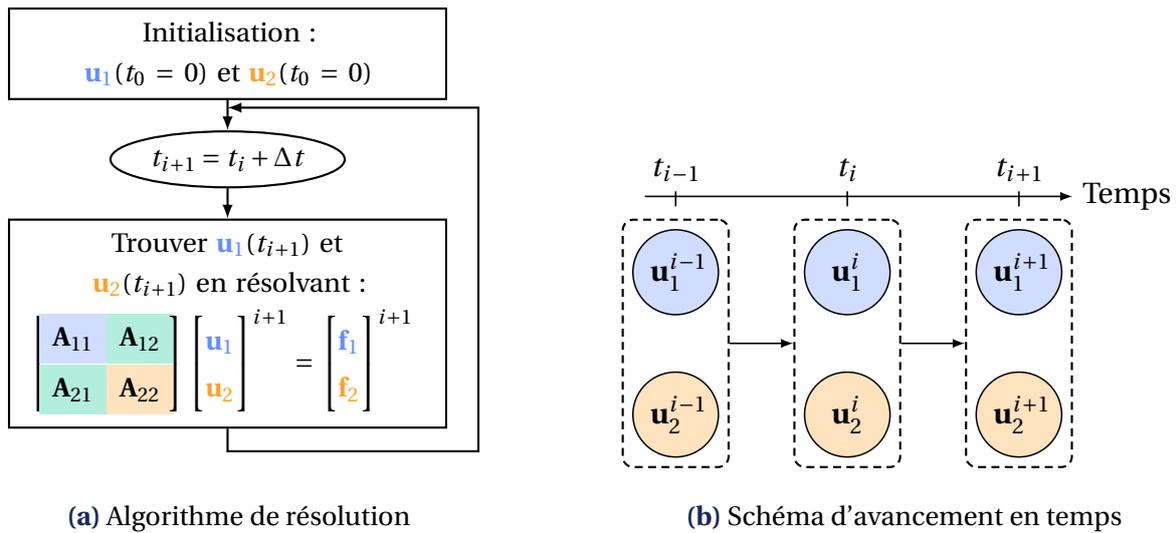


FIGURE 1.9 • Méthode de résolution monolithique

Avantages et inconvénients. L'approche monolithique hérite des propriétés de stabilité du schéma d'intégration en temps utilisé; elle est donc inconditionnellement stable dans le cas d'un schéma implicite. De plus, une bonne robustesse vis-à-vis de paramètres matériaux qui influencent la force du couplage physique a été observée à travers diverses expériences numériques [DANOWSKI et al., 2013; NOVASCONE et al., 2015].

Cette robustesse est acquise au prix de la résolution d'un système d'équations linéaires dont les caractéristiques intrinsèques posent quelques difficultés. En effet, ce système est de grande taille puisqu'il porte sur les degrés de liberté de toutes les physiques en jeu. De plus, il présente une grande largeur de bande et peut être non symétrique en raison des termes de couplage hors diagonale. En outre, les blocs provenant de différentes physiques ont potentiellement des ordres de grandeur très disparates (une différence relative maximale de 10^{21} a été observée sur un problème de thermo-poro-élasticité dans [ORDONEZ et al., 2023]). Cela conduit généralement à un mauvais conditionnement du système, c'est-à-dire une forte sensibilité de la solution numérique aux erreurs d'arrondis des données d'entrée. Ces facteurs rendent la résolution du système (1.23) complexe et coûteuse, constituant le principal défi de l'approche monolithique. Un aperçu des développements pour y répondre est donné ci-après.

Solveurs multigrille. Un premier axe de recherche autour de l'approche monolithique concerne l'utilisation des solveurs multigrilles [BRIGGS et al., 2000]. L'idée est de résoudre

le système (1.23) complet sur une hiérarchie de grilles de plus en plus grossières, typiquement parcourues par un cycle en V, afin d'éliminer progressivement les erreurs associées à différentes longueurs d'ondes. Les premières applications à des problèmes couplés (potentiellement non linéaires) remontent aux travaux de [XICHENG & SCHREFLER, 2003; GASPAR et al., 2004]. Les principaux développements ont ensuite exploré de nombreuses variantes pour la construction des opérateurs permettant le passage entre les différentes grilles [LUO et al., 2015; LUO et al., 2017; GASPAR & RODRIGO, 2017]. En particulier, il est avantageux d'exploiter la structure par blocs de la matrice du système monolithique pour construire les opérateurs multigrille en combinant des techniques existantes [OHM et al., 2022].

Solveurs de Krylov préconditionnés. Le second axe de recherche principal porte sur le développement de préconditionneurs performants pour accélérer la convergence des méthodes itératives de Krylov [SAAD, 2003] (tel que le solveur GMRES [SAAD & SCHULTZ, 1986], adapté aux systèmes non symétriques). En effet, les bonnes performances que peuvent offrir ce type de solveurs se font au détriment d'une sensibilité élevée au conditionnement $\kappa(\mathbf{A})$ de la matrice \mathbf{A} du système. Les solveurs itératifs sont donc généralement associés à un *préconditionneur*. On peut par exemple appliquer un préconditionneur à gauche \mathbf{P} au système $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$:

$$(\mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{f}. \quad (1.24)$$

Son application ne modifie pas la solution du problème initial mais fournit un système équivalent (1.24) mieux conditionné. Un préconditionneur \mathbf{P} efficace doit se rapprocher autant que possible de l'inverse de la matrice \mathbf{A} ($\mathbf{P} \approx \mathbf{A}^{-1}$) tout en restant facile à calculer.

Néanmoins, les préconditionneurs classiques ne peuvent pas directement être appliqués au système monolithique en raison des différences significatives entre les propriétés des blocs individuels [DANOWSKI et al., 2013]. Là encore, il est avantageux de tirer parti de la structure particulière du système monolithique en utilisant des préconditionneurs par blocs de type Jacobi (diagonal par blocs) ou Gauss-Seidel (triangulaire par blocs) [HOWLE et al., 2013; WHITE et al., 2016; WATHEN & GREIF, 2020; ORDONEZ et al., 2023]. Ce choix permet de traiter différemment les blocs du système monolithique et de réutiliser des méthodes de préconditionnement bien établies pour les champs individuels. En pratique, cela implique d'approximer les inverses des blocs mono-physiques par diverses techniques comme les approches multigrilles [DANOWSKI et al., 2013; ORDONEZ et al., 2023; CASTELLETTO et al., 2016], les factorisations incomplètes [CASTELLETTO et al., 2016], ou les inverses approchées [WATHEN & GREIF, 2020]. Par ailleurs, des travaux récents se focalisent sur la robustesse des préconditionneurs développés par rapport à des paramètres matériaux et relatifs à la discrétisation [RODRIGO et al., 2024; CHEN et al., 2020; LEE et al., 2017].

Bien que certains travaux visent à développer des préconditionneurs aussi généraux que possible [FERRONATO et al., 2019; VERDUGO & WALL, 2016], la plupart des solutions proposées dans la littérature pour les problèmes couplés sont des méthodes complexes adaptées à des applications spécifiques. Ainsi, tant le préconditionneur que l'approche monolithique doivent être implémentés spécifiquement pour chaque couplage. En contraste, les approches partitionnées offrent une plus grande flexibilité [VILA-CHÁ et al., 2023].

3.3 Approches partitionnées

3.3.1 Idée générale

Afin d'éviter la résolution du système monolithique et les difficultés que cela entraîne, les méthodes de partitionnement proposent de diviser le problème global en sous-problèmes plus petits, dont la résolution est plus aisée [FELIPPA & GEERS, 1988]. Ce *partitionnement* du problème est associé à un schéma de résolution simultané ou séquentiel des différents sous-problèmes. Bien que de nombreux découpages de la matrice \mathbf{A} soient envisageables d'un point de vue algébrique [FELIPPA & GEERS, 1988], le but est de résoudre chacune des physiques séparément, tout en procédant à des échanges d'information pour tenir compte du couplage entre elles. L'idée des méthodes de partitionnement a émergé pour l'étude de problèmes d'interaction fluide-structure avec un couplage surfacique [FELIPPA et al., 1977]. Leur genèse est retracée dans [FELIPPA et al., 2001].

Réutilisation de codes. Une propriété intéressante des méthodes de partitionnement est la possibilité de réutiliser des codes monophysiques existants, potentiellement différents pour chaque physique, à condition d'être capable d'échanger de l'information entre les solveurs impliqués. Pour ce faire, plusieurs solutions logicielles ont été proposées. On peut notamment citer la librairie de couplage preCICE² [CHOURDAKIS et al., 2022], qui dispose d'*adaptateurs* pour de nombreux codes commerciaux et open-source grâce à une communauté d'utilisateurs active. Néanmoins, cet outil se restreint à des problèmes couplés en surface, dans lesquels la quantité de données à transférer est limitée. La librairie preCICE est principalement utilisée pour des problèmes d'interaction fluide-structure, dans l'objectif de coupler des codes éléments finis pour la partie structure solide et volumes finis pour le fluide. Pour des problèmes couplés en volume, [DUNIĆ et al., 2016] propose une approche pour combiner un solveur mécanique et un solveur thermique existants. Cela permet notamment d'avoir accès à des lois de comportement mécaniques non linéaires complexes.

Choix du partitionnement. Différents choix de partitionnement sont envisageables et dépendent du problème traité. Par exemple, en poro-élasticité, les plus courants sont les découpages drainé et non drainé, dans lesquels le problème mécanique est d'abord résolu [KIM et al., 2011b], et les découpages à contrainte et déformation fixées, qui, au contraire, résolvent d'abord le problème fluide [KIM et al., 2011a]. En thermo-élasticité, on rencontre couramment les partitionnements isothermes et adiabatiques [ARMERO & SIMO, 1992]. Dès lors que plus de deux physiques sont couplés, les partitionnements pour les problèmes à deux-champs peuvent être combinés [KIM, 2018].

Afin de présenter les algorithmes de résolution associés à ce type d'approche, on considère un partitionnement fixant un champ inconnu primal (par exemple isotherme ou drainé). Sur le système monolithique (1.23), cela revient à transférer les termes de couplage entiers dans le membre de droite de l'équation.

2. <https://precice.org/>

Le partitionnement de la matrice \mathbf{A} du système revient à réécrire le système monolithique en faisant intervenir une *prédiction* des champs inconnus, notée \square_p :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}^{i+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}_p^{i+1} \quad (1.25)$$

Les interactions entre physiques sont alors vues comme des chargements imposés par chacune des physiques sur l'autre. De manière équivalente, cela revient à résoudre les deux systèmes de taille réduite :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}_1^{i+1} = \mathbf{f}_1^{i+1} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{u}_{2,p}^{i+1}, & (1.26c) \\ \mathbf{A}_{22} \mathbf{u}_2^{i+1} = \mathbf{f}_2^{i+1} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{u}_{1,p}^{i+1}. & (1.26d) \end{cases}$$

Les différentes méthodes de résolution partitionnées, abordées dans la suite, se distinguent par le choix de la prédiction des champs inconnus.

3.3.2 Méthodes de partitionnement standard

L'approche la plus simple consiste à résoudre chaque sous-système (1.26c) et (1.26d) une seule fois par pas de temps. On peut distinguer deux algorithmes selon le choix des prédictions.

Résolution séquentielle. Une première option est de résoudre les sous-problèmes l'un après l'autre [FARHAT et al., 1991; KOLESOV et al., 2014; VABISHCHEVICH et al., 2014]. On choisit alors pour prédiction dans le problème (1.26c) la solution \mathbf{u}_2^i au pas de temps précédent i :

$$\mathbf{u}_{2,p}^{i+1} = \mathbf{u}_2^i.$$

La résolution de l'équation (1.26c) permet d'obtenir \mathbf{u}_1^{i+1} , qui est ensuite utilisé comme prédicteur dans l'équation (1.26d) :

$$\mathbf{u}_{1,p}^{i+1} = \mathbf{u}_1^{i+1}.$$

La procédure de résolution est résumée sur l'algorithme de la Figure 1.10a. La représentation schématique des échanges d'informations entre physiques au cours de l'avancement en temps (Figure 1.11a) permet de voir que les physiques sont désynchronisées : l'une sera toujours en avance sur l'autre et les conditions de couplage ne seront jamais vérifiées simultanément. La forme de zig-zag entre les physiques a d'ailleurs motivé son appellation de méthode *staggered*.

Résolution parallèle. Pour éviter ce décalage en temps, une alternative consiste à résoudre les deux sous-problèmes en parallèle. Les prédicteurs pour les deux champs inconnus sont alors pris égaux à la solution au pas de temps précédent :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1,p}^{i+1} = \mathbf{u}_{1,p}^i, \\ \mathbf{u}_{2,p}^{i+1} = \mathbf{u}_{2,p}^i. \end{cases}$$

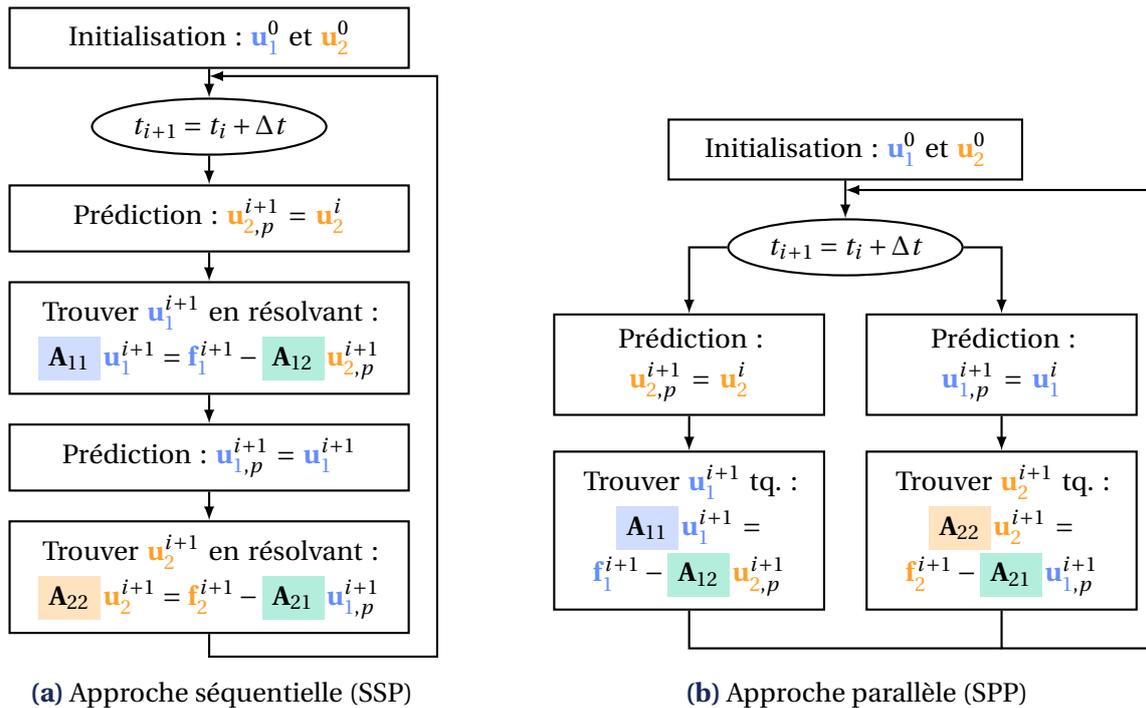


FIGURE 1.10 • Principe des méthodes de partitionnement standard

La résolution des deux sous-systèmes (1.26c) et (1.26d) est alors parallélisable, comme on le montre sur la Figure 1.10b. Les deux physiques avancent simultanément en temps (cf. Figure 1.11b).

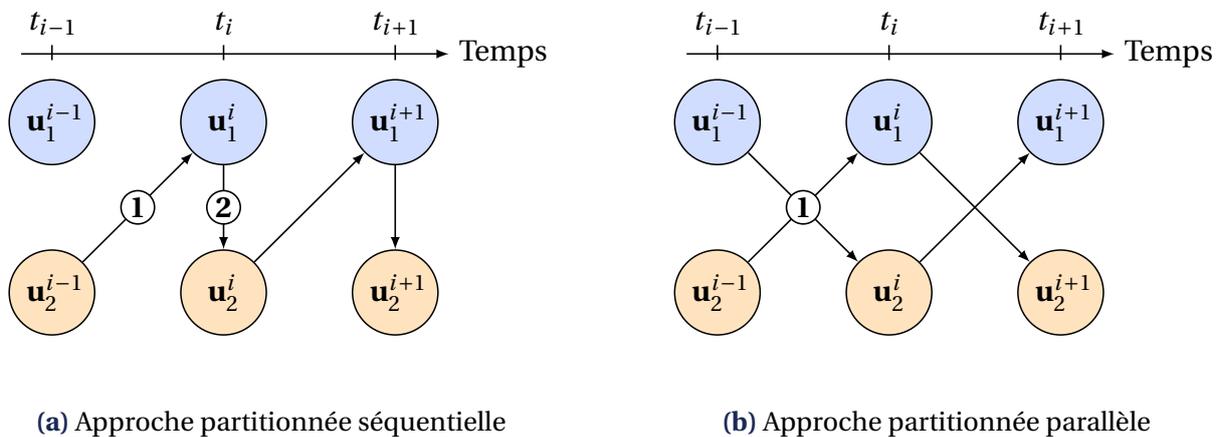


FIGURE 1.11 • Échanges entre solveurs monophysiques au cours de l'avancement en temps des approches partitionnées « à sens unique »

Néanmoins, ces approches manquent de précision et ne permettent pas de retrouver la solution de l'approche monolithique, même avec une discrétisation temporelle très fine [KIM, 2018]. Cela est particulièrement préjudiciable lorsque le couplage entre physiques est très fort.

3.3.3 Méthodes de partitionnement itératives

Les méthodes de partitionnement itératives cherchent à vérifier le couplage fort à chaque pas de temps en effectuant des sous-itérations entre les physiques avant de passer à l'instant suivant. Ainsi, la cohérence avec la solution issue de l'approche directe est retrouvée (voir *e.g.*, [BALLARIN et al., 2024]). À nouveau, les sous-problèmes associés aux différentes physiques peuvent être résolus en parallèle [MEHL et al., 2016] ou séquentiellement [ERBTS & DÜSTER, 2012; ERBTS et al., 2014; DUNIĆ et al., 2016], comme représenté sur les Figure 1.12b et Figure 1.12a, respectivement.

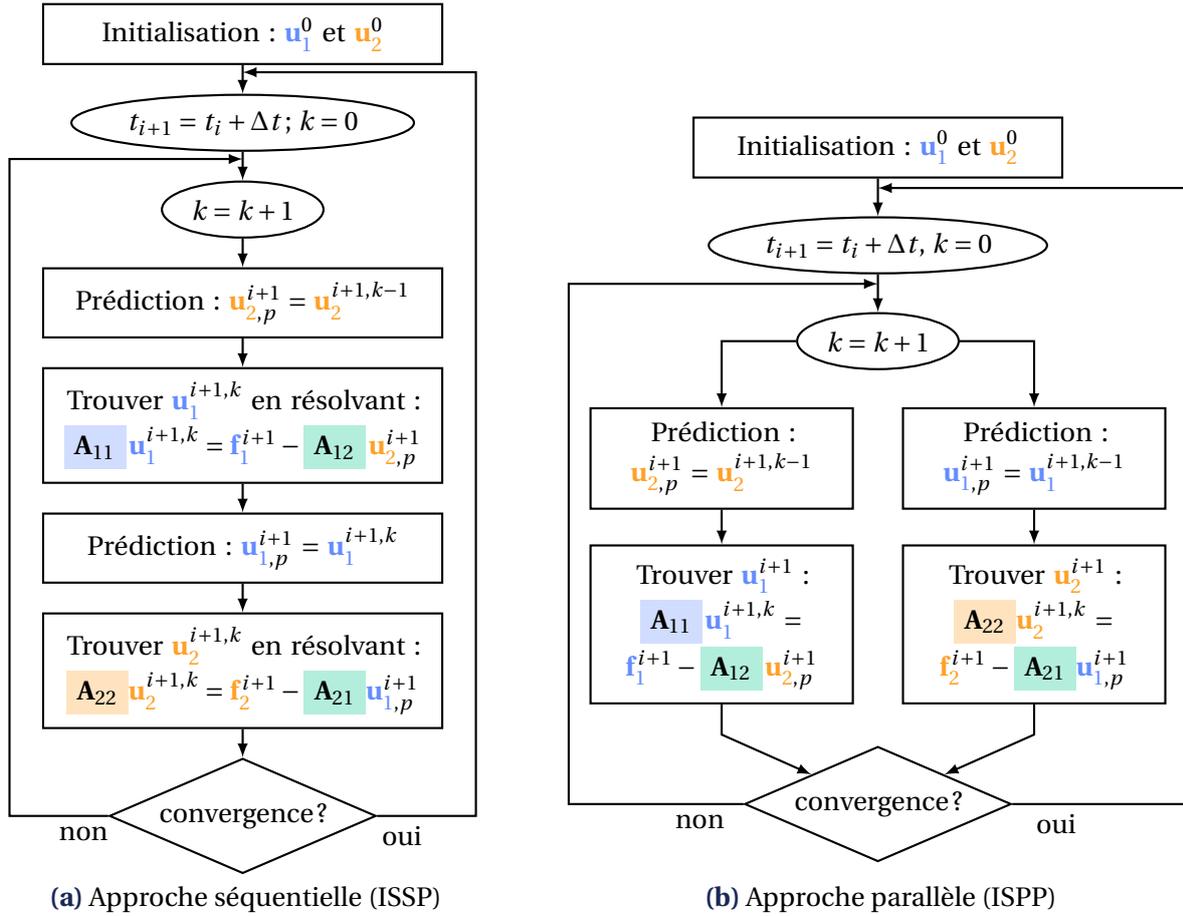


FIGURE 1.12 • Principe des méthodes de partitionnement itératives

Les échanges entre solveurs sont schématisés en Figure 1.13. On note $\square^{i+1,k}$ le k -ième itéré de la variable $\square = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ au pas de temps t_{i+1} . L'approche itérative séquentielle consiste à prendre pour prédicteur dans l'équation (1.26c)

$$\mathbf{u}_{2,p}^{i+1} = \mathbf{u}_2^{i+1,k},$$

(ou $\mathbf{u}_{2,p}^{i+1} = \mathbf{u}_2^i$ lors de la première sous-itération au pas de temps $i + 1$), puis

$$\mathbf{u}_{1,p}^{i+1} = \mathbf{u}_1^{i+1,k+1}$$

issue de la résolution de l'équation (1.26c). L'approche itérative parallèle prend pour prédic-

tion de chaque champ la solution de la sous-itération précédente, soit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{1,p}^{i+1} = \mathbf{u}_1^{i,k}, \\ \mathbf{u}_{2,p}^{i+1} = \mathbf{u}_2^{i,k}. \end{cases}$$

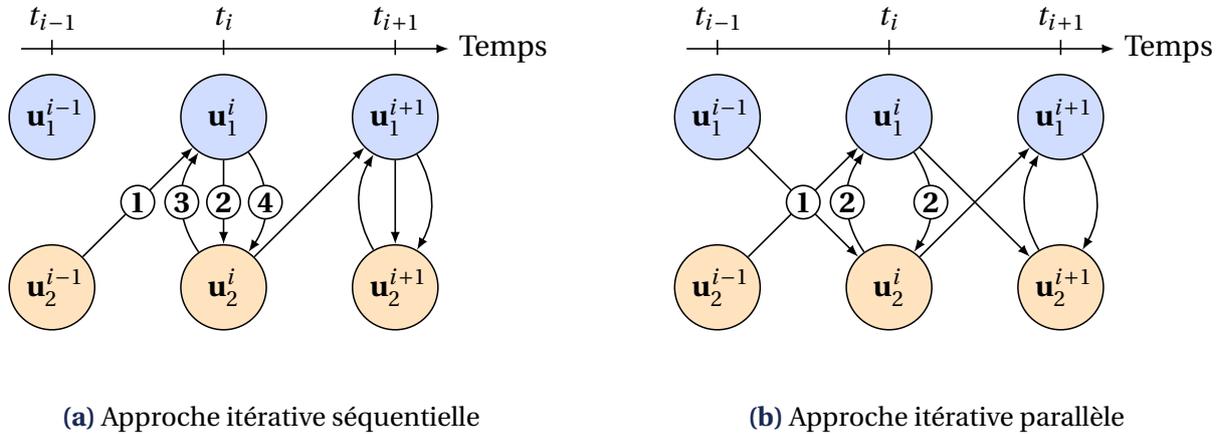


FIGURE 1.13 • Échanges entre solveurs monophysiques au cours de l'avancement en temps des approches partitionnées itératives

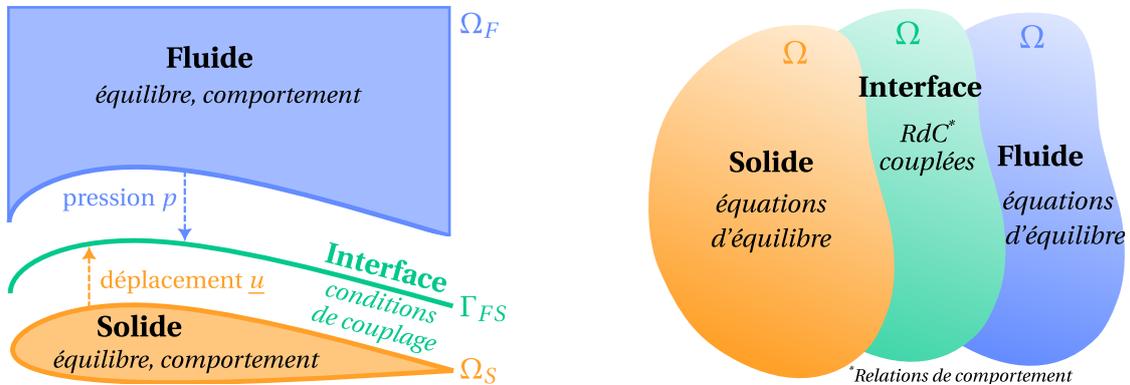
Le nombre de sous-itérations nécessaire est intimement lié à la force du couplage entre les physiques impliquées. Ces sous-itérations peuvent alors entraîner un surcoût conséquent [NOVASCONE et al., 2015]. Un moyen envisagé pour améliorer la vitesse de convergence de ces approches, ainsi que leur stabilité, est l'emploi de techniques d'accélération [ERBTS & DÜSTER, 2012; VILA-CHĀ et al., 2023]. Par ailleurs, des schémas alternatifs à ceux abordés dans cette partie sont également proposés dans le but d'obtenir un meilleur compromis entre coût de calcul et précision [MARTINS et al., 2017].

3.4 Approche partitionnée basée sur la méthode LATIN

Une méthode alternative pour la résolution partitionnée de problèmes multiphysiques a été présentée dans [DUREISSEIX et al., 2003b] en utilisant le solveur LATIN [LADEVÈZE, 1999]. Cette nouvelle approche y a été mise en œuvre sur un problème de poro-élasticité, décrivant le couplage entre des quantités fluides et solides définies sur le même domaine homogénéisé et interagissant à travers des relations de comportement couplées. La stratégie proposée a été comparée à des approches standard (monolithique et ISPP) dans [DUREISSEIX et al., 2003b] pour valider sa faisabilité et montrer son intérêt en termes de performances.

Principe général – concept d'interface entre physiques. Les spécificités de la méthode LATIN ont été brièvement abordées dans la Section 2.3 à la page 22. Son extension au problème couplé de poro-élasticité repose sur le constat que chacune des physiques est régie par des équations de conservation linéaires et découplées de l'autre physique mais globales sur l'espace, tandis que des relations de comportement définies localement dans le domaine couplent ces physiques. Le principe de base de la méthode LATIN, qui consiste à séparer les équations du problème, s'interprète dans le cadre multiphysique par la notion d'*interface*

entre physiques, sur laquelle sont vérifiées les relations de comportement. Cette interface fait alors le lien entre les domaines associés à chaque physique. Une représentation graphique des différentes entités en jeu est proposée sur la Figure 1.14b.



(a) Couplage surfacique : cas de l'aéro-élasticité (b) Couplage en volume : cas de la poro-élasticité

FIGURE 1.14 • Interface entre physiques couplées dans le cas d'une interaction sur une surface commune ou dans le volume

L'idée d'une interface sur laquelle communiquent les physiques est classique pour les problèmes avec un couplage en surface, tels que l'interaction fluide-structure en aéroélasticité, où le solide et le fluide occupent des domaines distincts. L'interface a alors une réalité matérielle : il s'agit de la « peau » de la structure immergée dans le fluide environnant (cf. Figure 1.14a). L'approche proposée dans [DUREISSEIX et al., 2003b; NÉRON & DUREISSEIX, 2008a] étend cette notion à un problème couplé en volume, dans lequel chaque physique – ainsi que l'interface – occupent le même domaine (cf. Figure 1.14b).

Chaque itération de l'algorithme LATIN fournit alors des solutions intermédiaires qui vérifient alternativement les équations d'équilibre du solide et du fluide durant l'étape *découplée* et les relations de comportement lors de l'étape dite *locale* (voir Figure 1.15).

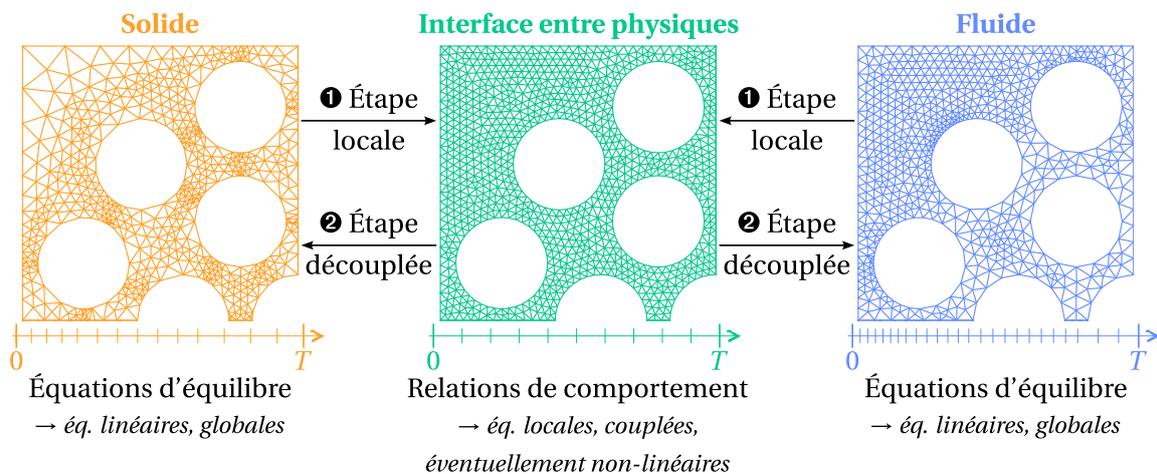


FIGURE 1.15 • Principe de la méthode LATIN appliquée au problème de poro-élasticité avec des discrétisations différentes (tirées de [NÉRON & DUREISSEIX, 2008b])

Q Remarque 1.7

Le traitement séparé des équations d'équilibre de chaque physique rapproche la méthode LATIN multiphysique des approches de partitionnement présentées à la [Section 3.3](#) en page 28. Toutefois, elle s'en distingue dans la mesure où chaque itération fournit une solution sur l'intervalle temporel entier. Cette particularité permet d'intégrer naturellement la réduction de modèle à la volée par PGD, dont les développements dans ce cadre sont détaillés dans la [Section 4](#) (page 35).

Le concept original d'interface entre physiques pour des problèmes couplés en volume a été avantageusement exploité pour introduire diverses améliorations à la méthode (utilisation de discrétisations différentes, prise en compte de non-linéarités, réduction de modèle par PGD), passées en revue dans les paragraphes suivants.

Extension aux aspects multi-échelles. Le traitement indépendant de chacune des physiques à l'étape découplée offre une certaine flexibilité, permettant par exemple d'utiliser des discrétisations spatiales ou temporelles différentes et adaptées à chaque physique. En effet, il a été constaté dans [[DUREISSEIX et al., 2003a](#)] qu'une discrétisation temporelle plus grossière pour la partie solide est suffisante pour obtenir une même qualité de solution pour chacune des physiques et que leur choix est étroitement lié aux temps caractéristiques sous-jacents [[NÉRON & DUREISSEIX, 2008a](#)]. L'utilisation de discrétisations différentes n'affecte que l'étape locale de la [Figure 1.15](#), dans laquelle les physiques interagissent.

La possibilité de coupler différentes discrétisations temporelles a initialement été explorée par [[DUREISSEIX et al., 2003a](#)], en résolvant l'une des équations couplées sur la discrétisation solide et l'autre sur la discrétisation fluide au sein d'un algorithme de point fixe. La preuve de convergence du point fixe a été fournie ultérieurement par [[NÉRON & DUREISSEIX, 2008a](#)]. Une approche similaire a été appliquée pour des discrétisations spatiales distinctes dans [[DUREISSEIX et al., 2004](#)]. Cependant, une telle procédure nécessite de nombreuses opérations de transfert de champ entre les physiques, ce qui peut entraîner des calculs coûteux. Une extension proposée dans [[NÉRON & DUREISSEIX, 2008a; 2008b](#)] consiste alors à munir l'interface entre physiques de sa propre discrétisation en temps et en espace (voir [Figure 1.15](#)), qui peut être différente de celle utilisée pour chaque physique. Dans ce cadre, [[NÉRON & DUREISSEIX, 2008a](#)] traite de l'utilisation de discrétisations temporelles différentes et aborde en particulier le choix de la discrétisation de l'interface, tandis que [[NÉRON & DUREISSEIX, 2008b](#)] présente le cas de discrétisations différentes à la fois en temps et en espace.

Les techniques employées pour le transfert entre maillages spatiaux non conformes sont adaptées des travaux de [[DUREISSEIX & BAVESTRELLO, 2006](#)]. L'approche utilisée s'apparente à la technique *mortar* permettant de conserver l'énergie lors du transfert, mais est appliquée élément par élément pour gérer les discontinuités induites par la nécessité de transférer des quantités définies aux points d'intégration. Le même formalisme a été réutilisé pour l'aspect temporel dans [[NÉRON & DUREISSEIX, 2008a; 2008b](#)] en se plaçant dans le cadre Galerkin discontinu en temps.

Extension à un comportement non linéaire. La modularité offerte par la méthode a également été exploitée pour traiter des problèmes couplés plus complexes. Ainsi, [NÉRON & DUREISSEIX, 2008b] aborde un problème de thermo-poro-élasticité non linéaire. L'ajout d'une nouvelle physique se traduit par la résolution d'un troisième problème en parallèle lors de l'étape découlée de la Figure 1.15, ainsi qu'un comportement enrichi sur l'interface. L'étape locale consiste alors à résoudre un système non linéaire de petite taille en chaque point de Gauss à l'aide d'une méthode de Newton.

Dans le cas du problème de poro-élasticité, [DUREISSEIX et al., 2004] a étudié l'influence sur le taux de convergence de la dépendance de certaines propriétés matériaux au champ de déformation. Il a été observé qu'une actualisation des directions de recherche au cours des premières itérations uniquement rend le taux de convergence quasiment indépendant du degré de non-linéarité. Ainsi, il est conclu que la prise en compte de non-linéarités matérielles a un impact limité sur le coût de calcul.

Il est à noter que tous les développements décrits dans cette section ont été mis en œuvre sur des exemples mono- ou bi-dimensionnels. Le Chapitre 3 reprend la méthodologie introduite et propose, notamment, une application à un exemple de taille représentative des calculs menés aujourd'hui dans le cas de la thermo-élasticité.

4 Application des méthodes de ROM à des problèmes multiphysiques

Après avoir passé en revue les techniques de ROM classiques dans la communauté mécanique en Section 2, nous allons à présent nous concentrer sur leur application à des problèmes multiphysiques couplés, dont les méthodes de résolution spécifiques ont été décrites en Section 3. Bien que ces techniques de ROM aient été largement employées dans divers domaines de l'ingénierie au cours des deux dernières décennies, comme en atteste l'ouvrage récent de [BENNER et al., 2021b], leur application à des problèmes multiphysiques couplés reste un domaine de recherche actif. Les contributions récentes sont abordées dans cette section, en distinguant celles relatives aux méthodes de ROM opérant *a posteriori* (POD et RB) de celles dites *a priori* (PGD).

Q Remarque 1.8

D'autres techniques de ROM sont également appliquées à des problèmes couplés au sens large, décrits de manière générique par une représentation d'état. On peut citer la méthode *Component Mode Synthesis* largement utilisée en dynamique des structures, la technique *Balanced Truncation* basée sur la théorie des systèmes et du contrôle, ou encore la méthode *Moment-Matching* émanant des théories d'approximation. Une description de ces différentes méthodes est par exemple fournie dans [REIS & STYKEL, 2008]. La grande variété de problèmes couplés traités dans la littérature est mise en lumière dans [BENNER & FENG, 2015], ou plus récemment dans [KUMAR & EZHILARASI, 2023]. Ces méthodes ne sont pas abordées davantage dans ce manuscrit.

4.1 Méthodes *a posteriori*

Cette section se concentre sur les développements dans un contexte multiphysique des méthodes de ROM *a posteriori*, dont la première étape (cf. Figure 1.3 ou Figure 1.4) consiste à générer quelques solutions haute fidélité dont est déduite une famille génératrice de faible dimension. Dans le cadre de problèmes multiphysiques fortement couplés, il faut donc faire appel à l'un des solveurs présentés dans la Section 3. L'utilisation d'un solveur monolithique ou partitionné itératif est discuté dans [BALLARIN et al., 2024]. Il a été observé que le choix de l'une ou l'autre méthode pour générer les *snapshots* n'a pas d'impact sur la qualité de la solution fournie par le modèle réduit.

Après cette première étape, on dispose d'un ensemble d'observations pour les différents champs physiques en jeu (notés u_1 et u_2 dans le cas d'un problème couplé à deux physiques générique). Il est alors possible de construire les matrices d'observation $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n_{x_1} \times n_s}$ et $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{R}^{n_{x_2} \times n_s}$ concaténant respectivement les *snapshots* des champs u_1 et u_2 :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 = \text{Col}(\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_1^{(n_s)}) \\ \mathbf{X}_2 = \text{Col}(\mathbf{u}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_2^{(n_s)}) \end{cases} \quad (1.27a)$$

$$\quad (1.27b)$$

On rencontre ensuite plusieurs approches dans la littérature pour la construction du modèle réduit et sa résolution *online*.

Base unique pour le problème couplé. Une première option consiste à construire une base réduite pour le problème couplé entier, en appliquant la POD à la matrice

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_{x_1} + n_{x_2}) \times n_s} \quad (1.28)$$

qui rassemble les *snapshots* de toutes les physiques. On obtient alors une famille de m vecteurs orthonormés dont chacun porte sur le vecteur des inconnues combinées $[u_1, u_2]^T$. Le système monolithique entier (1.23) est ensuite projeté sur cette base réduite, décrite dans le cas discret par la matrice $\Phi \in \mathbb{R}^{(n_{x_1} + n_{x_2}) \times m}$.

Les modes POD ainsi construits sont optimaux pour l'ensemble des observations du problème couplé. Néanmoins, les coefficients associés n'ont plus d'interprétation physique directe. Cette approche manque également de modularité, dans la mesure où tout est à refaire s'il y a un changement dans l'une des composantes du problème couplé [BENNER & FENG, 2015]. Dans des applications de contrôle optimal, [KRAMER, 2016] observe même que les lois de rétroaction calculées à partir d'un tel modèle réduit ne convergent pas vers la solution haute fidélité. Les auteurs concluent que dans ce cas, il est primordial de conserver la structure par blocs du système original dans le modèle d'ordre réduit, de sorte qu'elle se retrouve ensuite dans les matrices de rétroaction.

Bases distinctes pour chaque physique. Une seconde option consiste à construire un modèle réduit qui préserve la structure par blocs du système couplé initial. Pour ce faire,

les *snapshots* des champs u_1 et u_2 sont exploités séparément. L'application indépendante de la POD aux matrices des observations \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 permet de construire des bases réduites distinctes pour chaque physique en jeu, que l'on note sous forme discrète : $\Phi_1 \in \mathbb{R}^{n_{x1} \times m_1}$ et $\Phi_2 \in \mathbb{R}^{n_{x2} \times m_2}$. Il est alors possible d'avoir des bases réduites de tailles m_1 et m_2 différentes. Ces matrices sont ensuite usuellement combinées selon l'équation (1.29) de sorte à obtenir une matrice de projection globale diagonale par blocs :

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

La multiplication à gauche et à droite du système monolithique (1.23) par la matrice $\tilde{\Phi}$ permet de conserver la structure par blocs du système initial, imposée par la physique. Avec cette approche, les coefficients de la décomposition à variables séparées ont toujours le sens des champs physiques de départ. En revanche, on perd la garantie d'optimalité pour l'ensemble des *snapshots* [BENNER & FENG, 2015].

Cette approche est la plus communément utilisée dans la littérature, avec des applications à des problèmes de poro-élasticité dans un contexte de géomécanique [FLOREZ & GILDIN, 2020], de thermo-hydraulique avec conditions aux limites variables [VERGARI et al., 2020] puis de thermo-hydro-neutronique [VERGARI et al., 2021] pour la simulation de réacteurs nucléaires, ou encore d'interaction fluide-structure avec paramètres physiques et géométriques [BALLARIN & ROZZA, 2016]. Alors que tous les travaux cités jusqu'ici reposent sur une résolution monolithique du problème de taille réduite, [BALLARIN et al., 2024] se sont récemment intéressés à l'utilisation d'une approche partitionnée pour la résolution *online*. Chaque sous-problème est alors projeté sur la base réduite Φ_1 ou Φ_2 correspondante. La précision et le taux de convergence obtenus sont similaires à ceux de l'approche monolithique préservant la structure par blocs.

Tout comme pour des applications monophysiques, la présence de non-linéarités altère le gain en temps de calcul offert par la POD [NASIKA et al., 2022]. L'utilisation d'une méthode d'hyper-réduction DEIM (*Discrete Empirical Interpolation Method*) [CHATURANTABUT & SORENSEN, 2010] est proposée dans [NASIKA et al., 2023] pour la simulation du couplage hydro-mécanique non linéaire avec des paramètres matériaux variables.

Spécificités de la méthode RB. Le principal axe de développement autour de la méthode RB porte sur l'élaboration d'estimateurs d'erreur adaptés et spécifiques au problème traité. Ainsi, [MARTINI et al., 2015] proposent un estimateur basé sur la pondération des résidus sur chaque sous-domaine dans le cas d'un problème avec couplage surfacique tenant compte de la variabilité de la géométrie et des paramètres matériaux. Un estimateur d'erreur pour un problème de thermo-mécanique faiblement couplé avec paramètres matériaux variables est développé par [HOANG et al., 2018]. Dans le cas d'un problème d'évolution thermo-poro-élastique fortement couplé avec des paramètres matériaux variables, [LARION et al., 2020] proposent un estimateur d'erreur portant sur des quantités d'intérêt fluide et solide. Le modèle réduit ainsi construit est exploité dans une stratégie d'identification de paramètres, nécessitant de nombreux appels au solveur pour différents jeux de paramètres [LARION et al., 2022]. Dans tous ces travaux, une base réduite est construite pour chaque physique.

4.2 Méthodes *a priori*

Dans le cas de problèmes multiphysiques faiblement couplés, l'application de la réduction de modèle par PGD ne pose pas de difficulté particulière lors de la résolution hiérarchique du problème. En effet, le modèle réduit de la physique totalement indépendante des autres, qu'il soit défini sur le domaine espace-temps ou espace-temps-paramètres est construit de manière classique. La représentation ainsi construite de ce premier champ intervient dans le second membre du problème régissant une deuxième physique, et ainsi de suite. Des exemples de problèmes faiblement couplés traités avec la PGD sont donnés dans le cas de problèmes électro-thermiques [KRIMM et al., 2019] ou thermo-mécaniques [PRULIÈRE et al., 2010b; SCHULER et al., 2022b].

Dans le cas de problèmes multiphysiques fortement couplés, la méthode PGD ne peut pas s'intégrer directement dans les approches monolithiques et partitionnées standard – qui résolvent un pas de temps après l'autre – puisqu'elle opère sur le domaine espace-temps (voire espace-temps-paramètres) entier. Néanmoins, la philosophie de ces approches peut être conservée en enrichissant les bases réduites associées aux différentes physiques simultanément ou séparément; des exemples sont donnés ci-après.

Enrichissement simultané. La PGD peut être appliquée à un problème fortement couplé de manière monolithique, enrichissant ainsi la base d'ordre réduit pour chaque physique simultanément. Cela conduit à un nombre de modes identiques pour toutes les physiques impliquées, comme illustré sur des problèmes thermo-visco-élastiques [BERINGHIER et al., 2010], électro-magnéto-mécaniques [MININGER et al., 2016; HENNERON & CLENET, 2017] ou piezo-électriques pour l'étude paramétrique de dispositifs de récupération d'énergie [QIN et al., 2016b].

Néanmoins, le même nombre de modes n'est pas forcément requis pour toutes les physiques. Ainsi, [MININGER et al., 2016; HENNERON & CLENET, 2017] ont relevé qu'une bonne approximation de la tension électrique nécessitait bien moins de modes que la déformation mécanique. Ainsi, afin d'éviter le calcul inutile de modes, il peut être intéressant d'avoir la possibilité d'enrichir indépendamment les bases construites à la volée pour chaque physique. Pour ce faire, la PGD doit être appliquée en suivant une philosophie partitionnée.

Enrichissement séparé. Une première façon de construire séparément les modèles réduits des différentes physiques intervenant dans le problème couplé consiste à utiliser une approche par point fixe. Le modèle réduit de chaque physique, qui fournit une solution approchée sur l'ensemble du domaine considéré, est enrichi alternativement avec potentiellement plusieurs modes. Une telle approche a été mise en œuvre sur un problème de thermo-cinétique [PRULIÈRE et al., 2010b], ou de thermo-mécanique avec prise en compte de paramètres géométriques et de chargement dans la décomposition [SCHULER et al., 2022a].

Dans le cas d'un problème non linéaire, la PGD impose l'utilisation d'une méthode de linéarisation. La technique la plus simple consiste à approcher le terme non linéaire en y substituant l'expression (connue) du champ issue de la dernière étape d'enrichissement (*e.g.*, [PRULIÈRE et al., 2010b; QIN et al., 2016a]). Une telle approche, appliquée au système mono-

lithique, peut finalement conduire à une résolution séparée des physiques [QIN et al., 2016a], permettant dans cet exemple de stopper l'enrichissement de la représentation du champ magnétique avant celui du champ thermique. Dans [SCHULER et al., 2022a], une méthode itérative globale est utilisée pour tenir compte de la loi cohésive non linéaire du problème mécanique, mais ces itérations supplémentaires diminuent l'efficacité de l'approche.

Une autre manière d'appliquer la PGD séparément aux physiques en jeu repose sur l'approche alternative basée sur le solveur non incrémental LATIN, dont les développements antérieurs ont été passés en revue en Section 3.4. La réduction de modèle par PGD espace-temps est appliquée à chacun des problèmes linéaires résolus sur l'intervalle temporel entier durant l'étape découplée (voir Figure 1.15), tout en permettant aisément de prendre en compte un comportement non linéaire [NÉRON & DUREISSEIX, 2008b]. Une revue dédiée à l'utilisation de la méthode LATIN-PGD pour les problèmes multiphysiques est proposée dans [NÉRON & LADEVÈZE, 2010], et les principaux développements sont rappelés ci-dessous.

Dans [DUREISSEIX et al., 2003b], seules les quantités cinématiques (taux de déformations et pression) ont été représentées sous une forme à variables espace-temps séparées. Cette approximation à variables séparées a ensuite été étendue aux quantités statiques dans [DUREISSEIX et al., 2003a] avec le double objectif de réduire les coûts de stockage, puisque tous les champs sont représentés par quelques fonctions du temps et de l'espace, et de diminuer le volume d'informations à échanger en cas de couplage entre plusieurs codes éléments finis. Néanmoins, l'implémentation de cette approche est particulièrement lourde car elle s'accompagne d'une procédure de dualisation pour résoudre les problèmes non conventionnels portant sur les quantités statiques. Les dix champs inconnus du problème de thermo-poro-élasticité non linéaire ont ainsi été représentés sous un tel format dans [NÉRON & DUREISSEIX, 2008b].

› Bilan du chapitre

La résolution directe d'une série de problèmes semblables, par exemple dans une démarche d'optimisation, entraîne un coût de calcul prohibitif lorsque chaque résolution individuelle est déjà coûteuse. Les méthodes de réduction de modèle représentent un moyen efficace de rendre de telles études abordables en exploitant la redondance des informations présentes dans chaque solution. Ces techniques fournissent en sortie une information plus riche que les métamodèles, qui se concentrent uniquement sur des quantités d'intérêt scalaires définies à l'avance.

Plusieurs méthodes de réduction de modèle (POD et RB) reposent sur le calcul préalable de solutions haute fidélité pour construire une base de dimension réduite, sur laquelle le problème de départ est ensuite projeté. Au contraire, la méthode PGD permet de s'affranchir de ces calculs préliminaires coûteux en construisant à la volée la base spécifiquement adaptée au problème considéré, en même temps que sa solution. Pour résoudre une famille de problèmes semblables dépendant de paramètres avec la PGD, il existe deux approches. La première se base sur la décomposition canonique (espace-temps-paramètres) du champ recherché, tandis que la seconde ne construit qu'une décomposition espace-temps et traite

les aspects paramétriques par réutilisation et enrichissement de la base réduite des fonctions spatiales. Cette dernière approche est celle retenue dans ces travaux, dont la modularité a déjà été mise en avant lorsqu'elle est associée au solveur LATIN.

Lorsque chaque problème de l'étude paramétrique présente un couplage fort entre plusieurs physiques, un algorithme de résolution dédié est requis. Les deux approches disponibles dans la littérature, monolithique et partitionnée, ont été présentées. Bien que l'approche monolithique soit conceptuellement simple, sa mise en œuvre est complexifiée par les caractéristiques intrinsèques du système à résoudre (mauvais conditionnement, grande taille, ...). Les méthodes de partitionnement se basent sur la résolution de problèmes plus simples et offrent davantage de flexibilité dans le traitement des différentes physiques. Nous nous orientons donc vers ce type d'approche.

Néanmoins, l'algorithmie propre à la PGD ne permet pas de la combiner à un solveur classique résolvant un pas de temps après l'autre. Nous proposons donc de nous appuyer sur des travaux antérieurs utilisant le solveur LATIN pour la résolution de problèmes multiphysiques, et en particulier l'application de la PGD aux quantités primales uniquement, comme initialement proposé dans [DUREISSEIX et al., 2003b]. La méthodologie est détaillée au [Chapitre 3](#), qui mettra en avant un exemple sur un cas d'échelle. Le [Chapitre 4](#) s'attachera ensuite à combiner cette approche avec la stratégie de résolution de problèmes paramétrés basée sur la PGD espace-temps, déjà largement éprouvée dans des applications mono-physiques.

* * *

2

Problème multiphysique de référence : présentation et implémentation

Ce chapitre est consacré au problème couplé choisi pour illustrer la méthode développée : la thermo-élasticité. Un rappel de la mise en équations de ce problème fortement couplé est fourni, jusqu'à sa discrétisation par la méthode des éléments finis. Nous présentons également la plateforme collaborative dans laquelle les développements numériques ont été implémentés, avec une attention particulière aux contributions personnelles ayant permis son extension au cadre multiphysique. L'implémentation d'une approche monolithique classique est validée à travers un benchmark thermo-mécanique. Une analyse critique de la littérature associée et une discussion sur la validité des hypothèses de modélisation sont proposées.

Sommaire

1	Les équations de la thermo-élasticité linéaire	42
1.1	Hypothèses et quantités mises en jeu	43
1.2	Équations de la mécanique	44
1.3	Équations de la thermique – formalisme thermodynamique	45
1.4	Bilan des équations	49
1.5	Remarques sur le problème couplé	50
2	Formulation discrète	52
2.1	Écriture sous forme faible	53
2.2	Discrétisation par éléments finis	54
3	Implémentation numérique	56
3.1	ROMlab : une plateforme collaborative	56
3.2	Comparaison à un <i>benchmark</i> : validation et discussion	60
›	Bilan du chapitre	64

1 Les équations de la thermo-élasticité linéaire

Les équations, hypothèses et notations du problème multiphysique couplé de thermo-élasticité, sur lequel sont illustrés les développements de ce manuscrit, sont introduites dans cette section. La thermo-élasticité décrit à la fois le comportement élastique et thermique des solides, ainsi que leurs interactions sous des sollicitations mécaniques et thermiques.

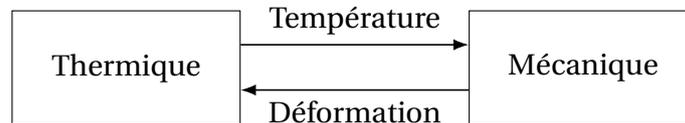


FIGURE 2.1 • Quantités en interaction lors du couplage thermo-mécanique

L'expérience met en évidence l'expansion volumique d'un solide chauffé s'il peut se déformer librement. En revanche, si la déformation est empêchée, cette élévation de température génère des contraintes au sein du solide; dans le cas extrême de la Figure 2.2, ces contraintes ont mené au flambement d'un rail de chemin de fer. Par ailleurs, il a également été observé expérimentalement qu'une sollicitation rapide en traction d'un matériau provoque son refroidissement, tandis qu'une compression rapide entraîne un échauffement (voir Figure 2.3). Il existe donc une interaction mutuelle entre la déformation d'un corps et sa température, comme schématisé sur la Figure 2.1. Ces phénomènes sont modélisés par la théorie de la thermo-élasticité.



FIGURE 2.2 • Flambement d'un rail de chemin de fer sous forte chaleur¹

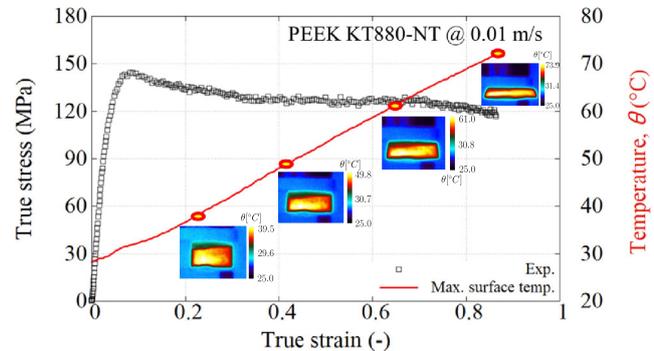


FIGURE 2.3 • Échauffement d'un polymère durant un essai en compression (d'après [HAO et al., 2022])

La première formulation des équations de la thermo-élasticité est proposée par [DUHAMEL, 1837] en généralisant les théories établies de l'élasticité et de la conduction thermique dans les solides. Cependant, ce n'est que 120 ans plus tard que les équations couplées ont été établies sur la base des processus thermodynamiques irréversibles par [BIOT, 1956]. De nombreux ouvrages de référence sont ensuite parus dans les décennies suivantes, parmi lesquels [CARLSON, 1973; PARKUS, 1976; NOWACKI & SNEDDON, 1977]. Une revue historique des développements autour de l'analyse théorique des phénomènes thermoélastiques est fournie

1. Crédits photo : U.S. Department of Transportation. Domaine Public. Source : <https://toolkit.climate.gov/image/1001>

dans [HETNARSKI & ESLAMI, 2009]. Dans ce qui suit, le cadre thermodynamique dans lequel s'inscrivent les équations régissant la thermo-élasticité linéaire, ainsi que les hypothèses associées, sont rappelés.

1.1 Hypothèses et quantités mises en jeu

On étudie l'évolution sur un intervalle temporel $I = [0, t_f]$ d'une structure occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dont la frontière est notée $\partial\Omega$. Sous l'hypothèse des petites perturbations, le comportement mécanique est décrit par le tenseur des déformations linéarisées $\boldsymbol{\varepsilon}$, associé à un champ de déplacement \underline{u} , et par le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Dans son état de référence supposé naturel (*i.e.*, non chargé et non déformé, soit $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$), le solide a une température uniforme T_0 . On note θ l'écart de température par rapport à cette température de référence :

$$\theta \equiv T - T_0, \tag{2.1}$$

où T désigne la température absolue. Dans le cadre de la thermo-élasticité linéaire, les variations de température par rapport à T_0 sont supposées faibles, *i.e.*, $|\theta/T_0| \ll 1$. Les paramètres matériaux sont alors considérés indépendants de la température [NOWACKI & SNEDDON, 1977].

Les quantités intervenant dans la formulation du problème de thermo-élasticité sont résumées dans la première partie du [Tableau 2.1](#). En particulier, les inconnues primales, leur gradient, et les inconnues duales de chacune des physiques y sont mises en regard.

TABLEAU 2.1 • Quantités d'intérêt du problème thermoélastique et leur unité SI

Quantités mécaniques			Quantités thermiques		
\underline{u}	[m]	vecteur déplacement	θ	[K]	incrément de température
$\boldsymbol{\varepsilon}$	[-]	tenseur des déformations	\underline{g}	[Km ⁻¹]	gradient de temperature
$\boldsymbol{\sigma}$	[Nm ⁻²]	tenseur des contraintes	\underline{q}	[Wm ⁻²]	vecteur flux de chaleur
\underline{u}_d	[m]	déplacement imposé	θ_d	[K]	incr. de température imposé
\underline{F}_d	[Nm ⁻²]	force surfacique imposée	q_d	[Wm ⁻²]	flux de chaleur imposé
\underline{f}_d	[Nm ⁻³]	effort volumique	r_d	[Wm ⁻³]	source de chaleur

Sous l'action de chargements imposés mécaniques et thermiques, ces quantités vont être amenées à évoluer sur l'intervalle d'étude I . Le chargement mécanique auquel est soumis le domaine Ω à tout instant $t \in I$, illustré sur la [Figure 2.4a](#), consiste en :

- un effort volumique \underline{f}_d appliqué sur le domaine Ω ,
- un déplacement \underline{u}_d fixé sur une première partie de la frontière $\partial_u\Omega$ (condition de *Dirichlet*),
- un effort surfacique \underline{F}_d imposé sur la partie complémentaire $\partial_F\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$ (condition de *Neumann*).

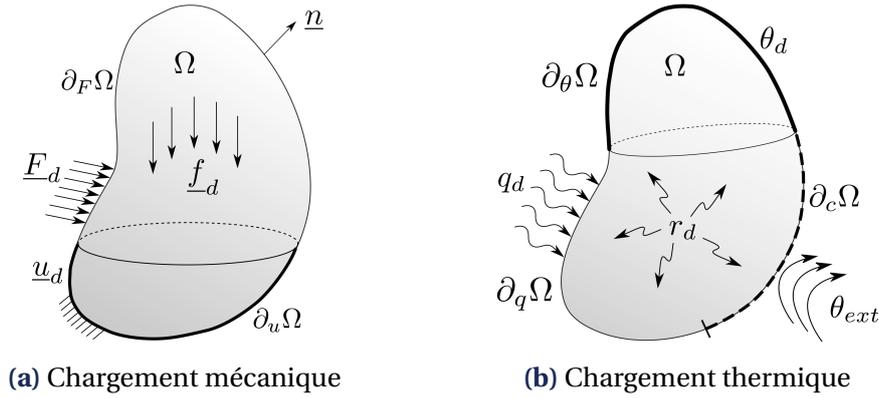


FIGURE 2.4 • Conditions aux limites du problème de thermo-mécanique

Le chargement thermique, représenté sur la [Figure 2.4b](#), se compose de :

- une source volumique de chaleur r_d appliquée sur le domaine Ω , pouvant résulter de physiques non modélisées, par exemple par effet Joule ou en conséquence de réactions chimiques [[LEMAITRE et al., 2009](#)],
- un incrément de température θ_d fixé sur une partie de la frontière $\partial_\theta\Omega$ (condition de *Dirichlet*),
- un flux de chaleur sur la partie complémentaire de la frontière $\partial\Omega$; ce flux peut être :
 - imposé à q_d sur $\partial_q\Omega$ (condition de *Neumann*),
 - convectif et s'exprimer par $h(\theta_\infty - \theta)$ sur $\partial_c\Omega$, avec h le coefficient de transfert convectif et θ_∞ la température ambiante (condition de *Robin*).

Q Remarque 2.1

Le partitionnement de la frontière $\partial\Omega$ pour l'application de conditions de Dirichlet, Neumann et Robin est indépendant pour chacune des physiques. Néanmoins, chaque sous-problème (mécanique et thermique) doit être bien posé, *i.e.*, :

$$\partial\Omega = \partial_u\Omega \cup \partial_F\Omega \quad \text{et} \quad \partial_u\Omega \cap \partial_F\Omega = \emptyset, \quad (2.2a)$$

$$\partial\Omega = \partial_\theta\Omega \cup \partial_q\Omega \cup \partial_c\Omega \quad \text{et} \quad \partial_\theta\Omega \cap \partial_q\Omega \cap \partial_c\Omega = \emptyset. \quad (2.2b)$$

Dans les notations introduites, l'indice \bullet_d indique que les quantités sont données, donc connues. La seconde partie du [Tableau 2.1](#) met en regard les chargements analogues pour chaque physique : conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, ainsi que chargement volumique.

1.2 Équations de la mécanique

Sous l'hypothèse des petites perturbations, le tenseur des déformations linéarisées $\boldsymbol{\varepsilon}$ est défini comme la partie symétrique du gradient du déplacement \underline{u} :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T). \quad (2.3)$$

Dans la théorie de la thermo-élasticité *linéaire*, le tenseur des déformations totales $\boldsymbol{\varepsilon}$ correspond à la somme des déformations élastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ induites par la contrainte, et des déformations dues au changement de température $\boldsymbol{\varepsilon}_{th}$ [HETNARSKI & ESLAMI, 2009], soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{th}. \quad (2.4)$$

La déformation thermique $\boldsymbol{\varepsilon}_{th}$ est liée à la variation température θ par la relation linéaire

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{th} = \alpha\theta\mathbf{I}, \quad (2.5)$$

où α désigne le coefficient de dilatation thermique linéique du matériau (scalaire en considérant un matériau isotrope) et \mathbf{I} le tenseur identité. On remarque que dans le cas isotrope, une variation de température ne modifie pas la forme du solide, mais entraîne uniquement un changement de volume.

Par ailleurs, la loi de Hooke relie le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ à la partie élastique des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ par l'intermédiaire du tenseur d'élasticité \mathcal{K} (isotherme), ce qui s'écrit en utilisant les équations (2.4) et (2.5) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha\theta\mathcal{K} : \mathbf{I}. \quad (2.6)$$

Pour un comportement isotrope, le tenseur d'élasticité \mathcal{K} ne dépend que de deux coefficients indépendants, par exemple les coefficients de Lamé λ et μ . La relation de comportement (2.6) s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{I} - \beta\theta\mathbf{I}, \quad (2.7)$$

où l'on a introduit le coefficient de couplage thermoélastique β . Ce coefficient résulte de l'application de l'opérateur de Hooke aux déformations d'origine thermique et vaut $\beta \equiv \alpha(2\mu + 3\lambda)$ dans le cas tri-dimensionnel.

Q Remarque 2.2

Le coefficient β peut aussi s'exprimer en fonction du module de compressibilité hydrostatique K (*bulk modulus* en anglais) par $\beta = 3\alpha K$. Cette écriture est également fréquente dans la littérature.

Notons que si la déformation de la structure est bloquée ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$), l'équation (2.7) indique qu'une augmentation de la température génère un état de contrainte sphérique en compression. Enfin, le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ doit satisfaire l'équation d'équilibre, qui s'écrit en négligeant les effets dynamiques :

$$\underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} + \underline{f}_d = \underline{0}. \quad (2.8)$$

1.3 Équations de la thermique – formalisme thermodynamique

À présent, les équations de la partie thermique du problème de thermo-élasticité couplée sont rappelées. À cause du processus spontané – et donc irréversible – de conduction de la chaleur, il est nécessaire de considérer la thermodynamique des processus *irréversibles*

[NOWACKI & SNEDDON, 1977]. Ce formalisme permet de faire intervenir naturellement le couplage thermo-mécanique et permettrait d'inclure des comportements plus complexes. Cette partie s'appuie principalement sur les ouvrages de [LEMAITRE et al., 2009; SALENÇON, 2007; IBRAHIMBEGOVIC, 2009].

Premier principe de la thermodynamique. Le premier principe de la thermodynamique décrit la conservation de l'énergie. L'énergie totale contenue dans un système thermodynamique occupant un domaine Ω correspond à la somme de son énergie interne E_i et de son énergie cinétique E_c . Le premier principe de la thermodynamique exprime le fait que la variation de cette énergie totale est due à la puissance des efforts extérieurs \mathcal{P}_{ext} développés sur le système et au taux de chaleur reçue par le domaine, noté \mathcal{Q} , ce qui se traduit par

$$\frac{d}{dt}(E_i + E_c) = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{Q}. \quad (2.9)$$

On introduit également le principe des puissances virtuelles (PPV), appliqué ici au mouvement réel étudié :

$$\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}, \quad (2.10)$$

avec \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_{int} les puissances (réelles) des quantités d'accélération et des efforts intérieurs. Il est intéressant de remarquer que $\mathcal{P}_a = \dot{E}_c$ (voir [LEMAITRE et al., 2009]). Ainsi, en combinant les équations de conservation de l'énergie (2.9) et d'équilibre (2.10), on obtient le premier principe de la thermodynamique sous la forme globale d'une équation de bilan :

$$\frac{dE_i}{dt} + \mathcal{P}_{int} = \mathcal{Q}, \quad \text{avec : } \begin{cases} E_i = \int_{\Omega} \rho e_i \, d\Omega, \\ \mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, d\Omega, \\ \mathcal{Q} = \int_{\Omega} r_d \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{q} \cdot \underline{n} \, dS = \int_{\Omega} (r_d - \text{div} \underline{q}) \, d\Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

On a introduit la masse volumique ρ , l'énergie interne massique e_i , le tenseur des taux de déformations \mathbf{D} (*i.e.*, la partie symétrique du gradient des vitesses) et le vecteur normal unitaire \underline{n} sortant à la frontière $\partial\Omega$. Sous l'hypothèse des petites perturbations, puisque l'ordre des dérivées par rapport à l'espace et au temps peut être interverti, on a : $\mathbf{D} = \nabla_s \underline{\dot{u}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. L'équation (2.13) étant vérifiée quel que soit le domaine Ω , on obtient la forme locale du premier principe exprimant la conservation de l'énergie :

$$\rho \dot{e}_i = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r_d - \text{div} \underline{q}. \quad (2.14)$$

Ainsi, la variation de l'énergie interne massique est due à la puissance massique dissipée par les efforts intérieurs et à un apport de chaleur.

Second principe de la thermodynamique. Le premier principe, qui donne un bilan d'énergie quantitatif, doit être complété par le second principe de la thermodynamique, qui définit le sens des transferts d'énergie irréversibles. Pour ce faire, on introduit l'entropie

$S = \int_{\Omega} \rho s \, d\Omega$, qui exprime une variation d'énergie associée à une variation de température. Le second principe postule alors que le taux de production d'entropie dans une évolution réelle est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue \mathcal{Q} divisé par la température T :

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{1}{T} \mathcal{Q}. \quad (2.15)$$

Le théorème de la divergence combiné à la définition de \mathcal{Q} dans l'équation (2.13) donne :

$$\frac{1}{T} \mathcal{Q} = \int_{\Omega} \frac{r_d}{T} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \underline{n} \, dS = \int_{\Omega} \left[\frac{r_d}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) \right] \, d\Omega. \quad (2.16)$$

Puisque l'inégalité (2.15) doit être vérifiée pour tout domaine Ω , on en déduit l'expression locale du second principe :

$$\rho \dot{s} \geq \frac{r_d}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\underline{q}}{T} \right). \quad (2.17)$$

Après développement du terme en divergence puis multiplication par $T > 0$, la forme locale du second principe (2.17) devient :

$$\rho T \dot{s} - r_d + \operatorname{div} \underline{q} - \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T \geq 0. \quad (2.18)$$

Inégalité de Clausius-Duhem. En combinant les équations des premier (2.14) et second principes (2.18), on obtient l'inégalité fondamentale

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho (T \dot{s} - \dot{e}_i) - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (2.19)$$

que doit vérifier toute évolution thermo-mécanique réelle. Cette inégalité peut être transformée en introduisant l'énergie libre massique de Helmholtz, définie par $\psi \equiv e_i - Ts$, et dont la dérivée temporelle s'écrit :

$$\dot{\psi} = \dot{e}_i - \dot{T}s - T\dot{s}. \quad (2.20)$$

En introduisant l'énergie libre ψ dans l'inégalité fondamentale (2.19), on obtient l'inégalité dite de Clausius-Duhem :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho (\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0. \quad (2.21)$$

Lois d'état et dissipation. L'énergie libre de Helmholtz ψ est une fonction uniquement des variables d'état, *i.e.*, variables ne dépendant que du point matériel considéré. Pour les phénomènes réversibles, comme c'est le cas de la thermo-élasticité, les seules variables d'état sont dites *observables* et sont imposées par le formalisme de la mécanique des solides déformables et de la thermodynamique des milieux continus : la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ et la température absolue T .

Q Remarque 2.3

Ce formalisme par variables d'état permet également de décrire des comportements

plus complexes que la thermo-élasticité en considérant des variables d'état additionnelles, dites variables *internes* [LEMAITRE et al., 2009] : (visco-)plasticité, couplage avec la chimie ou l'électromagnétisme, ...

Avec $\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$, on peut réécrire la dérivée par rapport au temps de l'énergie libre :

$$\dot{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.22)$$

ainsi que l'inégalité de Clausius-Duhem (2.21), qui devient :

$$\underbrace{-\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\phi_{int}} - \underbrace{\frac{\boldsymbol{q}}{T} \cdot \nabla T}_{\phi_{th}} \geq 0. \quad (2.23)$$

Dans l'inégalité (2.23), on peut distinguer la dissipation intrinsèque ϕ_{int} , qui est nulle pour toute évolution élastique (réversible), et la dissipation thermique ϕ_{th} due à la conduction de la chaleur, a priori non nulle dans une évolution thermoélastique. Si la dissipation intrinsèque ϕ_{int} est nulle quelle que soit l'évolution du système, définie par $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et \dot{T} , alors chaque terme doit être nul. On en déduit les *lois d'état* de la thermo-élasticité, qui dérivent du potentiel thermodynamique $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$ suivant les relations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.24a) \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (2.24b)$$

Par ailleurs, la loi de Fourier représente la manière la plus simple de satisfaire la positivité de la dissipation thermique ϕ_{th} . Le flux de chaleur est pris directement proportionnel (et opposé) au gradient de température :

$$\underline{\boldsymbol{q}} = -k \nabla T, \quad (2.25)$$

avec $k > 0$ le coefficient de conductivité thermique (scalaire pour un milieu isotrope).

Q Remarque 2.4

La loi de comportement du matériau est définie par la donnée de la fonction $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$. Pour obtenir un comportement thermoélastique *linéaire*, l'énergie libre ψ est une fonction *quadratique* des deux variables d'état (ou de leurs invariants), obtenue par un développement au deuxième ordre autour de l'état de référence naturel ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, $T = T_0$). Après simplifications (voir [IBRAHIMBEGOVIC, 2009]), elle s'exprime par :

$$\rho \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{\lambda}{2} (\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} - \beta (T - T_0) \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\rho c}{2T_0} (T - T_0)^2. \quad (2.26)$$

Avec la loi d'état (2.24a) définissant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, on retrouve la relation donnée en équation (2.7). La loi d'état (2.24b) portant sur l'entropie s donne :

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\beta}{\rho} \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{T_0} c (T - T_0). \quad (2.27)$$

Retour sur la conservation de l'énergie. En combinant les équations (2.20) et (2.22) pour exprimer le taux d'énergie interne massique \dot{e}_i en fonction de l'énergie libre d'Helmholtz ψ et des variables d'état $\boldsymbol{\varepsilon}$ et T , l'équation locale de conservation de l'énergie (2.14) se réécrit

$$\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} + \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho T \dot{s} = r_d - \text{div } \underline{q}. \quad (2.28)$$

Après prise en compte des équations d'état (2.24), il reste la forme réduite du premier principe :

$$\rho T \dot{s} = r_d - \text{div } \underline{q}. \quad (2.29)$$

Avec $s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}(\boldsymbol{\varepsilon}, T)$, puis en utilisant les équations d'état (2.24), on peut écrire

$$\dot{s} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T}. \quad (2.30)$$

On introduit la chaleur spécifique à déformation constante c , définie par $c \equiv T \frac{\partial s}{\partial T}$, dans l'équation précédente. L'équation (2.29) devient alors

$$\rho c \dot{T} - T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = r_d - \text{div } \underline{q}. \quad (2.31)$$

Le terme $T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ représente la source de chaleur liée à la vitesse de déformation. En utilisant la loi de Hooke (2.7), on a $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} = -\beta \mathbf{I}$. De plus, sous l'hypothèse de petites variations de température, ce terme de couplage peut être linéarisé autour de la température de référence T_0 . Ainsi, la conservation de l'énergie s'écrit dans le cadre de la thermo-élasticité *linéaire* :

$$\rho c \dot{T} = -T_0 \beta \text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r_d - \text{div } \underline{q}. \quad (2.32)$$

Q Remarque 2.5

Sans cette hypothèse, l'équation d'équilibre thermique est non linéaire et s'écrit :

$$\rho c \dot{T} = -T \beta \text{Tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r_d - \text{div } \underline{q}. \quad (2.33)$$

1.4 Bilan des équations

Sous les hypothèses des petites perturbations et des petites variations de température, en négligeant le terme inertiel et en considérant un matériau homogène et isotrope, les équations régissant la thermo-élasticité linéaire sont résumées ci-après. Ces équations sont à présent toutes écrites en fonction de l'incrément de température θ plutôt que la température absolue T .

› Mécanique :

- Équation d'équilibre :

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} + \underline{f}_d = \underline{0}$$

- Relation de comportement :

$$\underline{\sigma} = 2\mu\underline{\varepsilon} + \lambda\text{Tr} \underline{\varepsilon} \underline{I} - \beta\theta \underline{I}$$

- Équation de compatibilité :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T).$$

- Condition initiale :

$$\underline{u}(\underline{x}, t = 0) = \underline{u}_{\text{ini}}(\underline{x})$$

- Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{u}_d(t) \quad \text{sur } \partial_u \Omega \\ \underline{\sigma} \underline{n} &= \underline{F}_d(t) \quad \text{sur } \partial_F \Omega \end{aligned}$$

› Thermique :

- Équation d'équilibre :

$$\rho c \dot{\theta} + \underline{\text{div}} \underline{q} + T_0 \beta \text{Tr} \underline{\dot{\varepsilon}} = r_d$$

- Relation de comportement :

$$\underline{q} = -k \underline{g}$$

- Équation de compatibilité :

$$\underline{g} = \nabla \theta$$

- Condition initiale :

$$\theta(\underline{x}, t = 0) = \theta_{\text{ini}}(\underline{x})$$

- Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_d(t) \quad \text{sur } \partial_\theta \Omega \\ -\underline{q} \cdot \underline{n} &= q_d(t) \quad \text{sur } \partial_q \Omega \\ -\underline{q} \cdot \underline{n} &= h(\theta_\infty - \theta) \quad \text{sur } \partial_c \Omega \end{aligned}$$

Q **Remarque 2.6**

- Si le coefficient de couplage β est nul, les deux physiques sont découplées. Dans le cas stationnaire, *i.e.*, avec $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\varepsilon} = \mathbf{0}$, le problème est faiblement couplé, car le champ de température peut être calculé indépendamment des grandeurs mécaniques.
- Par convention en thermique, les quantités de chaleur reçues par le système (*i.e.*, opposées à la normale sortante \underline{n}) sont notées positivement; cela explique le signe sur les conditions aux limites de flux \underline{q} imposé.

1.5 Remarques sur le problème couplé

Une brève analyse des équations de la thermo-élasticité permet de faire une analogie avec un autre problème couplé à deux physiques fréquemment étudié dans la littérature. Un coefficient adimensionné permettant de « quantifier » la force du couplage entre les deux physiques est également introduit.

Analogie avec la poro-élasticité linéaire. Il est intéressant de noter l'analogie entre la théorie de la thermo-élasticité, décrite précédemment, et celle de la poro-élasticité. En effet, les équations de la poro-élasticité sont souvent utilisées pour illustrer des travaux sur des méthodes numériques pour la résolution de problèmes multiphysiques couplés. Cette similitude facilite donc le lien avec la littérature associée, notamment les travaux antérieurs

sur la méthode LATIN-PGD dans un contexte multiphysique [DUREISSEIX et al., 2003b].

La poro-mécanique traite de l'interaction entre le squelette solide et la phase fluide d'un milieu poreux saturé de fluide. Le milieu y est décrit par un modèle macroscopique homogénéisé dans lequel on suppose que le fluide et le solide occupent le même domaine [LEWIS & SCHREFLER, 1998; COUSSY, 2004]. Cette théorie trouve notamment des applications dans l'étude des géomatériaux ou des tissus biologiques. Physiquement, on observe que la pression du fluide interstitiel joue un rôle analogue à celui décrit pour l'incrément de température dans la déformation d'un corps solide. L'analogie mathématique entre les deux théories a été relevée dès les travaux de [BIOT, 1956], puis poursuivie par [GEERTSMA, 1957] et étendue au cas anisotrope par [NORRIS, 1992].

Le [Tableau 2.2](#) permet d'apprécier la similarité des équations régissant les théories linéaires de thermo-élasticité et de poro-élasticité. Les équations purement mécaniques n'y sont pas représentées car identiques dans les deux théories. L'équation de diffusion décrivant l'évolution temporelle découle de la conservation de l'énergie pour la thermo-élasticité, et de la masse pour la poro-élasticité. La loi de Darcy relie le gradient de la pression à la vitesse de Darcy de manière analogue à la loi de Fourier. Le [Tableau 2.3](#) recense les quantités intervenant dans les équations du [Tableau 2.2](#) en mettant en regard celles qui jouent un rôle analogue dans les deux théories.

TABLEAU 2.2 • Analogie entre les équations de thermo-élasticité et de poro-élasticité linéaire

	Thermo-élasticité	Poro-élasticité
Équation de diffusion	$\frac{\rho c}{T_0} \dot{\theta} + \frac{1}{T_0} \operatorname{div} \underline{q} + \beta \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0$	$\frac{1}{M} \dot{p} + \operatorname{div} \underline{w} + b \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0$
Loi de diffusion ^a	$\underline{q} = -k \nabla \theta$	$\underline{w} = -\frac{K}{\mu_w} \nabla p$
Loi de Hooke	$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} - \beta \theta \mathbf{I}$	$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} - b p \mathbf{I}$

^a Loi de Fourier en thermo-élasticité et loi de Darcy en poro-élasticité

TABLEAU 2.3 • Analogie entre les quantités thermiques et fluides

Quantités thermiques		Quantités fluides	
Incrément de température	θ	p	Pression interstitielle
Flux thermique	\underline{q}/T_0	\underline{w}	Vitesse de Darcy
Conductivité thermique	k/T_0	K/μ_w	Perméabilité
Coefficient de couplage	β	b	Coefficient de Biot
Capacité thermique	$\rho c/T_0$	$1/Q$	Inverse du module de Biot

Quantification de la force du couplage. Lors de l'étude d'un problème multiphysique couplé, il est pertinent d'examiner la force du couplage entre les différentes physiques

considérées. L'influence de la thermique sur la mécanique étant communément prise en compte, [ZIMMERMAN, 2000] se concentre sur l'action de la mécanique sur la thermique. Il s'agit alors de quantifier l'importance de la source thermique liée aux taux de déformations relativement aux autres termes de l'équation (2.32), que l'on peut réécrire en faisant intervenir la loi de Fourier :

$$\rho c \dot{\theta} = k \Delta \theta - T_0 \beta \text{Tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (2.34)$$

En prenant la trace de la loi de Hooke thermoélastique (2.7), on peut écrire :

$$\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} + 3\alpha \theta, \quad (2.35)$$

où l'on fait apparaître le coefficient de dilatation thermique *volumique* 3α . Dans le cas limite d'expansion libre, qui se traduit par $\text{Tr} \boldsymbol{\sigma} = 0$, l'équation (2.35) montre qu'une variation de température s'accompagne d'un changement de volume :

$$\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \approx 3\alpha \theta. \quad (2.36)$$

En combinant les équations (2.36) et (2.34), il est possible de comparer les ordres de grandeur des termes instationnaires en $\dot{\theta}$. Ainsi, le champ de température peut être calculé indépendamment du taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ si

$$3T_0\alpha\beta \ll \rho c. \quad (2.37)$$

Un raisonnement similaire dans le cas limite opposé de l'expansion bloquée, détaillé dans [ZIMMERMAN, 2000], permet de conclure que l'influence de la mécanique est négligeable si

$$3T_0\alpha\beta \ll \rho c + 3T_0\alpha\beta \Rightarrow 3T_0\alpha\beta \ll \rho c. \quad (2.38)$$

Sur ces considérations, il est donc possible de définir un paramètre adimensionné « quantifiant » la force du couplage thermomécanique, nommé *Thermoelastic Coupling Parameter* (TCP) [ZIMMERMAN, 2000], et défini par

$$\text{TCP} = \frac{3T_0\alpha\beta}{\rho c}. \quad (2.39)$$

Ce coefficient sera utilisé par la suite pour évaluer la force du couplage dans les problèmes traités.

2 Formulation discrète

L'objectif de cette section est d'écrire la formulation variationnelle associée à la forme forte des équations du problème de thermo-élasticité, de sorte à pouvoir le résoudre par la méthode des éléments finis.

2.1 Écriture sous forme faible

Partie mécanique. On introduit l'espace \mathcal{U} des champs de déplacement à énergie finie sur $\Omega \times I$ satisfaisant la condition de Dirichlet :

$$\mathcal{U} \equiv \left\{ \underline{u} \mid \underline{u} \in [\mathcal{H}^1(\Omega)]^3, \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}, \quad (2.40)$$

où $\mathcal{H}^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable sur Ω , et dont les dérivées sont également de carré intégrable. On note \mathcal{U}_0 l'espace homogène associé à \mathcal{U} .

L'équation d'équilibre mécanique (2.8) s'écrit sous forme faible en la multipliant par une fonction test $\underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$, puis en intégrant sur le domaine Ω :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \underline{\text{div}} \underline{\sigma} \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega = 0. \quad (2.41)$$

Après utilisation du théorème de la divergence et prise en compte de la condition aux limites de Neumann, l'équation (2.41) devient :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial_f \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS. \quad (2.42)$$

Afin de ne faire intervenir que les inconnues primales du problème, il reste à tenir compte de la loi de Hooke (2.7) associée à la relation de compatibilité des déformations (2.3).

Partie thermique. Soit \mathcal{T} l'espace des champs de température à énergie finie sur $\Omega \times I$ satisfaisant la condition de Dirichlet, défini par

$$\mathcal{T} \equiv \left\{ \theta \mid \theta \in \mathcal{H}^1(\Omega), \theta = \theta_d \text{ sur } \partial_{\theta} \Omega \right\}, \quad (2.43)$$

et \mathcal{T}_0 son espace homogène associé. De manière similaire au problème de mécanique, l'équation d'équilibre thermique (2.32) s'écrit sous forme faible :

$$\forall \theta^* \in \mathcal{T}_0, \quad \int_{\Omega} \rho c \dot{\theta} \theta^* \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\text{div}} \underline{q} \theta^* \, d\Omega + \int_{\Omega} T_0 \beta \text{Tr} \dot{\underline{\varepsilon}} \theta^* \, d\Omega = \int_{\Omega} r_d \theta^* \, d\Omega. \quad (2.44)$$

Par intégration par parties puis prise en compte des conditions aux limites de Neumann et de Robin, le terme en divergence se développe en :

$$\int_{\Omega} \underline{\text{div}} \underline{q} \theta^* \, d\Omega = - \int_{\Omega} \underline{q} \cdot \nabla \theta^* \, d\Omega + \int_{\partial \Omega} \underline{q} \cdot \underline{n} \, dS \quad (2.45)$$

$$= - \int_{\Omega} \underline{q} \cdot \nabla \theta^* \, d\Omega - \int_{\partial_q \Omega} q_d \theta^* \, dS + \int_{\partial_c \Omega} h \theta \theta^* \, dS - \int_{\partial_c \Omega} h \theta_{\infty} \theta^* \, dS. \quad (2.46)$$

Il reste à tenir compte de la loi de Fourier (2.25).

Problème couplé. On aboutit ainsi au problème variationnel suivant, portant uniquement sur les inconnues primales \underline{u} et θ :

Trouver $(\underline{u}, \theta) \in \mathcal{U} \times \mathcal{T}$ tel que $\forall t \in I$,

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) : \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) \, d\Omega - \int_{\Omega} \beta \theta \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS, \quad (2.47a)$$

$$\begin{aligned} \forall \theta^* \in \mathcal{T}_0, \quad & \int_{\Omega} \rho c \dot{\theta} \theta^* \, d\Omega + \int_{\Omega} k \nabla \theta \cdot \nabla \theta^* \, d\Omega + \int_{\Omega} \beta T_0 \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{u}) \theta^* \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} h \theta \theta^* \, dS \\ & = \int_{\Omega} r_d \theta^* \, d\Omega + \int_{\partial_q \Omega} q_d \theta^* \, dS + \int_{\partial_c \Omega} h \theta_{\infty} \theta^* \, dS, \end{aligned} \quad (2.47b)$$

tout en vérifiant les conditions aux limites de Dirichlet et les conditions initiales.

2.2 Discrétisation par éléments finis

Discrétisation spatiale. Afin de résoudre le problème variationnel (2.47) par la méthode des éléments finis [ZIENKIEWICZ et al., 2013], le domaine Ω est discrétisé (étape de maillage) et les champs solutions $\underline{u}(\underline{x}, t)$ et $\theta(\underline{x}, t)$ sont recherchés dans des espaces à dimensions finies $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{T}_h \subset \mathcal{T}$. Les fonctions de base de ces espaces, également appelées fonctions de forme, permettent alors d'interpoler les champs dans tout l'espace par la simple connaissance des valeurs aux nœuds du maillage. Les champs inconnus s'écrivent au niveau d'un élément Ω_e :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) \Big|_{\Omega_e} = \mathbf{N}_{\mathbf{u}}(\underline{x})^T \mathbf{u}^e(t), \quad (2.48a) \quad \theta(\underline{x}, t) \Big|_{\Omega_e} = \mathbf{N}_{\theta}(\underline{x})^T \theta^e(t), \quad (2.48b)$$

avec $\mathbf{N}_{\mathbf{u}}$ et \mathbf{N}_{θ} les matrices contenant les fonctions de forme, \mathbf{u}^e et θ^e les vecteurs des inconnues nodales de déplacement et de température, respectivement. Les quantités discrètes sont notées avec des symboles droits. Une approximation similaire à l'équation (2.48) est utilisée pour les fonctions test $\underline{u}^*(\underline{x}, t)$ et $\theta^*(\underline{x}, t)$. Les dérivées premières en espace de $\mathbf{N}_{\mathbf{u}}$ et \mathbf{N}_{θ} sont respectivement notées $\mathbf{B}_{\mathbf{u}}$ et \mathbf{B}_{θ} , permettant d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) \Big|_{\Omega_e} = \mathbf{B}_{\mathbf{u}}(\underline{x})^T \mathbf{u}^e(t), \quad (2.49a) \quad \nabla \theta(\underline{x}, t) \Big|_{\Omega_e} = \mathbf{B}_{\theta}(\underline{x})^T \theta^e(t). \quad (2.49b)$$

En s'appuyant sur la formulation variationnelle (2.47), nous pouvons introduire les matrices élémentaires suivantes, qui utilisent les opérateurs discrets précédemment définis :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\theta\theta}^e &= \int_{\Omega_e} \rho c \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{N}_{\theta} \, d\Omega, & \mathbf{K}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}^e \mathbf{B}_{\mathbf{u}} \, d\Omega, \\ \mathbf{C}_{\mathbf{u}\theta}^e &= \int_{\Omega_e} \beta T_0 \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{B}_{\mathbf{u}} \, d\Omega, & \mathbf{K}_{\theta\mathbf{u}}^e &= - \int_{\Omega_e} \beta \mathbf{B}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_{\theta} \, d\Omega, \\ & & \mathbf{K}_{\theta\theta}^e &= \int_{\Omega_e} k \mathbf{B}_{\theta}^T \mathbf{B}_{\theta} \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega_e} h \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{N}_{\theta} \, dS. \end{aligned} \quad (2.50a) \quad (2.50b)$$

Les matrices $\mathbf{K}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^e$, $\mathbf{K}_{\theta\theta}^e$ et $\mathbf{C}_{\theta\theta}^e$ correspondent respectivement aux matrices de rigidité, de conduction et de capacité que l'on rencontre classiquement dans des analyses par éléments finis de mécanique ou de thermique. Les matrices $\mathbf{C}_{\mathbf{u}\theta}^e$ et $\mathbf{K}_{\theta\mathbf{u}}^e$, dites de couplage, sont spé-

cifiques au problème couplé considéré. Dans le cas présent, ces matrices sont reliées par : $\mathbf{C}_{\theta\mathbf{u}} = -T_0\mathbf{K}_{\mathbf{u}\theta}^T$. On introduit également les seconds membres liés aux différents chargements appliqués :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^e(t) &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_{\mathbf{d}}(t) d\Omega + \int_{\partial_F \Omega_e} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}_{\mathbf{d}}(t) dS, \\ \mathbf{f}_{\theta}^e(t) &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{r}_{\mathbf{d}}(t) d\Omega + \int_{\partial_q \Omega_e} \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{q}_{\mathbf{d}}(t) dS + \int_{\partial_c \Omega_e} h\theta_{\infty} \mathbf{N}_{\theta}^T dS.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Après assemblage des matrices élémentaires (2.50) et des seconds membres (2.51) sur l'ensemble des éléments, le problème de thermo-élasticité discrétisé en espace s'écrit sous forme matricielle :

$$\forall t \in I, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\theta\mathbf{u}} & \mathbf{C}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{uu}} & \mathbf{K}_{\mathbf{u}\theta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{f}_{\theta}(t) \end{bmatrix}\quad (2.52)$$

Q Remarque 2.7

Le système (2.52) n'est pas symétrique, ce qui rend sa résolution directe coûteuse. Si on le souhaite, ce système peut être mis sous la forme symétrique de l'équation (2.53) en dérivant le premier groupe d'équations par rapport au temps et le multipliant par $-T_0$ (d'après [LEWIS & SCHREFLER, 1998] pour le problème de poro-élasticité).

$$\forall t \in I, \quad \begin{bmatrix} -T_0\mathbf{K}_{\mathbf{uu}} & \mathbf{C}_{\theta\mathbf{u}}^T \\ \mathbf{C}_{\theta\mathbf{u}} & \mathbf{C}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_0\dot{\mathbf{f}}_{\mathbf{u}}(t) \\ \mathbf{f}_{\theta}(t) \end{bmatrix}\quad (2.53)$$

Remarque sur le choix des fonctions d'interpolation. La résolution d'un problème multi-physique couplé implique l'utilisation d'éléments finis mixtes (déplacement/température dans le cas présent). Les espaces \mathcal{U}_h et \mathcal{T}_h ne peuvent alors pas être choisis indépendamment. Il est recommandé d'utiliser une interpolation d'ordre plus faible pour la température que pour le déplacement [IBRAHIMBEGOVIC, 2009]. En effet, cela permet d'assurer la correspondance entre l'ordre de l'approximation des déformations thermiques $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{th}}$, découlant directement du champ de température, et des déformations élastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, obtenues à partir du gradient des déplacements. L'utilisation d'interpolations d'ordre égal peut entraîner l'apparition d'oscillations parasites sur les contraintes [PRATHAP & NAGANARAYANA, 1995].

Certaines références (e.g., [KOLESOV et al., 2014; LARION et al., 2020; BALLARIN et al., 2024; VABISHCHEVICH et al., 2014]) invoquent également la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (dite *LBB*, ou encore condition *inf-sup*) [BOFFI et al., 2013], qui assure la stabilité d'un problème de type point-selle. Le problème de thermo-élasticité peut s'apparenter à un problème de point-selle dans le cas adiabatique (impliquant que $\mathbf{K}_{\theta\theta} = \mathbf{0}$) et si $\mathbf{C}_{\theta\theta} \approx \mathbf{0}$.

Dans la suite, on utilisera des éléments finis linéaires pour la température, et quadratiques pour les déplacements.

Discrétisation en temps. Le système (2.52) est discrétisé en temps à l'aide d'un schéma d'Euler implicite. Si X est une fonction du temps, sa valeur X^{i+1} à l'instant t_{i+1} s'exprime en fonction de la valeur X^i de l'instant t_i par :

$$X^{i+1} = X^i + \Delta t \dot{X}^{i+1}, \quad (2.54)$$

où l'on a noté $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ le pas de temps supposé uniforme sur l'intervalle $I = [0, t_f]$. Ce schéma d'intégration est appliqué au vecteur inconnu $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}]^T$ dans l'équation (2.52).

On aboutit au système linéaire suivant, dit *monolithique*, à résoudre à chaque pas de temps t_{i+1} en tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{bmatrix} \Delta t \mathbf{K}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} & \Delta t \mathbf{K}_{\mathbf{u}\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{u}} & \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} + \Delta t \mathbf{K}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} \Delta t \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^{i+1} \\ \Delta t \mathbf{f}_{\boldsymbol{\theta}}^{i+1} + \mathbf{C}_{\mathbf{u}\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}_i + \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Le système linéaire (2.55) est de la forme du système générique (1.23) utilisé dans le Chapitre 1 pour décrire les méthodes de résolution classiques de problèmes multiphysiques. L'approche monolithique, qui consiste à résoudre le système (2.55) entier à chaque pas de temps, est mise en œuvre dans la section suivante pour servir de référence.

Q Remarque 2.8

Puisque la matrice du système linéaire (2.55) dépend du pas de temps Δt , l'utilisation d'un pas de temps variable exigerait de refactoriser cette matrice à chaque changement de pas, même si le problème reste linéaire.

3 Implémentation numérique

Cette section a pour objectif de présenter l'environnement numérique collaboratif dans lequel s'insèrent les développements de cette thèse. Les premiers résultats sont ensuite validés en les comparant à la littérature existante et à un code annexe diffusé en open-source.

3.1 ROMlab : une plateforme collaborative

L'ensemble des développements numériques de cette thèse a été réalisé dans le démonstrateur ROMlab. Il s'agit d'un code développé ces dernières années au sein du Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay (LMPS) en langage Matlab® pour la simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis. Plus particulièrement, ROMlab est une plateforme collaborative dédiée au développement de différentes variantes de la méthode LATIN, notamment pour la mise en place de méthodes de réduction de modèles. L'objectif est de pérenniser ces développements, tout en mutualisant les routines communes à diverses applications, notamment dans les phases de pré- et post-traitement.

Bref historique. Initié par D. Néron, le démonstrateur ROMlab a ensuite évolué grâce aux apports de différentes thèses. La Figure 2.5 présente, de manière non exhaustive, les princi-

paux et plus récents développements intégrés à ROMlab, ainsi que leurs auteurs. L'intégration continue de ces développements est assurée par T. Verbeke (ingénieur d'études au centre de simulation) et passe par un dépôt Git interne au laboratoire.

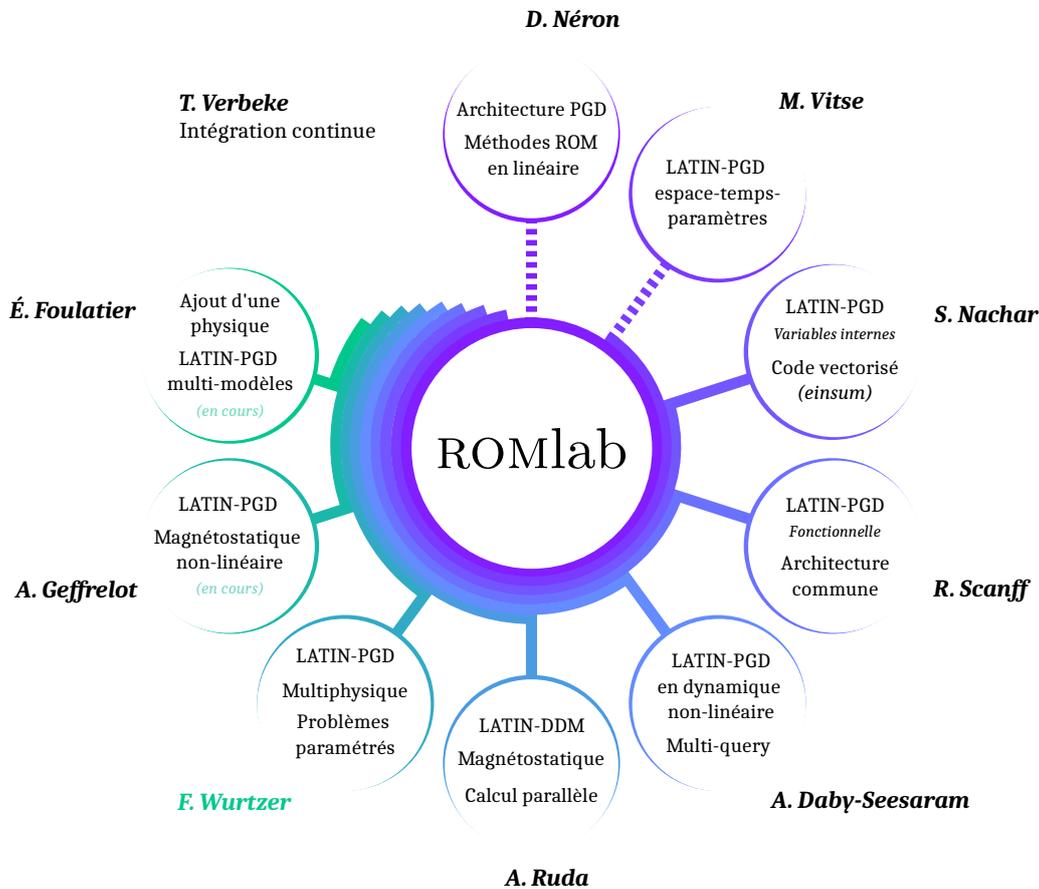


FIGURE 2.5 • Développements des principaux contributeurs à ROMlab, d'après [RUDA, 2023]

Des premiers travaux ont porté sur l'analyse de l'endommagement dans les structures en béton armé par la méthode LATIN-PGD en considérant les paramètres comme des coordonnées additionnelles de la décomposition [VITSE, 2016]. Par la suite, une approche à *variables internes* de la méthode LATIN-PGD a été implémentée par [NACHAR, 2019] pour la résolution de problèmes élasto-visco-plastiques, tandis que [SCANFF, 2022] a développé l'approche *fonctionnelle* de la méthode. S. Nachar a également accordé une attention particulière à l'optimisation du code en tirant pleinement parti des processeurs vectoriels actuels. Un élément clé de cette optimisation est l'utilisation de la fonction *einsum*², permettant d'effectuer des calculs tensoriels de manière plus efficace en appliquant le principe de la sommation d'Einstein. Par ailleurs, R. Scanff a contribué à l'uniformisation des différentes routines sous une architecture logicielle commune. C'est sur cette version mise à jour que se basent les développements postérieurs. Les travaux les plus récents concernent la résolution de problèmes de dynamique non linéaires dans un cadre multi-requêtes par [DABY-SEESARAM, 2023], ainsi qu'une méthode de décomposition de domaine pour la résolution parallèle de problèmes magnétostatiques [RUDA, 2023]. Les développements en cours portent sur l'extension de

2. Fonction einsum pour Matlab (<https://github.com/SNachar/einsum>), basée sur la fonction homonyme de la bibliothèque NumPy de Python™ (<https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.einsum.html>)

cette dernière approche à la magnétostatique non linéaire et à l'application de réduction de modèles par PGD au cours de la thèse d'A. Geffrelot.

Extension au multiphysique. Il est donc possible, sous une architecture logicielle commune, de résoudre des problèmes de mécanique (incluant diverses non-linéarités matériaux), de thermique et de magnétostatique. Néanmoins, seuls des problèmes mono-physiques étaient résolus dans ROMlab jusqu'à présent. L'un des premiers apports de cette thèse a été d'étendre les capacités du logiciel à la résolution de problèmes multiphysiques. Outre l'implémentation de solveurs spécifiques, en particulier la méthode LATIN-PGD détaillée au [Chapitre 3](#), la phase de pré-traitement a dû être adaptée pour gérer plusieurs physiques et leur couplage. Un travail d'harmonisation des parties mutualisées, en particulier au niveau de la mise en données par l'utilisateur et de l'assemblage des opérateurs éléments finis, a permis de réutiliser les routines mono-physiques existantes. L'implémentation mise en place limite alors l'impact sur les autres utilisateurs et prépare l'extension du code à d'autres problèmes couplés que la thermo-mécanique.

L'architecture du code étendu à la simulation multiphysique est présentée succinctement dans la suite et résumée sur la [Figure 2.6](#). Les nouvelles implémentations spécifiques au multiphysique y sont indiquées en vert. Les parties existantes du code, auxquelles des contributions ont été apportées (dont une sélection est détaillée en [Annexe A](#)), sont représentées en violet.

Pour lancer une simulation, l'utilisateur de ROMlab doit fournir deux fichiers :

1. le **maillage** de la géométrie généré sous GMSH³ [[GEUZAIN & REMACLE, 2009](#)],
2. un unique **fichier d'entrée** qui renseigne à la fois les paramètres généraux de la simulation (physique(s) impliquée(s), méthode(s) de résolution), puis pour chaque physique les conditions aux limites et le matériau.

Un travail conjoint avec T. Verbeke a permis de simplifier la mise en donnée d'un calcul, en centralisant toutes les informations nécessaires dans ce seul fichier d'entrée, auquel le code fait appel au cours des différentes étapes de pré-traitement. De manière classique, une simulation se déroule ensuite en trois grandes étapes :

- **Pré-traitement** : les données et opérateurs éléments finis nécessaires à la résolution sont construits par un ensemble de routines communes à tous les cas d'utilisation. Dans le cadre multiphysique, ces routines (lecture du maillage, construction puis assemblage des opérateurs éléments finis, application des conditions aux limites) sont exécutées successivement pour chaque physique. Ensuite, une routine spécifique a été ajoutée pour construire les opérateurs relatifs au couplage.
- **Résolution**, avec le(s) solveur(s) choisi(s). ROMlab propose différentes possibilités : solveur linéaire (statique, instationnaire ou dynamique) et algorithme de Newton-Raphson pour servir de référence, ainsi que de nombreuses variantes de la méthode LATIN(-PGD). Pour le problème multiphysique de thermo-mécanique, les solveurs monolithique, partitionnés SSP et ISSP, et LATIN-PGD ont été implémentés.

3. <https://gmsh.info/>

- **Post-traitement** : en plus d'exploitations réalisées directement dans Matlab, les champs solutions peuvent être visualisés et exploités avec le logiciel libre *ParaView*⁴.

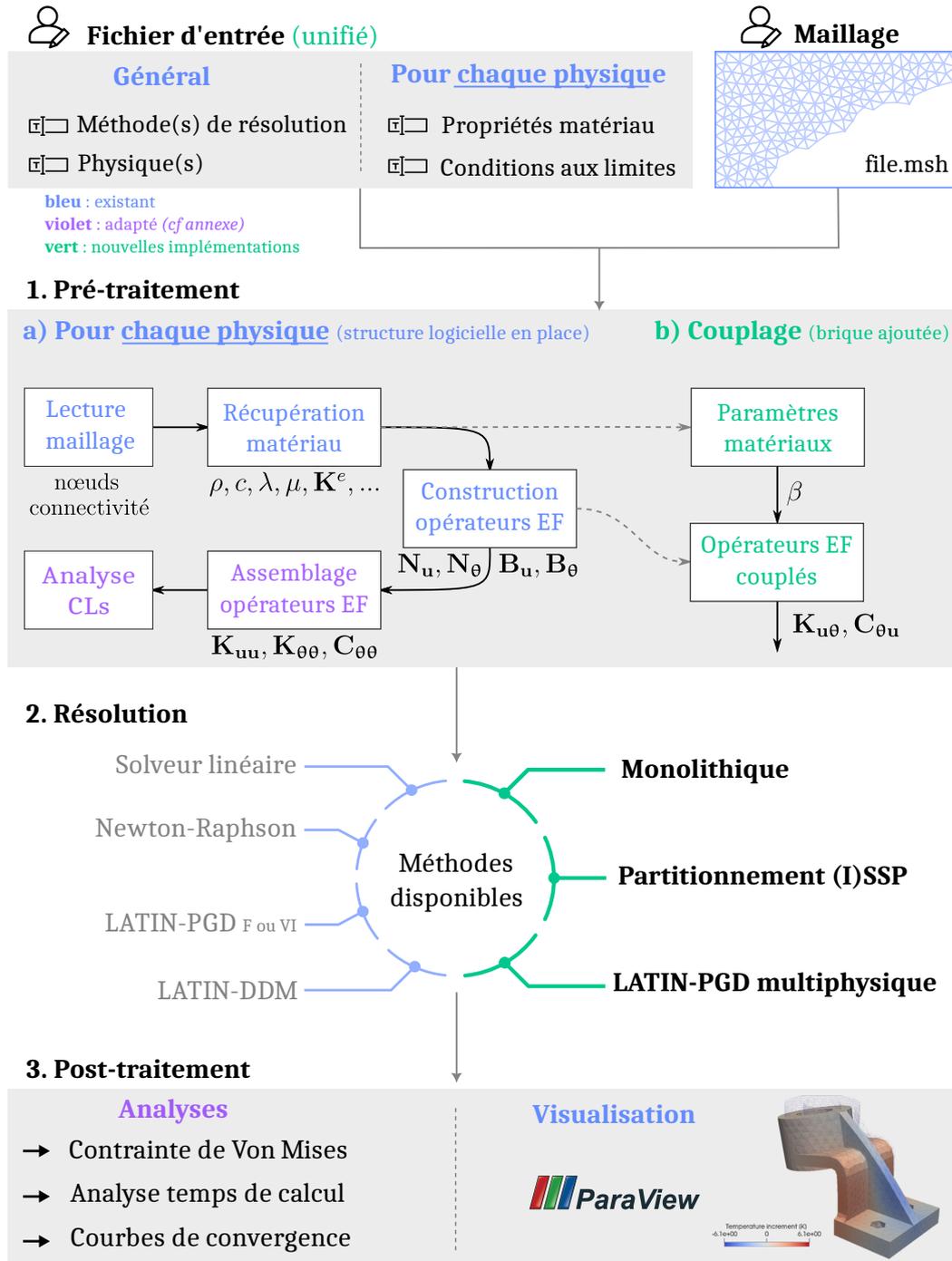


FIGURE 2.6 • Architecture du code ROMlab adapté à la résolution de problèmes multiphysiques, d'après [RUDA, 2023]

Ces développements participent à l'extension du code ROMlab et serviront notamment de base à É. Foulatier (thèse CDSN 2024-2027) pour développer un cadre de simulation multi-modèles basé la méthode LATIN-PGD et l'appliquer à un problème couplé à trois physiques potentiellement non linéaire.

4. <https://www.paraview.org/>

3.2 Comparaison à un *benchmark* : validation et discussion

Afin de valider l'implémentation de la méthode monolithique dans ROMlab, les résultats obtenus sont comparés à ceux de la littérature sur le *benchmark* du *second problème de Danilovskaya*. Introduit par [DANILOVSKAYA, 1952] dans un cas uni-dimensionnel, ce problème s'est imposé comme la référence pour la validation de modèles numériques en thermo-élasticité fortement couplée (voir références dans le Tableau 2.4, page 61).

Description du problème. L'étude porte sur un parallélépipède à base carrée, de côté $H = 4 \text{ mm}$ et de longueur $L = 6 \text{ mm}$, comme schématisé en Figure 2.7a. La géométrie est discrétisée avec $12 \times 4 \times 4$ éléments hexaédriques. La base en $x = L$ est encastée, tandis que celle en $x = 0$ est laissée libre de contraintes. Bien que la simulation soit tri-dimensionnelle, les conditions aux limites sur les quatre faces latérales

$$\underline{q} \cdot \underline{n} = 0, \quad \underline{u} \cdot \underline{y} = u_y = 0, \quad \underline{u} \cdot \underline{z} = u_z = 0 \quad (2.56)$$

permettent de rester fidèle au problème uni-dimensionnel original le long de la ligne moyenne. L'évolution des champs mécaniques et thermiques est induite par le flux convectif imposé sur le bord $x = 0$:

$$\underline{q} \cdot \underline{n} = h(\theta - \theta_\infty). \quad (2.57)$$

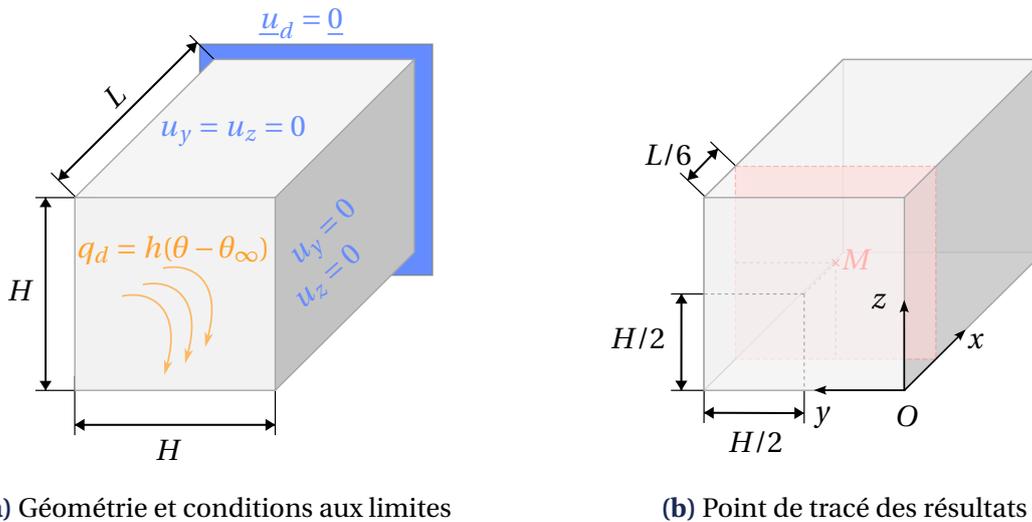


FIGURE 2.7 • Définition du second problème de Danilovskaya

Comme le souligne [DANOWSKI et al., 2013], tous les paramètres matériaux ne sont pas systématiquement spécifiés dans la littérature, notamment dans les références les plus anciennes qui s'appuient sur des paramètres adimensionnés [TANAKA et al., 1995; FARHAT et al., 1991]. Pour y pallier, [DANOWSKI et al., 2013] a proposé des valeurs qui ont été réutilisées dans des travaux postérieurs – avec quelques variations. Le Tableau 2.4 présente un comparatif des paramètres utilisés dans la littérature pour la simulation de ce *benchmark*. Les informations manquantes ou incohérentes entre les différents travaux sont signalées en orange. Ce tableau n'inclut pas les références dans lesquelles toutes les quantités sont adimensionnées, telles que [AHN et al., 2022; FARHAT et al., 1991; HILLMAN & LIN, 2021].

TABLEAU 2.4 • Comparatif des paramètres de simulation du second problème de Danilovskaya dans la littérature

	[TANAKA et al., 1995]	[DANOWSKI et al., 2013]	[VERDUGO & WALL, 2016]	[SHU & STANCIULESCU, 2019]	[ASUR VIJAYA KUMAR et al., 2022]
Hypothèses					
Quasi-statique?	Oui	Non	Non	Oui	Non
Thermique linéaire?	Oui	Oui & Non	Non	Non	Non
Chargement					
$z = 0$	convection libre	convection libre	convection –	convection –	convection –
$z = L$?	?	encasté	encasté	?
Faces latérales	$\underline{q} \cdot \underline{n} = 0$ $u_y = u_z = 0$	$\underline{q} \cdot \underline{n} = 0$ $u_y = u_z = 0$	$\underline{q} \cdot \underline{n} = 0$?	$\underline{q} \cdot \underline{n} = 0$ $u_y = u_z = 0$	– $u_y = u_z = 0$
Matériau					
E [GPa]	210	210	210	210	210
ν [–]	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
α [K ⁻¹]	1.1×10^{-5}	1.1×10^{-5}	1.1×10^{-5}	1.1×10^{-5}	1.1×10^{-5}
T_0 [K]	?	273.15	273.15	273.15	273.15
θ_∞ [K]	100	100	99	100	100
k [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	?	1.03	1.03	1.03	1.03
ρ [kgm ⁻³]	?	7850	7860	7850	7850
c [Jkg ⁻¹ K ⁻¹]	?	0.821	0.821	0.821	0.896
$k/\rho c$ [m ² s ⁻¹]	1.6×10^{-5}	1.6×10^{-4}	1.6×10^{-4}	1.6×10^{-4}	1.46×10^{-4}
$h/\rho c$ [ms ⁻¹]	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	$\sim 10^{-3}$?
h [Wm ⁻² K ⁻¹]	?	0.6444	0.06453	6.453	?
Résultats					
Max. u_z [μm]	4.5	5 ou 1 ^a	0.55	$\gtrsim 1$	1
Max. T [K]	52 ^b	322 ou 284 ^a	281	284	285
Référence pour comparaison	Analytique	[TANAKA et al., 1995]	–	[DANOWSKI et al., 2013]	[DANOWSKI et al., 2013]

^a en thermique linéaire ou non linéaire, respectivement

^b donné sous forme d'incrément $\theta = T + T_0$, sans préciser T_0

Q Remarque 2.9

Plusieurs remarques peuvent être formulées :

- la plupart des paramètres matériaux laissent penser à un acier; cependant les valeurs retenues pour la capacité c et la conductivité k diffèrent de plusieurs ordres de grandeur des valeurs physiques usuelles;
- la diffusivité thermique $\frac{k}{\rho c}$ obtenue avec les valeurs proposées par [DANOWSKI et al., 2013] diffère d'un ordre de grandeur de celle de [TANAKA et al., 1995], dont les résultats ont pourtant guidé le choix des paramètres;
- alors que [SHU & STANCIULESCU, 2019] et [ASUR VIJAYA KUMAR et al., 2022] comparent tous deux (avec succès) leurs résultats à ceux de [DANOWSKI et al., 2013], les premiers utilisent un coefficient de convection supérieur d'un ordre de grandeur, tandis que les seconds omettent de le préciser.

Validation. Les paramètres matériaux sont choisis conformément à [SHU & STANCIULESCU, 2019]; on pourra se référer à la colonne correspondante dans le [Tableau 2.4](#). L'intervalle de simulation $I = [0, 4\text{s}]$ est discrétisé avec un pas de temps uniforme $\Delta t = 4 \times 10^{-3}\text{s}$. Le déplacement longitudinal u_x et la température absolue T sont évalués au point de coordonnées $[L/6, H/2, H/2]$, noté M sur la [Figure 2.7b](#). Les résultats obtenus avec le solveur monolithique implémenté dans ROMlab sont comparés à ceux de [SHU & STANCIULESCU, 2019] sur la [Figure 2.8](#); une correspondance satisfaisante est observée.

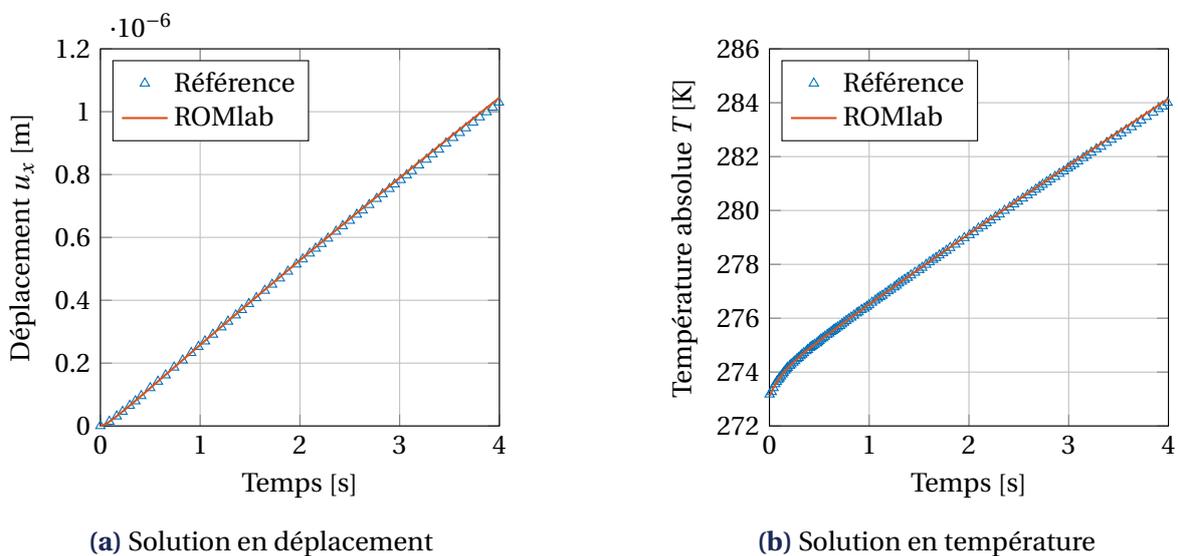


FIGURE 2.8 • Comparaison des résultats obtenus avec ROMlab à ceux de [SHU & STANCIULESCU, 2019]

Néanmoins, [SHU & STANCIULESCU, 2019] considère l'équation d'équilibre thermique non linéaire (2.33), tandis que seul le cas linéaire, basé sur l'équation (2.32), a été implémenté dans ROMlab. Selon [DANOWSKI et al., 2013], cette hypothèse a un impact significatif sur les résultats. Pour comparer les hypothèses en limitant au maximum les erreurs d'implémenta-

tion, la résolution du *benchmark* a été implémentée dans le code open-source NGSolve⁵ en se basant sur l'exemple fourni par [BLEYER, 2016] en thermo-élasticité 2D sur FEniCS⁶, une autre librairie de calcul éléments finis. Le code développé sur NGSolve est mis à disposition sur GitHub [WURTZER & CHERRIÈRE, 2024].

Discussion sur les hypothèses. Nous avons alors pu comparer les solutions obtenues en considérant dans l'équation d'équilibre thermique un terme de couplage linéaire ou non, voire en le négligeant. Dans ce dernier cas, le problème de thermo-mécanique est faiblement couplé puisque la partie thermique peut être résolue indépendamment de la mécanique. L'incidence de chacune de ces trois hypothèses sur l'équation d'équilibre est recensée dans le [Tableau 2.5](#).

TABLEAU 2.5 • Équation d'équilibre thermique associée à différentes hypothèses sur le terme source d'origine mécanique

Hypothèse sur le terme de couplage	Équation d'équilibre thermique
Non linéaire – cf. eq. (2.33)	$\rho c \dot{\theta} + \operatorname{div} \underline{q} + T \beta \operatorname{Tr} \dot{\underline{\epsilon}} = r_d$
Linéaire – cf. eq. (2.32)	$\rho c \dot{\theta} + \operatorname{div} \underline{q} + T_0 \beta \operatorname{Tr} \dot{\underline{\epsilon}} = r_d$
Négligé	$\rho c \dot{\theta} + \operatorname{div} \underline{q} = r_d$

La [Figure 2.9](#) compare l'évolution temporelle du déplacement longitudinal u_x et de la température absolue T , toujours évalués au point M défini sur la [Figure 2.7b](#), pour les différentes hypothèses formulées. On constate que la linéarisation du terme de couplage n'a

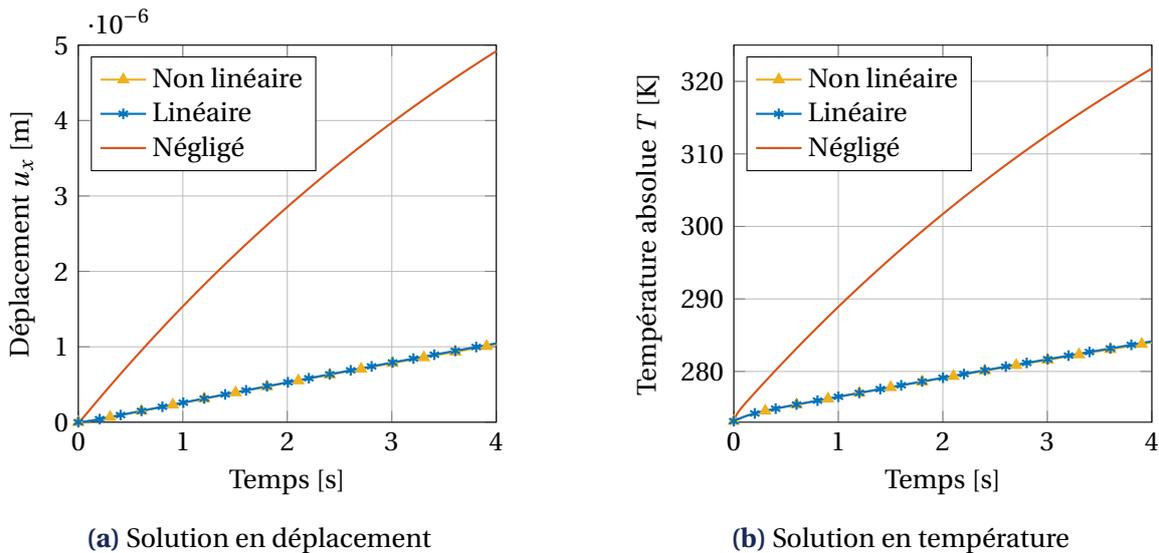


FIGURE 2.9 • Comparaison des solutions au problème de Danilovskaya pour différentes hypothèses sur le terme de couplage dans l'équation thermique

5. <https://ngsolve.org/>

6. <https://fenicsproject.org/>, basé sur le même langage (*Unified Form Language*) que NGSolve

finalement que très peu d'influence sur les résultats, avec un écart relatif de 1.53% pour le déplacement et de 0.054% sur la température à l'instant final $t = 4$ s. Cette conclusion est cohérente avec le fait que l'incrément de température observé dans le cas non linéaire est de l'ordre de $\theta \approx 10$ K, ce qui rentre pleinement dans l'hypothèse des petites variations de température ($\theta \ll T_0$) justifiant la linéarisation. En revanche, la Figure 2.9 montre que négliger l'influence de la mécanique sur la thermique modifie considérablement les champs solutions obtenus. En effet, les paramètres matériaux choisis entraînent un coefficient TCP ≈ 8 (défini à l'équation (2.39)), traduisant effectivement une force de couplage importante.

Sous les hypothèses de couplage fort, d'équation thermique linéaire et de problème mécanique quasi-statique, les résultats de ROMlab sont comparés à ceux obtenus avec NGSolve. La Figure 2.10 représente, pour chacune des quantités $\square = u_x, T$, l'erreur relative définie par

$$e_{\square}(t_i) = \frac{\square_{\text{NGSolve}}(t_i) - \square_{\text{ROMlab}}(t_i)}{\max_{t_i \in I} \square_{\text{NGSolve}}(t_i)}. \quad (2.58)$$

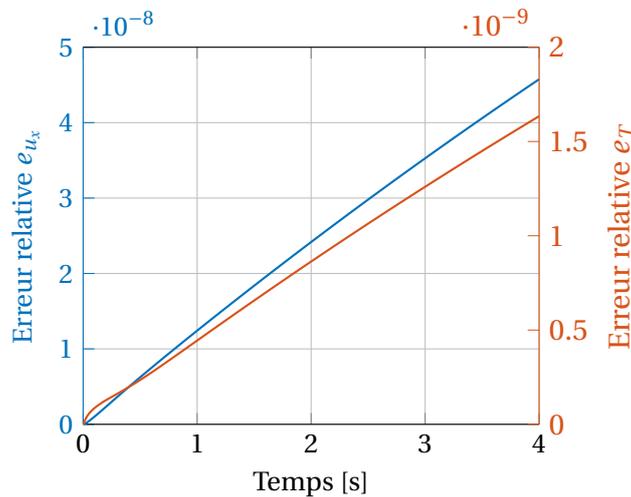


FIGURE 2.10 • Écarts relatifs entre les résultats de ROMlab et du code NGSolve pour le *benchmark* de Danilovskaya

Les erreurs relatives obtenues, de l'ordre de 10^{-8} pour le déplacement et 10^{-9} pour la température, permettent de valider l'implémentation de la méthode de résolution monolithique dans ROMlab. Elle servira alors de référence dans la suite du manuscrit.

➤ Bilan du chapitre

Ce chapitre se focalise sur le problème couplé de thermo-élasticité linéaire, choisi pour illustrer les développements de cette thèse. L'obtention des équations régissant ce problème sont détaillées à partir des principes de la thermodynamique des processus irréversibles, faisant naturellement apparaître les termes de couplage et permettant de s'interroger sur les hypothèses considérées.

Le démonstrateur collaboratif ROMlab, dans lequel ont été intégrés les développements numériques de cette thèse, a également été présenté. Les travaux de ce chapitre ont permis l'extension de ce démonstrateur à la résolution de problèmes multiphysiques couplés. Cette extension a nécessité d'adapter à la fois la mise en données du problème, désormais contenue dans un fichier unifié, et la construction des opérateurs éléments finis par l'introduction d'une routine additionnelle pour la gestion du couplage. La structure logicielle existante pour les problèmes monophysiques a été conservée, ce qui limite l'impact des modifications sur les autres utilisateurs. Ces adaptations ont été pensées de manière générique, de sorte à envisager la résolution d'autres problèmes couplés que la thermo-élasticité, ce qui sera exploité durant le stage de M2 d'É. Foulatier que je co-encadre.

Enfin, l'implémentation du solveur monolithique dans ROMlab a été validée sur le *benchmark* du second problème de Danilovskaya. Après une analyse critique de la littérature mettant en exergue un certain nombre de points confus, un code annexe a été développé sur le logiciel libre NGsolve et mis à disposition en open-source à travers le dépôt [WURTZER & CHERRIÈRE, 2024] dans l'objectif d'améliorer la reproductibilité du *benchmark*. Cet exemple a permis de mettre en évidence l'influence de différentes hypothèses de modélisation : importance de la prise en compte du couplage bi-directionnel et pertinence de l'approximation linéaire.

Dans la suite, une méthode de résolution alternative, basée sur la méthode LATIN-PGD, est appliquée au problème modèle de thermo-élasticité. Pour en tirer pleinement parti, les équations introduites dans ce chapitre seront légèrement remaniées. Le solveur monolithique, dont l'implémentation a été validée, servira de référence pour cette nouvelle approche décrite dans le [Chapitre 3](#).

* * *

3

La méthode LATIN-PGD : cas d'application multiphysique

Ce chapitre introduit la méthode LATIN-PGD appliquée à la résolution de problèmes multiphysiques. En particulier, on y détaille comment la méthode de réduction de modèle Proper Generalized Decomposition (PGD) s'y insère naturellement et peut être appliquée indépendamment à chaque physique, offrant une flexibilité particulièrement intéressante. Une première application numérique simple permet de valider l'implémentation, tandis qu'une illustration sur un cas d'échelle offre un aperçu des performances de la méthode. Ce chapitre s'appuie en grande partie sur [WURTZER et al., 2024b].

Sommaire

1	La méthode LATIN-PGD appliquée à la thermo-élasticité	68
1.1	Séparation des difficultés	69
1.2	Algorithme itératif à deux étapes	70
1.3	L'étape couplée locale	73
1.4	L'étape découplée linéaire	74
1.5	Réduction de modèle	77
2	Implémentation numérique sur un exemple académique	83
2.1	Description du cas test	83
2.2	Validation de la méthode	84
2.3	Choix des directions de recherche	88
2.4	Influence de la force de couplage	91
3	Application à un cas d'échelle	92
3.1	Description du cas test	92
3.2	Résultats numériques et analyse des performances	94
➤	Bilan du chapitre	97

La méthode LATIN a initialement été introduite dans [LADEVÈZE, 1985] pour la résolution de problèmes d'évolution mécanique avec un comportement non linéaire. À l'inverse des approches de type Newton – classiques pour ce type de problèmes – dans lesquelles la solution est construite de manière incrémentale (un pas de temps après l'autre), avec des sous-itérations à chaque pas de temps, la méthode LATIN suit une philosophie différente en considérant l'intervalle temporel entier à chaque itération. Pour cette raison, la méthode LATIN est souvent qualifiée de *non incrémentale*. À chaque itération du solveur LATIN, une meilleure approximation de la solution est construite sur tout le domaine spatial et sur l'intervalle de temps entier. Cette particularité permet d'intégrer naturellement la méthode de réduction de modèle *a priori* par PGD ; on parle alors de méthode LATIN-PGD.

Depuis les années 1980, la méthode LATIN(-PGD) a fait l'objet de nombreuses études qui ont permis de l'étendre à un large éventail d'applications. Une revue récente de ces travaux est disponible en annexe de [SCANFF et al., 2021]. Parmi les grands axes de développement, on peut citer la simulation de problèmes avec des non-linéarités matériaux [COGNARD et al., 1999] ou de contact [BLANZE et al., 1996], l'extension aux grandes déformations [BOUCARD et al., 1997], l'étude de phénomènes dynamiques non linéaires [ROYER, 1990; DABY-SEESARAM et al., 2023], ainsi que le développement d'une méthode de décomposition de domaine mixte [CHAMPANEY et al., 1997; LADEVÈZE et al., 2010; RUDA et al., 2022]. Plus récemment, des efforts ont également été entrepris pour rendre la méthode moins intrusive et l'intégrer à des codes de calcul industriels existants, notamment dans le cadre d'assemblages mécaniques [OUMAZIZ et al., 2019] ou de problèmes non linéaires en mécanique [SCANFF et al., 2022] et en thermique [MALLEVAL et al., 2023].

Quel que soit le problème traité, la méthode repose sur les trois mêmes ingrédients :

1. la **séparation des difficultés** contenues dans les équations du problème,
2. l'utilisation d'un **schéma itératif à deux étapes**,
3. la **représentation des inconnues** sous une forme à variables séparées.

La déclinaison de ces trois points dans le cadre du problème multiphysique de thermo-élasticité fait l'objet de la section suivante.

1 La méthode LATIN-PGD appliquée à la thermo-élasticité

Les grandes idées sur lesquelles repose l'extension de la méthode LATIN-PGD à la résolution de problèmes multiphysiques couplés ont été données à la Section 3.4 du chapitre 1 (page 32). Les développements antérieurs dans le cadre de la (thermo-)poro-élasticité, linéaire ou non, y ont également été passés en revue. Dans cette section, on décrit l'application de la méthode LATIN-PGD au problème de thermo-élasticité linéaire, défini à la Section 1 du chapitre 2 (page 42). Cette stratégie de calcul sera au cœur des aspects multiparamétriques qui feront l'objet du Chapitre 4, mais qui ne sont pas abordés ici.

1.1 Séparation des difficultés

Quel que soit son cas d'application, le point de départ de la méthode LATIN est de scinder les équations du problème en deux groupes afin d'isoler les difficultés à traiter. On repart donc des équations du problème sous forme forte, avant une quelconque discrétisation. Dans le cadre de problèmes multiphysiques, il s'agit d'éviter de résoudre simultanément des équations *globales sur l'espace* (dans le sens où elles relient tous les degrés de liberté spatiaux de la structure étudiée) et *couplées* (faisant intervenir des inconnues de plusieurs physiques) [DUREISSEIX et al., 2003b].

Q Remarque 3.1

L'idée de séparer la physique dans le domaine continu (avant la discrétisation spatiale) rejoint une méthode récemment proposée par [AHN et al., 2022], basée sur une contrainte de flux d'énergie. Cependant, contrairement à notre approche, la dépendance temporelle y est traitée de manière incrémentale standard.

Réécriture des équations. On pourra se référer au bilan de la Section 1.4 du chapitre 2 (page 49) pour l'ensemble des équations régissant le problème de thermo-élasticité linéaire. Seule l'équation d'équilibre thermique

$$\rho c \dot{\theta} + \operatorname{div} \underline{q} + T_0 \beta \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = r_d \quad (3.1)$$

nécessite une réécriture de sorte à pouvoir séparer les difficultés identifiées. Une première possibilité serait d'isoler le terme source d'origine mécanique $T_0 \beta \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ dans une nouvelle variable. Nous faisons le choix d'y inclure également le terme instationnaire, ce qui mène à la définition d'une quantité que l'on peut qualifier de « terme source généralisé » :

$$R \equiv \rho c \dot{\theta} + \beta T_0 \operatorname{Tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.2)$$

La variable R apparaît comme l'analogie du taux d'accumulation de fluide en poro-élasticité (noté q dans [DUREISSEIX et al., 2003b] et les travaux postérieurs). Cette variable contient toutes les dérivées en temps des équations du problème ; l'intérêt de ce point sera mis en valeur ultérieurement. L'équilibre thermique (3.1) se réécrit alors en fonction de cette nouvelle variable R :

$$R + \operatorname{div} \underline{q} = r_d. \quad (3.3)$$

L'état de la structure est donc décrit par l'ensemble des champs $\mathbf{s} = (\mathbf{s}^M, \mathbf{s}^{\text{Th}})$, avec :

- les inconnues mécaniques $\mathbf{s}^M = (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$,
- les inconnues thermiques $\mathbf{s}^{\text{Th}} = (\theta, R, \underline{g}, \underline{q})$.

On pourra se référer au Tableau 2.1 du chapitre 2 (page 43) pour la définition de ces quantités. Notons que ces grandeurs sont deux à deux duales au sens d'un produit scalaire définissant une énergie. La résolution du problème thermomécanique consiste à trouver les champs contenus dans \mathbf{s} sur tout le domaine espace-temps $\Omega \times I$ dans leur espace à énergie finie respectif.

Définition des espaces. On introduit un premier espace \mathcal{A}_d englobant les solutions aux principes de conservation, *i.e.*, des équations *linéaires* et *monophysiques*, mais éventuellement *globales* sur l'ensemble de la structure :

$$\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_d^M \times \mathcal{A}_d^{\text{Th}}, \quad (3.4)$$

avec \mathcal{A}_d^M contenant les solutions aux équations d'admissibilité mécaniques

$$\mathcal{A}_d^M \equiv \left\{ \mathbf{s}^M = (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) \quad \text{avec } \underline{u} \in \mathcal{U}, \\ \underline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} + \underline{f}_d = \underline{0} \quad \text{et } \boldsymbol{\sigma} \underline{n} = \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial_F \Omega \end{array} \right. \right\} \quad (3.5a)$$

et $\mathcal{A}_d^{\text{Th}}$ contenant les solutions aux équations d'admissibilité thermiques

$$\mathcal{A}_d^{\text{Th}} \equiv \left\{ \mathbf{s}^{\text{Th}} = (\theta, R, \underline{g}, \underline{q}) \left| \begin{array}{l} \underline{g} = \nabla \theta \quad \text{avec } \theta \in \mathcal{T}, \\ R + \underline{\text{div}} \underline{q} = r_d, \\ \underline{q} \cdot \underline{n} = -q_d \quad \text{sur } \partial_q \Omega \\ \underline{q} \cdot \underline{n} = h(\theta - \theta_\infty) \quad \text{sur } \partial_c \Omega \end{array} \right. \right\}. \quad (3.5b)$$

Le second espace, noté Γ , rassemble les champs qui satisfont aux relations de comportement (loi de Hooke, loi de Fourier et « terme source généralisé » (3.2)), qui ont la particularité d'être définies *localement* dans le domaine, mais potentiellement *couplées* :

$$\Gamma \equiv \left\{ \hat{\mathbf{s}} = (\hat{\mathbf{s}}^M, \hat{\mathbf{s}}^{\text{Th}}) \left| \begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{K} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \beta \hat{\theta} \mathbf{I} \\ \hat{\underline{q}} = -k \hat{\underline{g}} \\ \hat{R} = \rho c \hat{\dot{\theta}} + \beta T_0 \text{Tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{array} \right. \right\}. \quad (3.6)$$

Comme ces équations dépendent du temps, les conditions initiales sont également ajoutées à l'espace Γ . La notation $\hat{\square}$ est introduite pour distinguer les quantités appartenant à Γ de celles faisant partie de \mathcal{A}_d .

Puisque la solution exacte \mathbf{s}_{ref} du problème satisfait l'ensemble des équations sur $\Omega \times I$, elle correspond à l'intersection de ces deux espaces : $\mathbf{s}_{\text{ref}} = \mathcal{A}_d \cap \Gamma$.

1.2 Algorithme itératif à deux étapes

La force motrice de l'algorithme LATIN est une procédure itérative en deux étapes, qui construit des solutions partielles appartenant alternativement à Γ et à \mathcal{A}_d , divisant ainsi le problème complet en deux sous-problèmes dont la résolution est plus aisée. Néanmoins, chacun de ces sous-problèmes complémentaires manque d'information et est donc mal posé. Deux espaces supplémentaires E^+ et E^- , appelés *directions de recherche*, sont nécessaires pour relier les espaces \mathcal{A}_d et Γ et ainsi permettre la résolution de chaque sous-problème. Une itération typique $n + 1$ de l'algorithme se compose alors des deux étapes suivantes :

- ❶ **Étape couplée** connaissant $\mathbf{s}_n \in \mathcal{A}_d$ de l'itération n précédente, trouver $\hat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \Gamma$ tel que $(\hat{\mathbf{s}}_{n+1} - \mathbf{s}_n) \in E^+$;
- ❷ **Étape découplée** connaissant $\hat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \Gamma$, trouver $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathcal{A}_d$ tel que $(\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}_{n+1}) \in E^-$.

Q Remarque 3.2

Dans la littérature sur la méthode LATIN, on trouve souvent les termes d'étapes *locale* et *linéaire* (ou *globale*). Nous choisissons ici des noms plus pertinents pour les problèmes multiphysiques couplés.

Ce schéma itératif est illustré sur la [Figure 3.1](#), en utilisant la représentation historique des différents espaces en jeu introduite dans [[LADEVÈZE, 1999](#)] lors du traitement de problèmes mécaniques avec un comportement non linéaire. L'algorithme est initialisé avec un ensemble de champs $\mathbf{s}_0 = (\mathbf{s}_0^M, \mathbf{s}_0^{\text{Th}}) \in \mathcal{A}_d^M \times \mathcal{A}_d^{\text{Th}}$ satisfaisant les équations d'admissibilité cinématiques et statiques découplées.

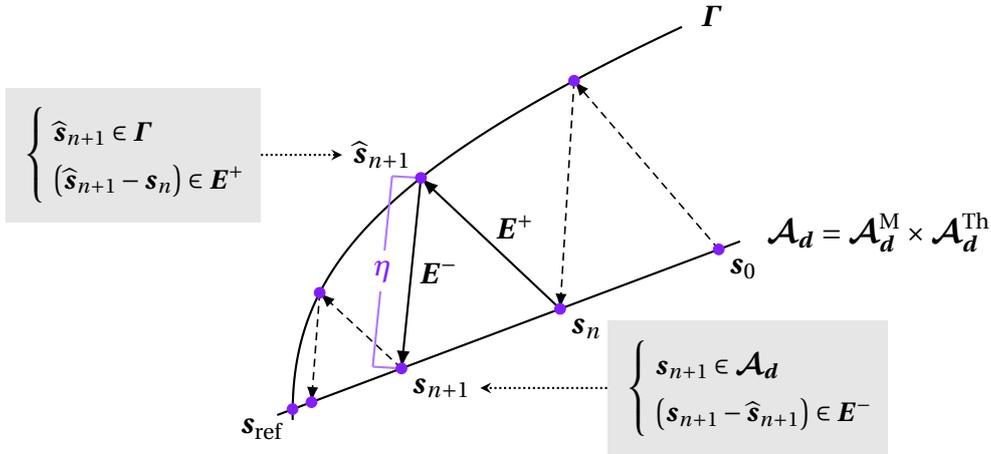


FIGURE 3.1 • Illustration historique du schéma itératif de la méthode LATIN

Écriture des directions de recherche. Les directions de recherche E^+ et E^- sont des paramètres essentiels de la méthode. Il faut noter que leur choix ne modifie pas la solution obtenue à la convergence mais influence le taux de convergence de l'algorithme [[LADEVÈZE, 1999](#)]; ce point sera mis en évidence dans la [Section 2.3](#) de ce chapitre.

Afin de préserver les propriétés avantageuses des sous-problèmes liés aux espaces \mathcal{A}_d et Γ , les directions de recherche doivent satisfaire à certaines exigences. Ainsi, les opérateurs impliqués dans E^+ doivent agir localement en chaque point matériel du domaine Ω , tandis que ceux de E^- doivent être linéaires et n'impliquer qu'une seule physique afin de conserver le caractère linéaire et monophysique des équations à résoudre au cours de l'étape découplée.

Chaque direction de recherche contient une équation par couple de quantités duales au sens énergétique. On définit alors la direction de recherche E^+ pour l'étape couplée

$$E^+ \equiv \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{s} = (\Delta \mathbf{s}^M, \Delta \mathbf{s}^{\text{Th}}) \left| \begin{array}{l} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E}_{\varepsilon\sigma}^+ \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \\ \Delta \underline{q} + \mathbf{E}_{gq}^+ \Delta \underline{g} = \underline{0} \\ \Delta R + \mathbf{E}_{\theta R}^+ \Delta \theta = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad (3.7a)$$

et E^- pour l'étape découplée

$$E^- \equiv \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{s} = (\Delta \mathbf{s}^M, \Delta \mathbf{s}^{Th}) \\ \left. \begin{array}{l} \Delta \boldsymbol{\sigma} - E_{\varepsilon\sigma}^- \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \\ \Delta \underline{q} - E_{gq}^- \Delta \underline{g} = \underline{0} \\ \Delta R - E_{\theta R}^- \Delta \theta = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (3.7b)$$

Les opérateurs des directions de recherche sont choisis tels que $E_{\square}^+ = E_{\square}^- = E_{\square}$, avec $\square = \varepsilon\sigma, gq, \theta R$. Chaque opérateur E_{\square} doit alors être à la fois local, linéaire et n'impliquer qu'une seule physique. Les directions de recherche constituent donc des relations linéaires et locales entre les couples de quantités duales appartenant aux deux espaces de solution \mathcal{A}_d et Γ . Sur la base des relations de comportement, un choix naturel consiste à prendre :

$$E_{gq} = -k\mathbf{I} = E_{gq}\mathbf{I}, \quad (3.8a) \quad E_{\varepsilon\sigma} = \mathcal{K}. \quad (3.8b)$$

Après analyse dimensionnelle et en se basant sur [DUREISSEIX et al., 2003b], $E_{\theta R}$ peut être choisi sous la forme :

$$E_{\theta R} = \frac{\rho c}{t_c} \mathbf{I} = E_{\theta R}\mathbf{I}, \quad (3.8c)$$

où t_c est un temps caractéristique dont le choix est discuté dans la Section 2.3.

Critère d'arrêt des itérations. Les itérations, dont chacune se compose d'une étape couplée et d'une étape découplée, se poursuivent jusqu'à ce qu'un niveau de convergence suffisant soit atteint. Comme la solution exacte du problème n'est généralement pas connue à l'avance, un indicateur de convergence η est typiquement introduit. Dans le cas multiphysique, nous choisissons de combiner des contributions mécaniques et thermiques à l'indicateur global, respectivement désignées par η^M et η^{Th} , de la manière suivante :

$$\eta = \max(\eta^M, \eta^{Th}). \quad (3.9)$$

Comme cela est classiquement fait dans les travaux sur la méthode LATIN, la distance relative entre deux solutions consécutives $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \Gamma$ et $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathcal{A}_d$ de la même itération $n+1$ est utilisée comme indicateur de convergence :

$$\eta^M = \frac{\|\mathbf{s}_{n+1}^M - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1}\|_{E_{\varepsilon\sigma}}}{\frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{n+1}^M + \widehat{\mathbf{s}}_{n+1}\|_{E_{\varepsilon\sigma}}}, \quad (3.10a) \quad \eta^{Th} = \frac{\|\mathbf{s}_{n+1}^{Th} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1}\|_{E_{gq}}}{\frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{n+1}^{Th} + \widehat{\mathbf{s}}_{n+1}\|_{E_{gq}}}. \quad (3.10b)$$

Ainsi, l'indicateur de convergence global η est une mesure, dans un certain sens, de la distance entre les sous-espaces \mathcal{A}_d et Γ (cf. Figure 3.1). En raison des spécificités de la méthode LATIN, cet indicateur doit tenir compte de l'intervalle de temps entier. Les normes choisies sont alors basées sur des considérations énergétiques moyennées sur l'intervalle de temps et sont définies par

$$\|\mathbf{s}\|_{E_{\varepsilon\sigma}}^2 = \int_{\Omega \times I} \boldsymbol{\varepsilon} : E_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega dt = \int_{\Omega \times I} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega dt, \quad (3.11a)$$

$$\|\mathbf{s}\|_{E_{gq}}^2 = \int_{\Omega \times I} \underline{g} \cdot |E_{gq}| \underline{g} \, d\Omega dt = \int_{\Omega \times I} \underline{g} \cdot k \underline{g} \, d\Omega dt. \quad (3.11b)$$

L'indicateur de convergence (3.9) est calculé à la fin de chaque itération, et l'algorithme est arrêté dès que sa valeur tombe en dessous d'un seuil η_c défini par l'utilisateur.

Après avoir décrit les grandes lignes de la procédure algorithmique de la méthode LATIN, les sections suivantes ont vocation à détailler les problèmes résolus dans chacune de ses étapes au cours d'une itération $n + 1$.

1.3 L'étape couplée locale

Grâce à l'itération précédente, $\mathbf{s}_n \in \mathcal{A}_d$ est connu. Le but de l'étape couplée à l'itération $n + 1$ est de trouver $\hat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \Gamma$, *i.e.*, un ensemble de champs satisfaisant les relations de comportement locales mais couplées, tout en imposant que $\hat{\mathbf{s}}_{n+1} - \mathbf{s}_n \in \mathbf{E}^+$.

La direction de recherche pour l'étape couplée (3.7a) est réécrite de façon à introduire des quantités connues issues de l'itération précédente :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \mathbf{E}_{\varepsilon\sigma} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{E}_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_n)}_{\mathbf{S}_n}, \quad (3.12a)$$

$$\hat{\underline{q}}_{n+1} + E_{gq} \hat{\underline{g}}_{n+1} = \underbrace{(q_n + E_{gq} g_n)}_{z_n}, \quad (3.12b)$$

$$\hat{R}_{n+1} + E_{\theta R} \hat{\theta}_{n+1} = \underbrace{(R_n + E_{\theta R} \theta_n)}_{Q_n}. \quad (3.12c)$$

En combinant la deuxième équation de direction de recherche (3.12b) avec la loi de Fourier (2.25) écrite page 48, le gradient de température $\hat{\underline{g}}_{n+1}$ s'obtient de manière explicite par

$$\hat{\underline{g}}_{n+1} = \frac{1}{k + E_{gq}} z_n, \quad (3.13)$$

puis le flux $\hat{\underline{q}}_{n+1}$ en est déduit grâce à la loi de Fourier (2.25).

En combinant les quatre équations restantes (loi de Hooke (2.6) (p. 45), terme source généralisé (3.2) et directions de recherche (3.12a, 3.12c)), on se ramène à un système couplé d'équations différentielles ordinaires en temps portant sur $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$ et $\hat{\theta}_{n+1}$, à résoudre en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} (\mathcal{K} + \mathbf{E}_{\varepsilon\sigma}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - \beta \hat{\theta}_{n+1} \mathbf{I} = \mathbf{S}_n \\ \rho c \dot{\hat{\theta}}_{n+1} + E_{\theta R} \hat{\theta}_{n+1} + T_0 \beta \text{Tr} \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1} = Q_n \end{cases} \quad (3.14)$$

Il est important de noter que ces équations s'expriment localement en tout point du domaine Ω ; la résolution du système d'équations peut donc être parallélisée. Après discrétisation spatiale, il s'agit de résoudre en tout point de Gauss de chaque élément le système :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{66} & \mathbf{0}_{61} \\ T_0 \beta \mathbf{I}^T & \rho c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_e \\ \dot{\hat{\theta}}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e + \mathbf{E}_{\varepsilon\sigma} & -\beta \mathbf{I} \\ \mathbf{0}_{16} & E_{\theta R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\ \hat{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{n,e} \\ \mathbf{Q}_{n,e} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

avec $\mathbf{I} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$ le tenseur identité en notations de Voigt et $\mathbf{0}_{\bullet \circ}$ la matrice nulle de taille $\bullet \times \circ$. En comptant une inconnue par point d'intégration de Gauss pour la température $\widehat{\theta}_e$ et six pour les déformations $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$, le système (3.15) à résoudre en un point de Gauss donné est de taille 7×7 . Nous utilisons un schéma d'Euler implicite pour l'intégration temporelle. Le système est ici linéaire car le comportement considéré l'est également.

Une fois le système (3.14) résolu, les quantités duales $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ et \widehat{R}_{n+1} sont ensuite calculées à l'aide des directions de recherche (3.12a) et (3.12c), respectivement.

1.4 L'étape découplée linéaire

À l'issue de l'étape couplée, on connaît $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1} \in \Gamma$. L'étape découplée de l'itération $n + 1$ vise à trouver $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathcal{A}_d$, *i.e.*, un ensemble de champs satisfaisant les équations d'admissibilité linéaires dans lesquelles les physiques sont découplées, tout en imposant que $\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1}$ appartienne à E^- .

La direction de recherche E^- introduite dans l'équation (3.7b) a été choisie de manière à préserver le découplage et la linéarité des physiques dans les équations à résoudre. Les problèmes de mécanique et de thermique sont donc introduits séparément. On détaille également la construction d'une solution $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{A}_d$ servant à initialiser le schéma de résolution.

1.4.1 Partie mécanique

La direction de recherche reliant les quantités mécaniques de $\mathbf{s}^M = (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ est réécrite en faisant intervenir une quantité $\widehat{\mathbf{S}}_{n+1}$ connue à l'issue de l'étape couplée précédente :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{E}_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \underbrace{(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \mathbf{E}_{\varepsilon\sigma} : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})}_{\widehat{\mathbf{S}}_{n+1}}. \quad (3.16)$$

L'introduction de l'équation (3.16) dans la forme faible du problème mécanique (2.42), écrite à la page 53 du chapitre 2, conduit au problème suivant portant sur le déplacement \underline{u}_{n+1} :

Trouver $\underline{u}_{n+1} \in \mathcal{U}$ tel que $\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0$ et $\forall t \in I$,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\underline{u}_{n+1}) : \mathbf{E}_{\varepsilon\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS - \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{S}}_{n+1} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) \, d\Omega, \quad (3.17)$$

accompagné des conditions limites de Dirichlet sur $\partial_u \Omega$.

Initialisation. La solution $\underline{u}_0(x, t) \in \mathcal{U}$ servant à initialiser l'algorithme est calculée en résolvant le problème global précédent (3.17) sans contribution de l'étape couplée, *i.e.*, $\widehat{\mathbf{S}}_{n+1} = \mathbf{0}$. La discrétisation spatiale du champ de déplacement par la méthode des éléments finis mène au système semi-discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(t) & \text{dans } \Omega \times I, \\ \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{u}_d(t) & \text{sur } \partial_u \Omega \times I. \end{cases} \quad (3.18)$$

Avec notre choix pour $E_{\varepsilon\sigma}$, nous avons $\mathbf{H}_{\mathbf{uu}} = \mathbf{K}_{\mathbf{uu}}$ la matrice de rigidité classique. Par ailleurs, $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ désigne le vecteur associé aux efforts extérieurs (défini à l'équation (2.51) du chapitre 2). Après avoir résolu ce système, les solutions initiales de déformation $\underline{\varepsilon}_0$ et de contrainte $\underline{\sigma}_0$ sont calculées avec l'équation de compatibilité des déformations (2.4) et la direction de recherche (3.16), respectivement. On dispose donc de $\mathbf{s}_0^M \in \mathcal{A}_d^M$.

Itération $n + 1$. Une fois que la stratégie de résolution est initialisée, l'étape découplée du schéma itératif consiste en réalité à calculer une correction $\Delta \underline{u}_{n+1} \equiv \underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n \in \mathcal{U}_0$ qui vérifie des conditions de Dirichlet homogènes sur $\partial_u \Omega$. Le système linéaire à résoudre à l'itération $n + 1$ est alors le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{u}}(t) & \text{dans } \Omega \times I, \\ \Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) = \mathbf{0} & \text{sur } \partial_u \Omega \times I. \end{cases} \quad (3.19)$$

Le second membre du système (3.19) est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\mathbf{u}} &\equiv \mathbf{f}_{\hat{\mathbf{g}}}(t) + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \mathbf{u}_n(t) \\ &= \mathbf{f}_{\hat{\mathbf{g}}}(t) - \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} (\mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}_0(t)), \end{aligned} \quad (3.20)$$

où $\mathbf{f}_{\hat{\mathbf{g}}}$ désigne le terme dû à la quantité connue de l'étape couplée $\hat{\mathbf{S}}_{n+1}$.

Après avoir ajouté la correction admissible à zéro $\Delta \underline{u}_{n+1}$ à \underline{u}_n , on en déduit ensuite à nouveau $\underline{\varepsilon}_{n+1}$ par l'équation de compatibilité des déformations (2.4) et $\underline{\sigma}_{n+1}$ avec la direction de recherche (3.16).

1.4.2 Partie thermique

Une procédure similaire est appliquée aux équations thermiques. Les directions de recherche relatives aux quantités thermiques $\mathbf{s}^{\text{Th}} = (\theta, R, \underline{g}, \underline{q})$ sont également réécrites afin d'introduire les quantités connues provenant de l'étape couplée précédente :

$$\underline{q}_{n+1} - E_{gq} \underline{g}_{n+1} = \underbrace{(\hat{\underline{q}}_{n+1} - E_{gq} \hat{\underline{g}}_{n+1})}_{\hat{\underline{z}}_{n+1}}, \quad (3.21a)$$

$$R_{n+1} - E_{\theta R} \theta_{n+1} = \underbrace{(\hat{R}_{n+1} - E_{\theta R} \hat{\theta}_{n+1})}_{\hat{Q}_{n+1}}. \quad (3.21b)$$

Par ailleurs, les équations de l'espace $\mathcal{A}_d^{\text{Th}}$ s'écrivent sous forme faible :

$$\int_{\Omega} (R_{n+1} \theta^* - \underline{q}_{n+1} \cdot \nabla \theta^*) d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} h \theta_{n+1} \theta^* dS = \int_{\Omega} r_d \theta^* d\Omega + \int_{\partial_q \Omega} q_d \theta^* dS + \int_{\partial_c \Omega} h \theta_{\infty} \theta^* dS. \quad (3.22)$$

En substituant les équations (3.21a, 3.21b) dans la forme faible du problème thermique (3.22), on obtient le problème suivant ne portant que sur l'incrément de température $\theta_{n+1}(\underline{x}, t)$:

Trouver $\theta_{n+1} \in \mathcal{T}$ tel que $\forall \theta^* \in \mathcal{T}_0$ et $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} E_{\theta R} \theta_{n+1} \theta^* \, d\Omega + \int_{\Omega} E_{gq} \nabla \theta_{n+1} \cdot \nabla \theta^* \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} h \theta_{n+1} \theta^* \, dS \\ & = \int_{\Omega} r_d \theta^* \, d\Omega - \int_{\partial_q \Omega} q_d \theta^* \, dS + \int_{\partial_c \Omega} h \theta_{\infty} \theta^* \, dS - \int_{\Omega} \widehat{Q}_{n+1} \theta^* \, d\Omega - \int_{\Omega} \widehat{\underline{z}}_{n+1} \cdot \nabla \theta^* \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.23)$$

en respectant les conditions aux limites de Dirichlet sur $\partial_{\theta} \Omega$.

Initialisation. Le champ de température $\theta_0(\underline{x}, t) \in \mathcal{T}$ pour l'initialisation de la procédure de résolution est calculé en résolvant le problème global précédent (3.23) sans contribution de l'étape couplée, *i.e.*, $\widehat{\underline{z}}_{n+1} = \underline{0}$ et $\widehat{Q}_{n+1} = 0$. Ainsi, le champ de température initial est la solution du problème éléments finis thermique suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\theta\theta} \theta_0(t) = \mathbf{f}_{\theta}(t) & \text{dans } \Omega \times I, \\ \theta_0(t) = \theta_d(t) & \text{sur } \partial_{\theta} \Omega \times I, \end{cases} \quad (3.24)$$

où, compte tenu de nos choix pour E_{gq} et $E_{\theta R}$, nous avons $\mathbf{H}_{\theta\theta} \equiv \frac{1}{t_c} \mathbf{C}_{\theta\theta} + \mathbf{K}_{\theta\theta}$, avec $\mathbf{C}_{\theta\theta}$ et $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ les matrices standard de capacité et de conductivité définies dans l'équation (2.50) du chapitre 2 (page 54). Après résolution du système (3.24), il est possible de calculer $\underline{g}_0 \equiv \nabla \theta_0$, puis \underline{q}_0 et R_0 à l'aide des directions de recherche (3.21a, 3.21b). Cela nous permet d'aboutir à un ensemble initial de champs thermiques $\mathbf{s}_0^{\text{Th}} \in \mathcal{A}_d^{\text{Th}}$.

Itération $n+1$. De façon analogue à la partie mécanique, l'itération $n+1$ consiste à calculer une correction $\Delta \theta_{n+1} = \theta_{n+1} - \theta_n \in \mathcal{T}_0$ en résolvant le système semi-discrétisé

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\theta\theta} \Delta \theta_{n+1}(t) = \mathbf{Q}_{\theta}(t) & \text{dans } \Omega \times I, \\ \Delta \theta_{n+1}(t) = \mathbf{0} & \text{sur } \partial_{\theta} \Omega \times I, \end{cases} \quad (3.25)$$

avec pour second-membre

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\theta} & \equiv \mathbf{f}_{\widehat{Q}}(t) + \mathbf{f}_{\widehat{\underline{z}}}(t) + \mathbf{f}_{\theta}(t) - \mathbf{H}_{\theta\theta} \theta_n(t) \\ & = \mathbf{f}_{\widehat{Q}}(t) + \mathbf{f}_{\widehat{\underline{z}}}(t) - \mathbf{H}_{\theta\theta} (\theta_n(t) - \theta_0(t)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les notations $\mathbf{f}_{\widehat{Q}}$ et $\mathbf{f}_{\widehat{\underline{z}}}$ désignent les termes discrets associés respectivement à \widehat{Q}_{n+1} et $\widehat{\underline{z}}_{n+1}$. Après avoir déterminé θ_{n+1} , les champs restants de $\mathbf{s}_{n+1}^{\text{Th}}$ sont déduits en utilisant les mêmes équations que durant la phase d'initialisation.

Q Remarque 3.3

Tout comme le problème de mécanique (3.19), celui de thermique (3.25) est quasi-statique grâce à l'introduction de la variable R . Cette variable a permis de rassembler toutes les dépendances temporelles dans les équations (3.14), résolues point par point lors de l'étape couplée.

À l'issue de chaque étape découplée, une étape de relaxation est ajoutée pour améliorer la convergence de l'algorithme [LADEVÈZE, 1999]. La solution \mathbf{s}_{n+1} devient

$$\mathbf{s}_{n+1} \leftarrow \mu_r \mathbf{s}_{n+1} + (1 - \mu_r) \mathbf{s}_n, \quad (3.27)$$

avec μ_r le coefficient de relaxation. L'algorithme est d'autant plus stable que la valeur de la relaxation est faible, mais un coefficient μ_r élevé assure un meilleur taux de convergence. Nous avons retenu $\mu_r = 0.9$ pour les exemples numériques présentés.

1.4.3 Bilan

L'ensemble de la méthode LATIN appliquée au problème couplé de thermo-mécanique est résumé dans l'algorithme de la Figure 3.2, qui reprend le code couleur du chapitre 1.

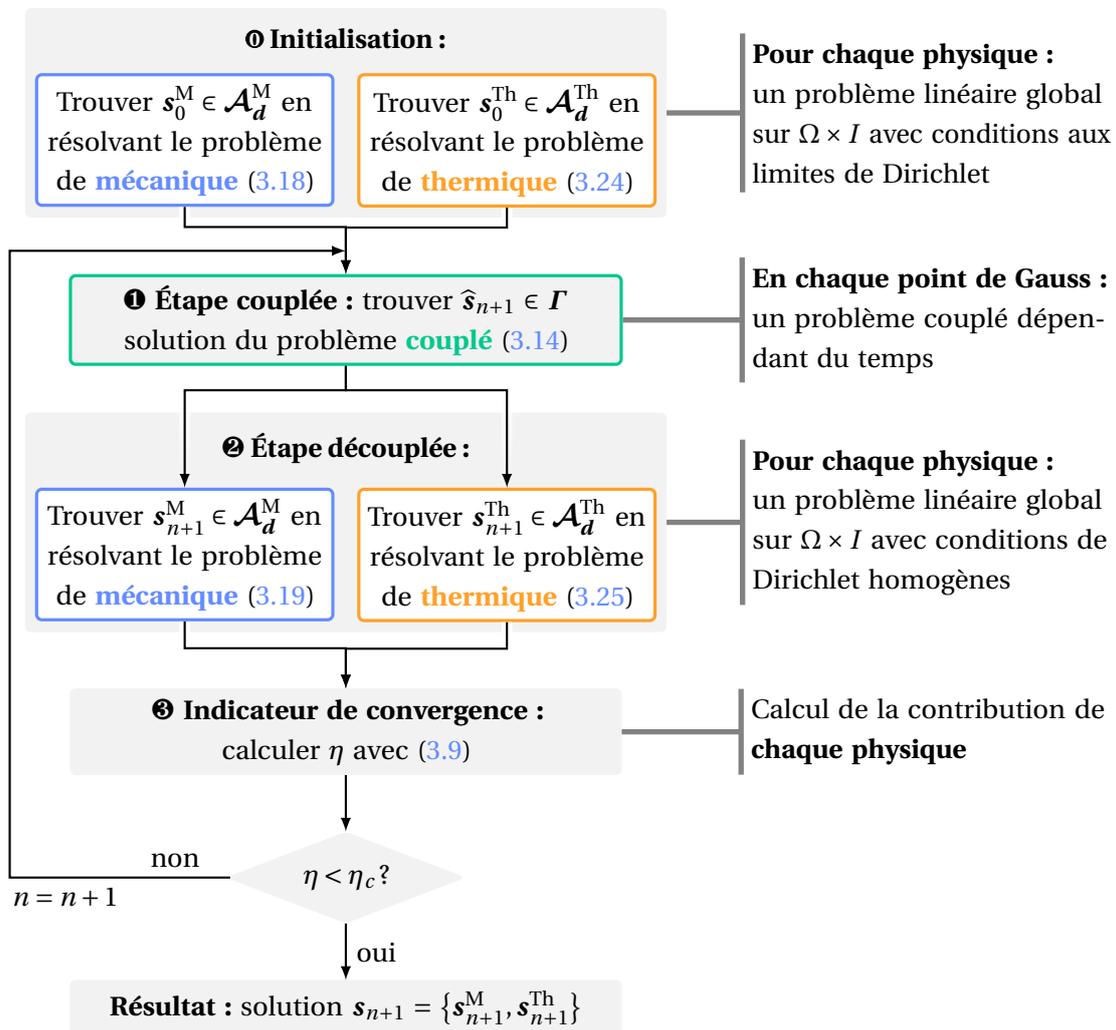


FIGURE 3.2 • Algorithme de la méthode LATIN pour la résolution du problème de thermomécanique

1.5 Réduction de modèle

Au cours de l'étape découplée, deux problèmes élément finis *linéaires* (un problème mécanique (3.19) et un problème thermique (3.25)) doivent être résolus. De plus, le schéma

itératif LATIN fournit à chaque itération une approximation des champs de solution sur tout le domaine spatial et l'intervalle de temps entier. Ces deux propriétés ouvrent la voie à une intégration naturelle de la technique de réduction de modèle par PGD espace-temps dans l'algorithme de résolution. Dans le cadre multiphysique, la PGD est alors appliquée indépendamment au problème linéaire associé à chaque physique. De fait, l'étape couplée n'est pas impactée.

À travers les différents travaux sur la méthode LATIN-PGD, il a été envisagé d'utiliser une décomposition à variables séparées pour approximer soit les quantités primales uniquement, e.g., [DUREISSEIX et al., 2003b; NACHAR et al., 2020a; SCANFF et al., 2021], soit les quantités primales et duales [LADEVÈZE, 1999; DUREISSEIX et al., 2003a; NÉRON & DUREISSEIX, 2008b]. Dans cette dernière approche, une procédure de dualisation est nécessaire pour formuler et résoudre un problème dual supplémentaire. Dans ce travail, nous adoptons la démarche consistant à approximer exclusivement les quantités primales (déplacement $\underline{u}(\underline{x}, t)$ et température $\theta(\underline{x}, t)$).

On remarque que du fait de la réécriture judicieuse du problème de référence, les problèmes (3.19) et (3.25) à résoudre pour les deux physiques sont similaires. Leur résolution pourra alors faire appel au mêmes routines numériques, facilitant ainsi l'implémentation. Dans la suite, seul le problème de mécanique est détaillé.

Problème de mécanique à résoudre. Après l'itération n , le champ de déplacement s'écrit comme une somme de m_u produits (avec $m_u \leq n$) de fonctions du temps et de l'espace :

$$\forall t \in I, \quad \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{u}_0(t) + \sum_{i=1}^{m_u} \alpha_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i, \quad (3.28)$$

où $\mathbf{u}_0(t)$ désigne le champ de déplacement cinématiquement admissible – issu de l'initialisation de l'algorithme par résolution de l'équation (3.18), $\{\bar{\mathbf{u}}_i\}_{i=1, \dots, m_u} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ sont les fonctions spatiales constituant une base d'ordre réduit, et $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, m_u} \in \mathcal{L}^2(I)$ les fonctions du temps associées. On désigne usuellement par *mode PGD* un terme de la somme.

Au cours de l'itération $n + 1$, un terme correctif $\Delta \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n$ satisfaisant l'équation (3.19) est recherché pour améliorer la solution précédente $\mathbf{u}_n(t)$ exprimée par l'équation (3.28). Or la recherche de cette correction sous une forme à variables séparées conduit à un problème sur-contraint. Le problème éléments finis (3.19) est alors relaxé en le moyennant sur l'intervalle de temps I . Ainsi, $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(t)$ doit être trouvé en tout $t \in I$ de telle sorte que

$$\forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_I \mathbf{u}^{*T} [\mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) - \mathbf{Q}_{\mathbf{u}}(t)] dt = 0. \quad (3.29)$$

L'application de la PGD pour la construction de la correction $\Delta \mathbf{u}_{n+1}$ à l'itération LATIN $n + 1$ se fait généralement en deux étapes, la seconde étant facultative.

❶ Mise à jour des fonctions temporelles. Si la base d'ordre réduit contient au moins un mode, l'étape découplée résolue avec PGD commence par une étape dite d'*update* qui a pour but d'améliorer la solution à moindre coût. Cette étape consiste à mettre à jour les fonctions temporelles uniquement, tout en conservant la base spatiale $\{\bar{\mathbf{u}}_i\}_{i=1, \dots, m_u}$ existante.

Par conséquent, le terme de correction recherché $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(t)$ et la fonction de test \mathbf{u}^* s'écrivent pour tout $t \in I$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{m_u} \beta_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i, \\ \mathbf{u}^*(t) = \sum_{j=1}^{m_u} \beta_j^*(t) \bar{\mathbf{u}}_j. \end{array} \right. \quad (3.30a) \quad (3.30b)$$

Les fonctions inconnues dans la décomposition de $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(t)$ sont représentées en rouge. La correction souhaitée (3.30a) et la fonction de test (3.30b) sont substituées dans la forme faible (3.29). L'équation étant vérifiée pour tout β_j^* , elle se réduit au problème suivant à résoudre pour tout $j \in \{1, \dots, m_u\}$:

$$\forall t \in I, \quad \bar{\mathbf{u}}_j^T \left[\mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \left(\sum_{i=1}^{m_u} \beta_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i \right) - \mathbf{Q}_{\mathbf{u}}(t) \right] = 0, \quad (3.31)$$

ce qui se réécrit sous forme matricielle :

$$m_u \left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \dots & \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \bar{\mathbf{u}}_i & \dots \\ \vdots & & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_i(t) \\ \vdots \\ \beta_{m_u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{Q}_{\mathbf{u}} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

En supposant l'orthonormalité des fonctions spatiales $\bar{\mathbf{u}}_i$ au sens du produit scalaire

$$\langle \bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{u}}_j \rangle_{\mathbf{H}_{\mathbf{uu}}} = \bar{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \bar{\mathbf{u}}_i = \delta_{ij}, \quad (3.33)$$

alors la matrice dans le système (3.32) se réduit à la matrice identité et les corrections ajoutées aux fonctions temporelles sont obtenues à l'aide d'une formule explicite :

$$\forall i \in \{1, \dots, m_u\}, \quad \beta_i(t) = \bar{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{Q}_{\mathbf{u}}(t). \quad (3.34)$$

Si la mise à jour des fonctions du temps permet de progresser « suffisamment » dans le schéma itératif, l'ajout d'un nouveau couple est omis et l'étape découplée s'arrête là. Pour déterminer s'il est nécessaire d'ajouter un nouveau mode, plusieurs critères ont été proposés, par exemple en se basant sur la décroissance de l'indicateur d'erreur permise par l'update [HEYBERGER et al., 2012; DUREISSEIX et al., 2003b], ou encore un critère d'erreur en direction de recherche [SCANFF, 2022].

Dans ce travail, nous utilisons un critère basé sur la similarité des fonctions temporelles avant et après l'étape d'update :

$$\frac{1}{m_u n_t} \sum_{i=1}^{m_u} \sum_{j=1}^{n_t} \frac{|\alpha_i^{up}(t_j) - \alpha_i(t_j)|}{\frac{1}{2} |\alpha_i^{up}(t_j) + \alpha_i(t_j)|} < \xi_c, \quad (3.35)$$

avec $\alpha_i^{up}(t) = \alpha_i(t) + \beta_i(t)$ la fonction du temps associée à $\bar{\mathbf{u}}_i$ pour l'expression à variables séparées de \mathbf{u}_{n+1} après update. Un nouveau mode n'est ajouté que si la correction β_i apportée

aux fonctions existantes α_i est trop faible, autrement dit si les fonctions du temps *après* update α_i^{up} sont jugées trop similaires à leurs homologues α_i *avant* update. Cela suggère que la base spatiale existante a déjà été exploitée au mieux et qu'il est donc nécessaire de l'enrichir pour progresser dans la résolution.

Le choix de ce critère est motivé à la fois par son faible coût de calcul, dans la mesure où on évite un calcul additionnel de l'indicateur d'erreur, et par son implémentation dans la plateforme de développement collaborative ROMlab au cours de travaux antérieurs [NACHAR, 2019; DABY-SEESARAM et al., 2023].

🔗 **Ajout d'un nouveau mode.** Dans le cas où la mise à jour des modes temporels existants est jugée insuffisante, un nouveau couple $(\alpha, \bar{\mathbf{u}})$ est recherché pour enrichir l'espace réduit. La correction $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(t)$ et la fonction test \mathbf{u}^* s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{m_u} \beta_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i + \alpha(t) \bar{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{u}^*(t) = \alpha^*(t) \bar{\mathbf{u}} + \alpha(t) \bar{\mathbf{u}}^*. \end{cases} \quad (3.36)$$

Les fonctions à déterminer durant cette étape sont à nouveau mises en évidence en rouge. En substituant les expressions (3.36) dans la forme faible de l'équation (3.29), on obtient un système de deux équations couplées :

$$\begin{cases} \int_I \alpha(t) \bar{\mathbf{u}}^{*T} (\mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \alpha(t) \bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}(t)) dt = 0 & \forall \bar{\mathbf{u}}^* \\ \int_I \alpha^*(t) \bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \alpha(t) \bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}(t)) dt = 0 & \forall \alpha^* \end{cases} \quad (3.37a)$$

$$\int_I \alpha^*(t) \bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \alpha(t) \bar{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}(t)) dt = 0 \quad \forall \alpha^* \quad (3.37b)$$

où l'on a introduit la variable $\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}$, définie par

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{u}} - \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \sum_{i=1}^{m_u} \beta_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i \quad (3.38)$$

qui prend en compte la correction calculée à l'étape d'update et donc connue à ce stade. En isolant les termes indépendants du temps dans l'équation (3.37a) et en remarquant que l'intégrande de l'équation (3.37b) est nécessairement nul, le système d'équations (3.37) devient :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{u}} = \left[\int_I \alpha^2(t) dt \right]^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{uu}}^{-1} \int_I \alpha(t) \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}(t) dt \\ \alpha(t) = \frac{\bar{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}(t)}{\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \bar{\mathbf{u}}} \end{cases} \quad (3.39a)$$

$$\alpha(t) = \frac{\bar{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}(t)}{\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}_{\mathbf{uu}} \bar{\mathbf{u}}} \quad (3.39b)$$

Le mode spatial $\bar{\mathbf{u}}$ étant normé au sens du produit scalaire énergétique (3.33) après sa génération, les équations du système (3.39) se simplifient.

Le système à résoudre pour le calcul d'un nouveau mode PGD se compose finalement d'un problème d'éléments finis (3.40a) pour trouver $\bar{\mathbf{u}}$ et d'une formule explicite (3.40b) pour calculer α :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\mathbf{uu}}\bar{\mathbf{u}} = \int_I \alpha(t)\tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}(t) dt & \text{: problème EF} & (3.40a) \\ \alpha(t) = \bar{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{u}}(t) & \text{: expression explicite} & (3.40b) \end{cases}$$

En pratique, le système (3.40) est résolu à l'aide d'un algorithme de point fixe, qui ne nécessite que quelques itérations pour converger. En outre, une convergence stricte n'est pas requise dans la mesure où l'ajout du couple suivant pourra venir corriger l'éventuelle erreur commise à cette étape. Par ailleurs, la matrice intervenant dans le problème éléments finis est constante; elle pourra donc être factorisée une seule fois, réduisant ainsi le coût de la résolution répétée du problème (3.40a).

Orthonormalisation du nouveau mode. Chaque mode PGD étant déterminé séquentiellement grâce à un algorithme glouton, il n'est pas impossible que le nouveau couple dépende de couples déjà exhibés à une itération antérieure. Une étape d'orthonormalisation est alors ajoutée après l'obtention d'un nouveau mode. Ainsi, les fonctions spatiales forment une base orthonormée, et il devient possible de se rendre compte dans quelle mesure le nouveau mode apporte de l'information nouvelle.

À ce stade de l'itération LATIN $n + 1$, le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}_{n+1}(t) &= \underline{\mathbf{u}}_n + \sum_{i=1}^{m_u} \beta_i(t)\bar{\mathbf{u}}_i + \alpha(t)\bar{\mathbf{u}} \\ &= \underline{\mathbf{u}}_0 + \sum_{i=1}^{m_u} \underbrace{(\alpha_i(t) + \beta_i(t))}_{\alpha_i^{up}(t)} \bar{\mathbf{u}}_i + \alpha(t)\bar{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

L'orthogonalisation de la fonction spatiale $\bar{\mathbf{u}}$ en suivant une procédure de Gram-Schmidt consiste à retrancher à $\bar{\mathbf{u}}$ sa projection sur les fonctions de la base $\{\bar{\mathbf{u}}_i\}_{i=1,\dots,m_u}$ déjà existante et orthonormée au sens du produit scalaire énergétique (3.33). Le champ de déplacement $\underline{\mathbf{u}}_{n+1}$ de l'équation (3.41) se réécrit alors :

$$\underline{\mathbf{u}}_{n+1}(t) = \underline{\mathbf{u}}_0(t) + \sum_{i=1}^{m_u} \underbrace{(\alpha_i^{up}(t) + \alpha(t)\langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}_i \rangle_{\mathbf{H}_{\mathbf{uu}}})}_{\alpha_i^\perp(t)} \bar{\mathbf{u}}_i + \alpha(t) \underbrace{\left(\bar{\mathbf{u}} - \sum_{i=1}^{m_u} \langle \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}_i \rangle_{\mathbf{H}_{\mathbf{uu}}} \bar{\mathbf{u}}_i \right)}_{\bar{\mathbf{u}}^\perp} \quad (3.42)$$

où l'on a ajouté et soustrait les termes en rouge à l'équation (3.41). Cela fait apparaître le vecteur $\bar{\mathbf{u}}^\perp$ orthogonal aux fonctions spatiales existantes au sens de la norme énergétique $\mathbf{H}_{\mathbf{uu}}$. Les fonctions du temps associées à ces fonctions spatiales existantes sont ajustées pour ne pas perdre d'information.

Afin de garantir l'unicité de la décomposition à variables séparées, la nouvelle fonction spatiale est également normée. La fonction du temps associée est adaptée en conséquence.

Le nouveau couple ajouté à la décomposition existante s'écrit finalement :

$$\bar{\mathbf{u}}_{m_u+1} = \bar{\mathbf{u}}^\perp / \|\bar{\mathbf{u}}^\perp\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{uu}}} \quad (3.43a)$$

$$\alpha_{m_u+1}(t) = \alpha(t) \|\bar{\mathbf{u}}^\perp\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{uu}}} \quad (3.43b)$$

Q Remarque 3.4

Ce nouveau mode n'est retenu que s'il possède un poids non négligeable par rapport à la base $\{\bar{\mathbf{u}}_i\}_{i=1,\dots,m_u}$ préalablement calculée, c'est-à-dire s'il apporte de l'information.

Bilan. La procédure globale de calcul d'une correction $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(t)$ par PGD dans l'étape découplée de la méthode LATIN est résumée dans l'Algorithme 1. Une procédure analogue peut être appliquée indépendamment au problème thermique (3.23), en s'appuyant sur les mêmes routines de calcul. Il convient de noter que les bases d'ordre réduit thermique et mécanique peuvent être de tailles m_u et m_θ différentes, chacune étant enrichie en cas de besoin. Ce dernier point sera mis en évidence dans les exemples numériques suivants.

Algorithme 1 : PGD pour le problème mécanique à l'itération $n + 1$.

► **Entrées :** $\mathbf{u}_n(t) = \mathbf{u}_0(t) + \sum_{i=1}^{m_u} \alpha_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i$

quantité connue de l'étape couplée $\hat{\mathbf{S}}_{n+1}$

► **Résultat :** $\mathbf{u}_{n+1}(t) = \mathbf{u}_n(t) + \Delta \mathbf{u}_{n+1}(t)$

❶ **Étape d'update**

/ s'il y a au moins un mode */*

calcul de $\mathbf{f}_{\hat{\mathbf{S}}}$, puis \mathbf{Q}_u avec (3.20)

pour chaque mode existant $i = 1, \dots, m_u$ **faire** */* base spatiale $\{\bar{\mathbf{u}}_i\}_{i=1,\dots,m_u}$ fixée */*

| $\beta_i(t) \leftarrow \bar{\mathbf{u}}_i^\top \mathbf{Q}_u(t)$

fin

► **Résultat :** $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{m_u} \beta_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i$

❷ **Étape d'enrichissement**

/ optionnelle */*

si enrichissement nécessaire (d'après (3.35)) **alors**

| $\alpha^{(0)}(t) \leftarrow t$

/ initialisation du point fixe */*

| **tant que** pas de stagnation et $k \leq k_{max}$ **faire**

/ itérations du point fixe */*

| – **Problème spatial :**

| pour $\alpha^{(k-1)}$ donné, calculer $\bar{\mathbf{u}}^{(k)}$ en résolvant (3.40a)

| normalisation : $\bar{\mathbf{u}}^{(k)} \leftarrow \bar{\mathbf{u}}^{(k)} / \|\bar{\mathbf{u}}^{(k)}\|_{\mathbf{H}_{\mathbf{uu}}}$

| – **Problème temporel :**

| pour $\bar{\mathbf{u}}^{(k)}$ donné, calculer $\alpha^{(k)}$ avec l'équation (3.40b)

| **fin**

► **Résultat :** $\Delta \mathbf{u}_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{m_u} \beta_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i + \alpha^{(k)}(t) \bar{\mathbf{u}}^{(k)}$

Orthonormalisation de $\bar{\mathbf{u}}^{(k)}$ par rapport à la base spatiale existante $\{\bar{\mathbf{u}}_i\}_{i=1,\dots,m_u}$

– mise à jour des fonctions temporelles $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,m_u}$ avec (3.42)

– stockage du nouveau mode (3.43)

fin

2 Implémentation numérique sur un exemple académique

La méthode présentée dans la section précédente a été implémentée dans le code de calcul collaboratif ROMlab, introduit à la [Section 3.1](#) du chapitre 2 (page 56). Lors de l'implémentation, une attention particulière a été portée à l'écriture de routines pouvant être utilisées pour les deux physiques lors de l'étape découplée.

Cette section a pour but de valider l'implémentation sur un exemple académique. Des précisions sont également apportées quant à l'influence de paramètres numériques et physiques sur le comportement de l'algorithme.

2.1 Description du cas test

Le premier cas test considéré est une barre de section carrée percée de deux trous perpendiculaires, comme le montre la [Figure 3.3a](#). Les dimensions exactes sont fournies dans le [Tableau 3.1](#). La barre est encastée à ses deux extrémités et des températures sont imposées dans les deux trous. Une source de chaleur est également appliquée dans la zone centrale de la structure. Les évolutions temporelles de ces conditions sont illustrées sur la [Figure 3.3](#). Le chargement et la géométrie ont été choisis de sorte à avoir une variabilité des champs solutions tant en temps qu'en espace. De plus, la présence des trous suivant les deux directions transversales assure d'avoir un cas test réellement tri-dimensionnel.

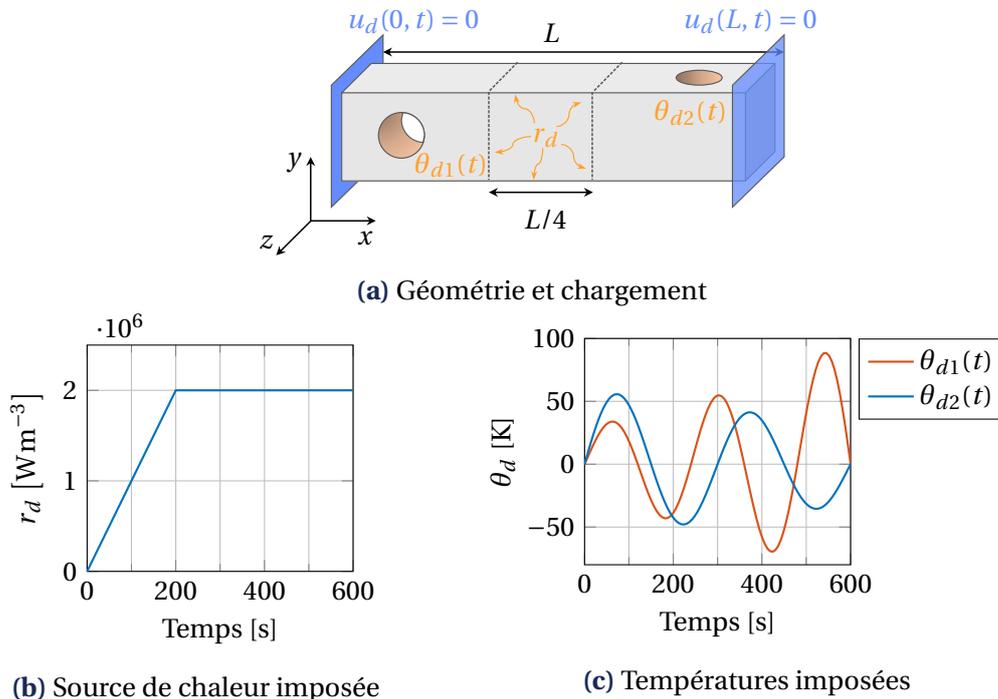


FIGURE 3.3 • Cas test académique tri-dimensionnel

La géométrie est maillée avec GMSH [[GEUZAIN & REMACLE, 2009](#)]. Le maillage comprend 23062 éléments tétraédriques (linéaires pour la température et quadratiques pour les déplacements), conduisant à 112983 degrés de liberté mécaniques et 5556 degrés de liberté thermiques. L'intervalle de temps $I = [0\text{s}, 600\text{s}]$ est discrétisé avec un pas de temps uniforme de taille $\Delta t = 4\text{s}$.

TABLEAU 3.1 • Dimensions de la géométrie représentée en Figure 3.3a

Paramètre	Valeur
Longueur	$L = 0.2 \text{ m}$
Hauteur et largeur	$h = 0.03 \text{ m}$
Rayon des trous	$r = 0.01 \text{ m}$
Distance entre l'axe d'un trou et le bord	$d = 0.025 \text{ m}$

Les paramètres des matériaux sont définis dans le [Tableau 3.2](#). Le coefficient de dilatation thermique α a été multiplié par cinq par rapport à une valeur physique classique afin de garantir un couplage fort au sens du paramètre adimensionné TCP défini dans [[ZIMMERMAN, 2000](#)] et abordé dans la [Section 1.5](#) du chapitre 2 (page 51). On rappelle que l'influence de la mécanique sur les grandeurs thermiques est considérée comme négligeable si $TCP \ll 1$. Les paramètres matériels du [tableau 3.2](#) conduisent à $TCP = 0.36$, ce qui est considéré comme un couplage fort dans [[ZIMMERMAN, 2000](#)].

TABLEAU 3.2 • Paramètres matériaux thermomécaniques

Paramètre	Symbole [unité]	Valeur
Module d'Young	E [Pa]	210×10^9
Coefficient de Poisson	ν [-]	0.3
Masse volumique	ρ [kgm^{-3}]	7850
Capacité thermique massique	c [$\text{Jkg}^{-1} \text{K}^{-1}$]	500
Conductivité thermique	k [$\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$]	43
Coeff. de dilatation thermique	α [K^{-1}]	5.5×10^{-5}
Température de référence	T_0 [K]	293

En ce qui concerne l'aspect numérique, le temps caractéristique t_c apparaissant dans la direction de recherche $\mathbf{E}_{\theta R} = \frac{\rho c}{t_c} \mathbf{I}$ doit encore être choisi. Pour des problèmes de mécanique non linéaire, [[LADEVÈZE, 1999](#)] a démontré l'existence d'un choix optimal pour un comportement donné du matériau. Dans le contexte des problèmes multiphysiques, le choix d'un temps caractéristique semblable à t_c est abordé par [[NÉRON & DUREISSEIX, 2008a](#)]. Dans ce qui suit, nous fixons $t_c = 20 \text{ s}$ selon les considérations détaillées dans la [Section 2.3](#).

2.2 Validation de la méthode

Afin d'évaluer la qualité de la solution fournie par la méthode LATIN-PGD, le cas test décrit est également résolu à l'aide d'un schéma de résolution monolithique (*i.e.*, par résolution directe à chaque pas de temps du système donné en équation (2.55) du chapitre 2, page 56). Cette solution sera utilisée comme référence pour évaluer la précision de notre approche.

Comparaison à une référence. Par l'intermédiaire du logiciel libre ParaView, la [Figure 3.4](#) présente les cartes d'erreur spatiale entre la solution LATIN-PGD convergée (avec un critère d'arrêt $\eta_c = 10^{-4}$) et la référence monolithique au dernier pas de temps $t = 600$ s. Ces cartes d'erreur sont données en quantités relatives exprimées en pourcentages. On constate une bonne concordance, tant pour le champ de température que pour la contrainte équivalente de Von Mises.

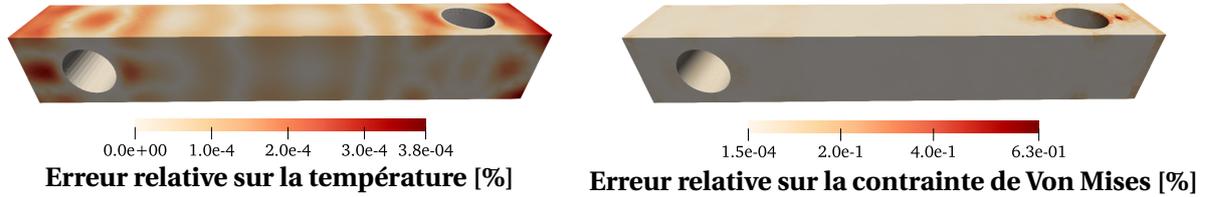


FIGURE 3.4 • Cartes d'erreur relative (en pourcentage) de champs LATIN-PGD par rapport à la référence monolithique à $t = 600$ s

L'évolution temporelle du déplacement longitudinal sur l'intervalle de temps I est illustrée sur la [Figure 3.5](#). Le déplacement est représenté au point de coordonnées $[d + r, h/2, h/2]$, situé sur la paroi du trou de gauche. La solution LATIN-PGD, calculée en utilisant deux critères d'arrêt différents, est comparée à la solution de référence monolithique. On observe une concordance acceptable sur le déplacement, même avec un critère d'arrêt de 10^{-2} .

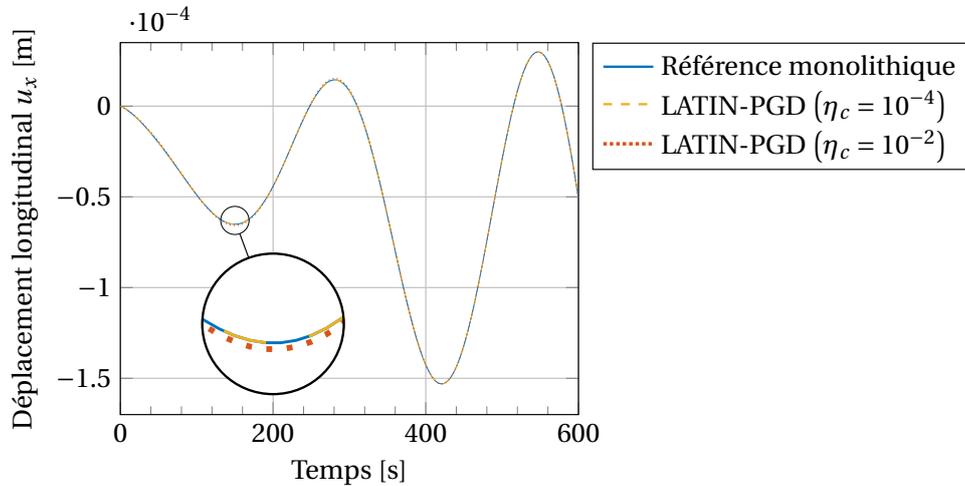


FIGURE 3.5 • Comparaison de l'évolution temporelle du déplacement longitudinal monolithique et LATIN-PGD en un point donné

Convergence de l'algorithme. On s'intéresse à présent à la convergence de l'algorithme LATIN-PGD au fil des itérations. En plus des indicateurs de convergence η^M et η^{Th} donnés par l'équation (3.10) page 72, nous introduisons les erreurs suivantes par rapport aux solutions de référence $\underline{u}_{ref}(x, t)$ et $\theta_{ref}(x, t)$ issues de l'approche monolithique :

$$e_{ref}^M = \frac{\|\underline{u} - \underline{u}_{ref}\|_{\mathcal{K}}}{\|\underline{u}_{ref}\|_{\mathcal{K}}}, \quad (3.44a)$$

$$e_{ref}^{Th} = \frac{\|\theta - \theta_{ref}\|_k}{\|\theta_{ref}\|_k}. \quad (3.44b)$$

L'erreur pour le problème couplé est à nouveau définie comme le maximum des contributions des deux physiques

$$e_{\text{ref}} = \max(e_{\text{ref}}^M, e_{\text{ref}}^{\text{Th}}). \quad (3.45)$$

Les normes choisies sont similaires à celles définies dans (3.11), à la différence près que celles-ci s'appliquent directement aux champs de déplacement \underline{u} et de température θ plutôt qu'à leurs gradients. En pratique, on peut donc se servir des opérateurs éléments finis déjà assemblés sur l'espace et n'avoir à calculer une intégrale uniquement sur le temps :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\|_{\mathcal{K}} &= \int_{\Omega \times I} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) : \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}) \, d\Omega dt = \int_I \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} \, dt, \\ \|\theta\|_k &= \int_{\Omega \times I} \nabla \theta \cdot k \nabla \theta \, d\Omega dt = \int_I \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{K}_{\theta\theta} \boldsymbol{\theta} \, dt. \end{aligned} \quad (3.46)$$

La Figure 3.6 montre que, pour chaque physique, l'erreur (3.44) par rapport à la référence ainsi que l'indicateur de convergence (3.10) diminuent de manière régulière au fil des itérations et ont une allure similaire. Une erreur relative de 1% est atteinte avec moins de dix modes pour chaque physique. On peut noter quelques plateaux sur la courbe des modes PGD. Cela signifie que la mise à jour des fonctions temporelles a été jugée suffisante selon le critère de l'équation (3.35) et qu'aucun nouveau mode n'a été ajouté. Concernant ce critère, le seuil varie selon la taille de la base PGD, en s'inspirant de [DABY-SEESARAM et al., 2023] : on prend initialement $\xi_c = 1$, de sorte à encourager la construction de nouveaux modes dans les premières itérations, puis $\xi_c = 0.4$ une fois que la base contient cinq modes.

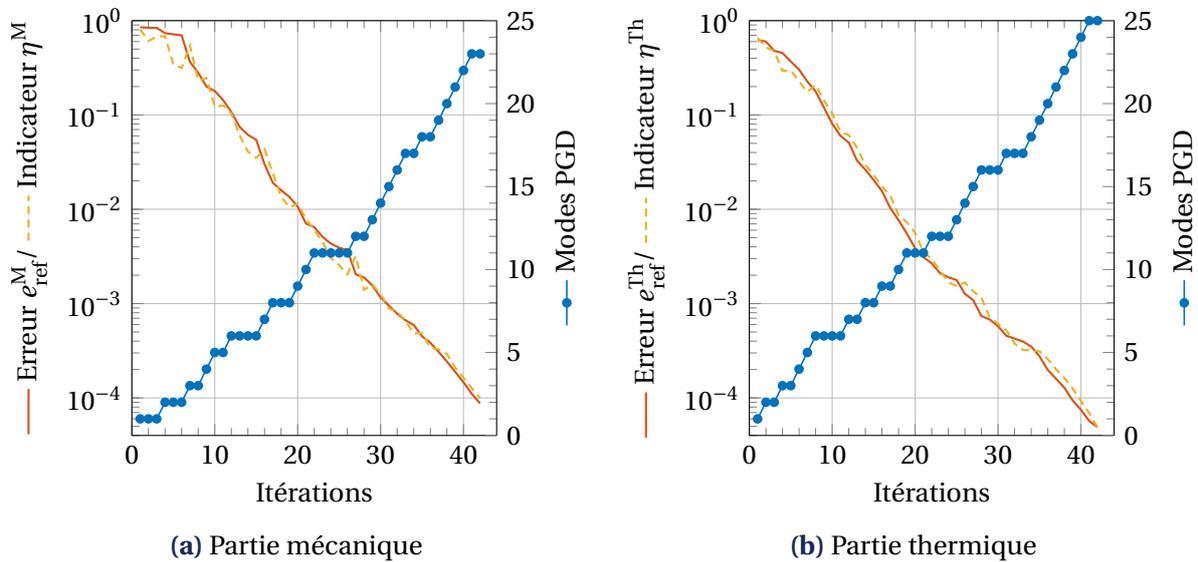


FIGURE 3.6 • Évolution de l'erreur, de l'indicateur de convergence et du nombre de modes PGD au fil des itérations

La flexibilité offerte par le traitement séparé des physiques sur l'ensemble du domaine espace-temps pendant l'étape découplée permet donc d'enrichir spécifiquement la base d'ordre réduit de l'une des physiques. Ainsi, ces plateaux se produisent indépendamment pour chaque physique, ce qui empêche le calcul de modes inutiles pour une physique donnée.

Analyse des modes PGD. La Figure 3.7 représente une sélection de couples de fonctions spatiales et temporelles résultant de l'application de la PGD à la partie thermique. Le premier mode (Figure 3.7a) influence principalement la région autour du trou de gauche, tandis que le second mode (Figure 3.7b) représente son homologue autour du trou de droite. En particulier, les fonctions temporelles associées présentent des similitudes avec l'évolution des températures imposées (voir Figure 3.3c). Le troisième mode (Figure 3.7c) affecte principalement la partie centrale de la barre, où la source de chaleur est appliquée. Les modes d'ordre supérieur, illustrés sur les Figures 3.7d à 3.7f, introduisent des corrections localisées. Il est important de noter que l'échelle utilisée pour visualiser ces fonctions du temps diffère considérablement de celle employée pour les trois précédentes. En revanche, la même échelle permet de tracer toutes les fonctions spatiales puisqu'elles sont normalisées.

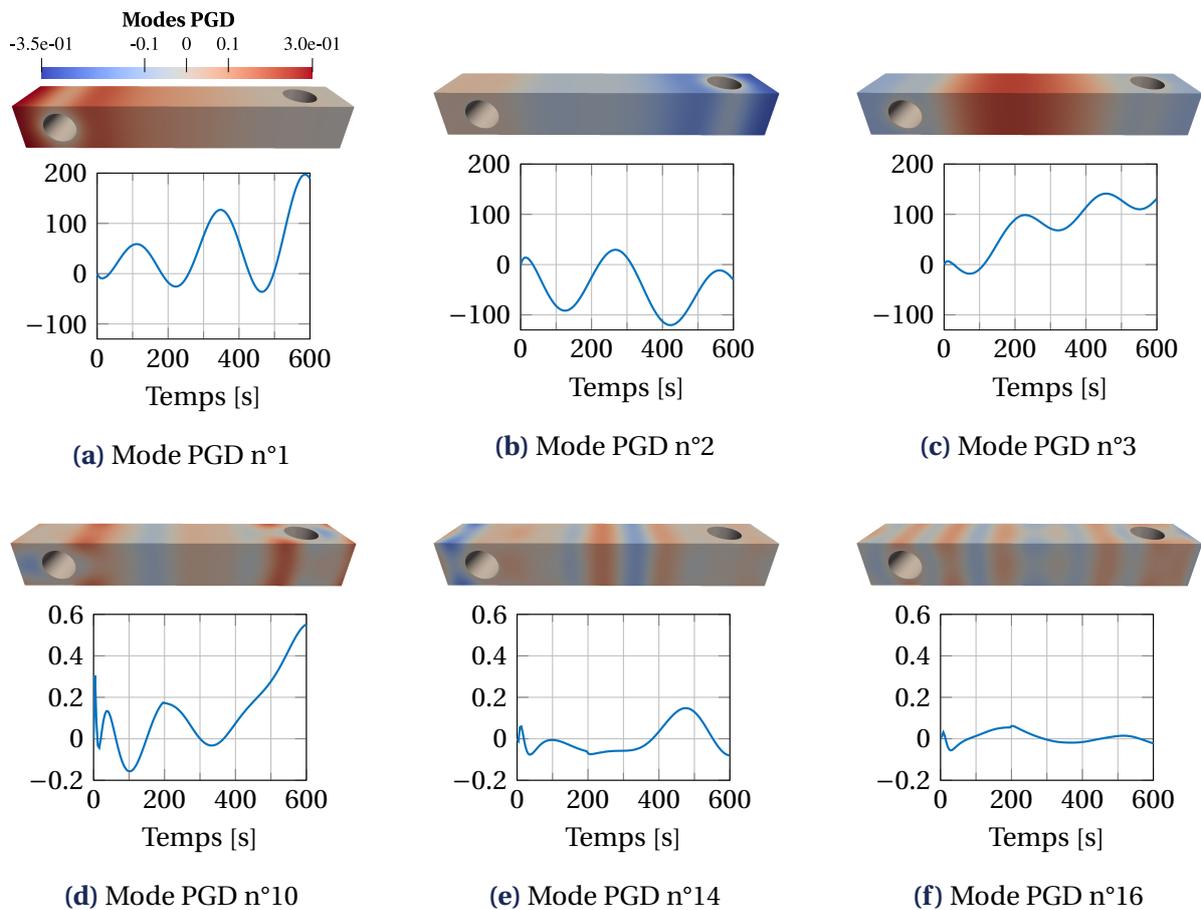


FIGURE 3.7 • Modes PGD pour la partie thermique du problème. Des échelles différentes sont utilisées pour les fonctions temporelles des deux lignes

Pour vérifier qu'aucun des modes construits par PGD n'est négligeable, une décomposition en valeurs singulières (SVD) est effectuée sur les corrections admissibles à zéro qui sont ajoutées par PGD, c'est-à-dire $(\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_0) \in \mathcal{U}_0$ et $(\theta_{n+1} - \theta_0) \in \mathcal{T}_0$. La décroissance des valeurs singulières, normalisées par rapport à la première, est illustrée sur la Figure 3.8. Selon la SVD, 23 et 25 modes sont respectivement nécessaires pour décrire avec précision la correction du déplacement et de la température. Cela correspond précisément à la taille des bases construites à l'aide de l'algorithme LATIN-PGD (cf. Figure 3.6). Cette correspondance signifie que chaque mode PGD apporte une contribution significative et qu'aucun n'est redondant.

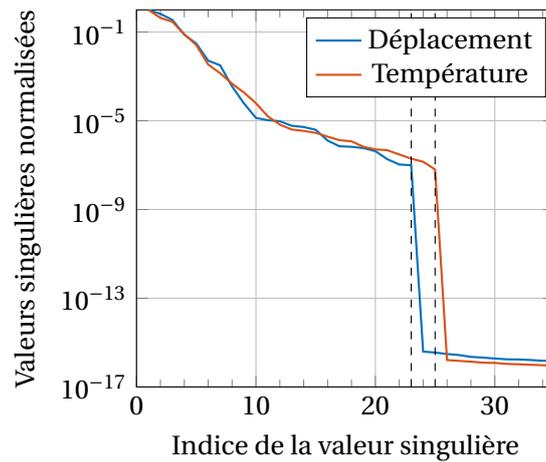


FIGURE 3.8 • Décroissance des valeurs singulières des bases réduites construites par PGD

2.3 Choix des directions de recherche

On s'intéresse à présent au choix des directions de recherche, qui constituent un paramètre numérique clé de la méthode. Parmi les trois opérateurs de directions de recherche introduits à l'équation (3.8), celle reliant le couple de variables (θ, R) fait intervenir un temps caractéristique t_c qu'il faut choisir. Notons que dans les travaux antérieurs sur le cas de la poro-élasticité [DUREISSEIX et al., 2003b; NÉRON & DUREISSEIX, 2008a], deux des trois opérateurs de directions de recherche font intervenir un temps caractéristique. Cela est dû au choix de considérer les taux de déformations $\dot{\epsilon}$ dans les inconnues mécaniques. Avec la formulation adoptée dans ces travaux, qui traite les déformations ϵ comme inconnue primale mécanique dans \mathbf{s}^M , nous n'avons qu'un seul temps caractéristique à choisir.

Importance du paramètre. On peut observer sur la Figure 3.9 que le choix de ce temps caractéristique a effectivement une forte influence sur l'allure des courbes de convergence de l'algorithme. Une valeur trop grande (en rouge) s'accompagne d'une convergence de plus en plus lente au fil des itérations, tandis qu'une valeur trop faible (en bleu) se traduit à l'inverse par une décroissance lente de l'erreur dans les premières itérations, puis une plongée tardive.

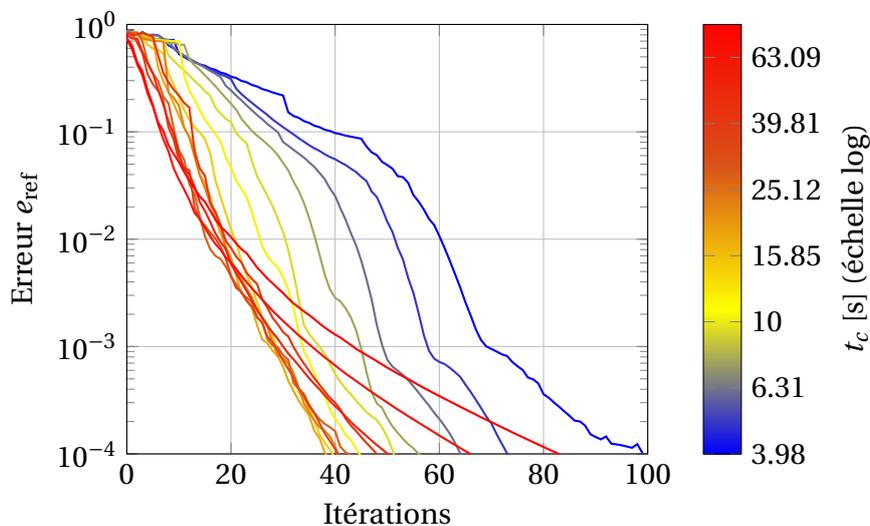


FIGURE 3.9 • Impact de la direction de recherche sur la convergence de la méthode

Par ailleurs, la [Figure 3.10](#) met en évidence la corrélation entre le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère d'arrêt (fixé ici à $\eta_c = 10^{-4}$) et le temps de calcul. Il est donc essentiel de bien choisir le paramètre t_c pour obtenir les meilleures performances.

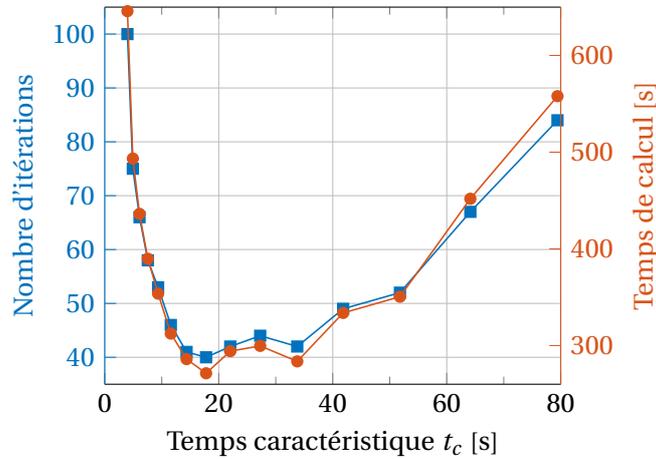


FIGURE 3.10 • Nombre d'itérations jusqu'à convergence ($\eta_c = 10^{-4}$) et temps de calcul en fonction du temps caractéristique de la direction de recherche (3.8c)

Retour sur les recommandations antérieures. Le choix des différents temps caractéristiques intervenant dans la formulation du problème de poro-élasticité fait l'objet d'une discussion théorique sur un cas unidimensionnel dans [NÉRON & DUREISSEIX, 2008a]. Cependant, les valeurs recommandées n'ont pas été confrontées à des essais numériques. La [Figure 3.11](#), issue du stage de M2 d'É. Foulatier que j'ai co-encadré [FOULATIER, 2024], s'y attache pour le temps caractéristique t_f de la direction de recherche reliant les quantités fluides, analogue à t_c . Dans les expressions des choix recommandés pour t_f , τ_F est le temps caractéristique intrinsèque au fluide, Q et $H = \frac{K}{\mu_w}$ sont des propriétés matériaux recensées

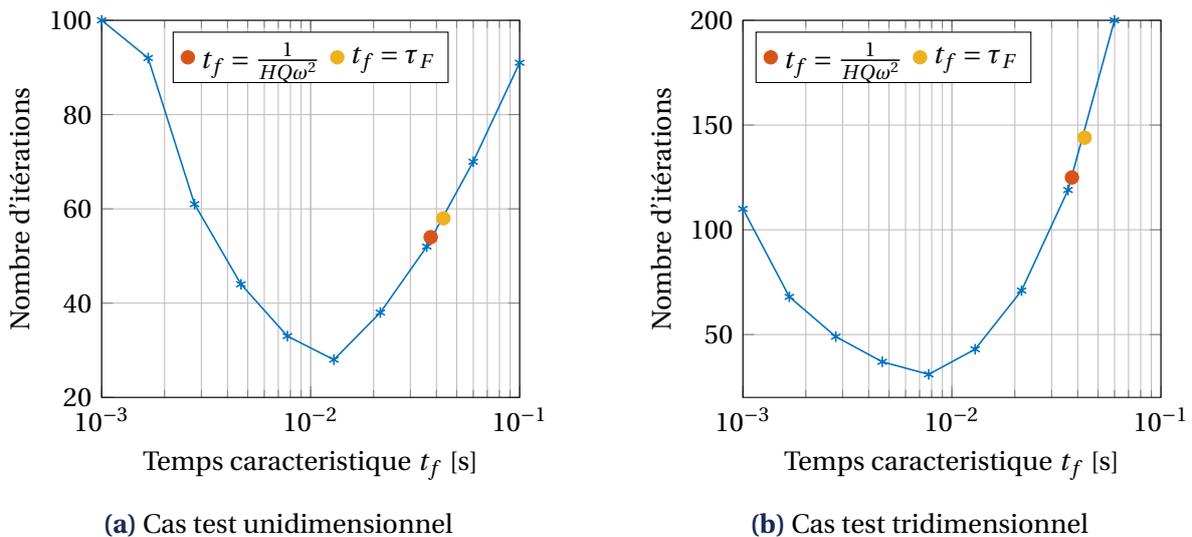


FIGURE 3.11 • Influence du temps caractéristique fluide t_f sur la convergence du problème de poro-élasticité, par [FOULATIER, 2024]

dans le [Tableau 2.3](#)¹ au chapitre 2 (page 51), et $\omega = \frac{\pi}{L}$ avec L une longueur caractéristique.

En considérant le problème mono-dimensionnel qui a servi de base aux développements analytiques, on observe sur la [Figure 3.11a](#) que les valeurs recommandées ne sont peut-être pas optimales, mais offrent un premier éclairage satisfaisant. En revanche, sur le cas tridimensionnel qui découle du problème 1D, le nombre d'itérations à convergence pour les deux valeurs conseillées est très loin de l'optimal (voir [Figure 3.11b](#)). Le choix judicieux de ce paramètre reste donc une question ouverte.

Influence de la discrétisation. Revenons à l'exemple de la thermo-élasticité pour examiner comment la discrétisation du problème, tant spatiale que temporelle, influence le choix optimal du temps caractéristique t_c . Les graphes de la [Figure 3.12](#) représentent le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère de convergence (toujours défini par $\eta_c = 10^{-4}$) en fonction de t_c pour différentes discrétisations. Les différents maillages spatiaux considérés sont numérotés par ordre de raffinement croissant (cf. [Tableau 3.3](#)).

TABLEAU 3.3 • Caractéristiques des maillages générés pour la géométrie de la [Figure 3.3a](#)

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4 ^a	Maillage 5
Degrés de liberté (total)	11 989	22 990	41 858	118 539	235 757

^a Maillage retenu pour toutes les autres exploitations

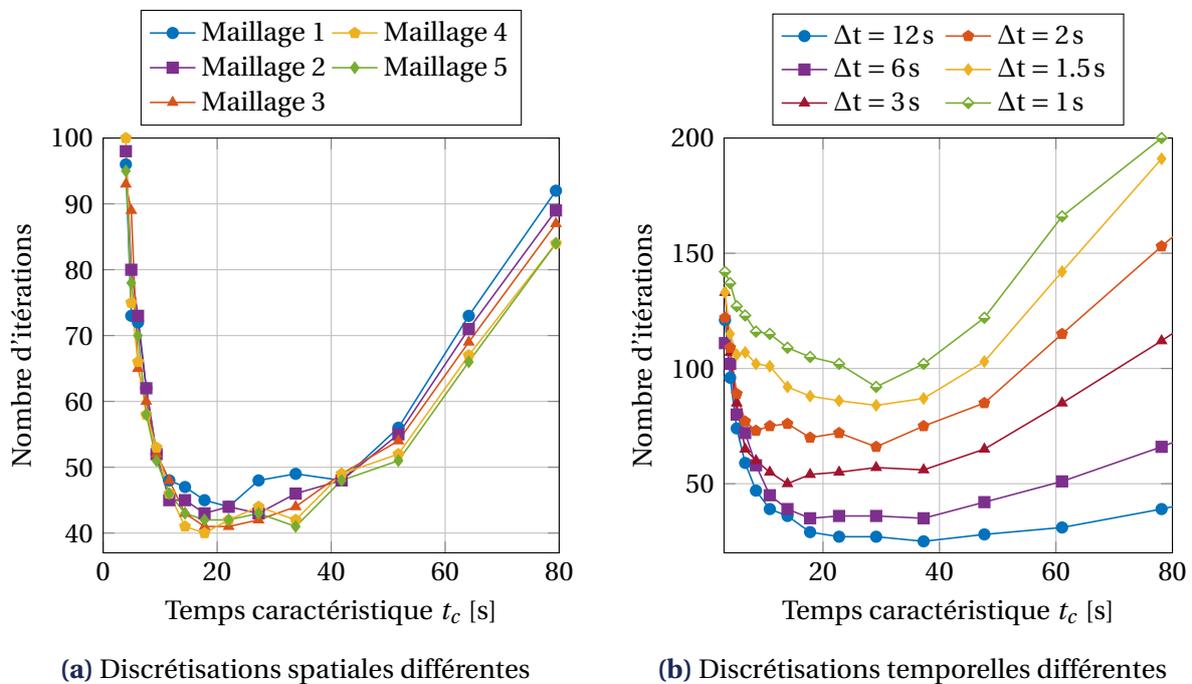


FIGURE 3.12 • Influence du temps caractéristique de la direction de recherche (3.8c) sur le nombre d'itérations à convergence ($\eta_c = 10^{-4}$) pour différentes discrétisations

1. En s'appuyant sur l'analogie qui y est décrite, on a $HQ \leftrightarrow \frac{k}{\rho c}$ (diffusivité thermique).

La [Figure 3.12a](#) montre que les tendances sont similaires quel que soit le maillage de la géométrie. L'influence du temps caractéristique de la direction de recherche (3.8c) sur le taux de convergence de l'algorithme ne dépend pas de la finesse du maillage spatial considéré. Ainsi, à défaut d'avoir une expression générique de la valeur optimale du temps caractéristique, on peut se contenter d'un maillage très grossier pour balayer différentes valeurs de t_c et ainsi guider son choix. Nous avons procédé de cette façon pour tous les exemples numériques présentés.

En ce qui concerne la discrétisation temporelle, on constate sur la [Figure 3.12b](#) qu'une discrétisation plus fine a tendance à restreindre la plage optimale pour le temps caractéristique. Néanmoins, une discrétisation temporelle grossière peut déjà fournir un bon ordre de grandeur pour le choix de t_c .

2.4 Influence de la force de couplage

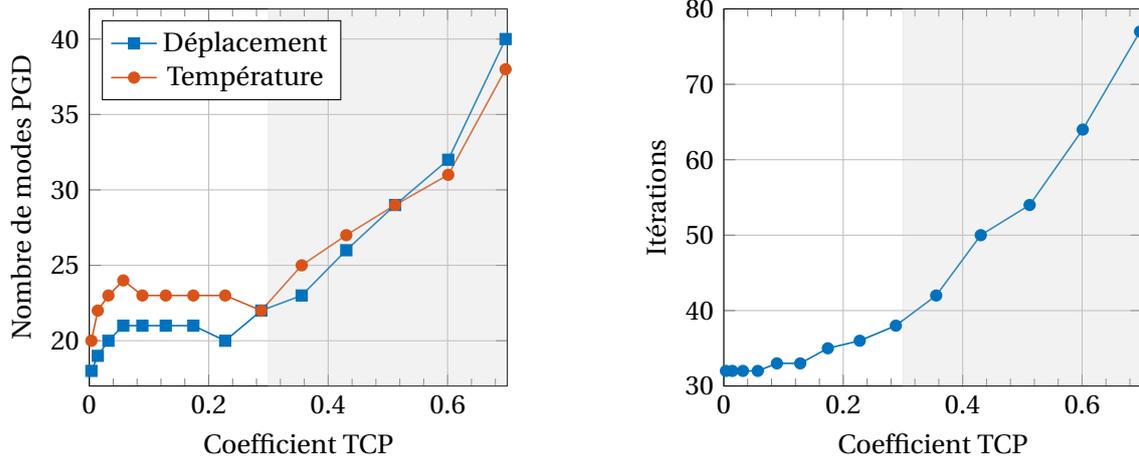
Dans cette sous-section, nous examinons la façon dont la méthode de résolution proposée est affectée par la variation du degré de couplage entre les deux physiques. Selon les équations du problème, l'influence de chaque physique sur l'autre est régie par le coefficient de couplage $\beta = \alpha(2\mu + 3\lambda)$. Pour ajuster la force du couplage, le coefficient de dilatation thermique α est modifié tout en maintenant les autres paramètres matériaux à leurs valeurs initiales, spécifiées dans le [Tableau 3.2](#). Nous explorons 14 valeurs uniformément espacées pour α dans la plage indiquée dans le [Tableau 3.4](#). Ce tableau comprend également le coefficient de couplage β correspondant et le paramètre de couplage thermoélastique (TCP) de [[ZIMMERMAN, 2000](#)], qui rend compte de la force du couplage.

TABLEAU 3.4 • Coefficient TCP (voir eq. (2.39), p. 52) associé aux valeurs extrêmes du coefficient de dilatation thermique considéré α

Coeff. de dilatation thermique α [K^{-1}]	Coeff. de couplage β [$\text{Nm}^{-2}\text{K}^{-1}$]	TCP [-]
5.5×10^{-6}	2.89×10^6	0.004
77×10^{-6}	40.43×10^6	0.697

Le nombre de modes mécaniques et thermiques générés à la convergence de l'algorithme est présenté dans la [Figure 3.13a](#) en fonction du paramètre TCP. Pour des valeurs de TCP relativement faibles, le champ de température nécessite un nombre de modes sensiblement plus élevé que le champ de déplacement pour atteindre la précision voulue. En outre, jusqu'à une valeur de TCP d'environ 0.3, le nombre de modes générés pour chaque physique reste relativement stable. Au-delà (zone grisée), à mesure que le degré de couplage augmente, le nombre de modes PGD croît simultanément pour les champs de déplacement et de température. Comme attendu, lorsque le couplage entre les physiques devient très fort, un nombre de modes similaire est nécessaire pour représenter chaque champ avec précision.

La [Figure 3.13b](#) permet de visualiser le nombre d'itérations de la méthode à mesure que le degré de couplage augmente. On observe également une augmentation significative dans



(a) Nombre de modes PGD générés à convergence (b) Nombre d'itérations jusqu'à convergence

FIGURE 3.13 • Influence de la force de couplage sur l'algorithme LATIN-PGD

la zone grisée. Il est courant que les méthodes de partitionnement (classiques) nécessitent davantage d'itérations lorsque le couplage devient très fort [NOVASCONE et al., 2015]. Néanmoins, dans notre cas, il est possible que l'augmentation du nombre de modes observée sur la Figure 3.13a soit liée à l'augmentation du nombre d'itérations de la méthode LATIN. Il serait nécessaire de se pencher davantage sur le critère d'ajout de modes, défini dans ces travaux par l'équation (3.35) à la page 79.

3 Application à un cas d'échelle

Dans le but de montrer l'applicabilité de la stratégie proposée à des problèmes quasi-industriels, un nouveau cas test portant sur une aube de turbine et comptant plus de deux millions de degrés de liberté est considéré. En particulier, une analyse détaillée des temps de calcul lors d'une résolution monolithique et avec la méthode LATIN-PGD est fournie.

3.1 Description du cas test

L'aube de turbine², illustrée en Figure 3.14, est discrétisée à l'aide de GMSH [GEUZAIN & REMACLE, 2009]. Le maillage généré comprend environ 470 000 éléments tétraédriques (quadratiques pour les déplacements et linéaires pour la température), ce qui mène à 2 370 000 degrés de liberté mécaniques et 118 300 degrés de liberté thermiques.

Le chargement et les conditions aux limites sont inspirés de [KIM et al., 2018] et représentés sur la Figure 3.14. Du fait de la rotation de la turbine, l'aube est soumise à une force volumique centrifuge

$$\underline{f}_d = \rho r \omega^2 \underline{e}_z, \quad (3.47)$$

avec ρ la masse volumique, r la distance par rapport à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire, qui augmente linéairement jusqu'à 15 000 Tr/min. L'axe de rotation est aligné sur

2. Aube de turbine de moteur créée par Luis Rojas (<https://grabcad.com/library/turbine-blade-13>)

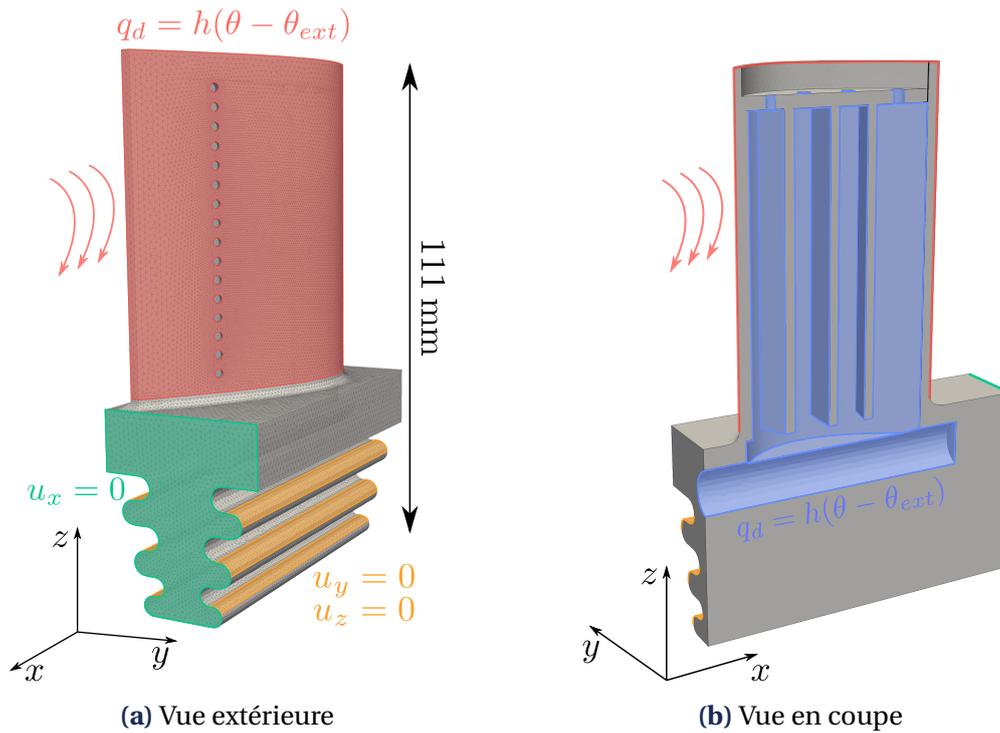


FIGURE 3.14 • Description du chargement appliqué à l’aube de turbine

l’axe x et situé à 90 mm de la base de l’aube. La partie inférieure de l’aube, nommée *pied de sapin* en référence à sa forme, a vocation à être insérée dans un disque porte-ailettes, solidaire de l’arbre de la turbine. Pour en tenir compte, les déplacements sont bloqués selon les axes y et z sur les surfaces supérieures du pied de sapin plaquées par la force centrifuge (en jaune sur la Figure 3.14a), tandis que le déplacement normal est bloqué sur l’une des surfaces latérales (représentée en vert). Les écoulements de gaz chauds sur la paroi extérieure de l’aube (représentés en rouge) et du fluide refroidisseur dans les canaux de refroidissement (en bleu sur la Figure 3.14b) sont modélisés par des conditions aux limites de type flux convectif forcé. Les valeurs de coefficient de transfert thermique convectif h et d’incrément de température ambiante θ_∞ pour chacune de ces deux zones sont données dans le Tableau 3.5.

TABLEAU 3.5 • Valeurs numériques des coefficients de convection thermique h et températures du fluide ambiant θ_∞

	h [$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$]	θ_∞ [K] ^b
Surface extérieure de l’aube	2500	250
Conduits de refroidissement	5000	20

^b incrément par rapport à la température de référence $T_0 = 293\text{ K}$

Les paramètres matériaux considérés sont les mêmes que dans la section précédente, décrits dans le Tableau 3.2. L’intervalle de temps pour la simulation s’étend sur 60 secondes et est discrétisé avec un pas de temps uniforme $\Delta t = 1\text{ s}$. Enfin, le temps caractéristique intervenant dans la direction de recherche $\mathbf{E}_{\theta R} = \frac{\rho c}{t_c} \mathbf{I}$ est choisi tel que $t_c = 4\text{ s}$.

3.2 Résultats numériques et analyse des performances

L'ensemble des applications numériques a été mis en œuvre sur les stations du centre de simulation du laboratoire. En particulier, toutes les simulations avec mesures de temps de calcul ont été exécutées sur une machine équipée de deux processeurs *Intel® Xeon® Silver 4116 CPU @2.10 GHz* de 12 cœurs chacun et de 256 Go de RAM.

Champs solutions. La convergence de la méthode LATIN-PGD (avec un seuil $\eta_c = 10^{-4}$ pour le critère d'arrêt) est obtenue avec 11 modes PGD pour chaque physique. Les champs de température et de contrainte équivalente de Von Mises obtenus à convergence sont représentés en Figure 3.15. On observe que la température est maximale dans les régions qui ne sont pas directement refroidies, tandis que les températures les plus basses sont obtenues dans la partie inférieure de l'aube et le long des parois intérieures des conduits de refroidissement. Les contraintes effectives les plus élevées sont principalement localisées au sommet du pied de sapin, aux jonctions entre les parties supérieure et inférieure de l'aube, et autour des trous de refroidissement les plus bas.

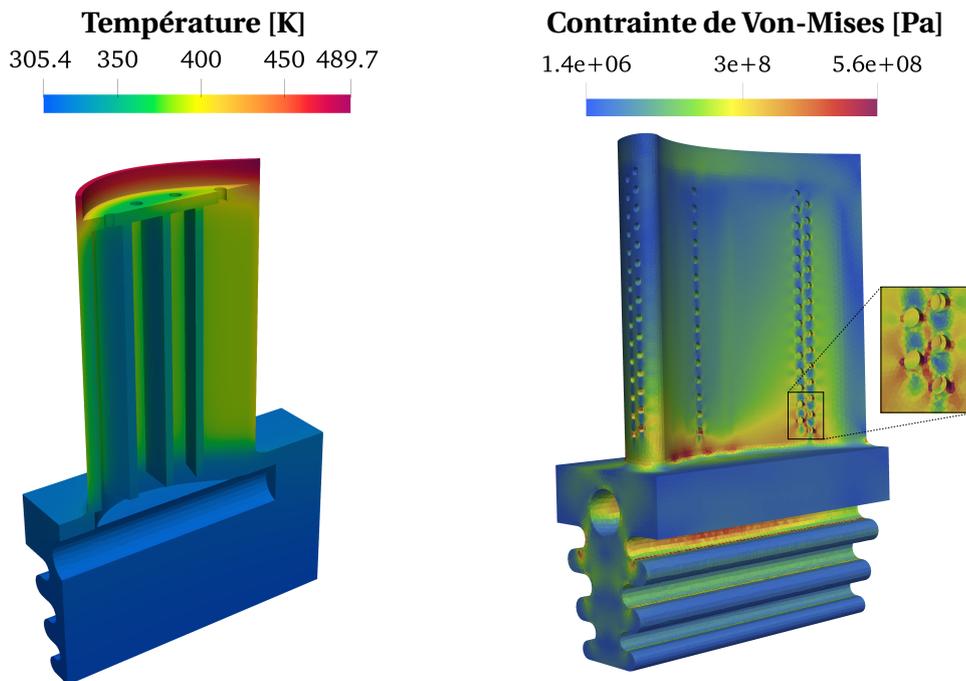


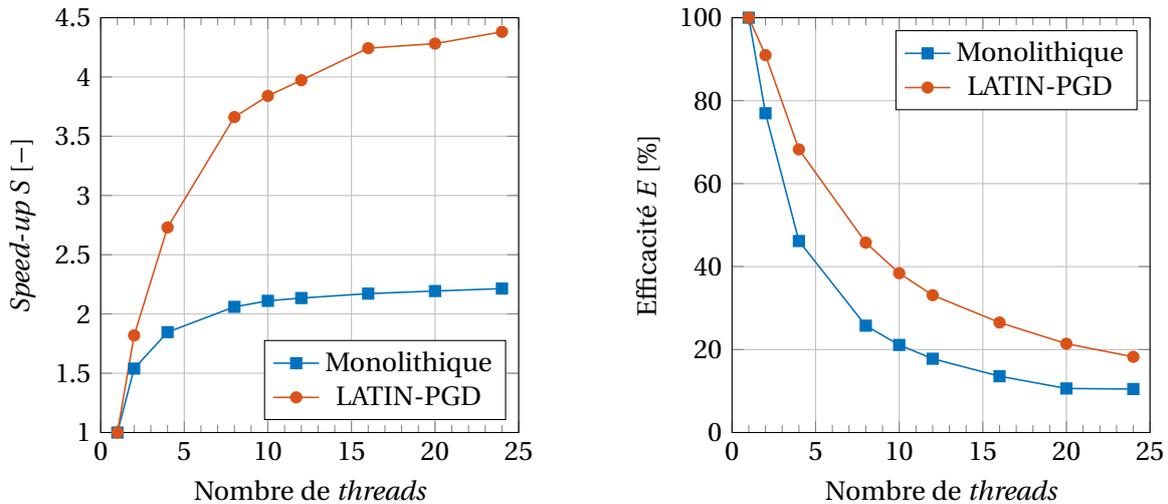
FIGURE 3.15 • champs solutions obtenus avec la méthode LATIN-PGD à $t = 60$ s sur l'aube de turbine

Analyse des temps de calcul. Avant toute chose, nous nous sommes intéressés à l'influence du nombre de *fils d'exécution* , souvent appelés *threads* , sur les performances de chacune des stratégies de résolution. En effet, le démonstrateur ROMlab a été conçu de sorte à exploiter les architectures *multi-threads* des machines actuelles et ainsi tirer parti du fait que certaines tâches (multiplication de matrices, opérations élément par élément, etc.) peuvent être exécutées en parallèle sur plusieurs *threads* dans Matlab.

Deux quantités sont introduites pour évaluer les performances des méthodes. D'abord, le *speed-up* S représente le rapport entre le temps d'exécution en série T_1 et le temps de calcul T_n en utilisant n *threads*. On s'intéresse généralement aussi à l'efficacité parallèle E par rapport à une exécution en série. Ces quantités se définissent par :

$$S = \frac{T_1}{T_n}, \quad (3.48a) \quad E = \frac{T_1}{n \times T_n}. \quad (3.48b)$$

Le *speed-up* et l'efficacité sont tracés sur la Figure 3.16 en utilisant jusqu'à 24 *threads*. On constate sur la Figure 3.16a que la méthode LATIN-PGD profite mieux du *multi-threading* que l'approche monolithique, en obtenant un *speed-up* deux fois plus élevé. Néanmoins, les deux méthodes sont loin de l'efficacité maximale, comme le montre la Figure 3.16b.



(a) Évolution du *speed-up* par rapport à une exécution en série (b) Évolution de l'efficacité de la parallélisation

FIGURE 3.16 • Influence du nombre de *threads* sur les performances des approches monolithique et LATIN-PGD

À l'issue de l'étude précédente, nous choisissons de conserver 12 *threads* pour examiner en détail les temps de calculs des méthodes de résolution monolithique et LATIN-PGD. Dans l'approche monolithique, le système (2.55) (donné au chapitre 2, page 56) est résolu à l'aide d'un solveur direct. Ce choix est motivé par la robustesse de ce type de solveurs vis-à-vis du conditionnement du système. De plus, dans notre problème linéaire avec un pas de temps constant, la matrice du système est constante ; sa factorisation est alors effectuée une seule fois et réutilisée pour tous les pas de temps suivants.

La Figure 3.17 montre que la résolution LATIN-PGD avec un critère d'arrêt de $\eta_c = 10^{-4}$ est environ sept fois plus rapide que la résolution monolithique sur ce cas test quasi-industriel. D'après la Figure 3.17a, l'approche monolithique est dominée par la boucle sur les 60 pas de temps. Cependant, la décomposition LU de la matrice non symétrique du système, exécutée une seule fois, constitue tout de même une part importante du temps d'exécution global. Cette étape de factorisation dépasse à elle seule la durée de l'ensemble du processus de résolution à l'aide de l'algorithme LATIN-PGD.

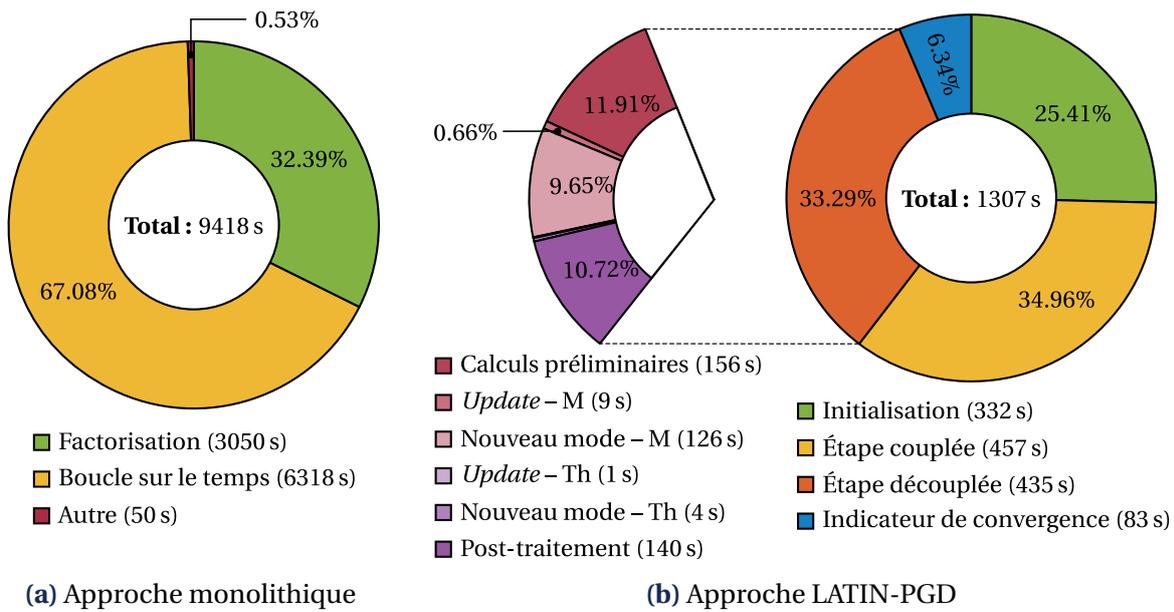


FIGURE 3.17 • Répartition du temps de calcul sur l'exemple de l'aube de turbine en utilisant 12 threads

Q Remarque 3.5

Les temps de calcul obtenus pour l'approche monolithique sont à nuancer en raison du choix de solveur pour la résolution du système (2.55). En effet, les solveurs itératifs sont en général préférés pour les systèmes de grande taille.

Nous nous sommes intéressés à l'utilisation d'un solveur itératif GMRES [SAAD & SCHULTZ, 1986] intégré à Matlab. Alors que le solveur GMRES ne convergeait pas sans préconditionnement, l'utilisation d'un préconditionneur ILU (également intégré à Matlab) a permis d'atteindre la convergence en deux à trois itérations à chaque pas de temps. Néanmoins, la résolution demeure plus lente qu'avec un solveur direct, le total étant largement dominé par le calcul du préconditionneur.

Comme cela a été présenté dans la Section 3.2 du chapitre 1, le développement de préconditionneurs adaptés aux problèmes multiphysiques couplés, permettant d'obtenir une résolution plus efficace du système monolithique, représente un domaine de recherche actif. Il serait intéressant, dans le futur, de pouvoir confronter la méthode LATIN-PGD à un solveur monolithique bénéficiant des dernières avancées.

En ce qui concerne la méthode LATIN-PGD, l'analyse de la Figure 3.17b révèle que les étapes couplée et découplée de l'algorithme ont sensiblement le même coût de calcul sur cet exemple. Dans l'étape découplée, la proportion associée aux étapes de la PGD (mise à jour des fonctions temporelles et génération de nouveaux modes) pour la partie thermique est négligeable en raison du nombre de degrés de liberté inférieur par rapport à la partie mécanique. Comme prévu, l'étape d'update reste peu coûteuse, même pour la mécanique.

L'initialisation de l'algorithme LATIN-PGD, qui comprend la décomposition de Cholesky des matrices symétriques pour les problèmes mécaniques et thermiques (décrits par les

équations (3.18) et (3.24)), représente tout de même 25% du temps total d'exécution. Par conséquent, il est particulièrement intéressant de réutiliser une même initialisation pour réaliser plusieurs simulations. Il s'agit de l'une des idées de l'approche mise en œuvre dans le Chapitre 4.

➤ Bilan du chapitre

Ce chapitre détaille la méthode LATIN-PGD appliquée au problème de thermo-élasticité présenté au Chapitre 2. Sa spécificité réside dans la génération de solutions intermédiaires définies sur l'ensemble du domaine spatial et tout l'intervalle temporel, qui sont améliorées au cours d'une procédure itérative. Cette propriété permet d'appliquer la méthode de réduction de modèle par PGD indépendamment à chaque physique. La méthode décrite a été implémentée dans l'environnement de développement collaboratif ROMlab introduit au Chapitre 2. En particulier, les mêmes routines sont utilisées pour l'application de la PGD aux deux physiques.

Un premier exemple a permis de valider l'implémentation de la méthode par rapport à une référence issue d'une résolution monolithique. L'influence de facteurs numériques (direction de recherche) et physiques (force de couplage) sur le comportement de l'algorithme a également été étudié. En particulier, bien que le choix *a priori* de la direction de recherche reste une question ouverte, nous avons observé que la valeur optimale était indépendante du maillage spatial et peu dépendante de la discrétisation temporelle. Des discrétisations grossières peuvent donc être utilisées pour guider le choix de ce paramètre clé.

Le second exemple introduit porte sur une aube de turbine et a pour but de tester les performances de la méthode sur un cas d'échelle industriel comportant plus de deux millions de degrés de liberté. Un tel problème multiphysique n'avait encore jamais été abordé avec la méthode LATIN-PGD. La parallélisation sur plusieurs *threads*, permise par l'environnement numérique de développement, est exploitée pour améliorer les performances. L'analyse des temps de résolution donne un net avantage à la méthode LATIN-PGD par rapport à l'approche monolithique.

Ce chapitre représente donc un premier pas pour répondre à la problématique générale de cette thèse en fournissant un solveur efficace permettant de diminuer le coût de chaque calcul individuellement. Pour ce faire, la méthode tire parti à la fois des avantages apportés par la PGD et des bénéfices numériques qui découlent de la résolution de problèmes symétriques associés à chaque physique. Les spécificités de ce solveur peuvent être avantageusement exploitées pour réduire davantage encore les coûts de calcul lorsqu'il s'agit de résoudre une famille de problèmes multiphysiques semblables, ce qui fait l'objet du Chapitre 4 suivant.

* * *

4

Résolution de problèmes multiphysiques paramétrés avec la méthode LATIN-PGD espace-temps

Ce chapitre s'appuie sur les développements précédents pour présenter une stratégie de résolution efficace d'une famille de problèmes multiphysiques semblables. Ces similarités sont exploitées à la fois en initialisant le schéma itératif LATIN-PGD par une solution précédente, supposée proche de celle recherchée, et en réutilisant – pour chaque physique – une base réduite pouvant être enrichie au fil des calculs. Le traitement modulaire des physiques, permis par la méthode LATIN-PGD, est conservé. En guise d'illustration, deux études paramétriques portant sur des propriétés matériaux sont proposées et conduisent à des gains en temps de calcul significatifs par rapport à une approche naïve. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet de l'article [WURTZER et al., 2024b].

Sommaire

1	Méthode multiparamétrique basée sur le solveur LATIN-PGD	100
1.1	Idées générales et historique des développements	100
1.2	Extension aux problèmes multiphysiques	103
2	Variation d'un paramètre influençant la force du couplage	105
2.1	Motivations	105
2.2	Étude paramétrique	107
3	Variation de deux paramètres matériaux	111
3.1	Description de l'étude	111
3.2	Analyse des résultats	113
3.3	Limites	115
›	Bilan du chapitre	116

Comme mentionné en début de manuscrit, il est courant pour les ingénieurs, lors des phases de conception, d'optimisation ou de maintenance prédictive, de tester différentes configurations (chargement, géométrie, caractéristiques matériaux) afin de construire un métamodèle, réaliser une analyse de sensibilité ou ajuster des paramètres incertains, par exemple. Cela mène à la résolution d'une famille de problèmes physiques similaires de la forme

$$\mathcal{L}(\underline{u}^{(\underline{\mu}_k)}, \theta^{(\underline{\mu}_k)}, t; \underline{\mu}_k) = 0, \quad (4.1)$$

faisant intervenir divers paramètres rassemblés dans un vecteur $\underline{\mu}_k \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$. On qualifie (4.1) de *problème paramétré*. Sa résolution répétée pour un ensemble de n_j jeux de paramètres $\mathcal{P} \equiv \{\underline{\mu}_i\}_{i=1, \dots, n_j} \in \mathcal{D}^{n_j}$ constitue ce que l'on appelle une *étude paramétrique*, dont le coût de calcul peut rapidement devenir prohibitif sans stratégie adaptée.

Lors de la présentation de la méthode LATIN-PGD appliquée à la thermoélasticité fortement couplée au Chapitre 3, nous nous sommes concentrés sur la résolution d'un problème paramétré (4.1) pour un jeu particulier de paramètres $\underline{\mu}_k$ fixé. Dans ce contexte, la réduction de modèle intégrée à la méthode LATIN-PGD a démontré sa capacité à accélérer chaque calcul individuellement, ce qui constitue une première étape pour réaliser efficacement une étude paramétrique. Le coût total d'une telle étude peut encore être réduit en exploitant la similarité entre les champs solutions associés à différents jeux de paramètres de \mathcal{P} ; c'est l'idée de la stratégie mise en œuvre dans ce chapitre.

1 Méthode multiparamétrique basée sur le solveur LATIN-PGD

Afin de réduire le coût de calcul d'une étude paramétrique, une extension de la méthode LATIN-PGD classique, dite *multiparamétrique* (ou historiquement *multirésolution*), a été introduite dans [BOUCARD & LADEVÈZE, 1999]. Cette dernière exploite avantageusement le caractère non incrémental du solveur LATIN et utilise une PGD avec décomposition espace-temps uniquement. Les paramètres $\underline{\mu}$ sont quant à eux traités différemment des variables spatiales et temporelles. Ainsi, cette stratégie multiparamétrique peut aisément compléter les techniques développées au Chapitre 3 concernant les aspects multiphysiques. Par ailleurs, la distinction entre les variables spatio-temporelles universelles et les paramètres supplémentaires a récemment permis l'implémentation faiblement intrusive de cette méthode de résolution dans un logiciel généraliste de calcul par éléments finis [SCANFF et al., 2022].

Dans cette section, nous donnons d'abord les idées générales de l'approche LATIN-PGD multiparamétrique et passons en revue les spécificités des développements antérieurs dans divers contextes monophysiques. Sa mise en œuvre dans le cadre multiphysique de cette thèse est ensuite détaillée.

1.1 Idées générales et historique des développements

La stratégie multiparamétrique basée sur le solveur LATIN-PGD espace-temps repose sur deux idées principales.

❶ **Initialisation judicieuse du schéma itératif.** L'un des points clés de la méthode LATIN-PGD pour son utilisation dans le cadre de la résolution répétée d'un problème paramétré est son caractère non incrémental. Cette particularité permet d'initialiser l'algorithme de résolution avec n'importe quel ensemble de champs $s_0 \in \mathcal{A}_d$ définis sur le domaine espace-temps complet et vérifiant les équations d'admissibilité. En particulier, lors d'une étude paramétrique, il peut être intéressant d'exploiter la solution d'un calcul précédent, supposée proche du résultat attendu pour le calcul courant. En démarrant le processus itératif plus près de la solution recherchée, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la précision voulue est significativement réduit, ce qui permet d'obtenir la solution pour un nouveau jeu de paramètres à un coût bien inférieur à celui d'un calcul complet.

Q **Remarque 4.1**

Lorsque l'espace \mathcal{D} inclut des variations sur les conditions aux limites de Dirichlet, il n'est plus possible de réutiliser directement le résultat d'un calcul précédent, mais seulement la correction admissible à zéro. Celle-ci peut être combinée à une solution élastique satisfaisant les nouvelles conditions de Dirichlet, comme présenté par [DABY-SEESARAM et al., 2025].

Ce premier point s'est déjà avéré efficace dans le cadre de non-linéarités de contact [BOUCARD & CHAMPANEY, 2003]. Le temps nécessaire à une étude paramétrique impliquant une vingtaine de calculs y a été réduit d'un facteur 1.5. Il est cependant possible d'améliorer encore les performances de la stratégie multiparamétrique en réutilisant également une base réduite déjà existante.

❷ **Réutilisation et enrichissement de la base PGD.** Le second point clé de la méthode LATIN-PGD multiparamétrique pour aborder un nouveau jeu de paramètres $\underline{\mu}$ consiste à fournir une base réduite existante, issue d'un ou plusieurs calculs précédents. Ainsi, comme dans le cadre des méthodes de réduction de modèle *a posteriori*, il s'agit d'abord de trouver la meilleure approximation de la solution du nouveau problème sur cette base spatiale, *i.e.*, les meilleures fonctions du temps associées. Dans la méthode LATIN-PGD, c'est l'étape d'*update* qui joue ce rôle, et la simple mise à jour des fonctions temporelles peut être suffisante, comme observé par [HEYBERGER et al., 2012]. Si toutefois la base réduite fournie s'avère insuffisante pour caractériser le nouveau problème, la PGD présente l'avantage de pouvoir l'enrichir automatiquement jusqu'à atteindre la qualité désirée pour la nouvelle solution.

Par conséquent, les modes PGD partagés entre plusieurs jeux de paramètres ne sont construits qu'une seule fois et réutilisés par la suite [NÉRON et al., 2015], ce qui permet une réduction supplémentaire du coût total de l'étude paramétrique. Il a été observé dans [DABY-SEESARAM, 2023] que les deux aspects (initialisation judicieuse et réutilisation d'une base réduite) contribuent de manière équitable à la réduction du nombre d'itérations cumulées à l'issue de l'étude.

Plusieurs options, abordées ci-après, sont envisageables à la fois pour la solution précédente et la base réduite à réutiliser. Cependant, le choix est conditionné par l'ordre dans lequel les calculs de l'étude paramétrique sont effectués.

Parcours dans l'espace paramétrique. L'ordre dans lequel sont traités les différents jeux de paramètres peut être imposé par une instance extérieure, comme un algorithme d'optimisation [NÉRON et al., 2015]. Si au contraire l'ensemble \mathcal{P} de jeux pour lesquels une solution est recherchée est connu à l'avance, l'enchaînement des calculs est libre et son choix dépend de l'objectif recherché. Lorsqu'on souhaite réaliser l'ensemble des calculs le plus rapidement possible, l'approche la plus simple consiste à parcourir l'espace \mathcal{D} de proche en proche [SCANFF et al., 2022], tandis que [DABY-SEESARAM et al., 2025] présente une démarche pour déterminer le chemin minimisant une certaine distance entre deux calculs successifs. Dans le contexte alternatif d'études répétitives, [HEYBERGER et al., 2013] propose un chemin d'exploration de \mathcal{D} dicté par une procédure gloutonne afin de construire une base réduite permettant de représenter les solutions associées à l'intégralité des jeux de paramètres de \mathcal{P} .

Choix pour l'initialisation de la solution. Une fois le parcours de l'espace \mathcal{D} déterminé, se pose la question de la solution précédemment calculée à utiliser pour l'initialisation de la nouvelle résolution. Une première option, illustrée sur la Figure 4.1, consiste à systématiquement utiliser la solution du problème précédemment traité [BOUCARD & CHAMPANEY, 2003; SCANFF et al., 2022]. Cela donne de bons résultats si le plan d'expérience a été préalablement trié et que les sauts dans l'espace des paramètres sont réduits d'un problème à l'autre [HEYBERGER, 2014]. Dans ce cas, ce choix s'apparente au plus proche voisin dans l'espace paramétrique (cf. Figure 4.1), qui s'avère pertinent lors de paramètres matériaux variables [NÉRON et al., 2015]. Une approche alternative a été proposée par [DABY-SEESARAM et al., 2025] dans un cadre de dynamique non linéaire en se basant sur la proximité des solutions élastiques associées aux différents jeux de paramètres.

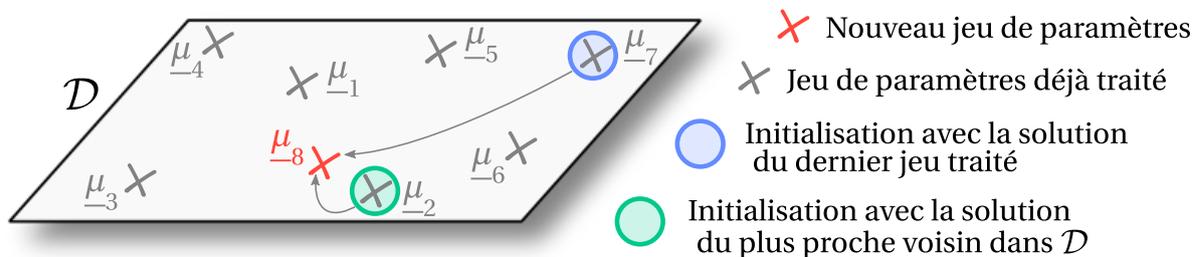


FIGURE 4.1 • Différentes stratégies d'initialisation d'un calcul (d'après [HEYBERGER, 2014])

Choix pour l'initialisation de la base. Plusieurs choix sont également possibles quant à la base PGD fournie à un nouveau calcul. Dans les premiers travaux, une même base – issue d'un calcul initial associé à une valeur fixée de $\underline{\mu}$ – servait à initialiser tous les calculs suivants [BOUCARD & LADEVÈZE, 1999]. Une autre possibilité consiste à utiliser une base commune que l'on enrichit au fil des calculs, soit par l'ensemble des modes calculés, soit *sélectivement* de sorte à ne conserver que ceux introduisant les corrections les plus globales [NÉRON et al., 2015]. Ces trois possibilités ont été comparées par [HEYBERGER et al., 2012] sur un exemple de thermique instationnaire avec variabilité de propriétés matériaux. L'utilisation d'une base enrichie par l'ensemble des modes s'est avérée la plus pertinente dans cette étude. Il est également possible de réutiliser la base construite pour un seul calcul précédent bien choisi, comme dans [DABY-SEESARAM et al., 2025].

Bilan et positionnement. Dans la suite de ce chapitre, nous nous plaçons dans le contexte où l'on souhaite réduire le temps de calcul global d'une seule étude paramétrique, dont on connaît à l'avance l'ensemble \mathcal{P} des jeux de paramètres pour lesquels les champs solutions sont recherchés. Nous faisons alors les choix pragmatiques suivants :

- l'espace paramétrique \mathcal{D} est supposé discrétisé de manière uniforme par n_j jeux de paramètres rassemblés dans l'ensemble \mathcal{P} et parcouru de proche en proche,
- chaque nouveau calcul associé à un jeu $\underline{\mu}_k$ (avec $k > 1$) est initialisé avec
 - la solution obtenue pour le jeu précédent $\underline{\mu}_{k-1}$,
 - les bases réduites (mécanique et thermique) qui contiennent *tous* les enrichissements associés à $\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_{k-1}$ et apportés au cours des calculs précédents.

1.2 Extension aux problèmes multiphysiques

Afin de justifier l'approche mise en œuvre, des études préliminaires pour la résolution successive de deux problèmes, avec stratégie de réutilisation pour l'une des physiques uniquement, ont d'abord été menées. La nécessité à la fois d'enrichir le modèle réduit existant et de pouvoir corriger la solution en conséquence sur l'ensemble des pas de temps avait été mise en évidence. Une méthode de partitionnement standard ne permet pas une telle adaptabilité [WURTZER et al., 2022], contrairement à la méthode LATIN-PGD avec laquelle la précision souhaitée est atteinte suite à un nombre restreint d'itérations et de modes ajoutés [WURTZER et al., 2024a].

Nous détaillons à présent dans quelle mesure l'approche LATIN-PGD pour les problèmes multiphysiques, présentée au Chapitre 3, est impactée par la stratégie multiparamétrique permettant de résoudre un problème multiphysique paramétré de la forme (4.1).

Premier calcul de l'étude paramétrique. Le premier calcul, associé au jeu de paramètres $\underline{\mu}_1$, est réalisé comme détaillé dans le Chapitre 3. À l'issue de cette résolution, sont stockés pour chaque physique :

- le champ primal cinématiquement admissible issu de l'étape d'initialisation,
- la décomposition de Cholesky de la matrice du problème éléments finis à résoudre à l'étape découlée,
- les couples de fonctions du temps et de l'espace générés par PGD.

Q Remarque 4.2

Plutôt que de conserver l'ensemble des champs contenus dans \mathbf{s} , nous choisissons de ne stocker que les champs de déplacement et de température à l'issue d'un calcul, dans l'optique de réduire la quantité de données à transférer d'un calcul au suivant.

Calculs suivants. Supposons à présent que l'on souhaite traiter le jeu de paramètres $\underline{\mu}_{k+1}$. La démarche, commentée ci-après, est résumée dans l'Algorithme 2. Les champs d'inconnues primales (déplacement $\mathbf{u}^{(\underline{\mu}_{k+1})}$ et température $\theta^{(\underline{\mu}_{k+1})}$) sont initialisés par ceux issus du calcul précédent pour $\underline{\mu}_k$: $\mathbf{u}^{(\underline{\mu}_k)}$ et $\theta^{(\underline{\mu}_k)}$. Ces derniers sont reconstruits à partir de l'initialisation

cinématiquement admissible ($\mathbf{u}_0(t)$ et $\theta_0(t)$) et des modes PGD stockés en mémoire. Les gradients de ces champs, respectivement $\varepsilon^{(\underline{\mu}_{k+1})}$ et $\mathbf{g}^{(\underline{\mu}_{k+1})}$, sont également calculés durant l'initialisation de ce nouveau calcul.

Algorithme 2 : Stratégie LATIN-PGD multiparamétrique dans le cas multiphysique : exploitation des résultats associés au jeu de paramètres $\underline{\mu}_k$ pour traiter le jeu $\underline{\mu}_{k+1}$

► **Entrées** : – champs connus $\mathbf{u}^{(\underline{\mu}_k)} = \mathbf{u}_0(t) + \sum_{i=1}^{m_u^{(\underline{\mu}_k)}} \alpha_i(t) \bar{\mathbf{u}}_i$ et $\theta^{(\underline{\mu}_k)} = \theta_0(t) + \sum_{i=1}^{m_\theta^{(\underline{\mu}_k)}} \vartheta_i(t) \bar{\theta}_i$
 – bases de modes spatiaux $\{\bar{\mathbf{u}}_i\}_{i=1, \dots, m_u^{(\underline{\mu}_k)}}$ et $\{\bar{\theta}_i\}_{i=1, \dots, m_\theta^{(\underline{\mu}_k)}}$

⓪ **Initialisation** : $n = 0$

– réutilisation du champ primal
 – calcul du gradient

Mécanique

$$\mathbf{u}_n^{(\underline{\mu}_{k+1})} \leftarrow \mathbf{u}^{(\underline{\mu}_k)}$$

$$\varepsilon_n^{(\underline{\mu}_{k+1})} = \nabla_s \mathbf{u}_n^{(\underline{\mu}_{k+1})}$$

Thermique

$$\theta_n^{(\underline{\mu}_{k+1})} \leftarrow \theta^{(\underline{\mu}_k)}$$

$$\mathbf{g}_n^{(\underline{\mu}_{k+1})} = \nabla \theta_n^{(\underline{\mu}_{k+1})}$$

tant que $\eta > \eta_c$ **et** $n \leq n_{max}$ **faire**

/ itérations de la méthode LATIN-PGD */*

Ⓛ **Étape couplée**

si $n = 0$ **alors**

– direction de recherche verticale (4.2)
 – résolution du comportement **couplé** (4.3) pour trouver $\hat{\sigma}_{n+1}^{(\underline{\mu}_{k+1})}$, $\hat{\mathbf{R}}_{n+1}^{(\underline{\mu}_{k+1})}$ et $\hat{\mathbf{q}}_{n+1}^{(\underline{\mu}_{k+1})}$

sinon

– résolution du système **couplé** habituel (3.14), page 73, pour obtenir $\hat{\sigma}_{n+1}^{(\underline{\mu}_{k+1})}$

fin

Ⓜ **Étape découplée**

/ déroulement classique (cf. chapitre 3) */*

Pour chaque *physique* **appliquer** l'Algorithme 1 de résolution par PGD, page 82 :

– calcul de la meilleure solution dans la base actuelle (étape d'*update*)
 – si nécessaire, enrichissement de la base réduite globale

end

Ⓝ **Calcul de l'indicateur d'erreur** η , défini à la page 72 par (3.9)

$n \leftarrow n + 1$

fin

► **Résultats** : – champs solutions $\mathbf{u}^{(\underline{\mu}_{k+1})}(t)$ et $\theta^{(\underline{\mu}_{k+1})}(t)$ associés à $\underline{\mu}_{k+1}$

– bases de modes spatiaux $\{\bar{\mathbf{u}}_i\}_{i=1, \dots, m_u^{(\underline{\mu}_{k+1})}}$ et $\{\bar{\theta}_i\}_{i=1, \dots, m_\theta^{(\underline{\mu}_{k+1})}}$

Puisqu'on ne dispose pas des champs duaux, la première étape couplée (pour $n = 0$) ne peut pas s'appuyer sur les mêmes équations qu'en Section 1.3 du chapitre 3 (page 73). On prend alors une direction de recherche E^+ « verticale », c'est-à-dire des opérateurs $E_{\square}^+ \rightarrow \infty$ dans l'équation (3.7a) (page 71). Cela se traduit par l'invariance des grandeurs primales :

$$\hat{\varepsilon}_{n+1} = \varepsilon_n, \quad \hat{\theta}_{n+1} = \theta_n, \quad \hat{\mathbf{g}}_{n+1} = \mathbf{g}_n \quad (4.2)$$

Les grandeurs duales associées sont ensuite déduites des relations de comportement :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{n+1} &= \mathcal{K} : \hat{\varepsilon}_{n+1} - \beta \hat{\theta}_{n+1} \mathbf{I} \\ \hat{q}_{n+1} &= -k \hat{g}_{n+1} \\ \hat{R}_{n+1} &= \rho c \hat{\theta}_{n+1} + T_0 \beta \text{Tr} \hat{\varepsilon}_{n+1} \end{cases} \quad (4.3)$$

Comme le montre l'Algorithme 2, seules l'initialisation et la première étape couplée sont impactées par la stratégie multiparamétrique. Ensuite, la procédure se poursuit telle que décrite dans le Chapitre 3. Notons que du fait de l'initialisation avec une base réduite existante, même la première étape découplée du nouveau calcul débute par une étape d'*update*. À l'issue de ce nouveau calcul, seuls les modes PGD doivent être stockés; les fonctions du temps y ont été mises à jour et la base spatiale éventuellement enrichie. Il est important de souligner que l'utilisation de bases réduites distinctes pour chaque physique préserve la possibilité d'enrichir chacune de manière indépendante au cours de l'étude paramétrique.

2 Variation d'un paramètre influençant la force du couplage

Une première étude paramétrique est réalisée sur le cas test académique décrit dans la Section 2.1 du chapitre 3 (page 83), qui porte sur un barreau troué. On considère un seul paramètre variable : le coefficient de dilatation thermique α , qui affecte directement le couplage entre les deux physiques.

2.1 Motivations

Avant de mettre en œuvre la méthode décrite dans la section précédente, nous investiguons l'influence du coefficient de dilatation α sur les solutions obtenues. L'objectif est de montrer l'intérêt de réutiliser des modes PGD lors de calculs successifs associés à des valeurs de α différentes.

Influence sur les champs solution. De façon similaire à la Figure 3.5 du chapitre 3 (page 85), on s'intéresse au déplacement longitudinal u_x au point de coordonnées $[d+r, h/2, h/2]$, noté M . La Figure 4.2a représente l'évolution sur l'intervalle de temps I du déplacement u_x évalué au point M pour plusieurs valeurs du paramètre matériau α . Pour faciliter la discussion, on définit $n_\alpha \equiv \alpha / \alpha_0$, avec $\alpha_0 = 1.1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Au premier abord, il peut sembler que seule l'amplitude du déplacement varie sur la Figure 4.2a et que celle-ci est proportionnelle à n_α . Dans ce cas, toute la variabilité de la solution due à une modification de α pourrait être captée par les fonctions du temps qui pondèrent les vecteurs de la base spatiale orthonormée. Si tel était le cas, le déplacement $u_x(M, t; \alpha)$ – pour une valeur de α donnée – serait égal au déplacement $u_x(M, t; \alpha_0)$ – obtenu pour $\alpha = \alpha_0$ – multiplié par le ratio n_α . On définit alors l'écart relatif Δ_r entre ces deux quantités :

$$\Delta_r = \frac{|u_x(M, t; \alpha) - n_\alpha \times u_x(M, t; \alpha_0)|}{n_\alpha \times \max_{t \in I} |u_x(M, t; \alpha_0)|} \quad (4.4)$$

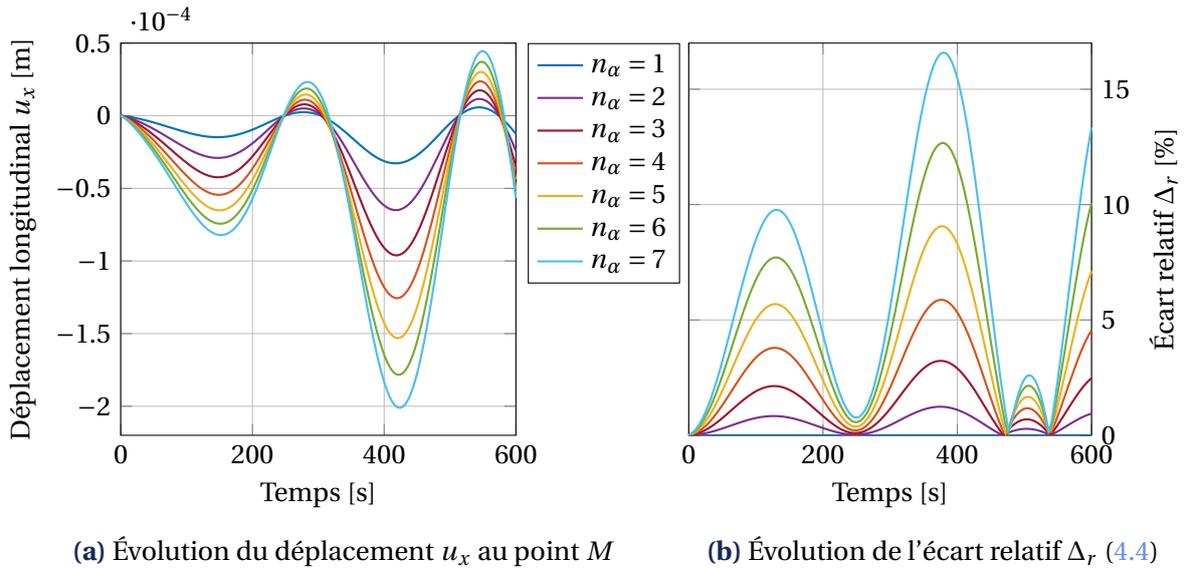


FIGURE 4.2 • Influence du coefficient de dilatation thermique α sur le déplacement longitudinal u_x au point M

La Figure 4.2b montre l'évolution de la quantité Δ_r sur l'intervalle temporel I pour différentes valeurs de $n_\alpha = \alpha/\alpha_0$. L'écart relatif Δ_r présente plusieurs pics, dont l'amplitude est d'autant plus importante que n_α est grand et peut dépasser 10 %. La variation du coefficient de dilatation thermique α n'a donc pas un simple effet de proportionnalité sur le déplacement u_x obtenu.

Influence sur les bases PGD. On s'intéresse à présent aux similarités entre les modes PGD générés pour différentes valeurs du paramètre α , avec pour l'instant des résolutions LATIN-PGD indépendantes et un critère d'arrêt fixé à $\eta_c = 10^{-4}$. Considérons que l'on dispose, pour chaque physique, de deux bases spatiales $\{\Phi_i^{(1)}\}_{i=1,\dots,m_1}$ et $\{\Phi_j^{(2)}\}_{j=1,\dots,m_2}$ obtenues à convergence pour deux valeurs distinctes du coefficient de dilatation thermique. Le *Modal Assurance Criterion* (MAC) [ALLEMANG, 2003], souvent utilisé en analyse modale, décrit la similarité entre deux modes. Défini par l'équation (4.5)

$$\text{MAC}(\Phi_i^{(1)}, \Phi_j^{(2)}) = \frac{\langle \Phi_i^{(1)}, \Phi_j^{(2)} \rangle_{\square}^2}{\|\Phi_i^{(1)}\|_{\square} \|\Phi_j^{(2)}\|_{\square}}, \quad (4.5)$$

ce critère fournit un scalaire compris entre 0 et 1 ; une valeur unitaire traduit la colinéarité des deux modes, tandis qu'une valeur nulle signifie que les modes sont linéairement indépendants. On utilisera le produit scalaire selon lequel chaque base est orthonormée, soit au sens de l'opérateur \mathbf{H}_{uu} pour les modes mécaniques et $\mathbf{H}_{\theta\theta}$ pour les modes thermiques. Usuellement, les résultats sont représentés sous forme de matrice MAC, dont le terme à la i -ème ligne et la j -ème colonne a pour valeur $\text{MAC}(\Phi_i^{(1)}, \Phi_j^{(2)})$.

Les Figures 4.3a et 4.3b représentent les matrices MAC des bases mécaniques et thermiques construites pour $\alpha = \alpha_0$ et $\alpha = 5\alpha_0$. On constate que les premiers six modes mécaniques et neuf modes thermiques partagent plus de 60% de contenu ; ils sont donc très

proches. Puisque les premiers modes capturent les effets dominants de la solution, cela est cohérent avec l'allure similaire des déplacements tracés à la Figure 4.2a pour différentes valeurs de α . Au-delà de ces premiers modes, on observe des dépendances plus diffuses entre les deux bases considérées. Ainsi, ces observations suggèrent qu'il est intéressant, dans le cadre de résolutions successives pour différents coefficients de dilatation thermique, de s'appuyer sur des modes issus d'un calcul précédent.

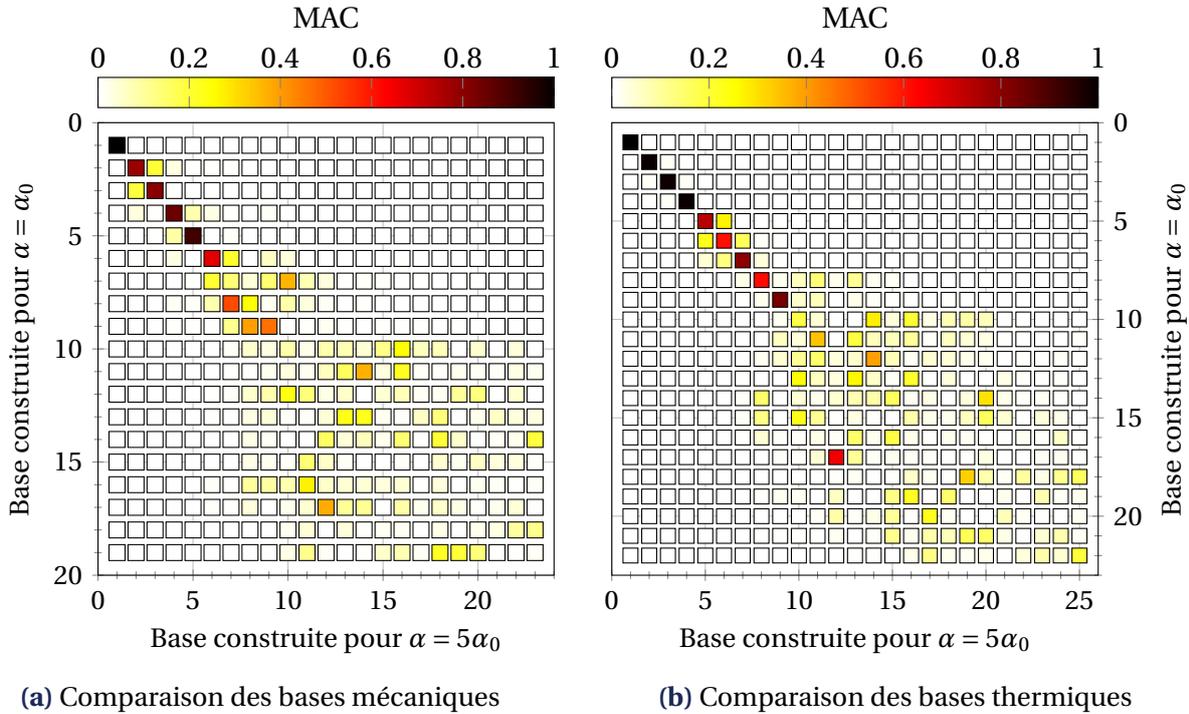


FIGURE 4.3 • Matrices MAC des bases PGD construites pour $\alpha = \alpha_0 = 1.1 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ et $\alpha = 5\alpha_0$

2.2 Étude paramétrique

En guise de première illustration de la méthode, on considère un espace paramétrique à une dimension $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\alpha \equiv [5.5 \times 10^{-6}, 77 \times 10^{-6}] \text{ K}^{-1}$, discrétisé en $n_j = 14$ valeurs uniformément espacées pour le coefficient de dilatation thermique α . Il s'agit du même intervalle et de la même discrétisation que dans la Section 2.4 du chapitre 3 (page 91), où les calculs étaient réalisés indépendamment les uns des autres. Pour cette étude paramétrique, l'espace \mathcal{D}_α est parcouru dans l'ordre croissant des valeurs de α .

Courbes de convergence. La Figure 4.4 représente l'évolution de l'indicateur de convergence η (défini à l'équation (3.9) du chapitre 3, page 72) et de l'erreur vraie e_{ref} (voir équation (3.45) au chapitre 3, page 86) en fonction des itérations cumulées de la méthode LATIN-PGD au fil de l'étude paramétrique. Le critère d'arrêt pour les itérations est cette fois basé sur l'erreur par rapport à la référence monolithique : $e_{\text{ref}} < e_c$, avec un seuil $e_c = 10^{-3}$.

Chaque pic sur la Figure 4.4 correspond au traitement d'une nouvelle valeur de paramètre. Il apparaît que l'erreur de départ d'un calcul initialisé avec la solution précédente est plus faible que celle du calcul initial. Ce constat, associé à un taux de convergence potentiellement

amélioré, permet d'atteindre le critère d'arrêt plus rapidement. Alors que le premier calcul nécessite pour cela 24 itérations, ce nombre est significativement réduit lors des calculs suivants, comme le montre encore plus explicitement la [Figure 4.5a](#). Ainsi, ces résultats mettent en évidence la capacité de la stratégie multiparamétrique à accélérer la convergence des calculs bénéficiant de l'initialisation améliorée, ce qui permet *in fine* de réduire le coût de calcul total de l'étude paramétrique.

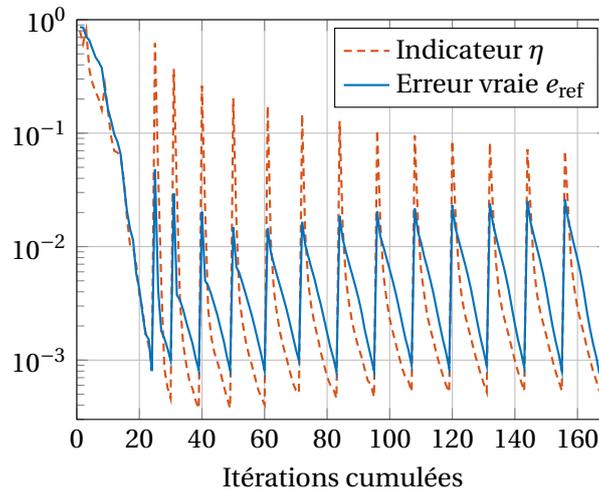
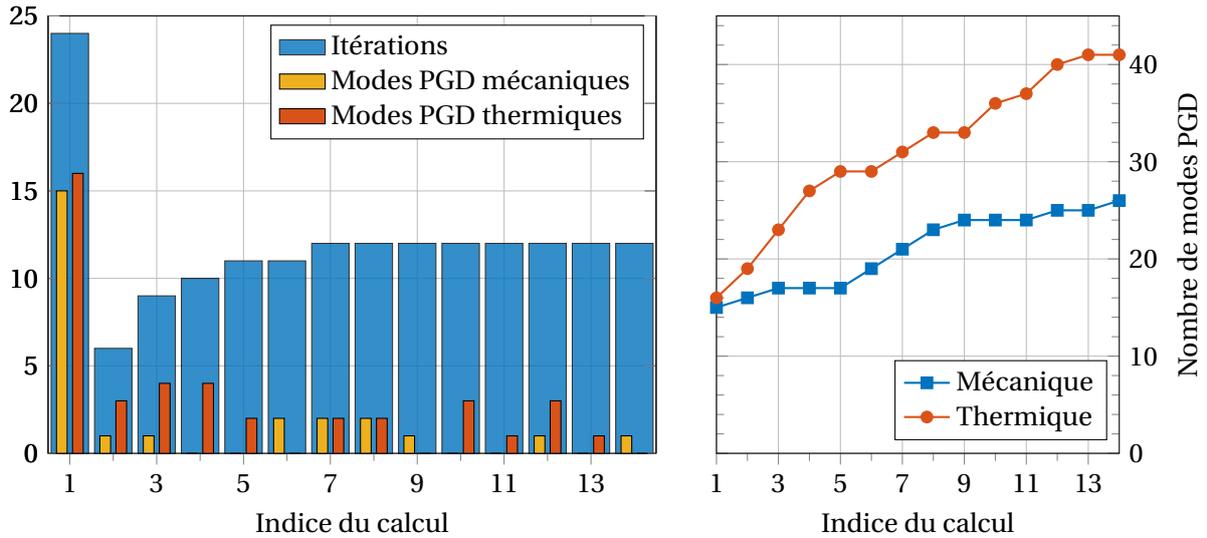


FIGURE 4.4 • Évolution de l'erreur vraie et de l'indicateur de convergence en fonction des itérations cumulées (critère d'arrêt $e_c = 10^{-3}$)

Nombre d'itérations et de modes générés. La [Figure 4.5a](#) met en regard les itérations nécessaires pour atteindre le critère de convergence et le nombre de modes PGD ajoutés aux bases réduites lors de chaque calcul de l'étude paramétrique. Après le calcul initial, seul un petit nombre de modes est ajouté; la majorité des itérations se contente donc d'une mise à jour peu coûteuse des fonctions du temps. Ainsi, en plus de réduire le nombre d'itérations nécessaires, la stratégie multiparamétrique permet de réduire la quantité de modes à générer, ce qui contribue également à la réduction du temps de calcul de l'étude paramétrique.

Les itérations nécessaires pour atteindre la convergence peuvent être attribuées à la nécessité d'effectuer des étapes couplées, permettant de vérifier le comportement couplé directement impacté par la variation du coefficient α . On rappelle que lors de résolutions indépendantes, le nombre d'itérations augmentait significativement pour α élevé (cf. [Figure 3.13b](#) au chapitre 3, page 92). Ce n'est pas le cas avec l'approche multiparamétrique.

L'évolution de la taille des bases réduites mécanique et thermique au fil des calculs de l'étude paramétrique est illustrée sur la [Figure 4.5b](#). On constate que la base thermique est enrichie d'un plus grand nombre de modes que la base mécanique. Cette différence de taille est permise par la modularité inhérente à la méthode LATIN-PGD. Comme nous avons mis en évidence au chapitre précédent que l'ajout d'un mode mécanique est bien plus coûteux qu'un mode thermique (voir la [Figure 3.17b](#), page 96), il est particulièrement avantageux d'éviter d'en calculer inutilement. Par ailleurs, on constate sur la [Figure 4.5b](#) que la taille des bases semble se stabiliser lors des derniers calculs. Cela peut signifier qu'on dispose d'une base « complète » permettant de décrire la solution pour l'ensemble des jeux de paramètres.



(a) Itérations jusqu'à convergence et modes générés pour chaque calcul (b) Évolution de la taille des bases réduites au fil des calculs

FIGURE 4.5 • Modes PGD générés au cours de l'étude paramétrique

Temps de calcul. On s'intéresse à présent au temps de calcul nécessaire pour réaliser les 14 calculs associés aux valeurs de $\alpha \in \mathcal{D}_\alpha$. Nous utilisons huit *threads* de calcul sur une machine ayant les caractéristiques décrites à la page 94.

Par opposition à la stratégie multiparamétrique présentée dans ce chapitre, l'approche LATIN-PGD sera qualifiée de *naïve* lorsque tous les calculs de l'étude paramétrique sont menés indépendamment. La Figure 4.6 compare le temps de calcul cumulé de ces deux versions, ainsi que de l'approche monolithique. Cette dernière méthode nécessite la reconstruction du système monolithique entier (donné par l'équation (2.55) à la page 56) lors de la modification d'un paramètre matériau. Cela empêche notamment la réutilisation de sa factorisation et oblige à traiter indépendamment chaque jeu de paramètres.

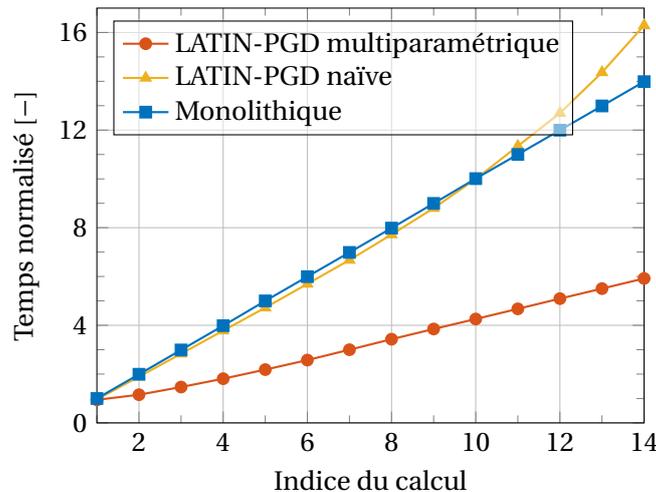


FIGURE 4.6 • Temps de calcul cumulé normalisé pour l'étude paramétrique, avec huit *threads* et un critère d'arrêt $e_c = 10^{-3}$ pour les calculs LATIN-PGD

Les temps cumulés tracés sur la Figure 4.6 sont normalisés par rapport au premier calcul monolithique, qui a nécessité 164 secondes. La courbe monolithique présente une allure linéaire, ce qui indique un temps de calcul constant pour toute valeur de paramètre. Par ailleurs, la réduction à la fois du nombre d'itérations et de modes PGD générés se traduit sans surprise par une diminution du temps de calcul avec la méthode LATIN-PGD multiparamétrique par rapport à l'approche naïve. La stratégie multiparamétrique surpasse même largement l'approche monolithique sur ce premier exemple.

Influence du nombre de calculs de l'étude paramétrique. Afin d'évaluer les bénéfices apportés par la stratégie multiparamétrique en fonction de la quantité de calculs à réaliser, nous faisons varier le nombre n_j de valeurs uniformément espacées utilisées pour discrétiser l'intervalle \mathcal{D}_α . La Figure 4.7 représente alors le nombre d'itérations cumulées et de modes générés à l'issue d'études paramétriques impliquant n_j calculs. On y compare les résultats issus de l'approche multiparamétrique, en parcourant \mathcal{D}_α par ordre croissant ou décroissant de α , avec la méthode LATIN-PGD naïve.

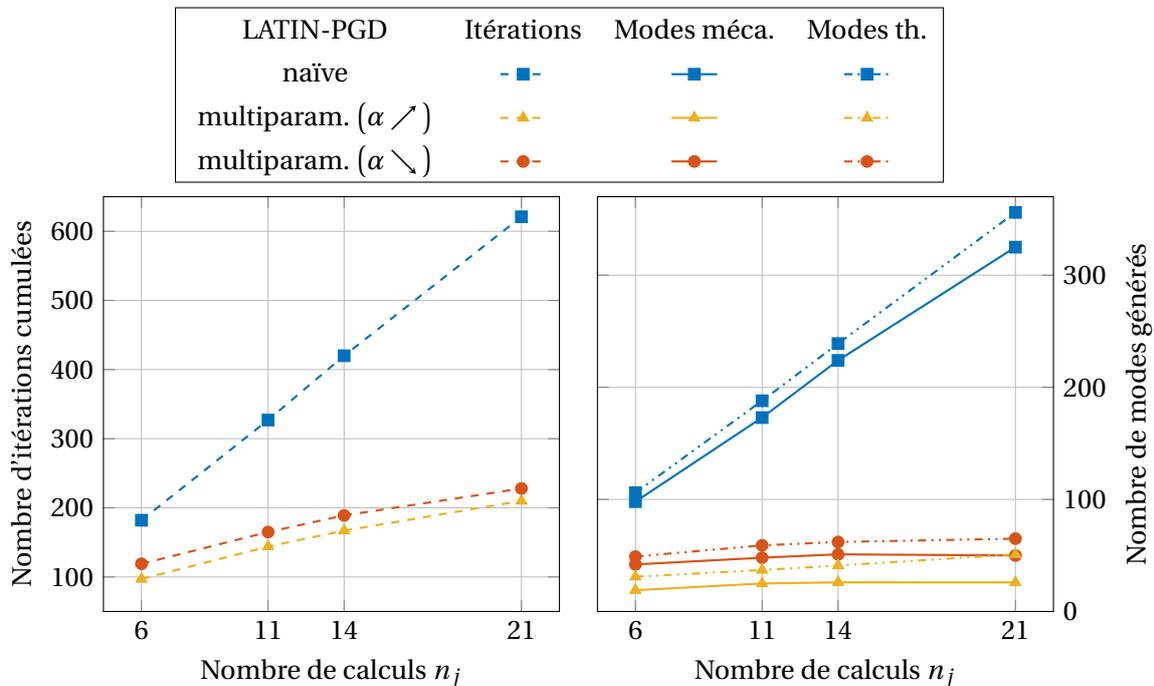


FIGURE 4.7 • Influence de la discrétisation de l'espace paramétrique \mathcal{D}_α sur le nombre d'itérations et de modes générés lors d'une étude paramétrique

Alors qu'avec une approche naïve le nombre total d'itérations et de modes générés augmente continuellement à mesure que le nombre de calculs réalisés s'accroît, ces quantités (et plus particulièrement le nombre de modes) semblent se stabiliser avec la stratégie multiparamétrique. On observe que le nombre de modes générés, et dans une moindre mesure le nombre d'itérations cumulées, est sensiblement plus élevé lors du parcours de l'intervalle \mathcal{D}_α par ordre décroissant du paramètre α . Cependant, la stratégie multiparamétrique conduit à des réductions significatives tant du nombre d'itérations que des modes construits, et ce, quel que soit le sens de parcours de l'espace paramétrique \mathcal{D}_α .

Le [Tableau 4.1](#) permet d’apprécier les ratios entre nombres d’itérations et de modes générés par une approche naïve et la stratégie multiparamétrique. On constate que les bénéfices apportés par la stratégie proposée sont d’autant plus marqués que le nombre n_j de valeurs de paramètres à traiter augmente. Cela suggère une tendance similaire pour le gain en temps de calcul, qui sera quantifié sur un cas d’échelle dans la section suivante.

TABLEAU 4.1 • Ratio entre les nombres d’itérations et de modes générés par approche naïve et multiparamétrique pour un nombre croissant de calculs

n_j	Itérations		Modes méca.		Modes th.	
	$\alpha \nearrow$	$\alpha \searrow$	$\alpha \nearrow$	$\alpha \searrow$	$\alpha \nearrow$	$\alpha \searrow$
6	1.88	1.53	5.16	2.33	3.42	2.16
11	2.27	1.98	6.92	3.6	5.08	3.19
14	2.51	2.22	8.62	4.39	5.83	3.85
21	2.96	2.72	12.5	6.5	6.98	5.48

3 Variation de deux paramètres matériaux

3.1 Description de l’étude

Une seconde étude paramétrique est réalisée sur le cas test de l’aube de turbine, détaillé à la [Section 3.1](#) (page 92) du chapitre 3 et comptabilisant plus de deux millions de degrés de liberté. La réponse de la structure est recherchée sur un espace paramétrique à deux dimensions $\mathcal{D} = \mathcal{D}_E \times \mathcal{D}_k$, avec $E \in \mathcal{D}_E$ le module d’Young et $k \in \mathcal{D}_k$ le coefficient de conductivité thermique. Les plages de variation, autour des valeurs moyennes E_0 et k_0 utilisées dans le [Chapitre 3](#), sont données dans le [Tableau 4.2](#).

TABLEAU 4.2 • Variations des deux paramètres considérés dans l’étude paramétrique

Paramètre	Valeur moyenne	Variation	Intervalle
Module d’Young E	$E_0 = 210 \text{ GPa}$	$\pm 20\%$	$E \in [168, 252] \text{ GPa}$
Conductivité thermique k	$k_0 = 43 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$	$\pm 20\%$	$k \in [34.4, 51.6] \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Les opérateurs des directions de recherche, tels que définis dans les équations (3.8) du chapitre 3 (page 72), restent quant à eux constants tout au long de l’étude paramétrique et conservent leurs valeurs initiales associées à k_0 et E_0 . Par conséquent, seules les relations de comportement, contenues dans l’espace Γ et résolues durant l’étape couplée de la méthode LATIN-PGD, sont affectées.

Influence des paramètres sur les champs solution. La [Figure 4.8](#) montre le champ de contrainte équivalente de Von Mises pour différents couples (E, k) . Ces paramètres maté-

riaux influencent significativement les valeurs maximales obtenues. Par ailleurs, la Figure 4.9 représente la différence Δ_{VM} entre les champs de contrainte équivalente de la Figure 4.8 et celui associé aux valeurs moyennes (E_0, k_0), donné à la Figure 3.15 du chapitre 3 (page 94). La même échelle est utilisée pour les figures Figures 4.9a à 4.9c afin de mieux appréhender l'influence des paramètres E et k . Il apparaît que la contrainte équivalente augmente globalement avec un module d'Young E important, et ce d'autant plus lorsque la conductivité thermique k diminue.

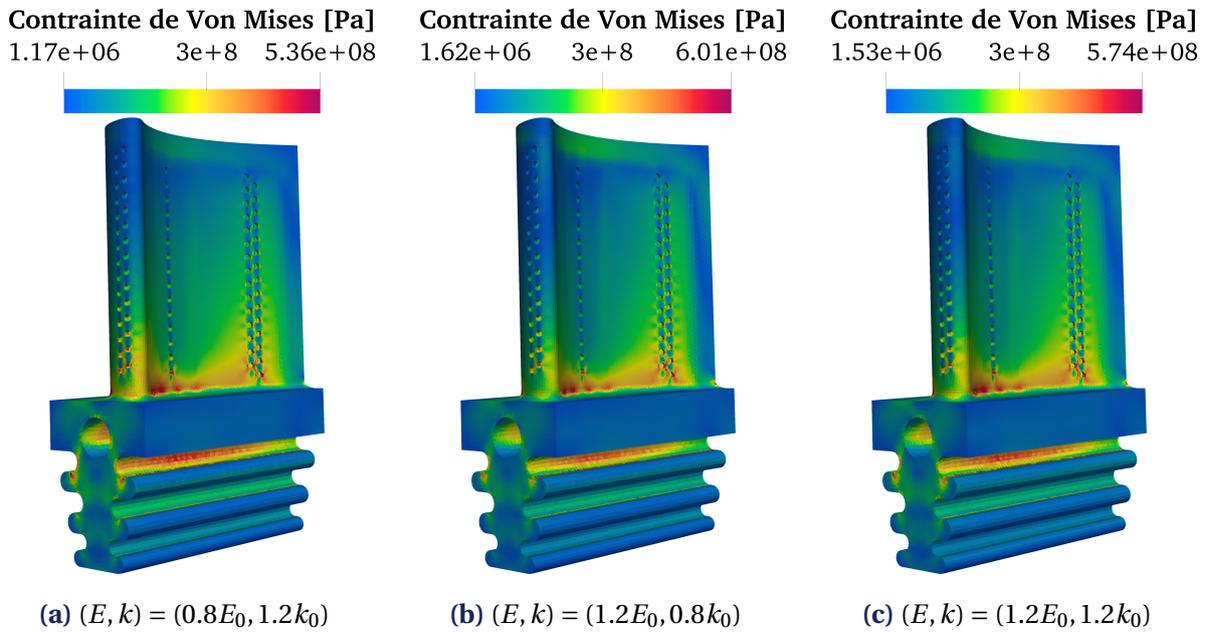


FIGURE 4.8 • Champs de contrainte équivalente de Von Mises obtenus pour plusieurs jeux de paramètres $(E, k) \in \mathcal{D}_E \times \mathcal{D}_k$

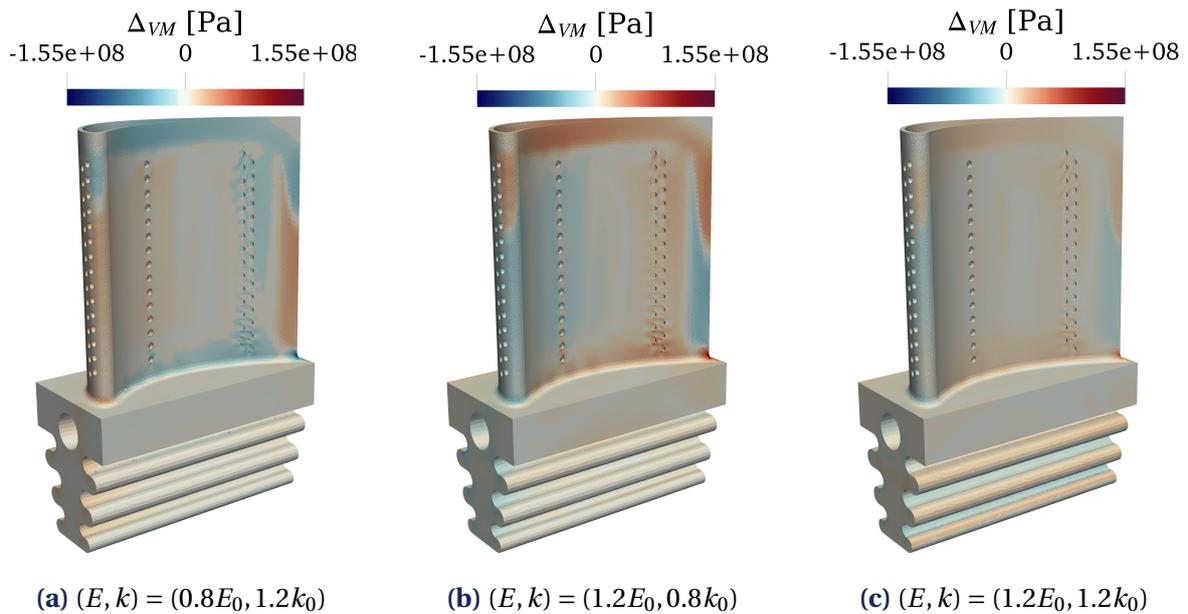


FIGURE 4.9 • Différence des champs de contrainte équivalente de Von Mises obtenus pour plusieurs jeux de paramètres (E, k) avec celui associé à (E_0, k_0)

Parcours de l'espace paramétrique. Les plages de variation des paramètres E et k – données dans le [Tableau 4.2](#) – ont chacune été discrétisées en 11 valeurs, ce qui conduit à $n_j = 121$ jeux de paramètres. L'espace paramétrique bidimensionnel \mathcal{D} est donc discrétisé sur une grille régulière et parcouru comme illustré sur la [Figure 4.10](#), de sorte qu'un seul des deux paramètres ne varie entre deux calculs consécutifs.

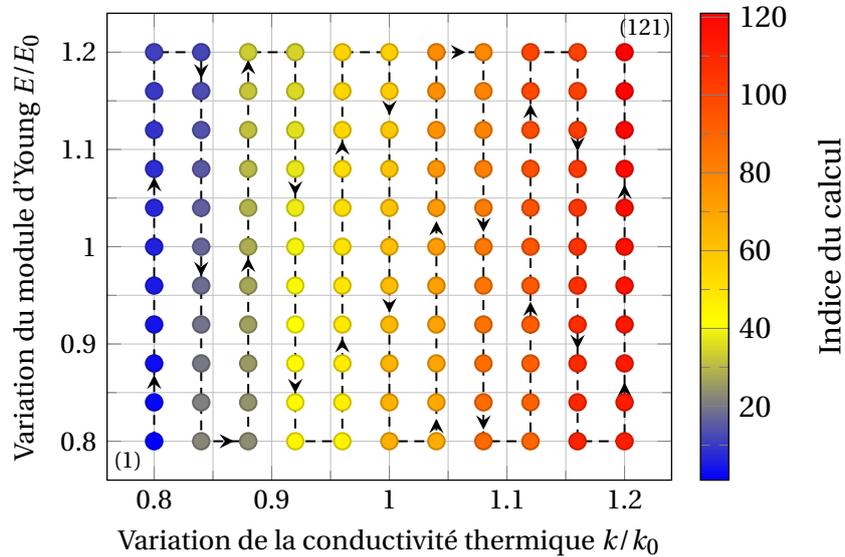


FIGURE 4.10 • Ordre des calculs dans l'espace paramétrique bidimensionnel \mathcal{D}

3.2 Analyse des résultats

Itérations et temps de calcul. La [Figure 4.11a](#) représente, pour chaque jeu de paramètres $\underline{\mu}_k$, le nombre d'itérations LATIN nécessaires pour atteindre le critère de convergence portant sur l'indicateur d'erreur avec un seuil $\eta_c = 10^{-3}$. Le calcul initial est omis de la [Figure 4.11a](#) pour des raisons de lisibilité. Alors que la plupart des résolutions convergent en deux ou trois itérations seulement, on observe que le passage à une nouvelle valeur de k est corrélé à une légère augmentation du nombre d'itérations.

On trace également sur la [Figure 4.11b](#) le temps de calcul associé à chaque jeu $\underline{\mu}_k$, normé par la durée du calcul initial, qui est de 1103 secondes avec un critère d'arrêt fixé à $\eta_c = 10^{-3}$. Pour la grande majorité des jeux de paramètres, le temps de calcul représente seulement entre 10 et 25 % de celui associé à $\underline{\mu}_1$. On constate également que les simulations les plus longues semblent concorder avec celles nécessitant le plus d'itérations (cf. [Figure 4.11a](#)).

Enrichissement des bases PGD. La [Figure 4.12](#) présente les modes PGD ajoutés aux bases réduites pour chaque physique. Là encore, le premier calcul est exclu des graphes pour plus de clarté. On constate que la base réduite initiale est principalement enrichie au cours des premières résolutions. Par la suite, la plupart des nouveaux jeux de paramètres sont traités sans ajout de mode ; cela signifie qu'une projection sur les bases existantes est jugée suffisante. Par ailleurs, la stratégie tire à nouveau parti de la capacité d'enrichissement indépendant des bases PGD, puisque les enrichissements se produisent à des jeux de paramètres différents pour chaque physique.

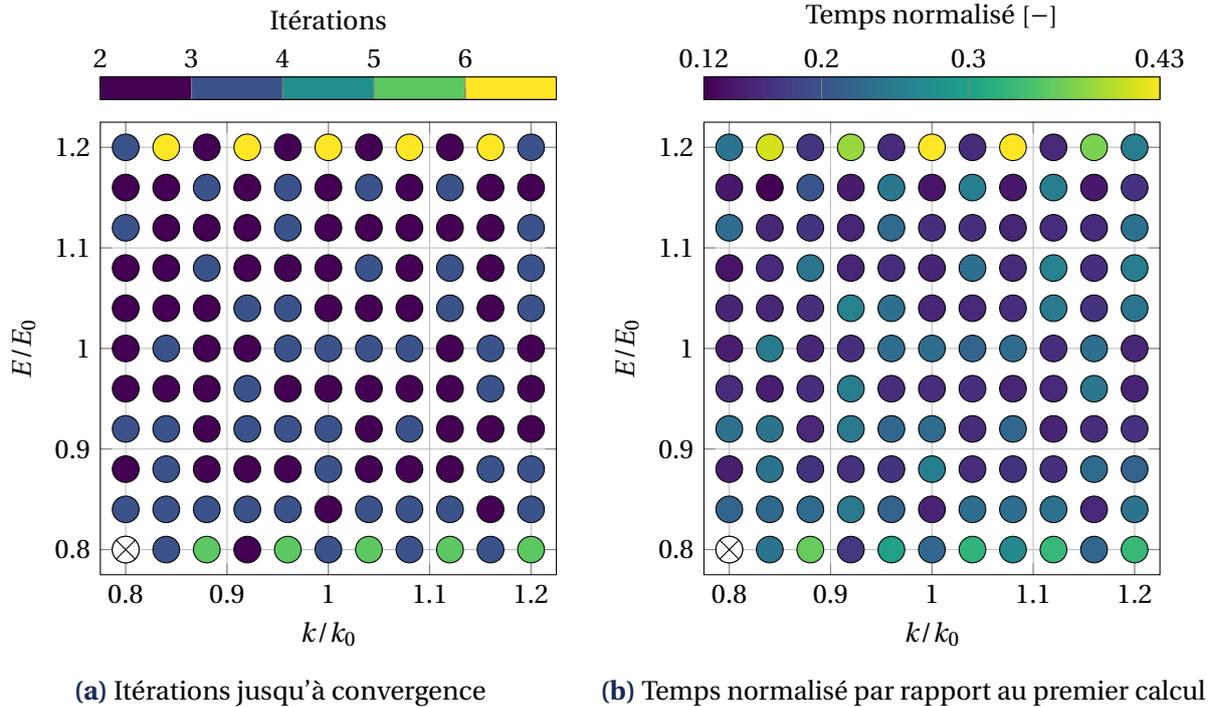


FIGURE 4.11 • Itérations et temps de calcul pour chaque jeu de paramètres de l'étude

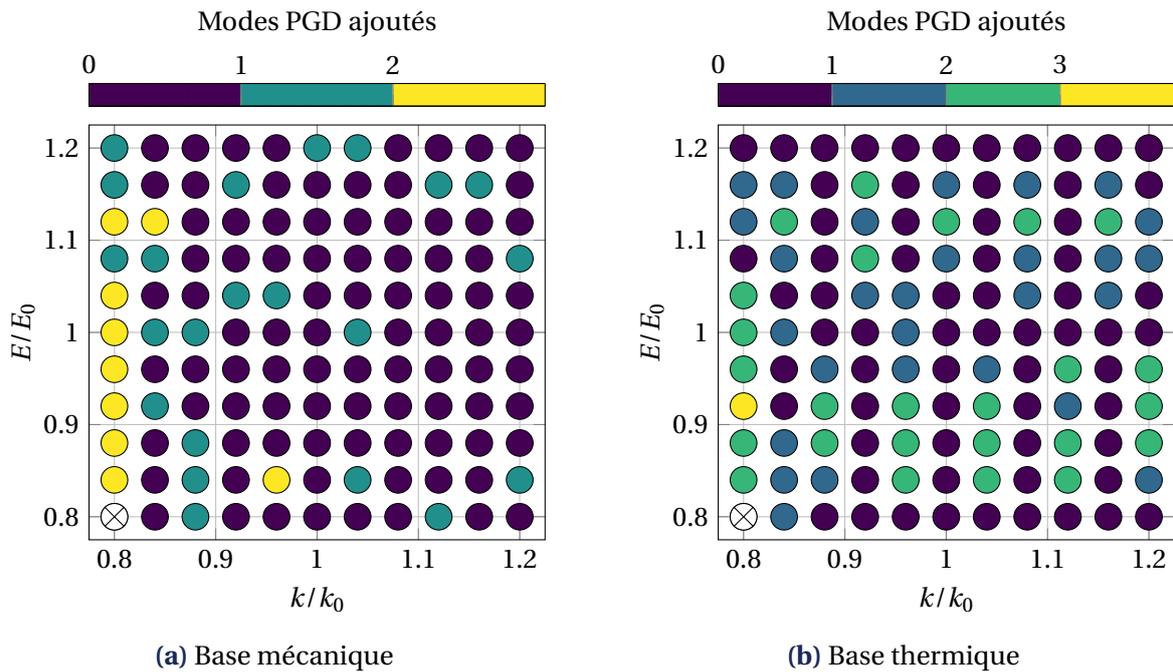


FIGURE 4.12 • Modes PGD ajoutés à chaque calcul au cours de l'étude à deux paramètres

Gain en temps de calcul. Afin d'évaluer le gain en temps de calcul permis par notre stratégie pour réaliser l'étude paramétrique, nous introduisons les grandeurs suivantes :

- τ_1^{Mono} (resp. τ_1^{LAT}) le temps requis pour la résolution du problème associé au jeu de paramètres $\underline{\mu}_1$ avec la méthode monolithique (resp. LATIN-PGD) ;
- $\tau_{\text{cum}}^{\text{Mono}}$ (resp. $\tau_{\text{cum}}^{\text{LAT}}$) le temps nécessaire pour réaliser les n_j calculs indépendamment

avec la méthode monolithique (resp. LATIN-PGD), estimé en supposant un temps de calcul équivalent pour tout $\underline{\mu} \in \mathcal{P} : \tau_{\text{cum}}^{\square} \approx n_j \times \tau_1^{\square}$, avec $\square = \text{Mono, LAT}$;

- $\tau_{\text{tot}}^{\text{LAT}}$ la durée totale pour réaliser l'étude paramétrique avec la stratégie multiparamétrique proposée (dans cet exemple, $\tau_{\text{tot}}^{\text{LAT}} \approx 7 \text{ h}$);
- G_n^{\square} le gain permettant de quantifier l'efficacité de la stratégie proposée par rapport à une approche naïve :

$$G_n^{\square} = \frac{\tau_{\text{cum}}^{\square}}{\tau_{\text{tot}}^{\text{LAT}}} \approx \frac{n_j \times \tau_1^{\square}}{\tau_{\text{tot}}^{\text{LAT}}}. \quad (4.6)$$

Les gains estimés par rapport aux approches naïves LATIN-PGD et monolithique sont résumés dans le [Tableau 4.3](#) pour des variations des paramètres de $\pm 20\%$ autour de (E_0, k_0) . Ce gain est évidemment bien plus élevé vis-à-vis de la méthode monolithique, puisque nous avons déjà constaté au [Chapitre 3](#) que la méthode LATIN-PGD était plus performante sur un seul calcul. La stratégie multiparamétrique mise en œuvre dans ce chapitre permet de réaliser les $n_j = 121$ calculs de l'étude paramétrique en 7 heures, divisant par plus de 5 le temps qui serait nécessaire en traitant tous les jeux de paramètres indépendamment avec la méthode LATIN-PGD.

TABLEAU 4.3 • Gain estimé en temps de calcul de la stratégie proposée par rapport à une approche naïve effectuant les $n_j = 121$ calculs de manière indépendante

Solveur pour l'approche naïve	Temps pour un calcul	Gain estimé	
		variation $\pm 20\%$	variation $\pm 40\%$
LATIN-PGD ($\eta_c = 10^{-3}$)	$\tau_1^{\text{LAT}} = 1103 \text{ s}$	$G_n^{\text{LAT}} = 5.29$	$G_n^{\text{LAT}} = 4.26$
Monolithique	$\tau_1^{\text{Mono}} = 9418 \text{ s}$	$G_n^{\text{Mono}} = 45.1$	$G_n^{\text{Mono}} = 36.7$

On inclut également dans le [Tableau 4.3](#) les résultats obtenus lors d'une étude paramétrique considérant des variations de $\pm 40\%$ des paramètres autour des valeurs moyennes; l'espace paramétrique résultant étant toujours discrétisé sur une grille régulière avec $n_j = 121$ jeux de paramètres. On constate que le gain est légèrement plus faible dans ce cas. Cela peut s'expliquer par la plus grande variation du comportement qu'il faut représenter, nécessitant donc plus de modes et d'itérations LATIN. En particulier, 61 modes mécaniques et 169 modes thermiques ont été construits lors de la variation de $\pm 40\%$ des paramètres, contre seulement 48 et 91 avec une variation de $\pm 20\%$. Les gains estimés dans le [Tableau 4.3](#) restent tout de même significatifs.

3.3 Limites

En cherchant à augmenter le nombre de calculs au cours de cette étude à deux paramètres, nous avons obtenu des résultats inattendus. Nous considérons à nouveau des variations des paramètres E et k de $\pm 20\%$ autour de leurs valeurs moyennes, mais l'espace paramétrique \mathcal{D} est cette fois discrétisé sur une grille régulière de taille 21×21 , ce qui mène à $n_j = 441$ calculs.

La Figure 4.13a représente, de manière similaire à la Figure 4.11a, le nombre d'itérations requises pour traiter chacun de ces 441 jeux de paramètres. Bien qu'il faille toujours entre 2 et 6 itérations seulement aux calculs bénéficiant de la stratégie multiparamétrique, on observe un nombre plus élevé d'itérations dans la partie $k > k_0$ de l'espace paramétrique. Cette allure se retrouve sur le graphe du temps de calcul normalisé par la durée du premier calcul de l'étude, donné en Figure 4.13b. On obtient alors dans cette étude un gain estimé à $G_n^{\text{LAT}} = 3.48$ par rapport à une résolution indépendante des $n_j = 441$ calculs, inférieur à celui recensé dans le Tableau 4.3. De plus amples investigations seraient nécessaires pour comprendre cette augmentation du nombre d'itérations, qui n'était pas observée sur la Figure 4.11a.

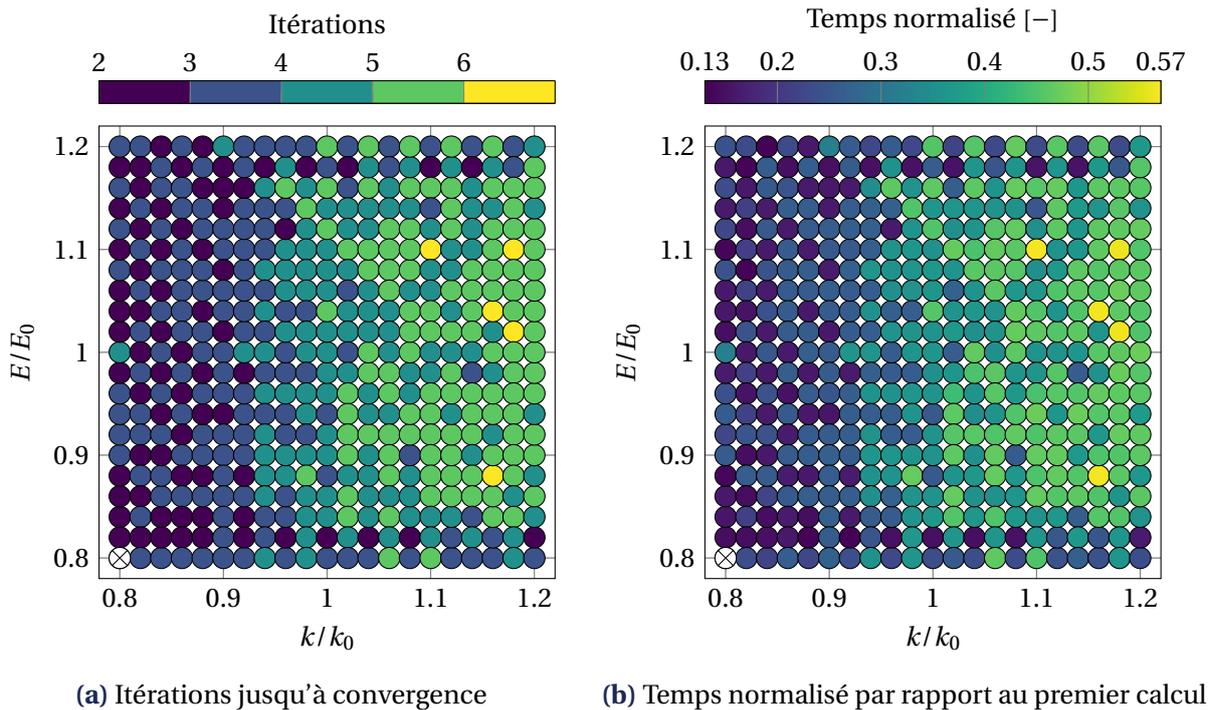


FIGURE 4.13 • Itérations et temps de calcul pour chaque jeu de paramètres avec $n_j = 441$

L'augmentation du nombre d'itérations sur une partie de l'espace \mathcal{D} ne se répercute toutefois pas sur la répartition des modes PGD générés. On peut même vérifier que les modes construits sur la grille 11×11 sont inclus dans ceux générés pour une discrétisation de l'espace bidimensionnel \mathcal{D} de taille 21×21 . Pour ce faire, une procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (comme détaillée à la Section 1.5 du chapitre 3, page 81) est mise en œuvre sur l'union des bases construites pour les deux études paramétriques. Il en résulte une seule base orthonormée, dont on peut s'assurer qu'elle coïncide avec la base construite pour la discrétisation la plus fine de l'espace \mathcal{D} .

► Bilan du chapitre

Ce chapitre propose une méthode efficace pour la résolution de nombreux problèmes multiphysiques semblables, qui se distinguent par la variation de certains paramètres. On souhaite réduire la durée globale nécessaire pour réaliser un nombre fixé de calculs.

Pour ce faire, nous avons étendu au cadre multiphysique une stratégie préalablement développée dans divers contextes monophysiques, résultant de l'association de la méthode LATIN-PGD et d'un processus d'initialisation tenant compte des calculs précédents. Cette stratégie complète la méthode présentée au [Chapitre 3](#) et permet d'en conserver les bénéfices. Concrètement, la résolution associée à un nouveau jeu de paramètres est abordée avec une base réduite (pour chaque physique) enrichie au fil des calculs et initialisée avec la solution d'un calcul précédent.

Une première illustration porte sur le cas test académique du [Chapitre 3](#). Le paramètre choisi est une grandeur matériau qui influence directement la force du couplage. La comparaison des bases réduites construites indépendamment pour deux valeurs distinctes de ce paramètre, au sens du *Modal Assurance Criterion*, montre que les premiers modes sont très semblables entre les deux bases. Cela motive la réutilisation de modes entre différents calculs, mais aussi la possibilité d'en ajouter à la volée afin de capter les spécificités de chaque problème. Cet exemple simple a démontré l'intérêt de pouvoir enrichir indépendamment les modèles réduits de chaque physique. De plus, une nette réduction du nombre d'itérations et de modes générés pour chaque physique par rapport à une approche naïve, dans laquelle chaque calcul est réalisé indépendamment, a été observée. Cette réduction est d'autant plus marquée que le nombre de calculs à réaliser est élevé, ce qui suggère une efficacité croissante de la stratégie multiparamétrique développée.

La seconde illustration concerne le cas d'échelle introduit au [Chapitre 3](#) et vise à évaluer les champs solutions sur un espace paramétrique bidimensionnel, discrétisé sur une grille régulière et parcouru de proche en proche. Cet exemple de taille représentative démontre la compétitivité de la stratégie proposée, tant par rapport à une approche naïve avec la méthode LATIN-PGD, mais encore plus par rapport à une approche monolithique classique. Cependant, une augmentation surprenante du nombre d'itérations a été observée sur une partie de l'espace paramétrique lorsque celui-ci est discrétisé plus finement. De plus amples investigations sont requises pour éclaircir ce point. Dans tous les cas, les résultats sont prometteurs et démontrent la capacité de la stratégie à traiter efficacement des problèmes paramétrés dans le cadre multiphysique.

* * *

Conclusion générale et perspectives

Les travaux menés durant cette thèse ont porté sur le développement d'une stratégie de calcul performante pour la résolution de nombreux problèmes multiphysiques fortement couplés semblables, qui se distinguent par la valeur de certains paramètres. Cette situation, que l'on peut rencontrer en phase de conception, entraîne des coûts de calcul élevés en raison du nombre important d'appels au solveur et nécessite ainsi une attention particulière.

La **réduction de modèle** (ROM) représente une approche pertinente pour répondre à cette problématique. Une revue de la littérature dans le [Chapitre 1](#), couvrant la simulation de problèmes multiphysiques et les techniques de ROM pour les problèmes paramétrés, a permis de positionner et justifier les choix méthodologiques de cette thèse. Le cheminement adopté est synthétisé ci-après, mettant en évidence les principales contributions de ce travail.

› **Solution multiphysique de référence.** La stratégie générale développée dans cette thèse a été appliquée au **couplage fort thermo-mécanique**. Après avoir rappelé les équations de la thermo-élasticité et établi une analogie avec la poro-élasticité, utilisée comme problème modèle dans des travaux antérieurs, le [Chapitre 2](#) s'est attaché à la construction d'un solveur de référence pour valider les implémentations postérieures.

Pour cela, il a été nécessaire d'**étendre le démonstrateur collaboratif ROMlab à la résolution de problèmes multiphysiques** fortement couplés. Cela a impliqué à la fois l'implémentation de solveurs dédiés, et la gestion du couplage lors de la mise en données et du pré-traitement. Plusieurs contributions techniques, qui bénéficient plus largement à l'ensemble des utilisateurs de ROMlab, ont également été apportées.

Afin d'en valider l'implémentation dans ROMlab, le solveur monolithique a été testé sur un *benchmark* standard en thermo-mécanique. Cependant, certaines incohérences dans la littérature ont compliqué la comparaison directe des résultats. Nous avons donc décidé d'**implémenter ce benchmark sur le logiciel libre NGsolve et de le rendre open-source** pour en améliorer la reproductibilité. Ce code annexe a permis de **valider l'implémentation monolithique de référence dans ROMlab**.

› **Réduction de modèle flexible.** Une méthode alternative pour résoudre le problème couplé de thermo-élasticité, basée sur le **solveur LATIN-PGD**, a été détaillée dans le [Chapitre 3](#). Cette approche offre une flexibilité particulièrement intéressante, permettant d'appliquer la réduction de modèle par PGD indépendamment à chaque physique. Les mêmes routines numériques sont utilisées pour chacune grâce à une séparation adéquate des équations.

Un premier exemple relativement simple a permis de **valider l'implémentation** de la méthode dans le démonstrateur ROMlab, ainsi que de constater sa capacité à s'adapter à la force du couplage. Parmi les paramètres numériques clés de l'algorithme, nous avons observé que la valeur optimale pour la direction de recherche non triviale $E_{\theta R}$ était indépendante du maillage spatial et peu sensible à la discrétisation temporelle. Cela permet un **calibrage rapide de ce paramètre clé en utilisant des discrétisations grossières**.

Le second exemple, qui porte sur une aube de turbine ayant plus de deux millions de degrés de liberté, constitue la **première application de la méthode LATIN-PGD à un problème multiphysique d'échelle industrielle**. Une réduction significative du temps de calcul a été observée par rapport à l'approche monolithique, ce qui constitue une première étape pour réduire le coût des résolutions répétées d'un problème paramétré.

➤ **Extension à la résolution de nombreux problèmes multiphysiques.** Les spécificités de la méthode LATIN-PGD, déjà efficace pour accélérer un unique calcul multiphysique, sont avantageusement exploitées au [Chapitre 4](#) pour réduire encore davantage le temps de calcul lors de la résolution d'une famille de problèmes multiphysiques semblables. La **stratégie multiparamétrique** développée exploite ces similarités en initialisant le schéma itératif LATIN-PGD avec une solution précédente, supposée proche de celle recherchée, et en **réutilisant et enrichissant au fil des calculs une base réduite propre à chaque physique**.

Une première étude paramétrique, motivée par la **grande similarité entre les modes** associés à différentes valeurs de paramètres, montre une **efficacité croissante** de l'approche proposée avec le nombre de calculs à réaliser. Les gains en temps de calcul ont été évalués sur l'exemple de l'aube. Selon l'intervalle de variation des paramètres et le nombre de calculs, **la stratégie proposée se révèle de 3 à 5 fois plus rapide** que des résolutions indépendantes avec la méthode LATIN-PGD, et **jusqu'à 45 fois plus rapide que l'approche monolithique**.

Les travaux réalisés durant cette thèse ont fait l'objet d'une publication dans une revue internationale [[WURTZER et al., 2024b](#)] et de plusieurs communications dans des conférences nationales et internationales, dont certaines avec actes [[WURTZER et al., 2022](#); [2024a](#)]. Ces travaux comportent également une importante part d'implémentation dans une plateforme collaborative, destinée à servir de base pour de futures études.

Plusieurs perspectives sont envisageables dans le prolongement de ce travail.

Perspectives à court terme.

- Dans l'optique de limiter le nombre de modes générés au cours d'une étude paramétrique et donc d'améliorer les performances, le **critère dictant l'ajout de modes PGD** mériterait une attention particulière, en envisageant une différenciation entre les physiques. Il pourrait également être judicieux d'arrêter l'ajout de modes pour une physique avant l'autre, dès que son indicateur passe en dessous du seuil fixé.
- Il serait intéressant d'évaluer les performances de la méthode multiparamétrique proposée lors d'un **parcours moins ordonné de l'espace paramétrique**, qui pourrait être imposé par un algorithme d'optimisation ou l'enrichissement d'un métamodèle par exemple. Cela pourrait nécessiter d'adapter au cadre multiphysique et de consolider

des travaux antérieurs sur le choix de la meilleure solution déjà connue et des modes à conserver pour chaque nouveau calcul [NÉRON et al., 2015]. La flexibilité de la méthode dans le traitement des différentes physiques serait certainement un atout précieux.

- › La méthode LATIN offre un cadre propice pour étendre ces travaux à des **problèmes couplés plus complexes**, incluant des physiques supplémentaires et un comportement non linéaire, avec un effort d'implémentation limité. Des avancées en ce sens ont déjà été réalisées lors du stage d'É. Foulatier, que j'ai co-encadré, aboutissant à la résolution d'un problème 3D de thermo-poro-élasticité linéaire avec la méthode LATIN-PGD.

Perspectives à moyen terme.

- › Dans le cadre d'un problème couplé non linéaire, une **comparaison des performances** entre la **méthode multiparamétrique** présentée dans cette thèse et la **PGD espace-temps-paramètres** [CHINESTA et al., 2010] serait intéressante. Les non-linéarités avaient été identifiées comme un facteur limitant pour les performances de cette dernière méthode lors d'un couplage thermo-mécanique avec propagation de fissure étudié par [SCHULER, 2023], alors qu'un tel impact n'est pas attendu avec la méthode LATIN-PGD.
- › Les indications fournies dans ces travaux pour le choix de la **direction de recherche** $E_{\theta R}$ ne sont pas totalement satisfaisantes car elles reposent encore sur des essais empiriques pour chaque nouvel exemple, ce qui entrave la robustesse de la méthode. Des investigations supplémentaires sont donc nécessaires pour **automatiser le choix optimal** de ce paramètre numérique clé et ainsi garantir les meilleures performances.
- › Si l'évolution d'une des physiques est plus simple ou moins critique pour l'application visée, on pourrait envisager d'**utiliser un maillage grossier** pour celle-ci. Cela requiert des outils pour le **transfert de champs entre maillages 3D**. La fonction d'interpolation¹ de Matlab ou l'algorithme PANG [GANDER & JAPHET, 2009; MCCOID & GANDER, 2022], qui reprend une approche de type *mortar*, sont des pistes pragmatiques possibles.

Perspectives à plus long terme.

- › Des travaux récents portent sur des **approches data-driven** pour remplacer le comportement couplé par des données expérimentales [MARENIĆ et al., 2022]. Ces modèles, éventuellement associés à de l'intelligence artificielle, pourraient remplacer une partie des équations physiques actuellement utilisées dans la méthode. Le concept d'**interface entre physiques** devrait alors permettre la communication entre ces différents modèles. Si les informations fournies s'avèrent insuffisantes, la solution pourrait être corrigée sur l'ensemble du domaine avec quelques modes PGD, comme présenté précédemment.
- › Pour faciliter le transfert des outils développés vers l'industrie, une **implémentation non-intrusive** pourrait être envisagée en s'appuyant sur des travaux récents en mécanique [SCANFF et al., 2022] et en thermique instationnaire [MALLEVAL et al., 2023]. Cela permettrait d'exploiter les non-linéarités complexes intégrées dans un logiciel « boîte noire » certifié, ouvrant ainsi la voie à la **résolution de problématiques thermo-mécaniques réelles**, notamment dans le domaine des procédés de fabrication.

1. Fonction *scatteredInterpolant* (<https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/scatteredinterpolant.html>)

A

Sélection de contributions à ROMlab

Cette annexe détaille quelques points techniques apportés au démonstrateur collaboratif ROMlab, présenté à la [Section 3.1](#) du chapitre 2 (page 56). Les contributions abordées ci-après, bien que motivées par les besoins de cette thèse, ont été sélectionnées car elles bénéficient à l'ensemble des utilisateurs de ROMlab et ne sont pas restreintes à son utilisation dans un cadre multiphysique.

1 Accélération du calcul tensoriel

La mise en œuvre parallèle des calculs tensoriels au moyen de la notation d'Einstein a été initiée par S. Nachar grâce à son implémentation de la fonction *einsum*¹. On pourra se référer à la section 5.3 de [[NACHAR, 2019](#)] pour de plus amples détails sur les concepts sous-jacents. Dans le prolongement des travaux de S. Nachar, cette thèse a apporté quelques améliorations à cet élément crucial pour les performances de ROMlab.

Calcul tensoriel dans ROMlab – rappels. Avant toute chose, les grandes idées du calcul tensoriel dans ROMlab sont brièvement décrites. Pour ce faire, prenons l'exemple du calcul des contraintes élastiques par la loi de Hooke : $\sigma = \mathcal{K} : \varepsilon$. Dans ROMlab, les tenseurs des déformations ε et des contraintes σ sont stockés sous la forme de tableaux 4D, voir [Figure A.1](#).

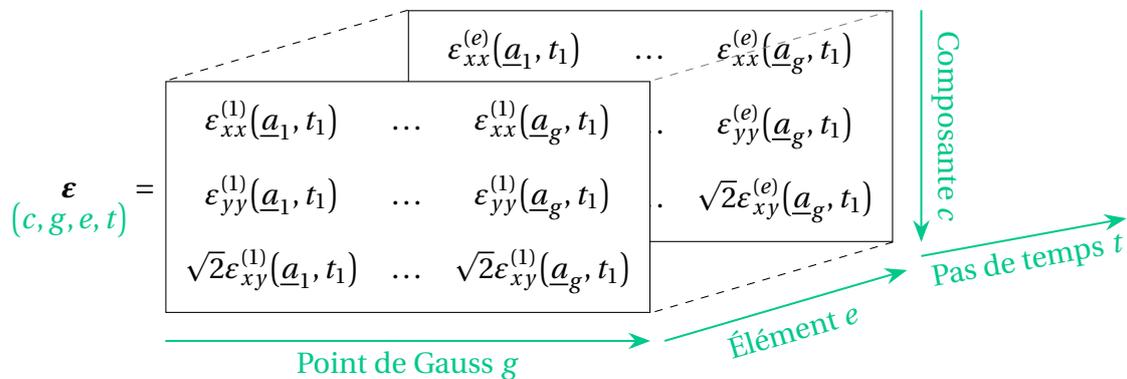


FIGURE A.1 • Formalisme tensoriel de ROMlab illustré sur le tenseur des déformations en 2D

1. <https://github.com/SNachar/einsum>

Les c composantes du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, exprimées en tout point de Gauss g (de coordonnées \underline{a}_g) de chaque élément e et à chacun des pas de temps t , sont donc stockées dans un tableau à quatre dimensions de taille (c, g, e, t) . Le [Tableau A.1](#) récapitule les notations utilisées pour décrire les dimensions des différents tableaux manipulés dans ROMlab.

TABLEAU A.1 • Notations adoptées pour décrire les dimensions des tableaux manipulés

Nom	Signification	Détails
d	dimension du problème	$d = 2$ (problème 2D) ou $d = 3$ (problème 3D)
i	nombre d'inconnues primales par nœud	$i = 1$ en thermique, $i = d$ en mécanique
c	nombre de composantes des inconnues duales par point de Gauss	$c = d$ en thermique, $c = \sum_{k=1}^d k$ en méca.
n	nombre de nœuds par élément	
g	nombre de points de Gauss par élément	
e	nombre d'éléments du maillage	
n_{tot}	nombre de nœuds total du maillage	
t	nombre de pas de temps	

Avec le formalisme de stockage des tenseurs illustré sur la [Figure A.1](#), la connaissance de l'opérateur de comportement élémentaire \mathbf{K}_e , de taille (c, c) , est suffisante pour calculer le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Ce dernier, de dimension (c, g, e, t) , est usuellement obtenu dans ROMlab à l'aide de la fonction `einsum` par la ligne de code suivante :

```
Sig = einsum('cC,Cget->cget', Ke, Eps);
```

Code A.1 • Calcul initial des contraintes avec `einsum`

La fonction prend notamment en entrée une chaîne de caractères qui spécifie les dimensions des tenseurs à multiplier, ainsi que celles du résultat. Les indices muets, sur lesquels se fait la sommation, correspondent aux indices répétés.

1.1 Accélération de la fonction générique

Fonction `tensorprod` de Matlab. Depuis l'implémentation initiale de la fonction `einsum` par S. Nachar, Matlab s'est enrichi de nouveaux outils. En particulier, la fonction `tensorprod`², introduite dans la version *R2022a*, est dédiée aux opérations de multiplications tensorielles (*inner product*, *outer product*) entre deux tenseurs. Plus précisément, les dimensions spécifiées en argument d'entrée de la fonction (qui doivent être de même taille dans les deux tenseurs) sont contractées par *inner product*, puis les dimensions restantes sont multipliées par *outer product*.

2. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/tensorprod.html>

Cet outil optimisé de Matlab a été intégré à la fonction *einsum* existante. Pour ce faire, la chaîne de caractères fournie à la fonction *einsum* doit être convertie en arguments d'entrée pour *tensorprod* à l'aide d'un *parser*. Par ailleurs, la fonction *einsum* pouvant être appelée pour un produit impliquant plus de deux tenseurs, ceux-ci doivent être traités deux à deux par *tensorprod*, qui n'accepte que deux tenseurs.

Utilisation en pratique. Il est donc à présent possible d'utiliser *tensorprod* lors d'un appel à *einsum*, à condition que tous les indices répétés soient contractés. C'est le cas du calcul des contraintes abordé au paragraphe précédent, mais cela exclut par exemple les opérations de produit terme à terme. C'est à l'utilisateur de déterminer si l'opération qu'il souhaite réaliser rentre dans le cadre d'application de *tensorprod*. Si tel est le cas, la taille du tenseur résultant – qui est implicite si l'on suppose que tous les indices répétés sont sommés – ne doit pas être spécifiée dans la chaîne de caractères d'entrée de *einsum*. En reprenant l'exemple du calcul des contraintes, il faut donc exécuter la ligne de code suivante – plutôt que celle donnée en A.1 – pour utiliser *tensorprod* :

```
Sig = einsum('cC,Cget', Ke, Eps);
```

Code A.2 • Calcul des contraintes avec *einsum* en utilisant *tensorprod*

Gain en temps de calcul. Lorsque l'utilisation de *tensorprod* est possible, elle permet une amélioration significative des performances de *einsum*. Sur le cas test académique présenté à la Section 2.1 (page 83), comportant 92 248 points de Gauss, l'utilisation de la version améliorée de *einsum* par l'appel à *tensorprod* (avec la ligne de code A.2) permet en moyenne de diviser par trois le temps nécessaire pour calculer le champ de contraintes σ par rapport à la version d'origine (cf. ligne de code A.1). Cette amélioration a donc été mise en œuvre dès que possible dans ROMlab.

1.2 Cas particulier du calcul de l'indicateur d'erreur

Sur des exemples préliminaires comportant quelques milliers de degrés de liberté seulement, le calcul de l'indicateur d'erreur η à la fin de chaque itération de la méthode LATIN-PGD pouvait représenter jusqu'à 25 % du temps total. Il s'est donc avéré indispensable de réduire le coût de calcul de cet indicateur, défini par l'équation (3.9), page 72.

Nous nous sommes concentrés sur la partie la plus coûteuse du calcul de cet indicateur, qui consiste à déterminer la norme énergétique sur le domaine Ω pour l'ensemble des pas de temps. Pour la mécanique, il s'agit alors d'évaluer la quantité $\eta_{\Omega}^M(t)$, définie par :

$$\eta_{\Omega}^M(t) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega. \quad (\text{A.1})$$

Cette quantité était initialement obtenue par la ligne de code A.3, qui ne permet pas directement d'utiliser la fonctionnalité introduite dans la section précédente.

```
etaM = einsum('cget,cC,ge,Cget->t', Eps, Ke, Ig, Eps)
```

Code A.3 • Calcul initial de la quantité $\eta_{\Omega}^M(t)$ avec un seul appel à *einsum*

Afin de réduire le coût de calcul de $\eta_{\Omega}^M(t)$, une procédure en deux étapes a été retenue :

- ➊ Calcul du produit $E_{el} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon}$ en tout point de Gauss, en procédant en deux fois : calcul de $\boldsymbol{\sigma}_{el} = \mathcal{K} : \boldsymbol{\varepsilon}$, puis de $E_{el} = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}_{el}$. Chacun peut être réalisé avec *einsum*, comme dans la section précédente, ou avec la fonction *pagetimes*³ de Matlab, permettant de réaliser efficacement des produits matriciels par « pages » (voir Figure A.2) ;

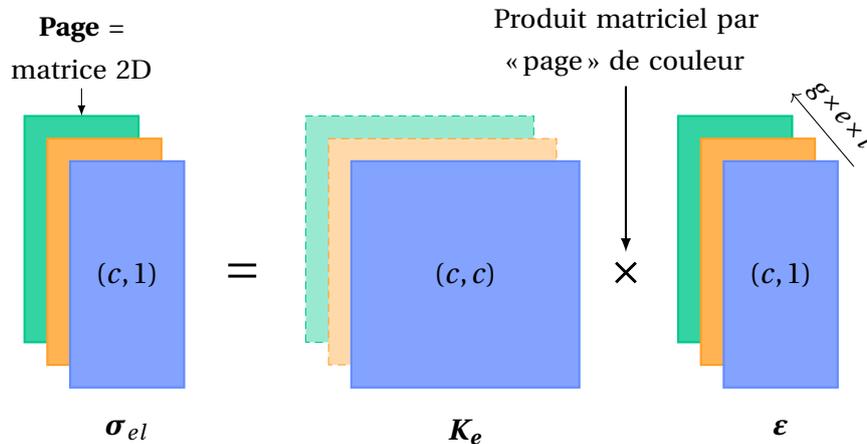


FIGURE A.2 • Principe du produit matriciel par page de la fonction *pagetimes* appliqué au calcul des contraintes élastiques

- ➋ Intégration spatiale, grâce à *tensorprod* :

```
etaM = einsum('get,ge', E_el, Ig)
```

Cette amélioration a réduit d'un facteur quatre le temps nécessaire pour calculer la quantité $\eta_{\Omega}^M(t)$, entraînant une diminution de 20 % de la durée totale de la résolution LATIN-PGD pour l'exemple étudié. En raison de cet impact significatif, cette manière de procéder pour le calcul de l'indicateur d'erreur a donc été conservée. À cet effet, un cas particulier a été ajouté à la fonction *einsum* pour le calcul d'un produit de la forme A.3. En effet, en plus de l'implémentation générique, certains cas particuliers y sont prévus pour accélérer des évaluations récurrentes.

2 Uniformisation des fonctions d'assemblage des opérateurs éléments finis

Dans ROMlab, les opérateurs éléments finis (matrices de masse, de rigidité, matrices des fonctions de forme et de leurs dérivées) sont d'abord construits sous forme de tableaux 5D avec la fonction *einsum*. Ces derniers sont ensuite assemblés en matrices 2D à l'aide de fonctions dédiées, adaptées aux dimensions du tableau initial et à la taille de la matrice finale.

Un effort d'uniformisation de ces fonctions a été entrepris pour leur donner une structure commune. Cette démarche a permis de rendre les fonctions plus génériques, et ainsi d'en englober certaines spécifiquement dédiées à l'assemblage d'opérateurs définis sur des domaines particuliers (bord 1D ou 2D, sous-domaines en décomposition de domaine). De plus,

3. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/pagetimes.html>

dans l'optique de faciliter la compréhension des procédures, un soin particulier a été apporté au respect des conventions de notation pour les dimensions des tableaux à manipuler, spécifiées dans le [Tableau A.1](#).

Procédure détaillée sur un exemple. En complément des commentaires laissés dans le code, la procédure commune à toutes les fonctions d'assemblage est brièvement décrite dans cette section. On s'appuie sur l'exemple de l'opérateur des dérivées premières des fonctions de forme en mécanique permettant de déterminer le tenseur des déformations par $\varepsilon = \mathbf{B}_u \mathbf{u}$.

L'opérateur avant assemblage, noté \mathbf{B}_{5D} pour plus de clarté, est de taille (c, i, n, g, e) et sa structure est illustrée sur la [Figure A.3](#) dans le cas d'un problème bi-dimensionnel. La notation $N_{n,x}^{(e)}(\xi_g, \eta_g)$ désigne la dérivée de la fonction de forme associée au nœud n de l'élément e par rapport à la coordonnée x de l'élément réel, exprimée au point de Gauss g . Le facteur $1/\sqrt{2}$ découle de l'utilisation de la notation de Mandel (et non de Voigt) pour les tenseurs des déformations et des contraintes (voir [[BRANNON, 2018](#)]).

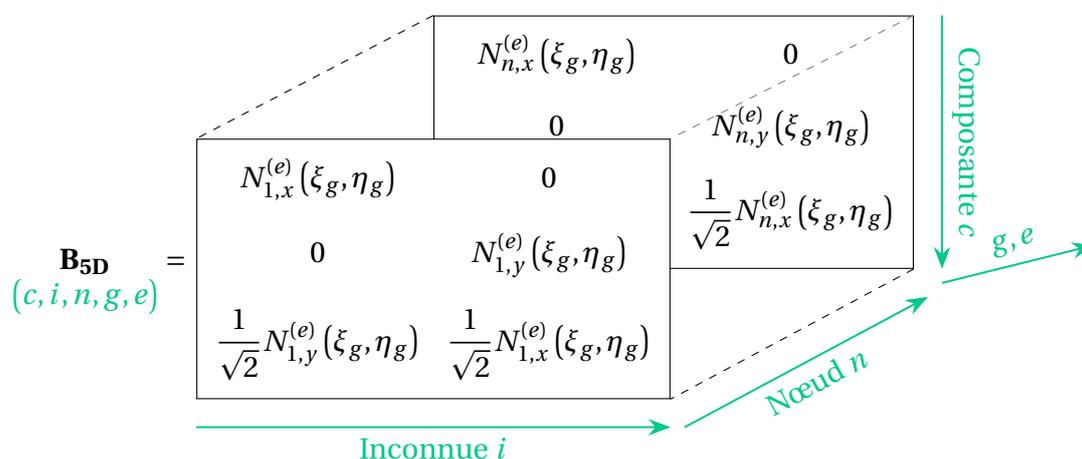


FIGURE A.3 • Structure du tableau \mathbf{B}_{5D} avant assemblage

La procédure pour construire l'opérateur assemblé 2D, de taille $(c \times g \times e, i \times n_{\text{tot}})$, consiste à :

1. Récupérer les dimensions du tableau \mathbf{B}_{5D} à assembler⁵ ;
2. Récupérer les positions (suivant les cinq dimensions) des termes non nuls de \mathbf{B}_{5D} ;
3. En déduire les positions de ces termes dans la matrice 2D (voir [Figure A.4](#)) ;
4. Construire la matrice assemblée \mathbf{B}_{2D} en format *sparse* (seuls les termes non nuls et leurs positions dans la matrice sont stockés).

Pour les problèmes multiphysiques. Dans le cadre multiphysique, une fonction a été implémentée spécifiquement pour l'assemblage des matrices de couplage $\mathbf{K}_{u\theta}$ et $\mathbf{C}_{\theta u}$ intervenant dans le système monolithique et définies à l'équation (2.50), page 54. Cette fonction permet de passer d'un tableau 5D de dimensions $(i_\bullet, n_\bullet, i_\circ, n_\circ, e)$, avec $\bullet, \circ = u, \theta$, à une matrice 2D de taille $(i_\bullet \times n_{\text{tot},\bullet}, i_\circ \times n_{\text{tot},\circ})$ à partir des tables de connectivité de chaque physique.

4. Les fonctions de forme sont les mêmes quel que soit l'élément e considéré.
 5. Le fait de lire les dimensions directement dans le tableau 5D permet de s'adapter au domaine sur lequel est défini l'opérateur à assembler et rend donc la fonction plus générique.

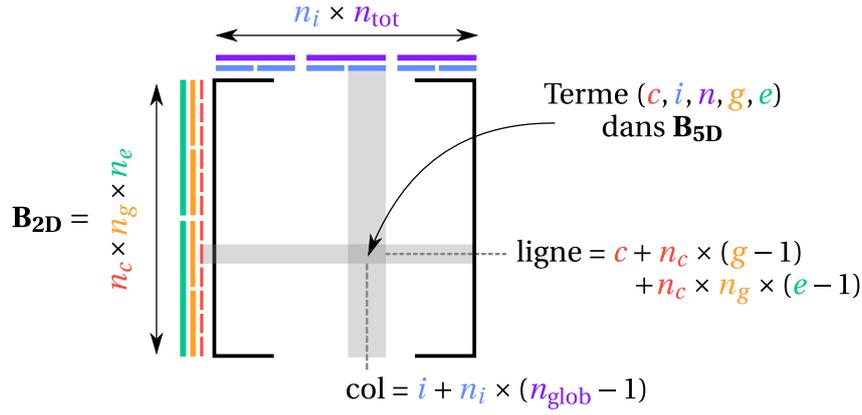


FIGURE A.4 • Position d'un terme (c, i, n, g, e) du tableau \mathbf{B}_{5D} dans la matrice \mathbf{B}_{2D} . Les dimensions des tableaux sont renommées pour les distinguer du terme considéré.

3 Chargements de type Neumann et Robin

Le double objectif de pouvoir traiter le benchmark du second problème de Danilovskaya (défini en Section 3.2 du chapitre 2, page 60) et d'appliquer un chargement plus réaliste sur l'exemple de l'aube de turbine (voir Section 3.1, page 92) a motivé l'implémentation des conditions aux limites de type Robin dans ROMlab. Par la même occasion, un travail d'uniformisation entre physiques et de généralisation des conditions aux limites existantes (force volumique uniforme, force centrifuge, possibilité d'appliquer des conditions de Dirichlet non uniformes) a été entrepris.

Pour présenter l'ajout des conditions de Robin, on considère un problème de thermique stationnaire sur un domaine Ω . Ce dernier est soumis à un flux convectif sur une partie de la frontière $\partial_c \Omega$, mais sans terme source ni condition de Neumann non nulle pour simplifier la présentation. La forme variationnelle de ce problème, qui peut être vue comme un cas particulier de celle donnée par l'équation (2.47) (page 54), s'écrit :

$$\int_{\Omega} k \nabla \theta \cdot \nabla \theta^* \, d\Omega + \int_{\partial_c \Omega} h \theta \theta^* \, dS = \int_{\partial_c \Omega} h \theta_{\infty} \theta^* \, dS, \quad \forall \theta^* \quad (\text{A.2})$$

On constate que certains termes nécessitent d'intégrer sur une partie de la frontière du domaine, tout comme dans le cas d'une condition de Neumann. Cependant, l'intégration sur un bord n'était jusqu'à présent pas gérée dans ROMlab. En se plaçant sur un élément du maillage, la discrétisation par éléments finis s'écrit :

$$\int_{\partial_c \Omega_e} h \theta \theta^* \, dS = (\theta_e^*)^T \int_{\partial_c \Omega_e} h \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{N}_{\theta} \, dS_e \, \theta_e \quad (\text{A.3})$$

$$= (\theta_e^*)^T \int_{\partial_c \Omega_{e,\text{ref}}} h \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{N}_{\theta} \, \|dS_e\| \, dS_{e,\text{ref}} \, \theta_e \quad (\text{A.4})$$

Les fonctions de forme \mathbf{N}_{θ} introduites dans l'équation (A.3) correspondent ici à celles des éléments de bord utilisés (triangulaires pour un maillage de Ω tétraédrique, par exemple). Grâce à la généralisation des fonctions d'assemblage présentée à la section précédente, l'assemblage de cet opérateur \mathbf{N}_{θ} peut se faire avec la même routine que pour les fonctions de forme du domaine Ω .

La subtilité lors de l'intégration sur un bord découle du fait que la matrice jacobienne n'est plus carrée. Dans le cas d'un domaine 3D avec une frontière 2D, elle s'exprime – en un point de Gauss g donné – par

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi_g, \eta_g) & \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi_g, \eta_g) & \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi_g, \eta_g) \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi_g, \eta_g) & \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi_g, \eta_g) & \frac{\partial z}{\partial \eta}(\xi_g, \eta_g) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

où (x, y, z) représentent les coordonnées d'un point du bord $\partial_c \Omega$ dans l'espace réel 3D et (ξ, η) les coordonnées sur l'élément de référence 2D.

Lors du passage sur l'élément de référence (voir équation (A.4)), ce n'est donc plus le déterminant de la matrice jacobienne qui intervient, mais la norme euclidienne $\|dS_e\|$ du vecteur dS_e défini par le produit vectoriel des deux lignes de la matrice jacobienne :

$$dS_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

Le calcul d'opérateurs éléments finis sur une frontière, qui sont utiles pour appliquer des conditions de Neumann et de Robin, a été implémenté dans ROMlab au cours de ces travaux.

Vérification. L'implémentation des conditions aux limites de Robin est validée à l'aide d'un cas simple disposant d'une solution analytique. On considère un barreau de longueur $L = 0.4 \text{ m}$ et de conductivité $k = 43 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Comme indiqué sur la Figure A.5, une condition de Dirichlet homogène est appliquée en $x = 0$ et un flux convectif est imposé en $x = L$, avec $h = 100 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ et $\theta_\infty = 120 \text{ K}$, tandis que les surfaces latérales sont supposées isolées.

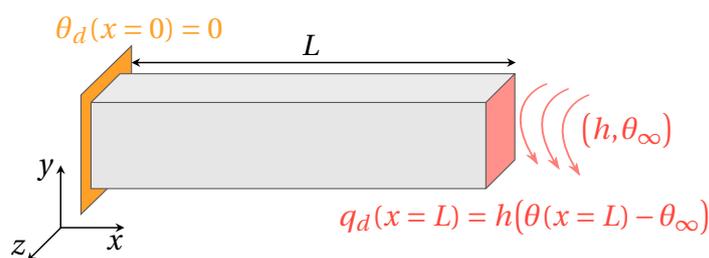


FIGURE A.5 • Définition du problème de thermique avec convection

Bien que la simulation soit tri-dimensionnelle, le problème de la Figure A.5 se ramène à un problème 1D dont on peut déterminer la solution analytiquement⁶. La température exacte le long de l'axe x de la poutre s'exprime par :

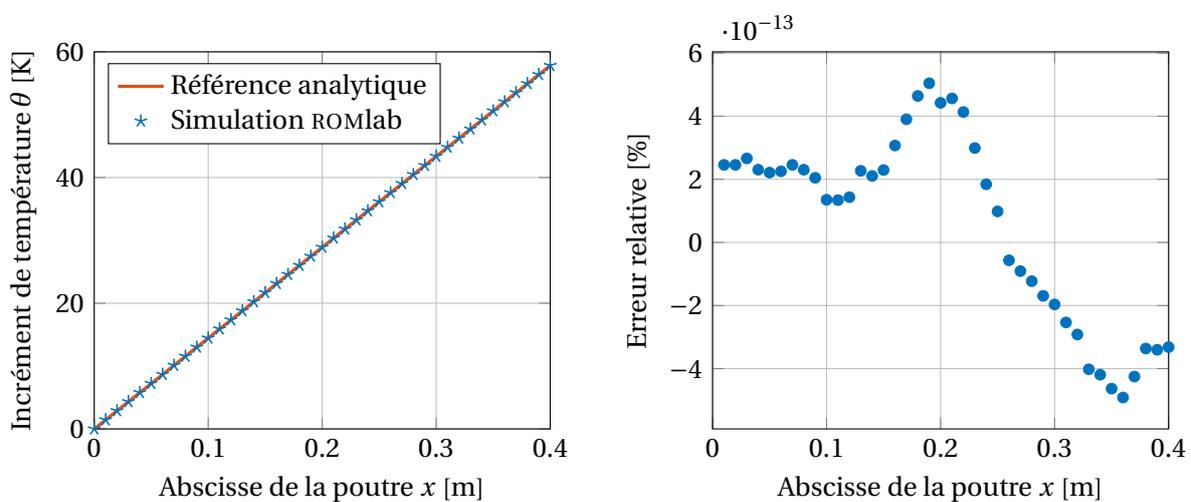
$$\theta_{\text{ref}}(x) = \frac{h\theta_\infty}{hL + k}x \quad (\text{A.7})$$

6. Voir <https://qdotsystems.com.au/heat-conduction-equation-with-mixed-boundary-conditions/>

La [Figure A.6a](#) confronte la solution issue de ROMlab, prise le long de l'arête $(y, z) = (0, 0)$, à la solution analytique de l'équation (A.7). On observe une excellente concordance, qui est confirmée par une erreur relative de l'ordre de 10^{-13} % tout le long de l'arête, comme l'indique la [Figure A.6b](#).

Q Remarque A.1

De manière similaire à ce qui a été présenté dans cette section, l'ensemble des conditions aux limites remaniées ou ajoutées (condition de Dirichlet non uniforme, force volumique uniforme, force centrifuge, conditions de Neumann) a fait l'objet d'une validation sur des cas simples mono-physiques disposant d'une solution analytique. Ces tests ont été pérennisés, avec l'aide de T. Verbeke, à travers une bibliothèque de tests d'intégration.



(a) Comparaison des solutions en température

(b) Erreur relative par rapport à la référence

FIGURE A.6 • Validation de l'implémentation des conditions de Robin dans ROMlab par rapport à une solution analytique

› Bilan

De manière générale, un soin particulier a été porté aux versions finales de code laissées dans ROMlab. De nombreux commentaires ont été ajoutés afin d'en faciliter la compréhension par les futurs utilisateurs et développeurs. Une notice détaillant le format de stockage des données lors de la construction des opérateurs éléments finis a également été rédigée à destination des nouveaux utilisateurs, et est reprise dans l'[Annexe B](#).

* * *

B

Notice de la construction des opérateurs éléments finis dans ROMlab

Cette annexe s'adresse en priorité aux utilisateurs de ROMlab et traite du formalisme utilisé dans le code pour la construction des opérateurs éléments finis. En particulier, on y détaille les tableaux à n dimensions construits dans la fonction `BasisFunction` et leur utilisation dans `AssembleOperators`. En guise d'illustration, nous nous plaçons dans le cas de la mécanique 2D. On pourra se référer au [Tableau A.1](#), page 124, pour les conventions de notations quant aux dimensions des tableaux manipulés.

› [Fonctions de forme](#) (pour l'**élément de référence**) exprimées aux points de Gauss.

$$\mathbf{N}_{(n, g)} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} N_1(\xi_1, \eta_1) & \dots & N_1(\xi_g, \eta_g) \\ \vdots & & \vdots \\ N_n(\xi_1, \eta_1) & \dots & N_n(\xi_g, \eta_g) \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Point de Gauss g

Noeud n

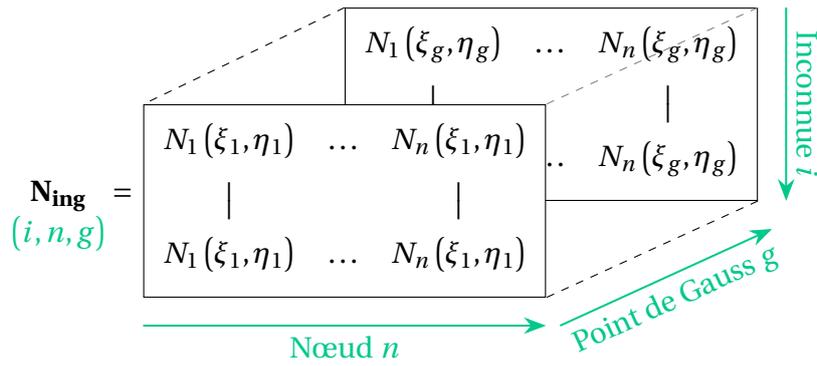
Notations :

- N_i : fonction de forme associée au i -ème nœud de l'élément ;
- (ξ, η) : coordonnées (en 2D) d'un point dans l'espace de l'*élément de référence* ;
- (x, y) : coordonnées (en 2D) d'un point dans l'espace de l'*élément réel*.

› [Fonctions de forme dupliquées](#) pour toutes les *inconnues*.

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour les composantes u_x et u_y du champ de déplacement 2D. Les termes de la matrice \mathbf{N} sont donc simplement dupliqués pour construire le tableau \mathbf{N}_{ing} de dimensions (i, n, g) .

→ On retrouve $\text{squeeze}(\mathbf{N}_{\text{ing}}(i, :, :)) = \mathbf{N}, \quad \forall i$



► **Fonctions de forme dupliquées** pour tous les éléments.

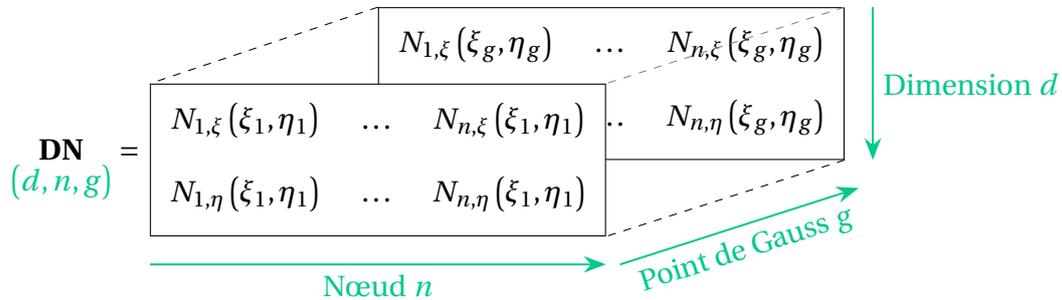
Les mêmes fonctions de forme sont également utilisées pour tous les éléments en passant par le même élément de référence.

$\mathbf{N}_{inge} = \mathbf{N}_{ing}$ dupliqué pour tous les éléments.
 (i, n, g, e)

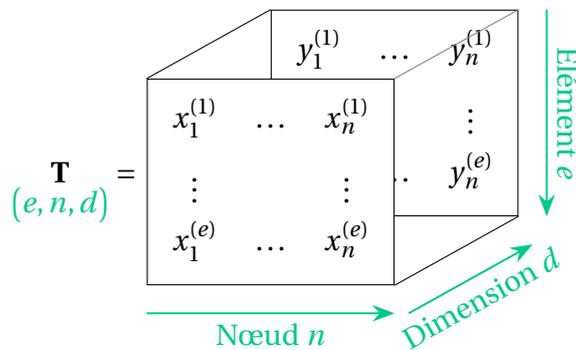
→ On a alors $\mathbf{N}_{inge}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, e) = \mathbf{N}_{ing}, \forall e$.

On verra plus loin que les fonctions de forme seront finalement rangées dans un tableau 5D.

► **Dérivée des fonctions de forme** (pour l'élément de référence) suivant chaque dimension de l'espace, exprimées aux points de Gauss. On note $N_{1,\xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi}$.



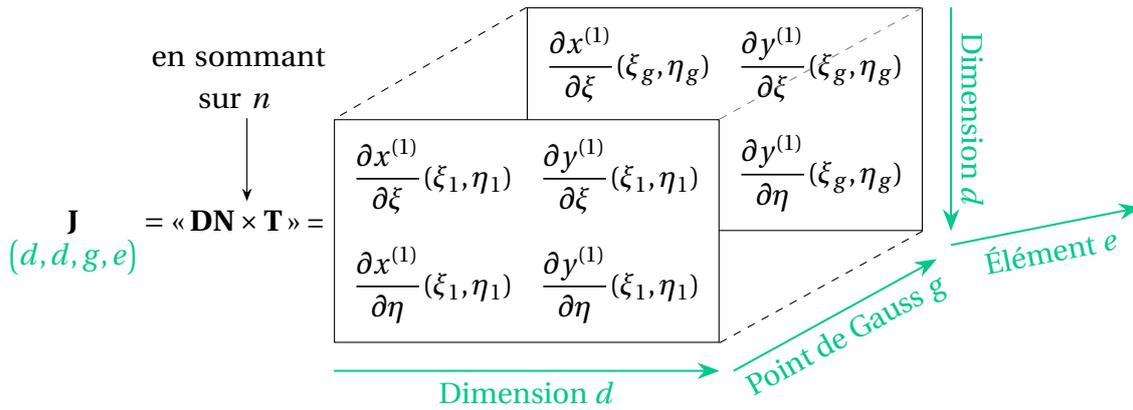
► **Coordonnées des nœuds** de chaque élément réel.



Notations :

- $y_n^{(e)}$: coordonnée suivant y du n -ième nœud de l'élément e .

► Matrice jacobienne exprimée en tout point de Gauss de chaque élément.



Détaillons un terme de l'opérateur \mathbf{J} . Par définition de $x^{(e)}(\xi_g, \eta_g)$, conséquence de l'utilisation d'éléments finis isoparamétriques, on peut écrire :

$$\frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi}(\xi_g, \eta_g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi_g, \eta_g) x_i^{(e)}. \quad (\text{B.1})$$

On constate que ce terme de \mathbf{J} fait intervenir une somme sur les nœuds de produits de termes des variables \mathbf{DN} et \mathbf{T} . L'équation (B.1) se traduit par la ligne de code suivante dans ROMlab, en utilisant la fonction *einsum* :

```
J = einsum('dng, enD -> dDge', DN, T); % Somme sur n
```

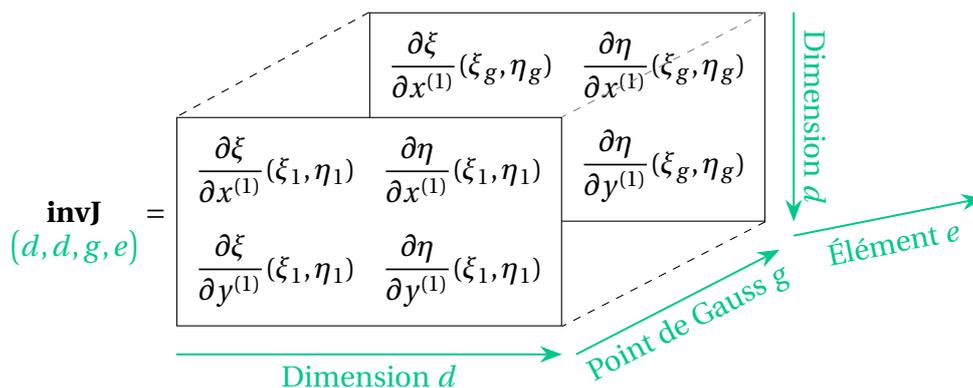
Q Remarque B.1

On tire les informations suivantes de la chaîne de caractères fournie à *einsum* :

- la première dimension d de \mathbf{J} provient de la variable \mathbf{DN} et impacte donc les dérivées. Ainsi, sur toutes les premières lignes de \mathbf{J} on calcule : $\frac{\partial \bullet}{\partial \xi}$;
- la seconde dimension d est issue de \mathbf{T} et impose donc les composantes du vecteur position à dériver. Ainsi, sur toutes les premières colonnes de \mathbf{J} , on dérive les $x^{(\bullet)}$.

► Inverse de la matrice jacobienne en tout point de Gauss de chaque élément.

La variable \mathbf{invJ} est obtenue en calculant l'inverse de chaque « page » de dimensions (d, d) de la matrice jacobienne \mathbf{J} .



► Déterminant de la matrice jacobienne en tout point de Gauss de chaque élément.

De manière similaire, la variable **detJ** est obtenue en calculant le déterminant de chaque « page » de la matrice jacobienne **J**.

$$\mathbf{detJ} = \begin{matrix} (g, e) \\ \det(\mathbf{J}(:, :, 1, 1)) & \dots & \det(\mathbf{J}(:, :, 1, e)) \\ \vdots & & \vdots \\ \det(\mathbf{J}(:, :, g, 1)) & \dots & \det(\mathbf{J}(:, :, g, e)) \end{matrix}$$

Élément e

Point de Gauss g

► Dérivée des fonctions de forme (pour l'**élément réel**) suivant chaque dimension de l'espace, exprimées aux points de Gauss de chaque élément.

en sommant sur d

$$\mathbf{GN} = \ll \mathbf{invJ} \times \mathbf{DN} \gg = \begin{matrix} N_{1,x}^{(1)}(\xi_1, \eta_1) & \dots & N_{n,x}^{(1)}(\xi_1, \eta_1) & \dots & N_{n,y}^{(1)}(\xi_g, \eta_g) \\ N_{1,x}^{(1)}(\xi_g, \eta_g) & \dots & N_{n,x}^{(1)}(\xi_g, \eta_g) & \dots & N_{n,y}^{(1)}(\xi_g, \eta_g) \\ N_{1,y}^{(1)}(\xi_1, \eta_1) & \dots & N_{n,y}^{(1)}(\xi_1, \eta_1) & \dots & N_{n,y}^{(1)}(\xi_g, \eta_g) \end{matrix}$$

Nœud n

Dimension d

Point de Gauss g

Élément e

Détaillons les termes de **GN** associés au nœud n et au point de Gauss g de l'élément e :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_n^{(e)}(\xi_g, \eta_g)}{\partial x} = \frac{\partial N_n^{(e)}(\xi_g, \eta_g)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_n^{(e)}(\xi_g, \eta_g)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial N_n^{(e)}(\xi_g, \eta_g)}{\partial y} = \frac{\partial N_n^{(e)}(\xi_g, \eta_g)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_n^{(e)}(\xi_g, \eta_g)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

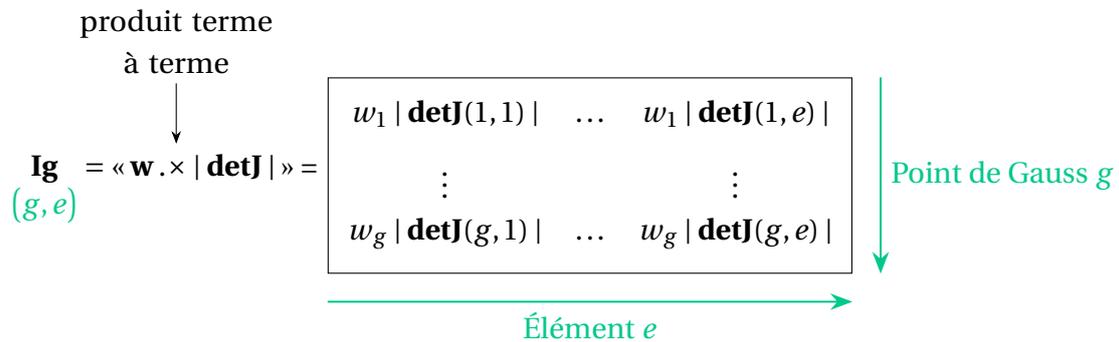
À travers l'équation (B.2), on constate que l'opérateur **GN** fait intervenir des termes des variables **DN** et **invJ** introduites précédemment. Plus précisément, les termes détaillés dans l'équation (B.2) s'écrivent en fonction des variables **DN** et **invJ** :

- $\mathbf{GN}(1, n, g, e) = \mathbf{DN}(1, n, g) \times \mathbf{invJ}(1, 1, g, e) + \mathbf{DN}(2, n, g) \times \mathbf{invJ}(1, 2, g, e)$
- $\mathbf{GN}(2, n, g, e) = \mathbf{DN}(1, n, g) \times \mathbf{invJ}(2, 1, g, e) + \mathbf{DN}(2, n, g) \times \mathbf{invJ}(2, 2, g, e)$

On remarque ainsi qu'il faut sommer sur les indices en rouge. Grâce à ce constat, la ligne de commande permettant de calculer **GN** dans ROMlab avec la fonction *einsum* s'écrit :

```
GN = einsum('dDge, Dng -> dnge', invJ, DN); % Somme sur D
```

► Coefficient pour l'intégration spatiale numérique (sur les **éléments réels**) exprimé en tout point de Gauss de chaque élément.



Notations :

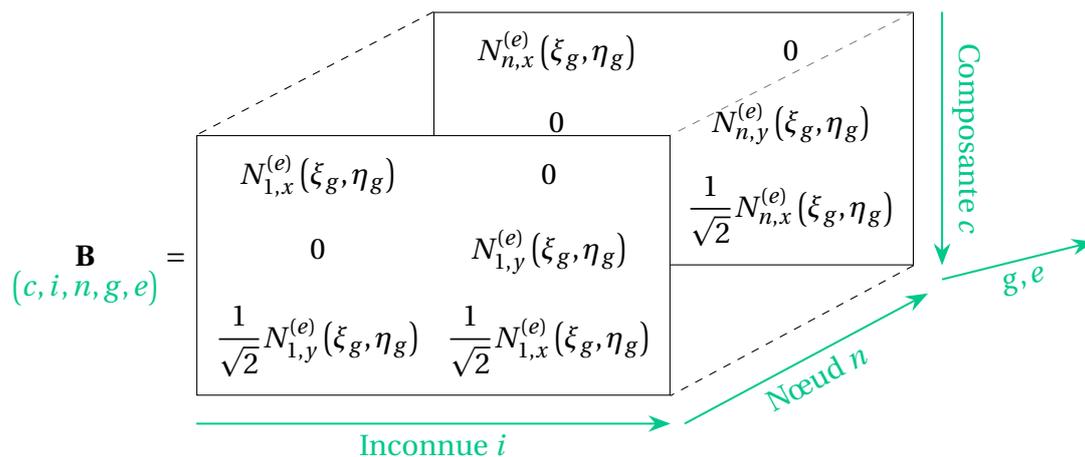
- w_i : poids de Gauss associé au i -ème point d'intégration de Gauss;
- \mathbf{w} : vecteur de taille $(g, 1)$ contenant l'ensemble des poids de Gauss d'un élément de référence.

Le produit terme à terme est réalisé à l'aide de la fonction *einsum* par la commande :

```
I_g = einsum('ge, g->ge', abs(detJ), w(:));
```

► Dérivées des fonctions de forme réorganisées pour le calcul des déformations.

Les termes de la variable **GN** sont réorganisés dans un tableau 5D, noté **B**, afin de faciliter le calcul des déformations ϵ à partir des déplacements **u**. L'allure de **B** découle du fait que dans ROMlab, les tenseurs d'ordre 2 sont écrits avec les notations de Mandel, comme spécifié sur la [Figure A.1](#) en page 123.



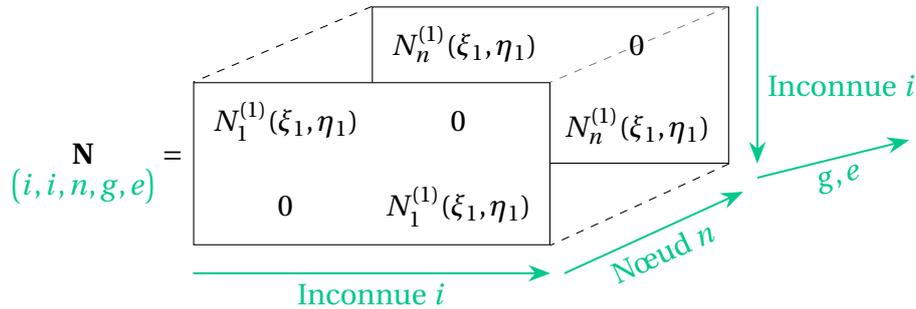
Remarque B.2

Les dimensions du tableau **B** nous indiquent que :

- Les lignes 1, 2 et 3 servent respectivement à calculer ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{xy} ;
- Les colonnes 1 et 2 vont respectivement être multipliées par u_x et u_y .

› Fonctions de forme réorganisées.

Dans la même logique, les fonctions de forme sont également réorganisées en un tableau 5D.



Les quantités venant d'être détaillées, qui sont construites dans la fonction BasisFunction, sont utilisées dans AssembleOperators pour construire les opérateurs éléments finis classiques, tels que ceux donnés à l'équation (2.50), page 54.

› Matrice de rigidité ou de conductivité.

La matrice de rigidité \mathbf{K}_{uu} (ou de manière équivalente la matrice de conductivité thermique $\mathbf{K}_{\theta\theta}$) est construite par la commande *einsum* suivante :

$$K = \text{einsum}('cdnge, cC, ge, CDNge \rightarrow dnDNe', B, Ke, Ig, B);$$

Comme évoqué au début de l'Annexe A, on peut se contenter d'utiliser la matrice de comportement élémentaire \mathbf{K}_e , qui s'exprime en mécanique 2D en fonction des coefficients de Lamé λ et μ :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

› Matrice de masse ou de capacité.

La matrice de capacité thermique $\mathbf{C}_{\theta\theta}$ est construite de façon similaire, mais en utilisant les fonctions de forme plutôt que leurs dérivées :

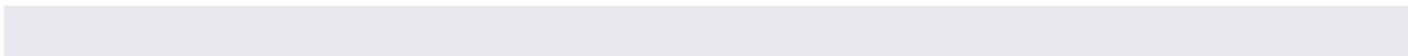
$$M = \text{einsum}('cdnge, cC, ge, CDNge \rightarrow dnDNe', N, Me, Ig, N);$$

› Matrices de couplage.

Dans le cadre multiphysique, les matrices de couplage sont construites selon la même philosophie, en combinant des opérateurs EF construits pour les deux physiques :

$$\begin{aligned} K_{tu} &= \text{einsum}('cdnge, cC, ge, CDNge \rightarrow dnDNe', Bu, Ce, Ig_u, Nt); \\ C_{ut} &= \text{einsum}('cdnge, cC, ge, CDNge \rightarrow dnDNe', Nt, Ce, Ig_t, Bu); \end{aligned}$$

Tous ces opérateurs 5D sont ensuite assemblés sous la forme de matrices 2D grâce aux fonctions d'assemblage abordées dans l'Annexe A.



Bibliographie

- ABISSET-CHAVANNE, E. & CHINESTA, F. (2013).** Toward an optimisation of the reactive resin transfer molding process : thermo-chemico-mechanical coupled simulations. *International Journal of Material Forming*, 7(2), 249-258. DOI : <https://doi.org/10.1007/s12289-013-1124-0> (cf. p. 10)
- AHN, C., CORTIELLA, A., KIM, J. G. & PARK, K. C. (2022).** Partitioned symmetric formulation and solution algorithm of thermoelastic interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 400, 115529. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115529> (cf. p. 24, 60, 69)
- ALLEMANG, R. (2003).** The modal assurance criterion – Twenty years of use and abuse. *Sound & vibration*, 37, 14-23 (cf. p. 106).
- ARMERO, F. & SIMO, J. C. (1992).** A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(4), 737-766. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.1620350408> (cf. p. 28)
- ASUR VIJAYA KUMAR, P. K., DEAN, A., SAHRAEE, S., REINOSO, J. & PAGGI, M. (2022).** Non-linear thermoelastic analysis of thin-walled structures with cohesive-like interfaces relying on the solid shell concept. *Finite Elements in Analysis and Design*, 202, 103696. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2021.103696> (cf. p. 61, 62)
- BALLARIN, F., LEE, S. & YI, S.-Y. (2024).** Projection-based reduced order modeling of an iterative scheme for linear thermo-poroelasticity. *Results in Applied Mathematics*, 21, 100430. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100430> (cf. p. 5, 31, 36, 37, 55)
- BALLARIN, F. & ROZZA, G. (2016).** POD–Galerkin monolithic reduced order models for parametrized fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 82(12), 1010-1034. DOI : <https://doi.org/10.1002/flid.4252> (cf. p. 37)
- BEKELE, Y. W., FONN, E., KVAMSDAL, T., KVARVING, A. M. & NORDAL, S. (2022).** Mixed Method for Isogeometric Analysis of Coupled Flow and Deformation in Poroelastic Media. *Applied Sciences*, 12(6), 2915. DOI : <https://doi.org/10.3390/app12062915> (cf. p. 25)
- BENNER, P., GRIVET-TALOCIA, S., QUARTERONI, A., ROZZA, G., SCHILDERS, W. H. A. & MIGUEL SILVEIRA, L. (Éd.). (2021a).** Volume 2 : Snapshot-Based Methods and Algorithms. In

- Model Order Reduction*. De Gruyter. DOI : <https://doi.org/10.1515/9783110671490>. (Cf. p. 4, 5)
- BENNER, P., GRIVET-TALOCIA, S., QUARTERONI, A., ROZZA, G., SCHILDERS, W. H. A. & MIGUEL SILVEIRA, L. (Éd.). (2021b)**. Volume 3 : Applications. In *Model Order Reduction*. De Gruyter. DOI : <https://doi.org/doi:10.1515/9783110499001>. (Cf. p. 35)
- BENNER, P. & FENG, L. (2015)**. Model order reduction for coupled problems. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 14, 3-22 (cf. p. 35-37).
- BERINGHIER, M., GUEGUEN, M. & GRANDIDIER, J. C. (2010)**. Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations – application to thermoviscoelasticity. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4), 393-401. DOI : <https://doi.org/10.1007/s11831-010-9050-5> (cf. p. 38)
- BIOT, M. A. (1956)**. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, 27(3), 240-253. DOI : <https://doi.org/10.1063/1.1722351> (cf. p. 42, 51)
- BLADES, E. L., BAKER, M., PRAY, C. L. & LUKE, E. A. (2012)**. Fluid-Structure Interaction Simulations of Rocket Engine Side Loads (cf. p. 2, 4).
- BLANZE, C., CHAMPANEY, L., COGNARD, J.-Y. & LADEVÈZE, P. (1996)**. A modular approach to structure assembly computations : application to contact problems. *Engineering Computations*, 13(1), 15-32. DOI : <https://doi.org/10.1108/02644409610110976> (cf. p. 68)
- BLEYER, J. (2016)**. Thermo-elastic evolution problem (full coupling). (Cf. p. 63).
- BOFFI, D., BREZZI, F. & FORTIN, M. (2013)**. *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer Berlin Heidelberg. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-642-36519-5>. (Cf. p. 55)
- BOUCARD, P.-A. & CHAMPANEY, L. (2003)**. A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9), 1259-1281. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.724> (cf. p. 23, 101, 102)
- BOUCARD, P.-A., LADEVÈZE, P., POSS, M. & ROUGÉE, P. (1997)**. A nonincremental approach for large displacement problems. *Computers & Structures*, 64(1-4), 499-508. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(96\)00165-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(96)00165-4) (cf. p. 68)
- BOUCARD, P.-A. & LADEVÈZE, P. (1999)**. Une application de la méthode LATIN au calcul multirésolution de structures non linéaires. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 8(8), 903-920. DOI : <https://doi.org/10.1080/12506559.1999.10511417> (cf. p. 100, 102)
- BRANNON, R. M. (2018)**. Voigt and Mandel components. In *Rotation, Reflection, and Frame Changes* (26-1 to 26-20). IOP Publishing. DOI : <https://doi.org/10.1088/978-0-7503-1454-1ch26>. (Cf. p. 127)
- BRIGGS, W., HENSON, V. & MCCORMICK, S. (2000)**. *A Multigrid Tutorial, 2nd Edition*. (Cf. p. 26).

- CARLSON, D. E. (1973).** Linear thermoelasticity. In C. TRUESDELL (Éd.), *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity : Linear and Nonlinear Theories of Rods, Plates, and Shells* (p. 297-345). Springer. DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_2. (Cf. p. 42)
- CASTELLETTO, N., WHITE, J. A. & FERRONATO, M. (2016).** Scalable algorithms for three-field mixed finite element coupled poromechanics. *Journal of Computational Physics*, 327, 894-918. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.09.063> (cf. p. 27)
- CHAMPANEY, L., COGNARD, J. Y., DUREISSEIX, D. & LADEVÈZE, P. (1997).** Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method. *Computational Mechanics*, 19(4), 253-263. DOI : <https://doi.org/10.1007/s004660050174> (cf. p. 68)
- CHATTERJEE, A. (2000).** An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78(7), 808-817 (cf. p. 4, 15, 16).
- CHATURANTABUT, S. & SORENSEN, D. C. (2010).** Nonlinear Model Reduction via Discrete Empirical Interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5), 2737-2764. DOI : <https://doi.org/10.1137/090766498> (cf. p. 37)
- CHEN, S., HONG, Q., XU, J. & YANG, K. (2020).** Robust block preconditioners for poroelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 369, 113229. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113229> (cf. p. 27)
- CHINESTA, F., AMMAR, A. & CUETO, E. (2010).** Recent advances and new challenges in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4), 327-350. DOI : <https://doi.org/10.1007/s11831-010-9049-y> (cf. p. 5, 22, 121)
- CHINESTA, F., HUERTA, A., ROZZA, G. & WILLCOX, K. (2017).** Model Reduction Methods. In *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition* (p. 1-36). John Wiley & Sons, Ltd. DOI : <https://doi.org/10.1002/9781119176817.ecm2110>. (Cf. p. 4)
- CHINESTA, F., KEUNINGS, R. & LEYGUE, A. (2014).** *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations : A Primer*. Springer International Publishing. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-319-02865-1>. (Cf. p. 5)
- CHINESTA, F. & LADEVÈZE, P. (2021).** 3. Proper generalized decomposition. In P. BENNER, S. GRIVET-TALOCIA, A. QUARTERONI, G. ROZZA, W. SCHILDERS & L. M. SILVEIRA (Éd.), *Volume 2 Snapshot-Based Methods and Algorithms* (p. 97-138). De Gruyter. DOI : <https://doi.org/doi:10.1515/9783110671490-003>. (Cf. p. 19)
- CHINESTA, F., LADEVÈZE, P. & CUETO, E. (2011).** A Short Review on Model Order Reduction Based on Proper Generalized Decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 18(4), 395-404. DOI : <https://doi.org/10.1007/s11831-011-9064-7> (cf. p. 19)

- CHOURDAKIS, G., DAVIS, K., RODENBERG, B., SCHULTE, M., SIMONIS, F., UEKERMANN, B., ABRAMS, G., BUNGARTZ, H., CHEUNG YAU, L., DESAI, I., EDER, K., HERTRICH, R., LINDNER, F., RUSCH, A., SASHKO, D., SCHNEIDER, D., TOTOUNFEROUSH, A., VOLLAND, D., VOLLMER, P. & KOSEOMUR, O. (2022).** preCICE v2 : A sustainable and user-friendly coupling library. *Open Research Europe*, 2(51). DOI : <https://doi.org/10.12688/openreseurope.14445.2> (cf. p. 28)
- COGNARD, J. Y., LADEVÈZE, P. & TALBOT, P. (1999).** A large time increment approach for thermo-mechanical problems. *Advances in Engineering Software*, 30(9), 583-593. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0965-9978\(98\)00120-3](https://doi.org/10.1016/S0965-9978(98)00120-3) (cf. p. 68)
- COLLINS, G., FIDKOWSKI, K. & CESNIK, C. E. (2020).** Petrov-Galerkin Projection-Based Model Reduction with an Optimized Test Space In *AIAA Scitech 2020 Forum*. American Institute of Aeronautics; Astronautics. DOI : <https://doi.org/10.2514/6.2020-1562>. (Cf. p. 17)
- COUSSY, O. (2004).** *Poromechanics*. Wiley. (Cf. p. 51).
- DABY-SEESARAM, A., FAU, A., CHARBONNEL, P.-É. & NÉRON, D. (2023).** A hybrid frequency-temporal reduced-order method for nonlinear dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 111(15), 13669-13689. DOI : <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08513-8> (cf. p. 68, 80, 86)
- DABY-SEESARAM, A. (2023).** *Towards an Optimal Multi-query Framework based on Model-order Reduction for Non-linear Dynamics* (thèse de doct.). Université Paris-Saclay. (Cf. p. 21, 23, 57, 101).
- DABY-SEESARAM, A., NÉRON, D., CHARBONNEL, P.-É. & FAU, A. (2025).** Model-order reduction framework for non-linear dynamics problems involving multiple non-parametrised loading configurations for damage assessment. *Computational Mechanics*. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00466-024-02586-x> (cf. p. 23, 101, 102)
- DANILOVSKAYA, V. (1952).** On a dynamic problem of thermoelasticity. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 16(4), 341-344 (cf. p. 60).
- DANOWSKI, C., GRAVEMEIER, V., YOSHIHARA, L. & WALL, W. A. (2013).** A monolithic computational approach to thermo-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95(13), 1053-1078. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.4530> (cf. p. 26, 27, 60-62)
- DEDE, E. M., LEE, J. & NOMURA, T. (2014).** *Multiphysics Simulation : Electromechanical System Applications and Optimization*. Springer London. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5640-6>. (Cf. p. 2)
- DEMO, N., ORTALI, G., GUSTIN, G., ROZZA, G. & LAVINI, G. (2020).** An efficient computational framework for naval shape design and optimization problems by means of data-driven reduced order modeling techniques. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 14(1), 211-230. DOI : <https://doi.org/10.1007/s40574-020-00263-4> (cf. p. 10)

- DUHAMEL, J. M. C. (1837).** Second mémoire sur les phénomènes thermomécaniques. *Journal de l'École Polytechnique*, 15, 1-57 (cf. p. 42).
- DUNIĆ, V., BUSARAC, N., SLAVKOVIĆ, V., ROSIĆ, B., NIEKAMP, R., MATTHIES, H., SLAVKOVIĆ, R. & ŽIVKOVIĆ, M. (2016).** A thermo-mechanically coupled finite strain model considering inelastic heat generation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 28(4), 993-1007. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00161-015-0442-5> (cf. p. 28, 31)
- DUREISSEIX, D. & BAVESTRELLO, H. (2006).** Information transfer between incompatible finite element meshes : Application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44-47), 6523-6541. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.02.003> (cf. p. 34)
- DUREISSEIX, D., LADEVÈZE, P., NÉRON, D. & SCHREFLER, B. A. (2003a).** A Multi-Time-Scale Strategy for Multiphysics Problems : Application to Poroelasticity. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 1(4), 387-400. DOI : <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.v1.i4.50> (cf. p. 34, 39, 78)
- DUREISSEIX, D., LADEVÈZE, P. & SCHREFLER, B. A. (2003b).** A LATIN computational strategy for multiphysics problems : Application to poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(10), 1489-1510. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.622> (cf. p. 5, 6, 32, 33, 39, 40, 51, 69, 72, 78, 79, 88)
- DUREISSEIX, D., NÉRON, D., LADEVÈZE, P. & SCHREFLER, B. A. (2004).** A computational strategy for multiphysics problems involving nonlinear aspects In *ECCOMAS 2004 - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Jyväskylä, Finland. 1-17. (Cf. p. 34, 35).
- ERBTS, P. & DÜSTER, A. (2012).** Accelerated staggered coupling schemes for problems of thermoelasticity at finite strains. *Computers and Mathematics with Applications*, 64(8), 2408-2430. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.05.010> (cf. p. 31, 32)
- ERBTS, P., HARTMANN, S. & DÜSTER, A. (2014).** A partitioned solution approach for electro-thermo-mechanical problems. *Archive of Applied Mechanics*. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0941-z> (cf. p. 31)
- FARHAT, C., GRIMBERG, S., MANZONI, A. & QUARTERONI, A. (2021).** 5. Computational bottlenecks for PROMs : precomputation and hyperreduction. In P. BENNER, S. GRIVET-TALOCIA, A. QUARTERONI, G. ROZZA, W. SCHILDERS & L. M. SILVEIRA (Éd.), *Volume 2 Snapshot-Based Methods and Algorithms* (p. 181-244). De Gruyter. DOI : <https://doi.org/doi:10.1515/9783110671490-005>. (Cf. p. 17)
- FARHAT, C., PARK, K. C. & DUBOIS-PELERIN, Y. (1991).** An unconditionally stable staggered algorithm for transient finite element analysis of coupled thermoelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 85(3), 349-365. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90102-C](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90102-C) (cf. p. 29, 60)

- FELIPPA, C., PARK, K. C. & DERUNTZ, J. (1977). Stabilization of staggered solution procedures for fluid–structure interaction analysis. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD*, 26 (cf. p. 28).
- FELIPPA, C. A. & GEERS, T. L. (1988). Partitioned analysis for coupled mechanical systems. *Engineering Computations*, 5(2), 123-133. DOI : <https://doi.org/10.1108/eb023730> (cf. p. 28)
- FELIPPA, C. A., PARK, K. & FARHAT, C. (2001). Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25), 3247-3270. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00391-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00391-1) (cf. p. 5, 28)
- FERRONATO, M., FRANCESCHINI, A., JANNA, C., CASTELLETTO, N. & TCHELEPI, H. A. (2019). A general preconditioning framework for coupled multiphysics problems with application to contact- and poro-mechanics. *Journal of Computational Physics*, 398, 108887. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108887> (cf. p. 27)
- FLOREZ, H. & GILDIN, E. (2020). Global/local model order reduction in coupled flow and linear thermal-poroelasticity. *Computational Geosciences*, 24(2), 709-735. DOI : <https://doi.org/10.1007/s10596-019-09834-7> (cf. p. 37)
- FORRESTER, A., SOBESTER, A. & KEANE, A. (2008). *Engineering Design Via Surrogate Modeling : A Practical Guide*. DOI : <https://doi.org/10.1002/9780470770801>. (Cf. p. 11)
- FORRESTER, A. I., BRESSLOFF, N. W. & KEANE, A. J. (2006). Optimization using surrogate models and partially converged computational fluid dynamics simulations. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2071), 2177-2204. DOI : <https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1679> (cf. p. 12)
- FOULATIER, É. (2024). *Sur une stratégie de couplage modulaire pour le calcul hautes performances de problèmes multiphysiques* (mém. de mast.). École Normale Supérieure Paris-Saclay. (Cf. p. 89).
- GANDER, M. J. & JAPHET, C. (2009). An Algorithm for Non-Matching Grid Projections with Linear Complexity In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII* (M. BERCOVIER, M. J. GANDER, R. KORNUBER & O. WIDLUND, Éd.). Springer Berlin Heidelberg. 185-192. (Cf. p. 121).
- GASPAR, F., LISBONA, F., OOSTERLEE, C. & WIENANDS, R. (2004). Systematic comparison of coupled and distributive smoothing in multigrid for the poroelasticity system. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 11, 93-113. DOI : <https://doi.org/10.1002/nla.372> (cf. p. 27)
- GASPAR, F. J. & RODRIGO, C. (2017). On the fixed-stress split scheme as smoother in multigrid methods for coupling flow and geomechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 326, 526-540. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.025> (cf. p. 27)

- GEERTSMA, J. (1957).** A remark on the analogy between thermoelasticity and the elasticity of saturated porous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(1), 13-16. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(57\)90042-X](https://doi.org/10.1016/0022-5096(57)90042-X) (cf. p. 51)
- GEUZAIN, C. & REMACLE, J.-F. (2009).** Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11), 1309-1331. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2579> (cf. p. 58, 83, 92)
- GHNATIOS, C., MASSON, E., HUERTA, A., LEYGUE, A., CUETO, E. & CHINESTA, F. (2012).** Proper Generalized Decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216, 29-41. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.11.018> (cf. p. 10, 22)
- GRÄSSLE, C., HINZE, M. & VOLKWEIN, S. (2021).** 2. Model order reduction by proper orthogonal decomposition. In P. BENNER, S. GRIVET-TALOCIA, A. QUARTERONI, G. ROZZA, W. SCHILDERS & L. M. SILVEIRA (Éd.), *Volume 2 Snapshot-Based Methods and Algorithms* (p. 47-96). De Gruyter. DOI : <https://doi.org/doi:10.1515/9783110671490-002>. (Cf. p. 15, 16)
- GREPL, M. A. & PATERA, A. T. (2005).** A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(1), 157-181. DOI : <https://doi.org/10.1051/m2an:2005006> (cf. p. 18)
- HAO, P., SPRONK, S., VAN PAEPEGEM, W. & GILABERT, F. (2022).** Hydraulic-based testing and material modelling to investigate uniaxial compression of thermoset and thermoplastic polymers in quasistatic-to-dynamic regime. *Materials & Design*, 224, 111367. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.111367> (cf. p. 42)
- HARDY, R. L. (1971).** Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 76(8), 1905-1915. DOI : <https://doi.org/10.1029/JB076i008p01905> (cf. p. 12)
- HENNERON, T. & CLENET, S. (2017).** Application of the Proper Generalized Decomposition to Solve MagnetoElectric Problem. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1-4. DOI : <https://doi.org/10.1109/TMAG.2017.2762702> (cf. p. 38)
- HETNARSKI, R. B. & ESLAMI, M. R. (2009).** *Thermal Stresses—Advanced Theory and Applications*. Springer International Publishing. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-030-10436-8>. (Cf. p. 43, 45)
- HEYBERGER, C., BOUCARD, P. -. & NÉRON, D. (2013).** A rational strategy for the resolution of parametrized problems in the PGD framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 259, 40-49. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.03.002> (cf. p. 6, 102)
- HEYBERGER, C. (2014).** *PGD espace-temps adaptée pour le traitement de problèmes paramétrés* (thèse de doct.). École Normale Supérieure de Cachan. (Cf. p. 23, 102).

- HEYBERGER, C., BOUCARD, P.-A. & NÉRON, D. (2012).** Multiparametric analysis within the proper generalized decomposition framework. *Computational Mechanics*, 49(3), 277-289. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00466-011-0646-x> (cf. p. 23, 79, 101, 102)
- HILLMAN, M. & LIN, K.-C. (2021).** Nodally integrated thermomechanical RKPM : Part I–Thermoelasticity. *Computational Mechanics*, 68(4), 795-820. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00466-021-02047-9> (cf. p. 60)
- HOANG, K. C., KIM, T.-Y. & SONG, J.-H. (2018).** Fast and accurate two-field reduced basis approximation for parametrized thermoelasticity problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 141, 96-118. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2017.12.004> (cf. p. 37)
- HOWLE, V. E., KIRBY, R. C. & DILLON, G. (2013).** Block Preconditioners for Coupled Physics Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(5), S368-S385. DOI : <https://doi.org/10.1137/120883086> (cf. p. 27)
- IBRAHIMBEGOVIC, A. (2009).** Thermodynamics and solution methods for coupled problems. In *Nonlinear Solid Mechanics* (p. 427-474). Springer Netherlands. DOI : https://doi.org/10.1007/978-90-481-2331-5_7. (Cf. p. 46, 48, 55)
- JANON, A., NODET, M. & PRIEUR, C. (2015).** Goal-Oriented Error Estimation for the Reduced Basis Method, with Application to Sensitivity Analysis. *Journal of Scientific Computing*, 68(1), 21-41. DOI : <https://doi.org/10.1007/s10915-015-0127-z> (cf. p. 19)
- JOLLIFFE, I. (2011).** Principal Component Analysis. In M. LOVRIC (Éd.), *International Encyclopedia of Statistical Science* (p. 1094-1096). Springer Berlin Heidelberg. DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-642-04898-2_455. (Cf. p. 15)
- KARHUNEN, K. (1947).** Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae : Series A1 Mathematica and Physica*, 37, 3-79 (cf. p. 15).
- KARIMI, A., NAVIDBAKHS, M., SHOJAEI, A. & FAGHIHI, S. (2013).** Measurement of the uniaxial mechanical properties of healthy and atherosclerotic human coronary arteries. *Materials Science and Engineering : C*, 33(5), 2550-2554. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.msec.2013.02.016> (cf. p. 2, 3)
- KIM, J., TCHELEPI, H. A. & JUANES, R. (2011a).** Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics : Fixed-stress and fixed-strain splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(13), 1591-1606. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.12.022> (cf. p. 28)
- KIM, J., TCHELEPI, H. & JUANES, R. (2011b).** Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics : Drained and undrained splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(23), 2094-2116. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.02.011> (cf. p. 28)
- KIM, J. (2018).** Unconditionally stable sequential schemes for all-way coupled thermoporo-mechanics : Undrained-adiabatic and extended fixed-stress splits. *Computer Methods*

- in *Applied Mechanics and Engineering*, 341, 93-112. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.06.030> (cf. p. 28, 30)
- KIM, Y., CHO, H., PARK, S., KIM, H. & SHIN, S. (2018)**. Advanced Structural Analysis Based on Reduced-Order Modeling for Gas Turbine Blade. *AIAA Journal*, 56(8), 3369-3373. DOI : <https://doi.org/10.2514/1.J057063> (cf. p. 92)
- KOLESOV, A., VABISHCHEVICH, P. & VASILYEVA, M. (2014)**. Splitting schemes for poroelasticity and thermoelasticity problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(12), 2185-2198. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2014.02.005> (cf. p. 29, 55)
- KOLMOGOROFF, A. (1936)**. Über Die Beste Annäherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse. *Annals of Mathematics*, 37(1), 107-110 (cf. p. 14).
- KRAMER, B. (2016)**. Model reduction for control of a multiphysics system : Coupled Burgers' equation In *2016 American Control Conference (ACC)*. 6146-6151. DOI : <https://doi.org/10.1109/ACC.2016.7526635>. (Cf. p. 36)
- KRIGE, D. G. (1951)**. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersand. *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, 52(6), 119-139 (cf. p. 12).
- KRIMM, A., CASPER, T., SCHÖPS, S., DE GERSEM, H. & CHAMOIN, L. (2019)**. Proper Generalized Decomposition of Parameterized Electrothermal Problems Discretized by the Finite Integration Technique. *IEEE Transactions on Magnetics*, 55(6), 1-4. DOI : <https://doi.org/10.1109/TMAG.2019.2907223> (cf. p. 38)
- KUHL, D., RICCIUS, J. & HAIDN, O. J. (2002)**. Thermomechanical Analysis and Optimization of Cryogenic Liquid Rocket Engines. *Journal of Propulsion and Power*, 18(4), 835-846. DOI : <https://doi.org/10.2514/2.6007> (cf. p. 1)
- KUMAR, R. & EZHILARASI, D. (2023)**. A state-of-the-art survey of model order reduction techniques for large-scale coupled dynamical systems. *International Journal of Dynamics and Control*, 11(2), 900-916. DOI : <https://doi.org/10.1007/s40435-022-00985-7> (cf. p. 35)
- LADEVÈZE, P. (1985)**. Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*, 300(2), 41-44 (cf. p. 19, 20, 23, 68).
- LADEVÈZE, P., PASSIEUX, J.-C. & NÉRON, D. (2010)**. The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21), 1287-1296. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.06.023> (cf. p. 68)
- LADEVÈZE, P. (1999)**. *Nonlinear Computational Structural Mechanics New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation* (1st ed. 1999..). Springer New York. (Cf. p. 5, 23, 32, 71, 77, 78, 84).
- LADEVÈZE, P. & CHAMOIN, L. (2011)**. On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics*

and Engineering, 200(23), 2032-2047. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.02.019> (cf. p. 21)

- LARION, Y., CHEN, G., ZLOTNIK, S., DÍEZ, P., SEETHARAM, S. & MASSART, T. J. (2022).** Using Reduced Basis Approximation for Efficient Surrogate-Based Inverse Identification of Thermo-Hydro-Mechanical Parameters from an In Situ Heating Test. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 55(9), 5739-5757. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00603-022-02925-5> (cf. p. 10, 37)
- LARION, Y., ZLOTNIK, S., MASSART, T. J. & DÍEZ, P. (2020).** Building a certified reduced basis for coupled thermo-hydro-mechanical systems with goal-oriented error estimation. *Computational Mechanics*, 66(3), 559-573. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00466-020-01865-7> (cf. p. 5, 19, 37, 55)
- LEE, J. J., MARDAL, K.-A. & WINTHER, R. (2017).** Parameter-Robust Discretization and Preconditioning of Biot's Consolidation Model. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39(1), A1-A24. DOI : <https://doi.org/10.1137/15M1029473> (cf. p. 27)
- LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.-L., BENALLAL, A. & DESMORAT, R. (2009).** Mécanique des matériaux solides - 3ème édition. Dunod. (Cf. p. 44, 46, 48).
- LEWIS, R. & SCHREFLER, B. (1998).** *The Finite Element Method in the static and dynamic deformation and consolidation in porous media* (T. 34). (Cf. p. 51, 55).
- LIANG, Y., LEE, H., LIM, S., LIN, W., LEE, K. & WU, C. (2002).** Proper Orthogonal Decomposition and its applications – Part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3), 527-544. DOI : <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4041> (cf. p. 15)
- LOÈVE, M. (1955).** *Probability Theory : Foundations, Random Sequences*. Van Nostrand. (Cf. p. 15).
- LU, K., JIN, Y., CHEN, Y., YANG, Y., HOU, L., ZHANG, Z., LI, Z. & FU, C. (2019).** Review for order reduction based on proper orthogonal decomposition and outlooks of applications in mechanical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 123, 264-297. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.01.018> (cf. p. 15)
- LU, Y., BLAL, N. & GRAVOUIL, A. (2018).** Space–time POD based computational vademecums for parametric studies : application to thermo-mechanical problems. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 5(1), 3. DOI : <https://doi.org/10.1186/s40323-018-0095-6> (cf. p. 10)
- LUMLEY, J. L. (1967).** The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation* (cf. p. 15).
- LUO, P., RODRIGO, C., GASPAR, F. J. & OOSTERLEE, C. W. (2017).** On an Uzawa smoother in multigrid for poroelasticity equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 24(1), e2074. DOI : <https://doi.org/10.1002/nla.2074> (cf. p. 27)

- LUO, P., RODRIGO, C., GASPAR, F. & OOSTERLEE, C. (2015).** Multigrid method for nonlinear poroelasticity equations. *Computing and Visualization in Science*, 17. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00791-016-0260-8> (cf. p. 27)
- MADAY, Y. & RØNQUIST, E. M. (2002).** A reduced-basis element method. *Comptes Rendus. Mathématique*, 335(2), 195-200. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1631-073X\(02\)02427-5](https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)02427-5) (cf. p. 4, 17)
- MALLEVAL, P.-E., SCANFF, R. & NÉRON, D. (2023).** On a non-intrusive version of the LATIN-PGD method for non-linear transient thermal problems. *ECCOMAS*. (Cf. p. 68, 121).
- MARCHAND, B., CHAMOIN, L. & REY, C. (2016).** Real-time updating of structural mechanics models using Kalman filtering, modified constitutive relation error, and proper generalized decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107(9), 786-810. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.5197> (cf. p. 10)
- MARENIĆ, E., SEYCHAL, G. & PASSIEUX, J.-C. (2022).** Data driven approach in multiphysics framework : Application to coupled electro-mechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 395, 114959. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114959> (cf. p. 121)
- MARTINI, I., ROZZA, G. & HAASDONK, B. (2015).** Reduced basis approximation and a-posteriori error estimation for the coupled Stokes-Darcy system. *Advances in Computational Mathematics*, 41(5), 1131-1157. DOI : <https://doi.org/10.1007/s10444-014-9396-6> (cf. p. 37)
- MARTINS, J. M. P., NETO, D. M., ALVES, J. L., OLIVEIRA, M. C., LAURENT, H., ANDRADE-CAMPOS, A. & MENEZES, L. F. (2017).** A new staggered algorithm for thermomechanical coupled problems. *International Journal of Solids and Structures*, 122-123, 42-58. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.06.002> (cf. p. 24, 32)
- MATRAY, V., AMLANI, F., FEYEL, F. & NÉRON, D. (2024).** A hybrid numerical methodology coupling reduced order modeling and Graph Neural Networks for non-parametric geometries : Applications to structural dynamics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 430, 117243. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117243> (cf. p. 19)
- MCCOID, C. & GANDER, M. J. (2022).** A Provably Robust Algorithm for Triangle-triangle Intersections in Floating-point Arithmetic. *ACM Trans. Math. Softw.*, 48(2). DOI : <https://doi.org/10.1145/3513264> (cf. p. 121)
- MCCULLOCH, W. S. & PITTS, W. (1943).** A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5(4), 115-133. DOI : <https://doi.org/10.1007/bf02478259> (cf. p. 12)
- MCKAY, M., BECKMAN, R. & CONOVER, W. (1979).** A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output From a Computer Code. *Technometrics*, 21(2), 239-245. DOI : <https://doi.org/10.1080/00401706.1979.10489755> (cf. p. 12)

- MEHL, M., UEKERMANN, B., BIJL, H., BLOM, D., GATZHAMMER, B. & VAN ZUIJLEN, A. (2016). Parallel coupling numerics for partitioned fluid–structure interaction simulations. *Computers & Mathematics with Applications*, 71(4), 869-891. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.12.025> (cf. p. 31)
- MININGER, X., TALLEB, H. & HENNERON, T. (2016). On the Numerical Modeling of Magneto-electric device. *International Compumag society Newsletters*, 23(3), 1026 (cf. p. 38).
- MYERS, R., MONTGOMERY, D. & ANDERSON-COOK, C. (2016). *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley. (Cf. p. 12).
- NACHAR, S., BOUCARD, P.-A., NÉRON, D. & NACKENHORST, A., U. and Fau. (2020a). Multi-fidelity Metamodels Nourished by Reduced Order Models. In O. WRIGGERS Peter and Allix & C. WEISSENFELS (Éd.), *Virtual Design and Validation* (p. 61-79). Springer International Publishing. DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-030-38156-1_4. (Cf. p. 12, 78)
- NACHAR, S. (2019). *Optimisation de structures viscoplastiques par couplage entre métamodèle multi-fidélité et modèles réduits* (thèse de doct.). Université Paris Saclay (COMUE). (Cf. p. 57, 80, 123).
- NACHAR, S., BOUCARD, P.-A., NÉRON, D. & REY, C. (2020b). Multi-fidelity bayesian optimization using model-order reduction for viscoplastic structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 176, 103400. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2020.103400> (cf. p. 10)
- NADAL, E., CHINESTA, F., DÍEZ, P., FUENMAYOR, F. & DENIA, F. (2015). Real time parameter identification and solution reconstruction from experimental data using the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 296, 113-128. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.020> (cf. p. 10, 22)
- NASIKA, C., DÍEZ, P., GERARD, P., MASSART, T. J. & ZLOTNIK, S. (2022). Towards real time assessment of earthfill dams via Model Order Reduction. *Finite Elements in Analysis and Design*, 199, 103666. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2021.103666> (cf. p. 37)
- NASIKA, C., DÍEZ, P., GERARD, P., MASSART, T. J. & ZLOTNIK, S. (2023). Discrete empirical interpolation for hyper-reduction of hydro-mechanical problems in groundwater flow through soil. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 47(5), 667-693. DOI : <https://doi.org/10.1002/nag.3487> (cf. p. 24, 37)
- NÉRON, D. & DUREISSEIX, D. (2008a). A computational strategy for poroelastic problems with a time interface between coupled physics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(6), 783-804. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2091> (cf. p. 33, 34, 84, 88, 89)
- NÉRON, D. & DUREISSEIX, D. (2008b). A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time-space interface coupling. *International Journal for Numerical*

- Methods in Engineering*, 75(9), 1053-1084. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.2283> (cf. p. 5, 33-35, 39, 78)
- NÉRON, D., BOUCARD, P.-A. & RELUN, N. (2015).** Time-space PGD for the rapid solution of 3D nonlinear parametrized problems in the many-query context. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103(4), 275-292. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.4893> (cf. p. 5, 23, 101, 102, 121)
- NÉRON, D. & LADEVÈZE, P. (2010).** Proper Generalized Decomposition for Multiscale and Multiphysics Problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4), 351-372. DOI : <https://doi.org/10.1007/s11831-010-9053-2> (cf. p. 39)
- NORRIS, A. (1992).** On the correspondence between poroelasticity and thermoelasticity. *Journal of Applied Physics*, 71(3), 1138-1141. DOI : <https://doi.org/10.1063/1.351278> (cf. p. 51)
- NOUY, A. (2010).** A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24), 1603-1626. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.01.009> (cf. p. 20, 21)
- NOVASCONE, S. R., SPENCER, B. W., HALES, J. & WILLIAMSON, R. L. (2015).** Evaluation of coupling approaches for thermomechanical simulations. *Nuclear Engineering and Design*, 295, 910. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2015.07.005> (cf. p. 26, 32, 92)
- NOWACKI, W. & SNEDDON, I. N. (Éd.). (1977).** *Thermomechanics in solids*. Springer Vienna. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-4354-4>. (Cf. p. 42, 43, 46)
- OHM, P., WIESNER, T. A., CYR, E. C., HU, J. J., SHADID, J. N. & TUMINARO, R. S. (2022).** A monolithic algebraic multigrid framework for multiphysics applications with examples from resistive MHD. *ETNA - Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 55, 365-390. DOI : https://doi.org/10.1553/etna_vol55s365 (cf. p. 27)
- ORDONEZ, A. C., TARDIEU, N., KRUSE, C., RUIZ, D. & GRANET, S. (2023).** Scalable block preconditioners for saturated thermo-hydro-mechanics problems. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 10(1), 10. DOI : <https://doi.org/10.1186/s40323-023-00245-z> (cf. p. 26, 27)
- OUMAZIZ, P., GOSSELET, P., BOUCARD, P.-A. & GUINARD, S. (2019).** A parallel non-invasive mixed domain decomposition - Implementation and applications to mechanical assemblies. *Finite Elements in Analysis and Design*, 156, 24-33. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2019.01.004> (cf. p. 68)
- PARKUS, H. (1976).** *Thermoelasticity*. Springer-Verlag. DOI : <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-8447-9>. (Cf. p. 42)

- PEARSON, K. (1901)**. LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(11), 559-572. DOI : <https://doi.org/10.1080/14786440109462720> (cf. p. 15)
- POWELL, M. J. D. (1981)**. *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press. (Cf. p. 12).
- PRATHAP, G. & NAGANARAYANA, B. (1995)**. Consistent thermal stress evaluation in finite elements. *Computers & Structures*, 54(3), 415-426. DOI : [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)00338-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00338-4) (cf. p. 55)
- PRUD'HOMME, C., ROVAS, D. V., VEROY, K., MACHIELS, L., MADAY, Y., PATERA, A. T. & TURINICI, G. (2001)**. Reliable Real-Time Solution of Parametrized Partial Differential Equations : Reduced-Basis Output Bound Methods. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1), 70-80. DOI : <https://doi.org/10.1115/1.1448332> (cf. p. 18)
- PRULIÈRE, E., CHINESTA, F. & AMMAR, A. (2010a)**. On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the Proper Generalized Decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4), 791-810. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2010.07.015> (cf. p. 5, 21)
- PRULIÈRE, E., FÉREC, J., CHINESTA, F. & AMMAR, A. (2010b)**. An efficient reduced simulation of residual stresses in composite forming processes. *International Journal of Material Forming*, 3(S2), 1339-1350. DOI : <https://doi.org/10.1007/s12289-009-0675-6> (cf. p. 38)
- QIN, Z., TALLEB, H. & REN, Z. (2016a)**. A Proper Generalized Decomposition-Based Solver for Nonlinear Magneto-thermal Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(2), 1-9. DOI : <https://doi.org/10.1109/TMAG.2015.2492462> (cf. p. 38, 39)
- QIN, Z., TALLEB, H., YAN, S., XU, X. & REN, Z. (2016b)**. Application of PGD on Parametric Modeling of a Piezoelectric Energy Harvester. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(11), 1-11. DOI : <https://doi.org/10.1109/TMAG.2016.2591001> (cf. p. 5, 21, 24, 38)
- QUARTERONI, A., LASSILA, T., ROSSI, S. & RUIZ-BAIER, R. (2017)**. Integrated Heart—Coupling multiscale and multiphysics models for the simulation of the cardiac function. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 314, 345-407. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.05.031> (cf. p. 1)
- QUESADA, C., VILLON, P. & SALSAC, A.-V. (2021)**. Real-time prediction of the deformation of microcapsules using Proper Orthogonal Decomposition. *Journal of Fluids and Structures*, 101, 103193. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103193> (cf. p. 17)
- REIS, T. & STYKEL, T. (2008)**. A Survey on Model Reduction of Coupled Systems. In W. H. A. SCHILDERS, H. A. van der VORST & J. ROMMES (Éd.), *Model Order Reduction : Theory, Research Aspects and Applications* (p. 133-155). Springer Berlin Heidelberg. DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-540-78841-6_7. (Cf. p. 35)

- RODRIGO, C., GASPAR, F. J., ADLER, J., HU, X., OHM, P. & ZIKATANOV, L. (2024).** Parameter-robust preconditioners for Biot's model. *SeMA Journal*, 81(1), 51-80. DOI : <https://doi.org/10.1007/s40324-023-00336-2> (cf. p. 27)
- ROSENBLATT, F. (1958).** The perceptron : A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, 65(6), 386-408. DOI : <https://doi.org/10.1037/h0042519> (cf. p. 12)
- ROYER, C. (1990).** *Une Approche des problèmes de dynamique non-linéaires par la méthode à grand incrément de temps* (thèse de doct.). Paris 6. (Cf. p. 68).
- ROZZA, G., HUYNH, D. B. P. & PATERA, A. T. (2007).** Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 15(3), 1-47. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF03024948> (cf. p. 17)
- RUBIO, P.-B., CHAMOIN, L. & LOUF, F. (2019).** Real-time Bayesian data assimilation with data selection, correction of model bias, and on-the-fly uncertainty propagation. *Comptes Rendus Mécanique*, 347(11), 762-779. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.11.004> (cf. p. 10)
- RUDA, A., LOUF, F., BOUCARD, P.-A. & MININGER, X. (2022).** First Approach on a Mixed Domain Decomposition Method for 2-D Magnetostatic Simulation of Electrical Machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 58(12), 1-8. DOI : <https://doi.org/10.1109/TMAG.2022.3213190> (cf. p. 68)
- RUDA, A. (2023).** *Méthode de décomposition de domaine mixte pour la simulation magnéto-statique de machines électriques* (thèse de doct.). Université Paris-Saclay. (Cf. p. 57, 59).
- RYCKELYNCK, D. (2005).** A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1), 346-366. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.07.015> (cf. p. 17)
- SAAD, Y. & SCHULTZ, M. H. (1986).** GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3), 856-869. DOI : <https://doi.org/10.1137/0907058> (cf. p. 27, 96)
- SAAD, Y. (2003).** *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. DOI : <https://doi.org/10.1137/1.9780898718003.ch4>. (Cf. p. 27)
- SACKS, J., WELCH, W. J., MITCHELL, T. J. & WYNN, H. P. (1989).** Design and Analysis of Computer Experiments. *Statistical Science*, 4(4), 409-423. DOI : <https://doi.org/10.1214/ss/1177012413> (cf. p. 12)
- SALENÇON, J. (2007).** *Mécanique des milieux continus : Thermoélasticité*. les Éditions de l'École polytechnique. (Cf. p. 46).
- SCANFF, R., NACHAR, S., BOUCARD, P. -. & NÉRON, D. (2021).** A Study on the LATIN-PGD Method : Analysis of Some Variants in the Light of the Latest Developments. *Archives*

- of Computational Methods in Engineering*, 28(5), 3457-3473. DOI : <https://doi.org/10.1007/s11831-020-09514-1> (cf. p. 68, 78)
- SCANFF, R. (2022).** *Une vision faiblement intrusive de la méthode LATIN-PGD en non-linéaire* (thèse de doct.). Université Paris-Saclay. (Cf. p. 57, 79).
- SCANFF, R., NÉRON, D., LADEVÈZE, P., BARABINOT, P., CUGNON, F. & DELSEMME, J.-P. (2022).** Weakly-invasive LATIN-PGD for solving time-dependent non-linear parametrized problems in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 396, 114999. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114999> (cf. p. 6, 23, 68, 100, 102, 121)
- SCHULER, L. (2023).** *Réduction et recalage de modèles d'un module de puissance : vers un jumeau numérique probabiliste pour la prédiction de durée de vie restante* (thèse de doct.). Université Paris-Saclay. (Cf. p. 4, 121).
- SCHULER, L., CHAMOIN, L., KHATIR, Z., BERKANI, M., OUHAB, M. & DEGRENNE, N. (2022a).** Iterative PGD model reduction for the strongly-coupled thermomechanical analysis of crack propagation in power electronic modules. *Computational Mechanics*, 70(2), 407-424. DOI : <https://doi.org/10.1007/s00466-022-02173-y> (cf. p. 38, 39)
- SCHULER, L., CHAMOIN, L., KHATIR, Z., BERKANI, M., OUHAB, M. & DEGRENNE, N. (2022b).** A Reduced Model Based on Proper Generalized Decomposition for the Fast Analysis of IGBT Power Modules Lifetime. *Journal of Electronic Packaging*, 144(031013). DOI : <https://doi.org/10.1115/1.4053767> (cf. p. 38)
- SEO, J., SCHIAVAZZI, D. E., KAHN, A. M. & MARSDEN, A. L. (2020).** The effects of clinically-derived parametric data uncertainty in patient-specific coronary simulations with deformable walls. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 36(8). DOI : <https://doi.org/10.1002/cnm.3351> (cf. p. 3)
- SHAH, N. V., GIRFOGLIO, M., QUINTELA, P., ROZZA, G., LENGOMIN, A., BALLARIN, F. & BARRAL, P. (2022).** Finite element based Model Order Reduction for parametrized one-way coupled steady state linear thermo-mechanical problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 212, 103837. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2022.103837> (cf. p. 16)
- SHU, W. & STANCIULESCU, I. (2019).** Monolithic and Staggered Strategies Using Solid-Shell Formulations for Nonlinear Coupled Thermoelasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, 145(12), 04019095. DOI : [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001669](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001669) (cf. p. 61, 62)
- STEWART, G. W. (1993).** On the Early History of the Singular Value Decomposition. *SIAM Review*, 35(4), 551-566. DOI : <https://doi.org/10.1137/1035134> (cf. p. 15)
- TANAKA, M., MATSUMOTO, T. & MORADI, M. (1995).** Application of boundary element method to 3-D problems of coupled thermoelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 16(4), 297-303. DOI : [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(95\)00074-7](https://doi.org/10.1016/0955-7997(95)00074-7) (cf. p. 25, 60-62)

- TEIXEIRA, R., NOGAL, M. & O'CONNOR, A. (2021).** Adaptive approaches in metamodel-based reliability analysis : A review. *Structural Safety*, 89, 102019. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2020.102019> (cf. p. 12)
- VABISHCHEVICH, P. N., VASIL'EVA, M. V. & KOLESOV, A. E. (2014).** Splitting scheme for poroelasticity and thermoelasticity problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 54(8), 1305-1315. DOI : <https://doi.org/10.1134/S0965542514080132> (cf. p. 29, 55)
- VERDUGO, F. & WALL, W. A. (2016).** Unified computational framework for the efficient solution of n-field coupled problems with monolithic schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 310, 335-366. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.07.016> (cf. p. 25, 27, 61)
- VERGARI, L., CAMMI, A. & LORENZI, S. (2020).** Reduced order modeling approach for parametrized thermal-hydraulics problems : inclusion of the energy equation in the POD-FV-ROM method. *Progress in Nuclear Energy*, 118, 103071. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2019.103071> (cf. p. 37)
- VERGARI, L., CAMMI, A. & LORENZI, S. (2021).** Reduced order modeling for coupled thermal-hydraulics and reactor physics problems. *Progress in Nuclear Energy*, 140, 103899. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2021.103899> (cf. p. 37)
- VILA-CHÁ, J. L. P., COUTO CARNEIRO, A. M., FERREIRA, B. P. & ANDRADE PIRES, F. M. (2023).** A numerical assessment of partitioned implicit methods for thermomechanical problems. *Computers & Structures*, 277-278, 106969. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2022.106969> (cf. p. 24, 27, 32)
- VITSE, M., NÉRON, D. & BOUCARD, P.-A. (2019).** Dealing with a nonlinear material behavior and its variability through PGD models : Application to reinforced concrete structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 153, 22-37. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2018.05.006> (cf. p. 10, 22)
- VITSE, M. (2016).** *Model-order reduction for the parametric analysis of damage in reinforced concrete structures* (thèse de doct.). Université Paris Saclay (COMUE). (Cf. p. 57).
- WANG, Y., YU, B., CAO, Z., ZOU, W. & YU, G. (2012).** A comparative study of POD interpolation and POD projection methods for fast and accurate prediction of heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(17), 4827-4836. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.04.053> (cf. p. 16)
- WATHEN, M. & GREIF, C. (2020).** A Scalable Approximate Inverse Block Preconditioner for an Incompressible Magnetohydrodynamics Model Problem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 42(1), B57-B79. DOI : <https://doi.org/10.1137/19M1255409> (cf. p. 27)
- WHITE, J. A., CASTELLETTO, N. & TCHELEPI, H. A. (2016).** Block-partitioned solvers for coupled poromechanics : A unified framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 303, 55-74. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.01.008> (cf. p. 24, 27)

- WU, C., LIANG, Y., LIN, W., LEE, H. & LIM, S. (2003). A note on equivalence of proper orthogonal decomposition methods. *Journal of Sound and Vibration*, 265(5), 1103-1110. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00032-4](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00032-4) (cf. p. 15)
- WURTZER, F., BOUCARD, P.-A., LADEVÈZE, P. & NÉRON, D. (2022). Première approche d'une stratégie de partitionnement multimodèle pour la simulation de problèmes multiphysiques. In *Congrès Français de Mécanique 2022 - CFM 2022*. Nantes, France. (Cf. p. 103, 120).
- WURTZER, F., BOUCARD, P.-A., LADEVÈZE, P. & NÉRON, D. (2024a). Une approche modulaire basée sur la PGD pour la résolution de problèmes multiphysiques fortement couplés. In *16ème Colloque National en Calcul des Structures*. Giens, France. (Cf. p. 103, 120).
- WURTZER, F. & CHERRIÈRE, T. (2024). *fwurtzer/Benchmark_Danilovskaia (répertoire GitHub)* (Version v1.0). Zenodo. DOI : <https://doi.org/10.5281/zenodo.13370352>. (Cf. p. 63, 65)
- WURTZER, F., NÉRON, D. & BOUCARD, P.-A. (2024b). A modular model-order reduction approach for the solution of parametrized strongly-coupled thermo-mechanical problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 239, 104207. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.finel.2024.104207> (cf. p. 67, 99, 120)
- XICHENG, W. & SCHREFLER, B. (2003). Fully coupled thermo-hydro-mechanics analysis by an algebraic multigrid method. *Engineering Computations*, 20, 211-229. DOI : <https://doi.org/10.1108/02644400310465326> (cf. p. 27)
- ZHANG, J., JACKSON, T., FADY, N. & BUCKMASTER, J. (2009). Multi-physics Numerical Simulation of Erosion in Rocket Nozzle In *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. DOI : <https://doi.org/10.2514/6.2009-833>. (Cf. p. 2)
- ZHANG, Y., FENG, L., LI, S. & BENNER, P. (2015). An Efficient Output Error Estimation for Model Order Reduction of Parametrized Evolution Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(6), B910-B936. DOI : <https://doi.org/10.1137/140998603> (cf. p. 18)
- ZIENKIEWICZ, O., TAYLOR, R. & FOX, D. (2013). *The Finite Element Method for solid and structural mechanics : seventh edition*. Elsevier. DOI : <https://doi.org/10.1016/c2009-0-26332-x>. (Cf. p. 54)
- ZIMMERMAN, R. W. (2000). Coupling in poroelasticity and thermoelasticity. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 37(1), 79-87. DOI : [https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(99\)00094-5](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(99)00094-5) (cf. p. 52, 84, 91)
- ZLOTNIK, S., DÍEZ, P., MODESTO, D. & HUERTA, A. (2015). Proper generalized decomposition of a geometrically parametrized heat problem with geophysical applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 103(10), 737-758. DOI : <https://doi.org/10.1002/nme.4909> (cf. p. 22)