



HAL
open science

Deux analogies basées sur la mécanique des fluides : de l'échelle cosmologique à l'échelle particulière

Jean-Paul Martischang

► To cite this version:

Jean-Paul Martischang. Deux analogies basées sur la mécanique des fluides : de l'échelle cosmologique à l'échelle particulière. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Lille, 2024. Français. ⟨NNT : 2024ULILN050⟩. ⟨tel-05058028v2⟩

HAL Id: tel-05058028

<https://theses.hal.science/tel-05058028v2>

Submitted on 6 May 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Thèse

présentée à l'UNIVERSITÉ DE LILLE,
école doctorale n°632 – ENGYSYS,

et réalisée à l'Institut d'Electronique, de Microélectronique et de
Nanotechnologie (IEMN, UMR CNRS 8520)

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
en PHYSIQUE, spécialité ACOUSTIQUE :

Deux analogies basées sur la mécanique des fluides : de l'échelle cosmologique à l'échelle particulaire

présentée et soutenue par
JEAN-PAUL MARTISCHANG

le 06/12/2024,

devant le jury ainsi composé :

Michael Le Bars	DR CNRS, Univ. Aix Marseille	Président
Philippe Marmottant	DR CNRS, Univ. Grenoble	Rapporteur
Emmanuelle Rio	Pr, Univ. Paris Saclay	Rapportrice
Lorène Champougny	Dr, Univ. Carlos III de Madrid	Examinatrice
Germain Rousseaux	DR CNRS, Univ. Poitiers	Examineur
Michael Baudoin	Pr, Univ. Lille	Directeur de thèse
Benjamin Reichert	MCF, Univ. Lille	Co-encadrant
Alexis Duchesne	MCF, Univ. Lille	Co-encadrant

Résumé

En physique comme dans toute autre science, on peut considérer les analogies comme des ponts que l'on jette entre les différents domaines ; ainsi une expérience à l'échelle du laboratoire peut trouver un écho à l'échelle quantique ou à celle des galaxies. En décelant les similitudes qui caractérisent divers phénomènes en apparence très éloignés les uns des autres, on ouvre alors de nouveaux points de vue et une compréhension plus large des matières ainsi reliées. Dans cette thèse, nous proposons et étudions deux systèmes appartenant à la mécanique des fluides, et qui présentent des analogies avec, pour l'un, la gravitation newtonienne, et pour l'autre la mécanique quantique. Dans une première partie, nous explorons le comportement de lentilles liquides sur un film de savon horizontal. Dans notre cas, une lentille est l'objet en lequel se transforme une goutte d'eau ou d'huile déposée sur un film de savon. Amas liquide de diamètre relativement stable dans le temps, elle déforme sous son poids le film qui la soutient, et se trouve capable de s'y déplacer selon ces déformations. Nous montrons alors, en nous appuyant sur des résultats tant expérimentaux que théoriques, que deux de ces lentilles peuvent interagir entre elles, par le biais de la déformation du film qui les supporte, selon une loi analogue à celle de la gravitation. Leur fusion présente également des similitudes avec la collision de deux galaxies, simulée ou observée. Dans une seconde partie, nous étudions la capacité d'un dipôle acoustique à s'auto-propulser dans un milieu fluide. Le dipôle, déstabilisé *via* une légère perturbation de vitesse, émet en effet un champ qui peut appliquer à lui-même une force de radiation, que l'on qualifie d'auto-induite. Nous montrons que, sous certaines conditions, cette force est susceptible de propulser le dipôle source. Ce travail ouvre la voie à un système couplé onde / corpuscule, qui rejoint l'interprétation de l'onde pilote de la mécanique quantique.

Abstract

In physics, as in other scientific disciplines, analogies can be seen as bridges that can be built between different fields. Thus, an experiment conducted on a laboratory scale may find an echo on the quantum or even galactic scale. By identifying the similarities between seemingly disparate phenomena, we open up new points of view and a broader understanding of the subjects in question. In this thesis, we propose and study two systems belonging to fluid mechanics, which respectively present analogies with Newtonian gravitation and quantum mechanics. In the first part, we explore the behaviour of liquid lenses on a horizontal soap film. In our case, a lens is the object formed by a droplet of water or oil upon being deposited on a soap film. As a liquid mass of relatively stable diameter over time, it deforms the supporting film under its weight and is able to move across it according to these deformations. Relying on both experimental and theoretical results, we show that two such lenses can interact through the deformations of the film, following a law analogous to that of gravitation. Furthermore, their merging process bears resemblance to the collision of two galaxies, either simulated or observed. In the second part, we investigate the ability of an acoustic dipole to self-propel in a fluid medium. When subjected to a slight velocity perturbation, the destabilised dipole emits a field that can exert a so called "self-induced" radiation force on itself. We show that, under certain conditions, this force can effectively propel the source dipole. This work paves the way for a coupled wave-particle system, which aligns with the pilot-wave interpretation in quantum mechanics.

Remerciements

Être seul auteur d'une thèse, c'est malheureusement masquer toutes les personnes qui l'ont également rendue possible, par leurs conseils ou leur soutien, parfois par leur simple présence. J'aimerais donc profiter de cette partie pour les évoquer et les remercier chaleureusement.

Tout d'abord, je suis reconnaissant à Emmanuelle Rio et Philippe Marmottant d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit, ainsi qu'à Michael Le Bars, Lorène Champougny et Germain Rousseaux, d'avoir participé à mon jury. Vos retours m'ont été très précieux, et j'ai beaucoup apprécié les discussions durant ma soutenance de thèse. On m'a affirmé que vous étiez un jury exceptionnel, et j'ai pu l'observer de mes propres yeux. Votre enthousiasme, notamment, fut des plus motivants.

Afin d'épauler mes débuts dans la recherche, j'ai eu la chance de compter sur trois parents académiques : Michael Baudoin, Alexis Duchesne et Benjamin Reichert. Merci d'avoir partagé avec moi votre vénérable sagesse sur le monde académique, et d'avoir fait de moi un chercheur tout en supportant mes incessantes questions sur tout et n'importe quoi.

En particulier, merci à mon professeur de dynamique des fluides, avec qui je restais discuter après les cours et qui a fini par devenir mon directeur de thèse. Michael, quand nous avons discuté d'ajouter « une touche d'astrophysique ou de cosmo » dans ma thèse avant même de la commencer, je ne me doutais pas qu'elle grandirait autant. Merci de l'avoir acceptée, et merci aussi de la souplesse avec laquelle tu as dirigé mon travail. Tes kilos de bonbons au bureau furent largement appréciés, et j'espère qu'un jour tu me pardonneras pour la mouette que j'ai fini par ~~subtilement~~ glisser dans ma soutenance, et qui n'est finalement qu'une parmi toutes les bizarreries que je t'ai faites subir. De concert avec mes co-encadrants, tu t'es appliqué à me former aux subtilités de la recherche et, malgré ton emploi du temps particulièrement fourni, tu as toujours trouvé un moyen de me dégager entrevues et réunions régulières.

Alexis, même lorsque cela pouvait passer inaperçu pour certains, je te suis reconnaissant d'avoir su détecter mes périodes de stress intense, et d'y avoir si bien répondu. Merci pour tes conseils avisés sur le monde du travail et de la recherche scientifique, ainsi que pour l'expertise expérimentale dont tu étais si loin d'être avare. Merci pour cette phrase si simple, mais toujours accompagnée de vrais arguments qui la rendaient si convaincante : « nan, t'inquiète ». Pour de bonnes ou de moins bonnes raisons, je suis souvent venu vous déranger, Benjamin et toi, et j'ai toujours été bien accueilli. Pour autant, les échanges fructueux étaient légion, et souvent une simple visite pour dire bonjour finissait en développement intéressant.

Beaucoup de ces développements sont venus dans les parties théoriques. Merci à toi, Benjamin, d'y avoir passé tant de temps alors que je peinais à établir mes modèles. Tu as posé des bases solides sur lesquelles j'ai pu monter pour édifier ce travail, comme en témoignent les nombreux emprunts à tes calculs qui parsèment ce manuscrit. Et même si j'étais toujours « à

deux doigts » de trouver une solution à mes questionnements, merci de m'avoir toujours poussé à l'atteindre, alors qu'elle reculait sans cesse devant moi !

Viennent ensuite tous les membres de l'équipe du labo, en particulier mes camarades doctorants, pour l'humeur et la vie avec lesquelles ils ont habillé mes trois années de thèse, que ce soit au babyfoot dans notre (regrettée) salle de pause, derrière divers jeux de plateaux ou de cartes, ou simplement au resto universitaire ou dans les bureaux les uns des autres. Aurélien, mon bro de labo et coach de babyfoot, qui as particulièrement favorisé ma consommation de bonbons, tu as su me guider dans les procédures les plus simples et élégantes de Python, et me montrer la voie de la simplicité. J'espère que mes avis sur les côtés les plus alambiqués de ce même langage t'ont autant aidé ! Même si notre interaction a pu parfois drastiquement interférer avec notre productivité, j'étais content de partager un bureau et des refs d'Hello Boss avec toi. Baptiste, merci pour tous ces samedis jeux de plateau que tu as hébergés, (presque) toujours avec une bonne tarte. Au-delà de l'assistance mutuelle sur Python ou L^AT_EX, tu fus d'un grand soutien moral. Tes petits régionalismes (autres que *hop-là*) m'ont aussi un peu fait voir la vie en Vosges. Salah, merci de m'avoir fait découvrir un humour... très différent de ce à quoi j'étais habitué. J'espère aussi qu'un jour tu viendras me raconter comment tu te seras servi de tes étudiants pour lancer une industrie mondiale de rickolls au cours d'un TP. Ania, merci de m'avoir replongé dans le thé ; je ne suis toujours pas sûr qu'on t'aie fait du bien en t'apprenant les règles du tarot. Amandine, merci pour le codéveloppement de nos systèmes pour tenir des films de savon, et les jeux que tu as partagés avec nous les midis ! Merci également aux anciens doctorants, Gong, Roudy, Ravinder, de nous avoir accueillis, nous pauvres première année, au sein de votre majestueux bureau, et merci pour l'atmosphère agréable que nous y avons trouvée. Merci à Aymeric qui m'a précédé sur la partie acoustique de cette thèse, et dont les travaux m'ont servi de belle base. Mes pensées vont également vers les nouveaux doctorants, Jules, Iliès, Yves, et tous les autres doctorants, stagiaires, postdocs et ingénieurs de l'équipe et du labo en général, qui continuez de l'habiter et d'y insuffler la vie, notamment Gustav et Giclenio, qui demeurez dans notre bureau avec Yves. Je tiens aussi à mentionner les permanents qui ont accompagné certaines de mes recherches, ou qui ont aidé les dispositifs expérimentaux, que ce soit en fabriquant des pièces critiques, en me prêtant du matériel précieux, ou en insistant sur le rangement des paillasses : Jean-Michel, Farzam, Sarah, notamment. Ranger, c'est long, mais c'est souvent nécessaire.

Si le doctorat m'a appris à voler de mes propres ailes en termes de science et de recherche, je reste souvent paniqué face aux démarches administratives. J'aimerais donc remercier les équipes de l'IEMN pour leur accompagnement, en particulier Andy et Nora pour leur gestion exemplaire de mes contrats : vous les avez rendus bien plus faciles et rapides à signer que ça aurait pu être, merci de vous être donné autant de mal. Et comment évoquer le pôle administratif sans nommer notre grande alliée face aux démarches CNRS et Université, qui navigue sans ciller parmi les plus obscurs documents et nous accompagne du début à la fin des missions nationales comme outre-atlantique ? Merci Hélène pour tes relances, ton aide considérable, ta réactivité et ta compétence. Et quand il a fallu imprimer thèses et posters, Clément, tu as toujours été là avec ton sourire et ta gentillesse, pour lesquels je te suis très reconnaissant. Pour la dernière personne de l'IEMN, la première que l'on voit le matin : merci Claire de toujours m'avoir accueilli au labo avec le sourire, et d'avoir pallié tant d'étourderies de ma part. Quand tu m'interpellais au passage pour me signaler qu'un colis était arrivé pour moi, je me sentais vraiment à ma place dans ce bâtiment.

Un grand merci également au personnel de l'Université, en particulier celui de la Faculté des Sciences et Technologies, qui a géré de son côté mes contrats, mes cours et tout le reste. Merci à Vincente pour son aide sur les contrats d'enseignement, à Loïc qui a fabriqué plus d'une

pièce de mes expériences et m'a aidé pour en faire tant d'autres, et à Frédérique qui, depuis son atelier de reprographie, m'a initié à l'art subtil de la reliure. Merci à l'équipe pédagogique du département de Mécanique de m'avoir permis d'enseigner en parallèle de ma thèse : c'était une excellente façon de me re-visser les bases en tête et de me faire découvrir les subtilités de l'enseignement.

Enfin, le contexte personnel dans lequel j'ai évolué non seulement au cours de ces trois ans, mais aussi de toutes les années précédentes, a bien évidemment beaucoup influencé mon travail. J'aimerais donc remercier les premiers à m'avoir accompagné, chacun de mes deux parents, ainsi que tous mes frères et ma famille plus ou moins éloignée. Vous m'avez offert un cadre formidable pour grandir et aller vers la thèse, et vous avez su pimenter sans modération ces trois dernières années. Merci également à ces précieux amis que je me suis fait en chemin et qui sont restés à mes côtés jusqu'à maintenant. Merci en particulier à Marin, Mari-Lena, Daphné et Raphaël pour votre soutien moral, vos discussions passionnantes et les échappatoires salvatrices que vous avez parfois offert à mon cerveau en surchauffe. Je tiens également à évoquer toutes les personnes que j'ai pu côtoyer en-dehors du laboratoire, à l'association de jeux Dés à la Carte, ou à l'Association des Doctorants en Sciences de Lille. Je me souviendrai longtemps des séances de visionnage des films Ghibli ! Merci également à celui qui m'accompagne dans cette vie étrange : Sylvia, tu m'as fait comprendre à quel point les humains sont complexes, et sans toi cette vie de thèse aurait été nettement moins palpitante.

J'aimerais terminer par remercier toutes les personnes que je connais au plus de nom, et qui m'ont accompagné par leurs productions dans mes séances de travail ou ailleurs : compositeurs, animateurs, réalisateurs, développeurs, dessinateurs... Vous êtes trop nombreux pour pouvoir tous vous citer, mais vous avez accompagné mes phases de concentration, d'attente ou de détente avec une diversité monumentale d'œuvres. Enfin, je suis reconnaissant à toutes les personnes dont le travail a façonné mon quotidien, ces gens qui sont la France et qui sont le Monde, et dont le travail a pu impacter ma vie de quelque façon que ce soit, que je le sache ou non. Toutes les mains invisibles à mes yeux, et qui m'ont donné le privilège de travailler sur mon sujet.

Merci à tous.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction à la thèse	11
A Interactions entre des corps complexes sous l’enseigne de la gravitation : des lentilles liquides orbitant sur un film de savon aux fusions de galaxies	13
Quand la gravité sculpte son monde	15
1 Les témoins distordus d’interactions gravitationnelles aux échelles cosmologiques	15
2 Vers un modèle de laboratoire à échelle réduite	16
3 Objectif de cette partie	19
I L’art d’observer les films de savon	21
I.1 Films et surfactants	22
I.2 Créer une lentille maîtrisée	27
I.3 Capturer l’image d’un film de savon	29
I.4 Mesurer l’épaisseur d’un film de savon	33
II Réaction du film à la présence d’une lentille	37
II.1 Evolution temporelle du système	37
II.2 Déformation statique du film	41
III Comportement et dynamique d’une lentille unique	49
III.1 Mouvement radial d’une lentille liquide sur un film circulaire	49

III.2	Orbite solitaire d'une goutte	62
IV	Interaction entre deux lentilles : orbites, marées et galaxies	65
IV.1	Valse des gouttes	65
IV.2	Interaction proche et fusion de deux lentilles : des phénomènes de marée analogue	72
IV.3	Vers des analogies formelles et des études complètes	78
	Des lentilles aux galaxies, pour toujours plus d'analogies	81
B	Source acoustique transportée par son propre champ : vers des analogues quantique	85
	Rapprocher la mécanique des fluides et la mécanique quantique	87
1	Mécanique quantique, mécanique des fluides et systèmes analogues	87
2	Systèmes acoustiques autopulsés	89
V	Force de radiation auto-induite par un dipôle en mouvement	91
V.1	Expression générale de la force de radiation auto-exercée	91
V.2	Champ de déplacements transporté par une source dipolaire en mouvement . . .	93
V.3	Champs de vitesse, de pression et de masse volumique	96
V.4	Expression de la force de radiation	99
V.5	Discussion autour de la force de radiation	102
VI	Explorer la force de radiation auto-induite	105
VI.1	Sortir du cadre théorique	105
VI.2	Vers une analogie quantique?	109
	Conclusion générale	111
	Annexes	cxv
A	Principes de mécanique interfaciale	cxv

B Détection du profil d'un film de savon	cxix
C Détection et suivi de lentilles sur un film de savon	cxxix
D Câblage, contrôle et installation du moteur et du spectromètre	cxxxiii
E Programme de contrôle du moteur	cxxxix
F Programme minimal de contrôle du spectromètre	cxliii
G Déformation d'un film causé par une lentille ponctuelle	cliii
Références de la première partie	clv
Références de la seconde partie	clxiii
Références des annexes	clxxi

Introduction à la thèse

« Believe in yourself. [...] If you think it's interesting for you, it is probably interesting. » – *Moungi G Bawendi*
- *Nobel Prize of Chemistry, APS March Meeting 2024*

CERTAINES associations peuvent sembler incongrues. Un vin blanc sec avec un pain au chocolat. Une piscine et un livre de mécanique quantique. Une bulle de savon et une galaxie. Certains de ces couples, pourtant, cachent derrière leur apparente dissonance un lien, un pivot plus ou moins abstrait, qui peut les rendre parfaitement cohérents. Or, si trouver le lien qui unit le vin blanc et le pain au chocolat, si tant est qu'il existe, n'est pas forcément aisé, unir deux domaines de la physique peut se réduire à deux tâches : établir des équations similaires décrivant des systèmes et leur évolution dans chacun d'eux, et appuyer cette ressemblance par des comparaisons expérimentales.

Associer des domaines éloignés de la physique, voire de la science, est une démarche qui surprend parfois, mais qui intrigue souvent. Récemment, un intérêt nouveau s'est manifesté pour décroisonner les connaissances, et mêler de plus en plus les domaines entre eux. Les recherches interdisciplinaires se retrouvent de plus en plus encouragées, voire favorisées, et il n'est pas rare de trouver une communication parlant de tel principe adapté de tel domaine à tel autre, promettant de grandes avancées. Le champ très vaste de la mécanique des fluides regroupe déjà en son sein de nombreux principes abstraits et généraux, qui lui font un lien avec divers phénomènes : les circuits hydrauliques partagent les mêmes notations qu'un circuit électrique RLC, qu'un oscillateur quantique ou qu'une étude d'isolation thermique, et on ne compte plus les domaines où la théorie des ondes et tout son formalisme peut s'appliquer.

C'est dans cet esprit de regroupement que s'inscrit cette thèse. En deux parties indépendantes, ce manuscrit décrit deux pistes partant de la mécanique des fluides pour reproduire des phénomènes, respectivement d'astrophysique et de mécanique quantique. Les deux systèmes ainsi présentés sont abordés en tant que systèmes fluides, l'un issu de la mécanique interfaciale, l'autre de l'acoustique, et sont traités comme tels¹. En fin de compte, et même si ces pistes se révèlent très prometteuses, établir formellement les analogies et en cerner toutes les limites comme les intérêts demandera un travail conséquent. Le cadre de ce manuscrit est donc de poser les bases des systèmes qui y sont décrits et de montrer les opportunités qui s'en dégagent ainsi que les perspectives de travaux futurs pour mieux les exploiter.

Dans la première partie, principalement expérimentale, nous étudions un système composé d'un film de savon tendu à l'horizontal, sur lequel sont déposées deux gouttes d'eau. Celles-ci forment alors des lentilles stables, qui déforment le film qui les supporte. Ces deux lentilles orbitent l'une autour de l'autre et finissent par fusionner, dans des motifs rappelant les effets de

1. Ils ne sont donc pas victimes de colifichets.

marée observés et simulés entre deux galaxies. Pour parvenir à une équation du mouvement de ces lentilles à distance, puis à une évaluation qualitative de ces effets de marée, nous commençons par étudier le film lui-même, puis nous posons une seule lentille dessus. De ce système simplifié, nous déduisons une force de rappel qui s'exerce sur la lentille, et issue d'un équilibre entre gravitation et tension de surface. Cette force, dirigée vers le centre du film, s'applique ainsi sur chaque lentille déposée et dérive d'un potentiel harmonique, que nous établissons en théorie et confirmons par l'expérience. Cela connu, nous calculons la force d'attraction entre deux lentilles, et montrons une prédiction soutenue par l'observation de leur mouvement sur un film de savon.

La deuxième partie, plus axée autour d'une étude théorique, décrit un dipôle acoustique et la force de radiation qu'exerce sur lui son propre champ de vibrations, lorsqu'il subit une perturbation en vitesse. Nous calculons cette force et montrons qu'elle peut, sous certaines conditions, lancer une propulsion du dipôle. Cette idée d'un objet mû par le champ d'ondes qu'il émet rejoint une interprétation de la mécanique quantique, la théorie de l'onde pilote développée par Bohm – de Broglie, selon laquelle la dualité onde-corpuscule s'exprime par le fait qu'une particule émet un champ d'onde, qui la guide par rétroaction de façon complètement déterministe. Sans aller jusqu'à établir formellement une analogie complète, nous montrons qu'à l'instar d'autres dispositifs déjà développés en mécanique des fluides et utilisés comme analogues quantiques, notre dipôle est capable de surfer sur un champ ondulatoire qu'il génère.

Première partie

Interactions entre des corps complexes
sous l'enseigne de la gravitation : des
lentilles liquides orbitant sur un film de
savon aux fusions de galaxies

Quand la gravité sculpte son monde

1 – Les témoins distordus d’interactions gravitationnelles aux échelles cosmologiques

Lorsqu’on évoque des corps en interaction sculptés par la gravitation, on regarde rarement ailleurs que vers le ciel. À raison : c’est bien là que les nombreux systèmes de galaxies sur le point de fusionner déploient leurs impressionnants bras spiraux et ponts de matière, tels que les a consignés l’astronome Zwicky dès 1953 [1, 2, 3] (*cf.* fig.1). L’association de ces structures aux effets de marée, donc à la gravitation, est bien établie depuis les nombreuses simulations numériques établies entre 1940 et 1980 [4, 5, 6, 7, 8]. Elle a en outre été largement confirmée dans les études qui suivirent, chacune élargissant le domaine des formes atteignables avec les seules forces de gravité en action, ou rappelant l’importance des effets gravitationnels dans les collisions entre deux galaxies et toutes les conséquences qui en découlent, en termes de formation d’étoiles ou de la structure finale née de la fusion [9, 10, 11, 12, 13].

Il convient cependant de noter que nous ne nous intéressons ici qu’aux structures formées par ces interactions gravitationnelles, ce qui exclut *a priori* les spirales des galaxies isolées. D’autres théories existent à leur sujet, et l’idée qu’elles puissent avoir été formées dans le passé par des fusions de galaxies semble écartée [14]. Le maître mot dans les interactions gravitationnelles reste bien « interaction ».

La discipline qui consiste en l’étude de ces interactions entre galaxies s’appuie, comme souvent dans le domaine de l’astrophysique, sur trois piliers : les travaux théoriques, les simulations numériques, et les observations du ciel profond pour confirmer ou corriger les modèles proposés. Cependant, ces dernières, qui représentent pour ainsi dire la voix au chapitre de la nature, sont limitées à une collection d’instantanés, d’images de différents systèmes en interaction pris chacun à son propre stade d’évolution. En effet, les échelles de temps en jeu, souvent de l’ordre de 500 millions d’années, ne permettent pas de filmer une réelle évolution d’un seul système, même si ces collections d’images présentent une remarquable régularité et semblent se réunir dans une même séquence générale de fusion [13].

Néanmoins, la description des étapes de cette séquence reste spéculative. C’est ce point qui rend intéressante la recherche d’autres moyens d’observer de telles interactions, à plus petite échelle et donc plus observables, afin de valider ou non cette continuité recomposée. Il s’agit là des analogies. La présente partie se propose d’établir l’une de ces analogies, et d’évaluer si oui ou non elle peut se révéler viable pour représenter les interactions gravitationnelles entre deux galaxies.

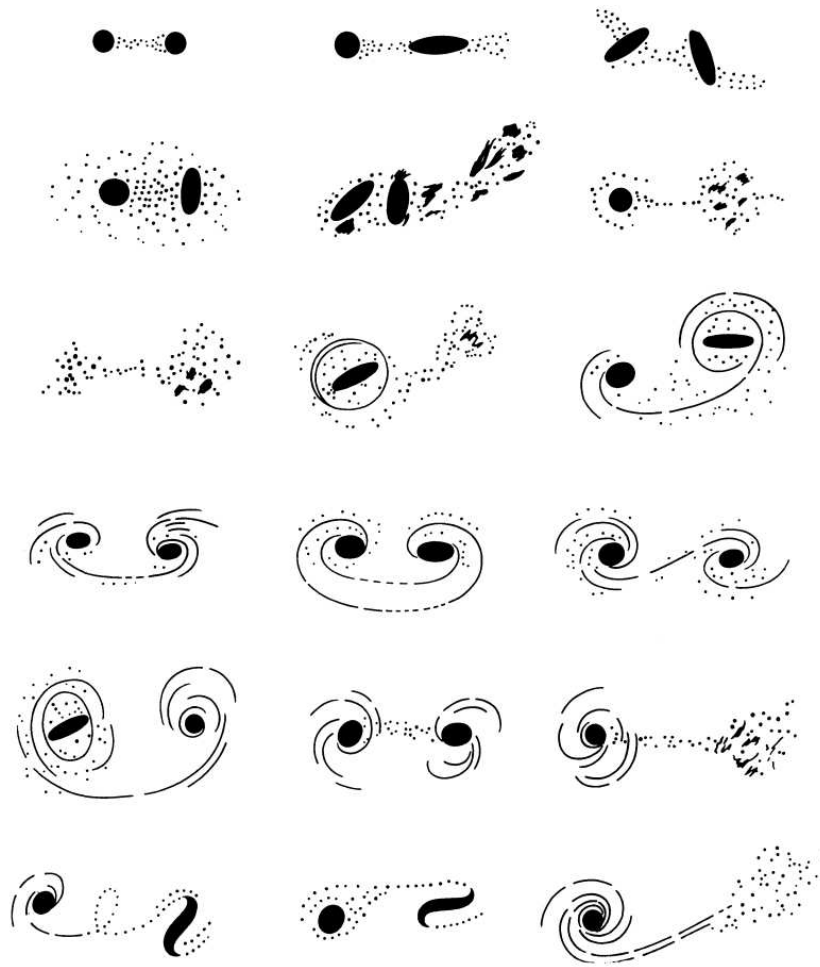


FIGURE 1 – Différents types de ponts, filaments et queues de matière observés entre plusieurs galaxies voisines. Dessin par Zwicky, 1959 [3].

2 – Vers un modèle de laboratoire à échelle réduite

D'une manière générale, la recherche d'une force de gravitation analogue en tant qu'action sur des corps physiques a donné naissance à de nombreux dispositifs expérimentaux. Les premiers cherchaient à obtenir un puits de potentiel fixe, dans lequel pouvait orbiter un corps solide, en courbant une surface selon des lois prédéfinies [15, 16, 17]. Une évolution de ces dispositifs, qui est sans doute plus connue du grand public, est l'expérience dite du Spandex : une nappe tendue sur laquelle sont jetées des masses, qui vont plus ou moins la déformer sous l'effet de leur poids, influençant ainsi les trajectoires d'autres corps qui suivraient [18, 19]. De la sorte, les corps en mouvement s'influencent mutuellement via une action à distance, portée par la déformation de la membrane et qui peut être présentée comme une gravitation analogue. Ils peuvent alors suivre des comportements orbitaux semblables – dans une certaine mesure – à ce que l'on peut attendre de planètes orbitant autour d'une étoile.

Ce modèle, très didactique, présente toutefois deux failles :

- le frottement solide-solide d'une masse sur la membrane cause une dissipation d'énergie, qui limite les effets observables ;
- les masses lancées sur la membrane sont des solides indéformables, ce qui les empêche d'adopter des comportements complexes tels que des effets de marée ou de fusion.

2.1 Un corps liquide et une membrane solide

Ces deux points peuvent être améliorés de concert si l'on choisit de travailler sur des systèmes fluides. L'idée la plus immédiate est de remplacer les solides indéformables par des gouttes liquides. L'équilibre de ces objets sur des membranes élastiques est l'objet d'une étude par Nair *et al.* en 2023 [20], mais celle-ci s'arrête au cas statique, les gouttes ne se déplaçant pas sur les membranes. La faisabilité du cas dynamique, où une goutte glisserait sur son support, semble difficilement atteignable à cause des effets de mouillage : il faudrait revêtir la membrane d'une couche hydrophobe, tout en maintenant son élasticité.

Une solution est donc à chercher du côté des interfaces fluides comme support, plutôt qu'une membrane solide.

2.2 Un corps indéformable sur une interface liquide

La surface d'un bain comme support

Lorsqu'on dépose des objets sur la surface d'un bain liquide, comme sur toute interface fluide, il faut compter avec les effets de tension de surface. Ceux-ci vont déformer l'interface autour des objets en un ménisque, selon une loi exploitée par Selmke [21] pour reproduire un effet de lentille gravitationnelle : la déformation de l'interface courbe les rayons lumineux qui la traversent, si bien qu'un motif quelconque, placé sous le bain et observé à travers lui, apparaîtra déformé comme le déformerait une lentille gravitationnelle.

Les objets causant cette déformation peuvent être plus denses ou moins denses que le liquide qui les supporte : la seule condition est que les forces de tension de surface les maintiennent à la surface du bain. Dans certains cas, par exemple celui de billes métalliques millimétriques déposées sur de l'eau, les déformations induites par chacun des corps concourent à créer une force d'attraction entre eux, comme présenté dans le schéma 2. Ce phénomène est connu sous le nom d'*effet Cheerios* [22, 23].

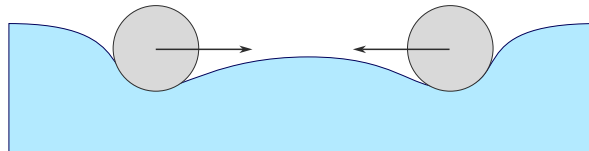


FIGURE 2 – Illustration de l'effet Cheerios : deux particules identiques déforment une interface fluide, et sont en retour attirées l'une vers l'autre.

Cet effet fut exploité par Gauthier *et al.* en 2019 [24], qui firent glisser des gouttes d'huile siliconée sur un bain d'azote liquide. Ces gouttes, traitées comme des particules indéformables, adoptent des trajectoires orbitales rappelant « un système céleste miniature » lorsqu'elles arrivent à portée d'interaction. L'avantage indéniable de ce système sur le précédent est la réduction à presque néant de la friction : du fait de la différence considérable de température entre le point d'ébullition de l'azote liquide et les gouttes à température ambiante, celles-ci se retrouvent en effet en lévitation, maintenues au-dessus du bain par une fine couche de vapeur d'azote tout juste formée, selon le phénomène connu sous le nom d'*effet Leidenfrost*.

L'écrantage : une limite à l'utilisation de l'effet Cheerios

La force d'attraction entre deux corps causée par l'effet Cheerios constitue certes une action à distance intéressante, mais elle est limitée par un phénomène d'écrantage qui inhibe toute action à longue portée. En effet, elle est proportionnelle à $K_1(d/\ell_c)$, K_1 étant une fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, qui tend vers 0 pour de grands arguments, d la distance entre les deux corps, et ℓ_c la longueur capillaire du bain [23]. On voit que le paramètre principal est d/ℓ_c . Or, ℓ_c étant de l'ordre du millimètre (1,1 mm pour l'azote liquide [25]), des distances supérieures à $d \simeq 1$ cm suffisent pour largement masquer toute contribution de l'effet Cheerios devant d'autres effets s'appliquant sur les corps étudiés.

L'attraction gravitationnelle, que nous cherchons à imiter, est, elle, active à grande distance. Pour obtenir des systèmes liés dès le début de l'expérience sans se reposer sur des conditions initiales particulièrement strictes, et observer des interactions entre corps se mouvant sur un large domaine d'excursion, il nous faut changer de force d'attraction et donc de support.

Particule solide sur un film liquide

Ce nouveau support, nous le cherchons du côté des membranes fluides : films de lipides dans le cas des *liposomes*, qui forment par exemple les vésicules dont dépendent les cellules vivantes, films d'eau stabilisés par des tensioactifs dans le cadre des *films de savon*.

L'interaction entre un film de lipides et un corps solide fut investiguée par Deserno en 2004 [26], montrant des déformations du film allant du simple étirement à l'enveloppement complet de la particule. Mais la seule étude dynamique trouvée sur un système particule / membrane fluide concerne un film de savon, tendu selon une caténoïde d'axe vertical, sur lequel la migration d'une particule solide fut observée par Dou *et al.* en 2017. Les déformations de la membrane en présence de la particule sont également détaillées dans cette étude [27].

Ce même article introduit la possibilité de faire se mouvoir une goutte d'huile au sein d'un film de savon.

2.3 Corps fluide sur un film de savon

Il n'y a, à notre connaissance, pas d'étude portant sur le mouvement d'un quelconque objet placé sur un film de savon horizontal. Toutefois, ce type de membrane apparaît prometteur pour transmettre un champ de déformation, et potentiellement une force d'attraction à l'instar de l'effet Cheerios, à grande distance.

Puisque nous souhaitons observer des corps déformables, nous utiliserons des lentilles liquides. Une lentille est la structure formée par une goutte une fois posée sur un bain avec lequel elle n'est pas (ou peu) miscible. Extensivement étudiées dans le cas de liquides sur des bains [28, 29, 30, 31], il n'en est fait à notre connaissance que rarement mention sur des membranes fluides, et plus particulièrement sur des films de savon. Dans ce dernier cas, on peut citer Motaghian *et al.*, qui étudièrent la dispersion rapide d'une lentille liquide sur un film de savon, pour plusieurs configurations [32], ou encore les travaux de Gilet et Bush sur le rebond d'une goutte sur un film [33, 34].

Lors d'observations préliminaires, nous avons déposé des gouttes d'eau sur un film de savon horizontal. Alors, loin de simplement se disperser dans le film avec lequel elles sont pourtant miscibles, les gouttes se sont déstabilisées en lentilles. Ces objets, déformables et relativement stables comme nous allons le montrer, sont de bon candidats pour explorer des interactions à distance pouvant ressembler à la gravitation. De plus, ils ont l'avantage de supprimer tout frottement solide – le remplaçant par de la seule dissipation visqueuse – ce qui peut faire espérer une dynamique moins amortie et donc plus longue.

3 – Objectif de cette partie

Cette première partie de la thèse vise donc à développer ce système original de lentilles liquides évoluant sur un film de savon. Sous l'effet de l'action à distance qu'une lentille exerce sur l'autre dans cette configuration, et qui sera déterminée dans la suite, nous montrerons que deux lentilles d'eau posées sur un film de savon sont susceptibles d'orbiter l'une autour de l'autre selon un modèle prédictif que nous avons établi, et de fusionner selon des schémas qui rappellent les simulations de fusion de deux galaxies. Nous verrons que, ce faisant, elles passent par des structures transitoires qui évoquent les silhouettes de couples de galaxies en interaction.

Dans ce but, nous commencerons par poser les bases de notre étude, en présentant les objets étudiés : films de savon, lentilles liquides, et leurs propriétés utilisées par la suite, ainsi que les moyens expérimentaux et méthodes de mesures mis en place pour les observer.

Nous basant sur cela, nous caractériserons la réponse d'un film de savon horizontal à la présence d'une lentille. Nous montrerons qu'une lentille au repos peut être considérée en évolution quasi-statique, voire sans évolution sur les échelles de temps qui nous intéressent, ce qui nous permettra d'établir une équation décrivant la forme du film de savon déformé par sa présence.

Nous nous appuierons ensuite sur cette étude statique pour étudier la dynamique d'une lentille solitaire glissant sur un film de savon, d'abord en trajectoire pseudo-rectiligne, le long d'un diamètre du film, puis en orbite autour de son centre. Nous établirons ainsi un profil d'énergie potentielle, de laquelle dérive une force d'attraction vers le centre du film, et écrirons les équations qui gouvernent le mouvement d'une lentille seule dans ce cas.

Enfin, munis de cette force d'attraction centrale, nous pourrons passer à un système de deux lentilles sur un film de savon. Nous caractériserons la force d'attraction de paire qui agit entre les deux objets, et observerons leur interaction, d'abord à distance via cette force d'attraction – les équations du mouvement seront établies et résolues numériquement – puis lors de leur fusion, après contact des deux corps. Cette dernière étude, qualitative, ouvrira la porte à notre analogie.

Chapitre I

L'art d'observer les films de savon

Les bulles de savon font partie de ces phénomènes qui laissent rarement indifférent. Les enfants les adorent, et les adultes n'y sont pas eux-même insensibles : une expérience simple pour s'en convaincre consiste à se rendre dans un parc par beau temps, armé d'un pistolet à bulles, et d'observer les réactions de chacun. Aujourd'hui assez festifs, ces objets particuliers ont pu selon les époques revêtir des livrées plus profondes. Ainsi, dès le XVI^e siècle, les artistes utilisent son motif pour figurer l'éphémère de l'existence humaine, et de nombreuses œuvres la lient alors à la mort, à l'instar du bas-relief en figure I.1.

« Film de savon », en revanche, est un terme bien moins évocateur, au point d'être parfois considéré comme un terme technique par mes interlocuteurs. Je dois ainsi, pour l'expliquer au grand public, partir de l'image de la bulle de savon, et expliquer qu'il s'agit de l'objet liquide et plat que l'on tend sur un cadre, avant de souffler dedans pour créer une bulle. Pourtant, les films n'ont rien à envier aux bulles, tant d'un point de vue poétique que scientifique. Par leur facilité de fabrication et d'étude, ils ont même fait l'objet d'articles à la frontière entre les deux domaines [35], et trouvent des applications très diverses allant de l'illustration de principes géométriques [36] aux visualisations d'ondes acoustiques [37].

Ce chapitre a pour but de synthétiser les concepts utiles pour l'étude des films de savon, et de présenter les procédés expérimentaux mis en œuvre tout au long de cette partie. Les concepts fondamentaux de tension de surface, de saut de pression de Laplace et relatifs aux tensioactifs (ou surfactants), supposés connus du lecteur, sont rappelés dans l'annexe A.



FIGURE I.1 – *Johann Georg Leinberger, Tod mit Seifenblasen, 1729-1731, bas-relief ornant le plafond de la Heilig Grab Kapelle, abbaye Michelsberg, Bamberg, Allemagne.*

I.1 – Films et surfactants

Un film de savon désigne abusivement ce qui est en réalité un film liquide, pris en sandwich dans deux couches de tensioactifs, une par interface avec l'air [38] comme illustré en figure I.2. A la suite des travaux de Laplace sur l'action capillaire en 1824 [39], ils furent étudiés et décrits de façon intensive par nombre de publications [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47].

L'excellente revue de Bergeron sur les forces agissant dans un film [48] rassemble un certain nombre d'études détaillées faites sur les interactions entre les couches de surfactants d'un film

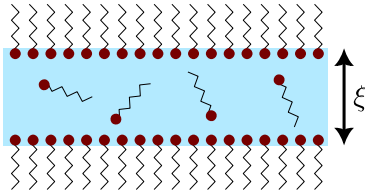


FIGURE I.2 – Représentation schématique d'un film de savon d'épaisseur ξ .

à l'échelle moléculaire. Y est introduite la pression de disjonction, qui est la résultante de ces actions, incluant entre autres l'interaction de van der Waals, et dont l'effet est globalement répulsif entre les interfaces. Elle apparaît lorsqu'un film atteint des épaisseurs assez faibles, de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres [41], et doit être alors prise en compte lors d'études impliquant la pression dans ledit film. Les films qui nous intéresseront par la suite, cependant, seront d'une épaisseur de l'ordre de la dizaine de

micromètres, nous permettant de négliger cette pression de disjonction devant les autres effets en jeu.

D'autres travaux se sont concentrés sur la structure et la vie de films minces [49], ou sur d'autres aspects comme les courants qu'ils abritent du fait de leurs gradients d'épaisseur [50], ou leur élasticité dite de Gibbs [51]. Cette dernière étude par Mysels *et al.* présente également le phénomène de régénération marginale, qui prend principalement place autour des lignes d'attache du film à son cadre, et plus généralement autour des ménisques qui délimitent des régions épaisses du reste du film. Ces régions épaisses aspirent la matière environnante, laissant dans leur voisinage des zones fines, plus légères que le reste du film, et qui finissent donc par se détacher et migrer vers le haut lorsque c'est possible.

Passons à présent aux films de savon que nous nous proposons d'étudier. Leur fabrication est caractérisée par trois éléments : la solution de tensioactifs de laquelle ils seront tirés, le dispositif au sein duquel ils seront tendus (en particulier, le cadre qui les supportera), et enfin la méthode avec laquelle ils seront formés sur ce cadre à partir d'un bain de la solution de surfactants.

I.1.1 Composition et propriétés du bain

Le bain peut être réalisé de différentes manières. De fait, diverses recettes coexistent dans les mondes scientifique et artistique, et une en particulier fut établie de manière scientifique comme « optimale », c'est-à-dire donnant les bulles de savon les plus faciles à produire et les plus durables [52]. De ces recettes, on retiendra principalement deux composants en solution : le tensioactif (SDS, TTAB particulièrement) et la glycérine (ou glycérol), dont nous allons détailler le rôle ci-dessous. Des savons vaisselle commerciaux, tels que le Fairy, sont parfois utilisés pour générer des films. Il s'agit de solutions intégrant déjà les tensioactifs et quelques éléments supplémentaires, tels que la glycérine, des gommes qui facilitent la génération de bulles de savon, ou encore des additifs modifiant le pH pour ménager la peau de l'utilisateur.

Les recettes de ces solutions faisant l'objet d'un secret industriel, les compositions exactes et concentrations des éléments ne sont pas connues ; c'est pourquoi nous choisissons de ne pas les utiliser et de réaliser notre propre solution, adaptée à nos besoins.

La glycérine

La glycérine intervient dans la robustesse du film face à l'évaporation. Il s'agit en effet d'une substance hygroscopique, ce qui signifie qu'elle absorbe l'humidité ambiante. Cet effet peut alors compenser la perte d'eau du film par évaporation, pour une certaine concentration de glycérine et une certaine humidité ambiante. Par exemple, pour une humidité relative de 80 %, une concentration de 50 %m (pourcentage massique) de glycérine compensera exactement ce phénomène, et la masse du film restera constante [53]. Malheureusement, la glycérine étant un composé très visqueux, l'introduire en grande quantité dans le bain introduirait au sein du film de savon d'importants effets de dissipation, qui ne sont pas recherchés. Nous nous fixons donc sur un compromis entre viscosité et évaporation, avec une solution de base à 20 %v (volumiques) de glycérine et 80 %v d'eau (soit une solution de 24 %m de glycérine), et qui a pu donner des résultats fort satisfaisants en termes de longévité du film et de dynamique observée. La perte de masse par évaporation de films issus d'une telle solution est présentée en figure I.3.

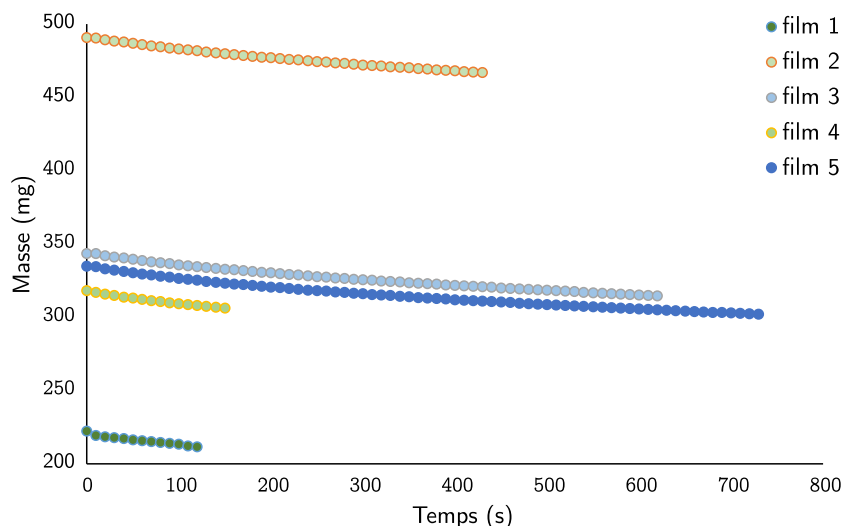


FIGURE I.3 – Evolution de la masse de quelques films de savon en enceinte close au cours du temps, pour un diamètre de 10 cm. Le bain est basé sur une solution de 20 %v de glycérine et de 80 % d'eau, dans laquelle est ajoutée du TTAB à 5,5 mmol/L. Les mesures ont été prises à la balance de précision, tarée au poids du cadre du film.

Le tensioactif

Nous avons limité le choix de tensioactifs au SDS (sodium dodecyl sulfate) et au TTAB (tetradecyl trimethylammonium bromide), largement utilisés dans la littérature et donc très bien caractérisés. Cependant, après quelques manipulations au TTAB, par exemple celle ayant donné les courbes I.3, nous lui avons préféré le SDS en raison de sa plus faible toxicité. C'est donc ce tensioactif qui est utilisé désormais dans cette partie, sauf mention explicite du contraire, pour fabriquer des films de savon.

Quelques expériences sur la durée de vie du film et sur le nombre d'essais nécessaires pour

c_{SDS} (g/L)	10	5	4	3,3	2,9	2,5	2
nb essais	4,8	2,6	2	2,4	2,3	1,9	2,7
durée vie (s)	28	47	60	43	35	48	49

(a) Essais à l'air libre pour un large panel de concentrations. Sont indiqués le temps de vie du film et le nombre moyen de tentatives de tirage de film qu'il a fallu pour obtenir un film stable.

c_{SDS} (g/L)	5,7	5	4,4	4
durée vie (s)	257	271	199	215

(b) Essais en enceinte fermée, resserrés autour de $c = 5,0$ g/L. Tous les films se sont montrés stables du premier coup.

TABLE I.1 – Durée de vie du film en fonction de la concentration en sulfate de dodecyl sodium du bain, à l'air libre pour de nombreuses concentrations (a) ou en enceinte fermée pour une étude plus resserrée (b). Les données indiquées sont à chaque fois des moyennes sur 4 à 6 essais.

tirer un film, dont les résultats sont exposés dans la table I.1a, ont fixé la concentration de SDS à 5 g/L dans notre solution eau/glycérine. La concentration micellaire critique de cette molécule étant à 2,4 g/L, nous nous plaçons largement au-dessus.

Caractérisation du bain

Le bain employé est donc une solution à 5 g/L de SDS, le solvant étant lui-même un mélange à 80 %v d'eau et 20 %v de glycérine.

La masse volumique de cette solution, notée ρ par la suite, est supposée constante dans le bain comme dans le film. Pour plus de simplicité, on l'assimile à celle d'une solution de glycérine à 20 %v, donc sans le tensioactif, soit, en utilisant le modèle développé par Volk et Kähler [54] :

$$\rho = 1057 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

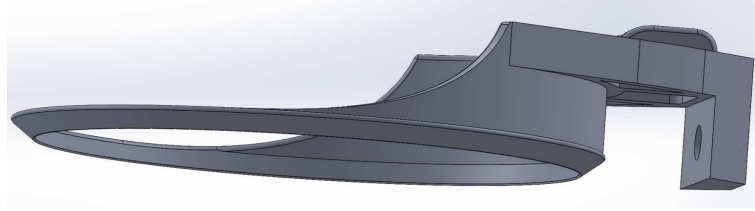
Autre propriété utile pour la suite, la tension de surface du bain, supposée être également celle du film, fut mesurée en utilisant la méthode de la goutte pendante (stalagmométrie) [55], et fixée à

$$\sigma = 34 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Ces deux valeurs sont respectivement calculées et mesurées à température ambiante du laboratoire, soit environ 22°C.

I.1.2 Cadre et *life support* du film de savon

Le cadre, imprimé en résine par une imprimante 3D en stéréolithographie, présente un diamètre intérieur de 10 cm, et une épaisseur pour l'attache du film de 0,5 mm. Il est fixé sur un côté, au moyen d'un système à aimants en néodyme, sur un double goniomètre à vis micrométriques, qui permet d'en régler l'horizontalité. Ce réglage se fait à la main : on dépose

FIGURE I.4 – *Modèle 3D du cadre.*

une lentille d'eau sur un film, et on actionne les vis du goniomètre jusqu'à la placer au centre du cadre. Ensuite, le film est éclaté, et on en tire un nouveau sur le cadre pour cette fois faire les observations. Le système de fixation par aimants, imaginé par Amandine Lechantre, permet de séparer et réunir aisément le cadre du reste de l'installation pour faciliter le tirage du film. L'ensemble est représenté en figure I.5.

Si ce dispositif est suffisant pour nos besoins, il présente quatre sources d'incertitudes pouvant introduire des anisotropies dans le film de savon observé. Bien que faibles (aucune de ces sources d'erreur n'a eu d'effets clairement visibles à l'œil nu), ces anisotropies se feront remarquer dans certaines mesures qui seront présentées tout au long de cette partie. En premier lieu, il faut évoquer le réglage de l'horizontalité : le centrage de la lentille sur le film se fait à la main et à l'œil nu, ce qui peut manquer de précision.

Ensuite, considérons le système de fixation du cadre au goniomètre. L'assemblage maintenu par l'action d'aimants ne peut être parfaitement ajusté, à cause des contraintes de fabrication. Il est donc possible que ce système introduise un léger degré de liberté dans la liaison. Or, entre le réglage de l'horizontalité et toute mesure, le cadre est séparé du goniomètre (pour aller jusqu'au bain de solution et tirer un nouveau film) puis remis en place. C'est une source d'incertitude, la position du cadre pouvant légèrement varier entre avant et après le tirage du nouveau film.

Ce léger degré de liberté peut également introduire une incertitude dans la dynamique d'un corps en mouvement sur le film. Bien qu'aucun dérangement du cadre n'ait été détecté à l'œil nu pendant nos expériences – les aimants sont assez forts pour supporter l'action du cadre sur l'attache, et pour empêcher de grands déplacements – il convient de garder une certaine prudence de ce côté-ci.

Enfin, le cadre n'est fixé à son support que d'un seul côté. Après plusieurs mois de manipulation, nous avons observé qu'il subissait un léger phénomène de fluage, qui courbait sa partie libre vers le bas sous l'effet de la gravité. L'effet n'était alors qu'à peine visible à l'œil nu, mais cette déformation plastique suffisait à compromettre la planéité du cadre et à introduire une légère anisotropie dans le film de savon. L'effet n'a toutefois pas été quantifié, et nous nous sommes contentés de changer le cadre dès que ce phénomène devenait repérable.

Comme l'illustre bien la table I.1, la durée de vie du film s'allonge considérablement une fois ce dernier mis en enceinte fermée, isolé des courants d'air internes de la salle d'expérience. Ceci se fait au moyen d'une boîte de plexiglas transparent. Le fait d'avoir une enceinte fermée permet également d'y contrôler l'atmosphère. Ainsi, et pour limiter l'évaporation du film, nous maintenons une humidité relative autour du cadre entre 75 et 85 % au moyen d'un nébuliseur à ultrasons *Fogger XL* de la marque Trixie.

Enfin, le dispositif étant très sensible aux vibrations de son milieu – une personne marchant un peu lourdement dans le couloir pouvait faire vibrer le film de façon visible – nous l'avons

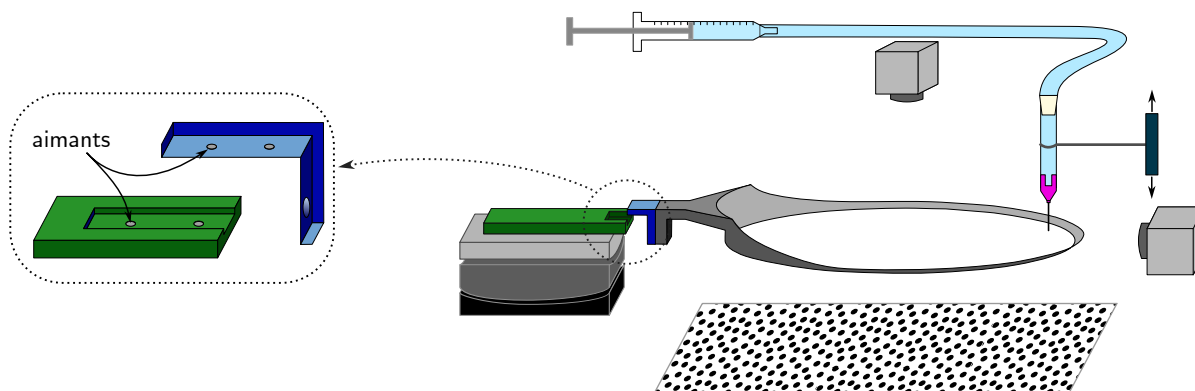


FIGURE I.5 – Vue d'ensemble du dispositif expérimental, avec le cadre, fixé au goniomètre qui le maintient horizontal via l'attache par aimants détaillée dans le zoom sur la gauche. On y voit également les caméras et le système buse - seringue servant à déposer les gouttes d'eau sur le film, placé sur un plateau de translation pour régler la hauteur de déposition (section I.2), ainsi que le speckle sous le cadre, afin d'aider le traitement des vidéos prises du dessus (section I.3).

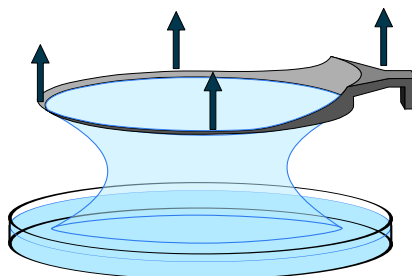


FIGURE I.6 – Caténoïde apparaissant lors du tirage du film.

isolé sur une table optique.

I.1.3 Méthode de tirage du film

La méthode de tirage du film peut varier en fonction des études ; pour la nôtre, le cadre circulaire est plongé dans un bain de solution, puis tiré lentement et à la main vers le haut, formant une caténoïde qui s'affine à mesure que le cadre monte (fig. I.6). Au moment où la caténoïde va se briser et isoler le film sur le cadre du bain, il est possible d'amortir le choc et de limiter les vibrations qui en découlent en baissant légèrement le cadre.

A ce stade, le film peut porter à sa surface une variété de corps indésirables, tels que des microbulles, des « radeaux » de zones plus épaisses et visqueuses que le reste du film, ou des corps sous forme de petits bâtonnets visibles à l'œil nu. Pour s'en débarrasser, le film est incliné à la verticale et retrempé dans le bain. Tous ces éléments y retournent alors rapidement, laissant le film net.

La méthode étant manuelle, on peut douter de la reproductibilité des films obtenus, notamment en termes d'épaisseur et de quantité de fluide embarqué. De fait, les mesures d'épaisseur opérées par la suite ont révélé que, pour notre solution, celle-ci variait généralement entre 10 et 30 μm . On acceptera donc pour la suite que ce paramètre, et donc la quantité de liquide embarqué dans le film, n'est connu qu'à un facteur 3 près.

I.2 – Créer une lentille maîtrisée

Les lentilles liquides, comme il fut détaillé dans l'introduction, sont les objets vers lesquels évoluent les gouttes de fluide au contact d'un bain et ce, de façon quasi instantanée (la transformation prend moins de $1/60^e$ de seconde, aucune image intermédiaire n'en ayant pu être observée avec nos caméras). Ce même objet se forme également lorsqu'une goutte d'eau arrive au contact d'un film de savon, même si la forme sphérique de la goutte peut parfois subsister quelques secondes avant de se réduire en lentille. Cette non-coalescence subsiste le temps du drainage de la couche d'air entre la goutte et le film, et dure rarement plus de quelques dixièmes de secondes. Quoi qu'il en soit, on suppose ici que l'objet « lentille » contient la totalité du liquide de la goutte qui l'a formé, ni plus ni moins. Malheureusement, il ne fut pas possible d'appuyer cette supposition avec des mesures de masse ou d'épaisseur de la lentille, celle-ci étant très délicate à caractériser par l'observation.

Lors de certaines expériences, nous avons toutefois pu mettre cette hypothèse à l'épreuve en utilisant des lentilles d'huile minérale plutôt que des lentilles d'eau. Les données issues de ces lentilles non miscibles avec le film de savon sont en bon accord avec celles des lentilles d'eau, comme nous le verrons en analysant ces expériences.

I.2.1 Créer une goutte calibrée

Créer des gouttes d'une certaine masse est aisé : il suffit de pousser un fluide de façon quasi-statique dans une buse verticale d'un diamètre correspondant. Nous utilisons à cette fin des buses issues du kit *KDS 660* de Weller, que nous identifions par un code couleur détaillé dans la table I.2. Cinq buses supplémentaires, notées « perso », sont ajoutées à cet arsenal, taillées dans des buses larges en plastique. De celles-là, rien n'est connu à part la masse des gouttes qu'elles lâchent.

Les masses renseignées dans la table I.2 sont, pour chaque buse, la moyenne de 52 gouttes d'eau déminéralisée ou 60 gouttes d'huile minérale, lentement formées et pesées avec une balance de précision. Afin de quantifier la reproductibilité de ces gouttes, l'écart-type de ces mesures est systématiquement renseigné, montrant une faible dispersion des masses obtenues malgré la manipulation manuelle.

En effet, les buses produisant les gouttes sont alimentées, via des tuyaux flexibles, par de simples seringues poussées à la main, en dehors de l'enceinte fermée (voir fig. I.5). Afin de lâcher leurs gouttes au plus près du film, elles sont fixées à une plateforme micrométrique permettant d'ajuster la hauteur de l'aiguille, placée au-dessus soit du film directement, soit d'un toboggan hydrophobe dont nous reparlerons. Afin d'assurer la répétabilité des expériences, nous nous assurons systématiquement que la goutte se détache de la buse avant d'entrer en contact avec le film ou la surface du toboggan.

I.2.2 De la goutte immobile à la lentille mouvante

Au cours des expériences menées, les lentilles peuvent être créées soit au centre sans vitesse, soit sur un bord du film sans vitesse initiale, soit en bord du film avec une vitesse

Buse	Ø int (mm)	Eau déminéralisée		Huile minérale	
		masse (mg)	std (mg)	masse (mg)	std (mg)
vert sapin	1,70	34,7	1,5	17,5	1,0
orange	1,52	30,6	1,7	15,5	0,9
fuchsia	1,35	28,0	1,5	–	–
rose	0,97	22,5	0,7	12,7	0,9
brun	0,81	18,4	2,2	–	–
jaune	0,66	15,5	0,4	8,9	0,6
vert clair	0,58	13,2	1,0	–	–
noir	0,48	12,1	0,7	7,4	0,4
turquoise	0,43	12,1	0,3	–	–
bleu océan	0,31	9,9	1,6	–	–
beige	0,25	9,2	0,3	–	–
taupe	0,20	7,6	1,0	–	–
violet	0,15	6,2	0,4	–	–
perso 1	–	55,0	2,0	–	–
perso 2	–	44,1	1,9	–	–
perso 3	–	38,5	1,9	–	–
perso 4	–	35,1	2,4	–	–
perso 5	–	50,5	2,9	–	–

TABLE I.2 – Masse moyenne des gouttes d'eau déminéralisée et d'huile minérale selon les différentes buses employées. Le diamètre intérieur de la buse est renseigné. Les colonnes « std » indiquent l'écart-type des mesures de masse.

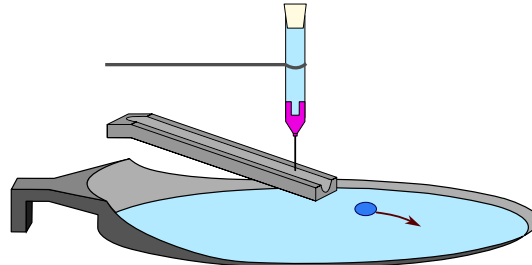


FIGURE I.7 – Schéma du toboggan hydrophobe : la lentille glisse dessus pour acquérir une vitesse initiale sur le film de savon.

d'injection. Celle-ci est obtenue au moyen d'un toboggan hydrophobe¹ sur lequel est lâchée la goutte, représenté en figure I.7. La hauteur à laquelle celle-ci est déposée sur le toboggan influence directement sa vitesse d'entrée sur le film.

Le toboggan, imprimé en 3D, est traité avec un revêtement hydrophobe *NeverWet™ 2 Steps Multi-Surface*, de Rust-Oleum® qui permet à une goutte d'eau de parfaitement glisser dessus. Cette solution, cependant, est inefficace pour des gouttes d'huile ou de même composition que le film de savon. Dans ce dernier cas, en effet, l'abaissement de la tension de surface causée par les tensioactifs compense l'action hydrophobe et la goutte adhère au toboggan.

Le contrôle de cette vitesse, cependant, n'est pas aisé. En effet, une différence de l'ordre du millimètre dans la hauteur de lâcher de la goutte peut faire la différence entre une lentille qui orbite sagement dans le domaine du film et une autre qui s'écrase à pleine vitesse contre le cadre. Pour cette raison, la vitesse d'injection est ici, sauf quand elle est nulle, un paramètre

1. ou « tobogoutte ».

mesuré et non imposé.

I.3 – Capturer l'image d'un film de savon

Cette étude repose largement sur des prises de vue des films de savon par deux caméras : une sur le côté, filmant le profil du film, et une sur le dessus, projetant tout le système sur le plan horizontal (*cf.* figure I.5). Des traitements automatisés prennent en charge les images ainsi obtenues pour en extraire des données exploitables.

I.3.1 Vue de profil : identifier la silhouette du film

Pour récupérer correctement le profil du film de savon, il convient d'avoir un bon contraste d'image, comme sur la figure I.8 qui montre une vue de la caméra de profil (une Alvim 1800 U-508c munie d'un objectif de 100 mm). Placer le film devant un fond uni ne permet pas cela ; on va donc placer, derrière le film, un fond noir, et juste en-dessous de ce fond un second fond blanc. Pour peu que la séparation noir/blanc soit assez haute, assez proche du film, ce dernier prendra la couleur blanche du fond inférieur, et se démarquera bien sur le fond noir. Il suffit alors de s'assurer que, sur l'image capturée, la zone claire du fond ne touche pas celle du film de savon, et tout le profil de ce dernier se trouve alors en zone contrastée.

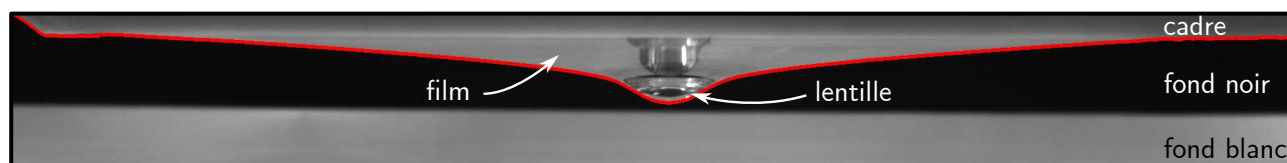


FIGURE I.8 – Vue de profil d'un film supportant une lentille de 23 mg. L'échelle est donnée par le cadre, de diamètre intérieur 100 mm. La ligne rouge marque la détection automatique du profil.

Le rapport d'aspect longueur / largeur de telles images est considérable. Le capteur de la caméra étant carré, cela limite forcément leur résolution verticale ($50 \mu\text{m}/\text{px}$). Or, pour tracer correctement un profil, il est parfois nécessaire de résoudre sur la dizaine de micromètres, sous peine d'avoir des courbes sévèrement discrétisées. Un zoom sur l'espace central (pour une étude approfondie de la lentille) nous a permis d'obtenir une résolution de $8 \mu\text{m}/\text{px}$, ce qui a quelque peu amélioré la situation. Cette amélioration n'est pas parfaite ; même les expériences se basant sur cette méthode peuvent avoir quelques soucis de fiabilité pour les très faibles déformations du film, typiquement quand la lentille qu'elle supporte pèse moins de 20 mg. C'est sous cette masse en effet que les mesures commencent à exhiber une grande dispersion.

Les images obtenues, telles que celle de la figure I.8, sont ensuite traitées automatiquement via un programme en langage Julia. Ce dernier, ayant binarisé l'image, effectue une détection des contours. Puis, en partant du bas, il retire celui du fond blanc et s'arrête sur le contour du film, qu'il peut ensuite transformer en données de position connaissant l'échelle de l'image. Le code complet est donné en annexe B.

I.3.2 Vue du dessus : identifier les lentilles

La caméra effectuant les prises de vue du dessus est une IDS U3-30C0CP-M-GL, munie d'un objectif de même marque et de focale 16 mm. L'éclairage, par dessous, est fourni par une source continue Phlox-LedW-BL. Les figures I.9.a et b montrent des images capturées par ce dispositif.

Sur ces images, un élément saute aux yeux : la présence d'un motif géométrique répété aléatoirement, appelé *speckle*. Il sert à souligner les déformations du film et révéler la présence de la lentille, très difficile à discerner sur un fond uni. Le speckle de la figure I.9.a est grossier, et très adapté à l'œil humain. C'est avec celui-ci que l'on démontre au mieux les mouvements de la lentille et les formes qu'elle peut adopter, bien que le rendu fixe de la figure ne lui rende pas parfaitement hommage. Celui de la figure I.9.b est nettement plus resserré, et est particulièrement adapté au traitement informatique. Ce dernier peut se faire de deux façons différentes que nous allons détailler ici : la détection des zones floues (fig. I.9c) ou le Background Oriented Schlieren (fig. I.9d).

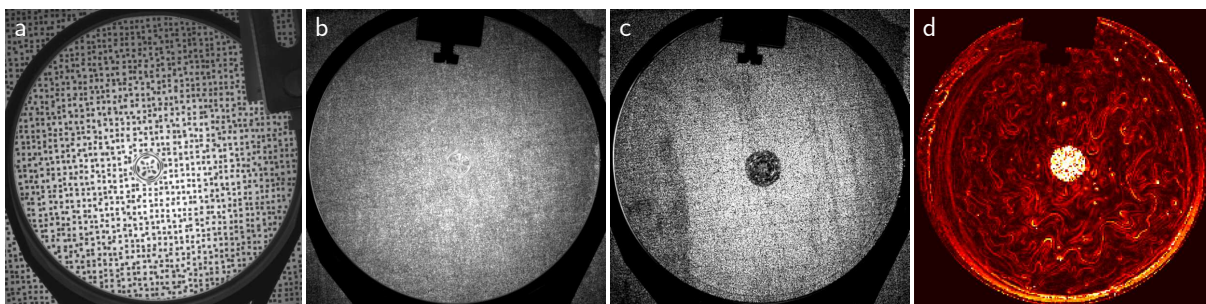


FIGURE I.9 – Lentille de 28 mg au repos sur un film de savon, vue du dessus. En **a**, avec un speckle large, pertinent pour une démonstration en direct. En **b**, avec un speckle fin, adapté au traitement automatique. Les images **c** et **d** sont deux traitements de **b**, respectivement après application de l'écart-type du laplacien sur une fenêtre glissante, et par la méthode du background oriented schlieren, via le programme ComBOS.

Détection des zones floues

Cette première méthode sert principalement à détecter les positions des lentilles, sans plus entrer dans les détails. L'un des résultats qu'elle génère, obtenu via le logiciel ImageJ muni du plug-in FeatureJ, est présenté en figure I.9c, où l'on voit la lentille clairement ressortir en noir sur le reste du film.

Observons la figure I.10a, qui est une photographie de lentille en mouvement sur un film de savon, sans traitement d'image. A l'endroit de la lentille, on peut remarquer que le fond – partout ailleurs raisonnablement détaillé et net – devient flou, brouillé : les rayons lumineux qui en proviennent sont déviés par la forme, justement rappelant une lentille optique, de l'objet.

Le principe pour détecter automatiquement la lentille repose ici sur la définition du flou sur une image : nous recherchons une zone où les contours sont peu marqués, c'est-à-dire où les gradients d'intensité sont faibles. Nous commençons donc par utiliser le filtre laplacien qui, sur une image, permet la détection de contours en évaluant les gradients d'intensité lumineuse [56]. Notre fond étant détaillé, les zones nettes auront ainsi une profusion de contours dessinés. Les zones floues, elles, n'auront que peu de contours, donc une zone nettement plus homogène

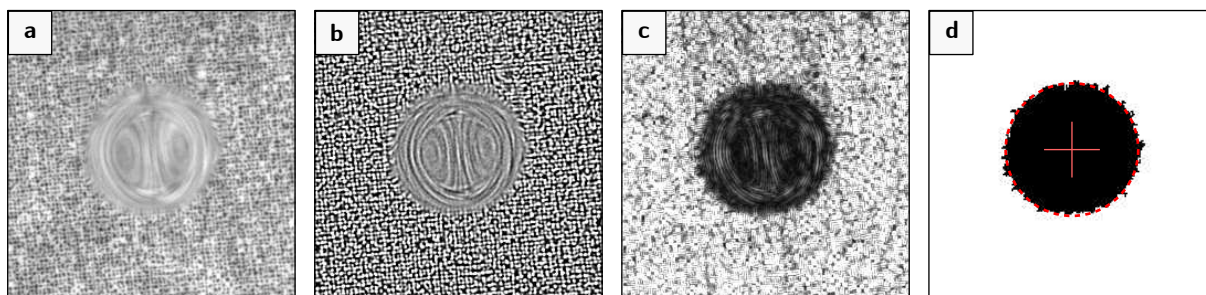


FIGURE I.10 – *Etapes de détection d'une lentille, sur un zoom de la figure I.9b. En a : vue naturelle, non traitée. En b, le résultat après application du filtre laplacien. En c, le résultat d'un écart-type glissant effectué sur b et, en d, l'image c binarisée, après avoir supprimé les petites particules et comblé les petits trous (de l'ordre de 5 px sur 5 px max), avec en rouge une illustration de la détection du blob.*

que le reste de l'image. Sur la figure I.10, l'image **b** montre le résultat de l'application de ce filtre sur l'image naturelle **a**.

Pour mettre en évidence ces zones homogènes, il suffit alors de faire un écart-type glissant sur l'image, comme représenté sur la figure I.11. Le résultat, élevé dans les zones ayant une haute densité de contours, sera bas dans les zones avec peu de variations, donc peu de contours, donc floues. C'est ce que l'on voit en figure I.10.c.

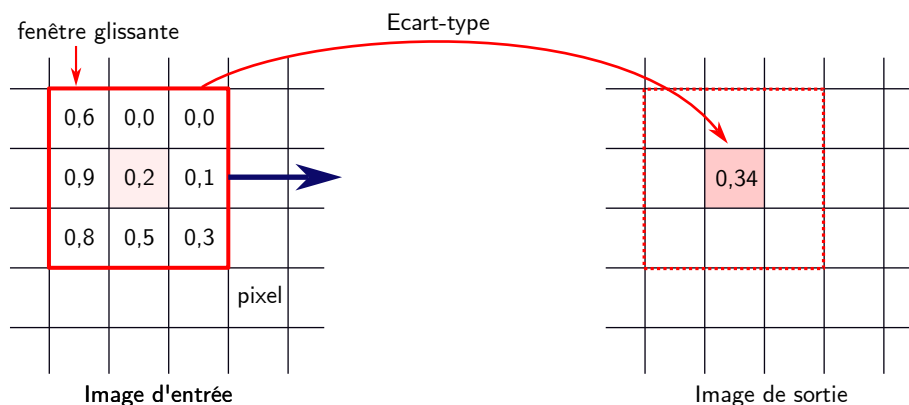


FIGURE I.11 – *Principe de l'écart-type glissant. Une image étant une matrice de pixels, on fait glisser une fenêtre sur chacun d'eux, ayant une certaine étendue. L'écart-type de tous les pixels englobés dans cette fenêtre (en rouge) est alors reportée dans une image de sortie au pixel occupant le centre de cette fenêtre.*

Par la suite, on utilise le programme de détection de blobs² `blob_Log`, de la librairie `Images` du langage Julia [57], sur l'image seuillée. Ces blobs, assimilés à nos lentilles, sont suivis au moyen de leurs centroïdes, donnant ainsi accès à leurs trajectoires (figure I.10d). Il convient de signaler que la position exacte des centroïdes, prise sur des images binarisées, peut donner lieu à des incertitudes d'autant plus élevées que le blob est étendu. Cela se retrouve notamment dans les mesures de vitesse, très sensibles aux erreurs de position.

L'implémentation de cette procédure dans le langage Julia et les programmes supplémentaires permettant de tracer et d'identifier les lentilles détectées sont donnés dans l'annexe C.

Un développement intéressant de la détection de lentilles serait de remplacer la procédure détaillée ci-dessus par un réseau de neurones entraîné à reconnaître les lentilles. Ceci pourrait

². Le *Cambridge English Dictionary* définit le « blob » comme "a fat, round drop, usually of something sticky or thick". Pour nous, il s'agit simplement d'une tâche connexe de taille suffisante dans une image binaire.

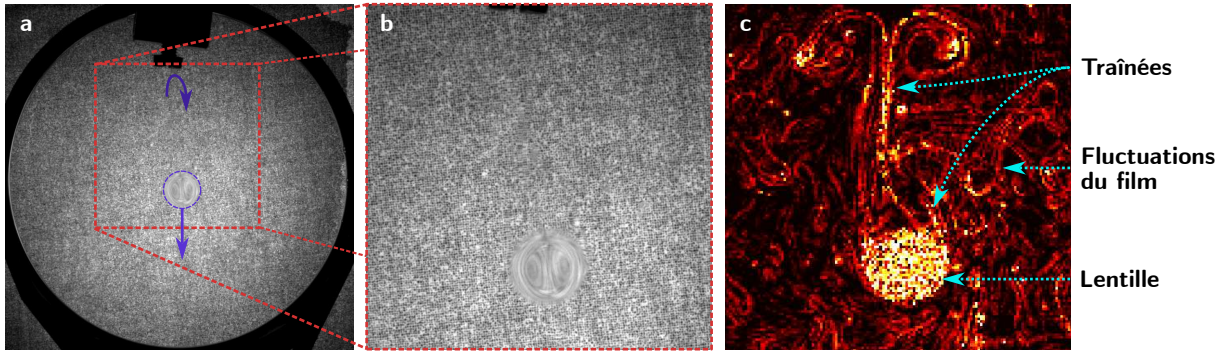


FIGURE I.12 – Résultats d'un traitement par background oriented schlieren. En **a**, l'image originale, dont un agrandissement autour de la lentille est donné en **b**. La lentille, après avoir fait demi-tour en haut de l'image, est en train de se déplacer vers le bas (flèches bleues). En **c**, le traitement de **b** par BOS. La couleur indique le degré de déformation du fond en speckle par rapport à une image de référence, prise sans lentille.

faire gagner un temps précieux lors du traitement des données expérimentales, moyennant une phase préalable d'étiquetage et d'apprentissage du programme.

Background Oriented Schlieren

Le Background oriented schlieren, ou BOS, est une technique de traitement d'image visant à évaluer les modifications de propriété d'un milieu au cours du temps (indice optique, épaisseur, interface entre deux fluides) en se basant sur la déformation d'un fond composé de taches aléatoirement réparties – notre speckle. Elle fut proposée par Moisy pour suivre les déformations d'interface entre deux fluides [58]. Nous utilisons pour cela le module Matlab ComBOS, développé par Mercier et Lacassagne [59].

Cette technique compare une image à traiter à une image de référence, mettant en évidence les variations entre les deux. Plus le speckle (image tachetée) en fond est détaillé, plus la résolution du résultat peut être grande. Elle nécessite un temps d'exécution considérable pour nos vidéos d'expérience, mais offre en retour une grande précision sur les variations des interfaces d'un film. La figure I.12c offre un aperçu de ce qu'il est possible de voir avec cette technique sur une lentille en mouvement : on observe, outre des fluctuations au sein du film, ce qui ressemble à des traînées et des boucles de recirculation à l'endroit où l'objet a fait demi-tour. Pour ce qui est du détail de la lentille elle-même, malheureusement, l'effet de déformation que celle-ci induit est trop important pour permettre un traitement correct. Cependant, la forme extérieure de la lentille est bien tracée, et finalement cette méthode donne des résultats qualitativement intéressants.

Il serait possible d'extraire des données quantitatives par cette méthode, notamment pour déterminer ce qu'il se passe au niveau de ces traînées ou des fluctuations du film, mais cette idée se heurte à une difficulté majeure : on ne saurait dire avec exactitude ce qui cause les variations du motif de fond. En effet, trois paramètres peuvent jouer dans le film de savon : une inhomogénéité du liquide ou des interfaces, une déformation de l'interface inférieure du film, ou une déformation de son interface supérieure. Sans moyen de discriminer correctement ces effets, ou de les lier par quelque équation réduisant le nombre de degrés de liberté, toute analyse quantitative est impossible.

I.4 – Mesurer l'épaisseur d'un film de savon

Outre les propriétés physiques du bain duquel il est issu, un paramètre important à connaître d'un film de savon est son épaisseur, que l'on note ici ξ .

I.4.1 La couleur et l'épaisseur

L'épaisseur d'un film de savon n'est pas quelque chose que l'on peut mesurer avec une règle ou un micromètre, et son étude nécessite la mise au point de techniques particulières. Dans son traité *Opticks* (livre II, observation XVII), Newton a établi le lien entre la couleur d'un film de savon et son épaisseur, publiant une échelle de teintes tenant lieu de système de mesure comparatif³ : en identifiant la couleur observée à cette échelle, on peut connaître l'épaisseur du film que l'on observe [60]. Une version de cette échelle, établie sur un film drainant verticalement, est montrée en figure I.13.

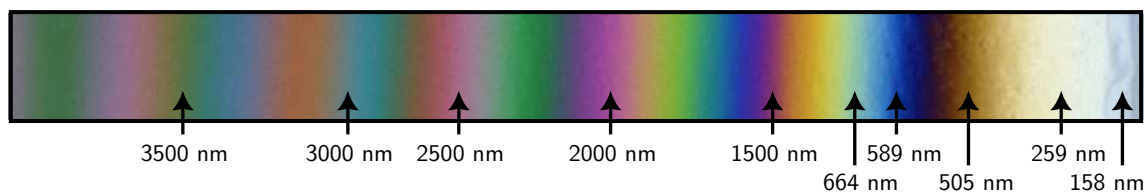


FIGURE I.13 – *Echelle des teintes calquée sur celle de Newton, prise sur un film vertical en cours de drainage (la direction verticale, vers le haut, est vers la droite dans l'image). Les dimensions données correspondent à l'épaisseur du film en chacun des points désignés.*

La comparaison visuelle n'étant pas très précise, l'identification de l'épaisseur d'un film de savon à la couleur qu'il réfléchit fut par la suite considérablement améliorée avec les progrès de l'interférométrie, donnant lieu à des méthodes d'analyse automatique de l'épaisseur d'un film sous lumière visible, que ce soit avec une caméra RVB [61] ou avec un spectromètre. Dû à la difficulté de mettre en œuvre une analyse avec un capteur RVB – il faut prendre en compte les spécificités du capteur, notamment son efficacité quantique pour la réception des trois couleurs, et gérer les normes d'encodage numérique de la couleur – nous aurons recours à un spectromètre pour mener nos analyses.

I.4.2 Mesure par interférométrie

Principe de la mesure

Les couleurs visibles sur l'échelle de Newton sont causées par les interférences des rayons lumineux réfléchis (ou transmis) par les deux interfaces du film, comme dans la situation décrite en figure I.14. Si l'on observe ainsi en réflexion un film éclairé par une source d'intensité $I_0(\lambda)$ – il est conseillé d'utiliser une source d'étendue plus grande que le film ; ce dernier agissant en miroir, une source plus petite causera des zones non éclairées – l'intensité lumineuse reçue par

3. Newton a établi son échelle en observant la couleur qui se réfléchissait sur une lame d'eau dont il contrôlait l'épaisseur avec une lumière incidente blanche. Les résultats ont été ensuite extrapolés aux films de savon.

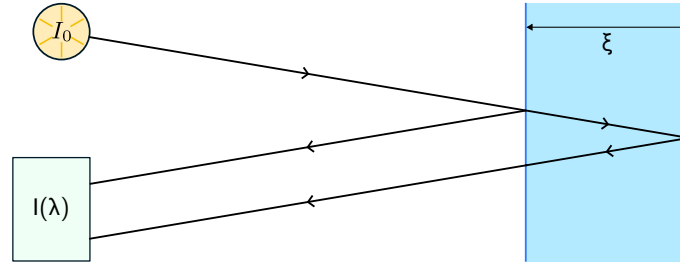


FIGURE I.14 – *Interférences lumineuses par réflexion sur un film de savon. Les rayons émis par la source S sont réfléchis sur chaque interface du film. En fonction de l'épaisseur ξ , les interférences résultantes affecteront diverses longueurs d'onde, identifiées par le spectromètre.*

l'observateur en incidence normale sera de la forme [41] :

$$I(\lambda) = \mathcal{R} I_0(\lambda) \cdot \left[1 - \cos \left(\frac{4\pi n \xi}{\lambda} \right) \right]$$

en comptant une seule réflexion des rayons lumineux sur le film. En comptant tous les rayons revenant vers la source, parfois après plusieurs réflexions au sein du film, on obtient [46] :

$$I(\lambda) = I_0(\lambda) \cdot \frac{4\mathcal{R} \sin^2 \left(\frac{2\pi n \xi}{\lambda} \right)}{(1 - \mathcal{R})^2 + 4\mathcal{R} \sin^2 \left(\frac{2\pi n \xi}{\lambda} \right)}$$

où \mathcal{R} est le coefficient de réflexion en intensité : $\mathcal{R} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$, et n désigne l'indice optique du film de savon. On le prendra égal à celui d'un mélange eau/glycérine à 24 %m et à 20°C, soit 1,36 (contre 1,31 pour l'eau) [62]. En effet, des mesures d'une solution de SDS entre 0 et 20 mmol/L ont montré une augmentation de l'indice avec la concentration de tensioactif [63], de 1,311 à 1,312, soit une variation négligeable devant l'effet de la glycérine.

Notons $\kappa = 1/\lambda$ le nombre d'onde. Que l'on prenne l'une ou l'autre de ces équations, le spectre se révèle être un signal périodique suivant κ , de pulsation $\omega_\kappa = 4\pi n \xi$. Pour récupérer l'épaisseur d'un film de savon, il faut donc réaliser le spectre du spectre lumineux $I(\lambda)$ qu'il renvoie en réflexion ou, pour des raisons d'échantillonnage irrégulier du spectre par le spectromètre, son périodogramme suivant la méthode de Lomb-Scargle [64, 65, 66]. On peut alors en extraire l'épaisseur :

$$\xi = \frac{\omega_\kappa}{4\pi n}. \quad (\text{I.1})$$

Spectromètre et installation

On utilise pour les mesures un spectromètre miniature *FLAME* d'Ocean Optics relié par fibre optique à une sonde, qui combine les fonctions d'éclairage et de réception de la lumière. La sonde est placée juste au-dessus du film de savon, en incidence normale. Elle est attachée à un chariot mobile sur rail, commandé par un moteur pas-à-pas via un système vis-écrou, qui permet de lui faire balayer tout un diamètre du film (voir la figure I.15). Le détail du moteur et de sa commande est disponible en annexe D. Le code python gérant le moteur, est retranscrit dans l'annexe E, tandis que celui contrôlant le spectromètre via le module *seabreeze* et traitant les données récoltées est en annexe F.

Traiter directement le spectre mesuré par l'appareil ne suffit pas pour obtenir un résultat exploitable. Il faut en effet tenir compte du signal capté par l'appareil sans source lumineuse

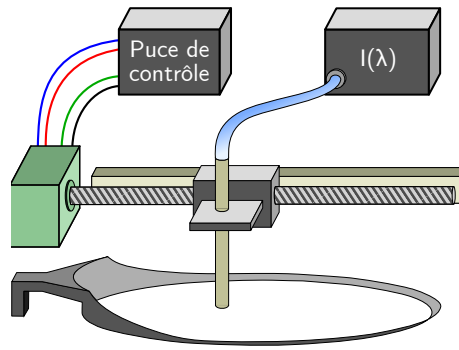


FIGURE I.15 – Schéma de l'installation pour le spectromètre $I(\lambda)$, relié par une fibre optique (en bleu) à sa sonde maintenue au-dessus du film de savon. Le moteur activant la vis pour déplacer la sonde le long d'un diamètre du film est représenté en vert.

incidente (signal noir, noté $D(\lambda)$), ainsi que de la forme du spectre émis par la source lumineuse (signal de référence, noté S_{ref}). Le spectre noir est mesuré à lumière ambiante, mais en éteignant la lampe du spectromètre. Le spectre de référence est celui mesuré en pointant la sonde sur un wafer de silicium, qui fait office de miroir. Avec ces signaux, on peut recomposer la réponse du spectromètre :

$$R(\lambda) = \frac{S_{\text{ref}}(\lambda) - D(\lambda)}{I_0(\lambda)}$$

où $I_0(\lambda)$ est, rappelons-le, le spectre théorique de la lampe. Notre étude ne demandant pas une précision particulière concernant les intensités effectives réfléchies (on se concentre, comme dit précédemment, sur la périodicité du spectre), il fut arbitrairement choisi uniforme pour plus de simplicité. Connaissant cette réponse, on peut récupérer le spectre réfléchi par le film $I(\lambda)$ à partir du signal brut reçu $S(\lambda)$ via la formule :

$$I(\lambda) = \frac{S(\lambda) - D(\lambda)}{R(\lambda)}.$$

C'est ce spectre $I(\lambda)$ qui est analysé, comme décrit précédemment, par un périodogramme pour y lire l'épaisseur du film de savon.

Il reste à signaler un souci particulier de cette méthode, qui survient lorsqu'on s'intéresse à la distance qu'on laisse entre la sonde et le film. Si elle est trop grande, le signal se perdra ; mais si la sonde se trouve trop près du film, le déplacement d'air causé par son mouvement pourra interférer avec lui. Pour des sondes rapprochées et une grande vitesse d'avance, nous avons en effet pu observer une sorte de traînée visqueuse dans les irisations, et donc dans le profil d'épaisseur, qui suivait la sonde dans son parcours. En l'absence de système de réglage précis de l'écartement film/sonde, il a fallu se contenter de placer cette dernière le plus loin possible de la surface liquide sans pour autant perdre le signal du spectromètre, et baisser au maximum la vitesse de déplacement tout en permettant de relever un profil d'épaisseurs sur un diamètre en moins de 30 secondes.

Epaisseur moyenne estimée

Avec un tel dispositif, il n'est pas aisé de prendre le profil d'épaisseur du film à tout instant, ni à chaque expérience. En effet, poser une lentille sur le film de savon pendant une mesure d'épaisseur éloigne le film de la sonde, ce qui cause une détérioration voire une perte du signal si la lentille est trop massive. Adapter la hauteur de la sonde, en la descendant, l'expose

au contact avec le film en cas de déplacement de la lentille, contact qui empêche alors toute mesure. C'est pourquoi, afin de donner une indication de la masse liquide embarquée dans le film, nous utiliserons l'ordre de grandeur suivant, déterminé en section II.1.1 :

$$\xi \approx 15 \text{ }\mu\text{m}.$$

Chapitre II

Réaction du film à la présence d'une lentille

A présent que les bases de l'étude sont posées, nous pouvons nous pencher sur le cas le plus fondamental : le cas statique où une lentille se tient immobile sur son film de savon. Nous pourrions ainsi caractériser ce système que l'on se propose d'étudier de façon dynamique par la suite.

II.1 – Evolution temporelle du système

La première étape dans cette caractérisation du système film de savon / lentille est de cerner les échelles de temps de son évolution. Nous allons montrer dans cette section que celle-ci, bien existante, est toutefois très lente par rapport aux durées qui nous intéresseront plus tard, nous permettant de placer lentille et film dans le cadre d'une dynamique quasi-statique. Cette évolution sera mesurée au moyen de deux paramètres : l'épaisseur du film, témoin de l'évaporation, du drainage et de la succion capillaire au sein de celui-ci, et la profondeur verticale maximale atteinte par le film au niveau de la lentille. Tout au long de cette partie, nous considérerons des films de savon tirés selon les méthodes détaillées au chapitre précédent, au centre desquels nous déposons une lentille d'eau qui reste au repos. Nous supposerons que nos films de savon sont axisymétriques.

II.1.1 Evolution de l'épaisseur

Une image générale de l'épaisseur du film

Avant de considérer l'évolution de l'épaisseur du film de savon, jetons un œil à son allure générale pour se faire une idée de ce qui s'y passe. Une vision globale, à l'échelle du film entier, est permise par une photographie en couleur, prise du dessus comme sur la figure II.1. En effet, comme nous l'avons expliqué en section I.4, la couleur d'un film de savon est directement liée à son épaisseur. De rapides changements dans la couleur témoignent d'importants gradients d'épaisseur, tandis qu'une couleur homogène souligne l'homogénéité de ce paramètre. Ainsi, sur

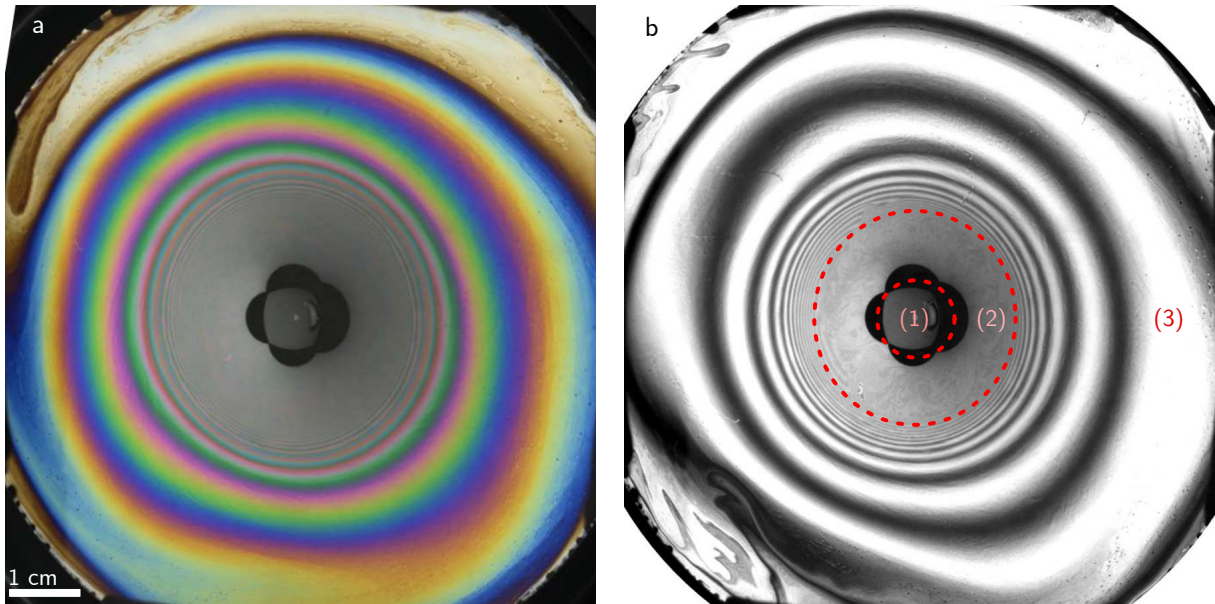


FIGURE II.1 – Photographie en couleur d'un film de savon avec une lentille au centre. On peut diviser le film en trois zones : la lentille au centre (1), entourée de lobes noirs dus aux dimensions limitées de la source lumineuse, une zone de régénération qui l'entoure directement (2), et le reste du film, où l'épaisseur varie régulièrement (3). La figure **b** montre le canal rouge de l'image complète **a**, pour plus de clarté sur ces trois zones.

la figure II.1, notamment en **b**, sur le canal rouge de l'image, on peut diviser le film de savon en trois zones : la lentille (1), la zone extérieure (3) où l'épaisseur augmente graduellement et de façon relativement axisymétrique vers le centre – on reconnaît sur un rayon l'échelle des teintes de Newton dont on a montré un exemple au chapitre précédent – et une zone intermédiaire (2) nettement plus chaotique. On peut y voir une zone de régénération marginale entre les bords de la lentille et le reste du film [51]. La présence de ce phénomène d'échange de matière montre que notre système n'est pas à l'équilibre, et que même l'état que nous considérons « au repos » – la lentille est immobile au centre du film – abrite une évolution. Notamment, des expériences préliminaires par Amandine Lechantre ont conduit à l'observation d'un déclenchement soudain de ces échanges, qui suggère l'existence d'un seuil dont les paramètres sont encore à déterminer.

Il pourrait être intéressant de faire un suivi précis de l'épaisseur sur toute la surface du film en utilisant une caméra hyperspectrale ; pour l'heure, nous nous contenterons d'investiguer les échelles de temps de l'évolution de l'épaisseur sur un seul diamètre du film, à l'aide d'un spectromètre ponctuel.

Evolution sur un diamètre

En utilisant le dispositif détaillé en section I.4, on peut dresser la courbe de l'épaisseur d'un film de savon le long d'un de ses diamètres. En prenant plusieurs courbes à différents instants comme sur la figure II.2, on peut évaluer l'évolution temporelle de ce paramètre. La zone centrale de ces courbes, autour de $r = 50$ mm, correspond à l'emplacement de la lentille, où l'épaisseur augmente considérablement par rapport au reste du film. Malheureusement, cette région est rapidement trop épaisse pour que la méthode par interférométrie donne encore des résultats. On peut toutefois constater, autour de la lentille centrale, une légère augmentation de l'épaisseur à mesure qu'on approche du centre.

Concernant l'évolution temporelle, on voit sur la figure II.2 que les abords de la lentille

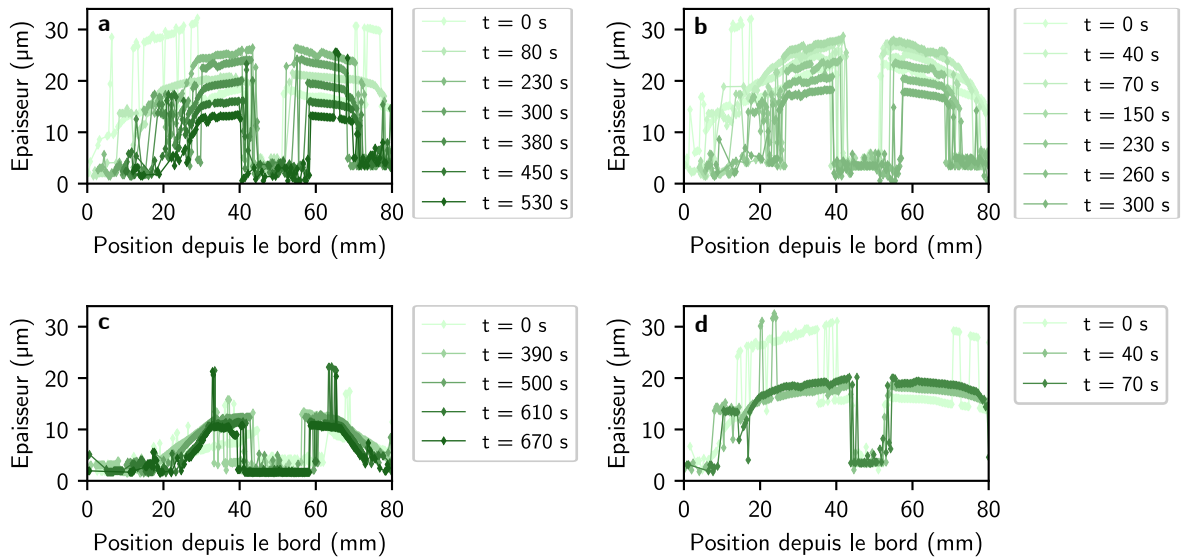


FIGURE II.2 – Courbes d'épaisseur d'un film de savon chargé d'une lentille de 28 mg le long d'un diamètre (zoomé sur le centre, autour de 50 mm), chaque courbe correspondant à un temps donné. La zone centrale contient la lentille, et son épaisseur dépasse souvent les capacités de mesure du dispositif. Il s'agit des mêmes conditions expérimentales, répétées quatre fois.

ont d'abord tendance à s'épaissir. Puis, au bout d'un certain temps allant de 70 à 400 secondes, la dynamique s'inverse et le film s'affine, probablement sous l'effet de l'évaporation.

La première accumulation de liquide peut provenir de deux endroits (la fraction de glycérol dans le liquide de base est trop faible pour supposer qu'elle vienne de l'humidité ambiante) : les bords du film qui se videraient par effet de drainage, ou la lentille elle-même qui se disperserait aux alentours par un phénomène de succion capillaire. Les mesures actuelles ne permettent malheureusement pas de conclure sur la prédominance d'un effet sur l'autre.

Toutefois, il reste possible d'observer les intervalles de temps en jeu dans cette évolution : en 30 s, on peut raisonnablement supposer que le profil d'épaisseur ne change pas. En outre, on voit que supposer une épaisseur de film homogène est assez ambitieux. Néanmoins, en acceptant de passer outre des variations de l'ordre de 5 à 10 μm , on peut prendre, comme annoncé à la fin du chapitre précédent, l'ordre de grandeur d'épaisseur

$$\xi \approx 15 \mu\text{m} . \quad (\text{II.1})$$

Cette valeur est prise arbitrairement dans l'intervalle des épaisseurs observées, et correspond généralement à l'épaisseur moyenne visible sur la figure II.2. Elle a également l'avantage, une fois injectée dans les modèles des chapitres suivants, de donner des résultats proches des observations.

II.1.2 Evolution du profil

A présent que nous avons regardé les variations d'épaisseur au sein d'un film, nous pouvons nous pencher sur l'autre aspect dynamique que nous avons identifié : son profil d'altitude, avec sa profondeur maximale. Ce suivi est réalisé grâce à la caméra de côté présentée en I.3.1, qui prend régulièrement des images de côté du film et identifie son contour. La superposition de

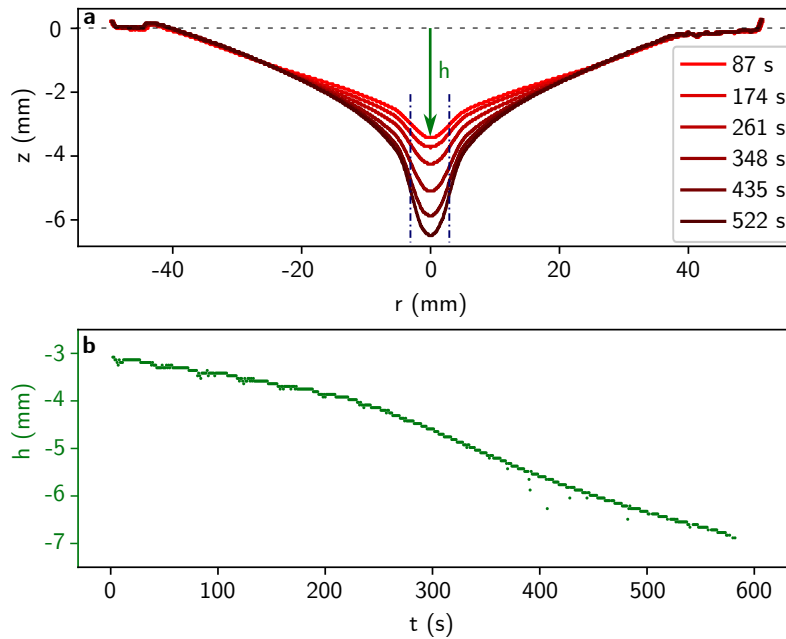


FIGURE II.3 – Evolution au cours du temps du profil d'un film supportant une lentille d'eau de 23 mg, représentatif des dynamiques observées. **a** superpose plusieurs courbes de profil obtenues en le filmant de côté. L'origine des z est la position du cadre, autour duquel la détection automatique a créé quelques artefacts visibles pour $r < -40$ mm et $r > 40$ mm. Les lignes verticales bleues montrent la position approximative des bords de la lentille. La courbe **b** trace le point le plus bas de ces profils, d'altitude h , en fonction du temps.

ces contours au fil du temps est montrée en figure II.3, pour un film supportant une lentille d'environ 23 mg.

On y voit le film s'affaisser peu à peu et la lentille descendre, dans un premier temps avec une vitesse d'environ $4 \mu\text{m/s}$ avant d'adopter, vers 240 s, une vitesse d'environ $10 \mu\text{m/s}$. Dans ce dernier cas, soit pour la dynamique la plus rapide, l'échelle de temps nécessaire pour observer un abaissement du film de 1 mm est de l'ordre de 100 s. Si l'on considère des expériences de l'ordre de la minute, voire de la dizaine de secondes comme ce sera le cas plus tard, on peut donc très raisonnablement considérer que le film reste statique.

Par ailleurs, sur la figure II.3, des guides verticaux placés à la main montrent les limites approximatives de la lentille, repérées par les points d'inflexion de la courbe. On peut voir qu'au cours du temps, cette région ne semble pas s'étendre sur l'axe des r , et tout le centre de la figure semble plutôt translater verticalement. Il s'agit d'un résultat intéressant qui sera repris plus tard.

D'une façon générale, l'évolution décrite ici s'applique, au moins dans les ordres de grandeur des échelles de temps, à tous les films observés, à deux exceptions près qui n'arrivent pas avec nos conditions expérimentales. La première est lorsque la lentille déposée est lourde, de l'ordre de 100 mg. Dans ce cas, le film se déstabilise et finit par lâcher une goutte d'eau, avant de se restabiliser dans le cas décrit ici, avec une relique de lentille plus légère. La deuxième exception est pour des lentilles trop légères, de l'ordre de quelques milligrammes, qui ne parviennent pas à affaisser le film. Dans ce cas, celui-ci a tendance à remonter au cours du temps, dans une dynamique de vitesse similaire à celle décrite dans cette sous-section.

II.2 – Déformation statique du film

Continuons notre observation d'une lentille immobile (ou en évolution quasi-statique) sur un film de savon, en négligeant cette fois toute évolution temporelle. Reprenant la figure I.8 du chapitre précédent, nous pouvons découper le profil en deux régions, sans pour autant en définir des frontières précises : la *lentille* elle-même avec la portion de film qui la supporte, et le reste du film (voir figure II.4), également déformé par la présence de l'objet et nommé zone *membrane*. Pour commencer l'étude sur de bonnes bases, il convient de caractériser cette déformation. Cette section présente le modèle établi à cet effet, dont la formulation mathématique a essentiellement été développée par Benjamin Reichert.

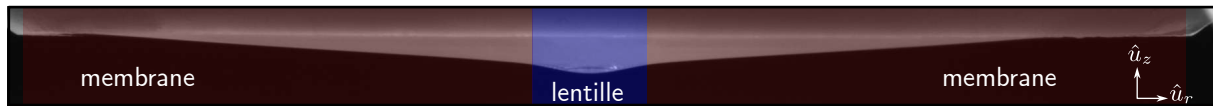


FIGURE II.4 – Vue en profil d'un film de savon avec une lentille, définissant les deux zones : au centre, la zone « lentille » ; sur les bords, la zone « film ».

Nous commencerons par traiter la zone *membrane*. Pour cela, supposer que la lentille est au centre du film n'est pas nécessaire. On la placera donc à une position \vec{r}_0 quelconque du film, ce qui sera utile par la suite. Ensuite, nous aborderons la zone *lentille* qui, elle, nécessitera de placer la lentille au centre du film ; puis nous raccorderons les deux régions. Nous finirons en comparant aux expériences les modèles issus de cette étude.

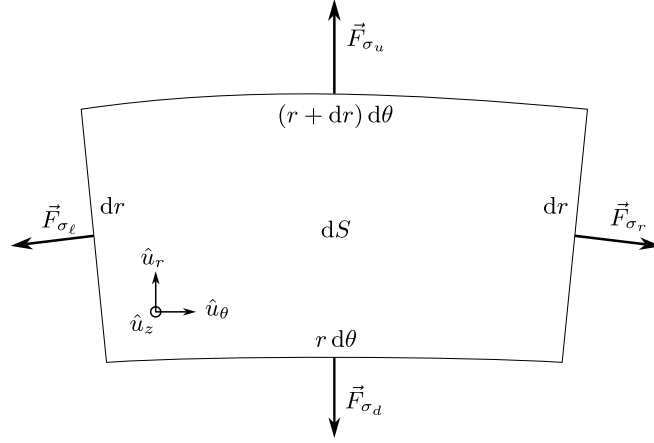
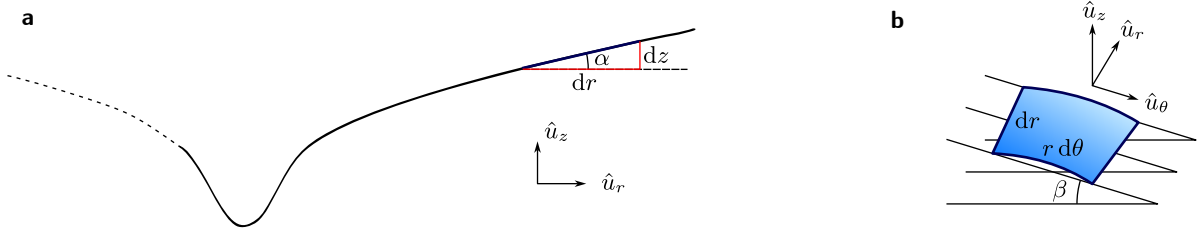
II.2.1 Analyse de la zone *membrane* : un équilibre des forces sur une portion du film

Isolons une portion dS du film comme montré en figure II.5, selon les notations qui y sont définies, au rayon r et à l'angle θ , et sur une étendue dr et $d\theta$. Suivant les vecteurs $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z$ du schéma, on peut introduire deux inclinaisons du film : une autour de \hat{u}_θ sur un angle α (inclinaison du profil d'altitude), et une autour de \hat{u}_r selon un angle β (inclinaison opposée à l'axisymétrie), illustrées dans la figure II.6. On a alors :

$$\tan \alpha = \frac{\partial z_m}{\partial r} \quad \text{et} \quad \tan \beta = \frac{1}{r} \frac{\partial z_m}{\partial \theta} . \quad (\text{II.2})$$

Commençons par étudier le cas où le film ne supporte aucune lentille. Les forces s'appliquant sur cette section sont au nombre de 5, toutes les autres étant négligées devant celles-là : le poids propre de la membrane et quatre forces de tension de surface s'appliquant chacune sur un bord de la portion. Le poids s'exprime ainsi : $\vec{P} = -\rho g \xi r dr d\theta \hat{u}_z$ où ρ est la masse volumique du film, g l'accélération de la pesanteur, et ξ l'épaisseur du film, supposée homogène et constante.

Concernant les forces de tension, σ est la tension de surface, appliquant sur chaque bord de longueur ℓ ($\ell = dr, r d\theta$ ou $[r + dr] d\theta$) d'une région une force de tension dans le plan du film, normale à sa ligne d'application, et orientée vers l'extérieur avec la norme $\sigma \ell$. Le film ayant deux interfaces, la tension effective sera de l'ordre de $2\sigma \ell$ sur la frontière d'un de ses éléments,

FIGURE II.5 – Portion de film étudiée, aux coordonnées (r, θ) .FIGURE II.6 – Illustration des angles α (en **a**) et β (en **b**) sur des portions de film de côté dr et $r d\theta$.

soit au final :

$$\begin{cases} \vec{F}_{\sigma_d} &= 2\sigma \cdot r d\theta (-\cos \alpha \hat{u}_r - \sin \alpha \hat{u}_z)|_r \\ \vec{F}_{\sigma_u} &= 2\sigma \cdot (r + dr) d\theta (\cos \alpha \hat{u}_r + \sin \alpha \hat{u}_z)|_{r+dr} \\ \vec{F}_{\sigma_\ell} &= 2\sigma \cdot dr (-\cos \beta \hat{u}_\theta - \sin \beta \hat{u}_z)|_\theta \\ \vec{F}_{\sigma_r} &= 2\sigma \cdot dr (\cos \beta \hat{u}_\theta + \sin \beta \hat{u}_z)|_{\theta+d\theta} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

On se place dans l'approximation des petits angles, de sorte que $\sin \alpha \simeq \tan \alpha = \frac{dz_m}{dr}$ et $\sin \beta \simeq \tan \beta = \frac{dz_m}{r d\theta}$. En factorisant toutes les forces par l'élément de surface $dS = r dr d\theta$, un simple principe fondamental de la statique donne, projeté sur \hat{u}_z :

$$2\sigma \left[\frac{\partial^2 z_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z_m}{\partial \theta^2} \right] dS - \rho g \xi dS = 0, \quad (\text{II.4})$$

d'où :

$$2\sigma \Delta z_m - \rho g \xi = 0. \quad (\text{II.5})$$

On reconnaît là une équation de Poisson, le terme $\rho g \xi$ étant une source de déformation du film – du moins de son altitude z – sur tous les rayons $r \in [0, R]$ due à son propre poids. On peut alors ajouter à cette équation une autre source de déformation, prenant en compte uniquement le poids de la lentille, supposée ponctuelle ici. C'est cette hypothèse qui réduit la validité de ce modèle à la zone hors du domaine de la lentille – soit aux rayons compris dans $[r_\ell, R]$, r_ℓ étant le rayon réel de celle-ci.

Pour une lentille de masse m et à la position \vec{r}_0 , ce terme source s'exprime avec la fonction de distribution de Dirac δ : $m g \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$, ce qui donne l'équation d'équilibre suivante :

$$2\sigma \Delta z_m = \rho g \xi + m g \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (\text{II.6})$$

à la position $\vec{r} = (r, \theta)$. Cette équation d'équilibre étant linéaire, on peut la résoudre en superposant deux solutions, chacune pour l'un des deux termes source. On notera donc la solution complète z_m pour l'altitude de la membrane :

$$z_m(\vec{r}) = z_f(\vec{r}) + z_\ell(\vec{r}) \quad (\text{II.7})$$

où z_f est solution du problème « film pesant sans lentille » et z_ℓ résout la situation « film sans masse avec une lentille ponctuelle » :

$$\Delta z_f = \frac{\rho g \xi}{2\sigma} \quad ; \quad \Delta z_\ell = \frac{mg}{2\sigma} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (\text{II.8})$$

Commençons par z_f . Puisque le cadre maintenant le film est circulaire, la solution affichera elle-même une symétrie circulaire, soit :

$$\frac{\partial^2 z_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_f}{\partial r} = \frac{\xi}{2\ell_c^2} \quad (\text{II.9})$$

où ℓ_c est la longueur capillaire : $\ell_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$. En évitant la divergence de l'altitude pour $r = 0$ et en assurant la condition $z = 0$ pour $r = R$, cette équation a pour solution :

$$z_f(r) = \frac{\xi}{8\ell_c^2} (r^2 - R^2). \quad (\text{II.10})$$

Passons à z_ℓ . Toujours avec $z_\ell(R) = 0$, l'équation de z_ℓ peut être transformée en :

$$\begin{cases} \Delta \frac{2\sigma}{mg} z_\ell(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ \frac{2\sigma}{mg} z_\ell(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \mid (|\vec{r}| = R) \end{cases}, \quad (\text{II.11})$$

en quoi l'on reconnaît la définition d'une fonction de Green sur un cercle de rayon R . La résolution détaillée de ce problème est disponible en annexe G et nous donne :

$$z_\ell(r, \theta) = \frac{mg}{8\pi\sigma} \cdot \ln \left[\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}{R^2 + \frac{r^2 r_0^2}{R^2} - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right], \quad (\text{II.12})$$

ce qui permet d'écrire le profil total z_m de la partie membrane du film (pour tout $r \in [r_\ell, R]$), supportant une lentille de masse m à la position \vec{r}_0 :

$$z_m(r, \theta) = \frac{mg}{8\pi\sigma} \cdot \ln \left[\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}{R^2 + \frac{r^2 r_0^2}{R^2} - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right] + \frac{\xi}{8\ell_c^2} (r^2 - R^2). \quad (\text{II.13})$$

Notons que, jusqu'ici, aucune supposition n'a été faite sur la position de la lentille, si ce n'est qu'elle est placée sur le film de savon ($r_0 < R$). Il est donc possible d'utiliser les équations II.12 et II.13 dans le cas d'une lentille en tout point du film, ce qui sera fait par la suite.

On peut simplifier cette expression, d'abord en supposant que la lentille reste toujours sur un diamètre du film ($\theta_0 \equiv \text{cte}[\pi]$), puis en restreignant l'étude à ce diamètre : $\vec{r} \in \mathcal{O}$, d'où $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \theta_0 + \pi$, ce qui nous débarrasse des cosinus. Il est important de rappeler ici que l'axisymétrie n'est toujours pas supposée, et que la lentille peut être en n'importe quel point de notre diamètre. On obtient avec cette hypothèse l'équation suivante, également utile pour la suite de l'étude :

$$z_m(\vec{r} \in \mathcal{O}) = \frac{mg}{8\pi\sigma} \cdot \ln \left[\frac{(r - r_0)^2}{(R - \frac{rr_0}{R})^2} \right] + \frac{\xi}{8\ell_c^2} (r^2 - R^2). \quad (\text{II.14})$$

Enfin, si la lentille reste sagement au centre du film ($r_0 = 0$), alors le système est axisymétrique et obéit en tout point de la partie membrane du film ($r \in [r_\ell, R]$) à l'équation suivante :

$$z_m(r) = \frac{mg}{4\pi\sigma} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{\xi}{8\ell_c^2}(r^2 - R^2). \quad (\text{II.15})$$

Sur cette équation, on identifie toujours les deux termes issus l'un de la lentille ponctuelle sur un film sans masse, l'autre d'un film massif sans lentille. Chacun de ces deux termes provient d'un équilibre entre les forces de gravitation et de tension de surface. Cet équilibre est rendu par mg et σ dans le premier terme, et ℓ_c dans le second.

II.2.2 Analyse de la zone *lentille* : un équilibre de pressions de part et d'autre du film

Passons à présent à la zone de la lentille. Pour cette partie, contrairement à la sous-section précédente, il est impératif de la placer dès le début au centre du film, soit $r_0 = 0$, ce qui nous fera étudier la zone $r \in [0, r_\ell]$. Nous nous tournons ici vers un équilibre des pressions de part et d'autre du film, dans la configuration de la figure II.7. Y sont introduites les altitudes des deux interfaces : z_u et z_d , leurs courbures \mathcal{C}_u et \mathcal{C}_d , les pressions qui règnent à leur voisinage p_u et p_d , ainsi que l'épaisseur de la lentille $e(r) = z_u(r) - z_d(r)$.

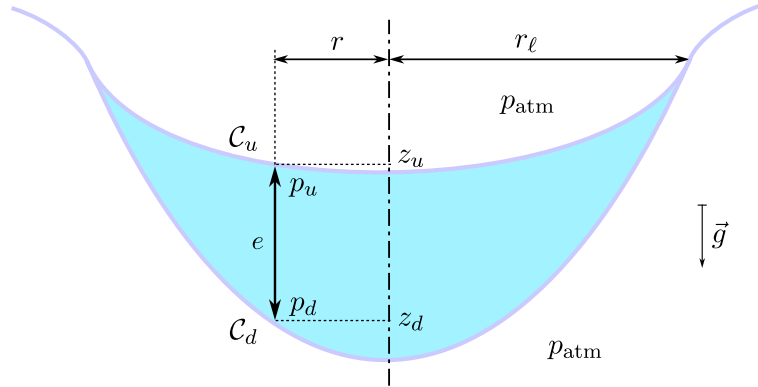


FIGURE II.7 – Schéma en coupe de la lentille, placée au centre du film. Elle présente deux interfaces, supérieure (indice u , de courbure \mathcal{C}_u) et inférieure (indice d , de courbure \mathcal{C}_d). Les dépendances en r de \mathcal{C}_u , \mathcal{C}_d , z_u , z_d , p_u , p_d , et e sont implicites pour plus de clarté.

Comme l'introduit l'annexe A, on peut effectuer l'étude du saut de pression de Laplace entre l'atmosphère environnante et l'intérieur de la lentille, au point de rayon r , via les deux interfaces, supérieure et inférieure :

$$\begin{cases} p_{\text{atm}} - p_u(r) = \sigma_\ell \mathcal{C}_u(r) \\ p_d(r) - p_{\text{atm}} = \sigma_\ell \mathcal{C}_d(r) \end{cases}, \quad (\text{II.16})$$

σ_ℓ étant la tension de surface de la lentille. Afin de lier ces deux équations entre elles, nous pouvons recourir au principe fondamental de l'hydrostatique :

$$p_d(r) = p_u(r) + \rho_\ell \cdot g \cdot e(r). \quad (\text{II.17})$$

En définissant la longueur capillaire de la lentille $\lambda_c^2 = \frac{\sigma_\ell}{\rho_\ell g}$, on peut alors obtenir :

$$\mathcal{C}_u(r) + \mathcal{C}_d(r) = \frac{e(r)}{\lambda_c^2}. \quad (\text{II.18})$$

Nous avons là une expression reliant, à une distance donnée de l'axe central du film de savon, les courbures supérieure et inférieure de la lentille, et son épaisseur. Afin de résoudre le profil de la lentille, nous allons avoir besoin d'une deuxième équation, que l'on détermine en étudiant spécifiquement la courbure inférieure.

Prenons le cas de la figure II.8, où l'on cherche à déterminer la pression $p_d(r)$ juste au-dessus de l'interface inférieure de la lentille, à distance r du centre et à l'altitude $z_d(r)$. Partant du point juste en-dessous du centre de la lentille, d'altitude $z_d(0)$, deux chemins sont possibles : en montant, puis en se déplaçant horizontalement dans le liquide (chemin 1) ou en se déplaçant dans l'air avant de monter et traverser l'interface (chemin 2). Le premier chemin nous donne l'expression :

$$p_d(r) = p_{\text{atm}} + \sigma_\ell \mathcal{C}_d^0 - \rho_\ell g [z_d(r) - z_d(0)] \quad (\text{II.19})$$

où \mathcal{C}_d^0 est la courbure de l'interface inférieure au centre du film. Le second chemin, lui, renvoie :

$$p_d(r) = p_{\text{atm}} + \sigma_\ell \mathcal{C}_d(r). \quad (\text{II.20})$$

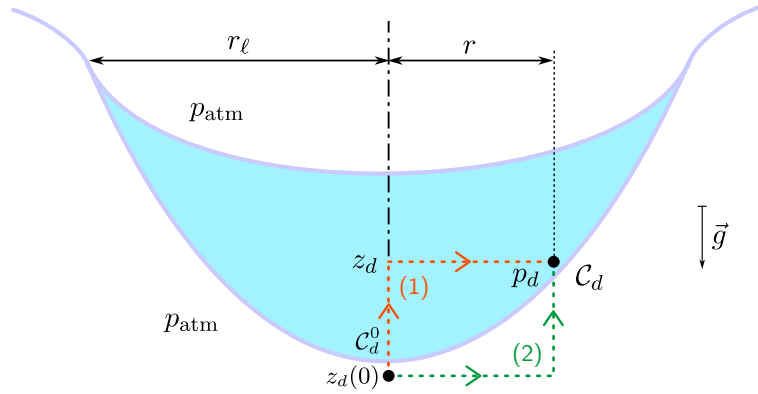


FIGURE II.8

Prenons comme expression de la courbure moyenne le laplacien, toujours axisymétrique : $\mathcal{C} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r}$. En égalisant ces deux expressions et en injectant le résultat dans l'équation II.18, on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z_u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_u}{\partial r} - \frac{z_u}{\lambda_c^2} = -K \\ \frac{\partial^2 z_d}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_d}{\partial r} + \frac{z_d}{\lambda_c^2} = K \end{cases}, \quad K = \mathcal{C}_d^0 + \frac{z_d(0)}{\lambda_c^2}. \quad (\text{II.21})$$

On reconnaît là deux équations de Bessel d'ordre 0, dont les seules solutions admissibles (z_u et z_d sont finies en $r = 0$) sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 normale et modifiée J_0 et I_0 :

$$\begin{cases} z_u(r) = A \cdot I_0\left(\frac{r}{\lambda_c}\right) + K\lambda_c^2 & ; \quad A \in \mathbb{R} \\ z_d(r) = B \cdot J_0\left(\frac{r}{\lambda_c}\right) + K\lambda_c^2 & ; \quad B \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (\text{II.22})$$

Les constantes A et B seront obtenues lors du raccordement à la partie *membrane* du film de savon.

II.2.3 Raccordement des zones et expressions finales

Reste à raccorder les équations II.15 et II.22 en $r = r_\ell$. Le film et la lentille étant miscibles, il n'y a pas de ligne triple à cet endroit, et donc aucune raison d'introduire une discontinuité dans la dérivée du profil. Nous avons donc un raccordement en valeur et en dérivée entre z_u , z_d et z_m .

Une définition du rayon de la lentille

En utilisant tour à tour les raccordements $\frac{\partial z_m}{\partial r} = \frac{\partial z_u}{\partial r}$, $z_u(r_\ell) = z_d(r_\ell)$ et $\frac{\partial z_u}{\partial r} = \frac{\partial z_d}{\partial r}$, on obtient les valeurs de A , B , ainsi que l'équation suivante, utilisant les fonctions de Bessel normale et modifiée du premier ordre J_1 et I_1 :

$$\frac{I_0(r_\ell/\lambda_c)}{I_1(r_\ell/\lambda_c)} = -\frac{J_0(r_\ell/\lambda_c)}{J_1(r_\ell/\lambda_c)}. \quad (\text{II.23})$$

Jusqu'ici, nous avons utilisé le rayon de la lentille r_ℓ sans trop le déterminer. L'équation ci-dessus en offre à présent une définition claire, qui ne dépend ni du temps (hypothèse d'équilibre), ni de la masse de la lentille, mais uniquement de sa longueur capillaire λ_c . Une résolution numérique via la méthode de Newton de l'équation II.23 en prenant $\lambda_c = 1,8$ mm (les raisons en seront données plus tard) nous donne

$$r_\ell \approx 5,8 \text{ mm}. \quad (\text{II.24})$$

Malheureusement, il est difficile de localiser précisément r_ℓ sur une observation, ce qui rend la vérification expérimentale de cette prédiction compliquée. En revanche, il est très aisé de repérer une autre distance liée à la lentille : celle entre le centre de la lentille et un point d'inflexion du profil, que nous noterons r_i . On recherche ce point dans la zone $[0, r_\ell]$, donc en annulant la dérivée seconde de $z_d(r)$. Ce faisant, on obtient l'équation suivante :

$$r_i J_0\left(\frac{r_i}{\lambda_c}\right) - \lambda_c J_1\left(\frac{r_i}{\lambda_c}\right) = 0, \quad (\text{II.25})$$

dont la résolution, toujours avec $\lambda_c = 1,8$ mm, donne :

$$r_i \approx 3,3 \text{ mm}. \quad (\text{II.26})$$

Expérimentalement, on mesure la distance $d_i = 2r_i$ entre deux points d'inflexion diamétralement opposés à partir d'une courbe de profil fournie par le dispositif de la section I.3.1. On en déduit aisément r_i , que l'on peut ensuite tracer en fonction de la masse de la lentille (figure II.9.a) ou en fonction du temps (figure II.9.b). On constate dans l'un et l'autre cas que l'évolution, si elle existe bien, n'est pas considérable. Dans le cas du suivi en fonction de la masse, la valeur théorique semble assez bien approcher l'expérience, en particulier pour des lentilles de plus de 20 mg. Pour les masses plus faibles, on observe une certaine dispersion due à la difficulté de la mesure expérimentale dans ces conditions, déjà évoquée en section I.3.1. Quant à l'évolution temporelle, on constate que les points d'inflexion se rapprochent l'un de l'autre à une vitesse d'environ $1 \mu\text{m/s}^1$ ce qui suffit sur nos durées d'expérience pour les supposer fixes.

1. C'est nettement plus lent que ce que Motaghian *et al.* prédisent dans leur étude de 2009 [32]. Pour nos conditions expérimentales (la tension de surface du liquide ajouté est supérieure à celle du film), ils affirment en effet que la lentille formée sur le film de savon est dans un régime d'extension lente, mais prédisent tout de même une augmentation de son diamètre de l'ordre de 1 mm/s indépendamment de la taille de l'objet.

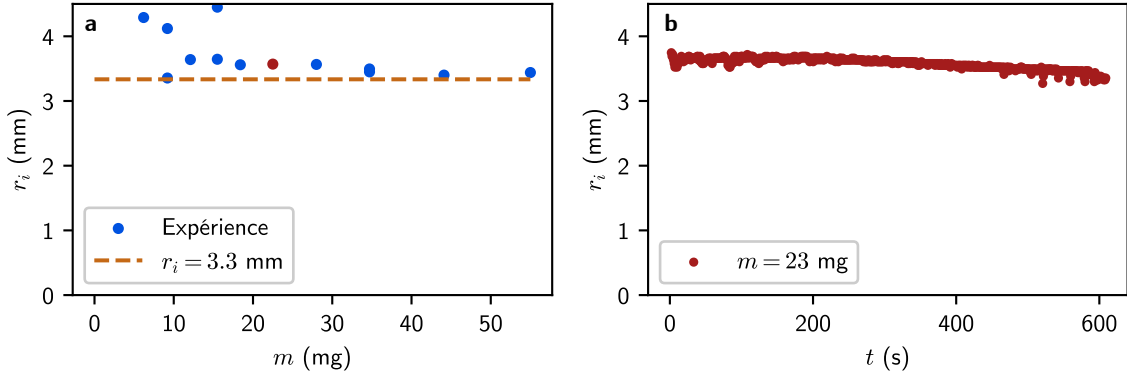


FIGURE II.9 – Evolution de la position r_i des points d'inflexion du profil proches du centre ; (a) en fonction de la masse de la lentille (à comparer à la valeur théorique tracée en ligne continue), et (b) en fonction du temps pour une lentille de 23 mg.

Profil complet du film

Mais il est temps de terminer le raccordement pour obtenir le profil complet du film de savon. Il nous reste en effet à exploiter $z_m(r_\ell) = z_u(r_\ell)$. En notant $\eta = r_\ell/\lambda_c$ et en faisant appel aux développements précédents, on obtient :

$$\lambda_c^2 K = \frac{J_0(\eta)}{J_1(\eta)} \left(\frac{mg}{4\pi\sigma\eta} + \frac{\xi\eta\lambda_c^2}{4\ell_c^2} \right) + z_m(r_\ell). \quad (\text{II.27})$$

A ce stade, il nous faut discuter de λ_c/ℓ_c . En effet, les observations ont montré une bien meilleure concordance avec les modèles établis dans cette partie lorsqu'on utilise pour λ_c la longueur capillaire du film ℓ_c plutôt que celle de l'eau qui la compose au départ. Une explication possible à ceci pourrait être qu'une fois la lentille adsorbée dans le film, les surfactants l'entoureraient presque immédiatement. Pour autant, la tension de surface du film lui-même ne changerait pas drastiquement, puisque la solution de SDS employée est bien au-delà de la concentration micellaire critique. Ainsi, les propriétés de surface de la lentille ne devraient pas changer fondamentalement de celles du film de savon. Quant à la masse volumique, qui entre aussi dans la définition de ℓ_c , elle ne diffère entre la lentille et le film que de 6 %. En remplaçant la masse volumique de la lentille par celle du film, l'erreur commise est donc très faible.

Ne serait-ce que pour des raisons de simplicité, on choisit donc de considérer désormais $\ell_c/\lambda_c = 1$. En invoquant cette relation, et en injectant ce qui précède dans les équations II.22, on obtient :

$$\begin{cases} z_m(r) = \frac{mg}{4\pi\sigma} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{\xi}{8\ell_c^2}(r^2 - R^2) & r \in [r_\ell, R] \\ z_u(r) = \frac{J_0(\eta)}{J_1(\eta)} \left(\frac{mg}{4\pi\sigma\eta} + \frac{\xi\eta}{4} \right) \left(1 - \frac{I_0(r/\ell_c)}{I_0(\eta)} \right) + z_m(r_\ell) & r \in [0, r_\ell] \\ z_d(r) = \frac{J_0(\eta)}{J_1(\eta)} \left(\frac{mg}{4\pi\sigma\eta} + \frac{\xi\eta}{4} \right) \left(1 - \frac{J_0(r/\ell_c)}{J_0(\eta)} \right) + z_m(r_\ell) & r \in [0, r_\ell] \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

où, on le rappelle, ξ est l'épaisseur du film de savon, homogène et constante, σ sa tension de surface, R son rayon (donc celui du cadre), ℓ_c sa longueur capillaire ; m est la masse de la lentille, de rayon r_ℓ , et $\eta = r_\ell/\ell_c$. La figure II.10 montre la très bonne correspondance des observations avec ce modèle. Deux ajustements sont faits sur les courbes expérimentales : une translation horizontale, spécifique à chaque courbe pour les centrer en $r = 0$, et une verticale, la même pour toutes les expériences, afin de faire correspondre les points les plus bas mesurés à ceux

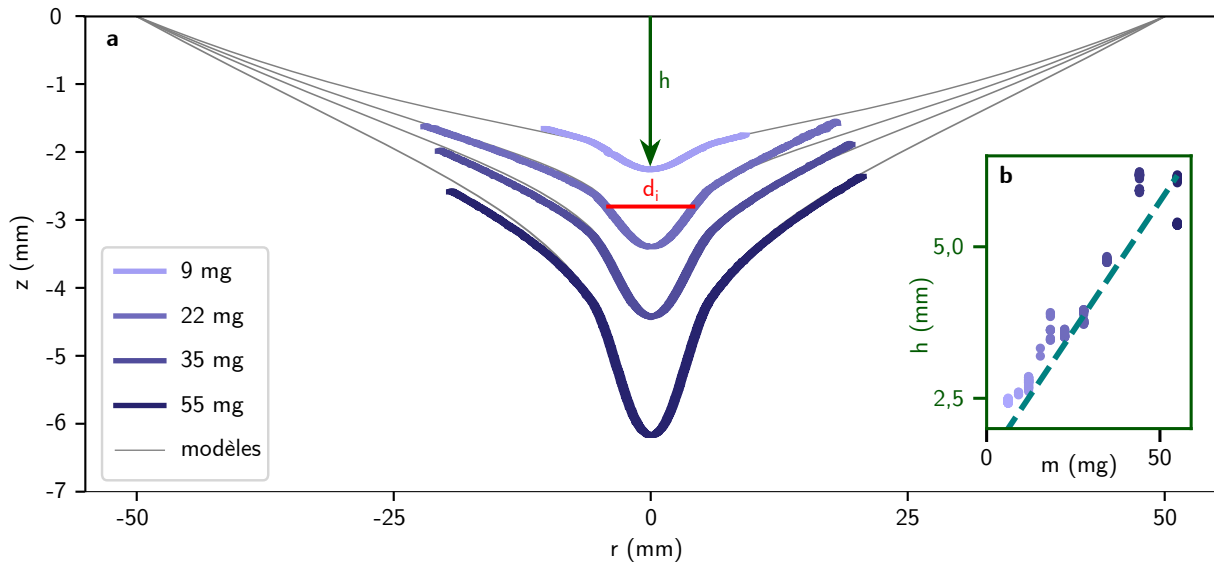


FIGURE II.10 – **a** : superposition de profils obtenus avec le modèle de l'équation II.28 (en gris) et d'observations expérimentales pour des masses correspondantes. Les seuls ajustements opérés sur les courbes expérimentales sont une translation horizontale pour aligner leurs points les plus bas avec $r = 0$, et une translation verticale globale de toutes les courbes par une seule et même valeur, afin de faire correspondre le minimum d'une seule expérience à celui de son modèle. Encart **b** : évolution du point le plus bas des profils observés et ainsi translatés, en fonction de la masse de la lentille. Le modèle $z_d(0)$ est tracé en traitillés.

des prédictions. Pour chaque masse de lentille, plusieurs profils ont été observés mais, par souci de clarté, un seul (représentatif de ce qui est observé) a été tracé. On note quelques asymétries sur les points les plus éloignés du centre : cela est probablement dû à de légers défauts dans l'horizontalité du film ou de la caméra. Ces défauts de très faible ampleur sont difficiles à éviter lors des manipulations, tous les réglages étant faits à la main. D'une façon générale cependant, la superposition expérience/modèle est excellente.

L'encart **b** de la figure montre d'ailleurs l'évolution des points les plus bas des courbes expérimentales en fonction de la masse de la lentille. Ils se superposent de façon très satisfaisante à la droite en traitillés, simple évaluation du modèle $z_d(r = 0)$.

Vers une étude du mouvement

Nous disposons à présent d'une description formelle de la déformation d'un film de savon lorsqu'il supporte une lentille, très correctement soutenue par l'expérience. Cette description est valable pour des lentilles immobiles sur des durées de l'ordre de la minute, le système film/lentille étant alors considéré sans évolution. Cependant, il est aussi possible de s'appuyer dessus pour une lentille en mouvement, tant que celui-ci se fait de façon quasi-statique. C'est ce que nous allons pouvoir faire, en considérant pour commencer le mouvement d'une seule lentille sur un film de savon.

Chapitre III

Comportement et dynamique d'une lentille unique

Après l'étude statique, nous nous tournons à présent vers le mouvement d'une lentille déposée sur le bord d'un film de savon, sans, puis avec une vitesse tangentielle initiale. Dans le premier cas, la lentille se mettra en mouvement sous l'effet d'un champ de potentiel que nous déterminerons. Elle adoptera alors une trajectoire radiale qui nous fournira de précieuses informations sur sa dynamique. Dans le second cas, la lentille est forcée hors de cette trajectoire radiale. Toujours sous l'influence du champ de potentiel, elle parcourra tout le film de savon selon une trajectoire orbitale, que nous pourrions modéliser.

Dans la direction verticale, on néglige les forces d'inertie de la lentille et du film devant celles de gravitation et de tension de surface employées dans l'équilibre II.6. On peut donc supposer que le système y évolue de façon quasi-statique, dans une succession d'états d'équilibre. De plus, nous supposons qu'aucun effet d'inertie provenant du liquide composant le film lui-même n'agit sur la lentille. Sous ces deux hypothèses, nous pouvons garder valides les équations obtenues au chapitre précédent pour le profil du film supportant une lentille, au moins pour sa composante *membrane* (zone de définition de z_m , excluant la lentille). Dans le cadre de cette hypothèse, et bien que le liquide du film et celui de la lentille soient miscibles, les modèles établis au cours de cette section négligeront tout effet de mixtion entre les deux objets.

III.1 – Mouvement radial d'une lentille liquide sur un film circulaire

Pour donner un mouvement radial à la lentille, le plus simple est de la déposer sans vitesse initiale près du bord du film de savon. La trajectoire de la lentille peut alors se décomposer en deux plans, l'un vertical (\hat{u}_r, \hat{u}_z) et l'autre horizontal ($\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$), comme détaillé en figure III.1. Nous étudierons la dynamique de la lentille dans les deux plans, à commencer par le vertical.

Au cours de cette section, nous parlerons de « passages » de la lentille sur le film. Nous entendons par là la trajectoire suivie par la lentille le long d'un diamètre du film, entre deux demi-tours. Un aller-retour de la lentille est donc composé de deux passages.

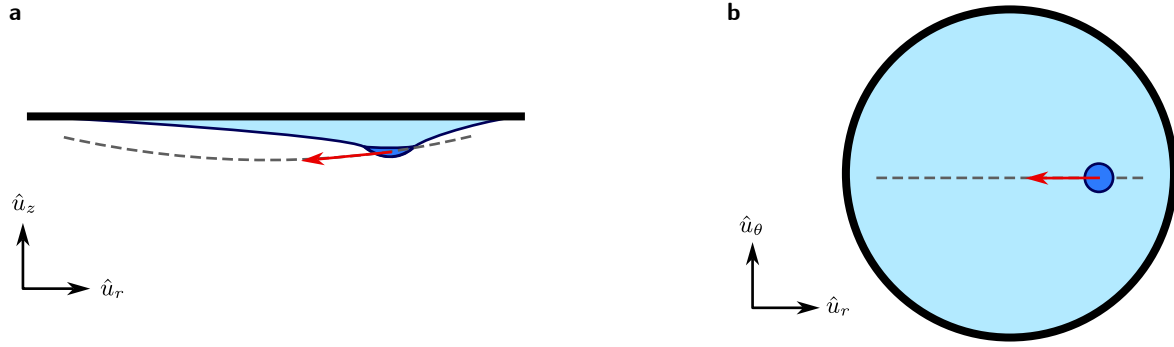


FIGURE III.1 – Schéma de la trajectoire radiale d'une lentille liquide sur un film de savon, dans les deux plans, respectivement vertical (a) et horizontal (b), étudiés par la suite. Le vecteur \hat{u}_r est assimilé à l'axe de la trajectoire principale, horizontal, et le vecteur \hat{u}_θ lui est normal. Dans chaque image, la trajectoire de la lentille est rendue par une ligne en traitillés gris, la flèche rouge représentant sa vitesse.

III.1.1 Trajectoire dans le plan vertical

Une équation de la prochaine sous-section lie directement r_0 au temps ; ici, nous nous permettrons donc d'appeler abusivement « trajectoire verticale » l'altitude $z_0(r_0)$ de la lentille en fonction de sa position radiale sur le film de savon. Cette trajectoire, dans le plan contenant à la fois l'axe principal du mouvement et l'axe vertical, est mesurable avec la caméra sur le côté présentée en section I.3.1. Afin d'avoir des courbes précises, nous choisissons d'étudier un zoom sur la partie centrale du film pour les lentilles les plus légères.

Description de la trajectoire et oscillations verticales

La figure III.2 superpose plusieurs de ces trajectoires : chacune d'elles représente le mouvement d'une unique lentille sur un film, pour une masse donnée de lentille. Les variations en termes d'étendue de la trajectoire et de nombre de points la représentant sont dues au fait que plusieurs séries de mesures ont été rassemblées dans ce graphique, avec des conditions d'acquisition (fréquence d'acquisition des images, étendue de la zone filmée, position de lâcher de la goutte) parfois différentes. Ces différences expérimentales n'affectent cependant en rien l'allure générale des trajectoires, comme on peut le voir sur la figure.

Par souci de clarté, un seul passage de chaque lentille sur le film est tracé sur chacun des graphiques : le troisième et le cinquième après lâcher de la goutte. On constate que le premier passage, en a, présente un fort effet d'oscillation verticale autour de la trajectoire principale, nettement atténué sur les courbes en b et en c. Ce sont ces oscillations qui nous empêchent d'exploiter les trajectoires du premier aller-retour (premier et deuxième passage sur le film) : leur amplitude compromet alors la détection automatique de la lentille, et donc l'acquisition de données fiables. Elles semblent provenir du fait qu'on laisse la goutte tomber sur le film et, probablement, du phénomène de relaxation qui la transforme en lentille – phénomène qui n'est pas étudié dans cette thèse. Les oscillations se dissipent ensuite en un à deux allers-retours de la lentille, *a priori* du fait des frottements avec l'air et, à moindre mesure, de la viscoélasticité du film [67].

Sur les figures III.2b et c, des fonctions quadratiques sont ajustées aux points des trajectoires observées. On constate que les oscillations verticales se font autour de ces fonctions ajustées. On peut donc supposer, en prenant en compte la rapide dissipation des oscillations, que ces

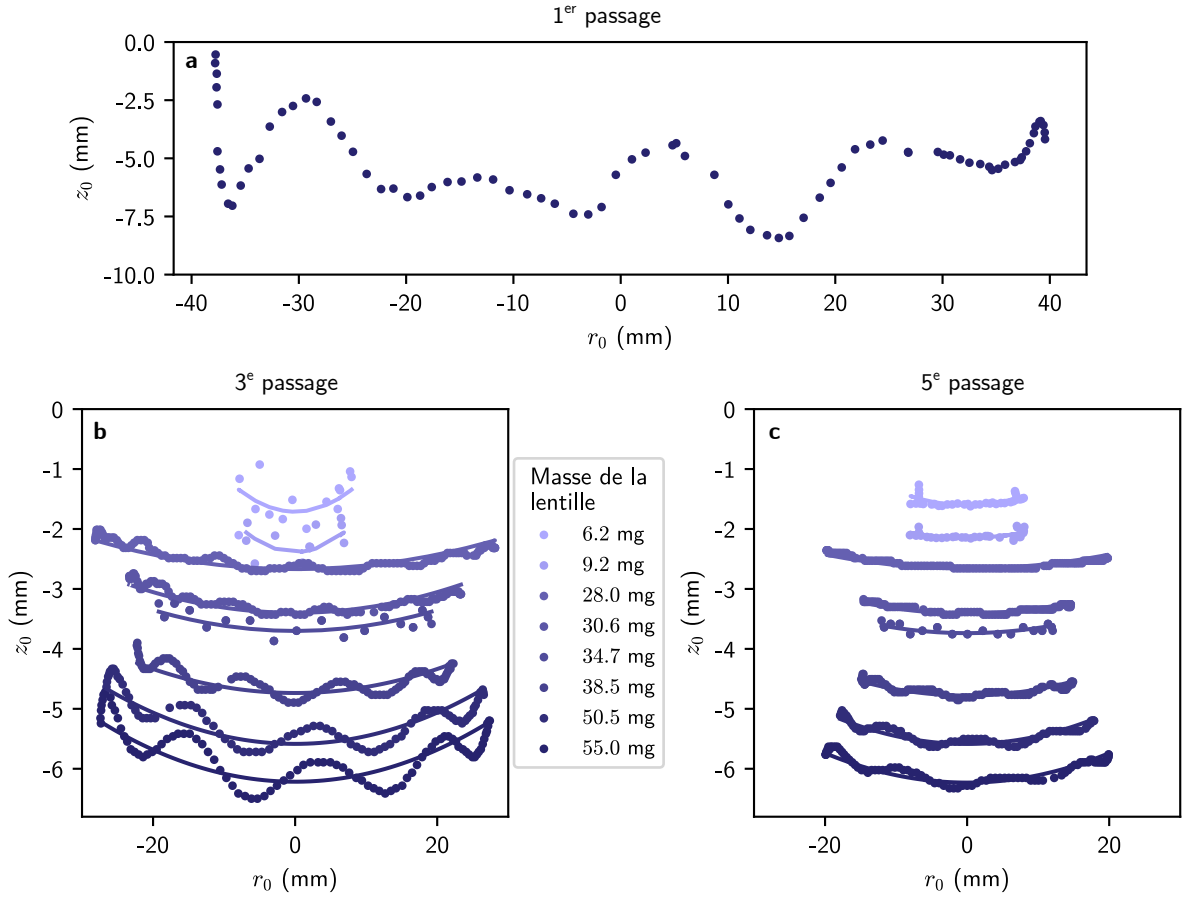


FIGURE III.2 – Trajectoires verticales $z_0(r_0)$ de lentilles sur le diamètre d'un film de savon. En **a** est tracé le premier passage d'une lentille de 55 mg. On voit que cette trajectoire présente des oscillations de grande amplitude, qui brouillent le parcours général de la lentille. Celui-ci est plus visible en **b**, qui montre le troisième passage de plusieurs lentilles de différentes masses sur le film, et sur le cinquième passage montré en **c**. Les lignes continues sur les deux dernières figures sont des courbes quadratiques ajustées librement aux trajectoires.

fonctions quadratiques suffisent à rendre compte de la trajectoire principale de la lentille dans le plan vertical. C'est ce que nous nous proposons de vérifier dans la suite de cette sous-section, en construisant un modèle de trajectoire quadratique.

On peut toutefois chercher à limiter ces oscillations. C'est à ceci que sert le plateau de translation micrométrique présenté au chapitre I, qui permet de déposer la goutte au plus près du film. Les mesures présentées en figure III.2 l'utilisent déjà; nous voyons donc que se débarrasser totalement de cet effet est complexe.

Equation de la trajectoire

Nous cherchons donc à retracer théoriquement ces trajectoires verticales, *a priori* de forme quadratique $z(r_0) \propto r_0^2$. On y arrive selon un développement effectué en collaboration avec Benjamin Reichert, en reprenant l'équation II.14. Prenons une lentille de masse m et de position (r_0, θ_0) , θ_0 étant constant. Des deux régions du film étudiées précédemment (région *membrane*, région *lentille*), seule la première fournit des équations valides quelle que soit la position de la lentille. Puisque nous n'avons pas besoin de connaître le détail du profil sous la lentille pour connaître sa position, on peut laisser de côté la résolution de la partie *lentille* et se concentrer sur les expressions de la partie *membrane*. Alors, la trajectoire verticale de la lentille

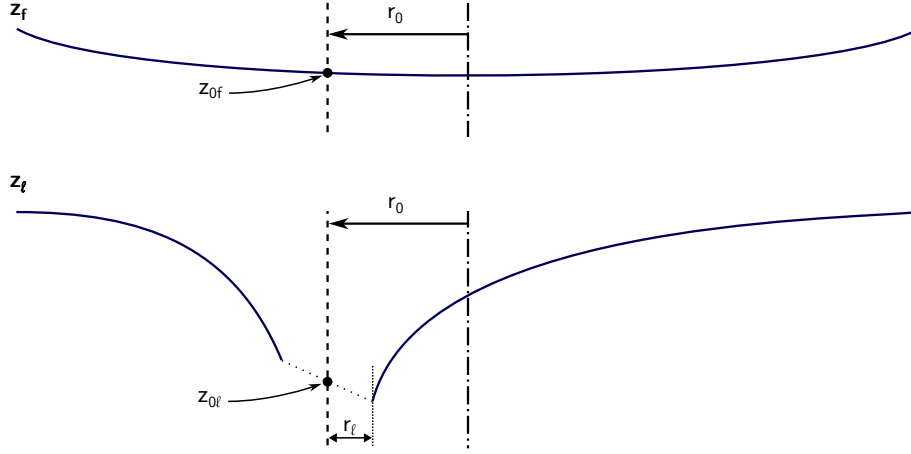


FIGURE III.3 – Représentation des deux contributions z_f et z_ℓ , que l'on additionne pour obtenir le profil total du film. La contribution à la trajectoire en $r = r_0$ de z_ℓ est déterminée via $\langle z_\ell \rangle$, définie comme la moyenne entre les altitudes de part et d'autre de la lentille.

est donnée par l'altitude de la membrane pour la position de la lentille $z_0 = z(r = r_0)$.

De la même façon que $z(r) = z_f(r) + z_\ell(r)$, l'expression de z_0 se construit comme la somme de deux contributions (représentées en figure III.3) : celle du film massif sans lentille

$$z_{0f} = z_f(r = r_0) = \frac{\xi}{8\ell_c^2}(r_0^2 - R^2), \quad (\text{III.1})$$

et celle $z_{0\ell}$ issue du modèle de la lentille ponctuelle. L'expression de z_ℓ (eq.II.7) n'étant valable qu'au-delà de la lentille, nous définissons $z_{0\ell}$ en r_0 comme la moyenne des valeurs de z_ℓ sur le bord de la lentille. Puisque nous étudions un mouvement radial de lentille, le problème est plan, ce qui nous permet de réduire cette expression à la moyenne des altitudes aux deux points encadrant la lentille dans le plan (\hat{u}_r, \hat{u}_z) , comme dans la figure III.3 :

$$z_{0\ell} = \frac{1}{2} \left[z_\ell(r_0 - r_\ell) + z_\ell(r_0 + r_\ell) \right], \quad (\text{III.2})$$

soit :

$$z_{0\ell} = \frac{mg}{8\pi\sigma} \left[2 \ln \left(\frac{r_\ell}{R} \right) - \ln \left(\left[1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right]^2 - \frac{r_0^2 r_\ell^2}{R^2 R^2} \right) \right]. \quad (\text{III.3})$$

On peut simplifier cette expression en supposant que $r_\ell \ll R$ et $r_0 \ll R$, c'est-à-dire en ne considérant que les petites oscillations d'une petite lentille autour du centre du film. Si la première hypothèse semble raisonnable – le chapitre précédent nous informe que $r_\ell \simeq 5,8$ mm, ce qui est bien inférieur aux 50 mm du film – la seconde peut soulever quelques interrogations, notamment lorsque r_0 atteint des valeurs autour de 20 mm comme dans la figure III.2. Pourtant, le bon accord avec l'expérience des expressions obtenues par ces comparaisons, couplé à leur simplicité, nous invite à appliquer les hypothèses telles quelles. L'expression ainsi simplifiée, ajoutée à la composante z_{0f} , nous donne la trajectoire verticale :

$$z_0(r_0) = C(m) \cdot r_0^2 + D(m) \quad (\text{III.4})$$

$$C(m) = \frac{1}{\ell_c^2} \left(\frac{m}{4\pi\rho R^2} + \frac{\xi}{8} \right) \quad ; \quad D = \frac{1}{\ell_c^2} \left[\frac{m}{4\pi\rho} \ln \left(\frac{r_\ell}{R} \right) - \frac{\xi R^2}{8} \right].$$

On observe que le résultat final est une fonction quadratique de la position r_0 de la lentille, la courbure de la parabole étant donnée par $2C$. Comparons ce C calculé à celui mesuré

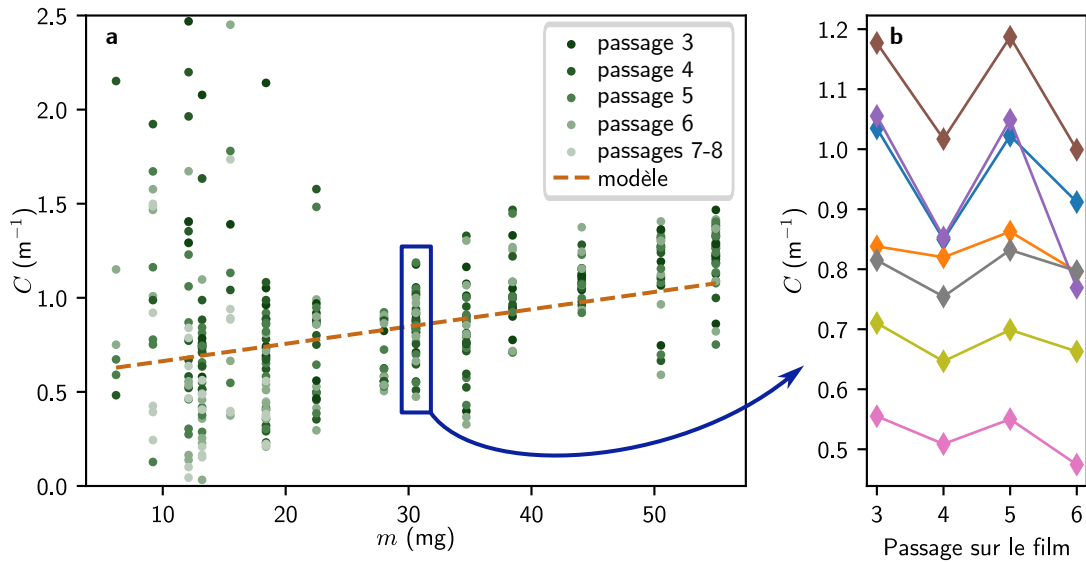


FIGURE III.4 – Evolution de la courbure verticale des trajectoires en fonction de la masse de la lentille (a). Chaque masse rassemble plusieurs expériences et, pour chacune d'elles, la couleur des points est indicatrice du numéro de passage sur le film de savon. La ligne en traitillés correspond au modèle en équation III.4. En b, on trace les mesures de C en fonction du passage sur le film pour $m = 31$ mg, pour plusieurs expériences.

sur les trajectoires expérimentales, représentées en figure III.2. Le graphique III.4a montre les points expérimentaux, obtenus en ajustant des fonctions quadratiques aux trajectoires observées comme en figure III.2. Pour chaque masse de lentille, on trace les résultats de 2 à 9 expériences, chacune produisant 2 à 6 points, un par passage du film. Pour ce qui est du nombre d'expériences, nous avons arrêté l'acquisition des données, pour chaque masse de lentille, lorsque nous estimions que la collection de courbes était représentative du comportement observé. Dans le cas des très petites masses, constatant la grande dispersion des résultats (très visible sur le graphique), nous avons préféré limiter les expériences et nous concentrer plutôt sur les masses plus élevées, nettement plus répétables. Cette dispersion est due à la très faible amplitude verticale des trajectoires de si petites lentilles : nous sommes limités par la résolution verticale de la caméra, et ce même en zoomant sur la zone centrale du film. Dans ces conditions, l'algorithme d'ajustement des fonctions quadratiques donne forcément des résultats imprécis.

Le nombre de passages pris en une expérience, quant à lui, dépend essentiellement de deux facteurs : l'amplitude des oscillations décrites plus haut, qui a pu empêcher de bonnes mesures pour les premiers allers-retours, et la tenue du film de savon qui pouvait éclater avant que la mesure ne soit terminée. La plupart des expériences ont cependant fourni quatre passages, à l'image de celles montrées en figure III.4b.

Ce graphique montre les valeurs ajustées de C aux trajectoires expérimentales, pour une masse déterminée de la lentille (31 mg), en fonction du passage de celle-ci. On note que C ne dépend pas grandement du numéro de passage, donc du temps, à l'exception d'une légère tendance se répétant sur une période de 2 passages, soit un aller-retour de la lentille. Ceci est révélateur d'une légère asymétrie de notre système expérimental : l'aller et le retour de la lentille sur le film sont, de façon répétable, différents en termes de trajectoire verticale.

Il serait intéressant de mesurer la dépendance de C à la position r_0 en ajustant des fonctions quadratiques à des portions de trajectoires. Cependant, nous aurions besoin pour cela de trajectoires nettement plus étendues, afin que ces portions s'affranchissent des oscillations verticales et fournissent une tendance de mouvement fiable. Au lieu de cela, nous traçons en

traitillés sur la figure III.4 le modèle de C en fonction de la masse issu de l'expression III.4. On peut noter que, sans aucun paramètre d'ajustement, le modèle correspond de façon très satisfaisante aux observations.

Comparons à présent l'amplitude de ces trajectoires verticales à celle des trajectoires horizontales pour le même mouvement $r_0 \in [-r_{0\text{ex}}, +r_{0\text{ex}}]$. On obtient le rapport suivant :

$$\frac{C(m) \cdot r_{0\text{ex}}^2}{2 \cdot r_{0\text{ex}}} \ll \frac{C(m)}{2} R \leq 0,027. \quad (\text{III.5})$$

Cette valeur maximale est calculée pour $m = 55$ mg, qui est la masse la plus lourde que l'on puisse donner à une lentille avec les buses présentées au chapitre I. Cela montre que l'amplitude de la trajectoire quadratique de la lentille dans le plan vertical est très petite devant celle du mouvement horizontal. Tout en gardant à l'esprit que la lentille, sur son film de savon, tire son énergie de ces variations d'altitudes, nous pouvons donc considérer que l'essentiel du mouvement de la lentille peut être décrit par un formalisme en deux dimensions, dans le plan horizontal.

La suite de cette étude s'intéresse au mouvement de la lentille dans le plan horizontal. La trajectoire verticale s'y retrouve, à la base d'un potentiel auquel la lentille est soumise, et qui conditionne sa dynamique. C'est ce potentiel que nous allons décrire dans la sous-section suivante.

III.1.2 Trajectoire dans le plan horizontal : un profil d'énergie potentielle

Considérons à présent le mouvement principal de la lentille, dans le plan horizontal. Son modèle se construit sur la base de ce qui précède, d'abord en établissant l'expression de l'énergie potentielle qui investit la lentille en fonction de sa position sur le film, puis en établissant l'équation différentielle qui en découle pour conduire son mouvement.

Profil d'énergie potentielle

Le développement de l'expression de l'énergie potentielle est la dernière pièce empruntée au travail théorique formel de Benjamin Reichert pour cette thèse.

Une lentille sur un film de savon forme un problème plan, et est soumise à deux forces principales :

- le poids $\vec{P} = -mg \hat{u}_z$;
- la résultante \vec{F}_σ des forces de tension capillaire que le film exerce sur son pourtour.

Nous sommes ici principalement intéressés par la composante sur le plan horizontal – soit celle en \hat{u}_r , celle en \hat{u}_θ étant nulle pour des raisons de symétrie. Nous allons tout de même commencer par un équilibre des forces sur \hat{u}_z , qui nous donne une expression pour $F_\sigma = \|\vec{F}_\sigma\|$:

$$F_\sigma = \frac{mg}{\cos \psi}, \quad (\text{III.6})$$

où ψ est l'angle, défini dans la figure III.5, entre la ligne passant par les deux extrémités de la lentille et l'horizontale. Alors, la composante propulsant la lentille vers le centre du film et qui dérive de l'énergie potentielle qui nous intéresse s'écrit, suivant un bilan sur \hat{u}_r :

$$F_{\sigma r} = F_\sigma \sin \psi = mg \tan \psi. \quad (\text{III.7})$$

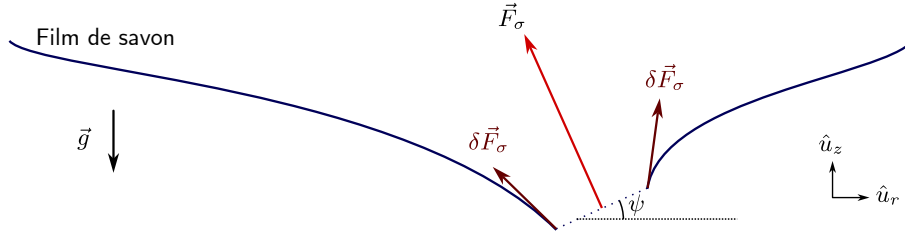


FIGURE III.5 – Schéma de profil des forces de tension capillaire s'appliquant sur la lentille (emplacement en pointillés, faisant un angle ψ avec l'horizontale). Les résultantes des forces sur le pourtour de la lentille sont notées $\delta\vec{F}_\sigma$, et leur somme donne la résultante complète \vec{F}_σ .

D'après la décomposition des profils II.7, on peut préciser la valeur de $\tan \psi$:

$$\tan \psi = \left. \frac{dz_f}{dr} \right|_{r=r_0} + \frac{1}{2r_\ell} [z_\ell(r_0 - r_\ell) + z_\ell(r_0 + r_\ell)], \quad (\text{III.8})$$

ou encore :

$$\tan \psi = \frac{1}{4\ell_c^2} \left[\xi r_0 + \frac{m}{2\pi r_\ell \rho} \ln \left(\frac{R^2 - r_0^2 + r_0 r_\ell}{R^2 - r_0^2 - r_0 r_\ell} \right) \right]. \quad (\text{III.9})$$

On rappelle ici que r_ℓ est le rayon de la lentille, r_0 sa distance au centre, R le rayon du cadre, donc du film de savon, dont ξ est l'épaisseur (homogène et constante), σ la tension de surface et ℓ_c la longueur capillaire. m est la masse de la lentille. On peut simplifier cette expression en reprenant la double hypothèse, déjà formulée plus haut, d'une petite lentille oscillant près du centre, soit : $r_\ell \ll R$ et $r_0 \ll R$. Au premier ordre, cela donne :

$$F_{\sigma r} = \frac{mg}{4\ell_c^2} \left(\xi + \frac{m}{\pi R^2 \rho} \right) r_0. \quad (\text{III.10})$$

Partant de cette expression, on peut aisément remonter à l'énergie potentielle E_p , définie par $\vec{F}_{\sigma r} = -\nabla E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial r_0}$. En choisissant le centre du film comme point de potentiel nul, on obtient :

$$E_p = \frac{1}{2} \Gamma r_0^2, \quad \text{où} \quad \Gamma = \frac{mg}{4\ell_c^2} \left(\xi + \frac{m}{\pi R^2 \rho} \right). \quad (\text{III.11})$$

On note que l'énergie potentielle est une forme quadratique de la distance au centre, et que la force qui en dérive se comporte donc de façon analogue à un ressort dont la raideur serait Γ . Au passage, il est intéressant de noter que cette force, par sa nature, est plus répulsive depuis les bords du film (depuis le cadre, qui fixe des conditions aux limites pour le film de savon) qu'attractive vers le centre du dispositif. On peut ainsi l'attribuer à l'interaction entre la lentille et le cadre qui maintient le film, par l'intermédiaire de ce dernier. Sur un film de savon infini, en effet, son existence ne serait pas justifiée.

La raideur Γ dépend de la longueur capillaire du film, et est une fonction quadratique de la masse de la lentille. On peut remarquer, en se concentrant sur la partie entre parenthèses de sa définition, qu'elle abrite une somme de deux épaisseurs : celle du film, ξ , et celle qu'aurait la lentille si elle était uniformément répartie sur tout le film. Si l'on calcule un ordre de grandeur de ce terme, on obtient environ $1,7 \mu\text{m}$ (pour une lentille de 55 mg), à comparer aux $15 \mu\text{m}$ de notre film de savon, soit un rapport de 11% .

Pour les masses faibles, inférieures à 25 mg , le rapport entre ces deux épaisseurs est inférieur à 5% : le monôme de premier degré de Γ , qui représente la contribution du film,

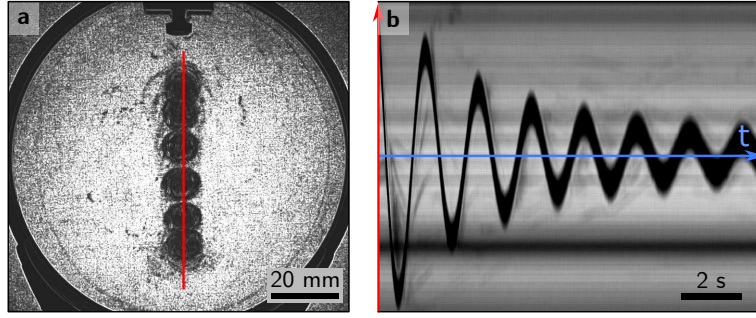


FIGURE III.6 – Chronophotographie traitée d'une lentille d'eau de 23 mg oscillant sur un film de savon (a). Les zones noires correspondent aux zones de l'image où le motif en speckle sous le film est rendu flou. La figure b est l'évolution temporelle (axe horizontal) des pixels le long de la ligne rouge en a (axe vertical). La courbe noire ainsi formée est révélatrice de l'équation horaire de la lentille.

domine largement. Après cela, on peut donc s'attendre à une cohabitation des deux effets, avant que la contribution de la lentille (le monôme de second degré) ne devienne dominante. Ce dernier cas est hypothétique, puisque nos lentilles ne dépassent pas 55 mg et que des corps nettement plus gros vont simplement traverser le film, sans y rester. Quoi qu'il en soit, afin d'obtenir une description précise de la dynamique de la lentille, nous choisissons de garder les deux contributions, sans en négliger une devant l'autre.

Mesure expérimentale du profil de potentiel

Ce profil d'énergie potentielle peut être vérifié expérimentalement, les observations étant cette fois faites par une caméra placée au-dessus du film, en incidence normale, avec le traitement d'image présenté en section I.3.1. Ce traitement permet un repérage aisé de la lentille, comme en figure III.6.

On voit que sur la figure III.6.a, la lentille peut atteindre une position $r_0 \sim \frac{3}{4}R$, ce qui met en difficulté la supposition $r_0 \ll R$ dont dépendent les équations développées plus haut. Cependant, les résultats que nous allons montrer ne semblent pas se détériorer particulièrement en ces points et les observations y suivent toujours les prédictions. Nous prenons donc le parti de continuer à valider cette hypothèse.

C'est aux points extrêmes de la trajectoire de la lentille que nous pouvons mesurer son énergie potentielle, en suivant la méthode illustrée en figure III.7. Prenons un tel point i , où la lentille fait demi-tour sur le film, et notons son énergie mécanique E_i . Du fait de la vitesse nulle du corps, toute cette énergie est potentielle : $E_i = E_{p_i}$. Avant d'arriver à ce point, et après l'avoir quitté, la lentille passe par le centre du film ; on y note son énergie mécanique respectivement E_{i-} et E_{i+} . Au centre du film, la lentille a une vitesse maximale (resp. v_{i-} et v_{i+}), ce qui nous encourage à sélectionner ce point comme origine des potentiels. Les énergies mécaniques $E_{i\pm}$ y sont alors entièrement cinétiques : $E_{i\pm} = \frac{1}{2}mv_{i\pm}^2$.

En l'absence de dissipation, une simple conservation de l'énergie mécanique donnerait E_{p_i} directement à partir d'une mesure de la vitesse de la lentille au centre du film. Cependant, il est visible sur la figure III.6.b que le mouvement est amorti et que l'énergie se dissipe rapidement. Afin de nous affranchir de tout effet d'amortissement, nous choisissons donc de calculer l'énergie mécanique au point i comme la moyenne des énergies mécaniques lors des passages au centre

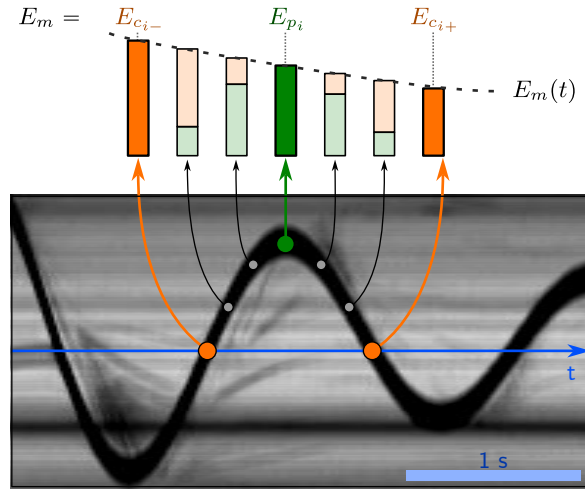


FIGURE III.7 – Représentation de la mesure de l'énergie potentielle sur une trajectoire telle qu'observée en figure III.6. Sur un point de demi-tour (sur un extremum de la courbe), toute l'énergie mécanique E_i de la lentille est potentielle (E_{p_i}). Lors du passage au centre, l'énergie $E_{i\pm}$ est entièrement cinétique ($E_{c_{i\pm}}$). On pourra donc évaluer E_{p_i} comme la moyenne des deux énergies cinétiques $E_{c_{i-}}$ et $E_{c_{i+}}$ des passages au centre de part et d'autre de l'extremum i .

avant et après le point i , soit :

$$E_i = \frac{E_{i-} + E_{i+}}{2}, \quad (\text{III.12})$$

d'où l'on tire :

$$E_{p_i} = m \frac{v_{i-}^2 + v_{i+}^2}{4}. \quad (\text{III.13})$$

On mesure donc les vitesses de chaque passage au centre d'une lentille pour attribuer l'énergie potentielle à chaque passage d'extremum. Chaque lentille fournit une dizaine à une quinzaine de points, dont la majorité se rassemble près du centre du film, où se termine la trajectoire une fois le mouvement complètement amorti. Les résultats, pour trois masses de lentilles différentes, chacune rassemblant plus d'une dizaine d'expériences, sont présentés en figure III.8. On y voit qu'on peut, de façon répétable, ajuster une courbe quadratique aux points d'énergie potentielle en fonction de la position de la lentille, en accord avec la forme exprimée par l'équation III.11.

Les points, sur ce graphique, ne dépassent pas $r_0 = 10$ mm. Ceci est dû au fait que, d'une part, les gouttes ont été lâchées un peu plus loin des bords que pour la figure III.6, et d'autre part, les mesures ont commencé systématiquement après le premier passage de la lentille. Les trajectoires relevées ici sont donc déjà partiellement amorties. Cette précaution a été prise pour s'assurer que la vitesse mesurée lors du passage au centre du film était bien générée uniquement par la force de rappel vers le centre du film, et ne bénéficiait d'aucune énergie supplémentaire provenant du dépôt de la goutte ou de la formation de la lentille.

Reprenons les profils de potentiel de la figure III.8. Les courbes quadratiques ajustées à ces expériences fournissent une « raideur » Γ telle que défini plus haut : $E_p = \frac{1}{2} \Gamma r_0^2$. La figure III.9 compare ces paramètres ajustés à l'expression III.11 pour différentes masses, chacune faisant l'objet de 12 mesures (à l'exception des quatre masses les plus élevées, qui ont entre 7 et 10 points, et la masse 12 mg qui en réunit 25). On note que, sans aucun paramètre d'ajustement, la correspondance est très satisfaisante avec une excellente répétabilité, ce qui nous permet de valider le modèle proposé. On remarque toutefois une dispersion importante pour les masses élevées ; celles-ci ont fait l'objet d'une campagne de mesure séparée des autres,

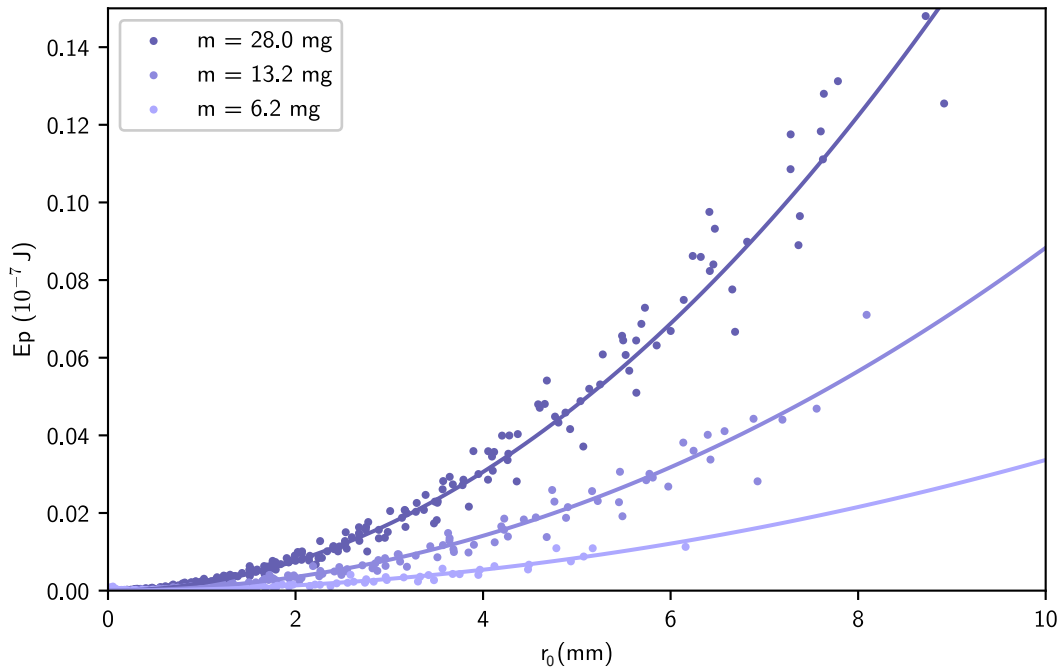


FIGURE III.8 – Energie potentielle E_p d'une lentille d'eau déminéralisée en fonction de sa distance r_0 au centre du film, pour trois masses différentes. Les points sont des mesures expérimentales, les lignes solides sont des fonctions quadratiques ajustées.

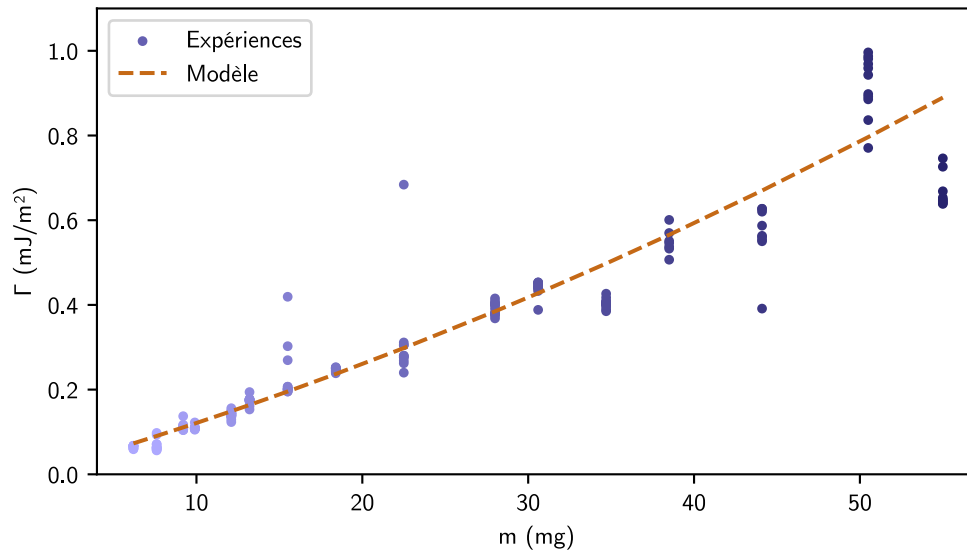


FIGURE III.9 – Evolution de la courbure Γ du profil d'énergie potentielle en fonction de la masse. Les points sont les paramètres ajustés sur les expériences comme dans la figure III.8, avec des lentilles d'eau déminéralisée. La ligne en traitillés est le modèle de l'équation III.11 sans ajustement. Pour les lentilles d'eau, chaque masse inférieure à 38 mg réunit au moins 12 points, les quatre masses les plus élevées rassemblant entre 7 et 10 points.

et souffrent probablement de conditions expérimentales différentes, bien que le protocole soit resté le même.

A présent que le profil quadratique de l'énergie potentielle de la lentille est confirmé, nous pouvons qualifier cette dernière d'oscillateur harmonique.

Et *quid* de la miscibilité ?

Revenons sur l'hypothèse formulée en début de chapitre, selon laquelle aucun phénomène de mixtion n'intervient dans la dynamique de la lentille. Nous pouvons la vérifier en plaçant sur le film une lentille d'huile minérale, non miscible avec lui, et en comparant les mesures avec ce qui a déjà été fait. En ajustant comme précédemment des courbes quadratiques aux mesures d'énergie potentielle, on obtient les résultats affichés sur la figure III.10. L'huile minérale étant moins dense et de plus faible tension de surface que l'eau, les masses disponibles pour l'étude avec les buses décrites au chapitre I ne dépassent pas 18 mg.

Pour chaque masse de lentille d'huile, on a entre 5 et 10 points marqués par des triangles oranges. On constate qu'ils se regroupent de façon remarquable sur la courbe de modèle, représentant l'expression de Γ dans l'équation III.11, et ne montrent pas de différence flagrante par rapport aux points issus des expériences sur des lentilles d'eau (ronds bleutés). Nous en déduisons que notre modèle décrit bien le profil d'énergie potentielle auquel est soumise une lentille, qu'elle soit miscible ou non avec le film de savon. De plus, la différence de viscosité entre l'huile et l'eau ne se faisant pas voir dans les résultats, on peut considérer que ce paramètre ne participe pas à l'énergie potentielle de la lentille.

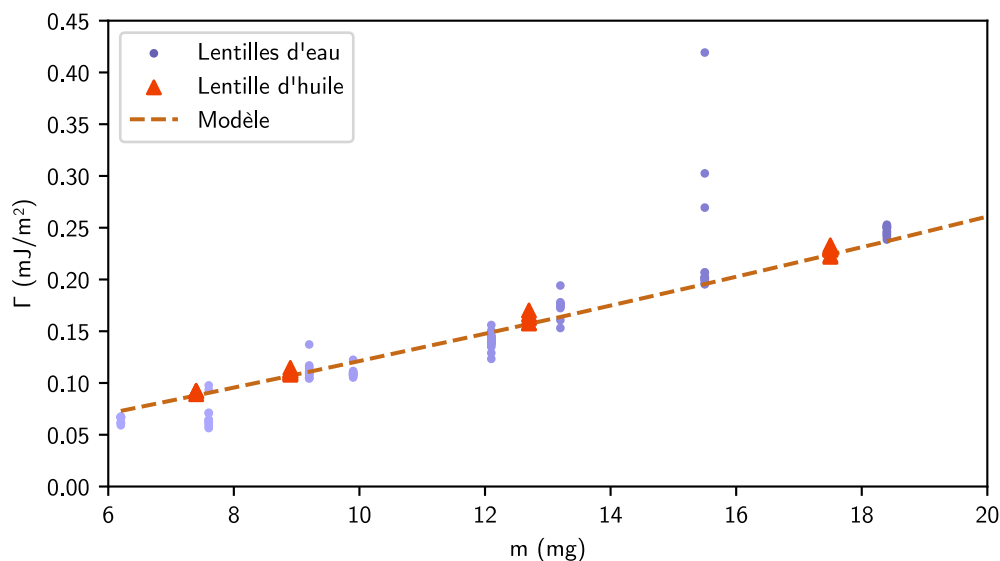


FIGURE III.10 – Détail du graphique III.9, en ajoutant les points mesurés avec les lentilles d'huile minérale (triangles oranges). On constate une excellente reproductibilité des résultats, et une bonne corrélation entre expérience et modèle.

III.1.3 Paramètres oscillatoires de la lentille

Maintenant que nous disposons du champ d'énergie potentielle auquel est soumis une lentille sur un film de savon, nous pouvons établir ses équations de mouvement. On établit les équations d'Euler-Lagrange, le lagrangien étant issu de l'énergie potentielle III.11. Si pour l'instant notre étude est faite en une dimension, avec la coordonnée r marquant la position sur le diamètre du film, nous devrons par la suite étendre les résultats du calcul suivant à un mouvement en deux dimensions. Dans ce but, nous ferons ce développement selon la coordonnée généralisée q , en gardant à l'esprit que, pour l'instant, $q = r$. En une dimension, le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \Gamma q^2. \quad (\text{III.14})$$

Le point marque une dérivée temporelle. Ajoutant à cela une fonction de dissipation de Rayleigh pour tenir compte des frottements, avec un paramètre de friction k inconnu à ce stade :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} k \dot{q}^2, \quad (\text{III.15})$$

on peut établir l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}}, \quad (\text{III.16})$$

soit :

$$m\ddot{q} + k\dot{q} + \Gamma q = 0. \quad (\text{III.17})$$

Ceci est l'équation du mouvement de la lentille sur le film de savon. A propos de k , le frottement peut être issu de deux sources principales : les frottements entre la lentille et l'air, non négligeables à ces échelles [67], et les interactions entre la lentille et le film, dont le glycérol peut augmenter la viscosité. Les traînées mises en évidence par la figure III.11, puisqu'observées pour des lentilles d'huile comme pour des lentilles d'eau, ne sont probablement que des déformations locales du film de savon, qui participent ainsi à la dissipation de l'énergie mécanique de la lentille.

Revenons à notre équation III.17, dont la solution est de la forme :

$$q(t) = e^{-t/\tau} \cdot \left(q_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + q_0/\tau}{\omega} \sin(\omega t) \right) \quad (\text{III.18})$$

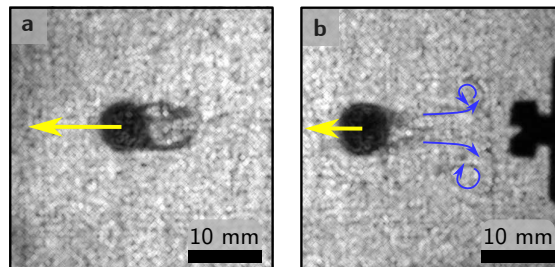


FIGURE III.11 – Lentille d'huile glissant sur un film de savon, selon une vitesse indiquée par les flèches jaunes. On observe des traînées derrière la lentille lorsqu'elle se déplace en ligne droite (a) et des boucles de recirculation (flèches bleues) dans son sillage lorsqu'elle vient de faire demi-tour (b).

où $\tau = \frac{2m}{k}$ est le temps d'amortissement, $q_0 = q(t=0)$ est la position initiale et $v_0 = \dot{q}(t=0)$ est la vitesse initiale de la lentille. La pseudo-pulsation de l'oscillateur est définie par

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\Gamma}{m} - \left(\frac{k}{m}\right)^2}. \quad (\text{III.19})$$

De fait, nous pouvons ajuster aux trajectoires mesurées expérimentalement une expression réduite, introduisant une amplitude A et une phase φ :

$$r_0(t) = Ae^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad ; \quad [A, \tau, \omega, \varphi] \in \mathbb{R}^4. \quad (\text{III.20})$$

Nous sommes ici particulièrement intéressés par le temps d'amortissement τ et la pulsation ω , qui sont des paramètres indépendants des conditions initiales de la trajectoire et sont donc caractéristiques de la dynamique générale de la lentille. Ils sont rapportés dans les graphiques de la figure III.12, pour des lentilles d'eau (ronds bleus) et des lentilles d'huile (triangles rouges).

La première observation à faire est que la composition de la lentille ne semble influencer ni sur la pulsation, ni sur le temps d'amortissement, en dépit de la différence de viscosité entre les deux liquides. C'est ce qui permet de supposer que les courants internes de la lentille n'entrent pas en grande part dans la définition de l'amortissement k du mouvement.

Ensuite, on constate que le temps d'amortissement, pour lequel on ne dispose d'aucune expression *a priori*, semble augmenter régulièrement avec la masse de la lentille. On se propose d'utiliser une fonction affine pour rendre compte de sa tendance, fonction ajustée et représentée par les pointillés verts de la courbe III.12.a. Cette droite est ensuite injectée dans l'expression III.19 pour donner le modèle tracé en traitillés bruns sur la courbe III.12.b. Cette courbe montre encore une fois une bonne adéquation des données expérimentales au modèle, même si la tendance observée pour ω semble devoir baisser sous la courbe de prédiction à de grandes masses (supérieures à 35 mg).

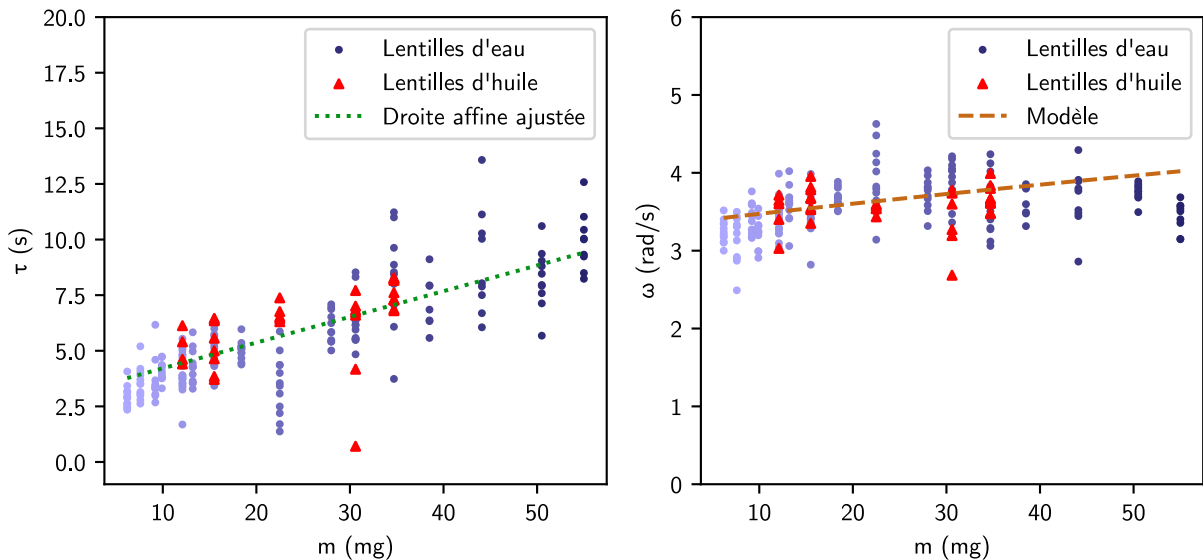


FIGURE III.12 – Paramètres d'oscillation d'une lentille d'huile ou d'eau déminéralisée sur un film de savon, en fonction de sa masse m . En **a**, on trouve le temps d'amortissement τ de l'oscillateur, avec une droite $\tau = c_1 + c_2m$ en pointillés, ajustée pour c_1 et c_2 . La courbe **b** trace sa pulsation ω , avec cette fois-ci un modèle en traitillés, issu de l'équation III.19 et basé sur la droite ajustée de **a** pour le paramètre d'amortissement.

Enfin, ces courbes permettent de récolter des valeurs moyennes pour nos deux paramètres, τ et ω , que l'on peut prendre respectivement de l'ordre de 5 s et 3,5 rad/s. Ceci est particulièrement justifié pour la pulsation, qui a une variation très faible autour de cette valeur. A l'instar du pendule, l'oscillateur harmonique qu'est notre lentille ne change pas de beaucoup sa fréquence d'oscillation en fonction de sa masse.

III.2 – Orbite solitaire d'une goutte

Munis de l'équation du mouvement et des paramètres d'oscillation d'une lentille le long du diamètre d'un film de savon circulaire, nous allons pouvoir donner à la lentille une impulsion tangentielle lors de son départ. De cette façon, son mouvement unidimensionnel, repéré en coordonnées polaires ($q = r$ dans l'équation III.17), se transforme en trajectoire bidimensionnelle dans le plan du film de savon, que nous allons décrire via un repère cartésien ($q = x$ ou y). Ce changement de repère ne modifie en rien l'équation différentielle III.17 et sa solution III.18.

Ce mouvement est une orbite autour du centre du film, point de potentiel nul, déclinante à cause des effets de friction évoqués plus haut. Puisque l'énergie potentielle varie uniquement comme le carré de la distance au centre du film, les équations du mouvement dans deux directions orthogonales sont découplées, et peuvent être décrites par deux oscillateurs harmoniques amortis $x(t)$ et $y(t)$ vérifiant la définition III.18. Dans le cadre de nos expériences, pour faciliter le traitement de données, les axes x et y des trajectoires acquises correspondront toujours aux axes principaux du capteur de la caméra.

La figure III.13 montre la trajectoire mesurée expérimentalement d'une lentille d'eau sur un film de savon. On observe, au lieu d'une ellipse spiralant vers le centre du film, une trajectoire adoptant tantôt des ellipses quasi-circulaires, tantôt des mouvements rectilignes suivant deux axes différents, et toutes les nuances entre les deux. Un tel comportement, déjà rencontré dans les expériences du pendule de Foucault [68, 69], est due à la légère anisotropie de notre système que nous avons énoncée en I.1.2.

De fait, nous avons pu observer qu'une lentille, une fois déposée sur le bord du film, adopte des ellipses nettement moins larges (donc des trajectoires plus rectilignes) lorsque son point de départ est sur le diamètre prolongeant la fixation du cadre, que lorsqu'il est sur un axe perpendiculaire. Cela corrobore l'hypothèse d'une anisotropie dans le cadre lui-même (via la fixation au support, ou à cause d'une légère courbure du cadre). L'étude complète de l'anisotropie n'a pas été réalisée, mais il pourrait être intéressant de la mener en utilisant les techniques d'analyse développées dans les travaux de Verreault [70, 71] pour le sujet des anisotropies du pendule de Foucault.

Toutefois, sans entrer dans l'étude complète, nous pouvons prendre en compte cette anisotropie de façon empirique dans nos modèles. Notre système étant composé de deux oscillateurs harmoniques amortis, selon les axes x et y , l'anisotropie se manifeste par une différence de pulsation entre ces deux oscillateurs. Notons ω_x la pulsation selon l'axe x et ω_y celle selon l'axe y . On peut les exprimer en fonction d'une pulsation moyenne $\bar{\omega}$ et d'un écart δ_ω par :

$$\omega_x = \bar{\omega} \cdot \left(1 + \frac{\delta_\omega}{2}\right) \quad \text{et} \quad \omega_y = \bar{\omega} \cdot \left(1 - \frac{\delta_\omega}{2}\right).$$

La ligne continue en figure III.13a montre une trajectoire décrite avec cette différence, d'abord

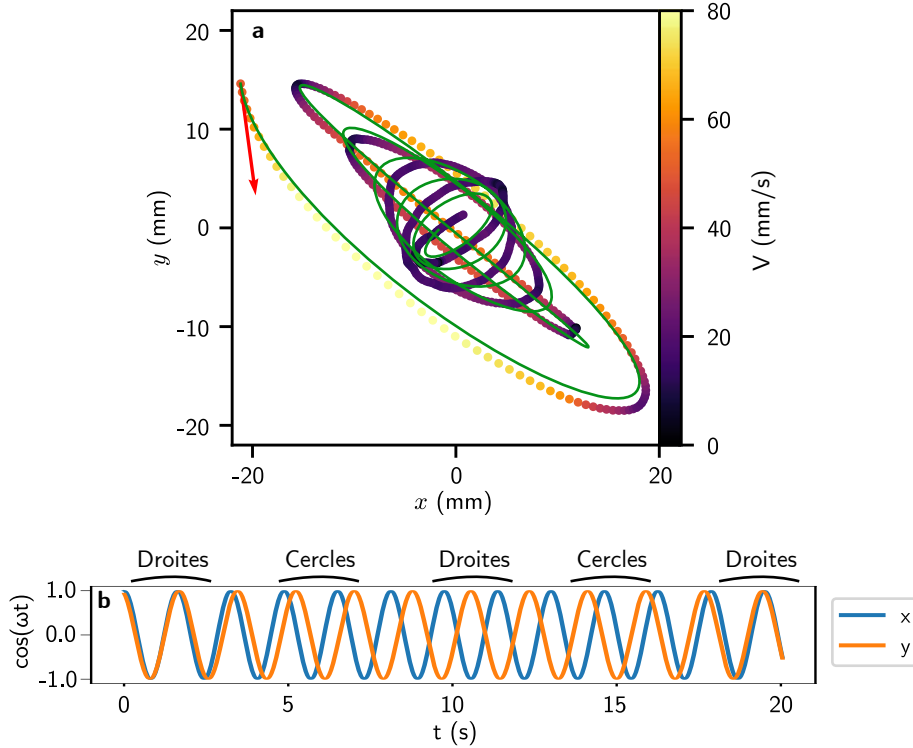


FIGURE III.13 – *Orbite d'une lentille solitaire de 28 mg. En a est montrée la trajectoire de la lentille, les points correspondant aux mesures, et leur couleur à la vitesse de la lentille (la flèche rouge représente la vitesse initiale et n'est pas à l'échelle). La ligne verte solide reprend le modèle de deux oscillateurs (eq. III.18) ajustés pour l'amortissement ($\tau = 5$ s) et l'écart relatif entre les deux pulsations ($\delta_\omega = 8,9\%$). En b, on peut voir le déphasage progressif causé par cette différence de pulsation, entre ω_x et ω_y . En l'absence de déphasage ou en opposition de phase, la trajectoire de la lentille trace des droites. Les cercles apparaissent quand le déphasage est de $\pi/2$.*

en ajustant $\bar{\omega}$ à la trajectoire, puis en réglant une différence relative à la moyenne

$$\delta_\omega = 2 \frac{\omega_x - \omega_y}{\omega_x + \omega_y} \simeq 8,9\%. \quad (\text{III.21})$$

L'influence de cette différence de pulsation sur la trajectoire est illustrée par la figure III.13b, qui montre l'évolution temporelle des termes $\cos(\omega_q t)$ pour $q = x$ et $q = y$. Lorsque le déphasage entre les deux cosinus est de $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), les deux courbes produisent des trajectoires rectilignes, comme au début du mouvement dans la sous-figure a. Ensuite, la différence de pulsation installe un déphasage progressif, jusqu'à un déphasage de $(2n + 1)\pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$, qui produit des ellipses quasi-circulaires, avant de revenir à une nouvelle partie en phase (ou en opposition de phase), moment où la lentille reprend une trajectoire presque rectiligne.

Le temps d'amortissement, également ajusté pour épouser au mieux les points d'observation, fut fixé à 5 s, soit parfaitement dans les attentes données par les courbes III.12 pour une lentille de 28 mg.

Il est intéressant de noter à quel point une si faible déviation de pulsation peut changer le comportement du système entier. En analysant la trajectoire d'une lentille, ou d'un corps quelconque, en orbite sur un film de savon, il serait probablement possible de créer un nouveau type de niveau à bulle, particulièrement précis : le nombre d'orbites faites avant l'inversion du sens de rotation pourrait fournir un indice de l'horizontalité du cadre.

Cela dit, mis à part ce défaut expérimental, nous avons pu modéliser correctement la trajectoire orbitale d'une lentille solitaire sur un film de savon, sur la base d'une force dirigée vers le centre du film et analogue au rappel d'un ressort. Nous avons pu également, au cours de ce chapitre, estimer des paramètres généraux de la dynamique d'une lentille, tels que l'amortissement ou la pulsation, et quantifier l'effet de l'anisotropie de notre système expérimental. Forts de tout cela, nous pouvons passer à l'étape supérieure, c'est-à-dire aux interactions de deux lentilles sur un même film de savon.

Chapitre IV

Interaction entre deux lentilles : orbites, marées et galaxies

Jusqu'ici, nous avons étudié une lentille seule sur un film de savon, immobile ou en mouvement, pour déterminer quelles actions s'exercent sur elle et quelle est sa dynamique. A présent, il est temps d'ajouter une seconde lentille sur le film et d'étudier particulièrement les interactions entre les deux objets. Nous commencerons par les interactions à grande distance, et finirons par celles à courte portée, précédant ou incluant le contact entre les lentilles. Nous mettrons au passage ces interactions en rapport avec leurs homologues gravitationnels : force d'attraction entre deux masses et marées galactiques.

IV.1 – Valse des gouttes

La figure IV.1 rassemble deux illustrations du mouvement de deux lentilles d'eau de 35 mg chacune sur un film de savon. La première, en séquence, utilise des images traitées des expériences, les flèches des vitesses n'étant données que de façon indicative pour donner une idée de la dynamique, tandis que la seconde trace à tout instant les positions des deux lentilles, reliées entre elles par un segment. On voit que les trajectoires s'entremêlent, mettant en évidence un couplage entre les deux corps qui s'ajoute aux oscillateurs décrits précédemment.

Ce couplage se fait via la déformation du film de savon, sous l'action de chaque lentille. En supposant que ces déformations restent faibles (*cf.* figure II.10), nous pouvons utiliser le principe de superposition et considérer que chaque lentille glisse sur la pente générée par l'autre. Ceci nous permettra d'établir l'expression théorique de l'interaction entre deux lentilles, et d'ainsi prédire numériquement leurs trajectoires. Ces modèles seront ensuite comparés et ajustés aux observations expérimentales pour validation.

IV.1.1 L'interaction entre deux lentilles : une force analogue à la gravitation en deux dimensions

Considérons une lentille \mathcal{L}_1 de masse m_1 que nous plaçons sur un film supportant déjà une lentille \mathcal{L}_0 de masse m_0 comme sur le schéma en figure IV.2. Chacune des lentilles crée un champ

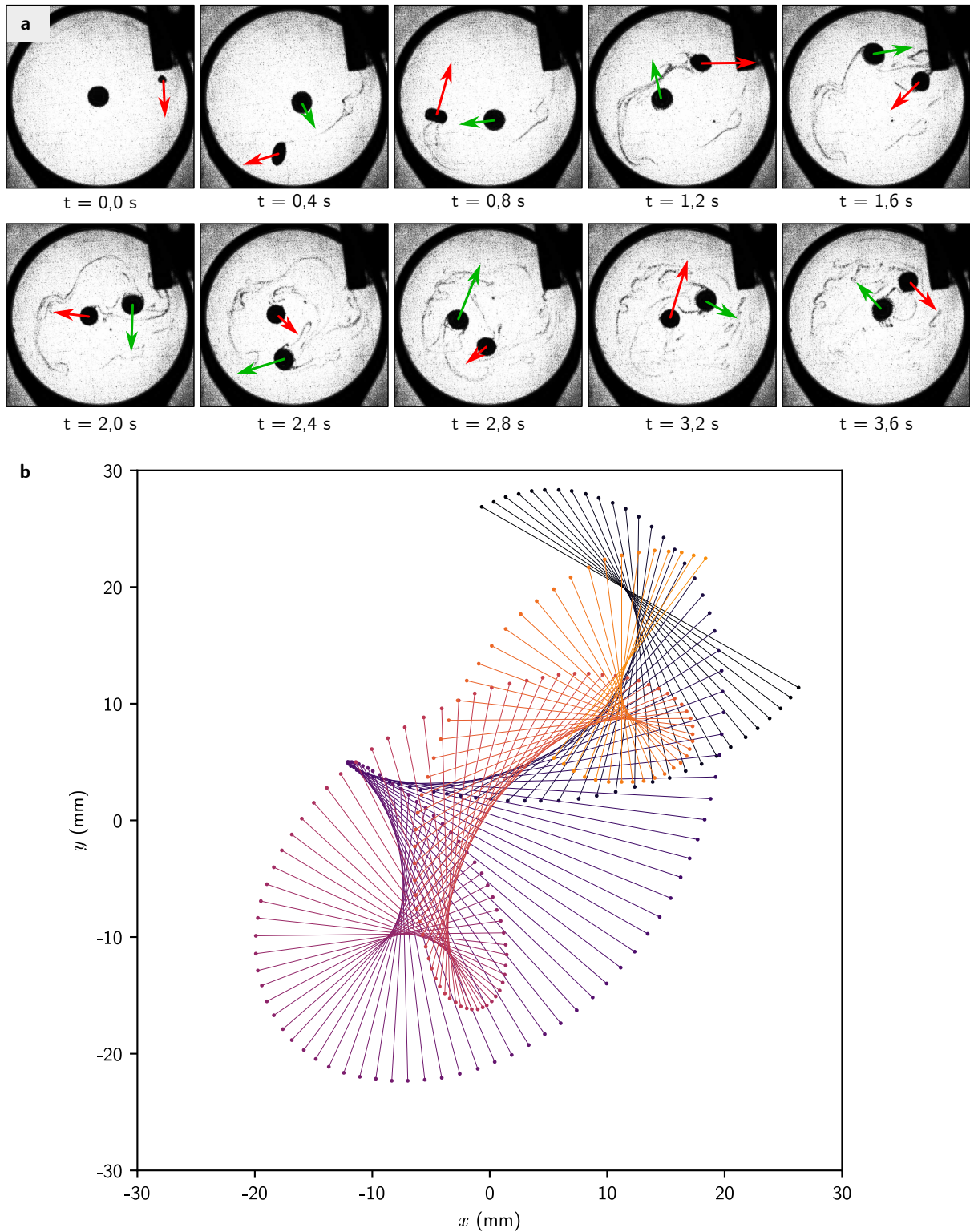


FIGURE IV.1 – Vues du dessus des orbites sur un film de savon de deux lentilles d'eau de 35 mg chacune. Les deux sous-figures **a** et **b** représentent la même expérience. La séquence **a** montre des images traitées, où sont visibles les deux lentilles. Leurs vitesses respectives sont données par les flèches de couleur pour donner une idée du mouvement général, et ne sont pas à l'échelle. La courbe **b** superpose toutes les positions dans un même repère afin de donner une idée générale des trajectoires. Pour éviter de surcharger la zone, celles-ci ne sont tracées qu'entre 1,6 et 3,6 s. À chaque $1/60^{\circ}$ de seconde, les centres des deux lentilles sont marqués par des points et reliés par un segment pour identifier les couples correspondant au même temps. La couleur correspond au temps : plus le point s'approche du noir, plus il est ancien.

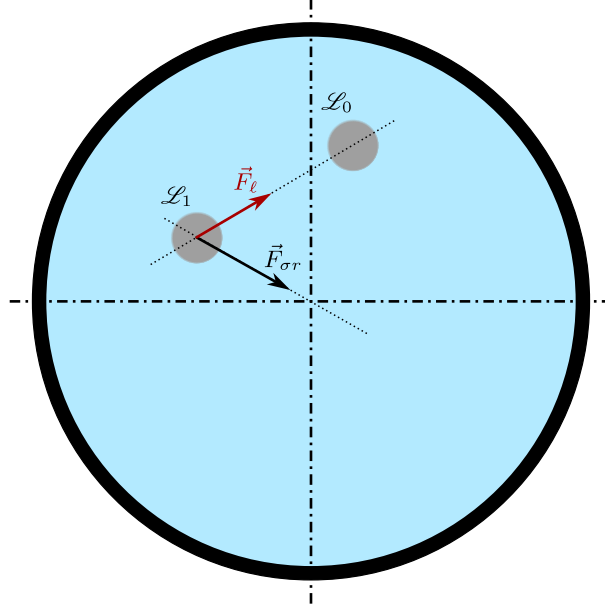


FIGURE IV.2 – Schéma vu du dessus d'un film de savon supportant deux lentilles \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 . Y sont marquées les forces s'appliquant sur la lentille \mathcal{L}_1 : $\vec{F}_{\sigma r}$, définie à l'équation III.10, l'attire vers le centre du film, et \vec{F}_ℓ représente l'attraction exercée par \mathcal{L}_0 .

de déformation du film, et donc de potentiel gravitationnel, que nous supposons linéairement superposé aux autres : la déformation totale est la somme des déformations produites par chaque lentille prise séparément. La lentille \mathcal{L}_1 est donc soumise à deux actions. L'une est la force $\vec{F}_{\sigma r}$, due à son propre champ de déformation (et à son interaction avec le cadre maintenant le film), et qui dérive du potentiel que nous avons décrit dans l'équation III.11. L'autre, \vec{F}_ℓ , décrit l'action du champ de déformation de \mathcal{L}_0 sur \mathcal{L}_1 , et c'est celle-ci que nous allons à présent étudier.

Afin de déterminer \vec{F}_ℓ , nous supposons que \mathcal{L}_1 , sans déformer le film, glisse sur la pente causée par \mathcal{L}_0 . La première étape de cette stratégie est logiquement de calculer cette pente.

Calcul de la pente sous \mathcal{L}_1

Rappelons l'altitude z_ℓ du film déformé par la lentille \mathcal{L}_0 , donnée à l'équation II.12 :

$$z_\ell(r, \theta) = \frac{m_0 g}{8\pi\sigma} \cdot \left[2 \ln \left(\frac{d}{R} \right) - \ln (1 - 2\varepsilon \cos(\theta - \theta_0) + \varepsilon^2) \right], \quad (\text{IV.1})$$

où (r_0, θ_0) est la position polaire de la lentille \mathcal{L}_0 sur le film, et en notant

$$d^2 = \|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) \quad (\text{IV.2})$$

et

$$\varepsilon = \frac{rr_0}{R^2}. \quad (\text{IV.3})$$

En restant encore une fois près du centre, de façon à avoir $r_0 \ll R$ et $r \ll R$, on a $\varepsilon \ll 1$, ce qui nous permet de simplifier l'expression à l'ordre 1 :

$$z_\ell \simeq \frac{m_0 g}{4\pi\sigma} \left[\ln \left(\frac{d}{R} \right) + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0) \right]. \quad (\text{IV.4})$$

En l'état, cette équation ne nous apporte pas grand-chose pour évaluer la force d'attraction que cette déformation exerce sur \mathcal{L}_1 vers \mathcal{L}_0 . Nous allons donc la réexprimer dans un système de coordonnées plus adapté, également polaire, selon le schéma IV.3 : aux coordonnées (r, θ) centrées sur le centre O du film, nous substituons le couple (d, φ) centré sur la lentille \mathcal{L}_0 . Ce changement s'accompagne d'une nouvelle base, $(\hat{u}_d, \hat{u}_\varphi)$, \hat{u}_d étant le vecteur directeur de $(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1)$ comme défini en figure IV.3. Nous avons déjà explicité le terme d à l'équation IV.2. Une double application du théorème d'Al-Kashi au triangle $(O; \mathcal{L}_1; \mathcal{L}_0)$ donne la relation :

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{r_0 - d \cos \varphi}{r}. \quad (\text{IV.5})$$

Utilisant l'expression de ε établie plus haut, on peut injecter ceci dans l'équation IV.4 pour obtenir :

$$z_\ell(d, \varphi) = \frac{m_0 g}{4\pi\sigma} \left[\ln \left(\frac{d}{R} \right) + r_0 \frac{r_0 - d \cos \varphi}{R^2} \right]. \quad (\text{IV.6})$$

La pente issue de ce profil est donnée par le gradient $\nabla z_\ell(d, \varphi)$. La quantité z_ℓ étant traitée comme un champ, notre étude se passe en deux dimensions, d'où :

$$\nabla z_\ell(d, \varphi) = \left(\frac{\partial z_\ell}{\partial d}; \frac{1}{d} \frac{\partial z_\ell}{\partial \varphi} \right)_{(\hat{u}_d, \hat{u}_\varphi)}, \quad (\text{IV.7})$$

la première composante de ce vecteur étant dans la direction $(\mathcal{L}_0; \mathcal{L}_1)$. Alors, en notant $\zeta = \frac{r_0 d}{R^2}$, on trouve :

$$\nabla z_\ell(d, \varphi) = \frac{m_0 g}{4\pi\sigma} \cdot \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \zeta \cos \varphi \\ \zeta \sin \varphi \end{pmatrix}_{(\hat{u}_d, \hat{u}_\varphi)} \quad (\text{IV.8})$$

dans notre nouvelle base $(\hat{u}_d, \hat{u}_\varphi)$. Nous avons déjà supposé que $r_0 \ll R$. En travaillant sur des lentilles assez proches l'une de l'autre, soit $d \ll R$, on note que $\zeta \ll 1$, ce qui nous donne à l'ordre zéro :

$$\nabla z_\ell \simeq \frac{m_0 g}{4\pi\sigma} \frac{1}{d} \hat{u}_d. \quad (\text{IV.9})$$

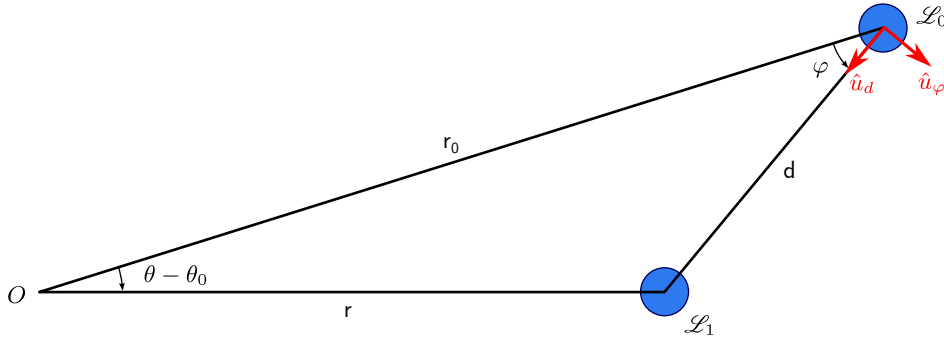


FIGURE IV.3 – Triangle formé par les lentilles \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 , et le centre du film O .

Force d'attraction

Maintenant que nous avons la pente sur laquelle glisse \mathcal{L}_1 , nous pouvons remonter à l'énergie potentielle qui caractérise cette dynamique. Il s'agit d'une énergie de pesanteur ; à une constante près : $E_p = m_1 g z_\ell(d, \varphi)$, m_1 étant la masse de la lentille et z_ℓ son altitude aux coordonnées (d, φ) définies précédemment. La force qui en dérive est donc :

$$\vec{F}_\ell = -\nabla E_p = -\frac{g^2}{4\pi\sigma} \cdot \frac{m_0 m_1}{d} \hat{u}_d, \quad (\text{IV.10})$$

valable – rappelons-le – aux approximations suivantes :

$$r_0 \ll R \quad ; \quad r \ll R \quad ; \quad d \ll R. \quad (\text{IV.11})$$

Une gravitation restreinte ?

On peut immédiatement noter une ressemblance entre l'expression IV.10 et l'expression de la force de gravitation newtonienne :

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G} \cdot \frac{m_0 m_1}{d^2} \hat{u}_d, \quad (\text{IV.12})$$

le rapport $\frac{g^2}{4\pi\sigma}$ étant alors l'homologue de la constante de gravitation universelle \mathcal{G} . On notera cependant deux différences.

La première est la différence d'ordre de grandeur entre ces deux forces. L'attraction \vec{F}_ℓ est ainsi nettement plus élevée que celle de gravitation \vec{F}_g pour deux mêmes masses m_0 et m_1 , avec un rapport proportionnel à la distance entre les deux corps, de 10^{13} pour $d = 1$ m. Cette différence d'ordre de grandeur rend \vec{F}_ℓ nettement plus aisée à observer que \vec{F}_g dans le cadre d'une expérience de laboratoire.

La seconde différence est la dépendance en d , et non en d^2 , de notre force d'attraction \vec{F}_ℓ . On peut traiter cette différence en reprenant l'explication de Tadashi Tokieda dans son introduction sur les marées astronomiques [13]. Le champ gravitationnel généré par une masse suit le théorème de Gauss, qui assure que son flux à travers une surface fermée centrée sur la masse est constant. Sur une surface en trois dimensions, soit une surface d'étude en d^2 , on retrouve donc une force gravitationnelle proportionnelle à d^{-2} . Si nous nous plaçons en deux dimensions, la surface de contrôle devient un cercle, de périmètre proportionnel à d . Alors, la force d'attraction gravitationnelle en deux dimensions se retrouve proportionnelle à d^{-1} . Ce cas est par exemple celui d'une distribution linéique de masse sur une droite.

On peut donc conclure que notre force d'attraction IV.10, prenant place sur un système dans les deux dimensions du film de savon, est analogue à une force d'attraction gravitationnelle en deux dimensions.

IV.1.2 La dynamique du système : un problème à trois corps

Munis de cette force d'interaction, nous pouvons analyser le mouvement d'une lentille \mathcal{L}_i en présence d'une autre lentille \mathcal{L}_j . Les indices i et j seront désormais accolés aux termes tels que la masse et la position (m_i, r_i , etc.) dans les équations établies précédemment pour signifier leur rattachement à l'une ou l'autre lentille.

On se place dans un repère cartésien (x, y) dont l'origine se situe au centre du film, et orienté arbitrairement. Dans ce formalisme, la force de rappel au centre de l'équation III.10 s'écrit :

$$\vec{F}_{\sigma r} = -\Gamma_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}_{(\hat{u}_x, \hat{u}_y)} \quad ; \quad \Gamma_i = m_i g \left(\frac{\xi}{4\ell_c^2} + \frac{m_i g}{4\pi\sigma R^2} \right), \quad (\text{IV.13})$$

celle d'interaction entre lentilles prend la forme :

$$\vec{F}_{\ell j \rightarrow i} = -T_{ij} \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \end{pmatrix}_{(\hat{u}_x, \hat{u}_y)} \quad ; \quad T_{ij} = \frac{g^2}{4\pi\sigma} \cdot \frac{m_i m_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (\text{IV.14})$$

et la force de friction de coefficient k devient :

$$\vec{F}_k = -k \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix}_{(\hat{u}_x, \hat{u}_y)}. \quad (\text{IV.15})$$

On notera au passage que le facteur T_{ij} , grâce au principe des actions réciproques, est symétrique : $T_{ij} = T_{ji}$. Par la suite, un simple principe fondamental de la dynamique donne l'équation différentielle suivante, régissant toute lentille \mathcal{L}_i sur le film de savon soumise à une lentille \mathcal{L}_j :

$$m_i \begin{pmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{pmatrix} + \Gamma_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + T_{ij} \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.16})$$

Il s'agit basiquement de l'équation III.17 établie précédemment pour une lentille seule, avec un terme de couplage supplémentaire pour une seconde lentille. Pour autant, cet ajout complexifie considérablement le système. Ce dernier est à présent composé de deux lentilles, dont les dynamiques sont couplées par la force d'attraction \vec{F}_ℓ , et qui interagissent en outre avec le cadre par l'intermédiaire du film de savon, via la force $\vec{F}_{\sigma r}$. Cette force s'apparente à celle d'un troisième corps fictif, immobile au centre du film. Le fait qu'elle diffère radicalement de l'attraction entre les lentilles rend ce problème à trois corps particulier. Cet état est illustré dans la figure IV.4.

Dans tous les cas, la complexité de cette équation appelle une résolution numérique plutôt qu'analytique.

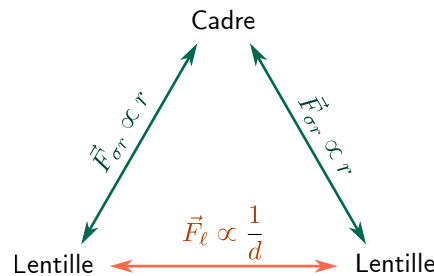


FIGURE IV.4 – Illustration des rapports entre les trois éléments du problème : deux lentilles liées entre elles par la force d'attraction, et au cadre par la force de rappel.

IV.1.3 Comparaison expérience / résolution numérique

Afin de valider l'équation IV.16, nous suivons les trajectoires de couples de lentilles sur un film de savon, filmées par au-dessus. Au début de l'expérience, l'une est au repos au centre du film, et l'autre est injectée à $t = 0$ s au bord du film avec une vitesse tangentielle non nulle, au moyen du toboggan hydrophobe présenté au chapitre I.

Le mouvement d'un couple de lentilles de 28 mg chacune est montré en figure IV.5, la sous-figure **a** donnant les mesures expérimentales à raison d'un point à chaque $1/60^e$ de seconde. Par souci de clarté, l'enregistrement montré ici ne commence pas à l'injection de la goutte secondaire, mais à un temps arbitraire permettant une trajectoire qui ne surcharge pas la figure. Sont montrés également les résultats de la résolution numérique des équations IV.16, effectuée via fonction `solve_ivp` de la bibliothèque python `scipy`. Les paramètres d'épaisseur du film ξ et d'amortissement k sont réglés à la main et, pour une meilleure correspondance avec l'expérience, la vitesse initiale mesurée de la lentille injectée a également fait l'objet d'une

correction arbitraire. La sensibilité des modèles numériques aux paramètres ξ et k est montrée dans les sous-figures **c** et **d**. On y voit que le système réagit différemment à un changement de 15 % de l'un ou de l'autre : le paramètre le plus sensible paraît être l'épaisseur du film, ξ . Au vu de la variabilité de ce paramètre d'une expérience à l'autre, déjà évoquée dans la section I.4, ce point peut rendre difficile la prédiction exacte des trajectoires sans une très bonne connaissance de l'épaisseur du film. Pour se faire une meilleure idée de la correspondance actuelle

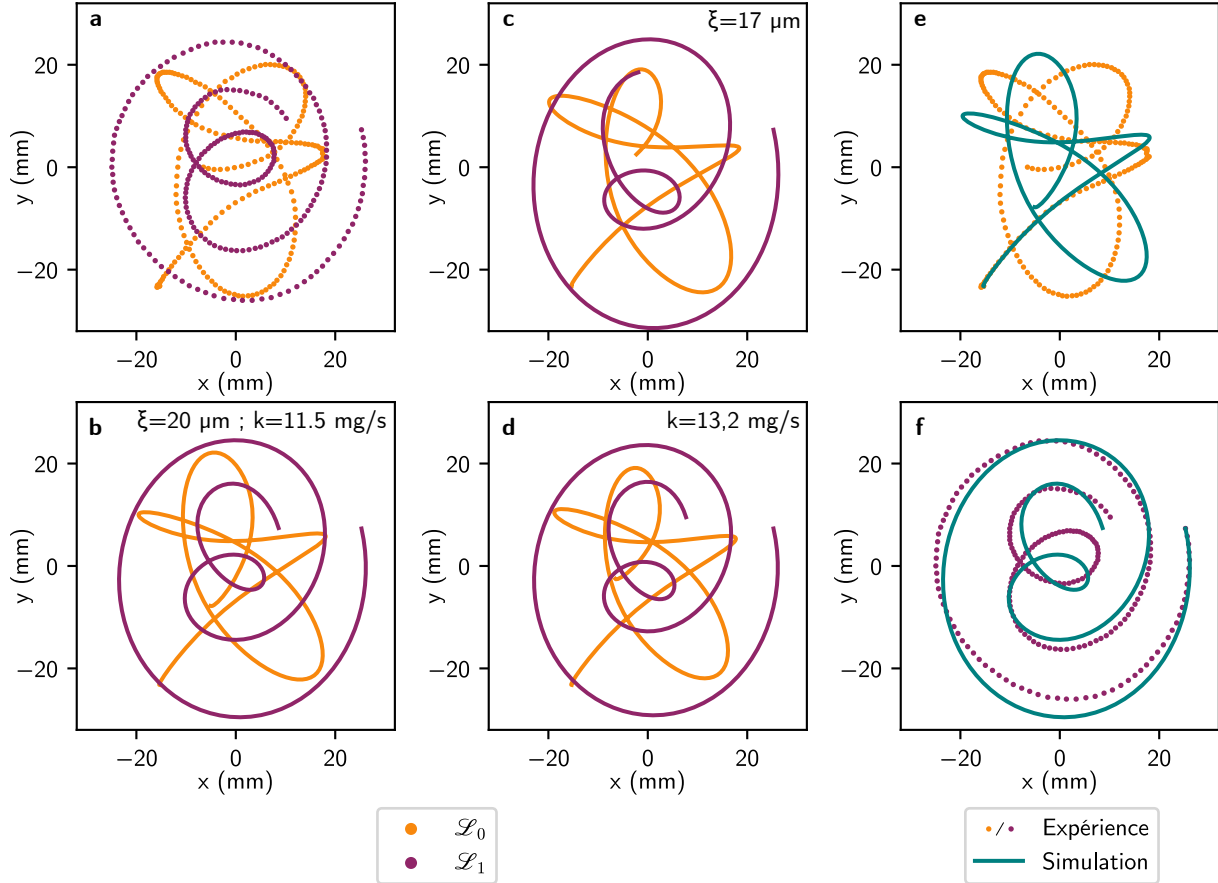


FIGURE IV.5 – Trajectoires de deux lentilles de même masse (28 mg) sur un film de savon. Pour éviter de surcharger la figure, l'expérience n'est tracée que sur une durée de 3,8 s à partir de $t = 2,5$ s. **a** : trajectoires mesurées expérimentalement. **b** : trajectoires simulées sur 3,1 s, après ajustement à la main de l'épaisseur du film $\xi = 20 \mu\text{m}$ et de la constante d'amortissement $k = 11,5 \text{ mg/s}$. La vitesse initiale mesurée de la lentille \mathcal{L}_1 a été corrigée arbitrairement d'un facteur 1.4 sur sa composante x et 2.6 sur sa composante y . **c** et **d** : réponse de la simulation **b** à des modifications respectivement de l'épaisseur et de l'amortissement, de l'ordre de 15 % de la valeur initiale. **e**, **f** : superpositions des trajectoires expérimentale de **a** et simulée de **b**, respectivement pour la lentille \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 .

modèle/expérience, les trajectoires mesurées et simulées de chaque lentille sont superposées dans les sous-figures **e** et **f**. La correspondance n'est pas parfaite mais, compte tenu de la complexité du système, nous pouvons la trouver satisfaisante.

Le cas où les deux lentilles ont des masses différentes est détaillé dans la figure IV.6. La lentille la plus lourde (ici de 39 mg, face à une légère de 16 mg, soit un rapport de masses de 2,4) est celle qui est initialement au repos (\mathcal{L}_0). Comme précédemment, les trajectoires mesurées et simulées sont montrées respectivement dans les sous-figures **a** et **b**, et sont superposées pour chaque lentille en **c** et **d**, avec des ajustements similaires à ceux de la figure IV.5. On y voit que l'adéquation expérience/simulation n'est, encore une fois, pas parfaite, mais que l'essentiel du mouvement est bien rendu.

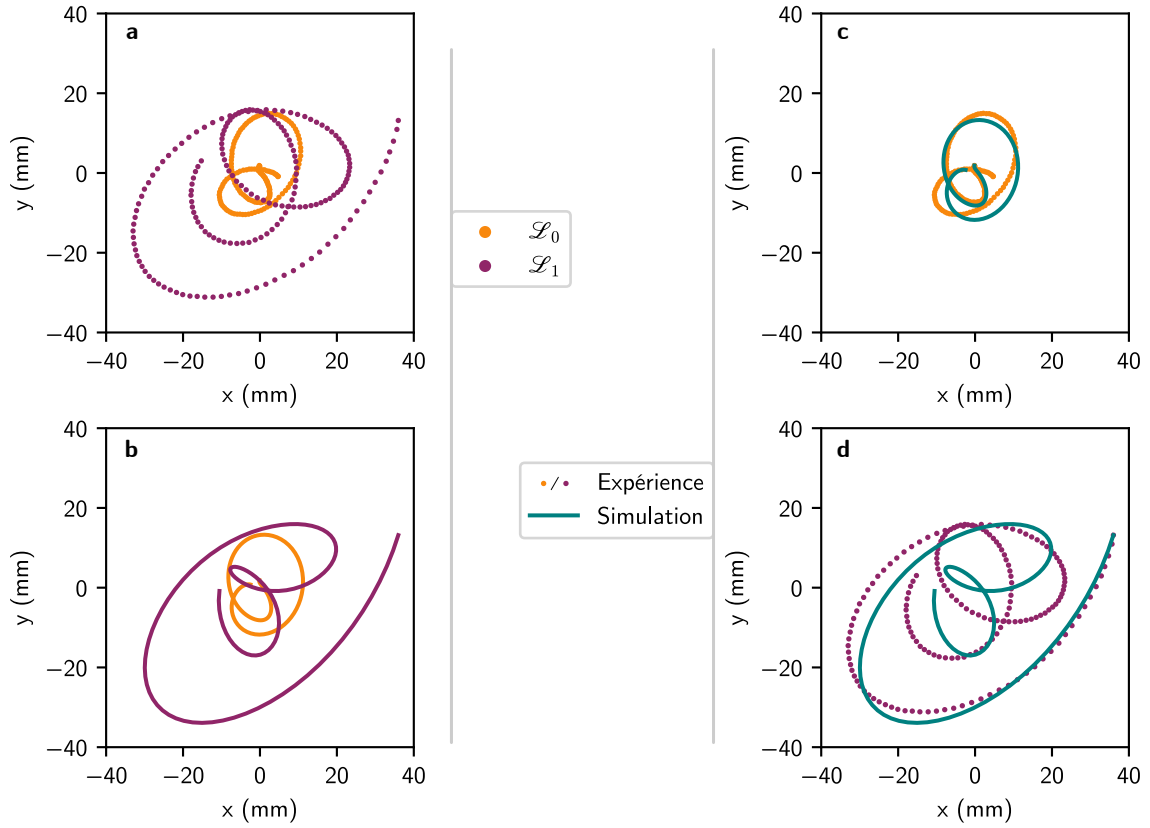


FIGURE IV.6 – Trajectoires de deux lentilles de masses différentes, l’une initialement au centre, de 39 mg (\mathcal{L}_0 , orange), l’autre injectée vers le bord, de 16 mg (\mathcal{L}_1 , violet). Pour éviter de surcharger la figure, l’expérience n’est tracée qu’entre $t = 0$ et $t = 1,5$ s. **a** : trajectoires mesurées expérimentalement. **b** : trajectoires simulées sur 2 s, après ajustement à la main de l’épaisseur du film $\xi = 30 \mu\text{m}$ et de la constante d’amortissement $k = 16 \text{ mg/s}$. La vitesse initiale mesurée pour \mathcal{L}_1 a été arbitrairement corrigée d’une division par 1,37 sur ses deux composantes x et y . **c** et **d** : superpositions des trajectoires expérimentale et simulée, respectivement pour la lentille \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 .

Dans les deux cas, on constate qualitativement que la théorie permet de décrire, de façon assez raisonnable, la trajectoire expérimentale. Les inexactitudes tiennent de plusieurs sources, déjà évoquées : la méconnaissance exacte de l’épaisseur du film de savon, du facteur d’amortissement, et la difficulté de mesure de la vitesse initiale (*cf.* section I.3.2). Il est également possible que, lorsqu’une lentille s’approche des bords du film, les approximations faites pour établir les équations du mouvement deviennent banales et introduisent des erreurs dans le modèle. Enfin, la supposition selon laquelle l’épaisseur ξ du film est homogène pourrait jouer un rôle non négligeable, compte tenu de la sensibilité du système à ce paramètre.

IV.2 – Interaction proche et fusion de deux lentilles : des phénomènes de marée analogue

Après 3 à 5 révolutions l’une autour de l’autre, les lentilles arrivent à très courte portée l’une de l’autre et commencent à se déformer mutuellement à distance. Suite à quoi, elles fusionnent en subissant des déformations extrêmes, et l’objet ainsi formé reprend une forme telle que décrite au chapitre II. Ces deux phases, interaction à courte distance et fusion au contact, seront étudiées indépendamment.

IV.2.1 Interactions à courte portée : forces de marées analogues

Etudions pour commencer les interactions entre les deux lentilles, juste avant le contact : si d est la distance entre les lentilles de rayons r_ℓ , on reste dans le cas où $d > 2r_\ell$. La figure IV.7 montre deux séquences d'interaction à faible distance entre deux lentilles : l'une entre lentilles de même masse (35 mg), et l'autre avec des masses différentes (39 et 16 mg, soit un rapport de 2,4 entre les deux). Sous chaque image des séquences, des ellipses marquent un agrandissement des contours relevés à la main des lentilles, la distance les séparant étant à l'échelle. Afin de mieux se représenter les déformations, on superpose aux contours sous les images **b** et **c**, ainsi qu'à ceux sous **e** et **f**, les contours initiaux respectivement relevés en **a** et en **d** (traitillés bleus).

On constate que, dans le premier cas, les deux lentilles sont déformées de la même façon tandis qu'elles se rapprochent ; dans le cas des masses différentes en revanche, c'est la lentille la plus légère (marquée par la couleur rouge) qui se déforme, tandis que la plus lourde semble garder sa forme initiale. Cette asymétrie dans la déformation sous les effets de marée analogue s'accroît considérablement au contact entre les lentilles, comme nous le verrons plus tard, où la plus légère est rapidement déformée en un unique bras de marée qui se déstabilise rapidement, absorbé par la masse centrale.

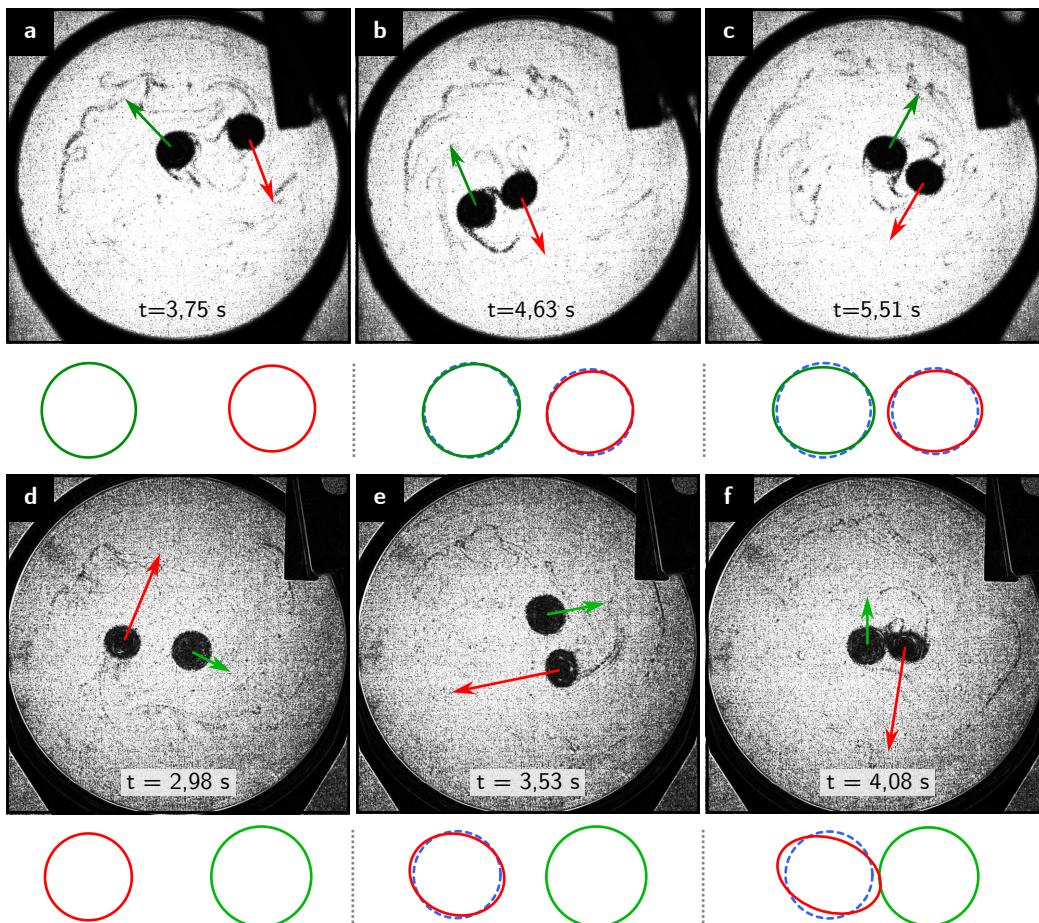


FIGURE IV.7 – Deux séquences (**a-c**, **d-f**) montrant les interactions à courte portée de deux lentilles sur le point de fusionner. Les lentilles en **a-c** ont la même masse (35 mg), et celles de **d-f** sont de masses différentes : l'une est de 39 mg (vert) et l'autre de 16 mg (rouge). Sous chaque image, les contours ajustés à la main des lentilles sont agrandis et superposés à leurs contours circulaires initiaux (en traitillés bleus), montrant ainsi leurs déformations respectives. Les flèches de couleur sont indicatives de la vitesse des lentilles, mais ne sont pas à l'échelle.

A première vue, le fait que la lentille la plus légère subit les plus grandes déformations peut sembler aller à l'encontre des lois régissant la tension de surface. En effet, considérant deux gouttes d'eau de diamètres différents, la plus grande sera plus aisément déformée par des forces extérieures que la plus petite : plus les dimensions d'un objet liquide sont faibles, plus les effets de tension de surface y sont importants et maintiennent sa forme. Cependant, dans le cas d'une lentille, la cohésion de l'objet n'est pas uniquement le fait de la tension de surface. D'autres forces sont à considérer, que nous listerons à la fin de cette sous-partie, et qui peuvent expliquer cette observation.

Avant le contact, la déformation d'une lentille est le fait de l'application inégale de la force d'attraction exercée par l'autre sur chacun de ses points. Comme le décrit la figure IV.8, chacun des points à l'intérieur d'une même lentille \mathcal{L}_1 sera attiré d'une façon différente vers le centre de masse de la seconde lentille, \mathcal{L}_0 (**a**). En retirant à ces forces celle appliquée au centre de masse de la lentille \mathcal{L}_1 , nous obtenons un champ de forces résiduelles (**b**) qui représente l'action de \mathcal{L}_0 sur tous les éléments de \mathcal{L}_1 les uns par rapport aux autres. En réponse à ces sollicitations, la lentille \mathcal{L}_1 finit par se déformer (**c**). Cet effet est très semblable aux phénomènes de marées gravitationnelles observés à des échelles bien plus larges. L'approche décrite ici est simplifiée : elle suppose notamment que les deux corps sont immobiles l'un par rapport à l'autre, et néglige toute force d'inertie ou de frottement.

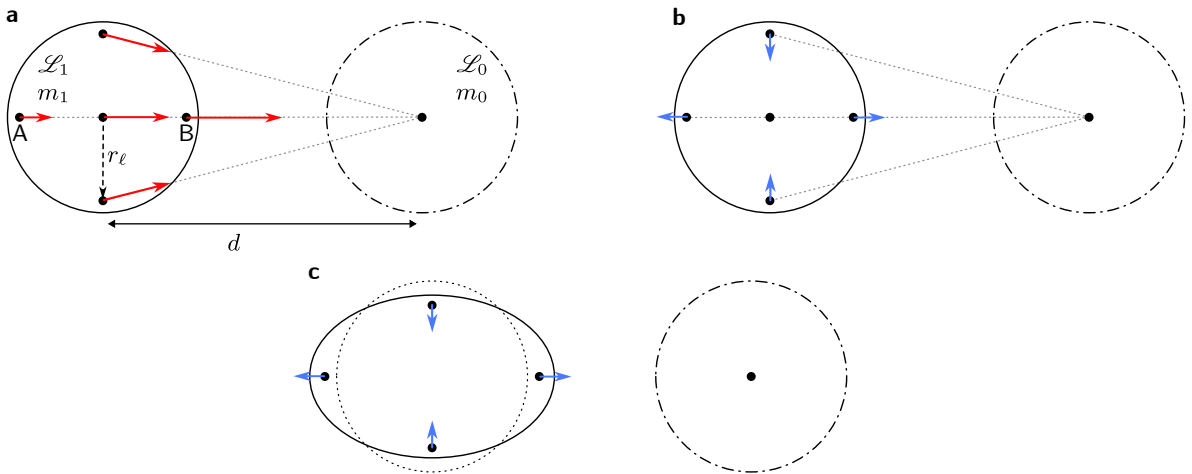


FIGURE IV.8 – Illustration du phénomène de marée analogue entre les lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_0 . Cette dernière, vue comme le perturbateur, est représentée toujours ronde, mais il va de soi qu'elle se déforme d'une façon similaire à \mathcal{L}_1 au cours du processus. En **a** : les particules fluides qui composent \mathcal{L}_1 sont attirées vers le centre de masse de \mathcal{L}_0 , chacune à sa façon. En **b** : les forces différentielles sont représentées, et leur effet dans la déformation de \mathcal{L}_1 se retrouve en **c**.

Nous nous proposons ici de monter une simple étude dimensionnelle du phénomène, d'où nous tirerons une ébauche de modèle. Reprenant le schéma IV.8a, on considère la lentille \mathcal{L}_1 , de masse m_1 , située à une distance d de \mathcal{L}_0 , de masse m_0 . On calcule la différence d'attraction par unité de masse, homogène à une accélération Δa_ℓ ressentie par les points B et A, chacun à une distance r_ℓ du centre. Ce choix de considérer l'attraction par unité de masse permet de rapprocher cette différence de la « force de marée représentative par unité de masse » [13], descriptive en première approximation des forces de marée auxquelles est soumis un corps. On a, d'après l'équation IV.10 :

$$\Delta a_\ell = \frac{g^2 m_0}{4\pi\sigma} \cdot \left(\frac{1}{d - r_\ell} - \frac{1}{d + r_\ell} \right) \quad (\text{IV.17})$$

où σ est la tension de surface, soit, en gardant à l'esprit que $d > 2r_\ell$:

$$\Delta a_\ell = \frac{g^2 m_0}{2\pi\sigma} \cdot \frac{r_\ell}{d^2 - r_\ell^2}. \quad (\text{IV.18})$$

On notera que cette différence d'accélération dépend, outre de la masse du corps attracteur \mathcal{L}_0 , de la distance au carré à celui-ci et du rayon de la lentille. Ce dernier, dans notre modèle, est considéré comme constant, et indépendant de la masse de la lentille. De la sorte, la force de marée tendant à déformer la lentille ne dépend donc, dans ce modèle simple, que linéairement de la masse de l'attracteur, et en carré inverse de la distance entre les lentilles.

A ces accélérations de marée s'opposent trois effets qui garantissent la cohésion de la lentille \mathcal{L}_1 :

- la tension de surface, qui tend à limiter les déformations de la lentille elle-même,
- la force d'attraction émise par \mathcal{L}_1 ,
- la gravitation, qui tend à maintenir l'altitude des couches de liquide de la lentille.

Pour ce dernier effet, il faut se rappeler que la lentille s'étend dans la direction verticale. Lors de sa déformation, il faut donc compter avec une éventuelle élévation de ses couches de liquide, induisant un travail négatif de la gravitation. Lorsque deux lentilles de masses différentes interagissent, c'est probablement cet effet-ci qui est responsable de la plus grande déformation de la plus petite lentille face à la plus lourde.

Ces trois effets sont particulièrement complexes à modéliser, compte tenu notamment de la géométrie particulière de la lentille. Pour l'instant, nous nous contenterons donc de les signaler, et de noter que, pour nos expériences, nous observons un régime que nous pourrions qualifier de faibles déformations. Cependant, cela change radicalement lorsque les lentilles entrent en collision.

IV.2.2 La fusion : une approche qualitative

Lorsque les deux lentilles arrivent au contact, leur dynamique inclut trois forces principales :

- la déformation du film qui, via la gravitation, tire les fluides vers le point le plus bas ;
- la tension de surface, qui ne s'applique plus à deux corps distincts, mais à un seul ;
- les forces d'inertie dues au mouvement de rotation important lors de cet événement.

On peut évidemment ajouter à cela les frottements avec l'air et les dissipations visqueuses, au sein des lentilles comme entre elles et le film.

Ces effets dépendent beaucoup de la géométrie, certes non triviale, qu'adopte le couple de lentilles après contact. Ils sont donc difficiles à évaluer, et rendent l'étude théorique de cette partie particulièrement ardue. A ce jour, nous en restons donc à l'étude qualitative du phénomène. La figure IV.9 montre la séquence de fusion de deux lentilles de même masse, 15 mg. On peut y voir la formation après contact de bras allongés, de ponts de matière et, enfin, de bras spiraux. Notons également que les lentilles, après avoir presque fusionné visiblement en un filament dans les premiers instants de la rencontre, retrouvent chacune leur forme en se séparant, avant de se rapprocher à nouveau et de finalement fusionner.

Ces séquences ne sont pas sans rappeler d'autres phénomènes physiques. On peut notamment les rapprocher du pendant astrophysique de la fusion de corps fluides circulaires : la fusion de galaxies. Pour nos lentilles, les forces de cohésion sont un mélange de tension de surface, qui

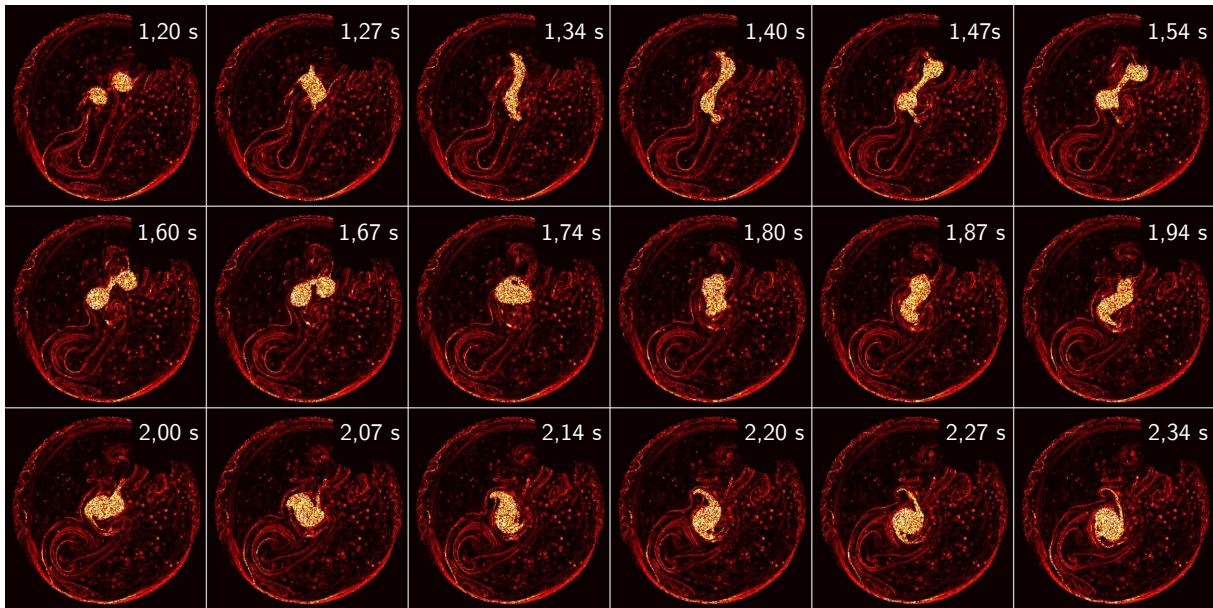


FIGURE IV.9 – Séquence de fusion de deux lentilles de même masse 15 mg. Les images sont traitées par un algorithme de *Background Oriented Schlieren*.

tend à maintenir une lentille de forme circulaire, et de gravité locale, qui attire les lentilles vers les zones les plus basses du film. Dans le cas des galaxies, ce rôle est joué par la force de gravitation : elle tend à réduire la surface globale du corps, et attire toutes les particules (ou étoiles, dans le cas des galaxies) vers le centre de masse. Les effets inertiels, eux, sont tout autant présents dans les fusions, qu'il s'agisse de lentilles ou de galaxies, et jouent une grande part dans les structures de marées observées [13].

La figure IV.10 met en relation deux séquences de fusion de galaxies (images issues de la base de données GalMer [72], via l'accès web galmer.obspm.fr) avec les images expérimentales de fusion de lentilles. Dans tous les cas, les deux corps impliqués ont la même masse. La séquence **a-f** fait interagir deux galaxies elliptiques géantes gE0 (conditions de simulation : type d'orbite 1 dans la base de données), et est comparée à la séquence **g-l** de fusion de deux lentilles de 28 mg chacune. Les galaxies spirales, plus proches d'un disque que d'un ellipsoïde, sont traitées par la séquence **n-s** (galaxies géantes gSa, type d'orbite 2 dans la base de données), et sont mises en relation avec des lentilles de 15 mg chacune (séquence **t-y**, la même que dans la figure IV.9). Des images prises par le télescope Hubble de couples de galaxies en train de fusionner (IC 2545 et UGC 8335) sont également fournies, pour comparaison avec les séquences.

On constate dans tous les cas une certaine ressemblance d'image à image, avec les mêmes structures qui se mettent en place (bras spiraux, ponts de matière). Afin de mettre en évidence les similitudes de chronologie entre les simulations galactiques et les lentilles sur film de savon, des flèches de temps ont été ajoutées de part et d'autre de la figure, situant chaque image dans la chronologie de sa séquence. Les points extrêmes de ces flèches ont été alignés entre eux afin de rendre les durées comparables, mais les intervalles restent à l'échelle au sein d'une flèche. On voit que les durées entre chaque image de séquence correspondent plutôt bien, malgré l'immense différence d'échelle temporelle entre les phénomènes abordés. Pour les images affichées, on pourrait donc considérer que, pour **a-f** et **g-l**, 1 seconde d'expérience de lentilles vaut 770 millions d'années dans la simulation de galaxies, contre 360 millions d'années pour **n-s** et **t-y**. Cette correspondance dépend beaucoup du choix des images sélectionnées, un choix effectué sur un critère qualitatif de ressemblance à l'œil nu. Elle peut donc grandement varier mais, en fonction des choix, semble tourner autour de 1 seconde pour 500 millions d'années dans tous les cas.

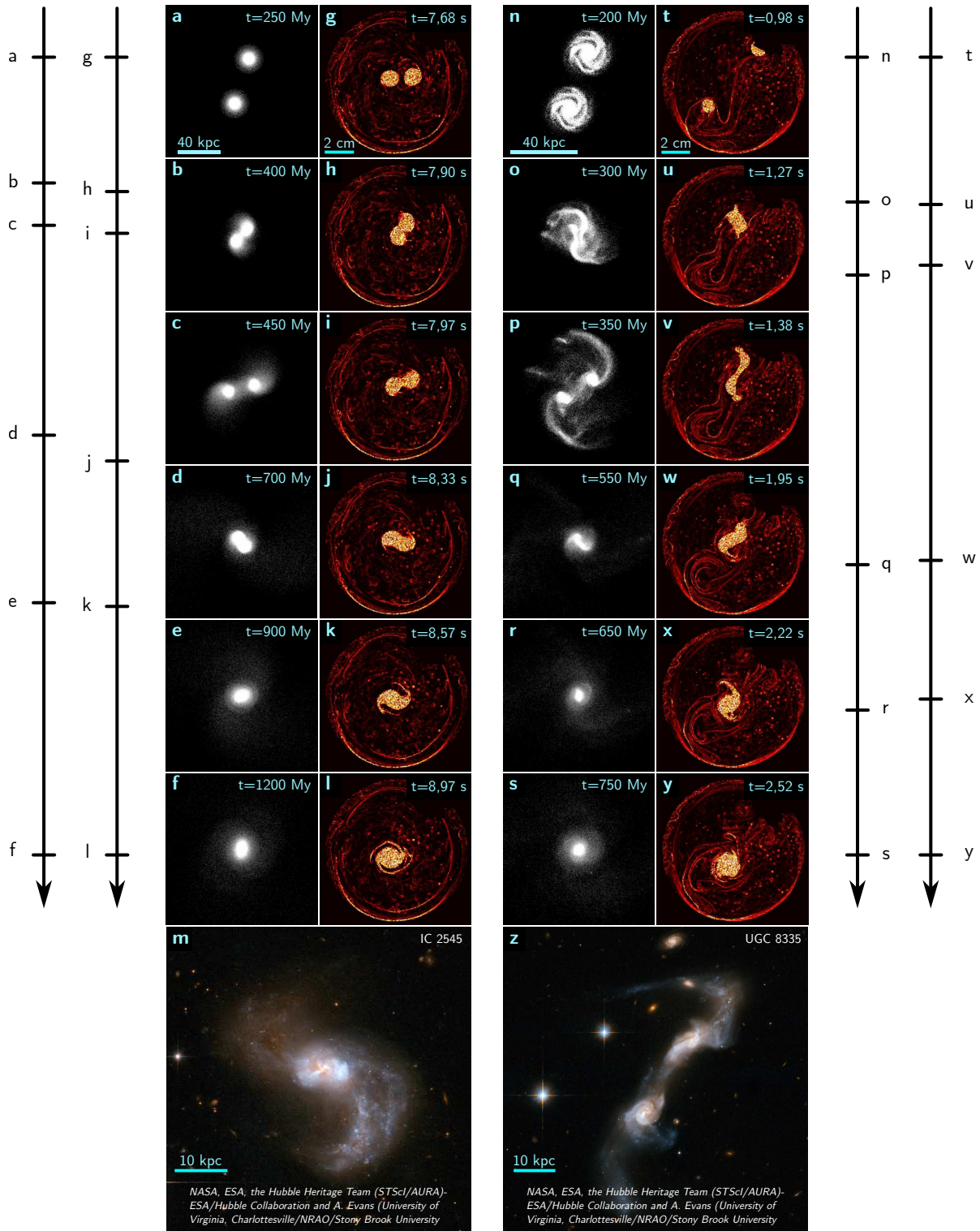


FIGURE IV.10 – Comparaison entre des fusions simulées de galaxies extraites de la base de données GalMer [72] (**a-f**, **n-s**) et des fusions de lentilles sur un film de savon (**g-l**, **t-y**). La simulation (**a-f**) montre les interactions entre deux galaxies elliptiques géantes ($gE0$), et est mise en regard avec la fusion de deux lentilles pesant 28 mg chacune (**g-l**). La séquence (**n-s**) reproduit la collision de deux galaxies spirales géantes (gSa), que l'on peut comparer avec la fusion de deux lentilles de 18 mg chacune (**t-y**). Les images (**m**) et (**z**) sont des images composites prises avec le télescope spatial Hubble, et montre les systèmes de galaxies en fusion IC 2545 et UGC 8335, pour comparaison avec les séquences qui les surmontent. De chaque côté de l'image, des flèches placent chaque image de séquence dans sa ligne chronologique (une flèche par séquence), pour comparaison. Les points extrêmes sont alignés afin de rendre les chronologies comparables.

Une interprétation possible au fait que la séquence des lentilles « lourdes » (28 mg) ressemble à celle des galaxies elliptiques tandis que les lentilles « légères » se comportent comme des galaxies disques peut être proposée en considérant notre film de savon en trois dimensions. Toutes les lentilles adoptant un rayon semblable indépendamment de leur masse (*cf.* chapitre II), les plus lourdes n'ont d'autre choix que de se creuser, tandis que les plus légères s'étendent plus en surface. De ce fait, les lentilles légères peuvent ressembler davantage à des disques qu'à des ellipsoïdes, lesquelles sont plus représentatives des lentilles lourdes. Ceci est une hypothèse, appelant toujours une validation théorique et expérimentale.

Pour appuyer la similitude entre nos lentilles en fusion et les galaxies dans le même cas, les images **m** et **z** de la figure IV.10 montrent des images prises par le télescope Hubble de couples de galaxies en interaction. On peut y retrouver les mêmes éléments structurels que ceux décrits plus haut dans nos lentilles, quoiqu'à des échelles considérablement plus étendues.

Concernant la fusion de deux lentilles de masses différentes, la figure IV.11 montre la séquence de fusion d'une lentille de 39 mg et d'une de 16 mg. L'accès web de la base de données GalMer ne donne pas accès à une simulation pour un tel rapport de masse (n'y sont disponibles que des ratios de 1 ou de 1/10 pour les plus proches), c'est pourquoi aucune séquence de galaxie n'est affichée en parallèle. Néanmoins, la déformation importante par rapport à la lentille lourde de la lentille légère, et sa distorsion en un long bras spiral, rappelle quelques observations de galaxies faites par Zwicky et présentées au début de cette partie (figure 1).

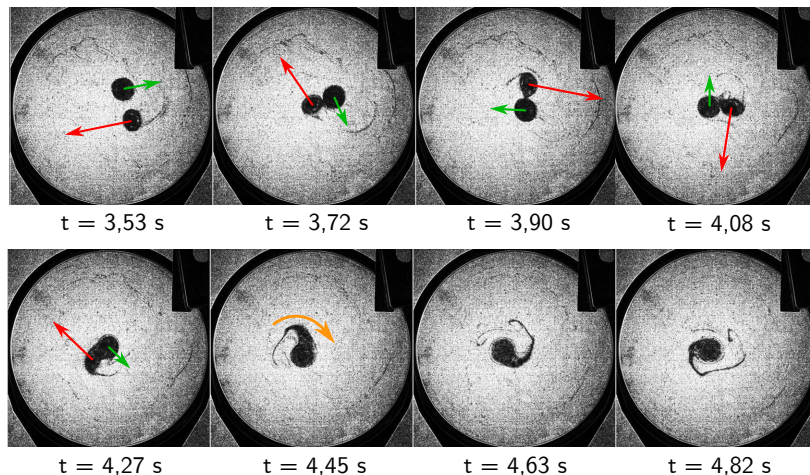


FIGURE IV.11 – Fusion de deux lentilles de masses différentes : une centrale au départ, de masse 38,5 mg, et une injectée de 15,5 mg. Les flèches représentent les vitesses relatives des lentilles et ne sont pas à l'échelle.

IV.3 – Vers des analogies formelles et des études complètes

Le modèle d'interaction de deux lentilles sur un film de savon, synthétisé dans l'équation IV.10, a montré une bonne cohérence avec les dynamiques observées expérimentalement. Comme nous l'avons déjà précisé, l'étude des trajectoires complètes des lentilles gagnerait cependant en précision si nous pouvions mieux cerner certains paramètres, tels que les frottements qui agissent sur les lentilles, ou l'épaisseur du film de savon. Avoir une mesure en temps réel de celle-ci, et prendre en compte ses variations spatiales dans notre modèle, seraient des améliorations certaines. En l'état, toutefois, l'équation IV.10 propose une loi relativement simple d'attraction analogue à une force d'attraction gravitationnelle en deux dimensions, ce qui est encourageant

pour ce champ d'étude.

Cependant, si nous devons poursuivre cette étude, ce serait probablement plus pour explorer en profondeur les interactions de marée, et la déformation des lentilles après contact lors d'une fusion. En effet, le modèle IV.18 présenté à la section précédente n'est, rappelons-le, qu'une ébauche visant à préparer une étude plus complète. Comparer ces effets de marée à ceux de cohésion, listés dans la même section, sera d'une grande importance pour déterminer le comportement des lentilles à courte portée, mais pourra aussi présenter de grandes difficultés, notamment pour prendre en compte les effets de tension de surface. Une approche énergétique, en identifiant un potentiel de marée et en étudiant l'énergie de déformation de la lentille, semble être une piste prometteuse. Enfin, il conviendra d'ajouter aux effets de marée les forces d'inertie, qui peuvent entrer en jeu pour déformer nos lentilles en mouvement, ainsi que les frottements avec le film ou l'air qui peuvent accentuer les déformations. Une étude complète demanderait également les lois de réponse de nos lentilles aux contraintes, sujet qui pourrait donner lieu à un tout autre travail.

Quant au comportement suivant le contact entre les deux lentilles, nous n'avons développé ici que des considérations qualitatives. Déterminer les effets de la tension de surface dans cette dynamique sera crucial pour décrire formellement les processus de fusion, et il pourrait être intéressant de commencer l'analyse en observant les formes obtenues en fonction du rapport de masse des deux lentilles.

Des lentilles aux galaxies, pour toujours plus d'analogies

Dans cette partie, nous avons détaillé l'étude expérimentale et théorique du comportement de lentilles liquides sur un film de savon circulaire et horizontal, au repos et en mouvement. Cette étude s'est faite dans l'optique de déterminer à quel point la dynamique de ce système et la force d'attraction entre deux lentilles pouvait être rapprochées des interactions gravitationnelles observées et simulées jusqu'ici entre deux corps fluides tels que des galaxies. Ont été ainsi abordées les orbites de deux objets l'un autour de l'autre, et les interactions de marée gravitationnelle qui sculptent les couples de lentilles ou de galaxies en interaction.

Munis d'un dispositif expérimental permettant de déposer, sous le regard de deux caméras, des gouttes d'eau ou d'huile minérale sur un film horizontal avec ou sans vitesse initiale, nous avons commencé par déterminer les échelles de temps qui gouvernent un couple film / lentille au repos. Ainsi, le temps caractéristique de drainage et d'évaporation du film, ou encore de modification de la lentille au repos, de l'ordre de 100 s, s'est révélé bien supérieur à celui des observations faites par la suite, de l'ordre de 5 secondes, nous permettant de considérer ces objets comme évoluant de façon quasi-statique.

Cela fait, nous nous sommes penchés plus avant sur la réponse du film de savon à la présence de la lentille, et sur la structure de cette dernière. Nous avons donc modélisé le profil adopté par le film, et déduit que le rayon d'une lentille ne dépend pas de sa masse. En d'autres termes, une lentille légère, de l'ordre de 10 mg, s'étalera en une forme oblongue, se rapprochant d'un disque, tandis qu'une lentille lourde, de l'ordre de 50 mg, s'étendra vers le bas avec une étendue verticale la rapprochant plus d'un objet sphérique.

Nous avons ensuite étudié le cas d'une lentille unique se déplaçant le long d'un diamètre du film de savon, avec une vitesse purement radiale. Du profil de déformation du film, nous avons déduit sa trajectoire dans le plan vertical, soit son altitude en fonction de sa distance r au centre du film. La faible amplitude verticale de cette trajectoire nous a poussés à supposer que l'écrasante majorité du mouvement et de l'énergie du système pouvait être décrite dans un formalisme en deux dimensions, dans le plan horizontal. Par la suite, ce même profil de déformation nous a fourni l'expression d'une force, synthèse d'un équilibre entre gravitation et tension de surface, qui attire toute lentille posée sur le film vers le centre de ce dernier. Cette force dérive d'un potentiel fonction du carré de la distance au centre, et peut être assimilée à une force de rappel élastique. La forme de ce potentiel et l'expression de son modèle sont parfaitement confirmées par les mesures expérimentales, faites en déposant une unique lentille sur le bord d'un film et en étudiant son mouvement.

Munis de cette force centrale, nous avons pu modéliser le mouvement d'orbite d'une goutte seule lâchée en bordure du film avec une vitesse tangentielle non nulle. La résolution de

l'équation de la dynamique a donné une solution sous forme de couple d'oscillateurs harmoniques, chacun dans une direction du repère, et avec sa propre pulsation. L'asymétrie du système expérimental a causé un écart relatif entre ces deux pulsations d'environ 9 % ; une fois que nous avons pris cet effet en compte dans notre modèle, celui-ci a généré des trajectoires de lentilles très proches de celles observées.

Passant à des systèmes de deux lentilles sur un film de savon, nous avons ensuite étudié la force d'interaction entre les deux corps. Toujours en partant des modèles de déformation du film, nous avons pu déterminer son expression théorique sous certaines approximations. La prise en compte de cette force dans les équations de la dynamique, déjà posées dans le problème à une seule lentille, a permis de reproduire de façon satisfaisante des trajectoires de lentilles observées expérimentalement. Cette force d'attraction, proportionnelle au produit des masses des lentilles et à l'inverse de la distance qui les sépare, s'est révélée semblable à une loi de gravitation en deux dimensions, qui présente les mêmes propriétés.

Enfin, les effets de déformation causés par cette force d'attraction sur des lentilles à courte distance l'une de l'autre ont été étudiés, de façon qualitative, en utilisant des observations expérimentales et en proposant une ébauche de modèle. Nous avons montré que des effets similaires à ceux des marées gravitationnelles intervenaient sur la forme des lentilles dans ces configurations, et nous avons ouvert la question sur la dynamique précise du système après contact des deux lentilles. Détaillant le processus de fusion pour des couples de lentilles de même masse, nous avons pu le mettre en relation avec les images simulées de fusions de galaxies, observant les mêmes structures – ponts et bras spiraux de marées – se former. Un effet de la masse des lentilles sur la dynamique de fusion a été relevé : les lentilles légères se rapprochent plus des galaxies spirales, en forme de disques, que des galaxies elliptiques qui, elles, reproduisent mieux le comportement des lentilles lourdes. Nous avons proposé comme interprétation l'observation faite précédemment sur la forme des lentilles, plus discoïde pour les plus légères, plus sphéroïdes pour les plus lourdes. Le changement de géométrie dans la troisième dimension (verticale) serait, selon cette idée, la cause de ce changement.

En résumé, nous avons montré que notre système présente une analogie frappante avec les forces gravitationnelles en deux dimensions. Ce travail pose en tout cas une base sur laquelle ce modèle peut être étudié et consolidé, par exemple en théorisant les effets de friction et les interactions fluides lentille/film, jusqu'à mener à de véritables systèmes stellaires miniatures, allant jusqu'à reproduire les effets de marée. La présence de la tension de surface dans ce contexte ajoute à l'intérêt, car elle englobe des forces de cohésion qui n'apparaissent pas habituellement dans les études des forces de marée. Bien entendu, tout ceci ne peut se faire qu'en deux dimensions, ce qui reste une limite importante. Notamment, la force d'attraction, en $1/d$ plutôt qu'en $1/d^2$, ne peut reproduire fidèlement l'attraction gravitationnelle observée en trois dimensions dans notre univers.

Toutefois, il reste intéressant d'investiguer plus en profondeur les effets de cette force d'attraction sur les orbites et les déformations des corps fluides qu'elle affecte. Poursuivre ce travail pourrait commencer par :

1. mieux cerner – et donc mesurer précisément, peut-être avec une caméra spectrale – les profils d'épaisseur du film de savon pour chaque expérience, et prendre en compte, dans les différentes équations de cette partie, le fait que cette épaisseur ne soit pas homogène ;
2. théoriser la dissipation de l'énergie, en se basant sur les frottements avec le film de savon et la traînée visqueuse qui s'y produit, puis sur ceux avec l'air de part et d'autre du film ;
3. mener les équations établies jusqu'ici au-delà des hypothèses simplificatrices proposées,

et observer notamment le comportement d'une lentille qui s'approche du bord du film de savon ($r_0 \sim R$);

4. généraliser les équations du mouvement à N lentilles sur un film de savon, en s'appuyant sur les notations d'indice i et j déjà employés dans l'équation IV.16.

Suite à quoi, nous pourrions nous pencher sur les interactions à courte distance entre les lentilles, et améliorer ce qui a déjà été présenté. Notamment :

5. analyser les profils de déformation des lentilles en fonction du rapport entre leurs masses, et commencer une loi empirique de déformation ;
6. appuyer cette étude empirique par une loi de déformation/contrainte des lentilles liquides, que l'on obtiendrait en mesurant les déformations d'une lentille soumise à un champ maîtrisé de contraintes ;
7. établir une théorie détaillée des marées entre deux lentilles : jusqu'ici, nous sommes restés dans un cas statique et simplifié, sans prendre en compte les forces d'inertie ou celles de frottements, qui peuvent pourtant accentuer les déformations et qui font partie intégrante, au moins pour les effets d'inertie, des études de marées gravitationnelles.

Ces derniers points valent tant pour les interactions à courte distance que pour le comportement après contact des deux lentilles. Pour ce dernier cas, nous pourrions également :

8. étudier l'application de la tension de surface au système fusionné de deux lentilles, et sa contribution aux formes des bras spiraux et des ponts de matière que l'on peut observer.

D'une façon plus générale, une grande réussite pour l'établissement d'une analogie lentille/corps céleste serait le développement d'un formalisme complet sur le modèle des marées newtoniennes, qui passerait par :

9. obtenir un tenseur de marée, comme il en existe pour les marées galactiques [13].

Toutes ces perspectives restent dans le domaine des analogies entre les lentilles et la gravitation newtonienne. Mais puisque l'essentiel de la dynamique de notre système est issu d'une déformation géométrique du support (le film de savon), il serait intéressant de rechercher jusqu'où un parallèle avec la relativité générale serait pertinent. En assimilant la surface du film à l'espace-temps, on pourrait lancer une dernière idée :

10. rechercher le tenseur métrique d'un film de savon horizontal.

En somme, les films de savon sont loin d'avoir livré tous leurs secrets. Ce travail peut avoir ouvert un champ d'étude neuf et original, dont le suivi pourrait résulter en une meilleure compréhension générale des interactions à distance et des effets de marée entre deux corps fluides.

Deuxième partie

Source acoustique transportée par son
propre champ : vers des analogues
quantique

Rapprocher la mécanique des fluides et la mécanique quantique

1 – Mécanique quantique, mécanique des fluides et systèmes analogues

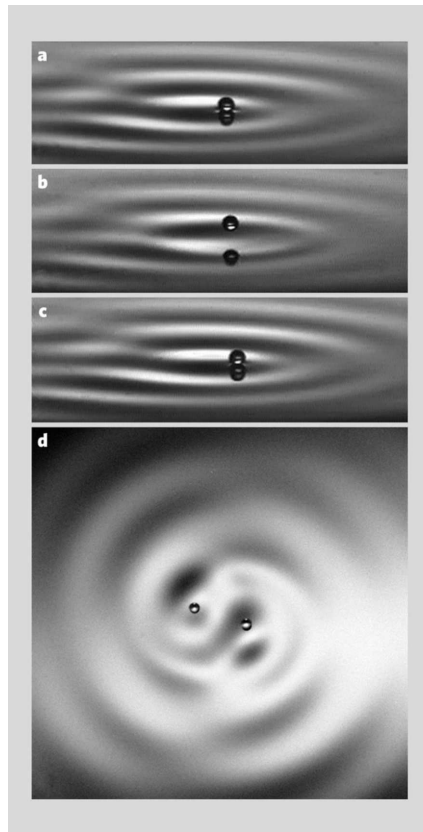
La mécanique quantique est sujette à plusieurs interprétations. Outre la plus répandue, l'interprétation de Copenhague, essentiellement probabiliste, Bell [73] en introduit quelques-unes en un brillant résumé. Parmi celles-là se trouve la théorie de l'onde pilote, développée par de Broglie [74, 75], ainsi que les travaux de Bohm [76], sur l'interaction entre une particule et un champ ondulatoire. Selon cette interprétation, qui repose sur un couplage onde-particule, le mouvement d'un objet en mécanique quantique est déterminé par l'interaction entre ses deux pendants : l'onde qui, issue de la particule, se propage dans tout le milieu environnant, et la particule localisée, qui se retrouve « guidée » par ses interactions avec l'onde.

De nombreuses analogies établies entre la mécanique quantique et des systèmes classiques, chaotiques ou ondulatoires, strictement basées sur des similarités entre équations, ne dépendent pas de l'interprétation choisie – l'ouvrage de Dragoman *et al.* [77], quoique désormais un peu daté pour un domaine en telle expansion, en donne un aperçu en mettant en relation la mécanique quantique et divers aspects de la mécanique classique, chaotique ou ondulatoire. Cependant, c'est autour de l'interprétation de Bohm – de Broglie que de récents travaux ont permis d'exhiber des comportements typiquement rencontrés en mécanique quantique sur un système hydrodynamique.

Ces travaux furent initiés par les premières expériences de Couder *et al.* sur les *marcheurs* [78] : sur un bain vibrant, excité juste en-dessous du seuil de Faraday [79, 80], une goutte rebondit périodiquement sur la surface, sans coalescer, créant ainsi une onde de Faraday localisée qui lui est liée (figure ci-dessous). Dans certains régimes, la goutte, lorsqu'elle rebondit, est décentrée par rapport à l'onde qu'elle émet, provoquant ainsi son auto-propulsion rebond après rebond dans le plan de la surface du bain.

De nombreux phénomènes associés à la mécanique quantique ont pu être reproduits grâce à ce dispositif, tels que l'effet tunnel [81, 82, 83, 84], la diffraction de particules solitaires accompagnée d'un phénomène en apparence semblable à l'expérience des fentes d'Young [85, 86, 87], la quantification des orbites [88, 89, 90], ou le comportement d'un électron dans un corral quantique [91, 92, 93, 94] allant jusqu'à rappeler l'effet de mirage quantique [95].

Une liste exhaustive des analogies développées avec ce système, ainsi qu'une explication plus en détail de la mécanique bohémienne qu'il tâche de reproduire, se trouve dans l'excellente



Photographies de gouttes se déplaçant en rebondissant sur leur onde de Faraday localisée à la surface d'un bain. En d, deux gouttes interagissent via leurs champs d'onde. Images tirées de [78].

revue de Bush et Oza [96]. Les détails expérimentaux et fondamentaux des marcheurs peuvent se trouver dans la thèse de Protiere à leur sujet [97].

Il y a bien entendu des limites dans les analogies établies, certaines comme l'expérience des fentes d'Young étant soumises à controverse [98, 99, 100, 101]. Ces études critiques montrent notamment la grande sensibilité de tels systèmes aux paramètres expérimentaux. D'une façon plus générale, nous retiendrons quatre points principaux laissant une marge d'amélioration à ces dispositifs, en tant qu'analogues onde/particule :

1. les marcheurs évoluent par nature en deux dimensions, sur la surface du bain, limitant la représentation de la mécanique quantique qui se fait naturellement en trois dimensions ;
2. l'onde pilotant un marcheur, à l'origine des effets de mémoire de la trajectoire, est sujette à une forte atténuation visqueuse¹ ;
3. les sources que sont les gouttes bondissantes sont toutes monopolaires, ce qui empêche l'exploration d'autres modes d'excitation ;
4. un marcheur a besoin d'une période de déconnexion du bain pendant laquelle l'onde évolue en son absence, déconnexion qui ne peut avoir lieu en trois dimensions.

Certains autres analogues hydrodynamiques parviennent à répondre efficacement aux soucis 3 et 4, en faisant surfer des objets vibrants à la surface d'un bain sur une onde gravitaire ou capillaire qu'elles y génèrent [104, 105]. La direction prise par ces surfers reste toutefois complètement dépendante de l'orientation initiale de ce dernier.

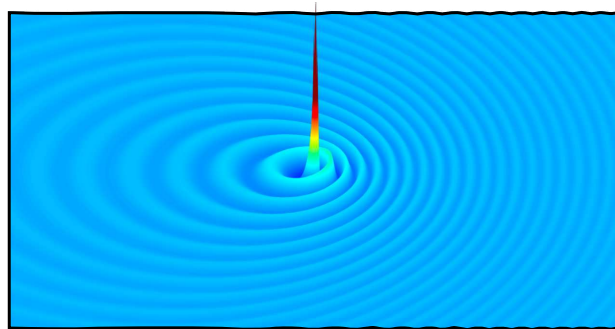
1. La longueur caractéristique d'atténuation d'une onde capillaire de 300 Hz dans de l'eau pure est typiquement de l'ordre de 30 mm [102], contre 10 m pour une onde acoustique de 2 MHz [103]. Ces longueurs d'atténuation augmentent avec la diminution de la fréquence.

2 – Systèmes acoustiques autopropulsés

Afin de s'attaquer plus généralement à ces problèmes, on peut chercher à changer la nature du système, et prendre en guise d'onde un champ acoustique généré par une particule immergée dans un milieu fluide. L'action de l'onde sur la particule est ici permise par la force de radiation acoustique, largement explorée depuis les travaux de Rayleigh [106], Langevin [107] et Brillouin [108], et résumée par Hasegawa *et al.* [109]. Il s'agit du phénomène qui intervient lorsqu'une onde acoustique rencontre un obstacle, et que celui-ci modifie sa propagation. Sur l'obstacle est appliquée une force résultant de deux types de non linéarités : d'une part celles intrinsèques des équations de Navier-Stokes compressibles, et d'autre part celles issues de l'intégration du champ de pression fluctuant dans le temps sur la surface elle-même en vibration de l'obstacle.

Cette force, appelée force de radiation acoustique, est suffisante pour déplacer des particules, et se trouve à la base des techniques de piégeage et de manipulation d'objets au moyen de pinces acoustiques [110]. Elle a ainsi fait l'objet d'études approfondies mettant en lumière son expression théorique, dans un premier temps pour des configurations simples d'ondes incidentes planes (action sur une particule sphérique rigide [111], une sphère fluide compressible [112], puis une particule élastique [113]), puis pour une onde focalisée (sur une particule rigide [114] et élastique [115]) et, enfin, pour des champs arbitraires agissant sur des particules sphériques dans le régime des grandes longueurs d'onde [116] ou pour une longueur d'onde arbitraire [117, 118, 119, 120]. Des expressions des couples exercés par des champs arbitraires sur une particule sphérique ont également été dérivées [121, 122, 123].

Nous pouvons donc agir sur une particule au moyen d'une onde acoustique. Cependant, le système que nous voulons reproduire ici exige que cette onde acoustique soit elle-même issue de la particule, et ne dépende pas d'un champ incident : outre la nécessité d'un fort couplage onde/particule, nous ne voulons pas qu'un effet extérieur conditionne la direction de propulsion de notre objet par son onde. Pour des raisons évidentes de symétrie, aucun champ acoustique isotrope émis par un objet immobile dans un milieu infini ne saurait exercer une quelconque force sur sa propre source. C'est pourquoi nous devons déstabiliser celle-ci dans une direction quelconque, brisant ainsi la symétrie du champ via l'effet Doppler. On observe ce faisant une résultante non nulle des forces de radiation acoustique sur la source, comme il fut démontré théoriquement pour une source monopolaire [124]. Le champ acoustique causant cette résultante est représenté ci-dessous, la vitesse de la source étant prise très grande dans l'illustration afin de rendre visible l'asymétrie du champ.



Champ acoustique émis par une source monopolaire se déplaçant avec un nombre de Mach $M=0,5$. Image tirée de [124].

Pour une source monopolaire, la résultante des forces de radiation auto-appliquées sur la source s'est révélée opposée au mouvement initial de celle-ci, adoptant un rôle de force

stabilisatrice. Puisque nous voulons générer une auto-propulsion de la source, nous souhaitons plutôt observer une force déstabilisatrice sur la source. Dans cette partie, nous calculerons donc théoriquement la force de radiation auto-exercée sur une source dipolaire après une perturbation de vitesse. Nous déterminerons qu'elle peut s'exercer dans la direction et le sens de la perturbation initiale, déstabilisant ainsi le système et initiant sa propulsion, sans tenir compte des effets de traînée visqueuse et de streaming acoustique. Nous concluons avec une étude dimensionnelle, montrant que, dans certains cas, la force de radiation acoustique ainsi obtenue peut rivaliser avec la traînée de Stokes.

Chapitre V

Force de radiation auto-induite par un dipôle en mouvement

V.1 – Expression générale de la force de radiation auto-exercée

Examinons d'abord la forme de notre force de radiation, lorsqu'elle s'exerce sur la source même du champ acoustique qui la génère. Nous considérons pour cela une source ponctuelle de force, sur laquelle nous allons revenir, et qui génère un champ acoustique à travers le milieu dans lequel elle est plongée. Ce milieu, au repos, est caractérisé par une masse volumique ρ_0 et une vitesse de propagation du son c . Pour l'instant, nous nous intéressons uniquement à la force de radiation que subit une surface.

Prenons donc n'importe quelle surface $\mathcal{S}(t)$ plongée dans un champ acoustique. La force de radiation s'appliquant sur elle correspond à la moyenne temporelle de toutes les contraintes qui s'y exercent, soit :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \left\langle \iint_{\mathcal{S}(t)} \bar{\sigma} \vec{n} \, dS \right\rangle. \quad (\text{V.1})$$

$\bar{\sigma}$ est le tenseur de contraintes sur la surface $\mathcal{S}(t)$, \vec{n} est le vecteur normal unitaire à la surface d'intégration, et dS est un élément de surface sphérique. $\langle \cdot \rangle$ est l'opérateur de moyenne temporelle d'une fonction périodique sur sa période. Si f est une fonction périodique de période T :

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(u) \, du. \quad (\text{V.2})$$

En raison de la dépendance de \mathcal{S} en t , il est difficile de réaliser une telle intégration. En outre, nous souhaitons appliquer cette expression à une source que nous avons supposée ponctuelle, et donc sans réelle surface \mathcal{S} sur laquelle exprimer un tenseur de contraintes. Pour ce type de problème, il convient de reporter l'intégrale de l'équation V.1 sur une sphère indéformable \mathcal{S}_∞ , centrée sur le dipôle, et projetée à l'infini avec un rayon r_∞ plus grand que n'importe quelle autre longueur du problème [116]. Ceci est illustré en figure V.1. Ceci se fait au moyen des théorèmes de Green-Ostrogradski et du transport de Reynolds, suivant le développement présenté en [110].

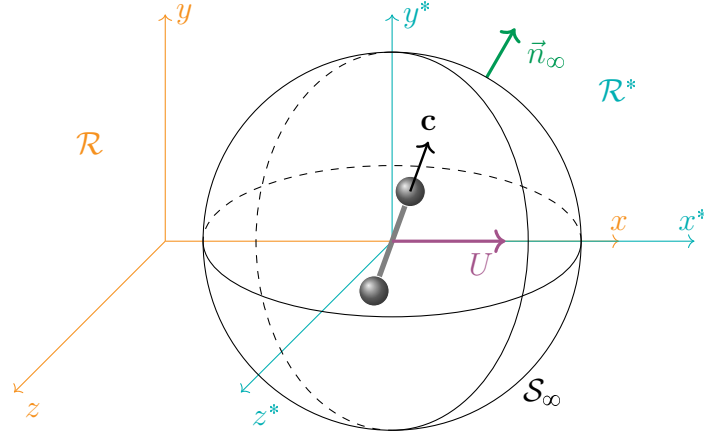


FIGURE V.1 – Schéma du problème dans deux référentiels munis de repères cartésiens : un galiléen $\mathcal{R} = (O, (x, y, z), t)$, et un lié à la source $\mathcal{R}^* = (O, (x^*, y^*, z^*), t)$. \vec{U} est la vitesse de translation de la source dipolaire. La surface sphérique \mathcal{S}_∞ , de rayon r_∞ très supérieur à toute autre longueur caractéristique du système, est centrée sur le dipôle et bouge avec lui, à la vitesse \vec{U} dans \mathcal{R} . On nomme \vec{n}_∞ le vecteur unitaire sortant normal à \mathcal{S}_∞ .

En principe, ce développement se fait pour un corps ponctuel immobile. Une difficulté survient donc lorsque notre source subit une perturbation de vitesse (notons \vec{U} la vitesse acquise), difficulté résolue par Roux *et al.* en faisant translater la sphère dans le référentiel \mathcal{R} avec la source et en adaptant la procédure [124]. Cette adaptation mène à l'expression suivante pour la force de radiation, en fonction des champs acoustiques au premier ordre, de vitesse \vec{v}_1 , de pression p_1 et de masse volumique ρ_1 :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \left\langle \iint_{\mathcal{S}_\infty} \left[\left(\rho_0 \frac{\vec{v}_1^2}{2} - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{p_1^2}{2} \right) \bar{\mathbb{I}} - \rho_0 \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 \right] \vec{n}_\infty dS \right\rangle + \left\langle \iint_{\mathcal{S}_\infty} (\vec{U} \cdot \vec{n}_\infty) \rho_1 \vec{v}_1 dS \right\rangle. \quad (\text{V.3})$$

\vec{n}_∞ est le vecteur unitaire sortant normal à la sphère d'étude \mathcal{S}_∞ tel que défini en figure V.1. Le premier terme est le résultat classique de la projection de l'intégrale sur une sphère infinie immobile ($\bar{\mathbb{I}}$ est la matrice identité). On y retrouve un terme d'énergie cinétique du fluide mis en mouvement par les déplacements acoustiques :

$$\vec{F}_{E_c} = \left\langle \iint_{\mathcal{S}_\infty} \rho_0 \frac{\vec{v}_1^2}{2} \vec{n}_\infty dS \right\rangle, \quad (\text{V.4})$$

un terme d'énergie potentielle, stockée dans les compressions du fluide sous l'action des ondes de pression acoustiques :

$$\vec{F}_{E_p} = - \left\langle \iint_{\mathcal{S}_\infty} \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{p_1^2}{2} \vec{n}_\infty dS \right\rangle, \quad (\text{V.5})$$

et un terme de convection, rendant compte de la vitesse acoustique transportée par les mouvements acoustiques du fluide :

$$\vec{F}_{\text{conv}} = - \left\langle \iint_{\mathcal{S}_\infty} [\rho_0 \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1] \vec{n}_\infty dS \right\rangle. \quad (\text{V.6})$$

Le second terme, quant à lui, rend compte de la translation de \mathcal{S}_∞ à la vitesse \vec{U} :

$$\vec{F}_{\text{trans}} = \left\langle \iint_{\mathcal{S}_\infty} (\vec{U} \cdot \vec{n}_\infty) \rho_1 \vec{v}_1 dS \right\rangle. \quad (\text{V.7})$$

V.2 – Champ de déplacements transporté par une source dipolaire en mouvement

À présent que nous avons une expression générale de la force de radiation exercée sur la source en mouvement, il nous faut déterminer les champs acoustiques de vitesse, de pression et de masse volumique. Pour cela, nous allons d'abord expliciter l'expression de la source dipolaire de force, qui est notre objet d'étude, et établir son équation d'onde pour un paramètre général que nous introduirons : le déplacement acoustique.

V.2.1 Source dipolaire

La nature dipolaire de la source acoustique introduit quelques complexités par rapport à l'étude sur le monopôle [124] : sa nature vectorielle rend obligatoire la prise en compte de l'orientation du dipôle par rapport à la vitesse de translation, que nous pouvons prendre comme axe de référence (Ox). Il existe plusieurs formalismes possibles pour rendre compte d'une telle source. Celui qui nous intéressera ici est l'expression d'une distribution volumique de force : on considère la force que le dipôle transmet au fluide qu'il déplace. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R} = (O, x, y, z, t)$ muni d'un repère cartésien, nous définissons donc notre source de force volumique :

$$\vec{f}_v(\vec{r}, t) = \vec{f}(t) \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z), \quad (\text{V.8})$$

en fonction des coordonnées de temps t et d'espace (x, y, z) , utilisant la fonction de distribution de Dirac δ . C'est le vecteur \vec{f} qui contient l'amplitude et la dépendance en t de la source, ainsi que son orientation spatiale. Dans un souci de généralité, on prendra une source de force ponctuelle de direction arbitraire avec des pulsations et déphasages arbitraires entre les axes :

$$\vec{f}(t) = F \begin{pmatrix} c_x \cdot \sin(\omega_x t + \psi_x) \\ c_y \cdot \sin(\omega_y t + \psi_y) \\ c_z \cdot \sin(\omega_z t + \psi_z) \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad (\text{V.9})$$

où F est l'amplitude et, pour chaque direction i prise parmi $\{x, y, z\}$, ω_i est la pulsation, ψ_i est la phase et c_i est un coefficient d'orientation. En totalité, (c_x, c_y, c_z) est un vecteur unitaire quelconque. De là, on peut aisément se rapporter à un unique oscillateur en définissant $\omega = \omega_x = \omega_y = \omega_z$, et en réglant toutes les phases à 0.

Faisons se déplacer cette source d'une petite vitesse constante $\vec{U} = Mc \hat{u}_x$ le long de l'axe (Ox) (cf. figure V.1), où $M \ll 1$ est le nombre de Mach et c , la vitesse de propagation du son. Le terme source devient :

$$\vec{f}_v(\vec{r}, t) = F \begin{pmatrix} c_x \cdot \sin(\omega_x t + \psi_x) \\ c_y \cdot \sin(\omega_y t + \psi_y) \\ c_z \cdot \sin(\omega_z t + \psi_z) \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \delta(x - Mct) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z). \quad (\text{V.10})$$

V.2.2 Equation d'onde

L'établissement de l'équation d'onde suit la procédure développée par Roux *et al.* [124], à une différence près : au lieu d'établir l'équation pour un potentiel de vitesses ψ_1 , nous utilisons

un champ de déplacements acoustiques \vec{u}_1 , plus adapté au traitement vectoriel nécessité par la source dipolaire. Cette différence introduit quelques changements mineurs dans le développement.

Equation du champ de déplacements

Afin d'établir l'équation d'onde du champ acoustique généré par cette source, on part des équilibres de masse et de quantité de mouvement que sont les équations d'Euler :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{V.11a})$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\nabla p + \rho \vec{g}, \quad (\text{V.11b})$$

où ρ est la masse volumique, \vec{v} est la vitesse, p est la pression et \vec{g} le vecteur accélération gravitationnelle. En appliquant l'approximation de l'acoustique linéaire, on décompose les champs en une part d'ordre 0 (fluide au repos) et une part d'ordre 1 (champ acoustique) :

$$\begin{cases} p = p_0 + p_1, & p_1 \ll p_0, \\ \rho = \rho_0 + \rho_1, & \rho_1 \ll \rho_0, \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, & \vec{v}_0 = \vec{0}. \end{cases} \quad (\text{V.12a})$$

$$(\text{V.12b})$$

$$(\text{V.12c})$$

On obtient ainsi les équations d'Euler linéarisées à l'ordre 1 (le terme $\rho_1 \vec{g}$ est négligé devant ∇p_1) :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\vec{v}_1) = 0 \quad (\text{V.13a})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = \vec{0}. \quad (\text{V.13b})$$

Ces équations sont établies pour un système non excité. Nous devons donc y ajouter notre source de champ acoustique (équation V.8), ce qui transforme l'équation V.13b en :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = \vec{f}(t) \cdot \delta(x - Mct) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z). \quad (\text{V.14})$$

En prenant en compte l'irrotationnalité du champ acoustique ($\nabla(\nabla \cdot \vec{v}_1) = \Delta \vec{v}_1$) et l'écoulement isentropique ($p_1/\rho_1 = c^2$), on peut obtenir une équation de propagation pour le champ des vitesses \vec{v}_1 . Pour cela, on soustrait c fois le gradient de l'équation V.13a de la dérivée temporelle de l'équation V.14. L'équation d'onde ainsi obtenue fait intervenir la dérivée temporelle du terme source présenté plus haut. Pour plus de praticité, on introduit le champ des déplacements acoustiques \vec{u}_1 , tel que $\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}$, ce qui permet, en intégrant l'équation des \vec{v}_1 sur le temps, d'obtenir une équation d'onde incluant le terme source dans sa forme originelle :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{u}_1 = \frac{1}{\rho_0} \vec{f}(t) \cdot \delta(x - Mct) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z). \quad (\text{V.15})$$

Transformation de Lorentz

La solution de l'équation V.15 est connue pour la fonction de Dirac $\delta(x)$, mais pas pour $\delta(x - Mct)$. Afin de faciliter la résolution du problème, nous nous ramenons donc à la solution connue au moyen d'un changement de variable. Ceci est possible en utilisant la transformée de

Lorentz, qui a la propriété intéressante de ne pas modifier l'équation de propagation des ondes. Ainsi, en définissant le paramètre $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$, on passe du référentiel initial \mathcal{R} à un référentiel bougeant avec la source :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Mct), & \text{(V.16a)} \\ y' = y, & \text{(V.16b)} \\ z' = z, & \text{(V.16c)} \\ ct' = \gamma(ct - Mx). & \text{(V.16d)} \end{cases}$$

On peut alors réécrire l'équation V.15 en :

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t'^2} - c^2 \Delta' \vec{u}_1 = \frac{1}{\rho_0} \vec{f} \left(\frac{\gamma}{c} [ct' + Mx'] \right) \cdot \delta \left(\frac{x'}{\gamma} \right) \cdot \delta(y') \cdot \delta(z'). \quad \text{(V.17)}$$

Expression finale de l'équation des déplacements acoustiques

De façon évidente, quel que soit $x' \neq 0$, le membre de droite est nul. Concentrons-nous donc sur $x' = 0$, garanti par la présence de $\delta(x')$. On peut dès lors utiliser la propriété de δ , selon laquelle $\delta \left(\frac{x'}{\gamma} \right) = \gamma \delta(x')$:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t'^2} - c^2 \Delta' \vec{u}_1 = \frac{\gamma}{\rho_0} \vec{f}(\gamma t') \delta(x') \delta(y') \delta(z'). \quad \text{(V.18)}$$

On peut encore simplifier cette équation en faisant appel à une deuxième transformation :

$$\begin{cases} x'' = \gamma x', & \text{(V.19a)} \\ y'' = \gamma y', & \text{(V.19b)} \\ z'' = \gamma z', & \text{(V.19c)} \\ ct'' = \gamma ct', & \text{(V.19d)} \end{cases}$$

menant à l'équation d'onde finale pour les champs de déplacement acoustique :

$$\Delta'' \vec{u}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t''^2} = -\frac{\gamma^2}{c^2 \rho_0} \vec{f}(t'') \delta(x'') \delta(y'') \delta(z''). \quad \text{(V.20)}$$

Il s'agit là d'une équation d'onde pour une source ponctuelle.

V.2.3 Champ de déplacements

La solution de l'équation des ondes pour une source ponctuelle est bien connue [125] :

$$\vec{u}_1 = \frac{\gamma^2}{c^2 \rho_0} \frac{\vec{f} \left(t'' \pm \frac{r''}{c} \right)}{4\pi r''}, \quad \text{(V.21)}$$

ce qui devient, après application des transformations inverses :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{f} \left(t - \frac{M(x-Mct) \pm R_1}{c(1-M^2)} \right)}{4\pi c^2 \rho_0 R_1}, \quad \text{(V.22)}$$

où :

$$R_1 = \sqrt{(x - Mct)^2 + (y^2 + z^2)(1 - M^2)}. \quad (\text{V.23})$$

Notons $R_{\pm} = \frac{M(x - Mct) \pm R_1}{1 - M^2}$ la distance entre la source et le point d'observation. En tant que distance, elle doit rester positive, ce qui implique pour $M < 1$ (nous travaillons à de faibles nombres de Mach) que la seule solution possible est R_+ , soit :

$$R = \frac{M(x - Mct) + R_1}{1 - M^2}. \quad (\text{V.24})$$

On obtient alors :

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{f}\left(t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi c^2 \rho_0 R_1}. \quad (\text{V.25})$$

V.3 – Champs de vitesse, de pression et de masse volumique

V.3.1 Champs acoustiques

Munis du champ de déplacements acoustiques, nous pouvons en déduire les champs utiles au calcul de la force de radiation selon l'équation V.3 : vitesse, masse volumique et pression dans le champ lointain. En effet, par définition :

$$\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}. \quad (\text{V.26})$$

De plus, en introduisant les déplacements acoustiques dans l'équation de continuité V.13a, on obtient en intégrant sur le temps :

$$\rho_1 = \frac{p_1}{c^2} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1. \quad (\text{V.27})$$

V.3.2 Expressions générales et approximation de champ lointain

Tout comme pour établir l'équation d'onde, on se place dans un repère (O, x^*, y^*, z^*, t) qui suit le mouvement de la source, sans pour autant cette fois recourir à la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} x^* = x - Mct, & (\text{V.28a}) \\ y^* = y, & (\text{V.28b}) \\ z^* = z, & (\text{V.28c}) \\ t^* = t, & (\text{V.28d}) \end{cases}$$

que l'on peut compléter, pour faciliter l'étude en champ lointain, d'un repère sphérique $(r^*, \theta^*, \varphi^*)$ centré sur le dipôle (*cf.* figure V.2) :

$$\begin{cases} x^* = r^* \cos \theta^*, & (\text{V.29a}) \\ y^* = r^* \sin \theta^* \cos \varphi^*, & (\text{V.29b}) \\ z^* = r^* \sin \theta^* \sin \varphi^*. & (\text{V.29c}) \end{cases}$$

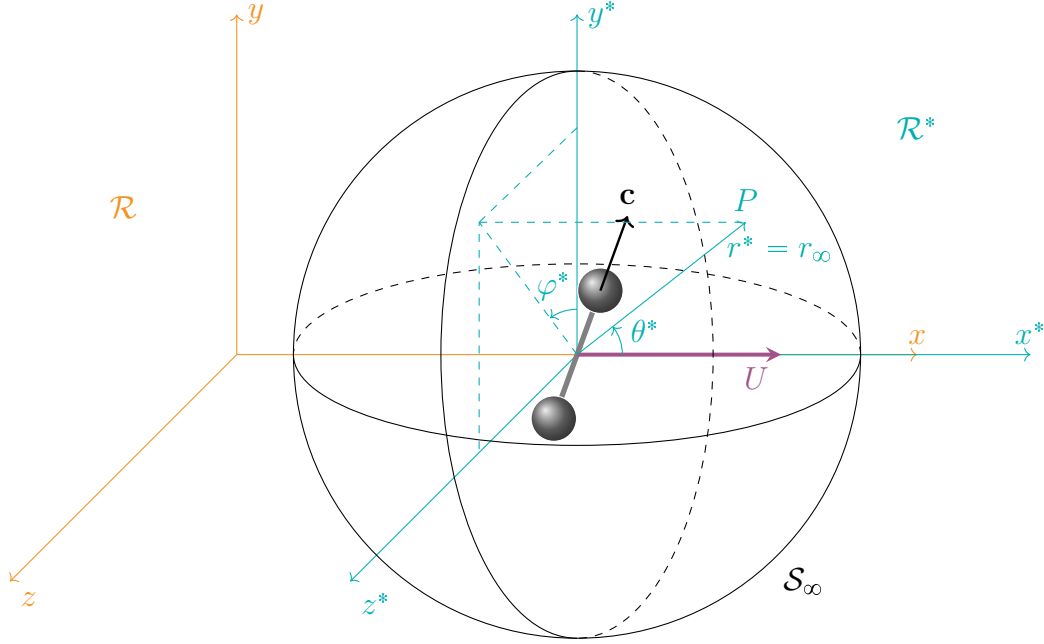


FIGURE V.2 – Schéma de l'étude du dipôle dans le référentiel \mathcal{R}^* muni du système de coordonnées sphériques $(r^*, \theta^*, \varphi^*)$, en un point P .

La transformation entre les deux repères \mathcal{R} et \mathcal{R}^* est galiléenne. Tant que notre vitesse de perturbation est petite devant celle du son ($M \ll 1$), on a aisément :

$$\begin{cases} R_1^2 = r^{*2} & +\mathcal{O}(M^2) \\ R = r^*(1 + M \cos \theta^*) & +\mathcal{O}(M^2). \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(V.30a)} \\ \text{(V.30b)} \end{matrix}$$

Puisque nous étudions notre système en champ lointain, on gardera à l'esprit que $r^* = r_\infty$ est arbitrairement grand pour un point situé sur la sphère d'étude \mathcal{S}_∞ . Afin d'anticiper les développements à venir, on peut d'ores et déjà exprimer les dérivées utiles des termes R et R_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &\simeq -Mc(\cos \theta^* + M), & \frac{\partial R_1}{\partial t} &\simeq -Mc \cos \theta^*, \\ \frac{\partial R}{\partial x^*} &\simeq \cos \theta^* + M, & \frac{\partial R_1}{\partial x^*} &\simeq \cos \theta^*, \\ \frac{\partial R}{\partial y^*} &\simeq \sin \theta^* \cos \varphi^*, & \frac{\partial R_1}{\partial y^*} &\simeq \sin \theta^* \cos \varphi^*, \\ \frac{\partial R}{\partial z^*} &\simeq \sin \theta^* \sin \varphi^*, & \frac{\partial R_1}{\partial z^*} &\simeq \sin \theta^* \sin \varphi^*. \end{aligned}$$

V.3.3 Champ des vitesses

A partir de l'équation (V.26) et à faible Mach, on exprime le champ des vitesses acoustiques :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{1}{4\pi c^2 \rho_0} \left[\frac{1}{R_1} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \left(t - \frac{R}{c} \right) - \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial t} \vec{f} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \\ &\simeq \frac{1}{4\pi c^2 \rho_0 r^*} \left[\left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} \right) \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right) - \frac{1}{r^*} \frac{\partial R_1}{\partial t} \vec{f} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \\ &\simeq \frac{1}{4\pi c^2 \rho_0 r^*} \left[(1 + M \cos \theta^*) \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right) + \frac{Mc \cos \theta^*}{r^*} \vec{f} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right], \end{aligned}$$

que l'on peut encore simplifier avec l'approximation des champs lointains :

$$\vec{v}_1 \simeq \frac{1 + M \cos \theta^*}{4\pi c^2 \rho_0 r^*} \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right). \quad (\text{V.31})$$

\vec{f}' est ici la dérivée temporelle de \vec{f} :

$$\vec{f}'(t) = F \begin{pmatrix} c_x \omega_x \cos(\omega_x t + \psi_x) \\ c_y \omega_y \cos(\omega_y t + \psi_y) \\ c_z \omega_z \cos(\omega_z t + \psi_z) \end{pmatrix}_{(x^*, y^*, z^*)}. \quad (\text{V.32})$$

V.3.4 Champ des pressions

Dans un raisonnement similaire, partant cette fois de l'équation V.27, on développe le champ des pressions acoustiques :

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\vec{f} \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R_1} \\ &\simeq -\frac{1}{4\pi R_1^2} \left[R_1 \nabla \cdot \vec{f} \left(t - \frac{R}{c} \right) - \vec{f} \left(t - \frac{R}{c} \right) \cdot \nabla R_1 \right] \\ &\simeq -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r^*} \left(-\frac{1}{c} \right) \nabla R \cdot \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right) - \frac{1}{r_\infty^2} \nabla R_1 \cdot \vec{f} \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \\ &\simeq \frac{1}{4\pi c r^*} \nabla R \cdot \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right), \end{aligned}$$

i.e.

$$p_1 \simeq \frac{1}{4\pi c r^*} \begin{pmatrix} \cos \theta^* + M \\ \sin \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix} \cdot \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right), \quad (\text{V.33})$$

en champ lointain, et au premier ordre en M . Une représentation de ce champ, avec une vitesse du dipôle prise au nombre de Mach $M = 0,5$ pour rendre plus visible l'effet Doppler, est donnée en figure V.3 dans les trois plans orthogonaux : (O, x, y) , (O, x, z) and (O, y, z) . Sur cette figure, l'orientation du dipôle (selon l'axe (Oy)) est choisie perpendiculaire à sa vitesse de déplacement (selon l'axe (Ox)), soit un vecteur unitaire d'orientation $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z) = (0, 1, 0)$.

V.3.5 Champ des masses volumiques

La propagation du champ acoustique se faisant de façon isentropique, on a simplement $\rho_1 = p_1/c^2$, soit :

$$\rho_1 \simeq \frac{1}{4\pi c^3 r^*} \begin{pmatrix} \cos \theta^* + M \\ \sin \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix} \cdot \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right). \quad (\text{V.34})$$

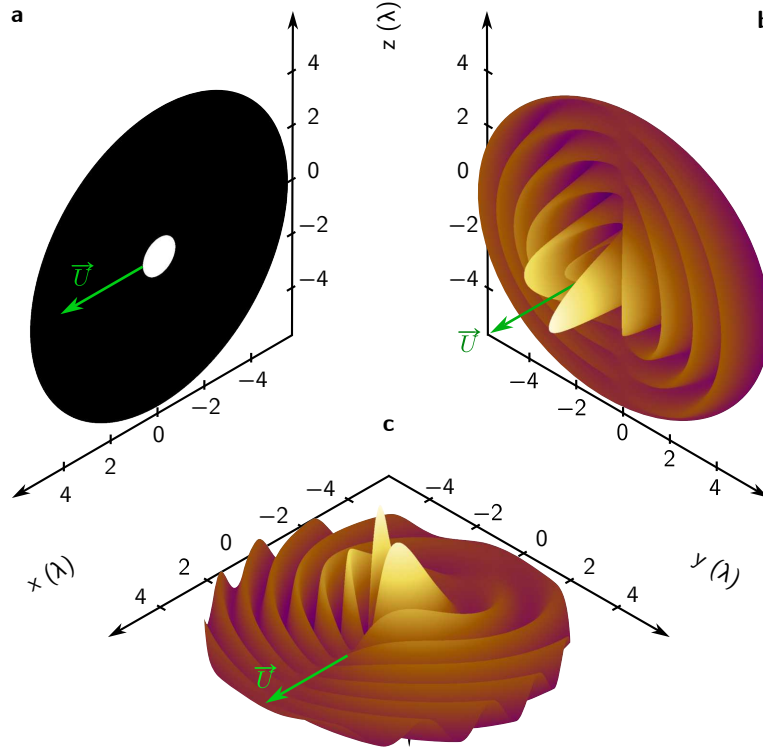


FIGURE V.3 – Champ de pression acoustique normalisé, créé par une source dipolaire orientée selon l'axe (Oy) et se déplaçant à une vitesse U selon l'axe (Ox) . Le champ est calculé à partir de l'équation V.33, et représenté respectivement en **a**, **b** et **c** dans les plans (O, x, z) , (O, y, z) et (O, x, y) . Afin de rendre plus visible l'effet Doppler causé par le déplacement, le nombre de Mach a été exagéré et pris à 0,5.

V.4 – Expression de la force de radiation

A partir de l'équation V.3, on peut calculer la force de radiation s'appliquant sur la source en sommant les différentes contributions :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \vec{F}_{E_c} + \vec{F}_{E_p} + \vec{F}_{\text{conv}} + \vec{F}_{\text{trans}} . \quad (\text{V.35})$$

Nous allons maintenant calculer ces différentes contributions à partir de leurs définitions (équations V.4, V.5, V.6 et V.7) et des expressions de la pression, de la vitesse et de la masse volumique calculées dans la section précédente.

V.4.1 Terme d'énergie cinétique

Commençons par le terme d'énergie cinétique (eq. V.4), intégré sur l'élément de surface à rayon r_∞ constant $dS = r_\infty \sin \theta^* d\theta^* d\varphi^*$:

$$\vec{F}_{E_c} = \int_{\theta^*=0}^{\pi} \int_{\varphi^*=0}^{2\pi} \left\langle \frac{\rho_0}{2} \vec{v}_1^2 \vec{n}_\infty r_\infty^2 \sin \theta^* \right\rangle d\varphi^* d\theta^* . \quad (\text{V.36})$$

Le vecteur normal r_∞ , est de la forme :

$$\vec{n}_\infty = \begin{pmatrix} \cos \theta^* \\ \sin \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix}_{(x^*, y^*, z^*)} \quad (\text{V.37})$$

Utilisant ceci, nous pouvons développer l'intégrande précédent, et trouver ainsi :

$$\left\langle \frac{\rho_0}{2} \vec{v}_1^2 \vec{n}_\infty r_\infty^2 \sin \theta^* \right\rangle = \frac{(1 + M \cos \theta^*)^2}{32\pi^2 c^4 \rho_0} \left\langle \vec{f}'^2 \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta^* \sin \theta^* \\ \sin^2 \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin^2 \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix}. \quad (\text{V.38})$$

Le facteur $\left\langle \vec{f}'^2 \right\rangle$ ne dépendant ni de θ^* , ni de φ^* , on peut le sortir de l'intégrale. Alors, après intégration de V.38 sur φ^* et θ^* , on a :

$$\vec{F}_{E_c} = \frac{M}{12\pi c^4 \rho_0} \left\langle \vec{f}'^2 \right\rangle \hat{u}_x. \quad (\text{V.39})$$

V.4.2 Terme d'énergie potentielle

Passons au terme d'énergie potentielle, défini en équation V.5.

$$\vec{F}_{E_p} = -\frac{1}{32\pi^2 \rho_0 c^4} \int_{\theta^*=0}^{\pi} \int_{\varphi^*=0}^{2\pi} \left\langle \left[\nabla R \cdot \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2 \sin \theta^* \vec{n}_\infty \right\rangle d\theta^* d\varphi^*. \quad (\text{V.40})$$

En nous concentrant sur l'intégrande :

$$\left[\nabla R \cdot \vec{f}' \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]^2 \sin \theta^* \vec{n}_\infty = \left[\begin{pmatrix} \cos \theta^* + M \\ \sin \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \right]^2 \begin{pmatrix} \cos \theta^* \sin \theta^* \\ \sin^2 \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin^2 \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix}, \quad (\text{V.41})$$

f'_x, f'_y, f'_z étant les coordonnées selon x^*, y^* et z^* de \vec{f}' . Alors :

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} \cos \theta^* + M \\ \sin \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \right]^2 &= (\cos \theta^* + M)^2 f_x'^2 + \sin^2 \theta^* \cos^2 \varphi^* f_y'^2 + \sin^2 \theta^* \sin^2 \varphi^* f_z'^2 \\ &+ 2(\cos \theta^* + M) \sin \theta^* \cos \varphi^* f'_x f'_y \\ &+ 2(\cos \theta^* + M) \sin \theta^* \sin \varphi^* f'_x f'_z \\ &+ 2 \sin \theta^* \sin \theta^* \cos \varphi^* \sin \varphi^* f'_y f'_z. \end{aligned}$$

Là encore, les facteurs $\langle f'_i f'_j \rangle$ ne dépendent pas de la position du point d'étude, et peuvent être sortis des intégrales. Nous les expliciterons plus tard. Cela fait, on peut éliminer les termes en $\cos \varphi^*$, $\sin \varphi^*$, et $\cos \varphi^* \sin \varphi^*$ qui s'annulent lors de l'intégration sur $[0, 2\pi]$, de même que ceux en $\cos^3 \theta^* \sin \theta^*$, $\cos \theta^* \sin^3 \theta^*$, $\cos \theta^* \sin \theta^*$, et $\cos^3 \theta^* \sin^3 \theta^*$ qui eux s'annulent en étant intégrés sur $[0, \pi]$. On peut donc écrire une expression simplifiée, après intégration :

$$\vec{F}_{E_p} = -\frac{M}{12\pi \rho_0 c^4} \begin{pmatrix} \langle f_x'^2 \rangle \\ \langle f'_x f'_y \rangle \\ \langle f'_x f'_z \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{V.42})$$

V.4.3 Terme de convection

Passons au terme de convection, défini à l'équation V.6.

$$\vec{F}_{\text{conv}} = -\left\langle \iint_{S_\infty} \rho_0 (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1) \vec{n}_\infty dS \right\rangle$$

dont l'intégrande se développe en :

$$\rho_0 r_\infty^2 \sin \theta^* (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1) \vec{n}_\infty = \frac{(1 + M \cos \theta^*)^2}{16\pi^2 c^4 \rho_0} \begin{pmatrix} f_x'^2 & f_x' f_y' & f_x' f_z' \\ f_y' f_x' & f_y'^2 & f_y' f_z' \\ f_z' f_x' & f_z' f_y' & f_z'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta^* \sin \theta^* \\ \sin^2 \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin^2 \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix}. \quad (\text{V.43})$$

Encore une fois, l'intégration fait disparaître les termes en $\cos \varphi^*$ et $\sin \varphi^*$. On peut simplifier à l'ordre 1 l'expression de \vec{F}_{conv} en :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{conv}} &= -2\pi \int_0^\pi \left\langle \frac{(1 + M \cos \theta^*)^2}{16\pi^2 c^4 \rho_0} \cos \theta^* \sin \theta^* \begin{pmatrix} f_x'^2 \\ f_y' f_x' \\ f_z' f_x' \end{pmatrix} \right\rangle d\theta^* \\ &= -\frac{1}{8\pi c^4 \rho_0} \begin{pmatrix} \langle f_x'^2 \rangle \\ \langle f_x' f_y' \rangle \\ \langle f_x' f_z' \rangle \end{pmatrix} \int_0^\pi (1 + 2M \cos \theta^*) \cos \theta^* \sin \theta^* d\theta^* \end{aligned}$$

Ce qui finalement donne :

$$\vec{F}_{\text{conv}} = -\frac{M}{6\pi c^4 \rho_0} \begin{pmatrix} \langle f_x'^2 \rangle \\ \langle f_x' f_y' \rangle \\ \langle f_x' f_z' \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{V.44})$$

V.4.4 Terme de translation de la source

Pour finir, nous calculons le terme de translation de la source, tiré de l'équation V.7 :

$$\vec{F}_{\text{trans}} = \left\langle \iint_{S_\infty} (\vec{U} \cdot \vec{n}_\infty) \rho_1 \vec{v}_1 dS \right\rangle.$$

On étudie encore une fois l'intégrande de l'expression :

$$\begin{aligned} (\vec{U} \cdot \vec{n}_\infty) \rho_1 \vec{v}_1 r_\infty^2 \sin \theta^* &= M c \hat{u}_x \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta^* \sin \theta^* \\ \sin^2 \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin^2 \theta^* \sin \varphi^* \end{pmatrix} \frac{p_1}{c^2} \vec{v}_1 r_\infty^2 \\ &= M \cos \theta^* \sin \theta^* \frac{1 + M \cos \theta^*}{16\pi^2 c^4 \rho_0} \begin{bmatrix} \cos \theta^* + M \\ \sin \theta^* \cos \varphi^* \\ \sin \theta^* \sin \varphi^* \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \\ f_z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \\ f_z' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A nouveau, les termes en $\sin \varphi^*$ et $\cos \varphi^*$ s'annulent lors de l'intégration, laissant :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{trans}} &= \int_0^\pi M \cos \theta^* \sin \theta^* \frac{1 + M \cos \theta^*}{8\pi c^4 \rho_0} (\cos \theta^* + M) \left\langle \begin{pmatrix} f_x' f_x' \\ f_x' f_y' \\ f_x' f_z' \end{pmatrix} \right\rangle d\theta^* \\ &= \frac{M}{8\pi c^4 \rho_0} \int_0^\pi \cos \theta^* \sin \theta^* (1 + M \cos \theta^*) (\cos \theta^* + M) \begin{pmatrix} \langle f_x'^2 \rangle \\ \langle f_x' f_y' \rangle \\ \langle f_x' f_z' \rangle \end{pmatrix} d\theta^* \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement :

$$\vec{F}_{\text{trans}} = \frac{M}{12\pi c^4 \rho_0} \begin{pmatrix} \langle f_x'^2 \rangle \\ \langle f_x' f_y' \rangle \\ \langle f_x' f_z' \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{V.45})$$

V.4.5 Expression totale de la force de radiation

En rassemblant tout ce qui précède dans cette section, on peut évaluer la force de radiation s'appliquant à la source dipolaire. On remarque rapidement que les termes d'énergie potentielle et de translation se compensent à l'ordre 1 : $\vec{F}_{E_p} + \vec{F}_{\text{trans}} = 0$. Restent les termes d'énergie cinétique V.39 et de convection V.44 :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{rad}} &= \vec{F}_{E_c} + \vec{F}_{\text{conv}} \\ &= \frac{M}{12\pi c^4 \rho_0} \langle \vec{f}'^2 \rangle \hat{u}_x - \frac{M}{6\pi c^4 \rho_0} \begin{pmatrix} \langle f'_x{}^2 \rangle \\ \langle f'_x f'_y \rangle \\ \langle f'_x f'_z \rangle \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Penchons-nous sur les termes $\langle \vec{f}'^2 \rangle$ et, pour i, j pris dans $\{x, y, z\}$, $\langle f'_i f'_j \rangle$. Le signal à moyenner ici dépend de plusieurs pulsations ω_i . Afin d'avoir une expression correcte des termes, nous choisissons donc à chaque fois de moyenner sur une durée T (cf. eq. V.2) égale au plus petit commun multiple de toutes les périodes T_i en jeu. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle f'_i f'_j \rangle &= F^2 c_i c_j \omega_i \omega_j \left\langle \cos \left[\omega_i \left(t - \frac{R}{c} \right) + \psi_i \right] \cdot \cos \left[\omega_j \left(t - \frac{R}{c} \right) + \psi_j \right] \right\rangle \\ &= \frac{F^2}{2} c_i c_j \omega_i \omega_j \left\langle \cos \left[(\omega_i - \omega_j) \left(t - \frac{R}{c} \right) + \psi_i - \psi_j \right] \right\rangle.\end{aligned}$$

Lors du passage à la moyenne, un terme *somme* de fréquence $\omega_i + \omega_j$ a en effet été annulé. Quant au terme *différence* restant, de fréquence $\omega_i - \omega_j$, on distingue deux cas :

$$\langle f'_i f'_j \rangle = \begin{cases} \frac{F^2 \omega_i^2}{2} c_i c_j \alpha_{ij} & \text{si } \omega_i = \omega_j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{V.46})$$

où $\alpha_{ij} = \cos(\psi_i - \psi_j)$ est un terme de déphasage, égal à 1 si les oscillateurs i et j sont en phase, nul quand ils sont déphasés de $\pi/2$ et égal à -1 lorsque les oscillateurs sont en opposition de phase. De cela, on déduit que

$$\langle \vec{f}'^2 \rangle = \frac{F^2}{2} \sum_i \omega_i^2 c_i^2. \quad (\text{V.47})$$

L'expression de la force de radiation devient donc :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{MF^2 \omega_x^2}{24\pi c^4 \rho_0} \begin{pmatrix} \sum_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_x} \right)^2 c_i^2 - 2c_x^2 \\ -2c_x c_y \alpha_{xy} \\ -2c_x c_z \alpha_{xz} \end{pmatrix} \begin{cases} \text{si } \omega_x = \omega_y, 0 \text{ sinon} \\ \text{si } \omega_x = \omega_z, 0 \text{ sinon} \end{cases}. \quad (\text{V.48})$$

V.5 – Discussion autour de la force de radiation

V.5.1 Fréquences d'oscillation différentes

On constate dans l'expression V.48 que, si les fréquences d'oscillation sont différentes dans les trois directions de l'espace, alors la force de radiation n'agit sur la source que sur l'axe (Ox),

donc dans la direction de perturbation. Dans ce cas, et quelle que soit l'orientation de la source :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{MF^2}{24\pi c^4 \rho_0} (\omega_y^2 c_y^2 + \omega_z^2 c_z^2 - \omega_x^2 c_x^2) \hat{u}_x . \quad (\text{V.49})$$

La force est alors dirigée exclusivement dans la direction du mouvement, mais peut être déstabilisante (de signe positif) ou stabilisante (de signe négatif) en fonction des différentes pulsations en jeu et de l'orientation du dipôle. On constate cependant que pour obtenir une force déstabilisatrice de plus grande puissance, il faut choisir $c_x = 0$. Concernant les autres paramètres, *a priori*, il n'y a pas lieu de favoriser l'un ou l'autre. Afin de simplifier les choses, ainsi qu'une éventuelle réalisation expérimentale, on peut donc ramener les deux pulsations qui nous importent, ω_y et ω_z , à une seule valeur ω .

V.5.2 Une fréquence d'oscillation, inclinaison arbitraire

Dans le cas où toutes les pulsations sont égales à une valeur ω , alors $\langle \vec{f}^2 \rangle = \frac{F^2 \omega^2}{2}$ indépendamment de l'inclinaison (c_x, c_y, c_z) du dipôle ou des déphasages ψ_i . On obtient l'expression suivante pour la force de radiation :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{MF^2 \omega^2}{24\pi c^4 \rho_0} \begin{pmatrix} 1 - 2c_x^2 \\ -2c_x c_y \alpha_{xy} \\ -2c_x c_z \alpha_{xz} \end{pmatrix} . \quad (\text{V.50})$$

Cette fois, on voit qu'il existe plusieurs moyens d'introduire une composante à la force perpendiculaire à l'axe (Ox) , en jouant notamment sur le déphasage des oscillateurs et l'inclinaison de la source.

Supposons que tous les oscillateurs soient en phase, soit $\alpha_{xy} = \alpha_{xz} = 1$. Alors la norme de la force de radiation s'écrit :

$$\|\vec{F}_{\text{rad}}\| = \frac{MF^2 \omega^2}{24\pi c^4 \rho_0} \quad (\text{V.51})$$

et ce, quelle que soit l'inclinaison $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ de la source. Si les oscillateurs sont déphasés, cette norme diminue, puisque dans le calcul de norme interviennent alors les facteurs α_{ij} compris entre -1 et 1. Cette norme constitue donc un maximum de la force, que des déphasages ne font qu'affaiblir.

On remarque à nouveau dans cette situation que, si nous voulons une force de norme maximale dirigée dans une seule direction, propre à déstabiliser la source et la pousser à continuer son mouvement, il nous faut choisir $c_x = 0$.

V.5.3 Une fréquence d'oscillation, dipôle normal à son mouvement

Ce choix de $c_x = 0$ revient à orienter le dipôle dans n'importe quelle direction du plan perpendiculaire à la direction de son déplacement, et la force de radiation s'y appliquant devient :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{MF^2 \omega^2}{24\pi c^4 \rho_0} \hat{u}_x , \quad (\text{V.52})$$

dont la norme est égale à celle calculée et présentée comme maximale précédemment. C'est de loin l'expression la plus simple de cette force, et c'est également la situation qui fournit la force de plus grande norme dans une seule direction.

Nous avons pu noter que le terme dû à la translation de la source est entièrement compensé par le terme d'énergie potentielle. Cependant, la translation elle-même est primordiale, car la force de radiation est, dans tous les cas, proportionnelle au nombre de Mach, donc à la vitesse de déplacement de la source. Pour une source immobile, toute force de radiation est impossible, comme on pouvait s'y attendre.

Fait intéressant, orienter le dipôle parallèle à sa vitesse de déplacement, soit $c_x = 1$, transforme l'action de la force de radiation en une action stabilisatrice, opposée au mouvement avec la même intensité qu'elle l'encourage pour $c_x = 0$.

Chapitre VI

Explorer la force de radiation auto-induite

VI.1 – Sortir du cadre théorique

VI.1.1 Considérations énergétiques

On peut calculer le flux d'intensité acoustique instantané

$$P_i = \iint_{S_\infty} p_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_{\infty} dS, \quad (\text{VI.1})$$

dont la moyenne temporelle sur une période d'oscillation de la source donne la puissance acoustique émise par la source. Le calcul, semblable à ceux opérés précédemment, donne au premier ordre en M :

$$P = \frac{1}{12\pi c^3 \rho_0} \langle \vec{f}^{\prime 2} \rangle. \quad (\text{VI.2})$$

Si la source n'a qu'une seule et même pulsation ω dans toutes les directions de l'espace, cela devient :

$$P = \frac{F^2 \omega^2}{24\pi c^3 \rho_0}. \quad (\text{VI.3})$$

On remarque immédiatement que l'expression V.52 de la force de radiation s'appliquant sur la source peut s'écrire tout simplement :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{M}{c} P \hat{u}_x. \quad (\text{VI.4})$$

Tous les calculs étant effectués à l'ordre 1 pour $M \ll 1$, on constate que le dipôle n'est propulsé que par une infime part de la puissance acoustique qu'il génère. Cela se traduit également par l'absence de facteur M dans la puissance rayonnée à travers la sphère S_∞ autour de la source.

Ce faible rendement est l'une des raisons pour lesquelles la réalisation expérimentale d'un dipôle propulsé par son propre champ acoustique peut rencontrer quelques difficultés.

VI.1.2 Pistes pour un développement expérimental

Il est en effet tentant de concrétiser ce travail théorique par un dispositif expérimental. Pourtant, à l'instar du faible rendement évoqué plus haut, il existe des difficultés que l'on peut résumer en deux points principaux : s'affranchir de la traînée visqueuse, ou du moins la surpasser en norme, et exciter la source pour créer le champ.

S'affranchir de la traînée visqueuse

Le premier de ces points va dans le sens de l'étude énergétique en début de ce chapitre. La force de radiation, telle que nous l'avons calculée, n'est pas grande, et doit, pour être significative sur la dynamique de la source, se montrer au moins comparable à la force de traînée que le milieu fluide oppose au mouvement du dipôle. Puisque nous travaillons pour une faible perturbation de vitesse $M \ll 1$, nous pouvons supposer que le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement autour du dipôle est faible.

Afin de réaliser une première étude dimensionnelle, nous supposons dans les calculs ci-dessous que notre dipôle est une particule sphérique rigide, de diamètre D , qui vibre selon une translation oscillante de pulsation ω dans un fluide de viscosité dynamique μ . On considère alors deux mouvements différents pour la particule : l'un, que l'on peut qualifier de vibratoire, correspond à l'oscillation de la particule dans le fluide afin de créer le champ acoustique, et se fait à la vitesse maximale v_{ac} (correspondant à la vitesse acoustique du fluide qu'il excite). Il est notamment à l'origine de la source de force F utilisée dans les calculs précédents. L'autre, d'ordre 0, est de vitesse $Mc\hat{u}_x$, (perturbation à $M \ll 1$), et c'est celui-ci qui nous intéresse en fin de compte. C'est notamment ce mouvement qui est pris en compte pour calculer la force de traînée qui s'oppose à la force de radiation.

En supposant que l'amplitude du mouvement (de l'ordre de v_{ac}/ω) de la particule est faible devant D , et que l'écoulement autour de la particule vérifie la condition de continuité des vitesses sur sa paroi, alors la traînée suit la loi de Stokes :

$$\vec{F}_{St} = -3\pi D \mu M c \hat{u}_x. \quad (\text{VI.5})$$

Cette expression peut être étendue à un sphéroïde oblong ou prolong sans grande correction, et fournit une bonne idée d'ordre de grandeur pour la traînée [126].

Concentrons-nous à présent sur la vibration de la particule, et à l'action de celle-ci sur le fluide qui l'entoure. La source du champ acoustique se trouve dans la mise en mouvement du fluide environnant directement la particule lors de ses accélérations répétées, et donc de la force transmise au fluide à cette occasion. On peut obtenir un ordre de grandeur de cette force en calculant celle dite de masse ajoutée, qui s'exprime ainsi lorsque le fluide est initialement au repos [126] :

$$\vec{F}_{ma} = -\frac{1}{2} \rho_0 \mathcal{V}_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} \quad (\text{VI.6})$$

où \mathcal{V}_p est le volume de la particule, ρ_0 est toujours la masse volumique du fluide environnant, et \vec{v}_p est la vitesse vibratoire de la particule par rapport au fluide. On peut alors évaluer la norme de la force acoustique transmise par le dipôle à son milieu, telle qu'utilisée dans le terme source de l'équation V.10 :

$$F = \|\vec{F}_{ma}\| \sim \frac{\pi}{12} \rho_0 D^3 \omega v_{ac}. \quad (\text{VI.7})$$

On peut ensuite injecter cette expression dans l'équation V.52, obtenant ainsi :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{M \pi \rho_0 D^6 \omega^4 v_{\text{ac}}^2}{3456 c^4} \hat{u}_x. \quad (\text{VI.8})$$

Afin d'évaluer la capacité de notre force de radiation \vec{F}_{rad} à surmonter cette traînée \vec{F}_{St} , on se concentre sur le rapport $\eta = \|\vec{F}_{\text{rad}}\|/\|\vec{F}_{\text{St}}\|$, qui s'écrit :

$$\eta = \frac{\rho_0 v_{\text{ac}}^2 \omega^4 D^5}{10\,368 c^5 \mu}. \quad (\text{VI.9})$$

Reconnaissant le nombre de Reynolds acoustique $\text{Re}_{\text{ac}} = \frac{\rho_0 v_{\text{ac}} D}{\mu}$, on peut réécrire *in fine* ce rapport :

$$\eta = \frac{1}{10\,368} \frac{v_{\text{ac}}}{c} \text{Re}_{\text{ac}} \left(\frac{\omega D}{c} \right)^4. \quad (\text{VI.10})$$

Prenons une particule de diamètre D oscillant à la pulsation ω et émettant une pression acoustique p_{ac} , suivant les valeurs consignées dans le tableau VI.1. Le diamètre est pris du même ordre de grandeur que la longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega$, et globalement gardé autour du millimètre. Les fréquences et pressions acoustiques choisies sont typiquement atteignables en laboratoire (pour les valeurs dans les liquides, voir [127] ; pour les gaz, voir [128]).

On calcule alors le rapport η pour plusieurs fluides. La vitesse acoustique v_{ac} est calculée selon la formule $p_{\text{ac}} = \rho_0 c v_{\text{ac}}$. Les résultats sont rassemblés, avec les données desdits fluides, dans la table VI.2.

On y voit que la force de radiation auto-exercée par la source peut aisément rivaliser avec la force de traînée dans des milieux autres que l'eau. Puisque nous visons un rapport η le plus grand possible, nous pouvons tâcher de le maximiser en augmentant, dans l'ordre décroissant d'effet, le diamètre D de la particule, la pulsation ω ou la pression acoustique p_{ac} (augmentant ainsi v_{ac}), mais ces changements font rapidement augmenter la force transmise au fluide par l'objet, et donc la puissance nécessaire pour maintenir son mouvement, ce qui limite la faisabilité expérimentale. Pour indication, l'amplitude calculée F de la source de force est donnée dans la table VI.2. Une autre façon de monter ce ratio est de choisir le milieu fluide de sorte à diminuer la vitesse de propagation du son (en puissance -5 dans l'expression), ou de gagner quelques ordres de grandeur dans la masse volumique ou la viscosité. C'est pourquoi plusieurs fluides sont explorés dans le tableau VI.2.

Si le rapport est inférieur à 1 pour de l'eau ou du toluène, la très faible viscosité de l'azote liquide à 34 bar permet de rendre la traînée de Stokes presque négligeable par rapport à la force de radiation auto-exercée. A température ambiante, le FC-43, spécialement utilisé pour sa faible vitesse de propagation du son, ne se montre pas aussi bien adapté à notre usage : sa forte densité et sa viscosité compensent en effet sa lente propagation acoustique. Il s'agit

milieu	D (mm)	f (kHz)	p_{ac} (kPa)
liquide	1	1 000	3 000
gaz	5	50	5

TABLE VI.1 – Paramètre de simulation en fonction de l'état du milieu fluide. Y sont consignés le diamètre de la particule D , la fréquence de l'excitation $f = \omega/2\pi$ et la pression acoustique générée p_{ac} .

milieu fluide	Θ ($^{\circ}\text{C}$)	ρ (kg/m^3)	μ (mPa s)	c (m/s)	F (N)	η
eau	25	1000	1	1500	3,3	0,080
toluène [129, 130]	25	860	0,55	1300	3,8	0,46
acétone [131, 132]	25	790	0,31	1170	4,2	1,9
FC-43 [133]	25	1880	5,26	655	7,6	2,7
Azote liquide (6 bar)	-196	810	0,15	860	5,8	32
Azote liquide (34 bar)	-150	\approx	0,035	\approx	5,8	140
Air	27	1,3	0,019	340	0,14	4,7
Azote (1 bar)	27	1,1	0,018	350	0,14	4,8

TABLE VI.2 – Propriétés (masse volumique ρ , viscosité dynamique μ , célérité du son c) de plusieurs liquides (en bleu) ou gaz (en jaune) pouvant accueillir un dipôle acoustique à température Θ donnée, et valeur du rapport $\eta = \|\vec{F}_{\text{rad}}\|/\|\vec{F}_{\text{St}}\|$ de chacun d’eux, avec les paramètres d’entrée du tableau VI.1. Pour l’azote liquide, les valeurs de masse volumique et de célérité du son prises pour 34 bar et -150°C sont celles de la ligne au-dessus, à 6 bar et -196°C [134, 135]. Le dipôle se comporte comme une source ultra-sonore de 224 dB SPL (liquides) ou de 168 dB SPL (gaz).

pourtant du meilleur liquide considéré à conditions ambiantes pour notre application, avec un rapport de presque 3 entre les deux forces. L’acétone, facile à trouver et à manipuler, permet cependant déjà d’observer la force de radiation, alors près de deux fois plus influente que la force de traînée. Il s’agit probablement de la piste liquide la plus facilement réalisable pour des résultats observables.

Cela dit, la piste du milieu gazeux se révèle très intéressante au vu du tableau VI.2. Une particule mise en lévitation dans l’air pourrait en effet interagir avec un champ incident et se comporter en dipôle. En ne considérant pour le moment que la valeur de η dans cette configuration, on observe que des milieux tels que l’air ambiant ou une atmosphère d’azote maintiennent le rapport de forces à presque 5 pour les conditions sélectionnées et ce, à température et pression ambiantes.

Exciter la source pour créer le champ

Reste ensuite la question de la source, et de la façon dont on lui transmet l’énergie pour créer le champ acoustique. Nous voulons en effet éviter qu’elle soit propulsée par un champ incident dirigé, qui pourrait influencer son mouvement. Cela limite les options ; on peut toutefois imaginer trois pistes.

La première serait d’exciter une source passive avec un champ acoustique stochastique, ne favorisant ainsi le mouvement dans aucune direction. La source serait alors mise en résonance par ce champ et émettrait son propre champ régulier. Pour cela, on peut imaginer un système couplé de deux bulles cubiques millimétriques, installées dans des cadres solides fixés sur un squelette tel que celui en figure VI.1, et plongé dans un liquide. Ces bulles polyhédrales, ainsi que les ont décrites Harazi *et al.* [136], sont plus stables que des bulles sphériques libres, tout en réagissant de la même façon aux champs acoustiques. Elles pourraient donc, sous certaines conditions, entrer en résonance et adopter le comportement d’un dipôle [137, 138].

Si l’on souhaite travailler dans un milieu gazeux, on pourra utiliser des particules maintenues en lévitation dans un champ acoustique stationnaire, au sein d’un nœud de pression suffisamment large pour lui permettre de se déplacer sous l’effet de sa propre force de radiation. L’enjeu sera

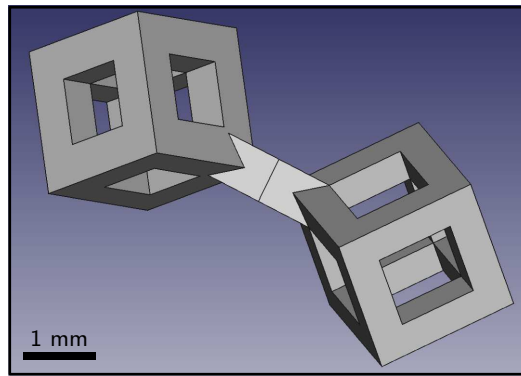


FIGURE VI.1 – *Modèle 3D d'un squelette solide de dipôle à bulle, comprenant deux cadres cubiques, chacun accueillant une bulle cubique.*

alors de parvenir à exciter ces particules à l'aide d'un champ incident stochastique.

La seconde piste impliquerait des actionneurs autonomes, munis de leur propre source d'énergie. Par exemple, un vibreur de smartphone équipé d'une petite pile. Il faut cependant imaginer un système suffisamment compact et léger pour être déplacé de façon mesurable par la force de radiation, d'amplitude faible.

C'est pourquoi la troisième piste se débarrasse de la batterie embarquée pour exciter la source, passive, par un champ non acoustique (champ d'accélération oscillant, champ électromagnétique, *etc.*). Une solution peut être suggérée du côté des actionneurs mous, que certaines études récentes ont pu contrôler à distance via des champs magnétiques [139, 140, 141, 142]. Certains atteignant déjà la taille millimétrique, le défi sera principalement de générer une vibration haute fréquence : actuellement, ces actionneurs fonctionnent autour de durées caractéristiques d'activation de 0,04 s, ce qui nous cantonne à des fréquences de l'ordre de 25 Hz [143].

VI.2 – Vers une analogie quantique ?

Au cours de cette partie, nous avons calculé la force de radiation auto-exercée par une source dipolaire après une petite perturbation de vitesse, et proposé quelques pistes pour passer l'étude sur un plan expérimental. Nous avons notamment montré que c'est lorsque l'orientation du dipôle est normale à la direction de son déplacement que la force de radiation est maximale et dans le sens de la perturbation de vitesse, déstabilisant le système et amorçant une auto-propulsion (équation V.48). La propulsion de la source par son propre champ d'onde acoustique n'est donc pas à proprement parler isotrope, comme nous avons pu l'espérer. Pour autant, si l'on limite l'étude au plan normal à l'axe du dipôle, le mouvement n'a plus de direction préférée que celle de la perturbation initiale.

Alors, il est théoriquement possible d'observer une source acoustique surfant sur son propre champ d'onde, ce qui était notre base pour créer un système analogue à un couple onde / particule selon l'interprétation de l'onde pilote de Bohm – de Broglie. Le passage à un système expérimental, par une piste suggérée dans la partie précédente ou toute autre, permettrait donc de mener des expériences en trois dimensions sur un système macroscopique, tout en espérant lui observer des comportements typiques de la mécanique quantique.

Pour ce qui est de la théorie, une prochaine étape serait la prise en compte de toutes les autres forces que celle de radiation s'appliquant sur la source (traînée, portance, *etc.*) et d'en

établir les équations du mouvement de tels systèmes. Un autre développement intéressant serait de passer d'une source dipolaire à un multipôle quelconque, et d'éclaircir l'origine des grandes différences de comportement observées entre une source monopolaire [124] et une dipolaire.

Enfin, un objet dipôle est soumis, contrairement à un monopôle sphérique ou ponctuel, aux moments et aux rotations. Il serait intéressant d'inclure ces degrés de liberté dans une étude plus générale du mouvement, et d'investiguer par exemple l'effet d'une perturbation en rotation du dipôle.

Conclusion générale

AU COURS de cette thèse, nous avons exploré deux pistes d'analogies liant l'hydrodynamique et d'autres domaines de la physique : d'une part, la mécanique interfaciale, avec les films de savon et les lentilles liquides, et l'astrophysique via la théorie newtonienne de la gravitation ; d'autre part l'acoustique et la mécanique quantique selon l'interprétation de l'onde pilote de Bohm - de Broglie. Chacun de ces deux sujets a posé des bases solides pour d'éventuelles études à venir, et peut devenir le terreau alimentant d'intéressants développements. Pour un résumé plus détaillé de chaque partie, et un aperçu respectif des perspectives, le lecteur est renvoyé aux conclusions des parties correspondantes.

S'il y avait une grande idée à retenir de cette thèse, en deux parties indépendantes et somme toute d'apparence décousue, c'est l'immense richesse que recèle le très vaste domaine de la mécanique des fluides, en tant que lien potentiel avec toutes les autres divisions de la physique. Dans les pages précédentes, deux idées ont été suivies, avec au départ la seule question de la faisabilité. Une étude acharnée a montré que des résultats intéressants pouvaient être obtenus de ces deux idées, que ce soit la faisabilité théorique d'une source acoustique s'autopropulsant dans un schéma onde-particule, ou des prédictions de trajectoires orbitales et une porte vers la description d'effets de marée entre deux lentilles liquides.

Même si ces travaux ne devaient pas trouver de suite, pour quelle que raison que ce soit, ils auront eu le mérite de montrer que de tels liens peuvent se cacher au détour de chaque domaine, et qu'il n'est pas interdit de regarder les étoiles en tirant des films de savon.



Annexes

A – Principes de mécanique interfaciale

1 – Tension de surface et longueur capillaire

A l'interface d'un fluide, un phénomène cohésif fait son apparition à petite échelle : la tension de surface. Causée par un déséquilibre dans les forces attractives entre les différentes molécules du fluide, comme représenté en figure A.1, elle tire les composants de l'interface vers le corps du fluide ; ce faisant, son action tend à minimiser la surface libre du fluide dans sa totalité. Quantitativement, la tension de surface, notée σ ou γ (la notation σ est adoptée au cours de cette thèse) est une grandeur homogène à une force linéique, ou tension (N/m), et peut également représenter une énergie par unité de surface (J/m^2). En effet, si l'action de la tension de surface cherche à minimiser les interfaces, alors les augmenter requiert un apport d'énergie. C'est cette énergie nécessaire à l'accroissement de la surface interfaciale du fluide qui est quantifiée par σ . En d'autres termes, la quantité d'énergie requise pour augmenter une interface d'une surface dS vaut $dE = \sigma dS$.

Une analogie intéressante de ce phénomène se retrouve dans les colonies de manchots. Dans ces structures, être à l'interface signifiant être soumis aux vents glacials, chaque individu cherche à s'en protéger, et donc à se rapprocher du corps de la colonie et à éviter de sortir du regroupement. De toutes ces actions individuelles émerge une forme de tension de surface qui garde la colonie compacte, sinon quasi circulaire en cas de forte chute de la température.

Pour en revenir aux phénomènes physiques, afin de séparer ceux qui dépendent essentiellement de la tension de surface de ceux qui sont dominés par la gravitation, on compare la grandeur caractéristique du système observé à la longueur capillaire, définie comme suit :

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (\text{A.1})$$

où ρ est la masse volumique du fluide et g est l'intensité du champ de pesanteur. ℓ_c est la longueur en-dessous de laquelle les effets capillaires prennent le pas sur les gravitationnels.

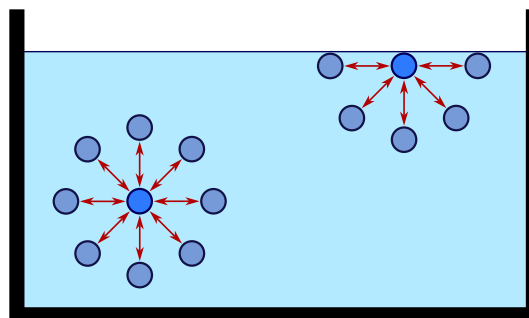


FIGURE A.1 – Représentation schématique de la tension de surface. Une molécule du fluide situé dans le bain est soumise aux forces d'attraction de toutes les autres molécules qui l'entourent, avec une somme d'action nulle, tandis qu'une molécule située à l'interface subit une brisure de symétrie dans ces interactions. La force résultante est dans ce cas dirigée vers le corps du fluide.

Pour l'eau pure à 20°C, elle vaut 2,7 mm. Un exemple d'application de cette notion se trouve dans les vagues observables à la surface de l'eau et de dimensions inférieures aux effets de marée. Les hautes vagues de mer et celles qui viennent se briser sur les plages et les rochers, de longueur d'onde 1,5 m et plus, sont généralement dominées par la gravitation, alors que les rides et petites ondulations dont la longueur d'onde n'excède pas 2,7 mm ont les forces de tension de surface comme principale action restauratrice. Entre les deux, les vagues sont soumises à un mélange des deux effets [144].

2 – Saut de pression de Laplace

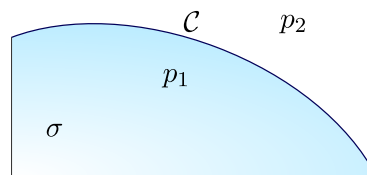


FIGURE A.2 – Illustration du saut de pression de Laplace.

La tension de surface influe directement sur les interfaces et sur les formes qu'elles adoptent, en fonction des différences de pression entre les milieux qu'elles séparent. Ce phénomène est appelé saut de pression de Laplace. Dans tout ce qui suit, le système étudié sera un amas de liquide en contact avec l'atmosphère, tel que représenté sur la figure A.2. En reprenant les notations de celle-ci, on peut écrire la différence de pressions de part et d'autre de l'interface en notant \mathcal{C} sa courbure moyenne :

$$p_1 - p_2 = \sigma \cdot \mathcal{C}. \quad (\text{A.2})$$

Dans notre étude, les interfaces seront principalement horizontales et, dans ce cas, l'approximation des petits angles nous permet d'explicitement aisément le terme de courbure et de le changer en laplacien de l'altitude. Notant z l'altitude de l'interface, on peut donc réécrire l'équation précédente :

$$p_1 - p_2 = \sigma \cdot \Delta z. \quad (\text{A.3})$$

3 – Tensioactifs

La tension de surface étant une propriété de l'interface et non du fluide, elle peut être modifiée (généralement baissée) par l'ajout de composants chimiques dits tensioactifs – ou surfactants. Ce procédé est connu depuis déjà quelques temps, sans pour autant avoir été formellement identifié comme tel, puisqu'il s'agit du principe fondamental du savon, dont la figure A.3 donne une idée de l'ancienneté.

Dans la recherche moderne, diverses molécules sont utilisées pour jouer sur la tension de surface, les deux plus courants étant le tétradécyltriméthylammonium bromide (TTAB) et le sodium dodecyl sulfate (SDS). Un catalogue fourni de tensioactifs connus et de leurs propriétés est disponible dans la compilation [146].

Une molécule de tensioactif, comme celle du SDS détaillée en figure A.4, est composée d'une tête hydrophile, capable de se lier fortement à l'eau, et d'une queue hydrophobe, ici la



FIGURE A.3 – *Tablette d'argile mésopotamienne contenant un protocole de fabrication de savon, approx. 3e millénaire av. J.-C. Image provenant du Penn Museum, publiée par [145] sous license CC BY-NC-ND 4.0.*

chaîne carbonée. Cette double propriété rend la molécule amphiphile, et relativement instable, ou *frustrées*, dans un bain d'eau. Par conséquent, une fois mise en solution, elle cherchera dès que possible, soit à s'adsorber à l'interface bain/autre milieu, où elle modifiera les propriétés de tension de surface du liquide, soit à s'agencer avec d'autres molécules en structures appelées *micelles* qui réduisent la frustration de l'élément en rassemblant les queues hydrophobes entre elles et en présentant au liquide un front de têtes hydrophiles. La figure A.5 illustre ces deux comportements, de façon simplifiée : une description détaillée des structures micelliques possibles est à trouver dans le travail de Tanford [147].

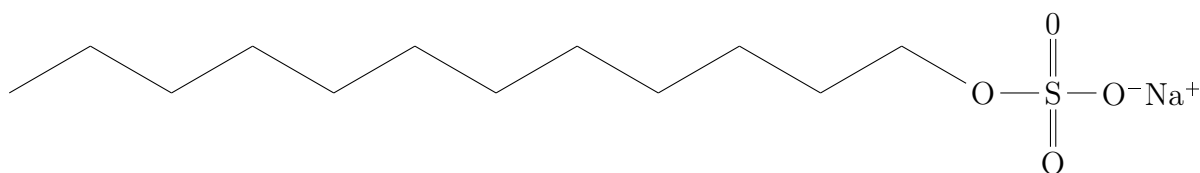


FIGURE A.4 – *Formule topologique de la molécule de sodium dodecyl sulfate (SDS).*

La concentration en tensioactifs à partir de laquelle les micelles se forment est appelée *concentration micellaire critique*, ou CMC, et est une propriété propre à la molécule et aux conditions de sa solution (pH, température, solvant employé, *etc.*). On peut concevoir ici un paradoxe : la formation de micelles est présentée comme conditionnée avant tout par la concentration dans le corps du liquide, alors que l'interface attire une certaine part des molécules en solution. La taille de l'interface devrait donc avoir un impact sur la mesure de la CMC. Cependant, comme l'explique Milán dans un post [148], la quantité de molécules retenue par l'interface est négligeable face à celle contenue dans le corps du liquide à la CMC, ce qui minimise son influence. En outre, la dispersion aux interfaces des molécules de tensioactif a une dynamique propre, qui n'affecte que peu le reste du bain : l'augmentation d'une surface est gérée localement, dans les couches de fluide qui avoisinent directement la surface, et non par le corps du bain au complet, lequel garde alors une concentration en surfactants stable.

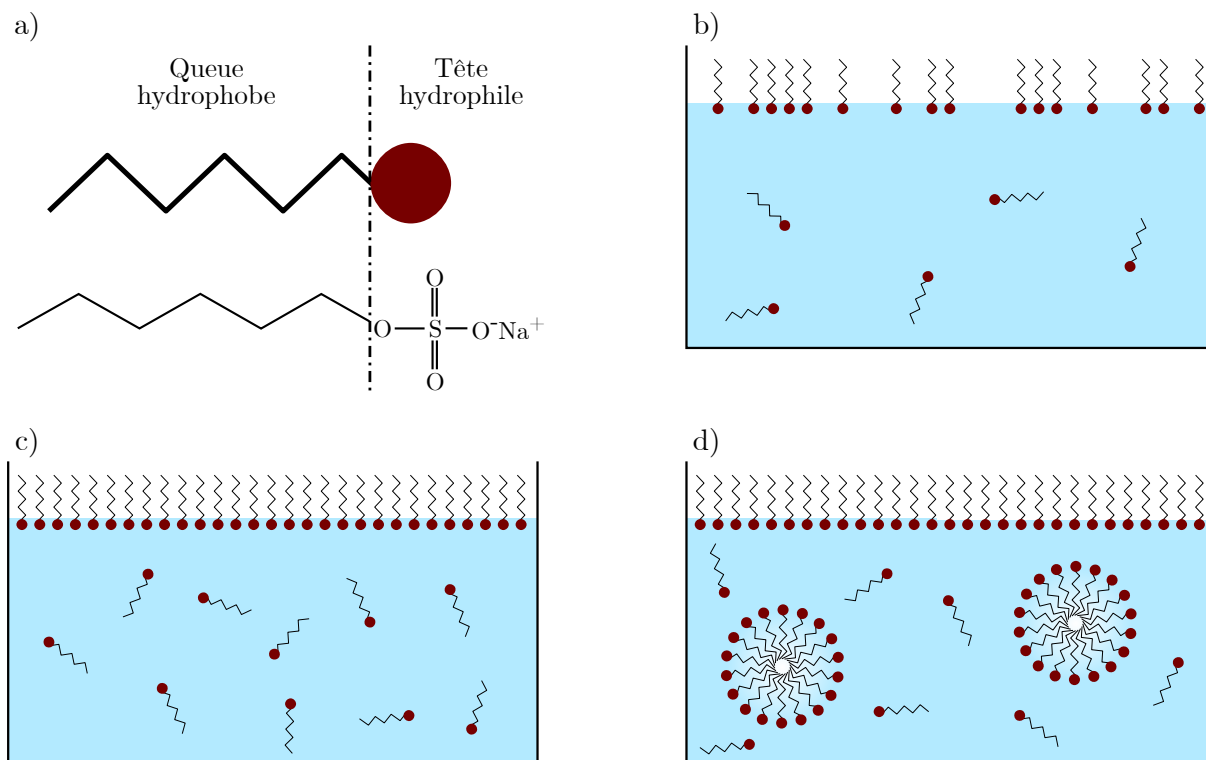


FIGURE A.5 – Comportements simples des tensioactifs dans un bain. La figure (a) explique la représentation schématique des tensioactifs *via* un parallèle avec une partie de la molécule de SDS montrée en figure A.4. En (b), la concentration est faible, et les tensioactifs sont adsorbés à l'interface. En augmentant la concentration, on finit par saturer cette interface, cas représenté en (c). En (d), la concentration a dépassé la concentration micellaire critique (CMC), permettant aux molécules présentes dans le bain de s'organiser en micelles.

En règle générale, la CMC est indiquée pour une solution dans l'eau à 20°C, celle du SDS sous ces conditions valant 8,2 mmol/L [146], soit 2,4 g/L. Ce qui nous intéresse particulièrement dans la CMC est sa nature de seuil. En effet, une fois cette concentration atteinte, les interfaces du liquide peuvent être considérées comme saturées de tensioactifs, et l'ajout de molécules ne peut plus guère changer la tension de surface du bain [149, 150]. Le liquide du bain atteint alors une valeur plancher de tension de surface, et il devient possible de générer des films suspendus stables pour plusieurs dizaines de secondes.

B – Détection du profil d'un film de savon

Le code permettant la détection du profil d'un film de savon horizontal tenant une lentille nécessite une certaine disposition des images d'entrée : à l'instar de la figure B.1, le film apparaît en blanc sur un fond noir, et une bande blanche dans la partie basse de l'image est acceptable.

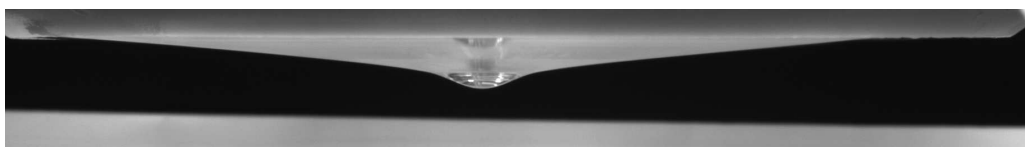


FIGURE B.1 – Image acceptable pour le programme.

La code détaillé ci-dessus est un module Julia, qui exporte une fonction pour analyser une vidéo d'expérience en format AVI. Il est divisé en quatre sections, la dernière donnant le programme exporté.

La première section rassemble des fonctions de prétraitement des images, afin de les préparer à la détection de contour (binarisation, retrait d'éléments parasites, *etc.*).

La deuxième section se concentre sur la détection du contour de film, et fait pour cela appel à un morceau de code développé par Suzuki et Abe [151]. Cet algorithme porte le nom de *Topological Structural Analysis of Digitized Binary Images by Border Following* et est signalé dans l'implémentation comme « code emprunté ».

La troisième section transforme les données issues de la deuxième, et transforme les contours détectés en courbes exploitables, que ce soit en données brutes ou en courbes tracées.

Enfin, la quatrième section rassemble tous les programmes des sections précédentes et les ordonne pour traiter une vidéo d'expérience.

```
1 module TraitementProfil
2 export analyse_video
3
4 using Images
5 using TestImages
6 using FileIO
7 using Statistics
8 using Plots
9 using DataFrames
10 using CSV
11 using JSON
12 using ImageMorphology
13 using ImageBinarization
14 using VideoIO
15 using ProgressMeter
16
17 ## 1 ## : Prétraitement de l'image
```

```

18
19 function cropping(filename, c_haut, c_bas, c_droite, c_gauche)
20     """
21     Rogne l'image selon le nombre de pixels indiqués, partant
22     respectivement du haut, du bas, de la droite et de la gauche.
23     """
24     im = load(filename)
25     h,w = size(im)
26     im1 = im[1+c_haut:h-c_bas, 1+c_droite:w-c_gauche] # rognage
27     return im1
28 end
29
30 function pretraitement(image; seuil=0.32, disp=false, sort_bool=false,
31     dim_trous=5000, dim_particules=500)
32     """
33     Binarise une image selon le seuil renseigné, et comble les
34     trous pour garder une seule région de 1 et une seule région de 0.
35     Entrées :
36     - image : l'image en question
37     - seuil : seuil de binarisation sur l'intensité du pixel
38     - sort_bool : if true, sort une matrice de booléens au lieu d'un
39     objet Gray
40     - dim_trous : diamètre max, en px, des trous (zones de 0) parasites
41     à combler.
42     - dim_particules : diamètre max, en px, des particules (zones de 1)
43     parasites à supprimer.
44     """
45     img = Gray.(image) # Conversion en nuances de gris
46     img_bin = Gray.(img.>seuil) # binarise l'image
47     img_bool = convert(Array{Bool},img_bin)
48     # supprimer les points solitaires (faux positifs) :
49     img_bw = imfill(img_bool,(0,dim_particules))
50     # combler les trous :
51     img_bw = .!imfill(!img_bw,(0,dim_trous))
52     if disp
53         display(img)
54         display(Gray.(img_bw))
55     end
56     if sort_bool
57         return convert(Array{Bool},img_bw)
58     end
59     Gray.(img_bw)
60 end
61
62 function retirer_blanc_bas(binary_base; retirer_fond=false,
63     fond_initial=0, dim_trous=5000, dim_particules=500, path_mask="")
64     """
65     Retire la zone blanche unie en bas d'une image avant son traitement.
66     Entrées :
67     - binary_base : matrice de booléens représentant l'image à traiter.
68     1-blanc, 0-noir.
69     - retirer_fond : bool - si true, on retirera de l'image la matrice
70     booléenne fond_initial.
71     - fond_initial : matrice booléenne représentant le fond binarisé de
72     l'image, la zone sans information.
73     - dim_trous, dim_particules : cf 'pretraitement'.
74     - path_mask : chemin vers un masque, la couleur verte montrant les
75     zones à retirer.
76     """
77     if retirer_fond

```

```

78     binary = binary_base .*(!fond_initial)
79 else
80     binary = copy(binary_base)
81 end
82 if length(path_mask)>0
83     mask = load(path_mask)
84     mask = channelview(mask)[2,:,:].>0.999
85     # matrice de booléens, avec True aux endroits peints en vert.
86     # Application du masque :
87     @views binary = .!(binary, mask)
88 end
89 for c = 1:size(binary)[2] # c : indice de la colonne
90     colonne = binary[:,c]
91     lmax = length(colonne)
92     copie_colonne = falses(lmax)
93     # Dans une colonne, on compte le nombre de zones noir/blanc.
94     # S'il n'y a qu'une zone blanche, elle est considérée comme
95     # objet à mesurer et gardée blanche dans copie_colonne.
96     zone_blanche_bas = true
97     zones = ""
98     nb_zones = 1
99     for l = range(start=lmax, stop=1, step=-1)
100        if zone_blanche_bas & colonne[l]
101            # CAS 1 : zone blanche du bas et pixel blanc
102            copie_colonne[l] = false
103            if zones == ""
104                zones = "b"
105            end
106        elseif zone_blanche_bas & !colonne[l]
107            # CAS 2 : zone blanche du bas mais pixel noir
108            # (=sortie de la zone)
109            zone_blanche_bas = false
110            nb_zones += 1
111            zones *= "n"
112        elseif (l<lmax) & (colonne[l]!= colonne[l+1])
113            # CAS 3 : zone ordinaire et changement de zone
114            nb_zones += 1
115            if colonne[l]
116                zones *= "b"
117            else
118                zones *= "n"
119            end
120            copie_colonne[l] = colonne[l]
121        else
122            # CAS 4 : zone ordinaire.
123            copie_colonne[l] = colonne[l]
124        end
125    end
126    if startswith(zones, "b")
127        nextb = findnext('b',zones,2)
128        if !isnothing(nextb)
129            # S'il existe plus d'une zone blanche dans l'image
130            binary[:,c] = copie_colonne
131        end
132    end
133 end
134 # Supprimer les points solitaires (faux positifs) :
135 img_bw = imfill(binary,(0,dim_particules))
136 # Comblers les trous :
137 img_bw = .!imfill(!img_bw,(0,dim_trous))

```

```

138     return img_bw
139 end
140
141 ## 2 ## : Détection de contour
142
143 ##### Code emprunté à Suzuki et Abe
144
145 #   N       NE       E       SE       S       SW       W       NW
146 # direction between two pixels
147
148 # rotate direction clockwise
149 function clockwise(dir)
150     return (dir)%8 + 1
151 end
152
153 # rotate direction counterclockwise
154 function counterclockwise(dir)
155     return (dir+6)%8 + 1
156 end
157
158 # move from current pixel to next in given direction
159 function move(pixel, image, dir, dir_delta)
160     newp = pixel + dir_delta[dir]
161     height, width = size(image)
162     if (0 < newp[1] <= height) && (0 < newp[2] <= width)
163         if image[newp] != 0
164             return newp
165         end
166     end
167     return CartesianIndex(0, 0)
168 end
169
170 # finds direction between two given pixels
171 function from_to(from, to, dir_delta)
172     delta = to - from
173     return findall(x->x == delta, dir_delta)[1]
174 end
175
176
177 function detect_move(image, p0, p2, nbd, border, done, dir_delta)
178     dir = from_to(p0, p2, dir_delta)
179     moved = clockwise(dir)
180     p1 = CartesianIndex(0, 0)
181     while moved != dir ## 3.1
182         newp = move(p0, image, moved, dir_delta)
183         if newp[1] != 0
184             p1 = newp
185             break
186         end
187         moved = clockwise(moved)
188     end
189
190     if p1 == CartesianIndex(0, 0)
191         return
192     end
193
194     p2 = p1 ## 3.2
195     p3 = p0 ## 3.2
196     done .= false
197     while true

```

```

198     dir = from_to(p3, p2, dir_delta)
199     moved = counterclockwise(dir)
200     p4 = CartesianIndex(0, 0)
201     done .= false
202     while true ## 3.3
203         p4 = move(p3, image, moved, dir_delta)
204         if p4[1] != 0
205             break
206         end
207         done[moved] = true
208         moved = counterclockwise(moved)
209     end
210     push!(border, p3) ## 3.4
211     if p3[1] == size(image, 1) || done[3]
212         image[p3] = -nbd
213     elseif image[p3] == 1
214         image[p3] = nbd
215     end
216
217     if (p4 == p0 && p3 == p1) ## 3.5
218         break
219     end
220     p2 = p3
221     p3 = p4
222 end
223 end
224
225
226 function find_contours(image)
227     nbd = 1
228     lnbd = 1
229     image = Float64.(image)
230     contour_list = Vector{typeof(CartesianIndex[])}()
231     done = [false, false, false, false, false, false, false, false]
232
233     # Clockwise Moore neighborhood.
234     dir_delta = [CartesianIndex(-1, 0), CartesianIndex(-1, 1),
235                 CartesianIndex(0, 1), CartesianIndex(1, 1), CartesianIndex(1, 0),
236                 CartesianIndex(1, -1), CartesianIndex(0, -1), CartesianIndex(-1, -1)]
237     height, width = size(image)
238
239     for i=1:height
240         lnbd = 1
241         for j=1:width
242             fji = image[i, j]
243             is_outer = (
244                 image[i, j] == 1 && (j == 1 || image[i, j-1] == 0)
245             ) ## 1 (a)
246             is_hole = (
247                 image[i, j] >= 1 && (j == width || image[i, j+1] == 0)
248             )
249             if is_outer || is_hole
250                 # 2
251                 border = CartesianIndex[]
252                 from = CartesianIndex(i, j)
253                 if is_outer
254                     nbd += 1
255                     from -= CartesianIndex(0, 1)
256                 else
257                     nbd += 1

```

```

258         if fji > 1
259             lnb = fji
260         end
261         from += CartesianIndex(0, 1)
262     end
263     p0 = CartesianIndex(i,j)
264     detect_move(image, p0, from, nbd, border, done,
265         dir_delta) ## 3
266     if isempty(border) ##TODO
267         push!(border, p0)
268         image[p0] = -nbd
269     end
270     push!(contour_list, border)
271 end
272 if fji != 0 && fji != 1
273     lnb = abs(fji)
274 end
275 end
276 end
277 return contour_list
278 end
279
280 # a contour is a vector of 2 int arrays
281 function draw_contour(image, color, contour;ep=2)
282     for ind in contour
283         if ep > 0
284             for i = (1:ep)
285                 if ind[1] > i
286                     image[ind-CartesianIndex(i,0)] = color
287                 end
288                 if ind[1] < size(image)[1]+1-i
289                     image[ind+CartesianIndex(i,0)] = color
290                 end
291             end
292         end
293         image[ind] = color
294     end
295 end
296 function draw_contours(image, color, contours;ep=2)
297     for cnt in contours
298         draw_contour(image, color, cnt,ep=ep)
299     end
300 end
301
302 ##### Fin du code emprunté
303
304 function garde_ligne_bas(bool_array)
305     """
306     Entrée : une matrice de booléens donnant un contour.
307     Ce contour est généralement fermé ; or nous en avons
308     besoin d'un ouvert. L'information intéressante, le
309     profil du film, est contenu dans la ligne basse du contour,
310     et il faut donc supprimer la ligne haute, ne gardant que
311     la basse. C'est ce que fait ce programme.
312     """
313     nb_lignes, nb_colonnes = size(bool_array)
314     for colonne=range(start=1,stop=nb_colonnes)
315         test=false
316         for ligne=range(stop=1,start=nb_lignes,step=-1)
317             val = bool_array[ligne,colonne]

```

```

318     if test & val
319         bool_array[ligne,colonne]=false
320     end
321     if !test & val
322         test=true
323     end
324 end
325 end
326 bool_array
327 end
328
329 function extract_contour(image, conts; give_bool=false)
330     """
331     Entrées :
332     - image : l'image étudiée
333     - conts : résultat de 'find_contours'
334     - give_bool : true si l'on veut une matrice de booléens en sortie
335     Sortie : une image de mêmes dimensions de 'image', blanche sur
336     le contour calculé, noire partout ailleurs.
337     """
338     contours = conts[1]
339     contours = convert(Vector{CartesianIndex{2}}, contours)
340     h,w = size(image)
341     msk = zeros(h, w)
342     msk[contours] .= 1
343     msk = .!iszero.(msk)
344     msk = garde_ligne_bas(msk)
345     #msk = msk[2:size(msk)[1],2:size(msk)[2]-1]
346     if give_bool
347         return msk
348     end
349     Gray.(msk)
350 end
351
352 function mark_contour(image, conts;ep=2)
353     """
354     Retourne l'image 'image' en argument, avec en superposition le
355     dessin des contours calculés par la fonction 'draw_contour'.
356     Entrée :
357     - image : une image
358     - conts : résultat de 'find_contours'
359     - ep : épaisseur de la ligne de contour à tracer, en px
360     """
361     im2 = copy(image)
362     draw_contours(im2, RGB(1,0,0), conts,ep=ep)
363     im2[2+ep:size(im2)[1],2+ep:size(im2)[2]-1]
364 end
365
366
367 ## 3 ## : Extraction d'une courbe depuis une image de contour
368
369 function extraction_matrice(matrice_contour)
370     """
371     Formate la sortie de 'extract_contour' pour renvoyer un tableau,
372     en rognant ses lignes et colonnes extrêmes.
373     Entrée :
374     matrice_contour : tableau binaire, contour en blanc (1) sur
375     fond noir (0), obtenu en sortie de 'extract_contour'.
376     """
377     tab = convert(Array{Float64}, matrice_contour)

```

```

378     tab2 = tab[2:size(tab)[1]-1,2:size(tab)[2]-1]
379 end
380
381 function extraction_courbe(matrice_contour, x_factor, y_factor; xlim=0,
382     ylim=0, title="")
383     """
384     Sort une courbe de profil depuis une matrice de contours (calculée
385     par exemple avec 'extract_contour').
386     Entrées :
387     - matrice_contour : tableau binaire, contour en blanc (1) sur
388       fond noir (0), a priori formaté par 'extraction_matrice'.
389     - x_factor, y_factor : rapports d'échelles sur x et sur y :
390       x (mm) = x_factor * x (px)
391     - xlim, ylim : limites des axes de la courbe en sortie
392     - title : str - titre de la courbe
393     Sorties :
394     - leplot : objet plot, avec la courbe de profil.
395     - lesX, lesY : array - les axes de la courbe
396     """
397     echelle_x(x) = x * x_factor
398     echelle_y(y) = y * y_factor
399     lesX = []
400     lesY = []
401     tab3 = convert(Array{Float64}, matrice_contour)
402     ymax = size(tab3)[1]
403     for c = 1:size(tab3)[2]
404         colonne = tab3[:,c]
405         indexes = []
406         for l = 1:length(colonne)
407             if tab3[l,c]>0.5
408                 push!(indexes,echelle_y(ymax-l))
409             end
410         end
411         if length(indexes)>0
412             push!(lesY,mean(indexes))
413             push!(lesX, echelle_x(c))
414         end
415     end
416     if length(title) == 0
417         title = "Courbe de déformation du film"
418     end
419     if xlim == 0
420         xlim = maximum(lesX)
421     end
422     if ylim == 0
423         ylim = maximum(lesY)
424     end
425     leplot = scatter(lesX, lesY, title = title, xlabel = "mm",
426         ylabel="mm", markersize=0.1, legend=false, xlims=(-0.1,xlim),
427         ylims=(-0.1,ylim))
428     return leplot, lesX, lesY
429 end
430
431 ## 4 ## : Analyser une vidéo
432
433 function analyse_video(path, name; seuil_bin=0.10, dim_particules=5,
434     largeur_px=3192, largeur_mm=100, saut_affichage=20, retirer_fond=false,
435     nom_dossier_enregistrement="Profil", path_mask="")
436     """
437     Traite la vidéo d'un film vu de profil et, pour chaque image,

```

```

438   enregistre une courbe de profil, en format CSV et tracée sur un PNG.
439   Enregistre également les images de la vidéo avec en superposition
440   le contour détecté afin de vérifier la sortie du programme.
441   Entrée :
442   - path : str - chemin vers le dossier de travail, qui contient la
443     vidéo à analyser
444   - name : str- nom du fichier vidéo avi, sans l'extension
445   - seuil_bin : float - seuil d'intensité pour la binarisation de
446     la vidéo
447   - dim_particules : float - dimensions max, en px, de particules
448     parasites à retirer de l'image
449   - largeur_px : float - diamètre du cadre sur l'image, en px
450   - largeur_mm : float - diamètre du cadre en mm
451   - saut_affichage : int - afficher un duo (image, courbe) toutes
452     les N images
453   - retirer_fond : bool - si la première image de la vidéo est un fond
454     sans donnée, indiquer true. Ce fond sera alors retiré des calculs.
455   - nom_dossier_enregistrement : nom du dossier dans lequel enregistrer
456     les données des courbes.
457   - path_mask : chemin vers un masque, la couleur verte montrant les
458     zones à retirer.
459   """
460   if nom_dossier_enregistrement &#226; readdir(path)
461     mkdir(path*nom_dossier_enregistrement)
462   end
463   if "courbes" &#226; readdir(path*nom_dossier_enregistrement*"/")
464     mkdir(path*nom_dossier_enregistrement*"/courbes")
465   end
466   path_fig = path*nom_dossier_enregistrement*"/courbes/"
467
468   if "donnees" &#226; readdir(path*nom_dossier_enregistrement*"/")
469     mkdir(path*nom_dossier_enregistrement*"/donnees")
470   end
471   path_dat = path*nom_dossier_enregistrement*"/donnees/"
472   path = path*name*".avi"
473   f = VideoIO.openvideo(path)
474   frame_milieu = 130
475   binary_init=0 # initialisation au cas où retirer_fond=false
476   p = Progress(counttotalframes(f))
477   for (index, image) in enumerate(f)
478     trouuu = 5000
479     particuuuuules = dim_particules
480     if retirer_fond
481       if index == 1
482         binary_init = pretraitement(image, seuil=seuil_bin,
483           sort_bool=true, dim_trous=trouuu,
484           dim_particules=dim_particules)
485         while (!(1 in binary_init)) & (trouuu>1)
486           trouuu-=100
487           binary_init = pretraitement(image, seuil=seuil_bin,
488             sort_bool=true, dim_trous=trouuu,
489             dim_particules=dim_particules)
490         end
491         if trouuu<10
492           print("Erreur : on ne voit rien du film : aucun
493             contour ne peut être tracé.")
494         end
495       end
496     end
497     binary_base = pretraitement(image, seuil=seuil_bin,

```

```

498     sort_bool=true, dim_trous=trouuu,
499     dim_particules=dim_particules)
500 binary = retirer_blanc_bas(binary_base ;
501     retirer_fond=retirer_fond, fond_initial=binary_init,
502     dim_trous=trouuu, dim_particules=dim_particules,
503     path_mask=path_mask)
504
505 while (!(1 in binary)) & (trouuu>1)
506     trouuu-=100
507     binary = retirer_blanc_bas(binary_base ; retirer_fond=false,
508     fond_initial=binary_init, dim_trous=trouuu,
509     dim_particules=particuuuuuules)
510 end
511 binary = Gray.(binary)
512 conts = find_contours(binary)
513 mat_cont = extract_contour(image, conts, give_bool=true)
514 # matrice mat_cont : true sur la ligne de démarcation film/fond
515 if length(path_mask)>0 # Application d'un masque
516     mask = load(path_mask)
517     mask = channelview(mask)[2,:,:].>0.999
518     # mask : matrice de booléens, avec True
519     # aux endroits peints en vert.
520     @views mat_cont = .|(mat_cont, mask)
521 end
522 mat_cont = extraction_matrice(mat_cont)
523
524 curve, lesX, lesY = extraction_courbe(mat_cont,
525     largeur_mm / largeur_px, largeur_mm / largeur_px,
526     title=name[1:length(name)-4]
527 )
528 # Création des données et images à enregistrer.
529 # L'index est complété à 4 chiffres par des 0 préfixes.
530 disp_index = lpad(string(index),4,'0')
531 savefig(path_fig*"courbe_"*disp_index)
532 df = DataFrame(X=lesX, Y=lesY)
533 fig_test = mark_contour(RGB.(image),conts)[:,:]
534 save(path_fig*"test_"*disp_index*".png", fig_test)
535 CSV.write(path_dat*"data_"*disp_index*".csv", df)
536 if index % saut_affichage == 0
537     display(binary)
538     display(mark_contour(image,conts))
539     display(curve)
540 end
541 next!(p)
542 end
543 finish!(p)
544 close(f)
545 end
546
547 end

```

C – Détection et suivi de lentilles sur un film de savon

Le programme détaillé ci-dessous est un module Julia qui exporte une fonction finale `analyse_video`. Cette fonction prend en charge un dossier complet d'images d'expériences et en extrait les positions successives des lentilles. La procédure étant lente, nous utilisons le module `Threads` pour paralléliser le calcul. Afin de trouver le nombre de threads optimal pour le traitement de nos données, des tests ont été menés sur une expérience particulière, donnant les temps d'exécution en table C.1. Au vu de ces résultats, nous avons choisi de travailler sur 24 threads.

Nb threads	1	20	23	24	25	30	40	50	100
Temps	54'26"	16'48"	15'09"	14'51"	14'57"	14'56"	15'06"	16'53"	17'26"

TABLE C.1 – Temps d'exécution (en min et s) du programme `lentille_seule` pour une expérience, en fonction du nombre de threads alloués.

```
1 using Images
2 using ImageFiltering
3 using ImageFeatures
4 using FileIO
5 using Statistics
6 using DataFrames
7 using VideoIO
8 using ImageDraw
9 using ProgressMeter
10 using CSV
11 using JSON
12 using Base.Threads
13
14 function addrow!(df, t, listex, listey)
15     """
16     Ajoute une ligne d'enregistrement à une dataframe, avec les colonnes de
17     temps, et de coordonnées des gouttes détectées. Cette fonction mute la
18     dataframe sans la remplacer.
19     """
20     dicox = Dict{String,Any}(
21         "x$i (px)" => Int(listex[i]) for i = 1:length(listex)
22     )
23     dicoy = Dict{String,Any}(
24         "y$i (px)" => Int(listey[i]) for i = 1:length(listey)
25     )
26     dico = merge(dicox,dicoy)
27     for key in names(df) # Parcourir les noms de colonnes
28         if !haskey(dico, key) # missing droplet
29             dico[key]=missing
30         end
31     end
32     dico["t (s)"] = t
33     push!(df,dico)
34 end
```

```

35
36 function lentille_multiple(path_exp, path_mask, path_csv, path_param;
37     n_gouttes=2, rayon_var=15, sauvegarder_trace=false,
38     sauvegarder_bin=false, save_dir="", seuilvar=0.7)
39     """Traitement de tout un dossier d'images pour détecter les gouttes
40     glissant sur un film de savon.
41
42     Parameters
43     -----
44     path_exp : String
45         chemin vers le dossier contenant toutes les images brutes à analyser,
46         sous format tif.
47
48     path_mask : String
49         localisation du fichier masque. Il s'agit d'une image de même
50         dimension qu'une image de 'path_exp' (possiblement une
51         image de 'path_exp'), en format RVB, dans laquelle les zones
52         hors-étude sont peintes en vert.
53
54     path_csv : String
55         localisation du fichier csv dans lequel sauvegarder les coordonnées
56         calculées (see Saves section).
57
58     path_param : String
59         localisation du fichier json contenant les paramètres de
60         l'expérience. Voir les notes pour les paramètres.
61
62     n_gouttes : Int, optional
63         nombre de gouttes max à détecter. Par défaut 2.
64
65     rayon_var : Int, optional
66         rayon de la zone, en pixels, sur laquelle calculer la variance
67         glissante du laplacien de l'image. Par défaut : 15.
68
69     sauvegarder_trace : Bool, optional
70         si True, sauvegardera dans le dossier 'save_dir' les images brutes
71         augmentées de cercles marquant la détection des lentilles. Par
72         défaut False.
73
74     sauvegarder_bin : Bool, optional
75         si True, sauvegardera dans le dossier 'save_dir' les images
76         binarisées de l'expérience. Par défaut False.
77
78     save_dir : String, optional
79         chemin vers le dossier dans lequel sauvegarder les images
80         éventuellement enregistrées. Par défaut : ""
81
82     seuilvar : Float, optional
83         Multiplicateur pour le seuil de binarisation de l'image sous
84         variance. Si moy est la valeur moyenne de la variance et std son
85         écart-type, la binarisation est faite par
86         'imvar .< moy - seuilvar * std'.
87         Ainsi, plus seuilvar est petit, plus on détectera d'objets.
88
89     Returns
90     -----
91     None
92
93     Saves
94     -----

```

```

95 fichier_csv : path_csv
96   Contient les données de localisation des gouttes sur le film.
97   Une ligne = une image de l'expérience brute.
98   Colonnes :
99     - t : le temps, en secondes (image 1 → t=0s)
100    - 'ngouttes' séries de deux colonnes :
101    - x_i : coordonnées d'abscisse d'une goutte (px)
102    - y_i : coordonnées d'ordonnée d'une goutte (px)
103
104 Notes
105 -----
106 Paramètres : le fichier doit contenir les données suivantes :
107   - "frequence_acquisition (Hz)"
108   ""
109
110 # Définitions utiles :
111 liste_images = readdir(path_exp)
112 L = length(liste_images)
113 size=1+2*rayon_var
114 window = (size,size)
115 ampl = x -> x.amplitude
116
117 # Paramètres de l'expérience :
118 open(path_param, "r") do f
119   s = read(f, String)
120   global Param
121   Param = JSON.parse(s)
122 end
123 # Fréquence d'acquisition :
124 freq = Param["frequence_acquisition (Hz)"]
125
126 # Masque :
127 mask = load(path_mask)
128 # Matrice de booléens, avec False aux endroits peints en vert :
129 mask = channelview(mask)[2,:,:].<1
130
131 ## Traitement
132
133 p = Progress(L)
134 # Création du DataFrame contenant les coordonnées des lentilles
135 colx = ["x$i (px)" for i=1:n_gouttes]
136 coly = ["y$i (px)" for i=1:n_gouttes]
137 cols = vcat(colx,coly)
138 dicoinit = Dict{String,Any}()
139   lacol=>Union{Int32,Missing}[] for lacol in cols
140 )
141 dicoinit["t (s)"] = Float32[]
142 df = DataFrame(dicoinit)
143 # Définition du lock pour éviter le data race.
144 lockdf = ReentrantLock()
145 @threads for i in eachindex(liste_images)
146   # Image à traiter :
147   img = load(path_exp*liste_images[i])
148
149   # Variance glissante sur le laplacien de l'image, pour mettre en
150   # évidence les zones floues.
151   imlap = imfilter(img, Kernel.Laplacian())
152   imvar = mapwindow(var, imlap, window)
153
154   m = mean(imvar)-seuilvar*std(imvar) # seuil automatique

```

```

155     imvarbin = imvar.<m
156     @views imvarbin[:, :] .*= mask[:, :]
157     # Suppression des points solitaires (faux positifs) :
158     imvarbin = Images.imfill(imvarbin,(0,500))
159     # Comblement des trous :
160     imvarbin = .!Images.imfill(.!imvarbin,(0,500))
161     # Réapplication d'un masque :
162     @views imvarbin[:, :] .*= mask[:, :]
163
164     # Détection des blobs :
165     blobs_log = blob_Log(imvarbin, [70])
166     blob_detecte = false
167     if length(blobs_log) >= 1
168         blob_detecte=true
169         # Sélection des n_gouttes blobs les plus importants :
170         nb_detecte = minimum((n_gouttes,length(blobs_log)))
171         liste_blob = sort!(blobs_log; by=ampl, rev=true)[1:nb_detecte]
172         liste_centers = [blob.location for blob in liste_blob]
173     else
174         liste_centers = missing
175     end
176
177     if sauvegarder_bin
178         save(save_dir*"test_$i"*"_varb2.png", imvarbin)
179     end
180     if sauvegarder_trace
181         # On sauvegarde une série d'images correspondant à la vidéo
182         # originale, avec un tracé des gouttes détectées.
183         img_show = Gray.(img) # Copie de l'image originale
184         if blob_detecte
185             for center in liste_centers
186                 draw!(img_show,
187                     Ellipse(CirclePointRadius(# x,y,r, origine haut droite.
188                         center[2], center[1], 80; thickness=30, fill=false))
189                 )
190             end
191         end
192         save(save_dir*lpad(i,3,"0")*".png", img_show)
193     end
194
195     # Déterminer le temps de l'image (en secondes)
196     t = (i-1) / freq
197     if ismissing(liste_centers)
198         x = []
199         y = []
200     else
201         x = [Int32(center[2]) for center in liste_centers]
202         y = [Int32(center[1]) for center in liste_centers]
203     end
204     lock(lockdf) do
205         addrow!(df, t, x, y)
206     end
207     next!(p) # Avancer dans la barre de progression
208 end
209 finish!(p)
210 print("Writing CSV...\n")
211 sort!(df, : "t (s)")
212 CSV.write(path_csv, df)
213 print("Terminé.\n")
214 end

```

D – Câblage, contrôle et installation du moteur et du spectromètre

1 – Principe de contrôle du moteur

Pour déplacer le spectromètre sur son rail, on utilise un moteur pas-à-pas NEMA-17 (SY42STH38-1684A). Ce moteur à 4 entrées est contrôlé par une puce DRV 8825 de Pololu, que nous commandons au moyen d'une FT232H d'Adafruit selon le câblage donné en figure D.1. Ce dernier composant a pour but de connecter via un port USB-c une série de broches (ou pins) multifonction à un ordinateur, ce qui simplifie la gestion de l'expérience dans son ensemble : on peut ainsi commander le moteur, les caméras et le spectromètre via le même appareil, voire le même programme.

Le principe de commande du moteur pas-à-pas est assez simple : une activation de la broche "STEP" de la puce de contrôle le fait tourner d'un incrément (ou d'une subdivision prédéfinie de ce dernier). En activant et en désactivant cette broche à la fréquence désirée, on obtient une rotation. Cependant, le passage par la puce FT232H introduit une connexion USB, dont la vitesse de transmission des informations ne peut suivre la fréquence d'activation du moteur.

Pour contourner ce problème, nous avons imposé à l'ensemble du circuit l'horloge interne réglée à 100 kHz de la FT232H, placée en mode SPI (Serial Peripheral Interface). Ce faisant, nous lui avons octroyé le statut de « maître » sur la puce DRV 8825 (« esclave »). La broche MOSI – « Master Output, Slave Input » – du maître, qui correspond aux ordres donnés par la FT232H à la DRV 8825 (dans notre circuit, il s'agit de la broche D1), est connectée à la commande STEP de la puce esclave. On peut alors envoyer au maître des séries d'octets via la connexion USB, un True correspondant à une activation de la broche de sortie, un False à sa non-activation. Cette suite d'instructions est égrénée par la FT232H et envoyée de la broche MOSI à la broche STEP à la fréquence de son horloge interne. En jouant sur le nombre de False dans la série d'octets, on gère ainsi la fréquence d'activation, et donc la fréquence de rotation du moteur. Par là, on peut régler la vitesse d'avance du spectromètre sur le film.

Un excellent moyen de vérifier le contrôle sur le moteur, tant sur la vitesse que sur la durée de rotation, est de faire jouer à l'appareil une mélodie, transcrite dans ces deux paramètres. Plusieurs erreurs de codage discrètes ont pu ainsi être repérées. Trois thèmes musicaux ont été codés : celui du Château dans le Ciel, écrit par Joe Hisaichi (version en moteur pas-à-pas : <https://youtu.be/sEriPKzKBKI>), la Marche Impériale de Star Wars, par John Williams (<https://youtube.com/shorts/aN6gZY17pbk?feature=share>) et la Symphonie du Nouveau Monde (4^e mouvement), d'Antonin Dvořák (<https://youtu.be/ukywxHuk93Q>).

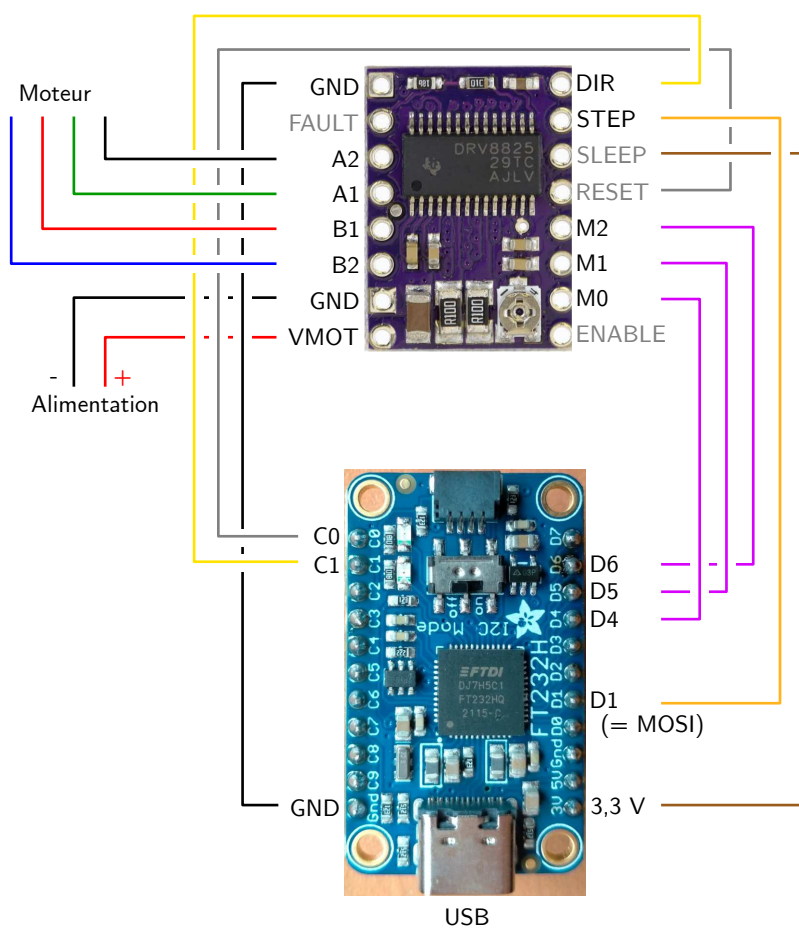


FIGURE D.1 – Câblage de la puce de contrôle sur l’extension GPIO et sur le moteur pas à pas.

2 – Instructions pour utiliser les codes

Tout d’abord, les programmes contrôlant le moteur et le spectromètre, écrits en python (annexes E (moteur) et F (spectromètre)) utilisent, en plus des librairies standard, les bibliothèques :

- `pandas` (gestion de dataframes),
- `tqdm` (barres de progression pour les calculs longs),
- `pyusb`, pour la FT232H,
- `pyftdi`, pour la FT232H,
- `Adafruit-Blinka`, pour la FT232H,
- `seabreeze` pour le spectromètre,

disponibles sur pip, et qu’il convient d’installer.

2.1 Installation de la FT232H et du moteur

Des instructions détaillées peuvent être trouvées sur le site <https://learn.adafruit.com/circuitpython-on-any-computer-with-ft232h>, mais peuvent se résumer ainsi :

1. Installer Zadig (<https://zadig.akeo.ie/>), lancer l’application en n’ayant que la puce de branchée à l’ordinateur.
2. Dans le menu Options, aller dans List all devices.
3. Dans le menu déroulant, sélectionner USB Serial Converter.
4. Dans le champ FTDIBUS, sélectionner libusbK.
5. Dans le champ USB ID, renseigner 0403 6014.
6. Cliquer sur Replace Driver.

Il faut ensuite définir une nouvelle variable d’environnement : `BLINKA_FT232H = 1`. Sur un terminal Conda, il faut entrer :

```
-> set BLINKA_FT232H=1
```

ou, sur un terminal Powershell :

```
$env :BLINKA_FT232H=1
```

2.2 Utilisation du moteur

Dans le code disponible en annexe E, il faut importer la classe `Moteur`, qui contient les méthodes utiles. Il faudra ensuite créer une instance de l’objet :

```
M = Moteur()
```

Cette instanciation occupe directement toutes les broches utiles de la puce FT232H. Pour les libérer, il faudra utiliser la méthode

```
M.destroy()
```

D'autres méthodes de `Moteur` sont à connaître, notamment `set_sens`, qui prend en argument un booléen et, selon sa valeur, fait tourner le moteur dans le sens horaire ou trigonométrique.

La méthode `mode` sert à régler le mode de microstepping, et prend en argument le nombre de micro-pas que le moteur fait en un pas complet (une puissance de 2 entre 1 et 32), afin de rendre le réglage plus ou moins fin, et le moteur plus ou moins rapide.

Enfin, la fonction `avancer` prend en argument la `course` à faire parcourir à l'écrou, en mm, et la vitesse de rotation du moteur `vitesse_croisiere`, en pas/s. Pour permettre d'atteindre cette vitesse, des rampes d'accélération sont prévues lorsqu'elles sont utiles. Le détail en est expliqué dans le code.

D'une manière générale, le programme est adapté au moteur utilisé dans cette thèse. Pour l'adapter à un autre moteur, il suffit de changer dans l'initialisation de classe les valeurs `self.DPS`, qui donne le nombre de degrés parcourus par l'axe du moteur en un pas complet, `self.avance`, qui donne l'avance en mm de l'écrou sur la vis pour un pas complet du moteur, et les modes de microstepping via `self.resolution`.

2.3 Installation du spectromètre

NE PAS BRANCHER LE SPECTROMETRE IMMEDIATEMENT, sans quoi la procédure ne fonctionne pas. Suivre la démarche suivante :

1. Installer le logiciel OceanART (gratuit), édité par OceanInsight.
2. Brancher le spectromètre.
3. Lancer OceanART. SI le spectromètre n'est pas reconnu :
 - (a) Ouvrir le gestionnaire de périphériques en administrateur.
 - (b) Sélectionner le spectromètre (FLAME-T).
 - (c) Cliquer sur 'Mettre à jour le pilote'.
 - (d) Cliquer sur 'Parcourir le PC', et sélectionner le dossier "C :/Program Files/Ocean Insight/OceanART/drivers".

Dans le cas où le spectromètre a été branché avant l'installation de OceanArt, un mauvais pilote s'est probablement installé dessus. Il faut alors :

1. Débrancher le spectromètre.
2. Ouvrir le gestionnaire de périphériques en administrateur.
3. Dans le menu Affichage, sélectionner Afficher les périphériques cachés.
4. Sélectionner le spectromètre (FLAME-T).
5. Cliquer sur "Désinstaller le pilote", et cocher la case "Désinstaller le pilote".
6. Reprendre la procédure ci-dessus pour installer le pilote d'OceanART.

2.4 Utilisation du spectromètre

Une fois le spectromètre branché, on peut créer une instance de la classe `Spectrometre`. Cette classe hérite d'une autre classe `Mesure`, qui permet d'analyser les mesures du spectromètre

et de les traiter sans avoir à brancher l'appareil à l'ordinateur. Une version plus longue de la classe `Mesure` a notamment des méthodes d'import et d'export de données, ainsi que de visualisation, qui ont été retirées de ce code afin de le raccourcir. Le détail des traitements est précisé dans le code. Concrètement, la procédure d'utilisation se résume à :

1. Instancer un objet Spectromètre : `S = Spectrometre()`.
2. Eteindre la source de lumière du spectromètre.
3. Appeler `S.take_dark()` afin d'enregistrer le spectre noir, sans signal.
4. Rallumer la source de lumière du spectromètre, et placer un miroir (wafer de silicium par exemple) sous le capteur/émetteur.
5. Appeler `S.take_ref()` afin d'enregistrer le signal de référence, qui est la mesure du spectromètre de sa propre source lumineuse.
6. Placer le film à mesurer sous le capteur/émetteur, à distance raisonnable (environ 1 à 3 mm au jugé).
7. Appeler `S.acq()` pour lancer un enregistrement ponctuel, ou `S.golive()` pour avoir une animation en temps réel du spectre renvoyé par le film. Dans les deux cas, l'argument `save=True` doit être renseigné pour que les spectres mesurés soient enregistrés dans la mémoire de l'objet Spectromètre (`S`). Pour un affichage du spectre mesuré avec `S.acq()`, l'argument `show=True` doit être renseigné.

E – Programme de contrôle du moteur

```
1 # board, digitalio et busio sont des parties de adafruit-blinka.
2 # pip install Adafruit-Blinka
3
4 import time
5 import board
6 from digitalio import DigitalInOut, Direction, Pull
7 from busio import SPI
8
9 class Moteur():
10     def __init__(self):
11         ## Données générales :
12         self.DPS=1.8 # °/full step
13         self.SPR=int(360/self.DPS) # Steps per Revolution
14         self.avance = 40 # μm/FullStep (avancée de l'écrou sur la vis)
15         self.resolution={ # μstepping levels : μstep/step
16             1:(0,0,0),
17             2:(1,0,0),
18             4:(0,1,0),
19             8:(1,1,0),
20             16:(0,0,1),
21             32:(1,0,1)
22         }
23         self.microstepping_level=8
24         # Pas de temps pour l'accélération du moteur (s) :
25         self.Δt = 0.1
26         # nb de μsteps/seconde que le moteur peut atteindre instantanément :
27         self.f_seuil = 100
28
29         ## Définition des pins
30         # Initialisation de la commande SPI :
31         self.spi = SPI(board.SCL, board.MOSI, board.MISO)
32         # Fréquence de traitement des octets (et non des bits) :
33         self.f_spi = self.spi.frequency / 8
34
35         self.Pdir = DigitalInOut(board.C1)
36         self.Preset = DigitalInOut(board.C0)
37         self.PM = [
38             DigitalInOut(board.D4),
39             DigitalInOut(board.D5),
40             DigitalInOut(board.D6)
41         ]
42
43         # Paramétrage des pins en sorties
44         self.Pdir.direction = Direction.OUTPUT
45         for pin in self.PM :
46             pin.direction = Direction.OUTPUT
47         self.Preset.direction = Direction.OUTPUT
48
49         # Initialisation
50         self.mode(8) # Mode de μ-stepping : 1, 2, 4, 8, 16, 32
51         self.enable()
52         time.sleep(0.05)
53         self.avancer(1, vitesse_croisiere=50, rampe=False)
```

```

54     time.sleep(0.1)
55     self.avancer(-1, vitesse_croisiere=50, rampe=False)
56
57 def configure_freq_spi(self, freq=100000) :
58     """
59     Configure la fréquence du SPI, en Hz (la fréquence
60     de traitement des bits reçus, soit par défaut
61     100 000 bits/s).
62     """
63     l = self.spi.try_lock()
64     if not l :
65         self.spi.unlock()
66         self.spi.try_lock() # Lock le SPI
67     self.spi.configure(baudrate = freq)
68     self.spi.unlock()
69
70 def destroy(self) :
71     self.Pdir.deinit()
72     for pin in self.PM :
73         pin.deinit()
74
75 def disable(self):
76     self.Preset.value = False
77     time.sleep(0.2)
78
79 def enable(self):
80     self.Preset.value = True
81     time.sleep(0.2)
82
83 def set_sens(self, sens=True):
84     """
85     Définit le sens de rotation du moteur, par un booléen.
86     """
87     self.Pdir.value = sens
88     time.sleep(0.2)
89
90 def mode(self, index):
91     """
92     Pour choisir le mode de  $\mu$ stepping. index : 1,2,4,8,16 ou 32
93     (nombre de  $\mu$ steps effectués pour faire un step complet).
94     """
95     if index in self.resolution.keys():
96         self.microstepping_level=index
97         for i in range(3):
98             if self.resolution[index][i]:
99                 self.PM[i].value = True
100            else:
101                self.PM[i].value = False
102        else:
103            print(
104                ""Erreur : la valeur spécifiée n'est pas disponible.\n
105                Valeurs possibles : {}".format(self.resolution.keys()))
106
107 def nb_ticks_pass(self, freq=440) :
108     """
109     freq : fréquence de rotation du moteur ( $\mu$ step/s)
110     Renvoie le nombre d'octets False à mettre après un octet True
111     dans la commande SPI.write pour que le moteur commandé tourne
112     à la fréquence désirée.
113

```

```

114     1  $\mu$ step est codé par un octet. Pour avoir la bonne fréquence, il
115     faut donc bien prendre en compte la fréquence de traitement des
116     octets de la puce et non sa fréquence de traitement des bits, d'où
117     le facteur 1/8 devant self.f_spi lorsque cette valeur est définie à
118     l'initialisation.
119     """
120     # T_visé / T_horloge = f_horloge / f_visé
121     nb_clicks_to_pass = int(self.f_spi/freq)
122     # On retire 1 octet pour le True envoyé au début.
123     return nb_clicks_to_pass-1
124
125 def decompose_frequences_rotation(self,
126     course=20, vitesse_croisiere=500, rampe=True,
127     vitesse_min=10, division_steps_rampe=5, nb_mpas=False):
128     """
129     Ecrit une liste d'instructions que le programme self.avancer
130     utilisera comme buffer pour faire avancer l'écrou sur l'axe.
131
132     Arguments :
133     - course : course de l'écrou (en mm)
134     - vitesse_croisiere : fréquence de rotation max (step/s)
135     - rampe:bool : faire les rampes d'accélération ou non
136     - vitesse_min : fréquence de rotation min du moteur (step/s)
137     - division_steps_rampe :  $x \rightarrow \text{nb\_steps\_rampe} = \text{nb\_steps\_tot}/x$ 
138     - nb_mpas : nombre de micro-pas à effectuer (override la course)
139
140     Renvoie :
141     - liste des nombres de False à envoyer à la puce FT232H pour
142       chaque  $\mu$ step
143     - sens de rotation (bool)
144     """
145     # Convertir les vitesses en  $\mu$ step/s
146     Vc = vitesse_croisiere * self.microstepping_level
147     Vm = vitesse_min * self.microstepping_level
148      $\Delta V$  = Vc - Vm
149
150     # Calculer le nombre de  $\mu$ -pas nécessaires
151     course = abs(course)
152     if nb_mpas :
153         N = nb_mpas
154     else :
155         #  $\mu$ step = mm * (step/mm) * ( $\mu$ step/step)
156         N = int(course * (1000/self.avance) * self.microstepping_level)
157
158     if rampe :
159         Nr = min(N//division_steps_rampe, 200)
160         Nc = N - 2*Nr # Nombre de pas en vitesse de croisière
161         # Liste de false : 1 $\mu$ step = [True, False, False, ..., False]
162         # Il faut savoir combien de False mettre.
163         nb_false_rampe_asc = [
164             self.nb_ticks_pass(Vm + (n/Nr)* $\Delta V$ ) for n in range(Nr)
165         ]
166         nb_false_rampe_desc = list(reversed(nb_false_rampe_asc))
167         nb_false_croisiere = [self.nb_ticks_pass(Vc) for n in range(Nc)]
168         liste_falses = nb_false_rampe_asc + nb_false_croisiere
169         liste_falses += nb_false_rampe_desc
170     else :
171         liste_falses = [self.nb_ticks_pass(Vc) for n in range(N)]
172
173     return liste_falses

```

```
174
175 def avancer(self, course=20, vitesse_croisiere=700, rampe=True,
176             vitesse_min=150, division_steps_rampe=7, nb_mpas=False):
177     """
178     Faire tourner le moteur pour générer une avance de l'écrou, avec
179     des rampes d'accélération et de décélération.
180
181     Arguments :
182     - course : course de l'écrou, en mm
183     - vitesse_croisiere : vitesse de rotation maximale, en pas/s (step/s)
184     - rampe:bool : faire les rampes d'accélération ou non
185     - vitesse_min : vitesse de rotation minimale au départ et à l'arrêt
186     du moteur en pas/s (step/s)
187     - division_steps_rampe : une rampe fait X \% du nombre de pas
188     totaux, où X=100//division_steps_rampe
189     - nb_mpas : nombre de micro-pas à effectuer (override la course)
190
191     Retourne : le nombre de  $\mu$ pas effectués.
192     """
193     # Ecrire le buffer
194     liste_falses = self.decompose_frequences_rotation(
195         course=course, vitesse_croisiere=vitesse_croisiere, rampe=rampe,
196         vitesse_min=vitesse_min, division_steps_rampe=division_steps_rampe,
197         nb_mpas=nb_mpas)
198     self.set_sens(course<0)
199     on = [0x80] # Octet True
200     buffer = []
201     for nb_falses in liste_falses :
202         buffer += on
203         buffer += [0x00 for i in range(nb_falses)]
204     buffer = bytearray(buffer)
205
206     # Injecter le buffer dans le MISO
207     l = self.spi.try_lock()
208     if not l :
209         self.spi.unlock()
210         self.spi.try_lock() # Lock le SPI
211     self.spi.write(buffer)
212     self.spi.unlock()
213     return len(liste_falses)
```

F – Programme minimal de contrôle du spectromètre

```
1 import seabreeze
2 seabreeze.use('cseabreeze')
3 from seabreeze import spectrometers as spectro
4 from matplotlib import pyplot as plt
5 import numpy as np
6 import pandas as pd
7 from scipy.signal import find_peaks, lombscargle
8 import os
9 import time
10
11
12 def moyenne_glissante(Y, T=5):
13     '''
14     Effectue une moyenne glissante sur T points sur la liste Y.
15     '''
16     T = int(T) # Nombre de points sur lesquels faire la moyenne
17     Z=[]
18     for x in range(T//2, len(Y)-T//2):
19         Z.append(np.mean(Y[x-T//2:x+T//2]))
20     return np.array(Z)
21
22 def ecart_type_glissant(Y, T=5, seuil_std=0.1):
23     """
24     Repérer la zone centrale au fort rapport signal/bruit.
25     Y : liste de points représentant les données.
26     T : Nombre de points sur lesquels calculer l'écart-type.
27     seuil_std : seuil d'écart-type pour déterminer la zone calme. Cette
28     dernière est définie par un intervalle de faible écart-type.
29     """
30     T = int(T) # Nombre de points sur lesquels faire l'écart-type
31     Z=[]
32     i=0
33     dindex = {}
34     for x in range(T//2, len(Y)-T//2):
35         dindex[i]=x
36         Z.append(np.std(Y[x-T//2:x+T//2]))
37         i+=1
38     stdmax = np.array(Z).max()
39     xinit = len(Y)//2
40     xmin, xmax = xinit, xinit
41     while xmax - xmin < len(Y)/2 and seuil_std > 0.000001 :
42         while xmin>0 and Z[xmin]<stdmax/seuil_std:
43             xmin-=1
44         while xmax<len(Z) and Z[xmax]<stdmax/seuil_std:
45             xmax+=1
46         seuil_std /=2
47     if seuil_std <=0.000001 :
48         raise ValueError("Le signal est trop bruité.")
49     return xmin+T//2, xmax+T//2
50
51
```

```

52 #####
53 ##### CLASSE MESURE #####
54 #####
55
56 class Mesure():
57     """
58     Une classe qui regroupe des mesures spectrales prises par le
59     spectromètre. Mesure(path, spectre_ref_th) : on peut importer des
60     mesures depuis un dossier de fichiers csv situé à 'path'. Le spectre
61     théorique d'émission de la source lumineuse peut être mis en argument.
62     """
63     def __init__(self, path=False, spectre_ref_th=[], donnees=False):
64         if isinstance(donnees, dict):
65             self.dark = donnees["dark"]
66             self.ref = donnees["ref"]
67             self.reponse = donnees["reponse"]
68             self.mesures = donnees["mesures"]
69             self.mesures_brutes = donnees["mesures_brutes"]
70             self.wv = donnees["wv"]
71             self.path = donnees["path"]
72             if "liste_epaisseurs" in donnees.keys() :
73                 self.liste_epaisseurs = donnees["liste_epaisseurs"]
74             else:
75                 self.liste_epaisseurs = []
76         elif path:
77             self.import_csv(path)
78             self.path = path
79         else:
80             self.dark = np.array([]) # spectre noir
81             self.ref = np.array([]) # spectre de référence
82             self.reponse = np.array([]) # réponse du spectromètre
83             # spectre théorique d'émission de la source lumineuse :
84             self.spectre_ref_theorique = spectre_ref_th
85             self.mesures = []
86             self.mesures_brutes = []
87             self.wv = []
88             self.path=""
89             # liste : une épaisseur de film de savon par mesure :
90             self.liste_epaisseurs = []
91
92     def reset(self):
93         """
94         Efface les mesures, mais conserve les dark, ref, wv, reponse,
95         spectre_ref_theorique.
96         """
97         self.mesures = []
98         self.mesures_brutes = []
99         self.liste_epaisseurs = []
100
101     def visionnage(self, fps=10, boucle=False, ref=True):
102         """Affiche une animation dans une nouvelle fenêtre, montrant les
103         mesures traitées du spectromètre au cours du temps. Utile pour
104         les prises continues avec la méthode golive de 'Spectrometre'.
105
106         Parameters
107         -----
108         fps : int, optional
109             Nombre d'images par secondes de l'animation, default 10
110         boucle : bool, optional
111             True si l'animation doit reboucler, default False

```

```

112     ref : bool, optional
113         True si les mesures ont été calibrées avec une référence. Permet
114         de redéfinir les limites de l'axe vertical, default True
115     """
116     x = self.wv
117     fig, ax = plt.subplots()
118     line, = ax.plot([], lw=1)
119     ax.set_xlim(x.min(), x.max())
120     letitre = "t = {} s"
121     if ref:
122         ax.set_ylim([-1.1,1.1])
123     else:
124         ax.set_ylim([2000, 100000])
125     fig.canvas.draw()
126     # cache the background:
127     axbackground = fig.canvas.copy_from_bbox(ax.bbox)
128     plt.show(block=False)
129     dt = 1/fps
130     k=0
131     try:
132         while k<len(self.mesures) :
133             line.set_data(x, self.mesures[k])
134             # restore background
135             fig.canvas.restore_region(axbackground)
136             # redraw just the points
137             ax.draw_artist(line)
138             # fill in the axes rectangle
139             fig.canvas.blit(ax.bbox)
140             fig.canvas.flush_events()
141             time.sleep(dt)
142             k+=1
143             if boucle and k==len(self.mesures):
144                 k=0
145     except KeyboardInterrupt:
146         print('interrupted')
147
148     def plot_mesure(self, index, ymin=-0.005, ymax=1, xmin=400, xmax=900,
149                   normaliser=True, adapter=True):
150         """
151         Affiche la mesure calibrée du spectromètre d'indice 'index'.
152         """
153         fig, ax = plt.subplots()
154         if adapter :
155             ymax = min(ymax, self.mesures[index].max()*1.2)
156             ax.set_ylim([ymin,ymax])
157         ax.set_xlim([xmin,xmax])
158         signal = self.mesures[index]
159         if normaliser :
160             signal /= signal.max()
161         ax.scatter(self.wv, signal, s=1)
162         #fig.show()
163
164     def export_csv(self, path):
165         """
166         Exporte les données de mesure, données spectrales et calculées,
167         au format csv.
168         """
169         df_rep = pd.DataFrame(self.reponse, index=self.wv, columns=["Réponse"])
170         df_rep.to_csv(path+"reponse.csv", index=True,
171                      index_label="Wavelength (nm)")

```

```

172     df_dark = pd.DataFrame(self.dark, index=self.wv, columns=["Dark"])
173     df_dark.to_csv(path+"dark.csv", index=True,
174                   index_label="Wavelength (nm)")
175     df_ref = pd.DataFrame(self.ref, index=self.wv, columns=["Référence"])
176     df_ref.to_csv(path+"ref.csv", index=True,
177                  index_label="Wavelength (nm)")
178     df_brut = pd.DataFrame(self.mesures_brutes, columns=self.wv)
179     df_brut.to_csv(path+"mesures_brutes.csv", index=False)
180     df_corr = pd.DataFrame(self.mesures, columns=self.wv)
181     df_corr.to_csv(path+"mesures_corrigees.csv", index=False)
182     P = self.liste_epaisseurs
183     df_epaisseurs = pd.DataFrame(P, columns=["Épaisseur (μm)"])
184     df_epaisseurs.to_csv(path+"courbe_epaisseur.csv", index=True)
185
186     def import_csv(self, path):
187         """
188         Permet l'importation d'un dossier de mesures au format csv.
189         path : chemin vers un dossier de fichiers
190         """
191         df_brut = pd.read_csv(path+"mesures_brutes.csv")
192         df_corr = pd.read_csv(path+"mesures_corrigees.csv")
193         df_rep = pd.read_csv(path+"reponse.csv", index_col="Wavelength (nm)")
194         df_dark = pd.read_csv(path+"dark.csv", index_col="Wavelength (nm)")
195         df_ref = pd.read_csv(path+"ref.csv", index_col="Wavelength (nm)")
196         if os.path.exists(path+"courbe_epaisseur.csv") :
197             df_epaisseurs=pd.read_csv(path+"courbe_epaisseur.csv", index_col=0)
198             self.liste_epaisseurs = df_epaisseurs["Épaisseur (μm)"].values
199         else:
200             self.liste_epaisseurs = []
201
202         self.dark = df_dark["Dark"].to_numpy()
203         self.ref = df_ref["Référence"].to_numpy()
204         self.reponse = df_rep["Réponse"].to_numpy()
205         self.mesures = df_corr.values
206         self.mesures_brutes = df_brut.values
207         self.wv = df_ref.index.to_numpy()
208
209     def recalibrer_mesures(self):
210         """
211         Calibre les mesures brutes du spectromètre à l'aide des signaux
212         dark et ref.
213         """
214         for i in range(len(self.mesures_brutes)):
215             A = (self.mesures_brutes[i]-self.dark)
216             Nref = self.ref-self.dark
217             Nref += Nref.min()+1
218             self.mesures[i] = A/Nref
219
220     def modele_signal(self, k, ep):
221         """Calcule un signal théorique correspondant à une
222         épaisseur donnée, pour une liste de nombres d'onde.
223         k : np.array -- liste de nombres d'onde (abscisses) en m-1
224         ep : épaisseur, en μm"""
225         n = 1.36
226         α = 2*np.pi*n*ep*1e-6
227         β = (2*n/(n**2-1))**2
228         signal = np.sin(α*k)**2/(β+np.sin(α*k)**2)
229         return signal
230
231     def epaisseur_lombscargle(self, index, liste_puls, x1=0,x2=-1, n=1.36,

```

```

232         tracer=False, suivi=False, T_mg=8):
233     """
234     Calcule l'épaisseur (en m) d'un point d'un film de savon,
235     correspondant à la mesure 'index' de la liste de mesures calibrées,
236     en utilisant une méthode de Lomb-Scargle et une détection de pics
237     sur le périodogramme ainsi obtenu. Le signal doit être borné par
238     deux indices, x1 et x2, définissant une zone d'intérêt. Cette
239     méthode utilise des données précalculées dans d'autres programmes
240     qui y font appel, comme epaisseur_point ou courbe_epaisseurs.
241
242     Y préférer la méthode 'epaisseur_point' qui y fait appel.
243     cf. la thèse de Champougny pour les calculs d'épaisseur.
244
245     index      : indice de la mesure étudiée.
246     liste_puls : np.array donnant toutes les pulsations représentées sur
247                 le diagramme de Lomb-Scargle (abscisse, en m-1)
248     x1, x2    : indices bornes de la zone d'intérêt du spectre mesuré (zone
249                 non bruitée). La zone d'intérêt du spectre S est donc S[x1:x2].
250     n        : indice optique de l'eau savonneuse.
251     tracer    : si True, affiche le périodogramme du spectre, avec la
252                 détection des pics, ainsi que le signal étudié avec en
253                 superposition un signal modèle recalculé avec l'épaisseur trouvée.
254                 Tant que la fréquence de ces deux signaux correspond, le calcul
255                 est valide.
256     suivi    : si True, affichera des données de calcul.
257     T_mg     : nombre de points pris en une fois par la moyenne glissante
258                 qui lisse le spectre.
259     """
260     # Signal d'étude : (Im-Id)/(I0-Id+quelque chose pour éviter 0)
261     # On le cantonne à la zone d'intérêt.
262     S = self.mesures[index][x1:x2]
263     wv = self.wv[x1:x2]
264
265     # Lissage de la courbe :
266     I = moyenne_glissante(S, T=T_mg) # intensités du signal
267     λ = wv[T_mg//2:-(T_mg//2)] # longueurs d'onde (nm)
268     K = 1/(λ*1e-9) # nombres d'onde (m-1)
269
270     # Lomb-Scargle periodogram
271     periodogram = lombscargle(K, I, liste_puls)
272     periodogram = periodogram/max(30,periodogram.max())
273
274     indices_pics, props = find_peaks(periodogram, prominence=59e-7)
275     promin = props["prominences"]
276     if len(indices_pics)>10 :
277         # Gérer un grand nombre de pics trouvés : on garde les 10 plus
278         # grandes proéminences.
279         Lproms = sorted(props["prominences"])
280         prom_minimum = Lproms[-10]
281         lesi = [
282             i for i in range(len(indices_pics)) if promin[i]>=prom_minimum]
283         indices_pics = indices_pics[lesi]
284         promin = promin[lesi]
285     if len(indices_pics) <= 1 :
286         ep = np.nan
287         kmax=0
288         indices_pics_seuls = []
289     else :
290         # Supprimer les premiers pics (fondamental et basses fréquences)
291         ind_moy = np.mean(indices_pics)

```

```

292     imin = [i for i, x in enumerate(indices_pics) if x>ind_moy][0]
293     puls_0 = liste_puls[indices_pics[imin]] # premier pic considéré
294     indices_pics, promin = indices_pics[imin:], promin[imin:]
295
296     # Critère de sélection : favorise les pics dont la proéminence
297     # est proche de leur hauteur réelle, et va donc supprimer les
298     # "pics de falaise". Souci : si notre signal est un peu mixé,
299     # on peut se retrouver avec un pic ignoré de cette façon au profit
300     # d'un pic insignifiant, mais sans autre pic à côté.
301     # Piste : on prend un seuil sur ce critère, puis on trie
302     # les passants par proéminence.
303     liste_critere = promin/periodogram[indices_pics]
304     seuil = 0.55
305     indices_pics_seuls = indices_pics[liste_critere>seuil]
306     promins_pics_seuls = promin[liste_critere>seuil]
307
308     if len(indices_pics_seuls) <= 0 : # si aucun pic ne passe
309         ep = np.nan
310         kmax=0
311     else :
312         # Récupérer le pic ayant la plus forte proéminence.
313         kmax = indices_pics_seuls[promins_pics_seuls.argmax()]
314         #kmax += seconde_moitie * ind_coupe
315         puls = liste_puls[kmax] # pulsation dominante  $\omega=2\pi f$ 
316         fmes = puls/(2*np.pi)
317         ep = fmes/(2*n) # en mètres
318
319     if len(indices_pics_seuls) <= 0 :
320         if tracer :
321             print("Epaisseur : inconnue\n")
322             plt.figure(1)
323             plt.plot(liste_puls*1e6, periodogram)
324             plt.axvline(puls_0*1e6, color='g', alpha=0.25)
325             plt.title("Periodogram of the spectrum")
326             plt.xlabel("Pulsation of the spectrum (rad. $\mu$ m)")
327             plt.ylabel("Intensity")
328             plt.grid()
329             plt.figure(2)
330             plt.plot(K, I, label="mesure")
331             plt.title("Measured spectrum I(k)")
332             plt.xlabel("Wave number (m $^{-1}$ )")
333             plt.ylabel("Intensity")
334             plt.legend()
335             plt.show()
336         return np.nan
337
338     if suivi :
339         print("Epaisseur : {0:.2f}  $\mu$ m\n".format(ep*1e6))
340
341     if tracer :
342         print("Bornes : K1 = {0:.2f} Mm $^{-1}$ , K2 = {1:.2f} Mm $^{-1}$ ".format(
343             K[0]*1e-6,K[-1]*1e-6))
344         print("Epaisseur : {0:.2f}  $\mu$ m\n".format(ep*1e6))
345         idmax = -1 # 5*kmax
346         plt.figure(1)
347         plt.plot(liste_puls[:idmax]*1e6, periodogram[:idmax])
348         plt.axvline(puls_0*1e6, color='g', alpha=0.25)
349         plt.axvline(liste_puls[kmax]*1e6, color='r', alpha=0.25)
350         plt.title("Periodogram of the spectrum")
351         plt.xlabel("Pulsation of the spectrum (rad. $\mu$ m)")

```

```

352     plt.ylabel("Intensity")
353     plt.grid()
354
355     plt.figure(2)
356     plt.plot(K, I, label="mesure")
357     Imod = (1+6*I.std())*self.modele_signal(K, ep*1e6)+I.mean()
358     plt.plot(K, Imod, label="modèle", alpha=0.4)
359     plt.title("Measured spectrum I(k)")
360     plt.xlabel("Wave number (m-1)")
361     plt.ylabel("Intensity")
362     plt.legend()
363     plt.show()
364     return ep
365
366 def epaisseur_point(self, index, nb_ω = 30000, emin=0.05e-6,
367                    emax=50e-6, tracer=False, suivi=False, T_mg=8, T_std=5):
368     """
369     Calcule l'épaisseur (en m) d'un point d'un film de savon,
370     correspondant à la mesure 'index' de la liste de mesures calibrées,
371     en appelant une méthode de Lomb-Scargle et une détection de pics
372     sur le périodogramme ainsi obtenu.
373
374     index : indice de la mesure étudiée.
375     nb_ω : nombre de pulsations considérées dans le diagramme de
376           Lomb-Scargle (correspond donc à sa résolution).
377     emin, emax : épaisseur minimale (resp. maximale) d'un film de savon.
378     e0 (μm): supposition d'une première valeur pour l'épaisseur.
379           Facultatif, mais peut réduire le temps de calcul. A manipuler
380           avec précaution : peut aussi introduire des erreurs.
381     tracer : si True, affiche le périodogramme du spectre, avec
382           la détection des pics, ainsi que le signal étudié avec en
383           superposition un signal modèle recalculé avec l'épaisseur
384           trouvée. Tant que la fréquence de ces deux signaux superposés
385           correspond, le calcul est valide.
386     suivi : si True, affichera des données de calcul.
387     """
388     n=1.36 # Indice optique de l'eau + glycerol
389     ωmin, ωmax = 4*np.pi*n*emin, 4*np.pi*n*emax
390     liste_puls = np.linspace(ωmin, ωmax, nb_ω)
391
392     # Zone d'intérêt :
393     x1,x2=ecart_type_glissant(self.mesures[index],T=T_std,seuil_std=600)
394     return self.epaisseur_lombscargle(index, liste_puls, x1=x1, x2=x2,
395                                     n=n, tracer=tracer, suivi=suivi, T_mg=T_mg)
396
397 def courbe_epaisseurs(self, nb_ω = 30000, emin=0.05e-6, emax=50e-6,
398                      T_mg=8, T_std=5, seuil_std=600):
399     """
400     Calcule l'épaisseur des points du film de savon pour chaque mesure
401     calibrée de la liste de mesures. On utilise pour cela une méthode de
402     Lomb-Scargle pour obtenir le périodogramme du spectre, puis
403     une détection des pics pour repérer la pulsation dominante.
404     Celle-ci est directement liée à l'épaisseur.
405
406     nb_ω : nombre de pulsations à rechercher sur le domaine. La pulsation
407           retrouvée par Lomb-Scargle sera soumise à cette discrétisation.
408     emin, emax : épaisseur minimale (resp. maximale) d'un film de savon.
409     T_mg : nombre de points sur lesquels faire la moyenne glissante sur
410           chaque mesure, avant les opérations (réduction du bruit)
411     T_std : nombre de points sur lesquels faire l'écart-type glissant sur

```

```

412     la première mesure, afin de déterminer la zone d'intérêt
413     (celle avec le signal le plus clair possible).
414     seuil_std : lors de l'écart-type glissant de la première mesure, on
415     détermine la zone d'intérêt comme étant celle sur laquelle
416     l'écart-type ne dépasse pas cette valeur.
417     """
418     n=1.36 # Indice optique de l'eau + glycerol
419      $\omega$ min,  $\omega$ max = 4*np.pi*n*emin, 4*np.pi*n*emax
420     liste_puls = np.linspace( $\omega$ min,  $\omega$ max, nb_ $\omega$ )
421     liste_ep = []
422
423     # Calcul des bornes x1, x2 du domaine de spectre à étudier
424     liste_x1, liste_x2 = [], []
425     for i in range(1,7) : # On prend six mesures équitablement réparties.
426         x1,x2 = ecart_type_glissant(self.mesures[i*len(self.mesures)//7],
427                                   T=T_std, seuil_std=seuil_std)
428         liste_x1.append(x1)
429         liste_x2.append(x2)
430     x1 = int(np.median(liste_x1))
431     x2 = int(np.median(liste_x2))
432
433     # Mesure des épaisseurs
434     for index in range(len(self.mesures)) :
435         ep = self.epaisseur_lombscargle(index, liste_puls, x1=x1, x2=x2,
436                                       n=n, T_mg=T_mg)
437         liste_ep.append(ep)
438
439     liste_ep = np.array(liste_ep)
440     self.liste_epaisseurs = liste_ep
441     return liste_ep
442
443     def affichage_courbe_epaisseurs(self, rayon=5): # r=5cm
444         """
445         Affiche la courbe d'épaisseurs. Si celle-ci n'existe pas, elle
446         est automatiquement calculée.
447         rayon : rayon du film de savon, en cm
448         """
449         L = self.liste_epaisseurs
450         if len(L)==0 :
451             L = self.courbe_epaisseurs()
452         nb_mesures = len(self.mesures_brutes)
453         indices = range(nb_mesures)
454         r = [rayon*(1-i/nb_mesures) for i in indices]
455         plt.scatter(r,L*1e6, s=5.9)
456         plt.title("Evolution de l'épaisseur du film sur un rayon")
457         plt.xlabel("Rayon (cm)")
458         plt.ylabel("Epaisseur ( $\mu$ m)")
459         plt.show()
460
461     #####
462     ##### CLASSE SPECTROMETRE #####
463     #####
464
465     class Spectrometre(Mesure):
466         """
467         Sous-classe de Mesure : permet de contrôler le spectromètre, en
468         enregistrant les données et en en permettant le post-traitement.
469
470         Spectrometre(spectre_ref_th=[]) : le spectre théorique d'émission
471         de la source lumineuse utilisée peut être mis en argument.

```

```

472
473 Utilisation :
474 1/ S = Spectromètre() -- définition de l'objet spectromètre
475 2/ Eteindre la lumière du spectromètre.
476 3/ S.take_dark()
477 4/ Rallumer la lumière du spectromètre, et placer un miroir de
478   silicium sous la fibre optique.
479 5/ S.take_ref()
480 6/ Placer le film à mesurer sous la fibre optique.
481 7/ S.acq() ou S.golive()
482 """
483 def __init__(self, spectre_ref_th=[]):
484     super().__init__(spectre_ref_th=spectre_ref_th)
485     self.spec = spectro.Spectrometer(spectro.list_devices()[0])
486     # 2 ms en temps d'intégration ; adapter selon la saturation :
487     self.spec.integration_time_micros(integration_time_micros = 2000)
488     self.wv = self.spec.wavelengths()
489
490 def set_int_time(self, t):
491     """
492     Définit le temps d'intégration t (ms) sur lequel mesurer le spectre.
493     """
494     self.spec.integration_time_micros(integration_time_micros = t*1000)
495
496 def take_dark(self):
497     """
498     Utiliser lorsque la lampe du spectromètre est désactivée. Prend le
499     signal noir, i.e. ce qui est reçu par le capteur par défaut.
500     """
501     da = self.spec.intensities()
502     self.dark = da
503     plt.plot(self.wv, da)
504     plt.show()
505
506 def take_ref(self):
507     """
508     Utiliser lorsque le spectromètre mesure une référence.
509     La référence sert à passer des unités arbitraires du spectre
510     à des intensités absolues.
511     réponse :  $R(\lambda) = (S_{\text{ref}}(\lambda) - D(\lambda)) / I_{\text{ref}}(\lambda)$ 
512     S_ref : spectre mesuré brut de la référence
513     D : spectre noir
514     I_ref : spectre théorique de la lampe
515     """
516     if len(self.dark)>0:
517         self.ref = self.spec.intensities()
518         self.reponse = self.ref - self.dark
519         if len(self.spectre_ref_theorique)>0:
520             self.reponse = self.reponse / self.spectre_ref_theorique
521         plt.plot(self.wv, self.ref)
522         plt.plot(self.wv, self.reponse)
523         plt.show()
524     else:
525         print("Erreur : prendre un spectre noir d'abord.")
526
527 def acq(self, save=False, show=False):
528     """
529     Retourne I, où :
530      $I(\lambda) = (S(\lambda) - D(\lambda)) / R(\lambda)$ 
531     S : spectre brut mesuré

```

```

532     D : spectre noir (dark)
533     R : réponse du spectromètre (cf. take_ref)
534
535     si save==True :
536     I est enregistré comme élément de self.mesures
537     S est enregistré dans self.mesures_brutes
538     """
539     dark_exists = len(self.dark)>0
540     ref_exists = len(self.ref)>0
541     signalbrut = self.spec.intensities()
542     signal = np.array([signalbrut[i] for i in range(len(signalbrut))])
543     if save:
544         self.mesures_brutes.append(signalbrut)
545     if ref_exists :
546         #print("Signal calibré avec noir")
547         Sref = self.reponse - self.reponse.min() + 1
548         signal = (signal - self.dark) / Sref
549     elif dark_exists :
550         print("Signal avec noir, sans ref (unités arbitraires)")
551         signal -= self.dark
552     else :
553         print("Signal brut (unités arbitraires)")
554     if save:
555         self.mesures.append(signal)
556     if show:
557         plt.scatter(self.wv, signal, s=1)
558         plt.show()
559     return signal
560
561 def golive(self, fps=2, save=False):
562     """
563     Affiche en continu ce que reçoit le spectromètre.
564
565     fps : nombre d'acquisitions par seconde (environ).
566     save : si True, chaque mesure prise sera enregistrée dans
567           self.mesures et self.mesures_brutes.
568     """
569     ref = len(self.ref)>0
570     dt = 1/fps
571     x = self.spec.wavelengths()
572     fig, ax = plt.subplots()
573     line, = ax.plot([], lw=1)
574     ax.set_xlim(x.min(), x.max())
575     if ref:
576         ax.set_ylim([-1.5,1.5])
577     else:
578         ax.set_ylim([2000, 100000])
579     fig.canvas.draw()
580     axbackground = fig.canvas.copy_from_bbox(ax.bbox)
581     plt.show(block=False)
582     try:
583         while True :
584             line.set_data(x, self.acq(save=save))
585             fig.canvas.restore_region(axbackground)
586             ax.draw_artist(line)
587             fig.canvas.blit(ax.bbox)
588             fig.canvas.flush_events()
589             time.sleep(dt)
590     except KeyboardInterrupt:
591         print('interrupted')
```

G – Déformation d'un film causé par une lentille ponctuelle

Soit une lentille placée en \vec{r}_0 , $\|\vec{r}_0\| < R$. Cette annexe détaille la démarche de résolution du problème :

$$\begin{cases} \Delta \frac{2\sigma}{mg} z_\ell(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ \frac{2\sigma}{mg} z_\ell(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \mid (\|\vec{r}\| = R) \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

défini en sous-section II.2.1 en utilisant l'outil des fonctions de Green selon une méthode largement rencontrée dans la littérature. On reconnaît en effet dans ce problème la définition d'une fonction de Green sur un cercle de rayon R . On peut ramener ce problème au cercle unité en définissant $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{2\sigma}{mg} z_\ell(\vec{r}, \vec{r}_0)$ et avec les changements de variables $\vec{u} = \vec{r}/R$ et $\vec{u}_0 = \vec{r}_0/R$, ce qui transforme le problème en :

$$\begin{cases} \Delta G(\vec{u}, \vec{u}_0) = \delta(\vec{u} - \vec{u}_0) & \forall \vec{u} \in \mathcal{D} \\ G(\vec{u}, \vec{u}_0) = 0 & \forall \vec{u} \in \partial\mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{G.2})$$

qui est un problème de Green sur le disque unité $\mathcal{D} = \{\vec{u} \mid \|\vec{u}\| < 1\}$ de frontière $\partial\mathcal{D} = \{\vec{u} \mid \|\vec{u}\| = 1\}$. Une solution générale de ce problème s'écrit sous la forme :

$$G(\vec{u}, \vec{u}_0) = \Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0) - v(\vec{u}, \vec{u}_0) \quad (\text{G.3})$$

où $\Gamma : \vec{u} \mapsto \frac{1}{2\pi} \ln(\|\vec{u}\|)$ est une fonction dont le laplacien correspond à la fonction de distribution de Dirac δ , et v est une fonction à déterminer en fonction des conditions aux limites, satisfaisant :

$$\begin{cases} \Delta v(\vec{u}, \vec{u}_0) = 0 & \forall \vec{u} \in \mathcal{D} \\ v(\vec{u}, \vec{u}_0) = -\Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0) & \forall \vec{u} \in \partial\mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{G.4})$$

Γ est la réponse du système à une source ponctuelle $\delta(\vec{u} - \vec{u}_0)$. Si l'on peut ajouter une seconde source $\delta(\vec{u} - \vec{u}_0^*)$, \vec{u}_0^* étant placé au-delà de $\partial\mathcal{D}$ (*i.e.* $\|\vec{u}_0^*\| > 1$), alors une réponse du système à cette nouvelle source serait nulle :

$$\Delta\Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0^*) = \delta(\vec{u} - \vec{u}_0^*) = 0 \quad \forall \vec{u} \mid \|\vec{u}\| < 1. \quad (\text{G.5})$$

On peut alors chercher un \vec{u}_0^* tel que $\Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0^*) = \Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0)$ quel que soit $\vec{u} \in \partial\mathcal{D}$ et, sous réserve d'existence, examiner le candidat $v(\vec{u}, \vec{u}_0) = \Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0^*)$. On aurait donc :

$$G(\vec{u} \in \mathcal{D}, \vec{u}_0) = \Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0) - \Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0^*) \quad (\text{G.6})$$

$$\Delta G(\vec{u} \in \mathcal{D}, \vec{u}_0) = \delta(\vec{u} - \vec{u}_0) - 0 \quad (\text{G.7})$$

$$G(\vec{u} \in \partial\mathcal{D}, \vec{u}_0) = 0 \quad (\text{G.8})$$

1. La notation Γ de cette fonction n'est valable qu'à l'intérieur de cette annexe, le symbole étant utilisé dans le corps dès le chapitre III pour désigner le facteur quadratique de l'énergie potentielle d'une lentille sur un film de savon.

La position $\vec{u}_0^* = \frac{\vec{u}_0}{\|\vec{u}_0\|^2}$ convient pour cet usage. En effet, puisque \mathcal{D} est le disque ouvert centré sur l'origine et de rayon 1, $1/\|\vec{u}_0\|^2 > 1$, et \vec{u}_0^* est bien au-delà de $\partial\mathcal{D}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0^*) &= \frac{1}{2\pi} \ln (\|\vec{u} - \vec{u}_0^*\|) \quad \forall \vec{u} \in \partial\mathcal{D} \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln (\|\vec{u} - \vec{u}_0\| \cdot \|\vec{u}_0\|^{-1}) \\ &= \Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0) - \Gamma(\vec{u}_0).\end{aligned}$$

On voit que pour être égale à $\Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0)$ sur $\partial\mathcal{D}$, la fonction v doit être translatée du terme $\Gamma(\vec{u}_0)$, indépendant de \vec{u} . Si l'on choisit finalement $v(\vec{u}, \vec{u}_0) = \Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0^*) + \Gamma(\vec{u}_0)$, on a bien :

$$G(\vec{u}, \vec{u}_0) = \Gamma(\vec{u} - \vec{u}_0) - \Gamma\left(\vec{u} - \frac{\vec{u}_0}{\|\vec{u}_0\|^2}\right) - \Gamma(\vec{u}_0) \quad (\text{G.9})$$

$$\Delta G(\vec{u} \in \mathcal{D}, \vec{u}_0) = \delta(\vec{u} - \vec{u}_0) \quad (\text{G.10})$$

$$G(\vec{u} \in \partial\mathcal{D}, \vec{u}_0) = 0 \quad (\text{G.11})$$

En développant l'expression de G , on obtient :

$$G(\vec{u}, \vec{u}_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{u^2 + u_0^2 - 2uu_0 \cos(\theta - \theta_0)}{1 + u^2u_0^2 - 2uu_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right) \quad (\text{G.12})$$

soit, en repassant par le changement de variables $\vec{u} = \vec{r}/R$:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}{R^2 + \frac{r^2r_0^2}{R^2} - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right). \quad (\text{G.13})$$

Alors, par définition, $z_\ell(\vec{r}) = \frac{mg}{2\sigma} G(\vec{r}, \vec{r}_0)$, soit *in fine* :

$$z_\ell(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{mg}{8\pi\sigma} \ln \left(\frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}{R^2 + \frac{r^2r_0^2}{R^2} - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right). \quad (\text{G.14})$$

Références de la première partie

- [1] F. ZWICKY, “Luminous and dark formations of intergalactic matter,” *Physics Today*, t. 6, p. 7-11, jan. 1953, ADS Bibcode : 1953PhT.....6....7Z, ISSN : 0031-9228. DOI : 10.1063/1.3061224. visité le 29 mai 2024. adresse : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1953PhT.....6....7Z>.
- [2] F. ZWICKY, “Multiple Galaxies,” *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, t. 29, p. 344-385, jan. 1956, ADS Bibcode : 1956ErNW...29..344Z. visité le 29 mai 2024. adresse : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1956ErNW...29..344Z>.
- [3] F. ZWICKY, “Multiple Galaxies,” in *Astrophysik IV : Sternsysteme / Astrophysics IV : Stellar Systems*, S. FLÜGGE et S. FLÜGGE, éd., t. 11 / 53, Series Title : Handbuch der Physik / Encyclopedia of Physics, Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1959, p. 373-389, ISBN : 978-3-642-45934-4 978-3-642-45932-0. DOI : 10.1007/978-3-642-45932-0_9. visité le 29 mai 2024. adresse : http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-45932-0_9.
- [4] E. HOLMBERG, “On the Clustering Tendencies among the Nebulae,” en, *The Astrophysical Journal*, t. 92, p. 200, sept. 1940, ISSN : 0004-637X, 1538-4357. DOI : 10.1086/144212. visité le 28 mai 2024. adresse : <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/144212>.
- [5] J. PFLEIDERER et H. SIEDENTOPF, “Spiralstrukturen durch Gezeiteneffekte bei der Begegnung zweier Galaxien. Mit 7 Textabbildungen,” *Zeitschrift für Astrophysik*, t. 51, p. 201, jan. 1961, ADS Bibcode : 1961ZA.....51..201P, ISSN : 0372-8331. visité le 29 mai 2024. adresse : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1961ZA.....51..201P>.
- [6] S. YABUSHITA, “The Possibility of Capture in the Restricted Problem of Three Bodies and Formation of Bridges Between Galaxies,” en, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, t. 153, n° 1, p. 97-109, août 1971, ISSN : 0035-8711, 1365-2966. DOI : 10.1093/mnras/153.1.97. visité le 30 mai 2024. adresse : <https://academic.oup.com/mnras/article-lookup/doi/10.1093/mnras/153.1.97>.
- [7] A. TOOMRE et J. TOOMRE, “Galactic Bridges and Tails,” en, *The Astrophysical Journal*, t. 178, p. 623, déc. 1972, ISSN : 0004-637X, 1538-4357. DOI : 10.1086/151823. visité le 29 mai 2024. adresse : <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/151823>.
- [8] T. M. ENEEV, N. N. KOZLOV et R. A. SUNYAEV, “Tidal Interaction of Galaxies,” *Astronomy and Astrophysics*, t. 22, p. 41, jan. 1973, ADS Bibcode : 1973A&A....22...41E, ISSN : 0004-6361. visité le 30 mai 2024. adresse : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1973A&A....22...41E>.
- [9] A. TOOMRE, B. VORONTSOV-VELYAMINOV, V. DOSTAL et V. METLOV, “Interacting Systems,” en, in *The Large Scale Structure of the Universe*, M. S. LONGAIR et J. EINASTO, éd., Dordrecht : Springer Netherlands, 1978, p. 109-120, ISBN : 978-90-277-0896-0 978-94-009-9843-8. DOI : 10.1007/978-94-009-9843-8_10. visité le 29 mai 2024. adresse : http://link.springer.com/10.1007/978-94-009-9843-8_10.
- [10] J. E. BARNES et L. HERNQUIST, “Dynamics of interacting galaxies,” en, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, t. 30, p. 705-742, 1992, ISSN : 0066-4146. DOI : 10.1146/annurev.aa.30.090192.003421. visité le 19 juill. 2022. adresse : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1992ARA&A..30..705B/abstract>.

- [11] C. STRUCK, “Galaxy collisions,” en, *Physics Reports*, t. 321, n° 1-3, p. 1-137, nov. 1999, ISSN : 03701573. DOI : 10.1016/S0370-1573(99)00030-7. visité le 29 mai 2024. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0370157399000307>.
- [12] C. J. CONSELICE, “The Evolution of Galaxy Structure over Cosmic Time,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, t. 52, n° 1, p. 291-337, août 2014, Number : 1 arXiv :1403.2783 [astro-ph], ISSN : 0066-4146, 1545-4282. DOI : 10.1146/annurev-astro-081913-040037. visité le 19 juill. 2022. adresse : <http://arxiv.org/abs/1403.2783>.
- [13] J. SOUCHAY, S. MATHIS et T. TOKIEDA, éd., *Tides in astronomy and astrophysics* (Lecture notes in physics 861). Heidelberg ; New York : Springer, 2013, OCLC : ocn804049332, ISBN : 978-3-642-32960-9.
- [14] J. PFLEIDERER, “Gravitationseffekte bei der Begegnung zweier Galaxien. Mit 5 Textabbildungen,” *Zeitschrift fur Astrophysik*, t. 58, p. 12, jan. 1963, ADS Bibcode : 1963ZA.....58...12P, ISSN : 0372-8331. visité le 29 mai 2024. adresse : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1963ZA.....58...12P>.
- [15] S. A. GENIS et C. E. MUNGAN, “Orbits on a concave frictionless surface,” EN, *Journal of the Washington Academy of Sciences*, t. 93, n° 2, p. 7-14, 2007, Number : 2, ISSN : 00430439. visité le 18 juill. 2022. adresse : <http://www.jstor.org/stable/24536294>.
- [16] L. Q. ENGLISH et A. MARENO, “Trajectories of rolling marbles on various funnels,” en, *American Journal of Physics*, t. 80, n° 11, p. 996-1000, nov. 2012, Number : 11, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.4747481. visité le 18 juill. 2022. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4747481>.
- [17] J. SU, W. WANG, M. LU, X. XU, Q. F. YAN et J. LU, “Visualization of gravitational potential wells using 3D printing technology,” en, *American Journal of Physics*, t. 84, n° 12, p. 943-947, déc. 2016, Number : 12, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.4963910. visité le 18 juill. 2022. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4963910>.
- [18] G. D. WHITE et M. WALKER, “The shape of “the Spandex” and orbits upon its surface,” en, *American Journal of Physics*, t. 70, n° 1, p. 48-52, jan. 2002, Number : 1, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1412645. visité le 24 mai 2022. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1412645>.
- [19] C. A. MIDDLETON et D. WELLER, “Elliptical-like orbits on a warped spandex fabric : A theoretical/experimental undergraduate research project,” en, *American Journal of Physics*, t. 84, n° 4, p. 284-292, avr. 2016, Number : 4, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.4940246. visité le 24 mai 2022. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4940246>.
- [20] V. NAIR, I. SHARMA et V. SHANKAR, “Equilibrium shapes of liquid drops on pre-stretched nonlinear elastic membranes,” en, *Journal of Fluid Mechanics*, t. 961, A28, avr. 2023, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/jfm.2023.223. visité le 4 avr. 2024. adresse : https://www.cambridge.org/core/product/identif/identif/S0022112023002239/type/journal_article.
- [21] M. SELMKE, “An optical n -body gravitational lens analogy,” en, *American Journal of Physics*, t. 89, n° 1, p. 11-20, jan. 2021, Number : 1, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/10.0002117. visité le 18 juill. 2022. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/10.0002117>.

- [22] I. HO, G. PUCCI et D. M. HARRIS, “Direct Measurement of Capillary Attraction between Floating Disks,” *Physical Review Letters*, t. 123, n° 25, p. 254502, déc. 2019, Number : 25 Publisher : American Physical Society. DOI : 10.1103/PhysRevLett.123.254502. visité le 20 jan. 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.254502>.
- [23] D. VELLA et L. MAHADEVAN, “The “Cheerios effect”,” en, *American Journal of Physics*, t. 73, n° 9, p. 817-825, sept. 2005, Number : 9, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1898523. visité le 17 jan. 2022. adresse : <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1898523>.
- [24] A. GAUTHIER, D. van der MEER, J. H. SNOEIJER et G. LAJOINIE, “Capillary orbits,” en, *Nature Communications*, t. 10, n° 1, p. 3947, sept. 2019, Number : 1, ISSN : 2041-1723. DOI : 10.1038/s41467-019-11850-1. visité le 31 mars 2023. adresse : <https://www.nature.com/articles/s41467-019-11850-1>.
- [25] I. ANNESI-MAESANO et al., “risques-sanitaires-lies-a-l-utilisation-de-l-azote-liquide-dans-le-cadre-de-l-amp.pdf,” fr, affset, rapport d’expertise, avr. 2008.
- [26] M. DESERNO, “Elastic deformation of a fluid membrane upon colloid binding,” en, *Physical Review E*, t. 69, n° 3, p. 031903, mars 2004, ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.69.031903. visité le 4 avr. 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.69.031903>.
- [27] X. DOU, S. LI et J. LIU, “Zero curvature-surface driven small objects,” *Applied Physics Letters*, t. 111, n° 8, p. 081602, août 2017, Number : 8 Publisher : American Institute of Physics, ISSN : 0003-6951. DOI : 10.1063/1.4996758. visité le 20 jan. 2022. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/full/10.1063/1.4996758>.
- [28] G. KARAPETSAS, R. V. CRASTER et O. K. MATAR, “Surfactant-driven dynamics of liquid lenses,” en, *Physics of Fluids*, t. 23, n° 12, p. 122106, déc. 2011, Number : 12, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/1.3670009. visité le 21 avr. 2022. adresse : <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3670009>.
- [29] P. D. RAVAZZOLI, A. G. GONZÁLEZ, J. A. DIEZ et H. A. STONE, “Buoyancy and capillary effects on floating liquid lenses,” en, *Physical Review Fluids*, t. 5, n° 7, p. 073604, juill. 2020, Number : 7, ISSN : 2469-990X. DOI : 10.1103/PhysRevFluids.5.073604. visité le 9 sept. 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.5.073604>.
- [30] J. S. ROWLINSON, “The thermodynamics of a liquid lens,” en, *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 2*, t. 79, n° 1, p. 77, 1983, ISSN : 0300-9238. DOI : 10.1039/f29837900077. visité le 28 fév. 2024. adresse : <http://xlink.rsc.org/?DOI=f29837900077>.
- [31] S. DEODHAR, S. P. THAMPI et M. G. BASAVARAJ, “Drops spreading on fluid surfaces : Transition from Laplace to Marangoni regime,” en, *Physical Review Fluids*, t. 6, n° 11, p. L112001, nov. 2021, Number : 11, ISSN : 2469-990X. DOI : 10.1103/PhysRevFluids.6.L112001. visité le 21 avr. 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.6.L112001>.
- [32] M. MOTAGHIAN et al., “Rapid Spreading of a Droplet on a Thin Soap Film,” en, *Langmuir*, t. 35, n° 46, p. 14855-14860, nov. 2019, Number : 46, ISSN : 0743-7463, 1520-5827. DOI : 10.1021/acs.langmuir.9b02274. visité le 21 avr. 2022. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/acs.langmuir.9b02274>.

- [33] T. GILET et J. W. M. BUSH, “Chaotic Bouncing of a Droplet on a Soap Film,” en, *Physical Review Letters*, t. 102, n° 1, p. 014 501, jan. 2009, Number : 1, ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.102.014501. visité le 11 mars 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.014501>.
- [34] T. GILET et J. W. M. BUSH, “The fluid trampoline : droplets bouncing on a soap film,” en, *Journal of Fluid Mechanics*, t. 625, p. 167-203, avr. 2009, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/S0022112008005442. visité le 11 mars 2022. adresse : https://www.cambridge.org/core/product/identifiant/S0022112008005442/type/journal_article.
- [35] C. GAULON, C. DEREK, T. COMBRIAT, P. MARMOTTANT et F. ELIAS, “Sound and vision : visualization of music with a soap film,” *European Journal of Physics*, t. 38, n° 4, p. 045 804, juin 2017. DOI : 10.1088/1361-6404/aa7147. adresse : <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/aa7147>.
- [36] F. J. ALMGREN et J. E. TAYLOR, “The Geometry of Soap Films and Soap Bubbles,” en, *Scientific American*, t. 235, n° 1, p. 82-93, juill. 1976, Number : 1, ISSN : 0036-8733. DOI : 10.1038/scientificamerican0776-82. visité le 5 sept. 2022. adresse : <https://www.scientificamerican.com/article/the-geometry-of-soap-films-and-soap>.
- [37] F. ELIAS, S. HUTZLER et M. S. FERREIRA, “Visualization of sound waves using regularly spaced soap films,” en, *European Journal of Physics*, t. 28, n° 4, p. 755-765, juill. 2007, Number : 4, ISSN : 0143-0807, 1361-6404. DOI : 10.1088/0143-0807/28/4/014. visité le 12 avr. 2023. adresse : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/28/4/014>.
- [38] A. S. C. LAWRENCE, “Soap Films and Colloidal Behavior,” en, *The Journal of Physical Chemistry*, t. 34, n° 2, p. 263-272, fév. 1930, ISSN : 0092-7325, 1541-5740. DOI : 10.1021/j150308a003. visité le 27 mai 2024. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/j150308a003>.
- [39] P.-S. de LAPLACE, *Supplément au dixième livre du traité de mécanique céleste. Sur l'action capillaire*, fr. Paris : J.-B.-M. Duprat, 1824. adresse : <http://ark.bnf.fr/ark:/12148/cb30739080v.public>.
- [40] J. PLATEAU, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, fr. Paris : Gauthier-Villars, 1873, t. 1. adresse : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k996291r>.
- [41] I. CANTAT, *Foams : structure and dynamics*, en, First English edition. Oxford; New York, NY, United States of America : Oxford University Press, 2013, OCLC : ocn855354418, ISBN : 978-0-19-966289-0.
- [42] A. W. ADAMSON et A. P. GAST, *Physical Chemistry of Surfaces*, en, 6th Edition. John Wiley & Sons, Inc., avr. 1968, t. 160. visité le 15 sept. 2023.
- [43] É. GUYON, J.-P. HULIN et L. PETIT, *Hydrodynamique physique* (Savoirs actuels), fre, Nouv. éd. rev. et augm. Les Ulis Paris : EDP sciences CNRS éd, 2001, ISBN : 978-2-86883-502-4 978-2-271-05635-1.
- [44] H.-J. BUTT, K. GRAF et M. KAPPL, *Physics and chemistry of interfaces* (Physics textbook), en. Weinheim : Wiley-VCH, 2003, ISBN : 978-3-527-40413-1.
- [45] P.-G. d. GENNES, F. BROCHARD-WYART et D. QUÉRÉ, *Gouttes, bulles, perles et ondes* (Échelles), fre, Nouvelle éd. avec CD. Paris : Belin, 2013, ISBN : 978-2-7011-4055-1.

- [46] L. CHAMPOUGNY, “Génération et rupture de films liquides minces,” fr, thèse de doct., Université Paris-Sud, 2015.
- [47] L. TREFETHEN, *FILM NOTES for Surface Tension in Fluid Mechanics*, en, 1969.
- [48] V. BERGERON, “Forces and structure in thin liquid soap films,” en, *Journal of Physics : Condensed Matter*, t. 11, n° 19, R215, mai 1999, ISSN : 0953-8984. DOI : 10.1088/0953-8984/11/19/201. visité le 23 mai 2024. adresse : <https://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/11/19/201>.
- [49] M. PASQUET, F. BOULOGNE, J. SAINT-ANNA, F. RESTAGNO et E. RIO, “The impact of physical-chemistry on film thinning in surface bubbles,” en, *Soft Matter*, t. 18, n° 24, p. 4536-4542, 2022, Issue : arXiv :2202.03231 arXiv :2202.03231 [cond-mat] type : article. visité le 29 août 2022. adresse : <http://arxiv.org/abs/2202.03231>.
- [50] V. PRASAD et E. R. WEEKS, “Flow fields in soap films : Relating viscosity and film thickness,” en, *Physical Review E*, t. 80, n° 2, p. 026 309, août 2009, Number : 2, ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.80.026309. visité le 8 nov. 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.80.026309>.
- [51] K. J. MYSELS, “Dynamic Processes in Soap Films,” en, *The Journal of General Physiology*, t. 52, n° 1, p. 113-124, juill. 1968, ISSN : 1540-7748, 0022-1295. DOI : 10.1085/jgp.52.1.113. visité le 23 mai 2024. adresse : <https://rupress.org/jgp/article/52/1/113/31531/Dynamic-Processes-in-Soap-Films>.
- [52] M. PASQUET, L. WALLON, P.-Y. FUSIER, F. RESTAGNO et E. RIO, “An optimized recipe for making giant bubble,” en, arXiv, rapp. tech. arXiv :2209.04435, sept. 2022, Issue : arXiv :2209.04435 arXiv :2209.04435 [cond-mat, physics :physics] type : article. visité le 15 sept. 2022. adresse : <http://arxiv.org/abs/2209.04435>.
- [53] C. F. FORNEY et D. G. BRANDL, “Control of Humidity in Small Controlled-environment Chambers using Glycerol-Water Solutions,” en, *HortTechnology*, t. 2, n° 1, p. 52-54, jan. 1992, ISSN : 1063-0198, 1943-7714. DOI : 10.21273/HORTTECH.2.1.52. visité le 18 juin 2024. adresse : <https://journals.ashs.org/view/journals/horttech/2/1/article-p52.xml>.
- [54] A. VOLK et C. J. KÄHLER, “Density model for aqueous glycerol solutions,” en, *Experiments in Fluids*, t. 59, n° 5, p. 75, mai 2018, ISSN : 0723-4864, 1432-1114. DOI : 10.1007/s00348-018-2527-y. visité le 18 juin 2024. adresse : <http://link.springer.com/10.1007/s00348-018-2527-y>.
- [55] Y. ROTENBERG, L. BORUVKA et A. NEUMANN, “Determination of surface tension and contact angle from the shapes of axisymmetric fluid interfaces,” en, *Journal of Colloid and Interface Science*, t. 93, n° 1, p. 169-183, mai 1983, ISSN : 00219797. DOI : 10.1016/0021-9797(83)90396-X. visité le 18 juin 2024. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/002197978390396X>.
- [56] D. MARR et E. HILDRETH, “Theory of edge detection,” en, *Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences*, t. 207, n° 1167, p. 187-217, fév. 1980, ISSN : 0080-4649, 2053-9193. DOI : 10.1098/rspb.1980.0020. visité le 15 juill. 2024. adresse : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspb.1980.0020>.
- [57] T. LINDBERG, “Feature Detection with Automatic Scale Selection,” en, *International Journal of Computer Vision*, 1998.

- [58] F. MOISY, M. RABAUD et K. SALSAC, “A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface,” en, *Experiments in Fluids*, t. 46, n° 6, p. 1021-1036, juin 2009, Number : 6, ISSN : 0723-4864, 1432-1114. DOI : 10.1007/s00348-008-0608-z. visité le 2 nov. 2022. adresse : <http://link.springer.com/10.1007/s00348-008-0608-z>.
- [59] B. MERCIER et T. LACASSAGNE, “Design rules for Background Oriented Schlieren experiments with least-squares based displacement calculation,” en, *Flow Measurement and Instrumentation*, t. 92, p. 102395, août 2023, ISSN : 09555986. DOI : 10.1016/j.flowmeasinst.2023.102395. visité le 20 juin 2024. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0955598623000912>.
- [60] I. NEWTON, G. W. HEMMING et d. D. BURNDY LIBRARY, *Opticks : or, A treatise of the reflections, refractions, inflexions and colours of light : also two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures*, eng. London : Printed for Sam. Smith, et Benj. Walford ..., 1704. visité le 21 juin 2024. adresse : <http://archive.org/details/optickstreatise00newta>.
- [61] N. S. LALLI et A. GIUSTI, “Coherence effects on the interference colors of soap films,” *Journal of Applied Physics*, t. 134, n° 9, p. 093103, sept. 2023, ISSN : 0021-8979. DOI : 10.1063/5.0158178. visité le 21 juin 2024. adresse : <https://doi.org/10.1063/5.0158178>.
- [62] L. F. HOYT, “New Table of the Refractive Index of Pure Glycerol at 20°C,” en, *Industrial & Engineering Chemistry*, t. 26, n° 3, p. 329-332, mars 1934, ISSN : 0019-7866, 1541-5724. DOI : 10.1021/ie50291a023. visité le 22 juin 2024. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/ie50291a023>.
- [63] C. H. TAN, Z. J. HUANG et X. G. HUANG, “Rapid determination of surfactant critical micelle concentration in aqueous solutions using fiber-optic refractive index sensing,” en, *Analytical Biochemistry*, t. 401, n° 1, p. 144-147, juin 2010, ISSN : 00032697. DOI : 10.1016/j.ab.2010.02.021. visité le 22 juin 2024. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S000326971000120X>.
- [64] J. D. SCARGLE, “Studies in astronomical time series analysis. II - Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data,” en, *The Astrophysical Journal*, t. 263, p. 835, déc. 1982, ISSN : 0004-637X, 1538-4357. DOI : 10.1086/160554. visité le 22 juin 2024. adresse : <http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/160554>.
- [65] N. R. LOMB, “Least-squares frequency analysis of unequally spaced data,” en, *Astrophysics and Space Science*, t. 39, n° 2, p. 447-462, fév. 1976, ISSN : 0004-640X, 1572-946X. DOI : 10.1007/BF00648343. visité le 22 juin 2024. adresse : <http://link.springer.com/10.1007/BF00648343>.
- [66] J. T. VANDERPLAS, “Understanding the Lomb–Scargle Periodogram,” en, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, t. 236, n° 1, p. 16, mai 2018, Number : 1, ISSN : 1538-4365. DOI : 10.3847/1538-4365/aab766. visité le 23 juin 2023. adresse : <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4365/aab766>.
- [67] S. K. ACHARIGE, F. ELIAS et C. DEREK, “Soap film vibration : origin of the dissipation,” en, *Soft Matter*, t. 10, n° 41, p. 8341-8348, 2014, Number : 41, ISSN : 1744-683X, 1744-6848. DOI : 10.1039/C4SM01606H. visité le 12 avr. 2023. adresse : <http://xlink.rsc.org/?DOI=C4SM01606H>.

- [68] E. O. SCHULZ-DUBOIS, “Foucault Pendulum Experiment by Kamerlingh Onnes and Degenerate Perturbation Theory,” en, *American Journal of Physics*, t. 38, n° 2, p. 173-188, fév. 1970, ISSN : 0002-9505, 1943-2909. DOI : 10.1119/1.1976270. visité le 1^{er} juill. 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/ajp/article/38/2/173/1048537/Foucault-Pendulum-Experiment-by-Kamerlingh-Onnes>.
- [69] Y. YAMASHITA, “Foucault Pendulum without Driving,” en, *Journal of the Physical Society of Japan*, t. 85, n° 6, p. 064002, juin 2016, ISSN : 0031-9015, 1347-4073. DOI : 10.7566/JPSJ.85.064002. visité le 1^{er} juill. 2024. adresse : <https://journals.jps.jp/doi/10.7566/JPSJ.85.064002>.
- [70] R. VERREAULT, “The anisosphere model : a novel differential phase space representation for Foucault pendulums and 2D oscillators,” en, *Journal of Physics : Conference Series*, t. 1141, p. 012063, déc. 2018, ISSN : 1742-6588, 1742-6596. DOI : 10.1088/1742-6596/1141/1/012063. visité le 13 juin 2024. adresse : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1141/1/012063>.
- [71] R. VERREAULT, “The anisosphere as a new tool for interpreting Foucault pendulum experiments. Part I : harmonic oscillators,” en, *The European Physical Journal Applied Physics*, t. 79, n° 3, p. 31001, sept. 2017, ISSN : 1286-0042, 1286-0050. DOI : 10.1051/epjap/2017160337. visité le 13 juin 2024. adresse : <http://www.epjap.org/10.1051/epjap/2017160337>.
- [72] I. V. CHILINGARIAN, P. DI MATTEO, F. COMBES, A.-L. MELCHIOR et B. SEMELIN, “The GalMer database : galaxy mergers in the virtual observatory,” en, *Astronomy and Astrophysics*, t. 518, A61, juill. 2010, ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : 10.1051/0004-6361/200912938. visité le 31 mai 2024. adresse : <http://www.aanda.org/10.1051/0004-6361/200912938>.

Références de la seconde partie

- [73] J. S. BELL, “Six possible worlds of quantum mechanics,” en, *Foundations of Physics*, t. 22, n° 10, p. 15, 1992, Number : 10. adresse : <https://api.istex.fr/ark:/67375/1BB-74XPNKP4-8/fulltext.pdf?sid=clickandread>.
- [74] L. de BROGLIE, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire -la théorie de la double solution) Louis de Broglie*. fr. Paris : Gauthier-Villars, 1956.
- [75] D. J. BOHM et B. J. HILEY, “The de Broglie pilot wave theory and the further development of new insights arising out of it,” en, *Foundations of Physics*, t. 12, n° 10, p. 1001-1016, oct. 1982, ISSN : 0015-9018, 1572-9516. DOI : 10.1007/BF01889273. visité le 24 juin 2024. adresse : <http://link.springer.com/10.1007/BF01889273>.
- [76] D. BOHM, “A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I,” en, *Physical Review*, t. 85, n° 2, p. 166-179, jan. 1952, ISSN : 0031-899X. DOI : 10.1103/PhysRev.85.166. visité le 24 juin 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.85.166>.
- [77] D. DRAGOMAN et M. DRAGOMAN, *Quantum-Classical Analogies (The Frontiers Collection)*, en, D. DRAGOMAN, M. DRAGOMAN, A. C. ELITZUR, M. P. SILVERMAN, J. TUSZYNSKI et H. D. ZEH, éd. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2004, ISBN : 978-3-642-05766-3 978-3-662-09647-5. DOI : 10.1007/978-3-662-09647-5. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-09647-5>.
- [78] Y. COUDER, S. PROTIÈRE, E. FORT et A. BOUDAUD, “Walking and orbiting droplets,” en, *Nature*, t. 437, n° 7056, p. 208-208, sept. 2005, Number : 7056, ISSN : 0028-0836, 1476-4687. DOI : 10.1038/437208a. visité le 9 juin 2022. adresse : <http://www.nature.com/articles/437208a>.
- [79] M. FARADAY, “XVII. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces,” en, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, t. 121, p. 299-340, déc. 1831, ISSN : 0261-0523, 2053-9223. DOI : 10.1098/rstl.1831.0018. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1831.0018>.
- [80] K. KUMAR et L. S. TUCKERMAN, “Parametric instability of the interface between two fluids,” en, *Journal of Fluid Mechanics*, t. 279, p. 49-68, nov. 1994, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/S0022112094003812. visité le 1^{er} août 2024. adresse : https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022112094003812/type/journal_article.
- [81] A. EDDI, E. FORT, F. MOISY et Y. COUDER, “Unpredictable Tunneling of a Classical Wave-Particle Association,” en, *Physical Review Letters*, t. 102, n° 24, p. 240401, juin 2009, Number : 24, ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.102.240401. visité le 10 juin 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.240401>.

- [82] M. HUBERT, M. LABOUSSE et S. PERRARD, “Self-propulsion and crossing statistics under random initial conditions,” en, *Physical Review E*, t. 95, n° 6, p. 062607, juin 2017, ISSN : 2470-0045, 2470-0053. DOI : 10.1103/PhysRevE.95.062607. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.95.062607>.
- [83] A. NACHBIN, P. A. MILEWSKI et J. W. M. BUSH, “Tunneling with a hydrodynamic pilot-wave model,” en, *Physical Review Fluids*, t. 2, n° 3, p. 034801, mars 2017, ISSN : 2469-990X. DOI : 10.1103/PhysRevFluids.2.034801. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.2.034801>.
- [84] L. TADRIST, T. GILET, P. SCHLAGHECK et J. W. M. BUSH, “Predictability in a hydrodynamic pilot-wave system : Resolution of walker tunneling,” en, *Physical Review E*, t. 102, n° 1, p. 013104, juill. 2020, ISSN : 2470-0045, 2470-0053. DOI : 10.1103/PhysRevE.102.013104. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.013104>.
- [85] Y. COUDER et E. FORT, “Single-Particle Diffraction and Interference at a Macroscopic Scale,” en, *Physical Review Letters*, t. 97, n° 15, p. 154101, oct. 2006, Number : 15, ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.97.154101. visité le 10 juin 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.154101>.
- [86] R. DUBERTRAND, M. HUBERT, P. SCHLAGHECK, N. VANDEWALLE, T. BASTIN et J. MARTIN, “Scattering theory of walking droplets in the presence of obstacles,” en, *New Journal of Physics*, t. 18, n° 11, p. 113037, nov. 2016, ISSN : 1367-2630. DOI : 10.1088/1367-2630/18/11/113037. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/18/11/113037>.
- [87] L. M. FARIA, “A model for Faraday pilot waves over variable topography,” en, *Journal of Fluid Mechanics*, t. 811, p. 51-66, jan. 2017, arXiv :1701.04932 [physics], ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/jfm.2016.750. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <http://arxiv.org/abs/1701.04932>.
- [88] E. FORT, A. EDDI, A. BOUDAUD, J. MOUKHTAR et Y. COUDER, “Path-memory induced quantization of classical orbits,” en, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, t. 107, n° 41, p. 17515-17520, oct. 2010, Number : 41, ISSN : 0027-8424, 1091-6490. DOI : 10.1073/pnas.1007386107. visité le 10 juin 2022. adresse : <https://pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.1007386107>.
- [89] A. U. OZA, D. M. HARRIS, R. R. ROSALES et J. W. M. BUSH, “Pilot-wave dynamics in a rotating frame : on the emergence of orbital quantization,” en, *Journal of Fluid Mechanics*, t. 744, p. 404-429, avr. 2014, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/jfm.2014.50. visité le 1^{er} août 2024. adresse : https://www.cambridge.org/core/product/identif/ier/S0022112014000500/type/journal_article.
- [90] D. M. HARRIS et J. W. M. BUSH, “Droplets walking in a rotating frame : from quantized orbits to multimodal statistics,” en, *Journal of Fluid Mechanics*, t. 739, p. 444-464, jan. 2014, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/jfm.2013.627. visité le 1^{er} août 2024. adresse : https://www.cambridge.org/core/product/identif/ier/S0022112013006277/type/journal_article.
- [91] D. M. HARRIS, J. MOUKHTAR, E. FORT, Y. COUDER et J. W. M. BUSH, “Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral,” en, *Physical Review E*, t. 88, n° 1, p. 011001, juill. 2013, ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.88.011001. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.88.011001>.

- [92] T. GILET, “Dynamics and statistics of wave-particle interactions in a confined geometry,” en, *Physical Review E*, t. 90, n° 5, p. 052917, nov. 2014, ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.90.052917. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.052917>.
- [93] T. GILET, “Quantumlike statistics of deterministic wave-particle interactions in a circular cavity,” en, *Physical Review E*, t. 93, n° 4, p. 042202, avr. 2016, ISSN : 2470-0045, 2470-0053. DOI : 10.1103/PhysRevE.93.042202. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.93.042202>.
- [94] T. CRISTEA-PLATON, P. J. SÁENZ et J. W. M. BUSH, “Walking droplets in a circular corral : Quantisation and chaos,” en, *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, t. 28, n° 9, p. 096116, sept. 2018, ISSN : 1054-1500, 1089-7682. DOI : 10.1063/1.5034123. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/cha/article/28/9/096116/650375/Walking-droplets-in-a-circular-corral-Quantisation>.
- [95] P. J. SÁENZ, T. CRISTEA-PLATON et J. W. M. BUSH, “Statistical projection effects in a hydrodynamic pilot-wave system,” en, *Nature Physics*, t. 14, n° 3, p. 315-319, mars 2018, ISSN : 1745-2473, 1745-2481. DOI : 10.1038/s41567-017-0003-x. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://www.nature.com/articles/s41567-017-0003-x>.
- [96] J. W. M. BUSH et A. U. OZA, “Hydrodynamic quantum analogs,” en, *Reports on Progress in Physics*, t. 84, n° 1, p. 017001, jan. 2021, Number : 1, ISSN : 0034-4885, 1361-6633. DOI : 10.1088/1361-6633/abc22c. visité le 10 juin 2022. adresse : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6633/abc22c>.
- [97] S. PROTIERE, “Gouttes rebondissantes : une association onde-particule à échelle macroscopique,” fr, thèse de doct., Université Paris VII, 2007, p. 141.
- [98] A. ANDERSEN et al., “Double-slit experiment with single wave-driven particles and its relation to quantum mechanics,” en, *Physical Review E*, t. 92, n° 1, p. 013006, juill. 2015, ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.92.013006. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.013006>.
- [99] M. RODE, J. MADSEN et A. ANDERSEN, “Wave fields in double-slit experiments with wave-driven droplets,” en, *Physical Review Fluids*, t. 4, n° 10, p. 104801, oct. 2019, ISSN : 2469-990X. DOI : 10.1103/PhysRevFluids.4.104801. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.4.104801>.
- [100] G. PUCCI, D. M. HARRIS, L. M. FARIA et J. W. M. BUSH, “Walking droplets interacting with single and double slits,” en, *Journal of Fluid Mechanics*, t. 835, p. 1136-1156, jan. 2018, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/jfm.2017.790. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/walking-droplets-interacting-with-single-and-double-slits/72C57E9C62FD54A81BB505AAD0D836D8#access-block>.
- [101] C. ELLEGAARD et M. T. LEVINSEN, “Interaction of Wave-Driven Particles with Slit Structures,” en, *Physical Review E*, t. 102, n° 2, p. 023115, août 2020, arXiv :2005.12335 [physics], ISSN : 2470-0045, 2470-0053. DOI : 10.1103/PhysRevE.102.023115. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <http://arxiv.org/abs/2005.12335>.
- [102] R. I. SLAVCHOV, B. PEYCHEV et A. S. ISMAIL, “Characterization of capillary waves : A review and a new optical method,” *Physics of Fluids*, t. 33, n° 10, p. 101303, 1^{er} oct. 2021, ISSN : 1070-6631, 1089-7666. DOI : 10.1063/5.0066759. visité le 3 août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/pof/article/33/10/101303/958323/Characterization-of-capillary-waves-A-review-and-a>.

- [103] P. BRUNET, M. BAUDOIN, O. B. MATAR et F. ZOUESHTIAGH, “Droplet displacements and oscillations induced by ultrasonic surface acoustic waves : A quantitative study,” *Physical Review E*, t. 81, n° 3, p. 036315, 18 mars 2010, ISSN : 1539-3755, 1550-2376. DOI : 10.1103/PhysRevE.81.036315. visité le 3 août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.81.036315>.
- [104] G. P. BENHAM, O. DEVAUCHELLE, S. W. MORRIS et J. A. NEUFELD, “Gunwale bobbing,” *Physical Review Fluids*, t. 7, n° 7, p. 074804, 20 juill. 2022, ISSN : 2469-990X. DOI : 10.1103/PhysRevFluids.7.074804. visité le 2 août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.7.074804>.
- [105] I. HO, G. PUCCI, A. U. OZA et D. M. HARRIS, “Capillary surfers : Wave-driven particles at a vibrating fluid interface,” *Physical Review Fluids*, t. 8, n° 11, p. L112001, 7 nov. 2023, ISSN : 2469-990X. DOI : 10.1103/PhysRevFluids.8.L112001. visité le 2 août 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevFluids.8.L112001>.
- [106] L. RAYLEIGH, “XLII. *On the momentum and pressure of gaseous vibrations, and on the connexion with the virial theorem,*” en, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, t. 10, n° 57, p. 364-374, sept. 1905, ISSN : 1941-5982, 1941-5990. DOI : 10.1080/14786440509463381. visité le 1^{er} août 2024. adresse : <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14786440509463381>.
- [107] P. LANGEVIN, “L’inertie de l’énergie et ses conséquences,” fr, *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, t. 3, n° 1, p. 553-591, 1913, ISSN : 0368-3893. DOI : 10.1051/jphystap:019130030055301. visité le 2 août 2024. adresse : <http://www.edpsciences.org/10.1051/jphystap:019130030055301>.
- [108] L. BRILLOUIN, “Sur les tensions de radiation,” fr, *Annales de Physique*, t. 10, n° 4, p. 528-586, 1925, ISSN : 0003-4169, 1286-4838. DOI : 10.1051/anphys/192510040528. visité le 2 août 2024. adresse : <http://www.annphys.org/10.1051/anphys/192510040528>.
- [109] T. HASEGAWA, T. KIDO, T. IIZUKA et C. MATSUOKA, “A general theory of Rayleigh and Langevin radiation pressures,” en, *Journal of the Acoustical Society of Japan (E)*, t. 21, n° 3, p. 145-152, 2000, ISSN : 0388-2861, 2185-3509. DOI : 10.1250/ast.21.145. visité le 2 août 2024. adresse : http://www.jstage.jst.go.jp/article/ast/21/3/21_3_145/_article.
- [110] M. BAUDOIN et J.-L. THOMAS, “Acoustic Tweezers for Particle and Fluid Micromanipulation,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, t. 52, n° 1, p. 205-234, 5 jan. 2020, ISSN : 0066-4189, 1545-4479. DOI : 10.1146/annurev-fluid-010719-060154. visité le 2 août 2024. adresse : <https://www.annualreviews.org/doi/10.1146/annurev-fluid-010719-060154>.
- [111] L. V. KING, “On the acoustic radiation pressure on spheres,” *Proceedings of the Royal Society A*, t. 147, p. 212-240, 14 juin 1934. DOI : 10.1098/RSPA.1934.0215.
- [112] K. YOSIOKA et Y. KAWASIMA, “Acoustic radiation pressure on a compressible sphere,” *Acta Acustica*, t. 5, n° 3, p. 167-173, 1955. adresse : <https://www.ingentaconnect.com/content/dav/aaua/1955/00000005/00000003/art00004>.
- [113] T. HASEGAWA et K. YOSIOKA, “Acoustic-Radiation Force on a Solid Elastic Sphere,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 46, p. 1139-1143, 5B 1^{er} nov. 1969, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/1.1911832. visité le 10 sept. 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/46/5B/1139/686590/Acoustic-Radiation-Force-on-a-Solid-Elastic-Sphere>.

- [114] T. F. W. EMBLETON, “Mean Force on a Sphere in a Spherical Sound Field. I. (Theoretical),” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 26, n° 1, p. 40-45, 1^{er} jan. 1954, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/1.1907286. visité le 10 sept. 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/26/1/40/623923/Mean-Force-on-a-Sphere-in-a-Spherical-Sound-Field>.
- [115] X. CHEN et R. E. APFEL, “Radiation force on a spherical object in the field of a focused cylindrical transducer,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 101, n° 5, p. 2443-2447, 1^{er} mai 1997, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/1.418539. visité le 10 sept. 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/101/5/2443/563691/Radiation-force-on-a-spherical-object-in-the-field>.
- [116] L. P. GOR'KOV, “On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid,” *Soviet Physics - Doklady*, t. 6, n° 9, p. 773-775, 1961. DOI : 10.1142/8270. adresse : <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/8270>.
- [117] G. T. SILVA, “An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wavefront (L),” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 130, n° 6, p. 3541-3544, 1^{er} déc. 2011, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/1.3652894. visité le 2 août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/130/6/3541/904279/An-expression-for-the-radiation-force-exerted-by>.
- [118] D. BARESCH, J.-L. THOMAS et R. MARCHIANO, “Three-dimensional acoustic radiation force on an arbitrarily located elastic sphere,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 133, n° 1, p. 25-36, 1^{er} jan. 2013, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/1.4770256. visité le 2 août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/133/1/25/929430/Three-dimensional-acoustic-radiation-force-on-an>.
- [119] O. A. SAPOZHNIKOV et M. R. BAILEY, “Radiation force of an arbitrary acoustic beam on an elastic sphere in a fluid,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 133, n° 2, p. 661-676, 1^{er} fév. 2013, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/1.4773924. visité le 2 août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/133/2/661/629408/Radiation-force-of-an-arbitrary-acoustic-beam-on>.
- [120] D. ZHAO, J.-L. THOMAS et R. MARCHIANO, “Computation of the radiation force exerted by the acoustic tweezers using pressure field measurements,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 146, n° 3, p. 1650-1660, 1^{er} sept. 2019, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/1.5126095. visité le 2 août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/146/3/1650/993424/Computation-of-the-radiation-force-exerted-by-the>.
- [121] G. T. SILVA, T. P. LOBO et F. G. MITRI, “Radiation torque produced by an arbitrary acoustic wave,” *EPL (Europhysics Letters)*, t. 97, n° 5, p. 54003, 1^{er} mars 2012, ISSN : 0295-5075, 1286-4854. DOI : 10.1209/0295-5075/97/54003. visité le 2 août 2024. adresse : <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/97/54003>.
- [122] Z. GONG et M. BAUDOIN, “Acoustic radiation torque on a particle in a fluid : An angular spectrum based compact expression,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 148, n° 5, p. 3131-3140, 1^{er} nov. 2020, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/10.0002491. visité le 2 août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/148/5/3131/631826/Acoustic-radiation-torque-on-a-particle-in-a-fluid>.

- [123] Z. GONG et M. BAUDOIN, “Equivalence between angular spectrum-based and multipole expansion-based formulas of the acoustic radiation force and torque,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 149, n° 5, p. 3469-3482, 1^{er} mai 2021, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/10.0005004. visité le 2 août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/149/5/3469/607485/Equivalence-between-angular-spectrum-based-and>.
- [124] A. ROUX, J.-P. MARTISCHANG et M. BAUDOIN, “Self-radiation force on a moving monopolar source,” *Journal of Fluid Mechanics*, t. 952, A22, 10 déc. 2022, ISSN : 0022-1120, 1469-7645. DOI : 10.1017/jfm.2022.920. visité le 13 fév. 2023. adresse : https://www.cambridge.org/core/product/identifiant/S002211202200920X/type/journal_article.
- [125] P. MORSE et K. INGARD, *Theoretical Acoustics* (International Series in Pure and Applied Physics). Princeton University Press, 1986, ISBN : 978-0-691-02401-1. adresse : <https://books.google.fr/books?id=KIL4MV9IE5kC>.
- [126] E. LOTH, *Fluid dynamics of particles, drops, and bubbles*, eng. Cambridge, United Kingdom : Cambridge University Press, 2023, OCLC : 1358758913, ISBN : 978-1-139-02880-6.
- [127] D. BARESCH, J.-L. THOMAS et R. MARCHIANO, “Observation of a Single-Beam Gradient Force Acoustical Trap for Elastic Particles : Acoustical Tweezers,” *Physical Review Letters*, t. 116, n° 2, p. 024301, 11 jan. 2016, ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.116.024301. visité le 20 sept. 2024. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.024301>.
- [128] S. VINCENT, P. CHALLANDE et R. MARCHIANO, “Calibration of the axial stiffness of a single-beam acoustic tweezers,” *Review of Scientific Instruments*, t. 94, n° 9, p. 095102, 1^{er} sept. 2023, ISSN : 0034-6748, 1089-7623. DOI : 10.1063/5.0150610. visité le 20 sept. 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/rsi/article/94/9/095102/2909352/Calibration-of-the-axial-stiffness-of-a-single>.
- [129] K. R. HARRIS, “Temperature and Density Dependence of the Viscosity of Toluene,” *Journal of Chemical & Engineering Data*, t. 45, n° 5, p. 893-897, 1^{er} sept. 2000, ISSN : 0021-9568, 1520-5134. DOI : 10.1021/je0000241. visité le 7 août 2024. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/je0000241>.
- [130] K. MEIER et S. KABELAC, “Measurements of the Speed of Sound in Liquid Toluene,” *Journal of Chemical & Engineering Data*, t. 58, n° 5, p. 1398-1406, 9 mai 2013, ISSN : 0021-9568. DOI : 10.1021/je4001697. visité le 7 août 2024. adresse : <https://doi.org/10.1021/je4001697>.
- [131] B. GONZÁLEZ, Á. DOMÍNGUEZ et J. TOJO, “Dynamic Viscosities of the Binary Systems Cyclohexane and Cyclopentane with Acetone, Butanone, or 2-Pentanone at Three Temperatures $T = (293.15, 298.15, \text{ and } 303.15) \text{ K}$,” *Journal of Chemical & Engineering Data*, t. 50, n° 4, p. 1462-1469, 1^{er} juill. 2005, ISSN : 0021-9568, 1520-5134. DOI : 10.1021/je050110r. visité le 7 août 2024. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/je050110r>.
- [132] S. LAGO et P. GIULIANO ALBO, “Thermodynamic properties of acetone calculated from accurate experimental speed of sound measurements at low temperatures and high pressures,” *The Journal of Chemical Thermodynamics*, t. 41, n° 4, p. 506-512, avr. 2009, ISSN : 00219614. DOI : 10.1016/j.jct.2008.11.005. visité le 7 août 2024. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021961408002784>.

- [133] B. MORTIMER, B. SKEWS et L. FELTHUN, “The use of a slow sound speed fluorocarbon liquid for shock wave research,” *Shock Waves*, t. 8, n° 2, p. 63-69, 1^{er} avr. 1998, ISSN : 0938-1287, 1432-2153. DOI : 10.1007/s001930050099. visité le 7 août 2024. adresse : <http://link.springer.com/10.1007/s001930050099>.
- [134] W. GREVENDONK, W. HERREMAN et A. DE BOCK, “Measurements on the viscosity of liquid nitrogen,” *Physica*, t. 46, n° 4, p. 600-604, mars 1970, ISSN : 00318914. DOI : 10.1016/0031-8914(70)90148-5. visité le 7 août 2024. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0031891470901485>.
- [135] A. J. ZUCKERWAR et D. S. MAZEL, “Sound speed measurements in liquid oxygen-liquid nitrogen mixtures,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, t. 77, n° S1, S20-S20, 1^{er} avr. 1985, ISSN : 0001-4966, 1520-8524. DOI : 10.1121/1.2022218. visité le 7 août 2024. adresse : <https://pubs.aip.org/jasa/article/77/S1/S20/740488/Sound-speed-measurements-in-liquid-oxygen-liquid>.
- [136] M. HARAZI, M. RUPIN, O. STEPHAN, E. BOSSY et P. MARMOTTANT, “Acoustics of Cubic Bubbles : Six Coupled Oscillators,” *Physical Review Letters*, t. 123, n° 25, p. 254501, 25 16 déc. 2019, ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.123.254501. visité le 22 juill. 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.254501>.
- [137] M. BOUGHZALA, O. STEPHAN, E. BOSSY, B. DOLLET et P. MARMOTTANT, “Polyhedral Bubble Vibrations,” *Physical Review Letters*, t. 126, n° 5, p. 054502, 5 5 fév. 2021, ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : 10.1103/PhysRevLett.126.054502. visité le 20 jan. 2022. adresse : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.054502>.
- [138] T. COMBRIAT, P. ROUBY-POIZAT, A. A. DOINIKOV, O. STEPHAN et P. MARMOTTANT, “Acoustic interaction between 3D-fabricated cubic bubbles,” *Soft Matter*, t. 16, n° 11, p. 2829-2835, 11 2020, ISSN : 1744-683X, 1744-6848. DOI : 10.1039/C9SM02423A. visité le 20 jan. 2022. adresse : <http://xlink.rsc.org/?DOI=C9SM02423A>.
- [139] Y. JU et al., “Reconfigurable magnetic soft robots with multimodal locomotion,” *Nano Energy*, t. 87, p. 106169, sept. 2021, ISSN : 22112855. DOI : 10.1016/j.nanoen.2021.106169. visité le 8 août 2024. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2211285521004250>.
- [140] N. EBRAHIMI et al., “Magnetic Actuation Methods in Bio/Soft Robotics,” *Advanced Functional Materials*, t. 31, n° 11, p. 2005137, 2021, ISSN : 1616-3028. DOI : 10.1002/adfm.202005137. visité le 8 août 2024. adresse : <https://onlinelibrary-wiley-com.ressources-electroniques.univ-lille.fr/doi/abs/10.1002/adfm.202005137>.
- [141] W. LI et al., “Self-vectoring electromagnetic soft robots with high operational dimensionality,” *Nature Communications*, t. 14, n° 1, p. 182, 12 jan. 2023, ISSN : 2041-1723. DOI : 10.1038/s41467-023-35848-y. visité le 8 août 2024. adresse : <https://www.nature.com/articles/s41467-023-35848-y>.
- [142] “Photothermally and magnetically controlled reconfiguration of polymer composites for soft robotics,” visité le 8 août 2024. adresse : <https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.aaw2897>.
- [143] O. BAS, B. GORISSEN, S. LUPOCHAINSKY, T. SHABAB, K. BERTOLDI et D. W. HUTMACHER, “Ultrafast, miniature soft actuators,” *Multifunctional Materials*, t. 4, n° 4, p. 045001, 1^{er} déc. 2021, ISSN : 2399-7532. DOI : 10.1088/2399-7532/ac2faf. visité le 8 août 2024. adresse : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2399-7532/ac2faf>.

Références des annexes

- [144] A. TOFFOLI et E. M. BITNER-GREGERSEN, “Types of Ocean Surface Waves, Wave Classification,” en, in *Encyclopedia of Maritime and Offshore Engineering*, J. CARLTON, P. JUKES et Y. S. CHOO, éd., 1^{re} éd., Wiley, mars 2017, p. 1-8, ISBN : 978-1-118-47635-2 978-1-118-47640-6. DOI : 10.1002/9781118476406.emoe077. visité le 23 mai 2024. adresse : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9781118476406.emoe077>.
- [145] S. BADBAN, A. HYDE et C. PHAN, “Hydrophilicity of Nonanoic Acid and Its Conjugate Base at the Air/Water Interface,” *ACS Omega*, t. 2, p. 5565-5573, sept. 2017. DOI : 10.1021/acsomega.7b00960.
- [146] P. MUKERJEE et K. J. MYSELS, *Critical micelle concentrations of aqueous surfactant systems*, en. U.S. Government Printing Office, 1970.
- [147] C. TANFORD, “Micelle shape and size,” en, *The Journal of Physical Chemistry*, t. 76, n° 21, p. 3020-3024, oct. 1972, ISSN : 0022-3654, 1541-5740. DOI : 10.1021/j100665a018. visité le 26 mai 2024. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/abs/10.1021/j100665a018>.
- [148] M. SZŐRI, *Is there any relation between CMC & exposed surface area of the liquid?* https://www.researchgate.net/post/Is_there_any_relation_between_CMC_exposed_surface_area_of_the_liquid, sept. 2018.
- [149] K. WATANABE, S. NIWA et Y. H. MORI, “Surface Tensions of Aqueous Solutions of Sodium Alkyl Sulfates in Contact with Methane under Hydrate-Forming Conditions,” en, *Journal of Chemical & Engineering Data*, t. 50, n° 5, p. 1672-1676, sept. 2005, ISSN : 0021-9568, 1520-5134. DOI : 10.1021/je050139v. visité le 26 mai 2024. adresse : <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/je050139v>.
- [150] W. AL-SOUFI, L. PIÑEIRO et M. NOVO, “A model for monomer and micellar concentrations in surfactant solutions : Application to conductivity, NMR, diffusion, and surface tension data,” en, *Journal of Colloid and Interface Science*, t. 370, n° 1, p. 102-110, mars 2012, ISSN : 00219797. DOI : 10.1016/j.jcis.2011.12.037. visité le 26 mai 2024. adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021979711015268>.
- [151] S. SUZUKI et K. BE, “Topological structural analysis of digitized binary images by border following,” en, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, t. 30, n° 1, p. 32-46, avr. 1985, ISSN : 0734-189X. DOI : 10.1016/0734-189X(85)90016-7. visité le 27 juill. 2022. adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734189X85900167>.