



**HAL**  
open science

## Sur quelques questions à propos de la production praxéologique

Jean-Pierre Bourgade

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Bourgade. Sur quelques questions à propos de la production praxéologique. Mathématiques [math]. Université de Toulouse (Paul Sabatier), 2025. <tel-05009166v2>

**HAL Id: tel-05009166**

**<https://theses.hal.science/tel-05009166v2>**

Submitted on 4 Apr 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



UNIVERSITÉ TOULOUSE 3  
PAUL SABATIER

# MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention d'une

## **HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES**

spécialité « Didactique des mathématiques »

par

**Jean-Pierre BOURGADE**

Laboratoire Éducation, Formation, Travail, Savoirs

Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation  
Toulouse Occitanie-Pyrénées

## Sur quelques questions à propos de la production praxéologique

Habilitation à diriger les recherches soutenue le 11 mars 2025 devant le jury composé de :

Francis Filbet	Professeur – Université Toulouse III	(Président)
Marianna Bosch	Professeure – Universitat de Barcelona	(Rapporteure)
Ghislaine Gueudet	Professeure – Université Paris-Saclay	(Rapporteure)
Carl Winsløw	Professeur – Copenhagen University	(Rapporteur)
Hamid Chaachoua	Professeur – Université Grenoble-Alpes	(Garant)



# Table des matières

<b>REMERCIEMENTS.....</b>	<b>6</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>8</b>
<b>GENESE PRAXEOLOGIQUE : GENERALITES .....</b>	<b>11</b>
OBJETS, PERSONNES, INSTITUTIONS ET POSITIONS ; RAPPORTS .....	11
DESCRIPTION DES RAPPORTS : PRAXEOLOGIES .....	14
DIFFICULTES, QUESTIONS, SYSTEMES DIDACTIQUES .....	16
ÉTUDE : MOMENTS DIDACTIQUES .....	18
DIALECTIQUE DES MEDIAS ET DES MILIEUX.....	20
APPRENDRE : UNE APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE DE LA COGNITION .....	22
<i>Noyau cognitif et apprentissage .....</i>	<i>22</i>
<i>Situation possiblement didactique.....</i>	<i>23</i>
<i>Praxéologies possiblement didactiques, équipement possiblement didactique.....</i>	<i>24</i>
<b>INFRASTRUCTURES .....</b>	<b>25</b>
LE CAS DE LA PROPORTIONNALITE : INFRASTRUCTURES MATHÉMATIQUES .....	26
<i>Difficultés de la profession de professeur.....</i>	<i>27</i>
<i>Comment mathématiser la notion de « situation » au collège ?.....</i>	<i>30</i>
Comment modéliser les relations de proportionnalité à partir des objets ? .....	31
À propos de la notion de « situation de proportionnalité ».....	33
<i>Perspectives.....</i>	<i>35</i>
LE CAS DE L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES : INFRASTRUCTURES DIDACTIQUES .....	35
<i>La notion de probabilité : ambivalence .....</i>	<i>36</i>
La probabilité comme approximation de fréquences .....	36
La probabilité comme approchée par des fréquences.....	37
Fréquence et proportion : les arguments rationalistes et leurs fondements possibles .....	38
<i>Construire la notion de probabilité en 3<sup>e</sup> : étude d'un protocole expérimental.....</i>	<i>38</i>
<i>Perspectives.....</i>	<i>42</i>
EXPERIMENTER : DES PRAXEOLOGIES DIDACTIQUES POUR L'ÉTUDE DES MATHÉMATIQUES .....	43
<i>Dialectiques des médias et des milieux, de l'expérimentation et de la déduction.....</i>	<i>45</i>
<i>Perspectives.....</i>	<i>48</i>
GERER L'HÉTÉROGÉNÉITE : COMMENT PEUT-ON PENSER L'HÉTÉROGÉNÉITE POSSIBLEMENT DIDACTIQUE ? .....	48
Penser l'hétérogénéité depuis la TAD .....	49
Hétérogénéités cognitive, praxéologique, didactique.....	51
Hétérogénéité didactique et dynamique de l'étude .....	53
<i>Perspectives.....</i>	<i>54</i>
<b>ORGANISER L'ÉTUDE.....</b>	<b>56</b>
FONCTIONS DIDACTIQUES ET FONCTIONS COGNITIVES : UNE ILLUSTRATION DU REFOULEMENT DU DIDACTIQUE .....	56
COMMENT LA PROFESSION GERE-T-ELLE LE MOMENT D'INSTITUTIONNALISATION ?.....	60
<i>Ce qu'en disent les professeurs.....</i>	<i>62</i>
<i>Les manuels comme ressources pour la profession.....</i>	<i>64</i>
PERSPECTIVES .....	64
<b>LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE COMME EFFET DE STRUCTURE .....</b>	<b>66</b>
TRANSPOSITIONS INSTITUTIONNELLE ET DIDACTIQUE : GENERALITES .....	66

<i>Utilité et transposition institutionnelle</i> .....	67
ILLUSTRATIONS DU CARACTERE STRUCTURAL DES PHENOMENES TRANSPOSITIFS.....	69
<i>Rapports entre positions, structure positionnelle d'une institution</i> .....	70
<i>Intérêts antagoniques et difficultés dans la transposition institutionnelle d'un outil</i> .....	72
<i>Rapports entre objets, structure cognitive d'une institution</i> .....	76
Le cas de la rigueur .....	77
Le cas du théorème des accroissements finis .....	78
<i>Perspectives</i> .....	79
QUELQUES QUESTIONS A PROPOS DES QUESTIONS .....	80
<i>Comment poser une question ?</i> .....	80
<i>À la recherche de raisons d'être</i> .....	84
<i>Perspectives</i> .....	89
<b>ÉLÉMENTS D'UN PROJET DE RECHERCHE</b> .....	<b>90</b>
PHENOMENES TRANSPOSITIFS.....	90
<i>À propos de l'usage que l'on fait de l'histoire des mathématiques</i> .....	91
<i>Transposition didactique et structure cognitive des institutions</i> .....	91
<i>Faire institution ?</i> .....	92
<i>En résumé</i> .....	94
SUR LE REFOULEMENT DU DIDACTIQUE COMME INGREDIENT TECHNOLOGIQUE .....	94
<i>Sur les praxeologies didactiques des étudiants et des aides à l'étude</i> .....	94
<i>Sur la notion de justification et l'idée de preuve</i> .....	98
<i>En résumé</i> .....	100
ENQUETER.....	101
<i>En résumé</i> .....	101
SUR LES MATHÉMATIQUES A ENSEIGNER.....	101
<i>En résumé</i> .....	103
<b>DIRIGER DES RECHERCHES : POURQUOI ET COMMENT</b> .....	<b>104</b>
<i>Des projets de collaboration</i> .....	104
<i>Trouver sa place : l'initiation à la recherche comme négociation topogénétique</i> .....	105
<b>EN GUISE DE CONCLUSION</b> .....	<b>108</b>
<b>INDEX</b> .....	<b>110</b>
<b>REFERENCES</b> .....	<b>112</b>



# Remerciements

Hamid Chaachoua a accepté d'être le garant de mes travaux pour l'habilitation à diriger des recherches. Outre sa gentillesse et sa grande disponibilité, Hamid m'a fait bénéficier de son écoute et de la pertinence de ses commentaires scientifiques. Chacun de nos échanges, à distance ou à Grenoble, m'a été grandement profitable. Je le remercie profondément pour tout cela.

Marianna Bosch est l'une des premières chercheuses en didactique que j'ai eu le plaisir de rencontrer, lors du 4<sup>e</sup> congrès international sur la TAD qui se tenait en 2013 à Toulouse. Ses travaux, sa franchise, sa sympathie et la précision de ses arguments m'ont beaucoup aidé dans mon évolution au sein de la communauté des didacticiens des mathématiques. Je la remercie d'avoir accepté d'être rapporteure de mon travail, c'est un honneur pour moi de bénéficier de l'éclairage d'une contributrice aussi centrale en TAD.

Ghislaine Gueudet m'a accompagné dans mes démarches alors que je projetais de soutenir mon habilitation : toujours disponible et bienveillante, elle m'a encouragé à aller au bout de ma démarche. En acceptant de rapporter mon travail, elle m'a fait bénéficier de sa connaissance de la TAD ainsi que de son ouverture à d'autres cadres théoriques. Je la remercie pour toutes ces raisons et pour ses commentaires constructifs.

C'est un plaisir de compter Carl Winsløw parmi mes rapporteurs : sa double formation de mathématicien et de didacticien fait de lui un interlocuteur central pour qui s'intéresse à la didactique des mathématiques dans l'enseignement supérieur. Je le remercie pour ses suggestions inspirantes.

Francis Filbet est un ami de longue date, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer après ma thèse de mathématiques appliquées. Ce travail commun a aussi été l'occasion de découvrir une personne très fine, dotée d'un humour ravageur et avec qui il est très agréable de faire des mathématiques. Je le remercie d'avoir accepté, tant d'années plus tard, de m'accompagner dans cette nouvelle étape et de présider ce jury.

Je suis bien sûr extrêmement reconnaissant à Yves Chevallard. J'ai connu Yves *in absentia*, à travers ses écrits, de nombreuses années avant de le rencontrer. J'ai alors été frappé par son accessibilité, sa gentillesse et son humour, qui sont venus compléter, dans la liste de ses nombreuses qualités, le sérieux, la rigueur et la profondeur que son travail m'avait déjà fait percevoir. J'ai énormément appris en le lisant, en assistant à ses exposés, à son *humble séminaire*, et en échangeant avec lui au téléphone à propos des difficultés que me posait la TAD. Comme beaucoup de didacticiens des mathématiques, je lui dois principalement la théorie qu'il a produite et à laquelle il continue d'œuvrer : je n'aurais peut-être pas eu l'idée de faire de la recherche en didactique si la TAD ne s'était pas offerte à moi comme une voie exceptionnelle pour penser le didactique.

Je souhaite profiter de ces lignes pour remercier mes amies Gisèle Cirade et Michèle Artaud, qui m'ont aidé à mieux comprendre et utiliser la TAD dans mes recherches. Gisèle a accompagné mes débuts en recherche en didactique et collaborer avec elle me donne chaque fois l'occasion de pousser plus loin l'exigence de précision et de rigueur. Michèle m'a aidé à trouver ma place à l'Université, à venir occuper la position d'enseignant-chercheur. J'ai pu bénéficier de longues discussions avec elle et son inventivité et sa compréhension approfondie de la TAD m'ont beaucoup aidé à me développer comme chercheur.

Clément Durringer occupe une place majeure dans mon parcours personnel et professionnel : nos intérêts communs sont nombreux, en particulier pour les mathématiques, bien sûr, mais aussi la sociologie, la didactique, une certaine forme d'humour aussi à laquelle nos proches sont curieusement imperméables. J'ai été très heureux lorsqu'il a accepté de travailler avec moi en didactique, et nos travaux communs sont parmi les plus aboutis que j'ai produits. Clément est aussi et avant tout un ami fiable et soutenant, sans lequel surmonter les heurts de la vie aurait été moins simple. Je le remercie profondément d'avoir été et d'être encore cet ami.

Je souhaite aussi remercier mes collègues chercheuses, Emmanuelle Brossais, Emilie Chevalier-Rodrigues et Florence Savournin, pour leur sympathie et leur sourire, la vie à la maison de la recherche de l'INSPE est plus facile avec elles. Je souhaite également remercier les chercheurs du laboratoire EFTS et en particulier du thème 1, ainsi que les chercheurs de la SFR-AEF avec qui les partages sont toujours stimulants. Dans mon parcours, j'ai eu la chance de travailler avec de très bonnes équipes d'enseignants et d'enseignants-chercheurs : à *la prépa des INP* de Toulouse, à l'ESPE d'Aix-Marseille, à l'INSPE Toulouse Occitanie-Pyrénées. Je les remercie pour leur gentillesse et le plaisir que j'ai eu à travailler en leur compagnie.

Mes enfants, Louisa, Blanche et Gustave, ont toujours été là pour me soutenir et m'aider à franchir les obstacles imaginaires et réels, dans mon travail, dans la vie : je les assure ici de ma gratitude et surtout de mon amour profond, inconditionnel. Les voir grandir et évoluer dans leur pensée et leur vie est un émerveillement pour moi.

Je parle dans ma note de synthèse de ma rencontre avec les mathématiques, la sociologie, la didactique, mais la rencontre la plus importante de ma vie, celle qui m'a permis et me permet encore de nourrir toutes les autres, c'est ma rencontre avec Christel, dont la tendresse, la poésie et l'amour m'accompagnent chaque jour. Continuons de construire notre chemin commun avec tout l'amour que nous avons l'un pour l'autre !

# Introduction

J'ai rencontré la didactique, comme science de la diffusion des savoirs et des savoir-faire, à l'occasion de ma formation initiale de professeur de mathématiques, en 2008. J'étais alors jeune docteur en mathématiques (Bourgade, 2004b), et j'avais également passé une licence de sociologie en 2001, pendant que je menais mon année de DEA en mathématiques appliquées. Le succès d'une rencontre doit sans doute beaucoup à ce qui y mène et mon *curriculum personnellement vécu*<sup>1</sup>, constitué à la croisée de la recherche en mathématiques (Bourgade, 2003, 2004a; Bourgade et al., 2004, 2006; Bourgade & Filbet, 2008) et de ma formation en sociologie, me préparait peut-être particulièrement, sinon à la « maîtrise » de la didactique, du moins à développer un rapport attentif et bienveillant à celle-ci.

L'approche anthropologique du didactique, en insistant sur le rôle des institutions dans la production et la diffusion des savoirs et savoir-faire, en insistant sur leur relativité institutionnelle, évoquait pour moi l'autonomie des champs (Bourdieu, 2022) et les spécificités des jeux qui s'y jouent. La théorie de l'étude me permettait de mettre des idées plus claires, plus précises sur les difficultés que j'avais pu rencontrer dans l'étude et l'apprentissage des mathématiques, y compris dans mes travaux de recherche, ou que j'avais vu affronter les étudiants auprès desquels j'étais intervenu. En somme, la rencontre avec la théorie anthropologique du didactique (TAD; voir notamment, pour des présentations générales ou plus systématiques, Chevallard, 2007a, 2019, 2020, 2022a) a été effectivement une *rencontre*<sup>2</sup> pour moi : je me suis « trouv[é] pour la première fois en présence » d'une théorie, d'un ensemble de questions et de manières de les étudier, et cela a « débouch[é] sur une relation durable, fructueuse, amicale, [en quelque forme] amoureuse », peut-être parce que le terrain personnel que j'avais constitué progressivement au hasard de précédentes rencontres y était particulièrement favorable.

Le continent didactique est vaste et il ne saurait être question pour moi de prétendre en avoir exploré ne serait-ce qu'une zone quelque peu conséquente. Mes intérêts ont par ailleurs plus tenu de l'attitude du chien truffier que de celle du parachutiste, je me suis plutôt comporté en didacticien gyrovague, intéressé à aucune « chapelle » en particulier : je me suis laissé guider par des questions au moment où elles se posaient à moi, trouvant en chacune d'elle l'occasion d'une étude et, qui sait, de la production d'une réponse, toujours partielle et imparfaite, mais d'une réponse tout de même. Cette note de synthèse vise à mettre (θέσις, « action de poser, de placer, d'arranger » selon Bailly, 2010)

---

<sup>1</sup> « Pour une personne  $x$ , un curriculum personnellement vécu consiste en une suite de positions institutionnelles  $p$ , chacune avec son équipement praxéologique  $\pi_x(p)$  tel que  $x$  le perçoit » (Strømskag & Chevallard, 2021)

<sup>2</sup> <https://www.cnrtl.fr/definition/rencontre>

ensemble (σύν), à ordonner, à classer ces questions et les réponses que j'ai essayé d'élaborer. Trois grandes lignes de réflexion sont apparues dans la lecture rétrospective que j'ai faite de mon travail. J'ai tout d'abord étudié certains besoins praxéologiques de la profession de professeur, ce qui m'a conduit à élaborer, sans toujours m'en rendre compte dans l'instant, une réflexion sur la création d'infrastructures mathématiques et didactiques pour le fonctionnement de la profession de professeur de mathématiques et pour sa formation. L'étude de l'enseignement de certains domaines mathématiques (notamment les probabilités) m'a conduit à explorer la question de l'organisation de l'étude, et en particulier les différences entre étude et apprentissage. Mes premiers travaux, largement influencés par la sociologie structurale, m'avaient par ailleurs conduit à chercher à interpréter (et à donner un sens précis à cette interprétation) les phénomènes transpositifs comme des « effets de champ », c'est-à-dire des effets institutionnels pour autant que ce sont aussi des effets de structure. Ces trois axes sont aussi ceux qui structurent cette note de synthèse.

Je commencerai par présenter quelques éléments de TAD que j'ai essayé d'organiser autour de la question de la *genèse praxéologique*, c'est-à-dire de la naissance institutionnelle des savoirs et des savoir-faire. Ce travail est issu d'un chapitre d'ouvrage (Bourgade, 2024) que j'ai produit dans le cadre des activités du séminaire de recherche du thème « Savoirs et phénomènes didactiques – Genèse des savoirs dans les institutions didactiques et apprentissages » au sein du laboratoire EFTS (Éducation, formation, travail, savoirs). Il s'agit d'un effort de synthèse d'éléments de TAD déjà élaborés, autour de la question de la genèse praxéologique.

La deuxième partie de cette note présente l'élaboration d'éléments infrastructurels mathématiques et didactiques : quels besoins mathématiques, quels besoins didactiques, bref, quels besoins praxéologiques apparaissent quand on considère l'enseignement de la proportionnalité, des probabilités au collège ? Quels besoins mathématiques et didactiques se dégagent lorsqu'on s'intéresse à la possibilité de mettre en œuvre une démarche expérimentale en mathématiques dans l'enseignement secondaire ? Quels besoins mathématiques et didactiques faut-il satisfaire pour travailler avec l'hétérogénéité des classes dans l'enseignement secondaire ? Les réponses à ces trois questions prennent la forme d'apports praxéologiques : un apport mathématique concernant la proportionnalité (une proposition d'organisation praxéologique qui pourrait être utilisée à l'université pour former les futurs enseignants) ; un apport en forme de réflexion didactique à propos de l'enseignement des probabilités (il s'agit d'explicitier les difficultés didactiques que présente l'enseignement des probabilités conçues comme élaboration à partir d'une réflexion sur les fluctuations statistiques, voir Chevillard & Wozniak, 2011) ; un apport dans la mise en évidence d'un certain nombre de praxéologies d'enquête mathématique qui peuvent être mises à profit pour l'expérimentation en vue non seulement de la production de conjectures, mais aussi de l'élaboration de preuves ; un apport enfin plus conceptuel à travers l'élaboration d'un environnement technologico-théorique relatif à la notion d'hétérogénéité telle que la TAD permet de la penser.

La troisième partie donne à lire une étude de ce qu'organiser l'étude veut dire. J'y présente une distinction entre fonctions didactiques et fonctions cognitives de certaines praxéologies (en lien avec les moments didactiques) à l'appui de l'élucidation de l'une des manifestations du phénomène de déni du didactique. J'évoque enfin, dans cette même partie, la façon dont les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire envisagent la réalisation du moment d'institutionnalisation et dont les manuels peuvent servir de support à cette tâche.

La quatrième partie de cette note est consacrée au dernier axe que j'ai dégagé : l'étude des phénomènes transpositifs comme effets de structure. Les travaux que j'y ai rassemblés portent sur la transposition didactique d'œuvres mathématiques, comme le théorème des accroissements finis, mais aussi sur la transposition d'attitudes à l'égard d'une notion aussi polémique que celle de rigueur. J'y présente également l'étude de la transposition institutionnelle d'outils de conseil pédagogique, ainsi qu'une réflexion à propos d'une question sur les questions : comment poser une question dans une institution didactique donnée ? Cette dernière est étroitement liée à une autre question : celle de l'identification de raisons d'être des œuvres étudiées dans une institution didactique. L'ancrage institutionnel des œuvres fait que ce qui est une raison d'être dans une institution ne l'est pas forcément dans une autre institution...

Enfin, je propose dans une dernière partie les éléments d'un projet de recherche pour les années qui viennent : pour moi, et pour les doctorants qui accepteront de m'accompagner dans mes enquêtes d'étude et de recherche.

Je terminerai cette introduction en soulignant que l'ensemble des questions que j'aborde ici relèvent de l'étude de la production institutionnelle de praxéologies : les infrastructures mathématiques et didactiques autorisent la production superstructurelle de nouvelles praxéologies mathématiques et didactiques ; l'organisation de l'étude est le moyen de l'étude des praxéologies émergentes ; la transposition didactique gouverne la production de praxéologies par importation d'une institution dans une autre. D'où le titre que j'ai choisi pour cette note de synthèse : je m'y intéresse en effet à « quelques questions à propos de la production praxéologique ».

# Genèse praxéologique : généralités

Comment, à partir d'une question, naissent, se déploient, se stabilisent et s'institutionnalisent de nouveaux savoirs et savoir-faire ? Leur genèse est une question qui traverse la didactique. Je choisis (Bourgade, 2024) cette question comme un moyen d'organiser la présentation de quelques éléments de TAD qui seront d'usage fréquent pour certains, plus occasionnel pour d'autres, tout au long de cette note de synthèse. Certains passages plus techniques peuvent être sautés en première lecture, l'occasion sera donnée au lecteur d'y revenir lorsque certains développements le requerront.

La conceptualisation de la notion de savoir et de savoir-faire est au cœur de la TAD, qui est notamment une science des œuvres et des rapports aux œuvres. Je commencerai donc par exposer les notions fondamentales qui permettent de produire une telle science. La description des savoirs et savoir-faire se fait au moyen d'un outil central, la notion de praxéologie, qui permet de les penser dans leur articulation et non seulement par juxtaposition.

J'en viens ensuite à la question de la genèse des praxéologies proprement dite : l'origine d'un nouveau savoir ou savoir-faire est à trouver dans des difficultés, des questions que l'on rencontre au détour de la routine. Se créent alors des systèmes didactiques dont la vie se déploie autour de la question en vue de produire une réponse satisfaisante.

Le travail mené dans le cadre d'un système didactique est, indissociablement un travail de recherche et un travail d'étude. L'étude d'un objet, qui est de façon duale l'étude des praxéologies qui lui sont reliées, passe par la réalisation d'un certain nombre de fonctions de l'étude qu'il convient par conséquent de détailler.

Le schéma herbartien, que je présente ensuite, est un outil qui permet d'étudier l'évolution du milieu de l'étude et de la recherche : quelles œuvres sont introduites dans le milieu et pour quelle raison, en vue de quelle utilité et pour produire quelle réponse ?

La question de la réponse est aussi très aigüe : en quoi et comment peut-on décider qu'une réponse est adéquate à la question posée, et satisfaisante pour les membres du collectif d'étude qui s'est constitué pour faire vivre le système didactique ? La dialectique des médias et des milieux permet de produire des éléments de réponse à cette question.

Enfin, la diffusion, et donc une bonne part de la vie des praxéologies, passe par l'apprentissage : j'exposerai pour finir la théorie de l'apprentissage qui est articulée dans le cadre de la TAD.

## Objets, personnes, institutions et positions ; rapports

L'étude est toujours étude de quelque chose par quelqu'un : les objets et les personnes sont peut-être l'un des points de départ de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2019). Tout ou presque est *objet* : une recette de cuisine, une symphonie de

Mahler, une vache, une histoire d'amour, une théorie mathématique des groupes finis, un caillou, une mobylette, un paysage ou une personne. Tout être humain est une *personne* – un bébé âgé seulement de quelques heures est une personne. Les possibilités d'interactions entre objets et personnes sont *a priori* illimitées, elles viennent nourrir les *rappports* des personnes aux objets. Le rapport d'une personne  $x$  à un objet  $o$  recouvre tout ce par quoi  $x$  a commerce avec  $o$  : ce qu'il en connaît, ce qu'il sait qu'il en ignore, ce qu'il en pense, ce qu'il est capable de faire avec  $o$  ou bien à propos de  $o$  ou à  $o$ , etc. Le rapport de  $x$  à  $o$ , que l'on notera  $R(x, o)$ , peut être minimal, voire vide si  $x$  ignore tout de  $o$ , jusqu'à son existence et son nom. Tout ce que  $x$  sait ou croit savoir de lui-même entre dans le rapport qu'il a à lui-même et que l'on note par conséquent  $R(x, x)$ . Un professeur  $y$  a un certain rapport à ce que doit être le rapport d'un élève  $x$  à un objet mathématique  $o$  – c'est le rapport  $R(y, R(x, o))$ . Pour  $y$ , enseigner  $o$  à  $x$  revient à mettre en place des conditions dans la classe pour que le rapport effectif de  $x$  à  $o$  évolue de façon à devenir plus proche de ce que  $y$  juge que  $x$  devrait savoir de  $o$ , c'est-à-dire du rapport que, selon  $y$ ,  $x$  devrait avoir à  $o$ . Ce rapport souhaité par  $y$  n'est pas défini spécifiquement pour  $x$  : c'est le rapport à  $o$  que  $y$  souhaiterait que tout autre élève  $x'$  adopte. Ce rapport est défini, non relativement aux personnes, mais plutôt à la *position* qu'ils occupent dans la classe : la position d'élève. Ce qui vient poser le problème du didactique non plus au niveau des personnes, mais bien des institutions dans lesquelles les personnes évoluent.

Une *institution* est un groupement structuré de personnes : une famille, l'Organisation des nations unies, une entreprise ou une classe de mathématiques sont des institutions. Leur structure se manifeste par l'existence de *positions* en leur sein. Il y a position dès que plusieurs personnes ont, de fait ou de droit, les mêmes rôles à assumer dans l'institution et le font de façons proches. Dans la famille, « père », « mère » et « enfant » sont des positions classiques ; « secrétaire général » et « ambassadeur » sont des positions au sein de l'ONU alors qu'« ouvrier » et « contremaître » sont des positions qui interviennent dans certaines entreprises, comme « élève » et « professeur » dans les classes de mathématiques. Dans tous les cas, les personnes sont *assujetties* à une pluralité d'institutions, donc de positions, dont elles sont de plus ou moins bons sujets. En un sens, la personne est la résultante de ses assujettissements, et il n'est pas de personne libre de tout assujettissement (Chevallard, 2019, p. 78) :

At each and every moment of their biography, persons are, so to speak, the “resultant” of the complex of institutional subjections to which they have been submitted. Their personal relations  $R(x, o)$  arise from the various institutional relations  $R_i(p, o)$  to which they are or have been subjected.

Il faut même insister sur le fait que plus les assujettissements sont nombreux et variés, plus la personne est riche de possibles. Telle personne est à la fois père de famille, cadre d'entreprise, pilier de comptoir, électeur et délégué de parents d'élèves auprès de l'école de ses enfants. Elle a été par le passé enfant, élève, membre d'un club de football, et encore plus tôt, peut-être de façon primordiale, locutrice de sa langue maternelle.

L'assujettissement peut-être le plus frappant et le plus précoce est en effet celui qui concerne l'enfant à naître, encore fœtus, relativement à la langue. On a ainsi pu établir que la sensibilité phonique est ancrée pour une part chez le nouveau-né, dont la mélodie des cris reproduit la caractéristique fondamentale de la phonétique de la langue de ses parents (Lignier, 2023, p. 29-30, qui cite Mampe et al., 2009) :

Tous les bébés crient, mais pas de la même façon. [...] L'enregistrement et la comparaison systématique de la "mélodie des pleurs" (*cry melody*) de 30 nouveau-nés allemands et de 30 nouveau-nés français, âgés de seulement 2 à 5 jours, montrent par exemple des différences significatives, ancrées dans les communautés linguistiques correspondantes. [...] Ces différences pour ainsi dire immédiates sont sociales, elles tiennent à la langue à laquelle ont été exposés les enfants *in utero*, c'est-à-dire aux voix des locuteurs allemands ou français avec lesquels les fœtus interagissent.

Contrainte, la langue est aussi une condition : on ne peut être locuteur sans être assujetti à la langue, et cet assujettissement est la condition pour pouvoir parler singulièrement ; on ne peut être locuteur sans langue, mais la langue sans locuteurs n'est plus : « le sujet est un sujet qui se cherche comme individu et qui ne peut se trouver qu'en se laissant porter par la langue, qui elle-même ne parlerait pas sans ce sujet qui se cherche » (Wismann, 2014, p. 68). Ou encore :

le langage est sollicité comme quelque chose qui préexiste au discours – qui fournit au discours un certain nombre de schèmes pré-élaborés (des mots, des liaisons, des figures rhétoriques) – et à l'intervention du sujet [...]. L'individu va puiser dans le fonds qui constitue la langue les éléments d'une trajectoire qu'il dessine et qui ensuite peut être lue comme étant la sienne propre. Cela signifie que la langue est toujours convention d'un côté et invention de l'autre et que ces deux éléments sont indissociablement liés. (Wismann, 2014, p. 67)

Pour le dire dans les termes de la TAD, l'assujettissement à la langue offre au locuteur le confort qu'autorise la dialectique des infrastructures et des superstructures. L'être humain n'accède à une parole singulière, individuelle, que parce qu'il a su s'assujettir à une langue qui, en retour, lui offre l'infrastructure linguistique nécessaire (« des mots, des liaisons, des figures rhétoriques »). La langue y trouve son compte, qui n'existerait pas sans locuteurs – sinon comme langue « morte ».

De façon générale, l'institution offre les conditions infrastructurelles de possibilité de toute création superstructurelle – au prix de contraintes posées par les infrastructures ainsi mises à disposition. L'assujettissement se marque ainsi par l'exigence de conformation des façons d'être et de faire de la personne aux attentes de l'institution à laquelle elle s'assujettit autant qu'elle est assujettie. C'est à ce prix que l'infrastructure institutionnelle se met à disposition des personnes.

Une institution  $I$ , quelle qu'elle soit, requiert en effet des personnes qui viennent (ou souhaitent) occuper des positions  $p$  en son sein, que leur rapport à certains objets soit conforme à un rapport *attendu*, le rapport de la position  $\hat{p} = (I, p)$  à ces objets. On note  $R_I(p, o)$  ou  $R(\hat{p}, o)$  le rapport institutionnellement attendu de la position  $(I, p)$  à l'objet  $o$ .

Une personne  $x$  est un *bon sujet* de la position  $\hat{p}$ , relativement à  $o$ , si son rapport  $R(x, o)$  est conforme à  $R(\hat{p}, o)$ , ce que l'on notera :

$$R(x, o) \cong R(\hat{p}, o).$$

Chevallard (2019, p. 78) fait la remarque suivante à propos de la relation de conformité :

Two points should be noted. On the one hand, any personal relation to an object is almost always heterogeneous, being the unplanned effect of many institutional subjections—a personal relation is almost always an accidental hybrid. On the other hand, a positional relation  $R_I(p, o)$  is correlatively nobody's personal relation: in other words, the equality  $R(x, o) = R_I(p, o)$  never occurs.

Autrement dit, aucun sujet n'est un sujet *parfait* de l'une des positions qu'il occupe. Un bon sujet d'une position est donc, en quelque sorte, un sujet « suffisamment bon » de la position considérée. Notons par ailleurs que le rapport d'une *instance* (c'est-à-dire d'une personne ou d'une position) à un objet est *toujours* le rapport de cette instance à cet objet *selon une instance de référence*  $\hat{w}$  : on notera donc, lorsque c'est nécessaire  $R_{\hat{w}}(\hat{i}, o)$  le rapport de l'instance  $\hat{i}$  à l'objet  $o$  selon  $\hat{w}$ . Le rapport d'une personne  $x$  à un objet  $o$  selon cette même personne sera donc noté :  $R_x(x, o)$ .

Étant donné une instance  $\hat{i}$ , l'ensemble des objets que, selon une autre instance  $\hat{w}$ , elle connaît, c'est-à-dire avec lesquels elle entretient un rapport non vide, constitue son *univers cognitif selon*  $\hat{w}$  (Chevallard, 2022a, p. 8), que l'on note :  $\Omega_{\hat{w}}(\hat{i})$  et que l'on peut représenter formellement ainsi : il s'agit de l'ensemble  $\{o, R(\hat{i}, o) \neq \emptyset\}$ . L'*équipement cognitif de*  $\hat{i}$  *selon*  $\hat{w}$  décrit en outre les rapports qu'entretient  $\hat{i}$  aux objets de son univers cognitif ; on le note  $\Gamma_{\hat{w}}(\hat{i})$ , et il se modélise par l'ensemble  $\{(o, R(\hat{i}, o)), o \in \Omega_{\hat{w}}(\hat{i})\}$ . Le choix de l'adjectif cognitif se comprend bien si l'on définit, pour une instance  $\hat{i}$ , le fait de *connaître*  $o$  par le fait qu'elle entretienne un rapport non vide à  $o$  (Chevallard, 2019, p. 77) :

In an expanded sense of the verb to know, the relation of  $x$  to  $o$ ,  $R(x, o)$ , encapsulates all that  $x$  “knows” about  $o$ . We shall say that  $x$  knows  $o$  or, dually, that  $o$  exists for  $x$  if  $R(x, o) \neq \emptyset$ .

Cette définition de la *connaissance* est délibérément minimaliste.

## Description des rapports : praxéologies

Pour une personne ou une position<sup>3</sup> donnée  $\hat{w}$ , décrire les rapports qu'entretient une personne ou une position  $\hat{i}$  avec un objet  $o$  peut seulement se faire à partir de ce que  $\hat{i}$  fait ou dit à propos de  $o$  et qui parvient à la connaissance de  $\hat{w}$ . La pratique de  $\hat{i}$ , son discours sur la pratique sont au cœur de toute description possible du rapport de  $\hat{i}$  à  $o$ . Considérons

---

<sup>3</sup> On utilisera désormais, comme il est d'usage en TAD, le terme « instance » pour désigner, indifféremment, une personne ou une position institutionnelle. Le symbole  $\hat{w}$  désigne donc ici une *instance*.

une activité simple que réalise une instance  $\hat{i}$  : préparer des œufs brouillés. Il s'agit là d'une activité qui engage la réalisation d'un *type de tâches*

$T$  : préparer des œufs brouillés

au moyen d'une *technique*  $\tau$  plus ou moins élaborée selon l'institution à laquelle est assujettie  $\hat{i}$ . Il peut s'agir, par exemple, de

$\tau$  : faire chauffer lentement de l'huile d'olive dans une poêle, puis d'y jeter 6 œufs non battus, mêlés d'herbes de Provence et de fromage, et de saler et poivrer. Il convient ensuite de remuer délicatement la préparation dans la poêle de façon que les œufs n'adhèrent pas à la poêle, tout en s'assurant que les blancs et les jaunes d'œufs ne s'amalgament pas trop. Lorsque la face inférieure commence à prendre, on couvre, on retire du feu et on laisse la partie supérieure de la préparation s'affermir sans perdre sa texture mouillée. On sert immédiatement.

Une telle technique ne naît pas de nulle part : elle est produite, mais aussi justifiée et rendue intelligible par un discours ( $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ ) sur la technique ( $\tau\acute{\epsilon}\chi\nu\eta$ ), que l'on désigne en TAD sous le nom de *technologie*. On note traditionnellement la technologie d'une technique au moyen de la lettre  $\theta$ . Ainsi, la technique de préparation des œufs brouillés que je viens de présenter (qui s'apparente à une *recette* : elle prend une forme quelque peu algorithmisée et on peut la suivre sans *comprendre* les raisons de chaque geste réalisé) peut s'accompagner d'un discours qui la justifie, au moins partiellement.

$\theta$  : On ne bat pas les œufs avant de les verser dans la poêle, sinon on prépare une omelette et on veut que les blancs et les jaunes restent séparés en deux phases. On remue délicatement pour éviter de briser cette séparation. On arrête la cuisson pour éviter que la préparation s'assèche : les œufs brouillés sont, selon une certaine vision des œufs brouillés, une préparation « humide ». On laisse la préparation finir de cuire à couvert pour préserver l'humidité en évitant l'évaporation. Les herbes de Provence et le fromage sont facultatifs, mais contribuent à donner un caractère particulier à la préparation. Le sel et le poivre épicient la préparation et exhaussent ses saveurs.

Une *praxis* [ $T / \tau$ ], c'est-à-dire un type de tâches et une technique pour le réaliser, ne peut jamais être *totale*ment justifiée : aucune technologie n'est jamais *complète* – même si elle peut être parfaitement *satisfaisante* pour une instance ou une institution données (Chevallard et al., 2015, p. 2616) :

It appears that no technological justification is self-sufficient: it relies on elements of knowledge of a higher level of generality, which, whenever they do not go unnoticed they often do—, sound more abstract, more ethereal, oftentimes abstruse, as if they expressed the point of view of a far removed, pure spectator—a theoros. In ATD, such items of knowledge, sometimes dubbed “principles” (or “postulates”, etc.), compose the theory that goes with the triple formed by the *type of tasks*  $T$ , *technique*  $\tau$ , and *technology*  $\theta$ .

Le discours technologique s'appuie donc sur un horizon difficilement formulable, souvent évanescent : la théorie  $\Theta$ . En l'occurrence, *il va de soi* pour le cuisinier amateur que

$\Theta$  : les œufs brouillés doivent être cuits ; un plat doit être savoureux et le sel y contribue ; on peut se détacher de la lettre d'une recette pour introduire des variations ; etc.

Le *logos* [ $\theta / \Theta$ ], s'il a une certaine autonomie en tant que discours, n'en reste pas moins étroitement lié à la *praxis* pour autant que son existence se justifie des fonctions qu'il remplit : produire, justifier, rendre intelligible la *praxis*. La *praxis* et le *logos* forment des *praxéologies*. La donnée d'un type de tâches, d'une technique, d'une technologie et d'une théorie constitue une praxéologie [ $T / \tau / \theta / \Theta$ ].

Il apparaît alors que ce qu'une instance connaît de l'objet « œufs brouillés » dépend étroitement des praxéologies qu'elle a pu développer relativement à cet objet. Ce que l'on connaît d'un objet revient à ce que l'on connaît de l'ensemble des praxéologies qui ont un lien à cet objet (Chevallard, 2022a, p. 8) :

whatever the object  $o$ ,  $R(i, o)$  results from all the relations  $R(i, \wp)$  where  $\wp$  [...] involves the object  $o$ , whether technically, technologically, or theoretically. Consequently, in order to analyse in depth the content of a relation  $R(i, o)$  or  $R(i, O)$ , where  $O$  is a set of objects  $o$ , it is necessary to investigate concretely the praxeologies that generated it, either recently or in a more remote past.

Il est donc utile, outre l'univers cognitif, de définir, pour une instance  $i$  donnée et selon une instance  $\hat{w}$ , l'*univers praxéologique de  $i$  selon  $\hat{w}$*  (Chevallard, 2022a, p. 8), que l'on note  $\Omega_{\hat{w}}^{\diamond}(i)$ , et que représente l'ensemble  $\{\wp, R(i, \wp) \neq \emptyset\}$  ; l'*équipement praxéologique de  $i$  selon  $\hat{w}$*  est  $\Gamma_{\hat{w}}^{\diamond}(i) = \{(\wp, R(i, \wp)), \wp \in \Omega_{\hat{w}}^{\diamond}(i)\}$  : il tient compte, à nouveau, des rapports aux praxéologies que connaît  $i$ .

## Difficultés, questions, systèmes didactiques

Il s'agit ici de décrire l'étude non du point de vue de l'objet étudié, et donc des fonctions de l'étude de l'objet pour son émergence et son institutionnalisation comme complexe praxéologique, mais d'aborder la question institutionnelle de l'étude : comment, institutionnellement, se déroule l'étude ?

L'institution de base est le collectif d'étude : [ $\hat{X}, \hat{Y}$ ], qui se structure autour de deux positions : celle  $\hat{X}$  d'*étudiant* et celle  $\hat{Y}$  d'*aide à l'étude*. L'*étudiant* est, en TAD, celui ou celle *qui s'applique à l'étude* : un enfant à la crèche occupe la position d'étudiant, de même que toute personne confrontée à une question, aussi dérisoire soit-elle en apparence, à laquelle elle cherche à répondre. Les *aides à l'étude* contribuent à l'avancée de l'étude en fournissant aux étudiants des aides de diverses sortes. Ils peuvent, à l'occasion, endosser la fonction de *directeur de l'étude*, mais ce n'est pas inscrit *a priori* dans la position d'aide à l'étude. Selon la dynamique de l'étude, les frontières entre les positions  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  sont poreuses et qui était étudiant peut devenir provisoirement aide à

l'étude et inversement. Ce qui gouverne cette dynamique, c'est la succession des questions qui se posent au collectif  $[\hat{X}, \hat{Y}]$  et qui vont conduire ses membres à se *positionner* différemment, selon leur équipement praxéologique. Cette observation conduit à étudier la dynamique institutionnelle à un autre niveau : celui des systèmes didactiques.

Le collectif d'étude n'a de véritable existence, en réalité, que pour autant qu'il *étudie*, c'est-à-dire qu'une question  $Q$  se pose à lui. L'institution qui se forme alors est un *système didactique*  $S(\hat{X}, \hat{Y}, Q)$  (Chevallard, 1997) dont le fonctionnement passe par la création, outre des positions  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$ , d'un *milieu* pour l'étude, et par la réalisation de différents *moments didactiques* relatifs à des praxéologies dont la production vient contribuer à la formulation d'éléments de réponses à la question génératrice  $Q$ .

En effet, les étudiants et les aides à l'étude ne sauraient répondre à  $Q$  directement (si la question  $Q$  est réellement problématique pour  $[\hat{X}, \hat{Y}]$ , faute de quoi le système didactique  $S(\hat{X}, \hat{Y}, Q)$  ne saurait exister durablement) sans se constituer un *milieu* pour l'étude, c'est-à-dire un ensemble d'*œuvres* dont l'étude permet la construction d'éléments de réponse à  $Q$ . En TAD, on appelle œuvre toute production humaine : une technique de coiffage, une photocopieuse, un radiateur, la théorie de la relativité générale et une peinture de Klee sont des œuvres. Dans le processus de *mésogenèse*, c'est-à-dire de production du milieu, on voit apparaître des œuvres de diverses natures que l'on peut catégoriser grossièrement : on y trouve des *questions*  $Q_1, \dots, Q_m$ , souvent dérivées de la question  $Q$ . Il est en effet rare qu'une question n'appelle aucune autre question : ne serait-ce qu'au titre de la simplification de la question de départ, on pose généralement d'autres questions que la question initiale pour pouvoir y répondre. La dynamique de l'étude est d'ailleurs souvent décrite par l'intermédiaire des questions dérivées. Entrent aussi dans le milieu des *réponses*  $R_1, \dots, R_n$ , qui ne sont pas nécessairement des réponses à  $Q$  ou à ses questions dérivées, mais peuvent contribuer à y répondre. Néanmoins, ces réponses « toutes faites » ne sont généralement pas acceptées sans réserve : elles font l'objet à leur tour d'une étude et peuvent être rejetées ou amendées. Des données  $D_1, \dots, D_p$  font également leur apparition dans le milieu, données sur lesquelles on pourra se fonder pour, par exemple, rejeter ou accepter tel ou tel élément de réponse, ou bien pour produire telle conjecture qu'il conviendra ensuite d'étudier, etc. Enfin, d'autres œuvres  $O_1, \dots, O_q$  n'entrent dans aucune des catégories précédentes mais peuvent jouer un rôle d'importance dans l'étude : internet, une calculatrice ou un logiciel de géométrie dynamique, un dictionnaire, un manuel ou un livre, un dispositif expérimental, etc. La dynamique de l'étude est donc marquée par l'évolution du milieu, la *mésogenèse* – et non seulement par l'évolution des seules questions. C'est ce que représente le schéma herbartien. Nommé d'après le philosophe et pédagogue Johann Friedrich Herbart, le schéma herbartien (Chevallard, 2007b; Ladage & Chevallard, 2011) résume les processus d'étude et de recherche en indiquant que le système didactique  $S(\hat{X}, \hat{Y}, Q)$  *produit* ( $\Rightarrow$ ) un milieu  $M$  sur la base duquel il *élabore* ( $\Rightarrow$ ) une réponse à la question  $Q$  :

$$[S(\hat{X}, \hat{Y}, Q) \Rightarrow \{Q_1, \dots, Q_m, R_1, \dots, R_n, D_1, \dots, D_p, O_1, \dots, O_q\}] \Rightarrow R^\heartsuit.$$

La réponse  $R^\heartsuit$  n'est, en tant que telle, pas assurée d'être « la bonne » réponse, quoi que cela puisse signifier : c'est pour l'heure la réponse *qui tient à cœur* au collectif de recherche. Elle pourra connaître des destinées variées, très brèves ou prolongées, intimes ou institutionnelles, etc.

La variété des œuvres qui peuvent entrer dans le milieu n'est *a priori* pas limitée par la question posée et il est par conséquent peu probable que chaque membre du collectif ait un rapport équivalent à chacune d'elles : certains seront spécialistes de tel outil, quand d'autres se feront les exégètes assurés de telle œuvre, etc. La position d'aide à l'étude et celle d'étudiant ne sont donc pas figées, et surtout, d'autres sous-positions peuvent apparaître, comme celle d'*expérimentateur*, par exemple. La dialectique de la création et de la disparition des positions est celle qui caractérise le mouvement de la *topogenèse*. Selon le trésor de la langue française informatisé (TLFi), le préfixe *topo-* est « tiré du gr. *τοπο-*, de *τοπος* "lieu, espace", entrant dans la constr[uction] de termes sav[ants] dans lesquels il indique le lieu ou la *position* dans l'espace<sup>4</sup> » (je souligne). La *topogenèse* désigne la production de positions dans « l'espace » institutionnel. C'est aussi le processus par lequel ces positions vont se voir définies dans leur autonomie : le rôle d'une position sera plus général que son *topos*, en ce qu'il engagera l'ensemble des activités auxquelles la position peut prendre part. Le *topos* d'une position est la partie de son rôle qu'elle assume en autonomie praxéologique – elle sait le faire et sait pourquoi elle le fait comme elle le fait – et didactique – elle sait pourquoi, à tel stade de l'étude, il convient de prendre l'initiative de le faire.

## Étude : moments didactiques

Lorsque le système didactique s'engage dans l'étude d'un objet, différentes fonctions de l'étude, peuvent être réalisées. Il s'agit d'une part de la fonction de première rencontre avec le type de tâches et de son identification (réalisée dans le cadre du *moment de première rencontre*), de la fonction de l'exploration du type de tâches et de l'émergence de la technique (*moment exploratoire*), et de la fonction de la constitution de l'environnement technologico-théorique (*moment technologico-théorique*). Ces trois moments de l'étude – qui peuvent se réaliser en plusieurs épisodes, dans un ordre quelconque mais non indifférent, simultanément, etc. – contribuent à la construction du savoir et du savoir-faire ; ce sont les *moments de la genèse praxéologique*.

Deux autres fonctions importantes sont d'autre part la fonction de travail praxéologique (*moment de travail*) par laquelle se réalise l'acquisition progressive d'une certaine maîtrise dans la mise en œuvre et la connaissance de la praxéologie étudiée, et la fonction

---

<sup>4</sup> <https://www.cnrtl.fr/definition/topo->

d'évaluation praxéologique (*moment d'évaluation*) qui consiste en l'évaluation de la praxéologie étudiée elle-même, ainsi que de sa maîtrise par les élèves.

L'émergence des savoirs et des savoir-faire, des praxéologies, n'est pas le tout de la production praxéologique : la genèse n'épuise pas l'histoire. L'histoire, en l'occurrence, est institutionnelle : une praxéologie qui a émergé dans une institution peut n'avoir aucun lendemain et rester lettre morte ; elle peut au contraire s'intégrer à un ensemble de praxéologies que les sujets de certaines positions dans l'institution doivent maîtriser. Elles ne sont alors plus seulement des praxéologies personnelles, fondées à demeurer dans la singularité des rapports personnels, mais deviennent pleinement des praxéologies *institutionnelles*. La fonction d'institutionnalisation praxéologique (*moment d'institutionnalisation*, Chevallard, 1999 p. 253),

[a] pour objet de préciser ce qu'est « exactement » [la praxéologie] élaborée, en distinguant notamment, d'une part les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments qui entreront de manière définitive dans [la praxéologie] visée – distinction que cherchent à préciser les élèves lorsqu'ils demandent au professeur, à propos de tel résultat ou de tel procédé, s'il faut ou non « le savoir ».

La genèse praxéologique passe par exemple par l'étude d'une situation problématique dont l'étude requiert la production d'un nouveau savoir-faire : tout ce qui relève de la situation elle-même, mais aussi le caractère *situé* dans un premier temps de certains éléments praxéologiques, va peu à peu s'effriter et la praxéologie « visée » se dégager pour ainsi dire de cette gangue. La décontextualisation du savoir et du savoir-faire conduit à la production d'une praxéologie qui sera institutionnalisée, qui prendra un statut officiel (Chevallard, 1999, p. 254) :

[par] ce sous-moment d'*officialisation*, une [praxéologie] mathématique désormais coupée de l'histoire singulière qui l'a portée à l'existence fait son entrée dans la culture de l'institution qui en a hébergé la genèse,

en l'occurrence, la classe de mathématiques. L'effet de cette *officialisation* est de poser une nouvelle *norme* de savoir et de savoir-faire, un *rapport officiel*, ou encore un *rapport institutionnellement attendu*<sup>5</sup>, auquel devront désormais se conformer les rapports personnels des membres de l'institution ; le moment de l'évaluation met bien en évidence l'existence de cette norme élaborée dans le cours de l'institutionnalisation (Chevallard, 1999, p. 254) puisque

*l'évaluation* [...] s'articule au moment de l'institutionnalisation : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet

---

<sup>5</sup> Rapport institutionnel qui est voué à évoluer au gré des changements institutionnels : ce qui est attendu en tel état de l'institution ne l'est plus en tel autre qui suscite d'autres attentes.

d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée.

Une dernière remarque s'impose à propos de la théorie des moments de l'étude (Chevallard, 1999, p. 255) :

Le modèle des moments de l'étude a, pour le professeur, deux grands types d'emplois. Tout d'abord, il constitue une grille pour l'*analyse* des processus didactiques. Ensuite, il permet de poser clairement le problème de la *réalisation* des différents moments de l'étude. Comment par exemple réaliser concrètement la première rencontre avec telle [praxéologie] ? Avec tel type de tâches ? Comment conduire l'étude exploratoire d'un type de tâches donné ? Comment mener à bien l'institutionnalisation ? Comment réaliser le moment de l'évaluation ? Autant de questions qui se posent au professeur et auxquelles on répondra provisoirement par une formule générique : *en créant des situations didactiques adéquates*. Cette exigence, que l'on ne fera ici que repérer, est en fait d'autant plus complexe que le professeur est tout à la fois le *metteur en scène* et l'*acteur* de situations didactiques dont, le plus souvent, il est en outre le *concepteur*.

Les divers épisodes de réalisation des moments de l'étude viennent *scander* le temps de l'étude ; par leur réalisation périodique, ils *créent* le temps de l'étude, il caractérise la *chronogène*.

## Dialectique des médias et des milieux

Le fonctionnement d'une classe soumise au paradigme de la visite des œuvres (p. 80), ou plus précisément d'un système didactique<sup>6</sup> de la forme  $S(\hat{X}, \hat{y}, Q)$ , qui s'intéresse à une question  $Q$  dont l'étude le conduit à la production d'une praxéologie  $\wp$ , rend manifestes plusieurs *intérêts* dont il convient d'analyser les effets qu'ils peuvent avoir sur le processus d'étude lui-même. Le professeur a un *intérêt* clair à ce que la technique produite soit acceptée par les élèves et que sa justification le soit également (tout simplement parce qu'il s'agit de la technique et du *logos* que ses élèves doivent apprendre) ; dès lors que cet intérêt est perceptible par les élèves, ils ont pour leur part un *intérêt* à la validité de la technique et de sa justification : ce sont la technique et le *logos* qu'ils doivent connaître parce que le professeur attend cela de leur part.

On assiste, dans le travail du système didactique imaginé ci-devant, au déploiement d'un jeu de rôle où tous les agents ont le même intérêt à accepter la validité universelle des assertions produites par (ou, ce qui revient presque au même, pour) l'un d'eux qui se singularise par sa position de *professeur*. Les élèves, qui pourraient s'engager dans un travail de confrontation des assertions professorales, tenter de les réduire à la particularité contingente de l'opinion singulière du professeur, ne le font pas parce que leur intérêt

---

<sup>6</sup> Dans le cas que je considère ici, celui d'une classe de mathématiques traditionnelle, l'ensemble des aides à l'étude se réduit à l'instance du professeur  $\hat{y}$ . Celui-ci joue le plus souvent, dans le cadre du paradigme didactique de la visite des œuvres, le rôle d'un *directeur de l'étude*.

n'est pas épistémique mais *didactique* : ils ont un intérêt à faire ce qu'ils font qui est lié au fait que c'est ce que leur professeur a intérêt à ce qu'ils fassent.

Le régime de vérité qui se déploie alors est paradoxal : du point de vue de l'enseignant, c'est un régime parfaitement rationnel et scientifique puisque l'énoncé mathématique n'est accepté que pour autant qu'il est *démontré*<sup>7</sup> ; s'agissant de l'élève, il est attendu qu'il reconnaisse la vérité des énoncés pour autant que ceux-ci s'accordent avec les règles qui gouvernent l'établissement des vérités mathématiques. Mais, pour l'élève, ces dispositions ne sont pas encore elles-mêmes acquises : tout se passe comme si l'enseignant s'adressait à des élèves en supposant qu'ils ont déjà des dispositions dont son enseignement devrait assurer l'acquisition. Bref, c'est un dialogue de sourds, le professeur n'entend pas (à tous les sens du mot) que les élèves ne peuvent pas entendre (*idem*) ce qu'il dit.

Il est bien évident qu'obtenir de l'élève qu'il fasse ce qu'on souhaite qu'il fasse, mais sous le mode de l'exécution d'un ordre, est très éloigné de l'idéal de scientificité et de rationalité des mathématiques. L'*incertitude* de l'élève est fondamentale parce qu'elle crée des conditions pour l'étude – et donc l'apprentissage. C'est parce qu'il est *incertain*, que l'élève (en fait : les élèves) doit s'engager dans un *processus de production autonome de la certitude*. Bien sûr toute certitude est relative, en l'occurrence elle est relative à un ensemble infrastructurel de praxéologies déjà établies et acquises par les élèves : les techniques de production autonome de la certitude se nourrissent de leur mise en œuvre progressive et répétée.

S'agissant des techniques permettant de *produire en autonomie* la certitude du collectif d'étude  $[\hat{X}, \hat{y}]$ , il convient de noter dès l'abord qu'il est indispensable que  $\hat{y}$  soit supposé ne pas savoir – ou que cette fiction soit suffisamment vraisemblable pour assurer le déploiement de techniques de production autonome de la certitude. La *raison polémique* est celle qui *produit* le savoir et le savoir-faire et on pourrait dire, paraphrasant Bachelard<sup>8</sup>, que les praxéologies construites sont exactement *la somme des critiques* auxquelles les tentatives intermédiaires ont été soumises (Kim, 2015, p. 64-67) :

En TAD, on appelle média tout système qui, dans certaines conditions, émet, à propos d'une certaine réalité, des messages. Un professeur qui enseigne est ainsi un média. Mais il en est de même d'un élève qui fait un exposé (au sens scolaire du terme) ou qui bavarde avec un autre élève par exemple. Un manuel est aussi un média, de même qu'un traité ou une encyclopédie – telle Wikipédia. Les

---

<sup>7</sup> Mettons de côté le cas des énoncés « admis », qui joue *a fortiori* dans le sens de ce que je souhaite mettre en évidence ici.

<sup>8</sup> Parlant du modèle de l'atome de Bohr et de sa critique par Eddington, « nous dirions donc volontiers que l'atome est exactement la somme des critiques auxquelles on soumet son image première. La connaissance cohérente est un produit, non pas de la raison architectonique, mais de la raison polémique. » (Bachelard, 1966)

messages émis par un média sont-ils vrais ? On accepte généralement l'idée que la réponse dépend du degré de véridicité prêté au média considéré, relativement à telle ou telle portion de réalité concernée par ses messages. Comment préciser une telle notion ? Pour un type donné de questions sur la réalité considérée, on distingue pour cela une catégorie particulière de systèmes qu'on nomme des milieux : ce sont les médias qui, relativement à ces questions, sont censés être dépourvus d'intention, c'est-à-dire qui sont supposés « fonctionner » comme le ferait un fragment de nature. Cela ne signifie pas que les messages qu'on parvient à leur « extorquer » soient vrais, mais seulement que la valeur de vérité de ces messages ne varie pas en fonction des circonstances. [...] Le « jeu » entre médias et milieux est désigné en TAD par l'expression de *dialectique des médias et des milieux* [...]. D'une façon générale, une réponse  $R$  à une question  $Q$  sera dite solide lorsqu'elle aura résisté jusque-là à toutes les confrontations avec les milieux que l'on aura pu interroger à son propos. Ce qu'on a appelé plus haut le « degré de véridicité » d'un média croît ainsi avec l'intensité de la dialectique des médias et des milieux à laquelle ont été soumis ses messages.

La spécificité des mathématiques est bien sûr l'usage d'un milieu *déductif* : un énoncé produit par un média (disons, une conjecture) sera considéré comme « solide » (et même, sous certaines conditions, comme « vrai ») lorsqu'il aura résisté à la confrontation avec un milieu déductif (si on ne peut en déduire aucun énoncé contradictoire avec la théorie disponible, etc.).

## **Apprendre : une approche anthropologique de la cognition**

La production institutionnelle de nouveaux éléments de savoir et de savoir-faire nécessite, pour qu'ils ne restent pas lettre morte, une stabilisation de ces praxéologies dans l'équipement des instances assujetties à l'institution considérée. Pour qu'on puisse dire qu'une praxéologie a effectivement été intégrée à l'équipement praxéologique d'une instance, il faut que celle-ci l'ait *apprise*. Il reste à élucider ce qu'apprendre veut dire et la TAD propose d'aborder cette question du point de vue de l'évolution des rapports.

### **Noyau cognitif et apprentissage**

Il faut néanmoins commencer par préciser que l'apprentissage est un phénomène relatif : une instance  $\hat{w}$  peut considérer qu'une autre instance  $\hat{i}$  a appris quelque peu d'un objet  $o$ , tandis qu'une autre instance  $\hat{w}'$  n'y verrait aucun apprentissage, voire un « désapprentissage ». Par exemple, un parent d'élève juge que son enfant a « appris » ses tables de multiplication, alors que l'autre parent du même élève peut considérer que cet apprentissage est insuffisant. Dans tous les cas, l'objet du jugement, l'apprentissage, est évalué à l'aune d'un critère implicite : l'enfant a appris ses tables de multiplication, selon son parent  $\hat{w}$ , si  $\hat{w}$  juge qu'un professeur  $\hat{v}$  estimerait (selon  $\hat{w}$ ) que c'est bien le cas, c'est-à-dire que le rapport de  $\hat{i}$  aux tables de multiplication est bien celui que doit avoir tout élève, c'est-à-dire toute personne occupant la position  $\hat{s}$  d'élève. En ce cas,

l'apprentissage s'analyse donc par référence à au moins quatre instances – l'enfant  $\hat{i}$ , un professeur  $\hat{v}$ , la position d'élève  $\hat{s}$  et le parent  $\hat{w}$  –, et un objet  $o$  – les tables de multiplications. Cette situation est très générale, et on nommera (Chevallard, 2022a, p. 9-10) *base cognitive* le couple  $\underline{n} = (\hat{i}, o)$  qui modélise l'étudiant et l'objet étudié, tandis qu'on désignera par l'expression *cadre de référence cognitif* le couple  $\bar{n} = (\hat{s}, \hat{v})$ . Le cadre de référence cognitif œuvre comme *référence* pour l'évaluation des rapports. L'instance  $\hat{v}$  renvoie à un évaluateur et  $\hat{s}$  désigne l'instance dont le rapport à l'objet étudié est supposé satisfaisant. Le couple  $(\hat{s}, \hat{v})$  sert donc de référence pour établir la qualité des rapports de  $\hat{i}$  aux objets  $o$  qu'il a à étudier. Le tout, base cognitive et cadre de référence cognitif, constitue un *noyau cognitif*  $\hat{n} = \widehat{\underline{n}} = (\hat{i}, o, \hat{s}, \hat{v})$ . Un noyau cognitif est la structure minimale pour parler d'apprentissage dans le cadre de la TAD. On dira ainsi qu'une instance  $\hat{i}$  a, entre deux instants, appris quelque peu à propos d'un objet  $o$  (ou a désappris, ou n'a appris ni désappris) si  $\hat{w}$  juge que  $\hat{v}$  estimerait que le rapport de  $\hat{i}$  à  $o$  a évolué entre ces deux instants dans le sens d'une plus grande conformité au rapport de  $\hat{s}$  à  $o$  (ou d'une moins grande conformité, ou d'une conformité équivalente). L'élève ( $\hat{i}$ ) a appris quelque peu ses tables de multiplications ( $o$ ) selon l'un de ses parents ( $\hat{w}$ ) si celui-ci juge qu'un professeur ( $\hat{v}$ ) estimerait que le rapport de l'élève aux tables de multiplication a évolué et est désormais plus conforme à ce qu'il attend d'une personne qui occupe la position d'élève ( $\hat{s}$ ).

### Situation possiblement didactique

L'étude est *ce qui permet l'apprentissage* : on postule qu'il n'y a pas d'apprentissage sans étude, c'est-à-dire que tout apprentissage – toute modification significative d'un rapport à un objet – découle de la réalisation d'un geste  $\delta$  (faire réciter ses tables de multiplication par un enfant  $\hat{i}$ ) par une instance  $\hat{u}$  (le professeur de cet enfant), geste qui vient *déranger* les conditions  $\mathcal{C}$  auxquelles est soumise l'instance  $\hat{i}$ , pour les transformer en de nouvelles conditions  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}^{\delta}$ . Ce dérangement et, à travers lui, le geste  $\delta$  qui l'a produit, peut conduire à un apprentissage, un désapprentissage ou un non-apprentissage au sens que j'ai précisé dans la section précédente. On dira (Chevallard, 2022a, p. 9-10) qu'un tel geste est un geste *possiblement didactique* selon  $\hat{w}$  et qu'il est *didactique* selon  $\hat{w}$  lorsqu'il entraîne selon  $\hat{w}$  un apprentissage, *antididactique* selon  $\hat{w}$  s'il entraîne selon  $\hat{w}$  un désapprentissage, et *isodidactique* selon  $\hat{w}$  si, selon  $\hat{w}$ , le dérangement des conditions qu'il entraîne ne conduit ni à un apprentissage, ni à un désapprentissage, mais à un non-apprentissage. La situation formée par le noyau cognitif, l'instance  $\hat{u}$  qui réalise le geste  $\delta$ , ce geste lui-même et les conditions initiales  $\mathcal{C}$ , est une *situation possiblement didactique* selon  $\hat{w}$ . On la note :  $\zeta = (\hat{n}, \hat{u}, \delta, \mathcal{C})$ .

Reprenons pour conclure : une instance  $\hat{w}$  juge que le geste  $\delta$  réalisé par  $\hat{u}$  est didactique (resp. antididactique, isodidactique) pour  $\hat{i}$  relativement à l'objet  $o$  s'il produit un dérangement des conditions  $\mathcal{C}$  tel que  $\hat{w}$  juge que l'instance  $\hat{v}$  considérerait que le rapport de  $\hat{i}$  à  $o$  a évolué avec ce changement de conditions et qu'il est désormais plus conforme (resp. moins conforme, ni plus ni moins conforme) au rapport de l'instance  $\hat{s}$  à  $o$ . Le geste

$\delta$  de faire lire une table de multiplication chaque jour par les élèves  $\hat{i}$ , geste réalisé par le professeur  $\hat{u}$  modifie les conditions  $\mathcal{C}$  auxquelles sont soumis les élèves  $\hat{i}$ . À l'issue de cette modification, le parent  $\hat{w}$  d'un élève  $\hat{i}$  juge qu'un professeur quelconque  $\hat{v}$  estimerait que le rapport de l'élève  $\hat{i}$  à l'objet  $o$  table de multiplication a évolué et est désormais plus conforme au rapport qu'un professeur serait en droit d'attendre d'un élève  $\hat{s}$  : l'élève  $\hat{i}$  a, selon son parent  $\hat{w}$ , appris ses tables.

Je conclurai en soulignant que l'on peut penser que seuls certains gestes ont un effet sur l'apprentissage. La profession de foi du didacticien consiste à postuler que *tout geste est possiblement didactique*, afin de ne pas limiter *a priori* l'étendue de l'espace didactique à explorer.

### **Praxéologies possiblement didactiques, équipement possiblement didactique**

Un geste *possiblement didactique* est un geste qui peut conduire à l'apprentissage, au désapprentissage ou au non-apprentissage. Les gestes possiblement didactiques se partagent en gestes *didactiques* (qui conduisent à l'apprentissage), *antididactiques* (qui mènent à un désapprentissage), *isodidactiques* (qui ne mènent ni à un apprentissage, ni à un désapprentissage). Comme tout objet, les gestes peuvent se décrire au moyen des praxéologies avec lesquelles ils entretiennent un lien. En particulier, la réalisation d'un geste appelle la mise en œuvre de praxéologies. On appellera *praxéologie possiblement didactique* (resp. didactique, resp. antididactique, resp. isodidactique) toute praxéologie conduisant à la production d'un geste possiblement didactique (resp. didactique, resp. antididactique, resp. isodidactique).

S'agissant de l'instance  $\hat{u}$  qui réalise un geste possiblement didactique, son équipement praxéologique comporte donc des praxéologies *possiblement didactiques*. On notera  $\Omega_{\hat{w}}^{\delta}(\hat{u})$  l'*univers possiblement didactique de l'instance  $\hat{u}$  selon  $\hat{w}$* , qui est constitué des praxéologies possiblement didactiques : c'est un sous ensemble de l'univers praxéologique de  $\hat{u}$  selon  $\hat{w}$ , les gestes étant des objets parmi les autres. Introduisons enfin l'équipement possiblement didactique de  $\hat{u}$  selon  $\hat{w}$ , qui est constitué des couples  $(\wp, R(\hat{u}, \wp))$  pour des praxéologies  $\wp$  que connaît  $\hat{u}$  et que  $\hat{w}$  juge possiblement didactiques. On notera  $\Gamma_{\hat{w}}^{\delta}(\hat{u})$  l'*équipement possiblement didactique de  $\hat{u}$  selon  $\hat{w}$* .

Le professeur  $\hat{u}$  qui décide de faire lire, chaque matin, une des tables de multiplication réalise un geste possiblement didactique et met donc en œuvre des praxéologies possiblement didactiques – qui relèvent donc de son univers possiblement didactique.

# Infrastructures

La production de nouvelles praxéologies vient s'appuyer sur de l'existant : des infrastructures institutionnelles (l'existence de positions en mesure de produire ces praxéologies, notamment) et praxéologiques (la disponibilité de praxéologies utiles ou indispensables à la production de ces nouvelles praxéologies). Comme l'indique Chevallard (Chevallard, 2019, p. 84),

As a general rule, the coming to life of any type of tasks  $T$  entails the availability of a great many objects, prior to defining  $T$ . Such an organized complex of objects forms what will be called the *infrastructure* of  $T$ . As we shall see, the notion of infrastructure is, in ATD, a general concept: it refers to the underlying base needed to develop any determined reality. One easily imagines that “watching TV” at home, for example, requires an infrastructure that might seem extravagant to the uninitiated.

Je m'intéresse principalement, dans la suite, aux tâches du type « enseigner un thème mathématique donné à un niveau scolaire donné » ; en particulier, j'étudierai les tâches « enseigner la proportionnalité au cycle 4 » et « enseigner les probabilités en 3<sup>e</sup> ». Ces tâches, le type dont elles sont des spécimens, sont prises dans des infrastructures plus ou moins étendues, infrastructures qui créent des conditions et des contraintes pour la réalisation de ces tâches. Ainsi, les difficultés que rencontrent les professeurs dans l'exercice de leur métier, véritables *problèmes de la profession* (Chevallard & Cirade, 2010; Cirade, 2006, 2008), sont le signe de *besoins praxéologiques* (Artaud, 2019) parmi lesquels des besoins infrastructurels. Ainsi, la disponibilité d'une théorie mathématique et d'une théorie didactique sont des conditions infrastructurelles pour l'enseignement des mathématiques.

Dans ce qui suit, je vais tout d'abord présenter un travail relatif à l'enseignement de la proportionnalité au cycle 4, ou, plus précisément, une proposition d'infrastructure mathématique (Bourgade & Durringer, 2023, soumis) pouvant être utile pour la conception d'organisations mathématiques relatives à la proportionnalité et qui pourraient être étudiées au cycle 4.

Les trois sections suivantes cherchent à mettre en évidence des besoins praxéologiques *didactiques* de la profession. La deuxième section s'intéresse ainsi à l'étude d'infrastructures *didactiques* possibles pour l'étude des probabilités (Bourgade et al., 2023, 2024; Chevallard & Wozniak, 2011). Il s'agit, dans une approche complémentaire de celle de Chevallard et Wozniak, d'étudier les conditions didactiques de la diffusion des probabilités conformément à l'élaboration mathématique que ces auteurs en ont proposé.

La troisième section explore la question de l'expérimentation mathématique et propose une illustration de quelques gestes d'étude qui devraient peut-être être maîtrisés par les professeurs pour permettre un enseignement des mathématiques qui laisse une place à

l'expérimentation comme moyen de produire de nouvelles mathématiques et d'en élaborer des justifications.

Enfin, dans la quatrième section je souhaite souligner que la gestion de l'hétérogénéité des classes, qui est une préoccupation importante de la profession, est aussi la gestion de l'hétérogénéité possiblement didactique, dans un sens que je donnerai à cette expression.

## **Le cas de la proportionnalité : infrastructures mathématiques<sup>9</sup>**

Le fonctionnement ordinaire de la classe de mathématique conduit à l'*introduction* de savoirs nouveaux pour les élèves. L'élaboration en est généralement assurée par le professeur, même si elle peut parfois être réalisée par les élèves eux-mêmes en autonomie didactique importante. Dans les deux cas, le professeur est en quelque sorte le maître d'œuvre, qu'il ait lui-même œuvré à la (re-)production du savoir en classe, ou bien qu'il ait conçu et mis en œuvre une organisation de l'étude qui rende cette (re-)production réalisable par les élèves : là où les élèves sont *spectateurs*, voire *acteurs*, le professeur est *acteur*, voire *auteur* (Chevallard, 2023a). L'entreprise comporte donc une nécessité, en l'état actuel du système d'enseignement : le professeur doit pouvoir penser son enseignement en fonction du savoir, du complexe praxéologique qu'il souhaite voir émerger en classe. L'étude en classe d'un savoir mathématique, disons la proportionnalité, nécessite que le professeur soit en capacité d'en (faire) produire une genèse satisfaisante. Si tous les savoirs mathématiques ne découlent pas aussi directement les uns que les autres d'un processus de mathématisation d'une réalité extra-mathématique, il convient d'observer que toute production d'un savoir mathématique engage un processus de mathématisation – le cas échéant, mathématisation d'une réalité déjà mathématisée, comme dans l'algébrisation de la géométrie ou de l'arithmétique.

La conception de l'enseignement d'un complexe praxéologique doit passer par la préparation de la matière à étudier, en particulier de son obtention comme mathématisation d'un champ praxéologique qui lui préexiste. Cet aspect se heurte frontalement à la contrainte du déni du didactique dans le sens où le fait que les mathématiques soient le fruit d'un processus d'étude d'un champ praxéologique lui-même mathématique ou extra-mathématique peut être difficilement admis dans la profession. On comprend généralement bien que les mathématiques s'*appliquent*, il est moins clair qu'elles puissent *dériver* d'autre chose que d'elles-mêmes. Le déni du didactique est redoublé lorsque la réalité mathématisée engage des *objets* concrets, et des pratiques sociales relatives à ces objets (manipulations, etc.) dont l'étude est requise pour en produire une mathématisation : les objets sont parfois relégués au statut d'instruments pour l'étayage des élèves jeunes ou en difficulté : que l'on pense au triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire » dans lequel les objets sont conçus comme vecteurs d'une

---

<sup>9</sup> (Bourgade & Durringer, 2023, 2024, soumis)

mathématique *illustrée* par les objets plus que comme un système de base devant être modélisé mathématiquement (Ministère de l'éducation nationale, 2021b, 2021a). Les gestes possiblement didactiques déniés ici relèvent de l'étude expérimentale des objets et de la modélisation mathématique (Bosch et al., 2006) de leur usage.

## Difficultés de la profession de professeur

Dans nombre de manuels français, on affirme que « deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant (ou en divisant) par un même nombre non nul les valeurs [correspondantes] de l'autre (voir Figure 1, tirée de Sesamath, 2009). J'ai ajouté le mot « correspondantes », qui apparaît parfois dans les définitions et sans lequel il serait impossible d'imaginer quelque technique que ce soit pour déterminer des valeurs de grandeurs dans des situations de proportionnalité, puisqu'il serait impossible de savoir à quelle valeur de la deuxième grandeur il conviendrait d'associer la valeur cherchée de la première grandeur. L'idée de correspondance reste néanmoins vague et non opérationnelle si on ne précise pas en quoi ces valeurs se « correspondent ».

### Définition

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant (ou en divisant) par un même nombre non nul les valeurs de l'autre.

Figure 1. Définition de la proportionnalité dans un manuel français.

**Difficulté 1.** En quel sens peut-on dire, dans le cadre d'une situation de proportionnalité, que les valeurs de deux grandeurs se correspondent ? Dans un manuel américain comme (LeTourneau et al., 2009), la proportion est une propriété de « phrases » (*number sentences*) qui affirment des égalités de rapports de nombres. Comment peut-on décider si deux rapports sont égaux, c'est-à-dire s'ils forment une proportion ? La Figure 2 présente deux techniques qui reposent toutes deux sur une connaissance préalable des fractions – c'est sans doute l'une des raisons pour lesquelles on considère souvent que la proportion est une relation multiplicative par essence.

There are two ways to determine if two ratios form a proportion.

- Write the ratios as fractions in simplest form.

Two ratios form a proportion if they can be simplified to give the same fraction.

$$\frac{8}{12} \stackrel{?}{=} \frac{6}{9} \longrightarrow \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3} \quad \text{and} \quad \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{12} = \frac{6}{9} \text{ is a proportion.}$$

Fractions are the same.

- Use the cross-products rule.

Two ratios form a proportion if their cross products are equal.

$$\begin{array}{ccc} \text{first} & \frac{1}{3} & \text{third} \\ \text{second} & \frac{1}{3} \times \frac{3}{9} & \text{fourth} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 1 \times 9 & = & 3 \times 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 9 & & 9 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} \text{ is a proportion.}$$

### Think.

The product of the first and fourth numbers and the product of the second and third numbers are equal.

Figure 2. Quand les rapports forment des proportions (LeTourneau et al., 2009; p. 418).

Pourtant, si l'on veut vérifier si 8 est à 12 comme 6 est à 9, il suffit de dire que, puisque  $8 - 6 = 2$  et  $12 - 9 = 3$ , 8 devrait être à 12 comme 2 est à 3. Or  $8 = 2+2+2+2$  et  $12 = 3+3+3+3$ , de sorte qu'effectivement, 8 est à 12 comme 2 est à 3. Cette déduction s'appuie étroitement sur une approche additive de la proportion.

**Difficulté 2.** Peut-on justifier ces techniques additives autrement qu'en partant d'une approche multiplicative des ratios ?

Déterminer si une situation est, ou non, proportionnelle présente une autre difficulté. L'une des principales raisons pour lesquelles on souhaite savoir si une situation est proportionnelle est la nécessité de déterminer une grandeur *inconnue*. Si la seule technique pour évaluer le caractère proportionnel d'une situation consiste à comparer des rapports, le raisonnement est circulaire : on ne peut pas évaluer tous les rapports puisque certaines grandeurs sont manquantes (inconnues). Et on ne peut pas calculer ces grandeurs si on ne peut pas émettre d'hypothèse sur la situation, relativement à son caractère proportionnel par exemple.

**Difficulté 3.** Comment prouver qu'une situation est ou non une situation de proportionnalité, sans utiliser les rapports de valeurs des grandeurs concernées ?

Une professeure stagiaire dans une classe de 6ème en France, en 2019, a fourni à ses élèves l'exercice suivant, qui est d'un type classique en France, et qui vise à faire travailler le type de tâches « déterminer si une situation est proportionnelle ou non » :

*La taille et la masse d'une personne sont-elles des grandeurs proportionnelles ?*

Voici un bref compte-rendu de la discussion qui a suivi l'étude de cette question (P désigne l'enseignant, E les élèves)

*P. Alors 1<sup>er</sup> cas, qu'est ce que vous avez mis ?*

*E. Non parce que... [inaudible].*

*E2. Non car on s'arrête de grandir.*

*P. On a différentes justifications possibles. Par exemple si je prends une personne de la même taille que moi est-ce qu'elle fait le même poids que moi ?*

*P. Ou alors si je prends une personne de 50 cm, puis plus tard, quand elle mesure un mètre, est-ce que son poids a doublé ?*

*P. Un autre exemple, si je prends une personne plus grande que vous, est-ce qu'elle est forcément plus lourde ?*

*[Les élèves répondent correctement à chaque intervention]*

*P. écrit au tableau : 1. Ce n'est pas parce qu'une personne est plus grande que moi qu'elle est plus lourde.*

Au moins quatre justifications possibles de la non proportionnalité de la situation ont été données. Cependant, la situation elle-même est mal caractérisée : parlons-nous d'une personne à travers le temps ? Ou de plusieurs personnes au sein d'un groupe défini à

dessein ? Ou de personnes prises au hasard dans la rue ? Dans tous les cas, les réponses peuvent différer. En particulier, lorsqu'une personne cesse de grandir, si son poids reste le même, il existe un multiplicateur constant qui permet de passer de la masse (constante) à la taille (constante) : ces grandeurs sont-elles proportionnelles dans ce cas ?

**Difficulté 4.** Quelles sont les différentes techniques possibles pour déterminer le caractère proportionnel d'une situation, et comment les justifie-t-on ? Ces quatre difficultés sont liées à des questions pratiques : « comment ? » est la question principale ici. Néanmoins, des questions se posent également au niveau du *logos*. En effet, Thompson (1994) souligne le manque de cohérence des diverses définitions des ratios (*ratios*) et des taux (*rates*). Il indique que les notions de taux et de ratio sont rarement bien définies dans travaux en *mathematics education*, même si un certain consensus apparaît sur quelques caractéristiques (pas toujours compatibles entre elles) des ratios : « un ratio est une comparaison entre des grandeurs de même nature [...] et un taux [*rate*] est une comparaison de grandeurs de nature différente », « un ratio est une expression numérique de la mesure d'une grandeur par rapport à une autre grandeur ; un taux est un rapport entre une grandeur et une période de temps », « un rapport est une relation binaire qui implique des paires ordonnées de grandeurs. Un taux est une grandeur intensive – un rapport entre une grandeur et une unité d'une autre grandeur » (Thompson 1994, p. 190).

**Difficulté 5.** La différence entre ratio et taux peut-elle être construite sur des bases objectives et non ambiguës ? Pour sa part, Thompson établit une distinction entre les ratios et les taux en utilisant le principe (subjectif) de délimitation suivant : « ces distinctions ont été basées en grande partie sur des situations en soi plutôt que sur des *opérations mentales* par lesquelles les gens constituent des situations » (Thompson, 1994, p. 190, je souligne). Thompson rejette l'idée que la distinction entre les ratios et les taux (et, sans doute, entre les situations proportionnelles et non proportionnelles) soit objective : au contraire, « les gens constituent les situations » par des « opérations mentales ». Il n'y a pas de fondement matériel, ou du moins objectif, pour les « situations ».

**Difficulté 6.** Puisque les distinctions entre des concept comme ratio et taux devraient être basées sur les opérations mentales par lesquelles les gens constituent des situations, est-il encore possible d'énoncer une définition objective de la notion de *situation* ? Ces difficultés, parmi d'autres, qui peuvent être converties en autant de *problèmes de la profession* (Chevallard & Cirade, 2010), tracent les contours de besoins praxéologiques (Artaud, 2019) de la profession enseignante relatifs à la théorie de la proportionnalité. Notre approche de ces problèmes se fonde sur la notion de *famille structurée* – qui reprend pour l'essentiel la présentation axiomatique des familles d'objets à partir desquelles Chevallard et Bosch (2002) proposent de construire les grandeurs – et sur celles de situation simple et de situation double – selon qu'une seule ou deux grandeurs sont étudiées conjointement sur une famille structurée.

L'idée centrale consiste à modéliser les manipulations d'objets par une opération de *combinaison* qui permet de définir la décomposition rationnelle, puis irrationnelle des

objets en sous-objets, et donc leur mesure. Ceci reprend l'essentiel de la discussion de Chevallard et Bosch (2002), mais on introduit en outre l'idée présenter la proportionnalité de deux grandeurs comme l'effet de la compatibilité de deux combinaisons d'objets avec deux relations d'équivalence et deux préordres. Le cadre est donc le suivant : on dispose de modèles de deux types de manipulations (combinaison, comparaison) que l'on fait subir aux objets d'une famille donnée ; on suppose que les objets combinés selon l'une ou l'autre loi sont équivalents à des objets qui coïncident en un certain sens. Deux objets combinés sont équivalents, pour la première manipulation, à un objet et ce même objet doit être équivalent à la combinaison selon la deuxième manipulation des deux objets de départ. Cette hypothèse suffit à établir la proportionnalité des grandeurs associées à ces manipulations (sous réserve que la famille d'objets soit suffisamment riche).

On peut alors établir certaines relations de proportionnalité de façon purement additive. On fait tracer des cercles de rayons arbitraires. Les élèves prélèvent la longueur du périmètre de deux cercles au moyen d'une corde, et notent les mesures obtenues. Ils mesurent ensuite les rayons au moyen d'une règle graduée et tracent ensuite un cercle de rayon la somme de ces rayons. Ils mesurent le périmètre à l'aide d'une corde et constatent que le périmètre est à peu près la somme des périmètres des deux cercles de départ. En réalisant cette expérience sur des cercles de tailles variées, d'ordres de grandeurs différents, et en constatant que l'ordre de grandeur de l'erreur reste le même, on en conclut que la co-additivité observée de manière approchée peut être raisonnablement supposée réalisée dans le système de la famille des cercles « tracés ». Si on la postule au niveau des cercles « idéaux », cela entraîne directement la proportionnalité du périmètre et du rayon. La valeur du rapport de proportionnalité demeure inconnue – ce qui est un défaut, mais aussi une qualité importante de la théorie que je propose puisque ce phénomène met en évidence le fait que l'existence d'un rapport constant de proportionnalité est une *conséquence* d'un autre phénomène, et que la *valeur* de ce rapport n'est pas essentielle à la définition de la proportionnalité.

### **Comment mathématiser la notion de « situation » au collège ?**

L'institution scolaire se heurte à une difficulté qui est peut-être commune aux domaines des probabilités et de la proportionnalité, quoique sans doute plus aigüe dans le cas de la proportionnalité. L'idée de « situation » est commune à ces deux domaines : on parle de *situation de proportionnalité* comme on parle de *situation d'équiprobabilité*. Les programmes de cycle 4 indiquent que les situations d'équiprobabilité doivent faire l'objet d'une réflexion, le cas échéant fondée sur l'expérimentation : les élèves ont donc la possibilité de rencontrer, dans leur cursus, une justification expérimentale du fait que des systèmes comme le lancer d'une pièce équilibrée, d'un dé non pipé, le tirage d'une boule dans une urne contenant un certain nombre de boules indiscernables au toucher, etc., peuvent être adéquatement modélisés par des modèles équiprobables. En revanche, le travail expérimental qui pourrait conduire à l'identification de situations adéquatement modélisées par des relations de proportionnalité n'est que rarement pris en charge – et ne fait pas l'objet, dans les programmes, de développements importants ou injonctifs.

La conception d'expérimentations conduisant à l'observation de phénomènes tels que ceux qui président au choix d'un modèle équiprobable ou proportionnel ne va pas de soi et doit s'appuyer sur une compréhension fine de ce que ces modèles représentent. Dans le cas de la proportionnalité, on se limite le plus souvent à effectuer des mesures de grandeurs et à déterminer si elles entrent dans une relation de proportionnalité approximative. Avec Clément Durringer, nous avons tenté de proposer une infrastructure mathématique pour la proportionnalité qui puisse fournir le principe pour des expérimentations différentes, tout en prenant en charge un certain nombre de difficultés de la profession. Il s'est agi pour nous, notamment, de donner une définition possible de la notion de « situation de proportionnalité » qui ouvre en droit la possibilité d'établir qu'une situation relève de la proportionnalité à partir d'une étude des objets et de leurs usages.

### ***Comment modéliser les relations de proportionnalité à partir des objets ?***

Une telle approche par les objets est rendue improbable sous l'effet d'une double contrainte.

D'une part, dans les approches pédagogiques classiques, les objets et leur manipulation sont confinés à des fonctions d'échafaudage (*scaffolding*, Bruner, 1974), et leur étude est rarement envisagée pour la production de théories mathématiques ; d'autre part, la plupart des théories mathématiques de la proportionnalité ou même des grandeurs passent rapidement sur la question du lien entre les objets et les grandeurs pour se concentrer sur l'étude des grandeurs et de leur mesure (et même surtout de leur mesure). En raison de cette tendance générale à limiter les manipulations au « matériel de manipulation » et à l'échafaudage, le travail de modélisation n'est jamais réalisé sous la responsabilité didactique, au moins partielle, des élèves.

En ce qui concerne la recherche en didactique des mathématiques, la théorie des proportions est envisagée comme portant sur des couples de séries de mesures, ou de nombres, ou de grandeurs, et non au niveau des *objets* ; «  $a$  est à  $b$  ce que  $c$  est à  $d$ , est une proportion, si  $a/b = c/d$  », par exemple, permet de définir une proportion pour des nombres, des mesures ou des grandeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . La proportion est conçue comme une relation multiplicative (Vergnaud, 1994) entre les valeurs des termes de la série de nombres, mesures, grandeurs (voir par exemple Wijayanti & Winsløw, 2017 pour une analyse des manuels scolaires ; Wijayanti & Bosch, 2018; ou Chambris & Visnovska, 2022 pour des synthèses concernant l'enseignement secondaire ou primaire). La plupart des approches didactiques de la proportion reposent sur un tel point de vue : que ce soit Bolea (2002), Bolea, Bosch et Gascón (2001), Comin (2002), García (2005), Hersant (2005), Chambris (2010) ou, plus récemment et dans une perspective théorique différente, Burgos et Godino (2020), de nombreux auteurs proposent de situer la théorie de la proportion au niveau des grandeurs ou de leur mesure. Avec une version moins nettement mathématisée des « grandeurs », en *mathematics education*, depuis les travaux séminaux et importants de Thompson (par exemple 1994), jusqu'à Lamon (2007) et Steffe, Liss et

Lee (2014) par exemple, l'accent est mis sur les grandeurs. Même les manipulations d'objets sont classiquement modélisées par la division entière et la multiplication entière (comme addition itérée) des *grandeurs*, de leurs *mesures* et, par conséquent, des *nombres* (Whitney, 1968a, 1968b; Steiner, 1969; Freudenthal, 1983; Rouche, 1992, 1994; Hersant, 2005; Chambris, 2010; Beckmann & Izsák, 2015; Chevallard & Bosch, 2002 mettent particulièrement l'accent sur la construction de systèmes de nombres, à travers l'étude de grandeurs; ils précisent également les systèmes de nombres minimaux requis à un niveau donné de l'étude des grandeurs – géométriques). Ces approches par les grandeurs et leurs mesures ne permettent peut-être pas de comprendre *pourquoi* dans certaines situations (c'est-à-dire au niveau d'un *système* que l'on cherche à modéliser) la modélisation par une relation de proportionnalité est légitime. Une piste pour gagner en compréhension sur ce point consiste à revenir à la construction même de la notion de grandeur à partir des objets dont on détermine les grandeurs.

Rappelons donc brièvement les conditions sous lesquelles on peut, en suivant l'approche développée par Chevallard et Bosch (2002), mathématiser la notion de grandeur. On se donne une famille d'objets  $X_1$  et on suppose que l'on dispose d'un préordre total  $<_1$  et d'une relation d'équivalence  $\sim_1$  telle que les classes d'équivalence pour cette relation dans  $X_1$  sont infinies et que, de deux objets  $o$  et  $o'$  quelconques, distincts, dans  $X_1$ , on peut toujours affirmer que  $o <_1 o'$ ,  $o' <_1 o$  ou  $o \sim_1 o'$ . On suppose en outre qu'est donnée une loi interne  $\oplus_1$ , que j'appellerai « combinaison », et qui à toute paire d'objets *distincts*<sup>10</sup> ( $o, o'$ ) associe un troisième objet dans  $X_1$ , que l'on notera  $o \oplus_1 o'$ .

On suppose que la combinaison est  $\sim_1$ -commutative : l'ordre dans lequel on combine les deux objets n'a pas d'effet sur le résultat attendu *quant à sa grandeur*,  $o \oplus_1 o' \sim_1 o' \oplus_1 o$ . On suppose également une  $\sim_1$ -associativité, si bien que pour trois objets  $o, o'$  et  $o''$ , si  $(o \oplus_1 o') \oplus_1 o''$  et  $o \oplus_1 (o' \oplus_1 o'')$  sont définis, alors ils sont  $\sim_1$ -équivalents.

On suppose en outre que l'objet obtenu en concaténant un objet  $o'$  à un objet  $o$  est « plus grand » que  $o$  (au sens du préordre  $<_1$ ) :  $o <_1 o \oplus_1 o'$ . On forme aussi l'hypothèse qu'à tout objet  $o''$  « plus grand » qu'un objet quelconque  $o$ , au sens de  $<_1$ , on peut associer un objet  $o'$ , distinct de  $o$ , tel que  $o \oplus_1 o' \sim_1 o''$ . Enfin, on suppose que l'on peut *décomposer* tout objet en un nombre arbitraire d'objets équivalents : à tout objet  $o$  et tout entier  $n$  non nul, on peut associer  $n$  objets  $o_1, o_2, \dots, o_n$ , deux à deux  $\sim_1$ -équivalents et distincts, dont la combinaison est elle-même  $\sim_1$ -équivalente à  $o$ .

Sous les conditions précédentes, on peut à partir du quadruplet  $(X_1, <_1, \sim_1, \oplus_1)$  construire une espèce de grandeur  $G_1$  : par définition, l'ensemble quotient  $X_1/\sim_1$  est une espèce de

---

<sup>10</sup> Cela pour tenir compte du fait qu'en général, il n'est pas possible de combiner un objet avec lui-même, mais bien avec un autre objet qui lui est équivalent, le cas échéant. De manière formelle : la loi  $\oplus_1$  n'est pas définie sur la diagonale de  $X_1 \times X_1$ . Ce point, déjà présent dans la théorisation due à Chevallard et Bosch (2002, p. 48), la fait différer de celle de Steiner qui prend en charge la question de la combinaison d'objets non disjoints, question que Chevallard et Bosch passent sous silence.

grandeur  $G_1$ , et on peut définir, par passage au quotient du préordre et de la combinaison, un ordre total et une addition sur  $G_1$ . Les éléments de  $G_1$  sont des *grandeurs*, ou plus précisément des *valeurs de l'espèce de grandeur*  $G_1$ .

**À propos de la notion de « situation de proportionnalité »**

Pour les besoins de notre étude, on étend l'axiomatique précédente afin de pouvoir parler de la convergence d'une suite d'objets (voir Bourgade & Durringer, soumis, pour le détail de l'axiomatique). J'appellerai désormais *famille structurée* d'objets toute famille qui satisfait ces axiomes.

On pose alors les définitions suivantes.

**Vocabulaire :** Une *situation simple*  $(\Xi ; X, \oplus, <, \sim)$  est la donnée d'une famille structurée  $(X, \oplus, <, \sim)$ , telle que  $\Xi$  est une partie de  $X$ . Une *situation double*  $(\Xi ; X_1, \oplus_1, <_1, \sim_1 ; X_2, \oplus_2, <_2, \sim_2)$  est la donnée de deux situations simples  $(\Xi ; X_1, \oplus_1, <_1, \sim_1)$  et  $(\Xi ; X_2, \oplus_2, <_2, \sim_2)$ . Dans une situation simple  $(\Xi ; X, \oplus, <, \sim)$  donnée, on dira qu'une (valeur d'une) grandeur  $g$  est associée à un objet  $\xi$  de  $\Xi$  si

- $g$  est une valeur d'une grandeur de la forme  $G = X/\sim$  ;
- $g = G(\xi)$ .

On peut alors définir la notion de « correspondance » qui est présente dans les définitions classiques de la proportionnalité. On dira que deux valeurs  $g_1$  et  $g_2$  de deux grandeurs  $G_1 (=X_1/\sim_1)$  et  $G_2 (=X_2/\sim_2)$  se correspondent dans une situation double  $(\Xi ; X_1, \oplus_1, <_1, \sim_1 ; X_2, \oplus_2, <_2, \sim_2)$  si  $g_1$  et  $g_2$  sont associées à un même objet  $\xi$  de  $\Xi$ .

On peut désormais donner une définition formelle de la notion de situation de proportionnalité :

**Définition** Soit  $G_1$  et  $G_2$  deux grandeurs données, construites à partir de familles structurées  $(X_1, \oplus_1, <_1, \sim_1)$  et  $(X_2, \oplus_2, <_2, \sim_2)$ . Soit  $(\Xi, \oplus, <, \sim)$  une autre famille structurée. On définit par là une *situation de proportionnalité* si  $\Xi$  est inclus dans  $X_1 \cap X_2$  et :

- Pour tous  $\xi$  et  $\xi'$  dans  $\Xi$  et pour  $i = 1$  et  $i = 2$ ,
  - $\xi \sim \xi'$  si et seulement si  $\xi \sim_i \xi'$ ,
  - $\xi < \xi'$  si et seulement si  $\xi <_i \xi'$ .
- Pour tous  $\xi$  et  $\xi'$  dans  $\Xi$  et pour  $i = 1$  et  $i = 2$ ,  $\xi \oplus \xi' \sim_i \xi \oplus_i \xi'$ .

En passant au quotient, on obtient la caractérisation suivante de la proportionnalité :

**Théorème 1** – Soit  $(\Xi, \oplus, <, \sim)$  une famille structurée, et  $(\Xi ; X_1, \oplus_1, <_1, \sim_1 ; X_2, \oplus_2, <_2, \sim_2)$  une situation double. Supposons que  $G_1$  et  $G_2$  satisfont les hypothèses suivantes :

*Qa.* Pour tous  $\xi$  et  $\xi'$  dans  $\Xi$ ,  
 $G_1(\xi) = G_1(\xi')$  si et seulement si  $G_2(\xi) = G_2(\xi')$ .

*Qb.* Pour tous  $\xi$  et  $\xi'$  dans  $\Xi$ ,  
 $G_1(\xi) \leq_1 G_1(\xi')$  si et seulement si  $G_2(\xi) \leq_2 G_2(\xi')$ .

*Qc.* Pour tous  $\xi$  et  $\xi'$  dans  $\Xi$ ,

$$G_1(\xi \oplus \xi') = G_1(\xi) +_1 G_1(\xi') \text{ et } G_2(\xi \oplus \xi') = G_2(\xi) +_2 G_2(\xi').$$

Alors  $(\Xi, \oplus, <, \sim)$  et  $(\Xi; X_1, \oplus_1, <_1, \sim_1; X_2, \oplus_2, <_2, \sim_2)$  définissent une situation de proportionnalité.

Ce théorème permet en outre de prouver que les définitions les plus classiques de la proportionnalité découlent de notre définition :

**Théorème 2** – Soit  $(\Xi, \oplus, <, \sim)$  une famille structurée, et  $(\Xi; X_1, \oplus_1, <_1, \sim_1; X_2, \oplus_2, <_2, \sim_2)$  une situation double. Soit  $G_1$  et  $G_2$  les grandeurs induites naturellement par les familles structurées  $(X_1, \oplus_1, <_1, \sim_1)$  et  $(X_2, \oplus_2, <_2, \sim_2)$  respectivement. Si la situation ainsi formée est une situation de proportionnalité, alors :

1. Pour tout objet  $\xi$  dans  $\Xi$ , et tout nombre  $a$ , les grandeurs  $a G_1(\xi)$  et  $a G_2(\xi)$  se correspondent.
2. Il existe une grandeur quotient  $\lambda$  telle que, pour tout objet  $\xi$  dans  $\Xi$ ,  $G_2(\xi) = \lambda G_1(\xi)$ .

Le point 1. se reformule généralement en indiquant que, « si l'on multiplie les valeurs d'une grandeur par un nombre, alors les valeurs de l'autre grandeur sont multipliées par le même nombre ». Le point 2. affirme l'existence d'un coefficient de proportionnalité.

### ***Retour sur quelques difficultés de la profession***

Rappelons les six difficultés que j'ai identifiées :

- En quel sens peut-on dire, dans le cadre d'une situation de proportionnalité, que les valeurs de deux grandeurs se correspondent ?
- Peut-on justifier des techniques additives autrement qu'en partant d'une approche multiplicative des ratios?
- Comment prouver qu'une situation est ou non une situation de proportionnalité, sans utiliser les rapports de valeurs des grandeurs concernées ?
- Quelles sont les différentes techniques possible pour déterminer le caractère proportionnel d'une situation, et comment les justifie-t-on ?
- La différence entre ratio et taux peut-elle être construite sur des bases objectives et non ambiguës ?
- Puisque les distinctions entre des concept comme ratio et taux devraient être basées sur les opérations mentales par lesquelles les gens constituent des situations, est-il encore possible d'énoncer une définition objective de la notion de situation ?

J'ai déjà fourni un élément de réponse pour les trois premières difficultés, ainsi que pour la dernière. Deux valeurs se correspondent si ce sont les valeurs de deux grandeurs correspondant au *même objet*. Les techniques additives découlent directement des axiomes *additifs* que j'ai proposés dans la définition. On peut prouver qu'une situation est de proportionnalité sans faire appel au calcul de rapports de valeurs de grandeurs en

étudiant le *système* modélisé, et en établissant qu'il satisfait un certain nombre d'axiomes. On peut, enfin, définir de manière objective la notion de *situation*, ainsi que celle de situation de proportionnalité, sans faire appel à une étude d'*opérations mentales* qui seules donneraient un sens aux situations. C'est également le cas pour la distinction entre ratio et taux : un ratio est le quotient des valeurs de deux grandeurs associées à un même objet ; un taux (*rate*) est la valeur commune (lorsqu'elle existe) des ratios pour tous les objets d'une famille (c'est un coefficient de proportionnalité).

## Perspectives

L'enseignement de la proportionnalité est peut-être d'autant plus difficile qu'elle n'est pas un objet d'étude à l'université : la formation initiale des professeurs en relation avec le thème de la proportionnalité peut parfois se limiter à une exposition rigoureuse des mathématiques sous-jacente, sans que cette mathématisation diffère notablement de ce que les futurs professeurs en avaient appris alors qu'ils étaient élèves de l'enseignement secondaire. Le développement de la notion de linéarité dès la fin du collège vient opérer un changement d'infrastructure mathématique : la proportionnalité disparaît progressivement au profit des fonctions. L'université s'attache principalement à l'étude des fonctions, puis surtout des espaces de fonctions. Je souhaite étudier, dans la ligne d'un travail présenté avec Clément Durringer au colloque INDRUM2024 ([Bourgade & Durringer, 2024](#)), la question des besoins praxéologiques de la profession relativement à l'enseignement de la proportionnalité, et surtout celle de leur satisfaction. Quelle formation peut-on imaginer pour que les futurs professeurs rencontrent et étudient une mathématisation solide de la proportionnalité, qui leur permette d'affronter au mieux les difficultés que présente cet enseignement ?

## Le cas de l'enseignement des probabilités : infrastructures didactiques<sup>11</sup>

L'enseignement d'un thème requiert des infrastructures mathématiques, nous l'avons vu dans le cas de la proportionnalité, mais aussi des infrastructures didactiques qui ne sont pas sans lien avec les précédentes. Dans le cas des probabilités, la difficulté à cerner précisément la notion de probabilité (qui renvoie à un manque d'infrastructure mathématique, voir Chevallard & Wozniak, 2011) conduit à des hésitations dans la manière *d'organiser l'étude* de la théorie des probabilités. S'agissant des probabilités, je fais l'hypothèse que la difficulté à concevoir des protocoles expérimentaux dénote un besoin praxéologique de la profession (Artaud, 2019) important. Si cette capacité à construire des protocoles repose sur une infrastructure mathématique, elle est également ancrée sur une infrastructure *didactique* : il s'agit de savoir quelle fonction de l'étude est

---

<sup>11</sup> ([Bourgade et al., 2023, 2024](#))

censée remplir l'expérimentation, et relativement à quelle organisation praxéologique à enseigner.

## **La notion de probabilité : ambivalence**

Si l'enseignement des probabilités pose de nombreuses difficultés, c'est peut-être en raison de la difficulté qu'il y a à *définir*, à proposer une *définition opératoire* de la notion de probabilité. Certains manuels scolaires proposent ainsi de définir la probabilité comme un nombre que l'on associe à chaque issue d'une expérience aléatoire : le mode d'association n'est pas précisé, ce qui rend impossible de fonder un calcul des probabilités à partir de ce type de définition. Certaines définitions sont plus évasives encore : par exemple, la probabilité est présentée comme un moyen de quantifier le hasard. Dans le meilleur des cas, ces définitions sont environnées, dans les manuels, d'activités ou d'exercices qui font le lien entre probabilité et fréquence de réalisation d'issues d'une expérience. Néanmoins, ce lien reste souvent très ambigu, en particulier parce que la probabilité peut être conçue comme une approximation de ces fréquences, mais aussi comme une valeur bien approchée par ces fréquences – en raison même de la symétrie de la relation « être proche de ».

### ***La probabilité comme approximation de fréquences***

La probabilité est souvent définie comme une valeur théorique, celle de la « limite » de la suite des fréquences de réalisation de l'issue considérée lorsqu'on répète l'expérience aléatoire un nombre de fois qui tend vers l'infini. Cette définition pose pourtant problème : on ne dispose d'aucun moyen de *prouver* que la suite des fréquences converge. La loi des grands nombres, qui est censée l'établir, rend plutôt compte, dans le cadre de la théorie mathématique, du phénomène empirique observé – mais elle ne prouve rien quant à ce phénomène lui-même, qui reste, précisément, empirique. Mieux : la loi des grands nombres, pour être énoncée (et *a fortiori* établie), nécessite une infrastructure mathématique dont l'élément clef est la notion de probabilité. Vouloir définir cette notion en invoquant la loi des grands nombres fait donc courir le risque de la circularité.

On peut en revanche invoquer les observations empiriques sous la forme d'une *loi expérimentale des grands nombres* (Chevallard & Wozniak, 2011) – non démontrée, mais établie expérimentalement – qui stipule que, lorsqu'on réalise la même expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence de réalisation d'une même issue, après avoir violemment fluctué, se stabilise à peu près : elle semble tendre vers une valeur fixe. Pour autant, du fait même des fluctuations, il est impossible de déterminer ce que pourrait être une telle valeur. Pourquoi choisir  $\frac{1}{2}$  pour la probabilité de faire « pile » avec une pièce équilibrée, plutôt que 0,49 ou 0,50000001 ? Je reviendrai sur les arguments qui peuvent conduire à ce type de choix, mais pour l'heure je me satisferai d'indiquer que l'expérience seule ne permet pas de trancher la question.

On est donc conduit à *poser* que la valeur de la probabilité d'une issue donnée doit être une « bonne » valeur approchée des valeurs de la fréquence lors de la réalisation

longuement répétée de la même expérience aléatoire dans les mêmes conditions (Gnedenko & Khintchine, 1964). La probabilité gagne donc à être conçue, dès le cycle 4, comme une valeur approchée de fréquences. L'intérêt de cette approche est de fonder la notion de probabilité expérimentalement, et de donner une raison des axiomes qui définiront, de manière plus abstraite, la probabilité : ces axiomes sont, pour les fréquences, des *propriétés* que la probabilité, en tant que valeur approchée de fréquences, doit posséder également. Les fréquences sont positives et additives, inférieures à 1, et la fréquence de l'univers des possibles est 1.

Cependant, l'histoire ne s'arrête pas là : on calcule des probabilités pour avoir une prise sur le réel et pouvoir prévoir, par exemple, le nombre de fois qu'une issue se réalisera lors de la répétition d'une même expérience. Ce qu'affirme la loi des grands nombres expérimentale, c'est qu'on peut définir la probabilité comme une bonne valeur approchée des fréquences : on peut donc déterminer le nombre de réalisations d'une issue en multipliant sa probabilité par le nombre de réalisations de l'expérience aléatoire dont elle est une issue. La plupart du temps, pourtant, on n'a pas un accès direct à la valeur de la probabilité – ou on ne souhaite pas réaliser l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, pour des raisons diverses : éthiques, économiques, de sécurité, etc. Il convient donc de disposer d'un autre moyen, indirect, de déterminer les valeurs des probabilités : ce moyen est le *calcul des probabilités*.

### ***La probabilité comme approchée par des fréquences***

Dans certaines situations, la probabilité est inconnue et inaccessible par le calcul : on est alors conduit à expérimenter pour déterminer la valeur inconnue. Cette fois, l'existence, la définition de la probabilité ne sont pas problématiques : on sait ce qu'est une probabilité, c'est une valeur approchée de fréquences. Ce point de vue peut s'inverser : les fréquences sont aussi de bonnes valeurs approchées de la probabilité et se fait alors jour un autre moyen de déterminer la valeur d'une probabilité : réaliser un grand nombre de fois la même expérience aléatoire et déterminer la fréquence de réalisation de l'issue donc on cherche la probabilité. Si le nombre de réalisation est « suffisamment » grand, on considère que la fréquence mesurée est une bonne approximation de la probabilité recherchée.

Ce double point de vue (probabilité comme approximation de fréquences, fréquences comme approximations d'une probabilité) est clairement délimité : lorsqu'on *fonde* le calcul des probabilités, on *définit* la probabilité comme approximation de fréquences ; lorsqu'on *utilise* les probabilités pour faire du calcul, si une valeur manque on peut la *déterminer* comme bien approchée par des fréquences. La différence est en partie didactique (diachronique) : la probabilité comme approximation relève de la genèse de la notion de probabilité, la probabilité comme approchée relève de la construction de techniques de détermination de la valeur des probabilités.

### ***Fréquence et proportion : les arguments rationalistes et leurs fondements possibles***

J'ai laissé de côté la question du *choix* de la valeur approchée des fréquences : pourquoi, pour l'issue « pile » dans un lancer de pièce équilibrée, refuser la valeur  $\frac{1}{2}$  et lui préférer 0,49 ou bien 0.5000001 ? Les arguments couramment avancés sont ceux que Lévy (1970) qualifie de *rationalistes* : on choisit  $\frac{1}{2}$  *pour des raisons de symétrie*, parce qu'il n'y a pas lieu de supposer que l'une des deux faces a *plus de raisons* d'apparaître que l'autre. Pourtant, si le système étudié est parfaitement symétrique, il n'y a plus aucun moyen de discerner ses différentes composantes (une pièce parfaitement symétrique n'a, en quelque sorte, qu'une face). Par ailleurs, le fait qu'un système symétrique conduit à des réalisations de même fréquence est un *fait d'expérience* et non un théorème : il concerne le système (la pièce concrète) et non le modèle (la loi de probabilité).

Cela ne revient pas à rejeter les arguments rationalistes, mais plutôt à chercher à les fonder, une fois pour toutes, sur des bases expérimentales (comme il est par exemple indiqué de le faire en classe de 3<sup>e</sup> dans les programmes de 2016). Parce que l'expérimentation sur un certain nombre de systèmes permet d'observer l'équirépartition des fréquences lorsque des symétries sont présentes, on justifie alors l'usage des arguments rationalistes du type précédent : ainsi le dé est bien modélisé par une loi équiprobable parce qu'il présente des symétries importantes (et que l'on a observé qu'en de tels cas les issues ont à peu près les mêmes fréquences de réalisation).

### **Construire la notion de probabilité en 3<sup>e</sup> : étude d'un protocole expérimental**

Dans un travail mené en collaboration avec C. Durringer et G. Cirade (Bourgade et al., 2023), nous avons souhaité indiquer dans quelle mesure l'étude des probabilités, même lorsqu'elle faisait place à la loi expérimentale des grands nombres, pouvait éviter toute question portant sur la *théorisation* de systèmes « aléatoires ».

Les manuels ne sont qu'un matériau, parmi d'autres, pour servir à l'enseignement des mathématiques ; la plupart des enseignants les utilisent comme ressources pour choisir des exercices et des problèmes, mais certains les utilisent également pour concevoir des « activités d'introduction » ou les synthèses qui s'inscriront sur les cahiers des élèves. Je fais ici le choix d'étudier un manuel, en essayant de décrire, à côté des composantes praxéologiques présentées (Wijayanti & Winsløw, 2017), les indices d'organisations possibles de leur étude : il s'agit de dégager non seulement l'environnement technologico-théorique relatif aux probabilités, mais aussi les pistes fournies pour la réalisation en classe du *moment technologico-théorique*, en l'occurrence la présentation dans un manuel d'un *protocole expérimental*.

Le *Manuel collaboratif* (Godebin, 2021) propose une « activité » intitulée « Une histoire de punaise » dont l'objectif affiché est de « faire le lien entre fréquence et probabilité » (Figure 3). Les programmes de cycle 4 de 2020, les attendus de fin d'année ainsi que les repères de progression associés à ces programmes dans le cadre de la loi « pour l'école

de la confiance » de 2019, ne prévoient pas une étude de la stabilisation des fréquences avant la classe de 3<sup>e</sup> (Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse, 2019c, 2019b, 2019a, 2019d, 2020). Ce manuel de 3<sup>e</sup>, publié en 2021, se doit donc de prendre en charge l'étude de ce phénomène et de son lien à la notion de probabilité.

Les auteurs situent l'enjeu de la façon suivante : « Lorsque l'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on sait d'avance que l'on a une chance sur deux d'obtenir pile et une chance sur deux d'obtenir face. Mais dans certaines situations, on ne connaît pas la probabilité théorique. Il faut donc [*sic*] faire l'expérience ! ». L'expérience proposée est celle d'un lancer de punaise, expérience pour laquelle on propose deux issues : “tomber sur la pointe” et “tomber sur la tête” de la punaise. L'objectif est précisé à nouveau : « on souhaite déterminer la probabilité qu'une punaise tombe sur la tête ».

Le protocole expérimental proposé est le suivant : dans un premier temps, « par binôme », les élèves lancent la punaise 50 fois et notent le nombre de têtes et le nombre de pointes obtenus. Une mise en commun est ensuite réalisée, qui donne lieu à la production d'une

**Activités**

> Cours **2** **1** p. 174

## 2 Une histoire de punaise

**Objectif :** Faire le lien entre fréquence et probabilité.

Lorsque l'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on sait d'avance que l'on a une chance sur deux d'obtenir pile et une chance sur deux d'obtenir face. Mais dans certaines situations, on ne connaît pas la probabilité théorique. Il faut donc faire l'expérience !  
On lance en l'air une punaise plate. Cette punaise peut tomber soit sur la tête, soit sur la pointe.  
On souhaite déterminer la probabilité qu'une punaise tombe sur la tête.

**Partie A : Par binôme**  
Chacun son tour, lancer la punaise et noter la position dans laquelle tombe la punaise.  
Répéter cette expérience 25 fois chacun et compléter alors le tableau ci-dessous.

Nombre de têtes	Nombre de pointes	Total
		50

Sur la tête

Sur la pointe

**Partie B : Mise en commun**  
On met en commun les résultats en complétant la colonne B de la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F
1	Numéro du binôme	Nombre de têtes	Nombre de lancers	Nombre de têtes cumulées	Nombre de lancers cumulés	Fréquences cumulées
2	1		50			
3	2		50			
4	3		50			
5	4		50			

**Partie C : Analyse des résultats**

- 1 Compléter les cellules D2, E2 et F2.
- 2 En D3, quelle formule peut-on écrire et étirer afin de compléter la colonne D ?
- 3 En E3, quelle formule peut-on écrire et étirer afin de compléter la colonne E ?
- 4 En F3, quelle formule peut-on écrire et étirer afin de compléter la colonne F ?
- 5 Tracer le graphique des fréquences cumulées en fonction du nombre de lancers cumulés.

**Bilan :** Le nombre de lancers augmentant, que remarque-t-on concernant la fréquence des punaises tombant sur la tête ?

Chapitre 9. Probabilités [LLS.fr/M3P171](http://LLS.fr/M3P171) 171

Figure 3. Une activité pour mathématiser la variabilité statistique (Godebin, 2021, p. 171).

feuille de tableur et au calcul d'effectifs et de fréquences cumulés pour l'ensemble des lancers de la classe. Enfin, l'« analyse des résultats » conduit à « tracer le graphique des fréquences cumulées en fonction du nombre de lancers cumulés ». Le « bilan » de l'activité prend la forme d'une question : « Le nombre de lancers augmentant, que remarque-t-on concernant la fréquence des punaises tombant sur la tête ? »

Dans l'énoncé de l'activité (Figure 3), la seule précision sur la nature de l'objet « probabilité » semble se réduire à une pseudo-définition de la probabilité comme proportion de chances : « lorsque l'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on sait d'avance que *l'on a une chance sur deux d'obtenir pile* [...] mais dans certains cas on ne connaît pas la probabilité théorique » (je souligne). L'intérêt de la probabilité serait ainsi de quantifier la proportion de « chances » de succès lors qu'une expérience est réussie. L'expérience mentionnée ( « lorsque l'on lance une pièce [...] on sait d'avance que... ») ne différencie pas la réalisation unique d'une expérience de sa réalisation un grand nombre de fois ; la question du type de connaissance que représente précisément, dans le cas d'un lancer *unique*, le fait de savoir que « l'on a une chance sur deux d'obtenir pile », n'est pas abordée et les raisons de multiplier des expérimentations en très grand nombre, comme y invite le protocole, ne sont dès lors pas claires. Ou plutôt, l'étude de ces raisons est rejetée hors du *topos* des élèves, voire même hors de la classe : c'est le professeur, ou le concepteur de l'activité, qui affirme l'adéquation du protocole expérimental à l'objectif annoncé, et qui réduisent par là-même l'étendue du travail de production de *logos* qui pourrait résulter de l'analyse de la question finale et de la recherche d'un protocole expérimental adapté pour y répondre.

Je peux désormais reprendre l'analyse du « bilan » et observer que le protocole expérimental proposé ne permet pas de répondre de façon pertinente à la question posée (qui est trop ouverte) ni à la question séminale (Quelle est la probabilité que la punaise tombe sur la tête ?) parce que

- la notion de probabilité est insuffisamment caractérisée par les fonctions qu'elle permettrait de remplir (estimer un *nombre* de succès lors de répétitions *multiples*) ;
- la convergence (au sens naïf) des fréquences est prise comme une raison de postuler une probabilité unique, plutôt que comme la manifestation du besoin d'*approcher* ces fréquences par une valeur unique (inversion entre système et modèle : c'est le système qui fournit des approximations du modèle – ce qui devient vrai dans d'autres états du modèle, mais est incorrect lors de la première construction de la théorisation de la variabilité statistique) ;
- par conséquent, la question de la détermination de la valeur de la probabilité est pressentie comme la détermination de la valeur « limite » d'une suite de fréquences et non comme portant sur la recherche de critères rationnels (voire mathématiques) pour poser, conventionnellement, la valeur de cette probabilité de telle sorte qu'elle constitue cependant une bonne approximation des fréquences observées.

Ce protocole expérimental semble relever d'une philosophie empiriste inassumée qui réduit la théorisation à l'observation : il suffit de remarquer (« que remarque-t-on [...] ? ») pour théoriser ; théoriser, c'est *dévoiler* ce qui préexiste à la théorisation ; l'expérimentation n'est qu'un travail d'anamnèse ou de dé-couverte, de dé-voilement. Cela revient, dans les faits, à renvoyer le travail de théorisation dans le *topos* du professeur, voire même dans un ailleurs étranger à la classe, tandis que le *topos* des élèves est restreint à la mise en œuvre d'expériences dont ils ne peuvent concevoir eux-mêmes la nature ni les éléments qu'elles pourront amener au milieu pour l'étude de la variabilité statistique.

La « définition » de la probabilité qui est proposée dans le même manuel (Godebin, 2021, p. 174) : « lors d'une expérience aléatoire, on peut associer, à chacune des issues de l'univers, un nombre appelé probabilité », ainsi qu'une propriété qui indique que « lorsque l'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche d'une fréquence "limite" qui est la probabilité de cette issue », reproduisent la co-présence d'une théorisation formelle et d'une approche empiriste qu'il faudrait travailler conjointement et non comme illustration l'une de l'autre. L'activité censée faire le « lien » entre fréquence et probabilité se fonde sur ce lien lui-même, et la « définition » purement formelle, et quelque peu indigente, de la probabilité comme « nombre » ne permet pas de produire une « propriété » telle que la loi des grands nombres par voie déductive. Le protocole expérimental n'est pas utilisé pour réaliser les dialectiques de la mathématisation (Kim, 2015) qui conduiraient à passer de la manifestation phénoménale de la stabilisation des fréquences observées à la postulation d'une *loi expérimentale des grands nombres*. Le processus d'élaboration de la définition des probabilités ne donne par conséquent lieu à aucune dialectique du structurel et du fonctionnel (Kim, 2015, p. 187) : une « définition » formelle est donnée sans lien avec les fonctions qu'on peut lui faire jouer.

Tout ceci contribue à rendre manifestes des besoins praxéologiques de la profession relatifs à la réalisation des fonctions de l'étude au moyen de techniques dialectiques relevant des dialectiques de la mathématisation. En particulier, la maîtrise de l'élaboration et de la mise en œuvre de protocoles d'expérimentation mathématiques constituent probablement un besoin praxéologique important de la profession de professeur, comme l'illustre l'exemple que je viens de présenter.

## Perspectives

J'aimerais poursuivre mes recherches sur l'enseignement des probabilités autour de la question de la *justification* : en conservant l'idée que la loi expérimentale des grands nombres est la clef de voute de toute élaboration possible d'une théorie des probabilités au collège, je voudrais étudier trois questions importantes à mes yeux. La première est relative aux arguments dits « rationnels » (Lévy, 1970) : il s'agit d'arguments tels que celui selon lequel la probabilité de faire pile doit valoir  $\frac{1}{2}$  pour des raisons de symétrie. Je souhaite étudier comment l'étude des probabilités au collège peut prendre pour point d'appui la fondation sur la loi expérimentale des grands nombres tout en autorisant le développement d'un argumentaire de type rationnel. La deuxième question est liée à la première puisqu'il s'agit d'étudier les stratégies bayésiennes (Carranza, 2011; Carranza & Kuzniak, 2007, 2008) de prise de décision et de déterminer à quelles conditions elles peuvent être étudiées au lycée en tenant compte de l'infrastructure mathématique disponible qui est elle-même fondée sur la loi expérimentale des grands nombres. La troisième question est attachée à la dialectique des systèmes et des modèles : le choix d'un modèle probabiliste pour un système donné est souvent délicat pour les professeurs débutants. En particulier, comme par exemple dans le lancer de deux dés où on considère la somme des nombres tirés, l'univers des possibles « naturel » n'est pas satisfaisant si on

lui associe une loi de probabilité uniforme – ce qui serait aussi le plus « naturel ». Cette difficulté qui se pose aux élèves prend une forme aigüe pour les professeurs qui ont souvent des difficultés à expliquer pourquoi cette situation se modélise bien avec un modèle uniforme à deux épreuves (deux lancers d'un dé) alors même que le système ne comporte visiblement qu'une seule épreuve (un lancer de deux dés). La véritable difficulté trouve sans doute son origine dans une mauvaise compréhension de ce qu'est un modèle : il n'y a pas nécessairement de « transparence » du modèle par rapport au système. Il conviendrait alors d'étudier les praxéologies engagées dans le travail de modélisation et notamment de validation des modèles par retour aux systèmes. Je suis engagé pour ce travail dans une collaboration avec Clément Durringer.

## **Expérimenter : des praxéologies didactiques pour l'étude des mathématiques<sup>12</sup>**

Mettre en évidence le « caractère expérimental de l'activité mathématique » (Chevallard, 1992) s'avère décisif. La spécificité du travail mathématique est souvent identifiée avec le *travail de la preuve* : le mathématicien prouve ce qu'il avance. L'un des intérêts du travail de Chevallard (1992) est de mettre en évidence le fait que le travail même de la preuve s'appuie sur de l'expérimental : l'issue d'un calcul peut s'avérer incertaine, alors qu'elle apporte en contrepartie une information sur le système que ce calcul vient mettre à l'épreuve. Ce point de vue s'oppose à une image très répandue du travail mathématique comme alternance d'étapes de formulation de conjectures – où l'expérimentation, y compris instrumentée, trouve sa place légitime – et d'étapes de démonstrations – où le travail déductif semble exclure toute expérimentation, en particulier outillée par des instruments numériques. Il complète par ailleurs les analyses classiques de Duval et Balacheff sur la preuve en faisant place à une analyse des *processus didactiques* de construction de la preuve et non seulement à une analyse structurale ou cognitive des différences entre argumentation au sens large, preuve et démonstration.

Duval (1993, p. 42) distingue entre explication, argumentation et déduction. Il commence par différencier le raisonnement, qui, « a pour but la modification de la valeur épistémique d'un énoncé-cible, et la détermination de sa valeur de vérité » (p. 42) sous certaines conditions, et l'explication, qui s'appuie seulement sur « le contenu » des « propositions mobilisées », et non sur leurs « valeurs épistémiques ». La différence entre l'argumentation et l'explication tient à ce que l'argumentation est un raisonnement, et l'explication n'en est pas un. Enfin, la démonstration est un « raisonnement valide », quand l'argumentation est « un raisonnement qui n'obéit pas à des contraintes de validité mais à des contraintes de pertinence » plutôt liées au contenu des propositions. On trouve chez Balacheff (1987, p. 147-148, voir aussi 1982, p. 263) un regard légèrement différent, dans le cadre duquel il appelle « explication un discours visant à rendre intelligible le

---

<sup>12</sup> (Bourgade, 2020, soumis)

caractère de vérité [...] d'une proposition », tandis qu'une preuve est une « explication acceptée par une communauté à un moment donné », communauté qui peut être traversée par des débats portant sur la détermination d'« un système de validation commun aux interlocuteurs ». Enfin, il appelle « démonstrations » les preuves « adoptant une forme particulière », en étant constituées d'une « suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini ».

La distinction qui est ainsi faite entre différents types de *raisonnements* induit pour ainsi dire une classification des types de productions (*opus operatum*), au détriment peut-être de l'étude des processus qui conduisent à ces productions (*modus operandi*). En particulier, on peut raisonnablement penser que le processus complet qui mène de l'étude d'une question à la démonstration complète et rigoureuse de la réponse qu'on y apporte, doit passer par des étapes variées faisant appel à des raisonnements variés, parfois mêlés. Il convient toutefois d'observer que l'objectif de Balacheff était de proposer une classification des formes de preuve afin de discuter le passage de la preuve informelle à la preuve formelle, des « preuves pragmatiques » aux « preuves intellectuelles », notamment au passage de la classe de 6<sup>e</sup> à la classe de 5<sup>e</sup>. La délimitation entre ces deux types de preuves, essentielle dans l'apprentissage de la preuve, conduit Balacheff à étudier les types de situations où la preuve intellectuelle peut se développer. L'utilité de preuves « pragmatiques » n'est pas remise en cause, mais leur lien avec les preuves « intellectuelles » semble être d'ordre psychogénétique : la preuve « pragmatique » est une étape dans le développement de l'enfant qui doit faire place progressivement à la preuve « intellectuelle » : « il faut que [les débutants] refassent rapidement, mais sans brûler d'étape, le chemin qu'ont parcouru lentement les fondateurs de la science » mathématique (Poincaré, 1894, p. 374). Le processus de preuve semble s'identifier chez Balacheff avec le processus de production du *texte* de la preuve – d'où un intérêt marqué pour une caractérisation des preuves et des démonstrations du point de vue de leur nature argumentative. Le travail de production de conjectures (l'« activité de résolution », voir Balacheff, 2017, p. 426) n'est pas réellement étudié dans cette perspective.

Pour leur part, Garutti et al. (1998) ont développé une théorie de l'unité cognitive (*cognitive unity*) selon laquelle conjecture (ou activité de résolution) et preuve sont proches dans leur structure : « in a teaching experiment concerning the production of theorems (conjectures and proofs) by beginners [...], we found experimental evidence of the cognitive unity between the *phases* of conjecture production and proof construction » (je souligne). Cette unité s'exprime ainsi : le processus de production de la conjecture (pendant la « phase of conjecture production ») s'étaye sur un faisceau d'arguments justificatifs qui nourriront ensuite (pendant la « phase of [...] proof construction ») les chaînons déductifs de la preuve. Le postulat de la *cognitive unity* a été mis à l'épreuve dans des travaux expérimentaux qui établissent que les élèves sont d'autant plus à l'aise dans la production de preuves que le travail de la preuve a été précédé d'un temps de production de conjectures marqué par la mise en avant d'arguments pour soutenir la

conjecture. Néanmoins, d'autres travaux, comme ceux de Pedemonte (2006, et surtout 2007) mettent en évidence le fait que la structure de la conjecture et celle de la preuve ne sont pas isomorphes (Pedemonte, 2007, p. 38) :

Abductive argumentations are usually employed and the passage to a deductive proof is not always easy for students. On the contrary, some difficulties the students met in the construction of proof can be attributed to this 'spontaneous' continuity [between conjecturing and proving].

L'auteure précise que l'unité cognitive entre la conjecture et la preuve ne doit pas cacher des ruptures entre les structures (abductives, inductives ou déductives) des arguments dans les phases de construction de la conjecture et de production de la preuve. Néanmoins ce travail ne fait pas non plus place à une remise en question de la distinction tranchée entre les processus de production de la conjecture et de construction de la preuve. Dans un travail sur l'expérimentation et la déduction (Bourgade, 2020), j'ai indiqué que la production de la preuve pouvait gagner à être envisagée dans une relation dialectique, et non de simple succession, avec le travail de construction de conjectures.

Les difficultés rencontrées par les élèves de l'enseignement secondaire (et par les étudiants ensuite) dans l'apprentissage de la preuve ne sont peut-être pas sans lien avec ces deux contraintes : d'une part, la structure chiasmatisque qui oppose conjecture et preuve (la différence des types d'argumentation qui y prévalent est l'une des difficultés pointées par Duval et Balacheff) ; d'autre part, la confusion entre processus de preuve et production d'un *rapport de preuve* (d'une « démonstration ») qui relève de la confusion entre les moments technologico-théorique et d'institutionnalisation, ou encore entre les *gestes didactiques* qui conduisent à la réalisation du *moment technologico-théorique* et les *gestes mathématiques* que le rapport de preuve, en tant qu'énoncé relevant de *l'environnement technologico-théorique*, donne à voir. Il s'agirait alors d'une manifestation de la contrainte du *déni du didactique* dans la confusion du didactique et du praxéologique (ici : du *moment technologico-théorique* et de *l'environnement technologico-théorique*). La focalisation sur la démonstration peut se faire au détriment d'une place importante à accorder à l'expérimentation pour *argumenter* au service d'une conjecture.

## **Dialectiques des médias et des milieux, de l'expérimentation et de la déduction**

Une fonction importante de la démonstration est d'adjoindre un énoncé (l'énoncé démontré) à un édifice hypothéticodéductif qui lui préexiste. Du point de vue du *modus operandi* que j'évoquais plus haut, il convient de s'interroger sur les conditions sous lesquelles on peut *produire* une démonstration d'un énoncé. Je commencerai par remarquer que, souvent, l'énoncé *évolue* pendant la recherche d'une preuve : des hypothèses s'ajoutent, la conclusion est reformulée, etc. Ce qui fait évoluer l'énoncé est aussi ce qui permet l'élaboration successive d'éléments de déduction : l'expérimentation,

mathématique ou extra-mathématique (et notamment numérique). L'expérimentation consiste en une opération sur un système qui conduit à "le faire parler", c'est-à-dire à produire de nouveaux énoncés, de nouvelles connaissances relatives à ce système. La valeur de ces nouvelles connaissances n'est bien sûr pas garantie par le dispositif expérimental lui-même (encore qu'il constitue déjà un milieu qui peut être très exigeant) : il convient de multiplier les milieux pour s'assurer que cette "connaissance", c'est-à-dire un nouvel énoncé relatif au système, résiste bien à la dialectique des médias et des milieux. Une fois assurée sur de solides bases, cette nouvelle "connaissance" peut servir de point de départ pour un raisonnement déductif : peut-on déduire cette connaissance de la théorie mathématique disponible ? Peut-on déduire d'elle des assertions dont on sait qu'elles sont vraies par ailleurs ? Présente-t-elle un intérêt mathématique particulier ? On est généralement conduit à produire de nouvelles expérimentations, qui conduiront à de nouveaux énoncés qu'il faudra soumettre à la dialectique des médias et des milieux, etc. L'ensemble des "connaissances" sur le système qui sont produites de cette façon constituent un milieu riche pour la production de déductions : plus on dispose d'assertions supposées vraies, plus on peut déduire d'énoncés (éventuellement contradictoires : c'est pour cela qu'il convient de faire subir une vigoureuse dialectique des médias et des milieux à chaque assertion retenue). Dans le même temps, les déductions opérées peuvent fournir des points d'appui pour enchaîner de nouveaux pas déductifs moyennant des expérimentations mathématiques, etc. Le processus de production d'une preuve s'appuie sur une dialectique de l'expérience (mathématique ou extra-mathématique) et de la déduction.

J'ai essayé de l'illustrer (Bourgade, 2020) à propos de la résolution d'un problème de géométrie (il s'agissait de déterminer l'aire d'un quadrilatère en fonction de la longueur de l'un de ses côtés) : l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) permet de produire des conjectures mathématiques qui sont des "connaissances" au niveau du système (le logiciel GeoGebra et la figure tracée ainsi que le dispositif expérimental fondé sur eux) – en effet, on peut être certain de la véracité d'un énoncé au niveau du dispositif expérimental, ce qui peut conduire au souhait de le déduire dans la théorie disponible (ce qui est un moyen de renforcer la crédibilité de la théorie). L'expérimentation mathématique (tentatives de calculs, factorisations, etc.) produit des déductions partielles de ces conjectures et, chemin faisant, d'autres "connaissances" (au niveau du modèle mathématique cette fois) viennent suggérer des idées d'expérimentations dont l'issue viendra susciter de nouvelles étapes déductives, etc. J'ai proposé la résolution de ce problème de géométrie sans faire appel à aucun résultat hors programme, en m'appuyant seulement sur ce processus dialectique d'expérimentation et de déduction. Bien sûr il y a un prix à payer pour éviter le hors programme : il est didactique et repose sur le fait qu'on suppose la disponibilité de praxéologies d'expérimentation mathématique (autant de praxéologies possiblement didactiques, voir p. 24) qui sont peu répandues dans l'état actuel de l'institution scolaire en France.

Pour résumer, la dialectique de l'expérimentation et de la déduction est une technique de production de preuves qui repose sur l'utilisation de l'expérimentation pour produire des connaissances au niveau du système étudié (qui peut être lui-même mathématique), connaissances que l'on essaie de déduire dans le cadre du modèle (de la théorie mathématique disponible) ; le contrôle, à chaque étape, de la validité des connaissances engagées dans des tentatives déductives est assuré par la dialectique des médias et des milieux, qui vient renforcer la vraisemblance des "connaissances", et donc favoriser le pari de leur déductibilité.

Je remarquerai enfin que la dimension expérimentale de l'activité mathématique fait l'objet d'un déni important. Même dans un article aussi délibérément consacré à l'expérimentation en mathématiques que (Perrin, 2007), l'expérimentation fait l'objet d'un traitement allusif et c'est bien plutôt la déduction qui est détaillée. D'ailleurs, le détachement des deux processus (expérimentation et déduction) dans cet article est notable : il y a une phase de production de la conjecture, *puis* une phase de démonstration. La conséquence est que l'expérimentation est insuffisante et le prix à payer est celui... du hors programme. Ainsi, s'agissant de déterminer le lieu des points  $M$  tels que les aires de deux triangles  $AMB$  et  $AMC$  soient égales (étant donnés trois points  $A, B, C$  non alignés), l'expérimentation conduit seulement à établir la "connaissance" suivante au niveau du système (le triangle tracé sur Cabri géomètre) : le lieu cherché est la médiane issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ . Je cite (Perrin, 2007, p. 12) :

L'outil d'expérimentation est Cabri, ou un autre logiciel de géométrie, qui permet d'afficher les aires des triangles et de regarder comment elles varient avec  $M$ . Une conjecture se dégage assez vite, car on voit apparaître la médiane issue de  $A$ . On propose :

**Conjecture.** *Les aires de  $AMB$  et  $AMG$  sont égales si et seulement si  $M$  est sur la médiane de  $ABG$  issue de  $A$ .*

La démonstration de la conjecture fait ensuite appel à un *lemme*, le « lemme des chevrons » (Perrin, 2007, p. 18) :

La preuve de la conjecture est facile : on regarde le point d'intersection  $A'$  de  $(AM)$  et de  $(BC)$ . On montre facilement (c'est le lemme du chevron [...] qui résulte par exemple de la formule  $base \times hauteur/2$ , [...]), que l'on a  $A(AMB) / A(AMC) = A'B / A'C$ , de sorte que les aires sont égales si et seulement si le point  $A'$  est milieu de  $[BC]$ , donc si  $(AM)$  est la médiane issue de  $A$ .

J'ai montré dans (Bourgade, 2020) que l'on peut se passer du lemme si on *expérimente* de façon plus approfondie. Encore une fois, le prix à payer est dual de celui que doit payer Perrin : il se monnaie en praxéologies possiblement didactiques.

Dans l'objectif d'aider à la transition entre deux paradigmes, paradigme de la visite des œuvres et paradigme du questionnement du monde, ces deux "prix", ces deux "coûts" prennent un sens particulier. L'un est un coût *praxéologique* : il faut savoir beaucoup pour pouvoir démontrer. L'autre est un coût *didactique* : il faut savoir bien étudier pour pouvoir démontrer. Le premier coût est typique d'une attitude rétrocognitive dans l'étude, alors

que l'autre relève d'une attitude procognitive (voir p. 82). La procognition est l'une des cinq attitudes identifiées par Chevallard comme caractéristiques de la pédagogie de l'enquête : le coût *didactique* est donc un coût que l'on est prêt à payer dans le cadre du paradigme du questionnement du monde dont relève cette pédagogie.

## **Perspectives**

Je souhaite poursuivre mon enquête sur les fonctions de l'expérimentation dans le travail mathématique. En particulier, je souhaite déterminer le type de praxeologies d'expérimentation mathématique dont devrait disposer tout élève de l'enseignement secondaire pour pouvoir développer des preuves non triviales. Un autre aspect de la même question réside dans l'identification des praxeologies de direction de l'étude que devraient mettre en œuvre un professeur de mathématiques pour que ses élèves acquièrent les praxeologies précédentes. Enfin, cet équipement praxéologique du professeur pose la question de la formation initiale des enseignants et du type de rapport aux mathématiques que l'on cherche à induire chez les futurs professeurs.

## **Gérer l'hétérogénéité<sup>13</sup> : comment peut-on penser l'hétérogénéité possiblement didactique ?**

Thomazet (2008) rappelle que l'on est passé d'une école de la ségrégation (avec des instituts spécialisés dans l'accueil des enfants handicapés et une École proposant un enseignement normalisé pour des enfants dits normaux) à une école de l'intégration puis à un paradigme inclusif (Thomazet, 2008) :

Il est demandé à l'école de se modifier structurellement et pédagogiquement pour remplir sa mission auprès des enfants qui n'ont pas toutes les habiletés nécessaires pour recevoir les enseignements comme on les dispense actuellement. [...] l'approche inclusive s'inscrit dans un constructivisme social, au sens où elle suppose que le handicap ou la difficulté ne sont pas propres à l'élève, mais résultent de la rencontre entre l'élève et la situation scolaire qui a été pensée pour lui. Ainsi, un enfant aveugle peut très bien ne pas être handicapé du point de vue scolaire, si on a pris les dispositions nécessaires pour lui permettre de participer à l'ensemble des activités scolaires.

L'école inclusive se doit donc de s'adapter aux besoins de chaque enfant, jusqu'à généraliser cette attitude à l'endroit du public habituel de l'École traditionnelle (Thomazet, 2008) :

Par le développement de pratiques inclusives, on pourrait ainsi espérer dépasser le dilemme dans lequel se trouvent de nombreux enseignants confrontés à des publics hétérogènes : enseigner aux meilleurs, au risque de perdre les plus faibles ou

---

<sup>13</sup> Cette section consacrée à l'hétérogénéité fait l'objet d'un travail en cours avec Maëva Ouattou.

enseigner aux plus faibles, au risque de faire baisser le niveau, à moins que l'on enseigne à *l'élève moyen standard*, ralliant ainsi le plus grand nombre, tout en délaissant les marges ! Par une transformation en profondeur de l'école, l'approche inclusive a la prétention de rejoindre tous les élèves, sans faire baisser le niveau.

Pour l'enseignant, passer du constat d'hétérogénéité de sa classe à la gestion positive des singularités (Jollien, 2019) demande un changement paradigmatique. Il lui faut adopter un paradigme centré sur la recherche de l'hétérogénéité (Fradette & Lataille-Démoré, 2003), considérant cette dernière non plus comme un problème qu'il faut surmonter, mais comme une occasion qu'il faut saisir.

Considérer l'hétérogénéité comme « une occasion qu'il faut saisir » : l'invitation peut choquer l'enseignant qui peine déjà à enseigner à un groupe classe relativement homogène. Par ailleurs, l'hétérogénéité étudiée dans une méta-analyse comme celle de Fradette et Lataille-Démoré (2003) est uniquement une hétérogénéité d'âge : on peut s'interroger sur d'autres formes d'hétérogénéité comme celles qui sont au cœur du projet de l'École inclusive.

### ***Penser l'hétérogénéité depuis la TAD***

Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, on peut penser l'hétérogénéité d'une classe comme l'effet de contraintes relevant de différents niveaux de l'échelle de codétermination didactique. On peut postuler que, même si elles sont conditionnées par des contraintes relevant de hauts niveaux dans l'échelle de codétermination didactique, tel celui de l'humanité, les formes d'hétérogénéité que l'on rencontre à l'École font l'objet d'une *conversion didactique*<sup>14</sup> qui les fait traduire en termes de variabilité d'équipement praxéologique et didactique. Précisons : tel enfant souffrant d'un handicap (un enfant malvoyant, par exemple) exprime une contrainte relevant du niveau de l'humanité<sup>15</sup> qui trouve une conversion didactique dans le fait que ses techniques d'étude vont être largement informées par son handicap – qu'il soit ou non considéré comme un handicap, d'ailleurs : là n'est pas le problème. Dans ce qui suit, je m'attacherai à l'étude de conditions et contraintes du niveau de l'école, voire du système didactique, et des formes d'hétérogénéité qu'elles engendrent.

---

<sup>14</sup> Voir (Artaud, 1998, p. 138) : « sociologues ou psychologues identifient des candidats à être des conditions écologiques d'objets mathématiques ou didactiques ; mais il reste à étudier si ces candidats ont une *conversion didactique*, c'est-à-dire s'ils affectent l'existence des organisations mathématiques ou didactiques ; et, si c'est le cas, de quelle manière, selon quels mécanismes, dans quelle mesure ? »

<sup>15</sup> Ou du moins de la société. McDermott et Varenne montrent par exemple que la surdité peut être ou ne pas être considérée comme un handicap selon la structure de la société dans laquelle elle est vécue (McDermott & Varenne, 1995, p. 330) : « It is one kind of problem to have a behavioral range different from social expectations; it is another kind of problem to be in a culture in which that difference is used by others for degradation. »

Considérons le cas d'une classe de 5<sup>e</sup>, en France en 2019, qui étudie la question suivante : où creuser un puits pour qu'il soit à égale distance des maisons de trois villageois ? Qui connaît quelque peu les mathématiques et leur enseignement reconnaîtra là un enjeu de l'étude autour de l'objet « centre du cercle circonscrit », par exemple, ou encore, de façon plus conforme aux programmes en cours en 2019, autour de l'objet « médiatrice ». On peut faire une analyse praxéologique de l'activité consistant à positionner un puits à égale distance de trois maisons, ou plutôt de celle qui consiste à *construire* un *point* à égale distance de trois *points* donnés. On peut considérer qu'elle consiste en la réalisation d'un type de tâches, « construire un point », au moyen d'une technique qui, dans le cas où le point à construire est donné par une contrainte de la forme « égalité de distance à trois points fixés, non alignés », revient à tracer deux des médiatrices du triangle formé par ces trois points et à désigner le point d'intersection de ces deux droites comme le point cherché. La justification de cette technique fait appel à des propriétés de la médiatrice qui sont connues des élèves de 5<sup>e</sup> : chaque point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités du segment et réciproquement, tous les points à égale distance de ces extrémités sont sur la médiatrice du segment. L'ensemble de la démarche se justifie par un discours théorique qui indique notamment que la construction d'un point, en géométrie, consiste à l'obtenir comme intersection d'objets déjà construits, droites ou cercles.

Les conditions qui règnent au sein de la classe sont telles que les élèves ne disposent pas encore d'un équipement praxéologique qui leur permet de construire un point équidistant de trois points sans trop devoir y penser : ils ne disposent pas encore d'une technique pour le faire. Ils savent, en revanche, construire à la règle et au compas la médiatrice d'un segment, ils connaissent le lien entre cet objet et les symétries axiales, ainsi que le fait que la médiatrice d'un segment est le lieu des points équidistants des extrémités du segment.

Considérons une situation possiblement didactique (voir p. 23)  $\zeta = (\tilde{n}, \hat{u}, \delta, C)$  de noyau cognitif  $\tilde{n} = (\hat{i}, o, \hat{s}, \hat{v})$ . La situation  $\zeta$  constitue une situation possiblement didactique, dont le caractère didactique, anti ou iso-didactique ne peut être établi qu'au terme d'une analyse des rapports à l'issue de l'étude. *Dans le cadre de cette situation*, le geste  $\delta$  constitue une action dont l'analyse praxéologique conduit à l'élucidation d'une *praxéologie possiblement didactique*, que l'on qualifiera de *didactique*, *anti-didactique* ou *iso-didactique* si son effet sur le rapport de  $\hat{i}$  s'avère lui-même *in fine* didactique, anti- ou iso-didactique respectivement. Le geste consistant à faire reformuler l'énoncé par un élève s'analyse ainsi comme la réalisation d'un certain type de tâches (« demander à un élève de reformuler l'énoncé d'une activité ») au moyen d'une technique (on choisit l'élève en fonction de sa capacité à lire correctement, mais aussi en fonction d'autres enjeux, par exemple le fait qu'on pense qu'il n'a peut-être pas parfaitement compris la consigne et que la reformulation pourra l'aider, etc.) qui se justifie par un discours technologique (pour un élève, reformuler la consigne est un moyen de s'assurer qu'il l'a bien comprise, mais aussi de se l'approprier ; pour le professeur, c'est un moyen de

déterminer si les élèves ont bien compris, mais aussi de préciser certains points qui demeureraient confus ; c'est aussi un moyen pédagogique de regrouper la classe après la lecture silencieuse individuelle de l'énoncé). La praxéologie ainsi dégagée est une praxéologie possiblement didactique relativement à la situation  $\zeta$ . Le caractère possiblement didactique d'une praxéologie est *étroitement lié* à la situation possiblement didactique observée : sous certaines conditions, « tracer les segments qui relient les trois points donnés » peut s'avérer inutile (si on dispose d'une technique pour construire le point équidistant de ces trois points, il suffit de construire les médiatrices de deux segments, et pour ce faire il n'est pas nécessaire de tracer les segments) ou bien être un geste possiblement didactique, découlant donc de la mise en œuvre d'une praxéologie possiblement didactique – faire apparaître le triangle peut conduire à l'idée de tracer ses droites remarquables les plus courantes : médianes, médiatrices, bissectrices.

### ***Hétérogénéités cognitive, praxéologique, didactique***

Pour parler d'hétérogénéité, il faut s'accorder sur l'objet sur lequel porte cette hétérogénéité, et sur les manifestations de cette hétérogénéité. Partons du principe que l'hétérogénéité se manifeste dans un collectif d'étude par des rapports à certains objets qui *diffèrent* d'une personne à l'autre, ou entre quelques personnes du collectif. Considérant un collectif d'étude engagé dans l'étude de la construction d'un point équidistant de trois points donnés, l'hétérogénéité peut se manifester par un rapport différent à l'objet « point » ou à l'objet « équidistance » – certains élèves peuvent ne pas connaître ce dernier mot, ni même la notion – ; elle peut se manifester dans la divergence des rapports à certains éléments praxéologiques – certains élèves peuvent savoir construire un point équidistant de deux points sur une droite, par exemple, alors que d'autres, tout en sachant ce que peut représenter un tel objet, ne sont pas capables de le construire ; ou bien tous ne savent pas au même degré justifier leur construction au compas – ; elle peut se manifester dans l'écart de maîtrise de praxéologies d'étude – de praxéologies possiblement didactiques : certains sauront prendre l'initiative de simplifier un problème pour l'étudier, d'autres procéderont systématiquement par tâtonnements, etc. De ces trois catégories d'objets découlent trois types d'hétérogénéité : l'hétérogénéité cognitive, qui se manifeste par la diversité des rapports des élèves à certains objets étudiés, et qui se confond, en pratique, avec l'hétérogénéité praxéologique qui découle de la variabilité des rapports aux praxéologies étudiées. On n'est pas très éloigné de ce que Sarrazy (2002) a nommé « hétérogénéité didactique », même s'il désigne plutôt par là un processus d'augmentation puis de réduction de ce que nous nommons l'hétérogénéité praxéologique.

Nous préférons réserver la dénomination d'*hétérogénéité possiblement didactique* à une troisième forme d'hétérogénéité, de façon à respecter une dichotomie fondamentale qui traverse toute la TAD : celle du praxéologique et du didactique. Si les gestes didactiques peuvent bien faire l'objet d'une analyse praxéologique, il s'avère que cette analyse est toujours tributaire du fait qu'un geste d'étude est un geste d'étude *d'un certain objet*. Pour comprendre les gestes d'étude, il convient alors de commencer par produire une analyse

praxéologique des objets étudiés. Le niveau didactique est celui que l'on décrit en procédant à l'analyse des gestes d'étude réalisés lors de l'étude de l'objet étudié.

L'hétérogénéité « didactique » selon Sarrazy porte sur les objets étudiés, c'est-à-dire qu'elle se situe au niveau praxéologique de l'analyse, raison pour laquelle je la nommerai désormais *hétérogénéité praxéologique*, ce qui permet en outre de la différencier de l'hétérogénéité didactique qui, pour sa part, porte sur les praxéologies possiblement didactiques des élèves : tous *ne savent pas étudier* au même degré les mêmes objets. Lors de la séance observée en 2019, que je suis en fil rouge de ce texte, après avoir lancé les élèves dans le travail sur l'activité du « puits », le professeur les laisse chercher dans une large autonomie. Voici les notes prises lors de l'observation de cette séance :

Certains élèves mesurent les distances entre les villageois. D'autres tracent les segments qui les relient. D'autres encore tracent des arcs de cercle, par tâtonnements. Un élève trace le triangle, puis ses médianes et mesure ensuite les distances des villageois au point d'intersection des médianes. Il constate qu'elles ne sont pas égales. Un élève a trouvé le lieu du puits en tâtonnants et a tracé le cercle qui « prouve » que c'est bon. P. s'approche de lui, puis lui demande comment il a trouvé le point. Il conclut en disant : « tu as eu de la chance ! ». Un élève a dessiné le puits et tracé des traits qui le relient aux villageois... La plupart des élèves procèdent par tâtonnements, guidés par le fait qu'il doit falloir utiliser le compas (parce qu'on est en maths ?).

Autant de gestes d'étude (mesurer les distances entre les villageois, tracer les segments qui les relient, tracer des arcs de cercles par tâtonnements, tracer les médianes du triangle, les mesurer, placer le point demandé par tâtonnements, vérifier ensuite qu'il convient à peu près – et donc disposer d'une technique de vérification ! – dessiner une figure qui renvoie plus au système étudié qu'au modèle de ce système) qui sont maîtrisées et utilisées à des degrés divers par des élèves divers : l'hétérogénéité ne se marque pas seulement entre ceux qui savent faire et ceux qui ne savent pas (hétérogénéité praxéologique) mais entre les différentes façons d'étudier que mettent en œuvre différents élèves – même parmi ceux qui « ne savent pas faire ». L'hétérogénéité dans les techniques et le *logos* d'étude relève de ce que j'ai nommé *hétérogénéité didactique* : on peut en effet analyser l'extrait proposé comme relevant de la réalisation du moment exploratoire (exploration du type de tâches et émergence d'une technique) et on y observe des gestes différents dont l'analyse praxéologique permet de dégager notamment des éléments de *logos* différents. Ainsi, les élèves qui procèdent par tâtonnements pour placer le point diffèrent fortement de ceux qui tracent les médianes : ces derniers ont peut-être en tête le fait qu'en géométrie, un point se construit comme intersection d'objets (droites et cercles, notamment) déjà construits. Cet élément de discours (de *logos*) sur ce que faire de la géométrie veut dire leur permet alors de produire une technique d'étude (tracer les médianes) qui, sans aboutir au résultat escompté, est néanmoins plus conforme au type de solutions attendues (obtenir le point comme intersection d'objets).

Les gestes qui consistent à placer le point par tâtonnements, d'une part, et comme intersection des médianes, d'autre part, sont deux gestes possiblement didactiques dont la réalisation passe par la mise en œuvre d'éléments de praxéologies possiblement didactiques – dont on peut par exemple conjecturer (une analyse plus poussée des productions de ces élèves, que les données disponibles ne rendent pas possible, pourrait seule permettre de conclure) que la seconde est *didactique*, alors que la première est *iso-didactique*, voire *anti-didactique* si elle conduit les élèves qui la mettent en œuvre à *régresser* dans leur conception de l'expérimentation en géométrie.

### ***Hétérogénéité didactique et dynamique de l'étude***

Il faut ici reprendre ce que disent Sarrazy (2002) et Chopin (2007a, 2007b, 2010a, 2010b) sur la dynamique de l'étude : le professeur peut œuvrer sciemment à produire de l'hétérogénéité praxéologique (didactique au sens de Sarrazy) pour ensuite la réduire. Ces temps d'accroissement et de réduction de l'hétérogénéité scandent le temps de l'étude d'une certaine façon. Néanmoins, de telles expansions/contractions de l'hétérogénéité peuvent se produire à peu près n'importe quand dans l'étude (par rapport aux moments didactiques) : un second niveau d'analyse, au niveau didactique cette fois, permet d'étudier la dynamique de l'étude de façon à être en meilleure adéquation avec l'étude du temps didactique au moyen des moments didactiques. Ainsi, les praxéologies possiblement didactiques disponibles et mises en œuvre par un élève à un instant (d'horloge) donné le sont dans le cadre de la réalisation d'un certain moment didactique ; l'hétérogénéité des praxéologies possiblement didactiques se manifeste ainsi notamment dans le cadre de la réalisation d'un ou plusieurs moments de l'étude. La gestion de cette hétérogénéité, à l'initiative du professeur, ou bien des élèves, peut conduire à une accélération de la réalisation de certains épisodes de moments didactiques, contribuant ainsi à la dynamique de l'étude.

Dans le cadre de la séance observée, la suite montre que le professeur n'exploite qu'une réponse : celle fournie par un élève qui a « réussi ». Il n'y a aucun travail mené par le professeur pour réduire l'hétérogénéité didactique et les gestes d'étude réalisés par les élèves restent lettre morte, alors même que ceux qui avaient mis en œuvre les praxéologies en apparence les plus pauvres (tâtonnements) disposaient au moins d'une *technique de vérification* par le tracé du cercle de centre le point placé et passant par au moins l'un des points donnés. Il aurait pu s'appuyer sur cette technique de vérification pour interroger, par exemple, la technique « correcte » mise en place par l'élève interrogé, afin de faciliter la réalisation du moment technico-théorique.

Dans le cadre d'une situation possiblement didactique, donc, les rapports des élèves à des praxéologies possiblement didactiques ne sont pas les mêmes initialement ; la gestion de l'étude peut conduire le professeur à favoriser une discussion sur les moyens même de l'étude, c'est-à-dire, précisément, sur les praxéologies possiblement didactiques utilisées par les uns et les autres. L'homogénéisation qui s'ensuit conduit à égaliser quelque peu les rapports des élèves à ces praxéologies possiblement didactiques, en refusant certaines

d'entre elles, en en retenant d'autres, en justifiant les unes par les autres, etc. À un instant ultérieur, l'hétérogénéité didactique a donc diminué, peut-être dans le sens d'une meilleure répartition de praxéologies didactiques (et non seulement possiblement didactiques), avec en retour une amélioration des rapports à l'enjeu de l'étude (et donc... une réduction de l'hétérogénéité praxéologique). La dynamique de l'étude me paraît devoir être analysée au niveau de l'hétérogénéisation/homogénéisation des praxéologies possiblement didactiques plutôt qu'au niveau praxéologique (mathématique).

Prenons par exemple le cas Marion, étudié par Chopin dans sa thèse : cette professeure des écoles propose une série d'exercices d'abord simples, pour lesquels une homogénéité praxéologique (ou cognitive) presque complète s'observe, puis plus complexes jusqu'à ce que la classe se clive (création d'hétérogénéité praxéologique). Marion indique que c'était son souhait : « Dans mon anticipation de séance, j'avais bien anticipé le moment où ils seraient tous d'accord et il n'y aurait pas débat et là il ne fallait pas que je m'attarde. [...] Et je craignais de ne pas arriver suffisamment tôt aux difficultés » (Chopin, 2007, p. 179). Si elle parvient ensuite à une homogénéisation praxéologique, c'est au prix d'un travail de groupe qui a sans doute œuvré dans le sens d'un partage des équipements possiblement didactiques des élèves – et donc d'une hétérogénéisation/homogénéisation des praxéologies possiblement didactiques. Néanmoins, les données fournies par Chopin ne permettent pas de conclure : « du travail de groupe est mis en place : Marion intervient auprès des élèves en difficulté. La séquence s'achève par un bilan oral des "choses" (méthodes, événements de la séquence...) ayant permis aux élèves de progresser » (p. 285).

## **Perspectives**

La thèse de Maëva Ouattou, que j'ai commencé à co-encadrer en 2023 avec Hamid Chaachoua, porte principalement sur l'identification des praxéologies didactiques des élèves et des professeurs en classe de mathématiques dans l'enseignement secondaire français (Bonnat et al., 2020; Croset & Chaachoua, 2016). Assez rapidement, notre étude de cette question nous a conduits à interroger la notion d'hétérogénéité, à partir de quoi nous avons élaboré quelques éléments de *logos* relatifs à l'hétérogénéité possiblement didactique. Je souhaite poursuivre cette enquête avec Maëva Ouattou, en particulier à propos de la question suivante : de quelle forme d'hétérogénéité (cognitive, praxéologique, possiblement didactique) les enseignants sont-ils le plus avisés et avec laquelle sont-ils le plus en capacité de travailler délibérément ? Je pense que l'hétérogénéité possiblement didactique n'est pas clairement différenciée, chez les professeurs, de l'hétérogénéité praxéologique ou cognitive. Il s'agirait de mettre à l'épreuve cette conjecture et d'en étudier quelques conséquences sur la direction de l'étude par les professeurs.

Dans la même veine, nous avons proposé, Maëva Ouattou et moi, de reconnaître comme l'une des fonctions importantes des démonstrations le fait d'introduire de nouvelles praxéologies possiblement didactiques (la première fois qu'on procède à une

démonstration par exhaustion de cas, on découvre une praxéologie possiblement didactique : étudier tous les cas possibles). Je souhaite poursuivre avec Maëva Ouattou en suivant cette piste. Une étude systématique des démonstrations réalisées dans des manuels de cycle 4 devrait pouvoir permettre d'identifier les praxéologies possiblement didactiques qui apparaissent au détour de ces démonstrations et d'en opérer une première classification selon leur utilisation ultérieure dans le cursus.

# Organiser l'étude

Une organisation classique de l'étude à l'université a longtemps consisté à faire réaliser par le professeur le *moment de l'institutionnalisation* (essentiellement du *logos*), et une partie du *moment technologico-théorique* (essentiellement la justification d'éléments technologico-théoriques, beaucoup plus rarement la production, l'explication et la justification de techniques à partir de ces éléments) lors de séances de cours magistraux, puis à faire réaliser par des chargés de TD le *moment du travail des praxéologies* étudiées (essentiellement de la *praxis*, à travers des exercices d'entraînement par exemple), le tout étant suivi d'une séance dédiée au *moment de l'évaluation* (l'examen). Le *moment de l'émergence de la technique* n'est généralement pas réalisé pour lui-même, mais au détour de difficultés que rencontrent les étudiants ; il est souvent réalisé par les étudiants eux-mêmes, hors classe. C'est d'ailleurs une manifestation particulièrement fréquente du refoulement du didactique, parce qu'il n'y aurait rien là à étudier, que les techniques ne soient pas complètement explicitées, la faveur allant généralement aux ingrédients technologico-théoriques, qui sont articulés entre eux mais rarement avec la technique. La partie du *moment technologico-théorique* qui permet de relier le *logos* à la *praxis* (c'est-à-dire celle qui permet de produire un discours de justification de la technique) n'est pas réalisée (ni en CM, ni en TD, sauf rares exceptions provoquées par des questions d'étudiants), ou alors en autonomie par les étudiants, hors classe.

D'autres organisations de l'étude sont pourtant envisageables, dans une grande variété qui est seulement limitée (mais c'est beaucoup) par les conditions et contraintes propres aux institutions où se déploie l'étude. Néanmoins, le fait que l'organisation de l'étude, et en particulier l'organisation *pédagogique*, puisse dépendre des praxéologies étudiées est une assertion dont le bien-fondé est peu reconnu dans nos sociétés. Même si toute personne a été confrontée à cet état de fait – ne serait-ce qu'en tant qu'élève –, il a été pour ainsi dire *refoulé* : on ignore que l'étude s'organise (au double sens passif et actif) et que cette organisation dépend étroitement de ce que l'on étudie. Une forme que prend ce refoulement consiste à ignorer la différence entre ce qui est fait principalement pour *apprendre* et ce qui est également fait pour apprendre, mais dont la fonction première est pourtant autre (par exemple : construire une technique – pour ensuite l'apprendre).

## Fonctions didactiques et fonctions cognitives : une illustration du refoulement du didactique<sup>16</sup>

Dans nos sociétés, un lien étroit est en effet généralement établi entre deux aspects a priori distincts des activités humaines : l'étude et l'apprentissage. Ce phénomène n'est qu'un

---

<sup>16</sup> (Bourgade, 2022)

effet d'une contrainte plus large et omniprésente qui opère au niveau des sociétés occidentales, la contrainte du refoulement du didactique (Chevallard, 2023b) :

il nous faut considérer plus généralement les changements que peut subir – du point de vue d'un observateur  $\hat{w}$  – le rapport  $R(\hat{i}, o)$  [à un objet donné  $o$ ], notamment lorsque l'instance  $\hat{i}$  est la position de professeur de mathématiques  $p_\mu$ . La dynamique de  $R(\hat{i}, o)$  a été décrite de façon générale par les trois termes d'apprentissage, de désapprentissage et de non-apprentissage. Tout cela est réglé par les conditions et contraintes auxquelles est soumise la position  $p_\mu$  – je vais revenir là-dessus. Mais je voudrais d'abord m'arrêter sur la manière dont un énoncé  $\theta$  [...] s'intègre ou non, durablement ou non, au rapport  $R(p_\mu, o)$ . Il se peut d'abord que  $p_\mu$  n'ait jamais été en contact avec l'énoncé  $\theta$ , en sorte que  $R(p_\mu, \theta) = \emptyset$ , ou, plus exactement, que, quel que soit l'instant  $t$  avant l'instant actuel, on ait  $R_t(p_\mu, \theta) = \emptyset$ . Dans ce cas, on dira que  $p_\mu$  est innocent de l'énoncé  $\theta$ . Par contraste, pour parler de non-apprentissage à propos  $p_\mu$  et de  $\theta$ , il faut d'abord que  $p_\mu$  ait été mis en contact, à un instant passé  $t_0$ , d'une manière ou d'une autre, avec  $\theta$  ; et il faut ensuite que, malgré cela, l'observateur  $\hat{w}$  conclue que, pour  $t > t_0$ ,  $R_t(p_\mu, \theta) = \emptyset$ . Pour  $\hat{w}$ , tout se passe alors comme si  $p_\mu$  n'avais jamais eu de contact avec  $\theta$ . On parlera alors de non-apprentissage, la disparition, aux yeux de  $\hat{w}$ , de toute trace de l'énoncé  $\theta$  dans « l'univers cognitif » de  $p_\mu$  constituant par définition le phénomène de refoulement de  $\theta$ . Je rappelle que j'ai défini l'univers cognitif d'une instance  $\hat{i}$  vu par  $\hat{w}$ , et j'ai noté  $\Omega_{\hat{w}}(\hat{i})$ , l'ensemble de tous les objets que, du point de vue  $\hat{w}$ ,  $\hat{i}$  connaît – en ce sens que l'on a  $\hat{w} \vdash R(\hat{i}, o) \neq \emptyset$ . Ce qui précède conduit à poser l'existence d'un inconscient cognitif de  $\hat{i}$ , formé des énoncés avec lesquels  $\hat{i}$  a été en contact d'une manière ou d'une autre et qui ont été refoulés au sens précédemment indiqué.

Le refoulement, vu comme contrainte du niveau de la société, renvoie à l'idée qu'un énoncé  $\theta$  a pu être rencontré *en un grand nombre de positions* au sein de cette société, ou *par un grand nombre de personnes*, sans qu'il ait été conduit à s'inscrire dans l'univers cognitif de cette institution particulière qu'est la société.

Nous l'avons vu, la définition que l'on donne, en TAD, du fait pour une personne d'avoir *connaissance* de quelque énoncé  $\theta$  est minimaliste (p. 14) : il suffit pour cela que le rapport de cette personne  $x$  à l'énoncé  $\theta$  soit *non vide* –  $R(x, \theta) \neq \emptyset$ . Au contraire, dans les sociétés occidentales au moins, la question de l'apprentissage est en quelque sorte maximaliste : il s'agit, pour apprendre, d'atteindre un niveau de familiarité *très élevé* avec la chose apprise. Apprendre ses tables de multiplication, ce n'est en aucune façon se contenter d'avoir un rapport non vide à elles, mais bien les *connaître*, c'est-à-dire les connaître *par cœur*. De cela découle que l'étude doit conduire à l'apprentissage *complet* – alors que la didactique souligne au contraire qu'il n'y a pas d'apprentissage complet, mais toujours de l'à apprendre : c'est ce que recouvre la notion d'exotéricité (Chevallard, 2015, p. 182) :

we are prone to feel frustrated at not having all the knowledge needed—all of history, biology, mathematics, physics, chemistry, philosophy, linguistics, sociology, and so on indefinitely. The character implicitly fantasised here is what I've come to call an *esoteric* (using thus the adjective also as a noun), who is supposed to already know all the

knowledge needed (the idea most people have of “a historian”, “a biologist”, “a mathematician”, “a physicist”, etc., is commonly akin to this fantasy). By contrast, an *exoteric* has to study and learn indefinitely, and will never reach the elusive status of esoteric. Indeed, all true scholars are exoteric and should remain so in order to remain scholars: esotericism, as I define it here, is a fable.

Du point de vue courant, l'apprentissage tend à l'ésotérisme de celui qui apprend. Le fait que les gestes didactiques puissent entraîner un apprentissage au sens minimal et non au sens maximal est un fait que la plupart des élèves ont rencontré sans forcément que cela soit inscrit dans leur univers cognitif – ou plutôt sous la forme d'une « fable » tout autre renvoyant à leur incapacité personnelle à apprendre telle ou telle œuvre.

Il convient à ce point de faire un détour par la théorie des moments de l'étude que j'ai rappelée rapidement (p. 18). Commençons par étudier plus précisément les fonctions du *moment exploratoire* (Chevallard, 1999, p. 252) :

Le *deuxième moment* est celui de l'*exploration* du type de tâches  $T_i$  et de l'*élaboration d'une technique*  $\tau_i$  relative à ce type de tâches. On notera que, contre une certaine vision héroïque de l'activité mathématique, regardée comme une suite erratique d'affrontements singuliers avec des difficultés toujours nouvelles, c'est bien l'*élaboration de techniques* qui est au cœur de l'activité mathématique. Au fantasme moderne de l'élève-héros triomphant sans coup férir de toute difficulté possible s'oppose ainsi la réalité indépassable de l'élève-artisan laborieux, qui, avec ses condisciples, sous la conduite avisée du professeur, élabore patiemment ses techniques mathématiques. En réalité, l'étude et la résolution d'un problème d'un type déterminé va toujours de pair avec la constitution d'au moins un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger : l'étude d'un problème *particulier*, spécimen du type étudié, apparaît ainsi, non comme une fin en soi, mais comme un *moyen* pour qu'une telle technique de résolution se constitue. Ainsi se noue une dialectique fondamentale : étudier des problèmes est un moyen permettant de créer et de mettre au point une technique relative aux problèmes de même type, technique qui elle-même sera ensuite le moyen de résoudre de manière quasi routinière des problèmes de ce type.

Ce qui se lit ici est le souci d'insister sur le fait que l'une des fonctions principales du moment exploratoire est la *construction d'une technique*, serait-elle embryonnaire. Bien sûr, la réalisation du moment exploratoire conduit à une mise en présence de ces éléments de techniques que l'étudiant, par conséquent, en vient à *connaître* : son rapport à ces éléments de techniques devient quelque peu *non vide* – il y a eu *apprentissage* au sens de la TAD. Néanmoins, on est loin de l'apprentissage « complet », pour ainsi dire ésotérique. Cela me conduit à distinguer deux grands types de fonctions des gestes didactiques : leurs *fonctions cognitives* et leurs *fonctions didactiques*.

Dans le cas du moment exploratoire, on relèverait ainsi une *fonction cognitive* qui comprend notamment le fait pour l'étudiant de voir son rapport à la technique s'enrichir, *aussi peu que ce soit*. Pour autant, l'apprentissage n'est pas la seule visée du moment exploratoire et on peut y voir une autre fonction : l'élaboration proprement dite de la technique. C'est ce type de fonction que je propose de nommer *didactique*.

L'énoncé  $\theta$  qui m'intéresse est alors le suivant : *tout geste possiblement didactique engage éventuellement des fonctions didactiques et des fonctions cognitives*. La réalité que recouvre cet énoncé a probablement été rencontrée par tout élève : l'étude n'est pas lettre morte, même si la chose apprise reste mineure ; quelque chose a été produit chemin faisant. Les moments de la genèse praxéologique (moments de première rencontre, exploratoire et technologico-théorique) réalisent par excellence des fonctions principalement didactiques (outre, bien sûr, des fonctions cognitives). Pourtant, le point de vue courant consiste à penser que tout geste didactique vise un apprentissage au sens fort. Il y a refoulement de l'énoncé  $\theta$  : la réduction des fonctions des gestes didactiques à leurs seules fonctions cognitives relève du refoulement du didactique.

En 2021-2022, à l'occasion d'un examen de didactique, j'ai demandé à des élèves professeurs du master MEEF<sup>17</sup> de l'INSPÉ<sup>18</sup> de Toulouse de détailler leurs techniques de réalisation du moment technologico-théorique, et de décrire dans quelle mesure, et de quelle façon, ces techniques prenaient en compte le travail qui avait été réalisé en amont (c'est-à-dire pendant la réalisation des moments de genèse praxéologique). Une question en particulier avait pour objectif d'évaluer leur compréhension des moments de l'étude :

À l'issue d'une activité d'étude et de recherche, est-ce que le rapport des élèves à la praxéologie étudiée est conforme au rapport institutionnellement attendu à cette praxéologie ?

La réponse attendue était que les rapports des élèves ont bien sûr évolué au cours d'une activité d'étude et de recherche<sup>19</sup>, mais pas au point d'atteindre un apprentissage « complet » ni même « suffisant » selon un professeur. Les travaux des étudiants ont mis en évidence quelques éléments de réponse qui me paraissent intéressants : le *rapport* qui est institutionnalisé à l'issue d'une AER (voir p. 87) est en quelque sorte une *moyenne* des rapports des élèves après l'AER ; l'AER permet à l'élève d'arriver à une maîtrise de la praxéologie enjeu de l'étude ; l'AER est une sorte de problème ouvert qui appelle une correction ; l'institutionnalisation vient seulement combler les manques qui restent après l'AER. Ces quelques points de vue sur les AER et l'institutionnalisation font apparaître l'AER dans ses fonctions cognitives : l'AER produit de l'apprentissage, certes hétérogène ou lacunaire, mais suffisant pour produire le rapport institutionnellement attendu ; ce n'est pas seulement une production insuffisante ou lacunaire de la praxéologie enjeu de l'étude, mais bien un apprentissage puisque ce sont les *rapports des élèves* qui ont évolué et sont quasiment suffisants pour élaborer le rapport institutionnalisé.

Une conséquence du refoulement des fonctions proprement didactiques réside dans la façon dont l'institutionnalisation est alors menée : plutôt qu'un processus d'étude qui

---

<sup>17</sup> Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation.

<sup>18</sup> Institut national supérieur du professorat et de l'éducation.

<sup>19</sup> À propos des AER, voir p. 102.

conduirait des éléments de milieu produits pendant la genèse praxéologique à une description de l'enjeu de l'étude suffisante pour son institutionnalisation, il s'agit pour les élèves professeurs de synthétiser ce qui a été appris (ou ce qu'ils pensent avoir été appris). En particulier, il n'y a pas de nécessité de procéder à un bilan de l'étude suite à une AER : un tel bilan se confondrait pour eux avec le texte institutionnalisé. On retrouvera le même penchant chez des professeurs aguerris (voir p. 60).

## **Comment la profession gère-t-elle le moment d'institutionnalisation<sup>20</sup> ?**

Les précisions apportées par les extraits que j'ai donnés de (Chevallard, 1999) dans les pages qui précèdent permettent de dessiner un *modèle praxéologique de référence* de l'organisation de l'étude, c'est-à-dire un modèle d'une praxéologie possible de réalisation de l'organisation de l'étude, qui sera pris pour référence dans la suite – ce qui ne préjuge en rien de sa qualité intrinsèque, mais permet de disposer d'une *référence* par rapport à laquelle situer les observations.

Parce que « *l'institutionnalisation* [a] pour objet de préciser ce qu'est “exactement” [la praxéologie] élaborée », en distinguant notamment « les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés », il paraît important, tout d'abord que la genèse praxéologique ait lieu *avant* l'institutionnalisation, d'autre part que l'institutionnalisation elle-même soit *articulée* à la genèse praxéologique (c'est-à-dire aux moments de première rencontre, exploratoire et technologico-théorique).

La genèse praxéologique peut être réalisée au moyen d'*activités d'étude et de recherche* (AER, voir Chevallard, 2009) qui se caractérisent par la réalisation des moments de genèse praxéologique et par l'autonomie didactique importante qui est accordée aux élèves (leur *topos* doit être important). L'AER doit être suivie d'un *bilan d'AER* dont la substance sera à nouveau étudiée pour dégager les éléments qui seront finalement institutionnalisés. On note le rôle clef que joue le *bilan d'AER*, et sa différence avec la *synthèse* proprement dite qui a lieu lors de l'institutionnalisation. La synthèse est dégagée du contexte spécifique de l'AER, tandis que le bilan résume simplement *ce qui a été fait* dans le cadre de l'AER, sans chercher à le dégager du contexte de l'étude.

Considérons la situation suivante (Chevallard, 2002, 2007a) : un fermier veut répartir 255 œufs dans des boîtes de six œufs. On demande aux élèves de l'aider à déterminer le nombre *exact* de boîtes qu'il s'agit pour lui d'utiliser. Dans le cadre de l'AER qui débute à l'occasion de cette situation problématique, les élèves peuvent être conduits à soustraire successivement le nombre 6 à 255, jusqu'à obtenir un nombre inférieur à 6. Le *bilan* d'AER comportera alors l'idée qu'il faut soustraire *autant de fois que possible* le nombre de places dans une boîte d'œufs du nombre d'œufs disponibles. En déterminant ce

---

<sup>20</sup> (Bourgade & Durringer, soumis, soumise)

« nombre de fois possibles », on obtient un nombre auquel il faut ajouter un pour tenir compte des quelques œufs qui restent et qui sont en nombre inférieur à 6. On détermine ainsi le nombre de boîtes d'œufs nécessaires.

L'étude de ce bilan conduit à remarquer que la résolution du problème rencontré est transposable à n'importe quel problème de répartition d'une collection d'objets en collections de cardinaux égaux. Elle conduit également à observer qu'il faut déterminer le nombre de fois qu'entre dans le cardinal de la collection de départ le nombre d'éléments des collections en lesquelles on veut répartir les éléments de la collection de départ. Se dégage ainsi progressivement une technique décontextualisée (la technique de division euclidienne est un élément important de cette technique). Le *logos* sera également produit de la même façon, par décontextualisation progressive du *logos* élaboré dans le temps de l'AER et de son bilan. La synthèse ainsi préparée constituera le texte institutionnalisé, le rapport institutionnellement attendu, la nouvelle *norme* à laquelle il conviendra, pour les élèves, de se conformer désormais.

Le bilan d'AER a une importance double : dégager une praxéologie (encore contextualisée) au-delà de la seule résolution d'un problème (beaucoup de professeurs débutants pensent que le bilan doit prendre la forme d'une *correction* : une AER n'est pas un problème ni un exercice, l'objectif n'en est pas seulement de construire une réponse à une question, ou plutôt cette réponse doit inclure une nouvelle praxéologie qui a permis de la produire) ; fournir un substrat pour l'étude généralisante qui conduit au texte institutionnalisé.

Dans ce *modèle praxéologique de référence de l'institutionnalisation* on voit donc apparaître des aspects qui me semblent cruciaux : le fait que l'institutionnalisation *suive* une activité d'étude et de recherche ; le fait qu'un bilan d'AER soit réalisé *avant* l'institutionnalisation ; le fait que ce bilan diffère de la synthèse qui est le fruit de son étude décontextualisante ; le fait qu'un *topos* important (une autonomie didactique importante) soit offert aux élèves tant dans la réalisation de l'AER et de son bilan que dans la production de la synthèse (Chevallard, 1999, p. 249) :

L'élève doit accepter le professeur comme directeur d'étude, et, dans le même temps, renoncer presque violemment aux trompeuses facilités qu'il lui apporte comme enseignant – et cela, en principe, à propos de *chacun* des moments de l'étude, évaluation et institutionnalisation comprises.

En particulier, l'élève doit accepter que le professeur se limite à diriger l'étude, par cet élève et ses condisciples, de l'AER et de son bilan, tout en renonçant à ce que le professeur lui fournisse d'emblée le texte de la norme à institutionnaliser. D'un point de vue pratique, on peut imaginer des mises en œuvre fondées sur une organisation du cahier laissant apparaître en vis-à-vis les traces et bilans des AER (pages de gauche) et les notes de cours (pages de droite) qui seront produites par les élèves à partir de l'étude des traces produites durant les AER. On peut également suggérer que ce travail s'accompagne de l'exploitation d'éléments du milieu collectif, telle ou telle production d'élève

vidéoprojetée et étudiée collectivement afin d'en dégager les mérites et les manques, etc. Le tout trouverait à s'appuyer sur des questions génériques susceptibles de mener à la production d'une synthèse : « Quel rapport voit-on entre ces diverses situations ? Qu'a-t-on fait ? Comment l'a-t-on fait ? Pourra-t-on le faire dans d'autres situations ? Lesquelles ? Pourquoi ? », etc.

Autant de *points de repère* pour étudier le rapport personnel de quelques professeurs de mathématiques à l'organisation de l'étude et en particulier à l'institutionnalisation.

## Ce qu'en disent les professeurs

J'ai consacré une partie de mes travaux à l'étude du rapport à l'institutionnalisation de la profession de professeur de mathématiques dans l'enseignement secondaire. J'ai pour cela exploité des ressources produites par les étudiants de Master MEEF 2<sup>e</sup> année à l'INSPÉ de Toulouse : ceux-ci ont mené des entretiens avec des professeurs du secondaire dans le cadre de leur mémoire professionnel ; dans ce même cadre, ils ont également enregistré et transcrit des séances de « cours ». Les entretiens ont été préparés sous la direction d'une équipe de formateurs que j'encadrerais. Il s'agissait d'obtenir des informations sur la façon dont les professeurs interrogés préparaient et réalisaient leurs « cours », c'est-à-dire la partie des séquences consacrée à la mise en forme du savoir (à l'institutionnalisation, donc).

Il est rapidement apparu qu'une question d'intérêt portait sur le lien (ou l'absence de lien) fait entre les « activités », préalables au cours, et le « cours ». Les entretiens ont ainsi fait apparaître des questions sur la réalisation d'activités :

Q : Il y a toujours une activité avant le cours ?

R : Pas forcément, pas forcément parce qu'on a pas toujours le temps et il y a pas toujours de nécessité, parfois c'est... Alors soit c'est posé parce qu'on introduit des choses et que, faut bien un point de départ et que parfois on peut pas les y emmener directement. Parfois parce que ça découle directement de ce qu'on a pu rencontrer en exo et qu'il y a pas besoin d'introduire et que... je prends en charge la phase d'institutionnalisation à mon compte sans avoir besoin à ce que les élèves y prennent part. Non, c'est vraiment quand il y a nécessité que les élèves s'approprient la notion et la découvrent d'eux-mêmes que je fais une activité.

Entretien avec un professeur

La présence d'une *activité* est gouvernée par le temps d'horloge : « on a pas toujours le temps ». Un autre critère de décision est lié à la « nécessité que les élèves s'approprient la notion et la découvrent d'eux-mêmes ».

Q : Qu'est-ce que vous évoque le mot institutionnalisation ?

R : C'est compliqué, alors le mot institutionnalisation c'est les définitions les propriétés, c'est tout ce qui est le savoir que les élèves doivent retenir, les méthodes, les procédures tout ce qu'il y a à avoir sur une trace écrite qui est soit dans le cours soit dans les exercices car dans la partie il me semble dans la partie exercices il y a des méthodes par exemple

qui font parties des procédures à connaître, et à pouvoir mettre en œuvre et ça, ça fait partie de l'institutionnalisation.

Q : À quel moment du chapitre arrive-t-elle ? toujours au même moment ? après une AER ?

R : Ça dépend par exemple, il y a plusieurs notions à faire passer, exemple typique sur les fonctions affines en seconde il y a la propriété caractéristique des fonctions affines, donc les accroissements, le coeff directeur qui est valable qu'avec les fonctions affines, ça c'est une notion nouvelle donc on peut faire une activité et ensuite faire la trace écrite. Sur les variations c'est possible aussi de faire une AER et après de faire la trace écrite mais sur qu'est-ce que c'est qu'une fonction affine ils savent déjà donc c'est juste une reprise de la formalisation de quelque chose qu'ils ont fait en troisième, donc là il n'y a pas d'activités. Mes activités il me semble sont importantes quand on prend le temps de découvrir un nouveau concept, une nouvelle notion, quelque chose d'important. Après il y a une vérité du temps, par exemple là j'ai fait sur les fonctions affines, dans l'ancien programme on faisait les généralités sur les fonctions (croissance décroissance) et après on travaillait sur les fonctions particulières, le programme maintenant est tourné dans l'autre sens on commence par quelques propriétés des fonctions particulières puis on finit par institutionnaliser tout ce qui est de l'ordre général. Avant je faisais une AER sur les variations maintenant j'en fais plus car le gain de perte de temps sur une toute petite notion finalement qu'est-ce que c'est qu'une fonction affine ? Eux ils retiennent la droite monte la droite descend. Une fois que j'aurai fait toutes les fonctions de référence ça sera plus simple, ils auront compris la notion de variation. Il y a aussi la manière dont le programme est organisé qui fait que parfois l'activité ne se prête pas toujours.

Entretien avec un professeur

À lire ces entretiens, les activités d'étude et de recherche (AER) sont un dispositif adapté à l'approche d'une « notion nouvelle », alors que pour des notions déjà connues il n'est pas nécessaire d'y faire appel : ce qu'est une fonction affine, « ils savent déjà, donc c'est juste une reprise [...], donc là il n'y a pas d'activités ». Les activités « sont importantes quand on *prend le temps de découvrir un nouveau concept, une nouvelle notion, quelque chose d'important* ». À la nouveauté vient s'ajouter l'*importance* comme critère, et le temps prend une valeur positive chez cette enseignante : on « prend le temps », il n'est plus ce temps que l'activité contribue à faire perdre. Par ailleurs, le *programme* gouverne également le choix de faire ou non des activités puisque « la manière dont le programme est organisé [fait] que parfois l'activité ne se prête pas toujours » à l'étude d'une notion donnée.

D'autres entretiens permettent de dire que, selon les enquêtés, l'activité est d'autant plus légitime que ce qu'elle permet d'*introduire* peut être trouvé par les élèves. Il y a donc des objets à propos desquels on ne saurait « tout inventer » et dans ce cas, il est « nécessaire de commencer par le cours ». Par ailleurs, le produit de l'activité est transparent et déjà en quelque sorte superposable à ce que sera le cours : il ne faut « pas de trace écrite du bilan, non non non, sinon je pense que c'est répétitif » puisque le cours constitue en quelque manière le bilan de l'activité, ou tout au moins le comprend.

Selon les enquêtés, il est par ailleurs illusoire de penser que les élèves sont capables de « tout inventer », ou bien cela demanderait un « temps monstrueux » que l'on est peu enclin à consacrer à cela. L'activité a une fonction modeste : on y découvre « des choses, des propriétés, des *petites* choses », mais le gros du cours ne peut s'y construire. Outre la question du temps (« ça prend quand même un temps ») apparaît un nouveau critère, portant sur le bon vouloir des élèves : « si on est face à une classe passive qui a envie de rien faire, faut y aller pour leur faire faire le cours ». Paradoxalement, « après le cours va de lui-même » si les activités ont permis de mettre au jour ces « petites choses » : « c'est juste une mise au point de ce qu'ils ont découvert en activité ».

L'idée qu'il puisse y avoir un travail à faire, pour ainsi dire *entre* l'activité et ce que les professeurs identifient comme « le cours », est déniée (« c'est juste une mise au point de ce qu'ils ont découvert en activité », « pas de trace écrite du bilan [de l'activité], non non non, sinon je pense que c'est répétitif »).

### **Les manuels comme ressources pour la profession**

Cette hypothèse s'est trouvée renforcée dans l'étude de manuels. Avec Clément Durringer, nous sommes partis du principe que les manuels fournissent une image d'une organisation possible de l'étude, avec des « activités », puis du « cours » et des « exemples » et enfin des « exercices » (voir aussi Chaachoua & Comiti, 2010). La structure des séquences des professeurs interrogés était souvent proche de celle-ci. Nous avons donc supposé que les manuels étaient une source d'inspiration (voir Gueudet & Trouche, 2008 à propos du caractère médiatisé, schématisé, de l'exploitation des ressources par les enseignants) pour organiser l'étude et que le lien entre activités et cours pouvait servir de point de départ pour les professeurs qui utilisent les manuels.

L'analyse des manuels conduit à une conclusion intéressante : les éléments praxéologiques, et notamment les éléments de *logos*, produits dans les activités ne sont parfois pas du tout repris dans le cours, certaines justifications présentes ou ébauchées dans les activités ne sont pas élaborées dans le cours, etc. Il y a une solution de continuité entre les activités et le cours, celles-ci ne sont pas utilisées pour leur caractère mésogénétique et le milieu qu'elles permettent de produire n'est pas exploité pour présenter le cours.

### **Perspectives**

Les deux travaux dont je viens de rendre compte, sur les fonctions cognitive et didactique des moments de l'étude, et sur l'institutionnalisation, développent le même type d'outil : l'idée qui leur est commune est que le refoulement du didactique est une contrainte si massive à l'échelle de la société qu'elle a des effets discernables dans nombre de situations didactiques. Analysée comme l'incapacité à reconnaître le caractère possiblement didactique de nombre de gestes, cette contrainte induit la méconnaissance des effets de certains choix : le geste consistant à produire un bilan d'activité d'étude et de recherche puis d'étudier ce bilan pour réaliser l'institutionnalisation est un geste dont

le caractère possiblement didactique est ignoré – si bien que le geste lui-même n'existe quasiment pas dans les classes.

Je souhaite poursuivre l'étude de phénomènes qui sont fondés sur le refoulement du caractère possiblement didactique de certains gestes. Ainsi, après avoir étudié la fonction d'institutionnalisation (avec Clément Durringer) et la fonction de travail praxéologique (avec Elsa Puchaczewski, voir Puchaczewski, 2024), je souhaite étudier la façon dont les professeurs de l'enseignement secondaire mettent en œuvre la genèse praxéologique dans leurs classes. Pour cela, je dispose d'un grand nombre d'entretiens réalisés par des étudiants de M2 MEEF dans le cadre de leur mémoire professionnel et que je souhaite exploiter à cette fin. Les entretiens ont en effet été réalisés dans cet objectif, la grille d'entretien permettant de mettre en évidence les rapports des enseignants interrogés à la genèse praxéologique.

# La transposition didactique comme effet de structure

La théorie de la transposition didactique est à la fois l'ancêtre et le cœur vivant de la TAD. Ancêtre car on peut y voir les prodromes de la théorie des œuvres et de la relativité institutionnelle défendue par la TAD ; cœur vivant parce qu'au fond, la didactique comme science qui étudie les conditions et les contraintes sous lesquelles diffusent les praxéologies (l'une des définitions successivement avancées en TAD) étudie constamment des phénomènes transpositifs. Dans ce qui suit, je reprends quelques généralités sur ce que la transposition didactique représente ; j'argumente ensuite sur le caractère largement structural des phénomènes transpositifs en présentant deux exemples, l'un qui illustre le rôle que prend la structure positionnelle des institutions (structure que j'entreprends de définir à cet endroit), l'autre qui met en évidence l'importance de la comparaison entre les structures cognitives des institutions (notion que je définis à l'occasion de cette mise au point). « Comment poser une question » et « à la recherche de raisons d'être » sont les titres de deux sections qui insistent sur le fait que les questions elles-mêmes n'ont de sens que relativement à l'institution où elles se posent. Dans le cas des raisons d'être cela induit que ce qui est raison d'être ici peut ne pas l'être ailleurs.

## Transpositions institutionnelle et didactique : généralités

L'économie du didactique, en quelque institution que ce soit, est le fruit d'une histoire que l'on peut tracer à partir de la dynamique *écologique* qui a œuvré au cours du temps à sa production. Les systèmes de conditions qui ont rendu possible, ou impossible, dans tel ou tel état de l'institution, l'étude d'un objet particulier, ont finalement rendu cet objet – dans son état final, lui aussi gouverné par cette dynamique écologique – *familier*, naturalisé, si bien qu'il contribue au bon ordonnancement (*νομός*) de l'*οἶκος* institutionnel. Comprendre l'économie institutionnelle va de soi pour tout bon sujet de l'institution : il n'y a rien à comprendre et l'économie institutionnelle est vécue comme allant de soi. Ce rapport heureux, doxique, à l'institution et à son économie praxéologique ne va pas sans quelque difficulté, en raison en particulier de la *sous-détermination* des praxéologies : « le théorème des accroissements finis », « les équations de degré 2 », « la géométrie du triangle » sont des expressions vagues – mais non ambiguës *tant que* l'accord spontané des sujets de l'institution est assuré par une économie praxéologique et didactique suffisamment stabilisée. Il faut des crises institutionnelles pour que même les bons sujets institutionnels viennent à douter du sens des mots, du sens de la parole institutionnelle.

Par profession, le didacticien se doit d'interroger la naturalité même de l'économie institutionnelle. Une des voies tracées par la *problématique écologique* en didactique (Artaud, 1998) est d'étudier, avec quelque systématisme, l'existant, le possible et

l'impossible, à la lumière des conditions et contraintes institutionnelles qui donnent sens à cette catégorisation. Une autre voie, non exclusive, est plus génétique et s'appuie sur l'analyse des phénomènes transpositifs : la transposition institutionnelle des praxéologies peut expliquer la *structure*, le *fonctionnement* et l'*utilité* (ou l'absence d'utilité) de tel ou tel ensemble de praxéologies dans une institution donnée.

## Utilité et transposition institutionnelle

Considérons la situation générique d'une praxéologie  $\wp$  utilisée dans une institution  $I$ , c'est-à-dire par des personnes occupant certaines positions institutionnelles ( $I, p$ ). La production de cette praxéologie dans  $I$  est rarement endogène : elle est plutôt le fruit d'un façonnement à partir de praxéologies  $\wp', \wp'',$  etc., utilisées dans des institutions  $I', I'',$  etc. Les praxéologies  $\wp', \wp'',$  etc., ont un intérêt pour  $I$ , selon certaines instances  $\hat{u}$ , du fait qu'elles sont utilisées dans  $I', I'',$  etc., pour réaliser des types de tâches que  $\hat{u}$  juge semblables à des types de tâches que certaines instances,  $\hat{u}$  ou d'autres instances de  $I$  ou d'institutions apparentées à  $I$  (pensons ici à la noosphère de  $I$ , c'est-à-dire à l'institution qui *pense I*), jugent profitables à  $I$  – par exemple à l'évolution de l'univers cognitif de  $I$ . Il est une remarque fondamentale qu'il convient de faire : la praxéologie  $\wp$  ainsi façonnée *ne peut pas* être identique à  $\wp', \wp'',$  etc. Celles-ci « vivent » au sein d'institutions caractérisées par des jeux de conditions et de contraintes, formant des biotopes qui leur sont favorables. L'écologie de  $I$  diffère et on y trouve d'autres jeux de conditions et contraintes qui expliquent les menues adaptations dont  $\wp', \wp'',$  etc., doivent faire l'objet pour s'intégrer à  $I$  – sous la forme d'une entité praxéologique nouvelle,  $\wp$ . Ce phénomène de *transposition institutionnelle* est tout à fait général ; il se spécifie dans le cas où l'utilisation de  $\wp$  envisagée dans  $I$  est son *étude* : il s'agit là d'une utilisation très singulière par laquelle on reconnaît, en  $I$ , une *institution didactique* relativement à  $\wp$ . La *transposition institutionnelle* de  $\wp', \wp'',$  etc., en  $\wp$  est alors une *transposition didactique* (Artaud, 1993; Chevallard, 1991). Les raisons d'une telle transposition peuvent être multiples, et l'utilité même de  $\wp'$  dans  $I'$  peut rendre désirable la constitution d'une École pour  $I$  ayant vocation de former des personnes à  $\wp'$ , et donc de créer une institution  $E(I)$  qui ait vocation à organiser et gérer l'étude par ces personnes de  $\wp'$  – ou plutôt, précisément, de  $\wp$ . Le paradoxe est alors le suivant : souhaitant former à  $\wp'$ , on organise l'étude d'un objet,  $\wp$ , qui n'est pas  $\wp'$  – quoique l'on puisse parier sur une proximité suffisante pour que l'étude de  $\wp$  dans  $E(I)$  favorise, de fait, l'intégration à  $I$  et l'utilisation, en son sein, de  $\wp'$ . Ce cas est presque trop favorable en ce qu'il se distingue notablement de la situation modale au sein de l'École d'enseignement *général*.

*Le socle commun de connaissances, de compétences et de culture* qui est au cœur de l'enseignement obligatoire français (*Le socle commun de connaissances, de compétences et de culture*, s. d.),

présente ce que tout élève doit savoir et maîtriser à 16 ans. Il rassemble l'ensemble des connaissances, compétences, valeurs et attitudes nécessaires pour réussir sa scolarité, sa vie d'individu et de futur citoyen. Le livret scolaire permet de rendre compte aux parents

des acquis et des progrès de leurs enfants et restituer ainsi une évaluation complète et exigeante. La maîtrise du socle est nécessaire pour obtenir le diplôme national du brevet (DNB).

L'utilité des praxéologies subsumées par les « connaissances, compétences, valeurs et attitudes » du socle est à la fois scolaire (« réussir sa scolarité », « obtenir le diplôme national du brevet ») et très générale : réussir « sa vie d'individu et de futur citoyen ». Rien n'est dit des multiples institutions où l'élève, « futur citoyen » et « individu », trouvera avantage à avoir *étudié*. À peine mentionne-t-on que le socle doit « permettre la *poursuite d'études*, la construction d'un avenir personnel et *professionnel* » (*Le socle commun de connaissances, de compétences et de culture*, s. d., je souligne). Les programmes ne sont guère plus déserts.

La réduction de l'utilité de  $\wp$  à son utilité *scolaire*, c'est-à-dire en tant qu'objet d'étude au sein d'une institution didactique relativement à  $\wp$ , contribue à l'effacement de la préhistoire institutionnelle de  $\wp$  – autant que cet effacement contribue, circulairement, à la réduction de l'utilité de  $\wp$  au scolaire. L'institution didactique  $I$  en vient ainsi à *oublier* que  $\wp$  ne doit son existence qu'à son utilité, ou plutôt qu'à l'utilité dans  $I$ ,  $I'$ , etc., de  $\wp'$ ,  $\wp''$ , etc. L'étude de  $\wp$  devient alors une finalité sans fin, ou sans autre fin qu'elle-même, l'étude pour l'étude, avec ses vertus formatrices, pour l'esprit humain, le raisonnement, l'esprit critique, etc. :

Les mathématiques et la culture scientifique et technique aident à développer l'esprit critique et le goût de la vérité ; celle-ci permet d'évaluer l'impact des découvertes et innovations sur notre vie, notre vision du monde et notre rapport à l'environnement (*Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse*, s. d.).

La *structure* et le *fonctionnement* de  $\wp$  deviennent alors leur propre justification : l'isolement institutionnel est à la fois le problème et sa solution. Si  $\wp$  est ce qu'il est, et fonctionne comme il fonctionne, c'est parce qu'il est ce qu'il est et fonctionne comme il le fait ! Nulle trace, dès lors, des ajustements conduisant à  $\wp$  à partir des praxéologies  $\wp'$ ,  $\wp''$ , etc., dont l'utilité dans  $I$ ,  $I'$ , etc., peut contribuer à expliquer leur structure et leur fonctionnement. L'économie de  $\wp$  dans  $I$  est alors dégagée de la mémoire de l'écologie institutionnelle qui, dans  $I$ ,  $I'$ , etc., a permis l'existence de  $\wp'$ ,  $\wp''$ , etc. Ce qui fait que  $\wp$  ne saurait être  $\wp'$  ni  $\wp''$ , soit la différence des jeux de conditions et contraintes qui opèrent dans les institutions  $I$ ,  $I'$  et  $I''$ , est oblitéré et l'écologie de  $I$  est en quelque sorte absolutisée :  $\wp$  existe dans  $I$ , sous les conditions et contraintes qui y règnent, et nul n'y saurait trouver à redire puisque  $\wp$ , après tout, existe, et existe bien !

Il faut peut-être ainsi garder à l'esprit tout ce que la singularité des institutions scolaires doit au fait que la seule utilité, en leur sein, des objets qu'on y étudie se réduit bien souvent au fait qu'on les y étudie. Dans toute institution, il y a du didactique et des objets relativement auxquels, ponctuellement ou de façon durable, l'institution devient *didactique*. Néanmoins, la création d'Écoles d'apprentissage de  $\wp$ , par exemple, y est

alors articulée à l'utilisation envisagée de  $\wp$ . On étudie  $\wp$  pour pouvoir l'utiliser à d'autres fins que son étude.

Cette singularité d'une institution didactique pour  $\wp$  de type scolaire se marque par une structuration des jeux de conditions et de contraintes radicalement *hétérologue* à celle qui prévaut dans les institutions où  $\wp$  fait l'objet d'une utilisation qui n'est pas limitée à son étude. Pour le dire autrement, le rapport de tout sujet  $x'$  de l'institution  $I'$  à  $\wp$  est le fruit de son assujettissement à diverses institutions, dont  $I'$  ; l'assujettissement de  $x'$  à  $I'$  est marqué par son adaptation aux jeux de conditions et contraintes auxquels  $I'$  le soumet, ce qui vient informer durablement son rapport aux différents objets avec lesquels  $I'$  attend qu'il ait commerce. L'identité de  $\wp$  et  $\wp'$  ne dépasse guère un pur nominalisme si les jeux de conditions dans  $I$  et dans  $I'$  ne sont pas dans un rapport d'homologie minimal : les rapports possibles de sujets  $x$  et  $x'$  de ces institutions à  $\wp$  et  $\wp'$  ne sont dès lors pas structurés de la même façon et les mots, les raisons, les gestes n'y prennent pas les mêmes formes parce qu'ils ne sont pas pris dans les mêmes structures lexicales, rationnelles, gestuelles. Les conditions et contraintes institutionnelles gouvernent, et s'expriment par ces structures qui sont à la fois des structures institutionnelles, positionnelles et personnelles. Le "champ lexical" associé à une praxéologie  $\wp$  dans une institution  $I$  est une signature reconnaissable du rapport institutionnel de  $I$  (soit des positions au sein de  $I$ ) à  $\wp$  : nul n'est prophète en son pays parce que l'institution doit sa survie au maintien, à la stabilisation de structures, notamment langagières, qui la caractérisent. Les jeux de mots, traits d'esprits, jeux d'oppositions, etc., engagent et contribuent à faire exister une culture institutionnelle, voire une culture *positionnelle*, ce qui les rend à la fois fonctionnellement inutiles (puisque leur partage est à peu près universel au sein d'une position donnée dans une institution donnée) et symboliquement indispensables (elles *signifient* l'institution et les positions institutionnelles).

## **Illustrations du caractère structural des phénomènes transpositifs**

La transposition institutionnelle en général, la transposition didactique en particulier, sont marquées par des effets de structure de ce type. La transposition institutionnelle de praxéologies managériales dans les institutions de service public, l'hôpital, l'université, etc., contribue à favoriser l'accès à des positions de pouvoir de personnes qui, sans cette transposition, n'auraient pas eu l'occasion d'y parvenir. Néanmoins, l'ajustement des praxéologies managériales aux institutions de service public n'est pas immédiat et il requiert une modification substantielle de ces praxéologies, mais aussi de l'écologie institutionnelle : sans qu'aucune *personne* ne puisse se voir attribuer la responsabilité d'une telle modification de l'écologie, ni de l'adoption de praxéologies qui heurtent le rapport à l'institution dans son état antérieur, la modification de fait de l'écologie contribue à une adaptation des praxéologies existantes et à un réaménagement des rapports personnels à ces praxéologies autour de nouveaux éléments praxéologiques qui sont venues en perturber la structure. L'inertie institutionnelle, positionnelle et

personnelle, qui est une condition et un effet de la stabilité des univers cognitifs et praxéologiques, et donc du fonctionnement institutionnel, explique aussi bien la difficulté d'un tel réordonnement que la violence qu'il exerce sur les sujets de l'institution où il se produit. Un autre exemple de transposition institutionnelle (et didactique, en l'occurrence) dont les effets sur la structure, les fonctions et l'utilité de l'univers cognitif de l'institution cible (avec aussi, probablement, des effets en retour sur l'institution source et sur la noosphère de l'institution cible) furent critiques, est donné par la réforme dite des « mathématiques modernes ». C'est peut-être alors seulement que la transposition institutionnelle apparaît pour ce qu'elle est, quand l'institution « cible » et ses sujets subissent les effets d'un ajustement *structurel*, tant de l'institution que des rapports positionnels à un univers cognitif modifié dans sa structure et son fonctionnement.

Néanmoins la plupart des ajustements transpositifs sont progressifs et opèrent au sein d'institutions déjà stabilisées ; les effets en sont alors généralement imperceptibles, ce qui est renforcé par deux propriétés de la vie institutionnelle des objets en général : les objets sont désignés par des signes (symboles, mots, etc.) qui perdurent en dépit des changements parfois importants que subissent les objets eux-mêmes ; tous les objets, au sein d'une institution donnée, ne font pas l'objet d'une élucidation approfondie, ou, pour le dire autrement, les objets sont généralement sous-déterminés par les réseaux de signes qui contribuent à les désigner. La fraction  $a/b$  désigne le nombre dont le produit par  $b$  vaut  $a$ . Très bien : le nombre  $\sqrt{2}/2$  est-il une fraction ? Et  $\pi/3$  ? L'accord n'est pas toujours unanime sur les réponses à fournir. En particulier, si les classes du collège vont reconnaître le statut de fraction, dans un premier temps, essentiellement aux fractions d'entiers, c'est-à-dire aux éléments du corps des fractions de l'anneau des entiers relatifs, le théorème de Pythagore et la trigonométrie en général vont rapidement enrichir l'ensemble des fractions :  $\mathbb{Q}(\pi ; \sqrt{p}, p \in \mathbb{N} ; \dots)$ , sans que le glissement ne soit véritablement reconnu, ni effectués les ajustements structurels et fonctionnels qui devraient s'ensuivre. La simplification des fractions (d'entiers), ainsi, et la multiplication par la quantité conjuguée, qui sont deux techniques de production de formes canoniques, dont l'utilité est par conséquent liée au besoin de comparer certains nombres, pourraient être reliées de ce point de vue si l'extension donnée à l'objet fraction était reconnue comme telle et dûment étudiée – ce qui n'est pas le cas.

## **Rapports entre positions, structure positionnelle d'une institution**

Dans une institution  $I$  évoluent des *personnes*,  $x, x', x''$ , etc., qui occupent des *positions institutionnelles*,  $\hat{p}, \hat{p}', \hat{p}''$ , etc. Chaque position entretient en droit, sinon en fait, un rapport non vide aux autres positions – ne serait-ce que parce que l'institution les héberge toutes. Ces rapports peuvent être fonctionnels, bienveillants, neutres ou franchement hostiles, ils peuvent encore être constructifs, délétères, rares, fréquents, etc. Ils définissent une première structure sur  $I$  : la structure des rapports entre positions institutionnelles. Du point de vue d'une instance  $\hat{w}$ , dans deux institutions  $I$  et  $I'$  peuvent exister des positions que  $\hat{w}$  juge identiques ou fortement similaires, ou bien qu'elle juge comme formellement

semblables mais pouvant différer fortement quant à leur action institutionnelle. Dans tous les cas, on dira que  $\hat{w}$  juge que les institutions  $I$  et  $I'$  ont une structure positionnelle proche lorsque  $\hat{w}$  juge que deux positions de  $I$  entretiennent toujours les mêmes rapports (ou des rapports proches) que les positions analogues (selon  $\hat{w}$ ) dans l'institution  $I'$ . On peut par exemple penser au cas où  $I$  et  $I'$  sont des sous-institutions d'une institution « mère »  $\mathfrak{I}$  et où les positions existant dans  $I$  et  $I'$  sont les “mêmes” en vertu de cette « filiation » institutionnelle. Que l'on pense aux universités comme sous-institutions de l'Université, par exemple : un observateur pourrait considérer que les positions d'enseignant-chercheur se correspondent d'une université à l'autre, tout en observant que les relations entre ces positions et celles, par exemple, de directeur de département, ou de secrétaire, diffèrent sensiblement entre deux universités données. La structure positionnelle de ces deux universités n'est alors pas la même et les différences significatives gouvernent par contrecoup le rapport des positions à certains objets.

Étant donné une institution  $I$ , on appellera *structure positionnelle de l'institution  $I$*  selon une instance  $\hat{w}$ , et on notera  $\Sigma^{\Pi_{\hat{w}}}(I)$ , la donnée de tous les triplets  $(\hat{p}, \hat{p}', R_{\hat{w}}(\hat{p}, \hat{p}'))$  pour des positions  $\hat{p}$  et  $\hat{p}'$  de  $I$ , où  $R_{\hat{w}}(\hat{p}, \hat{p}')$  désigne le rapport qu'entretient à l'instance  $\hat{p}'$ , selon  $\hat{w}$ , l'instance  $\hat{p}$ . Alors les institutions  $I$  et  $I'$  ont même structure positionnelle, selon  $\hat{w}$ , si  $\hat{w}$  juge qu'à toute position  $\hat{p}$  de  $I$  on peut associer une position  $\tau(\hat{p})$  de  $I'$  de telle sorte que  $\hat{w}$  regarde ces deux positions comme la même position dans une institution  $\mathfrak{I}$  dont  $I$  et  $I'$  sont des sous-institutions, et si  $\hat{w}$  juge que les structures  $\Sigma^{\Pi_{\hat{w}}}(I)$  et  $\Sigma^{\Pi_{\hat{w}}}(I')$  sont « proches » : selon  $\hat{w}$ , le rapport  $R_{\hat{w}}(\hat{p}, \hat{p}')$  est proche du rapport  $R_{\hat{w}}(\tau(\hat{p}), \tau(\hat{p}'))$  pour tout couple de positions  $(\hat{p}, \hat{p}')$  dans  $I$ . Le nominalisme des positions peut entraîner l'identification de positions qui, par ailleurs, vivent dans des institutions dont les structures positionnelles diffèrent grandement. Ainsi, la dénomination de « secrétaire » peut recouvrir des réalités très différentes dans deux universités données si la structure positionnelle qui les inclut n'est pas la même dans ces deux universités : dans un cas, la position de secrétaire est par exemple une position ancillaire, méprisée, sans grande qualification, alors qu'une autre université s'attache à accorder des responsabilités importantes aux secrétaires, etc. Les rapports entre enseignants-chercheurs et secrétaires en viennent à différer notamment parce que les répartitions des tâches des uns et des autres diffèrent. Ces différences et d'autres délimitent une *structure positionnelle* qui n'est pas la même dans les deux universités.

En particulier, les *antagonismes* disent beaucoup sur la vie institutionnelle : dans telle institution, un objet est enjeu de luttes, d'antagonismes entre différentes positions ou personnes occupant la même position, alors que dans une autre, le “même” objet va de soi et est universellement accepté.

On dira qu'un objet  $o$  est un *enjeu de luttes* au sein de la position  $\hat{p} = (I, p)$  selon  $\hat{w}$  si  $\hat{w}$  juge que, pour au moins deux personnes  $x$  et  $x'$  occupant la position  $(I, p)$ ,

1.  $R_{\hat{w}}(x, o) \triangleleft R_{\hat{w}}(x', o)$
2.  $x$  juge souhaitable que  $R_{\hat{w}}(\hat{p}, o) \cong R_{\hat{w}}(x, o)$

3.  $x'$  juge souhaitable que  $R_{\hat{w}}(\hat{p}, o) \cong R_{\hat{w}}(x', o)$ .

On dit en outre que des rapports  $R$  et  $R'$  sont *antagoniques* ou *incompatibles* selon  $\hat{w}$  pour la position  $(I, p)$ , et on le note  $R \triangleleft R'$ , si  $\hat{w}$  juge que ces rapports sont non vides et s'il juge en outre qu'on ne peut avoir simultanément  $R_{\hat{w}}(\hat{p}, o) \cong R$  et  $R_{\hat{w}}(\hat{p}, o) \cong R'$ .

### **Intérêts antagoniques et difficultés dans la transposition institutionnelle d'un outil<sup>21</sup>**

*Faire position* requiert une communauté praxéologique que la position émergente contribue à créer. La constitution de la position de conseiller pédagogique de l'enseignement supérieur (CPES) au sein de l'Université de Toulouse, en 2014, m'a fourni l'occasion d'étudier *in vivo* la création d'une position au sein d'une institution.

La pédagogie universitaire a fait l'objet de travaux de plus en plus nombreux au cours des deux dernières décennies (on pourra se reporter à Daele & Sylvestre, 2016, et, sur les conseillers pédagogiques, à Frenay & Paquay, 2011; Green & Little, 2016; Ketele, 2010; Rege Colet, 2006). La fonction de conseiller pédagogique (CP) de l'enseignement supérieur est une création récente dans l'institution universitaire française – plus ancienne dans des pays comme la Belgique, le Canada (Québec) ou la Suisse. Au sein de l'Université fédérale de Toulouse, elle a fait son apparition en 2014. Cette situation particulière autorisait une observation *in vivo* des difficultés que l'on peut rencontrer dans une profession que l'on pourrait qualifier d'émergente par comparaison avec d'autres professions plus anciennes, comme celle d'enseignant-chercheur. Une quinzaine de CP, venus d'horizons et de positions institutionnelles divers, ont pris en charge certains types de tâches professionnelles pour lesquels ils ont été formés par des CP exerçant dans une école d'ingénieurs de Grenoble. La réalisation de ces types de tâches est souvent source de difficultés et de tensions pour ces CP : il leur est parfois difficile de bien identifier ces difficultés et plus encore leur origine. Par ailleurs, la diversité des CP du point de vue de leur formation et de leur parcours antérieur est un fait connu à l'échelle française (Chaliès et al., 2010; Cosnefroy, 2015). Les différences constatées dans la pratique des CP peuvent-elles s'expliquer par des croyances différentes, des théories différentes, ou par des pratiques antérieures différentes ? La formation initiale suffit-elle à faire évoluer les croyances et les pratiques ? A-t-on un moyen de s'assurer que les évolutions observées sont « pour le mieux » et d'évaluer ce que serait ce mieux ? Autant de questions qui trouvent leur origine dans la variété des profils des CP. La situation des CP toulousains est intéressante à cet égard en ce qu'elle comporte un élément d'homogénéisation puisqu'ils ont tous été formés à une technique particulière d'analyse des enseignements. Comme l'ont souvent mentionné certains CP toulousains lors d'entretiens formels ou informels, « l'analyse approfondie des enseignements » (AA) est « ce qu'on a en commun ». Du point de vue de l'étude des variétés des formes d'engagement dans le

---

<sup>21</sup> (Bourgade, 2017)

métier de CP, il est intéressant de disposer d'un point commun qui puisse servir de pierre de touche. Que les pratiques des CP pour les technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement (CP TICE) et des CP généralistes (Chaliès et al., 2010) diffèrent est assez prévisible, les tâches qu'on leur confie, ou qu'ils s'autorisent à réaliser, n'étant probablement pas les mêmes – à moins que tous les CP soient conduits à mettre en œuvre un même type de tâches. Une telle situation s'est offerte à moi : l'existence de « ce qu'on a en commun », la pratique de « l'analyse approfondie », m'a permis d'étudier dans quelle mesure la variété des CP est contingente, liée à l'inexistence d'un référentiel précis du métier (Chaliès et al., 2010; Cosnefroy, 2015), ou si une variété plus essentielle continue de s'exprimer dans la mise en œuvre même d'un type de tâches défini de façon précise et dont la réalisation est cadrée explicitement par un discours développé en formation initiale.

Dans le cadre de la formation initiale des CP, l'AA fait l'objet d'une étude particulièrement attentive. Peut-être parce que son élaboration doit beaucoup aux CP grenoblois du réseau PENSERA<sup>22</sup> qui pilotent la formation initiale des CP toulousains, l'AA est apparue comme un type de tâches central autour duquel devait s'articuler la professionnalité des CP toulousains, bref, comme le cœur de leur équipement praxéologique en construction. Il est ainsi significatif que la seule injonction prononcée dans le cadre de la formation soit relative à la mise en œuvre d'une AA dans l'intervalle de temps qui sépare deux épisodes de formation. De fait, seuls deux CP sur l'ensemble du groupe ne réaliseront pas d'AA dans le temps de la formation ni d'ailleurs après.

L'AA est le produit d'un contexte français où la question de l'évaluation des enseignants et des enseignants-chercheurs du supérieur s'est posée de façon toujours plus insistante, aboutissant à une forme d'évaluation qui devait porter non sur les enseignants mais sur les enseignements. Nombre d'universités se sont alors dotées d'un outil d'évaluation, le plus souvent quantitatif, fondé par la passation d'un questionnaire auprès des étudiants, suivie de son traitement statistique qui aboutit, selon les institutions, à diverses formes de représentations synthétiques des résultats (araignées, etc.). La mise en œuvre d'une telle évaluation systématique présente, aux yeux de Pigeonnat (2015), deux grands inconvénients : d'une part elle nécessite un investissement très important alors que la plupart des enseignements donnent satisfaction ; d'autre part, la mise à disposition des résultats semi-bruts (dont les commentaires parfois incisifs formulés par les étudiants) peut représenter une forme de violence exercée envers les enseignants.

Cette double difficulté a été travaillée par les CP qui ont progressivement construit un outil d'évaluation qui a depuis fait école, repris, par exemple, à l'INSA<sup>23</sup> de Toulouse et à l'École des Mines d'Albi. Il s'agit d'une première évaluation dite « détecteur de fumée » qui consiste en la passation d'un questionnaire volontairement limité à une question sur

---

<sup>22</sup> <https://pensera2.fr/>

<sup>23</sup> Institut national des sciences appliquées, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe\\_INSA](https://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_INSA).

la satisfaction globale des étudiants ; si cette évaluation est positive, rien de particulier ne s'ensuit, mais si elle donne à voir un taux significativement élevé d'insatisfaction, la direction des études propose aux enseignants concernés de se rapprocher des CP pour bénéficier d'une AA de leur enseignement.

Cette analyse « approfondie » se réalise alors suivant un certain nombre d'étapes. Pigeonnat (2015, p. 4) décrit succinctement la mise en œuvre de l'AA comme suit : « [On peut] mettre en place une offre d'analyse approfondie des enseignements qui se déroule de la façon suivante :

- un enseignant (ou une équipe enseignante) qui souhaite améliorer son enseignement rencontre un conseiller et, à cette occasion, un questionnaire adapté à la situation pédagogique est mis en place ;
- le conseiller vient, lors d'une séance de cours, distribuer le questionnaire aux étudiants tout en leur garantissant l'anonymat de leurs réponses ;
- une fois les réponses saisies, le conseiller revoit l'enseignant, lui fait partager son analyse de la situation et, le cas échéant, lui propose des pistes d'amélioration ;
- l'enseignant fait un retour aux étudiants, de manière à ce que ces derniers comprennent que leurs avis ont été pris en compte. »

La « transmission » de l'AA des CP du réseau PENSERA vers les CP toulousains relève de la problématique de la transposition institutionnelle : l'outil a été conçu dans et pour une institution (les écoles d'ingénieur grenobloises du réseau INP<sup>24</sup>) et se trouve transposé dans une autre institution (les écoles d'ingénieur et l'université de Toulouse).

La production d'un modèle praxéologique de référence (MPR) de l'analyse approfondie m'a permis de disposer d'un *rapport de référence à l'AA* par rapport auquel il devenait possible d'évaluer la conformité du rapport de tel ou tel CP à l'AA. La construction de ce rapport de référence ne s'est pas faite sans heurts : l'hétérogénéité des parcours, des formations, des statuts des différents CP conduit à la production d'éléments de *logos* qui peuvent être divergentes. Le *logos* retenu, bien que reconstruit en partie à travers l'étude des rapports personnels des CP à l'analyse approfondie, se veut conforme à un hypothétique rapport institutionnel à l'AA. Cela conduit bien évidemment à ne pas inclure dans cette reconstruction du *logos* les éléments qui font l'objet de divergences claires entre CP ou semblent particulièrement idiosyncratiques. Parallèlement, l'ensemble de la reconstruction s'appuie sur des éléments de *logos* produits par les CP concepteurs de l'AA : la référence (Pigeonnat, 2015) est alors prise comme explicitant partiellement le rapport institutionnel attendu à l'AA.

En faisant apparaître des mises en œuvre non conformes, ce rapport standard permet de mettre au jour certaines causes des divergences. Comme souvent en TAD, l'identification

---

<sup>24</sup> Institut national polytechnique, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Institut\\_national\\_polytechnique\\_en\\_France](https://fr.wikipedia.org/wiki/Institut_national_polytechnique_en_France).

des causes d'un phénomène revient à identifier des conditions qui le rendent possible. Dans le cas des CP, les assujettissements passés et présents des CP, dans leur diversité, crée des contraintes (c'est-à-dire des conditions peu modifiables par les intéressés) qui ne permettent pas l'adoption d'un *rapport commun* à l'AA. Les intérêts différents, liés à des positions différentes, nourrissent des *logos* différents qui, à leur tour, engendrent des techniques différentes. Ainsi, un CP ingénieur en techniques de formation cherche à déterminer l'origine de la demande d'AA par une équipe enseignante pour la faire évoluer : « je vais essayer de remonter en fait à savoir pourquoi [l'enseignant] aimerait faire ça [des amphis interactifs], finalement de voir un petit peu comment sont ses étudiants, parce que si ça se trouve, en fait, [sa demande] c'est juste une envie d'un enseignant et ça n'apporterait strictement rien finalement aux étudiants, [...], et j'essaie de lui apporter d'autres pistes, ou d'autres réflexions que celles qu'il a en tête ». Par contre, une CP enseignante-chercheure donne la priorité à l'accompagnement de l'enseignant, suivant le désir de celui-ci avant de poser la question de l'intérêt des étudiants. Les cas de divergences dans la mise en œuvre de l'AA renvoient à des intérêts qui sont ceux de l'entreprise, de l'institution universitaire, des enseignants ou des étudiants. À aucun moment n'est évoqué l'intérêt spécifique de CP, qui, sans oblitérer les intérêts des autres acteurs, pourrait organiser leur prise en compte de façon à éviter des difficultés engendrées par l'hétéronomie. La question des intérêts est fondamentale parce qu'elle gouverne partiellement le type de rapports que les sujets vont pouvoir nouer à telle ou telle praxéologie. Au sein d'une institution, voire d'une même position (émergente ou non), peuvent coexister des rapports *incompatibles* à un même objet *o* (ici : « l'analyse approfondie »). On peut ainsi dire que l'objet AA est un *enjeu de luttes* (voir p. 71) au sein de la position institutionnelle *p* de conseiller pédagogique puisque au moins deux personnes occupant cette position ont des rapports incompatibles entre eux à cet objet, et que chacun juge que son rapport personnel devrait, par rapport à l'AA, nourrir le rapport institutionnel. Autrement dit, chacun souhaiterait voir le rapport institutionnel évoluer dans le sens d'une plus grande conformité à son propre rapport personnel à l'AA.

La situation que constitue un tel conflit peut conduire à plusieurs issues, dont les deux plus évidentes sont d'une part la victoire d'un rapport sur l'autre et la modification du rapport institutionnel de la position dans le sens d'une plus grande conformité au rapport « victorieux » et, d'autre part, la scission de la position en deux positions opposées quant à leur rapport à l'objet de la discorde. Une autre issue, possible dans le cas de la profession de conseiller pédagogique, est l'éclatement de la position en autant de sous-positions qu'il y avait de positions représentées lors de la genèse de la position : les conseillers pédagogiques du supérieur étaient initialement des enseignants chercheurs, des ingénieurs en technologies de la formation, des psychopédagogues, etc. L'instabilité de la position de CP peut conduire chacun à rejoindre sa position originelle où son rapport aux objets conflictuels sera pacifié.

La problématique institutionnelle de la création de positions gagne à être pensée comme un cas particulier de dynamique praxéologique : ce n'est pas seulement une position qui

est créée, mais bien un ensemble de rapports à des praxéologies variées, dont la cohérence doit être travaillée pour assurer une certaine stabilité positionnelle. En particulier, les intérêts des personnes occupant la position ainsi créée peuvent être des intérêts *principalement positionnels*, ce qui peut éviter l'éclatement de la position en autant de sous-positions que d'intérêts, ou, au contraire, *principalement personnels*, c'est-à-dire relevant d'assujettissements des personnes à d'autres positions institutionnelles. Le degré d'*hétérogénéité praxéologique* (voir p. 51) d'un collectif de personnes venant occuper une position donnée est donc un indicateur important de sa stabilité.

## Rapports entre objets, structure cognitive d'une institution

Pour comparer deux institutions, il ne suffit pas d'étudier la similitude des positions et des rapports entre positions : encore faut-il étudier comment les personnes, à travers les positions qu'elles occupent, constituent des rapports entre les *objets*. On dira que, selon une instance  $\hat{w}$ , deux objets  $o$  et  $o'$  sont en rapport pour une instance  $\hat{i}$  si les univers cognitifs de  $\hat{i}$  relatifs à  $o$  et  $o'$  selon ne sont pas disjoints :  $\Omega_{\hat{i}}(\hat{i}, o) \cap \Omega_{\hat{i}}(\hat{i}, o') \neq \emptyset$ . On notera  $R_{\hat{w}}(\hat{i}; o, o')$  le rapport pour  $\hat{i}$  entre  $o$  et  $o'$  selon  $\hat{w}$  : on désigne par là tout ce par quoi  $o$  et  $o'$  sont en lien pour  $\hat{i}$ , selon  $\hat{w}$ . Ainsi, le chercheur didacticien peut juger que le théorème de Pythagore et l'orthogonalité sont *en rapport étroit* pour la position de professeur des collèges : il y a, pour cette position, un rapport entre ces deux objets. Il y a également un rapport entre le théorème de Pythagore et l'intégration des fonctions mesurables, mais ce rapport n'existe peut-être pas pour la même position, mais pour une autre position, celle de professeur de l'enseignement supérieur par exemple. Le rapport entre le safran et le taboulé n'existe peut-être pas pour toute position, mais elle existe assurément pour la position de chef-cuisinier dans certains restaurants orientaux.

Par ailleurs, le mot « relation de Pythagore » peut renvoyer à des objets différents selon l'institution que l'on considère : cela peut être une relation métrique dans les triangles rectangle, ou bien une propriété générale des espaces euclidiens. Il se peut ainsi qu'une instance  $\hat{u}$  juge que deux objets  $o \in \Omega_{\hat{u}}(I)$  et  $\tilde{o} \in \Omega_{\hat{u}}(\tilde{I})$  sont "identiques". Pour autant, une autre instance  $\hat{w}$  pourra considérer que, par-delà l'identité nominale des deux objets (par exemple),  $o$  et  $\tilde{o}$  n'entrent pas dans les mêmes rapports avec d'autres objets pour certaines instances  $\hat{i}$  et  $\hat{i}'$ . Il existe au moins un objet  $o'$  et son homologue (selon  $\hat{u}$ )  $\tilde{o}'$  tels que  $R_{\hat{w}}(\hat{i}; o, o')$  et  $R_{\hat{w}}(\hat{i}'; \tilde{o}, \tilde{o}')$  diffèrent notablement : le rapport entre la relation de Pythagore et l'objet « triangle rectangle » n'est pas le même au collège, où il est saillant, et à l'université, où les triangles ne sont plus un objet d'étude majeur. Pour le dire autrement, la *structure cognitive* de  $I$  pour  $\hat{i}$  selon  $\hat{w}$  n'est pas homologue de la *structure cognitive* de  $I$  pour  $\hat{i}'$  selon  $\hat{w}$ . On désigne par *structure cognitive d'une institution  $I$  pour une instance  $\hat{i}$  de  $I$  selon une instance  $\hat{w}$* , et on note  $\Sigma_{\hat{w}}^{\Omega}(\hat{i}; I)$ , la donnée de tous les triplets  $(o, o', R_{\hat{w}}(\hat{i}; o, o'))$  pour des objets  $o$  et  $o'$  de l'univers cognitif de  $I$  selon  $\hat{w}$ .

### *Le cas de la rigueur*<sup>25</sup>

Le champ lexical (qui est structuré par les rapports entre mots selon diverses instances, ici la position de chercheur en mathématiques) en usage dans l'institution de production des mathématiques n'a pas grand-chose à voir, dans sa structure, avec celui dont usent les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. Tel courrier académique adressé par l'inspection aux professeurs de mathématiques fait ainsi un lien très spontané entre rigueur et honnêteté, tel rapport de jury de CAPES évoque la rigueur comme moyen de confondre les tentatives de « bluff », etc. (Bourgade, 2019b), alors que dans le champ scientifique, la rigueur est plutôt associée à l'exactitude, la précision, etc., pour autant qu'elle est seulement explicitée tant elle fait partie du droit d'entrée minimal dans le champ des mathématiques (Zarca, 2012). La structure des rapports entre objets permet ici aussi de mieux voir et comprendre les phénomènes transpositifs à l'œuvre, reprenant l'idée selon laquelle, « la décontextualisation [d'un objet] véritablement réalisée se [fait] par rapport à un autre contexte [que le le contexte “discursif” régionalement conservé], mal identifiable et non identifié parce que transcendant au texte du savoir ; *le réseau des problématiques et des problèmes* où l'élément décontextualisé trouvait à l'origine ses usages, son emploi, c'est-à-dire son sens. » (Chevallard, 1991, p. 21). Ce réseau de problématiques et de problèmes est dessiné par les rapports entre les objets (parmi lesquels, les « problématiques » et les « problèmes », mais pas seulement) qui se dessinent pour telle ou telle position dans chacune des institutions que « traverse » l'objet transposé. Selon Chevallard (1991, p. 20), « dans le passage de tel élément du savoir savant à l'élément qui lui répond – ou plutôt, dont il répond – dans le savoir enseigné, il y a d'abord un invariant (en général un signifiant : « ensemble », « distance », etc.), et il y a une variation, un écart, qui fait toute la différence, et que l'examen des problématiques respectives – celle où est pris l'élément de savoir dans le savoir savant, celle où est pris l'élément de savoir mis en correspondance dans le savoir enseigné – ne manque généralement pas de faire surgir. » La transposition didactique doit se comprendre comme un phénomène structurel, et *non seulement* comme l'effet de l'action d'une variété plus ou moins nombreuse d'*acteurs*, sans quoi les distorsions que subit l'objet transposé sont renvoyées à une causalité directe, qui trouve son origine dans la nature et la qualité des processus de communication. Contre l'idée que la compréhension des phénomènes transpositifs s'épuise dans la description des *actions* ou des *situations de communication*, il faut défendre la compréhension de la transposition didactique, des phénomènes transpositifs en général, comme *effets de structure* : « l'apprêt du savoir » (Chevallard, 1991), tant au niveau de la transposition « externe » que de la transposition « interne », n'est indispensable que pour autant que les *structures* des institutions en jeu dans la transposition, institution « source », réelle ou fantasmée, et institution « réceptrice », diffèrent sensiblement quant aux enjeux liés à l'objet transposé. Si l'utilité, le fonctionnement ou la structure d'objets *ayant un rapport*, dans l'institution source, avec

---

<sup>25</sup> (Bourgade, 2019b)

l'objet transposé, ne sont pas les mêmes dans l'institution réceptrice, voire si ces objets *n'y existent pas*, c'est bien tout le « réseau de problématiques et de problèmes » liés à l'objet transposé qui se trouve modifié. Les adaptations sont *nécessitées* par les différences structurales entre les institutions au moins autant qu'elles y contribuent. Si les chercheurs peuvent communiquer entre eux, c'est qu'ils ont en partage un certain rapport aux rapports entre objets, aux problématiques et problèmes, bref, ils occupent une même position institutionnelle et ont en partage tout ce qui la caractérise.

### ***Le cas du théorème des accroissements finis<sup>26</sup>***

Le théorème des accroissements finis (TAF) « vit » dans l'institution scolaire depuis longtemps. On peut (Bourgade, 2016) comparer son *utilité* dans l'institution scolaire des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE<sup>27</sup>) au XXI<sup>e</sup> siècle et dans l'institution de production des mathématiques au XIX<sup>e</sup> siècle, lors de son émergence : dans le second cas, le TAF constitue un chaînon important, longtemps manquant, pour établir l'analyse sur des bases solides (algébriques, donc, pour l'humeur de l'époque). L'algébrisation de l'analyse est un enjeu fort dans le champ des mathématiques, qui appuie et se soutient lui-même de la création d'Écoles d'analyse au sein du champ de production. La production de manuels à destination des nouveaux entrants, ainsi que la plainte de certains élèves de Weierstrass quant à leur isolement relatif du fait de l'absence de diffusion d'écrits du maître au-delà de leur cercle, montre bien que la lutte est indissociablement mathématique, sociologique et didactique : la production d'écrits didactiques (manuels), foisonnants dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, permet de *publier* certains problèmes dont la résolution est appelée par un souci didactique et qui auront pour effet une légitimation progressive de l'analyse comme branche autonome des mathématiques universitaires, branche différente de l'algèbre, mais aussi de la géométrie du fait d'un régime de justification proche de celui de l'algèbre.

Dans l'institution des CPGE, le TAF sert formellement de chaînon permettant là aussi de prouver le principe de Lagrange (toute fonction dérivable à dérivée positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle) sans hypothèse superflue (continuité de la dérivée, etc.). Néanmoins, son utilité réelle est ailleurs : il permet de soumettre aux élèves des exercices portant sur la démonstration de propriétés de fonctions abstraites soumises à des conditions proches des hypothèses du TAF : il offre ainsi la possibilité de développements démonstratifs, et aussi un moyen d'évaluer la rigueur des élèves. Le TAF est en un sens beaucoup plus fondamental, mais aussi plus anecdotique dans le champ de production que dans l'institution des CPGE où il occupe un espace central dans la variété des exercices de calcul différentiel.

---

<sup>26</sup> (Bourgade, 2016)

<sup>27</sup> [https://fr.wikipedia.org/wiki/Classe\\_pr%C3%A9paratoire\\_aux\\_grandes\\_%C3%A9coles](https://fr.wikipedia.org/wiki/Classe_pr%C3%A9paratoire_aux_grandes_%C3%A9coles)

J'ai essayé, par-delà l'intérêt plus ou moins contestable des questions abordées, d'indiquer une voie pour aborder l'étude des phénomènes transpositifs : plutôt que d'interroger seulement les conditions de la « transposition externe » et de la « transposition interne », ou plutôt seulement *certaines* conditions au détriment d'autres, il est possible d'étudier les conditions que créent, de fait, les structures des institutions impliquées dans le processus de transposition. Une question me paraît particulièrement sensible : celle du caractère contraint de la transposition didactique. On a tôt fait de s'engager dans une discussion technique : « quelle extension faut-il donner au processus de transposition didactique ? Faut-il le segmenter, et alors quelle segmentation retenir ? » (Chevallard, 1991, p. 18-19), alors que « sous l'apparence d'un choix théorique, l'enseignant ne choisit pas, parce qu'il n'a pas de puissance de choix. » L'enseignant, et, en fait, n'importe quelle *personne* ou *position institutionnelle*. Ce n'est pas telle ou telle personne, ni telle ou telle position qui œuvre à la transposition didactique d'une œuvre ou d'un objet : c'est un ensemble d'institutions qui, du fait de leur structure actuelle et passée, *contraignent* les positions et les personnes à *adapter*, apprêter les objets à l'institution où elles souhaitent les importer. En ce sens, il est peut-être utile de revenir à la transposition institutionnelle : ce n'est pas seulement la transposition *didactique*, dont la finalité semble entraîner une nécessaire adaptation du « contenu » enseigné à un public auquel fait défaut ce qu'il faudrait pour que l'adaptation soit inutile, mais bien toute transposition institutionnelle qui engage en droit sinon en fait un travail de modification des objets transposés. Ce n'est pas la finalité ouvertement didactique ou pédagogique, mais bien les différences structurelles, et notamment les différences de « problématiques et de problèmes », qui engendrent les adaptations transpositives. Les contraintes didactiques sont particulièrement fortes, et singulières, comme le montrent, je crois, les exemples de la transposition du TAF et de la notion de rigueur : d'où peut-être le fait que la transposition institutionnelle soit particulièrement forte et donc visible dans le cas de transpositions vers des institutions didactiques.

## Perspectives

Je souhaite développer les travaux précédents dans trois directions.

J'ai essayé de montrer ce que l'étude de l'histoire d'un théorème, même sommaire, permet de mettre en évidence sur les effets transpositifs. J'aimerais désormais étudier les usages de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques : en particulier, j'aimerais déterminer quel rapport à l'histoire des mathématiques ces usages induisent. La perspective est donc co-disciplinaire : il s'agit d'envisager dans quelle mesure l'étude de l'histoire des mathématiques dans la classe de mathématiques est bien une étude d'*histoire*, et si non, pour quelles raisons.

La différence de signification, qui est finalement une différence praxéologique, entre la rigueur à l'école et la rigueur dans l'institution de recherche en mathématiques se modélise bien en termes de rapport entre objets : les liens entre la rigueur et d'autres objets vivant dans les mêmes institutions sont différents selon l'institution considérée. Je

souhaite développer cette idée et étudier dans quelle mesure elle peut trouver une confirmation statistique : il s’agirait de procéder à une enquête par entretiens et questionnaires pour déterminer les liens spontanés que font les professeurs entre divers objets, et de comparer les résultats de cette enquête avec ceux que produirait une enquête similaire menée auprès d’un public de chercheurs. L’intérêt didactique de cette enquête serait de proposer des outils pour étudier les phénomènes transpositifs en tant que modifications de rapports *entre objets*.

La théorie des intérêts que j’ai esquissée à propos des intérêts antagoniques dans la profession de conseiller pédagogique de l’enseignement supérieur, pourrait être développée et associée à une recherche que je mène avec Maëva Ouattou dans le cadre de sa thèse : étudier les praxéologies didactiques des professeurs comme des *prises de position* didactiques permet de les mettre en lien avec leur *position* didactique, c’est-à-dire leur position institutionnelle dans une institution didactique, mais aussi avec leur *trajectoire* didactique telle que la dessine leur curriculum personnellement vécu (Strømskag & Chevallard, 2021). J’aimerais par conséquent conduire une enquête par questionnaires et entretiens avec Maëva Ouattou permettant de mettre en lien les praxéologies didactiques privilégiées par les professeurs de mathématiques et leur passé didactique. Maëva Ouattou a déjà réalisé des entretiens (N=6) qui sont en cours d’exploitation.

## **Quelques questions à propos des questions**

Dans cette section, je me propose de rendre compte de deux études que j’ai menées à propos des raisons d’être des savoirs étudiés dans le cadre d’enquêtes d’étude et de recherche. Il s’agit d’une part de l’étude d’une question relative à l’élaboration d’une technique pour construire des questions génératrices pour de telles enquêtes, et d’autre part d’une réflexion sur la notion de raison d’être vue comme une question particulière.

### **Comment poser une question<sup>28</sup> ?**

L’une des questions les plus vives qui se posent à la recherche en didactique, et en TAD en particulier, est celle de la transition entre deux paradigmes de l’étude : le paradigme de la visite des œuvres et le paradigme du questionnement du monde. Dans le paradigme de la visite des œuvres (Ladage & Chevallard, 2010, p. 335),

le professeur conduit la visite de différents “monuments” qu’il présente et commente aux étudiants. Ainsi, en matière de développement durable, visitera-t-on par exemple “le réchauffement climatique”, “la biodiversité”, “l’architecture durable”, etc. Lors d’un examen, un sujet est alors proposé aux candidats, qui doivent “traiter” le sujet généralement sans documents, en exploitant au mieux les éléments d’information qu’ils auront accumulés au cours de ces visites. D’une manière générale, l’étudiant ne s’affronte

---

<sup>28</sup> (Bourgade et al., 2019)

ainsi qu'à ce qu'il est censé connaître par avance : on parlera à cet égard de mode d'étude rétroactif.

En revanche (Ladage & Chevallard, 2010, p. 335),

Dans le paradigme de questionnement du monde [...] l'étudiant étudie une question à laquelle il doit apporter une réponse, et cela sans que l'on fasse en rien l'hypothèse qu'il aurait déjà rencontré cette question non plus que des éléments de réponse s'y rapportant. On lui demandera ainsi d'enquêter sur la question "En quoi consiste le phénomène physique dit de l'effet de serre ?" ou "Comment a pu être calculée la température de +15 °C que certains auteurs présentent comme la température moyenne de la Terre ?", "Peut-on mettre en évidence un lien entre réduction de la biodiversité et santé humaine ?", etc. Même si l'étudiant pensait avoir quelques lumières sur la question à étudier, il doit enquêter sur elle à nouveaux frais : on parle alors de mode d'étude proactif.

Si le paradigme dominant, dans les institutions didactiques de type scolaire, reste le paradigme de la visite des œuvres, c'est avec difficulté qu'il s'impose, notamment du fait d'évolutions sociétales importantes – le rapport des élèves à l'étude se modifie, et l'institution scolaire semble suivre, bon an mal an, cette évolution (Chevallard, 2017, p. 7) :

Sans remonter trop dans l'histoire du système scolaire, rappelons-nous que de successifs et incertains prodromes de ce nouveau monde scolaire non encore advenu ont eu nom « parcours diversifiés » (à la rentrée 1997, en 5<sup>e</sup>), « travaux croisés » (à la rentrée 2000, en 4<sup>e</sup>), « itinéraires de découverte » (à la rentrée 2002, dans ce qui était alors le « cycle central » du collège), sans parler des TPE (à la rentrée 2000, en certaines classes de 1<sup>re</sup>) et, aujourd'hui, EPI (« Enseignements Pratiques Interdisciplinaires », au cycle 4 actuel). [...] Contrairement aux rejetons d'une mince élite sociale et culturelle d'antan, les « nouveaux élèves » ne supporteraient plus, en effet, l'ascèse didactique propre au paradigme de la visite des œuvres.

Il s'agit cependant d'expériences brouillonnes qui limitent l'expérience aux confins de l'étude, dans des zones protégées, sortes de réserves naturelles où l'enquête peut s'épanouir : « on conserve en catimini le vieux monde, comme s'il était le seul possible, que l'on déguise au moyen d'une ruse "pédagogique" » (Chevallard, 2017, p. 8). Au contraire de cela, une véritable transition vers le paradigme du questionnement du monde appelle une rupture praxéologique fondamentale : il s'agit de remettre en question la pédagogie dominante et tout un rapport au savoir et à sa production. Ainsi (Chevallard, 2017, p. 8),

selon ce nouveau paradigme, l'étude scolaire doit prendre la forme d'une série d'enquêtes sur une série de questions données à étudier, avec pour objectif d'apporter aux questions étudiées des réponses tout à la fois « solides » et adéquates à ceux qui les adopteront au moins provisoirement dans leur travail. [...] Le processus historique de transition didactique qui fera passer de la visite des œuvres au questionnement du monde suppose que le métier d'enseignant ait la force et l'autorité d'une véritable profession, en même temps qu'il contribuera à lui donner ce statut.

Le développement professionnel du métier de professeur dans le cadre de ce nouveau paradigme engage notamment un déploiement de nouvelles attitudes (problématisante, herbartienne, procognitive, exotérique et d'encyclopédiste ordinaire, voir Kim, 2015, p. 678). Il s'agit pour le professeur d'apprendre à questionner (Bourgade et al., 2019), à mener et accompagner des enquêtes, etc. Autant de sources de difficultés pour une profession qui développe plutôt des attitudes rétrocognitive et ésotérique : dans le paradigme de la visite des œuvres, l'idée est forte que le savoir est toujours derrière nous (rétrocognition) et qu'il est possible de finir par *tout* savoir à propos d'un objet donné (ésotérisme, voir ici même, p. 57).

Une question d'importance porte donc sur les moyens qu'il convient de se donner pour ménager cette transition entre paradigmes : quelles conditions et contraintes s'exercent sur la profession, qui facilitent ou au contraire empêchent cette transition ? Une approche importante de cette question consiste à mettre en œuvre, au sein d'institutions gouvernées par le paradigme de la visite des œuvres, des dispositifs où le paradigme du questionnement du monde peut vivre, et d'étudier les conditions et contraintes qui rendent possible cette vie (voir par exemple Barquero et al., 2011, 2022; Bourgade, 2019a; Florensa et al., 2019).

La mise en place d'ateliers d'enquête dans une institution dominée par le paradigme de la visite des œuvres conduit à certaines tensions entre les praxéologies professionnelles disponibles pour l'encadrant de ces ateliers, et celles dont le besoin se fait sentir. Il s'est agi pour moi, en 2013, de concevoir et mettre en place un tel atelier dans le cadre d'une formation en première année d'École d'ingénieurs, filière préparatoire intégrée (étudiants de 18 ans). Les étudiants inscrits dans cette filière font l'objet d'un classement tout au long des deux années de préparation, à l'issue de quoi ils peuvent accéder à des écoles d'ingénieurs de leur choix, en fonction de leur classement. Les étudiants sont donc soumis à une pression importante pendant ces deux années et l'évaluation est une donnée quotidienne pour eux. Le paradigme dominant est bien sûr le paradigme de la visite des œuvres, avec un programme d'étude proche de celui des classes préparatoires classiques.

L'atelier d'enquêtes de *la prépa des INP*<sup>29</sup> de Toulouse s'adressait à une promotion de 96 étudiants, répartis en quatre *groupes* de 24 étudiants, au sein desquels chaque étudiant prenait place dans l'une de six équipes de 4 étudiants. Chaque groupe se voyait proposer une question génératrice à propos de laquelle les étudiants devaient enquêter en vue de produire une réponse au bout de 12 séances de 1h30, réparties tout au long de l'année. Aucune consigne n'était formulée relativement à l'organisation de l'enquête : les étudiants pouvaient travailler seuls, en groupe entier, par équipes, etc. Certains ont réalisé des entretiens avec des chercheurs extérieurs à l'INP, qu'ils ont contactés par leurs propres

---

<sup>29</sup> [https://fr.wikipedia.org/wiki/La\\_Prépa\\_des\\_INP](https://fr.wikipedia.org/wiki/La_Prépa_des_INP)

moyens, d'autres sont allés se renseigner dans des magasins commercialisant des ordinateurs, etc.

Une difficulté importante que j'ai rencontrée dans la gestion de l'atelier était relative à la *topogenèse*. Il m'est apparu important, pour ne pas dire primordial, de favoriser une négociation topogénétique à l'avantage des étudiants, mais je me suis heurté, de façon prévisible, à des résistances de la part d'étudiants habitués au paradigme monumentalisme et à une forme de passivité qui lui est associée. En particulier, mon refus de répondre à des questions ou d'évaluer certains éléments de réponse est apparu comme une attitude inadmissible par les étudiants. Assez rapidement (au bout de deux séances sur les douze prévues), certains étudiants ont eu le sentiment d'avoir terminé leur enquête. Il s'est alors agi de relancer le travail d'enquête, tout en veillant à maintenir un topos important pour les étudiants, *y compris dans la décision de poursuivre ou non l'enquête*, ce qui était particulièrement délicat.

Les questions posées étaient les suivantes : « Certains logiciels permettent d'améliorer la netteté des photos. Comment font-ils ? » et « Certains téléphones se mettent en veille lorsqu'on ne les regarde plus. Comment est-ce possible ? ». Ces deux questions pouvaient donner lieu à des réponses plus ou moins approfondies et techniques. Certains étudiants s'en sont tenu à des réponses relevant d'une forme de vulgarisation, sans qu'il soit possible de contester le bien-fondé de ces réponses sur la seule base de la question. J'ai conçu comme une rupture des conditions posées au début du projet le fait de refuser certaines réponses pour des raisons qui n'étaient pas inscrites dans la question, ce qui n'a pas facilité la gestion du projet. Le problème s'est bientôt formulé pour moi de la façon suivante : les étudiants devraient trouver leur propre « critère d'arrêt » pour l'enquête. C'était, je devais le comprendre plus tard, une façon de refuser d'endosser la fonction d'*aide à l'étude*, mais c'était aussi une façon de chercher à responsabiliser les étudiants y compris dans des fonctions qui ne sont pas les leurs dans le cadre du paradigme de la visite des œuvres : déterminer si une réponse est satisfaisante ou non ne peut se faire que selon certains critères qu'il devait leur revenir d'établir *eux-mêmes*. Aujourd'hui, j'envisagerais la question différemment en posant que l'*aide à l'étude* est aussi là pour aider les étudiants à formuler leurs « critères d'arrêt », notamment en nourrissant le processus dialectique des médias et des milieux en enrichissant le milieu. Néanmoins, ce que l'on peut considérer comme un manque initial d'appréciation a permis d'avancer une idée qui me semble conserver une certaine pertinence : la dialectique des médias et des milieux est d'autant mieux à même de *fonctionner* et d'aboutir à la formulation (toujours renouvelée) de critères « d'arrêt » pour l'enquête qu'elle trouve dans la question génératrice certains indices relatifs à la forme que doit prendre un tel critère.

Une première distinction est apparue entre les questions portant sur le « comment » et celles qui interrogent le « pourquoi » d'une situation donnée. Ces dernières en appelant une réponse au niveau gnoséologique (*logos*) ne permettent pas toujours le déploiement de l'enquête dans ses retranchements les plus « techniques ». Les étudiants finissent par se contenter d'une réponse de principe, sans approfondir jusqu'à la mise en œuvre du

principe – qui soulève toujours des difficultés imprévues et de nouveaux développements au niveau du *logos*. Le premier principe devant gouverner la formulation des questions devrait ainsi être de formuler une question portant sur le « comment » plutôt que sur le « pourquoi ».

En 2015, mon départ pour l'ESPE<sup>30</sup> d'Aix-Marseille n'a pas mis fin à l'expérience des ateliers d'enquête puisque plusieurs professeurs (de mathématiques, de physique, d'anglais) ont pris le relais. Nous avons échangé longuement à propos de la formulation des questions et peu à peu mon *logos* relatif au type de tâches « produire une question génératrice » s'est enrichi pour parvenir à produire la technique suivante :

Il faut poser une question qui n'est *a priori* reliée à aucun domaine d'enseignement de l'institution où se déploie l'atelier d'enquête. La question doit être une question relative à la façon de faire quelque chose et doit être posée en référence à une institution explicite (par exemple, l'institution de l'atelier d'enquête lui-même).

Cette dernière précision institutionnelle se comprend si l'on tient compte du fait que la réalisation d'un projet (« faire ») dans une institution donnée est d'emblée limitée par les conditions et contraintes offertes par l'institution : ce sont autant d'éléments de milieu qui pourront jouer leur rôle dans les différentes dialectiques des médias et des milieux qui définiront peu à peu le « critère d'arrêt » de l'enquête.

### **À la recherche de raisons d'être<sup>31</sup>**

Dans une institution quelconque, non principalement didactique, l'étude est en principe motivée par des besoins praxéologiques, sauf si l'institution se met à fonctionner comme une École pour certains objets dont les raisons d'être *pour cette institution* courent alors le risque de disparaître : on se met à les étudier parce que la noosphère de l'institution considère qu'il le faut, sans forcément donner – ni d'ailleurs, à terme, connaître – les raisons de le faire. Les institutions principalement didactiques soumises au paradigme de la visite des œuvres fonctionnent de même pour la plupart des objets étudiés : on ne saurait que rarement indiquer les raisons pour lesquelles on les étudie, ni même, le plus souvent, les raisons de leur existence ou leur utilité. Il convient ici de préciser quelque peu les notions même de raison d'être et d'utilité. La raison d'être, selon le TLFi, est la « raison d'exister, d'être là, à cet endroit, à ce moment-là et dans ce cas concerne la fonction, la définition même d'une chose » (*ÊTRE : Définition de ÊTRE*, s. d.). L'utilité d'un objet renvoie à la façon dont il est utile, c'est-à-dire « dont [son] usage, [sa] pratique est ou peut être avantageux pour quelqu'un ; [dont il] satisfait un besoin, répond à une

---

<sup>30</sup> École supérieure du professorat et de l'éducation, désormais remplacées par les Instituts nationaux supérieurs du professorat et de l'éducation (INSPE) – [https://fr.wikipedia.org/wiki/Institut\\_national\\_supérieur\\_du\\_professorat\\_et\\_de\\_l'éducation](https://fr.wikipedia.org/wiki/Institut_national_supérieur_du_professorat_et_de_l'éducation)

<sup>31</sup> (Bourgade, 2019a)

demande sociale » (*UTILE : Définition de UTILE*, s. d.). La raison d'être a un caractère plus diachronique, elle renvoie aux raisons qui, à un moment donné, ont conduit l'objet à exister ; l'utilité, plus synchronique, évoque les fonctions que remplit l'objet à l'instant dont on parle. L'utilité renvoie à l'usage que l'on fait ou peut faire d'une œuvre dans une institution donnée, alors que la raison d'être évoque plutôt les questions qui gouvernent sa genèse institutionnelle.

En TAD, on dira que les raisons d'être d'une œuvre sont des questions qui les ont suscitées. Plus précisément, on dira qu'une question  $Q$  est *une* raison d'être d'une œuvre  $o$  pour une instance  $\hat{i}$  selon une instance  $\hat{w}$  si, selon  $\hat{w}$ , une instance évaluatrice  $\hat{v}$  jugerait qu'*il est utile voire indispensable* ( $\mathfrak{I}$ ) à  $\hat{i}$  de disposer de  $o$  pour mener à bien, dans une position  $\hat{s}$  donnée, l'étude de  $Q$  ( $\partial_Q$ ) – ce que l'on notera, d'une manière habituelle en TAD (Chevallard, 2011),  $\hat{w} \vdash [\hat{v} \vdash \mathfrak{I}(\mathcal{C}(\hat{s}), o, \partial_Q, \hat{i})]$  ; l'ensemble  $\mathcal{C}(\hat{s})$  désigne les conditions qui règnent habituellement, selon  $\hat{v}$ , en position  $\hat{s}$ . Notons que les instances  $\hat{v}$  et  $\hat{s}$  peuvent être des instances *positionnelles* et renvoyer donc à un ancrage institutionnel particulier : la notion de raison d'être est relative non seulement à  $\hat{w}$ , mais aussi à l'institution à laquelle  $\hat{i}$  est assujettie.

Il y a par ailleurs, comme les notations que j'ai introduites le suggèrent, un lien étroit entre la notion de raison d'être et les problématiques primordiale et interventionniste (Chevallard, 2011). Qui étudie une question pour déterminer les œuvres que son étude fait fleurir se situe d'emblée dans le cadre de la problématique primordiale ; à l'inverse, qui cherche les raisons d'être d'une œuvre se place dans le cadre de la problématique interventionniste qui consiste à déterminer l'ensemble des projets dont la réalisation requiert l'œuvre considérée. Si l'on se restreint aux projets qui consistent en l'étude de questions, on se ramène bien à la recherche de questions dont l'étude requiert l'œuvre considérée, c'est-à-dire de ses raisons d'être.

Pourquoi la question des raisons d'être est-elle à ce point cruciale pour la recherche en didactique, mais aussi pour la formation de la profession ? Le caractère en quelque sorte *génétique* des raisons d'être, le fait que ce sont des questions qui *engendrent* l'étude, permet de le comprendre. La réalisation d'un projet est engagée par une instance  $\hat{i}$ , et le processus d'étude et de recherche qui s'ouvre alors est marquée notamment par la *recherche* (puis l'étude) de praxéologies dont l'usage est utile ou indispensable à la réalisation du projet. La question que pose, en pratique, la réalisation du projet (« Comment réaliser ce projet ? ») est alors une raison d'être de ces praxéologies. Leur *utilité* dans l'institution où se mène le projet ne se limitera peut-être pas à la réalisation de celui-ci, mais elle y trouve son origine.

La *problématique primordiale* consiste en la recherche de praxéologies utiles, voire indispensables ( $\mathfrak{I}$ ) à la réalisation d'un projet  $\Pi$  par une instance  $\hat{i}$  sous un ensemble de conditions  $\mathcal{C}$  ; on cherche donc les praxéologies  $\wp$  telles que  $\mathfrak{I}(\mathcal{C}, \wp, \Pi, \hat{i})$  (voir

Chevallard, 2011 où Chevallard n'inclut pas la précisions sur les conditions, ce qu'il fera plus tard) :

La première est la problématique primordiale que je formulerai ainsi :

Étant donné un projet d'activité  $\Pi_0$  dans lequel telle institution ou telle personne  $U_0$  envisage de s'engager, quel est, pour cette institution ou cette personne, l'équipement praxéologique  $\{\wp\}$  qui peut être jugé indispensable ou simplement utile dans la conception et l'accomplissement de ce projet ?

On note  $\mathfrak{I}(\wp, \Pi_0, U_0)$  le fait que  $\wp$  soit utile ou indispensable à  $U_0$  pour concevoir et accomplir  $\Pi_0$ .

C'est dans le cadre de cette problématique qu'apparaissent, pour ainsi dire « naturellement », les raisons d'être des praxéologies. L'inconvénient, du point de vue de l'ingénieur didacticien qui souhaite produire une séquence d'enseignement relatif à une praxéologie  $\wp$  donnée, est bien évident : l'inconnue pour lui est le (ou les) projet(s)  $\Pi$  qui constitue(nt) la (ou les) raison(s) d'être de  $\wp$ . Son action ne s'engage donc *a priori* pas dans la cadre de la problématique primordiale : l'ingénieur didacticien, disons, le professeur  $\hat{u}$ , doit plutôt chercher les projets  $\Pi$  pour la réalisation desquels, par une instance  $\hat{i}$  sous les conditions qui sont celles de la position d'élève, soit les conditions  $\mathcal{C}(\hat{e})$ , la praxéologie  $\wp$  peut s'avérer utile ou indispensable, c'est-à-dire, finalement, que  $\hat{u}$  doit explorer l'ensemble des projets  $\Pi$  pour lesquels  $\hat{v} \vdash \mathfrak{I}(\mathcal{C}(\hat{e}), \wp, \Pi, \hat{i})$ . On reconnaît là la *problématique interventionniste* (Chevallard, 2011).

La recherche de raisons d'être de praxéologies à enseigner est une problématique centrale dans l'enseignement secondaire actuel en France, où le paradigme dominant de l'étude reste monumentaliste, tandis que certaines conditions sociétales qui prévalent par ailleurs rendent l'étude sous ce paradigme largement problématique (ainsi, et pour ne donner qu'un seul exemple, l'accessibilité d'informations de tout type, de façon instantanée pour à peu près tous les effets vient rompre le contrat qui unissait auparavant l'élève supposé ignorant à son professeur supposé sachant).

Une structuration possible de l'étude dans ce contexte consiste à l'envisager en quatre temps (voir aussi p. 60) :

- I. Activité d'étude et de recherche (AER, fonctions de première rencontre, exploratoire et technologico-théorique)
- II. Synthèse (fonction d'institutionnalisation)
- III. Exercices (fonction de travail)
- IV. Évaluation (fonction d'évaluation).

Une telle structuration quaternaire peut être privilégiée pour diverses raisons, dont l'une, qui n'est pas la moindre, est qu'elle favorise l'entrée dans l'étude par une *question*, la question génératrice  $Q_{\text{AER}}$  de l'AER. La question posée conduit généralement à la réalisation d'une tâche, dite tâche coche et notée  $\checkmark$ , réalisation qui s'avère problématique

et engendre la réalisation d'une tâche  $t^*$  d'un type  $T^*$  dont l'étude pousse à la rencontre avec un type de tâches  $T$  qui est l'enjeu de l'étude. Reprenons l'exemple, déjà rencontré, d'un paysan qui doit ranger dans des boîtes de 6 œufs les 255 œufs de sa récolte du jour.  $Q_{AER}$  : Combien de boîtes au minimum doit-il utiliser pour ranger ses œufs ? La tâche coche consiste à « aider le paysan à déterminer le nombre de boîtes qu'il lui faut ». La tâche  $t^*$  consiste à déterminer combien d'ensemble à 6 éléments on peut constituer à partir de 255 éléments d'un ensemble. Le type de tâches  $T^*$  consiste à déterminer combien d'ensemble à  $k$  éléments on peut constituer à partir de  $n$  éléments d'un ensemble. Enfin, le type de tâches  $T$  revient à déterminer le quotient et le reste, par la division euclidienne, d'un entier  $n$  par un entier  $k$ .

Cette structure idéaltypique des AER met en évidence qu'elles *motivent* l'étude des praxéologies mathématiques : on rencontre les mathématiques non pour les besoins d'une visite organisée d'œuvres inscrites au programme de la classe, mais bien parce que la recherche d'une réponse à une question en fait des ingrédients utiles, voire indispensables au projet. Pour l'instance  $\hat{e}$ , la position d'élève, la réalisation d'une AER place d'emblée dans la problématique primordiale. Pour l'instance  $\hat{u}$  du professeur, il s'agit au contraire, dans le travail de conception des AER, de se placer dans le cadre de la problématique duale, interventionniste. Le risque est fort, alors, pour le professeur, de ne chercher les raisons d'être que dans des ressources habituelles pour lui : manuels, documents ressources du ministère, etc., au risque de ne trouver que des raisons d'être *scolaires*, c'est-à-dire créées pour et par l'École. Elles peuvent bien sûr remplir leur office et motiver l'étude, mais, au moins dans certaines institutions, il peut être judicieux de pousser la recherche de raisons d'être au-delà de l'existant.

C'est peut-être le propre d'un enseignement *général* (p. 67) de ne pas donner prise à l'étude de raisons d'être *spécifiques* – qui sont pourtant les seules qui ont une existence claire. On produit de nouvelles praxéologies pour répondre à des *besoins spécifiques*, qui peuvent ensuite être généralisés. De ce point de vue, l'AER que j'ai présentée rapidement ci-dessus évoque un contexte spécifique (que l'on pourrait spécifier encore, en expliquant les raisons pour lesquelles le paysan doit déterminer le nombre de boîtes et non se contenter d'aller en chercher une grande quantité, etc.). On peut conjecturer que des contextes institutionnels différents puissent faciliter la recherche et l'usage didactique de raisons d'être plus spécifiques – et donc, en un sens, plus riches, puisque véhiculant plus d'informations liées au contexte de leur apparition.

Dans le cadre des ateliers d'enquête de la prépa des INP (p. 82), on est d'emblée dans une situation fortement marquée par la problématique primordiale : les élèves, pour étudier la question, vont devoir *chercher* des œuvres, et notamment des praxéologies qui pourront les aider à produire une réponse à la question. Parmi les œuvres rencontrées (et que je n'avais pas prévues), le produit de convolution de matrices est apparu rapidement comme un outil central de la retouche d'images.

Ce qui m'intéresse plus particulièrement ici, c'est le mouvement dialectique que j'ai proposé de faire entre problématiques interventionniste et primordiale en imaginant un *ingénieur didacticien* ou un *professeur  $\hat{u}$*  cherchant des raisons d'être d'œuvres mathématiques inscrites au programme de sa classe (de niveau universitaire, 1<sup>re</sup> ou 2<sup>e</sup> année d'études de sciences). On imagine que  $\hat{u}$  dispose d'un corpus de comptes rendus d'enquêtes réalisées par des élèves ingénieurs à propos de questions telles que celle que j'ai proposée en atelier d'enquêtes :  $\hat{u}$  va commencer par explorer ce corpus pour chercher *toutes les œuvres qui sont inscrites au programme de ses classes et qui ont été utiles voire indispensables* à l'étude des questions posées dans le cadre d'ateliers d'enquêtes (problématique primordiale). Dans un second temps, il va choisir l'une de ces œuvres et explorer l'ensemble du corpus pour déterminer les questions précises qui ont rendu leur étude utile ou indispensable (problématique interventionniste). Procédant ainsi dialectiquement, on finit par extraire, pour ainsi dire, du minerai des rapports d'enquête, quelques pépites qui sont autant de questions dont l'étude doit pouvoir faire émerger comme utiles ou indispensables des œuvres mathématiques inscrites au programme. Bien sûr ces questions ne sont peut-être pas étudiables telles quelles dans les classes de  $\hat{u}$ , et celui-ci doit donc entreprendre un travail de *mise en situation* et d'adaptation des questions – c'est-à-dire de transposition didactique.

Dans le cas que j'ai étudié, j'ai exploré le corpus jusqu'à ce que j'observe l'importance qu'y prenait l'œuvre « produit de convolution matriciel ». J'ai alors recherché systématiquement les situations où cette œuvre apparaissait, jusqu'à ce que je constate que des éléments d'algèbre générale y intervenaient et y étaient particulièrement utiles : notions de loi de composition interne, d'inverse, d'associativité et de commutativité. J'ai alors produit une recontextualisation sous la forme d'une question  $Q_{AER}$  qui permet d'étudier ces notions d'algèbre générale, le produit de convolution n'étant qu'un support pour leur étude (ce produit n'est pas au programme des classes préparatoires intégrées de l'INP de Toulouse). L'intérêt est de produire des raisons d'être ancrées dans un contexte institutionnel proche de ceux que connaîtront les étudiants dans leurs études (ingénierie, etc.). On peut conjecturer que le même travail peut être avantageusement mené dans d'autres filières *spécifiques* comme les filières professionnelles de l'enseignement secondaire.

Cet exemple permet de mettre en évidence la relativisation de la notion de raison d'être. Tout d'abord, c'est en l'occurrence le *chercheur didacticien*  $\xi$  qui *juge* qu'*en position de professeur  $\hat{v}$* , on *jugerait* utile ou indispensable l'étude des éléments d'algèbre générale que j'ai énumérés plus haut, pour répondre à la question génératrice  $Q_{AER}$ , *en position d'élève  $\hat{e}$* . En particulier, la raison d'être  $Q_{AER}$  n'est pas d'emblée conçue comme une raison d'être *absolument*, mais bien relativement à une institution (ici, une institution didactique), mais aussi à un point de vue pris sur cette institution (ici, le point de vue de  $\xi$ ).

Par ailleurs, puisque le fait, pour une question  $Q$ , d'être une raison d'être d'une œuvre  $o$  dépend de l'institution dans laquelle l'étude de  $Q$  est susceptible d'être menée, les

processus de transposition didactique ne garantissent en rien qu'une même question *Q* soit une raison d'être de la même œuvre dans l'institution « savante » et dans l'institution didactique où cette œuvre est finalement transposée. Plus généralement se pose la question de la persistance de la signification des œuvres dans les processus de transposition didactique – surtout si l'on considère que les raisons d'être contribuent de façon non négligeable à la constitution de la signification des œuvres.

## **Perspectives**

Les ateliers d'enquête que j'ai évoqués dans les deux sections qui précèdent permettent d'expérimenter pour ainsi dire *in vivo* et d'étudier le fonctionnement de dispositifs didactiques relevant du paradigme du questionnement du monde. On y observe comment les étudiants et les aides à l'étude peuvent faire évoluer le milieu de l'étude et mener l'étude plus ou moins poussée des œuvres qu'ils rencontrent. Dans le cas des ateliers d'enquête de la prépa des INP, j'ai pu observer les limites dans l'étude des œuvres : l'étude était souvent abandonnée à peine commencée, même lorsque les œuvres s'avéraient intéressantes pour l'avancée de l'enquête. La difficulté était souvent invoquée, mais je pense qu'il conviendrait également de s'interroger sur les praxéologies de *visite des œuvres* qui peuvent être utiles pour étudier, dans le cadre du paradigme du questionnement du monde, une œuvre déjà formalisée. Plus généralement, j'aimerais reprendre l'exploitation des enregistrements que j'ai réalisés lors des deux premières années de mise en œuvre de l'atelier : il s'agirait pour moi de mettre en évidence des praxéologies didactiques mises en œuvre par les étudiants et qui ne se seraient pas exprimées dans un contexte plus monumentaliste. Enfin, je souhaiterais étudier la question de l'institutionnalisation des œuvres dans le cadre du paradigme du questionnement du monde. Quelles œuvres les étudiants de cet atelier d'enquête ont-ils choisi d'institutionnaliser (dans leur rapport de fin d'atelier) ? De quelle façon les ont-ils institutionnalisées ? À quelle fin ?

# Éléments d'un projet de recherche

J'ai déjà indiqué, en temps voulu, des *perspectives de recherche*, perspectives que je souhaite développer ici pour offrir une vue d'ensemble, aussi cohérente que possible, de ce qui constitue un *projet de recherche*.

Mon rapport à la recherche en didactique est orienté par un désir : celui d'étudier, mettre à l'épreuve et comprendre la théorie anthropologique du didactique. Il ne s'agit pas de récuser l'importance de produire des *résultats* de recherche ; pour autant, l'élaboration d'une théorie du didactique me paraît un enjeu profond et urgent dans une période où les attaques contre les institutions didactiques, scolaire et universitaire, se font particulièrement virulentes. Disposer d'une théorie consistante du didactique est une condition fondamentale du renforcement des professions du didactique par la formation à la didactique. Contribuer si peu que ce soit à l'étude de la TAD, à sa diffusion, à son utilisation : c'est l'orientation que je souhaite donner à mes travaux.

On l'aura peut-être compris à la lecture de cette note de synthèse, parmi les éléments de la TAD qui ont nourri ma curiosité, la théorie de la transposition didactique, celle des rapports et de la cognition, et celle de l'enquête occupent une place centrale dans ma réflexion. Je souhaite poursuivre des recherches qui mettent en jeu ces théories, sans exclusives – en particulier, l'étude de telle ou telle œuvre (mathématique ou autre) et de sa didactique me paraît être une bonne condition pour l'élaboration de nouvelles questions de didactique.

Les développements que je propose ici sont très inégaux, simple esquisses ou sillons plus approfondis selon l'état de mes travaux actuels. Je commencerai par présenter quelques idées de développements en lien avec la problématique de la transposition didactique, puis j'entreprendrai d'indiquer quelques voies de développement dans le cadre de la théorie du refoulement du didactique ; je me pencherai également sur les perspectives que j'entrevois à développer depuis la théorie de l'enquête ; enfin, j'évoquerai quelques pistes de recherche relatives aux besoins mathématiques et didactiques de la profession de professeur.

## Phénomènes transpositifs

Dans cette première section, j'étudie les développements que je souhaiterais produire grâce à la théorie des phénomènes transpositifs. Le premier porte sur la transposition didactique de l'histoire des mathématiques et de son rôle dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Dans le second développement, je souhaite mettre à l'épreuve une conjecture que j'ai posée relativement à la transposition didactique de la « rigueur » et proposer des outils pour ce type de mise à l'épreuve tout en indiquant les bénéfices que l'on doit pouvoir en tirer.

## À propos de l'usage que l'on fait de l'histoire des mathématiques

L'histoire des mathématiques est apparue dans les programmes de l'enseignement secondaire en 2018, suivant les recommandations du rapport dirigé par Villani et Torrossian (2018). Cela pose plusieurs questions au didacticien : qu'enseigne-t-on quand on affirme enseigner l'histoire des mathématiques ? Enseigne-t-on les mathématiques au moyen de leur histoire ? Ou bien l'histoire de ces mathématiques ? Dans ce dernier cas, comment opère la transposition didactique à partir de savoirs historiques « savants » relatifs aux mathématiques ? Si la première hypothèse est au contraire la bonne, si on enseigne les mathématiques au moyen de leur histoire, de quelle histoire parle-t-on et quelles conditions l'entrée historique dans la matière étudiée crée-t-elle pour l'étude de cette matière ? Qu'y gagne-t-on et qu'y perd-on ? Autant de questions que je souhaite examiner. L'un des moyens de l'enquête que j'envisage consisterait à explorer les productions de la recherche historique sur un thème donné (par exemple l'irrationalité de la racine carrée de 2) et à déterminer la distance entre ces produits de la recherche et l'histoire effectivement racontée de ce thème (il est par exemple facile de montrer que ce qui est généralement présenté comme une preuve « historique » de l'irrationalité de la racine carrée de 2 n'est pas celle que l'on peut attribuer aux pythagoriciens – on pourra ainsi se reporter à Corry, s. d. qui reprend cet argument en le mettant en relation avec la critique virulente de l'historiographie prononcée par Unguru).

Ces questions en appellent une autre : pourquoi cette insistance à vouloir enseigner (avec) l'histoire des mathématiques ? Quelles fonctions peut jouer un tel enseignement ? Je pense, et je souhaiterais examiner dans quelle mesure c'est bien le cas, que cet enseignement remplit notamment une fonction apologétique (Artaud, 1989) qui trouve son utilité supposée dans un contexte de désaffection pour l'étude des sciences en général et des mathématiques en particulier. J'ai commencé à entreprendre une enquête dans cette direction en étudiant la rhétorique du rapport Villani-Torrossian, ainsi que celle des programmes de mathématiques du cycle 4. Il me faudrait dépasser cette seule enquête dans la littérature purement institutionnelle pour y inclure des œuvres issues de la noosphère (brochures de l'APMEP<sup>32</sup>, des IREM<sup>33</sup>, etc.).

## Transposition didactique et structure cognitive des institutions

L'histoire des mathématiques est aussi une histoire de la *rigueur*. J'ai formulé une conjecture relative à la signification et aux fonctions *axiologiques* de la rigueur dans l'enseignement secondaire (Bourgade, 2019b) : ces fonctions sont imposées par la structure cognitive de l'institution d'accueil (l'enseignement secondaire) dans un

---

<sup>32</sup> Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Association\\_des\\_professeurs\\_de\\_mathématiques\\_de\\_l'enseignement\\_public](https://fr.wikipedia.org/wiki/Association_des_professeurs_de_mathématiques_de_l'enseignement_public).

<sup>33</sup> Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, [https://fr.wikipedia.org/wiki/Institut\\_de\\_recherche\\_sur\\_l'enseignement\\_des\\_mathématiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Institut_de_recherche_sur_l'enseignement_des_mathématiques).

processus transpositif qui a fait perdre à la rigueur ses fonctions premières dans l'institution productrice (la recherche en mathématiques). Je prétends qu'on ne peut connaître la signification d'un objet dans une institution, les fonctions qu'il y joue, que si on connaît non seulement les différents rapports des diverses positions institutionnelles à cet objet, mais également les rapports, pour ces positions, entre cet objet et les autres objets : il faut, pour connaître  $o$  dans l'institution  $I$ , non seulement connaître les  $R(\hat{i}, o)$  pour toutes les positions  $\hat{i}$  de  $I$ , mais aussi les  $R(\hat{i}; o, o')$  pour tous les autres objets  $o'$  qui relèvent de l'univers cognitif de  $I$  (voir p. 76). Il faut savoir quelles sont les relations, pour la position d'inspecteur pédagogique régional<sup>34</sup>, se tissent entre la « rigueur » et, disons, la précision, l'honnêteté, le bluff, la vérité, l'erreur, etc., pour connaître le réseau des relations entre objets pour cette position. Ces relations ne sont pas nécessairement les mêmes pour la position d'élève, ni encore pour celle de professeur... Une fois ce travail fait, on dispose d'un portrait de l'objet  $o$  pour l'institution  $I$  (enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire). L'étude des phénomènes transpositifs peut appeler la comparaison avec un autre portrait, celui de l'objet  $o$  (la rigueur) pour une autre institution, l'institution de production dont cet objet procède (dans le cas qui nous intéresse : l'institution de recherche). C'est ce type de comparaison que j'ai menée dans (Bourgade, 2019b) et que je souhaite développer de façon plus systématique : en procédant à des entretiens et en construisant des questionnaires à partir de ces entretiens, je souhaite recueillir des données plus conséquentes qui me permettraient de raffiner l'analyse et de produire, sur ce cas d'école, une technique d'étude des processus transpositifs qui n'attribue pas la responsabilité des phénomènes étudiés aux seules *personnes*, ni même, d'ailleurs, aux seules *positions*, mais aussi bien aux structures cognitives des institutions elles-mêmes.

## Faire institution ?

Dans le cadre des questions que j'adresse à la notion d'institution, je souhaite pousser plus avant l'*effort de théorisation* de ce que « faire institution » peut vouloir dire.

Les notes qui suivent constituent une esquisse du genre de réponse que je cherche à produire à la question « comment fait-on institution ? ». La participation à la vie d'une institution suppose d'y occuper une place, ce qui n'est possible généralement que par l'accumulation, puis l'investissement dans la position d'un équipement praxéologique primitif. Le jeune enfant investit dans sa position de fils ou de fille un capital praxéologique qu'il élabore dialectiquement à son effort pour occuper cette position. L'élève accumule dès ses jeunes années un capital praxéologique (notamment social) qui lui permettra de venir occuper la position d'élève en conformant ses attitudes et ses praxéologies à celles que l'institution attend de lui. Quand la position n'existe pas encore (la position d'enfant dans une famille jusqu'alors sans enfant, la position de conseiller pédagogique dans l'Université alors qu'est seulement créée la fonction, etc.), l'impétrant

---

<sup>34</sup> [https://fr.wikipedia.org/wiki/Inspecteur\\_d'académie\\_-\\_inspecteur\\_pédagogique\\_régional](https://fr.wikipedia.org/wiki/Inspecteur_d'académie_-_inspecteur_pédagogique_régional)

doit faire valoir auprès de l'institution la valeur de son capital praxéologique *pour l'institution* : l'intérêt doit en être reconnu et l'institution doit pouvoir accepter, reconnaître, *institutionnaliser* la position émergente sur la base de l'équipement praxéologique apporté par la ou les personnes qui créent la position. L'institutionnalisation conduit à une dépersonnalisation des positions que peuvent désormais occuper des personnes diverses pour autant qu'elles disposent d'un capital praxéologique qui leur permet d'investir ces positions en s'acquittant d'un *droit d'entrée* – droit d'entrée qui s'est défini progressivement à mesure que la position se créait (un premier enfant crée des attentes sur le second). Des tensions peuvent alors exister entre les prophètes, créateurs pour ainsi dire de la position, et le clergé qui vient l'occuper ensuite. L'institutionnalisation vient en effet *modifier* sa définition, ne serait-ce que parce que la position est désormais *reconnue* par l'institution et ceux qui viennent l'occuper doivent reconnaître l'institution qui a reconnu la position. L'institution qui n'attendait rien lorsque la position a émergé, formule désormais des *attentes praxéologiques* à l'endroit de ceux qui viennent l'occuper.

Les enjeux qui agissaient, en les faisant agir, les personnes qui ont créé la position doivent être ajustés aux nécessités et besoins spécifiques de l'institution. Les positions étant généralement créées par de *mauvais sujets*, c'est-à-dire des personnes dont le rapport à l'institution et à ses objets et enjeux n'est pas conforme au rapport institutionnellement attendu d'elles, ceux-ci y importent le plus souvent des principes de vision et de division qui ne sont pas ceux de l'institution : leur parole, comme l'on dit dans les documentaires, n'engage qu'eux – et sûrement pas l'institution.

Le bon fonctionnement de l'institution universitaire repose sur un modèle praxéologique fondé sur l'opposition entre chercheur et enseignant (« enseignant–chercheur ») et c'est un coup de force qui consiste pour les futurs conseillers pédagogiques à constituer leur position comme légitime dans une institution où l'autonomie des sujets semble devoir aller contre l'idée d'un assujettissement à toute forme de conseil (pédagogique ou autre). L'institutionnalisation vient mettre de l'eau dans ce vin. Ne peut être conseiller pédagogique que celui ou celle qui reconnaît la légitimité de l'autonomie, venant par exemple limiter le périmètre de l'action de conseil auprès des sujets volontaires.

L'étude de la façon dont une personne vient occuper ou créer une position dans une institution doit encore trouver son cadre « méthodologique » : *comment analyser les positions, les prises de position des personnes ?* Une proposition consiste à utiliser le modèle praxéologique comme analyseur des prises de position, et la notion de curriculum personnellement vécu comme moyen de décrire les positions et les trajectoires qui y mènent.

J'envisage, dans le cadre de la thèse de Maëva Ouattou, d'étudier les trajectoires didactiques des professeurs et leur effet sur leur équipement possiblement didactique. L'objet de la thèse de Maëva Ouattou étant double – praxéologies didactiques des élèves, praxéologies didactiques des professeurs –, la question de l'origine des praxéologies

didactiques s'y pose naturellement tant pour les professeurs que pour les élèves. Maëva Ouattou a commencé à mener des entretiens semi-directifs avec des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire, dans lesquels elle a pu faire apparaître des éléments de leur rapport aux mathématiques et à leur étude, mais aussi de leurs trajectoires (études « en ligne droite » ou non, rapport aux mathématiques étant élèves, CAPES ou agrégation, choix d'établissement d'exercice, etc.). Mon objectif est de conduire Maëva Ouattou à exploiter ces données pour mettre en évidence des corrélations entre les prises de position didactiques des enseignants et leur parcours didactique.

### **En résumé**

Trois axes se dégagent de ce premier thème : étudier l'approche historique dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que ses fonctions ; étudier des phénomènes transpositifs en essayant de les rapporter à des différences de structures cognitives des institutions ; déterminer les corrélations possibles entre curriculum personnellement vécu et prises de positions possiblement didactiques des enseignants.

## **Sur le refoulement du didactique comme ingrédient technologique**

Dans cette section, je veux défendre l'idée que la notion même de *refoulement du didactique* (voir pages 56) peut être un ingrédient technologique de praxéologies de recherche : la sensibilité à la question du refoulement du didactique permet de créer des techniques d'enquête. Il convient par exemple de s'interroger systématiquement sur le caractère possiblement didactique des gestes observés comme des gestes ignorés (ce qui est plus difficile : il faut alors imaginer ce qui pourrait exister mais n'existe pas dans l'institution observée – cela renvoie à la problématique écologique en didactique ; voir Artaud, 1998).

## **Sur les praxéologies didactiques des étudiants et des aides à l'étude**

L'un des terrains d'enquête qui me paraît particulièrement vif de ce point de vue concerne la pédagogie universitaire : la didactique me paraît être un point aveugle de cette approche des pratiques enseignantes. Cela peut s'expliquer par le refoulement du didactique, mais s'y ajoute une contrainte forte proprement institutionnelle : contrairement à ce qui est le cas dans l'enseignement secondaire, les enseignants-chercheurs sont aussi des *producteurs* du savoir qu'ils enseignent. La forme d'expertise dont ils sont porteurs en fait également des experts de la *didactique* des objets dont ils sont experts – en tout cas aux yeux des conseillers pédagogiques de l'enseignement supérieurs, qui, pour certains, se refusent absolument à interroger le *contenu* des cours prodigués. Je souhaiterais

reprandre mon terrain en école de chimie (ENSIACET<sup>35</sup>) pour étudier des enseignements de niveau universitaire et déterminer dans quelle mesure cette contrainte s'exerce sur les enseignants eux-mêmes qui seraient en quelque sorte victimes de leur expertise et laissés à eux-mêmes, sans formation didactique.

Le refoulement du didactique, je l'ai dit, consiste pour une part à ne pas reconnaître à certains gestes leur caractère possiblement didactique (au sens technique vu p. 23). En particulier, il y a une tendance à ne pas considérer les gestes des élèves de l'enseignement secondaire comme des gestes d'étude mais comme des gestes mathématiques, plus ou moins bien maîtrisés : l'élève qui trace des médianes (voir p. 52) pour déterminer un point à égale distance de trois points donnés n'ignore pas quelque chose (en tout cas pas plus que ses camarades puisque, précisément, l'activité en cours a pour but d'élaborer la technique par construction des médiatrices) ; au contraire, il dispose d'un savoir *didactique* (« en mathématique, pour construire un point, on l'obtient comme intersection de droites et de cercles ») qui lui permet de produire une technique didactique (il *étudie* le problème qui lui est soumis en traçant des droites et leurs points d'intersection). Ce sont ces praxéologies didactiques qui sont au cœur du travail de thèse que Maëva Ouattou a commencé sous ma direction et celle de Hamid Chaachoua.

La notion de geste possiblement didactique, celle de praxéologie possiblement didactique ou encore celle de situation possiblement didactique sont des apports récents à la théorie du didactique dans la perspective anthropologique (Chevallard, 2020). J'ai déjà évoqué le cadre dans lequel s'élaborent ces éléments théoriques (voir p. 23) ; des travaux menés en collaboration avec Maëva Ouattou nous ont conduit à proposer de parler d'*hétérogénéité possiblement didactique* d'un groupe lorsque les personnes qui le composent mettent en œuvre des praxéologies possiblement didactiques variées et significativement distinctes. Notre objectif, dans le cadre de la thèse de Maëva Ouattou, est de poursuivre l'étude en explorant systématiquement le champ assez délaissé des praxéologies possiblement didactiques *des élèves* – tout en menant une exploration similaire des praxéologies possiblement didactiques des professeurs, qui sont pour une part importante des praxéologies de direction de l'étude. Il s'agit de mettre en évidence, sous l'apparente uniformité des gestes objectivés par le professeur et pour ainsi dire *publiés* dans la classe, la diversité des gestes effectivement produits par les élèves. L'enquête gagne à se déployer sur plusieurs terrains : il ne s'agit pas de se limiter à l'observation de séances – même si c'est essentiel et si cela constitue une part importante du travail que nous réalisons –, mais d'inclure dans notre horizon la production *suscitée* de praxéologies d'étude dans le cadre d'entretiens menés avec des élèves, autour de problèmes mathématiques qui peuvent appeler une variété d'approches. Je souhaite également ouvrir le champ de la recherche à la question des ostensifs (Bosch &

---

<sup>35</sup> École nationale supérieure des ingénieurs en arts chimiques et technologiques, [https://fr.wikipedia.org/wiki/École\\_nationale\\_supérieure\\_des\\_ingénieurs\\_en\\_arts\\_chimiques\\_et\\_technologiques](https://fr.wikipedia.org/wiki/École_nationale_supérieure_des_ingénieurs_en_arts_chimiques_et_technologiques).

Chevallard, 1999) : en étudiant la façon dont des élèves malvoyants ou non-voyants s’emparent des mathématiques, on doit pouvoir mettre en évidence l’existence d’ostensifs différents des ostensifs habituels manipulés par des élèves voyants et régulés par des non ostensifs dont la problémativité est ainsi quelque peu cachée. En particulier, la différence peut-être radicale entre les ostensifs peut-elle se traduire par une modification partielle des non-ostensifs ? Un triangle, un algorithme de soustraction, une technique de comparaison de vecteurs sont-ils les mêmes pour des élèves ayant accès à des ostensifs très hétérogènes ? Quelles différences cela entraîne-t-il au niveau du *logos* des praxéologies étudiées ?

Une autre approche pour l’exploration des praxéologies possiblement didactiques des élèves est une approche *institutionnelle* : que dit l’institution à propos de ces praxéologies ? En dit-elle d’ailleurs quelque chose ? Il semble, en première lecture de la documentation institutionnelle fournie aux professeurs de mathématiques de l’enseignement primaire et secondaire, que l’on doive tracer une frontière entre les praxéologies *mathématiques* à enseigner, et les praxéologies *didactiques* qui relèvent d’une forme de familiarisation médiatisée par la notion de *compétence*. L’analyse des praxéologie des compétences (Artaud, 2020) s’avère utile pour dégager ce qui, derrière le mot, relève du mathématique à enseigner, et ce qui relève des gestes d’étude à acquérir, pour ainsi dire par surcroît. Significative est déjà la rupture entre les traitements réservés à l’un et aux autres : le mathématique est détaillé dans les programmes, les gestes d’étude sont évoqués à propos de compétences, de façon presque incidente. Je souhaite donc engager avec Maëva Ouattou un travail d’étude systématique des ressources institutionnelles et des manuels à propos de la façon dont les compétences y sont traitées, et dans quelle mesure une place y est faite aux praxéologies possiblement didactiques. Une première conjecture : la différence principale entre praxéologies mathématiques et praxéologies d’étude doit résider au niveau de l’*institutionnalisation*. Les secondes ne font, de fait, pas l’objet d’institutionnalisations dans les classes – alors que les premières font l’objet d’une attention particulière de ce point de vue. La différence ne s’épuise sans doute pas là, mais on tient sans doute une clef pour pénétrer dans ce champ à explorer.

S’agissant des praxéologies possiblement didactiques des professeurs de mathématiques de l’enseignement secondaire, je considère que trois axes se présentent naturellement à l’analyse : chronogénétique, mésogénétique, topogénétique. La fragmentation du temps didactique dans les séances ordinaires est aisément observable : une séance classique d’une durée d’une heure, de nos jours, se compose habituellement de l’étude d’une question rapide (questions flash ; voir le document intitulé types de tâches, dans *Ressources d’accompagnement du programme de mathématiques au cycle 4*, s. d.), de la correction d’un exercice fait hors classe suivie de la réalisation d’un autre exercice, puis d’un temps d’« activité » et, enfin, d’un temps d’institutionnalisation. Aucun de ces temps n’excède la durée d’une quinzaine de minutes, ce qui limite lourdement la possibilité, pour les élèves, de mettre en œuvre des praxéologies didactiques originales. Le tempo est serré, l’exécution est *staccato*. On peut conjecturer que la raison est circulaire : les élèves

peinent à se concentrer longtemps sur une même activité faute de moyens de l'étudier, on limite donc le temps de l'étude en scandant les séances sur un rythme élevé, ce qui ne permet pas aux élèves de développer des praxéologies d'étude qui leur permettraient de se consacrer longtemps à une même activité, etc. Je prévois de mener une recherche collaborative avec une professeure de mathématiques en collège (qui fait déjà l'objet d'observations menées par Maëva Ouattou dans le cadre de sa thèse) pour tenter de développer des dispositifs d'étude qui déploient une temporalité didactique plus ample. La question est étroitement intriquée avec celle de la mésogenèse : le temps de l'étude est resserré parce que l'étude est consacrée à de *petits objets*, qui ne requièrent pas d'infrastructures didactiques et mathématiques coûteuses. À l'inverse, on peut supposer que l'étude de thèmes un peu larges, au cours de périodes d'une durée non négligeable, permettrait le déploiement d'un milieu conséquent, lequel faciliterait en retour la prise d'initiative d'élèves trop souvent confinés à l'inactivité faute d'accroches – l'énoncé de l'activité représente le plus souvent l'essentiel des ressources disponibles. On aura bien sûr repéré, sous la question du temps et du milieu de l'étude, celle de la négociation topogénétique. La délégation de certains gestes d'étude aux élèves paraît indispensable pour créer des conditions susceptibles de favoriser une chronogenèse et une mésogenèse satisfaisante. En particulier, des gestes tels que « observer, analyser et évaluer » des gestes réalisés par d'autres élèves devraient entrer dans le *topos* des élèves : cela permettrait un enrichissement du milieu de l'étude et une facilitation de la réalisation de certaines fonctions de l'étude (les fonctions exploratoire et technologico-théorique notamment).

Mais la question de la formation des professeurs peut également s'articuler comme ceci : quel rapport aux mathématiques souhaite-t-on que *les professeurs* développent ? Et pour conduire *les élèves* à adopter un rapport de quel type ? Le rapport aux mathématiques comprend non seulement le rapport à des *œuvres mathématiques*, mais aussi à des façons de les *étudier*. Partant de quelques traits saillants de la pratique mathématique, on peut s'interroger sur ce que peut signifier « *justifier* » en mathématiques, ou encore « *expérimenter* ». On peut aussi s'intéresser aux *objets d'enseignement* : comment enseigner la proportionnalité, les probabilités, etc. ? Une autre question que pose la formation des professeurs, et que l'on peut lui poser, est celle de l'*appropriation par les élèves professeurs de la chose enseignée*. Que deviennent les dispositifs et les fonctions didactiques étudiées en formation dans leur mise en œuvre par les élèves-professeurs ? Enfin, la question de la formation des professeurs est aussi un questionnement de cette formation elle-même : quels moyens peut-elle se donner, quelle forme peut-elle prendre (Bourgade et al., 2021) ? La question des paradigmes didactiques se pose de manière frontale : alors que la formation est une formation au métier qui devrait préparer à une mise en œuvre du questionnement du monde dans les classes, la formation elle-même prend souvent la forme d'une visite d'œuvres mathématiques et didactiques. Des propositions ont été faites, comme celle des parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs (PER-FP, voir par exemple Sierra et al., 2013; Sierra & Gascón, 2018; Cid et al., 2020) : peut-on en généraliser le principe et élaborer une formation par l'enquête à l'enquête en milieu scolaire ?

## En résumé

Étude de la pédagogie universitaire.

Étude de l'hétérogénéité didactique ; en particulier, étude de la variabilité des ostensifs.

Étude institutionnelle des praxéologies possiblement didactiques ; analyse des *compétences* inscrites au programme de mathématiques.

Étude des praxéologies possiblement didactiques des professeurs : chronogenèse, mésogenèse, topogenèse ; conditions pour la formation des professeurs au changement de paradigme didactique.

## Sur la notion de justification et l'idée de preuve

S'il est un geste hautement didactique, c'est bien celui de démontrer : on démontre pour justifier, produire, rendre intelligible une *praxis*. Démontrer, c'est construire du technologico-théorique. Néanmoins, toutes les fonctions de la démonstration ne sont pas nécessairement perçues par la profession. Ainsi, à la question « pourquoi on démontre alors que ça se voit ? », les professeurs ont tendance à répondre « pour être sûr », ou « pour être sûr que c'est vrai dans chaque cas », etc. Si ces réponses ont une valeur indéniable, y réduire les fonctions de la démonstration est réducteur et ne permet pas de faire jouer à l'art de la preuve son plein rendement.

La question de la justification en mathématiques est complexe. Les fonctions de la preuve ne s'épuisent pas dans le besoin de justification, mais recouvrent également l'objectif d'intégrer à une théorie préexistante de nouveaux éléments. Si cet objectif va de soi dans l'institution de production de mathématiques, où les chercheurs n'ont pas à se justifier de vouloir *prouver*, il est moins clair dans l'institution scolaire, pour diverses raisons. Le souci de théorisation n'est pas premier dans l'esprit des élèves, s'il n'est pas construit au sein de la classe de mathématiques. Il peut toujours comporter une part d'arbitraire aux yeux du professeur puisque lui sait que la théorie existe déjà, ailleurs. Prouver devient alors *seulement* un moyen de garantir la certitude – ce qui présente des limites. Il me paraît important d'étudier les conditions sous lesquelles un développement de la preuve non réduit à ce besoin de certitude pourrait se faire jour dans les classes de mathématiques.

Un premier jeu de conditions est à chercher du côté de la formation initiale et continue des professeurs : il faut penser cette formation de sorte que la question de la théorisation y soit vive. Clément Durringer a produit plusieurs parcours d'étude et de recherche dans cette direction dont l'un fera l'objet d'une communication au congrès INDRUM<sup>36</sup> de 2024 (Durringer, 2024). Je souhaite étudier le logos des élèves professeurs relatif à la preuve mathématique à leur arrivée dans la formation MEEF et créer des dispositifs pour faciliter une modification de ce logos dans la direction d'une meilleure compréhension

---

<sup>36</sup> International network for didactic research in university mathematics, <https://hal.science/INDRUM>.

des enjeux liés à la démonstration. Je pense que la piste explorée par Clément Durringer, qui consiste à étudier au niveau M1 l'architecture de certains objets rencontrés au collège et au lycée, permet de mieux comprendre que l'objectif des mathématiques est de produire des *mathématisations* de phénomènes observables dans l'espace sensible notamment ; que l'utilité de telles mathématisations réside dans leur potentiel explicateur, ainsi que dans la possibilité qu'ils offrent de prévoir certains phénomènes inédits. Ce sont ces fonctions qu'il faudrait mettre à jour plus généralement dans la formation des professeurs de mathématiques, non seulement à l'occasion de quelques enseignements importants mais un peu isolés, mais à l'échelle de la formation.

Un deuxième jeu de conditions est à explorer au sein même de la pratique professionnelle des professeurs de mathématiques. Maëva Ouattou, dans le cadre de son activité professionnelle et en lien avec sa thèse, a mis à l'épreuve l'idée qu'un *discours* sur la pratique mathématique, dûment exposé aux élèves, pouvait avoir des effets sur leur pratique, mais somme toute relativement marginaux. Il conviendrait de pousser plus loin l'enquête et de déterminer ce qui, au-delà des discours, pourrait servir la fonctionnalisation de la preuve dans l'enseignement secondaire. Quelques pistes se font jour : la preuve d'une assertion est souvent le lieu où se développent de nouvelles idées. Si ces idées restent isolées, confinées dans une preuve et sans lendemain, la pratique de la preuve perd l'une de ses raisons d'être. Ainsi, si le raisonnement à déplacement près dans un calcul d'aires se limite aux démonstrations des théorèmes de Pythagore et de Thalès, l'intérêt de ces démonstrations reste limité. L'un des objectifs que l'on peut s'assigner est alors d'étudier le curriculum institutionnellement offert (Strømskag & Chevillard, 2021) et de déterminer dans quelle mesure les démonstrations à réaliser en classe donnent à voir des techniques qui pourraient être travaillées par ailleurs. Voir l'art de la preuve comme un moyen de production de nouvelles praxéologies mathématiques pourrait s'avérer une piste intéressante pour la fonctionnalisation de la preuve dans la classe de mathématiques, complémentaire du discours sur la preuve comme moyen de théoriser.

Un troisième jeu de conditions devrait se déployer du côté d'une formation à l'expérimentation mathématique : la preuve reste, bien souvent, l'apanage du professeur et prend la forme d'un exposé de structure hypothético-déductive. J'ai indiqué (Bourgade, soumis) que prouver n'est pas un processus linéaire, mais plutôt d'essence dialectique, entre deux pôles que sont l'expérimentation et la déduction. Je souhaite déterminer dans quelle mesure une partie conséquente de la formation mathématique des futurs professeurs pourrait être menée autour de cet enjeu : par la formation à des outils numériques vus comme outils d'expérimentation (Bourgade, 2020) ; par l'étude de praxéologies mathématiques classiques désormais vues comme des moyens d'expérimenter. Une autre voie d'accès à la question de l'expérimentation en mathématiques consiste à comparer les conditions faites aux mathématiques avec celles qui gouvernent les sciences dites expérimentales, à l'École.

L'expérimentation en sciences physiques et chimiques, ou dans les sciences de la terre et du vivant, est au cœur de l'avancée théorique : point de justification formelle qui ne se résolve *in fine* dans une confrontation avec la pierre de touche de l'empirie. L'empire de l'empirie n'est pourtant pas tel que l'on doive s'y confronter de façon fonctionnelle en toute institution et, à l'école, les mêmes achoppements doivent empêcher, en sciences expérimentales, la fonctionnalisation de la justification expérimentale qui empêchaient, en mathématiques, celle de la preuve. Je souhaite engager un travail comparatiste sur ce point, qui nécessiterait une étude systématique des ressources officielles et des manuels, mais aussi de la formation des professeurs de sciences expérimentales, ou encore l'exploration de textes de nature épistémologique à destination de ces professeurs. Il s'agirait de viser deux objectifs. Tout d'abord, il conviendrait de dégager les fonctions de l'étude que peut remplir l'expérimentation dans le déroulement d'une séquence donnée sur un thème donné – et un premier indice est fourni dans (Cariou, 2015) qui indique que, dans les textes officiels en 2015, « l'expérimentation apparaît [...] comme la procédure de validation d'hypothèses explicatives ». Néanmoins, entre les réquisits d'un programme et la réalité des classes existe un espace pour une divergence importante : il faut se pencher sur les manuels, ou observer des classes pour comprendre les fonctions qui sont effectivement remplies par l'expérimentation. Par ailleurs, il faudrait sur cette base comparer les diverses disciplines expérimentales ainsi que les mathématiques. À plus long terme, je souhaite développer un cadre praxéologique de référence relatif à l'expérimentation en sciences expérimentales et en mathématiques, afin de permettre des analyses de l'existant qui soient plus systématiques.

Une autre question relative à la justification expérimentale en sciences expérimentales porte sur l'usage des outils numériques de simulation : l'expérimentation est de plus en plus généralement remplacée par la simulation d'expérimentations (Marzin-Janvier & Kermen, 2015). Cela n'est pas sans lien avec l'approche de l'expérimentation au moyen d'outils numériques en mathématiques : le contrôle sur les différentes variables s'en trouve facilité, la visualisation des résultats également, mais le contrôle praxéologique sur les ostensifs produits par le numérique est généralement laissé à l'état de boîte noire. À la rigueur, le professeur sait pourquoi et *dans quelle mesure* l'outil numérique est adapté à la situation qu'il doit représenter, mais la réflexion des élèves n'est pas engagée sur ce point – alors même que cette question engage tout un rapport à la construction des faits dans le cadre d'une science ; où l'on retrouve Bachelard, ou encore Febvre : faire œuvre de science, c'est refuser de vivre « dans un respect puéril et dévotieux du “fait” » (Febvre & Brian, 2023, p. 125), c'est au contraire reconnaître que tout fait est un construit théorique et que les faits expérimentaux sont *déjà* des construits et qu'il en est *a fortiori* ainsi des faits *simulés*. L'ampleur des tâches à réaliser pour mener à bien ce programme est telle que je souhaite diriger prochainement une thèse sur ces questions.

## **En résumé**

Étude didactique de la justification en mathématiques.

Étude des conditions d'une fonctionnalisation de la preuve dans la classe, notamment par la mise à profit des outils produits par les preuves.

Étude du « caractère expérimental de l'activité mathématique » (Chevallard, 1992).

Étude des fonctions de l'expérimentation en mathématiques et dans les sciences expérimentales ; comparaison.

## **Enquêter**

Les ateliers d'enquête que j'ai conçus et mise en œuvre dans le cadre offert par *la prépa des INP de Toulouse* (voir p. 82) m'ont permis de recueillir un grand nombre de données (environ 180h d'enregistrements audio et 36h d'enregistrements vidéo) que je n'ai pas encore exploitées en détail. Je souhaite reprendre ce corpus pour lui soumettre les questions suivantes : parmi les éléments du milieu que se constituent les étudiants dans le cadre d'un tel atelier, lesquels choisissent-ils d'institutionnaliser ? Pourquoi ? Et comment le font-ils ? Quelle est la fonction d'une telle institutionnalisation alors que l'atelier, soumis par ailleurs au paradigme de la visite des œuvres, est condamné à ne produire que des œuvres sans lendemain pour l'institution qui l'accueille ?

Je souhaite également étudier les praxéologies didactiques des élèves dans le cadre de ces ateliers : le travail mené par Maëva Ouattou se situe pour l'essentiel dans l'observation de situations soumises au paradigme monumentaliste ; l'étude de ce corpus permettrait d'apporter un contrepoint utile. En particulier, il est un geste d'étude peu étudié me semble-t-il dans le cadre du questionnement du monde : dans le cours d'une enquête, on peut être conduit à étudier une œuvre, à la *visiter* (mais en sachant pourquoi). Quelles conditions et contraintes le paradigme du questionnement du monde crée-t-il qui favorisent ou entravent la visite d'une œuvre ?

## **En résumé**

Étudier la fonction d'institutionnalisation dans le cadre des ateliers d'enquête.

Étudier les praxéologies didactiques des étudiants dans le cadre d'un atelier d'enquête.

En particulier, étudier les praxéologies de visite des œuvres dans le cadre du paradigme du questionnement du monde.

## **Sur les mathématiques à enseigner**

J'ai commencé, avec Gisèle Cirade et Clément Durringer, à travailler sur la didactique des probabilités. Nous avons mis en évidence que la fonction de la loi expérimentale des grands nombres (Chevallard & Wozniak, 2011) dans la construction d'une théorie probabiliste au cycle 4 n'est pas bien perçue par les enseignants, sans doute sous l'effet d'une confusion avec la loi (théorique) des grands nombres. La construction d'une théorie des probabilités à partir de l'observation de la stabilisation des fréquences cumulées de réalisation de certaines issues dans la répétition d'une expérience aléatoire constitue

vraisemblablement la meilleure voie d'accès pour une justification du choix d'axiomes de la théorie. Néanmoins, il convient de discuter de la place à accorder aux raisonnements non fréquentistes : sont-ils à proscrire, ou bien à justifier sur une base expérimentale, ou encore doivent-ils être élevés à une dignité telle que leur soubassement expérimental doive être considéré comme illusoire ? D'autre part, l'approche bayésienne des probabilités semble ouvrir d'autres types de justification que la justification fréquentiste (Carranza, 2011).

Je souhaite explorer ces questions en entamant l'enquête par une étude systématique des différences dans le *logos* de deux mathématiciens importants dans l'histoire récente des probabilités : Paul Lévy et Henri Poincaré. Il s'agit de faire une analyse praxéologique et didactique de ceux de leurs textes qui portent sur la question de la justification des raisonnements probabilistes. L'objectif est d'essayer de dégager un cadre praxéologique de référence pour les probabilités du cycle 4 au lycée, et de produire des praxéologies de justification des raisonnements probabiliste qui, en laissant sa place à la justification fréquentiste, donnent également un espace pour d'autres formes de justification. Une première piste consiste bien sûr à reconnaître que les raisons de symétrie, par exemple, peuvent être justifiées par des observations longues de répétitions d'expériences avec des systèmes présentant des symétries. Mais cet exemple est loin d'épuiser le problème puisque des objets présentant des symétries plus complexes que le cube posent des difficultés de modélisation importantes (que l'on pense au cuboctaèdre, cube biseauté, par exemple). On peut également souligner certaines difficultés que pose la justification fréquentiste dans la profession : l'identité entre la *fréquence cumulée* de réalisation d'une issue et la *proportion de cas* qui la rendent réalisée est souvent admise comme transparente (c'est une variante du raisonnement par raison de symétrie, me semble-t-il). La probabilité de tirer une boule rouge dans une urne comportant 10 boules dont 4 rouges et 6 noires est de  $2/3$  parce que c'est la proportion des boules rouges dans l'urne. Or la probabilité  $2/3$  est plutôt une valeur approchée de la proportion des tirages aboutissant à une boule rouge parmi de nombreux tirages... Que cela coïncide avec la proportion de boules rouges dans l'urne relève d'un constat empirique, que l'on peut assortir d'un discours justificateur qui n'a pas force de preuve.

C'est cet ensemble de difficultés que je souhaite continuer d'explorer, en collaboration avec Clément Durringer et Gisèle Cirade. J'envisage une approche par étude systématique de manuels complétée par l'observation de séances et des entretiens avec des professeurs de mathématiques.

La notion de *proportion* était au cœur du travail que nous avons réalisé, Clément Durringer et moi-même (Bourgade & Durringer, 2023, soumise), à propos d'une théorisation de la proportionnalité à partir des objets. Je prévois de donner suite à ce travail en raison d'une difficulté persistante de la profession à travailler avec les grandeurs. Il me semble qu'un compromis intéressant serait d'introduire la notion de *mesurage* qui, en anglais, participe au triplet (*quantity, measurement, measure*). Le mesurage serait la donnée d'une mesure assortie de l'unité dans laquelle la mesure est

réalisée. Du point de vue non-ostensif, un mesurage est une grandeur. Du point de vue ostensif, le mesurage peut se concevoir comme un couple et permettre la mise en place de lois sur les couples de cette forme, en particulier, une équivalence sur les couples qui désignent la même grandeur. C'est une autre façon de construire la notion de grandeur à partir de celle, peut-être plus intuitive, de mesurage. Au lieu de prendre pour notion non définie celle d'objet, on peut fonder la théorie sur celle de mesure et d'unité. Une telle approche comporte des défauts – au premier rang desquels le fait de perdre de vue les objets – mais aussi des avantages : fonder à peu de frais un calcul des conversions d'unité. La transposition didactique d'une telle approche pourrait s'avérer plus économique. Elle permettrait notamment de faire apparaître le fait que certaines grandeurs sont « sans unité », et en particulier les échelles ou les pourcentages, qui sont au centre du calcul proportionnel.

Je suis engagé dans une collaboration avec Clément Durringer pour produire une analyse didactique des conditions pour la formation des futurs enseignants à l'enseignement des frises (qui sont un enjeu d'étude au cycle 4 en France). Il s'agit de mener une réflexion plus générale sur la question de la satisfaction de besoins praxéologiques de la profession (Artaud, 2019) dans le cas où la formation universitaire des futurs enseignants ne permet pas (encore) de les satisfaire. Winsløw et Gronbæk ont proposé de parler de *double discontinuité de Klein* pour désigner l'écart praxéologique entre ce qui est étudié à l'école et à l'université d'une part, et entre ce qui est étudié à l'université et ce qui sera enseigné à l'école d'autre part. Mon point de vue consiste à avancer que les deux problématiques (besoins praxéologiques de la profession et double discontinuité de Klein) sont liées dans la mesure où la formation initiale des professeurs en France est portée par l'université. Il s'agit donc de dessiner les contours d'une formation professionnelle qui tienne compte des besoins praxéologiques de la profession et crée des conditions pour leur satisfaction. Le cas des frises est emblématique (Durringer, 2024) : elles ne sont pas (ou peu) enseignées à l'université, et les mathématiques que leur étude requiert (isométries du plan) sont généralement mal maîtrisées par les futurs professeurs. Clément Durringer et moi proposons une mathématisation des frises qui, tout en s'appuyant sur les mathématiques universitaires disponibles, est conçue pour faciliter la transposition didactique interne, des mathématiques à enseigner (les frises) à leur enseignement. La situation est la même pour la proportionnalité puisqu'elle n'est guère étudiée pour elle-même à l'université (Bourgade & Durringer, 2024).

## **En résumé**

Didactique des probabilités : déterminer les conditions sous lesquelles un discours de type rationnel en probabilité peut être fondé sur la loi *expérimentale* des grands nombres.

Didactique des grandeurs : poursuite du travail sur la proportionnalité ; introduction des grandeurs par la notion de mesurage.

Double discontinuité de Klein et besoins praxéologiques de la profession : le cas des frises et de la proportionnalité.

# Diriger des recherches : pourquoi et comment

Ce projet de recherche, j'ai essayé de l'indiquer, ne peut être tenu sans collaborations : d'une part parce que la recherche est un processus collectif, d'autre part parce que l'ambition du programme que j'ai suggéré ici est telle que je ne saurais le réaliser sans aide.

## Des projets de collaboration

Dans mes recherches sur les praxéologies didactiques des enseignants, j'ai mis à contribution des étudiants de master MEEF depuis plusieurs années. Ils ont été conduits, dans le cadre de la réalisation de leur mémoire professionnel, à mener des entretiens avec des professeurs que j'étudie sous deux angles : en tant que données relatives à la formation des professeurs (que ces entretiens donnent-ils à voir de l'intégration d'éléments de TAD, par des professeurs débutants, à leur équipement praxéologique ?) et en tant que source d'informations sur l'équipement praxéologique de la profession (les entretiens permettent de lire des éléments de *logos* concernant les praxéologies didactiques des professeurs interrogés).

Le même champ de recherche est interrogé par trois étudiants de master ADIR<sup>37</sup> (Approfondissements didactiques, ingénieries, recherches) dont j'encadre les recherches : François Desnoyer étudie les praxéologies didactiques de réalisation de séances consacrées à des « problèmes ouverts » en classe de mathématiques du collège ; dans la même lignée, Fanny Dalet s'intéresse aux rapports aux mathématiques des professeurs des écoles, et à l'effet que ces rapports dans leur diversité peuvent avoir sur la pratique des problèmes ouverts dans l'enseignement primaire ; enfin, Lauriane Mauriès étudie l'enseignement des mathématiques en classe SEGPA<sup>38</sup> (Section d'enseignement général et professionnel adapté) et en particulier l'usage des activités d'étude et de recherche pour motiver l'étude auprès des publics particuliers que visent ces sections d'enseignement.

Bien sûr, Maëva Ouattou, dans sa thèse, étudie de près les praxéologies didactiques des enseignants et des étudiants, je n'y reviendrai pas ici. J'ai également travaillé avec Elsa Puchaczewski sur les praxéologies de réalisation du moment de travail praxéologique : notre collaboration l'a conduite à proposer un poster au 7<sup>e</sup> congrès international sur la théorie anthropologique du didactique ; lors de ce congrès, elle a pu convaincre Heidi

---

<sup>37</sup> <https://www.univ-tlse2.fr/accueil/formation-insertion/master-meef-adir-approfondissements-didactiques-ingenieries-recherches>

<sup>38</sup> <https://www.service-public.fr/particuliers/vosdroits/F32752>

Strømskag de ses compétences didactiques et depuis, celle-ci et Marianna Bosch encadrent la thèse d'Elsa.

Un projet important à mes yeux repose sur l'étude comparée de l'expérimentation en mathématiques et dans les sciences dites expérimentales (notamment la physique et la chimie) ; je souhaite diriger une thèse sur ce thème et un étudiant de master MEEF, Mattéo Guidarelli, a manifesté de l'intérêt pour ce projet. Je souhaite l'engager sur ce travail dans les années qui viennent.

### **Trouver sa place : l'initiation à la recherche comme négociation topogénétique**

La formation à la recherche de jeunes étudiants, dans le cadre du master MEEF ou bien hors cadre, de façon informelle comme pour Elsa Puchaczewski ou Maëva Ouattou avant qu'elles s'engagent dans des thèses, soulève des difficultés qui peuvent notamment se comprendre du point de vue de la négociation topogénétique : il s'agit de rendre l'étudiant *autonome* dans la réalisation de certains *gestes d'étude et de recherche*. Les gestes de *recherche* contribuent notamment à la mésogenèse ; l'*étude* des œuvres importées dans le milieu est conditionnée par la question génératrice de l'enquête : on cherche des œuvres dont l'étude permettra d'élaborer des éléments de réponse à la question génératrice ou à des questions dérivées de celle-ci. Faire œuvre de *chercheur*, c'est donc en particulier être en capacité de *reconnaître la valeur de questions* et de les *problématiser*, c'est aussi savoir s'engager dans l'élaboration d'un milieu adéquat pour leur étude, c'est également, enfin, être capable d'étudier certaines œuvres et de chercher des éléments de réponse aux questions sélectionnées. Former à la recherche, c'est donc permettre à des personnes de réaliser ces gestes d'étude et de recherche dans une autonomie tout d'abord restreinte puis de plus en plus large.

S'agissant des étudiants de master MEEF, l'objectif étant la réalisation d'un mémoire professionnel, il n'était pas question de leur laisser prendre en charge le choix d'une question de recherche et sa problématisation – d'autant que j'avais le souhait de mener une recherche collaborative, ce qui nécessitait une certaine unité dans les objets de recherche des différents étudiants. J'ai donc opéré un cadrage serré sur la question de recherche ainsi que sur les moyens de la recherche, dont j'ai défini la nature (pour l'essentiel : entretiens, observations de séances, étude de la littérature institutionnelle). Les étudiants ont néanmoins dû réaliser un certain nombre de gestes d'étude et de recherche : chercher dans la littérature institutionnelle les textes pertinents pour l'étude (certains textes avaient été introduits par moi dans le milieu de l'étude dès le départ, d'autres sont apparus à l'initiative d'étudiants) ; étudier un texte en opérant une lecture questionnante (le modèle praxéologique de référence est apparu comme un bon outil pour problématiser la lecture : on a demandé aux étudiants de lire les textes en y cherchant les éléments pouvant servir à une description de praxéologies professionnelles) ; mener un entretien de façon à s'assurer de son exploitabilité ultérieure (la préparation de l'entretien s'est faite collectivement, sous ma direction, en veillant à ce que les questions posées

n'induisent pas des réponses artificielles, mais aussi à ce qu'elles permettent de produire des éléments exploitables pour une analyse praxéologique : il fallait donc enquêter sur la *praxis* et sur le *logos* des professeurs) ; concevoir une séance comme dispositif expérimental – et non seulement comme séance de classe – avec des objectifs pour la recherche. Pour l'essentiel, dans ce cadre, la frontière topogénétique est claire : l'initiative des gestes est laissée aux encadrants, leur réalisation entre dans le *topos* des étudiants ; la raison d'être des gestes a néanmoins été explicitée auprès des étudiants dans des temps de *séminaire* qui ont émaillé la durée du projet.

Lorsqu'il s'est agi de former Elsa Puchaczewski (EP) et Maëva Ouattou (MO) à la recherche, la liberté a été d'emblée plus importante. Nous avons pu œuvrer conjointement à la réalisation de certains gestes d'étude et de recherche qui sont alors entrés pour une part dans leur *topos* : la problématisation des questions de recherche s'est faite, dans chaque cas, à deux, au cours de discussions où se mettait en place naturellement une dialectique des médias et des milieux. Chaque avancée dans la discussion était soumise au feu de la critique de l'autre, jusqu'à parvenir à une stabilisation des questions, puis des œuvres choisies pour l'étude, etc. Ce travail s'est poursuivi jusque dans l'écriture : pour EP comme pour MO, l'écriture s'est faite à quatre mains, je jouais le plus souvent le rôle de secrétaire proposant des formulations qui faisaient ensuite l'objet d'une étude critique commune. En revanche le travail de lecture a été mené de façon similaire à ce qui avait été proposé aux étudiants de M2 MEEF : l'orientation de la lecture étant guidée par la question de recherche, j'ai fourni quelques éléments d'un questionnement qui permette de guider la lecture. Le choix des œuvres étudiées a cependant fait l'objet d'un travail conjoint, la recherche étant menée à deux (occasion d'une formation aux moteurs de recherche académiques) ; certaines œuvres ont d'ailleurs été importées par EP ou MO en cours de travail. Dans les deux cas, le journal de bord a constitué un outil central de régulation de l'élaboration de l'équipement praxéologique des étudiantes : incitant EP et MO à écrire le plus possible, j'ai fourni l'occasion d'un travail sur l'écrit et par l'écrit. La dialectique de l'excription et de l'inscription (Chevallard, 2004; Kim, 2015) est particulièrement visible dans ces journaux, chaque étudiante s'autorisant à découper et importer dans le journal du texte tiré d'œuvres étudiées pour le paraphraser, le commenter, l'interroger, dans l'attente d'un retour de ma part. Le jeu des couleurs ou bien des commentaires donne une trace du travail de lectures croisées et de l'évolution de la compréhension des étudiantes – mais aussi de ma compréhension, s'agissant de propositions de théorisation émanant d'EP ou de MO.

Dans le cadre des master ADIR, la situation est intermédiaire : la première année de master est consacrée à la problématisation et à l'élaboration d'une ou deux questions de recherche ; les étudiants sont d'emblée dans une large autonomie, bornée cependant par la mise à disposition de cadres théoriques en nombre limité (dont la TAD). La liberté est assez grande, mais l'objectif de finalisation du mémoire en deux ans conduit à poser des contraintes assez fermes de calendrier. La deuxième année de master est consacrée au travail de recherche en vue de construire des éléments de réponse aux questions élaborées

en 1<sup>re</sup> année. Dans ce contexte, le calendrier fait également office de contrainte importante et conduit à des formes de recherche relativement stéréotypées : entretien avec un ou des professeurs, mise en œuvre en classe d'une séance préparée avec le professeur observé, entretien après la séance, puis analyse des données recueillies et élaboration d'éléments de réponse... Mon rôle dans ce contexte consiste en 1<sup>re</sup> année à fournir des références bibliographiques pertinentes, ainsi qu'une aide pour leur exploitation en vue de la constitution d'une problématique de recherche. En 2<sup>e</sup> année, je m'attache à aider les étudiants à consolider leur problématique de recherche en raffinant le cadre théorique, puis à leur fournir un appui dans la conception des séances pour l'expérimentation en 2<sup>e</sup> année et pour leur analyse.

## En guise de conclusion

Dans les travaux que j'ai présentés dans cette note de synthèse, j'ai essayé d'illustrer la fécondité de la théorie anthropologique du didactique à propos de quelques questions qui se sont posées à moi. Le hasard des questions, justement, a présidé aux emprunts que j'ai faits de tel ou tel élément de la TAD sans que je cherche à me spécialiser en l'un d'eux. J'ai essayé de me garder de la tentation d'introduire de nouveaux concepts, de nouvelles notions, même si je n'y suis pas toujours parvenu : j'ai ressenti le besoin de parler de structure cognitive et de structure positionnelle d'une institution (pages 76 et 71), d'hétérogénéité possiblement didactique, de rapports et d'intérêts antagoniques, parce que les questions que j'abordais me semblaient le requérir. J'ai essayé de le faire en préservant l'économie de la théorie et sans récuser par avance des tentatives à venir de réduire ces notions à d'autres, plus principiellles dans la théorie disponible. Pour autant, je pense que j'ai été conduit à proposer un questionnement structural (qui cependant était déjà présent dans Chevallard, 1991) qui peut avoir sa pertinence pour étudier les phénomènes transpositifs ou la vie institutionnelle.

Une autre direction que j'estime importante dans mon travail concerne la question de l'expérimentation en mathématiques. Dans la lignée de (Bonnat et al., 2020; Croset & Chaachoua, 2016), j'ai voulu associer une conception très large de l'expérimentation mathématique, selon laquelle un *calcul* peut déjà constituer une expérience, et la reconnaissance du caractère profondément dialectique des liens entre expérimentation et déduction. Je crois avoir pu illustrer le fait que l'expérimentation pouvait contribuer à la production de preuves, en insistant chemin faisant sur la différence entre l'étude de la typologie argumentative et l'étude de la genèse des preuves. Prouver est une chose, exposer la preuve en est une autre.

Une troisième orientation de mon travail repose sur une sensibilité aux besoins praxéologiques de la profession de professeur. L'étude des praxéologies didactiques des élèves et des professeurs est une première ouverture que je m'emploie à explorer avec Maëva Ouattou dans le cadre de sa thèse que je co-encadre avec Hamid Chaachoua. Un autre type de questions porte sur les besoins mathématiques et didactiques relatifs à des thèmes mathématiques donnés (proportionnalité, probabilités, géométrie des frises, etc.). Je pense que Clément Durringer et moi avons fait une proposition intéressante concernant une mathématisation possible de la proportionnalité au niveau universitaire, proposition qui tient compte des besoins de modélisation qui sont au cœur de l'étude de situations proportionnelles. Notre collaboration consacrée à l'étude de l'enseignement des probabilités est encore à son début et je souhaite développer cet axe ; néanmoins, ce que nous avons fait a déjà permis d'identifier des difficultés dans l'enseignement des probabilités dans la perspective dite « fréquentiste » dès lors qu'on ne dispose pas de praxéologies de conception et de direction de l'étude qui incluent une maîtrise de

l'expérimentation. Les probabilités, comme les mathématiques, sont une science expérimentale...

Je souhaite insister sur ce qui, peut-être, fait l'unité de mon travail : l'attention portée aux phénomènes didactiques et en particulier à ceux que met en évidence une étude attentive des effets du refoulement du didactique. L'introduction relativement récente en TAD du *possiblement didactique* permet selon moi de comprendre le refoulement du didactique comme une contrainte qui empêche de reconnaître le caractère *possiblement didactique* de certains gestes. Partant de là, la didactique comme science explore finalement principalement le champ du refoulé : la profession de foi du didacticien, que je fais mienne, consiste à penser que *tout est possiblement didactique*.

# Index

## #

3, 85, 86

## A

activité d'étude et de recherche, 59, 60, 61, 63, 64, 86, 87  
antagonique: intérêt, 72; rapport, 72

## C

conjecture, 17, 22, 44, 45, 54, 90, 91, 96

## D

déduction, 28, 43, 45, 99  
démonstration, 43, 44, 45, 55, 78, 98, 99  
déli du didactique *Voir* refoulement du didactique

## E

enquête, 9, 48, 54, 80, 81, 82, 83, 84, 88, 89, 90, 91, 94, 95, 97, 99, 101, 102  
équipement: cognitif, 14; possiblement didactique, 24, 93; praxéologique, 8, 16, 17, 22, 24, 48, 49, 50, 73, 86, 92, 93  
ésotéricité, 58, 82  
ESPE, 84  
exotéricité, 57, 82  
expérimentation, 9, 25, 30, 36, 38, 41, 42, 43, 45, 48, 53, 99, 100, 101

## F

frises, 103

## H

hétérogénéité: cognitive, 51; possiblement didactique, 26, 48, 51, 52, 53, 54, 95, 98, 108; praxéologique, 51, 52, 53, 54, 76  
histoire des mathématiques, 79, 90, 91

## I

INDRUM, 98

infrastructure, 9, 13, 25, 31, 35, 36, 42

Infrastructure, 25

INP, 74, 82, 87, 88, 89, 101

INSPE, 84

institution, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 22, 30, 57, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 88, 91, 92, 93, 96, 98, 100, 101  
institutionnalisation, 10, 16, 19, 20, 45, 56, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 86, 89, 93, 96, 101

## M

MEEF, 59, 62, 65, 98, 104, 105, 106

milieu, 11, 17, 18, 22, 41, 60, 61, 64, 83, 84, 89, 97, 101; dialectique des médias et des milieux, 11, 20, 22, 83, 84

modèle praxéologique de référence, 60, 61, 74, 93, 105

moment: exploratoire, 18, 20, 52, 58, 59, 60, 86, 97; première rencontre, 86; technologico-théorique, 9, 18, 38, 45, 53, 56, 59, 60, 86, 97, 98

## Ñ

ñ, 23, 50

## N

noyau cognitif, 23, 50

## O

objet, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 30, 32, 33, 34, 35, 41, 48, 49, 50, 51, 57, 60, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 82, 84, 92, 93, 96, 97, 98, 103; enjeu de luttes, 71, 75; rapports entre objets, 77, 78, 80

## P

paradigme didactique: de la visite des œuvres, 20, 80, 81, 82, 83, 84, 89, 101; du questionnement du monde, 80, 81, 82, 89, 97, 101  
pédagogie, 81; universitaire, 72, 94, 98  
personne, 8, 12, 13, 14, 16, 22, 28, 51, 57, 69, 79, 86, 93

position, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 57, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 77, 79, 80, 86, 87, 88, 92, 93, 94  
 praxéologie, 11, 16, 18, 19, 20, 22, 24, 50, 55, 59, 60, 61, 67, 69, 75, 86, 95; didactique, 43, 54, 80, 89, 93, 94, 95, 96, 101; mathématique, 10, 87, 96, 99; possiblement didactique, 24, 50, 51, 55, 95  
 probabilités, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 102, 103  
 procognition, 48, 82  
 proportionnalité, 9, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 97, 102, 103

## R

$R \leftrightarrow R'$ , 72  
 rapport: didactique, 8, 12, 13, 14, 18, 19, 22, 23, 24, 48, 50, 51, 53, 54, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 66, 68, 69, 70, 71, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 89, 90, 91, 93, 94, 97, 100; mathématique, 28, 29, 30, 34; rapport de preuve, 45  
 refoulement du didactique, 56, 57, 59, 64, 90, 94, 95; déni du didactique, 10  
 rétrocognition, 47, 82  
 rigueur, 10, 77, 78, 79, 90, 91, 100  
 $R_{\tilde{w}}(\hat{r}; o, o')$ , 76

## S

schéma herbartien, 11, 17  
 situation: de proportionnalité, 28, 30, 31, 33, 34, 35; double, 29, 33, 34; possiblement didactique, 23, 50, 51, 53, 95; simple, 29, 33  
 Situation: possiblement didactique, 23  
 structuration quaternaire de l'étude, 86  
 structure: cognitive, 76, 91; positionnelle, 66, 70, 71

## T

TAD, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 49, 51, 57, 58, 66, 74, 80, 85, 90, 104, 106, 108, 109  
 théorème des accroissements finis, 10, 66, 78, 79  
 transposition didactique, 10, 66, 67, 69, 77, 79, 89, 90, 91, 103; phénomène transpositif, 9, 10, 66, 67, 69, 77, 79, 80, 90, 92, 94, 108

## Σ

$\varsigma$ , 23, 50  
 $\Sigma_{\tilde{w}}^{\Pi}(l)$ , 71  
 $\Sigma_{\tilde{w}}^{\Omega}(\hat{r}; l)$ , 76

# Références

- Artaud, M. (1989). Conditions, contraintes et discours apologétique dans l'émergence de l'enseignement des mathématiques à l'âge classique—Etude de didactique historique. *Mémoire pour le DEA de didactique des disciplines scientifiques, Lyon*.
- Artaud, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique : Une étude exploratoire* [PhD Thesis]. Aix-Marseille 2.
- Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique. *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, 101-139. <http://cir.nii.ac.jp/crid/1571980076254256384>
- Artaud, M. (2019). Besoins praxéologiques de la profession : Le cas des grandeurs et de leur mesure. *20e école d'été de didactique des mathématiques, Autrans, Grenoble*, 12.
- Artaud, M. (2020). Fonctionnaliser la notion de compétence en la modélisant avec le concept de praxéologie. *Seminario Internacional sobre Didáctica de las Matemáticas*.
- Bachelard, G. (1966). *La philosophie du non*. Presses universitaires de France. [http://fl.univ-bouira.dz/wp-content/uploads/2020/04/philosophie\\_du\\_non.pdf](http://fl.univ-bouira.dz/wp-content/uploads/2020/04/philosophie_du_non.pdf)
- Bailly, A. (2010). *Le Grand Bailly : Dictionnaire grec français*. Paris: Hachette.
- Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(3), 261-304. <https://hal.science/hal-02266891/>
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). *Educational studies in mathematics*, 147-176. <https://www.jstor.org/stable/3482413>
- Balacheff, N. (2017). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. *Séminaire national de didactique des mathématiques, 2018*, 423-456. <https://hal.science/hal-02333720/>
- Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., & Ruiz-Munzón, N. (2022). Study and research paths in the frontier between paradigms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(5), 1213-1229. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1988166>
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática : Los recorridos de estudio e investigación. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, & M. Larguier (Éds.), *Un panorama de la TAD* (Vol. 10, p. 553-577). Centre de Recerca Matemàtica. [https://www.researchgate.net/profile/Berta-Barquero/publication/305721187\\_ECOLOGIA\\_DE\\_LA\\_MODELIZACION\\_MATEMATICA\\_LOS\\_RECORRIDOS\\_DE\\_ESTUDIO\\_E\\_INVESTIGACION\\_1/links/579bba0](https://www.researchgate.net/profile/Berta-Barquero/publication/305721187_ECOLOGIA_DE_LA_MODELIZACION_MATEMATICA_LOS_RECORRIDOS_DE_ESTUDIO_E_INVESTIGACION_1/links/579bba0)

c08ae6a2882f1a987/ECOLOGIA-DE-LA-MODELIZACION-MATEMATICA-LOS-RECORRIDOS-DE-ESTUDIO-E-INVESTIGACION-1.pdf

Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships : Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 17-38. <https://pubs.nctm.org/abstract/journals/jrme/46/1/article-p17.xml>

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. University of Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización : El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(3), 247-304. [https://www.researchgate.net/profile/Josep-Gascon-3/publication/39102436\\_Un\\_nuevo\\_modelo\\_del\\_algebra\\_elemental\\_como\\_alternativa\\_a\\_la\\_Aritmetica\\_Generalizada/links/5d6cebc84585150886066ac0/Un-nuevo-modelo-del-algebra-elemental-como-alternativa-a-la-Aritmetica-Generalizada.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Josep-Gascon-3/publication/39102436_Un_nuevo_modelo_del_algebra_elemental_como_alternativa_a_la_Aritmetica_Generalizada/links/5d6cebc84585150886066ac0/Un-nuevo-modelo-del-algebra-elemental-como-alternativa-a-la-Aritmetica-Generalizada.pdf)

Bonnat, C., Marzin, P., Luengo, V., Trgalová, J., Chaachoua, H., & Bessot, A. (2020). Proposition d'un modèle pour la compréhension des décisions didactiques d'un enseignant. *Éducation & didactique*, 3, 69-90. <https://www.cairn.info/revue-education-et-didactique-2020-3-page-69.htm>

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 19(1), 77-123. <https://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=2011512>

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Higuera, L. R. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, 18(2), 37-74. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40558507003.pdf>

Bourdieu, P. (2022). *Microcosmes. Théorie des champs. Raisons d'agir*. <https://hal.science/hal-03508032/>

Bourgade, J.-P. (2003). On spherical harmonics expansion type models for electron-phonon collisions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 26(3), 247-271. <https://doi.org/10.1002/mma.353>

Bourgade, J.-P. (2004a). A COUPLED SPHERICAL HARMONICS EXPANSION MODEL FOR CONFINED PARTICLES. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14(08), 1133-1165. <https://doi.org/10.1142/S021820250400357X>

Bourgade, J.-P. (2004b). *Obtention de modèles de diffusion à partir d'équations cinétiques. Modélisation, étude mathématique et simulation* [PhD Thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III]. <https://theses.hal.science/tel-00008808/>

Bourgade, J.-P. (2016). *Le théorème des accroissements finis comme question curriculaire* (arXiv:1606.08967). arXiv. <http://arxiv.org/abs/1606.08967>

Bourgade, J.-P. (2017). Les conseillers pédagogiques de l'enseignement supérieur entre unité et variété : Étude clinique. *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur*, 33(33 (2)). <https://journals.openedition.org/ripes/1227>

Bourgade, J.-P. (2019a). À la recherche de raisons d'être pour les structures de groupe : Quelques praxéologies pour la profession de professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39(2), 131-166. <https://univ-tlse2.hal.science/hal-04292138/>

Bourgade, J.-P. (2019b). On an axiological dimension of rigour in school mathematics. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(4), 171-184. <http://funes.uniandes.edu.co/29690/>

Bourgade, J.-P. (2020). Expérimentation et déduction : Une technique dialectique au cœur du travail mathématique. *Petit x*, 112, 5-34.

Bourgade, J.-P. (2022). Studying, learning and mesogenesis at the light of the theory of relations. *CITAD7: Advances and Challenges in the Anthropological Theory of the Didactic*. CITAD7: Advances and Challenges in the Anthropological Theory of the Didactic, Barcelone, CRM.

Bourgade, J.-P. (2024). Genèse praxéologique et « recherches collaboratives ». In F. Wozniak & A.-M. O'Connell, *La genèse des savoirs dans les recherches collaboratives : Approches didactiques* (Cépaduès).

Bourgade, J.-P. (soumis). *Proving as a dialectical process*.

Bourgade, J.-P., Bernad, K., & Matheron, Y. (2019). *The need for new teaching praxeologies in the paradigm of questioning the world*. <https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=v5q4DwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT168&dq=info:ID0nRtB7oqYJ:scholar.google.com&ots=ZYkqvIgbXg&sig=X2WASfbw1o9s3K1gAErzIu4M-5c>

Bourgade, J.-P., Cirade, G., & Durringer, C. (2023). Le « savoir » comme fonction. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)*, 13(4), Article 4. [https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos\\_da\\_educacao\\_matematica/article/view/1602](https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/1602)

Bourgade, J.-P., Crumière, A., & Cirade, G. (2021). Écologie de la TAD en formation initiale de professeurs de mathématiques. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 11(1), 167-199. <http://funes.uniandes.edu.co/25785/>

Bourgade, J.-P., Degond, P., Méhats, F., & Ringhofer, C. (2006). On quantum extensions to classical spherical harmonics expansion/Fokker-Planck models. *Journal of mathematical physics*, 47(4). <https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-abstract/47/4/043302/929047>

Bourgade, J.-P., & Durringer, C. (2023). Pour une conceptualisation des “situations de

proportionnalité” à partir des objets. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 43(3), 243. <https://univ-tlse2.hal.science/hal-04351999/>

Bourgade, J.-P., & Durringer, C. (2024). Klein’s second discontinuity : The case of proportion theory. *INDRUM2024, Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. INDRUM2024, Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, Barcelone, CRM.

Bourgade, J.-P., & Durringer, C. (soumisa). *Approaches to proportionality : An object-based perspective* [Soumis].

Bourgade, J.-P., & Durringer, C. (soumib). *Le logos, entre production et institutionnalisation, dans les manuels scolaires de mathématiques* [Soumis].

Bourgade, J.-P., & Durringer, C. (soumisc). *Les professeurs de mathématiques et l’institutionnalisation* [Soumis].

Bourgade, J.-P., & Filbet, F. (2008). Convergence of a finite volume scheme for coagulation-fragmentation equations. *Mathematics of Computation*, 77(262), 851-882. <https://www.ams.org/mcom/2008-77-262/S0025-5718-07-02054-6/>

Bourgade, J.-P., Mellet, A., & Mieussens, L. (2004). Numerical comparison between two Spherical Harmonics Expansion models and a kinetic equation. *Mathematical and computer modelling*, 40(7-8), 777-795. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717704002705>

Bruner, J. S. (1974). From communication to language—A psychological perspective. *Cognition*, 3(3), 255-287. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010027774900122>

Burgos, M., & Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 1-20. <https://aiem.es/article/view/3870>

Cariou, J.-Y. (2015). Le statut épistémologique de l’expérience dans les nouvelles approches préconisées pour l’enseignement des sciences. *RDST. Recherches en didactique des sciences et des technologies*, 12, Article 12. <https://doi.org/10.4000/rdst.1132>

Carranza, P. (2011). Dualité dans l’enseignement de la probabilité. Apport pour l’enseignement de la statistique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(2), 229-259. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3736514>

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2007). Approche bayésienne «cachée» et approche fréquentiste «ambiguë» dans les livres de cours français de Première S et ES. In R. Gros, *New theoretical contributions to statistical implicative analysis and implications* (p.

393-400). <https://www.academia.edu/download/4741908/p5a4.pdf>

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in French education. *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey: ICMI and IASE. [https://www.academia.edu/download/4741917/t1p2\\_carranza.pdf](https://www.academia.edu/download/4741917/t1p2_carranza.pdf)

Chaachoua, H., & Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. *Apports de la théorie anthropologique, Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils et connaissances d'action*, 771-790.

Chaliès, S., Chênerie, I., Martin, F., Talbot, L., & Tricot, A. (2010). Réflexion autour du métier de conseiller pédagogique dans le contexte universitaire français. *Réformes et changements pédagogiques dans l'enseignement supérieur*.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20<sup>e</sup> siècle : Théories et écologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 30, 317-366.

Chambris, C., & Visnovska, J. (2022). On the history of units in French elementary school arithmetic : The case of proportionality. *Historia Mathematica*, 59, 99-118.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné* (2<sup>e</sup> éd. revue et augm.). la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Le caractère expérimental de l'activité mathématique. *Petit x*, 30, 5-15. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-30-petit-x/1-le-caractere-experimental-de-l-activite-mathematique--567194.kjsp?RH=1550099269000>

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17, 17-54. [https://www.researchgate.net/profile/Yves-Chevallard/publication/268000164\\_Familiere\\_et\\_problematique\\_la\\_figure\\_du\\_professeur/links/553c96af0cf2c415bb0b34f6/Familiere-et-problematique-la-figure-du-professeur.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Yves-Chevallard/publication/268000164_Familiere_et_problematique_la_figure_du_professeur/links/553c96af0cf2c415bb0b34f6/Familiere-et-problematique-la-figure-du-professeur.pdf)

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266. <https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/>

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éds.), *Actes de la XI<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). la Pensée sauvage. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser\\_1\\_etude\\_1.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_1_etude_1.pdf)

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Lyon. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers\\_une\\_didactique\\_de\\_la\\_codisciplin](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplin)

arite.pdf

Chevallard, Y. (2007a). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier (Éds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (p. 705-746). Universidad de Jaén. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe\\_et\\_present\\_de\\_la\\_TAD.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD.pdf)

Chevallard, Y. (2007b). Un concept en émergence : La dialectique des médias et des milieux. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 344-366.

Chevallard, Y. (2009). *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER*. Journées Ampère, Lyon.

Chevallard, Y. (2011). *Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD*. [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC\\_Acadis\\_28-01-2011\\_Notes1.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_Acadis_28-01-2011_Notes1.pdf)

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society : A case for an oncoming counter paradigm. *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges*, 173-187. <https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/28000/1001997.pdf?sequence=1#page=179>

Chevallard, Y. (2017). *Quel avenir pour la formation des professeurs? Éléments pour la transition didactique*. [https://snesup.fr/sites/default/files/fichier/texte\\_yc-11-01-2017\\_0.pdf](https://snesup.fr/sites/default/files/fichier/texte_yc-11-01-2017_0.pdf)

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic An attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education*, 12, 71-114. [https://www.jstage.jst.go.jp/article/hjme/12/0/12\\_1205/\\_article/-char/ja/](https://www.jstage.jst.go.jp/article/hjme/12/0/12_1205/_article/-char/ja/)

Chevallard, Y. (2020). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), Article 4. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/index>

Chevallard, Y. (2022). On the Genesis and Progress of the ATD. In Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, & N. Ruiz-Munzón (Éds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (p. 5-11). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_1)

Chevallard, Y. (2023a). *Humble séminaire, Séance 2, année 2023-2024*.

Chevallard, Y. (2023b). *Humble séminaire, Séance 4, année 2022-2023*.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, 43-76. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR02026/IGR02026.pdf>

Chevallard, Y., Bosch, M., & Kim, S. (2015). What is a theory according to the

anthropological theory of the didactic? *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2614-2620. <https://hal.science/hal-01289424/>

Chevallard, Y., & Cirade, G. (2010). *Les ressources manquantes comme problème professionnel*. PUR et INRP.

Chevallard, Y., & Wozniak, F. (2011). Un cas d'infrastructure manquante : Statistique et probabilités en classe de troisième. *Un panorama de la TAD: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico*, 831-853.

Chopin, M.-P. (2007). *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques : Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques* [PhD Thesis, Université Victor Segalen-Bordeaux II]. <https://theses.hal.science/tel-00542524/>

Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M., & Ruiz-Munzón, N. (2020). La introducción de los REI en la formación de profesores : Un ejemplo de REI-FP. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 646-660. <https://zaguan.unizar.es/record/95520>

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : Entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. [PhD Thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I]. <https://theses.hal.science/tel-00120709/>

Cirade, G. (2008). Les angles alternes-internes : Un problème de la profession. *Petit x*, 76, 5-26. <https://core.ac.uk/download/pdf/50532516.pdf>

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 22(2-3), 135-182. <https://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=14663297>

Corry, L. (s. d.). *Mathematics and Narrative—Footnote—Aristotle on Incommensurability*. Consulté 2 juin 2024, à l'adresse <https://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/Narrative/notes/aristo.html>

Cosnefroy, L. (2015). État des lieux de la formation et de l'accompagnement des enseignants du supérieur. *En ligne (consulté le 28 septembre 2018)*. <https://webapps.iut-orsay.fr/cellule-pedago/wp-content/uploads/2016/03/document.pdf>

Croset, M.-C., & Chaachoua, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD: la praxéologie personnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 36(2), 1-34.

Daele, A., & Sylvestre, E. (2016). *Comment développer le conseil pédagogique dans l'enseignement supérieur?* De Boeck Supérieur. <https://books.google.com/books?hl=fr&lr=&id=1apEDQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA9&dq=Daele+Sylvestre&ots=WP8JtmkYTQ&sig=SgWSTzI2wIpky1fDJF4NYJe7Xj4>

Durringer, C. (2024). Praxeological needs and Klein's double discontinuity : The case of

friezes. *INDRUM2024, Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. INDRUM2024, Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, Barcelone, CRM.

Durringer, C., Lécureux, M.-H., & Bourgade, J.-P. (2024). Praxeological Needs for the Organization of the Study of Probability. *Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7), Barcelone, CRM.

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, 37-61. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-31-petit-x/5-argumenter-demontrer-expliquer-continuite-ou-rupture-cognitive--567179.kjsp?RH=1550099297186>

ÊTRE : Définition de ÊTRE. (s. d.). Consulté 17 novembre 2023, à l'adresse <https://www.cnrtl.fr/definition/%C3%AAtre>

Febvre, L., & Brian, É. (2023). *Histoire et sciences : Inédit*. Éditions EHESS.

Florensa, I., Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). Study and research paths at university level: Managing, analysing and institutionalizing knowledge. *Eleventh congress of the European Society for research in mathematics education*, 16. <https://hal.science/hal-02422617/>

Fradette, A., & Lataille-Démoré, D. (2003). Les classes à niveaux multiples : Point mort ou tremplin pour l'innovation pédagogique. *Revue des sciences de l'éducation*, 29(3), 589-607. <https://www.erudit.org/en/journals/rse/1900-v1-n1-rse966/011405ar/abstract/>

Frenay, M., & Paquay, L. (2011). Présentation. *Recherche et formation*, 67, 9-14. <https://eduq.info/xmlui/handle/11515/19042>

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures [Electronic resource]*.

García, F. J. G. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar : De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* [PhD Thesis, Universidad de Jaén]. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=19566>

Garutti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). *Cognitive unity of theorems and difficulty of proof*. <http://ddi.cs.uni-potsdam.de/HyFISCH/Literatur/Fachdidaktik/DifficultyProofLemut.htm>

Gnedenko, B. V., & Khintchine, A. Ia. (1964). *Introduction à la théorie des probabilités* (Dunod).

Godebin, P. (2021). *Maths, 3e*. Lelivrescolaire.fr.

Green, D. A., & Little, D. (2016). Family portrait : A profile of educational developers

- around the world. *International Journal for Academic Development*, 21(2), 135-150. <https://doi.org/10.1080/1360144X.2015.1046875>
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés: Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 3, 7-33. <https://www.cairn.info/revue-education-et-didactique-2008-3-page-7.htm>
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*, 59, 5-41.
- Jollien, A. (2019). *Éloge de la faiblesse*. Marabout.
- Ketele, J.-M. D. (2010). *La pédagogie universitaire : Un courant en plein développement*. ENS Éditions. <https://journals.openedition.org/rfp/2168>
- Kim, S. (2015). *Les besoins mathématiques des non-mathématiciens : Quel destin institutionnel et social?: études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques* [PhD Thesis, Aix-Marseille]. <https://www.theses.fr/2015AIXM3102>
- Ladage, C., & Chevallard, Y. (2010). La pédagogie de l'enquête dans l'éducation au développement durable. *Colloque international «Éducation au développement durable et à la biodiversité», IUT de Provence, Digne les Bains*, 20-22. <https://shs.hal.science/halshs-00957843/>
- Ladage, C., & Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec l'internet : Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation et didactique*, 5-2, 85-116. <https://journals.openedition.org/educationdidactique/1266>
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning : Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1, 629-667.
- Le socle commun de connaissances, de compétences et de culture*. (s. d.). Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse. Consulté 12 novembre 2023, à l'adresse <https://www.education.gouv.fr/le-socle-commun-de-connaissances-de-competences-et-de-culture-12512>
- LeTourneau, C., Posamentier, A., & Ford, E. (2009). *Progress in mathematics, grade 5* (Sadlier-Oxford).
- Lévy, P. (1970). *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. Albert Blanchard.
- Lignier, W. (2023). *La Société est en nous : Ommment le monde social engendre des individus*. Ed. du Seuil.
- Mampe, B., Friederici, A. D., Christophe, A., & Wermke, K. (2009). Newborns' cry melody is shaped by their native language. *Current biology*, 19(23), 1994-1997. [https://www.cell.com/current-biology/pdf/S0960-9822\(09\)01824-7.pdf](https://www.cell.com/current-biology/pdf/S0960-9822(09)01824-7.pdf)
- Marzin-Janvier, P., & Kermen, I. (2015). L'expérimental réel ou virtuel en classe de

sciences. *RDST. Recherches en didactique des sciences et des technologies*, 12, Article 12. <https://doi.org/10.4000/rdst.1125>

McDermott, R., & Varenne, H. (1995). Culture as Disability. *Anthropology & Education Quarterly*, 26(3), 324-348.

Ministère de l'éducation nationale. (2021a). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. <https://eduscol.education.fr/177/mathematiques-cycle-2#summary-item-0>

Ministère de l'éducation nationale. (2021b). *Résolution de problèmes au collège*. <https://eduscol.education.fr/document/13132/download?attachment>

Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse. (s. d.). Consulté 12 novembre 2023, à l'adresse <https://www.education.gouv.fr/bo/15/Special11/MENE1526483Aannexe3.htm>

Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. (2019a). *Attendus de fin d'année en 3e en mathématiques*. Eduscol. <https://eduscol.education.fr/document/14068/download>

Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. (2019b). *Attendus de fin d'année en 4e en mathématiques*. Eduscol. <https://eduscol.education.fr/document/14056/download>

Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. (2019c). *Attendus de fin d'année en 5e en mathématiques*. Eduscol. <https://eduscol.education.fr/document/14044/download>

Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. (2019d). *Repères annuels de progression*. Eduscol. <https://eduscol.education.fr/document/14080/download?attachment>

Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. (2020). *Programme du cycle 4 en vigueur à la rentrée 2020*. Eduscol. <https://www.education.gouv.fr/bo/20/Hebdo31/MENE2018714A.htm>

Pedemonte, B. (2006). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(75), 313. [https://www.researchgate.net/profile/Bettina-Pedemonte/publication/291448809\\_Quelques\\_outils\\_pour\\_l'analyse\\_cognitive\\_du\\_rapport\\_entre\\_argumentation\\_et\\_demonstration/links/56cf58eb08ae059e37597162/Quelques-outils-pour-lanalyse-cognitive-du-rapport-entre-argumentation-et-demonstration.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Bettina-Pedemonte/publication/291448809_Quelques_outils_pour_l'analyse_cognitive_du_rapport_entre_argumentation_et_demonstration/links/56cf58eb08ae059e37597162/Quelques-outils-pour-lanalyse-cognitive-du-rapport-entre-argumentation-et-demonstration.pdf)

Pedemonte, B. (2007). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. *Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME*, 5, 643-652. <http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG4.pdf#page=109>

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73, 6-34. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR07002/IGR07002.pdf>

- Pigeonnat, Y. (2015). Évaluation systématique des enseignements vs analyse approfondie des situations pédagogiques. *Repéré à [http://www.academia.edu/8856606/Les\\_pièges\\_de\\_l\\_évaluation\\_systématique\\_des\\_enseignements\\_une\\_solutions\\_pour\\_les Éviter](http://www.academia.edu/8856606/Les_pièges_de_l_évaluation_systématique_des_enseignements_une_solutions_pour_les Éviter)*.  
[https://www.academia.edu/download/35193452/evaluation\\_systematique\\_analyse\\_approfondie\\_AIPU2010.pdf](https://www.academia.edu/download/35193452/evaluation_systematique_analyse_approfondie_AIPU2010.pdf)
- Poincaré, H. (1894). Nature Du Raisonnement Mathématique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 2(4), 371-384. <https://www.jstor.org/stable/40891545>
- Puchaczewski, E. (2024). Using the theory of relations for analysing the work on mistakes. *Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)*. 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7), Barcelone, CRM.
- Rege Colet, N. (2006). Représentations et modèles pédagogiques des conseillers pédagogiques en milieu universitaire. *La pratique enseignante en mutation à l'université. Bruxelles: De Boeck*.
- Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques au cycle 4*. (s. d.). éducol | Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse - Direction générale de l'enseignement scolaire. Consulté 14 novembre 2023, à l'adresse <https://eduscol.education.fr/280/mathematiques-cycle-4>
- Rouche, N. (1992). Le sens de la mesure. *Bruxelles: Didier Hatier*. <http://michel.delord.free.fr/rouche.pdf>
- Rouche, N. (1994). Qu'est-ce qu'une grandeur. *Analyse d'un seuil épistémologique, Repères-IREM*, 15, 25-36.
- Sarrazy, B. (2002). Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 89-117. <https://doi.org/10.1023/A:1016006805418>
- Sesamath. (2009). *Le manuel Sésamath 6e (Génération 5)*.
- Sierra, T. Á., & Gascón, J. (2018). Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado y la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza. El caso de los sistemas de numeración. *Recherches en didactique des mathématiques*, 38(1), 79-117. [https://www.researchgate.net/profile/Tomas-Sierra/publication/326201440\\_Los\\_recorridos\\_de\\_estudio\\_e\\_investigacion\\_para\\_la\\_formacion\\_del\\_profesorado\\_y\\_la\\_construccion\\_de\\_praxeologias\\_matematicas\\_para\\_la\\_ensenanza\\_El\\_caso\\_de\\_los\\_sistemas\\_de\\_numeracion\\_The\\_study\\_and\\_research/links/5ee36bd292851ce9e7dcd729/Los-recorridos-de-estudio-e-investigacion-para-la-formacion-del-profesorado-y-la-construccion-de-praxeologias-matematicas-para-la-ensenanza-El-caso-de-los-sistemas-de-numeracion-The-study-and-research.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Tomas-Sierra/publication/326201440_Los_recorridos_de_estudio_e_investigacion_para_la_formacion_del_profesorado_y_la_construccion_de_praxeologias_matematicas_para_la_ensenanza_El_caso_de_los_sistemas_de_numeracion_The_study_and_research/links/5ee36bd292851ce9e7dcd729/Los-recorridos-de-estudio-e-investigacion-para-la-formacion-del-profesorado-y-la-construccion-de-praxeologias-matematicas-para-la-ensenanza-El-caso-de-los-sistemas-de-numeracion-The-study-and-research.pdf)
- Sierra, T. Á., Olarría, A. R., Bourgade, J.-P., & Lécureux-Têtu, M.-H. (2013). Un

parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre. *17e école d'été de didactique des mathématiques: Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif*. <https://hal.science/hal-02190611/>

Steffe, L. P., Liss, D. R. I., & Lee, H. Y. (2014). On the operations that generate intensive quantity. *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, 4, 49-79. [https://www.researchgate.net/profile/Kevin-Moore-19/publication/289139890\\_Epistemic\\_algebraic\\_students\\_Emerging\\_models\\_of\\_students'\\_algebraic\\_knowing/links/568bd94308ae8445f58dbb47/Epistemic-algebraic-students-Emerging-models-of-students-algebraic-knowing.pdf#page=61](https://www.researchgate.net/profile/Kevin-Moore-19/publication/289139890_Epistemic_algebraic_students_Emerging_models_of_students'_algebraic_knowing/links/568bd94308ae8445f58dbb47/Epistemic-algebraic-students-Emerging-models-of-students-algebraic-knowing.pdf#page=61)

Steiner, H.-G. (1969). Magnitudes and rational numbers: A didactical analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 371-392. [https://www.jstor.org/stable/3482088?casa\\_token=o0LsaUkm254AAAAA:abRu7PCqKZa3hN3F0Pc802Ri8Ndwa4pgx8Snty4uCssSAuzQFhFTVyyd9pSFAp5eSp\\_TOcgiVtMk6Ys1StPJmkUgyBfi0OXSRyE5kzZwfr\\_pQRSWPQ](https://www.jstor.org/stable/3482088?casa_token=o0LsaUkm254AAAAA:abRu7PCqKZa3hN3F0Pc802Ri8Ndwa4pgx8Snty4uCssSAuzQFhFTVyyd9pSFAp5eSp_TOcgiVtMk6Ys1StPJmkUgyBfi0OXSRyE5kzZwfr_pQRSWPQ)

Strømskag, H., & Chevallard, Y. (2021). *De la TSD à la TAD. Un témoignage*.

Thomazet, S. (2008). L'intégration a des limites, pas l'école inclusive! *Revue des sciences de l'éducation*, 34(1), 123-139. <https://www.erudit.org/en/journals/rse/1900-v1-n1-rse2410/018993ar/abstract/>

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 179-234. <https://books.google.com/books?hl=fr&lr=&id=UVGJ-CAvQzUC&oi=fnd&pg=PA179&dq=thompson+patrick&ots=tiK0CBafn9&sig=cwfx1L3jz6ll1KfhkCPVaAF9-H8>

*UTILE: Définition de UTILE*. (s. d.). Consulté 17 novembre 2023, à l'adresse <https://www.cnrtl.fr/definition/utile>

Villani, C., & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. <https://orfee.hepl.ch/handle/20.500.12162/1695>

Whitney, H. (1968a). The Mathematics of Physical Quantities: Part I: Mathematical Models for Measurement. *The American Mathematical Monthly*, 75(2), 115-138. <https://doi.org/10.1080/00029890.1968.11970956>

Whitney, H. (1968b). The Mathematics of Physical Quantities: Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly*, 75(3), 227-256. <https://doi.org/10.1080/00029890.1968.11970972>

Wijayanti, D., & Bosch, M. (2018). The Evolution of the Knowledge to be Taught through Educational Reform: The Case of Proportionality. *ICMI Study 24 Shool Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities*, 26-30. [http://research.unissula.ac.id/bo/reviewer/211312003/575THE\\_EVOLUTION\\_OF\\_TH](http://research.unissula.ac.id/bo/reviewer/211312003/575THE_EVOLUTION_OF_TH)

E\_KNOWLEDGE\_TO\_BE\_TAUGHT\_THROUGH\_EDUCATIONAL\_REFORMS\_\_  
THE\_CASE\_OF\_PROPORTIONALITY.pdf

Wijayanti, D., & Winsløw, C. (2017). Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. *REDIMAT*, 6(3), 307-330. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6152809>

Wismann, H. (2014). *Penser entre les langues*. Flammarion.

Zarca, B. (2012). *L'univers des mathématiciens: L'ethos professionnel des plus rigoureux des scientifiques*. PUR.