



**HAL**  
open science

# Identification des chargements exercés par un pneumatique sur une roue d'aéronef

Kévin Cosseron

► **To cite this version:**

Kévin Cosseron. Identification des chargements exercés par un pneumatique sur une roue d'aéronef. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COmUE), 2019. Français. ⟨NNT : 2019SACLN036⟩. ⟨tel-05370504⟩

**HAL Id: tel-05370504**

**<https://theses.hal.science/tel-05370504v1>**

Submitted on 18 Nov 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Identification des chargements exercés par un pneumatique sur une roue d'aéronef

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay  
préparée à l'École Normale Supérieure Paris-Saclay

École doctorale n°579 : Sciences Mécaniques et Energétiques,  
Matériaux et Géosciences (SMEMAG)  
Spécialité de doctorat : Solides, Structures et Matériaux

Thèse présentée et soutenue à Cachan, le 1<sup>er</sup> octobre 2019, par

**M. Kévin Cosseron**

Composition du jury :

M. Louis Jézéquel	Professeur des universités, LTDS, Ecole Centrale de Lyon	Président
M. Sylvain Calloch	Professeur des universités, IRDL, ENSTA Bretagne	Rapporteur
M. Michel Grédiac	Professeur des universités, Institut Pascal, Université Clermont Auvergne	Rapporteur
M. Stéphane Andrieux	Directeur général scientifique, ONERA	Examineur
M. Christian Hochard	Professeur des universités, LMA, Aix-Marseille Université	Examineur
M. François Hild	Directeur de recherche CNRS, LMT, ENS Paris-Saclay	Directeur de thèse
M. David Mellé	Ingénieur, Safran Landing Systems	Co-directeur de thèse
M. Jean-Frédéric Diebold	Ingénieur, Safran Landing Systems	Invité

---

---

*“Far better an approximate answer to the right question,  
which is often vague,  
than an exact answer to the wrong question,  
which can always be made precise.”*

John W. Tukey, *The Future of Data Analysis*, 1962.



# Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier vivement mes encadrants pendant ces trois années et demie de thèse : François Hild et David Mellé. François m'a fait découvrir le monde de la recherche scientifique et m'y a donné goût. Toujours disponible quand j'en avais besoin, il a su m'orienter avec justesse lorsque nécessaire. Sa passion, sa pédagogie et sa rigueur m'ont été très précieuses durant ces travaux. L'aventure avec David a quant à elle commencé quelques années auparavant lorsque j'intégrais, en tant que prestataire, l'équipe Méthodes et Outils de la division Roues et Freins de Safran Landing Systems... Sans surprise, ce fut également un plaisir de bénéficier de son encadrement pendant toute la durée de la thèse. Sa forte implication et la richesse de nos échanges quotidiens m'ont beaucoup apporté. A tous les deux, un grand merci !

Je tiens également à remercier Stéphane Roux pour m'avoir distillé de nombreuses idées tout au long de ce travail et pour avoir visé juste à chaque fois. Merci aussi à Renaud Gras qui a initié ces travaux de recherche lors d'un post-doctorat et qui a toujours été disponible pour répondre à mes questions sur les aspects expérimentaux associés.

Je remercie Jean-Frédéric Diebold pour m'avoir proposé ce sujet de thèse et pour toute la confiance qu'il m'a témoignée. Merci également à René Billardon pour sa participation à la rédaction du sujet de thèse et pour ses nombreux conseils depuis mes débuts chez Safran Landing Systems.

Ensuite, j'adresse mes sincères remerciements à Louis Jézéquel pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, Sylvain Calloch et Michel Grédiac pour le temps qu'ils ont consacré à évaluer mon manuscrit durant leurs vacances d'été, ainsi qu'à Stéphane Andrieux et Christian Hochard pour avoir accepté le rôle d'examineur. Merci pour toutes vos questions durant la soutenance, je garderai un excellent souvenir de cette journée !

Je remercie également tous mes collègues du LMT, de Safran Landing Systems et de Safran Tech qui ont participé de près ou de loin à cette aventure.

Enfin, je remercie mes parents pour leur éducation, leur présence et leur soutien dans tous mes projets personnels et professionnels. Je remercie aussi de tout mon cœur ma compagne Marta pour sa patience, son soutien sans faille et tout l'amour qu'elle m'apporte au quotidien depuis maintenant plus de 4 ans... Je remercie également mon frère, mes grands-parents et mes amis de longue date qui se reconnaîtront.

Encore merci à tous !



# Table des matières

Remerciements	v
Table des matières	vii
Introduction	1
<b>1 Contexte industriel et scientifique</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation d'une roue d'aéronef . . . . .	6
1.1.1 Architecture . . . . .	6
1.1.2 Sollicitations mécaniques . . . . .	8
1.1.3 Normes et exigences de qualification . . . . .	10
1.2 Positionnement du problème . . . . .	12
1.2.1 Méthodes et outils de dimensionnement . . . . .	12
1.2.2 Corrélation essai-calcul . . . . .	15
1.2.3 Problématique . . . . .	16
1.3 Axes de recherche sur l'interaction pneu-roue . . . . .	17
1.3.1 Approches expérimentales . . . . .	17
1.3.2 Méthodes inverses . . . . .	18
1.3.3 Modélisation du pneumatique . . . . .	20
1.4 Démarche choisie . . . . .	23
<b>2 Données expérimentales</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	26
2.2 Dispositif expérimental . . . . .	26
2.2.1 Montage . . . . .	26
2.2.2 Moyens de mesure . . . . .	27
2.3 Réalisation des essais . . . . .	32
2.3.1 Histoire de chargement . . . . .	32
2.3.2 Protocole . . . . .	32
2.4 Résultats obtenus . . . . .	33
2.4.1 Mesures de champs de déplacement . . . . .	33
2.4.2 Mesures de déformations ponctuelles . . . . .	41
2.5 Conclusions . . . . .	42
<b>3 Paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante</b>	<b>43</b>
3.1 Introduction . . . . .	44
3.2 Analyse de la base de données pneumatiques . . . . .	44
3.2.1 Données disponibles . . . . .	44

3.2.2	Cas de gonflage . . . . .	45
3.2.3	Cas de ligne droite . . . . .	50
3.2.4	Cas de ripé . . . . .	55
3.3	Premières tentatives . . . . .	59
3.3.1	Séries de Fourier . . . . .	59
3.3.2	Somme de pics élémentaires . . . . .	64
3.3.3	Discussion . . . . .	69
3.4	Paramétrisation optimale . . . . .	70
3.4.1	État de l'art sur les méthodes de sous-structuration . . . . .	70
3.4.2	Méthodologie générale . . . . .	73
3.4.3	Utilisation des propriétés de symétrie cyclique . . . . .	75
3.4.4	Modes propres d'interface pneu-jante . . . . .	77
3.4.5	Critères de sélection . . . . .	81
3.4.6	Projection de chargements connus . . . . .	83
3.5	Conclusions . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Identification de chargements à l'interface pneu-jante</b>	<b>95</b>
4.1	Problème inverse et estimation de paramètres . . . . .	96
4.1.1	Définition . . . . .	96
4.1.2	Approche bayésienne et notion d'extracteur . . . . .	97
4.1.3	Méthodes de résolution . . . . .	99
4.1.4	Techniques de régularisation . . . . .	102
4.2	Procédure d'identification retenue . . . . .	104
4.2.1	Choix de la méthode de recalage de modèle par éléments finis . . . . .	104
4.2.2	Environnement de travail . . . . .	106
4.2.3	Modélisations numériques de la roue . . . . .	107
4.3	Identifications d'un cas de gonflage . . . . .	109
4.3.1	Etude de sensibilité préliminaire . . . . .	109
4.3.2	Paramétrisation en somme de pics élémentaires . . . . .	118
4.3.3	Paramétrisation basée sur les modes propres d'interface . . . . .	124
4.3.4	Détection d'une erreur de mesure systématique . . . . .	130
4.4	Identifications d'un cas de ligne droite . . . . .	138
4.4.1	Paramétrisation basée sur les modes propres d'interface . . . . .	138
4.4.2	Discussion . . . . .	144
4.5	Conclusions . . . . .	144
<b>5</b>	<b>Placement optimal de capteurs pour l'identification de chargements</b>	<b>145</b>
5.1	Introduction . . . . .	146
5.2	Problématique . . . . .	147
5.3	Critères et procédures d'optimisation . . . . .	148
5.3.1	Critères de minimisation des incertitudes . . . . .	148
5.3.2	Procédures associées . . . . .	150
5.4	Modélisation 2D axisymétrique de la roue . . . . .	152
5.4.1	Modèle de calcul par éléments finis . . . . .	152
5.4.2	Modes propres d'interface pneu-jante 2D . . . . .	153
5.5	Application à l'identification d'un cas de gonflage . . . . .	155
5.5.1	Essais virtuels . . . . .	155
5.5.2	Identification avec une instrumentation classique . . . . .	156
5.5.3	Instrumentations optimisées . . . . .	160

5.6 Conclusions . . . . .	166
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>169</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>
<b>A Utilisation des propriétés de symétrie cyclique</b>	<b>189</b>
<b>Table des figures</b>	<b>197</b>
<b>Résumé</b>	<b>203</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Introduction

L'industrie aéronautique est aujourd'hui confrontée à des défis majeurs de production, d'innovation et de compétitivité liés à l'augmentation continue du nombre de voyageurs dans le monde, à l'évolution des normes et des exigences de certification (notamment concernant l'impact environnemental) et à l'intensification de la concurrence (Audier *et al.*, 2018). Ces défis impactent fortement les conditions d'exploitation des avions. La croissance fulgurante du trafic aérien ces dernières années multiplie les mouvements sur les pistes et aux abords des terminaux des aéroports tandis que les nouvelles réglementations sur les nuisances sonores, par exemple, restreignent l'utilisation des moteurs lors des phases de roulage. En parallèle, les compagnies aériennes s'évertuent à réduire leurs coûts de fonctionnement et de maintenance en cherchant sans cesse à acheter des appareils de plus en plus légers, consommant moins de carburant, et ayant des durées de vie accrues, tout en optimisant leurs temps de rotation. Dans ce contexte, la performance des trains d'atterrissage des avions, et en particulier de leurs roues et freins associés, joue un rôle crucial. Durant les phases de roulage, de décollage et d'atterrissage, ces équipements permettent d'assurer le déplacement au sol de l'avion. Leur conception requiert des connaissances techniques dans de nombreux domaines et l'utilisation de technologies complexes. En outre, des méthodes et des outils de dimensionnement performants sont nécessaires pour répondre au mieux aux exigences en termes de masse, de résistance et de tenue en fatigue spécifiées pour chaque avion. Les simulations numériques ont donc un poids grandissant dans la validation de ces équipements et leur intérêt en termes de compétitivité en fait un des axes majeurs de développement pour les sociétés qui les produisent.

Le caractère prédictif des simulations numériques menées pour dimensionner une structure dépend directement de la précision avec laquelle sont introduites les conditions aux limites imposées en service à la structure. Ces dernières sont des paramètres d'ordre un lorsqu'il s'agit de valider un modèle numérique par rapport à des observations expérimentales (Nakagiri et Suzuki, 1999 ; Turco, 1999 ; Chock et Kapania, 2003). Plusieurs méthodes existent pour déterminer la distance entre des résultats numériques et expérimentaux. Celles-ci servent généralement à identifier des paramètres de lois de comportement (Grédiac et Hild, 2011 ; Mathieu *et al.*, 2012) mais certaines d'entre elles permettent également, par extension, d'identifier des chargements appliqués (Amiot *et al.*, 2007 ; Martini *et al.*, 2012). Les méthodes d'extraction de conditions aux limites se distinguent alors par le type d'information (*e.g.*, déplacements, déformations, contraintes) qui sert à la comparaison (Turco, 2005 ; Hild et Roux, 2006a ; Nakamura *et al.*, 2012). D'un point de vue pratique, les données d'entrée de ce type d'analyse sont généralement des mesures cinématiques (Xu *et al.*, 2010 ; Martini, 2011 ; Gras *et al.*, 2015b). A l'instar des méthodes d'identification de champs de propriétés élastiques (Tarantola, 2005 ; Gras *et al.*, 2015c), la prise en compte des incertitudes de mesure est également fondamentale pour déterminer la sensibilité de chaque inconnue recherchée par rapport aux données mesurées.

Dans le cas de la roue d'aéronef, les chargements appliqués par les différents pneumatiques qui peuvent être montés sur celle-ci lors des manœuvres au sol de l'aéronef jouent un rôle déterminant dans la précision du modèle numérique. Cependant, ces chargements sont complexes et mal connus. Les charges globales appliquées à l'interface pneu-piste sont transférées à la roue au niveau de l'interface pneu-jante grâce au pneumatique, qui est un composant intermédiaire sophistiqué que ne maîtrise pas le manufacturier de roue. La détermination des conditions aux limites directement appliquées à la roue est donc particulièrement difficile et nécessite de faire des hypothèses sur le comportement en déformation du pneumatique. L'objectif de ce travail est donc d'**identifier les chargements induits par le pneumatique sur la roue via la mesure de la déformée de cette dernière pour les différents cas de charge envisagés**. Le but est de permettre au concepteur de la roue de mieux comprendre et de modéliser l'interaction entre le pneumatique et la roue afin d'obtenir des simulations numériques prédictives. Les tâches sous-jacentes à cette approche consistent d'une part à définir une paramétrisation objective des chargements à l'interface pneu-jante, aussi robuste et compacte que possible, et d'autre part à déterminer les mesures appropriées pour calibrer les paramètres recherchés. Une procédure de recalage de modèle par éléments finis (Kavanagh et Clough, 1971) pourra alors être mise en œuvre afin de mener les identifications.

Cette étude est réalisée dans le cadre d'une Convention Industrielle de Formation par la REcherche (CIFRE) en partenariat entre *Safran Landing Systems* et le Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT). Elle fait suite aux travaux de post-doctorat de Gras (2015a) durant lesquels une preuve de faisabilité de l'identification des chargements appliqués lors d'un cas « simple » de gonflage avait été apportée. L'utilisation de mesures de champs de déplacement tridimensionnels (3D) surfaciques obtenues par stéréocorrélation et d'un modèle simplifié (axisymétrique) de la roue avait ainsi permis de déterminer la distribution de la pression de contact à l'interface pneu-jante.

### Organisation du manuscrit

Le premier chapitre décrit le contexte industriel et scientifique de ces travaux. On détaille tout d'abord les caractéristiques générales d'une roue d'aéronef puis les méthodes et outils nécessaires à son dimensionnement sont présentés. La problématique concernant la connaissance des chargements appliqués à l'interface pneu-jante est ensuite exposée et les axes de recherche proposés dans la littérature sont étudiés. Enfin, la démarche choisie pour identifier les chargements recherchés est présentée.

Dans le deuxième chapitre, la campagne expérimentale réalisée lors du post-doctorat de Gras (2015a) est détaillée. Les mesures de champs de déplacement 3D obtenues par stéréocorrélation et les déformations « ponctuelles » mesurées par jauges d'extensométrie sont notamment présentées. Ces données expérimentales serviront de base aux futures identifications de chargements qui seront menées.

Le troisième chapitre est consacré à la paramétrisation des chargements appliqués à l'interface pneu-jante. Une analyse de la base de données pneumatiques disponible chez *Safran Landing Systems* est réalisée pour mieux appréhender les chargements recherchés puis des paramétrisations en séries de Fourier et somme de pics élémentaires sont proposées. Un changement de paradigme est néanmoins opéré et une paramétrisation optimale basée sur l'utilisation des modes propres de la matrice de raideur de la roue condensée sur l'interface pneu-jante est définie.

Dans le quatrième chapitre, les données expérimentales et les paramétrisations présentées précédemment sont associées pour réaliser des identifications des chargements à l'interface pneu-jante. Tout d'abord, les aspects théoriques liés au problème inverse à résoudre sont évoqués et la procédure d'identification mise en place dans un environnement industriel est présentée. Le cas du gonflage du pneumatique sur la roue est ensuite étudié et les résultats d'identification obtenus sont discutés. Enfin, l'analyse d'un cas de roulage en ligne droite est abordée.

Le problème du placement optimal de capteurs pour l'identification de chargements fait l'objet du cinquième chapitre. On s'intéresse en particulier à la définition d'une instrumentation par jauges d'extensométrie optimisée pour minimiser les incertitudes sur les paramètres à identifier. Une synthèse bibliographique sur ce sujet est présentée et une preuve de concept pour l'identification d'un cas de gonflage est détaillée.



# Chapitre 1

## Contexte industriel et scientifique

*Ce premier chapitre décrit le contexte industriel et scientifique de la thèse. Les caractéristiques générales d'une roue d'aéronef, de son architecture particulière aux normes et exigences associées à sa qualification, en passant par les sollicitations mécaniques auxquelles elle doit résister, sont tout d'abord détaillées. Les méthodes et outils nécessaires à son dimensionnement sont ensuite présentés et la problématique concernant la connaissance des chargements appliqués par le pneumatique sur la roue à l'interface entre ces deux composants est alors exposée. Les axes de recherche proposés dans la littérature sont étudiés puis la démarche choisie dans le cadre de ces travaux est finalement présentée.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation d'une roue d'aéronef</b>	<b>6</b>
1.1.1	Architecture	6
1.1.2	Sollicitations mécaniques	8
1.1.3	Normes et exigences de qualification	10
<b>1.2</b>	<b>Positionnement du problème</b>	<b>12</b>
1.2.1	Méthodes et outils de dimensionnement	12
1.2.2	Corrélation essai-calcul	15
1.2.3	Problématique	16
<b>1.3</b>	<b>Axes de recherche sur l'interaction pneu-roue</b>	<b>17</b>
1.3.1	Approches expérimentales	17
1.3.2	Méthodes inverses	18
1.3.3	Modélisation du pneumatique	20
<b>1.4</b>	<b>Démarche choisie</b>	<b>23</b>

---

## 1.1 Présentation d'une roue d'aéronef

Le train d'atterrissage est l'un des principaux éléments constitutifs d'un aéronef et permet d'en assurer la liaison au sol. Il est composé de plusieurs atterrisseurs, principaux et auxiliaires, équipés de roues et de pneumatiques. Le nombre d'atterrisseurs et de roues par atterrisseur, ainsi que le type de pneu utilisé, sont initialement définis par la masse au décollage de l'aéronef et par la résistance des pistes sur lesquelles il doit opérer (Veaux, 2006). A titre d'exemple, l'Airbus A350-900 possède deux atterrisseurs principaux à quatre roues et un atterrisseur avant à deux roues pour une masse maximale au décollage égale à 275 tonnes. Durant les phases de roulage, de décollage et d'atterrissage, une dizaine d'ensembles pneu-roue supportent ainsi la masse de l'aéronef. Les performances de freinage attendues par l'avionneur (*i.e.*, niveaux d'énergie à absorber et distances d'arrêt) constituent également un critère de dimensionnement déterminant puisqu'elles définissent les dimensions des freins à intégrer aux roues principales (Currey, 1988). Dans les paragraphes suivants, l'architecture d'une roue d'aéronef et les sollicitations mécaniques auxquelles elle doit résister sont présentées. Les aspects liés à sa qualification sont également abordés.

### 1.1.1 Architecture

Les premières roues d'aéronef étaient de construction monobloc, comme les roues d'automobile, et moulées en alliage de magnésium (Currey, 1988). Cependant, pour répondre aux exigences croissantes des avionneurs, la taille et la rigidité des pneumatiques ont dû être augmentées afin d'absorber au mieux les efforts à l'atterrissage et d'éviter les phénomènes d'éclatement ou de glissement du pneu par rapport à la jante. Ces pneus ne pouvant être montés directement sur les roues, des conceptions en deux parties sont apparues. Les premières de ce type comprenaient uniquement une partie de jante amovible afin de faciliter le montage du pneu. De nos jours, les roues d'aéronef sont constituées par un assemblage de deux demi-roues (*intérieure* et *extérieure*) plus ou moins symétriques et matricées en alliage d'aluminium (Federal Aviation Administration, 2012). Les roues avant, montées sur les atterrisseurs auxiliaires et qui ne participent pas au freinage de l'aéronef, sont généralement symétriques tandis que les roues principales ont des architectures pseudo-symétriques variables en fonction de l'encombrement du frein à accueillir (Figure 1.1).

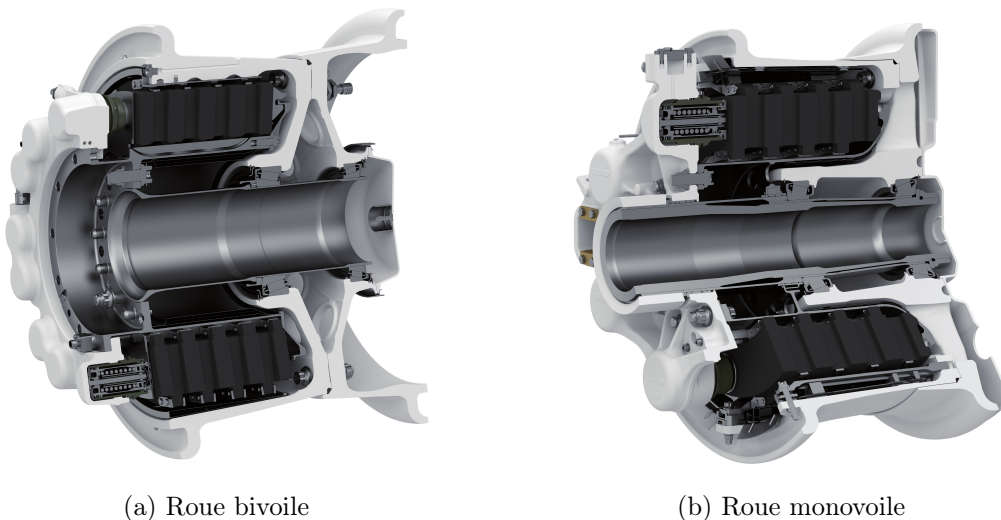


FIGURE 1.1 – Exemples d'architecture de roues principales (source : Safran)

Les demi-roues sont reliées entre elles par des boulons ou, parfois, par le verrouillage d'une bride sur un jonc encastré dans le corps de roue. Un joint torique permet également d'assurer l'étanchéité de la jante puisque la plupart des pneumatiques utilisés ne possèdent pas de chambre à air. Pour les roues principales, la demi-roue intérieure se distingue de la demi-roue extérieure par son dispositif à accueillir le frein (*i.e.*, couronne hydraulique, puits de chaleur composé de rotors et de stators en composite carbone et tube de torsion). Elle est équipée de barrettes d'entraînement des rotors, d'écrans thermiques permettant de limiter la transmission de chaleur par rayonnement entre les disques et la roue, et d'au moins trois fusibles de sécurité contenant un matériau eutectique à bas point de fusion pour dégonfler le pneu rapidement et éviter son explosion en cas de freinage à très haute énergie. La demi-roue extérieure accueille quant à elle la valve de gonflage du pneumatique, un clapet de surpression et un éventuel capteur de pression (Tire Pressure Indication System, TPIS). Les demi-roues sont également équipées de roulements à rouleaux coniques afin d'assurer la rotation par rapport à l'essieu du train d'atterrissage.

Quelle que soit la roue considérée, son architecture peut être décomposée en plusieurs zones distinctes illustrées sur la Figure 1.2. Le *moyeu* constitue ainsi la partie centrale de la roue et supporte les bagues extérieures des roulements. Le *voile* correspond à la zone intermédiaire, plus ou moins conique, composée d'une alternance d'alvéoles, favorisant la ventilation de la roue et permettant de réduire sa masse, et de bâtons qui relient le moyeu à l'extérieur de la roue. La zone où les voiles des demi-roues se rejoignent est appelée *zone d'assemblage* et permet d'assurer la liaison entre celles-ci grâce au serrage imposé par les boulons. Enfin, la *jante* correspond à la partie cylindrique à l'extérieur de la roue et les parties épaisses situées à ses extrémités, sur lesquelles s'appuie le pneumatique, sont dénommées *bourrelets*.

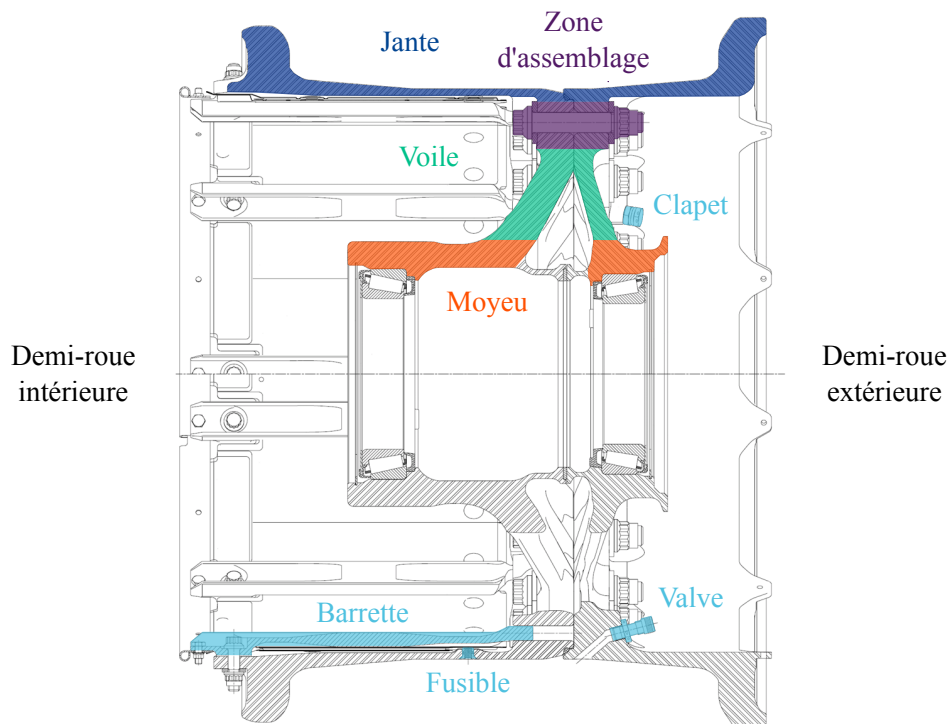


FIGURE 1.2 – Vue détaillée d'une roue principale

### 1.1.2 Sollicitations mécaniques

Les chargements appliqués sur la roue par les différents pneumatiques qui peuvent être montés sur celle-ci lors des manœuvres au sol de l'aéronef constituent les principales sollicitations mécaniques auxquelles elle doit résister. Ces chargements peuvent être décomposés de manière générale dans les trois directions d'un repère cartésien global centré sur la roue et illustré sur la Figure 1.3. Les efforts appliqués dans la direction  $Z$  proviennent essentiellement de la répartition du poids de l'aéronef et de son centrage sur les différents atterrisseurs lors du roulage en *ligne droite* tandis que ceux appliqués suivant la direction  $Y$  correspondent aux efforts de *ripés* générés lors des virages ou en cas de carrossage de la roue. Les efforts suivant la direction  $X$  sont quant à eux associés à la traînée induite lors du roulage et du freinage. A titre d'exemple, les charges appliquées sur une roue principale d'un avion de ligne long-courrier peuvent atteindre 30000 daN (resp. 15000 daN) suivant la direction  $Z$  (resp.  $Y$ ) lors d'un roulage en conditions nominales.

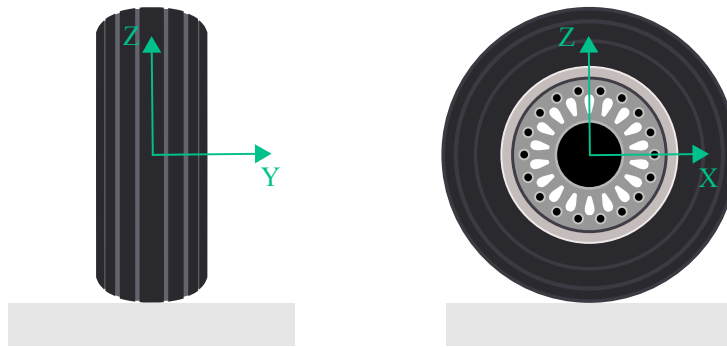


FIGURE 1.3 – Repère cartésien global centré sur la roue

Ces chargements, initialement appliqués à l'interface pneu-piste, sont transférés à la roue grâce au pneumatique au niveau de l'interface pneu-jante. Cependant, **le pneumatique est un composant intermédiaire**, constitué d'un assemblage complexe de gommages et de renforts textiles et métalliques, **que ne maîtrise pas le fabricant de roue** et qui subit également des déformations non négligeables sous l'action de ces chargements (*i.e.*, *écrasement* et *déport*). Sa structure influence donc fortement la répartition des efforts sur la jante. Par conséquent, les conditions aux limites directement appliquées à la roue, qui jouent un rôle crucial sur son comportement mécanique, sont difficiles à déterminer.

De nos jours, deux types de pneumatique sont couramment utilisés sur les avions en service (Figure 1.4). Les pneumatiques à technologie *bias* (ou diagonale) sont les plus anciens et sont caractérisés par une carcasse flexible composée d'un assemblage de plusieurs nappes de câbles orientées obliquement de façon à former des angles alternés compris entre 30 et 60° par rapport à la direction de roulement du pneu. La structure ainsi obtenue est homogène et les propriétés mécaniques des flancs et du sommet du pneu sont similaires. Les pneumatiques à technologie *radiale* sont apparus dans les années 1980 et se différencient des précédents par des nappes parallèles orientées à 90° par rapport à la direction de roulement. Le flanc d'un pneu radial est par conséquent plus souple que celui d'un pneu *bias*. De plus, des renforts spécifiques forment une ceinture au sommet du pneu afin d'en améliorer la résistance. Cette technologie permet de supporter des charges plus élevées et génère des gains importants en endurance et en masse par rapport à la technologie *bias*.



FIGURE 1.4 – Exemples d'architecture de pneumatiques pour avion (Michelin, 2016)

En fonction de l'architecture du pneumatique, les charges appliquées entre le pneu et le sol sont donc transférées différemment au niveau de l'interface pneu-jante. Un pneu bias a ainsi généralement tendance à appuyer plus haut sur les bourellets de la jante qu'un pneu radial pour des résultantes d'efforts identiques. Par conséquent, les zones critiques de la roue sont différentes dans les deux cas. Par ailleurs, pour une architecture donnée, la structure de la zone basse et la pression de gonflage du pneumatique jouent également un rôle crucial dans la répartition des efforts à l'interface pneu-jante. En effet, la zone basse permet notamment d'assurer l'adhérence entre le pneu et la jante grâce à la présence d'une ou plusieurs tringles métalliques (*i.e.*, une par côté pour un pneu radial et jusqu'à quatre pour un pneu bias). Elle induit donc un chargement de compression sur la jante avant même que le pneumatique ne soit gonflé (Clarks, 1971 ; Gent et Walter, 2006). Toutefois, sa structure est très complexe (Figure 1.5) et la répartition des différentes gommes et renforts qui la composent, de même que leurs propriétés mécaniques, sont inconnues du manufacturier de roue. Le gonflage du pneu est également déterminant puisque l'effort de séparation généré entre les demi-roues par la pression d'azote vaut généralement plusieurs dizaines de tonnes. Il conditionne l'écrasement et le déport du pneu sous charges et influence donc la répartition des efforts à l'interface pneu-jante obtenue lors des cas de roulage.

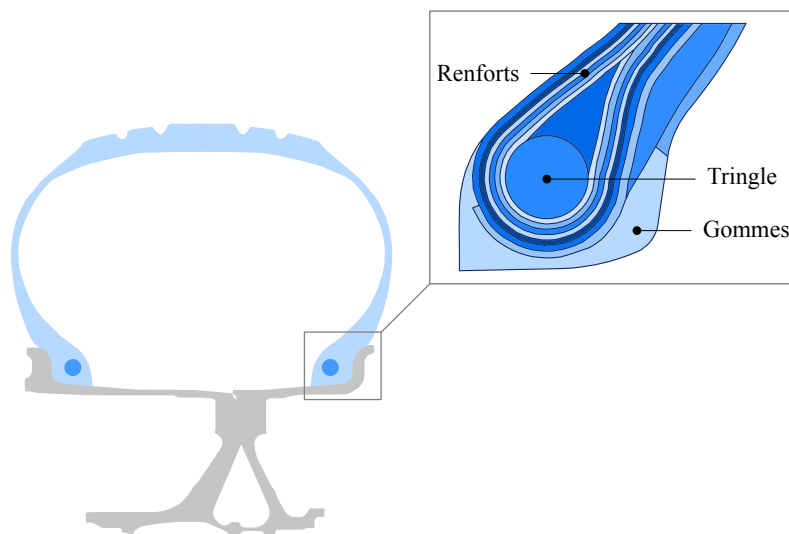


FIGURE 1.5 – Illustration de la zone basse d'un pneu radial

Les sollicitations mécaniques appliquées à la roue dépendent donc fortement de la structure du pneumatique utilisé. Par ailleurs, les compagnies aériennes qui achètent les roues peuvent choisir de monter des pneumatiques provenant de plusieurs manufacturiers (*e.g.*, Michelin, Goodyear, Bridgestone) et ayant des comportements mécaniques sensiblement différents sur une même roue. Le dimensionnement et l'optimisation de cette dernière sont donc particulièrement difficiles à réaliser et il est souvent nécessaire de procéder à des essais préliminaires pour déterminer le pneumatique le plus pénalisant.

**Remarque 1** Une roue d'aéronef subit également des sollicitations thermiques et chimiques. Lors de l'atterrissage, le frein transforme l'énergie cinétique de l'avion en énergie calorifique et la température de l'environnement dans lequel évolue la demi-roue intérieure est généralement comprise entre 200 et 600°C lors d'un freinage standard, justifiant ainsi l'utilisation de protections thermiques. La roue peut également subir de la corrosion dans cet environnement particulier et l'impact sur sa durée de vie n'est pas négligeable. Par conséquent, la roue est protégée par des peintures et des anodisations. Ces dernières génèrent néanmoins un abatement de la tenue en fatigue de la roue et des procédés spéciaux (*i.e.*, grenailage, galetage, expansion à froid) doivent être utilisés pour combler cette perte.

### 1.1.3 Normes et exigences de qualification

La conception et le dimensionnement d'une roue d'aéronef sont régis par différentes normes et exigences de qualification. La roue doit en effet être compatible avec le pneumatique choisi par l'avionneur et prendre en compte les contraintes d'encombrement du frein, tout en ayant une masse minimale et une durée de vie maximale. Les dimensions de la zone d'interface pneu-jante sont ainsi directement définies par l'Aircraft Year Book ([Tire and Rim Association, Inc., 2018](#)) afin d'assurer la compatibilité entre le pneumatique et la roue (Figure 1.6). Le pneumaticien et le manufacturier de roue doivent absolument respecter les cotes spécifiées par cette norme pour garantir la bonne tenue du pneu sur la roue, son montage et démontage ainsi que l'étanchéité de l'ensemble pneu-roue.

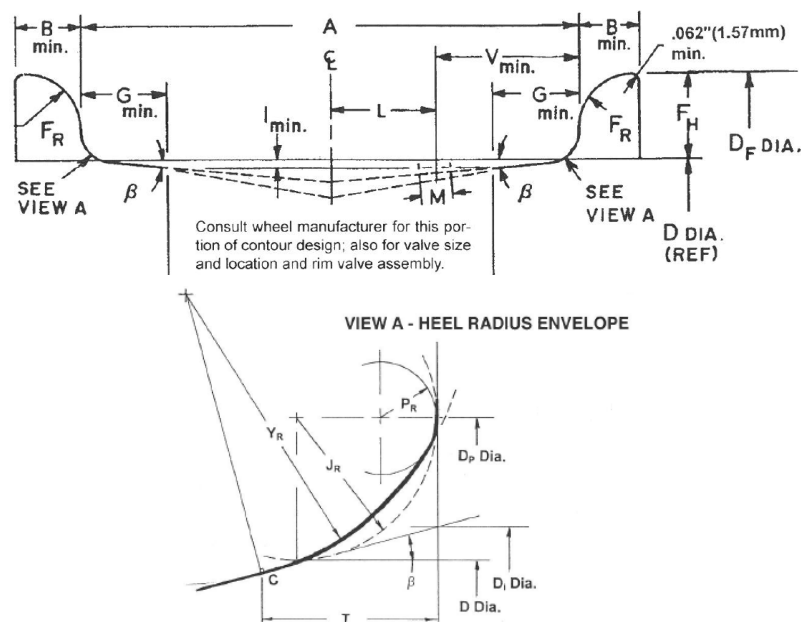


FIGURE 1.6 – Extrait de l'Aircraft Year Book ([Tire and Rim Association, Inc., 2018](#))

D'autres normes imposent des performances minimales qui doivent être démontrées par la roue, pour assurer un minimum de sécurité, et influencent donc indirectement sa conception. On peut notamment citer les normes civiles TSO et ETSO C135a ([Federal Aviation Administration, 2008](#) ; [European Aviation Safety Agency, 2010](#)) qui sont applicables quel que soit l'avion considéré. En plus de ces exigences réglementaires, les avionneurs ajoutent leurs propres spécifications. Ils précisent les cas de charge auxquels les roues doivent faire face, d'après la spécification de certification de l'avion, et définissent des exigences supplémentaires concernant, par exemple, la durée de vie souhaitée pour l'équipement (*i.e.*, généralement 10000 vols) ou la tolérance aux dommages.

Les différentes exigences peuvent alors être classées en trois catégories. La première concerne la tenue de la roue lors du roulage de l'aéronef dans des configurations représentatives de sa vie en service. Le fabricant de roue doit démontrer la capacité de son équipement à rouler sous chargements verticaux et combinés pendant un certain nombre de kilomètres (*i.e.*, environ 80000 km soit  $2 \times 10^7$  cycles). Il s'agit donc de valider sa tenue en fatigue et à la propagation de fissures. Il doit également démontrer que la roue peut parcourir environ 5000 m sans se fragmenter malgré l'éclatement du pneumatique (*i.e.*, roulage sur jante). D'autres exigences traitent de roulages particuliers avec, par exemple, un boulon manquant ou une roue corrodée. La deuxième catégorie d'exigences concerne la tenue statique de la roue pour des cas de charge exceptionnels. Pour des cas dits *limites*, il est nécessaire de prouver qu'il n'y a pas d'interférence entre la roue et le frein nuisant au bon fonctionnement de l'ensemble. Des cas à *limite élastique* et *ultimes* sont également définis et leurs charges correspondent respectivement à 1,15 et 1,5 fois les charges des cas *limites*. Les déformations résiduelles de la roue doivent être faibles pour les premiers tandis que la roue doit supporter les seconds sans défaillance pendant au moins trois secondes. Les charges *ultimes* appliquées sur une roue immobile peuvent ainsi atteindre plus de 80 tonnes (resp. 30 tonnes) suivant la direction  $Z$  (resp.  $Y$ ). Enfin, la troisième catégorie d'exigences porte sur la vérification de l'étanchéité de la roue et de sa capacité à résister à une surpression du pneumatique au moins égale à quatre fois sa pression nominale.

**Pour l'ensemble des exigences, la tenue de la roue doit être démontrée par des essais afin de valider sa qualification.** Toutefois, bien qu'une roue soit toujours spécifique à un frein, son homologation est réalisée de manière dissociée de ce dernier ([Guichard, 1996](#)). Elle est qualifiée, **sans le frein**, par des essais de roulage et des essais statiques réalisés sur des machines spéciales. Une machine de roulage et une presse statique couramment utilisées pour ces essais sont illustrées sur la Figure 1.7.



(a) Machine de roulage



(b) Presse statique

FIGURE 1.7 – Machines pour les essais de validation d'une roue d'aéronef (source : *Safran*)

## 1.2 Positionnement du problème

### 1.2.1 Méthodes et outils de dimensionnement

Pour concevoir une roue, *Safran Landing Systems* dispose de plusieurs méthodes et outils de dimensionnement qui permettent tout d’abord de réaliser un pré-dimensionnement analytique de l’équipement, d’en tracer un modèle 3D puis de l’évaluer numériquement avant de procéder à sa validation par des essais et finalement à son industrialisation. Dans le cadre de ces travaux de thèse, on s’intéresse en particulier au **dimensionnement de la roue pour des charges de roulage** et aux **méthodologies de calcul associées**. Les exigences sans cesse croissantes en termes de masse, de résistance et de tenue en fatigue de la roue nécessitent en effet de réaliser des simulations numériques de son comportement en service de plus en plus prédictives et celles-ci ont donc un poids grandissant dans le cadre de son développement.

#### Modèle de calcul par éléments finis et analyse en fatigue

Pour prédire la durée de vie en fatigue d’une roue, il est nécessaire de déterminer l’évolution du tenseur des contraintes en chaque point de celle-ci en fonction des chargements cycliques imposés par le pneumatique lorsque l’ensemble pneu-roue tourne par rapport au sol. Pour ce faire, *Safran Landing Systems* utilise un modèle de calcul par éléments finis et des routines de pré/post-traitement spécifiques. Les données d’entrée nécessaires au calcul sont la géométrie de la roue étudiée, les propriétés des matériaux utilisés et les chargements appliqués par le pneumatique pour les différents cas de chargement envisagés (*i.e.*, gonflage, ligne droite et ripés). Le pneumatique n’étant pas directement modélisé dans le calcul par éléments finis en raison de la méconnaissance de celui-ci par le manufacturier de roue, le processus actuel repose sur un support apporté par les pneumaticiens (Figure 1.8). Ces derniers fournissent généralement des informations sur le comportement macroscopique du pneumatique étudié (*e.g.*, raideurs verticale et latérale) et des formes de champs de pression de contact à l’interface pneu-jante obtenus par calculs éléments finis ou par mesures expérimentales **sur des roues rigides**. Ces données permettent de déterminer en partie les conditions aux limites appliquées à la roue et seront détaillées au Chapitre 3.

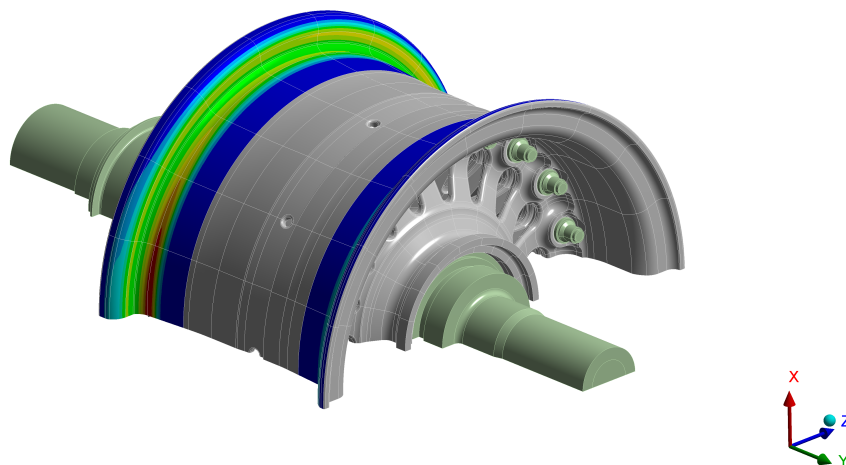


FIGURE 1.8 – Modèle de calcul par éléments finis d’une roue d’aéronef

Bien que les cas de charge étudiés soient associés au roulage de l'aéronef lors des différentes manœuvres au sol, les calculs sont réalisés avec des chargements statiques. En effet, une roue en rotation soumise à un chargement fixe par rapport au sol peut également être traitée comme une roue immobile avec un chargement évoluant « dynamiquement » autour d'elle. Par conséquent, en effectuant  $N$  calculs statiques de la roue en modifiant à chaque fois la position angulaire du chargement considéré, il est possible de construire le cycle du tenseur des contraintes associé en chaque point. Toutefois, l'utilisation des propriétés de symétrie cyclique de la roue permet d'accélérer considérablement le processus et de construire ce cycle en utilisant un unique calcul statique pour chaque cas de charge (Fish *et al.*, 2002). L'évolution des contraintes en un point de la roue pour les  $N$  instants du cycle est alors déduite des contraintes évaluées en ce même point à  $N$  positions angulaires sur la roue (Figure 1.9). De plus, puisque les chargements imposés par le pneumatique sont généralement considérés comme symétriques par rapport au plan  $Y - Z$ , un modèle représentant uniquement une portion angulaire de  $180^\circ$  de la roue (cf. Figure 1.8) est suffisant pour procéder à une analyse de sa durée de vie en fatigue.

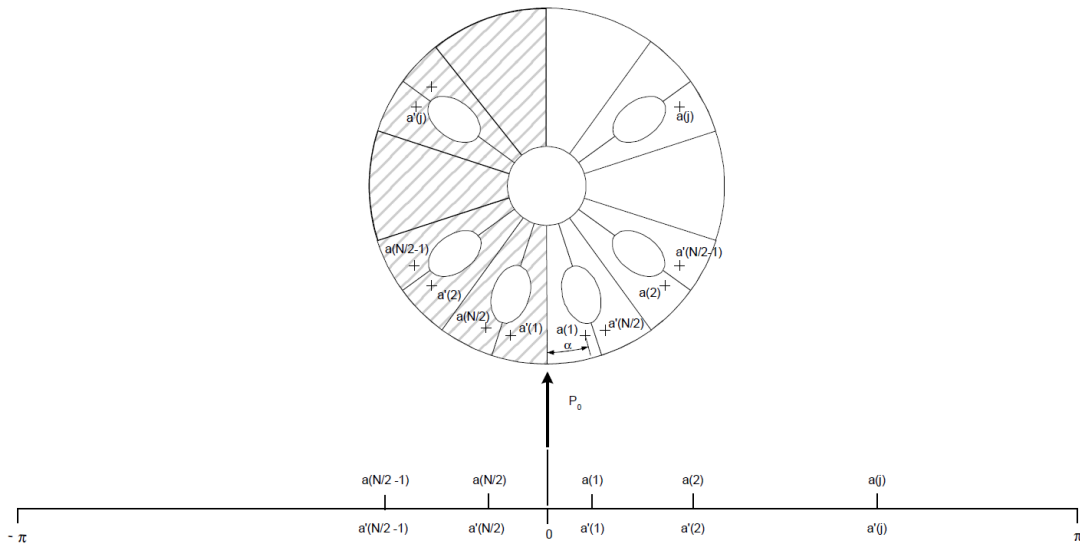


FIGURE 1.9 – Équivalence statique-dynamique pour l'analyse en fatigue d'une roue d'aéronef (Fish *et al.*, 2002)

Lorsque les calculs ont été réalisés pour les différents cas de charge du spectre de roulage et que les cycles des tenseurs des contraintes en chaque point de la roue ont été déterminés, l'analyse de sa durée de vie en fatigue peut être menée. Les cycles des tenseurs des contraintes sont tout d'abord convertis en cycles de contraintes uniaxiales puis les contraintes minimales et maximales associées sont relevées afin de définir une moyenne, une amplitude, et un rapport de sollicitation. Un modèle de fatigue et des données sur les matériaux sont ensuite utilisés pour déterminer le nombre de cycles à rupture, la marge en contrainte et l'endommagement en chaque point de la roue. On obtient ainsi une estimation de sa durée de vie et de ses zones critiques. Toutefois, on note que **les résultats obtenus sont fortement dépendants des conditions aux limites imposées à la roue** dans le modèle de calcul par éléments finis et donc des données fournies par les pneumaticiens.

### Heuristiques de dimensionnement

Les informations fournies par les pneumaticiens nécessitent un traitement particulier avant d'être intégrées dans le modèle de calcul par éléments finis de la roue. Les champs de pression de contact à l'interface pneu-jante et les raideurs verticale et latérale (*i.e.*, écrasement et déport) pour un pneu donné ne sont en effet fournis que pour quelques cas de charge élémentaires qui ne correspondent pas forcément à ceux pour lesquels la roue doit être dimensionnée. *Safran Landing Systems* a donc développé des heuristiques afin d'interpoler ou d'extrapoler ces données. Il convient de noter que l'établissement de ces règles est d'autant plus complexe que les roues subissent des déformations macroscopiques non négligeables pour les chargements étudiés.

Pour déterminer le chargement appliqué à l'interface pneu-jante pour un certain cas, une méthode permettant de combiner les champs de pression fournis par les pneumaticiens pour les différents cas de charge élémentaires (*i.e.*, gonflage, ligne droite et ripés) a été développée. Chaque champ élémentaire étant associé à des résultantes spécifiques, on peut déterminer une combinaison linéaire de ceux-ci permettant d'atteindre les charges souhaitées. Pour ce faire, l'équilibre statique du pneumatique est considéré et des hypothèses sur son comportement en déformation sont faites. On obtient alors un système d'équations linéaires qu'il suffit de résoudre pour déterminer les coefficients de pondération à appliquer à chaque champ de pression de contact élémentaire et pour chaque demi-roue.

La connaissance de l'écrasement et du déport du pneumatique est néanmoins cruciale pour la détermination de ces coefficients de pondération puisqu'ils correspondent aux « bras de levier » qui interviennent dans le calcul du moment de basculement de la roue (Figure 1.10). Ces grandeurs dépendent de la structure du pneumatique, de sa pression de gonflage et des charges verticale et latérale appliquées à l'interface pneu-piste. Des formules empiriques ont donc été déterminées afin de calculer ces grandeurs pour les cas de charge souhaités à partir de cas proches fournis par les pneumaticiens.

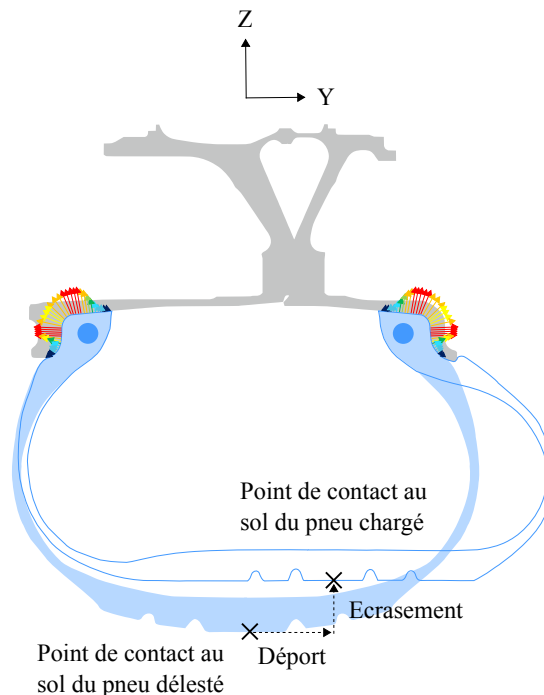


FIGURE 1.10 – Écrasement et déport du pneumatique sous charges

Afin d'obtenir un système ayant autant d'équations que d'inconnues, une dernière grandeur doit être introduite. Il s'agit d'un coefficient, noté  $\lambda$ , défini comme le rapport entre la résultante axiale  $F_Y$  reprise par chaque demi-roue et celle reprise par chaque flanc du pneumatique (égale à la pression de gonflage multipliée par la surface projetée du pneu)

$$\lambda = \frac{F_Y}{P_{gonf} \times \pi \times (R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \quad (1.1)$$

avec  $P_{gonf}$  la pression de gonflage,  $R_{ext}$  le rayon extérieur du pneu et  $R_{int}$  son rayon intérieur. Ce coefficient intervient lors de la définition de l'équilibre axial du pneumatique et influence donc les coefficients de pondération calculés. Toutefois, sa valeur dépend des caractéristiques du pneumatique et elle est généralement déterminée de manière empirique.

### 1.2.2 Corrélation essai-calcul

L'analyse en fatigue de la roue permet d'obtenir un premier aperçu de ses zones critiques. Cependant, sa durée de vie ne peut être validée que par des essais d'endurance qui peuvent durer entre 5 et 6 mois, même avec des cas de charge sévérés. Il convient donc de s'assurer en amont que le calcul est représentatif de la réalité et que les zones critiques ont bien été identifiées. Pour ce faire, les résultats de calcul sont comparés avec des essais dits de *contraintes tournantes*, bien plus rapides à réaliser que les précédents (*i.e.*, quelques jours). Ils consistent à faire rouler la roue sur un volant d'inertie pour différents cas de charge et à enregistrer les déformations mesurées par des jauges d'extensométrie pour quelques tours de roue. On peut alors comparer, pour une jauge donnée, les cycles de déformation mesurés et calculés (Figure 1.11).

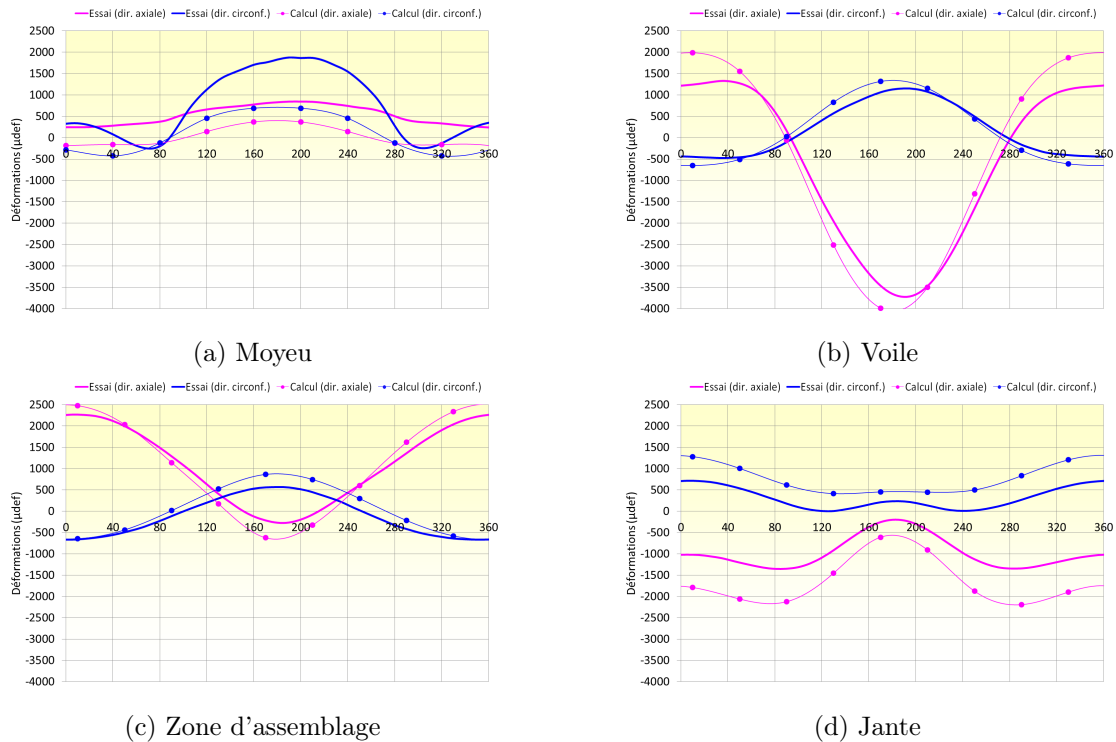


FIGURE 1.11 – Évolution des déformations mesurées et calculées pour un tour de roue dans différentes zones d'une roue principale pour un cas de ripé (source : Safran)

La comparaison des cycles de déformation permet de mieux rendre compte de la capacité du calcul à représenter le comportement en service de la roue plutôt qu'une comparaison basée sur les marges en contrainte et les endommagements, qui ne repose que sur les extrema du cycle. La Figure 1.11 illustre ainsi les déformations mesurées et calculées pour un tour de roue dans différentes zones d'une roue principale pour un cas de ripé. Ces résultats sont globalement représentatifs des corrélations essai-calcul obtenues par *Safran Landing Systems* lorsque les données fournies par les pneumaticiens sont *a priori* proches des chargements réellement appliqués sur la roue lors de l'essai.

Les résultats obtenus au niveau du moyeu montrent des écarts importants entre le calcul et l'essai qui proviennent principalement de la manière dont est introduit le frettage des cuvettes de roulement dans le calcul et des conditions aux limites appliquées sur l'essieu. Ils ne sont toutefois pas critiques car cette zone n'est pas dimensionnée par la fatigue. Au niveau du voile et de la zone d'assemblage, la corrélation est plutôt satisfaisante : le comportement de la roue est bien représenté par calcul et les écarts en moyenne et en amplitude sont faibles, indiquant que la durée de vie en fatigue prédite sera relativement fiable. On note toutefois que des écarts plus marqués peuvent exister sur les cas de ripés les plus forts et en fonction de la dissymétrie de la roue étudiée. Les résultats obtenus dans la jante montrent en revanche des écarts élevés dans la plupart des cas, et essentiellement en moyenne, entre l'essai et le calcul. Ces écarts ne sont pas négligeables et sont d'autant plus critiques que la zone de la jante située au niveau de l'appui du pneumatique est une zone « explosive » dans laquelle la propagation d'un défaut peut conduire à la ruine de la structure. La précision de l'état de contraintes dans cette zone est donc cruciale et nécessite d'être maîtrisée. Cependant, celui-ci est directement influencé par la répartition locale des efforts à l'interface pneu-jante fournie par les pneumaticiens.

### 1.2.3 Problématique

La méthodologie de calcul développée par *Safran Landing Systems* pour prédire le comportement mécanique de la roue lors des cas de roulage **dépend au premier ordre des données d'entrée non vérifiables fournies par les pneumaticiens** et des heuristiques nécessaires à leur utilisation. Les corrélations essai-calcul obtenues sont généralement satisfaisantes pour les zones situées en dessous de l'assemblage boulonné mais perfectibles dans la jante, bien qu'il existe des exceptions. A partir d'un même modèle par éléments finis, il est ainsi possible que la corrélation essai-calcul soit bonne pour un pneumatique et mauvaise pour un autre en fonction des données utilisées pour décrire le chargement à l'interface pneu-jante. Ce point est particulièrement problématique pour *Safran Landing Systems*, d'autant plus que l'information sur l'erreur entre le calcul et l'essai intervient tardivement dans le processus de développement de la roue. Par conséquent, les zones à risques pour une conception de roue donnée ne sont pas toujours bien identifiées. Par ailleurs, on note que les pneumaticiens ne sont pas systématiquement en mesure de fournir des données en raison des difficultés liées à la convergence de leurs modèles numériques.

Le processus actuel repose donc à la fois sur les hypothèses des pneumaticiens, qui ignorent les déformations de la roue, et sur celles du concepteur de roue qui ne maîtrise pas le comportement en déformation fortement non-linéaire du pneumatique. *Safran Landing Systems* souhaite donc améliorer sa compréhension et sa maîtrise concernant l'interaction entre le pneumatique et la roue afin d'obtenir des simulations numériques plus prédictives. L'objectif est de mieux modéliser les chargements appliqués à l'interface entre ces deux composants en cherchant notamment à les identifier de manière autonome. L'impact de la rigidité de la roue et de sa dissymétrie pourra alors être finement étudié.

### 1.3 Axes de recherche sur l'interaction pneu-roue

La connaissance des conditions aux limites appliquées à une structure est cruciale pour pouvoir réaliser des simulations numériques de son comportement (Nakagiri et Suzuki, 1999 ; Turco, 1999 ; Chock et Kapania, 2003 ; Turco, 2005 ; Amiot *et al.*, 2007 ; Xu *et al.*, 2010 ; Martini *et al.*, 2012 ; Nakamura *et al.*, 2012). Dans les paragraphes suivants, les axes de recherche proposés dans la littérature pour identifier les chargements appliqués à l'interface pneu-jante sont présentés. Les approches expérimentales sont tout d'abord abordées puis on s'intéresse aux méthodes d'identification des chargements recherchés. Les aspects concernant la modélisation du pneumatique sont finalement étudiés.

#### 1.3.1 Approches expérimentales

Plusieurs études ont été menées afin de déterminer expérimentalement les chargements appliqués à l'interface pneu-jante. Zaharov (1957), Balabin et Zubarev (1964) et Walter et Kiminecz (1975) ont utilisé des jauges d'extensométrie et des transducteurs magnétostrictifs miniatures pour mesurer directement la distribution de la pression de contact normale au profil de jante pour des roues d'automobiles. Des opérations particulières (*i.e.*, soudage et perçage) étaient néanmoins nécessaires pour fixer les différents capteurs sur la jante. Par conséquent, ces moyens de mesure étaient très intrusifs et pouvaient modifier le comportement de l'interface pneu-jante. Sherwood *et al.* (1995a) ont tenté de minimiser l'intrusion dans la zone de contact pneu-jante d'une roue d'aéronef en utilisant des films piézoélectriques flexibles et de faible épaisseur. Avec les nouvelles technologies disponibles de nos jours, Wan *et al.* (2017) ont également mesuré la distribution de la pression à l'interface pneu-jante grâce au système I-Scan de la marque Tekscan<sup>TM</sup> (Figure 1.12).

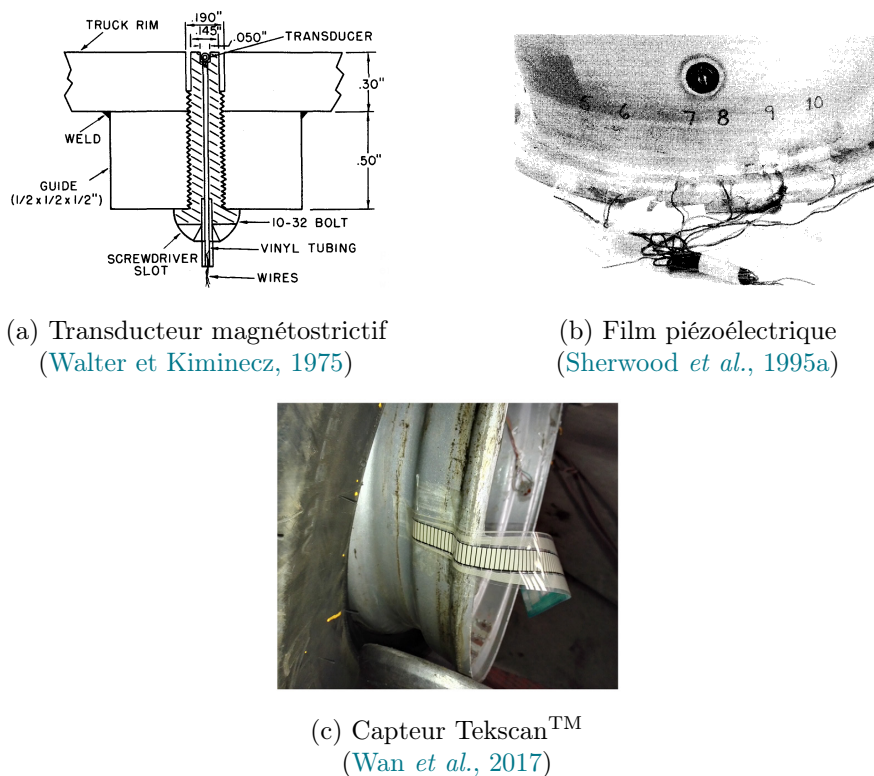


FIGURE 1.12 – Moyens de mesure des chargements à l'interface pneu-jante

Cependant, ces instrumentations fournissent généralement des résultats peu précis en raison de leur étalonnage difficile. La forme des champs de pression mesurés est relativement fiable tandis que la précision sur les amplitudes obtenues dépend fortement de l'étalonnage réalisé. De plus, ces moyens de mesure sont particulièrement fragiles et peuvent être endommagés par les efforts de cisaillement rencontrés dans la zone de contact durant le montage du pneumatique sur la roue et pendant les différents cas de chargement.

### 1.3.2 Méthodes inverses

D'autres études se sont basées sur des mesures essentiellement non-intrusives, réalisées en dehors de la zone d'interface pneu-jante, pour identifier les chargements recherchés par méthode inverse. [Spencer et al. \(1993\)](#), [Kirkner et al. \(1993\)](#), [Schudt et al. \(1994\)](#), [Kandarpa et al. \(1994\)](#) et [Spencer et al. \(1995\)](#) ont proposé une méthode permettant de déterminer la distribution de la pression de contact à l'interface pneu-jante pour une roue d'aéronef à partir d'un certain nombre de mesures de déformation sur la roue obtenues par des jauges d'extensométrie. Pour ce faire, le chargement était paramétré par une série de Fourier à deux dimensions dans un modèle de calcul par éléments finis de la roue et la minimisation de l'écart entre les déformations mesurées et calculées aux positions des jauges permettait de déterminer les paramètres recherchés grâce à une méthode des moindres carrés. Cette méthodologie a été appliquée pour des cas de gonflage et de roulage en ligne droite. Les résultats obtenus étaient prometteurs et permettaient même de distinguer des pneumatiques de technologies différentes (Figure 1.13). Les auteurs ont également étudié l'influence du nombre et de la position des jauges utilisées.

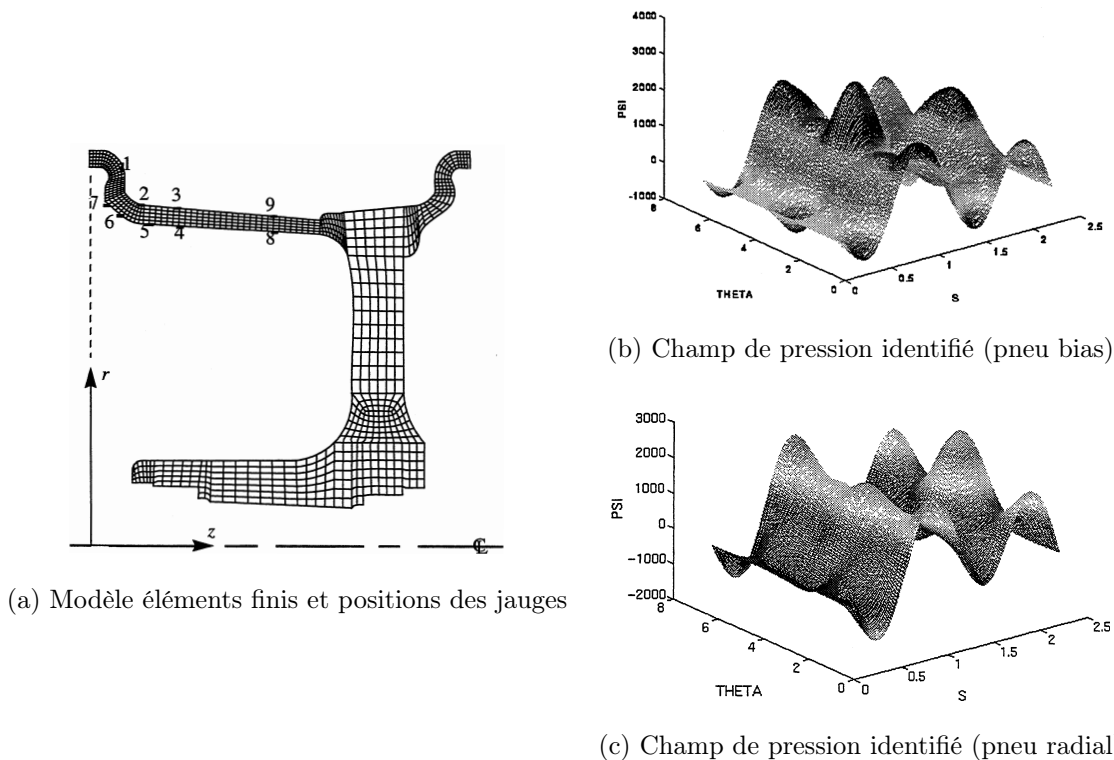


FIGURE 1.13 – Identification de la distribution de la pression de contact à l'interface pneu-jante à partir de mesures par jauges d'extensométrie ([Spencer et al., 1995](#))

Des travaux similaires ont été menés dans le domaine de l'automobile par [Rupp et al. \(2002\)](#) et [Heinrietz et al. \(2003\)](#). Le chargement à l'interface pneu-jante sur chaque demi-roue était alors représenté par des efforts nodaux discrétisés en deux points suivant le profil de jante, pour introduire respectivement les efforts radiaux et axiaux, et environ 70 points dans la direction circonférentielle. Une procédure d'identification inverse était ensuite utilisée pour déterminer les efforts nodaux recherchés à partir de mesures de déformation sur la roue judicieusement choisies (Figure 1.14).

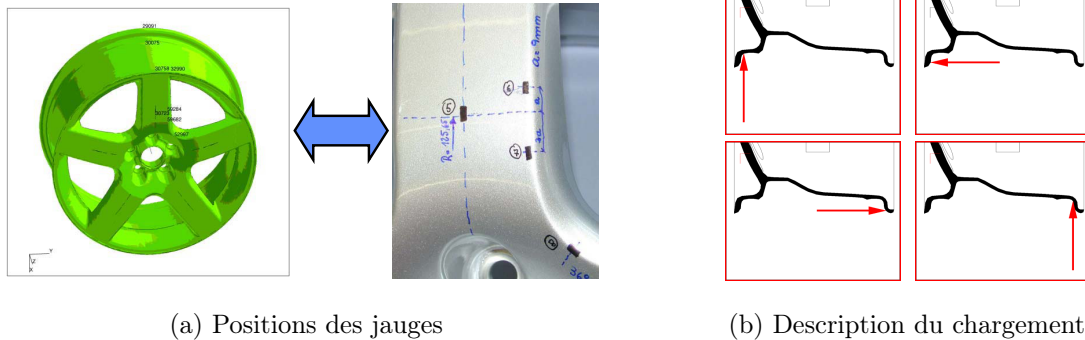


FIGURE 1.14 – Identification d'efforts nodaux à l'interface pneu-jante à partir de mesures par jauges d'extensométrie ([Heinrietz et al., 2003](#))

[Sherwood et al. \(1995a\)](#) ont quant à eux effectué des mesures par interférométrie holographique afin de déterminer les déplacements axiaux au niveau des bourrelets de la jante lors d'un cas de gonflage (Figure 1.15). Ces déplacements ont ensuite été imposés comme conditions aux limites dans un modèle de calcul par éléments finis de la roue. Après une première résolution, les déplacements associés aux nœuds de l'interface pneu-jante ont été extraits puis imposés dans un nouveau calcul afin d'obtenir les efforts de réaction correspondants ([Sherwood et al., 1995b](#)). Ces efforts nodaux ont alors été convertis en champs de pression et comparés à ceux mesurés par les films piézoélectriques (cf. § 1.3.1). Les deux méthodes ont montré des tendances similaires concernant la forme des champs de pression mais les amplitudes obtenues dans les deux cas étaient très différentes et parfois peu réalistes. Le fait que les déplacements radiaux aient été négligés lors de la mesure par interférométrie holographique pourrait permettre d'expliquer en partie ces écarts.

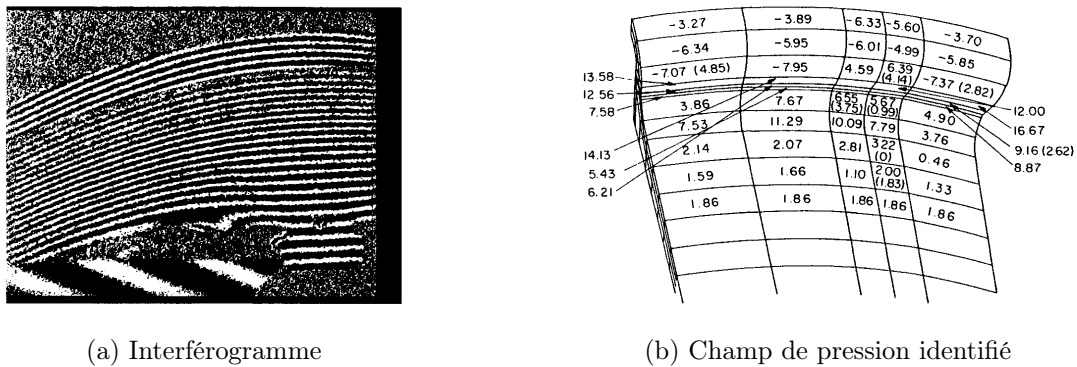


FIGURE 1.15 – Identification de la distribution de la pression de contact à l'interface pneu-jante à partir de mesures par interférométrie holographique ([Sherwood et al., 1995a](#))

### 1.3.3 Modélisation du pneumatique

De nombreux travaux se sont également focalisés sur la modélisation du pneumatique afin de déterminer les chargements appliqués à l'interface pneu-jante. [Biderman et al. \(1969\)](#) et [Curtiss \(1973\)](#) ont proposé des expressions analytiques permettant de calculer les efforts globaux appliqués sur la jante dans les directions radiale et axiale lors du gonflage du pneumatique (Figure 1.16). L'effort axial s'exprime simplement en fonction de la pression de gonflage et des dimensions globales du pneu tandis que l'expression de l'effort radial est plus complexe et dépend de nombreux paramètres. Les dimensions de la zone basse du pneu et la valeur de son interférence avec le profil de jante, permettant d'assurer un ajustement serré entre les deux composants, doivent en effet être connues. Le module de compression du matériau situé sous la tringle et la tension de cette dernière doivent également être déterminés. Par conséquent, cette formule est peu utilisable par le manufacturier de roue.

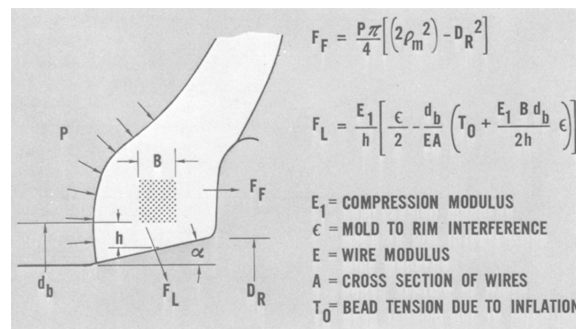


FIGURE 1.16 – Expressions analytiques des efforts radial et axial appliqués sur la jante lors d'un cas de gonflage ([Curtiss, 1973](#))

Pour des cas de roulage en ligne droite, [Stearns \(2000\)](#) a proposé une formule simplifiée pour représenter la variation de la composante radiale de la pression de contact pneu-jante en fonction de l'azimut sur une roue d'automobile. A partir de la détermination de l'aire de contact pneu-piste pour une charge verticale donnée, la répartition angulaire de la pression était paramétrée par une fonction cosinus associée à une amplitude et à un angle limite (Figure 1.17). Cette formule a également été utilisée par [Nguyen et al. \(2012\)](#) pour étudier le comportement d'une roue avant d'aéronef lors d'un atterrissage. Toutefois, la composante axiale de la pression de contact était considérée comme constante. Les résultats obtenus étaient peu précis et n'ont pas été comparés à des mesures expérimentales.

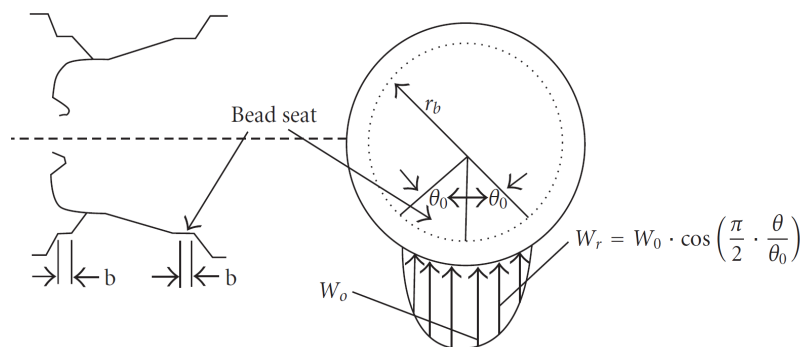


FIGURE 1.17 – Approximation de la répartition angulaire de la composante radiale de la pression de contact pneu-jante pour un cas de ligne droite ([Stearns, 2000](#))

Pour obtenir des champs de pression de contact plus détaillés à l'interface pneu-jante, d'autres auteurs se sont intéressés à la modélisation du pneumatique par éléments finis. [Chen \(1982\)](#) a ainsi tenté de prédire le chargement appliqué par un pneu bias sur une roue d'aéronef pour des cas de gonflage et de ligne droite. Le pneu était modélisé de manière simplifiée, tout en intégrant les propriétés mécaniques de ses principaux matériaux constitutifs, tandis que la roue était considérée comme un solide indéformable. Les résultats obtenus étaient exclusivement numériques et n'ont pas été comparés avec des mesures. Dans la même lignée, [Tseng \*et al.\* \(1989\)](#), [Lee et Talug \(2001\)](#) et [Lee \(2002\)](#) ont étudié l'influence des dimensions de la zone basse du pneu sur les champs de pression de contact (Figure 1.18). Ces derniers se sont révélés particulièrement sensibles au profil de l'interférence entre le pneu et la jante. Dans la même lignée, on peut également citer les travaux de [Jeusette et Theves \(1992\)](#), [Pelle \(1994\)](#), [Chiang \*et al.\* \(2000\)](#) et [Lee \(2006\)](#).

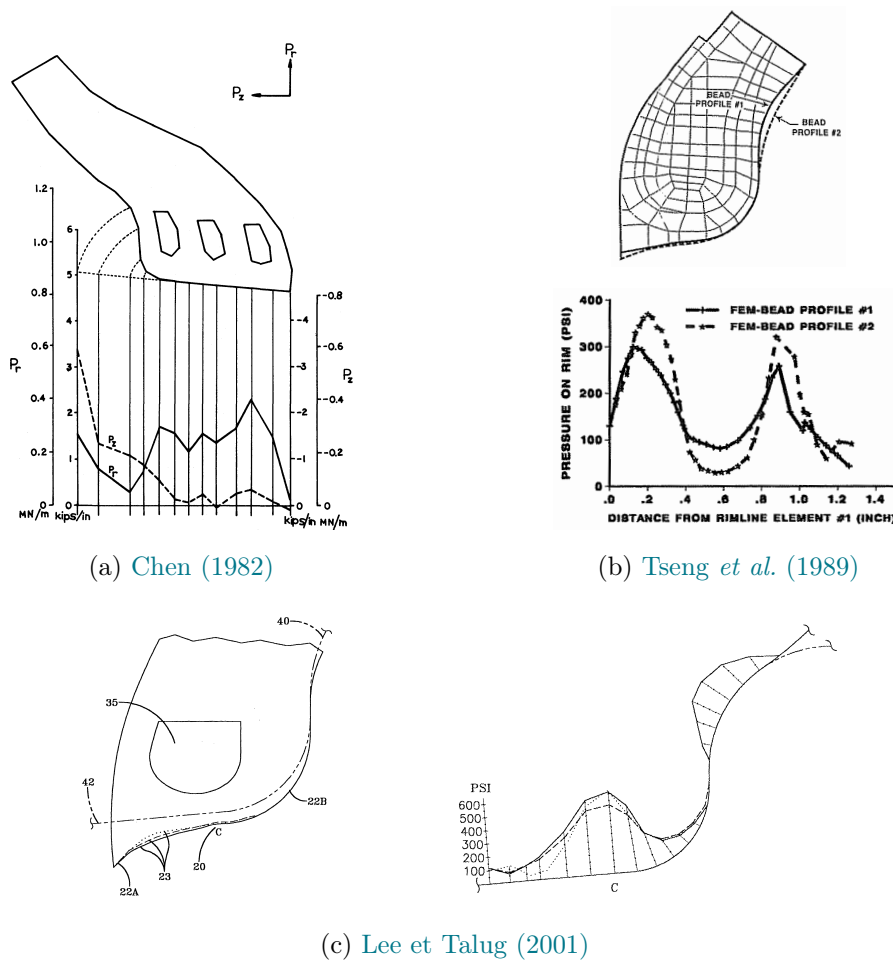
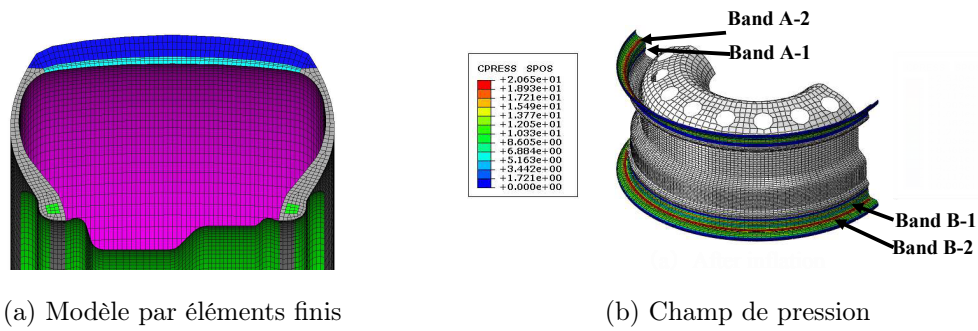
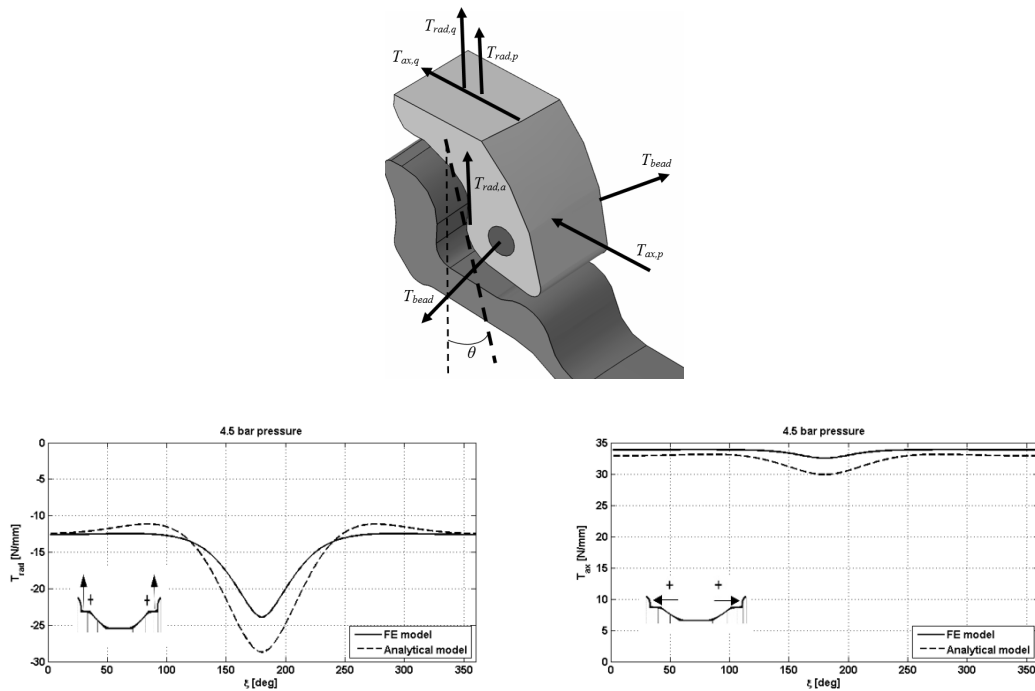


FIGURE 1.18 – Distributions de la pression de contact à l'interface pneu-jante pour des cas de gonflage obtenues à partir de modélisations par éléments finis du pneumatique

Plus récemment, [Meng \*et al.\* \(2012\)](#) ont modélisé l'ensemble pneu-roue par éléments finis en prenant en compte les propriétés mécaniques des deux composants. Des calculs pour des cas de gonflage et de chargement vertical ont été conduits puis les résultats ont été utilisés afin de calibrer des fonctions de forme permettant de représenter les champs de pression de contact à l'interface pneu-jante (Figure 1.19). [Wan \*et al.\* \(2016\)](#) ont également modélisé l'ensemble pneu-roue pour simuler un essai biaxial sur une roue d'automobile.


 FIGURE 1.19 – Modélisation par éléments finis de l'ensemble pneu-roue (Meng *et al.*, 2012)

Par ailleurs, Ballo *et al.* (2017) ont développé un modèle semi-analytique de pneumatique permettant de déterminer les répartitions angulaires des efforts radiaux et axiaux appliqués à l'interface pneu-jante d'une roue d'automobile lors d'un chargement vertical (voir également Ballo *et al.*, 2015). Ce modèle dépend de plusieurs paramètres structuraux associés au pneumatique qui doivent être identifiés expérimentalement. La comparaison entre les résultats obtenus et ceux issus d'un calcul par éléments finis du pneu, en considérant une jante rigide, ont montré une corrélation relativement satisfaisante (Figure 1.20). Cependant, la discrétisation des efforts suivant le profil de jante est à nouveau limitée à deux points, comme dans les travaux de Heinrietz *et al.* (2003). De plus, l'influence de l'interférence entre le profil de jante et la zone basse du pneu semble avoir été négligée. Des calculs par éléments finis de la roue ont néanmoins été réalisés en imposant les chargements déterminés et les déformations calculées dans différentes zones de la roue ont montré une bonne corrélation avec celles mesurées expérimentalement (Ballo *et al.*, 2018).


 FIGURE 1.20 – Approximation de la répartition angulaire des efforts radiaux et axiaux à l'interface pneu-jante pour un cas de ligne droite (Ballo *et al.*, 2018)

Toutefois, on note que toutes ces études nécessitent une connaissance approfondie de la structure du pneumatique et des propriétés des matériaux qui le constituent dont ne dispose pas le manufacturier de roue. De plus, l'influence des chargements appliqués par le pneu sur la roue est souvent évaluée dans des zones éloignées de l'interface pneu-jante et peu de travaux s'intéressent à l'état de contraintes dans le voisinage de la zone d'application de ces conditions aux limites. Enfin, les roues d'automobile et d'aéronef ont des architectures très différentes et les chargements auxquels elles sont soumises ne sont pas du même ordre de grandeur. Par conséquent, la simulation numérique de leur comportement mécanique en service ne requiert probablement pas la même précision sur les chargements appliqués à l'interface pneu-jante.

#### 1.4 Démarche choisie

L'état de l'art présenté précédemment a permis de mettre en évidence les principaux axes de recherche proposés dans la littérature concernant la détermination des chargements appliqués par un pneumatique sur une roue d'automobile ou d'aéronef. Des approches expérimentales basées sur une instrumentation de la zone d'interface pneu-jante ont été évoquées. Le caractère intrusif de l'instrumentation, la fragilité des capteurs utilisés et leur étalonnage difficile posent néanmoins des questions sur la fiabilité de ce type d'approche. D'autres études se sont concentrées sur la modélisation du pneumatique, en considérant généralement une roue rigide. Toutefois, les données requises pour mener à bien cette modélisation sont souvent inconnues du manufacturier de roue. Enfin, des méthodes d'identification des chargements recherchés, basées sur des mesures éloignées de la zone d'interface pneu-jante, se sont révélées prometteuses. La démarche choisie dans le cadre de cette thèse s'inscrit dans la lignée de ce dernier axe de recherche.

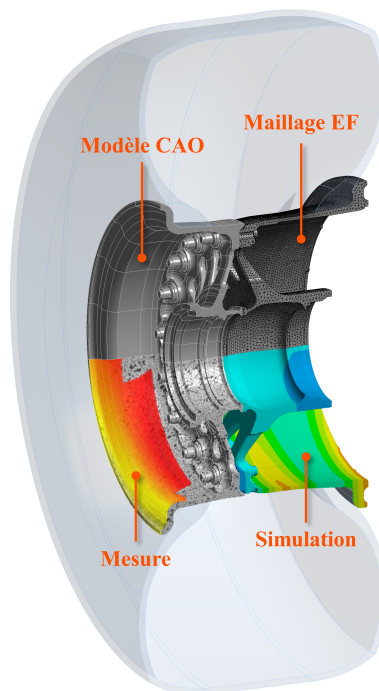


FIGURE 1.21 – Illustration de la démarche choisie

On propose de déterminer les chargements appliqués par un pneumatique sur une roue d'aéronef en réalisant des identifications de ces chargements à partir de la mesure de la déformée de la roue pour les différents cas de charge envisagés (*i.e.*, gonflage, ligne droite et ripés). Les tâches sous-jacentes à cette procédure, illustrée sur la Figure 1.21, consistent notamment à définir une paramétrisation objective des chargements à l'interface pneu-jante, aussi robuste et compacte que possible, et à choisir des mesures appropriées pour calibrer les paramètres recherchés. Un algorithme de recalage de modèle par éléments finis (Kavanagh et Clough, 1971) sera ensuite utilisé pour résoudre le problème inverse. Une première preuve de faisabilité de l'approche choisie a été démontrée lors du post-doctorat de Gras (2015a). L'objectif est de déterminer les champs de pression de contact à l'interface pneu-jante, indépendamment des pneumaticiens, à partir de mesures faites lors d'essais en nombre limité, afin de compléter ou, à terme, de remplacer l'approche actuellement utilisée par *Safran Landing Systems*.

## Chapitre 2

# Données expérimentales

*Ce chapitre présente les données expérimentales qui seront utilisées pour réaliser des identifications de chargements appliqués à l'interface pneu-jante. Ces données ont été obtenues lors du post-doctorat de Renaud Gras réalisé entre janvier 2014 et décembre 2015. Le dispositif expérimental mis en œuvre à l'époque et les moyens de mesure associés (i.e., stéréocorrélation d'images numériques et jauges d'extensométrie) sont tout d'abord présentés. Les essais réalisés sont ensuite précisés puis les mesures de champs de déplacement et de déformations obtenues sont détaillées.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>26</b>
2.2.1	Montage	26
2.2.2	Moyens de mesure	27
<b>2.3</b>	<b>Réalisation des essais</b>	<b>32</b>
2.3.1	Histoire de chargement	32
2.3.2	Protocole	32
<b>2.4</b>	<b>Résultats obtenus</b>	<b>33</b>
2.4.1	Mesures de champs de déplacement	33
2.4.2	Mesures de déformations ponctuelles	41
<b>2.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>42</b>

---

## 2.1 Introduction

La démarche choisie pour identifier les chargements appliqués à l'interface pneu-jante consiste à réaliser des mesures de la déformée de la roue lors de différents cas de charge et à déterminer les informations recherchées par méthode inverse. Cette démarche non-intrusive nécessite néanmoins de disposer d'un modèle de calcul par éléments finis représentatif des conditions de l'essai et de mesures fines sur la roue. Entre janvier 2014 et décembre 2015, un post-doctorat a été lancé en partenariat avec le Laboratoire de Mécanique et Technologie afin d'évaluer la faisabilité de cette approche en utilisant des mesures par corrélation d'images numériques (Gras, 2015a). Cette technique permet en effet de disposer de mesures de champs de déplacement sur de larges zones et donc d'obtenir un nombre important d'informations cinématiques adaptées à la démarche envisagée (Hild et Roux, 2006a). Toutefois, sa mise en œuvre dans un environnement industriel n'est pas aisée en raison des contraintes liées à la complexité de la structure étudiée et à la disponibilité des machines d'essais. Les travaux de post-doctorat de Gras (2015a) ont ainsi permis de mettre en place une instrumentation par stéréocorrélation d'images numériques en milieu industriel, de réaliser la campagne d'essais définie par *Safran Landing Systems* et de générer les données expérimentales utilisées dans le cadre de cette thèse. On propose donc de détailler dans ce chapitre les développements expérimentaux effectués.

## 2.2 Dispositif expérimental

### 2.2.1 Montage

Une **roue principale** d'un avion de ligne long-courrier et un **pneumatique radial** sont sélectionnés pour mener l'étude. Les diamètres extérieurs de la jante et du pneu sont respectivement égaux à 558,8 et 1270 mm. Les cas de charge étudiés lors de ces travaux étant associés au roulage de l'aéronef dans différentes configurations représentatives de sa vie en service (*i.e.*, gonflage, ligne droite et ripés), des essais de *contraintes tournantes* sur une machine de roulage, permettant de mesurer la déformation de la roue pour une révolution complète, pourraient être adaptés à l'identification des chargements appliqués à l'interface pneu-jante. Cependant, on souhaite instrumenter l'essai par stéréocorrélation d'images numériques afin de disposer de mesures riches. Par conséquent, il a été choisi de réaliser des **essais sur une presse statique** en appliquant des charges caractéristiques des cas de roulage pour faciliter la mise en œuvre de cette instrumentation (Figure 2.1).

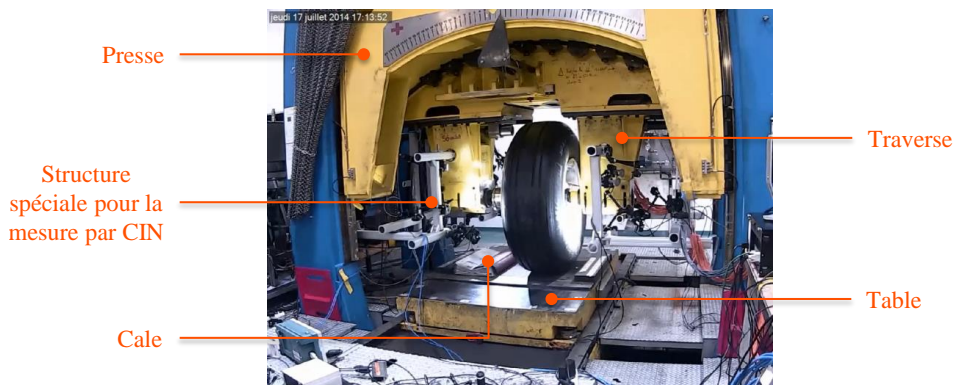


FIGURE 2.1 – Montage expérimental (Gras, 2015a)

La presse statique utilisée permet d'appliquer des charges allant jusqu'à 150000 daN dans la direction verticale et 80000 daN dans la direction latérale. La charge verticale est appliquée par un vérin permettant de déplacer la traverse de la presse tandis que la charge latérale est générée grâce au déplacement de la table (cf. Figure 2.1) suivant l'axe de l'essieu et au coefficient de frottement statique entre le pneu et cette dernière (*i.e.*, il n'y a pas d'angle de dérive comme sur une machine de roulage). Lorsque l'effort latéral considéré est impossible à générer en raison du glissement relatif entre le pneu et la table, une cale peut y être fixée pour appliquer la charge directement sur le pneu. Par ailleurs, l'essieu servant à assurer la liaison entre la roue et la traverse de la presse est monté en fourche, par opposition au montage en porte-à-faux réalisé sur les machines de roulage. La partie supérieure de la presse peut également être inclinée pour simuler le carrossage de la roue.

**Remarque 2** Une structure modulable a été spécialement conçue pour fixer les moyens imageurs sur la traverse de la presse et limiter le mouvement relatif de corps rigide entre ces derniers et la roue lors des essais. Des profils d'aluminium servant généralement à la conception de bancs optiques ont été utilisés à cette fin. Ils permettent d'assurer une rigidité suffisante du montage par rapport aux déplacements de la traverse tout en ayant un poids raisonnable.

### 2.2.2 Moyens de mesure

Pour mesurer la déformation de la roue lors des essais, deux moyens de mesure sont utilisés. Le comportement de la roue étant supposé symétrique par rapport au plan  $Y-Z$ , une moitié de celle-ci est observée au niveau des bourrelets et du fond de jante, simultanément des deux côtés (*i.e.*, intérieur et extérieur), par **stéréovision** tandis que l'autre moitié est instrumentée par **jauges d'extensométrie** (Figure 2.2).

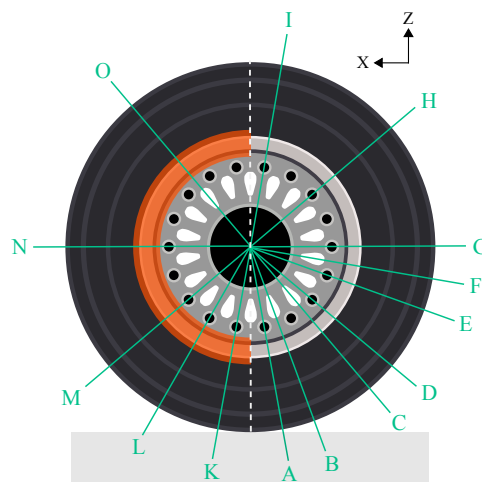


FIGURE 2.2 – Zones de la roue observées par stéréovision (orange) et sections instrumentées par jauges d'extensométrie (vert)

L'hypothèse de symétrie est discutable car on ne peut pas garantir que la charge soit parfaitement appliquée dans l'axe de symétrie de la roue. Cependant, compte tenu du nombre d'imageurs disponibles, une observation de la roue sur  $360^\circ$  nécessiterait de répéter deux fois chaque essai pour obtenir des mesures sur chaque demi-roue. Cette procédure serait très sensible au repositionnement des imageurs, à la synchronisation des mesures ainsi qu'à la répétabilité des essais et n'a donc pas été retenue.

### Stéréocorrélation d'images numériques

Pour identifier finement les chargements à l'interface pneu-jante, on souhaite obtenir un maximum d'information sur la déformée de la roue au voisinage de la zone d'application de ces conditions aux limites. La stéréocorrélation est une technique de mesure non-intrusive particulièrement adaptée à cette problématique (Sutton *et al.*, 2009). En combinant la stéréovision (*i.e.*, technique de reconstruction 3D par triangulation) et la corrélation d'images numériques (*i.e.*, technique de suivi de mouchetis dans une séquence d'images), elle permet de reconstruire la forme d'un objet de géométrie quelconque et d'accéder aux champs de déplacement 3D à sa surface lors d'un chargement mécanique (Sutton *et al.*, 2009 ; Grédiac et Hild, 2011). Le dialogue entre la modélisation et l'expérimentation est donc facilité grâce à la richesse de l'information cinématique obtenue. Dans les paragraphes suivants, la mise en œuvre pratique de cette méthode pour les essais étudiés est détaillée. Les aspects théoriques associés seront discutés au § 2.4.1.

Afin d'observer les bourrelets et le fond de jante de la roue lors des essais, cinq systèmes de stéréovision (*i.e.*, quatre caméras et six appareils photos) sont positionnés sur la structure modulable reliée à la traverse de la presse. Toutefois, la complexité du banc d'essai restreint l'accessibilité « visuelle » de la roue et la taille des régions observables. Une étude préliminaire a donc été menée avec le logiciel d'animation Blender™ pour optimiser le positionnement et les réglages des imageurs en amont des essais (Vitse *et al.*, 2019). Le modèle numérique du montage expérimental a tout d'abord été importé dans le logiciel puis les caractéristiques des imageurs ont été définies (*i.e.*, taille du capteur, focale de l'objectif, marque et modèle) afin d'obtenir un rendu réaliste de la scène observée (Figure 2.3).

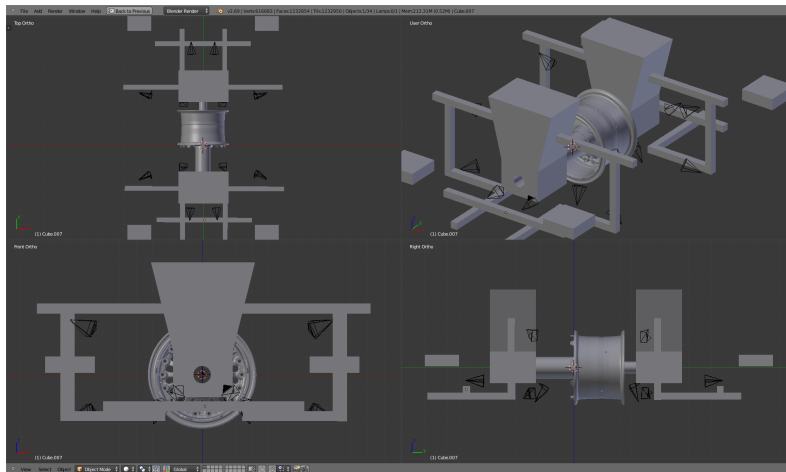


FIGURE 2.3 – Montage expérimental importé dans le logiciel Blender™ (Gras, 2015a)

Les positions des imageurs ont ensuite été optimisées manuellement pour maximiser la surface de la jante vue par ces derniers, tout en s'assurant que celle-ci soit toujours observée par au moins deux d'entre eux. La précision de la mesure par stéréocorrélation dépend en effet du nombre d'imageurs observant le même élément de surface, de l'angle entre les deux imageurs d'un même système, et de l'angle entre la normale à la surface observée et l'axe optique de chaque imageur (Orteu, 2002 ; Sutton *et al.*, 2009). Toutefois, du fait de la géométrie complexe de la roue et de l'environnement de la presse, le positionnement virtuel des imageurs a montré que le fond de jante était parfois observé de manière rasante, ce qui n'est pas optimal pour la mesure. La zone observée a donc dû être limitée au bourrelet pour certains imageurs.

Par ailleurs, le logiciel Blender<sup>TM</sup> permet de réaliser des prises d'images virtuelles (Figure 2.4) et d'appliquer une texture de type « mouchetis » à la surface observée, dont la qualité influence également la mesure par CIN (Sutton *et al.*, 2009 ; Hild et Roux, 2012). Dans le futur, il pourrait être intéressant d'automatiser la procédure d'optimisation du positionnement des imageurs en utilisant des critères tels que la minimisation de l'incertitude de mesure en déplacement et/ou la maximisation de la zone observée, en limitant l'écart entre la normale à la surface et l'axe optique et en conservant un angle non nul entre deux imageurs (Vitse *et al.*, 2019).

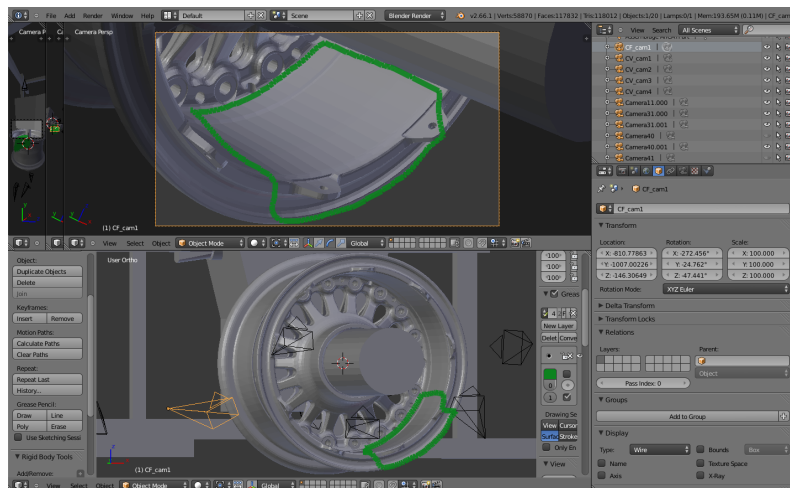


FIGURE 2.4 – Vue de la jante à travers un imageur dans le logiciel Blender<sup>TM</sup> (Gras, 2015a)

Après avoir déterminé leur position finale, les imageurs ont été intégrés au montage expérimental. La demi-roue intérieure (resp. extérieure) est ainsi observée par trois (resp. deux) systèmes de stéréovision. Des éclairages ont alors été ajoutés afin d'obtenir une luminosité uniforme sur la zone observée et des histogrammes de niveaux de gris les plus larges possibles (et non saturés) lors de la prise d'image. La netteté et le temps d'exposition de chaque imageur ont également été finement réglés. Chaque système de stéréovision a finalement dû être étalonné pour transformer les informations exprimées en pixels en informations métriques (Garcia, 2001). La procédure d'étalonnage réalisée dans le cadre de ces travaux sera explicitée au § 2.4.1.

En outre, il a aussi fallu assurer la synchronisation de la prise d'image par les différents imageurs avec l'acquisition des jauges d'extensométrie et l'application des efforts sur l'ensemble pneu-roue, tout en prenant en compte les contraintes liées à l'environnement de l'essai. Deux ordinateurs de commande utilisés pour l'enregistrement des images sur chaque demi-roue ont ainsi été reliés en réseau à un troisième permettant de déclencher manuellement la prise d'image. Un quatrième ordinateur permettait de gérer l'acquisition des jauges et des différents capteurs d'efforts. Pour chaque essai, la montée en charge a été réalisée par paliers de 10% jusqu'à la charge maximale pour faciliter la synchronisation des différents éléments et une image a été prise à chaque palier par l'ensemble des imageurs. Des images de la jante prises par les dix imageurs dans leur configuration finale sont illustrées sur la Figure 2.5.

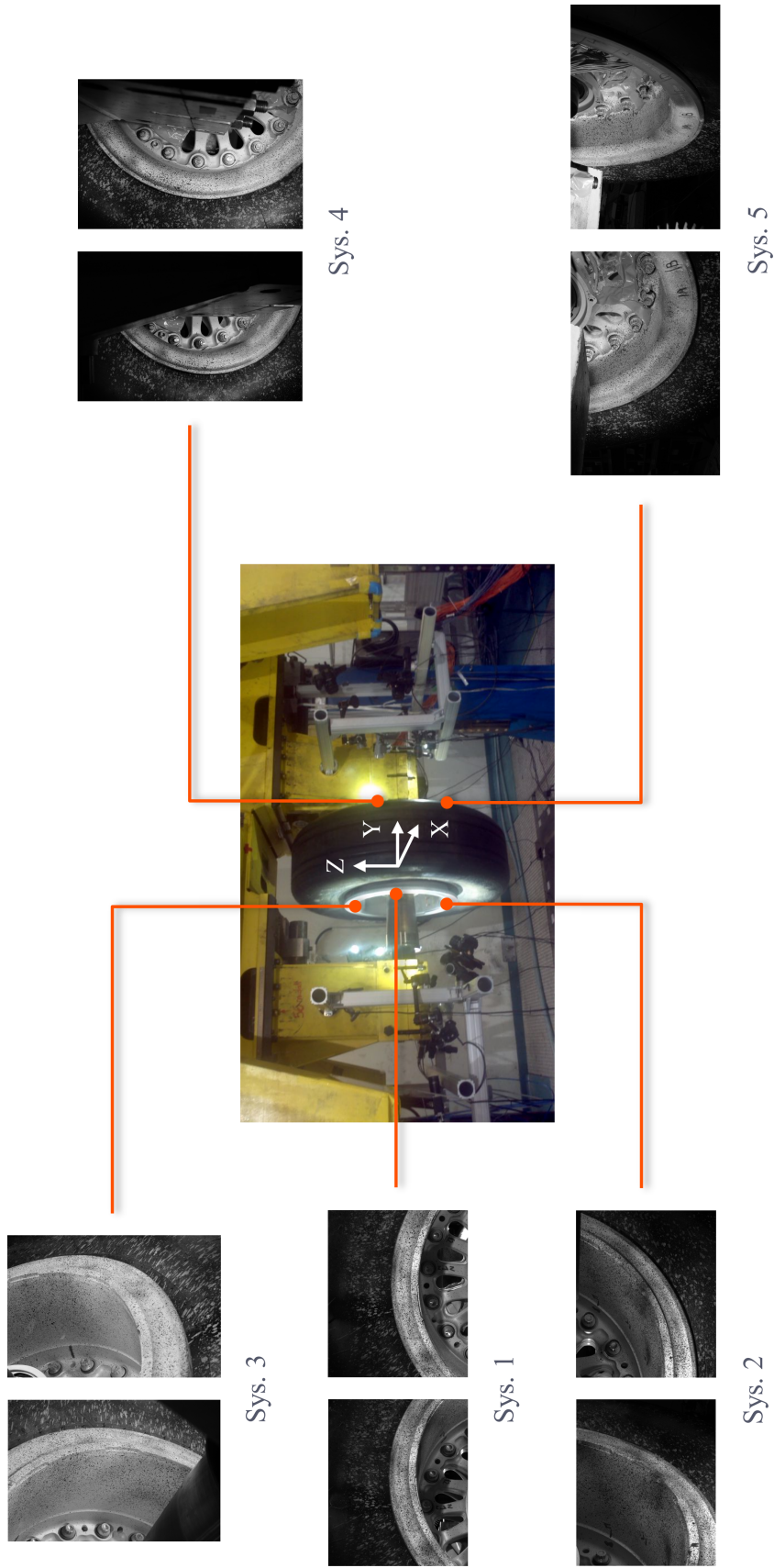


FIGURE 2.5 – Vues de la jante à travers les différents imageurs (Gras, 2015a)

### Jauges d'extensométrie

En complément de la mesure par stéréocorrélation, la roue est instrumentée par 74 jauges d'extensométrie, dont 40 jauges simples et 34 jauges doubles, réparties dans les sections A à O (cf. Figure 2.2). Les jauges sont positionnées au niveau du moyeu, des voiles et de la jante comme illustré sur la Figure 2.6 pour la section A.

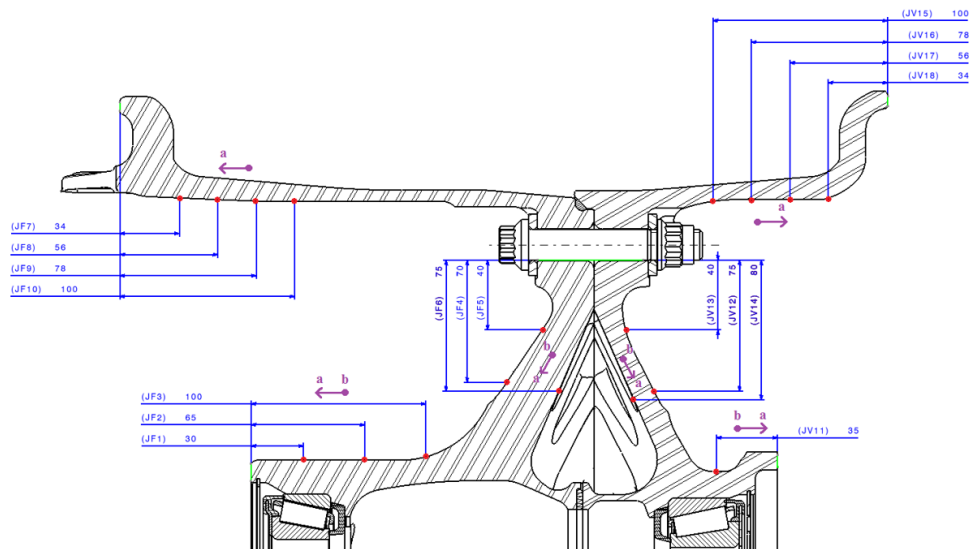


FIGURE 2.6 – Positions des jauges dans la section A de la roue

Leurs positions sont similaires dans les différentes sections. Toutefois, seules les sections A à C (resp. A, D et K) sont instrumentées au niveau de la jante (resp. des voiles), les autres sections étant uniquement instrumentées pour le moyeu. Il convient de noter que **cette instrumentation n'a pas été spécifiquement conçue pour l'identification des chargements appliqués à l'interface pneu-jante** (cf. Chapitre 5). Elle a été déterminée pour répondre à des besoins du bureau d'études concernant d'autres problématiques. Une vue de la roue instrumentée est illustrée sur la Figure 2.7.



FIGURE 2.7 – Illustration des jauges positionnées sur la roue

## 2.3 Réalisation des essais

### 2.3.1 Histoire de chargement

Pour identifier les chargements appliqués à l'interface pneu-jante, on cherche à mesurer la déformée de la roue sous l'effet du gonflage du pneumatique et lors de l'application de charges verticales et latérales représentatives des cas de roulage de l'aéronef. Les cas de charge étudiés lors de la campagne d'essais définie par *Safran Landing Systems* sont décrits dans le Tableau 2.1.

Cas de charge	Pression P (bar)	Charge verticale Z (daN)	Charge latérale Y/Z
Gonflage	14,8	-	-
Ligne droite	15,5	22500	-
Ripé positif 1	15,5	22500	0,3
Ripé négatif 1	15,5	22500	-0,3
Ripé positif 2	15,5	22500	0,53
Ripé négatif 2	15,5	22500	-0,53

TABLEAU 2.1 – Cas de charge étudiés

La charge latérale est exprimée comme un ratio de la charge verticale. Les cas de charge appliqués sur la presse étant généralement proches des cas à *limite élastique* et *ultimes*, le pneumatique est habituellement gonflé à l'eau pour des raisons de sécurité. Dans le cas présent, les charges étant limitées, un gonflage à l'azote a été réalisé pour être représentatif des cas de roulage étudiés et on précise qu'aucun angle de carrossage n'a été appliqué.

### 2.3.2 Protocole

Pour réaliser les différents essais, la première étape consiste à positionner l'ensemble pneu-roue sur la presse statique. Pour ce faire, les demi-roues et le pneumatique sont tout d'abord assemblés. Une machine spéciale est utilisée pour positionner le pneumatique entre les demi-roues intérieure et extérieure puis les boulons permettant de les relier sont serrés afin d'assurer leur liaison. On notera que les cuvettes de roulement sont préalablement frettées en usine dans les demi-roues. L'ensemble pneu-roue est ensuite monté sur un essieu représentatif du train d'atterrissage avant d'être finalement fixé sur la traverse de la presse statique. Le serrage d'un écrou positionné sur l'essieu permet d'assurer le maintien en position de la roue. Au total, cinq jours ont été nécessaires pour monter l'ensemble pneu-roue sur la presse statique, réaliser le câblage des jauges (préalablement collées), installer les imageurs, l'éclairage et les ordinateurs de commande, régler la prise d'image et étalonner les différents imageurs.

L'application des cas de charge définis dans le Tableau 2.1 a ensuite été menée durant les six jours suivants. Les mesures réalisées lors des premiers essais n'ont pas été retenues en raison de difficultés liées aux mouvements des imageurs, à la synchronisation de la prise d'image et au respect des efforts à appliquer. Par ailleurs, une seule application de chaque cas de charge a été effectuée. Il n'est donc pas garanti que la réponse mécanique de la roue soit tout à fait stabilisée d'après l'expérience acquise par *Safran Landing Systems* sur d'autres essais. L'historique de l'application des charges peut également avoir une influence sur la mesure. Ce dernier sera finement étudié au § 4.3.4.

## 2.4 Résultats obtenus

### 2.4.1 Mesures de champs de déplacement

Pour mesurer les champs de déplacement au niveau du fond de jante et des bourrelets de la roue lors des essais, deux codes de stéréocorrélation ont été utilisés : un code commercial, *Correli*<sup>STC</sup>, proposé par la société HOLO3 et un code académique, CAD-Correli, développé ces dernières années au Laboratoire de Mécanique et Technologie (Beaubier *et al.*, 2014; Dufour, 2015a). Avant de détailler les résultats obtenus pour chacun d'entre eux et leurs spécificités, on propose de rappeler le principe général de la (stéréo)corrélation d'images numériques.

#### Principe de la (stéréo)corrélation d'images numériques

La corrélation d'images numériques permet de mesurer des champs de déplacement à la surface d'un objet sous sollicitations mécaniques à partir d'images de ce dernier prises à différents instants du chargement (Sutton *et al.*, 2009; Grédiac et Hild, 2011). Cette technique repose sur l'exploitation d'au moins deux images : l'une dite de référence et l'autre correspondant à un état déformé de la surface observée. Ces images sont représentées respectivement par des fonctions  $f$  et  $g$  associant un niveau de gris à chaque pixel repéré par sa position  $\mathbf{x}$ . En se basant sur le contraste de la surface observée, le principe de la CIN consiste alors à *appairer* les deux images en recherchant les paires de pixels ayant le même niveau de gris. Il s'agit de déterminer le déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  entre les deux images permettant de respecter le *principe de conservation des niveaux de gris*

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (2.1)$$

Cependant, cette égalité ne peut jamais être exactement satisfaite en raison des perturbations liées notamment au bruit d'acquisition du capteur et aux variations de luminosité entre les différentes prises d'image. De plus, le nombre d'inconnues par pixel est en général plus élevé que le nombre d'équations disponibles. Par conséquent, le problème est *mal posé* et la détermination du déplacement recherché ne peut pas être effectuée indépendamment pour chaque pixel. Le problème est donc reformulé de sorte à minimiser l'écart quadratique à la conservation des niveaux de gris sur une région d'intérêt  $\Omega$  de l'image

$$\mathcal{T} = \sum_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))]^2 \quad (2.2)$$

pour laquelle le champ de déplacement est généralement décomposé sur une base cinématique de fonctions de forme arbitraires telles que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i a_i \psi_i(\mathbf{x})$  où  $a_i$  représente l'amplitude associée à la fonction  $\psi_i(\mathbf{x})$ . La non-linéarité de cette fonctionnelle impose de procéder à sa minimisation par un algorithme itératif de type Newton-Raphson (Bruck *et al.*, 1989). En supposant que l'incrément de déplacement entre deux itérations  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(t+1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(t)}(\mathbf{x})$  soit suffisamment faible, un développement de Taylor au premier ordre de la fonction  $g$  permet d'écrire la fonctionnelle  $\mathcal{T}$  sous la forme simplifiée

$$\mathcal{T} = \sum_{\Omega} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}^{(t)}(\mathbf{x})) - \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})]^2 \quad (2.3)$$

et sa minimisation conduit à la résolution d'un système linéaire écrit en termes de corrections des amplitudes associées aux fonctions de formes choisies

$$[M]\{\delta\mathbf{a}\} = \{\mathbf{b}\}^{(t)} \quad (2.4)$$

avec

$$M_{mn} = \sum_{\Omega} (\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{x})) (\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{x})) \quad (2.5)$$

et

$$b_m^{(t)} = \sum_{\Omega} (\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{x})) \left[ f(\mathbf{x}) - g \left( \mathbf{x} + \sum_i a_i^{(t)} \boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}) \right) \right] \quad (2.6)$$

Deux approches de la CIN existent dans la littérature (Hild et Roux, 2012). Apparue dans les années 1980, l'approche *locale* consiste à diviser la région d'intérêt  $\Omega$  de l'image en sous régions indépendantes, appelées imagettes, et à déterminer le déplacement moyen (seule quantité conservée) ainsi que la déformation homogène associés à chacune d'entre elles (Sutton *et al.*, 1983; Chevalier *et al.*, 2001; Hild *et al.*, 2002). La répétition de cette procédure et l'interpolation des estimations de déplacement sur chaque imagette permet d'obtenir le champ de déplacement sur l'ensemble de la région d'intérêt  $\Omega$ . L'approche *globale*, introduite dans les années 2000, consiste quant à elle à résoudre le problème directement sur l'ensemble de la région d'intérêt  $\Omega$  en imposant la continuité du champ de déplacement sur celle-ci (Sun *et al.*, 2005; Besnard *et al.*, 2006). On parle également d'approche *intégrée* lorsqu'on impose *a priori* une admissibilité mécanique aux champs de déplacement mesurés (Hild et Roux, 2006b; Leclerc *et al.*, 2009). Dans la suite du manuscrit, **on se place dans le cadre de l'approche globale de la corrélation d'images numériques.**

Lorsque la mesure est réalisée grâce à des images prises par un unique imageur, seuls des déplacements dans le plan d'un objet plan positionné perpendiculairement à l'axe optique peuvent être déterminés avec précision. La stéréocorrélation permet de s'affranchir de cette limitation et de mesurer des formes et des champs de déplacement 3D en combinant la stéréovision et la corrélation d'images numériques 2D (Sutton *et al.*, 2009; Grédiac et Hild, 2011). La stéréovision permet de déterminer la position d'un point de l'espace 3D par triangulation de ses projections dans des images prises par au moins deux imageurs tandis que la corrélation d'images numériques est utilisée pour l'appariement spatial et temporel des images. On peut alors mesurer l'évolution de la forme 3D de la surface observée (*i.e.*, généralement représentée par un nuage de points pour des approches locales) lors de l'essai et déterminer les champs de déplacement associés, comme illustré sur la Figure 2.8.

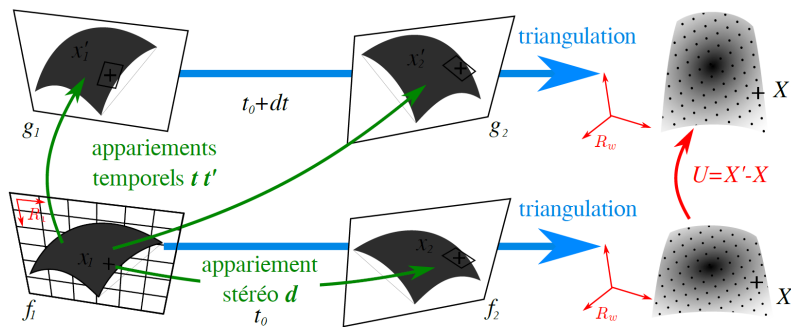


FIGURE 2.8 – Principe de la mesure de champs de déplacement 3D par stéréocorrélation (Pierré, 2016)

Une mesure classique de champs de déplacement par stéréocorrélation est composée de trois étapes principales (Garcia, 2001 ; Dufour, 2015a ; Pierré, 2016). La première (étalonnage) consiste à déterminer les paramètres intrinsèques (*e.g.*, distances focales, coordonnées des points focaux et distorsions des optiques) et extrinsèques (*e.g.*, positions et angles des imageurs) du système de stéréovision utilisé à partir d'images d'un calibre (ou mire) dont la géométrie est parfaitement connue. Ces paramètres permettent de définir le lien existant entre le repère de l'objet observé et les repères des plans images des deux imageurs du système grâce à des matrices de passage. Ensuite, l'objet d'intérêt est positionné dans le champ des imageurs. Une deuxième étape d'appariement spatial des deux plans images par CIN permet alors de mesurer la forme 3D surfacique initiale de l'objet observé. Enfin, une troisième étape consiste en un appariement temporel des images prises à différents instants du chargement afin d'obtenir les champs de déplacement associés.

### Mesures avec Correli<sup>STC</sup>

Les champs de déplacement au niveau du fond de jante et des bourrelets de la roue ont tout d'abord été mesurés avec le logiciel commercial Correli<sup>STC</sup>, proposé par la société HOLO3, lors du cas de gonflage du pneumatique. Pour ce faire, l'étalonnage des imageurs a été préalablement réalisé en suivant la procédure définie par l'éditeur du logiciel. Des mires couvertes d'un damier noir et blanc ont été utilisées et des images de celles-ci, positionnées suivant différentes configurations dans la zone d'observation, ont été prises pour déterminer les paramètres intrinsèques et extrinsèques des imageurs (Figure 2.9).

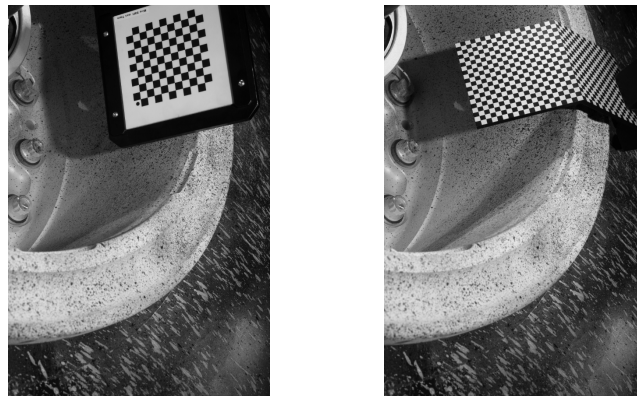


FIGURE 2.9 – Mires utilisées pour l'étalonnage des imageurs

Pour chaque système de stéréovision, la surface observée a ensuite été reconstruite et le champ de déplacement associé a été déterminé pour chaque prise d'image correspondant à un palier de chargement. La Figure 2.10 illustre ainsi les champs de déplacement mesurés pour chaque système à une pression de gonflage donnée. On remarque que les surfaces reconstruites présentent des accidents de forme dans certaines zones qui ne correspondent pas à la surface théorique observée (Figure 2.11). De plus, ces surfaces sont bien plus petites que celles réellement observées par les différents imageurs. Le logiciel ne permet donc pas d'accéder à une information sur l'ensemble du champ de vision disponible. Cette limitation est due au fait que la reconstruction de la surface se base uniquement sur les paramètres d'étalonnage et les images prises par les imageurs. Par conséquent, la reconstruction s'avère difficile lorsque l'angle entre deux imageurs est trop important et/ou lorsque la surface est observée de manière rasante.

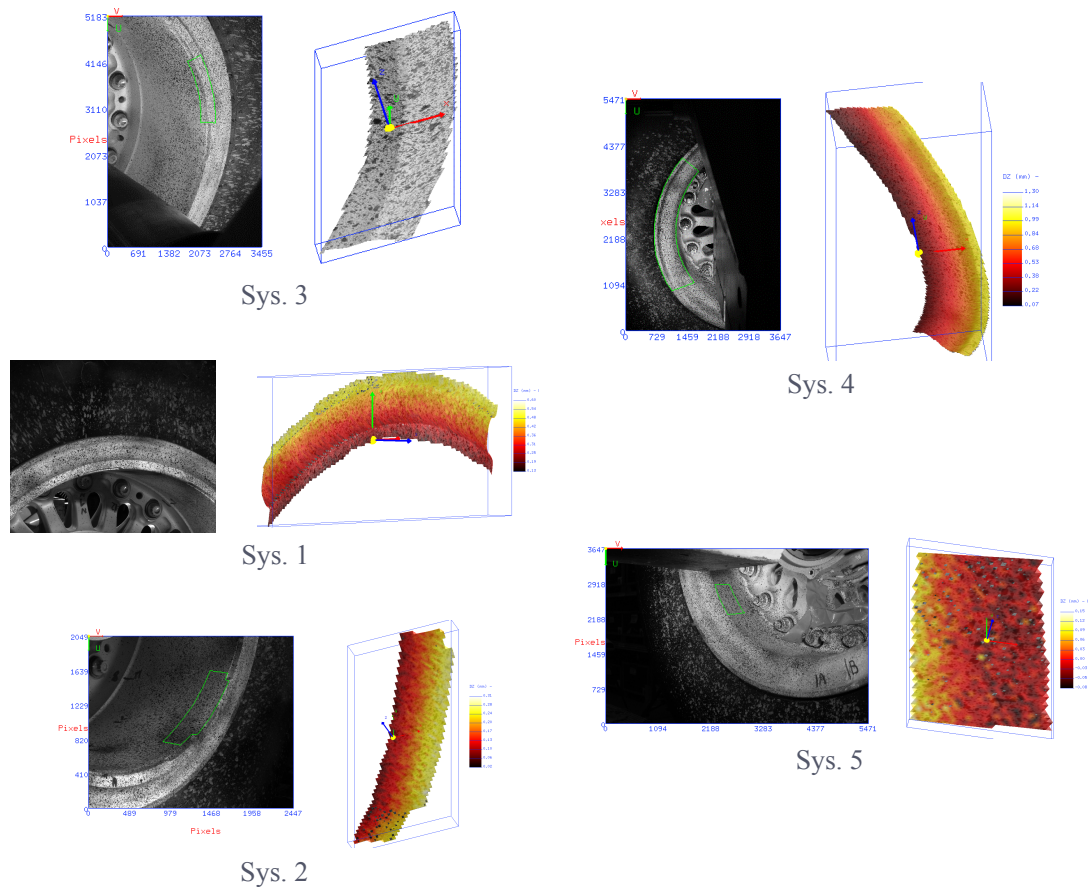


FIGURE 2.10 – Illustration des champs de déplacement mesurés pour chaque système de stéréovision avec le logiciel Correli<sup>STC</sup> (Gras, 2015a)

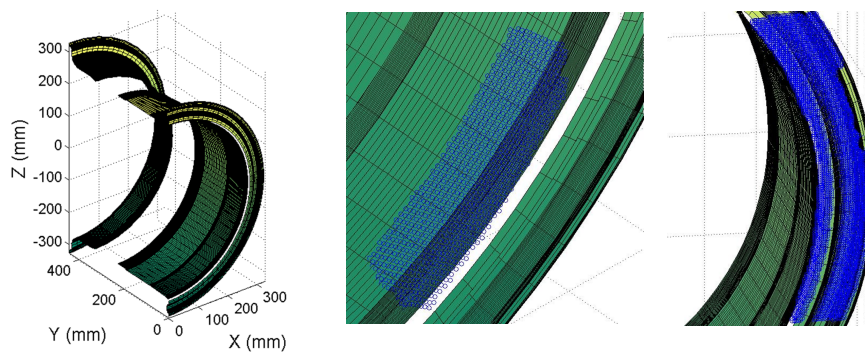


FIGURE 2.11 – Superposition de la surface reconstruite (bleue) et de la surface théorique observée (verte/jaune) issue du modèle CAO de la roue (Gras, 2015a)

Par ailleurs, on note que les champs de déplacement sont initialement obtenus dans un repère lié à la surface reconstruite. Afin de pouvoir mener des identifications des chargements appliqués à l'interface pneu-jante, il est nécessaire d'exprimer ces champs dans le repère global associé au modèle de calcul par éléments finis de la roue. Un changement de repère de la mesure depuis le repère local vers le repère global a donc été réalisé. Toutefois, ce dernier induit une incertitude supplémentaire sur le champ de déplacement mesuré en raison de l'*erreur de projection* liée au positionnement et à l'orientation des repères (Besl et McKay, 1992 ; Chen et Medioni, 1992 ; Zhang, 1994 ; Harvent *et al.*, 2013). La Figure 2.12 illustre les champs de déplacement mesurés pour le cas de gonflage à la pression nominale de 14,8 bar exprimés dans le repère global de la roue. L'incertitude associée est de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$  pour une amplitude de déplacement d'environ 2 mm.

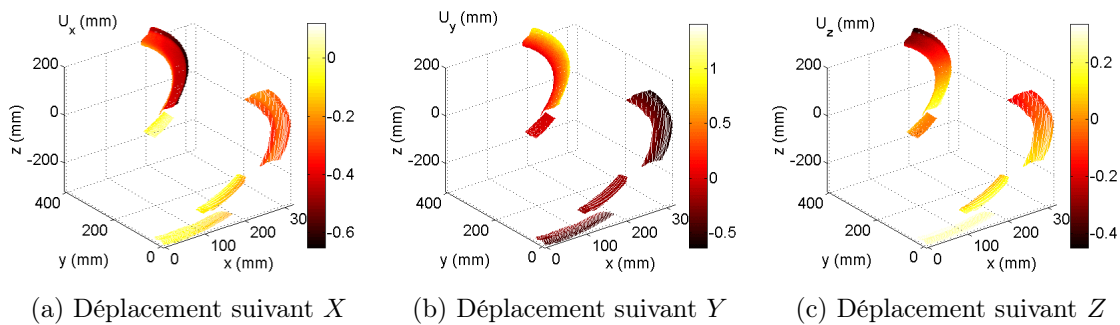


FIGURE 2.12 – Champs de déplacement mesurés avec le logiciel Correli<sup>STC</sup> pour le cas de gonflage à la pression nominale (Gras, 2015a)

Ces champs doivent finalement être interpolés sur le maillage du modèle par éléments finis pour être comparés aux résultats de calcul et réaliser des identifications des chargements recherchés. Cette dernière étape s'accompagne néanmoins d'une *erreur d'interpolation* supplémentaire. Dans les travaux de Gras (2015a), une première preuve de faisabilité de l'identification du chargement appliqué lors du cas de gonflage a été réalisée en utilisant un modèle 2D axisymétrique de la roue et des mesures de déplacement extraites de neuf sections de la surface reconstruite. Si ces mesures, obtenues jusqu'ici sur une partie restreinte de la jante, se sont révélées suffisantes pour ce cas « simple », la mesure sur des zones de taille plus importante doit être envisagée pour l'identification des chargements 3D et nécessite d'abandonner les codes de stéréocorrélation commerciaux.

### Mesures avec CAD-Correli

Le code de stéréocorrélation nommé CAD-Correli, développé au LMT, permet d'enrichir la mesure de champs de déplacement et d'éviter les erreurs de projection par rapport aux codes standard en utilisant une connaissance *a priori* de la forme de l'objet observé fournie par son modèle CAO (Beaubier *et al.*, 2014 ; Dufour, 2015a ; Dufour *et al.*, 2015b ; Dufour *et al.*, 2015c ; Dufour *et al.*, 2016). Ce modèle géométrique nominal, utilisé pour la conception de la pièce, sert de référence pour les mesures de forme et de champs de déplacement 3D. La mesure est donc directement exprimée dans l'espace du modèle CAO, facilitant la comparaison avec les résultats issus de la simulation numérique. Dans ce contexte, la surface théorique considérée est paramétrée dans un formalisme NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines, Piegl et Tiller, 1995) qui permet de représenter des surfaces complexes avec un faible nombre de degrés de liberté comparé aux maillages utilisés en modélisation par éléments finis, réduisant ainsi fortement le nombre d'inconnues du problème de CIN.

En pratique, l'utilisation de cette méthode nécessite tout d'abord d'extraire les surfaces NURBS associées à la zone observée par les imageurs à partir du modèle CAO de la roue (Figure 2.13). La sélection est réalisée manuellement et 12 (resp. 9) surfaces sont conservées sur la demi-roue intérieure (resp. extérieure). Les surfaces associées aux détails géométriques des oreilles de barrettes n'ont pas été retenues afin de limiter le nombre total de degrés de liberté. Les points de contrôle des surfaces NURBS (indiqués en rouge sur la Figure 2.13b) ayant les mêmes positions mais appartenant à deux surfaces distinctes ont ensuite été fusionnés afin d'assurer la continuité du champ de déplacement lors de la mesure puis les pôles ont été numérotés avant de calculer les fonctions de forme associées.

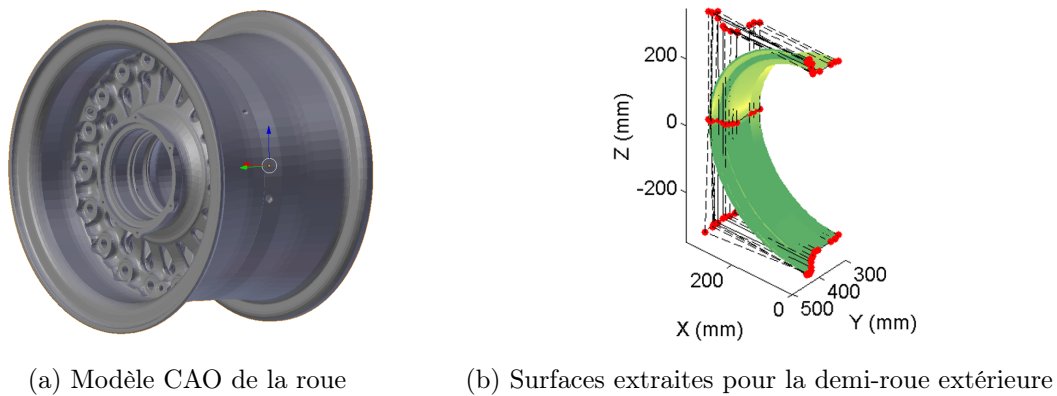


FIGURE 2.13 – Illustration de l'étape de sélection des surfaces

Après ce prétraitement, l'étalonnage des imageurs est réalisé en utilisant l'objet observé comme « mire d'étalonnage » (auto-étalonnage) et en considérant que sa forme nominale est connue grâce au modèle CAO associé. Une initialisation de la position des imageurs par sélection manuelle d'au moins six points de l'espace 3D et de leur correspondant dans chaque image est tout d'abord réalisée puis les matrices de projection des imageurs sont déterminées (Beaubier *et al.*, 2014). La forme de la surface réellement observée est ensuite déterminée en minimisant l'écart entre les images de référence prises par l'ensemble des imageurs avant l'essai et les images « déformées » correspondant aux projections de sa forme nominale dans l'espace 2D de chaque imageur. La mise à jour de la surface s'effectue en modifiant la position des pôles des surfaces NURBS. On obtient une surface de référence étalonnée dont l'écart par rapport à la surface théorique est représenté sur la Figure 2.14.

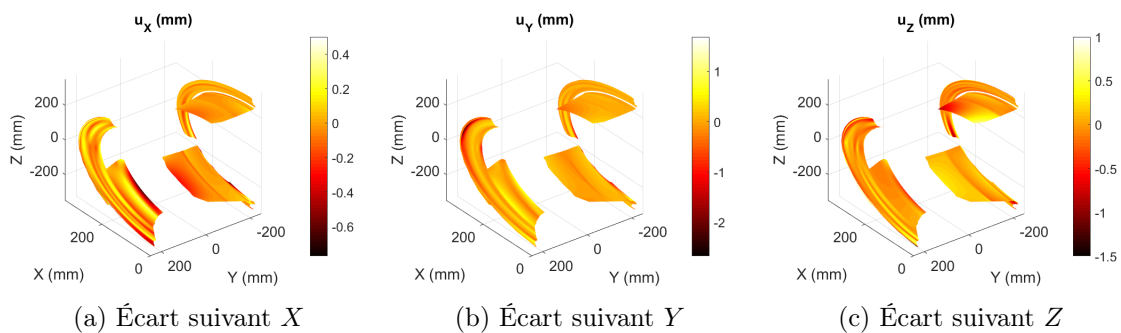


FIGURE 2.14 – Écarts de forme entre la surface théorique issue du modèle CAO et celle mesurée après étalonnage (Gras, 2015a)

On constate que les écarts sont assez importants, notamment au niveau des bourrelets où ils atteignent plusieurs millimètres. Les écarts RMS valent respectivement 0,14 mm dans la direction  $X$ , 0,3 mm dans la direction  $Y$  et 0,23 mm dans la direction  $Z$ , ce qui est bien supérieur aux incertitudes de mesure. Ces écarts peuvent provenir d'une part de la différence d'état initial entre la surface issue du modèle CAO et celle réellement observée. Le pneu est déjà monté sur la roue (mais non gonflé) lors de l'essai avant de procéder aux mesures alors qu'il est naturellement absent du modèle CAO. Sa présence peut donc induire une déformation initiale de la jante captée lors de la mesure de forme. D'autre part, la roue testée peut différer de son modèle théorique en raison des tolérances de fabrication. Enfin, le fait que des essais, non retenus, aient été réalisés avant cette mesure peut également expliquer une partie des écarts observés. Par ailleurs, on note que la zone de mesure est bien plus grande que celle reconstruite avec le logiciel Correli<sup>STC</sup>. Elle représente environ 50% de la surface totale de la jante (Figure 2.15) contre 25% précédemment (cf. Figure 2.12).

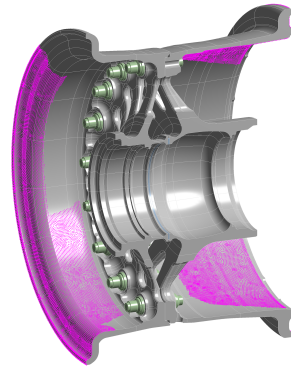


FIGURE 2.15 – Superposition de la surface de mesure et du modèle numérique de la roue

Les champs de déplacement ont finalement été mesurés à partir de cette surface de référence étalonnée pour les différents paliers du cas de gonflage du pneumatique. Ils ont ensuite été interpolés sur le maillage du modèle de calcul par éléments finis afin de réaliser des identifications des chargements à l'interface pneu-jante. La Figure 2.16 illustre les champs obtenus pour le dernier palier correspondant à la pression nominale de 14,8 bar. On constate que les amplitudes de déplacement sont proches de celles déterminées précédemment (cf. Figure 2.12). De nouveaux codes de stéréocorrélation permettent désormais de baser la mesure directement sur le maillage par éléments finis et d'éviter l'étape d'interpolation précédente (Dubreuil *et al.*, 2016 ; Pierré, 2016, EikoTwin).

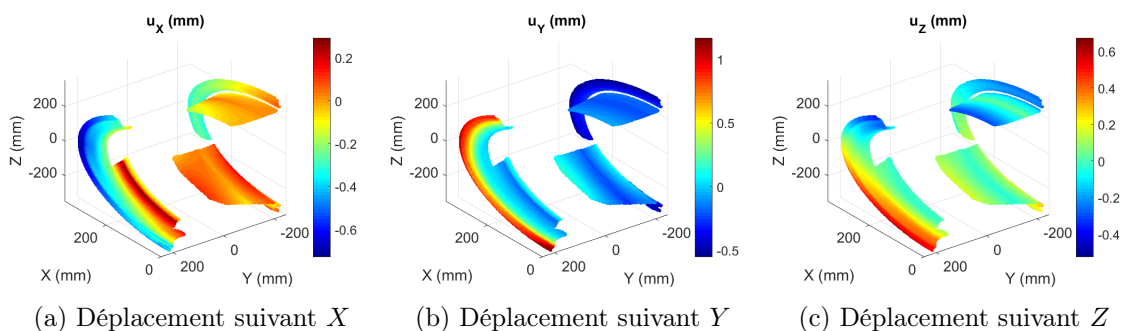


FIGURE 2.16 – Champs de déplacement mesurés avec le code CAD-Correli pour le cas de gonflage à la pression nominale (Gras, 2015a)

La méthode de stéréocorrélation utilisée permet également d'accéder aux incertitudes sur les champs de déplacement mesurés grâce à la matrice de covariance des pôles permettant de représenter la surface observée. Cette matrice est reliée à l'inverse de la matrice de corrélation  $[M]$  construite lors de la résolution du problème de CIN globale et dépend également du bruit d'acquisition des capteurs (Mathieu *et al.*, 2015; Gras *et al.*, 2015c). En interpolant cette matrice aux nœuds du maillage par éléments finis, grâce à la projection préalable des fonctions de forme NURBS sur ce dernier, et en prenant seulement la diagonale de la matrice résultante, on obtient un poids représentant le degré de confiance associé à la mesure de déplacement en chaque nœud du maillage et dans les trois directions de l'espace (Figure 2.17). On constate que la mesure est plus incertaine sur la demi-roue intérieure que sur la demi-roue extérieure. Les déplacements mesurés sont également plus fiables sur les bourrelets qu'au niveau du fond de jante. Ces informations sont cruciales et permettront de pondérer les mesures de manière optimale lors de l'identification des chargements à l'interface pneu-jante (Roux et Hild, 2018).

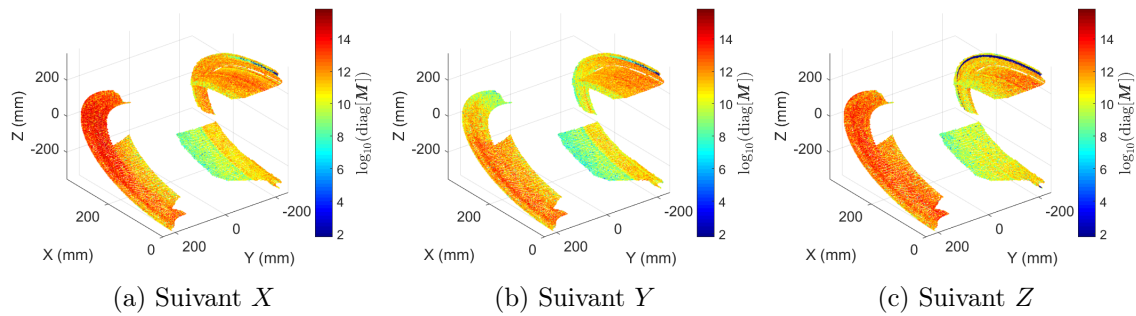


FIGURE 2.17 – Degré de confiance associé à chaque point de mesure et dans chaque direction (Gras, 2015a)

La procédure décrite précédemment a ensuite été répétée pour les cas de ligne droite et de ripés. Les champs de déplacement mesurés pour le cas de ligne droite avec une charge verticale égale à 22500 daN sont par exemple illustrés sur la Figure 2.18. On précise qu'il s'agit de mesures relatives par rapport au cas de gonflage. L'interprétation physique des différents champs présentés dans cette partie sera détaillée au Chapitre 4.

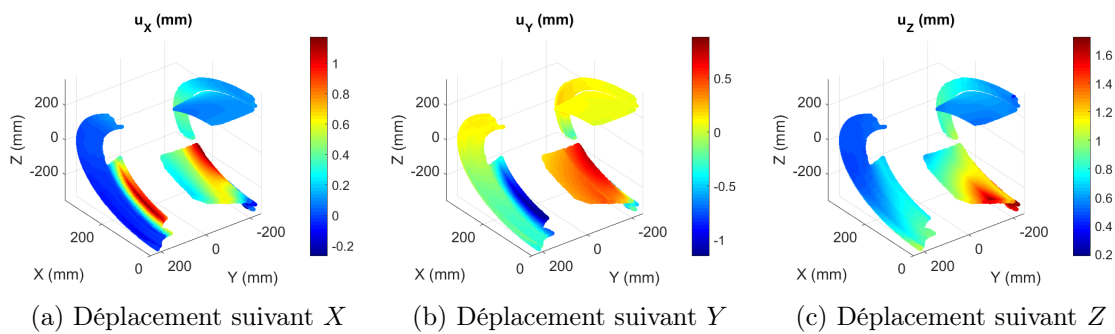


FIGURE 2.18 – Champs de déplacement mesurés pour le cas de ligne droite

### 2.4.2 Mesures de déformations ponctuelles

En parallèle des mesures de champs de déplacement par stéréocorrélation, les déformations ponctuelles mesurées par les jauges d'extensométrie ont été enregistrées lors des différents essais. On précise qu'une « remise à zéro » de l'acquisition a été effectuée au début de chaque cas de charge. Pour le cas du gonflement du pneumatique, l'hypothèse d'axi-symétrie de la réponse en déformation de la roue a en outre pu être vérifiée. Les mesures obtenues pour les jauges de la jante situées dans les sections A, B et C ont en effet montré une très bonne concordance quel que soit le niveau de pression (Figure 2.19).

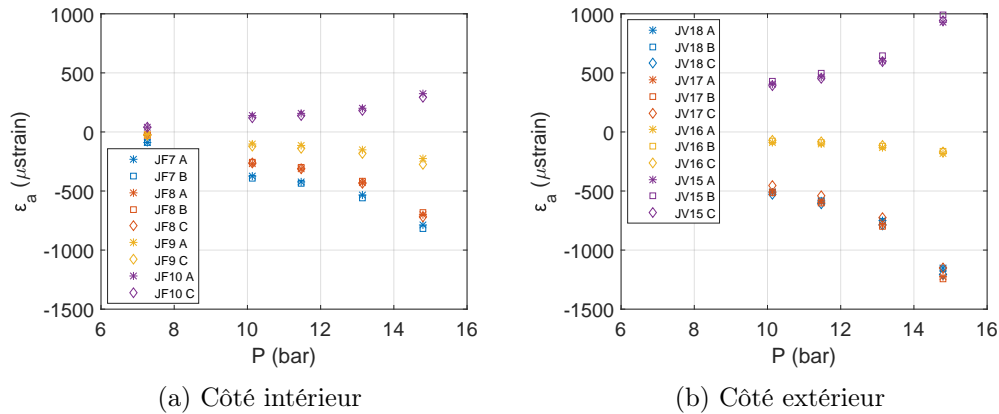


FIGURE 2.19 – Comparaison des déformations mesurées dans la jante pour différentes section de la roue (cf. Figures 2.2 et 2.6) en fonction de la pression de gonflage

Les déformations mesurées par les jauges ont été enregistrées de la même façon pour les différents cas de charge, comme illustré sur la Figure 2.20 pour le cas de ligne droite. Ces mesures seront par la suite utilisées pour valider les résultats des identifications des chargements à l'interface pneu-jante basées sur les champs de déplacement. Toutefois, elles pourront aussi être directement utilisées pour procéder aux identifications ou être combinées aux mesures de déplacement pour parvenir à cette fin.

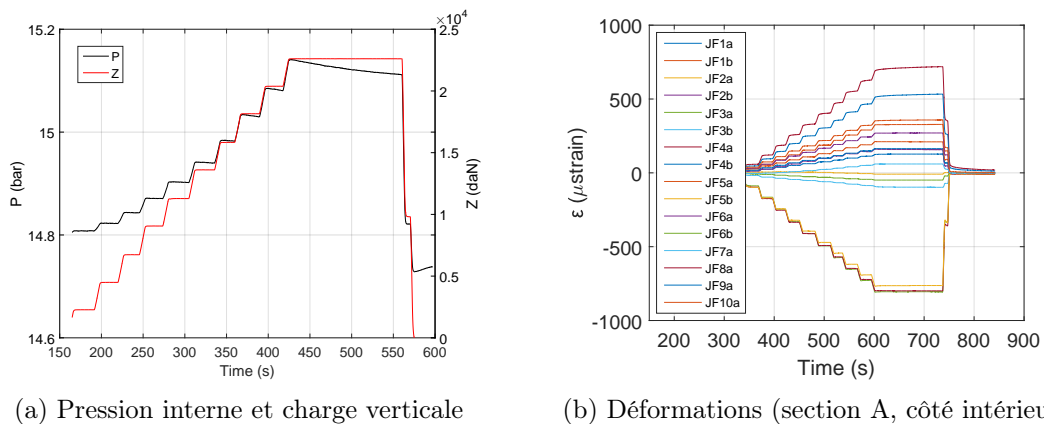


FIGURE 2.20 – Illustration de l'évolution au cours du temps des charges et des déformations enregistrées lors du cas de ligne droite

## 2.5 Conclusions

Ce chapitre a permis de présenter les données expérimentales obtenues lors du post-doctorat de Renaud Gras en vue de réaliser des identifications des chargements appliqués à l'interface pneu-jante. Une roue principale et un pneumatique radial ont ainsi été sélectionnés pour mener une campagne d'essais consistant à mesurer la déformation de la roue pour différents cas de charge représentatifs du roulage de l'aéronef (*i.e.*, gonflage, ligne droite et ripés). Une presse statique a été utilisée pour réaliser les essais et une instrumentation par stéréovision (10 caméras) et jauges d'extensométrie (114 voies de mesure) a été proposée.

La mise en œuvre de la mesure par stéréocorrélation s'est révélée particulièrement délicate en raison de la complexité de la structure étudiée et de son accessibilité « visuelle » sur la machine d'essais. Une analyse préliminaire (virtuelle) a néanmoins permis d'optimiser le placement des systèmes imageurs en amont des essais afin d'obtenir une mesure suffisante. Les différents cas de charge ont été appliqués et deux codes de stéréocorrélation ont été utilisés pour mesurer des champs de déplacement au niveau du fond de jante et des bourrelets de la roue. Des mesures cinématiques riches sur une large zone ont été obtenues avec le code académique CAD-Correli, développé au LMT, tandis que la surface reconstruite était bien plus restreinte avec le logiciel commercial Correli<sup>STC</sup>. Le code CAD-Correli, plus performant, présente également l'avantage d'exprimer les résultats directement dans l'espace 3D lié au modèle CAO de la roue, sans aucune opération de projection supplémentaire, facilitant ainsi grandement la comparaison entre les mesures et les résultats issus de calculs par éléments finis. Après avoir défini une paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante, ces mesures seront utilisées pour mener des identifications des paramètres recherchés. Les déformations enregistrées par les jauges d'extensométrie pourront servir à valider les résultats obtenus.

## Chapitre 3

# Paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante

*Ce chapitre présente plusieurs paramétrisations permettant d'exprimer les chargements appliqués par le pneumatique sur la roue au niveau de la zone de contact entre ces deux composants. Afin de mieux les appréhender, une analyse de la base de données pneumatiques disponible chez Safran Landing Systems est tout d'abord réalisée. Des premières tentatives de paramétrisation sont ensuite proposées (séries de Fourier et somme de pics élémentaires) avant d'aboutir à une paramétrisation optimale basée sur l'utilisation des modes propres de la matrice de raideur de la roue condensée sur l'interface pneu-jante. Des études d'influence sont également menées afin d'identifier le nombre de paramètres nécessaires pour approcher un chargement donné.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>44</b>
<b>3.2</b>	<b>Analyse de la base de données pneumatiques</b>	<b>44</b>
3.2.1	Données disponibles	44
3.2.2	Cas de gonflage	45
3.2.3	Cas de ligne droite	50
3.2.4	Cas de ripé	55
<b>3.3</b>	<b>Premières tentatives</b>	<b>59</b>
3.3.1	Séries de Fourier	59
3.3.2	Somme de pics élémentaires	64
3.3.3	Discussion	69
<b>3.4</b>	<b>Paramétrisation optimale</b>	<b>70</b>
3.4.1	État de l'art sur les méthodes de sous-structuration	70
3.4.2	Méthodologie générale	73
3.4.3	Utilisation des propriétés de symétrie cyclique	75
3.4.4	Modes propres d'interface pneu-jante	77
3.4.5	Critères de sélection	81
3.4.6	Projection de chargements connus	83
<b>3.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>93</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les données expérimentales de l'étude ont été présentées. Des champs de déplacement et des déformations ponctuelles mesurés sur la roue lors d'essais statiques sont disponibles. Afin de réaliser des identifications de chargements d'interface pneu-jante à partir de ces mesures, une paramétrisation doit être définie.

La paramétrisation consiste à exprimer les chargements recherchés comme une fonction (linéaire ou non) de quantités indépendantes appelées *paramètres* (Tarantola, 2005). Il existe une infinité de façons de procéder. On peut, par exemple, choisir de décomposer les chargements à l'interface pneu-jante sur une base de fonctions simples (polynômes, fonctions trigonométriques, splines, *etc.*). Le choix de ces fonctions peut être influencé par des connaissances *a priori* sur les chargements (formes, plages de variation, mécanismes physiques en jeu) permettant ainsi de réduire l'espace de recherche. Une paramétrisation plus complexe, basée sur un modèle analytique ou numérique du pneumatique, peut également être envisagée. Cependant, cette possibilité a été exclue dès le début de la thèse en raison de la méconnaissance du pneumatique par le manufacturier de roue.

Bien qu'arbitraire, le choix de la paramétrisation est néanmoins crucial et a de profondes répercussions sur les solutions obtenues lors de la résolution du problème inverse (Petit et Maillet, 2008; Baraldi *et al.*, 2014). Il convient donc de définir une paramétrisation qui soit la plus objective et la plus robuste possible (Martinsons, 2005). Elle doit permettre de décrire les chargements à l'interface pneu-jante avec un minimum de paramètres, quel que soit le cas de charge étudié (gonflage, ligne droite et ripés). Pour ce faire, une analyse des champs de pression de contact pneu-jante fournis par les pneumaticiens est tout d'abord réalisée. Des tendances caractéristiques du comportement de l'interface pneu-jante sont identifiées et permettent de mieux appréhender les chargements. Des premières tentatives de paramétrisation sont ensuite proposées (séries de Fourier et somme de pics élémentaires). Un changement de paradigme est finalement opéré afin d'aboutir à une paramétrisation optimale, pour le manufacturier de roue, des chargements à l'interface pneu-jante.

### 3.2 Analyse de la base de données pneumatiques

#### 3.2.1 Données disponibles

Les manufacturiers de pneumatique fournissent généralement des champs de pression de contact pneu-jante pour certains cas de charge élémentaires afin d'accompagner le manufacturier de roue dans le dimensionnement de son équipement. Ces champs permettent d'assurer le transfert des charges pneu-piste vers l'interface pneu-jante et constituent les données d'entrée des calculs par éléments finis de roue. Pour une roue donnée, développée pour un programme spécifique, *Safran Landing Systems* reçoit donc des champs de pression de contact pneu-jante pour les différents pneumatiques pouvant être montés sur celle-ci. Compte tenu du grand nombre d'avions équipés en roues et freins par *Safran Landing Systems* et de la diversité des pneumatiques pouvant être montés sur une roue, la base de données pneumatiques disponible en interne comporte environ 80 références réparties sur une trentaine de programmes.

Afin de mieux appréhender les chargements en vue de leur paramétrisation, les champs de pression fournis par les pneumaticiens pour les neuf références listées dans le Tableau 3.1 sont étudiés. Ceux-ci sont représentatifs des pneus montés sur les différentes conceptions de roues boulonnées de *Safran Landing Systems*. Par souci de confidentialité, les appellations ont été modifiées. Le pneu A2 correspond à celui des essais présentés au Chapitre 2.

Manufacturier	Référence	Technologie	Diamètre de la jante (mm)
A	A1	Radiale	431,8
	A2	Radiale	558,8
	A3	Radiale	584,2
B	B1	Bias	254
	B2	Radiale	508
	B3	Radiale	558,8
C	C1	Radiale	533,4
	C2	Bias	533,4
	C3	Radiale	558,8

TABLEAU 3.1 – Données pneumatiques étudiées

L'origine des champs de pression de contact pneu-jante varie en fonction des pneumaticiens : certains fournissent des données issues de calculs par éléments finis, tandis que d'autres fournissent exclusivement des données d'essais. Les données sont obtenues soit sur un profil de jante spécifié par *Safran Landing Systems*, soit sur un profil proche référencé dans l'*Aircraft Year Book* ([Tire and Rim Association, Inc., 2018](#)). En fonction de l'origine des données, les pneumaticiens transmettent soit les coordonnées des nœuds du maillage utilisé dans le calcul par éléments finis soit des informations sur les capteurs de pression (type Tekscan<sup>TM</sup>) utilisés en essais (coordonnées des points de mesure extrêmes, distance entre deux points de mesure et positions angulaires des capteurs). Certains fournissent alors également les pressions locales (circonférentielle, méridienne et normale) et les efforts globaux en chaque nœud du maillage éléments finis alors que seule la pression normale en chaque point est transmise par d'autres. Par ailleurs, tous les pneumaticiens font l'hypothèse que **la jante est indéformable** quelle que soit la sollicitation exercée (ce qui se traduit par l'utilisation d'une roue en acier en essai). Pour les calculs par éléments finis, un contact glissant entre le pneu et la jante est spécifié pour le cas du gonflage tandis que des coefficients de frottement variant entre 0,02 et 0,8 sont généralement introduits pour les autres cas de charge.

### 3.2.2 Cas de gonflage

Les champs de pression de contact pneu-jante associés aux cas de gonflage des neufs pneumatiques étudiés sont représentés sur les Figures 3.1–3.9. Le chargement étant axisymétrique, les pressions circonférentielles sont nulles. De plus, le contact pneu-jante étant supposé sans frottement dans les calculs, les pressions méridiennes sont également nulles. On représente donc uniquement l'évolution de la pression normale au profil de jante en fonction de l'abscisse curviligne, notée  $s$ , calculée à partir des profils fournis par les pneumaticiens (pneu ou jante) et dont l'origine est positionnée sur le point le plus proche du centre de la roue. Ces profils sont également représentés sur les Figures 3.1–3.9 et des lignes pointillées permettent de délimiter certaines zones caractéristiques de la jante (*bead seat*, *join radius*, *side*, *flange radius* et *flange flat*). Les différences de répartition de pression causées par une dissymétrie des bourrelets sont étudiées uniquement pour les pneus A3 et B3, pour lesquels les données ont été fournies sur un profil de jante dissymétrique.

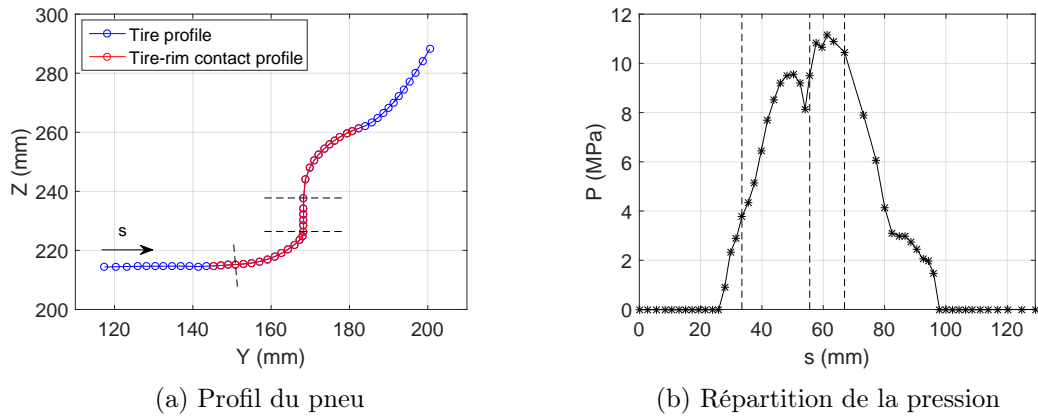


FIGURE 3.1 – Cas de gonflage du pneu A1 ( $P = 16,1$  bar)

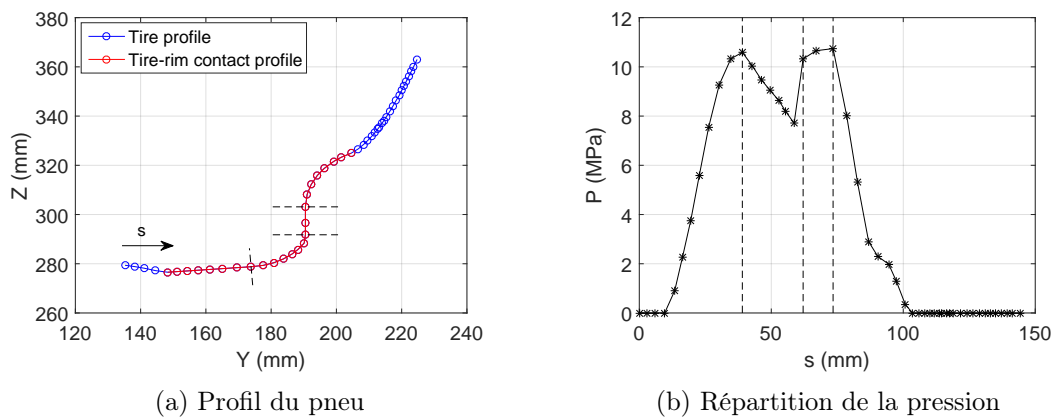


FIGURE 3.2 – Cas de gonflage du pneu A2 ( $P = 14,8$  bar)

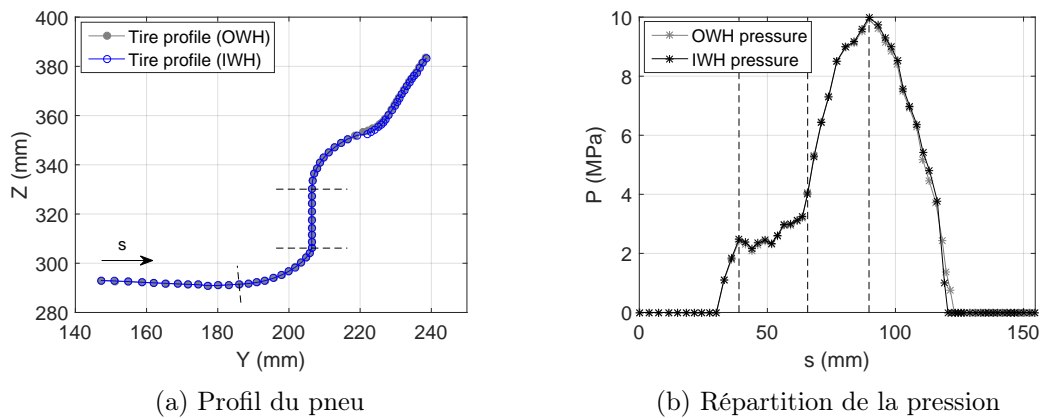


FIGURE 3.3 – Cas de gonflage du pneu A3 ( $P = 16,1$  bar)

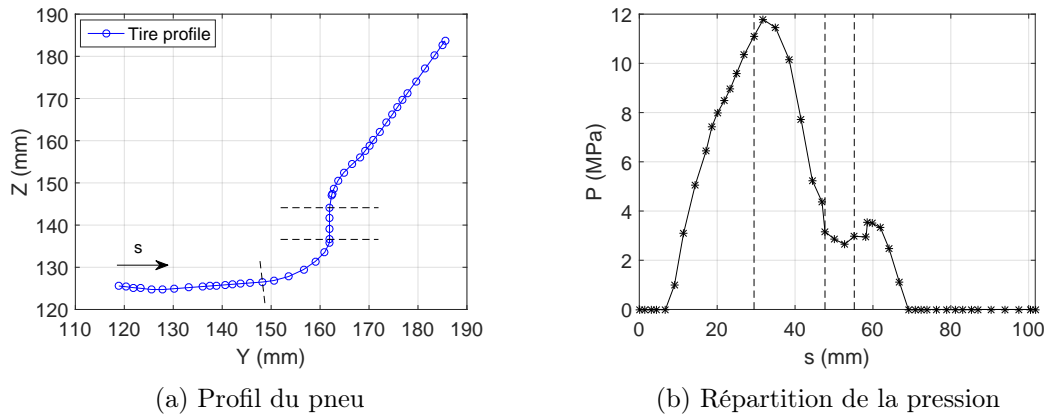


FIGURE 3.4 – Cas de gonflage du pneu B1 ( $P = 6,07$  bar)

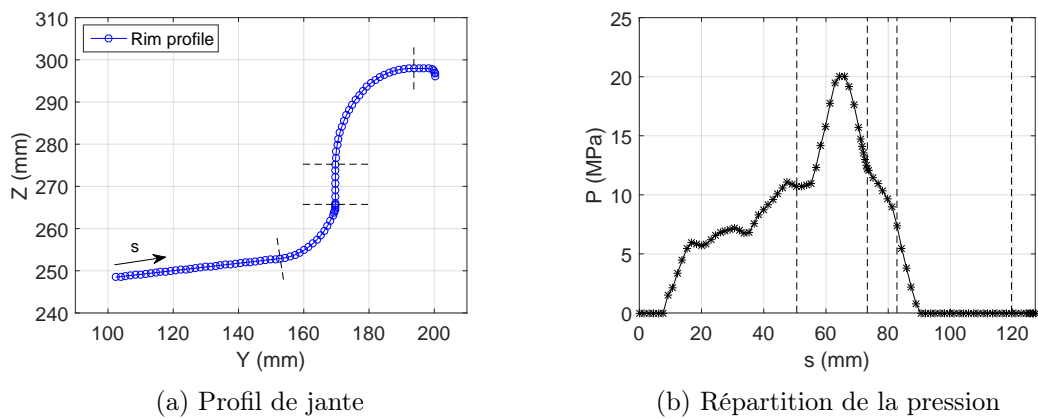


FIGURE 3.5 – Cas de gonflage du pneu B2 ( $P = 13,5$  bar)

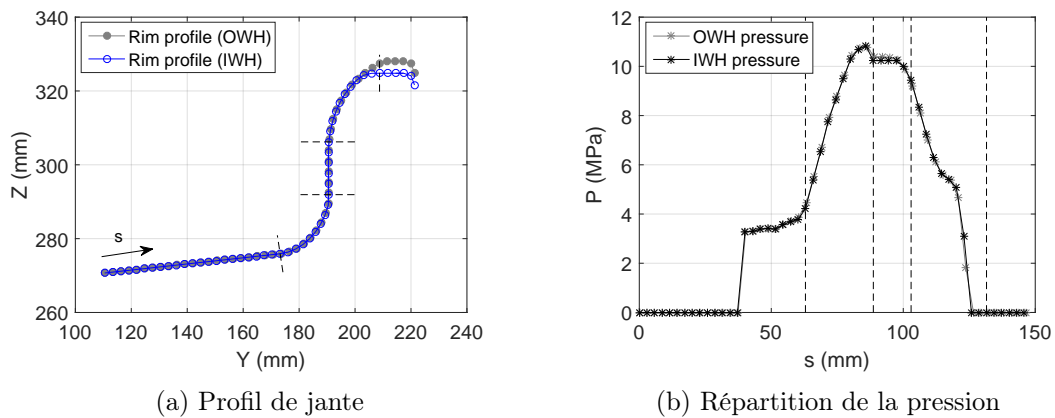


FIGURE 3.6 – Cas de gonflage du pneu B3 ( $P = 16,2$  bar)

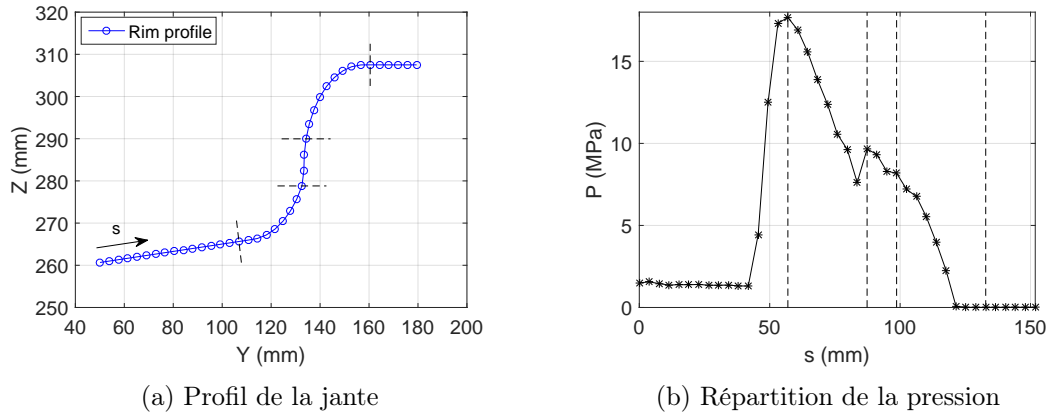


FIGURE 3.7 – Cas de gonflage du pneu C1 ( $P = 15,9$  bar)

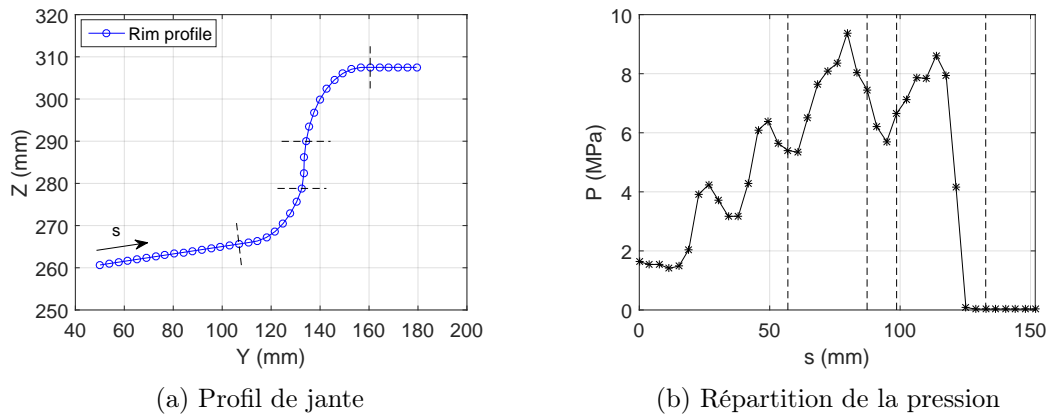


FIGURE 3.8 – Cas de gonflage du pneu C2 ( $P = 15,9$  bar)

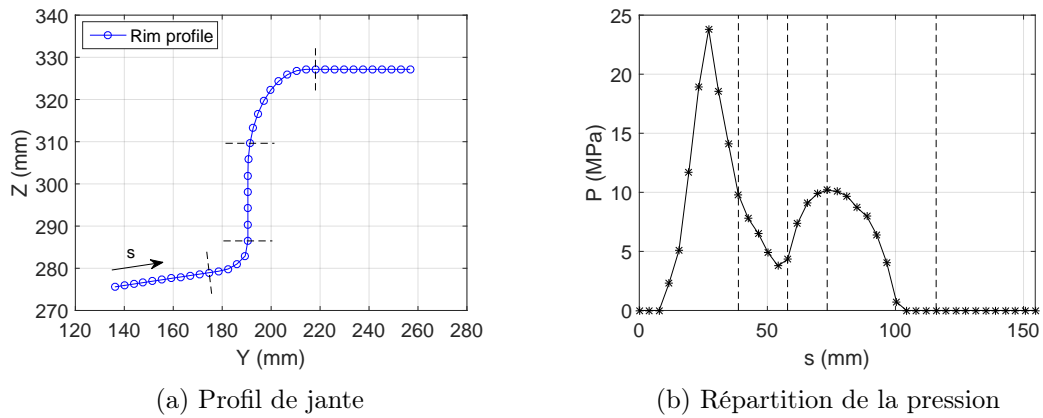


FIGURE 3.9 – Cas de gonflage du pneu C3 ( $P = 16,2$  bar)

La forme du champ de pression de contact pneu-jante varie fortement en fonction du pneu étudié. A titre d'exemple, les champs de pression associés aux pneus A2, B3 et C3 sont très différents alors que ces trois pneus peuvent être montés sur la même roue et que leur pression de gonflage est proche. Néanmoins, certaines tendances caractéristiques du cas de gonflage peuvent être identifiées. On observe, pour la plupart des champs, deux zones distinctes séparées par la deuxième ligne pointillée, représentant l'entrée dans la partie verticale de la jante. En fonction du pneu étudié, on constate que les amplitudes des pics de pression présents dans ces deux zones sont plus ou moins élevées. Par exemple, la pression est environ trois fois plus élevée dans la première zone que dans la deuxième pour le pneu B1 alors que la répartition est inversée pour le pneu A3. Les pneus A2 et B3 ont quant à eux des amplitudes similaires dans les deux zones. Ainsi, compte tenu de l'architecture des pneumatiques (cf. § 1.1.2), la zone 1 peut être associée aux efforts radiaux dus au serrage de la tringle métallique du pneumatique tandis que la zone 2 peut être associée aux efforts axiaux dits d'écartement (Figure 3.10). Pour les pneus A3 et B3 (Figures 3.3 et 3.6), on dispose des champs de pression de contact calculés sur une jante dissymétrique, le côté extérieur étant légèrement surélevé. On constate que la dissymétrie des bourrelets a peu d'influence sur la répartition de la pression de contact pour le cas du gonflage. En effet, la zone de contact pneu-jante est peu impactée par cette différence topologique.

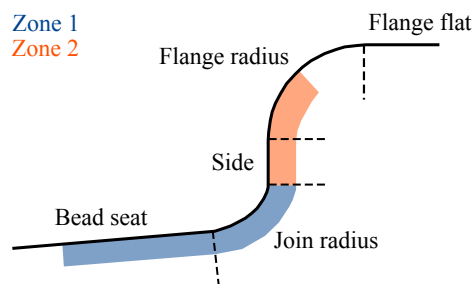


FIGURE 3.10 – Zones caractéristiques de la jante pour un cas de gonflage

Les pneus étudiés permettent également d'identifier des différences de comportement en fonction de la technologie du pneumatique. En effet, les pneus C1 et C2 peuvent être montés sur la même roue, mais diffèrent de par leur technologie, respectivement radiale et bias. Sur les champs de pression associés à ces pneus, on observe un seul pic dans la zone 1 pour le pneu radial et trois pics pour le pneu bias. Par définition, un pneu radial ne comporte qu'une seule tringle métallique par côté, quelle que soit sa taille. En revanche, un pneu bias peut être constitué d'une à quatre tringles par côté en fonction de sa taille. Ainsi, il est probable que les trois pics observés pour le pneu C2 soient caractéristiques d'une architecture pneumatique composée de trois tringles. Toutefois, sans informations précises concernant l'architecture du pneumatique, cette hypothèse ne peut pas être totalement vérifiée. En suivant cette logique, le pneu bias B1 serait alors composé d'une seule tringle caractéristique de l'unique pic observé dans la zone 1, ce qui semble plutôt plausible compte tenu de sa petite taille. Pour la zone 2, on note que les pneus bias appuient plus au niveau du *flange radius* que du *side*.

Enfin, on remarque certaines spécificités en fonction de la méthode utilisée pour obtenir les champs de pression. Pour les pneus C1 et C2, on observe un palier de pression lorsqu'on se rapproche de l'origine de l'abscisse curviligne. Les données fournies étant issues d'essais, avec des capteurs positionnés sur la jante, ce palier correspond à la pression d'azote

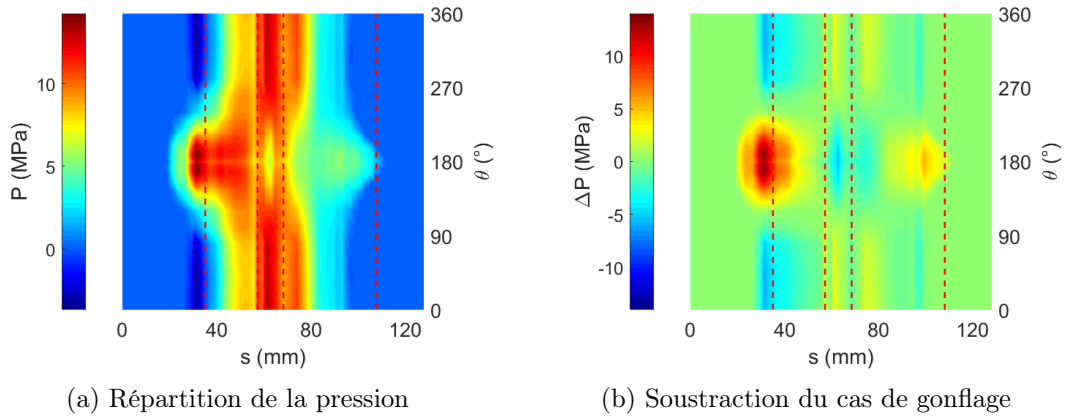
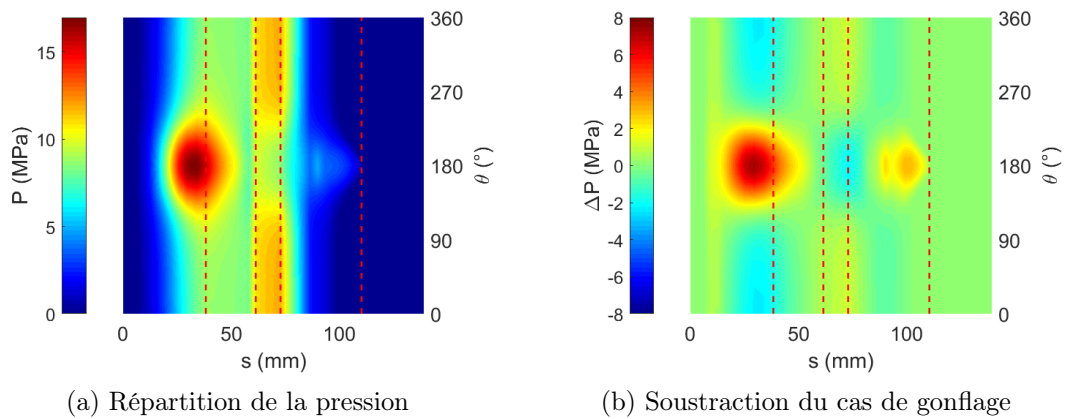
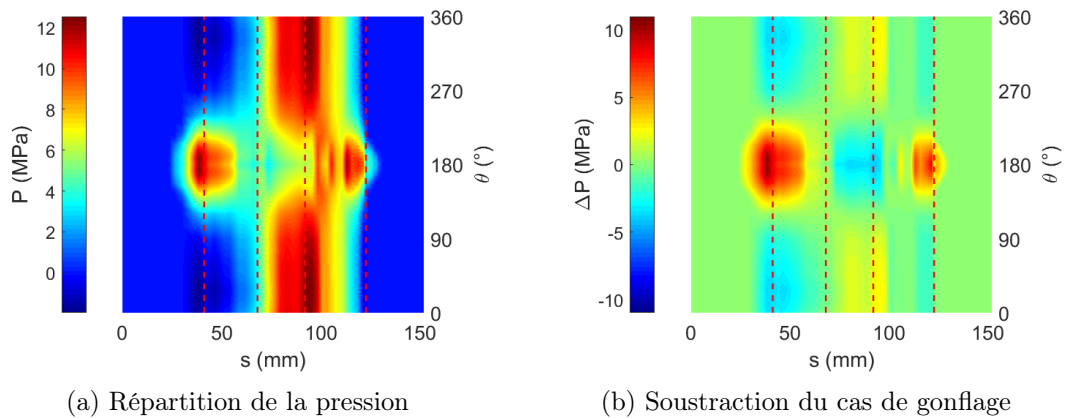
appliquée sur la surface interne du pneu. Il est surprenant de ne pas l'observer pour le pneu C3, dont les données ont été obtenues de manière analogue. En revanche, l'absence de palier est compréhensible pour les données issues de calculs par éléments finis. De plus, on constate que les amplitudes des pressions mesurées ont souvent tendance à être plus élevées que celles des pressions calculées.

Les champs de pression de contact pneu-jante pour un cas de gonflage dépendent donc de nombreux facteurs : type de données fournies, dimensions du couple pneu-roue, technologie du pneu (radiale ou bias), serrage de la tringle, pression de gonflage et effort d'écartement. Malgré leur forte dispersion, ces champs sont caractérisés par deux zones distinctes, situées de part et d'autre de l'entrée dans la partie verticale du bourrelet. L'architecture de la zone basse du pneumatique (tringle, gommages de bourrage et de protection, renforts, *etc.*) joue un rôle déterminant sur les résultats obtenus mais reste inconnue du manufacturier de roue, ce qui rend la prévision du comportement mécanique de la roue d'autant plus difficile.

### 3.2.3 Cas de ligne droite

Les champs de pression de contact pneu-jante associés aux cas de déplacement en ligne droite des neuf pneumatiques étudiés sont représentés sur les Figures 3.11–3.19. On montre uniquement l'évolution de la pression normale au profil de jante en fonction de l'abscisse curviligne et de l'azimut pour pouvoir comparer les différentes données. En effet, les pressions circonférentielles et méridiennes ne sont pas fournies par tous les pneumaticiens et leurs amplitudes sont bien plus faibles. Dans le cas où les pneumaticiens fournissent leurs données sur un maillage de jante, l'abscisse curviligne est calculée à partir du profil fourni et son origine est positionnée sur le point le plus proche du centre de la roue. En revanche, pour des données fournies sur un maillage de pneu, et en l'absence de profil de jante de référence, le profil fourni pour chaque azimut est projeté sur le profil à l'azimut  $\theta = 180^\circ$  (azimut pour lequel le nombre de points de contact pneu-jante est en général le plus important) et l'abscisse curviligne est calculée à partir de ce dernier. Cette projection permet de prendre en compte la déformation du maillage du pneumatique.

Afin d'évaluer l'influence de la charge verticale  $Z$  appliquée sur la répartition de la pression, on trace également, pour chaque pneu, la différence entre le champ de ligne droite étudié et le champ de gonflage associé présenté précédemment. Le champ de gonflage est également projeté sur le profil à l'azimut  $\theta = 180^\circ$  du cas de ligne droite lorsque nécessaire. Les différences de pression causées par une dissymétrie des bourrelets sont étudiées uniquement pour les pneus A3 et B3 pour lesquels les données ont été fournies sur un profil de jante dissymétrique.

FIGURE 3.11 – Cas de ligne droite du pneu A1 ( $P = 16,8$  bar et  $Z = 21780$  daN)FIGURE 3.12 – Cas de ligne droite du pneu A2 ( $P = 15,5$  bar et  $Z = 22542$  daN)FIGURE 3.13 – Cas de ligne droite du pneu A3 ( $P = 16,7$  bar et  $Z = 31330$  daN)

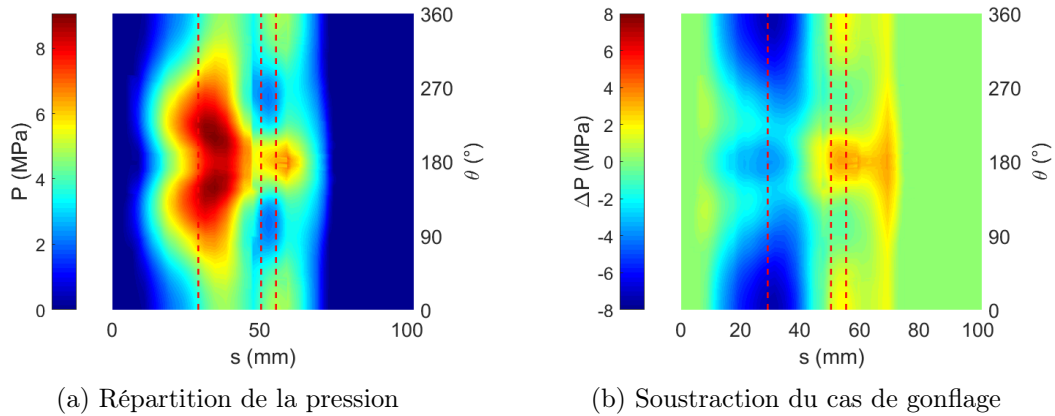


FIGURE 3.14 – Cas de ligne droite du pneu B1 ( $P = 6,07$  bar et  $Z = 5868$  daN)

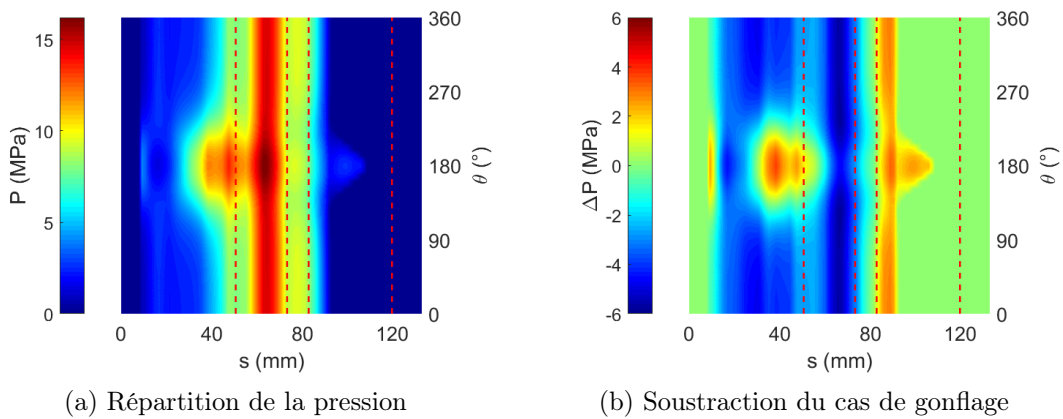


FIGURE 3.15 – Cas de ligne droite du pneu B2 ( $P = 13,5$  bar et  $Z = 18022$  daN)

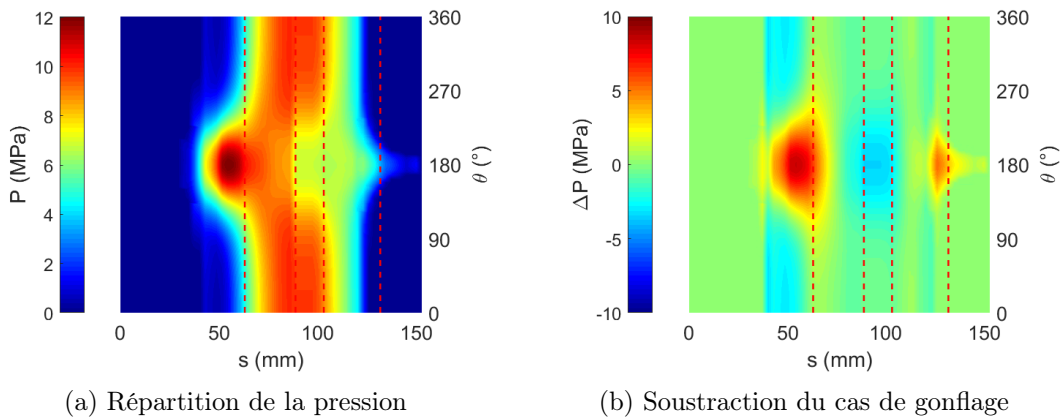
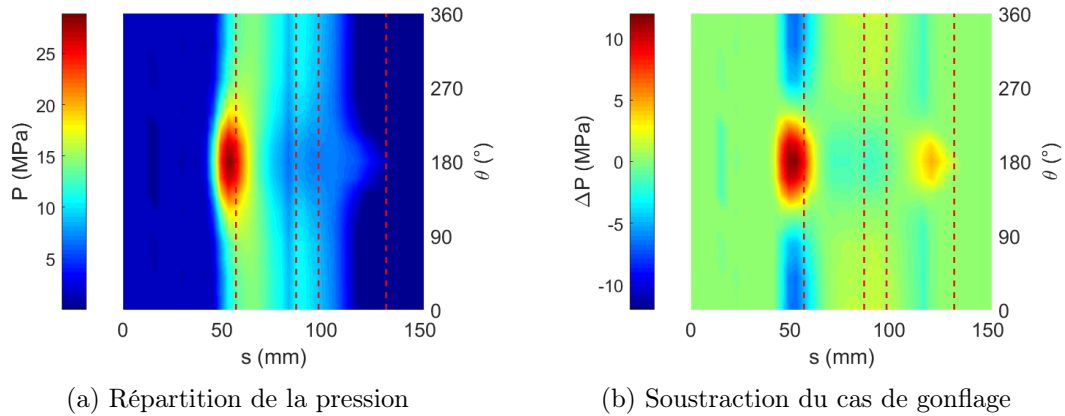
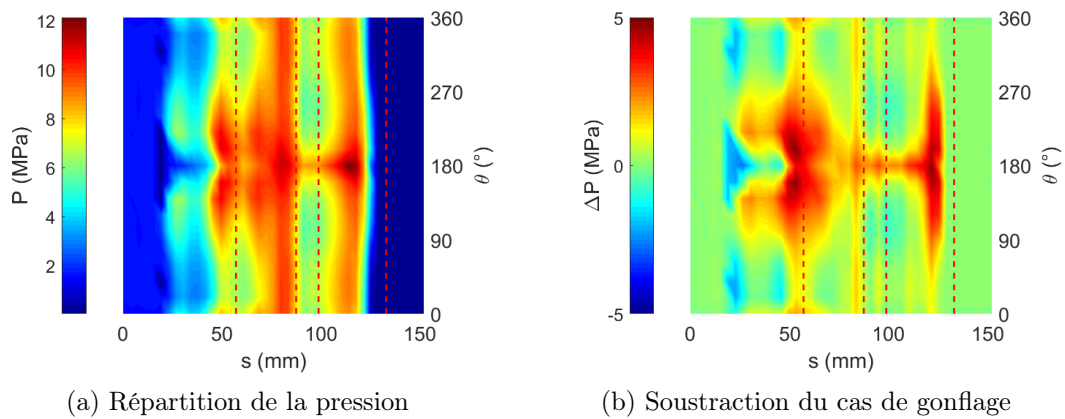
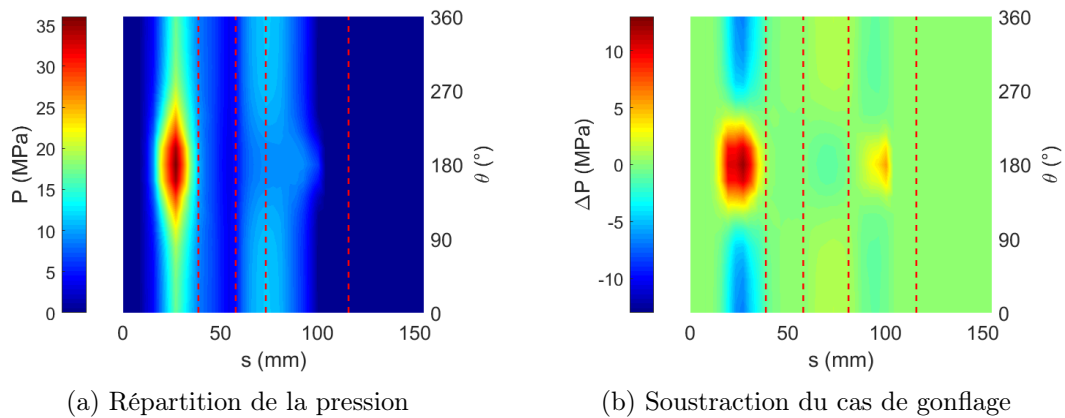


FIGURE 3.16 – Cas de ligne droite du pneu B3 ( $P = 16,2$  bar et  $Z = 27368$  daN)

FIGURE 3.17 – Cas de ligne droite du pneu C1 ( $P = 15,9$  bar et  $Z = 21530$  daN)FIGURE 3.18 – Cas de ligne droite du pneu C2 ( $P = 15,9$  bar et  $Z = 21530$  daN)FIGURE 3.19 – Cas de ligne droite du pneu C3 ( $P = 16,2$  bar et  $Z = 27370$  daN)

Les champs de pression illustrés présentent des similitudes et sont moins dispersés que pour le cas du gonflage. On observe distinctement trois zones sur le profil de jante (Figure 3.20) qui correspondent à la partie de la jante située sous la tringle du pneumatique, la partie « verticale » du bourrelet, et la partie haute du bourrelet. L'effort vertical appliqué sur la roue influence fortement le pic de pression au niveau du *bead seat*. Par rapport au champ de pression du cas de gonflage, ce pic est surchargé lorsqu'on se rapproche de l'azimut  $\theta = 180^\circ$  et délesté à l'opposé. Il s'étale circonférentiellement sur un secteur angulaire d'environ  $60^\circ$  de part et d'autre de la charge. Le pic situé dans la zone 2, au niveau du *side*, est assez peu influencé par l'effort vertical à l'opposé de la charge mais légèrement diminué sous la charge. Enfin, le pic de pression observé dans la zone 3 montre que le pneu s'écrase sur la partie haute du bourrelet sous l'effet du chargement vertical.

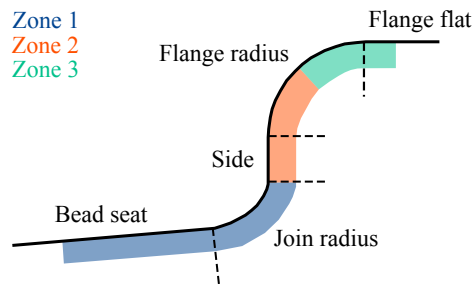


FIGURE 3.20 – Zones caractéristiques de la jante pour un cas de ligne droite

Pour les pneus A3 et B3, on dispose des champs de pression de contact calculés sur une jante dissymétrique (Figure 3.21), le côté extérieur étant légèrement surélevé.

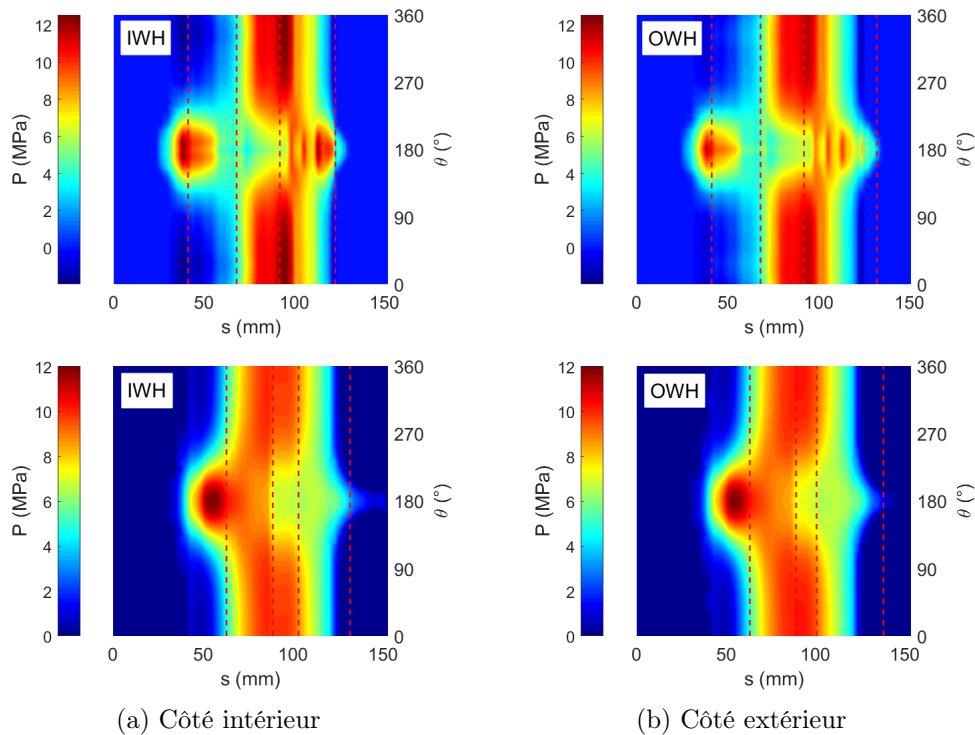


FIGURE 3.21 – Influence de la dissymétrie des bourrelets pour des cas de ligne droite des pneus A3 (haut) et B3 (bas)

La dissymétrie des bourrelets influence principalement la répartition de la pression de contact dans les zones 2 et 3. Sur le côté extérieur, on constate que le pic de pression situé dans la zone 3 s'arrête à l'extrémité du *flange radius* et ne s'étale pas sur la partie horizontale du bourrelet. Ceci dépend néanmoins du niveau de charge appliqué. De plus, la décharge observée au niveau du *side* s'étale sur un secteur angulaire moins important que sur le côté intérieur. Pour le pneu A3, on constate également une diminution de l'amplitude de la pression au niveau du *bead seat* sur le côté extérieur. Les différences observées s'expliquent uniquement par la dissymétrie des bourrelets et ne prennent pas en compte la potentielle **différence de raideur** entre les deux côtés de la roue.

La répartition des pressions de contact lors du cas de ligne droite est fortement influencée par le gonflage initial du pneumatique. En effet, pour le pneu B2 par exemple, on observe un pic de pression important au niveau du rayon de raccord. Le champ de gonflage associé à ce pneumatique présentait déjà ce pic (Figure 3.5) et cette particularité a été conservée sur le cas de ligne droite. En revanche, on constate que les champs de pression correspondant à la différence entre les cas de ligne droite et de gonflage sont très proches d'un pneumatique à un autre, exception faite des différences de comportement évidentes entre les pneus de technologie bias et radiale. La charge verticale joue également un rôle déterminant : lorsqu'elle augmente, les pressions de contact au niveau du *bead seat* et du rayon de raccord augmentent et s'étalent sur un secteur angulaire de plus en plus grand pour répartir la charge. La surface de contact du pneu sur le haut du bourrelet augmente également.

### 3.2.4 Cas de ripé

Pour conclure ce tour d'horizon sur les chargements à l'interface pneu-jante, on trace sur les Figures 3.22–3.26 différents champs de pression de contact fournis par les pneumaticiens pour des cas de ripé. Parmi les pneus étudiés, des données de ripé sont disponibles seulement pour les pneus A1, A2, A3, B1 et B2. On représente l'évolution de la pression en fonction de l'abscisse curviligne et de l'azimut, comme pour les cas de ligne droite. Dans le cas où les pneumaticiens fournissent leurs données sur un maillage de pneu, et en l'absence de profil de jante de référence, le profil fourni pour chaque azimut est projeté sur le profil à l'azimut  $\theta = 180^\circ$  de manière distincte entre le côté intérieur et le côté extérieur de la roue. L'abscisse curviligne est calculée à partir de ce dernier. Par convention, on associe une abscisse curviligne négative au côté intérieur de la roue tandis qu'elle sera positive pour le côté extérieur. On appelle ripé négatif (respectivement positif) le cas pour lequel la charge est plus importante sur le côté intérieur (respectivement extérieur) de la roue. Afin d'évaluer l'influence de la charge latérale  $Y$  sur la répartition de la pression, on trace également, pour chaque pneu, la différence entre le champ de ripé étudié et le champ de ligne droite associé présenté précédemment. Le champ de ligne droite est également projeté sur le profil à l'azimut  $\theta = 180^\circ$  du cas de ripé lorsque nécessaire.

Le cas de ripé a pour effet de charger une demi-roue et de décharger l'autre. Comme pour le cas de ligne droite, on observe distinctement, pour chaque demi-roue, trois zones sur le profil de jante (Figure 3.20). A l'azimut  $\theta = 180^\circ$ , on constate que les pressions de contact augmentent fortement au niveau du *bead seat* et du bourrelet de la demi-roue chargée tandis que la partie haute du bourrelet et le *side* de la demi-roue opposée sont déchargés. Lorsque l'effort latéral augmente, les zones d'appui sur le *bead seat* et sur le bourrelet de la demi-roue chargée s'étendent circonférentiellement. Le phénomène de déchargement de la demi-roue opposée au sens du ripé s'étend quant à lui progressivement au rayon de raccord et au *bead seat*, tout en conservant une répartition angulaire relativement constante.

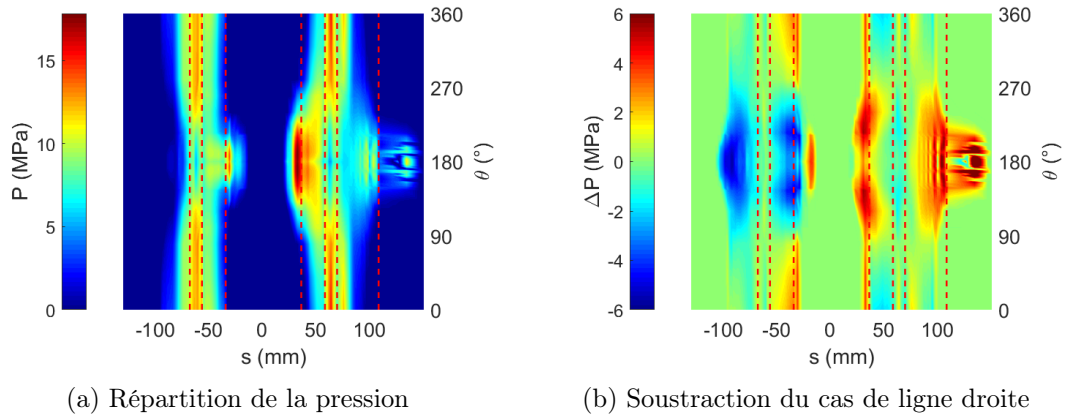


FIGURE 3.22 – Cas de ripé du pneu A1 ( $Z = 21780$  daN et  $Y = 0,3 Z$ )

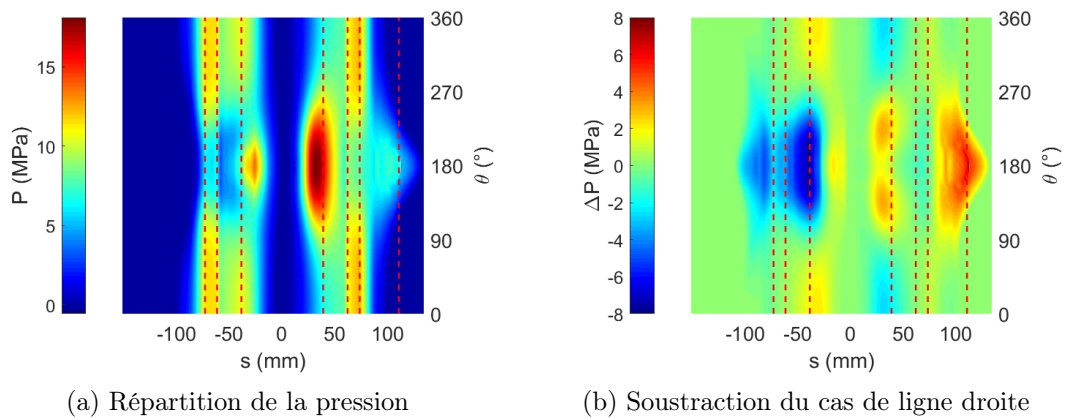


FIGURE 3.23 – Cas de ripé du pneu A2 ( $Z = 22542$  daN et  $Y = 0,53 Z$ )

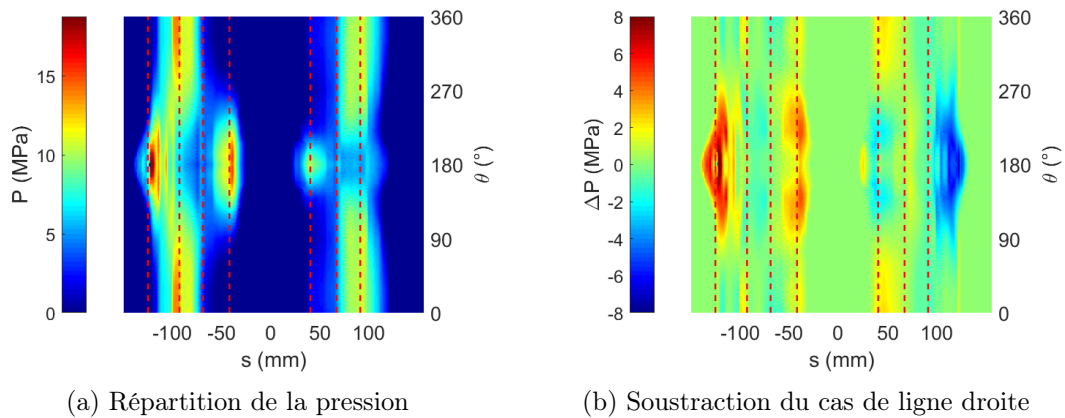


FIGURE 3.24 – Cas de ripé du pneu A3 ( $Z = 31330$  daN et  $Y = -0,3 Z$ )

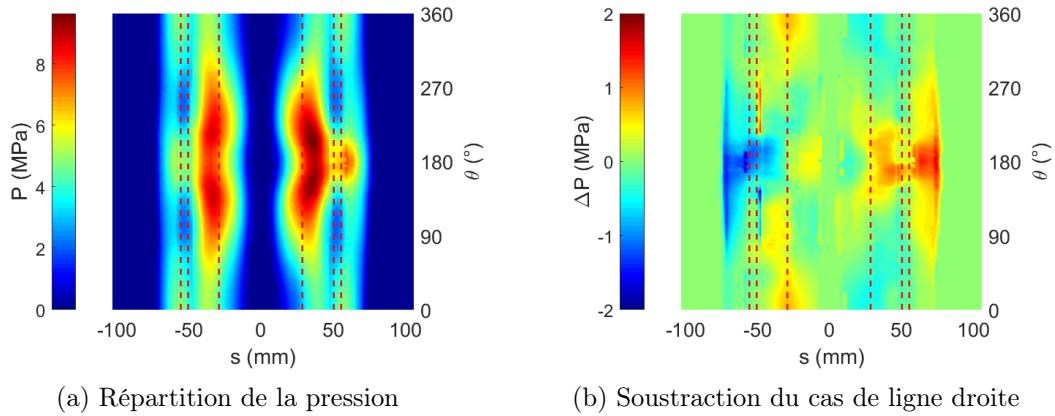


FIGURE 3.25 – Cas de ripé du pneu B1 ( $Z = 5868$  daN et  $Y = 0,15 Z$ )

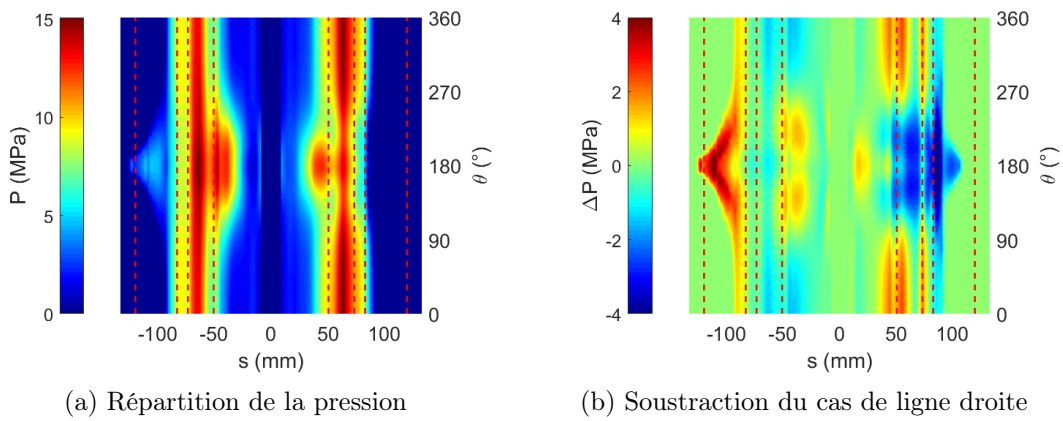


FIGURE 3.26 – Cas de ripé du pneu B2 ( $Z = 18022$  daN et  $Y = -0,3 Z$ )

On observe également que la zone 1 de la demi-roue opposée au sens du ripé est légèrement surchargée à l'opposé de la charge par rapport au cas de ligne droite. Ceci montre que le pneumatique a tendance à se mettre en biais lors des cas de ripé et à appuyer sur la partie haute de la demi-roue déchargée. Par ailleurs, pour le pneu A3, les champs de ripé ont été générés sur une jante dissymétrique, le côté extérieur étant légèrement surélevé (Figure 3.27). Pour un même niveau de charge ( $Y = \pm 0,2 Z$ ), on constate que les pressions de contact sont moins élevées sur le ripé positif. Le pneumatique ne vient pas s'appuyer sur la partie plate du bourrelet de la même manière que pour le ripé négatif, et un effort plus important est repris dans la zone 2 du bourrelet extérieur.

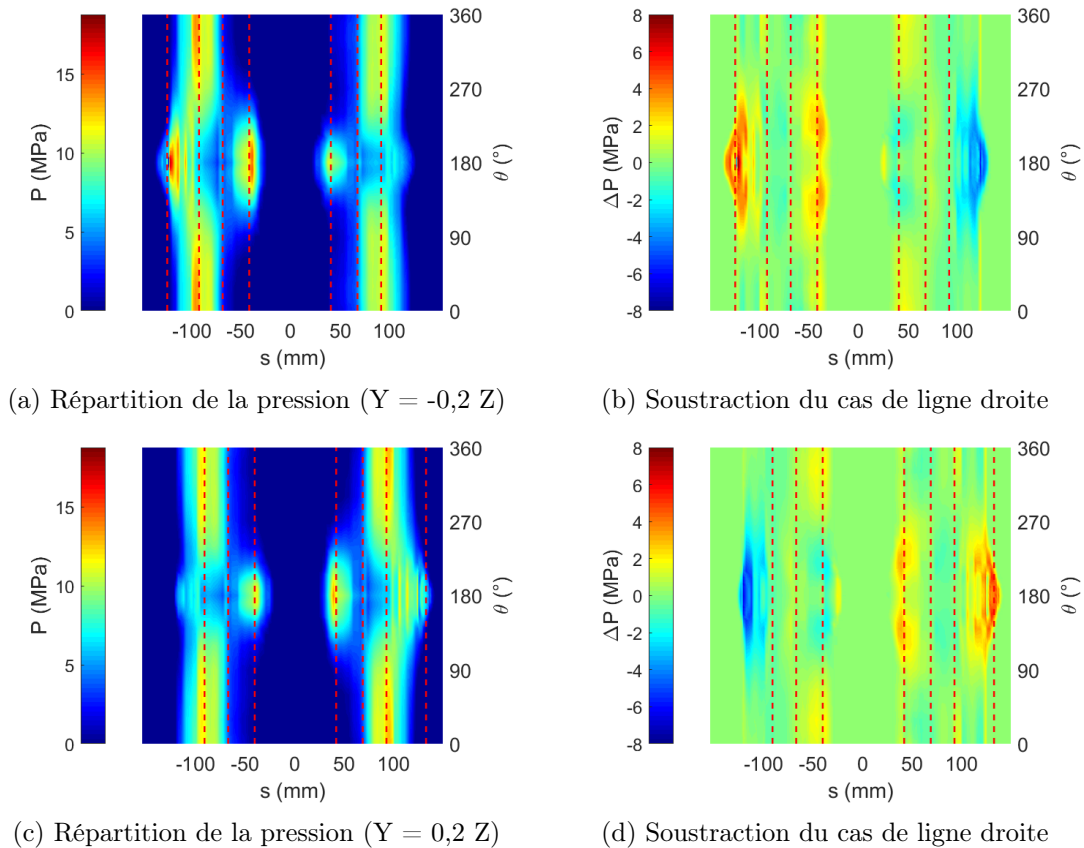


FIGURE 3.27 – Influence de la dissymétrie des bourrelets pour des cas de ripé du pneu A3

Les cas de ripé sont influencés à la fois par la charge verticale  $Z$  et par la charge latérale  $Y$ . En effet, plus la charge  $Z$  est élevée, plus le pneumatique s'écrase sur la partie haute des bourrelets et plus la matière « disponible » sous la charge est importante. Ainsi, lorsqu'un effort latéral  $Y$  est appliqué, le déport du point d'application des efforts du sol sur le pneu sera d'autant plus élevé que la charge  $Z$  initialement appliquée sera importante. La dissymétrie de chargement générée entre les demi-roues est donc directement impactée par cet effet. Le gonflage reste également un facteur prépondérant sur les répartitions de pression obtenues pour les cas de ripé. Plus le pneumatique est gonflé, plus il est difficile de l'écraser et donc de générer un déport pour une charge verticale  $Z$  donnée.

### 3.3 Premières tentatives

L'analyse des champs de pression de contact fournis par les pneumaticiens a permis d'identifier des tendances caractéristiques du comportement de l'interface pneu-jante en fonction des cas de charge étudiés. Dans les paragraphes suivants, des premières tentatives de paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante sont proposées en vue d'en réaliser des identifications inverses à partir des mesures disponibles. Les champs de pression fournis par les pneumaticiens servent de point de départ à leur définition. On rappelle néanmoins que **la jante est considérée comme infiniment rigide** par les pneumaticiens, ce qui constitue une hypothèse forte pour le manufacturier de roue. Le cadre est limité aux pneumatiques de technologie radiale. Les pneumatiques bias étant utilisés de manière marginale et présentant un comportement radicalement différent des pneumatiques radiaux, il semble *a priori* difficile de les décrire en utilisant un même formalisme.

#### 3.3.1 Séries de Fourier

La paramétrisation des chargements pneu-jante basée sur l'utilisation des séries de Fourier a été proposée par R. Gras lors de son post-doctorat (Gras, 2015a ; Gras *et al.*, 2015b) et inspirée des travaux menés conjointement par l'université de Notre Dame et le Flight Dynamics Directorate de la base aérienne américaine Wright-Patterson (Spencer *et al.*, 1993 ; Kirkner *et al.*, 1993 ; Kandarpa *et al.*, 1994 ; Schudt *et al.*, 1994 ; Spencer *et al.*, 1995). On peut également citer les travaux de Stearns (2000) pour l'industrie automobile. Cette paramétrisation consiste à décomposer la distribution de pression de contact à l'interface pneu-jante comme une somme de fonctions trigonométriques. La décomposition est unique en raison des propriétés d'orthogonalité de ces fonctions. Il s'agit donc d'une manière efficace et relativement simple de paramétrer les chargements recherchés. La formulation de cette paramétrisation est détaillée et illustrée successivement pour des cas de chargement à deux et trois dimensions.

#### Cas 2D

On considère un champ de pression de contact axisymétrique à l'interface pneu-jante, résultant par exemple du gonflage du pneumatique sur la roue. L'analyse peut donc se limiter à l'étude d'une section de la roue et de la variation de la pression de contact en fonction de l'abscisse curviligne, calculée le long du profil de jante. Pour chaque point  $j$  du profil de jante ( $j \in [0, m - 1]$ ), correspondant à l'abscisse curviligne  $s_j$ , la valeur de la pression de contact  $P_j$  est paramétrée par une somme de fonctions cosinus

$$P_j = \sum_p A_p \cos(2\pi f_p s_j + \phi_p) \quad \forall j \in [0, m - 1] \quad (3.1)$$

avec  $A_p$ ,  $f_p$  et  $\phi_p$  les amplitudes, fréquences et phases associées à chaque fonction. De manière équivalente, la distribution de pression pourrait être paramétrée par une somme de fonctions cosinus et sinus avec une amplitude associée à chacune d'entre elles, rendant ainsi la paramétrisation linéaire par rapport à ses paramètres. Pour déterminer le nombre de fonctions cosinus nécessaires à la bonne description du champ étudié et leurs paramètres (amplitudes et phases), on réalise une transformation de Fourier discrète (DFT) de la distribution de pression

$$F_p = \sum_{j=0}^{m-1} \omega_m^{jp} P_j \quad \forall p \in [0, m - 1] \quad (3.2)$$

avec  $\omega_m = \exp(-2\pi i/m)$  une racine  $m$ -ième de l'unité. Puisque la distribution de pression de contact est assimilée à un signal à valeurs réelles, sa transformée de Fourier possède la propriété dite de symétrie conjuguée (ou hermitienne), signifiant que le spectre d'amplitude est une fonction paire de la fréquence tandis que le spectre de phase est une fonction impaire. La connaissance d'une moitié du spectre ( $p \in [0, m/2]$ ) et l'utilisation de cette propriété permettent donc de reconstruire complètement le signal étudié. On peut alors tracer le spectre d'amplitude associé et effectuer un filtrage en ne conservant que les fréquences dont l'amplitude est supérieure à une certaine valeur seuil. Les paramètres  $A_p$  et  $\phi_p$  de chaque fonction cosinus s'obtiennent par

$$A_p = \begin{cases} \frac{|F_p|}{m} & \text{si } p = 0 \text{ ou } m/2 \\ \frac{2|F_p|}{m} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \text{ ou } m/2 \\ \arctan\left(\frac{\text{Im}(F_p)}{\text{Re}(F_p)}\right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

avec  $|F_p|$  l'amplitude de la fréquence  $f_p$  présente dans le signal. Les différentes fréquences dépendent uniquement de la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  de la distribution de pression

$$f_p = \frac{pf_s}{m} \quad \forall p \in [0, m/2] \quad (3.4)$$

et ne sont donc pas considérées comme des paramètres à identifier. Par conséquent, en filtrant le signal jusqu'à une fréquence  $f_p$  inférieure à la fréquence de Nyquist (*i.e.*,  $p \in [0, m/2 - 1]$ ), le nombre de paramètres nécessaires à la description de la distribution de pression étudiée est égal à  $2p + 1$  ( $p + 1$  amplitudes et  $p$  phases).

Afin d'illustrer cette paramétrisation, on s'intéresse au couple pneu-roue utilisé lors des essais statiques présentés au Chapitre 2. Pour ce pneu, on dispose du champ de pression de contact pneu-jante d'un cas de gonflage à une pression de 14,8 bar. Ce champ est préalablement projeté sur le maillage du modèle éléments finis associé afin d'obtenir la répartition de la pression sur l'ensemble de la zone de contact pneu-jante potentielle (Figure 3.28).

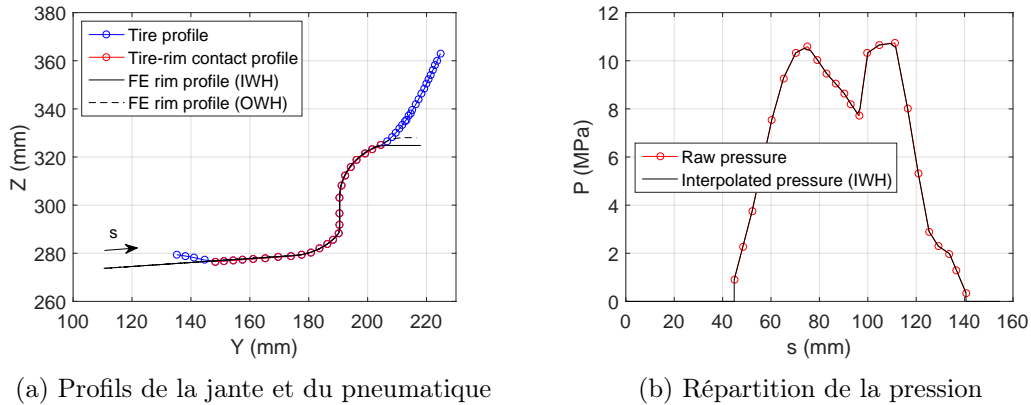


FIGURE 3.28 – Projection des données du pneumatique sur le maillage éléments finis

En effet, puisque la délimitation de la zone de contact pneu-jante effective est inconnue du fabricant de roue avant la réception de ces données et que celle-ci varie en fonction des charges appliquées, la recherche des chargements doit s'opérer sur l'ensemble du périmètre de contact potentiel. Ceci permet de conserver un formalisme commun quel que soit le pneumatique et le cas de charge étudiés.

La paramétrisation en séries de Fourier du champ de pression étudié et les résidus associés sont illustrés sur la Figure 3.29 en conservant les trois et cinq premières fréquences.

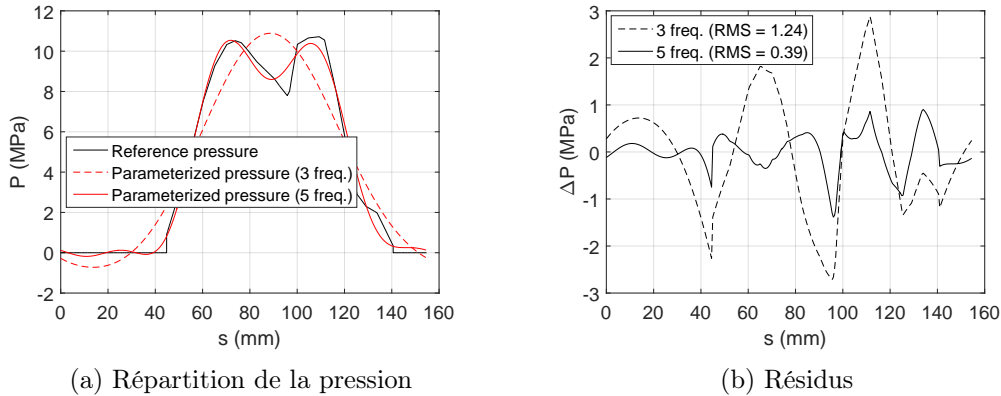


FIGURE 3.29 – Paramétrisation en séries de Fourier – Cas de gonflage du pneu A2

En conservant les trois premières fréquences, on constate que le champ paramétré ne présente qu'un seul pic de pression. De plus, des pressions négatives apparaissent aux extrémités de la zone d'interface. Cinq fréquences sont nécessaires afin de dissocier convenablement les deux pics de pression du champ de référence, associés respectivement aux efforts dus au serrage de la tringle du pneumatique et aux efforts d'écartement dans la zone verticale du bourrelet. L'écart moyen entre le champ de référence et le champ paramétré est alors stable et inférieur à 1 MPa, ce qui est supposé négligeable sur le comportement mécanique de la roue. En effectuant un filtrage à la fréquence de coupure  $f_4$ , 9 paramètres (5 amplitudes et 4 phases) sont donc nécessaires afin de paramétrer le chargement.

Dans les travaux de Gras (2015a), le nombre de paramètres nécessaires à la description du même champ était inférieur et estimé à 5 (3 amplitudes et 2 phases). Ceci s'explique par la zone de contact considérée, qui, dans ce cas, était limitée à la zone prédite par le pneumaticien (indiquée en rouge sur la Figure 3.28a), contraignant le chargement à évoluer dans cette zone plus restreinte. Des études avaient également été menées afin de valider la convergence des déplacements dans la zone de mesure pour ce nombre de paramètres.

A titre d'exemple supplémentaire, on trace sur la Figure 3.30 les résultats obtenus pour deux autres pneumatiques pouvant être montés sur la roue étudiée. En conservant toujours les cinq premières fréquences, on constate que les deux chargements sont bien représentés et qu'ils peuvent être correctement différenciés avec les paramètres utilisés précédemment.

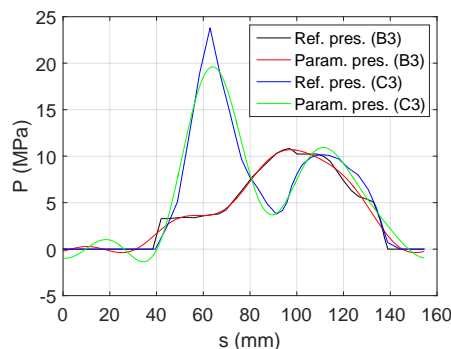


FIGURE 3.30 – Paramétrisation en séries de Fourier – Cas de gonflage des pneus B3 et C3

**Cas 3D**

Dans le cas à trois dimensions, on considère un champ de pression de contact à l'interface pneu-jante variant à la fois en fonction de l'abscisse curviligne, calculée le long du profil de jante, et de l'azimut. La pression de contact  $P_{j,k}$  en chaque point de la zone d'interface pneu-jante, défini par l'abscisse curviligne  $s_j$  ( $j \in [0, m-1]$ ) et l'azimut  $\theta_k$  ( $k \in [0, n-1]$ ), est paramétrée par une série de Fourier à deux dimensions

$$P_{j,k} = \sum_p \sum_q A_{p,q} \cos(2\pi(f_p s_j + f_q \theta_k) + \phi_{p,q}) \quad (3.5)$$

avec  $A_{p,q}$ ,  $f_p$ ,  $f_q$  et  $\phi_{p,q}$  les amplitudes, fréquences et phases associées. Comme précédemment, on réalise une transformation de Fourier discrète du champ de pression

$$F_{p,q} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_m^{jp} \omega_n^{kq} P_{j,k} \quad \forall (p, q) \in [0, m-1] \times [0, n-1] \quad (3.6)$$

afin d'obtenir les paramètres  $A_{p,q}$  et  $\phi_{p,q}$  de chaque fonction cosinus

$$A_{p,q} = \frac{|F_{p,q}|}{mn} \quad \text{et} \quad \phi_{p,q} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(F_{p,q})}{\text{Re}(F_{p,q})}\right) \quad (3.7)$$

tandis que les fréquences  $f_p$  et  $f_q$  sont déterminées par la fréquence d'échantillonnage de la distribution de pression dans chacune des directions.

$$f_p = \frac{p f_s}{m} \quad \text{et} \quad f_q = \frac{q f_\theta}{n} \quad (3.8)$$

Pour effectuer un filtrage du champ étudié jusqu'à une fréquence de coupure  $f_p$  ( $p \in [0, m/2 - 1]$ ) selon le profil de jante et  $f_q$  ( $q \in [0, n/2 - 1]$ ) en azimut, il suffit d'annuler certains termes dans l'espace fréquentiel

$$F_{u,v} = 0 \quad \forall (u, v) \in [p+1, m-1-p] \times [q+1, n-1-q] \quad (3.9)$$

et d'effectuer une transformation inverse afin d'obtenir le champ filtré. Toutefois, la propriété de symétrie conjuguée étendue aux deux dimensions de l'espace indique qu'une moitié de la transformée de Fourier correspond à l'image miroir du conjugué de l'autre. On peut aussi bien considérer les parties gauche et droite de la transformée, que les parties haute et basse. Par conséquent, le nombre de paramètres indépendants nécessaires à la description du champ après filtrage est égal à  $(2p+1) \times (2q+1)$ .

Pour évaluer le nombre de paramètres nécessaires à la description des champs fournis par les pneumaticiens, on étudie un champ de ligne droite fourni pour le pneu utilisé lors des essais statiques. Ce champ est préalablement projeté sur le maillage du modèle par éléments finis associé puis la paramétrisation en séries de Fourier est appliquée. Compte tenu des résultats obtenus pour le cas du gonflage, on choisit de conserver les cinq premières fréquences (fréquence de coupure  $f_4$ ) pour la variation de la pression en fonction de l'abscisse curviligne. En faisant varier le nombre de fréquences en azimut, on constate qu'un filtrage à la fréquence de coupure  $f_3$  suffit à faire converger l'écart moyen entre le champ de référence et le champ paramétré (RMS = 0,4 MPa). Les résultats sont illustrés sur la Figure 3.31. Pour ce filtrage particulier, 63 paramètres (32 amplitudes et 31 phases) sont nécessaires pour décrire le champ étudié. Le nombre de paramètres à identifier est donc conséquent.

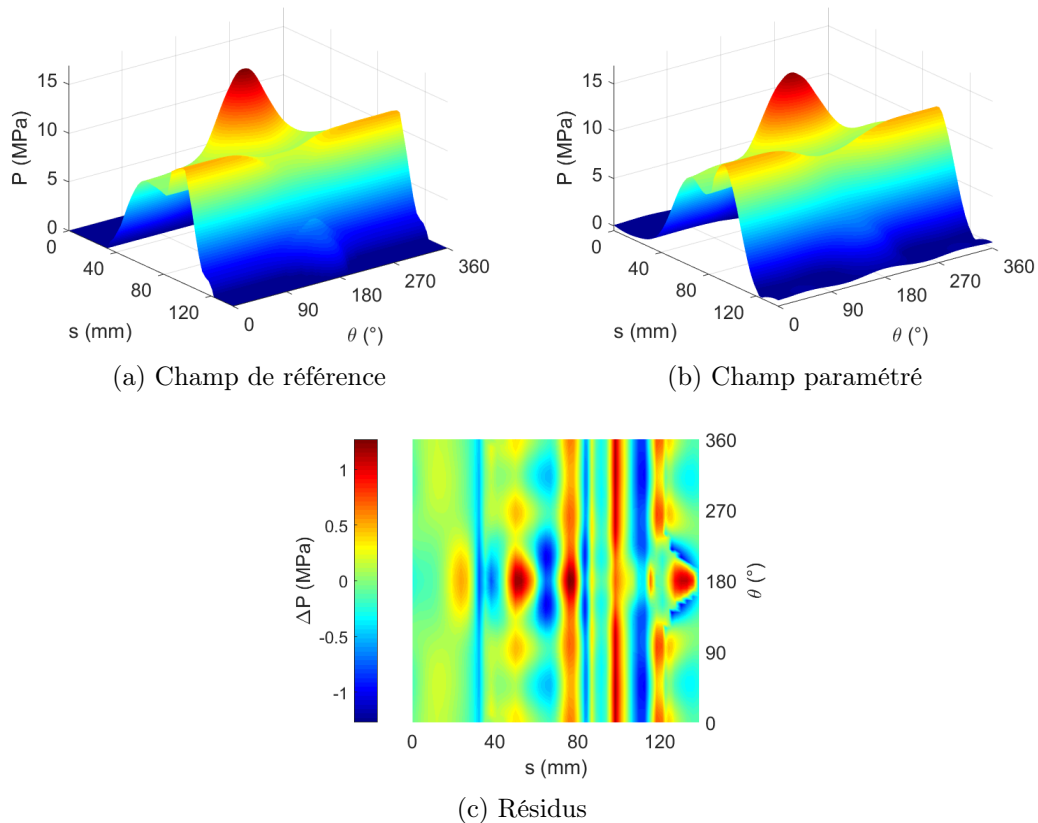


FIGURE 3.31 – Paramétrisation en séries de Fourier – Cas de ligne droite du pneu A2

A titre d'exemple supplémentaire, on montre sur la Figure 3.32 les résultats obtenus pour le pneu C3 en conservant le même nombre de paramètres.

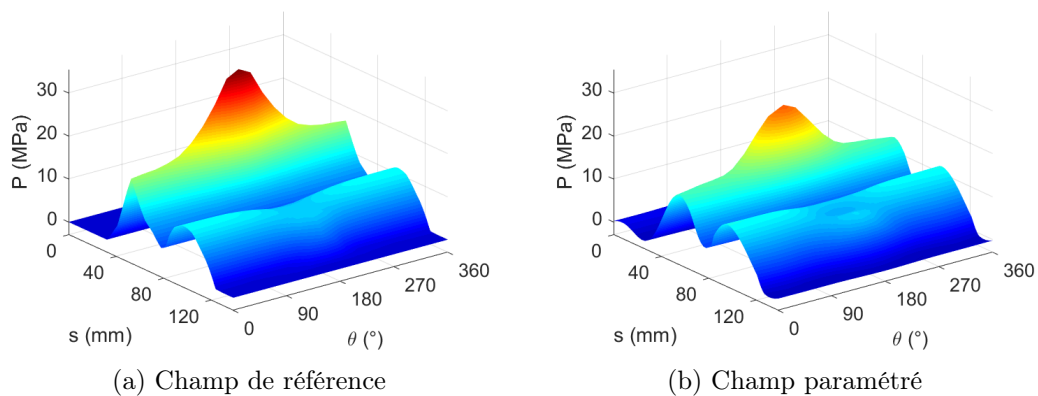


FIGURE 3.32 – Paramétrisation en séries de Fourier - Cas de ligne droite du pneu C3

Les écarts entre le champ de référence et le champ paramétré sont plus importants que précédemment et peuvent atteindre 8 MPa (RMS = 1,48 MPa). Des paramètres supplémentaires sont donc nécessaires pour obtenir une représentation plus fiable du champ de référence. De plus, on fait ici l'hypothèse que le champ de pression est symétrique entre les deux côtés de la roue. Dans le cas contraire, et notamment pour les cas de ripé, le nombre de paramètres devrait être quasiment doublé pour le représenter convenablement.

On voit donc apparaître les limites liées à cette paramétrisation. En effet, si son utilisation a permis de démontrer la faisabilité de l'identification inverse des chargements à l'interface pneu-jante pour un cas de gonflage (Gras, 2015a ; Gras *et al.*, 2015b), le nombre élevé de paramètres nécessaires à la représentation des cas 3D constitue un point bloquant pour leurs identifications, ne serait-ce que par le nombre de calcul de sensibilité à effectuer et les temps de calcul associés. De plus, cette paramétrisation étant très générale et applicable à tout type de signal, elle n'intègre aucune connaissance sur le comportement mécanique de l'interface pneu-jante. Pour ces raisons, une nouvelle paramétrisation des chargements a été recherchée.

### 3.3.2 Somme de pics élémentaires

Les champs de pression de contact pneu-jante fournis par les pneumaticiens sont caractérisés par des pics de pression positionnés dans certaines zones caractéristiques de la jante (*bead seat, side, flange, etc.*) et à différents azimuts. On propose donc de paramétrer ces champs par une somme pondérée de pics élémentaires, représentatifs des efforts exercés par le pneu sur la jante dans les différentes zones. Une approche similaire a été utilisée dans les travaux de Stearns (2000) et Stearns *et al.* (2006) pour paramétrer la variation de la pression de contact pneu-jante en fonction de l'azimut sur une roue d'automobile. Un unique pic de forme sinusoïdale paramétré par une amplitude et un angle limite permettait de décrire la répartition angulaire de la pression de contact.

On considère de nouveau un champ de pression de contact à l'interface pneu-jante variant à la fois en fonction de l'abscisse curviligne, calculée le long du profil de jante, et de l'azimut. La pression de contact  $P_{j,k}$  en chaque point de la zone d'interface, défini par l'abscisse curviligne  $s_j$  ( $j \in [0, m-1]$ ) et l'azimut  $\theta_k$  ( $k \in [0, n-1]$ ), est paramétrée par une fonction  $f$  définie comme une somme pondérée de pics élémentaires  $g_i$  dont les paramètres sont introduits par un vecteur  $\{\boldsymbol{\lambda}\}$

$$f(s, \theta | \{\boldsymbol{\lambda}\}) = \sum_{i=1}^l h_i g_i(s, \theta) \quad (3.10)$$

avec  $\{\boldsymbol{\lambda}\} = \left\{ p_{s_1} \ p_{\theta_1} \ w_{s_1} \ w_{\theta_1} \ h_1 \ \dots \ p_{s_l} \ p_{\theta_l} \ w_{s_l} \ w_{\theta_l} \ h_l \right\}^T$  et  $g$  une fonction définissant la forme de pic choisie. Plusieurs types de pic élémentaire peuvent être utilisés (triangulaire, gaussien, sinusoïdal, *etc.*). Quelle que soit leur forme, les pics sont paramétrés par leurs positions ( $p_s$  et  $p_\theta$ ), leurs largeurs à mi-hauteur ( $w_s$  et  $w_\theta$ ), et leur hauteur  $h$ . On établit ainsi un lien « physique » entre les paramètres et la mécanique en jeu. Les paramètres  $p_s$  et  $p_\theta$  peuvent, par exemple, être reliés à la position de la tringle du pneumatique sur la jante pour un pic positionné au niveau du *bead seat*. Les paramètres de chaque pic élémentaire (positions, largeurs et hauteur) contenus dans le vecteur  $\{\boldsymbol{\lambda}\}$  sont obtenus par la résolution d'un problème de minimisation grâce à une méthode des moindres carrés non-linéaires. L'algorithme itératif non-linéaire de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944 ; Marquardt, 1963) est utilisé pour minimiser la fonctionnelle  $S(\{\boldsymbol{\lambda}\})$  définie par

$$S(\{\boldsymbol{\lambda}\}) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} (P_{j,k} - f(s_j, \theta_k | \{\boldsymbol{\lambda}\}))^2 \quad (3.11)$$

et pour laquelle le nombre de pics est fixé préalablement. Les valeurs des paramètres sont initialisées manuellement. En utilisant  $l$  pics élémentaires pour décrire le champ de pression,  $3l$  (resp.  $5l$ ) paramètres doivent être identifiés pour un cas 2D (resp. 3D).

Dans la suite, seuls des pics gaussiens sont considérés, leur décroissance exponentielle permettant de mieux gérer la liaison entre plusieurs pics consécutifs. La fonction  $g$  associée est définie par

$$g(s, \theta) = \exp \left( - \left( 2\sqrt{\ln(2)} \times \frac{s - p_s}{w_s} \right)^2 - \left( 2\sqrt{\ln(2)} \times \frac{\theta - p_\theta}{w_\theta} \right)^2 \right) \quad (3.12)$$

où le facteur  $2\sqrt{\ln(2)}$  provient de la relation entre la largeur à mi-hauteur et l'écart-type d'une distribution normale.

Afin de déterminer le nombre de pics nécessaires à la description des champs fournis par les pneumaticiens, des études d'influence sont réalisées. La paramétrisation en somme de pics élémentaires est tout d'abord appliquée au cas de gonflage illustré sur la Figure 3.28. En faisant varier le nombre de pics entre un et quatre, on obtient les champs paramétrés de la Figure 3.33. Les écarts RMS par rapport au champ de référence sont également indiqués.

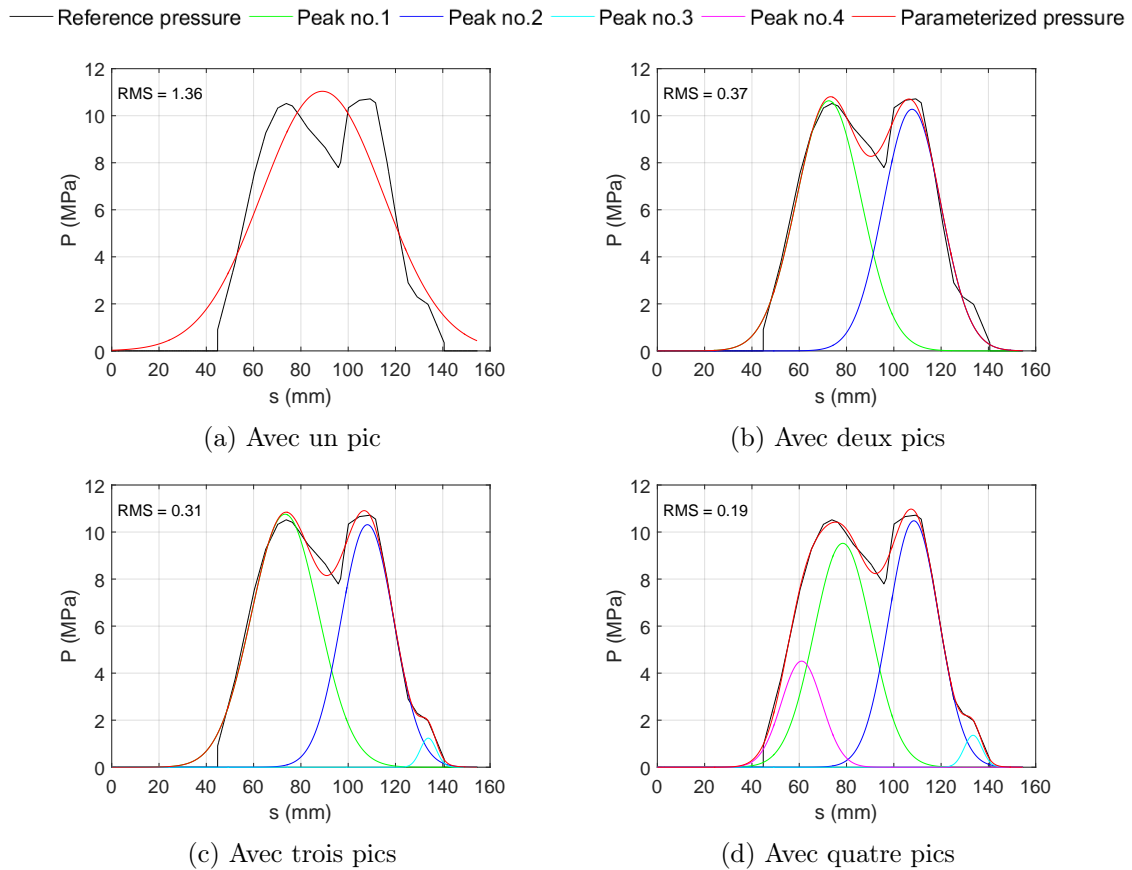


FIGURE 3.33 – Paramétrisation en somme de pics – Cas de gonflage du pneu A2

On constate que la paramétrisation à deux pics permet de bien représenter les deux zones d'efforts caractéristiques du cas de gonflage détaillées au paragraphe § 3.2.2. Les paramétrisations à trois et quatre pics ne font qu'enrichir très localement la distribution de pression et modifient peu sa forme générale. L'écart RMS entre le champ du pneumaticien et les champs paramétrés se stabilise en effet à partir d'une paramétrisation à deux pics. En étudiant uniquement le champ de pression, il n'apparaît donc pas nécessaire d'utiliser plus de deux pics gaussiens pour le décrire convenablement.

Néanmoins, on peut se demander si ce degré de précision est suffisant pour obtenir une réponse mécanique de la roue proche de celle obtenue avec le champ fourni par le pneumaticien. On propose donc d'étudier l'influence du nombre de pics sur plusieurs *quantités d'intérêt* afin de valider le choix d'utiliser uniquement deux pics pour paramétrer le champ de pression fourni.

On s'intéresse en particulier aux déplacements obtenus dans la zone de mesure observée par les caméras lors des essais présentés au Chapitre 2. La Figure 3.34 montre ainsi l'évolution des déplacements dans cette zone (cf. ligne rouge) pour les directions axiale  $Y$  et verticale  $Z$ . Ces résultats ont été obtenus en imposant le champ de pression paramétré avec plus ou moins de pics dans le calcul par éléments finis 3D de la roue. Les déplacements dus au pas de freinage/serrage ont été préalablement soustraits des déplacements induits par le gonflage. Par ailleurs, le chargement étant axisymétrique, les résultats sont tracés uniquement pour une section de la roue à l'azimut  $\theta = 0^\circ$ .

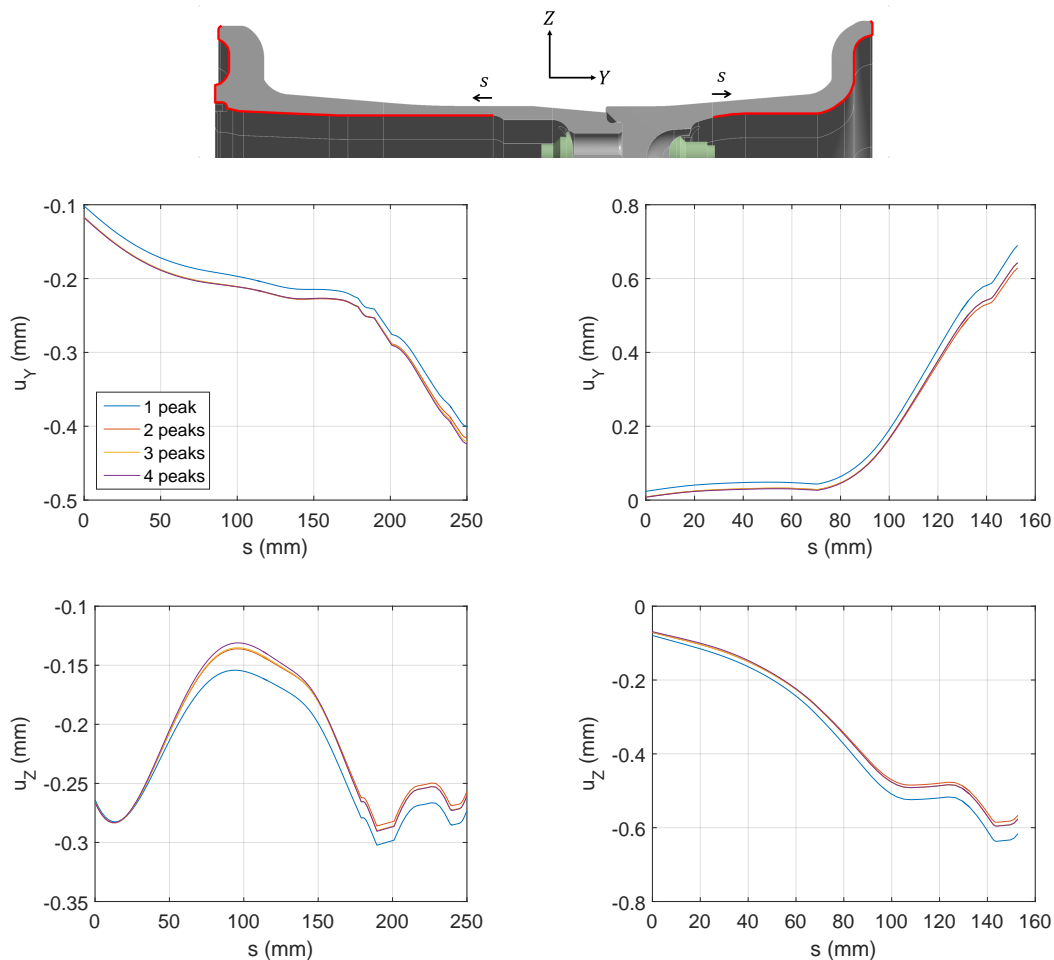


FIGURE 3.34 – Evolution des déplacements dans la zone de mesure en fonction du nombre de pics – Côté intérieur (gauche) et côté extérieur (droite)

On constate que les déplacements ont globalement convergé avec une paramétrisation à deux pics. Les écarts maximaux entre les paramétrisations à deux et quatre pics sont d'environ  $10 \mu\text{m}$ , soit l'ordre de grandeur de l'incertitude de mesure estimée (Gras, 2015a). En se basant uniquement sur les déplacements dans la zone de mesure, il serait donc difficile de dissocier et d'identifier plus de deux pics de pression pour le chargement étudié.

Pour compléter les résultats précédents, on compare les déformations obtenues aux positions des jauges utilisées lors des essais. On trace sur la Figure 3.35 l'évolution des déformations sur les côtés intérieur et extérieur de la roue en fonction du nombre de pics. Les déformations dues au pas de frettage/serrage ont été préalablement soustraites des déformations totales.

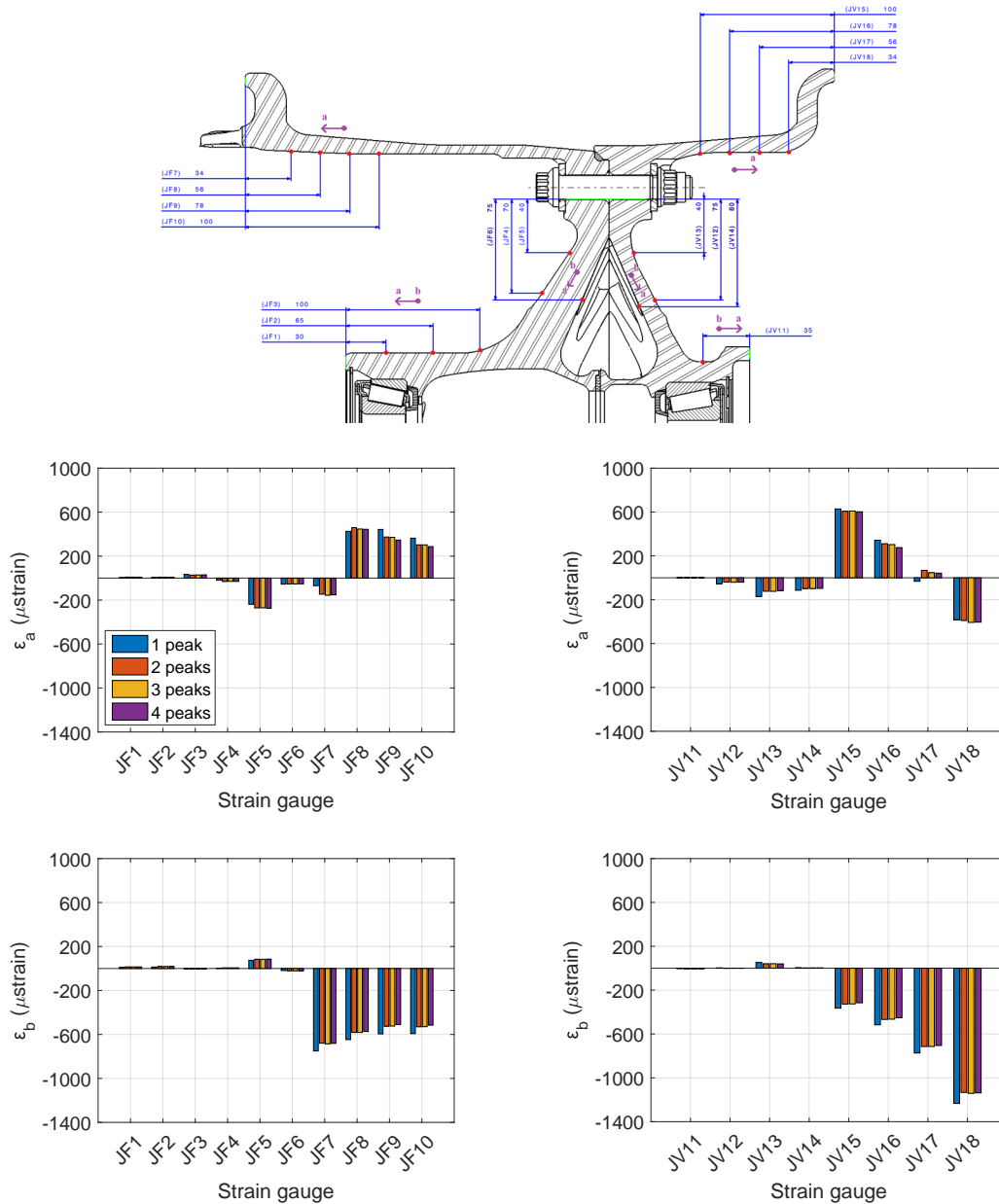


FIGURE 3.35 – Evolution des déformations aux positions des jauges en fonction du nombre de pics – Côté intérieur (gauche) et côté extérieur (droite)

Les déformations ont globalement convergé avec une paramétrisation à deux pics. L'écart absolu maximal entre les paramétrisations à deux et quatre pics est d'environ  $35 \mu\text{def}$ . Pour le chargement de gonflage étudié, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser plus de deux pics gaussiens pour avoir une bonne description du champ de pression fourni par le pneumaticien et de son effet sur la réponse mécanique de la roue.

La paramétrisation en somme de pics élémentaires est désormais appliquée au cas de ligne droite illustré sur la Figure 3.31. Compte tenu des tendances observées au § 3.2.3, on choisit de représenter les trois zones d'efforts caractéristiques du cas de ligne droite en utilisant cinq pics gaussiens à trois dimensions. Les résultats obtenus sont illustrés sur la Figure 3.36. Les deux premiers pics permettent de représenter les efforts dans la zone du *bead seat* qui proviennent à la fois du serrage initial de la tringle du pneumatique (pic bleu) et de la surcharge apportée par l'effort vertical (pic orange). Les pics colorés en jaune et situés au niveau de la partie verticale du bourrelet modélisent les efforts d'écartement. Ils sont symétriques par rapport à l'azimut  $\theta = 180^\circ$  afin de représenter la décroissance observée sous la charge. La connaissance des paramètres d'un seul de ces pics permet donc de reconstruire la distribution de pression dans cette partie de la jante. Enfin, un dernier pic (violet) est utilisé pour simuler l'appui du pneu sur la partie horizontale du bourrelet à l'azimut  $\theta = 180^\circ$ .

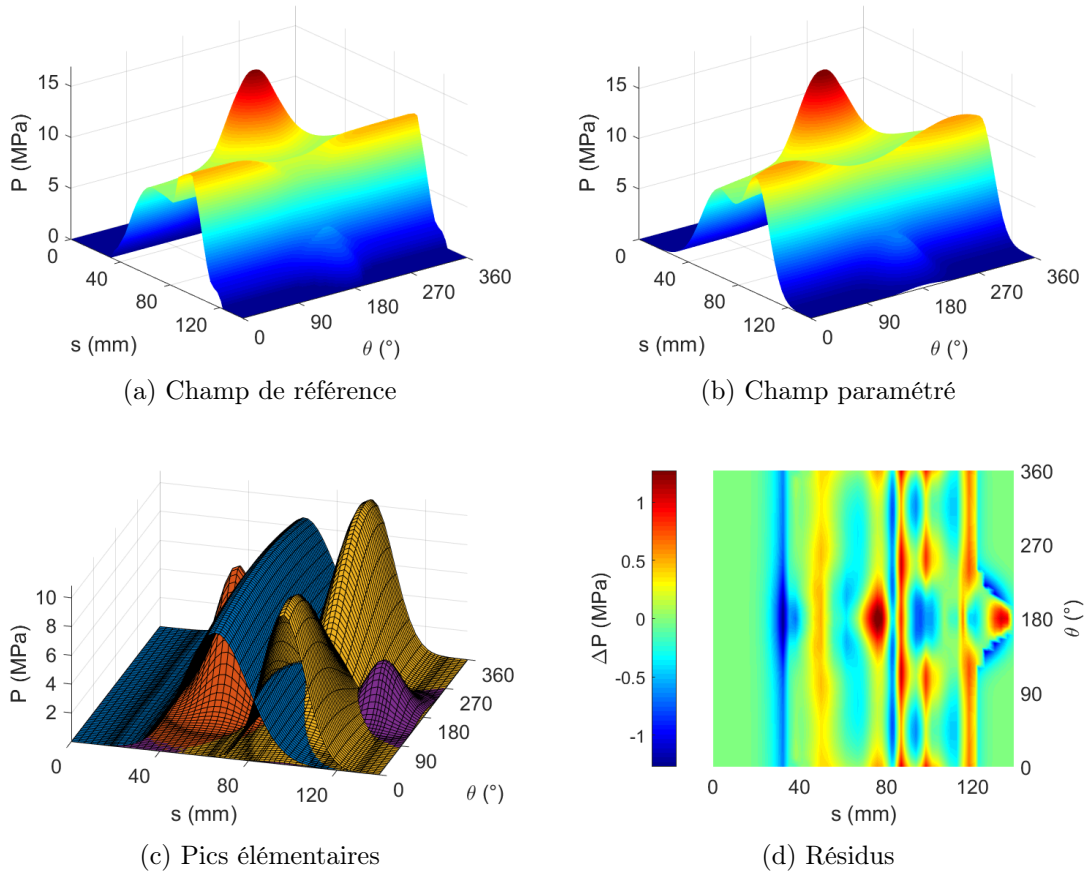


FIGURE 3.36 – Paramétrisation en somme de pics – Cas de ligne droite du pneu A2

Quatre pics indépendants sont donc utilisés pour décrire le champ de pression fourni par le pneumaticien, ce qui représente un total de 20 paramètres à identifier (8 positions, 8 largeurs et 4 amplitudes). On constate que les écarts entre le champ de référence et le champ paramétré sont relativement faibles. L'écart RMS vaut 0,35 MPa et est inférieur à l'écart obtenu en utilisant une paramétrisation en séries de Fourier à 63 paramètres (0,4 MPa). Pour une représentation de meilleure qualité, le nombre de paramètres à identifier a donc été divisé par trois.

Pour illustrer cette paramétrisation sur un autre exemple, on compare sur la Figure 3.37 le champ de référence du cas de ligne droite du pneumatique C3 et le champ paramétré en utilisant également quatre pics gaussiens indépendants.

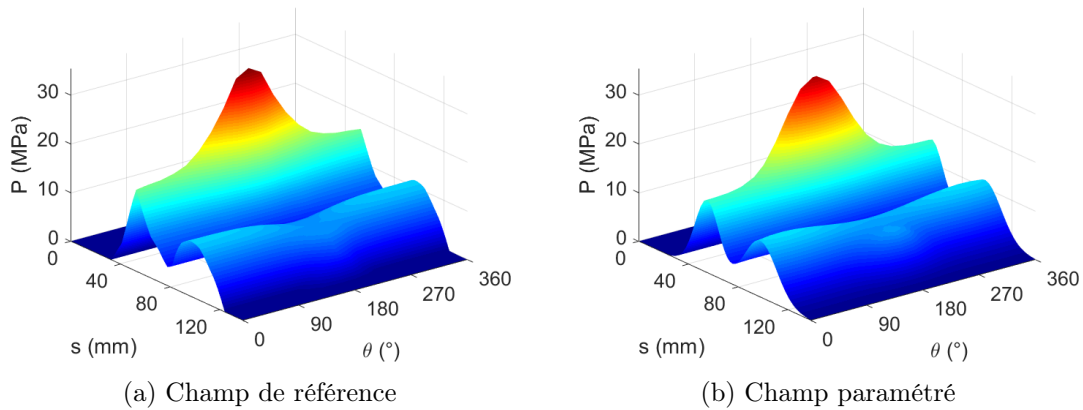


FIGURE 3.37 – Paramétrisation en somme de pics – Cas de ligne droite du pneu C3

Les résultats sont satisfaisants et présentent des écarts bien moins importants que ceux obtenus avec la paramétrisation en séries de Fourier. L'écart RMS vaut 0,72 MPa et l'écart maximal est d'environ 2 MPa (à rapprocher de 1,48 MPa et 8 MPa, respectivement). De plus, le choix des paramètres retenus peut s'interpréter physiquement par les différentes zones d'appui du pneu sur la jante. L'ajout de pics supplémentaires pourrait permettre de réduire encore les écarts mais leur justification d'un point de vue physique serait difficile.

### 3.3.3 Discussion

Dans les paragraphes précédents, des premières tentatives de paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante ont été proposées. L'avantage des séries de Fourier réside dans le fait que la décomposition obtenue est unique en raison des propriétés d'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus. Toutefois, si le nombre de paramètres nécessaires pour décrire un cas de gonflage est plutôt faible, celui-ci augmente fortement pour la représentation des cas de chargement 3D, remettant en cause la faisabilité des identifications inverses. La paramétrisation en somme de pics élémentaires présente quant à elle l'avantage d'intégrer une certaine compréhension du comportement de l'interface pneu-jante par la modélisation des différentes zones d'appui du pneu sur la jante. De plus, le nombre de paramètres nécessaires pour la description des cas de chargement 2D et 3D est relativement faible. Cependant, comme il sera démontré dans le Chapitre 4, des combinaisons différentes des valeurs de largeur et de hauteur des pics peuvent induire une même résultante d'effort. Par conséquent, deux ensembles de paramètres différents pourraient mener à une réponse mécanique de la roue identique.

Le choix de la paramétrisation n'est donc pas trivial mais il représente une étape déterminante pour le processus d'identification inverse. Dans le cas où les mesures sont déjà existantes, la sélection entre plusieurs paramétrisations peut s'effectuer par une analyse de sensibilité évaluant l'effet d'une variation des paramètres de chacune d'entre elles sur les mesures disponibles (Turanyi, 1990 ; Petelet, 2007). On cherchera alors à conserver la paramétrisation qui permet de représenter au mieux les données, avec un minimum de paramètres et dont les incertitudes sur les paramètres identifiés sont les plus faibles (Tarantola et Valette, 1982 ; Malinverno, 2000 ; Martinsons, 2005 ; Baraldi *et al.*, 2014).

Cependant, les paramétrisations proposées précédemment tentent seulement de reproduire les champs de pression de contact pneu-jante déterminés par les pneumaticiens, **en considérant la roue comme un solide indéformable**. Ces champs sont obtenus grâce à une connaissance approfondie du pneumatique que ne possède pas le manufacturier de roue. Il est donc difficile d'établir un lien direct entre ces champs et la réponse mécanique de la roue. La paramétrisation consistant avant tout à introduire des informations *a priori* pour réduire le nombre d'inconnues du problème inverse, en se basant sur une certaine intuition (Chavent et Bissell, 1998), on peut se demander si une paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante dépendant uniquement de la réponse mécanique de la roue pourrait être définie. Le but est de trouver une base minimale de fonctions de forme permettant de décomposer les chargements de manière unique et qui soit la plus objective et la plus robuste possible pour le manufacturier de roue. Cette question fait l'objet de la prochaine section.

### 3.4 Paramétrisation optimale

On propose de définir une nouvelle paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante, plus objective et plus robuste que les précédentes, basée uniquement sur la réponse mécanique de la roue. Pour ce faire, les modes propres statiques de la matrice de raideur de la roue condensée sur l'interface pneu-jante sont utilisés comme base de décomposition des chargements (Cosseron *et al.*, 2019).

Un état de l'art sur les principales méthodes de sous-structuration est tout d'abord réalisé. La méthodologie générale permettant de déterminer les modes propres statiques d'interface pneu-jante est ensuite présentée et l'apport des propriétés des structures à symétrie cyclique est détaillé. Les résultats obtenus sont illustrés pour une modélisation 3D complète de la roue. Par la suite, des critères sont proposés afin de déterminer le nombre de modes nécessaires à l'approximation d'un chargement donné et sélectionner les plus dominants d'entre eux. Enfin, la paramétrisation est évaluée en projetant des chargements connus sur la base de modes retenue et l'impact sur la réponse mécanique de la roue est étudié.

#### 3.4.1 État de l'art sur les méthodes de sous-structuration

La croissance exponentielle des capacités de calcul numérique conduit à l'utilisation de modèles éléments finis de plus en plus complexes. Cependant, le nombre élevé de degrés de liberté (ddl) de ces modèles ne permet pas toujours de les résoudre dans des délais raisonnables vis-à-vis du processus de conception. Ce problème a conduit au développement des méthodes de sous-structuration (*Component Mode Synthesis*, CMS) dont l'objectif est de réduire la dimension du problème initial (Besset, 2006; Corus, 2015; Philippe, 2016; Joannin, 2017). Elles consistent à diviser la structure étudiée en entités plus petites, appelées sous-structures ou composants, à les analyser séparément sur la base de leurs modes propres, puis à reconstruire la solution sur la structure complète en imposant des conditions aux limites aux frontières de raccordement entre les sous-structures. Le couplage entre les sous-structures peut également faire l'objet d'une réduction supplémentaire en décomposant les opérateurs d'interface sur une base modale. Dans ce cadre, les degrés de liberté de chaque sous-structure sont partitionnés en degrés maîtres, situés sur les frontières de la sous-structure considérée, et en degrés de liberté esclaves situés à l'intérieur de celle-ci. Les principales méthodes décrites ci-après sont formulées dans le cadre de la dynamique des structures mais peuvent aussi être appliquées au cas particulier de la statique.

### Condensation statique de Guyan

On considère une structure modélisée par éléments finis et caractérisée par sa matrice de raideur  $[\mathbf{K}]$  reliant les forces nodales contenues dans le vecteur colonne  $\{\mathbf{f}\}$  au vecteur des déplacements nodaux  $\{\mathbf{u}\}$ . On partitionne les degrés de liberté de la structure en degrés de liberté maîtres (indice  $m$ ) et esclaves (indice  $s$ ). Le problème statique s'écrit

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}_s\} \\ \{\mathbf{f}_m\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{ss}] & [\mathbf{K}_{sm}] \\ [\mathbf{K}_{ms}] & [\mathbf{K}_{mm}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_s\} \\ \{\mathbf{u}_m\} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

La méthode de condensation statique de Guyan (Turner *et al.*, 1956 ; Guyan, 1965) repose sur l'hypothèse que les efforts d'inertie associés aux ddl esclaves choisis sont négligeables devant ceux des ddl maîtres ( $\{\mathbf{f}_s\} = \{\mathbf{0}\}$ ). Dans le cadre de la sous-structuration, on choisit généralement comme ddl maîtres ceux situés sur les frontières de la sous-structure. En résolvant la première ligne du système (3.13), on obtient une relation linéaire entre les déplacements des ddl maîtres et esclaves

$$\{\mathbf{u}_s\} = -[\mathbf{K}_{ss}^{-1}][\mathbf{K}_{sm}]\{\mathbf{u}_m\} = [\mathbf{\Psi}]\{\mathbf{u}_m\} \quad (3.14)$$

Les vecteurs contenus dans la matrice  $[\mathbf{\Psi}]$  sont appelés *modes statiques de liaison*. Ils correspondent aux déplacements des ddl esclaves obtenus en imposant successivement un déplacement unitaire sur chaque ddl maître et en encastrant les ddl maîtres restants. Ils permettent donc de prendre en compte l'effet du mouvement des ddl maîtres sur les ddl esclaves. La résolution de la deuxième ligne du système (3.13) permet d'obtenir un problème réduit dépendant uniquement des ddl maîtres

$$\{\mathbf{f}_m\} = ([\mathbf{K}_{mm}] - [\mathbf{K}_{ms}][\mathbf{K}_{ss}^{-1}][\mathbf{K}_{sm}])\{\mathbf{u}_m\} \quad (3.15)$$

soit

$$\{\hat{\mathbf{f}}\} = [\hat{\mathbf{K}}]\{\hat{\mathbf{u}}\} \quad (3.16)$$

avec  $[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{T}]^\top [\mathbf{K}] [\mathbf{T}]$ ,  $\{\hat{\mathbf{f}}\} = [\mathbf{T}]^\top \{\mathbf{f}\}$ ,  $[\mathbf{T}]^\top = \begin{bmatrix} [\mathbf{\Psi}] & [\mathbf{I}] \end{bmatrix}$  et  $\{\hat{\mathbf{u}}\} = \{\mathbf{u}_m\}$ . La matrice  $[\hat{\mathbf{K}}]$  est appelée matrice de raideur réduite de la structure (ou complément de Schur) tandis que la matrice  $[\mathbf{T}]$  correspond à la base du sous-espace de réduction. La condensation statique de Guyan n'introduit aucune approximation sur la matrice de raideur réduite obtenue puisque tous les éléments de la matrice originale contribuent. Cependant, cette réduction implique que le modèle numérique utilisé soit linéarisé.

### Méthode de Craig-Bampton

Dans le cadre de la dynamique des structures, la condensation statique de Guyan appliquée à la matrice de masse, partitionnée de la même manière que la matrice de raideur, ne permet pas de conserver la totalité de l'information puisque les efforts d'inertie des degrés de liberté esclaves sont négligés. Craig et Bampton (1968) ont proposé une variante de la méthode de Hurty (1965) afin de combler cette perte d'information. La base de réduction de la structure constituée des modes statiques de liaison est ainsi complétée d'un ensemble de modes propres linéaires dits à *interfaces fixes*, calculés en encastrant les ddl maîtres (généralement situés sur la frontière de la structure).

Les modes linéaires à interfaces fixes sont extraits du problème aux valeurs propres suivant

$$([\mathbf{K}_{ss}] - \omega^2[\mathbf{M}_{ss}]) \{\boldsymbol{\varphi}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.17)$$

En général, on ne considère qu'un nombre restreint  $r$  de modes à interfaces fixes, sélectionnés par un critère fréquentiel. La matrice représentative de la base du sous-espace de réduction devient

$$[\mathbf{T}_{CB}] = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\varphi}_r] & [\boldsymbol{\Psi}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{I}] \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La matrice de transformation  $[\mathbf{T}_{CB}]$  permet de définir le changement de variable

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_s\} \\ \{\mathbf{u}_m\} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}_{CB}] \begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{u}_m\} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

et de réduire la dimension du problème à résoudre. Le vecteur de taille réduite  $\{\hat{\mathbf{u}}\}$  est constitué des composantes modales  $\{\mathbf{p}\}$  relatives à l'influence des modes à interfaces fixes sélectionnés et des degrés de liberté maîtres  $\{\mathbf{u}_m\}$  conservés. On peut alors déterminer les matrices de raideur et de masse réduites

$$[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{T}_{CB}]^\top [\mathbf{K}] [\mathbf{T}_{CB}] \quad \text{et} \quad [\hat{\mathbf{M}}] = [\mathbf{T}_{CB}]^\top [\mathbf{M}] [\mathbf{T}_{CB}] \quad (3.20)$$

On notera que cette méthode conduit uniquement à un couplage en masse des composantes modales et des degrés de liberté maîtres, et non pas en raideur en raison des propriétés des modes statiques. De nombreuses variantes de cette méthode existent mais ne seront pas détaillées ici. On peut notamment citer les travaux de [MacNeal \(1971\)](#) et [Rubin \(1975\)](#).

### Méthode de double synthèse modale

On considère une structure divisée en  $N$  sous-structures. Chaque sous-structure est réduite sur son interface avec les sous-structures adjacentes en utilisant la méthode de Craig-Bampton. Malgré son fort potentiel de réduction, cette méthode est limitée par le nombre de degrés de liberté aux frontières. Ainsi, dans le cas de structures complexes, le modèle réduit peut encore avoir une dimension trop élevée pour être résolu dans des délais acceptables. Pour pallier ce problème, une méthode de double synthèse modale a été proposée afin de filtrer la dynamique des interfaces ([Jézéquel, 1985](#)). Elle consiste à réduire les frontières sur la base des modes propres correspondant à la projection des matrices de raideur et de masse sur le sous-espace engendré par les modes statiques de liaison. Pour l'appliquer, il faut tout d'abord construire les matrices de raideur et de masse réduites de la structure complète par assemblage des super-éléments obtenus par la méthode de Craig-Bampton

$$[\hat{\mathbf{K}}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{K}}_p^1] & & & \\ & \ddots & & \\ & & [\hat{\mathbf{K}}_p^N] & \\ & & & [\hat{\mathbf{K}}_m] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\hat{\mathbf{M}}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{M}}_p^1] & & & [\hat{\mathbf{M}}_{pm}^1] \\ & \ddots & & \vdots \\ & & [\hat{\mathbf{M}}_p^N] & [\hat{\mathbf{M}}_{pm}^N] \\ [\hat{\mathbf{M}}_{mp}^1] & \cdots & [\hat{\mathbf{M}}_{mp}^N] & [\hat{\mathbf{M}}_m] \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Le problème aux valeurs propres associé aux sous-blocs correspondant aux frontières entre les sous-structures est ensuite résolu

$$\left([\hat{\mathbf{K}}_m] - \omega^2[\hat{\mathbf{M}}_m]\right) \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.22)$$

Le problème initial réduit sur les frontières entre les sous-structures peut alors être de nouveau réduit en ne sélectionnant qu'un nombre restreint  $r$  des vecteurs propres obtenus, le plus souvent en considérant un critère fréquentiel. Les modes conservés sont appelés *modes de branche* (Jézéquel, 1985; Besset, 2006; Gatt, 2017) ou *modes d'interface* (Tran, 2001; Tran, 2009). Une nouvelle matrice de transformation  $[\mathbf{T}_{DMS}]$  est alors définie afin de projeter les matrices réduites sur cette nouvelle base

$$[\mathbf{T}_{DMS}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_p^1] & & & \\ & \ddots & & \\ & & [\mathbf{I}_p^N] & \\ & & & [\mathbf{v}_r] \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

### 3.4.2 Méthodologie générale

Dans le cas de la roue d'aéronef, le pneumatique et la roue peuvent être considérés comme deux sous-structures d'un même ensemble. Un modèle par éléments finis associant ces deux composants pourrait alors être réduit en utilisant les méthodes présentées précédemment. Toutefois, notre objectif est différent et consiste à définir une paramétrisation optimale des chargements appliqués par le pneumatique sur la roue afin de les identifier par méthode inverse. L'aspect « réduction de modèle » des techniques de sous-structuration est intéressant en ce sens puisqu'elles permettent de ne considérer que la zone d'interface entre les sous-structures, qui correspond précisément à notre zone d'intérêt. Nous allons donc nous en inspirer pour déterminer des modes propres statiques de la roue à son interface avec le pneumatique. Ces modes seront ensuite utilisés pour former une base de décomposition des chargements à l'interface pneu-jante.

On considère un modèle par éléments finis 3D d'une roue d'aéronef, illustré sur la Figure 3.38, constitué des deux demi-roues (intérieure et extérieure) et des boulons qui permettent de les assembler. Ce modèle comprend de nombreux contacts non-linéaires et les données utilisées sont celles d'un alliage d'aluminium avec un comportement linéaire élastique pour la roue et celles d'un acier standard pour les autres pièces.

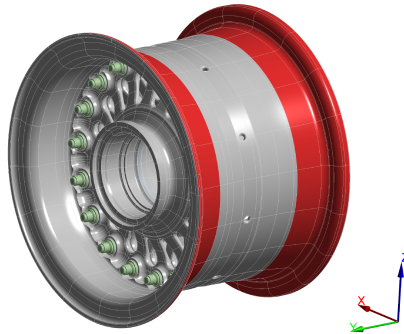


FIGURE 3.38 – Modèle par éléments finis d'une roue d'aéronef

Le modèle éléments finis est caractérisé par sa matrice de raideur  $[\mathbf{K}]$  reliant les efforts nodaux contenus dans le vecteur colonne  $\{\mathbf{f}\}$  au vecteur des déplacements nodaux  $\{\mathbf{u}\}$

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} \quad (3.24)$$

La zone d'interface pneu-jante, indiquée en rouge sur la Figure 3.38, est définie par l'Aircraft Year Book ([Tire and Rim Association, Inc., 2018](#)). Elle correspond à la plus grande zone de contact possible entre le pneu et la jante, et permet donc d'assurer la compatibilité entre ces deux composants. Par conséquent, les chargements appliqués par le pneu sur la jante, à l'exception de la pression d'azote, ne peuvent se produire que dans cette zone. Pour définir une paramétrisation de ces chargements, une condensation statique ([Guyan, 1965](#)) du modèle sur les degrés de liberté situés à l'interface pneu-jante est tout d'abord réalisée. Cette condensation consiste à diviser les ddl de la structure en ddl maîtres et esclaves selon l'équation (3.13). Par conséquent, les ddl situés à l'interface pneu-jante sont choisis comme ddl maîtres. Une réduction du problème mécanique initial (3.24) est obtenue

$$\{\hat{\mathbf{f}}\} = [\hat{\mathbf{K}}]\{\hat{\mathbf{u}}\} \quad (3.25)$$

Le problème réduit de l'équation (3.25) permet d'établir la relation entre les efforts et les déplacements des nœuds situés à l'interface pneu-jante, sans aucune perte d'information puisque tous les éléments de la matrice de raideur originale contribuent. Cependant, on note que cette technique de réduction implique que le modèle numérique utilisé soit linéaire, tous les contacts non-linéaires existants sont donc linéarisés durant ce processus. L'hypothèse sous-jacente est que les deux demi-roues ne peuvent pas se séparer, ce qui n'est pas très éloigné de la réalité en raison des efforts de serrage élevés qui sont introduits. On suppose que cette linéarisation a peu d'impact sur le comportement mécanique de l'interface pneu-jante (*i.e.*, principe de Saint-Venant). Ensuite, les valeurs propres,  $\lambda_i$ , et les modes propres  $\{\Phi_i\}$  de la matrice de raideur réduite  $[\hat{\mathbf{K}}]$  sont recherchés

$$\left([\hat{\mathbf{K}}] - \lambda_i[\mathbf{I}]\right) \{\Phi_i\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.26)$$

où l'indice  $i$  est choisi par convention de telle sorte que les valeurs propres soient classées par ordre croissant. La symétrie de la matrice de raideur et la normalisation des vecteurs propres à une norme unitaire implique que ces vecteurs forment une base orthonormale

$$\{\Phi_i\}^\top \{\Phi_j\} = \delta_{ij} \quad (3.27)$$

où  $\delta$  représente le symbole de Kronecker. Ces vecteurs propres, orthogonaux entre eux, sont appelés *modes propres statiques de la roue à l'interface pneu-jante*. Ils constituent une base complète de fonctions de formes généralisées permettant de décrire les déplacements à l'interface pneu-jante ([Sobieszczanski-Sobieski et Hajela, 1979](#) ; [Balmès, 1996a](#)). Par conséquent, pour un chargement donné à l'interface pneu-jante  $\{\hat{\mathbf{f}}\}$ , les déplacements associés sont exprimés comme une combinaison linéaire de ces modes propres

$$\{\hat{\mathbf{u}}\} = \sum_{i=1}^n q_i \{\Phi_i\} \quad (3.28)$$

où  $n$  correspond au nombre de ddl situés sur l'interface pneu-jante. Le principe de la méthode proposée est donc proche de celui de la double synthèse modale.

Les amplitudes  $q_i$  associées à chaque mode sont déterminées en prémultipliant l'équation (3.25) par la transposée de chaque vecteur propre et en utilisant la propriété d'orthogonalité (3.27). Pour le  $k$ -ième mode propre, on obtient

$$q_k = \{\Phi_k\}^\top \{\hat{\mathbf{u}}\} = \frac{1}{\lambda_k} \{\Phi_k\}^\top \{\hat{\mathbf{f}}\} \quad (3.29)$$

Les modes propres statiques de la roue à l'interface pneu-jante peuvent également être considérés comme des modes propres de chargement  $\{\mathbf{f}_k\}$  lorsqu'ils sont prémultipliés par la matrice de raideur réduite ou par leur valeur propre associée (Olsson *et al.*, 2004)

$$\{\mathbf{f}_k\} = [\hat{\mathbf{K}}] \{\Phi_k\} = \lambda_k \{\Phi_k\} \quad (3.30)$$

La valeur propre  $\lambda_k$  est interprétée comme la raideur de la roue pour le cas de chargement  $\{\mathbf{f}_k\}$ . Par extension, tout chargement  $\{\hat{\mathbf{f}}\}$  appliqué sur la jante peut être exprimé comme une combinaison linéaire des modes propres de chargement

$$\{\hat{\mathbf{f}}\} = \sum_{i=1}^n q_i \{\mathbf{f}_i\} = \sum_{i=1}^n q_i \lambda_i \{\Phi_i\} \quad (3.31)$$

**Remarque 3** Lorsque des efforts sont appliqués sur les ddl esclaves (*e.g.*, serrage des boulons et pression d'azote), le vecteur des efforts réduits s'écrit

$$\{\hat{\mathbf{f}}\} = \{\mathbf{f}_m\} - [\mathbf{K}_{ms}] [\mathbf{K}_{ss}^{-1}] \{\mathbf{f}_s\} \quad (3.32)$$

Le terme supplémentaire  $-[\mathbf{K}_{ms}] [\mathbf{K}_{ss}^{-1}] \{\mathbf{f}_s\}$  est appelé *load vector* dans le logiciel ANSYS® Mechanical 16.2 et correspond à l'expression des efforts internes sur les ddl maîtres. Ce terme devrait être pris en compte si on résolvait le problème réduit proprement dit. Ici, on cherche uniquement à décomposer le chargement à l'interface pneu-jante sur la base des modes propres et à appliquer le chargement obtenu dans le modèle complet, dans lequel ces efforts « internes » sont connus. Ils peuvent néanmoins créer un état de contrainte et de déformation qui modifie la matrice de raideur de la structure. Dans ce cas, la matrice de raideur tangente doit être utilisée. Toutefois, lorsque les contraintes et les déformations sont faibles, la perturbation reste mineure en l'absence de plastification ou de frottement par exemple.

### 3.4.3 Utilisation des propriétés de symétrie cyclique

La matrice de raideur réduite  $[\hat{\mathbf{K}}]$ , nécessaire pour déterminer les modes propres statiques de la roue à l'interface pneu-jante selon l'équation (3.26), peut être obtenue manuellement en imposant successivement un déplacement unitaire sur chaque ddl de l'interface pneu-jante tout en encastrant les ddl restants et en relevant les efforts de réaction associés. Le nombre de calculs à réaliser est donc égal au nombre de ddl de l'interface pneu-jante. Toutefois, le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS® Mechanical 16.2 permet de générer cette matrice réduite (*i.e.*, super-élément) de manière automatique (ANSYS, Inc., 2017). Cependant, le modèle éléments finis représentant la roue sur 360°, construit selon les méthodologies de calcul de Safran Landing Systems, est relativement lourd et le nombre de degrés de liberté à l'interface pneu-jante est conséquent (plusieurs dizaine de milliers). Bien que la condensation statique de Guyan permette de réduire la dimension de la matrice de raideur, le caractère « creux » de la matrice de raideur originale est perdu et la matrice de raideur réduite est pleine, ce qui peut conduire à des problèmes de stockage. Par conséquent, il est nécessaire d'obtenir et de diagonaliser cette matrice de manière plus judicieuse.

En raison de leurs propriétés géométriques, les roues d'aéronef appartiennent à la classe particulière des structures périodiques dites à symétrie cyclique. Elles sont définies par la répétition circulaire et fermée autour d'un axe de symétrie d'une entité minimale appelée secteur. La roue étudiée est composée de  $N = 9$  secteurs identiques, déphasés d'un angle  $\alpha = 2\pi/N$  et numérotés de 0 à  $N - 1$  comme illustré sur la Figure 3.39. Un secteur fondamental est constitué d'un sous-secteur de génération (bleu) et de son miroir (orange). Cette propriété de symétrie supplémentaire définit une symétrie diédrale (Weyl, 1952). Le paragraphe suivant décrit brièvement la méthodologie permettant d'obtenir la matrice de raideur réduite recherchée en utilisant les propriétés des structures à symétrie cyclique et en ne modélisant qu'un seul secteur fondamental de la roue. Cette méthodologie est illustrée sur la Figure 3.40 et le lecteur pourra se référer à l'annexe A pour une revue détaillée des équations utilisées.

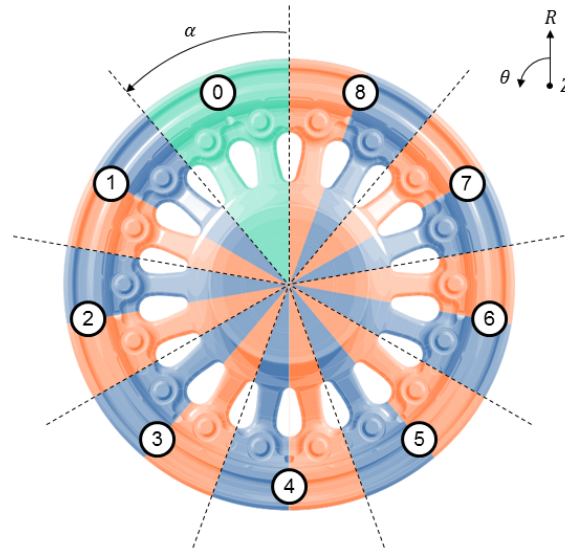


FIGURE 3.39 – Symétrie cyclique d'une roue d'aéronef

On considère un secteur fondamental de la roue, illustré en vert sur la Figure 3.39. Tout d'abord, une condensation statique de ce secteur sur ses degrés de liberté situés sur les frontières inter-secteurs et sur la zone d'interface pneu-jante est réalisée. On obtient une matrice de raideur réduite notée  $[\hat{\mathbf{K}}_{sec}^{bound+int}]$ . Ensuite, les propriétés de symétrie cyclique sont utilisées pour construire la matrice de raideur de la roue réduite sur toutes les frontières inter-secteurs et la zone d'interface pneu-jante  $[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{bound+int}]$ . Enfin, une deuxième condensation statique est réalisée afin d'obtenir la matrice de raideur de la roue condensée uniquement sur les ddl d'interface pneu-jante. Cette matrice, notée  $[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}]$ , est circulante par blocs et tous ses sous-blocs sont connus à ce stade. Un changement de coordonnées (*i.e.*, en passant des composantes physiques aux composantes cycliques) permet d'aboutir à une matrice pseudo-diagonale par blocs dans la base cyclique. Par conséquent, la diagonalisation de  $[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}]$  requise pour obtenir les modes propres statiques de la roue à l'interface pneu-jante est divisée en plusieurs sous-problèmes de taille plus petite, définis en base cyclique et dépendant d'un indice harmonique  $k$ , qui sont plus simples à résoudre. Les solutions de ces problèmes aux valeurs propres sont ensuite transformées dans la base physique, et révèlent des solutions non-dégénérées et dégénérées caractérisées par la présence de diamètres nodaux dans la forme des modes.

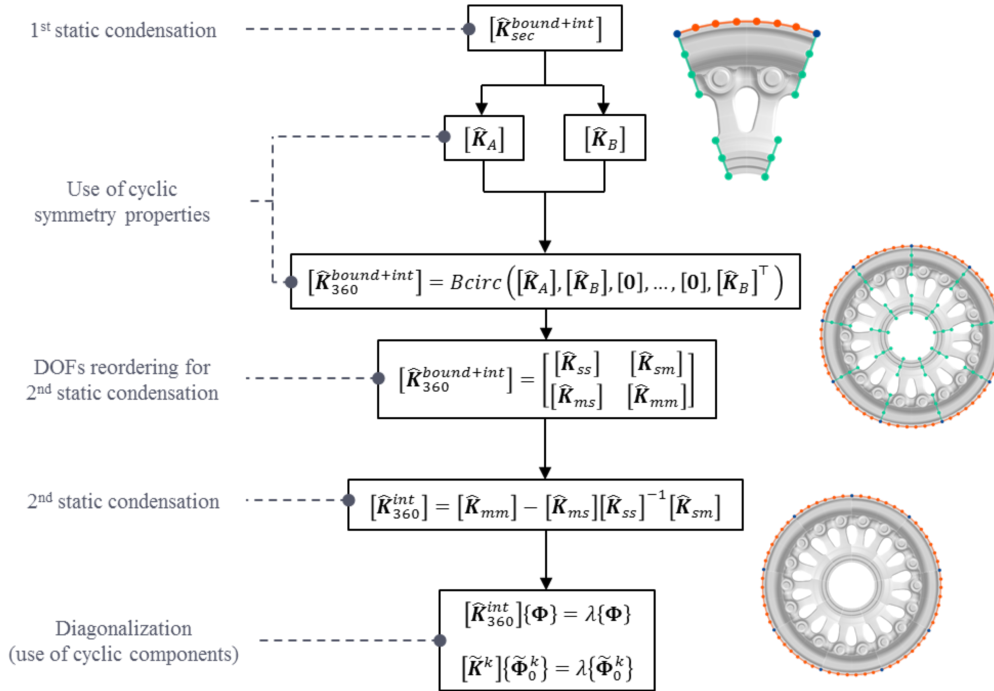


FIGURE 3.40 – Utilisation des propriétés de symétrie cyclique pour la détermination des modes propres statiques d’interface pneu-jante

### 3.4.4 Modes propres d’interface pneu-jante

Le modèle éléments finis du secteur fondamental utilisé pour obtenir les modes propres statiques de la roue à l’interface pneu-jante est illustré sur la Figure 3.41. Le maillage contient environ 100 000 éléments et 30 000 nœuds (dont environ 2 000 nœuds pour la zone d’interface pneu-jante). Des éléments linéaires sont utilisés afin de limiter le nombre de degrés de liberté, et, par conséquent, la taille de la matrice de raideur. Une étude réalisée sur un modèle 2D axisymétrique de la roue a permis de montrer que les modes associés aux plus faibles valeurs propres n’étaient pas très sensibles à la variation de la taille de maille. Les conditions aux limites consistent en un encastrement des surfaces d’appui des roulements et à une condition de symétrie cyclique imposée sur les frontières du secteur.

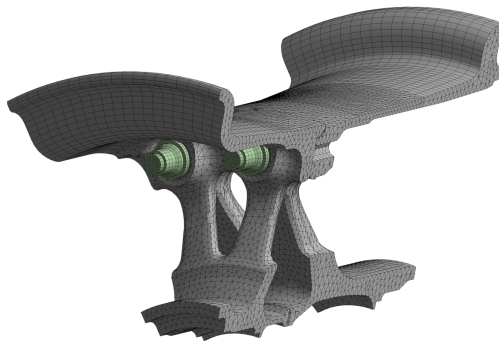


FIGURE 3.41 – Maillage du secteur fondamental

En appliquant la méthodologie détaillée au § 3.4.3, on obtient les modes propres statiques de la roue à l'interface pneu-jante, ordonnés par valeurs propres croissantes pour chaque indice harmonique. Ils peuvent être représentés comme des déplacements particuliers de l'interface dans les trois directions du repère cylindrique. Pour les modes propres de l'harmonique 0, tous les secteurs sont en phase (Figures 3.42–3.44). De plus, les déplacements présentant les plus grandes amplitudes sont principalement axisymétriques pour les modes basse fréquence. Par conséquent, pour l'étude d'un cas de gonflage par exemple, seuls les modes de cette harmonique seront considérés pour approximer les chargements.

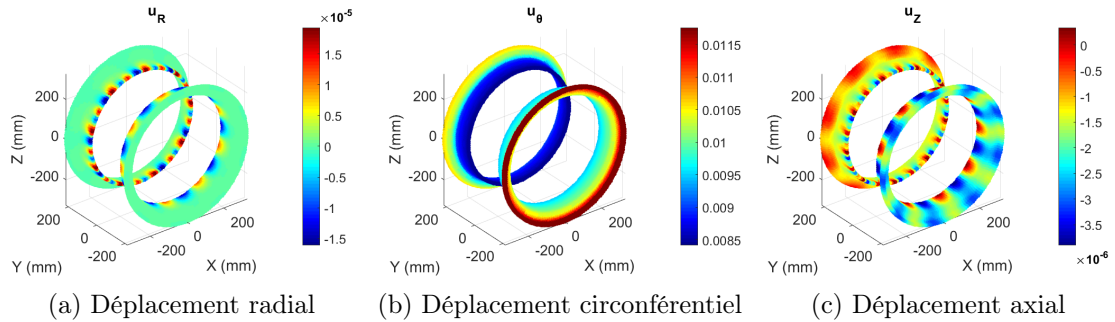


FIGURE 3.42 – Premier mode de l'harmonique 0

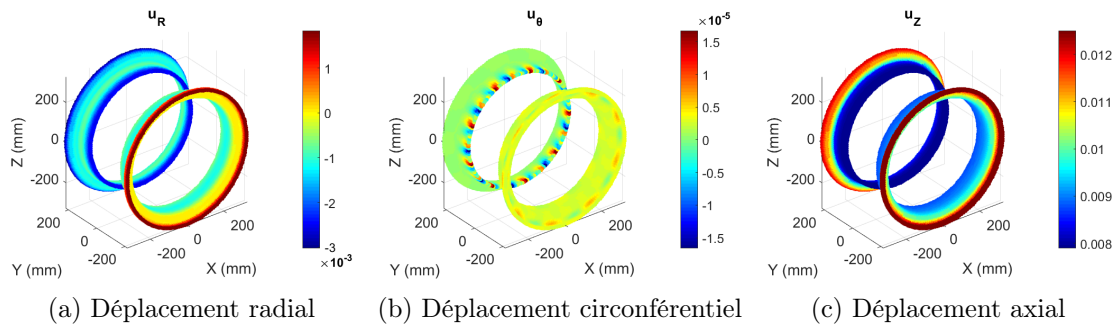


FIGURE 3.43 – Deuxième mode de l'harmonique 0

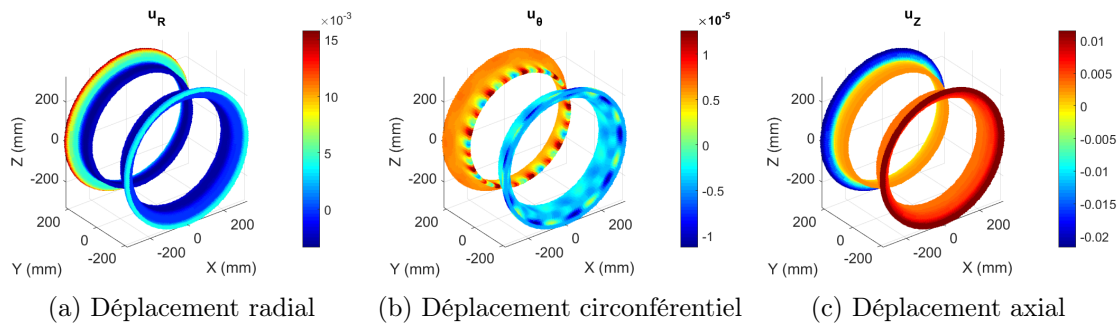


FIGURE 3.44 – Troisième mode de l'harmonique 0

Ensuite, lorsque l'indice harmonique augmente ( $k \in [1, K]$ ), des diamètres nodaux apparaissent dans les formes des modes, générant un déphasage entre les secteurs de la roue. Pour les modes propres de l'harmonique 1, on observe ainsi un unique diamètre nodal sur les Figures 3.45–3.46. Ces figures montrent également les deux modes d'une même paire, orthogonaux entre eux et associés à la même valeur propre.

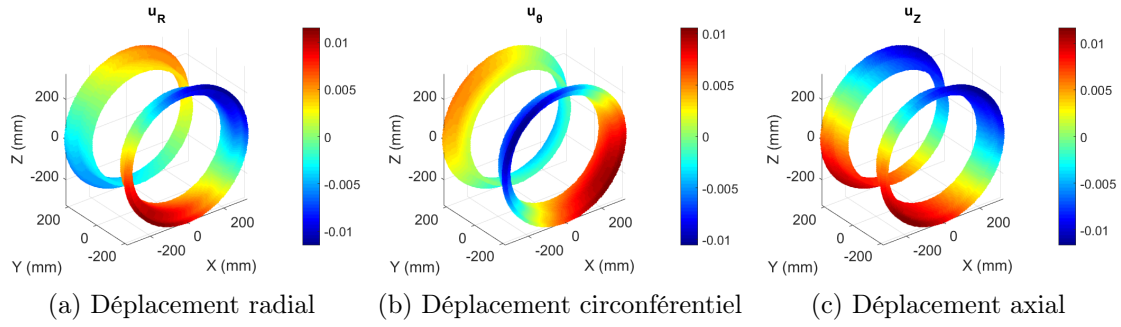


FIGURE 3.45 – Premier mode de l’harmonique 1

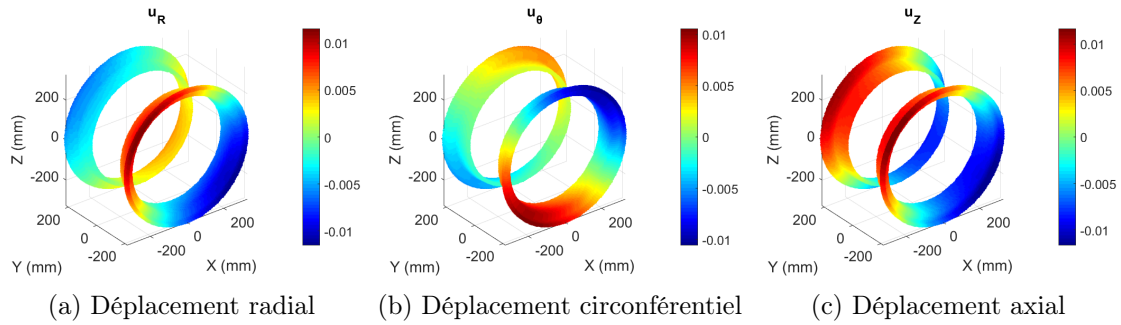


FIGURE 3.46 – Deuxième mode de l’harmonique 1

Puisque toute combinaison linéaire de ces deux modes complémentaires est également un mode propre statique de la roue à l’interface pneu-jante, cette propriété peut être utilisée pour générer une nouvelle base de modes respectant certaines conditions. Les manufacturiers de roue supposent généralement que les chargements statiques à l’interface pneu-jante sont symétriques par rapport au plan  $Y - Z$ . Par conséquent, en considérant les modes propres  $\{\Phi_i\}$  et  $\{\Phi_{i+1}\}$  d’une même paire, un nouveau mode symétrique  $\{\Psi_i\}$  est généré

$$\{\Psi_i\} = \{\Phi_i\} \cos(\varphi) + \{\Phi_{i+1}\} \sin(\varphi) \quad (3.33)$$

en déterminant la valeur appropriée pour l’angle  $\varphi$ . Le nombre de modes propres pour l’indice harmonique  $k = 1$  est donc divisé par deux et est égal au nombre de modes de l’harmonique 0. Un exemple de mode propre symétrique obtenu à partir des deux premiers modes de l’harmonique 1 est illustré sur la Figure 3.47.

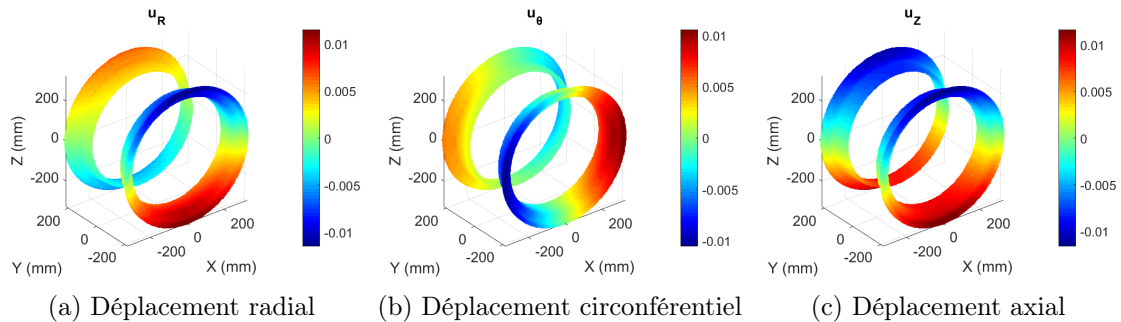


FIGURE 3.47 – Premier mode symétrique de l’harmonique 1

En effectuant le même traitement pour chaque paire de modes et pour chaque famille harmonique, on obtient une base de modes symétriques. Le nombre de modes conservés pour chaque indice harmonique  $k \in [1, K]$  est donc divisé par 2 par rapport à la base initiale. Quelques modes symétriques des harmoniques 2 à 4 sont illustrés sur les Figures 3.48–3.50.

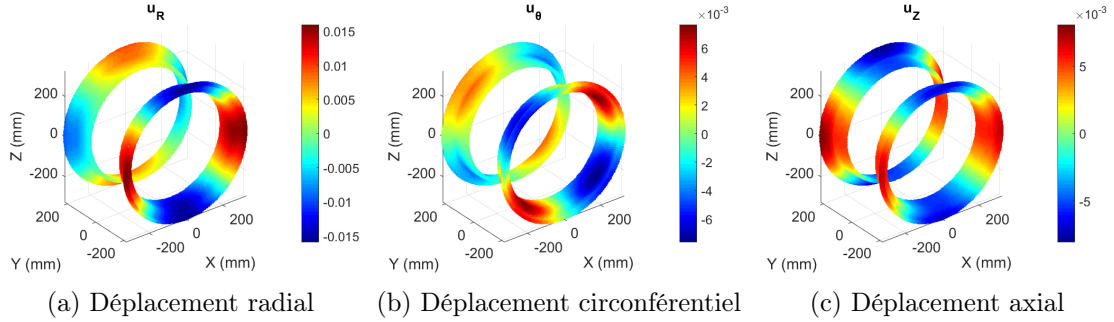


FIGURE 3.48 – Premier mode symétrique de l'harmonique 2

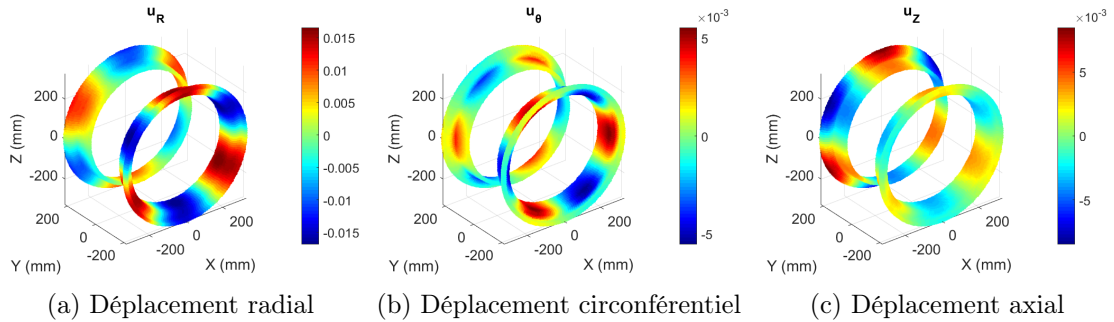


FIGURE 3.49 – Premier mode symétrique de l'harmonique 3

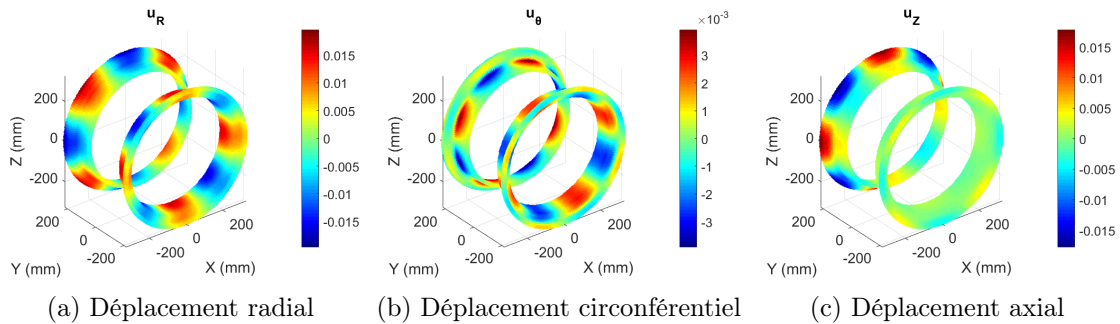


FIGURE 3.50 – Premier mode symétrique de l'harmonique 4

Les modes propres d'interface pneu-jante correspondent à des déformées particulières de l'interface qui ne dépendent que de la structure de la roue. Si les modes d'harmonique 0 sont essentiellement axisymétriques, ceux appartenant aux harmoniques supérieures sont caractérisés par un déphasage inter-secteurs plus ou moins marqué. Avec un unique diamètre nodal, les modes de l'harmonique 1 peuvent, par exemple, être utilisés pour représenter l'ovalisation de la roue. Les modes des harmoniques supérieures permettent quant à eux de localiser la déformée de l'interface pneu-jante sur un secteur angulaire de plus en plus restreint.

**Remarque 4** Dans le reste du document, seuls les modes propres symétriques sont considérés pour les indices harmoniques  $k \in [1, K]$ . Toutefois, les modes propres seront toujours indiqués par le symbole  $\{\Phi\}$  afin de simplifier les notations.

### 3.4.5 Critères de sélection

La paramétrisation proposée permet de décrire les chargements à l'interface pneu-jante de manière objective, du point de vue du manufacturier de roue. En effet, la base des modes propres déterminée conserve le nombre initial de degrés de liberté à l'interface pneu-jante et correspond uniquement à une représentation différente des chargements (*i.e.*, un changement de base), ne nécessitant aucune hypothèse particulière. Le problème mathématique est donc strictement équivalent mais plus simple à appréhender puisque la matrice de raideur réduite est diagonalisée. Cette paramétrisation sera utilisée au Chapitre 4 afin de réaliser des identifications inverses des chargements à l'interface pneu-jante. Par conséquent, le nombre de paramètres à identifier est déterminant et doit être minimisé. On propose donc de définir des critères de sélection afin de réduire le nombre de modes conservés lors de l'approximation d'un chargement statique donné avec le moins de conséquences en termes d'énergie de déformation élastique. La base choisie est optimale en ce sens.

#### Conservation de l'énergie de déformation élastique

En analyse modale, les modes de vibration sont utilisés pour approximer la réponse dynamique des structures soumises à des excitations. Pour réduire le nombre de modes conservés, la pratique courante est de sélectionner les modes propres associés aux valeurs propres comprises dans une certaine plage, dépendant de la fréquence d'excitation (Bajan *et al.*, 1969). Cependant, en analyse statique, il n'y a aucune raison pour que les modes propres sélectionnés de cette manière soient à même d'approximer efficacement les déplacements induits par un chargement statique donné. Dans ce cas, le critère fréquentiel n'a pas de sens et ne peut donc pas être utilisé.

Pour révéler les modes propres d'interface dominants, on choisit un critère basé sur la conservation de l'énergie de déformation élastique (Sobieszcanski-Sobieski et Hajela, 1979). Pour un chargement statique donné à l'interface pneu-jante  $\{\hat{\mathbf{f}}\}$ , l'énergie de déformation élastique totale est calculée par

$$W_{tot} = \frac{1}{2} \{\hat{\mathbf{u}}\}^\top [\hat{\mathbf{K}}] \{\hat{\mathbf{u}}\} \quad (3.34)$$

En projetant ce chargement sur la base des modes propres statiques d'interface pneu-jante, la contribution énergétique du  $k$ -ième mode est obtenue en utilisant les équations (3.26) à (3.28) et (3.34)

$$W_k = \frac{1}{2} \lambda_k q_k^2 = \frac{1}{2\lambda_k} \left( \{\Phi_k\}^\top \{\hat{\mathbf{f}}\} \right)^2 \quad (3.35)$$

où  $\lambda_k$  et  $q_k$  sont respectivement la valeur propre et l'amplitude associées au mode  $\{\Phi_k\}$ . Par conséquent, en ordonnant les modes par contribution énergétique décroissante, on peut sélectionner les modes qui contribuent fortement à l'approximation du chargement étudié. Le critère suivant est alors défini pour déterminer le nombre de modes à conserver

$$W = \sum_i W_i \geq \eta \times W_{tot} \quad (3.36)$$

où  $\eta$  est exprimé en pourcentage de l'énergie de déformation élastique totale.

La troncature à un certain ordre de la série de modes signifie implicitement que les amplitudes des modes d'ordre supérieur sont forcées à zéro. L'ordre de troncature étant généralement bien plus faible que le nombre total de degrés de liberté à l'interface pneu-jante, ceci revient à imposer un caractère « creux » à la base de modes initiale.

De plus, cette troncature permet de **conserver l'énergie de la structure de manière optimale** (Balmès, 1996b). En effet, seuls les modes qui contribuent significativement à l'énergie de déformation élastique totale sont sélectionnés. Ce critère a du sens vis-à-vis des futures identifications inverses qui seront menées puisqu'il peut être directement relié à l'impact structurel induit dans un régime élastique. Autrement dit, il permet de s'affranchir des modes associés à une faible énergie de déformation élastique, qui ont peu d'impact au regard du comportement mécanique global de la roue, et dont l'identifiabilité sera par conséquent quasiment nulle, ou du moins caractérisée par une incertitude très importante. Le caractère « optimal » de la paramétrisation proposée est donc revendiqué dans une direction bien spécifique, définie par l'énergie de déformation élastique, et non de manière universelle. Ainsi, le critère utilisé ne peut pas prétendre assurer la convergence de *quantités d'intérêt* diverses, observées dans différentes zones de la roue, de façon exhaustive. Il s'agit d'une *grille de lecture* particulière, caractérisée par sa propre métrique, et adaptée à la problématique d'identification inverse des chargements à l'interface pneu-jante. D'autres *grilles de lecture* peuvent être envisagées. Si, du point de vue du dimensionnement par exemple, on s'intéresse à une *quantité d'intérêt* donnée (*e.g.*, la contrainte de Von Mises en un point), un nouveau critère peut être défini afin de sélectionner les modes pertinents par rapport à celle-ci.

### Critères additionnels

Le critère de conservation de l'énergie de déformation élastique permet de réduire considérablement le nombre de modes sélectionnés et donc de limiter le nombre de paramètres à identifier. Cependant, il s'agit d'un critère macroscopique. Pour évaluer la précision de l'approximation obtenue, il est nécessaire de s'intéresser à d'autres *quantités d'intérêt* et d'étudier leur convergence en fonction du nombre de modes retenus.

Tout d'abord, les résultantes des efforts exercés à l'interface pneu-jante sont considérées. Pour un chargement donné, les charges à l'interface pneu-piste étant connues du manufacturier de roue, le chargement approximé doit permettre de les conserver pour être considéré comme valable. La convergence des résultantes d'efforts  $F_X$ ,  $F_Y$  et  $F_Z$  dans les trois directions du système de coordonnées cartésiennes et sur chaque demi-roue (intérieure et extérieure) est étudiée. Toutefois, ces résultantes sont naturellement associées aux premiers modes de la base tronquée, tandis que les modes d'ordres plus élevés correspondent à des chargements auto-équilibrés qui affectent uniquement une région confinée ou une frontière de l'interface pneu-jante. Par conséquent, bien que ce second critère sur les résultantes d'efforts semble différent du précédent basé sur l'énergie de déformation élastique, ils sont en fait étroitement liés par construction. Ceci peut être confirmé en considérant les modes  $\{\mathbf{f}_k\}$  associés à chaque résultante.

Ensuite, les déplacements approximés à l'interface pneu-jante peuvent être comparés aux déplacements obtenus avec le chargement de référence pour quantifier les écarts introduits localement. Bien que certains modes aient une contribution négligeable par rapport à l'énergie de déformation élastique totale ou aux résultantes d'efforts introduites, ils peuvent néanmoins modifier significativement la répartition locale du chargement à l'interface pneu-jante et avoir un impact sur la réponse mécanique de la roue. La difficulté réside dans le choix de la valeur  $\eta$  pour définir le critère (3.36).

Enfin, on peut s'éloigner de la zone d'interface pneu-jante et étudier l'influence du chargement approximé sur certaines zones critiques de la roue. Les déformations locales dans la jante ou dans les voiles peuvent par exemple être examinées afin d'évaluer la sensibilité de ces zones par rapport au chargement. L'objectif n'est pas de retrouver exactement un chargement donné mais plutôt de déterminer le degré de précision nécessaire à sa description pour obtenir une représentation fiable de la réponse mécanique de la roue.

### 3.4.6 Projection de chargements connus

On propose d'évaluer les performances de la paramétrisation proposée en projetant des chargements connus, fournis par les pneumaticiens, sur la base des modes propres statiques d'interface pneu-jante. On considère de nouveau les pneumatiques radiaux A2 et C3, qui peuvent tous les deux être montés sur la roue étudiée. Le Tableau 3.2 décrit les cas de charge pour lesquels on dispose des champs de pression de contact pneu-jante.

Pneu	Cas de charge	Pression P (bar)	Charge verticale Z (daN)	Charge latérale Y/Z
A2	Gonflage	14,8	-	-
	Ligne droite	15,5	22500	0
	Ripés	15,5	22500	$\pm 0,23$ ; $\pm 0,30$ ; $\pm 0,53$
C3	Gonflage	14,7	-	-
	Ligne droite	15,3	24800	0
	Ripés	15,3	24800	$\pm 0,15$ ; $\pm 0,20$ ; $\pm 0,45$

TABLEAU 3.2 – Cas de charge étudiés pour les pneumatiques A2 et C3

Ces données sont obtenues par calcul éléments finis pour le pneu A2 et par essais pour le pneu C3. Pour comparer les deux pneumatiques, les champs de pression de contact fournis sont préalablement projetés sur le maillage éléments finis de la roue étudiée, dont le profil de jante est représenté sur la Figure 3.51.

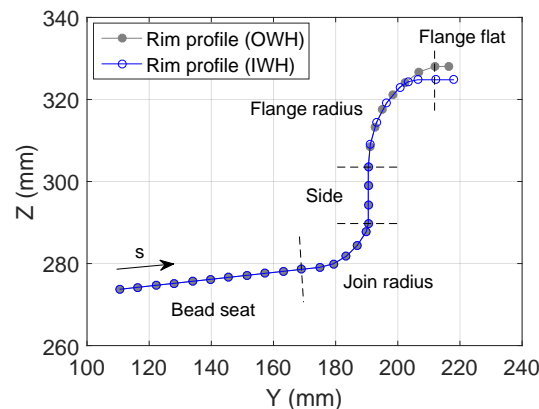


FIGURE 3.51 – Profil de jante de la roue étudiée

On peut alors tracer la répartition de la pression en fonction de l'abscisse curviligne, calculée sur le profil de jante, et de l'azimut pour les différents cas de charge. Quelques exemples sont illustrés sur les Figures 3.52–3.53.

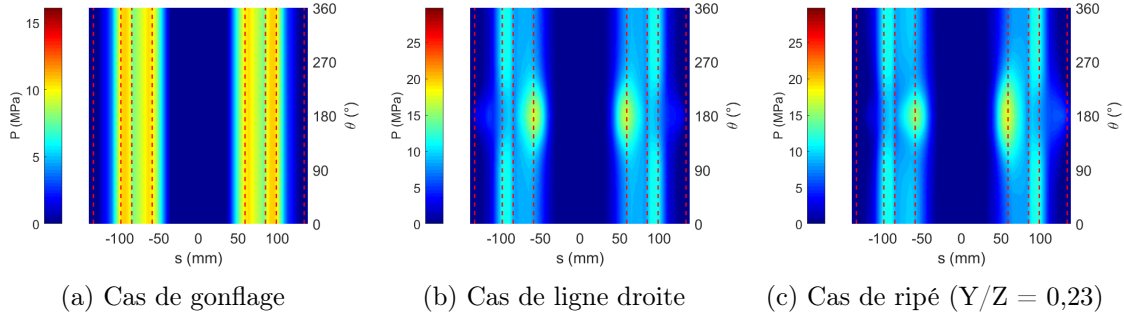


FIGURE 3.52 – Exemples de champs de pression de contact pneu-jante pour le pneu A2

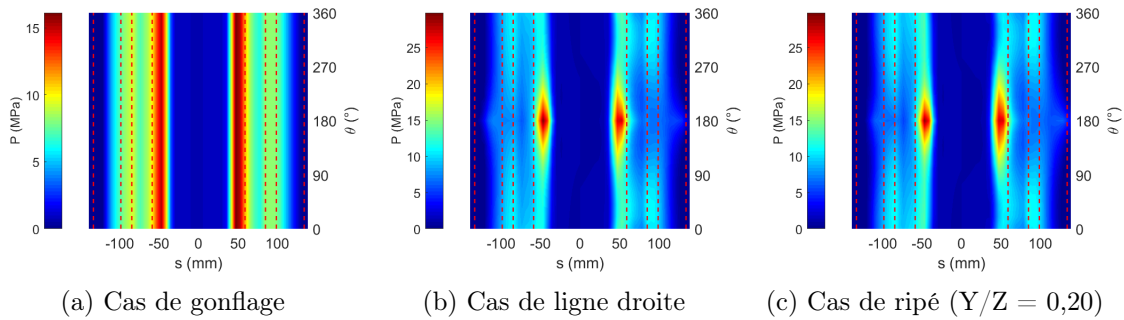


FIGURE 3.53 – Exemples de champs de pression de contact pneu-jante pour le pneu C3

Malgré le fait que les cas de charge étudiés soient proches, les deux pneumatiques présentent des comportements très différents. Pour le cas de gonflage, la répartition de la pression est équilibrée entre le *bead seat* et le *side* pour le pneu A2, tandis que la pression est beaucoup plus importante au niveau du *bead seat* pour le pneu C3. Pour les cas de ligne droite et de ripés, les champs de pression présentent des similitudes mais on observe localement de nombreuses différences. De plus, l'amplitude de la pression peut varier d'un facteur deux en certains points entre les deux pneumatiques. Cette variation peut être partiellement expliquée par la méthode utilisée pour générer ces données (calcul par éléments finis ou mesures d'essais). Ces chargements sont donc complexes et difficiles à estimer. Leur projection sur la base des modes propres statiques d'interface pneu-jante va permettre de déterminer s'ils peuvent être décrits avec un formalisme commun.

### Résultats pour le pneu A2

Les champs de pression de contact pneu-jante associés aux cas de charge décrits dans le Tableau 3.2 sont convertis en efforts nodaux équivalents puis projetés sur la base des modes propres statiques d'interface pneu-jante. La répartition de l'énergie de déformation élastique sur l'ensemble des modes est obtenue en utilisant l'équation (3.35) et illustrée sur la Figure 3.54, où les modes propres sont ordonnés par valeur propre croissante pour chaque harmonique. Seuls les 30 premiers modes de chaque harmonique, sur un total d'environ 3000, sont représentés sur les figures suivantes afin de se focaliser sur les données d'intérêt. Les modes d'ordre supérieur contribuent de manière infime à l'énergie de déformation élastique totale.

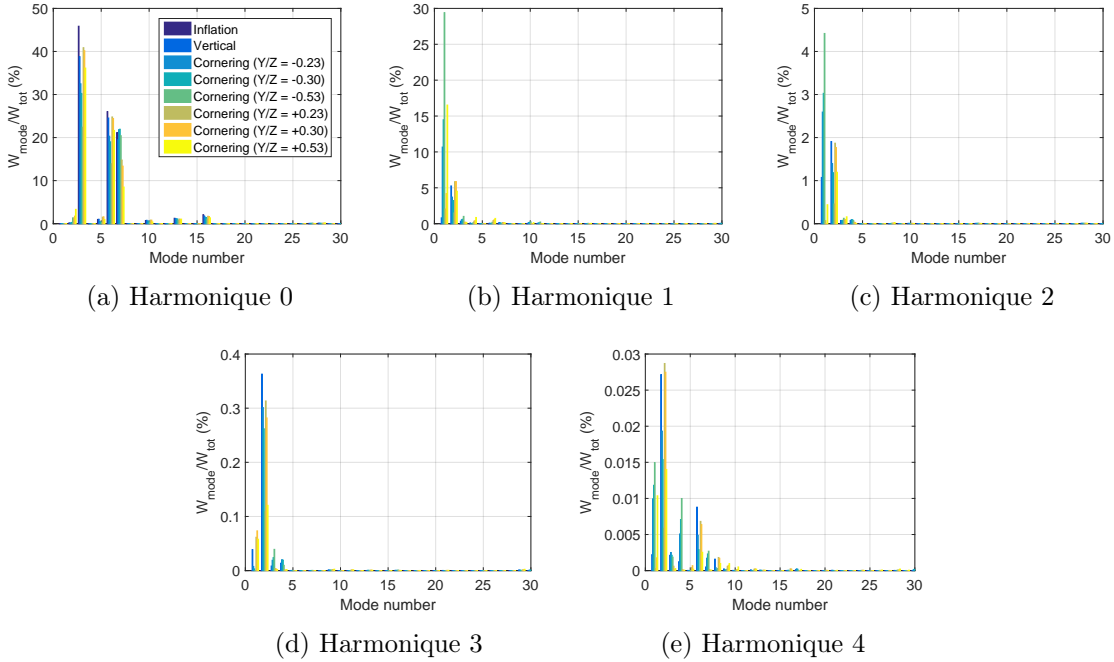


FIGURE 3.54 – Contribution énergétique des modes propres statiques d'interface pneu-jante pour différents cas de charge – Pneu A2

La répartition de l'énergie de déformation élastique dépend du cas de charge considéré. Le cas de gonflage est un peu particulier puisqu'il active uniquement les modes de l'harmonique fondamentale en raison de son axisymétrie. Le déphasage inter-secteurs généré par les harmoniques supérieures n'est donc pas nécessaire. Pour les autres cas de charge, les modes excités dans chaque harmonique sont toujours les mêmes et d'ordre faible. Les principaux modes contributeurs appartiennent aux trois premières harmoniques (harmonique fondamentale incluse), alors que les modes des harmoniques 3 et 4 contribuent peu à l'énergie de déformation élastique totale. De plus, les modes appartenant à l'harmonique fondamentale sont exactement les mêmes que pour le cas du gonflage. Ceci est dû au fait que le gonflage du pneumatique est inhérent à tous les cas de charge (*i.e.*, le pneumatique est nécessairement gonflé avant tout autre chargement). Les différences de contribution de ces modes peuvent être en partie expliquées par l'augmentation de la pression d'azote sous charge. Par conséquent, bien que la contribution énergétique de chaque mode soit différente d'un cas de charge à un autre, les modes dominants sont toujours les mêmes.

Les modes propres dominants ayant été identifiés, il est nécessaire de déterminer combien d'entre eux doivent être conservés pour approximer efficacement les chargements étudiés. Pour ce faire, tous les modes sont ordonnés par contribution énergétique décroissante pour chaque cas de charge. Les résultats obtenus pour le cas de ligne droite sont illustrés sur la Figure 3.55. Le critère défini par l'équation (3.36) est ensuite utilisé pour effectuer une troncature de la série de modes. Pour  $\eta = 99\%$  de l'énergie de déformation élastique totale, 19 modes sont nécessaires pour approximer le cas de ligne droite. De la même façon, 9 (resp. 20) modes doivent être conservés pour le cas de gonflage (resp. de plus fort ripé). Le classement des modes est légèrement différent d'un cas de charge à un autre mais une base réduite d'une vingtaine de modes dominants peut être établie pour couvrir tous les cas de charge.

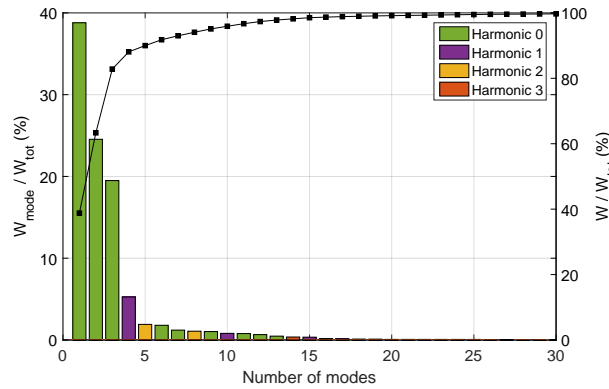


FIGURE 3.55 – Classement par contribution énergétique décroissante – Cas de ligne droite du pneu A2

Cependant, la conservation de l'énergie de déformation élastique est un critère macroscopique et il est difficile de déterminer la juste valeur du paramètre  $\eta$  sans informations complémentaires. Comme proposé au § 3.4.5, on peut étudier la variation des résultantes d'efforts en fonction du nombre de modes retenus (classés par contribution énergétique décroissante). Les résultats obtenus pour le cas de ligne droite sont illustrés sur la Figure 3.56.

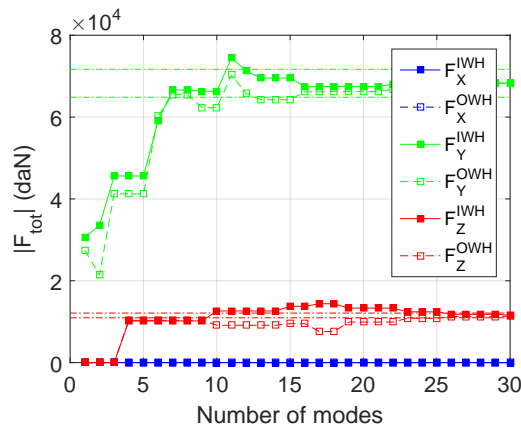


FIGURE 3.56 – Evolution des résultantes d'effort en fonction du nombre de modes conservés – Cas de ligne droite du pneu A2

Les lignes pointillées représentent une variation de plus ou moins 5% par rapport aux valeurs cibles des résultantes. On constate que les résultantes ont globalement convergé avec l'approximation à 19 modes, indiquant par conséquent que le critère de troncature basé sur la conservation de l'énergie de déformation élastique avec  $\eta = 99\%$  est *a priori* suffisant. Les mêmes tendances sont observées pour les autres cas de charge. Par ailleurs, on note que les modes de l'harmonique fondamentale contribuent uniquement à la résultante axiale  $F_Y$ , tandis que ceux de l'harmonique 1 peuvent seulement générer une résultante verticale (dans la direction Z), par construction. Les modes appartenant aux harmoniques supérieures sont à résultantes nulles, ce qui explique les paliers observés sur la Figure 3.56. Toutefois, ces modes peuvent modifier la répartition du chargement à l'interface pneu-jante et ne doivent pas être négligés. Les déplacements induits par le chargement de ligne droite de référence et son approximation avec 19 modes sont comparés sur la Figure 3.57.

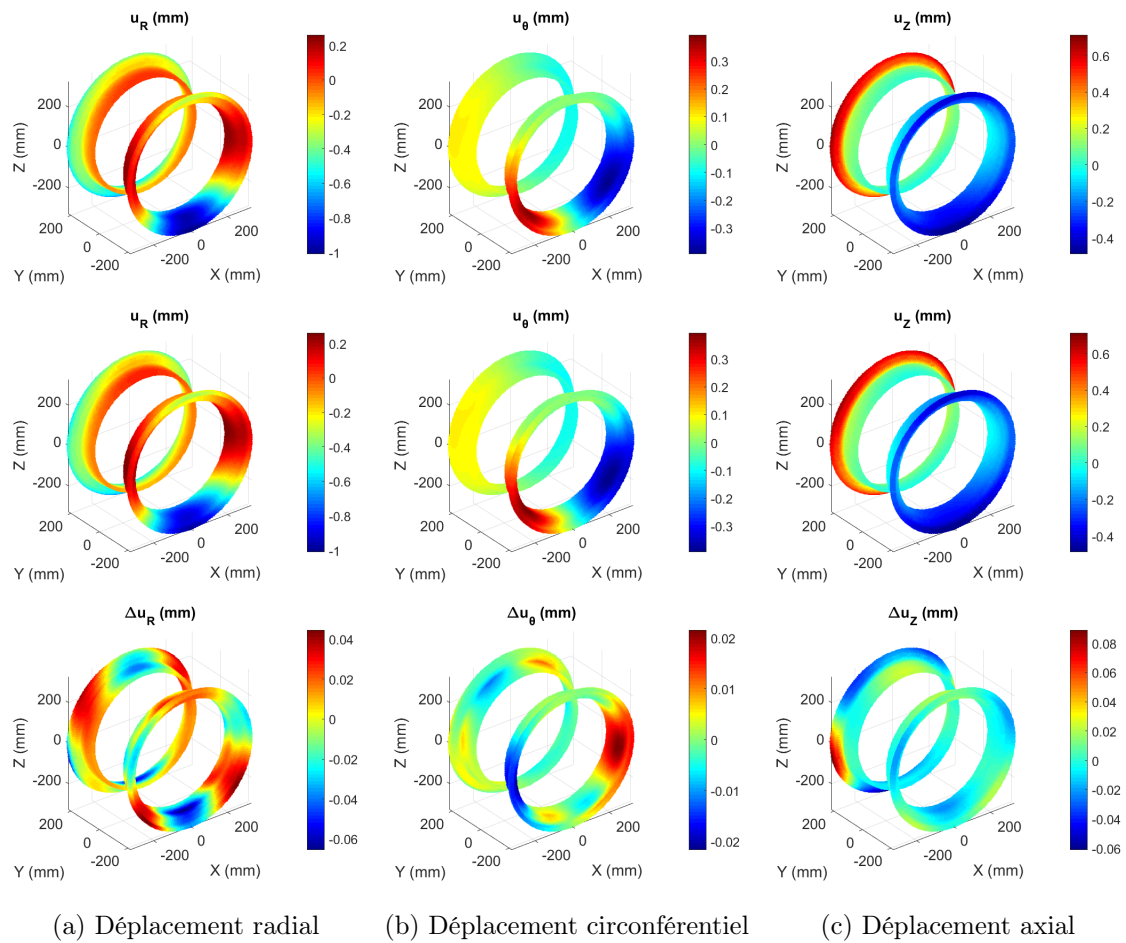


FIGURE 3.57 – Déplacements à l'interface pneu-jante obtenus avec le chargement de référence (haut), l'approximation à 19 modes (milieu) et différence associée (bas) - Cas de ligne droite du pneu A2

Les déplacements obtenus sont très proches ( $RMS = 0,02$  mm), indiquant de nouveau que le critère de troncature basé sur la conservation de l'énergie de déformation élastique est pertinent. Pourtant, une comparaison des répartitions des efforts à l'interface pneu-jante montrerait des différences entre les deux chargements, en raison de la projection effectuée. Les deux répartitions sont donc statiquement équivalentes.

Pour aller plus loin, on peut étudier l'impact de l'approximation du chargement sur la réponse mécanique de la roue dans différentes zones. Le critère de sélection utilisé ne peut pas prétendre assurer la convergence de diverses *quantités d'intérêt* en tout point de la roue (cf. § 3.4.5). Néanmoins, on peut évaluer les écarts obtenus en fonction des zones observées. Pour ce faire, on choisit de suivre l'évolution, sur un tour de roue, des déformations aux positions de quelques jauges pour le cas de ligne droite. On procède de manière séquentielle en commençant par le moyeu de la roue. La Figure 3.58 illustre les résultats obtenus pour la jauge JF3 (cf. Figure 3.35) en conservant les 10, 19 et 30 premiers modes dominants. On constate que les déformations obtenues ont convergé avec l'approximation à 10 modes du chargement. Ces modes permettent de conserver 95% de l'énergie de déformation élastique totale introduite par le chargement de référence. Lorsque le nombre de modes augmente,

les déformations évoluent peu, indiquant que le comportement mécanique de la roue dans cette zone particulière peut être prédit avec une connaissance très macroscopique du chargement à l'interface pneu-jante. En effet, plus on s'éloigne de l'interface pneu-jante, moins la répartition locale du chargement aura d'impact (*i.e.*, principe de Saint-Venant).

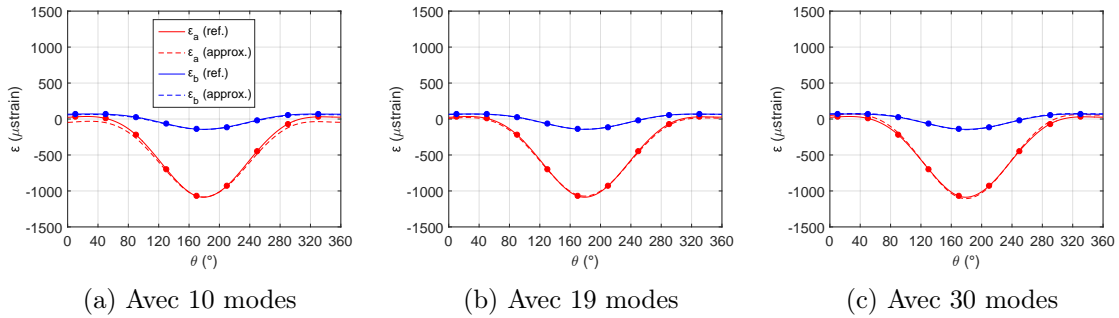


FIGURE 3.58 – Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JF3

On remonte progressivement vers la jante et les résultats obtenus pour la jauge JF5 (cf. Figure 3.35) située sur le voile de la demi-roue intérieure sont représentés sur la Figure 3.59. Le comportement général est de nouveau bien capté avec l'approximation à 10 modes, mais la convergence des déformations est vraiment obtenue en conservant les 19 premiers modes dominants. Cette jauge est représentative des comportements observés dans les zones situées sous l'assemblage boulonné, où on constate que la réponse mécanique de la roue est essentiellement pilotée par les résultantes d'efforts introduites plutôt que par la répartition locale du chargement. L'assemblage boulonné entre les demi-roues joue donc le rôle d'un filtre passe-bas.

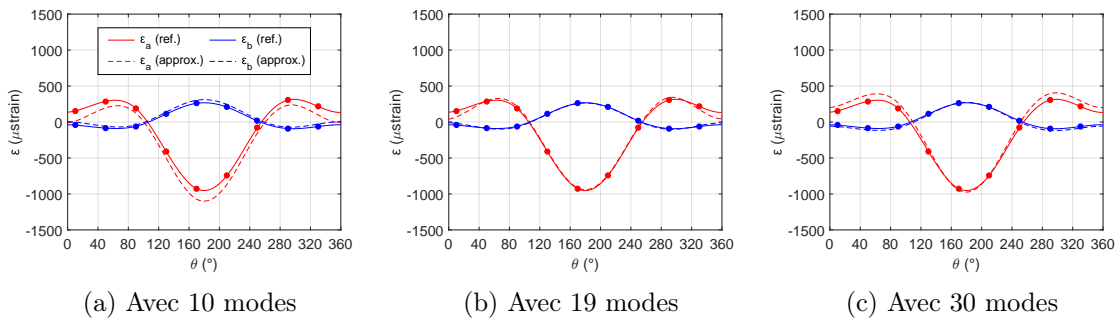


FIGURE 3.59 – Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JF5

En revanche, la répartition locale du chargement a une influence déterminante dans la jante. La Figure 3.60 représente les résultats obtenus pour la jauge JF8 (cf. Figure 3.35) située sur la demi-roue intérieure, en-dessous de la zone de contact pneu-jante. Pour cette jauge, 30 modes sont nécessaires pour bien capter l'amplitude de la déformation sur un tour de roue. Une approximation correcte des déformations locales dans la jante requiert donc un nombre de modes plus important que pour le voile ou le moyeu.

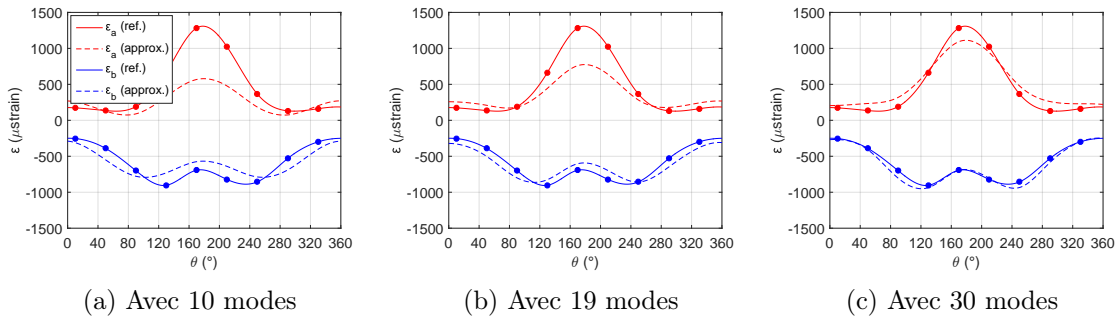


FIGURE 3.60 – Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JF8

Les résultats obtenus sur la demi-roue extérieure sont illustrés de manière analogue sur les Figures 3.61–3.63 pour les jauges JV11, JV13 et JV17 respectivement positionnées sur le moyeu, le voile et la jante (cf. Figure 3.35). Les conclusions sont identiques à celles énoncées pour la demi-roue intérieure. Toutefois, on note que la convergence des déformations est plus difficile à obtenir sur le côté extérieur de la roue en raison de sa raideur plus importante.

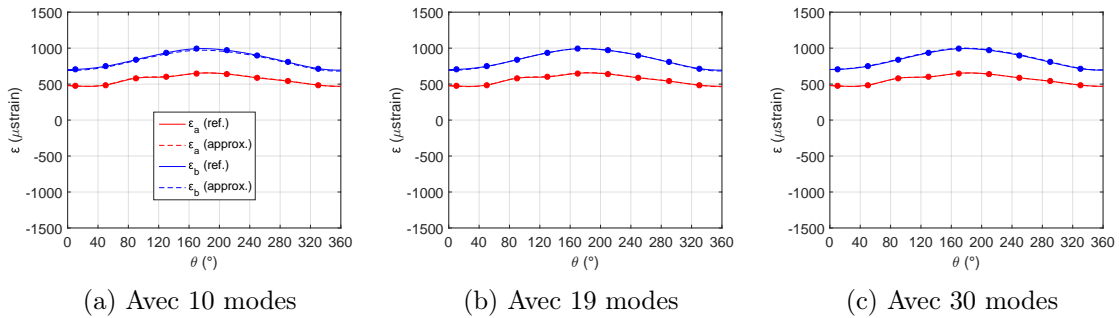


FIGURE 3.61 – Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JV11

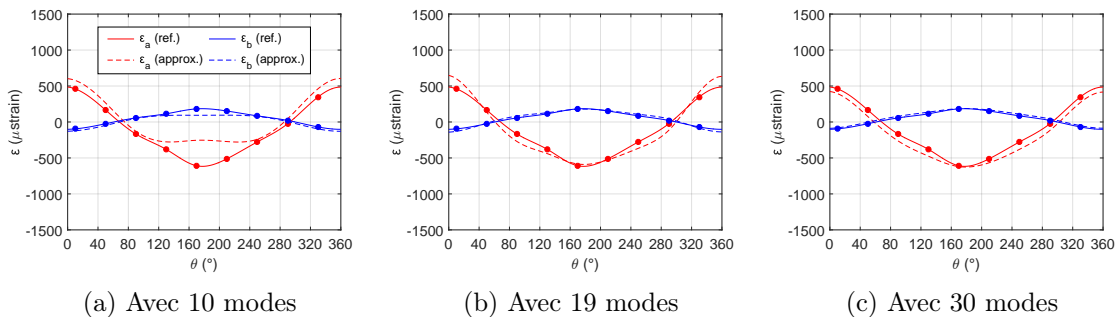


FIGURE 3.62 – Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JV13

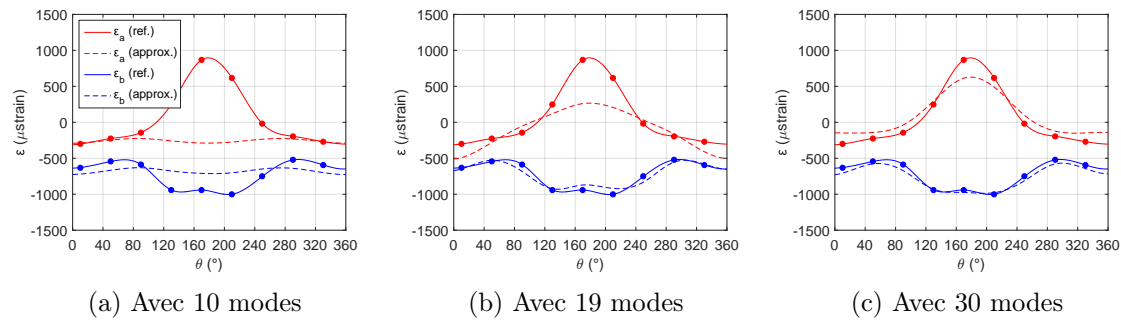


FIGURE 3.63 – Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JV17

Les résultats obtenus pour le pneu A2 montrent que tout chargement appliqué par ce pneu sur la roue peut être approximé en utilisant une base unique de modes dominants. De plus, cette base est relativement réduite et comprend une vingtaine de modes.

### Résultats pour le pneu C3

Pour vérifier si la base réduite de modes déterminée précédemment est capable de représenter les chargements appliqués par un autre pneumatique, on réalise la même étude sur le pneu C3. Comme précédemment, la répartition de l'énergie de déformation élastique sur l'ensemble des modes et pour chaque cas de charge est illustrée sur la Figure 3.64.

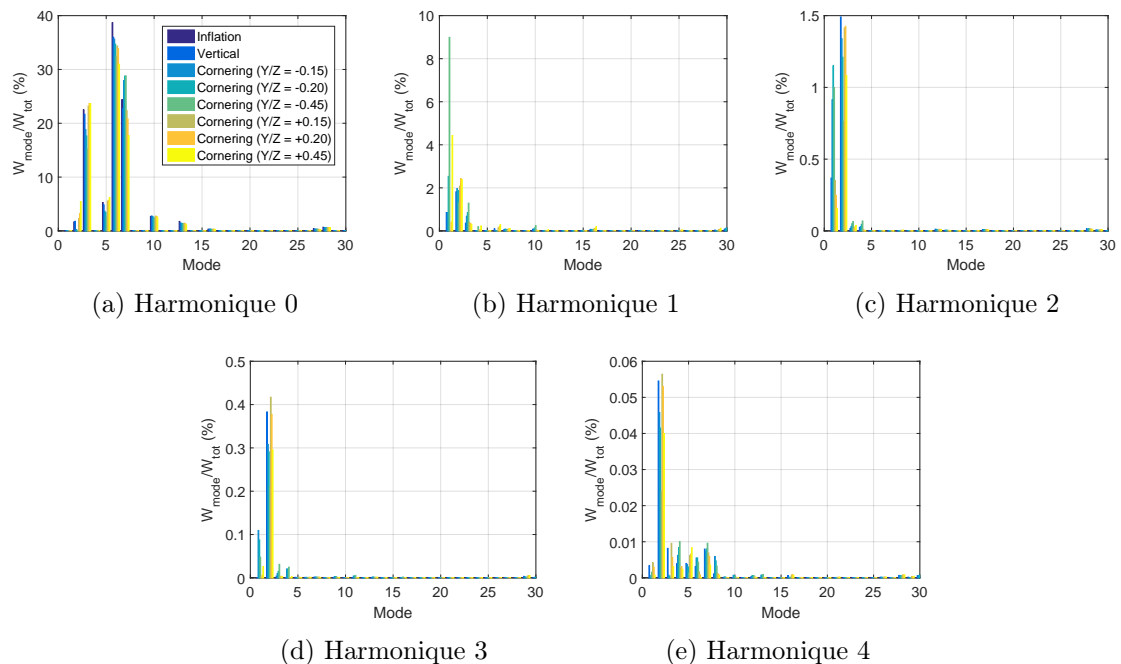


FIGURE 3.64 – Contribution énergétique des modes propres statiques d'interface pneu-jante pour différents cas de charge – Pneu C3

Les modes excités dans chaque harmonique sont les mêmes pour tous les cas de charge et d'ordre faible. Les modes dominants appartiennent aux trois premières harmoniques et sont très similaires aux modes obtenus pour le pneu A2. On remarque cependant que la

répartition de l'énergie de déformation élastique est moins étalée. Les contributions des modes appartenant aux harmoniques 1 et 2 n'excèdent pas 10% et 1,5%, alors qu'elles atteignaient 30% et 5% pour le pneu A2. Cette variation peut s'expliquer par la discrétisation plus grossière des chargements de référence pour le pneu C3 obtenus par essais.

En classant les modes par contribution énergétique décroissante, on constate que 18 modes sont nécessaires pour approximer le cas de ligne droite pour  $\eta = 99\%$  de l'énergie de déformation élastique totale (Figure 3.65), ce qui est très proche du résultat obtenu pour le pneu A2 (*i.e.*, 19 modes). Leur classement est sensiblement différent mais, parmi ces 18 modes, 16 sont strictement identiques. Les chargements appliqués sur la roue par les deux pneumatiques peuvent donc être décrits en utilisant une même base de modes. Par conséquent, il est raisonnable de penser que cette base permette de décrire n'importe quel chargement appliqué sur la roue.

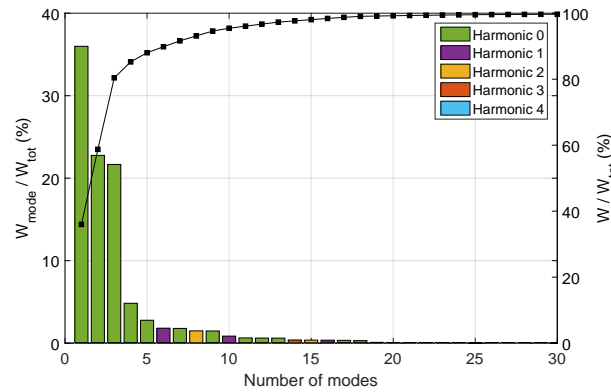


FIGURE 3.65 – Classement par contribution énergétique décroissante – Cas de ligne droite du pneu C3

Pour valider les résultats, on représente sur la Figure 3.66 l'évolution des résultantes d'efforts en fonction du nombre de modes retenus (classés par contribution énergétique décroissante) pour le cas de ligne droite étudié.

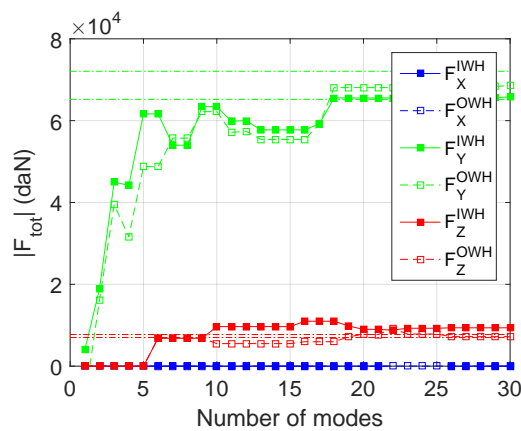


FIGURE 3.66 – Évolution des résultantes d'effort en fonction du nombre de modes conservés – Cas de ligne droite du pneu C3

La convergence est plus difficile que pour le pneu A2 mais les résultantes d'efforts sont proches des valeurs cibles avec l'approximation à 18 modes. Ce résultat montre de nouveau la pertinence du critère de sélection basé sur la conservation de l'énergie de déformation élastique totale avec  $\eta = 99\%$ .

Enfin, les déplacements à l'interface pneu-jante induits par le chargement de ligne droite de référence et son approximation avec 18 modes sont comparés sur la Figure 3.67. Les déplacements obtenus sont très proches (RMS = 0,02 mm), comme pour le pneu A2. Toutefois, bien que leurs formes globales soient similaires, on constate des différences entre les déplacements provoqués par les deux pneumatiques. La paramétrisation proposée permet donc de différencier efficacement des chargements à l'interface pneu-jante en comparant les modes dominants et leurs amplitudes associées.

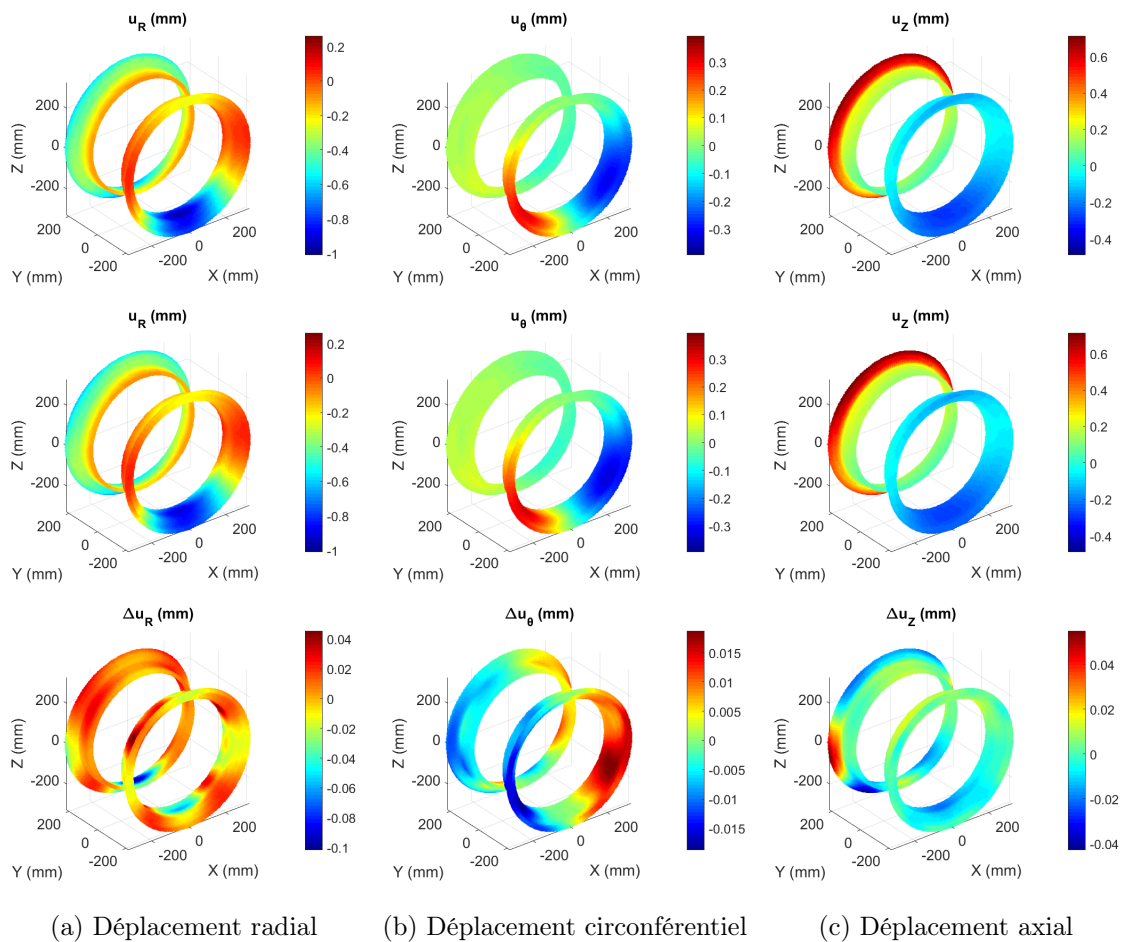


FIGURE 3.67 – Déplacements à l'interface pneu-jante obtenus avec le chargement de référence (haut), l'approximation à 18 modes (milieu) et différence associée (bas) - Cas de ligne droite du pneu C3

Par ailleurs, on peut rappeler l'efficacité de la paramétrisation proposée en termes de réduction du nombre de ddl utilisés pour décrire les chargements à l'interface pneu-jante. Le modèle éléments finis linéaire représentant la roue sur  $360^\circ$  contient environ 770000 ddl. Sa condensation statique sur la zone d'interface pneu-jante réduit ce nombre à 30240. La diagonalisation de la matrice de raideur réduite obtenue et l'utilisation du critère de

sélection basé sur la conservation de l'énergie de déformation élastique permet de n'en conserver qu'une vingtaine d'entre eux.

### 3.5 Conclusions

La paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante est une étape clé dans le processus d'identification inverse de ces conditions aux limites, tout autant que la mesure (non-intrusive) réalisée pour parvenir à cette fin.

L'analyse des champs de pression de contact fournis par les pneumaticiens a permis de se familiariser avec ces chargements et d'identifier des tendances caractéristiques du comportement de l'interface pneu-jante. Des premières tentatives de paramétrisation, en séries de Fourier et en somme de pics élémentaires, ont ensuite été proposées afin de les approximer. La paramétrisation en somme de pics élémentaires s'est révélée particulièrement efficace pour représenter tout type de chargement, tandis que l'utilisation des séries de Fourier était trop coûteuse en nombre de paramètres.

Cependant, les chargements fournis par les pneumaticiens étant obtenus grâce à une connaissance approfondie du pneumatique et en considérant la jante comme infiniment rigide, un changement de paradigme a été opéré afin de se focaliser sur la réponse mécanique de la roue. Une nouvelle paramétrisation des chargements, basée sur l'utilisation des modes propres statiques de la matrice de raideur de la roue condensée sur l'interface pneu-jante, a ainsi été définie et les propriétés de symétrie cyclique se sont révélées bénéfiques pour les calculer.

De plus, un critère fondé sur la conservation de l'énergie de déformation élastique a permis de déterminer une base réduite de modes propres dominants permettant d'approximer tout type de chargement appliqué sur la roue par un pneumatique. Cette paramétrisation, qui n'implique aucune modélisation de ce dernier, et qui dépend uniquement de l'architecture de la roue, est objective et se révèle plus robuste et plus compacte que toute autre paramétrisation. Elle est optimale dans le sens où elle permet de conserver l'énergie de déformation élastique de la structure. En effet, seuls les modes ayant une incidence majeure sur la réponse structurelle de la roue sont sélectionnés. Le modèle réduit obtenu permet donc de hiérarchiser de manière naturelle les chargements à l'interface pneu-jante et d'évaluer leur impact sur le comportement mécanique de la roue. Par conséquent, les amplitudes des modes dominants seront recherchées lors de futures identifications des chargements à l'interface pneu-jante en raison de leur identifiabilité potentielle. Par ailleurs, l'approche proposée est générique et offre un cadre pratique et efficace pouvant être étendu à tout type de chargement.



## Chapitre 4

# Identification de chargements à l'interface pneu-jante

*Ce chapitre est consacré aux identifications inverses des chargements à l'interface pneu-jante réalisées à partir des données expérimentales et des paramétrisations présentées précédemment. Tout d'abord, le concept de problème inverse est défini et sa résolution par une méthode des moindres carrés pondérés est justifiée. Ensuite, la procédure d'identification retenue dans le cadre de la thèse et sa mise en œuvre dans un environnement industriel sont présentées. Les modèles de calcul par éléments finis utilisés pour simuler le comportement mécanique de la roue sont également détaillés. On s'intéresse en particulier au cas du gonflage du pneumatique sur la roue. Les résultats d'identification obtenus pour différentes paramétrisations des chargements sont présentés et une erreur de mesure systématique est détectée. Enfin, l'analyse d'un cas de roulage en ligne droite est abordée.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Problème inverse et estimation de paramètres . . . . .</b>	<b>96</b>
4.1.1	Définition . . . . .	96
4.1.2	Approche bayésienne et notion d'extracteur . . . . .	97
4.1.3	Méthodes de résolution . . . . .	99
4.1.4	Techniques de régularisation . . . . .	102
<b>4.2</b>	<b>Procédure d'identification retenue . . . . .</b>	<b>104</b>
4.2.1	Choix de la méthode de recalage de modèle par éléments finis . . . . .	104
4.2.2	Environnement de travail . . . . .	106
4.2.3	Modélisations numériques de la roue . . . . .	107
<b>4.3</b>	<b>Identifications d'un cas de gonflage . . . . .</b>	<b>109</b>
4.3.1	Etude de sensibilité préliminaire . . . . .	109
4.3.2	Paramétrisation en somme de pics élémentaires . . . . .	118
4.3.3	Paramétrisation basée sur les modes propres d'interface . . . . .	124
4.3.4	Détection d'une erreur de mesure systématique . . . . .	130
<b>4.4</b>	<b>Identifications d'un cas de ligne droite . . . . .</b>	<b>138</b>
4.4.1	Paramétrisation basée sur les modes propres d'interface . . . . .	138
4.4.2	Discussion . . . . .	144
<b>4.5</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>144</b>

---

## 4.1 Problème inverse et estimation de paramètres

### 4.1.1 Définition

La modélisation d'un système matériel consiste à développer un modèle mathématique permettant de prédire son comportement à partir de la connaissance des phénomènes physiques mis en jeu et des théories scientifiques sous-jacentes. Ce modèle dépend généralement d'un certain nombre de paramètres  $\{\mathbf{p}\} = \{p_1, \dots, p_N\}^\top$ , de différentes natures (géométrie, matériaux, conditions aux limites, *etc.*), qui doivent être ajustés afin que le système et son modèle répondent idéalement de la même façon. On appelle ainsi *problème direct* la démarche consistant à fixer les valeurs des paramètres et à utiliser le modèle pour prédire certaines grandeurs observables  $\{\mathbf{y}\} = \{y_1, \dots, y_M\}^\top$ . On note  $\mathcal{A}$  l'opérateur, linéaire ou non, permettant de passer de l'espace des paramètres à l'espace des grandeurs observables

$$\{\mathbf{y}\} = \mathcal{A}(\{\mathbf{p}\}) \quad (4.1)$$

Cependant, les paramètres du modèle sont parfois difficilement mesurables et il est donc nécessaire de les identifier à partir d'autres grandeurs, facilement observables, constituant cette fois-ci un *problème inverse*. Il s'agit en effet de remonter à des grandeurs inconnues à partir de l'observation de leurs conséquences

$$\{\mathbf{p}\} = \mathcal{A}^{-1}(\{\mathbf{y}\}) \quad (4.2)$$

Le problème direct, qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables, est mathématiquement bien posé au sens d'[Hadamard \(1902\)](#) : la solution existe (surjectivité de  $\mathcal{A}$ ), elle est unique (injectivité de  $\mathcal{A}$ ) et dépend de manière continue des valeurs des paramètres (condition de stabilité). En revanche, le problème inverse, qui consiste à déterminer au mieux les valeurs des paramètres permettant de représenter les grandeurs observées, est généralement mal posé car il ne vérifie pas l'une ou l'autre de ces conditions. En effet, pour un jeu de paramètres fixé, les grandeurs observables prédites par le modèle  $\{\mathbf{y}_c\}$  sont rarement identiques aux mesures expérimentales  $\{\mathbf{y}_m\}$ . Les différences s'expliquent principalement par deux sources d'erreur : les grandeurs observées sont toujours entachées d'un bruit de mesure et le modèle utilisé correspond toujours à une approximation du système réel. On parle respectivement d'*erreur de mesure* et d'*erreur de modèle*. De plus, le nombre de mesures est souvent supérieur au nombre de paramètres à identifier ( $M \gg N$ ) afin d'atténuer l'effet des incertitudes et de rendre l'inversion robuste. Le système d'équations à résoudre est donc surdéterminé et l'opérateur  $\mathcal{A}$  n'est généralement pas inversible. Par conséquent, le problème inverse est reformulé en un problème de minimisation d'une fonction coût  $\mathcal{J}$  telle que

$$\{\mathbf{p}^*\} = \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{J}(\{\mathbf{p}\}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}(\{\mathbf{p}\}) = \|\{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c\}\|^2 \quad (4.3)$$

et plusieurs choix sont possibles pour définir la norme  $\|\cdot\|$  calculant la distance entre les grandeurs mesurées expérimentalement et prédites par le modèle. Bien que les normes  $L_1$  et  $L_\infty$  puissent être utilisées ([Tarantola, 2005](#)), la norme  $L_2$  est certainement la plus répandue en raison de sa différentiabilité. Les principales méthodes d'identification en mécanique se distinguent alors par le choix de la métrique associée ([Bonnet et Constantinescu, 2005](#) ; [Avril et al., 2008](#) ; [Roux et Hild, 2018](#)). L'objectif de l'identification étant non seulement de trouver le jeu de paramètres  $\{\mathbf{p}^*\}$  qui minimise la fonction coût mais aussi de déterminer la qualité avec laquelle ces paramètres ont été identifiés, la prise en compte des incertitudes de mesure est fondamentale. Une métrique optimale, détaillée dans le paragraphe suivant, peut alors être définie en ce sens ([Hendriks, 1991](#) ; [Roux et Hild, 2018](#)).

#### 4.1.2 Approche bayésienne et notion d'extracteur

Pour déterminer le jeu de paramètres permettant de minimiser l'écart entre les grandeurs prédites par le modèle et leurs observations, l'approche bayésienne consiste à se poser la question suivante : étant donné un certain  $N$ -uplet de paramètres, quelle est la probabilité que les données expérimentales observées se soient réalisées ? Autrement dit, quelle est la vraisemblance des paramètres compte tenu des données ? Si on ne considère aucune incertitude de mesure, cette probabilité est strictement nulle. Néanmoins, les données mesurées sont toujours altérées par un bruit aléatoire  $\{\boldsymbol{\eta}\}$  tel que

$$\{\mathbf{y}_m\} = \{\hat{\mathbf{y}}\} + \{\boldsymbol{\eta}\} \quad (4.4)$$

avec  $\{\mathbf{y}_m\}$  les grandeurs réellement mesurées et  $\{\hat{\mathbf{y}}\}$  les grandeurs idéales. On suppose que le bruit  $\{\boldsymbol{\eta}\}$  est gaussien et qu'il suit une loi de probabilité normale paramétrée par une moyenne nulle (*i.e.*, on présume qu'il n'y a pas d'erreur de mesure systématique) et une matrice de covariance notée  $[\mathbf{Cov}_\eta]$

$$\langle \{\boldsymbol{\eta}\} \rangle = \{\mathbf{0}\} \quad \text{et} \quad \langle \{\boldsymbol{\eta}\}\{\boldsymbol{\eta}\}^\top \rangle = [\mathbf{Cov}_\eta] \quad (4.5)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  dénote l'espérance mathématique de l'argument. L'hypothèse d'un bruit gaussien repose sur le fait que la superposition de plusieurs variables aléatoires indépendantes converge asymptotiquement vers une loi normale quand leur nombre tend vers l'infini (*i.e.*, théorème de la limite centrale). Par conséquent, en comparant les grandeurs prédites par le modèle  $\{\mathbf{y}_c\}$  pour un certain jeu de paramètres  $\{\mathbf{p}\}$  et les grandeurs mesurées  $\{\mathbf{y}_m\}$ , la probabilité que leur différence se résume uniquement au bruit de mesure  $\{\boldsymbol{\eta}\}$  s'écrit

$$P(\{\boldsymbol{\eta}\}|\{\mathbf{p}\}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det([\mathbf{Cov}_\eta])}} \exp\left(-\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\eta}\}^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} \{\boldsymbol{\eta}\}\right) \quad (4.6)$$

Le jeu de paramètres optimal est alors obtenu en maximisant la probabilité précédente, ou, de manière équivalente, en minimisant son cologarithme

$$\{\mathbf{p}^*\} = \underset{\mathbf{p}}{\operatorname{argmin}} \left( \{\boldsymbol{\eta}\}^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} \{\boldsymbol{\eta}\} \right) \quad (4.7)$$

L'estimateur obtenu de cette façon est appelé *estimateur du maximum de vraisemblance*. On remarque qu'il correspond à la minimisation définie par l'équation (4.3) en considérant une norme  $L_{\mathbf{Cov}}$  utilisant l'inverse de la matrice de covariance du bruit de mesure comme métrique associée. Cette norme, qui est optimale dans le sens où elle minimise l'effet du bruit de mesure (Hendriks, 1991 ; Roux et Hild, 2018), est connue dans le domaine des statistiques sous le nom de distance de Mahalanobis (1936). Par ailleurs, si on considère que le bruit  $\{\boldsymbol{\eta}\}$  est uniforme de variance  $\sigma^2$  et indépendant en chaque point de mesure (*i.e.*, bruit blanc), la matrice de covariance  $[\mathbf{Cov}_\eta]$  est égale à  $\sigma^2[\mathbf{I}]$ . On retrouve alors la norme euclidienne et l'expression classique de la méthode des moindres carrés.

Le résultat précédent peut également être obtenu en introduisant la notion d'*extracteur* (Avril *et al.*, 2004 ; Réthoré *et al.*, 2008 ; Réthoré *et al.*, 2011), la résolution d'un problème inverse consistant en effet à *extraire le maximum d'information* des mesures expérimentales afin d'identifier les paramètres recherchés. Pour simplifier les notations, on discrétise l'opérateur  $\mathcal{A}$ , permettant de passer de l'espace des paramètres à l'espace des grandeurs observables, sous la forme matricielle suivante

$$\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{p}\} \quad (4.8)$$

et on note  $[\mathbf{E}]$  la matrice de taille  $M \times N$  contenant les extracteurs recherchés

$$\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{E}]^\top \{\mathbf{y}_m\} \quad (4.9)$$

Compte tenu de la linéarité de l'équation (4.9), le bruit  $\{\boldsymbol{\eta}\}$  affectant les données mesurées produit également des incertitudes sur les paramètres identifiés  $\{\boldsymbol{\delta p}\}$  telles que

$$\{\boldsymbol{\delta p}\} = [\mathbf{E}]^\top \{\boldsymbol{\eta}\} \quad (4.10)$$

Par conséquent, ces incertitudes sont aussi de moyenne nulle

$$\langle \{\boldsymbol{\delta p}\} \rangle = [\mathbf{E}]^\top \langle \{\boldsymbol{\eta}\} \rangle = \{\mathbf{0}\} \quad (4.11)$$

et leur matrice de covariance s'exprime comme une forme quadratique de  $[\mathbf{E}]$

$$[\mathbf{Cov}_p^\eta] = \langle \{\boldsymbol{\delta p}\} \{\boldsymbol{\delta p}\}^\top \rangle = [\mathbf{E}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta] [\mathbf{E}] \quad (4.12)$$

Le caractère non biaisé de l'estimateur (4.11), combiné aux équations (4.8) et (4.9), implique nécessairement la contrainte d'orthogonalité suivante entre le modèle et les extracteurs recherchés

$$[\mathbf{E}]^\top [\mathbf{A}] = [\mathbf{I}] \quad (4.13)$$

avec  $[\mathbf{I}]$  la matrice identité. Ainsi, en cherchant à minimiser les variances associées à chaque paramètre, sous la contrainte d'absence de biais définie par l'équation (4.13), on peut alors déterminer les extracteurs optimaux, *i.e.* qui sont les plus robustes par rapport au bruit de mesure. Pour illustrer le résultat obtenu, on suppose que seul le paramètre  $p_k$  est recherché. L'incertitude sur ce paramètre, qui doit être minimisée, est définie par

$$\mathcal{R}_k = \{\mathbf{e}_k\}^\top [\mathbf{Cov}_\eta] \{\mathbf{e}_k\} \quad (4.14)$$

où  $\{\mathbf{e}_k\}$  correspond à la  $k$ -ième colonne de la matrice  $[\mathbf{E}]$ . La contrainte d'absence de biais impose également

$$\sum_{i=1}^M E_{ik} A_{ij} = \delta_{kj} \quad \forall j \in [1, N] \quad (4.15)$$

où  $\delta$  représente le symbole de Kronecker. On obtient alors un problème de minimisation sous contraintes qui peut être résolu en introduisant des multiplicateurs de Lagrange regroupés dans le vecteur  $\{\boldsymbol{\Lambda}_k\}$

$$\begin{bmatrix} 2[\mathbf{Cov}_\eta] & [\mathbf{A}]^\top \\ [\mathbf{A}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{e}_k\} \\ \{\boldsymbol{\Lambda}_k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\boldsymbol{\Delta}_k\} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

où  $\{\boldsymbol{\Delta}_k\}$  correspond à la  $k$ -ième colonne de la matrice identité. La solution du problème (4.16) permet d'obtenir l'extracteur optimal du paramètre  $p_k$  puisqu'il minimise son incertitude par rapport au bruit de mesure. Lorsque plusieurs paramètres sont recherchés, la minimisation de chacune des variances associées conduit à la détermination de l'extracteur correspondant et on retrouve la métrique définie par l'équation (4.7). On remarque de nouveau que si la matrice de covariance associée au bruit de mesure est proportionnelle à la matrice identité (*i.e.*, hypothèse d'un bruit blanc gaussien uniforme), alors l'extracteur optimal correspond exactement à celui des moindres carrés.

La prise en compte des incertitudes de mesure permet ainsi de spécifier une métrique optimale pour définir la fonction coût  $\mathcal{J}$  évaluant l'écart entre les grandeurs observables prédites par le modèle et celles mesurées expérimentalement

$$\mathcal{J}(\{\mathbf{p}\}) = (\{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c\})^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} (\{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c\}) \quad (4.17)$$

et sa minimisation conduit à l'identification du jeu de paramètres le moins sensible au bruit de mesure. On note qu'une normalisation de  $\mathcal{J}$  par le nombre total  $M$  de degrés de liberté mesurés permet d'obtenir une valeur unitaire en présence du bruit de mesure uniquement. Cette métrique permet également de caractériser les incertitudes sur les paramètres identifiés grâce à la matrice de covariance associée (Gras *et al.*, 2015c). De plus, l'utilisation combinée de mesures de différentes natures (déplacements, déformations, efforts, *etc.*) peut être aisément appréhendée dans ce cadre en ajoutant les différentes sources d'information dans la fonctionnelle à minimiser et en les pondérant respectivement par l'inverse de leur matrice de covariance (Mathieu *et al.*, 2015 ; Bertin *et al.*, 2016 ; Neggers *et al.*, 2019).

**Remarque 5** Dans les paragraphes précédents, l'erreur de modèle a volontairement été négligée. Néanmoins, les résidus obtenus après identification sont extrêmement riches pour évaluer l'adéquation entre le modèle utilisé et les données observées. En effet, ils devraient idéalement se réduire au bruit de mesure dans le cadre proposé. Dans le cas contraire, les résidus mettent en évidence les faiblesses du modèle et donnent des indices sur la manière de l'améliorer. On peut, par exemple, l'enrichir progressivement en ajoutant des paramètres supplémentaires et déterminer leur impact en comparant les champs de sensibilité obtenus aux champs de résidus (Neggers *et al.*, 2017). Par ailleurs, des techniques ont également été proposées dans la littérature pour introduire explicitement l'erreur de modèle dans le processus d'identification inverse (Kaipio et Somersalo, 2005 ; Kaipio et Somersalo, 2007). L'approche bayésienne est alors de nouveau utilisée en définissant une densité de probabilité *a priori* de l'erreur de modèle.

### 4.1.3 Méthodes de résolution

La résolution d'un problème inverse consiste à minimiser une fonction coût  $\mathcal{J}$  définie de manière générale par l'équation (4.17). Dans cette section, on détaille quelques méthodes classiques d'optimisation pour y parvenir. L'inversion d'un modèle linéaire par rapport aux paramètres à identifier est tout d'abord présentée puis on s'intéresse aux méthodes itératives qui sont nécessaires lorsque le modèle à inverser est non-linéaire par rapport aux paramètres recherchés. Pour une revue détaillée des différentes méthodes, le lecteur pourra se référer aux ouvrages de Press *et al.* (2007), Petit et Maillat (2008) et Bonnet (2018).

#### Inversion d'un modèle linéaire

On considère un modèle permettant de décrire les grandeurs observables  $\{\mathbf{y}\}$  comme une combinaison linéaire de  $N$  fonctions  $\{\mathbf{a}_j\}$  telles que

$$\{\mathbf{y}\} = \sum_{j=1}^N p_j \{\mathbf{a}_j\} \quad \text{soit} \quad \{\mathbf{y}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{p}\} \quad (4.18)$$

La minimisation de la fonction coût  $\mathcal{J}$  consiste à déterminer le jeu de paramètres  $\{\mathbf{p}^*\}$  qui annule son gradient (condition d'optimalité du premier ordre)

$$\nabla \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^*\}) = \frac{\partial \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^*\})}{\partial \{\mathbf{p}\}} = \{\mathbf{0}\} \quad (4.19)$$

En annulant les dérivées partielles par rapport à chaque paramètre, on obtient un système de  $N$  équations dites normales telles que

$$[\mathbf{A}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} [\mathbf{A}] \{\mathbf{p}^*\} = [\mathbf{A}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} \{\mathbf{y}_m\} \quad (4.20)$$

Les paramètres recherchés s'expriment alors explicitement selon l'équation suivante

$$\{\mathbf{p}^*\} = [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{A}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} \{\mathbf{y}_m\} \quad \text{avec} \quad [\mathbf{H}] = [\mathbf{A}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} [\mathbf{A}] \quad (4.21)$$

où  $[\mathbf{H}]$  représente la matrice hessienne. L'estimateur  $\{\mathbf{p}^*\}$  obtenu est sans biais et connu sous le nom d'*estimateur de Gauss-Markov* dans le domaine des statistiques (Beck et Arnold, 1977). Il s'agit de l'*estimateur du maximum de vraisemblance* ou de *variance minimale*. Il minimise bien la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  puisqu'il respecte également la condition d'optimalité du second ordre

$$\nabla^2 \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^*\}) = 2[\mathbf{H}] \geq \{\mathbf{0}\} \quad (4.22)$$

étant donné que la matrice  $[\mathbf{Cov}_\eta]^{-1}$  est symétrique semi-définie positive. La matrice de covariance caractérisant les incertitudes sur les paramètres identifiés dues au bruit de mesure s'écrit alors

$$[\mathbf{Cov}_p^\eta] = [\mathbf{H}]^{-1} \quad (4.23)$$

Les termes diagonaux de cette matrice correspondent aux variances des erreurs d'estimation de chaque paramètre pris indépendamment tandis que les termes hors diagonale se rapportent aux covariances de cette erreur pour une paire de paramètres choisie. Par ailleurs, on remarque que les caractéristiques statistiques des paramètres identifiés ne dépendent pas des valeurs de ces paramètres dans le cas linéaire. Cette propriété est très intéressante puisqu'elle permet d'optimiser l'essai (*e.g.*, trajet de chargement, géométrie, instrumentation, *etc.*) en amont de l'identification de manière à minimiser les incertitudes sur les paramètres qui seront identifiés (Kirkegaard, 1991). Dans le Chapitre 5, une instrumentation optimale par jauges d'extensométrie sera ainsi proposée pour l'identification des chargements à l'interface pneu-jante lors d'un cas de gonflage.

### Inversion d'un modèle non-linéaire

Dans le cas où le modèle est non-linéaire par rapport à ses paramètres, l'approche consiste toujours à minimiser une fonction coût  $\mathcal{J}$  définie par l'équation (4.17). Cependant, en raison des non-linéarités, une méthode itérative doit cette fois-ci être utilisée afin d'identifier les paramètres recherchés. La démarche générale consiste à initialiser les valeurs des paramètres et à utiliser un algorithme afin d'atteindre le minimum de la fonction coût par itérations successives. Les méthodes dites d'ordre 0 n'utilisent que les valeurs successives de la fonction coût et ne nécessitent pas d'estimer son gradient par rapport aux paramètres à identifier. On peut citer, par exemple, l'algorithme du simplexe (Nelder et Mead, 1965) ou les algorithmes génétiques (Holland, 1975). Cependant, ces méthodes ne sont pas très adaptées lorsque le nombre de paramètres à identifier est important. Les méthodes dites du premier et du second ordre utilisent des informations supplémentaires apportées respectivement par les dérivées premières et secondes de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  par rapport aux paramètres à identifier. Au voisinage du minimum, le gradient devenant de plus en plus faible, les méthodes d'ordre 2 permettent de converger plus rapidement grâce à l'information contenue dans la matrice hessienne.

On propose de détailler l'une des méthodes les plus répandues pour résoudre un problème inverse non-linéaire : l'algorithme de Newton-Raphson. Il consiste à générer à chaque itération  $t$  un vecteur de paramètres  $\{\mathbf{p}^{(t)}\}$  tel que

$$\mathcal{J}(\{\mathbf{p}^{(t)}\}) < \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^{(t-1)}\}) \quad (4.24)$$

Pour ce faire, on réalise un développement de Taylor au premier ordre du gradient de la fonctionnelle à minimiser au voisinage de l'optimum recherché

$$\nabla \mathcal{J}(\{\mathbf{p}\}) = \nabla \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^*\}) + \nabla^2 \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^*\})(\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}^*\}) \quad (4.25)$$

Le gradient de la fonctionnelle étant nul à l'optimum, on obtient

$$\{\mathbf{p}^*\} = \{\mathbf{p}\} - (\nabla^2 \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^*\}))^{-1} \nabla \mathcal{J}(\{\mathbf{p}\}) \quad (4.26)$$

L'algorithme de Newton-Raphson correspond à la forme itérative de l'équation (4.26) permettant ainsi de déterminer le vecteur des paramètres à chaque itération selon

$$\{\mathbf{p}^{(t+1)}\} = \{\mathbf{p}^{(t)}\} - \left( \nabla^2 \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^{(t)}\}) \right)^{-1} \nabla \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^{(t)}\}) \quad (4.27)$$

Le calcul du gradient et du hessien de la fonctionnelle à minimiser sont donc nécessaires. Cependant, le modèle n'est généralement pas dérivable simplement et on a donc recours à des approximations de ces quantités par différences finies. Pour simplifier les notations, on introduit la notion de *vecteur de sensibilité* (Turanyi, 1990 ; Petelet, 2007), noté  $\{\mathbf{s}_k\}$ , correspondant à la variation des grandeurs observables prédites par le modèle  $\{\mathbf{y}_c\}$  par rapport à une variation du paramètre  $p_k$ , les autres paramètres étant fixés

$$\{\mathbf{s}_k\} = \frac{\partial \{\mathbf{y}_c\}}{\partial p_k} \quad (4.28)$$

Cette dérivée partielle est approximée par une différence finie décentrée pour limiter le nombre de calculs à effectuer. On impose alors une variation  $\Delta p_k$  à la valeur du paramètre considéré, tout en maintenant les autres paramètres à leur valeur de référence, et on évalue l'impact obtenu sur les grandeurs prédites par le modèle

$$\{\mathbf{s}_k\} \approx \frac{\{\mathbf{y}_c\}_{p_k + \Delta p_k} - \{\mathbf{y}_c\}_{p_k}}{\Delta p_k} \quad (4.29)$$

Les vecteurs de sensibilité peuvent être regroupés dans une *matrice de sensibilité* (aussi appelée matrice jacobienne) contenant les dérivées partielles en chaque point par rapport à chaque paramètre

$$[\mathbf{S}] = \left[ \{\mathbf{s}_1\} \quad \{\mathbf{s}_2\} \quad \dots \quad \{\mathbf{s}_N\} \right] \quad (4.30)$$

Le gradient et le hessien de la fonctionnelle à minimiser s'expriment alors simplement à l'itération  $t$  par

$$\nabla \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^{(t)}\}) = -2[\mathbf{S}^{(t)}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} \left( \{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c^{(t)}\} \right) \quad (4.31)$$

$$\nabla^2 \mathcal{J}(\{\mathbf{p}^{(t)}\}) \approx 2[\mathbf{H}^{(t)}] \quad \text{avec} \quad [\mathbf{H}^{(t)}] = [\mathbf{S}^{(t)}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} [\mathbf{S}^{(t)}] \quad (4.32)$$

en négligeant les termes d'ordre 2 dans le calcul du hessien.

En injectant les équations (4.31) et (4.32) dans l'équation (4.27), on obtient les paramètres corrigés à chaque itération

$$\{\mathbf{p}^{(t+1)}\} = \{\mathbf{p}^{(t)}\} + [\mathbf{H}^{(t)}]^{-1} [\mathbf{S}^{(t)}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} (\{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c^{(t)}\}) \quad (4.33)$$

Ce schéma est classique et de nombreuses variantes existent pour en améliorer la convergence. On peut citer l'algorithme de Gauss-Newton qui consiste à introduire un coefficient de relaxation devant l'inverse du hessien ou l'algorithme de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963) dans lequel un multiplicateur de Lagrange est ajouté au calcul de ce dernier pour améliorer son conditionnement. De plus, on remarque que le schéma itératif (4.33) nécessite d'actualiser la matrice de sensibilité à chaque itération, ce qui constitue une opération coûteuse en termes de temps de calcul. Des méthodes proposent alors de ne pas réaliser une mise à jour systématique, ou de limiter les directions pour le calcul des vecteurs de sensibilité. Par ailleurs, on note que l'équation (4.33) correspond exactement à l'équation (4.21) dans le cas où le modèle est linéaire par rapport à ses paramètres. Les vecteurs de sensibilité sont alors indépendants des valeurs de paramètres.

#### 4.1.4 Techniques de régularisation

Dans les paragraphes précédents, le problème inverse a été présenté comme un problème de minimisation d'une fonction coût  $\mathcal{J}$ , définie par l'équation (4.17), sans contraintes particulières sur les paramètres recherchés. Cependant, il se peut que sa résolution conduise à l'identification de paramètres caractérisés par des incertitudes importantes, même si les résidus obtenus sur les grandeurs observables sont faibles (*i.e.*, problème de conditionnement). Les seules données mesurées ne suffisent alors plus à obtenir une solution acceptable et il devient nécessaire d'intégrer des informations *a priori* sur les paramètres afin de restreindre l'espace de recherche. La *régularisation* consiste ainsi à ajouter des contraintes sur les paramètres recherchés afin d'obtenir une solution physiquement admissible. Cette solution résulte donc d'un compromis entre la fidélité aux mesures et le respect des contraintes imposées (*i.e.*, compromis biais/dispersion). Dans les paragraphes suivants, on présente ainsi quelques méthodes permettant de régulariser un problème inverse.

##### Régularisation de type Tikhonov

On suppose qu'on dispose *a priori* d'un ensemble de valeurs de référence pour les paramètres recherchés regroupées dans un vecteur  $\{\mathbf{p}_0\}$ . De manière générale, la *régularisation* consiste à ajouter un terme dans la fonctionnelle  $\mathcal{J}$  à minimiser afin de stabiliser le problème inverse et d'obtenir une solution qui reste proche de la référence

$$\mathcal{J}_{reg}(\{\mathbf{p}\}) = \|\{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c\}\|^2 + \|\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}_0\}\|^2 \quad (4.34)$$

avec

$$\|\{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c\}\|^2 = (\{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c\})^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} (\{\mathbf{y}_m\} - \{\mathbf{y}_c\}) \quad (4.35)$$

et

$$\|\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}_0\}\|^2 = (\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}_0\})^\top [\mathbf{Q}]^{-1} (\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}_0\}) \quad (4.36)$$

où la matrice  $[\mathbf{Q}]$  permet de définir l'opérateur de régularisation souhaité. Dans le cas où le modèle est linéaire par rapport à ses paramètres, la solution régularisée  $\{\mathbf{p}^{reg}\}$  s'obtient alors explicitement par

$$\{\mathbf{p}^{reg}\} = \{\mathbf{p}_0\} + \left( [\mathbf{A}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} [\mathbf{A}] + [\mathbf{Q}] \right)^{-1} [\mathbf{A}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} (\{\mathbf{y}_m\} - [\mathbf{A}]\{\mathbf{p}_0\}) \quad (4.37)$$

La régularisation la plus classique consiste à choisir  $[\mathbf{Q}] = \alpha[\mathbf{I}]$ , avec  $\alpha > 0$ , afin de privilégier les solutions proches de la référence (Tikhonov et Arsenin, 1977). Le compromis entre la fidélité aux mesures et le respect de l'information *a priori* introduite sur la solution est alors géré par la valeur du paramètre  $\alpha$ , qui peut être choisie de plusieurs manières. On peut, par exemple, déterminer ce paramètre de telle sorte que la fonction coût définie par l'équation (4.34) soit de l'ordre de grandeur du bruit de mesure à convergence, selon le principe de l'écart de Morozov (1984). Une autre possibilité consiste à tracer une « courbe en L », représentant les deux normes de l'équation (4.34) l'une en fonction de l'autre pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ , et à identifier le point du maximum de courbure pour déterminer la pondération optimale (Hansen, 1992).

En reprenant le point de vue de l'approche bayésienne présentée au § 4.1.2, on peut également imaginer utiliser une information statistique *a priori* sur les paramètres du modèle pour définir la matrice de régularisation (Tarantola, 2005). Supposons que les paramètres suivent *a priori* une loi de probabilité caractérisée par une moyenne  $\{\mathbf{p}_0\}$  et une matrice de covariance  $[\mathbf{Cov}_p^{prior}]$ . Le théorème des probabilités conditionnelles de Bayes permet de définir une probabilité *a posteriori* sur les paramètres recherchés telle que

$$P(\{\mathbf{p}\}|\{\boldsymbol{\eta}\}) \propto P(\{\boldsymbol{\eta}\}|\{\mathbf{p}\})P(\{\mathbf{p}\}) \quad (4.38)$$

avec

$$P(\{\boldsymbol{\eta}\}|\{\mathbf{p}\}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\eta}\}^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1}\{\boldsymbol{\eta}\}\right) \quad (4.39)$$

et

$$P(\{\mathbf{p}\}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}_0\})^\top [\mathbf{Cov}_p^{prior}]^{-1}(\{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{p}_0\})\right) \quad (4.40)$$

La résolution du problème inverse consiste alors à maximiser la probabilité *a posteriori* sur les paramètres, ce qui revient exactement à choisir une matrice de régularisation  $[\mathbf{Q}]$  égale à la matrice de covariance *a priori* des paramètres du modèle  $[\mathbf{Cov}_p^{prior}]$ . Dans ce cadre, on peut citer les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) qui permettent d'estimer par échantillonnage les différentes densités de probabilité (Mosegaard et Tarantola, 1995).

### Ajout de contraintes d'égalité ou d'inégalité

Une autre technique de régularisation consiste à résoudre le problème inverse en introduisant des contraintes que doivent satisfaire les paramètres (Bertsekas, 1982). Un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité peut ainsi s'exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} &\text{minimiser } \mathcal{J}(\{\mathbf{p}\}) \\ &\text{sous les contraintes } [\mathbf{C}]\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{d}\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

avec  $[\mathbf{C}]$  une matrice de taille  $L \times N$  et  $\{\mathbf{d}\}$  un vecteur colonne de taille  $L$ . Ce problème peut être résolu en introduisant des multiplicateurs de Lagrange  $\{\boldsymbol{\Lambda}\}$  et en minimisant une nouvelle fonction coût  $\mathcal{L}$  (*i.e.*, le lagrangien) définie par

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{p}\}, \{\boldsymbol{\Lambda}\}) = \mathcal{J}(\{\mathbf{p}\}) + \{\boldsymbol{\Lambda}\}^\top (\{\mathbf{d}\} - [\mathbf{C}]\{\mathbf{p}\}) \quad (4.42)$$

Les conditions d'optimalité imposent

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\{\mathbf{p}\}, \{\boldsymbol{\Lambda}\})}{\partial \{\mathbf{p}\}} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\{\mathbf{p}\}, \{\boldsymbol{\Lambda}\})}{\partial \{\boldsymbol{\Lambda}\}} = \{\mathbf{0}\} \quad (4.43)$$

et la solution est alors obtenue explicitement, dans le cas d'un modèle linéaire, par

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{p}\} \\ \{\mathbf{\Lambda}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2[\mathbf{A}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} [\mathbf{A}] & [\mathbf{C}]^\top \\ [\mathbf{C}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2[\mathbf{A}]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} \{\mathbf{y}_m\} \\ \{\mathbf{d}\} \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Dans le cas d'une optimisation sous contraintes d'inégalité, le problème s'exprime de manière similaire sous la forme

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \mathcal{J}(\{\mathbf{p}\}) \\ & \text{sous les contraintes } [\mathbf{C}]\{\mathbf{p}\} \leq \{\mathbf{d}\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

La fonction coût  $\mathcal{L}$  à minimiser reste identique à celle utilisée pour l'optimisation sous contraintes d'égalité et définie par l'équation (4.42). Une solution admissible du problème (4.45) doit alors respecter les conditions de Karush-Kuhn-Tucker ([Kuhn et Tucker, 1951](#))

$$\begin{aligned} - \text{Stationnarité : } & \frac{\partial \mathcal{L}(\{\mathbf{p}\}, \{\mathbf{\Lambda}\})}{\partial \{\mathbf{p}\}} = \{\mathbf{0}\} \\ - \text{Admissibilité primale : } & [\mathbf{C}]\{\mathbf{p}\} \leq \{\mathbf{d}\} \\ - \text{Admissibilité duale : } & \{\mathbf{\Lambda}\} \geq \{\mathbf{0}\} \\ - \text{Complémentarité : } & \{\mathbf{\Lambda}\}^\top (\{\mathbf{d}\} - [\mathbf{C}]\{\mathbf{p}\}) = \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

De nombreux algorithmes existent pour résoudre ce type de problème ([Bertsekas, 1982](#); [Dollor, 2005](#)) et on peut notamment citer l'algorithme des points intérieurs utilisé dans le logiciel *MATLAB*®.

## 4.2 Procédure d'identification retenue

### 4.2.1 Choix de la méthode de recalage de modèle par éléments finis

Le problème inverse étudié dans le cadre de ces travaux de thèse consiste à identifier les chargements exercés par un pneumatique sur une roue d'aéronef à partir de mesures de la déformée de cette dernière lors de différents cas de charge. Pour le résoudre, la méthode de recalage de modèle par éléments finis (Finite Element Model Updating, FEMU, en anglais) a été choisie. Elle consiste à minimiser l'écart entre les grandeurs observables mesurées et calculées par itérations successives sur les paramètres à identifier implémentés dans un modèle de calcul par éléments finis.

Cette méthode a été introduite par [Kavanagh et Clough \(1971\)](#) et de nombreuses variantes de l'approche originale ont depuis été proposées. Elle se distinguent notamment par la nature des grandeurs observables considérées. La comparaison entre la mesure et le calcul peut en effet porter sur des données de déplacement ([Meuwissen et al., 1998](#); [Witz et al., 2008](#)), de déformation ([Lecompte et al., 2007](#)), d'effort ([Pagnacco et al., 2007](#)), de température ([Pottier, 2010](#)), de vibration ([Collins et al., 1974](#); [Mottershead et Friswell, 1993](#)) et même sur une combinaison de différentes données ([Pottier, 2010](#); [Mathieu et al., 2015](#); [Bertin et al., 2016](#)), ce qui confère une grande flexibilité à la méthode. En pratique, il est donc nécessaire d'avoir en parallèle une mesure expérimentale et un modèle de calcul par éléments finis représentatif des conditions de l'essai. L'écart entre les données mesurées et calculées est classiquement formulé au sens des moindres carrés et sa minimisation par un algorithme d'optimisation conduit à l'identification des paramètres recherchés.

Dans le cas étudié, les mesures disponibles sont des champs de déplacement et des déformations ponctuelles mesurés sur la roue (cf. Chapitre 2). On propose de réaliser les identifications inverses des chargements à l'interface pneu-jante à partir des seules mesures de champs de déplacement et de valider les résultats obtenus en comparant les déformations aux positions des jauges (Cosseron *et al.*, 2018). On se place donc dans le cadre d'une approche dite FEMU- $u$  illustrée sur la Figure 4.1. Toutefois, une identification basée sur les mesures de déformation (FEMU- $\varepsilon$ ) ou sur une combinaison des mesures de déplacement et de déformation (FEMU- $u-\varepsilon$ ) peut également être envisagée de manière analogue.

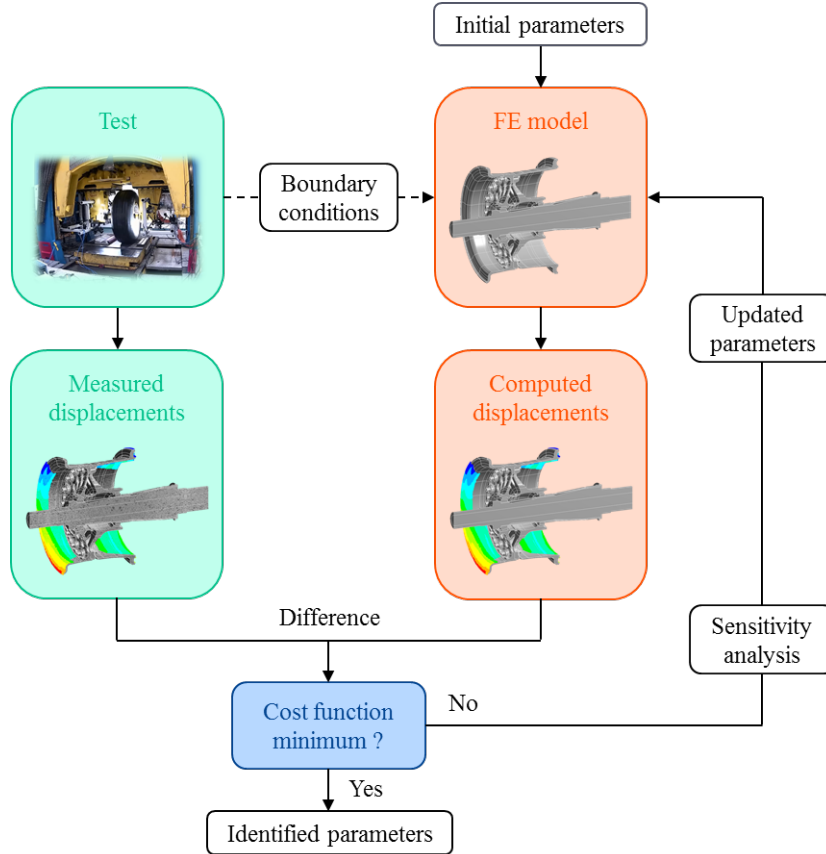


FIGURE 4.1 – Schéma de principe de la méthode de recalage de modèle par éléments finis (FEMU- $u$ )

L'écart entre les champs de déplacement mesurés et calculés est défini par une fonction coût  $\mathcal{J}_u$  similaire à celle de l'équation (4.17)

$$\mathcal{J}_u(\{\mathbf{p}\}) = \frac{1}{N_u} (\{\mathbf{u}_m\} - \{\mathbf{u}_c\})^\top [\mathbf{C}_u]^{-1} (\{\mathbf{u}_m\} - \{\mathbf{u}_c\}) \quad (4.47)$$

avec  $\{\mathbf{u}_m\}$  (resp.  $\{\mathbf{u}_c\}$ ) un vecteur colonne regroupant les déplacements mesurés (resp. calculés) en chaque point de mesure et dans les trois directions de l'espace,  $N_u$  le nombre total de degrés de liberté cinématiques mesurés, et  $[\mathbf{C}_u]$  la matrice de covariance du champ de déplacement mesuré. La prise en compte des incertitudes de mesure dans la méthode de recalage par éléments finis a conduit à la dénomination « weighted FEMU » dans la littérature (Mathieu *et al.*, 2015).

#### 4.2.2 Environnement de travail

L'approche FEMU- $u$  choisie repose sur la comparaison de champs de déplacement mesurés par corrélation d'images numériques et calculés à partir d'un modèle par éléments finis. Les méthodes de CIN globale permettent d'exprimer ces champs dans un formalisme commun basé sur une description NURBS du modèle CAO ou sur les fonctions de forme du maillage éléments finis, facilitant ainsi grandement le dialogue entre l'essai et le calcul (Hild et Roux, 2012). Cependant, la résolution du problème inverse est généralement réalisée par des codes « maison » développés en différents langages (C++, Python, *etc.*) et spécifiques à chaque cas d'application. La problématique d'identification inverse de paramètres étant très largement partagée par les différentes sociétés du groupe *Safran*, on propose d'utiliser la flexibilité de la plateforme *ANSYS® Workbench™* pour créer un outil générique capable de résoudre des problèmes inverses de tout type dans un environnement industriel.

Une extension ACT (*ANSYS® Customization Toolkit*) a ainsi été développée lors d'une collaboration entre *Safran Landing Systems* et *Safran Tech* pour répondre à ce besoin. Cette extension permet d'intégrer les données mesurées directement dans l'environnement de calcul et de définir la fonction coût à minimiser. Des méthodes classiques de transfert de champs ont notamment été recodées afin d'interpoler les résultats entre différents maillages lorsque nécessaire. L'intégration des incertitudes de mesure a constitué l'un des points les plus délicats du développement car ces grandeurs n'étaient pas connues de manière native par le code de calcul. Leur intégration n'a été opérationnelle qu'en fin de thèse et uniquement sous la forme d'un poids affectant chaque degré de liberté mesuré. Par ailleurs, la minimisation de la fonction coût a été confiée au module d'optimisation *ANSYS® DesignXplorer* couplé à l'outil *ANSYS® Remote Solve Manager* permettant la liaison entre le poste utilisateur et le serveur de calcul interne à *Safran Landing Systems*. La Figure 4.2 illustre le processus de résolution du problème inverse utilisé dans le cadre de ces travaux de thèse.

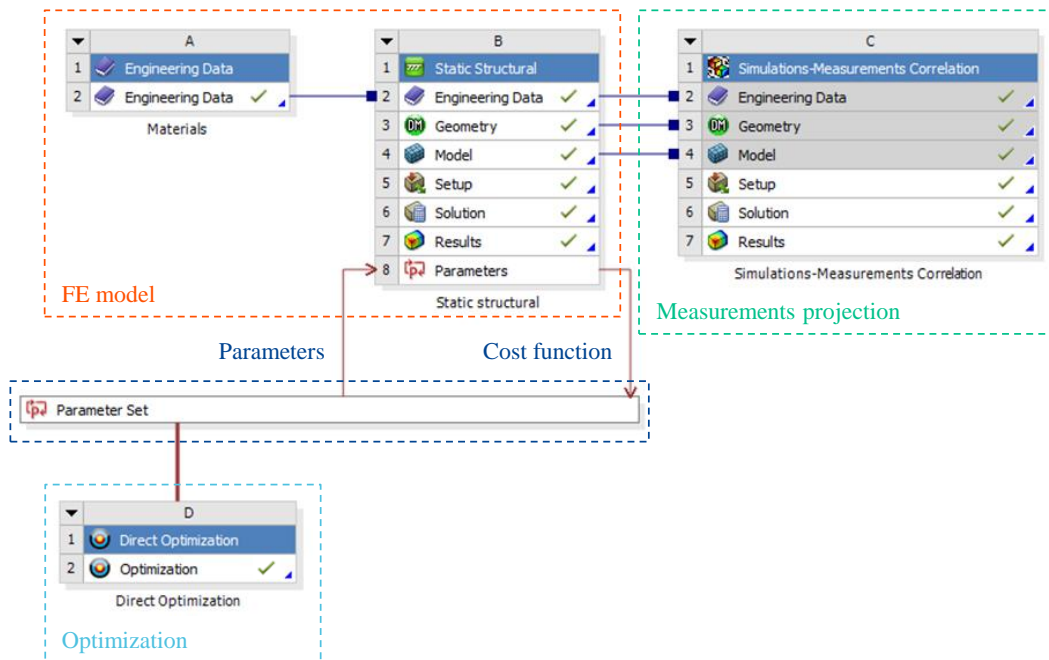


FIGURE 4.2 – Processus d'identification inverse dans la plateforme *ANSYS® Workbench™*

Parmi les méthodes d'optimisation proposées par *ANSYS® DesignXplorer* (ANSYS, Inc., 2015), la méthode NLPQL (NonLinear Programming by Quadratic Lagrangian) a été choisie pour minimiser la fonction coût évaluant l'écart entre les déplacements mesurés et calculés (Schittkowski, 1986). Il s'agit d'un algorithme similaire à l'algorithme de Newton-Raphson détaillé au § 4.1.3. Le critère de convergence utilisé correspond à la valeur par défaut proposée pour la méthode NLPQL. Le taux de convergence le plus rapide entre les gradients et la fonction coût à minimiser détermine la fin de l'algorithme d'optimisation.

### 4.2.3 Modélisations numériques de la roue

Le modèle de calcul par éléments finis illustré sur la Figure 4.3 est celui retenu pour simuler le comportement mécanique de la roue lors des essais statiques présentés au Chapitre 2. Il contient les deux demi-roues (intérieure et extérieure), les boulons permettant de les assembler et différentes pièces assurant la liaison avec le bâti d'essai (*i.e.*, roulements, essieu et protecteurs associés). Ce modèle est conforme aux méthodologies de calcul internes utilisées chez *Safran Landing Systems* et comporte ainsi de nombreuses paires de contact, essentiellement non-linéaires au niveau de la zone d'assemblage entre les demi-roues et linéaires vers l'essieu. Les propriétés des matériaux utilisés sont celles d'un alliage d'aluminium avec un comportement élastique linéaire pour les demi-roues et d'un acier standard pour les autres pièces. Par ailleurs, on fait l'hypothèse que le comportement mécanique de la roue est symétrique par rapport au plan  $Y - Z$  et le modèle ne représente donc qu'une portion angulaire de  $180^\circ$  de celle-ci. Le maillage est réalisé avec des éléments volumiques quadratiques et comporte environ 2 millions de nœuds et 1 million d'éléments.

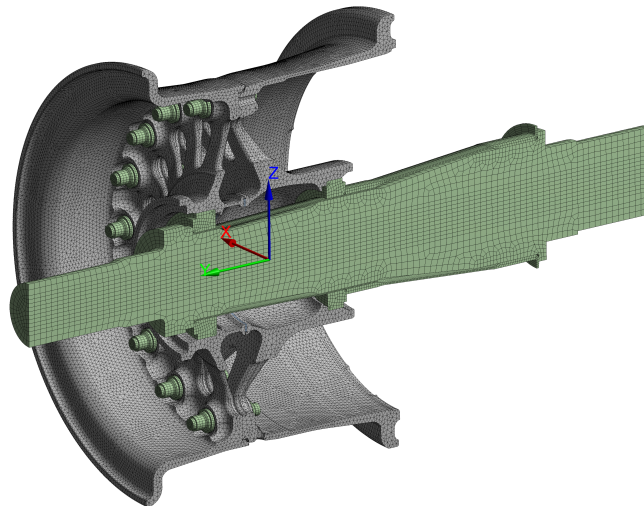


FIGURE 4.3 – Maillage du modèle éléments finis non-linéaire

Les conditions aux limites appliquées au niveau de l'essieu n'ayant pas été mesurées lors des essais, on impose un encastrement sur l'une de ses extrémités et on autorise uniquement un déplacement axial suivant la direction  $Y$  sur l'autre. Pour respecter la condition de symétrie, le déplacement suivant la direction  $X$  est bloqué pour tous les nœuds situés dans le plan  $Y - Z$ . Par ailleurs, les chargements appliqués dans le modèle comprennent le serrage de l'écrou de fusée (2500 daN), le serrage des boulons (16000 daN), la pression d'azote et les chargements de contact à l'interface pneu-jante (Figure 4.4).

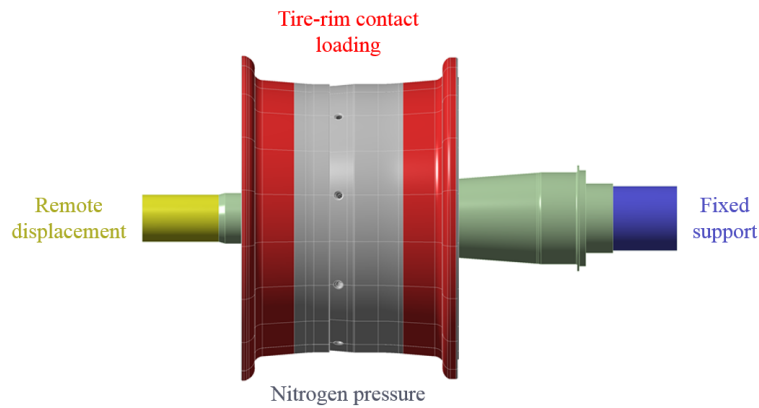


FIGURE 4.4 – Conditions aux limites du modèle éléments finis non-linéaire

Pour simuler le comportement mécanique de la roue en fonction des cas de charge appliqués, les non-linéarités du modèle imposent de diviser le calcul en plusieurs étapes : 1) frettage des cuvettes de roulement et serrages de l'écrou de fusée et des boulons ; 2) application du chargement dû au gonflage du pneu sur la roue ; 3) application du chargement dû au cas de roulage étudié (*i.e.*, ligne droite ou ripé). Les deux premières étapes permettent de générer un état déformé « initial » de la roue et doivent nécessairement être réalisées avant d'étudier les cas de roulage ultérieurs. Dans la suite du manuscrit, ce modèle sera dénommé *modèle non-linéaire* par opposition au *modèle linéaire* présenté ci-après.

Une version dégradée du modèle non-linéaire est illustrée sur la Figure 4.5. Dans ce modèle, seules les demi-roues et les boulons permettant de les assembler sont représentés. L'essieu et les différentes pièces d'outillage sont supprimés. De plus, tous les contacts sont linéarisés, ce qui a notamment pour effet que les demi-roues ne peuvent plus se séparer et le serrage initial des boulons peut donc être négligé. Les conditions aux limites se réduisent alors à un encastrement des surfaces d'appui des cuvettes de roulement au niveau du moyeu de la roue et à la condition de symétrie dans le plan  $Y - Z$ . Les chargements appliqués sont de nouveau la pression d'azote et les chargements de contact à l'interface pneu-jante. On note également que le principe de superposition des chargements peut s'appliquer dans ce cadre. Par ailleurs, le maillage et les données des matériaux utilisés sont identiques au modèle non-linéaire.

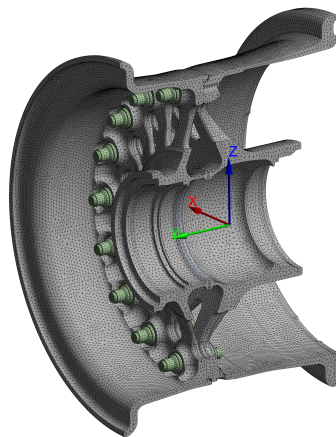


FIGURE 4.5 – Maillage du modèle éléments finis linéaire

Des études d'influence ont été menées en cours de thèse et ont montré qu'une telle simplification du modèle original avait peu d'impact sur le comportement mécanique de la roue, dans les zones étudiées, lors du cas de gonflage. Ce modèle pourra donc être utilisé afin d'obtenir des résultats de manière rapide, en particulier lorsqu'il s'agira de réaliser des études d'influence. Pour l'étude d'un cas de roulage, la modélisation des roulements et de l'essieu sera néanmoins nécessaire pour simuler correctement le comportement de la roue au niveau des voiles et du moyeu.

### 4.3 Identifications d'un cas de gonflage

Dans cette partie, on s'intéresse aux identifications inverses réalisées afin de déterminer le chargement de gonflage réellement appliqué par le pneu sur la roue lors des essais présentés au Chapitre 2. Une étude de sensibilité utilisant la paramétrisation en somme de pics élémentaires (cf. § 3.3.2) est tout d'abord réalisée puis on détaille les résultats obtenus pour différentes paramétrisations des chargements.

#### 4.3.1 Etude de sensibilité préliminaire

Les études d'influence détaillées au § 3.3.2 ont permis de montrer que le champ de pression de contact fourni par le pneumaticien pour le cas de gonflage du pneu étudié lors des essais pouvait être convenablement approximé en le paramétrant par une somme de deux pics gaussiens (Figure 3.33b). On propose donc d'évaluer la sensibilité de plusieurs *quantités d'intérêt* par rapport à cette paramétrisation et d'identifier les paramètres les plus influents. Dans ce cadre, le modèle non-linéaire de calcul par éléments finis de la roue est utilisé. La paramétrisation utilisant les modes propres statiques de la roue à l'interface pneu-jante n'avait pas encore été définie lorsque cette étude a été menée.

L'analyse de sensibilité consiste à étudier la contribution des paramètres d'entrée d'un modèle à la variabilité de ses sorties. La méthode la plus classique est l'approche *One factor At a Time* (OAT) qui permet d'estimer les vecteurs de sensibilité de chaque paramètre définis par les dérivées partielles (Turanyi, 1990; Petelet, 2007). Ces vecteurs expriment l'effet d'une variation des paramètres d'entrée, autour d'un point de fonctionnement, sur les sorties du modèle. On note toutefois que la sensibilité donne une information locale valable uniquement autour du point nominal où elle est calculée et ne réalise aucune exploration du reste de l'espace des paramètres. La procédure appliquée pour réaliser l'étude de sensibilité proposée est détaillée ci-après.

#### Procédure

Le champ de pression de contact recherché à l'interface pneu-jante pour le cas du gonflage est paramétré par une somme de deux pics gaussiens et les paramètres associés sont regroupés dans un vecteur  $\{\boldsymbol{\lambda}\}$  tel que

$$P(s|\{\boldsymbol{\lambda}\}) = \sum_{i=1}^2 h_i \exp \left( - \left( 2\sqrt{\ln(2)} \times \frac{s - p_{s_i}}{w_{s_i}} \right)^2 \right) \quad (4.48)$$

et

$$\{\boldsymbol{\lambda}\} = \left\{ p_{s_1} \quad w_{s_1} \quad h_1 \quad p_{s_2} \quad w_{s_2} \quad h_2 \right\}^\top \quad (4.49)$$

avec  $p_{s_k}$  la position,  $w_{s_k}$  la largeur et  $h_k$  la hauteur du  $k$ -ième pic de pression. L'analyse de sensibilité repose alors sur les trois étapes suivantes :

1. Calcul de référence :

Un premier calcul est mené en imposant le champ de pression paramétré dans le modèle éléments finis et en considérant les valeurs nominales des paramètres regroupés dans le vecteur  $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ . On extrait de ce calcul des valeurs de référence pour les quantités d'intérêt étudiées (*e.g.*, déplacements dans la zone de mesure, déformations aux positions des jauges).

 2. Calcul du vecteur de sensibilité par rapport au paramètre  $\lambda_k$  :

Cette étape est réalisée de manière indépendante pour chaque paramètre. Un nouveau calcul est effectué en faisant varier la valeur du paramètre considéré de 10% (choix arbitraire) par rapport à sa valeur nominale, sans modifier les autres paramètres

$$\Delta\lambda_k = 0,1\lambda_k \quad (4.50)$$

On peut alors calculer le vecteur de sensibilité  $\{\mathbf{s}_k\}$  d'une quantité d'intérêt donnée par rapport à ce paramètre : il s'agit de la variation de cette quantité entre ce nouveau calcul et le calcul de référence, comme définie par l'équation (4.29). Cependant, puisque les paramètres n'ont pas nécessairement tous la même unité, on définit un vecteur de sensibilité réduit (Petit et Mailliet, 2008), noté  $\{\mathbf{s}_k^*\}$ , correspondant au produit entre le vecteur de sensibilité et la valeur nominale du paramètre considéré

$$\{\mathbf{s}_k^*\} = \lambda_k \{\mathbf{s}_k\} = \frac{\{\mathbf{y}_c\}_{\lambda_k + \Delta\lambda_k} - \{\mathbf{y}_c\}_{\lambda_k}}{\Delta\lambda_k / \lambda_k} \quad (4.51)$$

Ce vecteur a la même unité que la grandeur d'intérêt étudiée et permet de quantifier la variation de celle-ci provoquée par une variation relative  $\Delta\lambda_k / \lambda_k$  du paramètre  $\lambda_k$ . Les influences des différents paramètres peuvent alors être comparées et confrontées aux niveaux d'incertitudes des grandeurs d'intérêt.

 3. Calcul du hessien approché :

On note  $[\mathbf{S}^*]$  la matrice de sensibilité permettant de concaténer l'ensemble des vecteurs de sensibilité réduits pour une quantité d'intérêt donnée

$$[\mathbf{S}^*] = \left[ \{\mathbf{s}_{p_{s_1}}^*\} \quad \{\mathbf{s}_{w_{s_1}}^*\} \quad \{\mathbf{s}_{h_1}^*\} \quad \{\mathbf{s}_{p_{s_2}}^*\} \quad \{\mathbf{s}_{w_{s_2}}^*\} \quad \{\mathbf{s}_{h_2}^*\} \right] \quad (4.52)$$

Le hessien approché adimensionné peut alors s'écrire selon l'équation suivante

$$[\mathbf{H}] = \frac{1}{M} [\mathbf{S}^*]^\top [\mathbf{Cov}_\eta]^{-1} [\mathbf{S}^*] \quad (4.53)$$

avec  $M$  le nombre de ddl mesurées. Les termes diagonaux de cette matrice témoignent de la sensibilité de la grandeur d'intérêt étudiée par rapport à chaque paramètre pris indépendamment, tandis que les termes hors diagonale renseignent sur d'éventuels couplages entre les paramètres. Puisque cette matrice est pondérée par l'inverse de la matrice de covariance du bruit de mesure  $[\mathbf{Cov}_\eta]$  et par le nombre de ddl mesurés  $M$ , une variation de 10% d'un paramètre sera considérée comme ayant un effet détectable par rapport aux incertitudes de mesure si le terme  $H_{kk}$  associé est supérieur à  $(\lambda_k / \Delta\lambda_k)^2$ , soit  $H_{kk} > 100$ . De plus, en diagonalisant la matrice  $[\mathbf{H}]$ , on peut alors déterminer précisément les combinaisons

linéaires des paramètres qui conduiront à une sensibilité supérieure au bruit de mesure et qu'il sera donc *a priori* possible d'identifier

$$[\mathbf{H}] = [\mathbf{V}][\mathbf{D}][\mathbf{V}]^T \quad (4.54)$$

avec  $[\mathbf{D}]$  une matrice diagonale regroupant les valeurs propres et  $[\mathbf{V}]$  la matrice des vecteurs propres associés. Ces combinaisons correspondent aux vecteurs propres associés à toutes les valeurs propres supérieures à 100.

### Sensibilité des champs de déplacement

En appliquant la procédure proposée précédemment, on peut déterminer l'influence des différents paramètres sur les champs de déplacement mesurés. Les Figures 4.6–4.8 illustrent ainsi l'effet d'une variation de 10% de quelques paramètres sur les déplacements dans la zone de mesure observée par les caméras.

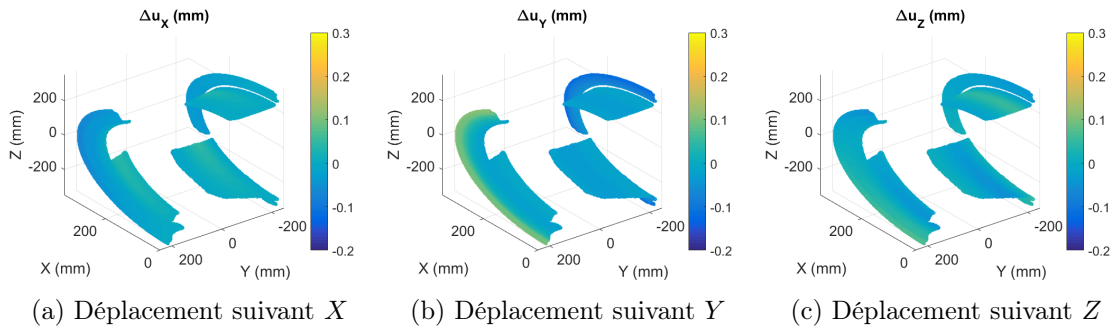


FIGURE 4.6 – Écart en déplacement dus à une variation de 10% du paramètre  $p_{s1}$

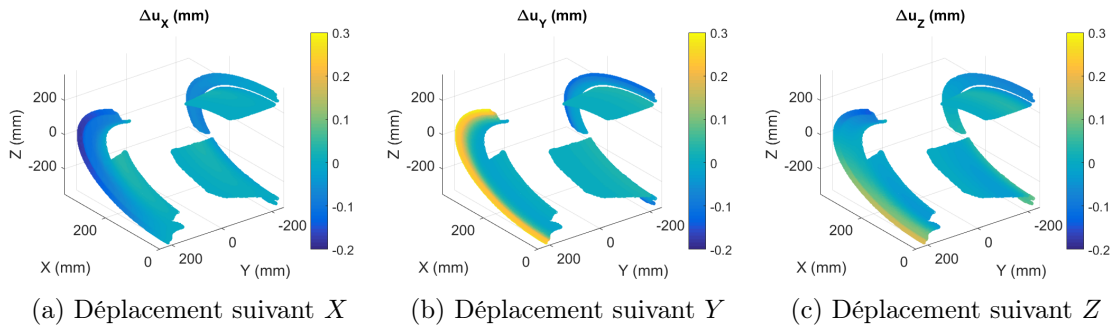


FIGURE 4.7 – Écart en déplacement dus à une variation de 10% du paramètre  $p_{s2}$

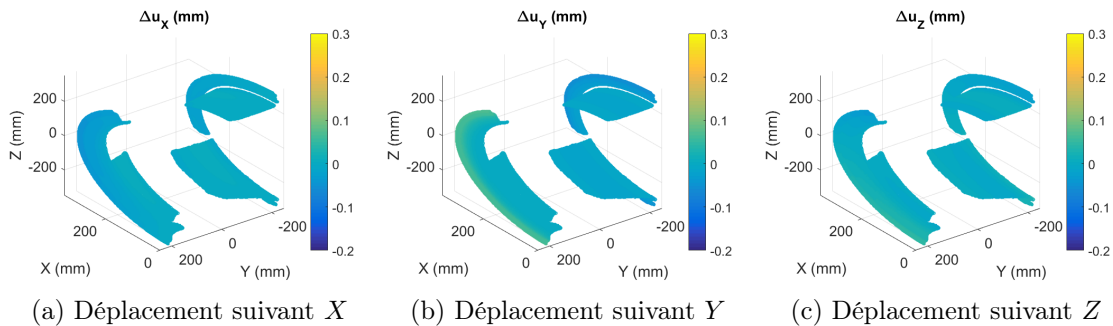


FIGURE 4.8 – Écart en déplacement dus à une variation de 10% du paramètre  $h_2$

On constate que le paramètre  $p_{s_2}$  est le plus influent. Une variation de 10% de ce paramètre induit des écarts en déplacement pouvant atteindre 0,3 mm dans la direction  $Y$  et 0,2 mm dans les directions  $X$  et  $Z$  pour des incertitudes de mesure de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$ . Les écarts obtenus en faisant varier le paramètre  $p_{s_1}$  sont plus faibles (environ 0,1 mm dans la direction  $Y$ ) mais toujours significatifs. En revanche, les variations des paramètres  $w_{s_1}$ ,  $h_1$ ,  $w_{s_2}$  et  $h_2$  induisent des écarts en déplacement inférieurs au dixième de millimètre. Les champs de déplacement dans la zone de mesure sont donc plus sensibles à une variation de la position des pics de pression qu'à une variation de leur largeur ou de leur hauteur.

Pour regrouper l'ensemble des informations contenues dans les champs de sensibilité, on représente sur la Figure 4.9 la matrice hessienne  $[\mathbf{H}_u]$  associée aux champs de déplacement et définie par l'équation (4.53). Cette matrice est représentée en échelle logarithmique et absolue afin de mieux apprécier les différences d'ordre de grandeur. Le signe indiqué dans chaque élément correspond au signe de l'élément associé dans la matrice  $[\mathbf{H}_u]$ . Les termes diagonaux respectant la condition  $H_{kk} > 100$ , soit  $\log_{10}(H_{kk}) > 2$  sont encadrés en rouge. Par ailleurs, la matrice de covariance du bruit de mesure est considérée ici comme simplement égale à  $\gamma_u^2[\mathbf{I}]$  avec  $\gamma_u$  l'écart-type associé et estimé à 10  $\mu\text{m}$  (Gras, 2015a).

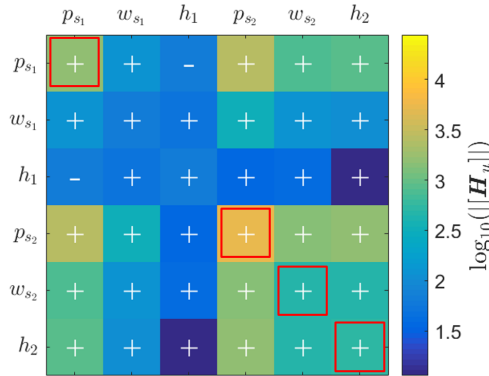


FIGURE 4.9 – Matrice hessienne pour les champs de déplacement

La diagonale de la matrice hessienne confirme les tendances évoquées précédemment. Les paramètres, classés par ordre d'influence sur le champ de déplacement dans la zone de mesure, sont : les positions des pics ( $p_{s_2}$ ,  $p_{s_1}$ ), la hauteur et la largeur du deuxième pic ( $h_2$ ,  $w_{s_2}$ ), puis la hauteur et la largeur du premier pic ( $h_1$ ,  $w_{s_1}$ ). Le deuxième pic de pression, positionné dans la partie verticale des bourrelets et qui provoque leur flexion, est plus influent que le premier. Les termes hors diagonale indiquent également la présence de couplage entre les positions des deux pics et entre la largeur et la hauteur des pics.

En diagonalisant la matrice hessienne selon l'équation (4.54), on obtient les matrices des valeurs et des vecteurs propres illustrées sur la Figure 4.10, où l'ordre des paramètres est  $p_{s_1}$ ,  $w_{s_1}$ ,  $h_1$ ,  $p_{s_2}$ ,  $w_{s_2}$  et  $h_2$  pour les vecteurs propres. On remarque que la matrice  $[\mathbf{D}]$  contient 3 valeurs propres supérieures à 100. Ceci indique que les combinaisons linéaires des paramètres associées à ces valeurs propres provoqueront une variation moyenne du champ de déplacement supérieure au bruit de mesure pour une variation de 10% des paramètres.

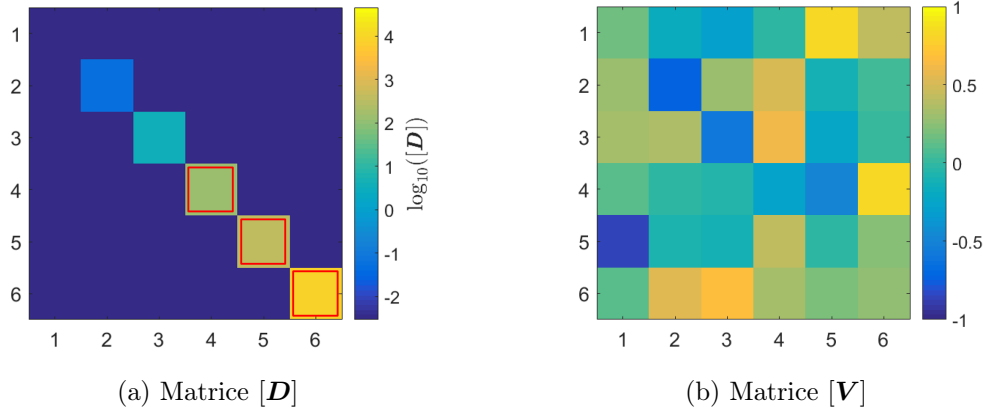


FIGURE 4.10 – Diagonalisation de la matrice hessienne pour les champs de déplacement

Les vecteurs propres associés aux deux plus grandes valeurs propres sont respectivement orientés suivant les paramètres  $p_{s_2}$  et  $p_{s_1}$  indiquant que le champ de déplacement dans la zone de mesure est très sensible à ces deux paramètres et qu'ils seront *a priori* identifiables sans trop de difficultés. Le vecteur propre associé à la troisième plus grande valeur propre correspond en revanche à une combinaison linéaire des largeurs et des hauteurs des pics mettant en évidence le couplage entre ces paramètres. Ils semblent toutefois difficiles à identifier puisqu'ils apparaissent également majoritairement dans les vecteurs propres associés aux valeurs propres inférieures à 100. Le couplage entre les largeurs et les hauteurs des pics, permettant notamment d'obtenir une même résultante globale par deux combinaisons différentes, sera donc probablement un point dur pour l'identification inverse des chargements basée sur les champs de déplacement.

### Sensibilité des déformations aux positions des jauges

Comme pour le champ de déplacement dans la zone de mesure, on peut quantifier l'effet d'une variation de 10% de chaque paramètre décrivant le champ de pression sur les déformations aux positions des jauges utilisées lors des essais. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 4.11. On constate que les jauges situées sur le moyeu et sur le voile de la roue (JF1 à JF6 pour la demi-roue intérieure et JV11 à JV14 pour la demi-roue extérieure) sont peu sensibles aux variations des paramètres du champ de pression. Ces jauges ne seront donc *a priori* pas utiles pour l'identification inverse des différents paramètres. En revanche, les jauges positionnées sur la jante présentent une sensibilité importante. Par exemple, une variation de 10% du paramètre  $p_{s_2}$  induit des écarts d'environ 360  $\mu\text{def}$  (resp. 520  $\mu\text{def}$ ) sur la déformation mesurée dans la direction axiale de la jauge JF8 (resp. JV17) par rapport au calcul de référence pour des incertitudes de mesure de l'ordre de 10  $\mu\text{def}$ . Les écarts sur ces mêmes jauges sont d'environ 320  $\mu\text{def}$  et 400  $\mu\text{def}$  pour une variation de 10% du paramètre  $p_{s_1}$ . Les variations des autres paramètres entraînent des écarts inférieurs à 150  $\mu\text{def}$ . L'influence des positions des pics de pression est donc prédominante, comme pour les champs de déplacement dans la zone de mesure. Par ailleurs, on remarque que les variations obtenues sur les déformations mesurées dans la direction circonférentielle des jauges sont bien moins importantes.

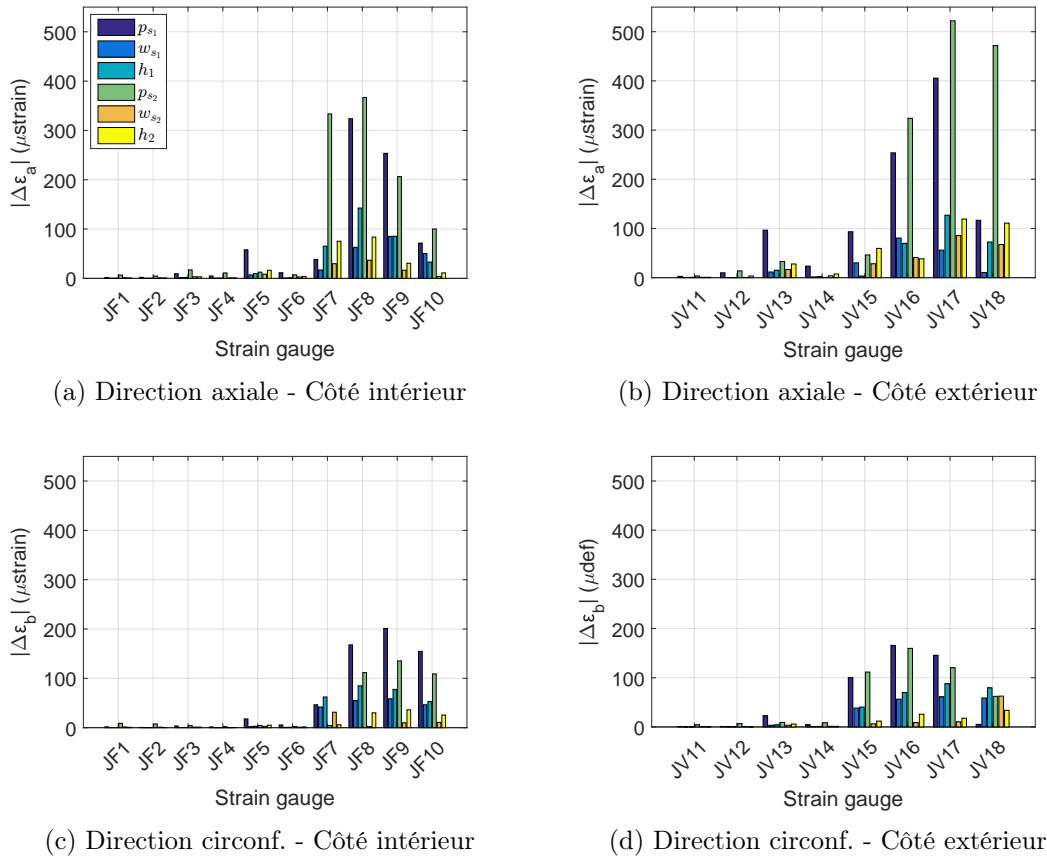


FIGURE 4.11 – Écarts en déformation aux positions des jauges dus à une variation de 10% des paramètres décrivant le champ de pression

Afin de regrouper les informations contenues dans les vecteurs de sensibilité, on représente sur les Figures 4.12–4.13 les matrices hessiennes  $[\mathbf{H}_\varepsilon]$  associées à chaque jauge de déformation et définies par l'équation (4.53). Ces matrices prennent en compte à la fois les déformations axiale et circonférentielle à la position de la jauge considérée. Par ailleurs, la matrice de covariance du bruit de mesure est considérée ici comme simplement égale à  $\gamma_\varepsilon^2[\mathbf{I}]$  avec  $\gamma_\varepsilon$  l'écart-type associé et estimé à  $10 \mu\text{def}$ . Comme précédemment, on constate que les jauges positionnées sur la jante sont très sensibles aux variations des paramètres décrivant le champ de pression, contrairement aux jauges situées sur le moyeu et sur le voile de la roue. La réponse mécanique de la roue dans les zones situées en-dessous de l'assemblage boulonné ne semble donc pas dépendre au premier ordre de la répartition locale de la pression de contact mais plutôt des résultantes globales introduites. Par ailleurs, on remarque que les jauges positionnées sur la demi-roue extérieure sont plus sensibles que celles positionnées sur la demi-roue intérieure en raison de la différence de raideur globale entre les deux demi-roues. De plus, on constate que les jauges proches des bourrelets sont plus sensibles aux paramètres du deuxième pic de pression que du premier, tandis que la tendance est inversée pour les jauges les plus éloignées de la partie verticale des bourrelets.

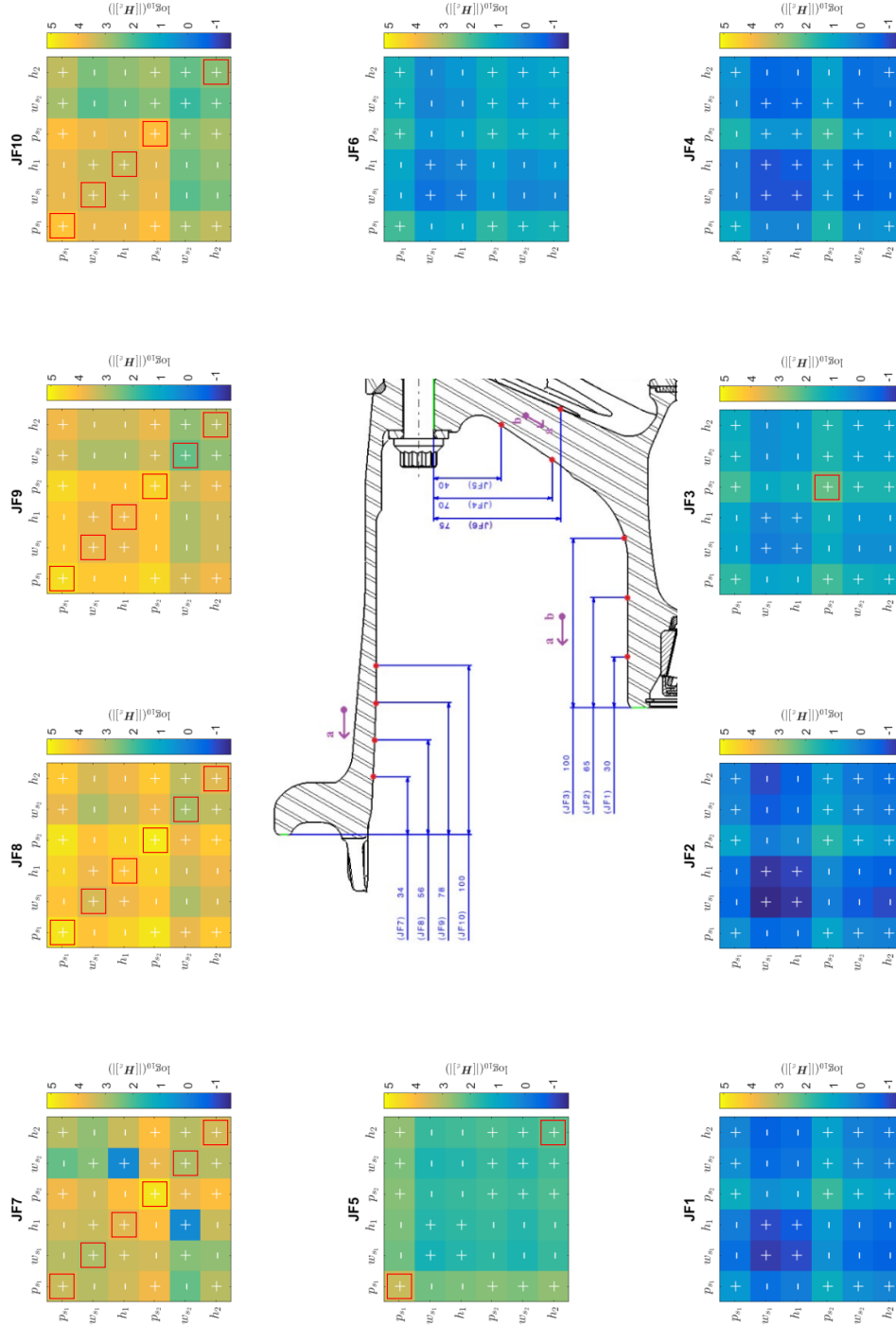


FIGURE 4.12 – Matrices hessiennes des jauges de déformation positionnées sur la demi-roue intérieure

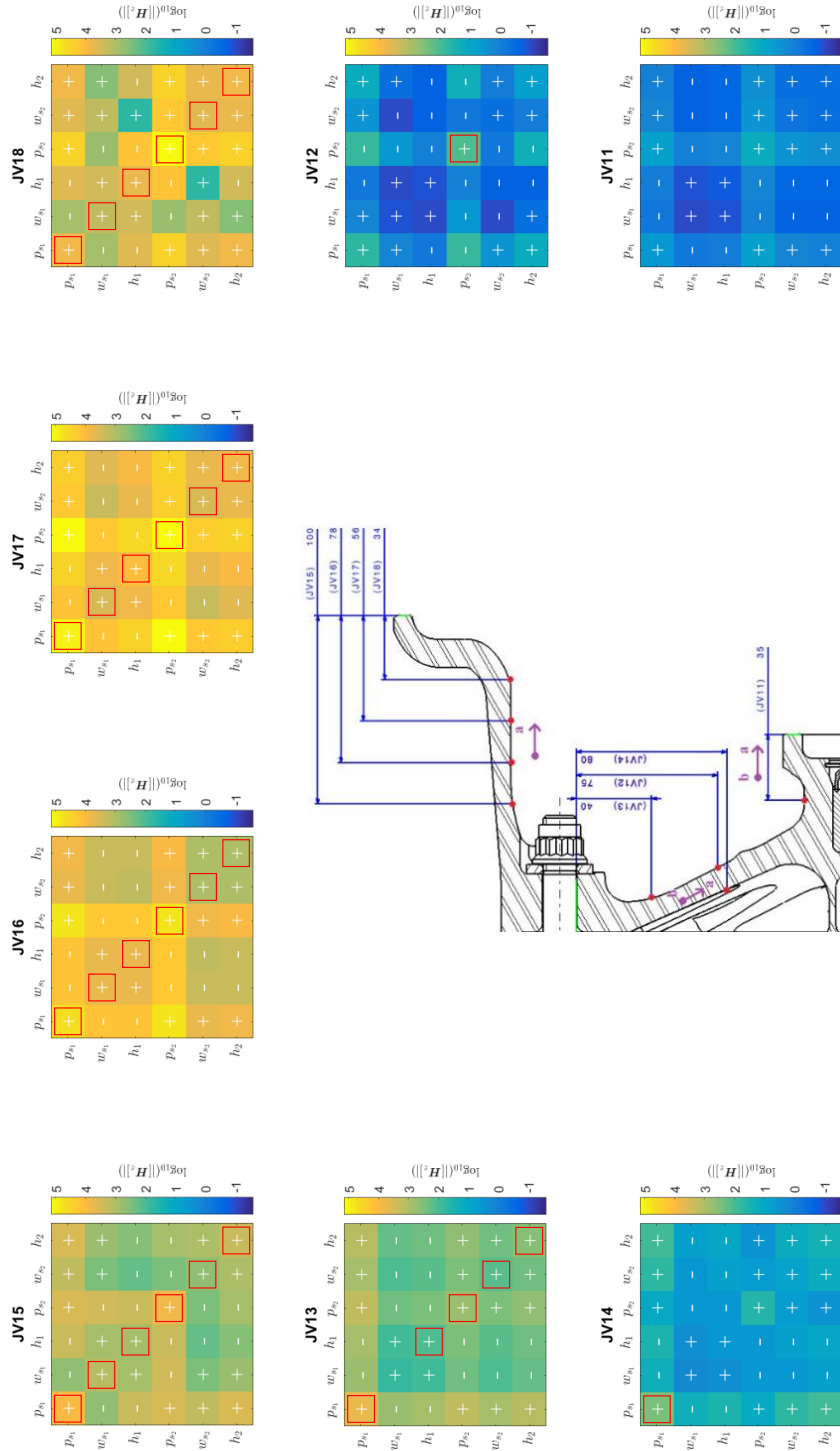


FIGURE 4.13 – Matrices hessiennes des jauges de déformation positionnées sur la demi-roue extérieure

Afin de regrouper l'ensemble des informations fournies par les jauges, on peut calculer une matrice hessienne  $[\mathbf{H}_\varepsilon]$  globale concaténant les vecteurs sensibilité de toutes les jauges dans les directions axiale et circonférentielle. Cette matrice est représentée sur la Figure 4.14, avec une échelle identique à la matrice hessienne associée aux champs de déplacement dans la zone de mesure (cf. Figure 4.9).

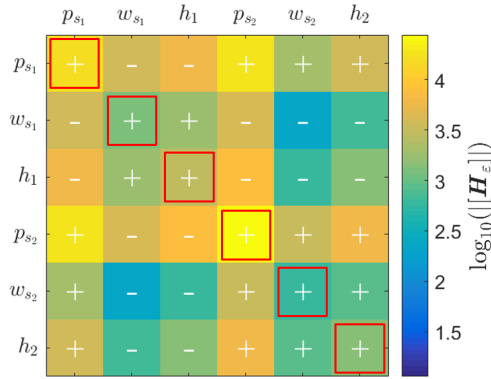


FIGURE 4.14 – Matrice hessienne pour l'ensemble des déformations aux positions des jauges

On constate que la sensibilité des déformations sur l'ensemble des jauges est globalement supérieure à la sensibilité des champs de déplacement dans la zone de mesure. Tous les termes diagonaux de la matrice  $[\mathbf{H}_\varepsilon]$  sont supérieurs à 100, ce qui signifie qu'une variation de 10 % de chaque paramètre a un effet détectable par rapport aux incertitudes de mesure. Les paramètres, classés par ordre d'influence sur les déformations aux positions des jauges, sont : les positions des pics ( $p_{s_2}, p_{s_1}$ ), leurs hauteurs ( $h_1, h_2$ ), puis leurs largeurs ( $w_{s_1}, w_{s_2}$ ). Les termes hors diagonale de la matrice de sensibilité montrent de nouveau la présence de couplages entre les positions des deux pics et entre leur largeur et leur hauteur.

En diagonalisant la matrice hessienne globale regroupant les sensibilités de toutes les jauges de déformation, on remarque que la matrice des valeurs propres  $[\mathbf{D}]$  contient quatre valeurs propres supérieures à 100 (Figure 4.15), soit une de plus que pour le champ de déplacement dans la zone de mesure.

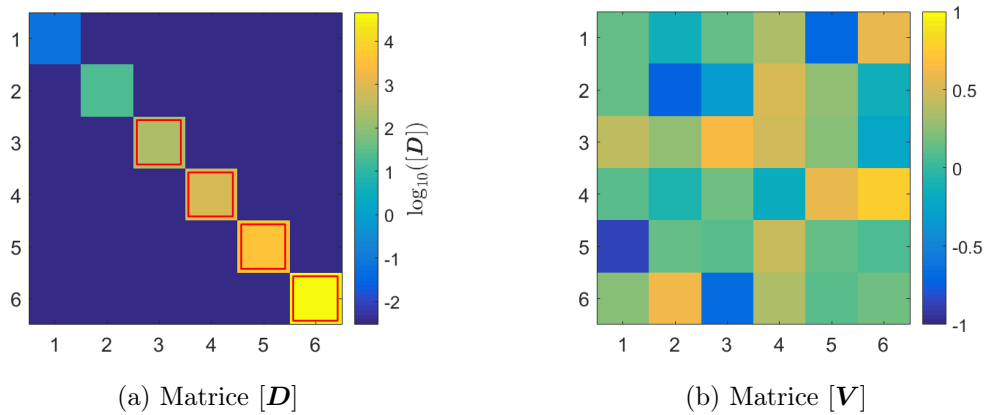


FIGURE 4.15 – Diagonalisation de la matrice hessienne pour les déformations aux positions des jauges

Les vecteurs propres associés aux deux plus grandes valeurs propres sont orientés suivant les positions des deux pics de pression paramétrant le chargement tandis que le vecteur propre associé à la quatrième plus grande valeur propre est orienté suivant les hauteurs des deux pics. Les mesures par jauges de déformation apportent donc une information supplémentaire non négligeable qui devrait améliorer l'identifiabilité des chargements à l'interface pneu-jante. Néanmoins, cette information supplémentaire ne sera peut-être pas suffisante pour identifier correctement tous les paramètres recherchés.

L'analyse de sensibilité est un outil particulièrement efficace pour déterminer en amont la potentielle identifiabilité des paramètres recherchés. L'étude menée par rapport à la paramétrisation en somme de pics élémentaires des chargements à l'interface pneu-jante a permis de quantifier l'effet d'une variation des différents paramètres, autour d'un point de fonctionnement, sur plusieurs quantités d'intérêt. Les champs de déplacement dans la zone de mesure se sont ainsi révélés particulièrement sensibles aux positions des pics de pression décrivant le chargement tandis que l'influence des largeurs et des hauteurs de ces pics est apparue moins importante. Il semble donc qu'une identification des chargements à l'interface pneu-jante basée uniquement sur les mesures de déplacement ne soit pas optimale pour déterminer correctement tous les paramètres recherchés. Les déformations aux positions des jauges ont montré une sensibilité globalement plus importante que les champs de déplacement et leur prise en compte devrait donc permettre d'obtenir une identification plus fiable des chargements recherchés. Bien qu'illustrée ici sur un cas particulier, l'analyse de sensibilité peut être étendue à tout type de paramétrisation et à tout type de grandeur d'intérêt étudiée.

### 4.3.2 Paramétrisation en somme de pics élémentaires

On propose d'utiliser la paramétrisation en somme de deux pics gaussiens afin de réaliser une identification inverse du chargement appliqué par le pneu sur la roue lors du cas de gonflage à la pression nominale (*i.e.*, 14,8 bar) réalisé en essai. L'approche FEMU- $u$  détaillée au § 4.2.1 est mise en œuvre afin de minimiser l'écart entre les champs de déplacement mesurés par corrélation d'images numériques et calculés avec le modèle éléments finis non-linéaire de la roue. On note que la matrice de covariance des champs de déplacement mesurés n'est pas prise en compte ici ( $[\mathbf{C}_u] = [\mathbf{I}]$ ), celle-ci n'ayant pas encore été intégrée au processus d'identification inverse lors de la réalisation de ces calculs.

Les paramètres recherchés sont les positions, les largeurs et les hauteurs des deux pics décrivant le chargement à l'interface pneu-jante. Ce chargement est supposé symétrique entre les deux côtés de la roue. L'initialisation du processus d'identification inverse est réalisée en imposant les valeurs nominales des paramètres, obtenues par projection du chargement fourni par le pneumaticien sur la paramétrisation choisie, puis le problème inverse est résolu de manière itérative dans l'environnement décrit au § 4.2.2. Les évolutions de l'écart RMS, entre les champs de déplacement mesurés et calculés, et des paramètres recherchés sont représentées sur la Figure 4.16 en fonction du nombre d'itérations.

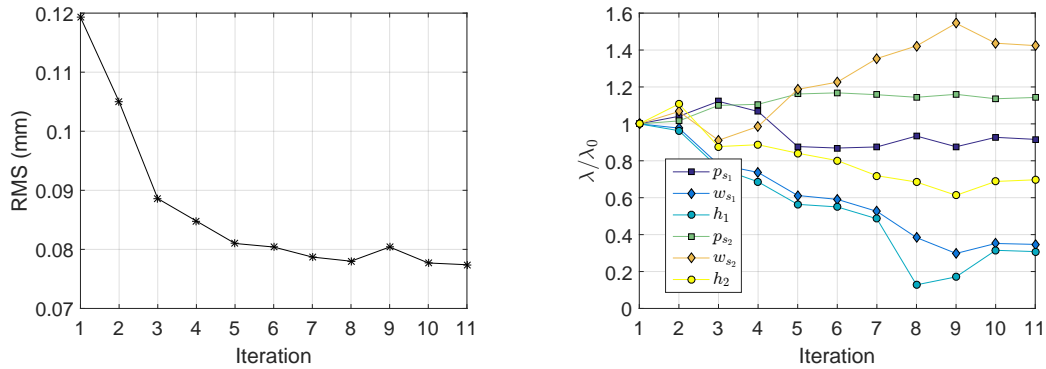


FIGURE 4.16 – Évolutions de l'écart RMS en déplacement (gauche) et des paramètres recherchés par rapport à leur valeur initiale (droite) en fonction du nombre d'itérations

On constate que l'écart RMS entre les déplacements mesurés et calculés a globalement convergé au bout d'une dizaine d'itérations et que celui-ci a été diminué d'environ 35%. De plus, les paramètres recherchés sont aussi stabilisés à ce stade. Un critère de convergence plus sévère aurait néanmoins pu permettre de s'assurer qu'ils n'évoluent plus par la suite. On remarque que les positions des pics de pression sont restées proches de leur valeur nominale. En revanche, la largeur et la hauteur du premier pic positionné au niveau du *bead seat* ont été fortement diminuées. Pour le deuxième pic, la largeur a augmenté tandis que sa hauteur a diminué. Pour illustrer les résultats obtenus, on compare sur la Figure 4.17 les champs de pression de contact à l'interface pneu-jante avant et après identification.

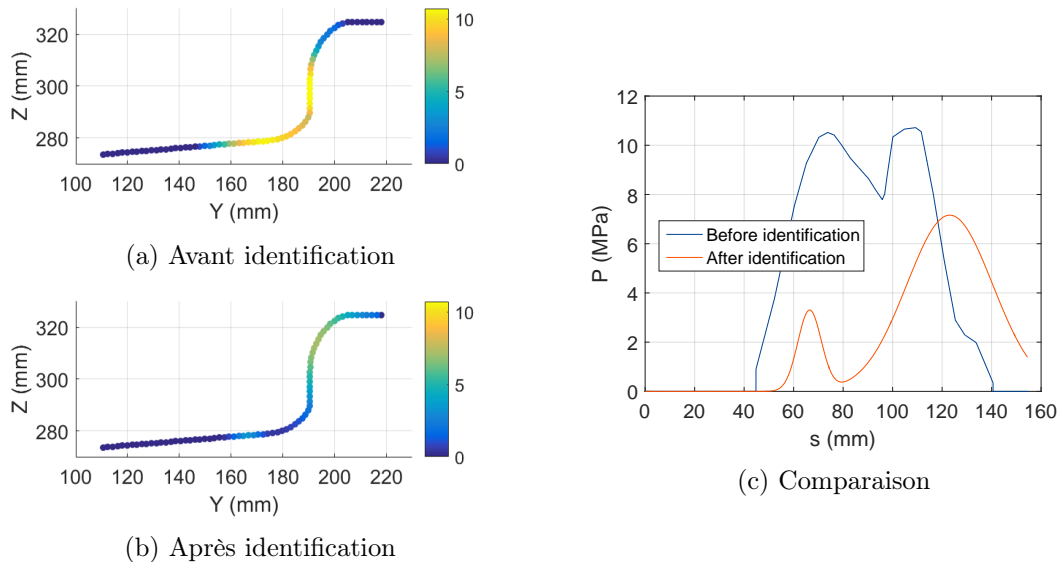


FIGURE 4.17 – Comparaison des champs de pression de contact avant/après identification

On constate que le pic de pression positionné au niveau du *bead seat* est bien plus faible après identification. De plus, le champ identifié montre que le pneumatique semble appuyer plus haut dans la partie verticale du bourrelet que dans le champ fourni par le pneumaticien. Les résultantes radiale et axiale introduites sur chaque demi-roue par le champ identifié sont respectivement égales à 31000 daN et 42000 daN. Ces valeurs sont environ deux fois

plus faibles que celles obtenues avec le champ fourni par le pneumaticien (environ 66000 daN dans chaque direction). En considérant l'équilibre axial du pneumatique, on peut également calculer le coefficient  $\lambda$  défini comme le rapport entre la résultante axiale  $F_Y$  reprise par chaque demi-roue et celle reprise par chaque flanc du pneumatique (égale à la pression de gonflage multipliée par le surface projetée du pneu)

$$\lambda = \frac{F_Y}{P_{gonf} \times \pi \times (R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \quad (4.55)$$

avec  $P_{gonf}$  la pression de gonflage,  $R_{ext}$  le rayon extérieur du pneu et  $R_{int}$  son rayon intérieur. Ce rapport est égal à 0,28 pour le champ de pression identifié contre 0,44 pour celui fourni par le pneumaticien, attestant de nouveau de leur différence.

Pour évaluer plus précisément les résultats obtenus, on représente sur la Figure 4.18 les champs de déplacement mesurés et calculés respectivement avant et après identification. Les résidus associés sont illustrés sur la Figure 4.19. On précise que les déplacements calculés correspondent à la variation des déplacements entre la première et la deuxième étape de calcul afin de soustraire les contributions dues au freinage des cuvettes de roulement et des serrages de l'écrou d'essieu et des boulons, qui ne sont pas mesurées en essai.

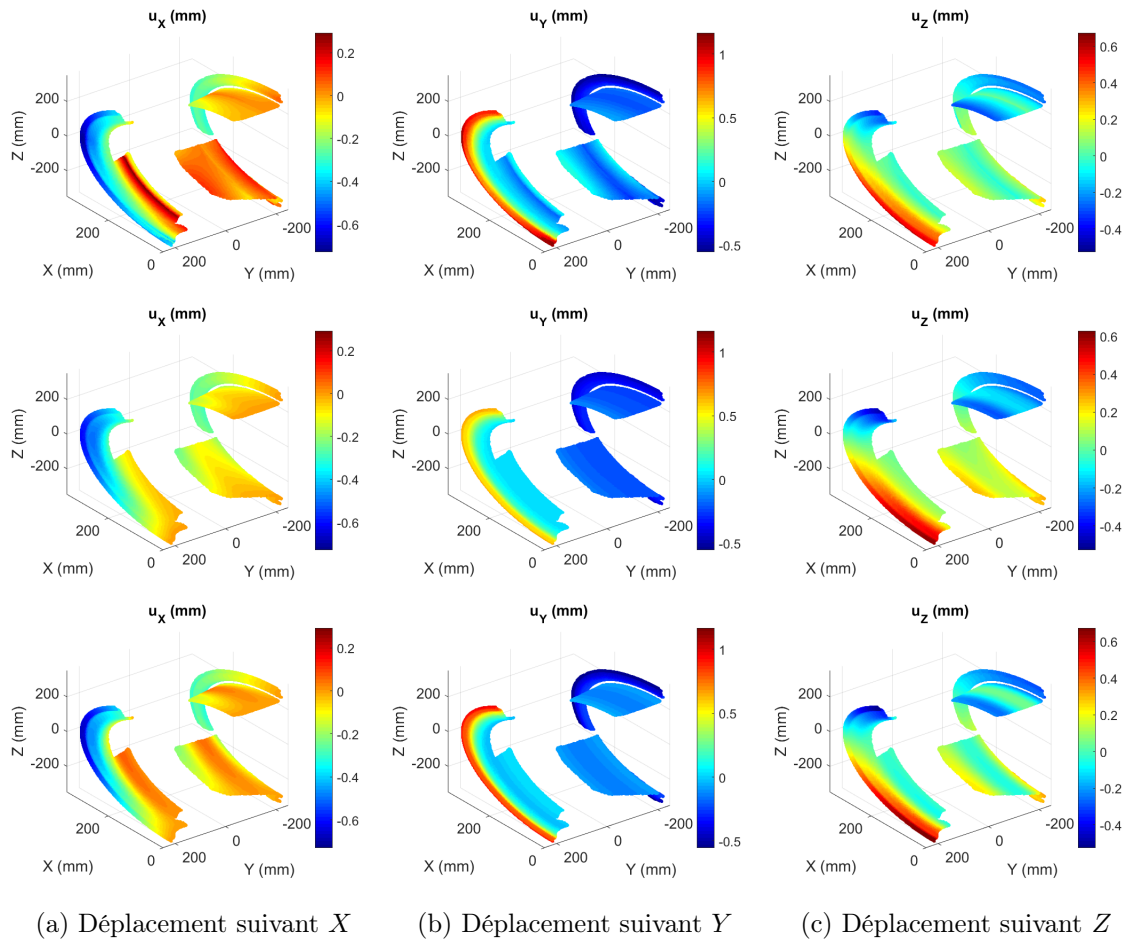


FIGURE 4.18 – Comparaison entre les champs de déplacement mesurés (haut), calculés avant identification (milieu) et après identification (bas) dans chaque direction

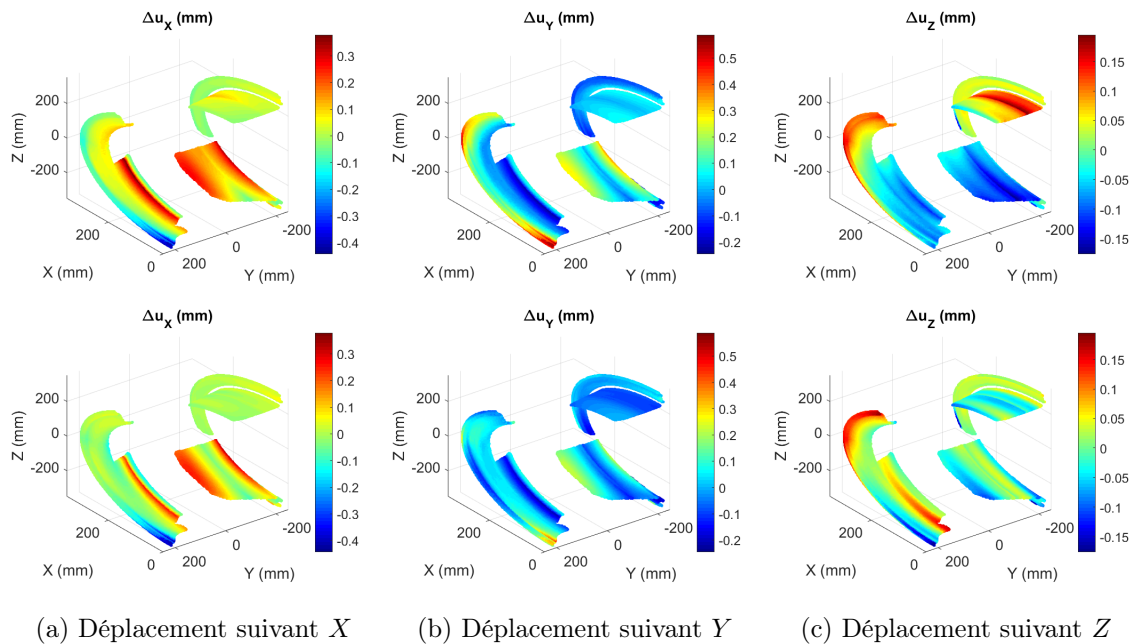


FIGURE 4.19 – Résidus entre les champs de déplacement mesurés et calculés : avant identification (haut) et après identification (bas)

Les écarts ont été fortement réduits après identification des paramètres, notamment au niveau des bourrelets. En revanche, ils demeurent importants en fond de jante, en particulier dans la direction  $X$ . Ces différences peuvent s'expliquer en partie par les incertitudes de mesure dans cette zone, comme indiqué au Chapitre 2. La prise en compte de la matrice de covariance associée permettrait de minimiser leur impact sur les paramètres identifiés. Cependant, les résidus obtenus en fond de jante sont significatifs et peuvent atteindre  $+0,3$  mm dans la direction  $X$ , ce qui est bien supérieur aux valeurs d'incertitude de mesure (de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ ). Ils sont également signés dans les directions  $Y$  et  $Z$ , indiquant que le comportement de la roue dans cette zone n'est pas bien représenté. Toutefois, les déplacements mesurés en fond de jante ne semblent pas physiques : le gonflage du pneu a pour effet de comprimer la roue et les déplacements suivant  $X$  devraient donc être négatifs.

Outre les incertitudes liées au bruit de mesure, d'autres sources d'erreur peuvent être évoquées. Tout d'abord, les états de référence de l'essai et du calcul ne sont pas tout à fait identiques. En effet, le pneumatique est déjà monté (mais non gonflé) sur la roue lors de l'essai avant de procéder aux mesures alors qu'il n'est pas modélisé dans le calcul. Le déplacement de la jante induit par la seule présence du pneumatique n'est donc pas pris en compte. De plus, la roue testée est légèrement différente de sa représentation CAO en raison des tolérances de fabrication. Ensuite, les conditions aux limites aux extrémités de l'essieu ne sont pas mesurées lors des essais. La présence de jeux entre les différentes pièces permettant de le relier au bâti de la presse laisse donc penser que l'encastrement imposé dans le calcul n'est pas parfaitement réalisé. Les conditions de symétrie supposées peuvent également ne pas être totalement vérifiées expérimentalement (*e.g.*, rotation du pneu par rapport à la roue ou de la roue par rapport à l'essieu). Des mouvements de corps rigides ont d'ailleurs été recherchés dans les champs de déplacement mesurés afin de quantifier l'impact de ces sources d'incertitudes mais l'étude menée n'a pas permis de corriger les écarts les plus importants. Enfin, il se peut que la paramétrisation choisie ne soit pas adaptée pour représenter les phénomènes observés.

Pour valider le bon fonctionnement du processus d'identification inverse en dépit des écarts observés, on propose de comparer les déformations aux positions des jauges qui ne sont pas prises en compte dans la fonctionnelle à minimiser. Le moyeu et le voile de la roue étant peu sollicités par le gonflage du pneumatique, seules les jauges positionnées dans la jante sont étudiées. La Figure 4.20 représente ainsi les déformations mesurées en essai et calculées avant/après identification.

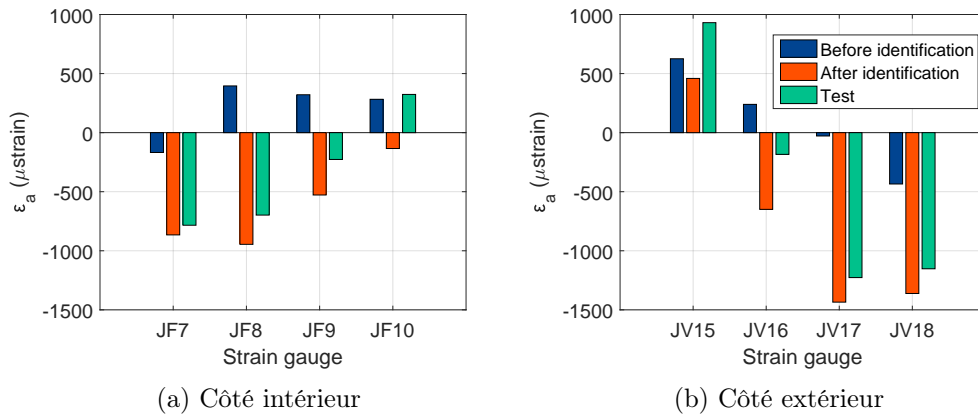


FIGURE 4.20 – Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification

On constate que la corrélation essai-calcul est significativement améliorée après identification. Les comportements d'extension/contraction qui n'étaient pas bien représentés avec le chargement initial sont alors cohérents avec ceux observés en essais sur la plupart des jauges. Des écarts non négligeables subsistent néanmoins sur les jauges les plus éloignées des bourrelets (*e.g.*, JF9 et JF10 pour le côté intérieur, JV15 et JV16 pour le côté extérieur). Les écarts obtenus sur les déformations aux positions des jauges sont donc moins marqués que sur les champs de déplacement. Ceci démontre clairement l'intérêt de disposer des mesures de champs : si la corrélation essai-calcul peut sembler satisfaisante en comparant les déformations aux positions des jauges, la comparaison entre les champs de déplacement mesurés et calculés montre qu'il existe encore de nombreux écarts entre l'essai et le calcul. La richesse des mesures de champs permet donc de mettre davantage en évidence les faiblesses du modèle (en considérant que la mesure est fiable). Les résidus sont plus simples à interpréter puisqu'ils sont évalués sur un grand nombre de degrés de liberté cinématiques.

**Remarque 6** La réalisation de l'identification inverse présentée ici a nécessité environ une semaine de calcul en utilisant le serveur interne à *Safran Landing Systems*. Ce temps relativement important est dû à plusieurs facteurs. Tout d'abord, la taille et les non-linéarités du modèle font qu'un calcul unitaire dure environ 1h10min. Ensuite, le nombre de paramètres à identifier impose de réaliser 6 calculs de sensibilité à chaque itération. Enfin, les différentes files de calcul du serveur et les règles de priorité associées ne permettent pas de réaliser tous les calculs de sensibilité en parallèle. Des tentatives d'utilisation de la fonction « restart » du logiciel de calcul ont également été réalisées afin de ne pas rejouer systématiquement la première étape du calcul (*i.e.*, frettage et serrages). Cependant, en raison du taux de téléversement des fichiers nécessaires à son utilisation, le gain de temps apporté était négligeable.

Pour tenter de réduire les écarts entre l'essai et le calcul tout en conservant la paramétrisation du chargement en somme de deux pics gaussiens, deux solutions sont envisagées. La première consiste à fixer la largeur des pics de pression afin de supprimer le couplage entre leur largeur et leur hauteur. Le nombre de paramètres à identifier est alors égal à quatre (*i.e.*, deux positions et deux hauteurs). Une analyse statistique de la base de données pneumatiques disponible chez *Safran Landing Systems* a ainsi été réalisée pour déterminer des valeurs de largeur adaptées puis une nouvelle identification inverse a ensuite été réalisée. Le champ de pression identifié est illustré sur la Figure 4.21. La deuxième solution envisagée consiste à effectuer une exploration complète de l'espace des paramètres. Un outil de *Safran Tech* est utilisé afin de générer un plan d'expérience à partir de la spécification des plages de variation de chaque paramètre. 60 points sont générés et la fonctionnelle évaluant l'écart entre les champs de déplacement mesurés et calculés est recalculée pour chacun d'entre eux. On peut alors sélectionner le point permettant de la minimiser et le champ de pression associé est également représenté sur la Figure 4.21.

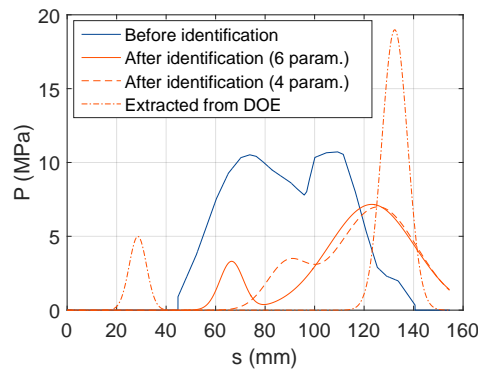


FIGURE 4.21 – Comparaison des champs de pression de contact pour différentes identifications

On constate que le fait de fixer les largeurs des pics modifie la position du premier pic de pression tandis que le deuxième n'est pas impacté, indiquant de nouveau que les champs de déplacement dans la zone de mesure sont plus sensibles à la position de ce dernier. Le champ de pression de contact déterminé par exploration de l'espace des paramètres a en revanche une forme bien différente et les pics de pression sont repoussés aux extrémités de la zone de contact pneu-jante. Ce comportement semble peu physique en réalité. Toutefois, malgré leurs différences apparentes, les trois champs de pression de contact « identifiés » conduisent tous à une même valeur de l'écart RMS entre les champs de déplacement mesurés et calculés (environ 0,08 mm). De plus, les champs de déplacement et les déformations aux positions des jauges calculés avec ces trois champs (non illustrés ici) sont très proches et ne permettent pas de les distinguer. Ceci montre bien la difficulté de l'identification basée sur une paramétrisation en somme de pics élémentaires des chargements. Néanmoins, on note un point commun important entre les trois champs présentés : les résultantes globales qu'ils introduisent sur la roue sont très proches. Le réponse mécanique de la roue semble donc être plus sensible aux résultantes introduites qu'à la répartition locale du chargement, au premier ordre. Les écarts essai-calcul n'ayant pas été réduits avec ces nouvelles « identifications », la paramétrisation en somme de pics élémentaires a été délaissée et de nouvelles tentatives ont été réalisées avec la paramétrisation basée sur les modes propres statiques d'interface pneu-jante.

### 4.3.3 Paramétrisation basée sur les modes propres d'interface

Comme précédemment, on propose de réaliser une identification du chargement appliqué par le pneu sur la roue lors du cas de gonflage à la pression nominale (14,8 bar) réalisé en essai. Cette fois-ci, le chargement est paramétré en utilisant les modes propres statiques de la roue à l'interface pneu-jante définis au § 3.4. Les paramètres recherchés sont les amplitudes des modes propres d'interface dominants, au sens de leur contribution à l'énergie de déformation élastique totale. Il convient donc tout d'abord de les sélectionner. Pour ce faire, on projette le chargement de gonflage fourni par le pneumaticien pour le pneu A2 sur la base des modes propres statiques d'interface pneu-jante (cf. Figure 3.54) puis on classe les modes par contribution énergétique décroissante. Seuls les modes appartenant à l'harmonique 0 sont considérés en raison de la nature axisymétrique du chargement recherché. On obtient le classement présenté dans le Tableau 4.1.

Harmonique	Numéros des modes dominants
0	3 – 6 – 7 – 16 – 13 – 5 – 66 – 10 – 43 – ...

TABLEAU 4.1 – Modes dominants pour le cas de gonflage du pneumatique A2

Il suffit alors de réaliser une troncature à un certain ordre afin de conserver les modes qui serviront à approximer le chargement recherché. Les 9 modes présentés dans le Tableau 4.1 permettent de conserver  $\eta = 99\%$  de l'énergie de déformation élastique introduite par le chargement fourni par le pneumaticien. Les modes retenus sont ensuite introduits dans le modèle éléments finis non-linéaire de la roue et l'approche FEMU- $u$  (cf. § 4.2.1) est de nouveau utilisée pour minimiser l'écart essai-calcul. On précise que les modes, initialement exprimés en déplacements ou en efforts nodaux, sont préalablement convertis en modes de pression afin de conserver l'effet des non-linéarités du modèle.

#### Sans prise en compte des incertitudes de mesure

Dans un premier temps, on choisit d'identifier les amplitudes des cinq premiers modes propres dominants (numérotés 3, 6, 7, 16 et 13), principalement pour des raisons de temps de calcul, et le problème inverse est résolu de manière itérative dans l'environnement décrit au § 4.2.2 sans prendre en compte les incertitudes de mesure (*i.e.*,  $[\mathbf{C}_u] = [\mathbf{I}]$ ). Les évolutions de l'écart RMS en déplacement et des paramètres recherchés sont représentées sur les Figures 4.22 et 4.23 en fonction du nombre d'itérations.

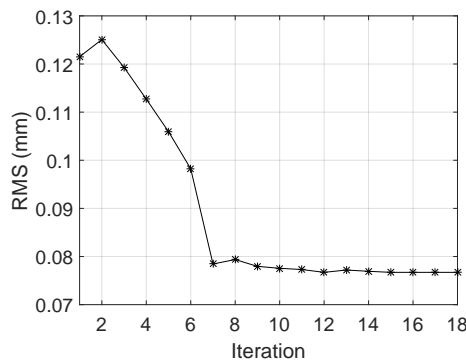


FIGURE 4.22 – Évolution de l'écart RMS en déplacement en fonction du nombre d'itérations

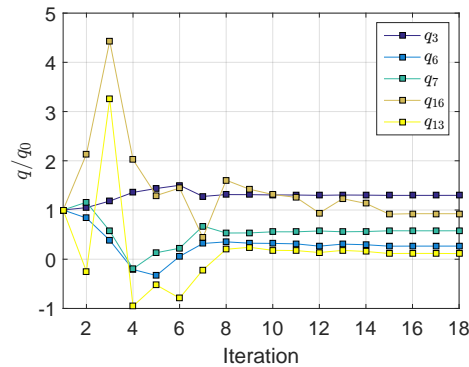


FIGURE 4.23 – Évolution des paramètres recherchés par rapport à leur valeur initiale en fonction du nombre d'itérations

Le critère de convergence a été sévérié par rapport aux identifications précédentes. On constate ainsi que l'écart RMS entre les déplacements mesurés et calculés a convergé au bout d'une dizaine d'itérations et que celui-ci n'évolue plus par la suite. Sa valeur à convergence est égale à 0,077 mm, ce qui est proche de celle obtenue lors de l'identification inverse basée sur la paramétrisation du chargement en somme de deux pics gaussiens (cf. Figure 4.16). Les amplitudes recherchées sont quant à elles toutes stabilisées à partir de l'itération 15. Les chargements obtenus à l'interface pneu-jante avant et après identification sont comparés sur la Figure 4.24. Ils sont représentés en efforts nodaux équivalents, pour une section de la roue, en fonction de l'abscisse curviligne calculée suivant le profil de jante.

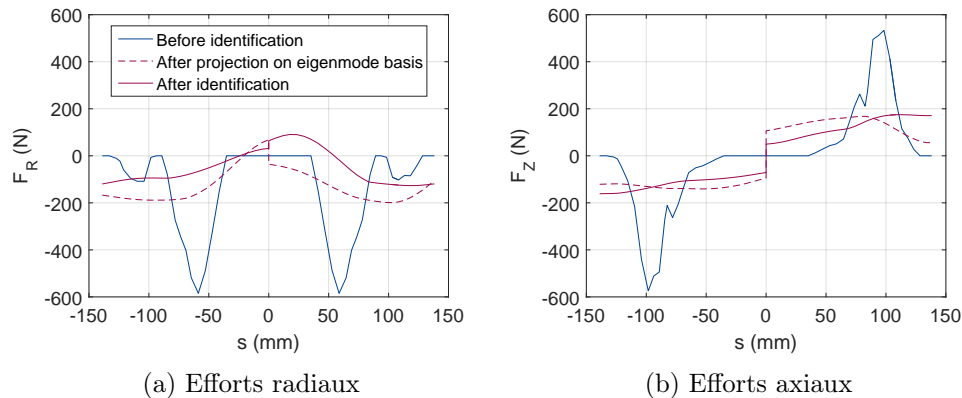


FIGURE 4.24 – Comparaison des chargements à l'interface pneu-jante avant/après identification

Le changement de base introduit par l'utilisation des modes propres statiques d'interface pneu-jante change radicalement la répartition locale du chargement, avant même de procéder à l'identification inverse (cf. courbes en tirets sur la Figure 4.24). En effet, le changement de base et la troncature à un ordre donné reviennent à déterminer un chargement statiquement équivalent au chargement initial mais qui n'a pas nécessairement la même forme (à moins de conserver un grand nombre de modes). Par conséquent, la comparaison directe des répartitions locales d'effort à l'interface pneu-jante n'est pas triviale en raison du filtrage induit par la projection sur la base des modes propres. On note néanmoins que le chargement obtenu après identification a essentiellement évolué dans la direction radiale.

Pour comparer les différents chargements, on s'intéresse plutôt aux résultantes globales. Les résultantes introduites par le chargement identifié sur la demi-roue intérieure (resp. extérieure) sont égales à 32440 daN (resp. 21840 daN) dans la direction radiale et 60660 daN (resp. 63380 daN) dans la direction axiale. Les résultantes axiales sont cette fois-ci proches de celles obtenues avec le chargement fourni par le pneumaticien (environ 66000 daN) tandis que les résultantes radiales sont de nouveau bien inférieures. On note également que les résultantes radiales diffèrent de 32% entre les deux demi-roues. Ceci est dû au fait que les modes propres statiques d'interface pneu-jante ne sont pas symétriques par construction. Il est donc possible qu'une combinaison particulière de ces modes conduise à cette situation. L'ajout de contraintes d'égalité et/ou d'inégalités sur les paramètres à identifier pourrait permettre de régulariser le problème inverse et d'éviter ce phénomène. Toutefois, le cas du gonflage est particulièrement difficile à appréhender puisque les résultantes introduites ne sont pas connues *a priori* contrairement aux cas de roulage. Il se peut également que le nombre de modes utilisé ici ne soit pas suffisant pour obtenir un chargement équilibré entre les deux demi-roues.

Pour évaluer l'impact du chargement identifié, on étudie les résidus entre les champs de déplacement mesurés et calculés après identification. Ceux-ci sont représentés sur la Figure 4.25 et comparés à ceux obtenus lors de l'identification avec la paramétrisation du chargement en somme de deux pics gaussiens (cf. Figure 4.19).

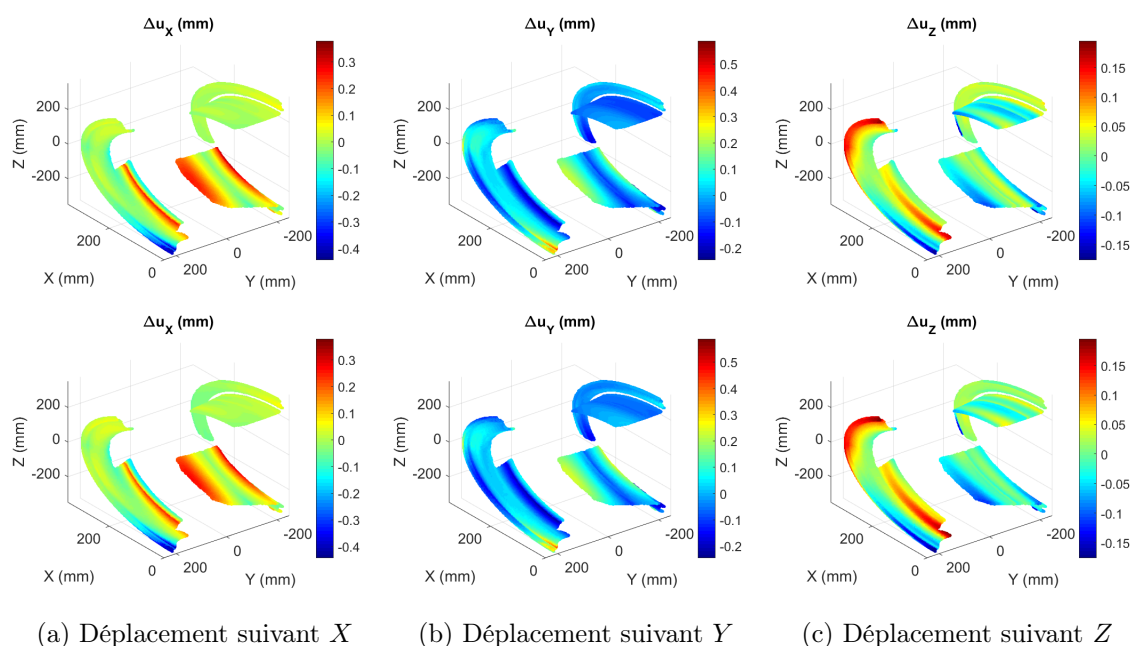


FIGURE 4.25 – Résidus entre les champs de déplacement mesurés et calculés après identification : avec la paramétrisation en somme de deux pics gaussiens (haut) et avec la paramétrisation basée sur les modes propres d'interface (bas)

On constate que les résidus obtenus après cette nouvelle identification sont légèrement plus faibles dans les directions  $X$  et  $Y$ . Toutefois, les écarts les plus importants sont du même ordre de grandeur que précédemment et les résidus présentent toujours la même signature en fond de jante. Le changement de paramétrisation n'a donc pas d'effet significatif sur les écarts entre les champs de déplacement mesurés et calculés.

En revanche, en comparant les déformations aux positions des jauges (Figure 4.26), on constate que l'identification réalisée avec la nouvelle paramétrisation du chargement (signalée par l'indice #2) permet d'améliorer la corrélation essai-calcul sur le côté intérieur de la roue. Les résultats sur le côté extérieur sont proches de ceux présentés au § 4.3.2.

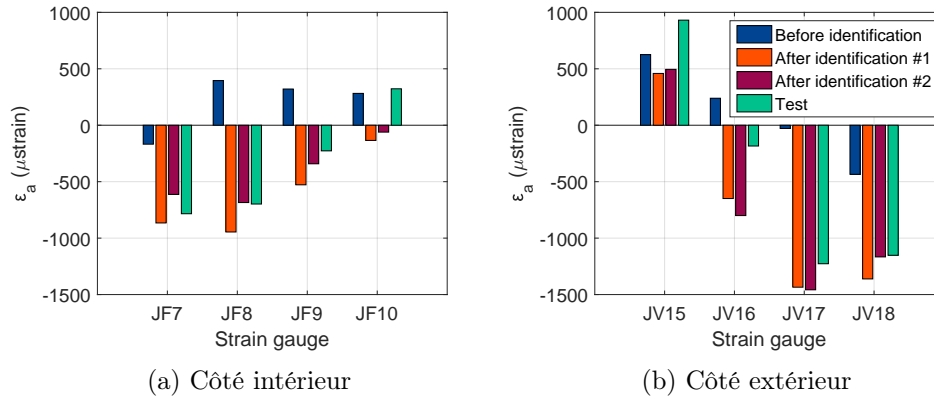


FIGURE 4.26 – Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification

L'identification des amplitudes des cinq modes propres d'interface sélectionnés a donc permis d'améliorer la corrélation essai-calcul par rapport aux précédentes tentatives. Les résultats obtenus montrent que le chargement radial appliqué par le pneumatique sur la roue lors de l'essai est bien inférieur à celui estimé avec le chargement fourni par le pneumaticien. Cependant, on rappelle que la matrice de covariance des champs de déplacement mesurés n'était pas prise en compte jusqu'à présent dans le processus d'identification ( $[C_u] = [I]$  dans l'équation (4.47)). Autrement dit, le même degré de confiance était accordé à tous les points de mesure. Dans le paragraphe suivant, on propose d'intégrer les incertitudes de mesure dans le processus d'identification afin de minimiser leur impact sur le chargement identifié et de fiabiliser les résultats obtenus.

#### Avec prise en compte des incertitudes de mesure

La diagonale de l'inverse de la matrice de covariance des champs de déplacement mesurés, présentée au Chapitre 2, est de nouveau illustrée sur la Figure 4.27 en échelle logarithmique.

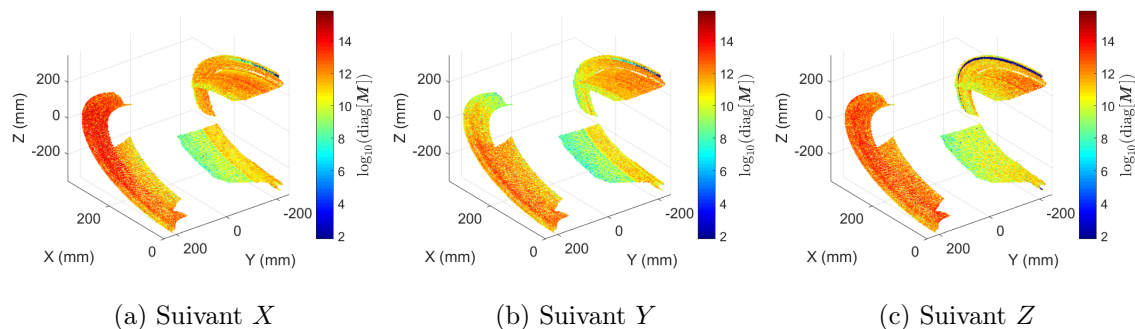


FIGURE 4.27 – Degré de confiance associé à chaque point de mesure et dans chaque direction

On constate que les incertitudes de mesure varient fortement en fonction de la zone et de la direction considérées. Le degré de confiance associé aux déplacements mesurés sur les bourelets est plus élevé que pour ceux mesurés en fond de jante. Il est également plus élevé sur le côté extérieur de la roue que sur son côté intérieur. De plus, on remarque que les incertitudes de mesure sont moins importantes dans les directions  $X$  et  $Z$  que dans la direction  $Y$ . Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte ces informations supplémentaires dans le processus d'identification afin de ne pas corrompre les résultats. L'hypothèse d'une incertitude identique en chaque point de mesure n'est pas réaliste.

**Remarque 7** On rappelle que la matrice de covariance des champs de déplacement mesurés présentée ici n'est pas dans l'unité habituelle en raison de traitements effectués lors des travaux de post-doctorat (Gras, 2015a). En effet, la matrice  $[C_u]$  est normalement égale à  $2\gamma_f^2[M]^{-1}$  avec  $\gamma_f$  l'écart-type du bruit associé aux caméras exprimé en niveaux de gris et  $[M]$  la matrice de corrélation d'images globale. Le poids représenté sur la Figure 4.27 correspond en fait à la diagonale de la matrice  $[M]$  préalablement interpolée sur le maillage éléments finis grâce à la projection des fonctions de forme NURBS sur ce dernier. Ceci n'est pas gênant pour résoudre le problème inverse pondéré puisque seule la « structure » de la matrice de covariance de la mesure et donc les poids relatifs attribués à chaque degré de liberté mesuré sont suffisants pour y parvenir. En revanche, son expression dans la bonne unité est nécessaire pour évaluer précisément les incertitudes sur les paramètres identifiés.

Une nouvelle identification des amplitudes des cinq modes dominants sélectionnés est donc réalisée en pondérant chaque déplacement mesuré par son incertitude associée. Les résultats obtenus sont illustrés sur la Figure 4.28 pour les déformations aux positions des jauges qui ne sont pas prises en compte dans la minimisation.

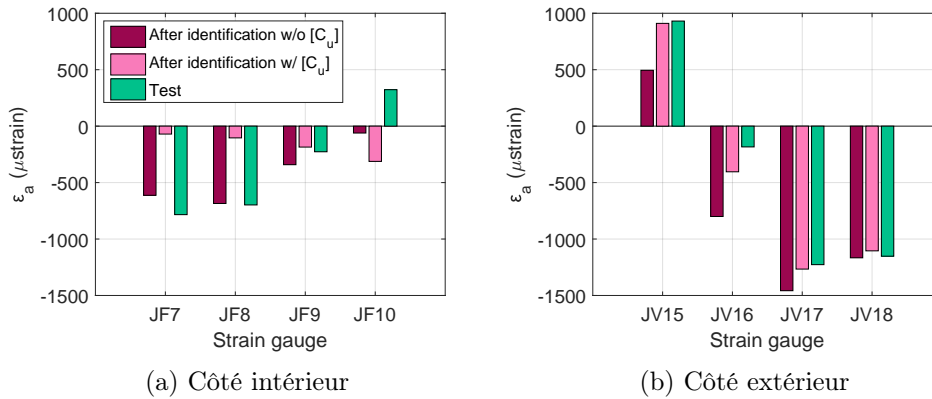


FIGURE 4.28 – Comparaison entre les déformations mesurées et calculées après identification – Influence de la prise en compte des incertitudes de mesure – 5 modes

On remarque que la prise en compte des incertitudes de mesure a pour effet d'améliorer significativement la corrélation essai-calcul sur les jauges positionnées sur le côté extérieur de la roue tandis qu'elle est dégradée sur le côté intérieur. Ceci est dû au fait que les déplacements mesurés sur le côté extérieur de la roue sont associés à une incertitude moins importante que ceux du côté intérieur. Par conséquent, ils ont plus de poids dans le processus d'identification. Le résultat obtenu est donc plus fiable que les précédents puisque l'impact des incertitudes de mesure sur les paramètres identifiés a été minimisé. Les résultantes introduites par le chargement identifié sur la demi-roue intérieure (resp. extérieure),

en prenant en compte les incertitudes de mesure, sont égales à 43150 daN (resp. 27270 daN) dans la direction radiale et 83220 daN (resp. 86920 daN) dans la direction axiale.

Pour tenter de combler les écarts restants, notamment sur le côté intérieur de la roue, on propose d'augmenter le nombre de paramètres à identifier en tronquant la série de modes présentée dans le Tableau 4.1 à un ordre supérieur. On choisit ainsi d'identifier les amplitudes des neuf premiers modes dominants. Pour réduire les temps de calcul (*i.e.*, plusieurs semaines), on utilise ici le modèle éléments finis linéaire de la roue (cf. Figure 4.5), après avoir préalablement vérifié que la linéarisation n'avait pas d'impact majeur sur les différentes grandeurs d'intérêt étudiées. Chaque mode est imposé avec une amplitude unitaire dans le modèle puis les valeurs des grandeurs d'intérêt sont successivement relevées afin de construire un système linéaire qu'il suffira d'inverser. L'effet de la pression d'azote est également pris en compte. Après résolution du système linéaire, on obtient les résultats présentés sur la Figure 4.29 pour les déformations aux positions des jauges. On rappelle que ces données ne sont pas prises en compte dans la minimisation.

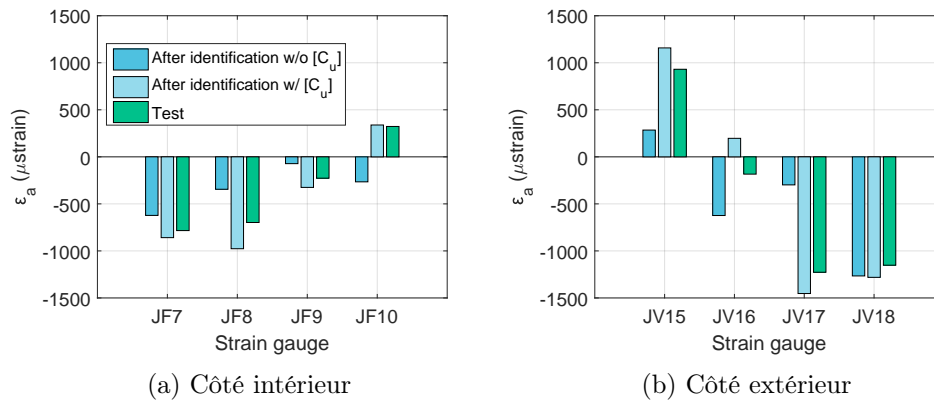


FIGURE 4.29 – Comparaison entre les déformations mesurées et calculées après identification – Influence de la prise en compte des incertitudes de mesure – 9 modes

En augmentant le nombre de modes permettant de décrire le chargement recherché, on constate que la corrélation essai-calcul est encore améliorée pour les déformations aux positions des jauges, après prise en compte des incertitudes de mesure. Les résultantes introduites par le chargement identifié sur la demi-roue intérieure (resp. extérieure) sont égales à 35590 daN (resp. 43320 daN) dans la direction radiale et 95870 daN (resp. 98410 daN) dans la direction axiale. On observe de nouveau que les résultantes radiales sont bien inférieures à celles introduites par le chargement fourni par le pneumaticien. De plus, on retrouve comme précédemment un déséquilibre radial entre les demi-roues qui pourrait être corrigé en ajoutant des contraintes sur les paramètres recherchés. Les résultantes axiales sont quant à elles similaires et le coefficient  $\lambda$  défini comme le rapport entre la résultante axiale reprise par chaque demi-roue et celle reprise par chaque flanc du pneumatique est alors environ égal à 0,64 et supérieur aux valeurs obtenues précédemment.

## Discussion

Les résultats précédents ont permis de montrer l'impact du changement de paramétrisation et de la prise en compte des incertitudes de mesure sur l'identification des chargements à l'interface pneu-jante pour un cas de gonflage. Pour aller plus loin, il est nécessaire de quantifier les incertitudes sur les paramètres identifiés afin d'obtenir une réponse complète

au problème inverse posé. En effet, les résultats d'identification dépendent de plusieurs facteurs étroitement liés : le nombre de paramètres considérés, les mesures utilisées et leurs incertitudes associées, la sensibilité des mesures par rapport aux paramètres et donc le conditionnement du système à inverser. Cette quantification n'a malheureusement pas pu être réalisée dans le cadre de ces travaux de thèse en raison de l'unité non conforme de la matrice de covariance des champs de déplacement mesurés.

Néanmoins, les différentes identifications présentées précédemment indiquent une tendance similaire sur le chargement réellement appliqué sur la roue lors du gonflage réalisé en essai : le pneumatique semble appuyer essentiellement de manière axiale sur la jante, ce qui semble plutôt étrange compte tenu de la technologie radiale du pneumatique étudié. Des investigations ont été menées afin de comprendre ce phénomène et une erreur de mesure « systématique » non négligeable a été découverte. Cette erreur, détaillée dans le paragraphe suivant, est liée au protocole d'essais et change radicalement l'interprétation des champs de déplacement mesurés et utilisés pour les identifications du cas de gonflage.

#### 4.3.4 Détection d'une erreur de mesure systématique

Dans cette section, l'historique des essais présentés au Chapitre 2 est minutieusement analysé afin de mettre en évidence une erreur de mesure systématique permettant d'expliquer la forme du chargement identifié lors du cas de gonflage. Tout d'abord, un bref rappel théorique sur les efforts mis en jeu lors du gonflage d'un pneumatique sur une roue d'aéronef est effectué. Ensuite, les différents cas de gonflage/dégonflage du pneumatique réalisés durant la campagne d'essais sont étudiés.

##### Rappel théorique

Un pneumatique monté sur une roue applique un chargement de compression sur la jante au niveau du *bead seat* avant même d'être gonflé (Clarks, 1971 ; Gent et Walter, 2006). En effet, le diamètre intérieur du pneu étant légèrement inférieur au diamètre d'accrochage de la jante, un ajustement serré s'opère entre les deux composants (Figure 4.30).

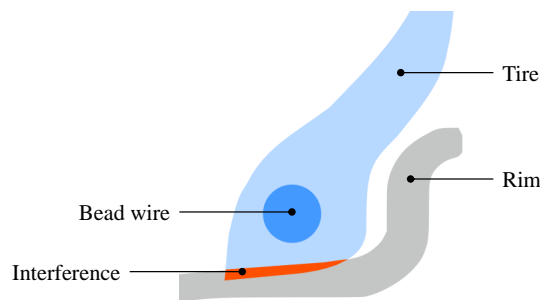


FIGURE 4.30 – Interférence pneu-jante

Ce serrage initial, assuré notamment par la présence de la tringle métallique du pneumatique, permet d'éviter les fuites d'azote, les frottements entre la zone basse du pneu et la jante, et le glissement circonférentiel du pneu lors des différents cas de chargement. Il doit être dimensionné correctement afin d'assurer le transfert des charges pneu-piste vers la roue tout en permettant un montage et un démontage aisés du pneu sur celle-ci (Walter et Kiminecz, 1975 ; Tseng *et al.*, 1989 ; Pelle, 1994 ; Gerhardt *et al.*, 1997 ; Lee, 2006). Plus l'ajustement est serré, plus les contraintes exercées au niveau du *bead seat* sont importantes. A ce stade, les bourrelets situés aux extrémités de la jante ne sont pas chargés.

Lorsque le pneumatique est gonflé, sa partie basse se déplace le long de la jante jusqu'à l'établissement du contact entre les flancs du pneumatique et les bourrelets. La phase de montée du pneumatique sur la pente inclinée de la jante a pour effet de déplacer et d'accentuer la zone de compression liée à l'effort radial de la tringle (Figure 4.31). Aucun effort axial n'est encore appliqué sur les bourrelets et les efforts tangentiels à l'interface pneu-jante ne sont pas considérés en raison de l'application parfois recommandée d'une solution lubrifiante sur la jante facilitant la mise en place du pneumatique.

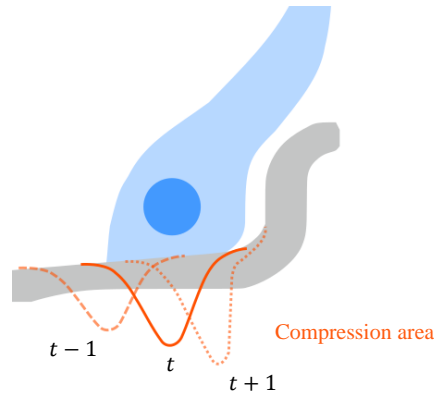


FIGURE 4.31 – Évolution de la zone de compression lors de la montée du pneu sur la jante

Une fois que le contact entre le pneumatique et les bourrelets est établi, un chargement axial apparaît sur ceux-ci et l'augmentation de la pression interne du pneu entraîne leur flexion. Ceci a pour effet de modifier la répartition de la pression de contact à l'interface pneu-jante (Figure 4.32). La partie du *bead seat* la plus éloignée des bourrelets est légèrement déchargée (notamment en raison de la rotation de la tringle du pneumatique) tandis qu'un effort axial de plus en plus important est généré sur la partie verticale des bourrelets.

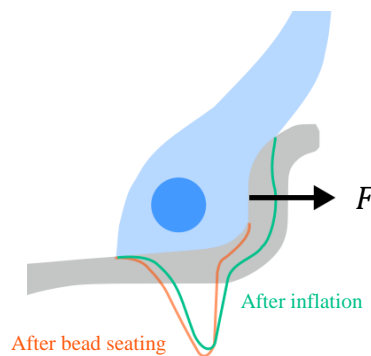


FIGURE 4.32 – Impact du gonflage sur la répartition des pressions de contact pneu-jante

Le gonflage d'un pneumatique sur une roue est donc constitué de deux phases distinctes : la montée progressive du pneu sur la jante et la flexion des bourrelets (Figure 4.33). Afin de bien caractériser la tenue mécanique de la roue, les déformations induites par ces deux phases doivent donc être correctement mesurées. En effet, bien que le cas de gonflage soit axisymétrique, son impact sur la durée de vie en fatigue de la roue est important puisqu'il contribue directement à la contrainte moyenne observée dans la jante. Il joue également un rôle crucial lors de l'analyse en tolérance aux dommages dans cette zone.

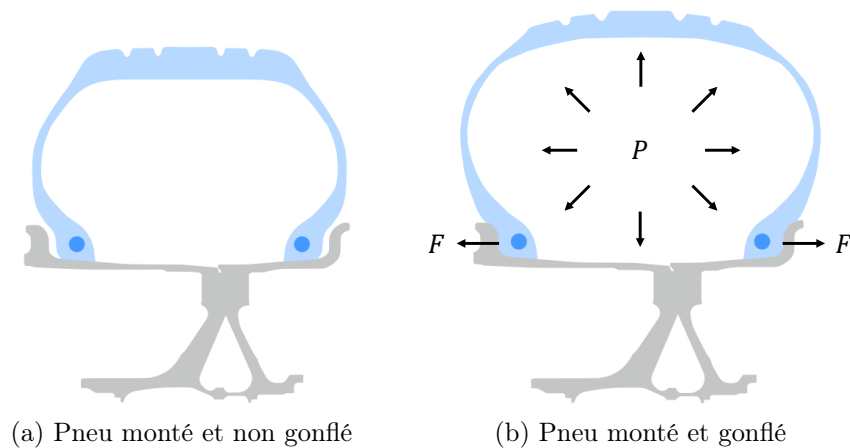


FIGURE 4.33 – Montage et gonflage d'un pneumatique sur une roue d'aéronef

### Analyse de la campagne d'essais

Lors de la campagne d'essais présentée au Chapitre 2, le gonflage à l'azote du pneumatique sur la roue a été effectué plusieurs fois en raison de difficultés liées aux mouvements des caméras et à la synchronisation de la prise d'images (Figure 4.34). Un premier gonflage a été réalisé le 11 juillet 2014, suivi d'un essai de raideur radiale et d'un dégonflage, mais aucune mesure associée n'a été retrouvée. Il s'agissait probablement d'essais pour tester les différents équipements. D'autres essais ont ensuite été réalisées les 15 et 16 juillet. Les mesures du 15 juillet n'ont pas été retenues en raison des difficultés évoquées précédemment, tandis que celles du 16 juillet ont été considérées comme les mesures de référence utilisées pour réaliser les identifications inverses du cas de gonflage présentées aux § 4.3.2 et 4.3.3.

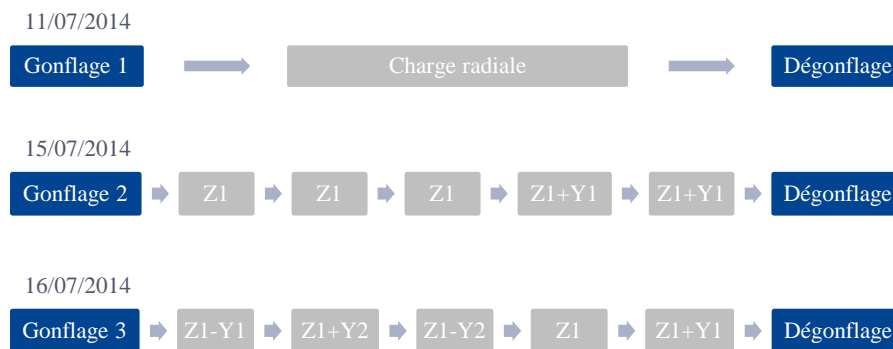


FIGURE 4.34 – Historique des essais réalisés

Dans la suite, on s'intéresse en particulier aux cas de gonflage numérotés 2 et 3 sur la Figure 4.34. Les déformations mesurées par les jauges positionnées dans la jante pour ces deux essais sont post-traitées puis comparées. Seules les jauges d'une section de la roue sont considérées (Figure 4.35), la nature axisymétrique du gonflage ayant été préalablement validée en comparant des jauges similaires dans les différentes sections.

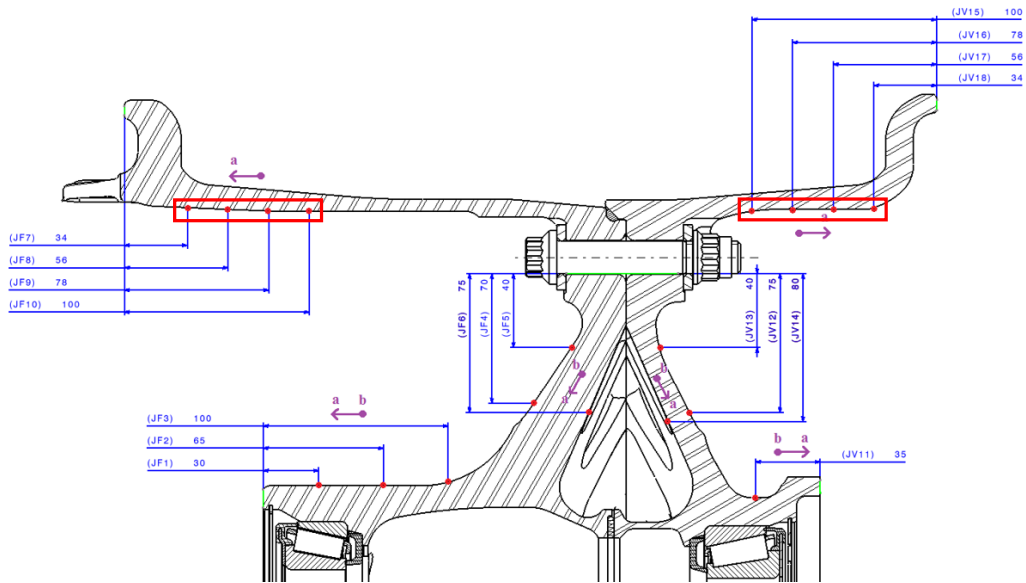


FIGURE 4.35 – Instrumentation de la section A de la roue testée et jauges d'intérêt

La Figure 4.36 représente l'évolution de la pression d'azote et des déformations mesurées par les jauges en fonction du temps pour le gonflage du 15 juillet.

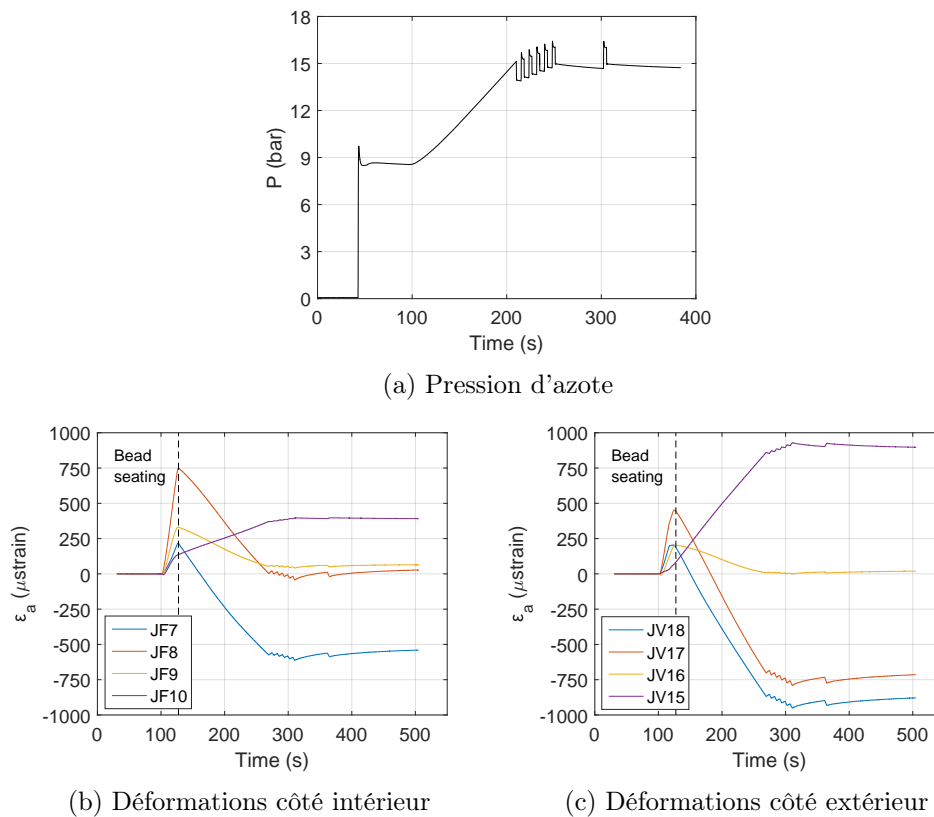


FIGURE 4.36 – Évolution de la pression d'azote et des déformations mesurées aux positions des jauges (cf. Figure 4.35) en fonction du temps – Gonflage 2

Les évolutions des déformations mesurées sont caractéristiques des phénomènes décrits précédemment. Tout d'abord, on constate un retard dans la réponse des jauges par rapport à l'évolution de la pression d'azote qui est probablement dû au temps de remplissage du pneumatique. Ensuite, toutes les jauges sélectionnées enregistrent des déformations d'extension entre  $t = 100$  et  $t = 125$  s, caractéristiques du serrage dû à la tringle et de la montée progressive du pneumatique sur la jante. Les déformations atteignent des niveaux non négligeables (jusqu'à  $750 \mu\text{def}$  pour la jauge JF8). A l'instant  $t = 125$  s, un changement brutal de comportement est observé sur toutes les jauges. La plupart enregistrent alors une contraction, à l'exception des jauges les plus éloignées des bourrelets (JF10 et JV15) qui continuent de mesurer des déformations d'extension avec toutefois un changement de pente. Ceci s'explique par l'appui du pneumatique contre les bourrelets de la roue à  $t = 125$  s. Une autre explication envisageable pourrait être le passage de la zone basse du pneumatique de part et d'autre de la jauge étudiée. Néanmoins, cette hypothèse semble peu probable compte tenu des positions des jauges considérées qui sont toutes incluses dans la zone maximale de contact potentiel entre le pneu et la jante. Le fait qu'une jauge enregistre de la contraction ou de l'extension dépend de sa position vis-à-vis de la zone basse du pneumatique, comme illustré sur la Figure 4.37. Cependant, du fait de la méconnaissance de cette dernière, ce comportement n'est pas toujours trivial à déterminer. Pour une jauge située du côté du contact pneu-jante, le comportement serait globalement inversé. On observerait d'abord des déformations de contraction puis d'extension.

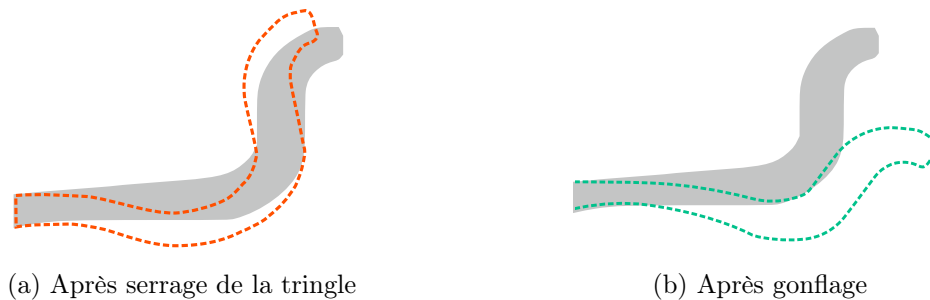


FIGURE 4.37 – Déformées de la jante en fonction de l'étape considérée

Une fois que le contact entre le pneumatique et les bourrelets est réalisé, les déformations évoluent linéairement en fonction de la pression appliquée. Les paliers de pression observés entre  $t = 200$  et  $t = 310$  s ont été appliqués volontairement. En effet, l'objectif initial de l'essai était de mesurer la déformation de la roue pour différents niveaux de pression de gonflage afin de mettre à jour les heuristiques internes sur l'évolution des résultantes d'efforts en fonction de la pression. Lorsque le dernier palier, correspondant à la pression de gonflage nominale (14,8 bar), est atteint, on constate que les mesures de déformation tendent à se stabiliser. Néanmoins, elles décroissent légèrement au cours du temps, tout comme la pression interne du pneumatique, en raison de la dilatation de ce dernier. Le volume du pneu peut ainsi s'accroître de 6 à 10% durant les 12 heures qui suivent son premier gonflage à la pression nominale (Michelin, 2016). Les pneumaticiens recommandent d'ailleurs de laisser le pneu gonflé à sa pression nominale pendant 12 heures minimum puis de réajuster sa pression interne avant toute autre manipulation afin d'assurer sa mise en place (Dunlop, 2008 ; Bridgestone, 2016 ; Goodyear, 2016 ; Michelin, 2016 ; SAE International, 2018). Néanmoins, l'impact de cette dilatation sur les mesures de déformation dans la jante n'a jamais été étudié et pourrait constituer une piste intéressante afin d'obtenir des essais fiables et répétables.

Suite aux essais réalisés le 15 juillet, le pneumatique a été dégonflé en fin de journée, mais il n'a pas été démonté de la roue. La Figure 4.38 représente l'évolution de la pression d'azote et des déformations mesurées par les jauges en fonction du temps pour le gonflage réalisé le 16 juillet.

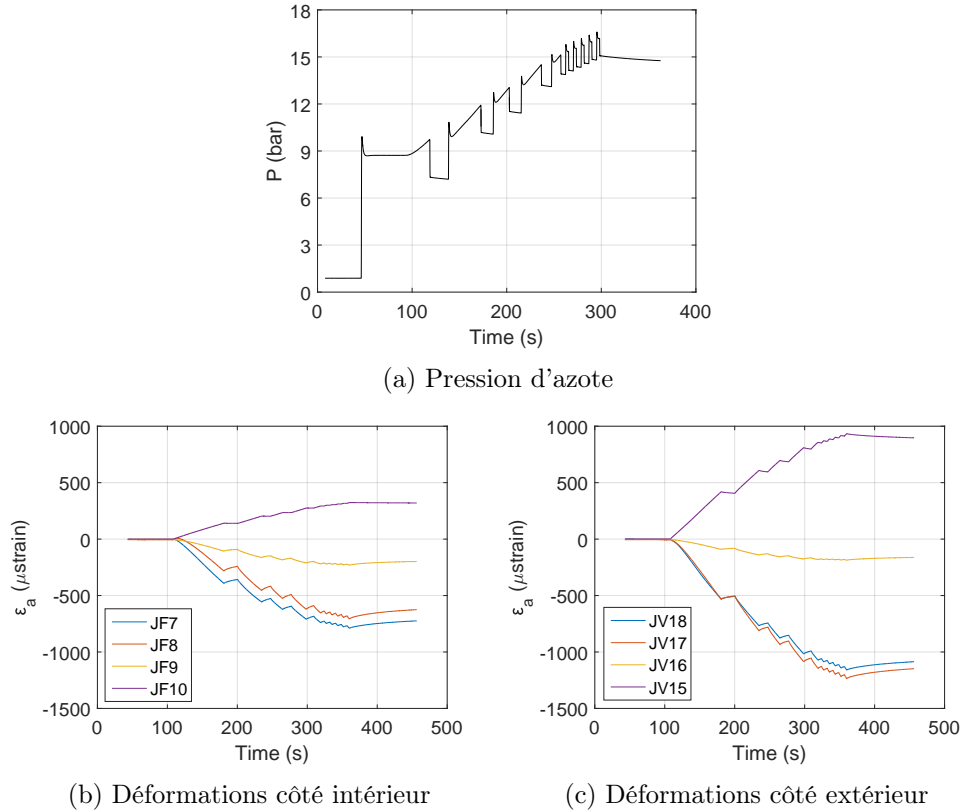


FIGURE 4.38 – Évolution de la pression d'azote et des déformations mesurées aux positions des jauges (cf. Figure 4.35) en fonction du temps – Gonflage 3

Les évolutions des déformations mesurées par les jauges sont différentes de celles observées pour le gonflage du 15 juillet. En effet, aucun changement brutal de comportement n'est constaté. Seuls les paliers de pression réalisés perturbent l'évolution linéaire des déformations en fonction de la pression d'azote. Les deux cas de gonflage réalisés ne fournissent pas les mêmes résultats et on pourrait même croire que les zones d'extension/contraction sont très différentes entre les deux essais. L'origine de ces différences provient du fait que le pneumatique n'a pas été démonté avant d'être regonflé. Le dégonflage du pneu permet de relaxer les déformations observées dans la jante mais le serrage initial de la tringle l'empêche de revenir à sa position initiale (cf. Figure 4.33). Lors du dégonflage, le pneumatique reste donc très proche des bourrelets et se décolle à peine. De plus, cet effet est probablement accentué par les cas de chargement réalisés entre temps qui ont tendance à « roder » le pneumatique. Par conséquent, lorsqu'un nouveau gonflage est effectué, et que les jauges sont remises à zéro entre temps, seules les déformations dues à la flexion des bourrelets sont mesurées. Les déformations non négligeables induites par le serrage de la tringle et la montée du pneumatique sur la jante ne sont donc plus considérées. Il en est de même pour les mesures de déplacement obtenues par corrélation d'images numériques. Par ailleurs, on remarque que les déformations ne sont pas tout à fait stabilisées à la fin de l'essai.

Pour valider les explications proposées, on compare sur la Figure 4.39 les déformations finales du gonflage 2 avec celles du gonflage 3 corrigées par les déformations enregistrées à  $t = 135$  s lors du gonflage 2 (qui correspondent *a priori* aux déformations induites par le serrage de la tringle du pneumatique).

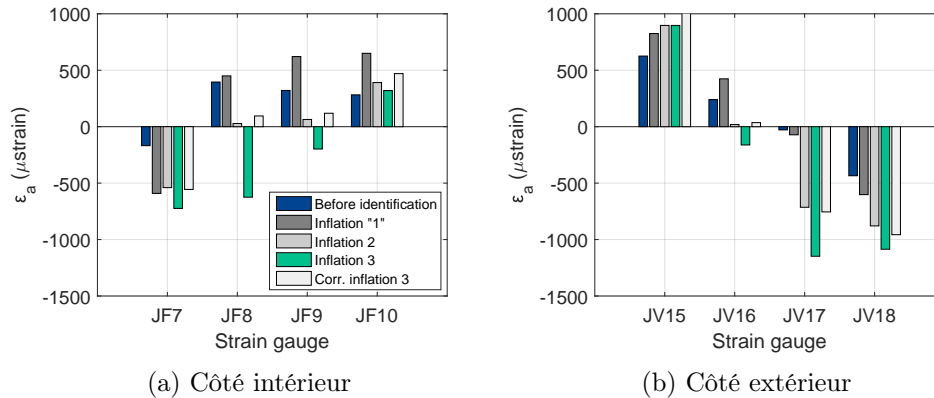


FIGURE 4.39 – Comparaison entre les déformations mesurées lors des différents gonflages

En ajoutant les déformations dues au serrage de la tringle à celles mesurées lors du gonflage 3, on obtient des déformations très proches de celles mesurées lors du gonflage 2, ce qui confirme les hypothèses proposées. Les déformations dues à la flexion des bourrelets sous l'effet de la pression d'azote sont répétables entre les deux gonflages étudiés. **Les champs de déplacement et les déformations mesurés, utilisés pour réaliser des identifications du chargement à l'interface pneu-jante, correspondent donc à des déplacements relatifs par rapport à l'étape de mise en place du pneumatique sur la roue et ne prennent pas en compte l'effet du serrage de la tringle.** Par ailleurs, il est fort probable que les déformations enregistrées lors du gonflage 2 soient déjà elles-mêmes des mesures relatives par rapport au gonflage 1 (cf. Figure 4.34) dont les données ne sont malheureusement pas disponibles. Néanmoins, les déformations mesurées lors d'un premier gonflage d'une campagne d'essais précédente avec le même couple pneu-roue sont également représentées sur la Figure 4.39 et indiquées par la légende « inflation "1" ». On constate de nombreux écarts non négligeables avec le gonflage 2 démontrant que l'impact du serrage de la tringle du pneumatique, ayant tendance à générer des déformations d'extension sur toutes les jauges étudiées, a été fortement sous-estimé en considérant le gonflage 2 et ne peut être correctement mesuré qu'au premier gonflage du pneu sur la roue.

Les déformations mesurées lors du premier gonflage étant les plus représentatives puisque les deux phases caractéristiques de celui-ci sont considérées, on peut les comparer aux déformations calculées avec le champ de pression de contact fourni par le pneumaticien (en bleu sur la Figure 4.39). Les comportements d'extension/contraction sont cohérents sur toutes les jauges étudiées. Les données fournies par les pneumaticiens permettent donc d'avoir une bonne estimation de la déformée de la roue. En comparant les déformations induites respectivement par le serrage de la tringle du pneumatique et par la flexion des bourrelets, on remarque néanmoins que celles-ci sont plus élevées au calcul qu'en essai. L'impact de la raideur de la roue, non pris en compte par les pneumaticiens, pourrait expliquer les écarts observés. En effet, les pressions de contact mesurées devraient être plus faibles sur une roue souple, au moins au niveau du *bead seat*. En revanche, le fait que les bourrelets refluent vers l'intérieur de la roue lors du serrage de la tringle (cf. Figure 4.37a) pourrait générer des pressions plus élevées dans la partie verticale des bourrelets.

## Conclusion

Le cas de gonflage d'un pneumatique sur une roue est composé de deux phases. La première correspond au montage et à la montée progressive du pneu sur la jante. Les déformations induites par le serrage de la tringle du pneumatique, qui dépend de l'interférence initiale entre les deux composants, ne sont pas négligeables et doivent être impérativement mesurées. La deuxième phase correspond à l'établissement du contact entre le pneumatique et les bourrelets de la jante, ainsi qu'à la flexion de ces derniers sous l'effet de l'augmentation de la pression interne.

Le biais de mesure introduit par la non prise en compte de la première phase permet d'expliquer en partie la forme du chargement identifié par méthode inverse aux § 4.3.2 et 4.3.3. L'étude des résultats de la phase d'étalonnage des caméras pourrait donner des indices sur la déformée de la roue due au serrage de la tringle du pneumatique. De plus, le biais de mesure identifié n'est pas cantonné aux essais de la campagne analysée. Cette découverte a permis d'expliquer de nombreux écarts constatés lors de diverses comparaisons essai-calcul et de modifier les protocoles d'essai de *Safran Landing Systems*. Une nouvelle procédure permettant de mesurer correctement les déformations statiques induites par le cas de gonflage a en effet été proposée et implique notamment de prendre en compte les déformations résiduelles après dégonflage du pneumatique.

L'identification du cas de gonflage ne pourra être finalisée que lorsque les mesures utilisées seront complètes et suffisamment fiables. La maîtrise des essais est aujourd'hui clairement insuffisante et les travaux engagés sur l'amélioration des protocoles doivent donc être poursuivis. Compte tenu des résultantes d'effort introduites sur la roue par le gonflage du pneumatique (*i.e.*, 60 tonnes sur chaque demi-roue dans les directions axiale et radiale d'après les données fournies par le pneumaticien), il est impératif de caractériser finement son impact sur le comportement mécanique de la roue. En comparaison, les résultantes introduites par les cas de charge de roulage en ligne droite ou en ripé sont bien plus faibles (*i.e.*, 22 tonnes en chargement vertical et jusqu'à 11 tonnes en latéral pour la roue étudiée). Le cas de gonflage est donc crucial et conditionne la suite des essais. Lorsque l'aspect expérimental sera maîtrisé, des améliorations du processus d'identification pourront être proposées. La combinaison des mesures de déplacement obtenues par corrélation d'images numériques et des mesures de déformation par jauges d'extensométrie pourra par exemple être étudiée afin d'enrichir la procédure inverse.

## 4.4 Identifications d'un cas de ligne droite

### 4.4.1 Paramétrisation basée sur les modes propres d'interface

Dans cette partie, on propose d'utiliser la paramétrisation basée sur les modes propres statiques d'interface pneu-jante pour identifier le chargement réellement appliqué sur la roue lors du cas de ligne droite ( $Z = 22540$  daN) réalisé en essai. On s'intéresse en particulier au cas Z1 effectué le 16 juillet 2014 (cf. Figure 4.34) et on précise qu'on dispose de mesures (*i.e.*, déplacements et déformations) relatives par rapport au cas de gonflage du pneumatique. Les paramètres recherchés sont les amplitudes des modes propres dominants pour le cas de charge étudié. Pour les sélectionner, on projette le chargement correspondant à la différence entre les cas de ligne droite et de gonflage fournis par le pneumaticien pour le pneu A2 sur la base des modes propres statiques d'interface pneu-jante puis on classe les modes par contribution énergétique décroissante (Figure 4.40).

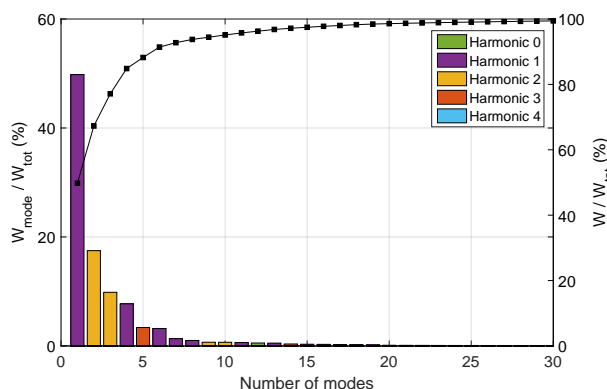


FIGURE 4.40 – Classement par contribution énergétique décroissante – Différence entre les cas de ligne droite et de gonflage du pneu A2

Pour conserver  $\eta = 99\%$  de l'énergie de déformation élastique introduite par ce chargement, les 25 premiers modes dominants doivent être conservés. Ce nombre est supérieur aux 19 modes évoqués au § 3.4.6 qui permettaient de conserver 99% de l'énergie induite par le cas de ligne droite « complet ». Ceci est dû à la soustraction du cas de gonflage qui représente une part importante de l'énergie de déformation élastique totale. Les contributions majeures des modes axisymétriques appartenant à l'harmonique 0 sont supprimées et les modes dominants appartiennent donc aux harmoniques supérieures.

Dans la suite, on choisit d'identifier les amplitudes des 10 premiers modes dominants présentés sur la Figure 4.40 à partir des mesures de champs de déplacement afin d'évaluer la faisabilité de l'identification du cas de ligne droite. Ces modes permettent de conserver  $\eta = 95\%$  de l'énergie de déformation élastique introduite par le chargement fourni par le pneumaticien. L'identification est réalisée à partir du modèle éléments finis linéaire de la roue pour lequel la modélisation des pièces d'outillage a néanmoins été conservée. En effet, contrairement aux dernières identifications réalisées pour le cas de gonflage, la prise en compte de la rigidité de l'essieu est cruciale pour les cas 3D. On utilise donc une version linéarisée du modèle éléments finis non-linéaire représenté sur la Figure 4.3. Pour le cas de chargement étudié, les différences maximales obtenues entre les modèles linéaire et non-linéaire sont d'environ 0,08 mm pour les déplacements dans la zone de mesure et 100  $\mu\text{def}$  pour les déformations aux positions des jauges étudiées. Ces écarts sont considérés comme suffisamment faibles pour pouvoir utiliser le modèle linéarisé en première approximation.

Chaque mode est imposé avec une amplitude unitaire dans le modèle puis les valeurs des grandeurs d'intérêt sont successivement relevées afin de construire un système linéaire qu'il suffira d'inverser. L'effet de la pression d'azote est également pris en compte. Après résolution du système linéaire, on peut comparer les champs de déplacement mesurés et calculés respectivement avant et après identification (Figure 4.41). Les résidus associés sont illustrés sur la Figure 4.42. On précise que la matrice de covariance des champs de déplacement mesurés n'est pas prise en compte ici.

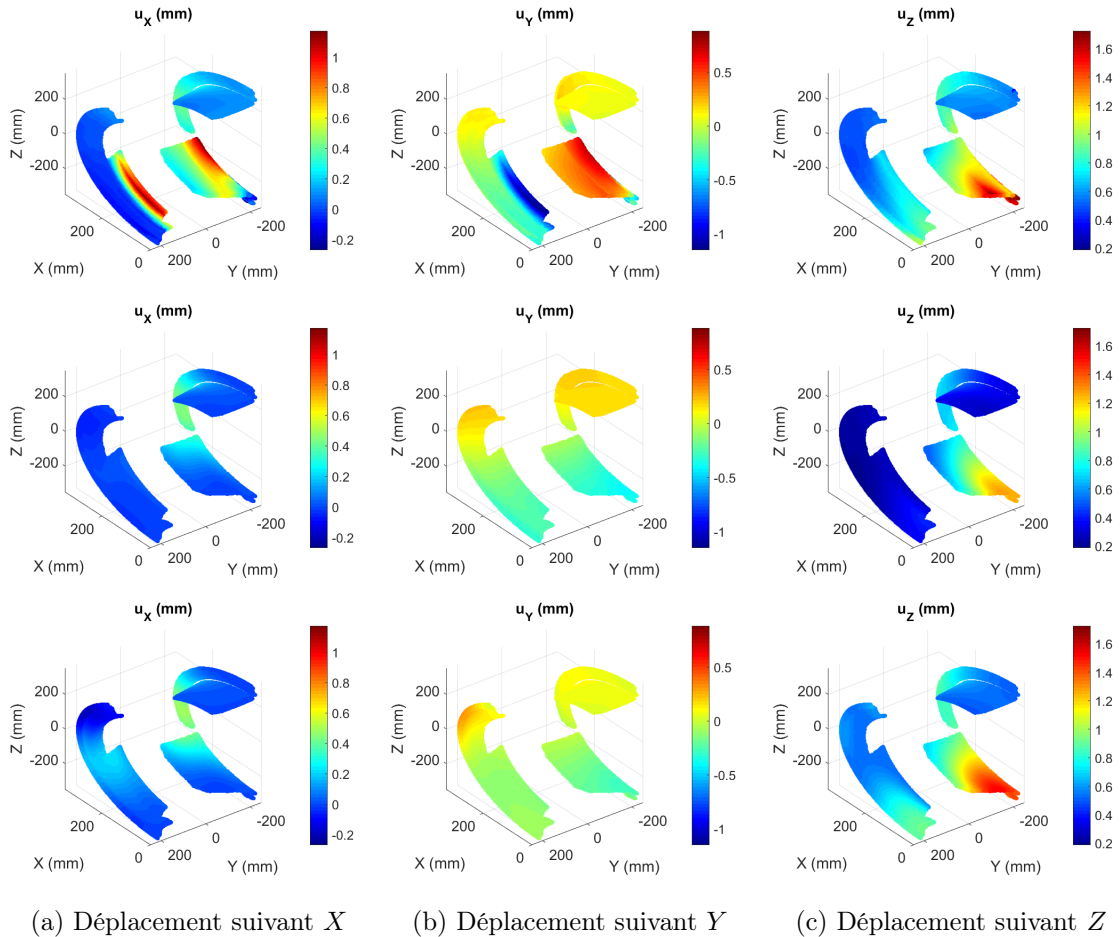


FIGURE 4.41 – Comparaison entre les champs de déplacement mesurés (haut), calculés avant identification (milieu) et après identification (bas) dans chaque direction

On constate que les écarts ont été réduits après identification, en particulier pour les déplacements dans la direction  $Z$ . En revanche, les résidus dans les directions  $X$  et  $Y$  sont toujours élevés et présentent une signature en fond de jante. En effet, les champs de déplacement mesurés dans cette zone sont très différents de ceux calculés et on retrouve le même type de signature que celle obtenue lors de l'identification du cas de gonflage. Les déplacements mesurés et calculés au niveau des bourrelets sont en revanche similaires. Par ailleurs, en calculant la résultante d'effort dans la direction  $Z$  introduite par le chargement identifié, on constate que celle-ci est égale à 49340 daN (dont respectivement 18140 daN et 31200 daN pour les demi-roues intérieure et extérieure) alors que la charge imposée lors de l'essai vaut seulement 22540 daN. Le chargement identifié ne respecte donc pas la consigne, ce qui remet d'ores et déjà en cause sa validité.

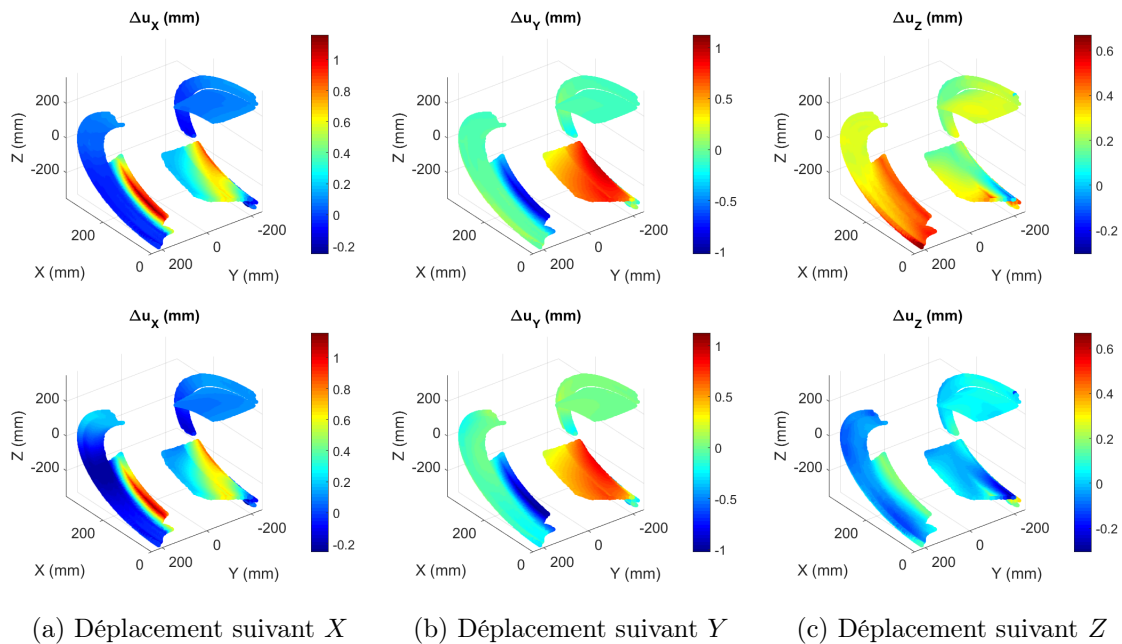


FIGURE 4.42 – Résidus entre les champs de déplacement mesurés et calculés : avant identification (haut) et après identification (bas)

Pour évaluer plus précisément les résultats obtenus, on propose de comparer les déformations aux positions des jauges qui ne sont pas prises en compte dans la minimisation. L'instrumentation présentée au Chapitre 2 est composée de 68 jauges distinctes, dont 34 jauges doubles et 34 jauges simples, pour un total de 102 mesures de déformation. Cependant, en raison de la défaillance de certaines d'entre elles lors de la campagne d'essais, seules 94 mesures sont disponibles et réparties dans les sections de la roue représentées sur la Figure 4.43. On s'intéresse en particulier aux jauges définies dans la section  $A$  (Figure 4.44) et dont la position est identique pour les autres sections. L'hypothèse de symétrie du comportement mécanique de la roue par rapport au plan  $Y - Z$  permet de post-traiter les déformations calculées avec le modèle éléments finis dans toutes les sections.

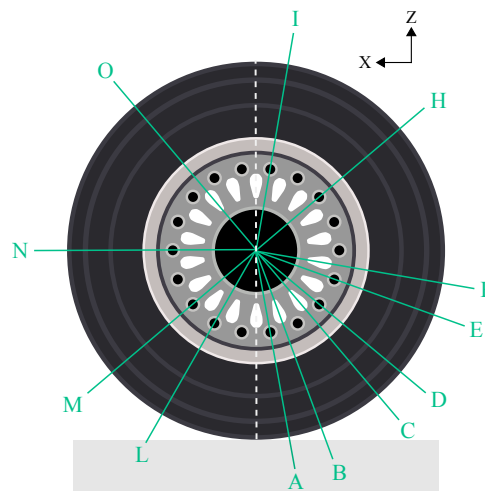


FIGURE 4.43 – Sections de la roue instrumentées par jauges de déformation

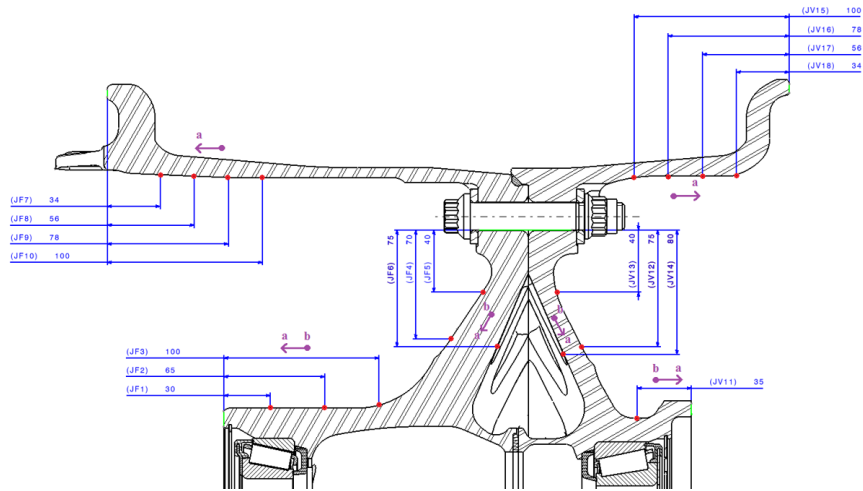


FIGURE 4.44 – Positions des jauges dans la section A de la roue

Les Figures 4.45–4.47 représentent ainsi les déformations mesurées en essai et calculées avant/après identification aux positions des jauges dans différentes sections de la roue (indiquées en gris). Les résultats sont présentés par zone (*i.e.*, moyeu, voile et jante).

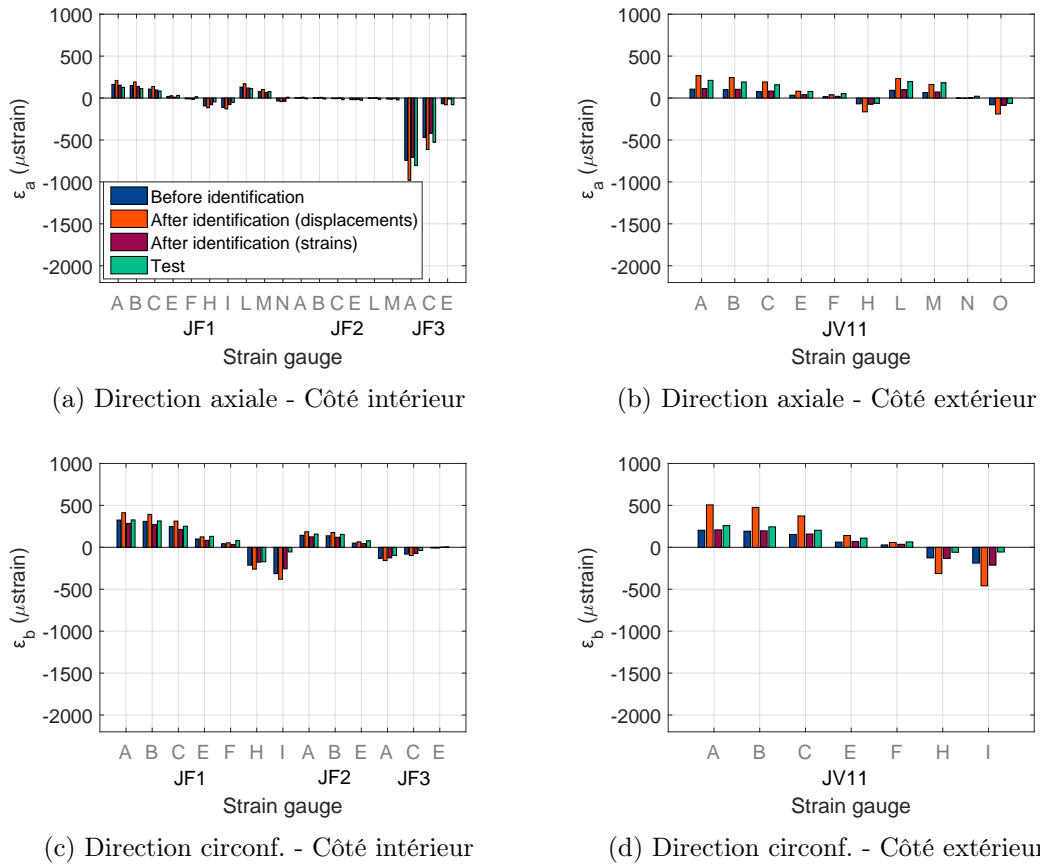
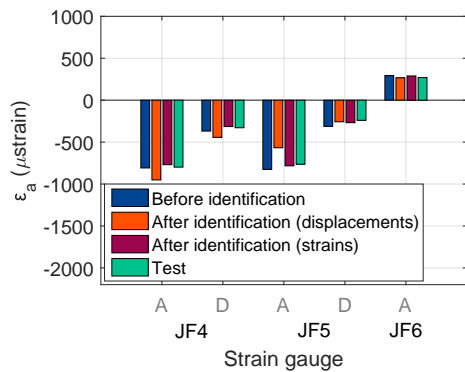
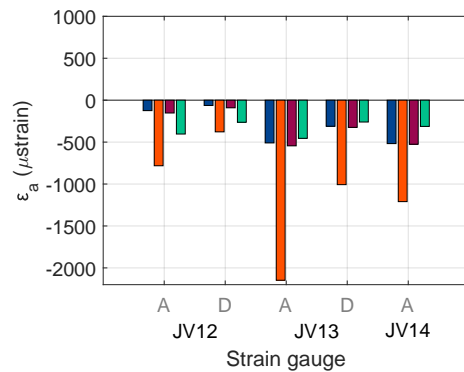


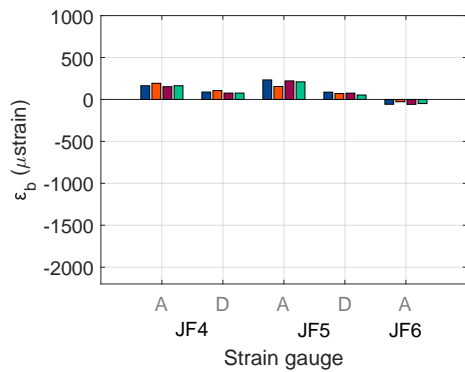
FIGURE 4.45 – Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification au niveau du moyeu



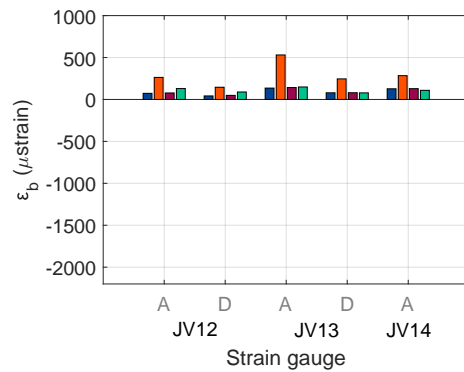
(a) Direction axiale - Côté intérieur



(b) Direction axiale - Côté extérieur

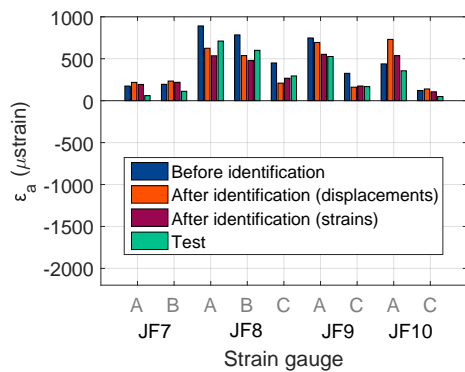


(c) Direction circonf. - Côté intérieur

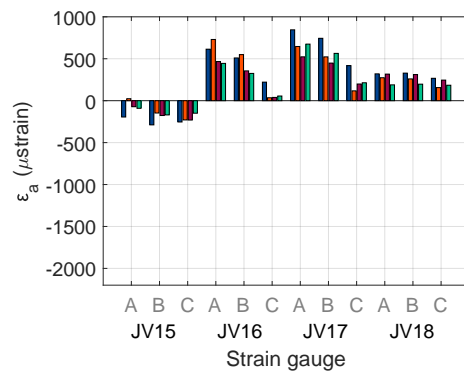


(d) Direction circonf. - Côté extérieur

FIGURE 4.46 – Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification au niveau du voile



(a) Côté intérieur



(b) Côté extérieur

FIGURE 4.47 – Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification au niveau de la jante

Les déformations mesurées au niveau du moyeu de la roue sont faibles à l'exception de la jauge JF3 (Figure 4.45). On remarque que la corrélation essai-calcul avant identification (*i.e.*, avec le chargement fourni par le pneumaticien) est déjà très satisfaisante dans cette zone, en particulier pour le côté intérieur de la roue. En revanche, les résultats sont dégradés après identification du chargement et les écarts obtenus peuvent atteindre jusqu'à 400  $\mu\text{def}$ . Au niveau du voile (Figure 4.46), les tendances sont similaires : on constate de nouveau une très bonne corrélation essai-calcul avant identification tandis que les déformations calculées avec le chargement identifié s'éloignent fortement des mesures. Les écarts sont particulièrement importants sur le côté extérieur de la roue (*e.g.*, plus de 1500  $\mu\text{def}$  pour la jauge JV13). Ce résultat n'est pas surprenant puisque la résultante d'effort vertical générée par le chargement identifié est largement supérieure à la charge imposée lors de l'essai. Or, la réponse mécanique de la roue dans les zones situées en dessous l'assemblage boulonné est essentiellement pilotée par les résultantes d'efforts introduites. Enfin, les résultats obtenus dans la jante (Figure 4.47) montrent que le chargement fourni par le pneumaticien surestime légèrement les déformations aux positions des jauges par rapport aux mesures tandis que le chargement identifié a des effets contraires en fonction de la jauge étudiée. La corrélation essai-calcul est par exemple améliorée après identification pour la jauge JF8 tandis qu'elle est légèrement dégradée pour la jauge JV16. Toutefois, il est fort probable que les déformations circonférentielles dans la jante, non mesurées lors de cette campagne, montreraient des écarts bien plus importants entre l'essai et le calcul avec le chargement identifié en raison des résultantes introduites par ce dernier.

Compte tenu des résultats obtenus dans les différentes zones de la roue avec le chargement identifié, celui-ci ne peut donc pas être considéré comme valable, d'autant plus qu'il ne respecte pas l'effort global appliqué lors de l'essai. En revanche, on note que la corrélation essai-calcul en déformation obtenue avec le chargement fourni par le pneumaticien est très satisfaisante alors que les champs de déplacement calculés sont bien différents des champs mesurés. On peut donc supposer que ces derniers sont peu fiables. En supposant que la matrice de covariance associée soit relativement proche de celle déterminée pour le cas de gonflage (cf. Figure 4.27), on peut présumer que la mesure en fond de jante est de nouveau incertaine et qu'elle corrompt en partie l'identification. Bien que les résidus obtenus soient nettement supérieurs aux valeurs d'incertitude de mesure (de l'ordre de 10  $\mu\text{m}$ ), la prise en compte de cette matrice de pondération lors de futures identifications pourrait permettre d'améliorer les résultats. Les conditions aux limites simplifiées imposées à l'essieu lors du calcul peuvent également expliquer une partie des écarts observés.

Une autre piste envisageable consiste à réaliser une identification du chargement basée uniquement sur les mesures de déformation. On obtient alors les déformations représentées en violet sur les Figures 4.45–4.47 et celles-ci sont logiquement proches des déformations mesurées. Les écarts restants peuvent s'expliquer par le fait que seuls 10 modes propres sont utilisés pour décrire le chargement et par la présence de singularités sur la géométrie réelle de la roue (petites alvéoles, valve, trous de fusible, *etc.*) qui ne sont pas modélisées au calcul. Toutefois, on note que seules quatre sections de la roue, réparties sur une portion angulaire de  $40^\circ$ , sont instrumentées au niveau du voile et de la jante pour les essais étudiés et on peut donc se demander si ces mesures sont suffisantes pour identifier avec précision le chargement appliqué à l'interface pneu-jante. On constate néanmoins que la résultante d'effort vertical introduite par le chargement identifié vaut 23400 daN (dont respectivement 12400 daN et 11000 daN pour les demi-roues intérieure et extérieure), ce qui est proche de la charge imposée lors de l'essai (moins de 4% d'erreur). Le chargement identifié de cette manière est donc plus fiable que celui obtenu à partir des champs de déplacement.

#### 4.4.2 Discussion

L'identification du cas de ligne droite basée sur les champs de déplacement mesurés s'est révélée peu convaincante, bien que la prise en compte des incertitudes de mesure puisse améliorer les résultats obtenus. Toutefois, le fait que le cas de gonflage n'ait pas pu être identifié convenablement (cf. § 4.3.4) ne facilite pas la tâche puisque les mesures utilisées sont relatives par rapport à un état de référence mal connu. Une compréhension fine du comportement mécanique de la roue lors du gonflage du pneu rendrait l'interprétation des champs de déplacement mesurés pour les cas 3D plus aisée. Par ailleurs, la prise en compte des jeux avec les pièces d'outillage dans les conditions aux limites imposées à l'essieu lors du calcul pourrait permettre de réduire les écarts essai-calcul en déplacement.

L'identification basée sur les mesures de déformation semble en revanche prometteuse. Cependant, on rappelle que l'instrumentation par jauges utilisée ici n'est pas destinée à l'identification des chargements pneu-jante. Une optimisation du placement des différentes jauges permettrait donc d'obtenir de meilleurs résultats (*i.e.*, avec le moins d'incertitude sur les paramètres identifiés) et sera abordée au Chapitre 5. De plus, en réalisant des essais sur une machine de roulage (*i.e.*, essais de *contraintes tournantes*) plutôt que sur une presse statique, l'ensemble du cycle de déformation sur un tour de roue pour chaque jauge pourrait être utilisé lors de l'identification. Le nombre de mesures serait alors bien supérieur en comparaison aux quelques sections instrumentées lors des essais statiques.

#### 4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, la démarche permettant de réaliser des identifications des chargements à l'interface pneu-jante à partir des données expérimentales présentées au Chapitre 2 et des paramétrisations proposées au Chapitre 3 a été détaillée. Une approche FEMU- $u$  a été choisie et mise en œuvre en milieu industriel pour une structure complexe à l'échelle réelle.

Plusieurs identifications d'un cas de gonflage d'un pneumatique sur une roue d'aéronef ont été réalisées. L'impact du choix de la paramétrisation des chargements recherchés a été étudié et une erreur de mesure systématique a été découverte. On a en effet révélé que l'impact non négligeable du serrage de la tringle du pneumatique sur le comportement mécanique de la roue n'était pas pris en compte dans les essais réalisés. Cette erreur de mesure a notamment permis d'expliquer la forme du chargement identifié. De nombreux écarts constatés sur diverses corrélations essai-calcul en interne ont également pu être expliqués par ce phénomène, qui n'est pas cantonné aux essais analysés dans le cadre de ces travaux de thèse. Un nouveau protocole d'essai a été proposé à *Safran Landing Systems* et est en cours d'utilisation sur les essais actuels. Ceci devrait permettre d'obtenir des mesures fiables, répétables et non biaisées. De nouvelles identifications permettront alors de caractériser correctement le chargement réellement appliqué sur la roue lors du gonflage et de comparer les résultats obtenus à ceux fournis par les pneumaticiens. L'impact de la rigidité de la roue pourra ainsi être finement étudié.

L'identification des cas 3D a également été abordée en étudiant un cas de ligne droite. L'utilisation des champs de déplacement mesurés n'a pas permis d'obtenir un chargement plus fiable que celui fourni par le pneumaticien et des investigations doivent être poursuivies afin de comprendre leur forme si particulière. Le potentiel d'une identification basée sur les mesures de déformation a en revanche été démontré. L'optimisation du nombre et de la position des jauges d'extensométrie utilisées, couplée à la réalisation d'essais de roulage, devrait permettre de déterminer correctement les chargements appliqués par le pneu sur la roue lors des cas de ligne droite et de ripés.

## Chapitre 5

# Placement optimal de capteurs pour l'identification de chargements

*Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème du placement optimal de jauges d'extensométrie pour l'identification de chargements à l'interface pneu-jante. Une brève synthèse bibliographique est tout d'abord présentée puis le problème d'optimisation à résoudre est détaillé. Des critères et des procédures d'optimisation, basés sur la minimisation des incertitudes associées aux paramètres recherchés, sont ensuite proposés afin de déterminer l'instrumentation la plus adaptée. On s'intéresse à nouveau au cas du gonflage du pneumatique sur la roue et une modélisation 2D axisymétrique de celle-ci est présentée. Des essais virtuels sont réalisés et les résultats d'identification obtenus en considérant une instrumentation classique sont détaillés. L'instrumentation est finalement optimisée afin d'obtenir les résultats les plus fiables possible.*

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>146</b>
<b>5.2</b>	<b>Problématique</b>	<b>147</b>
<b>5.3</b>	<b>Critères et procédures d'optimisation</b>	<b>148</b>
5.3.1	Critères de minimisation des incertitudes	148
5.3.2	Procédures associées	150
<b>5.4</b>	<b>Modélisation 2D axisymétrique de la roue</b>	<b>152</b>
5.4.1	Modèle de calcul par éléments finis	152
5.4.2	Modes propres d'interface pneu-jante 2D	153
<b>5.5</b>	<b>Application à l'identification d'un cas de gonflage</b>	<b>155</b>
5.5.1	Essais virtuels	155
5.5.2	Identification avec une instrumentation classique	156
5.5.3	Instrumentations optimisées	160
<b>5.6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>166</b>

---

## 5.1 Introduction

Les aspects théoriques et pratiques concernant la conception générale d'une expérimentation ont été synthétisés par Fisher (1935). Ses travaux ont ensuite été développés dans le domaine des statistiques et la notion de *conception optimale* d'un essai est peu à peu apparue dans la littérature (Kiefer, 1959) jusqu'à l'ouvrage de référence de Fedorov (1972). Dans le cadre de l'identification de paramètres, l'optimisation de l'essai consiste à déterminer les conditions expérimentales permettant d'*extraire le maximum d'information* par rapport aux paramètres recherchés. L'optimisation peut aussi bien porter sur les chargements appliqués lors de l'essai (Mehra, 1974; Morelli et Klein, 1990) que sur le placement de différents types de capteurs (Kammer, 1991; Wickham *et al.*, 1995) ou sur la géométrie de l'éprouvette testée (Schmaltz et Willner, 2014; Bertin *et al.*, 2016). Dans tous les cas, il s'agit de trouver la configuration pour laquelle *les incertitudes sur les paramètres à identifier sont minimales* (Kirkegaard, 1991).

La matrice de covariance associée à ces incertitudes est particulièrement intéressante puisqu'elle dépend des différents aspects du problème inverse (*i.e.*, géométrie de la structure étudiée, paramétrisation et méthode d'identification choisies, conditions aux limites appliquées, incertitudes de mesure, *etc.*). Elle fournit une estimation de la qualité de l'identification compte tenu des incertitudes de mesure et donne donc une indication sur la manière d'optimiser l'essai. La minimisation des incertitudes sur les paramètres identifiés consiste donc à « minimiser » la matrice de covariance associée. Toutefois, puisqu'elle implique plusieurs dimensions, des critères d'optimisation ont été développés afin de minimiser, de manière équivalente, une grandeur scalaire permettant de la représenter (Atkinson, 1982).

Lorsqu'on s'intéresse en particulier à l'instrumentation de l'essai, on cherche à déterminer la position et le nombre de capteurs nécessaires afin d'obtenir l'estimation la plus précise des paramètres recherchés (Masroor et Zachary, 1991). Cependant, le nombre de capteurs peut être limité (*e.g.*, contraintes économiques, limitations du système d'acquisition, *etc.*) et certaines zones de la structure peuvent être inaccessibles pour les positionner. De plus, les capteurs peuvent parfois modifier la réponse de la structure étudiée. Compte tenu de ces différentes contraintes, l'optimisation de l'instrumentation est nécessaire afin de s'assurer, en amont, que l'essai réalisé permettra d'identifier au mieux les paramètres recherchés. De nombreux travaux ont été publiés à ce sujet. On peut citer, par exemple, ceux de Kammer et Tinker (2004) sur le placement optimal d'accéléromètres pour l'identification de modes de vibration de structures spatiales ou, plus récemment, ceux de Gupta et Dhingra (2013) concernant le positionnement de jauges de déformation pour l'identification de chargements dynamiques. Ce type d'optimisation présente également un intérêt particulier pour la surveillance de l'intégrité des structures (Meo et Zumpano, 2005).

Dans le Chapitre 4, des identifications de chargements à l'interface pneu-jante à partir de mesures de champs de déplacement déjà existantes ont été présentées. Afin d'améliorer les résultats lors de futures identifications, on propose d'optimiser l'instrumentation par jauges d'extensométrie afin d'obtenir l'estimation la plus précise des paramètres de chargement. Tout d'abord, le problème d'optimisation à résoudre est présenté. Ensuite, des critères et des procédures permettant de déterminer une instrumentation optimale sont proposés. L'identification d'un cas de gonflage est alors étudiée en considérant une modélisation 2D axisymétrique de la roue. Des essais virtuels sont réalisés et les résultats d'identification obtenus avec une instrumentation classique sont détaillés. Enfin, l'instrumentation est optimisée afin de minimiser les incertitudes sur les paramètres recherchés.

## 5.2 Problématique

Dans le cadre de ces travaux de thèse, les paramètres recherchés sont les amplitudes des  $N$  modes propres d'interface pneu-jante utilisés pour décrire le chargement appliqué sur la roue par un pneumatique (cf. § 3.4). On propose désormais d'identifier ces paramètres en utilisant uniquement des mesures de déformation obtenues par un ensemble de jauges d'extensométrie judicieusement positionnées sur une surface  $\mathcal{S}$  de la roue.

On considère une jauge élémentaire positionnée sur la surface  $\mathcal{S}$  et centrée par rapport à un point de coordonnées  $\{\mathbf{x}\}$ . Cette jauge mesure une déformation notée  $e$  dans une direction spécifique  $\{\mathbf{n}\}$  (caractérisée sur la surface libre par un angle  $\alpha$ ) telle que

$$e = \{\mathbf{n}\}^\top [\boldsymbol{\varepsilon}] \{\mathbf{n}\} \quad (5.1)$$

avec  $[\boldsymbol{\varepsilon}]$  le tenseur de déformation à deux dimensions au point  $\{\mathbf{x}\}$ . La déformation peut donc être considérée comme une fonction scalaire  $e$  des coordonnées tridimensionnelles  $(\{\mathbf{x}\}, \alpha)$ . Dans la suite, ces coordonnées 3D généralisées seront toujours représentées par un vecteur  $\{\mathbf{x}\}$  afin de simplifier les notations. En appliquant chaque mode permettant de décrire le chargement recherché avec une amplitude unitaire dans le modèle linéaire de calcul par éléments finis de la roue, on obtient un champ de déformation sur la surface  $\mathcal{S}$  noté  $\{e_i(\{\mathbf{x}\})\}$  avec  $i = 1, \dots, N$ . De même, en appliquant de manière unitaire le serrage des boulons, le serrage de l'écrou de fusée et la pression d'azote, on obtient des champs de déformation élémentaires associés à ces chargements. D'après le principe de superposition, les déformations induites sur la roue par un chargement quelconque peuvent donc être approchées par une combinaison linéaire de ces champs de déformation élémentaires.

Pour mesurer l'amplitude des différents modes d'interface pneu-jante lors d'un essai, on décide de positionner  $M$  jauges de déformation sur la surface  $\mathcal{S}$  aux positions généralisées  $\{\mathbf{x}_j\}$  avec  $j = 1, \dots, M$ . On suppose que chaque jauge est affectée par un bruit blanc gaussien uniforme tel que les amplitudes des modes regroupées dans le vecteur colonne  $\{\mathbf{q}\} = \{q_1 \dots q_N\}^\top$  puissent être identifiées en minimisant la fonction coût  $\mathcal{J}_\varepsilon$  définie par

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \frac{1}{\gamma_\varepsilon^2 M} \times \sum_{j=1}^M \left( z_j - \sum_{i=1}^N q_i e_i(\{\mathbf{x}_j\}) \right)^2 \quad (5.2)$$

avec  $z_j$  la déformation mesurée par la  $j$ -ième jauge à laquelle ont été soustraites les contributions connues des serrages et de la pression d'azote. Par conséquent, en introduisant la matrice  $[\mathbf{A}]$  telle que  $A_{ji} = e_i(\{\mathbf{x}_j\})$  et en utilisant l'équation (4.21), on obtient les amplitudes modales recherchées

$$\{\mathbf{q}\} = \left( [\mathbf{A}]^\top [\mathbf{A}] \right)^{-1} [\mathbf{A}]^\top \{\mathbf{z}\} \quad \text{soit} \quad \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{A}]^\dagger \{\mathbf{z}\} \quad (5.3)$$

avec  $[\mathbf{A}]^\dagger = \left( [\mathbf{A}]^\top [\mathbf{A}] \right)^{-1} [\mathbf{A}]^\top$  la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose. La matrice de covariance des incertitudes affectant les amplitudes identifiées  $C_{ij} = \langle \delta q_i \delta q_j \rangle$ , induites par un bruit blanc de variance  $\gamma_\varepsilon^2$  sur les mesures de déformation, s'écrit alors classiquement

$$[\mathbf{C}] = \gamma_\varepsilon^2 [\mathbf{A}]^\dagger \left( [\mathbf{A}]^\dagger \right)^\top = \gamma_\varepsilon^2 \left( [\mathbf{A}]^\top [\mathbf{A}] \right)^{-1} \quad (5.4)$$

et ne dépend pas des valeurs des paramètres identifiés dans le cas linéaire.

La résolution du problème inverse détaillé précédemment permet donc de déterminer les amplitudes des modes propres d'interface pneu-jante à partir de déformations mesurées par des jauges d'extensométrie et d'estimer les incertitudes associées grâce à la matrice de covariance  $[\mathbf{C}]$ . On peut donc se poser les questions suivantes : **pour un nombre de jauges donné, où doit-on les positionner, et avec quelle orientation, pour obtenir la meilleure estimation des paramètres recherchés (*i.e.*, celle pour laquelle les incertitudes sont les plus faibles) ? Et quel est le nombre optimal de capteurs permettant d'obtenir suffisamment d'information sur ces paramètres ?**

### 5.3 Critères et procédures d'optimisation

Le problème du placement optimal de capteurs repose sur la minimisation des incertitudes associées aux paramètres recherchés. Si l'on considère un unique paramètre, le problème consiste à déterminer la position des différents capteurs afin de minimiser sa variance. Cependant, on cherche généralement à identifier plusieurs paramètres lors de la résolution d'un problème inverse. Par conséquent, l'espérance de l'estimateur associé est un vecteur et sa variance est une matrice. La minimisation de la variance n'est donc pas triviale puisqu'elle implique plusieurs dimensions. Pour mener à bien l'optimisation, il est nécessaire de *condenser l'information* contenue dans la matrice de covariance grâce à des formes statistiques plus synthétiques. On propose ainsi de détailler quelques critères utilisés dans la littérature puis de présenter des procédures permettant de les optimiser.

#### 5.3.1 Critères de minimisation des incertitudes

Les incertitudes sur les paramètres identifiés sont caractérisées par la matrice de covariance  $[\mathbf{C}]$  définie par l'équation (5.4) et ne dépendent pas des valeurs des paramètres dans le cas linéaire. Pour une variance donnée  $\gamma_\varepsilon^2$  sur les mesures, leur minimisation consiste donc à modifier la matrice  $[\mathbf{A}]$ , qui relie les paramètres recherchés aux grandeurs mesurées, afin de minimiser un critère calculé à partir de la matrice  $([\mathbf{A}]^\top[\mathbf{A}])^{-1}$ . On peut raisonner de manière équivalente en considérant l'inverse de la matrice de covariance, généralement appelée « matrice d'information de Fisher » (ou matrice hessienne), afin de simplifier les calculs. Il s'agit alors de maximiser l'information contenue dans la matrice  $[\mathcal{I}]$  définie par

$$[\mathcal{I}] \equiv [\mathbf{A}]^\top[\mathbf{A}] \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}_{ij} = \sum_{k=1}^M e_i(\{\mathbf{x}_k\})e_j(\{\mathbf{x}_k\}) \quad (5.5)$$

On rappelle qu'une manière simple permettant d'évaluer la pertinence d'un capteur en particulier est de considérer sa sensibilité par rapport aux paramètres recherchés (cf. § 4.3.1). En attribuant à chaque capteur un poids  $\omega$  (équivalent à l'inverse de l'incertitude), on peut écrire

$$\mathcal{I}_{ij} = \sum_{k=1}^M \omega_k e_i(\{\mathbf{x}_k\})e_j(\{\mathbf{x}_k\}) \quad (5.6)$$

et la sensibilité d'un capteur  $i$  peut alors être évaluée par

$$[\mathbf{s}_i] = \frac{\partial[\mathcal{I}]}{\partial\omega_i} \quad (5.7)$$

avec

$$\frac{\partial\mathcal{I}_{ij}}{\partial\omega_k} = e_i(\{\mathbf{x}_k\})e_j(\{\mathbf{x}_k\}) \quad (5.8)$$

Pour condenser l'information contenue dans la matrice  $[\mathcal{I}]$ , de nombreux critères ont été proposés dans la littérature (Atkinson, 1982). La plupart d'entre eux correspondent à des invariants de la matrice d'information, ou de son inverse, exprimés comme des combinaisons de ses valeurs propres. Mitchell (1974) s'est par exemple intéressé au déterminant de la matrice d'information afin de minimiser le « volume » des incertitudes associées aux paramètres recherchés. Masroor et Zachary (1991) ont quant à eux choisi d'étudier le conditionnement de la matrice de covariance. D'autres auteurs ont basé leurs optimisations sur la trace de l'une ou l'autre de ces matrices (Shah et Udwadia, 1977), équivalente à la variance moyenne des paramètres identifiés, ou sur la valeur propre caractérisant la direction de plus grande incertitude (Bertin *et al.*, 2016). Deux de ces critères sont détaillés ci-après : le déterminant et la direction de plus grande incertitude.

### Déterminant

L'un des critères les plus utilisés consiste à maximiser le déterminant de la matrice d'information de Fisher (Mitchell, 1974). Cela revient à minimiser le déterminant de la matrice de covariance qui représente le « volume » de l'ellipsoïde des incertitudes associées aux paramètres recherchés. Ainsi, en diagonalisant la matrice  $[\mathcal{I}]$  selon

$$[\mathcal{I}] = [\mathbf{V}][\mathbf{D}][\mathbf{V}]^T \quad (5.9)$$

avec  $[\mathbf{D}]$  une matrice diagonale regroupant les valeurs propres  $(d_1, \dots, d_N)$  et  $[\mathbf{V}]$  la matrice des vecteurs propres associés, le déterminant s'écrit

$$\det([\mathcal{I}]) = \det([\mathbf{D}]) = \prod_{i=1}^N d_i \quad (5.10)$$

Pour le maximiser, l'optimisation consiste à ajouter, supprimer ou modifier des capteurs à partir d'une instrumentation initiale. Cela revient donc à altérer les lignes  $\{\mathbf{a}_i\}^T$  de la matrice  $[\mathbf{A}]$ , qui relie les paramètres recherchés aux grandeurs mesurées. En ajoutant ou en supprimant un capteur à la position  $\{\mathbf{x}_i\}$  à une instrumentation initiale composée de  $M$  capteurs, caractérisée par la matrice d'information  $[\mathcal{I}_M]$ , on remarque (Dykstra, 1971) que le déterminant de la nouvelle configuration s'exprime simplement par

$$\det([\mathcal{I}_{M\pm 1}]) = \det([\mathcal{I}_M]) \times (1 \pm v(\{\mathbf{x}_i\})) \quad (5.11)$$

où  $v(\{\mathbf{x}_i\})$  correspond à la variance (à un facteur  $\gamma_\epsilon^2$  près) de la grandeur prédite au point  $\{\mathbf{x}_i\}$  pour une instrumentation composée de  $M$  capteurs

$$v(\{\mathbf{x}_i\}) = \{\mathbf{a}_i\}^T \left( [\mathbf{A}_M]^T [\mathbf{A}_M] \right)^{-1} \{\mathbf{a}_i\} \quad (5.12)$$

L'optimisation consiste alors à ajouter un capteur à la position où la variance  $v$  est maximale (*i.e.*, où le manque d'information est le plus important) ou à supprimer le capteur où celle-ci est minimale. Kiefer et Wolfowitz (1960) ont d'ailleurs démontré l'équivalence entre les critères de maximisation du déterminant de la matrice d'information (D-optimalité) et de minimisation de la variance maximale des grandeurs prédites (G-optimalité).

On peut également imaginer échanger un capteur de l'instrumentation initiale à la position  $\{\mathbf{x}_i\}$  avec un candidat à la position  $\{\mathbf{x}_j\}$  (Fedorov, 1972). Dans ce cas, le déterminant de la nouvelle configuration, caractérisée par la matrice d'information  $[\mathcal{I}_{M'}]$ , s'écrit

$$\det([\mathcal{I}_{M'}]) = \det([\mathcal{I}_M]) \times (1 + \Delta(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{x}_j\})) \quad (5.13)$$

avec

$$\Delta(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{x}_j\}) = v(\{\mathbf{x}_j\}) - [v(\{\mathbf{x}_i\})v(\{\mathbf{x}_j\}) - v(\{\mathbf{x}_i, \{\mathbf{x}_j\})^2] - v(\{\mathbf{x}_i\}) \quad (5.14)$$

et l'optimisation consiste à échanger la paire de capteurs associée à la plus grande valeur  $\Delta$ . Par ailleurs, on note que l'utilisation du déterminant comme critère d'optimisation nécessite la mise à jour de la matrice d'information à chaque modification de l'instrumentation.

### Direction de plus grande incertitude

Un autre critère envisageable consiste à minimiser la plus grande valeur propre de la matrice de covariance associée à la direction de plus grande incertitude (*i.e.*, la longueur du plus grand demi-axe de l'ellipsoïde des incertitudes). Il s'agit donc de maximiser la plus petite valeur propre de la matrice d'information. En notant  $\{\boldsymbol{\varphi}\}$  la direction associée dans l'espace des paramètres, le critère consiste à maximiser la quantité  $\mathcal{I}_\varphi$  définie par

$$\mathcal{I}_\varphi = \{\boldsymbol{\varphi}\}^\top [\mathcal{I}] \{\boldsymbol{\varphi}\} = \sum_k \omega_k f(\{\mathbf{x}_k\})^2 \quad (5.15)$$

avec

$$f(\{\mathbf{x}_k\}) = \sum_i \varphi_i e_i(\{\mathbf{x}_k\}) \quad (5.16)$$

pour un nombre de mesures défini par  $\sum_k \omega_k$  (avec  $\omega_k \leq 1$ ). Il suffit alors de réduire progressivement le poids  $\omega$  attribué aux capteurs situés dans les zones où  $f^2$  est minimale, de mettre à jour la matrice d'information puis de recalculer la direction de plus grande incertitude. On remarque que ce critère peut être étendu à toute direction définie dans l'espace des paramètres. Pour une direction  $\{\boldsymbol{\varphi}\}$  constante, l'optimisation consiste simplement à filtrer les régions où  $f^2$  est maximale.

### 5.3.2 Procédures associées

Pour déterminer le placement optimal de  $M$  capteurs sur une surface potentielle  $\mathcal{S}$  de la structure étudiée, les critères présentés précédemment doivent être maximisés. Une procédure relativement simple pour mener à bien l'optimisation consiste à partir d'une large population de  $M_{tot}$  capteurs potentiels et à *supprimer* progressivement le capteur le moins utile jusqu'à atteindre le nombre  $M$  de capteurs souhaité. On peut également envisager la procédure complémentaire consistant à *ajouter* successivement des capteurs à partir d'une instrumentation initiale. Lorsqu'un critère unidirectionnel est utilisé, le choix est trivial puisque chaque capteur est caractérisé par la grandeur  $f^2$ . Il suffit alors de supprimer (resp. ajouter) le capteur pour lequel celle-ci est minimale (resp. maximale). On peut également envisager de déplacer progressivement un capteur en considérant le gradient  $\nabla(f^2)$ . Pour le critère basé sur la direction de plus grande incertitude, le principe est identique mais la direction  $\{\boldsymbol{\varphi}\}$  doit être mise à jour à chaque itération. Pour le critère basé sur le déterminant de la matrice d'information, on procède de manière analogue en considérant la variance  $v$  associée à chaque capteur.

Avec ces deux procédures, il est possible d'alterner entre l'ajout et la suppression d'un capteur afin de faire converger le critère choisi et de conduire la population vers une répartition optimale. Les procédures basées sur ce principe sont connues sous le nom d'*algorithmes d'échange* dans la littérature. Pour les utiliser, la première étape consiste à choisir un ensemble initial de  $M$  capteurs parmi une liste de  $M_{tot}$  candidats potentiels. L'*algorithme d'échange séquentiel* (Wynn, 1970 ; Dykstra, 1971) alterne ensuite entre l'ajout et la suppression d'un capteur à chaque itération jusqu'à convergence du critère choisi. Un  $(M + 1)$ -ième capteur est tout d'abord ajouté afin de maximiser la valeur du critère puis le capteur de la nouvelle instrumentation ayant le moins d'influence est supprimé. Les opérations peuvent aussi être réalisées dans le sens contraire (Van Schalkwyk, 1971).

Il est également possible de procéder à un échange direct entre une paire de capteurs à chaque itération, en particulier lorsque le déterminant de la matrice d'information est utilisé comme critère. L'algorithme de Fedorov (1972) étudie ainsi toutes les paires d'échange possibles entre les  $M$  capteurs de la configuration initiale et les  $M_r = M_{tot} - M$  candidats potentiels restants puis procède à l'échange permettant de maximiser la grandeur  $\Delta$  définie par l'équation (5.14). La matrice d'information est ensuite mise à jour et la procédure est répétée jusqu'à convergence du critère. Cependant, cet algorithme est relativement lent puisqu'il requiert  $M \times M_r$  comparaisons à chaque itération pour finalement ne procéder qu'à un seul échange. Cook et Nachtsheim (1980) ont proposé un *algorithme de Fedorov modifié* plus rapide que l'original et dans lequel chaque itération est divisée en  $M$  étapes. A une itération donnée, le premier capteur de l'instrumentation actuelle est sélectionné et les paires d'échange entre ce capteur et les  $M_r$  candidats potentiels sont étudiées. La paire maximisant le critère est échangée, la matrice d'information est mise à jour, et l'opération est répétée sur les  $M - 1$  capteurs restants. L'algorithme permet ainsi de réaliser  $M$  échanges à chaque itération et ce jusqu'à convergence du critère.

Pour accélérer la procédure, une autre possibilité consiste à n'échanger que les  $K$  capteurs les moins « utiles » à chaque itération. On parle alors d'*algorithme de  $K$ -échange* (Galil et Kiefer, 1980 ; Johnson et Nachtsheim, 1983). Pour  $K = 1$  (resp.  $K = M$ ), on retrouve l'*algorithme d'échange séquentiel* (resp. l'*algorithme de Fedorov modifié*) décrit précédemment. Le choix de la valeur  $K$  n'est pas trivial et est souvent dépendant du problème considéré (Meyer et Nachtsheim, 1995). Une version améliorée de cet algorithme, nommé *algorithme de  $KL$ -échange*, a été proposée par Atkinson et Donev (1989) et consiste, comme précédemment, à n'échanger que les  $K$  capteurs les moins pertinents à chaque itération mais en considérant uniquement une liste de  $L \leq M_r$  candidats potentiels.

Les algorithmes présentés correspondent à des techniques d'optimisation non-linéaire et il n'est donc pas garanti qu'ils convergent vers l'optimum global recherché. Néanmoins, ces algorithmes se révèlent particulièrement efficaces en pratique. Pour s'assurer que la solution obtenue est proche de l'optimum global, différentes initialisations peuvent être testées afin de vérifier la stabilité de la solution. Par ailleurs, l'un des points faibles de ces approches est qu'elles dépendent fortement du modèle utilisé, l'optimisation étant menée pour obtenir l'estimation la plus précise de celui-ci. Par conséquent, une modification de sa paramétrisation conduira probablement à une instrumentation optimale différente des précédentes. Pour minimiser l'impact du biais introduit par un modèle « simplifié » DuMouchel et Jones (1994) ont proposé une *modification bayésienne* des algorithmes précédents. Le placement de capteurs déterminé avec cette technique permet non seulement d'identifier au mieux les paramètres recherchés mais aussi de prendre en compte l'effet de paramètres supplémentaires, d'ordre supérieur, non inclus dans le modèle initial.

## 5.4 Modélisation 2D axisymétrique de la roue

Afin d'identifier au mieux les chargements appliqués sur la roue lors du gonflage d'un pneumatique, on propose de déterminer le placement optimal d'un certain nombre de jauges d'extensométrie. Dans cette partie, le modèle 2D de calcul par éléments finis utilisé est tout d'abord présenté puis les modes propres statiques d'interface pneu-jante associés, permettant d'approcher le chargement recherché, sont illustrés.

### 5.4.1 Modèle de calcul par éléments finis

Compte tenu de la nature du chargement recherché, on utilise un modèle de calcul par éléments finis linéaire 2D axisymétrique, illustré sur la Figure 5.1, pour simuler le comportement mécanique de la roue. Ce modèle contient les deux demi-roues (intérieure et extérieure) et la bague d'interposition. La zone d'assemblage boulonné est simplifiée et on considère une liaison parfaite entre les demi-roues. Les propriétés des matériaux utilisés sont celles d'un alliage d'aluminium avec un comportement élastique linéaire pour les demi-roues et d'un composite pour la bague d'interposition. Le maillage est réalisé avec des éléments quadratiques axisymétriques et comporte environ 5700 nœuds et 2500 éléments. Les conditions aux limites appliquées consistent en un encastrement des surfaces d'appui des cuvettes de roulements au niveau du moyeu de la roue. Les chargements appliqués comprennent la pression d'azote et les chargements de contact à l'interface pneu-jante.

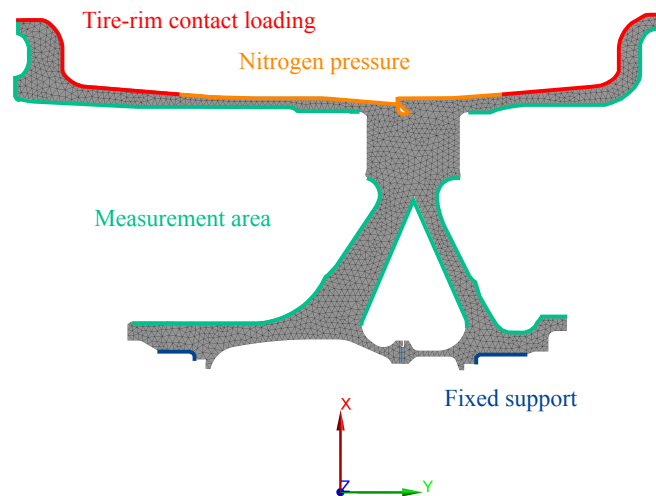


FIGURE 5.1 – Modèle éléments finis 2D axisymétrique de la roue

Pour identifier les chargements à l'interface pneu-jante, des jauges d'extensométrie sont positionnées sur une surface  $\mathcal{S}$  de la roue, illustrée en turquoise sur la Figure 5.1. On précise que la zone d'application des chargements de contact pneu-jante (indiquée en rouge) est volontairement exclue de cette surface potentielle de placement des jauges. En effet, son instrumentation est particulièrement difficile et requiert généralement l'application d'un revêtement protecteur pour éviter l'arrachement des jauges lors du montage du pneumatique sur la roue. La zone d'application de la pression d'azote (indiquée en orange) n'est également pas considérée en raison du post-traitement spécifique des déformations mesurées dans cette zone (Jansen, 1997). Enfin, puisque la zone d'assemblage boulonné est simplifiée dans le modèle, elle ne sera également pas considérée pour le placement des jauges.

### 5.4.2 Modes propres d'interface pneu-jante 2D

Les paramètres à identifier lors de la résolution du problème inverse correspondent aux amplitudes des modes propres statiques d'interface pneu-jante utilisés pour approximer le chargement appliqué sur la roue par un pneumatique. Ces modes sont obtenus en appliquant la méthodologie détaillée au § 3.4.2 au modèle de calcul par éléments finis 2D axisymétrique présenté précédemment. La Figure 5.2 illustre ainsi la déformée de la roue associée à l'application unitaire de chacun des 8 premiers modes propres d'interface pneu-jante, ordonnés par valeurs propres croissantes.

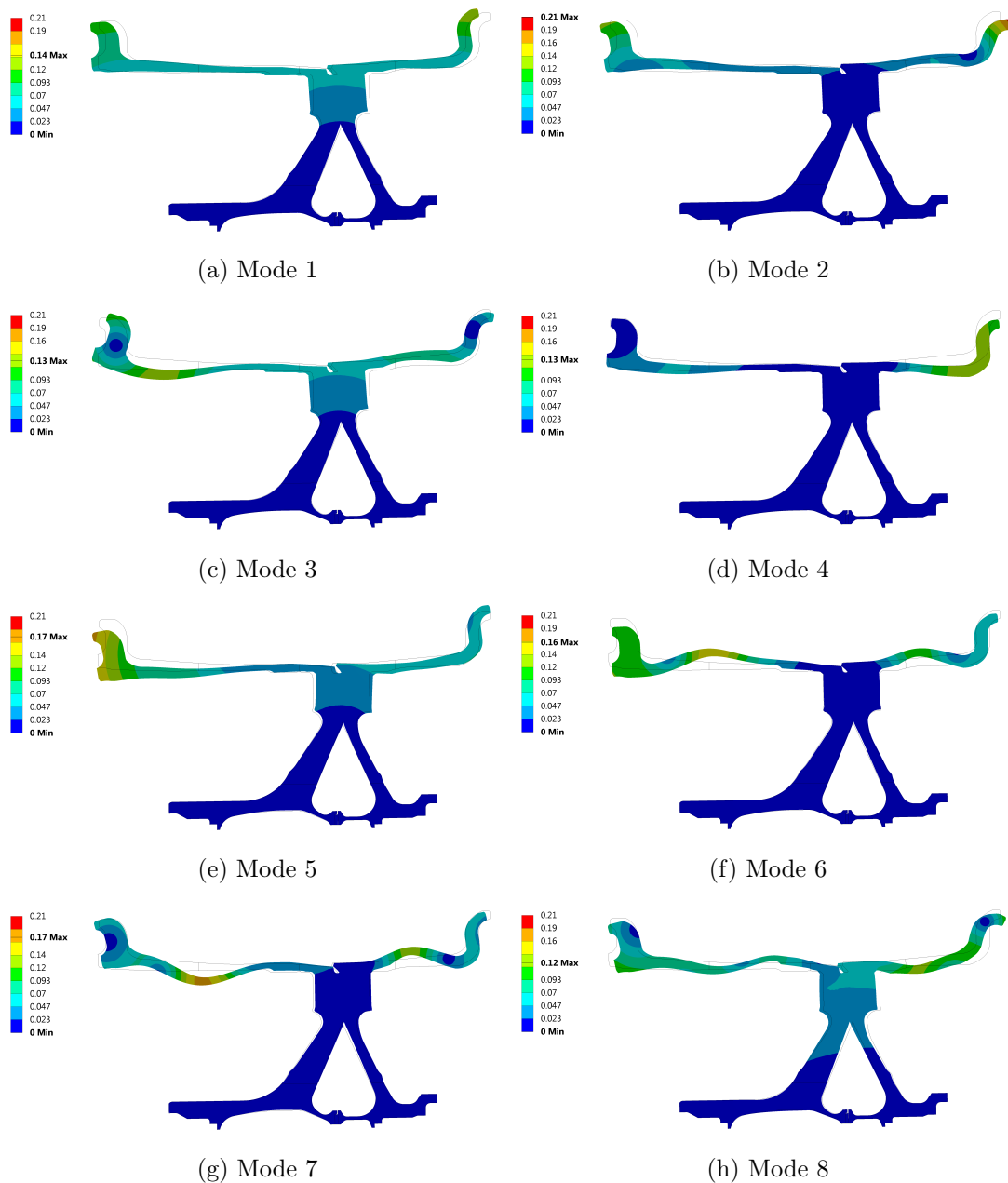


FIGURE 5.2 – Déformée de la roue pour les 8 premiers modes propres d'interface pneu-jante 2D (facteur d'échelle  $\times 100$ ) – Norme du déplacement (mm)

Les premiers modes exhibent des comportements globaux. On constate que les modes 1 et 2 sont principalement axiaux tandis que le mode 3 (resp. 4) est essentiellement radial pour le côté intérieur (resp. extérieur) et mixte pour le côté extérieur (resp. intérieur). Plus l'ordre du mode considéré est élevé, plus la déformée de la jante correspondante est locale. Par exemple, pour les modes 9 et 10, non représentés ici, les deux côtés de la roue sont complètement découplés. Par ailleurs, une étude a permis de montrer que les modes associés aux plus faibles valeurs propres n'étaient pas très sensibles à la variation de la taille de maille : ils sont donc stables. De plus, ces modes sont globalement cohérents avec ceux obtenus sur le modèle éléments finis 3D pour l'harmonique 0 (cf. § 3.4.4).

La base des modes propres de la roue à son interface avec le pneumatique ayant été déterminée, tout chargement appliqué sur celle-ci peut être décomposé sur cette base. Afin de limiter le nombre de paramètres recherchés lors de futures identifications, il est nécessaire de réduire le nombre de modes conservés. Pour ce faire, on considère de nouveau les pneumatiques radiaux A2 et C3 étudiés au § 3.4.6 qui peuvent tous les deux être montés sur la roue étudiée. En projetant les chargements de gonflage associés (cf. Figures 3.52–3.53), fournis par les pneumaticiens, sur la base des modes propres d'interface 2D et en utilisant l'équation (3.35), on obtient les répartitions de l'énergie de déformation élastique sur l'ensemble des modes illustrées sur la Figure 5.3.

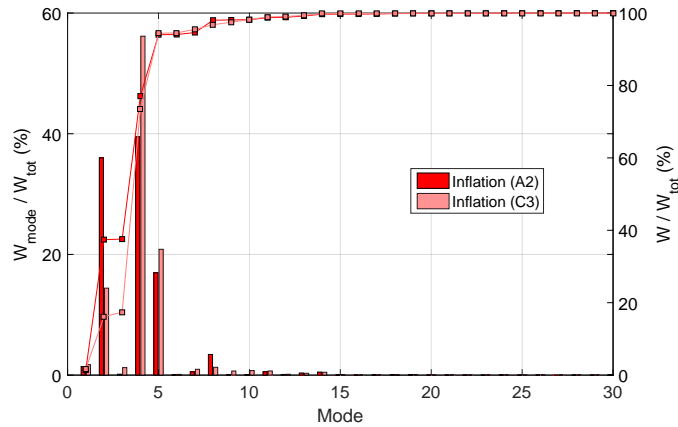


FIGURE 5.3 – Contribution énergétique des modes propres statiques d'interface pneu-jante 2D pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3

On constate que les modes excités par les deux pneumatiques sont similaires et d'ordre faible. En les réordonnant par contribution énergétique décroissante, on obtient, pour chaque pneu, les modes dominants présentés dans le Tableau 5.1. L'utilisation du critère de sélection défini par l'équation (3.36) montre que 99% de l'énergie de déformation élastique totale introduite par le cas de gonflage du pneu A2 (resp. C3) est conservée avec les 13 (resp. 11) premiers modes dominants.

Pneu	Numéros des modes dominants
A2	4 – 2 – 5 – 8 – 1 – 11 – 7 – 14 – 13 – 3 – 12 – 18 – 10 – ...
C3	4 – 5 – 2 – 1 – 8 – 3 – 7 – 10 – 11 – 9 – 14 – 13 – 12 – ...

TABLEAU 5.1 – Modes 2D dominants pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3

On note que les classements sont différents entre les deux pneumatiques. Néanmoins, parmi les 13 premiers modes dominants du pneu A2, 12 sont strictement identiques à ceux du pneu C3. Une base réduite composée de ces 12 modes communs, indiqués en gras dans le Tableau 5.1, suffirait donc à approcher les chargements de gonflage appliqués à la roue par ces deux pneumatiques. On peut dès lors supposer que cette base permettrait d'approcher n'importe quel chargement de gonflage appliqué sur la roue. Par conséquent, seules les amplitudes de ces 12 modes seront recherchées lors de futures identifications. Ces modes seront numérotés de 1 à 12 et ordonnés par valeur propre croissante dans la suite.

## 5.5 Application à l'identification d'un cas de gonflage

### 5.5.1 Essais virtuels

On propose de réaliser des essais virtuels en utilisant les chargements de gonflage des pneumatiques A2 et C3 fournis par les pneumaticiens puis d'identifier ces chargements par méthode inverse à partir de mesures de déformation sur la roue et de la paramétrisation basée sur les modes propres d'interface pneu-jante. Pour générer des mesures virtuelles, ces chargements et la pression d'azote associée (respectivement égale à 14,8 et 14,7 bar) sont imposés dans le modèle de calcul par éléments finis 2D axisymétrique puis les déformations obtenues en différents points de la roue sont simplement post-traitées (*i.e.*, les déformations ne sont pas moyennées sur la surface potentielle de la jauge et aucun bruit n'est ajouté). La Figure 5.4 illustre ainsi la déformée de la roue pour chacun des chargements appliqués.

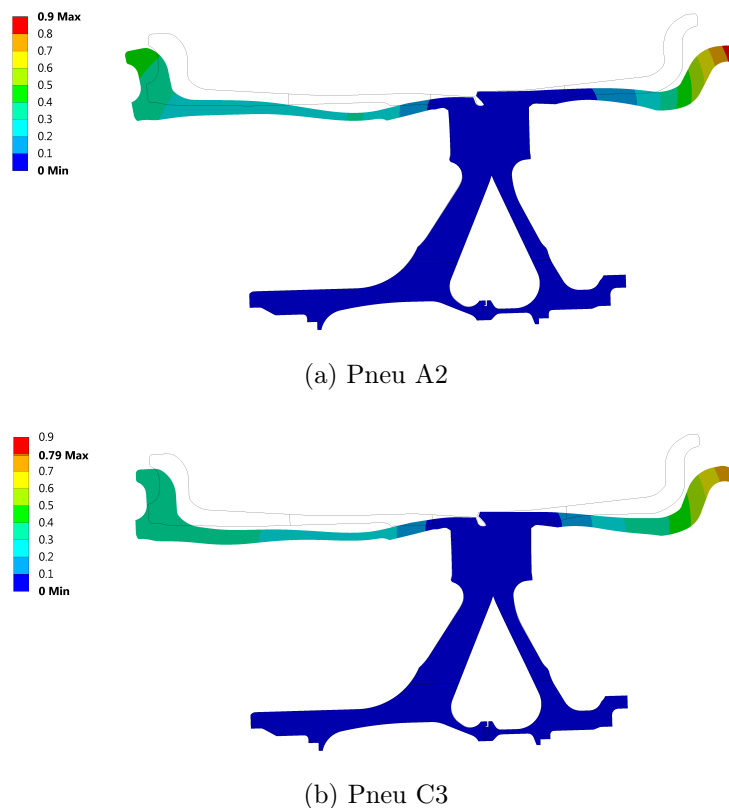


FIGURE 5.4 – Déformée de la roue pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3 (facteur d'échelle  $\times 50$ ) – Norme du déplacement (mm)

On remarque que les déformées de la roue sont bien différentes pour les deux pneumatiques. Le déplacement radial au niveau du *bead seat* est plus élevé avec le pneu C3 tandis que la flexion des bourrelets est plus importante avec le pneu A2. Ceci est cohérent avec la forme des champs de pression à l'interface pneu-jante fournis par les pneumaticiens (cf. Figures 3.52–3.53). A partir de ces essais virtuels, l'objectif des futures identifications inverses est de déterminer le plus précisément possible les amplitudes des 12 modes propres d'interface pneu-jante retenus pour approcher les chargements. Les valeurs de référence de ces amplitudes, qui doivent être retrouvées, sont définies par projection des chargements fournis par les pneumaticiens sur la base des modes propres d'interface pneu-jante en utilisant l'équation (3.29) et sont illustrées sur la Figure 5.5. Les modes étant classés par valeurs propres croissantes, les amplitudes des premiers sont plus élevées que celles des derniers. Ces amplitudes permettent néanmoins de différencier les deux pneumatiques étudiés.

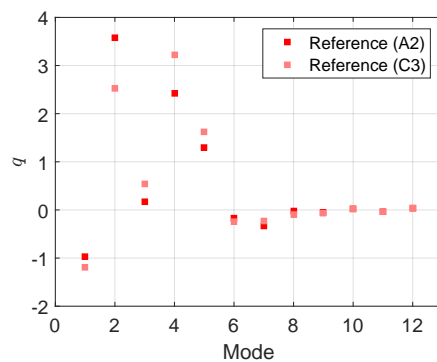


FIGURE 5.5 – Amplitudes modales de référence pour les cas de gonflage des deux pneumatiques A2 et C3

### 5.5.2 Identification avec une instrumentation classique

L'instrumentation par jauges d'extensométrie réalisée pour les essais présentés au Chapitre 2 est tout d'abord considérée pour mener une première identification des chargements recherchés. Celle-ci est de nouveau illustrée sur la Figure 5.6. On représente uniquement une section de la roue puisque les positions des jauges sont redondantes dans les autres sections et que le chargement recherché est axisymétrique.

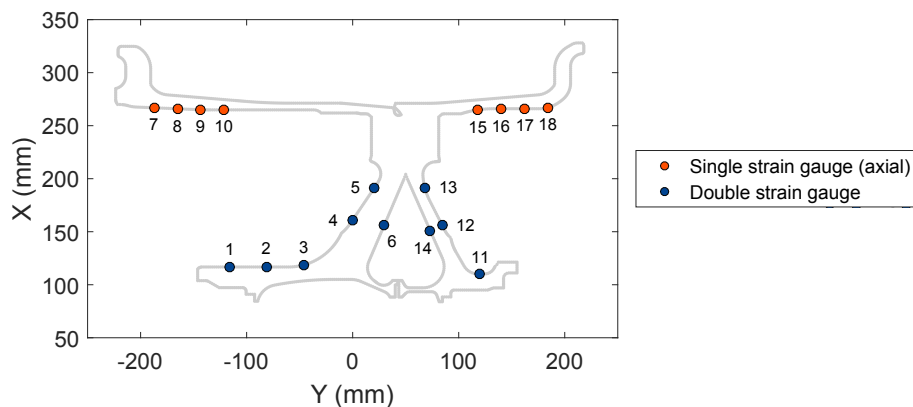


FIGURE 5.6 – Instrumentation classique d'une section de la roue testée

Cette instrumentation est composée de 18 jauges, dont 10 jauges doubles et 8 jauges simples, pour un total de  $M = 28$  mesures de déformation. Pour chaque jauge, la direction de mesure axiale (resp. circonférentielle) est définie par la tangente à la roue dans le plan  $X - Y$  (resp.  $X - Z$ ) à la position de la jauge considérée. Les déformations virtuelles obtenues aux positions des jauges pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3 sont illustrées sur la Figure 5.7 et attestent de nouveau de leurs différences de comportement.

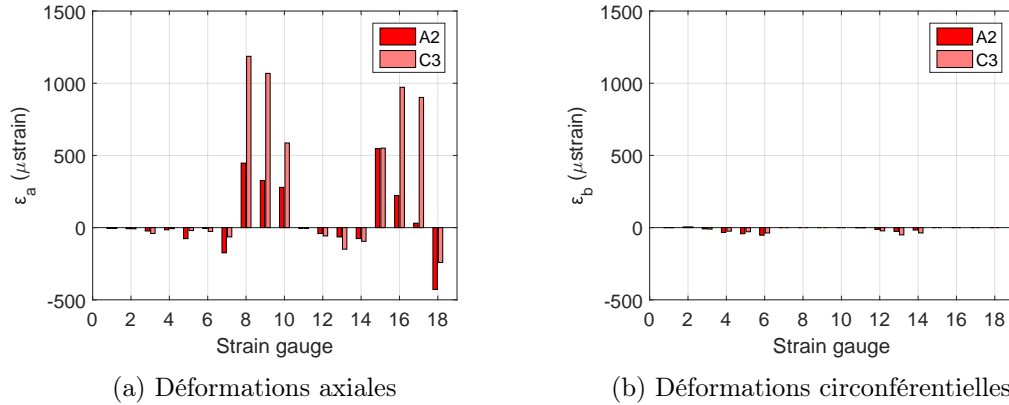


FIGURE 5.7 – Déformations aux positions des jauges pour les cas de gonflage étudiés

On rappelle que cette instrumentation n'a pas été conçue spécifiquement pour l'identification des chargements à l'interface pneu-jante, le positionnement des différentes jauges étant généralement déterminé à la suite de la localisation des points critiques de la roue par calculs éléments finis. Néanmoins, une identification des 12 amplitudes modales recherchées peut être réalisée avec ces mesures afin de vérifier si elles sont suffisantes ou non. Pour ce faire, on construit tout d'abord la matrice  $[\mathbf{A}]$  définie au § 5.2. Chaque colonne est obtenue en imposant de manière unitaire l'un des 12 modes propres d'interface pneu-jante sélectionnés dans le modèle de calcul par éléments finis et en post-traitant les déformations aux positions des jauges dans les différentes directions. La matrice  $[\mathbf{A}]$  obtenue pour l'instrumentation étudiée est illustrée sur la Figure 5.8 et contient ainsi  $M = 28$  lignes et  $N = 12$  colonnes. Les premières (resp. dernières) lignes correspondent aux déformations dans la direction axiale (resp. circonférentielle) des jauges considérées. Les modes étant classés par valeurs propres croissantes, on constate que les déformations induites par les derniers modes sont plus élevées que pour les premiers.

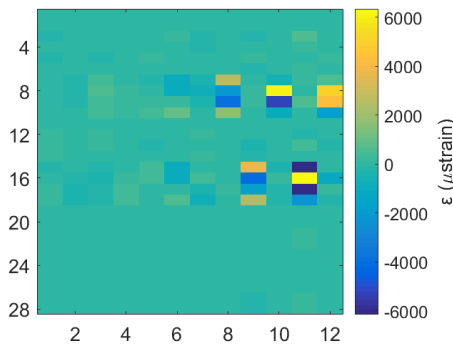


FIGURE 5.8 – Matrice  $[\mathbf{A}]$  pour une instrumentation classique

En considérant un écart-type  $\gamma_\varepsilon = 10 \mu$  def sur les mesures de déformation, on peut alors déterminer la matrice de covariance des paramètres  $[\mathbf{C}]$  grâce à l'équation (5.4) avant même de procéder à l'identification (Figure 5.9).

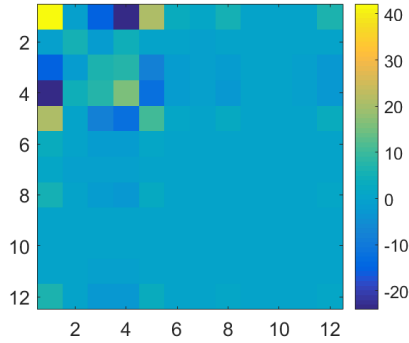


FIGURE 5.9 – Matrice de covariance des paramètres  $[\mathbf{C}]$  pour une instrumentation classique

Les termes diagonaux de la matrice de covariance, qui correspondent aux carrés des écarts-types des erreurs d'estimation des paramètres pris indépendamment ( $\gamma_k = \sqrt{C_{kk}}$ ), indiquent que les incertitudes sont particulièrement élevées pour les amplitudes des 5 premiers modes propres dominants. Quel que soit le résultat de l'identification, on constate donc que les paramètres obtenus seront peu fiables. Pour illustrer cet effet, on résout le problème inverse grâce à l'équation (5.3) pour les deux essais virtuels générés et on compare les amplitudes modales identifiées à celles de référence sur la Figure 5.10. Les barres d'erreur correspondent à la prise en compte des écarts-types  $\gamma_k$  pour chaque paramètre.

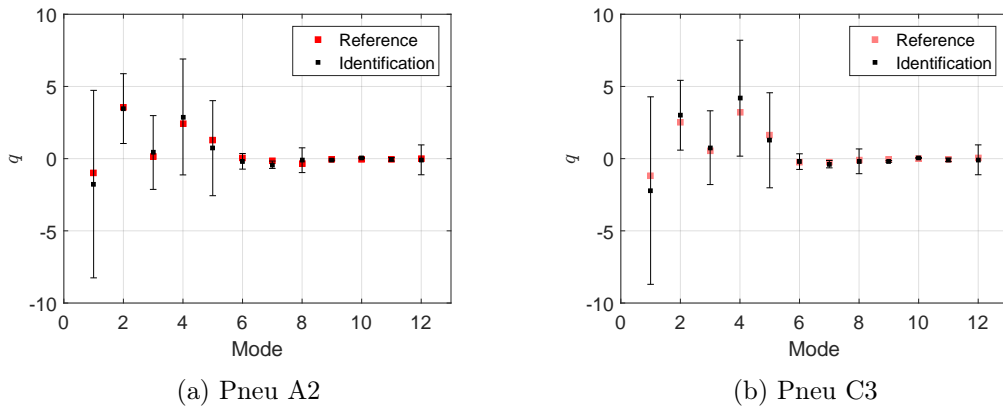


FIGURE 5.10 – Comparaison entre les amplitudes modales de référence et celles identifiées avec une instrumentation classique pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3

On constate que les amplitudes identifiées sont très proches de leurs valeurs de référence dans les deux cas. On pourrait donc considérer que l'instrumentation est suffisante pour identifier correctement les paramètres recherchés. Cependant, ces résultats s'expliquent par le fait que le même modèle a été utilisé pour construire le problème inverse et générer les mesures virtuelles, les différences étant uniquement dues à la troncature de la base de modes effectuée pour approcher les chargements. Ce phénomène est connu sous le nom de *crime inverse* dans la littérature (Kaipio et Somersalo, 2005) et peut ainsi conduire à des résultats trop optimistes par rapport à la réalité.

Néanmoins, les incertitudes associées aux paramètres montrent clairement que les résultats ne sont pas satisfaisants. En effet, elles indiquent que si les mesures de déformation générées étaient légèrement bruitées ( $\gamma_\varepsilon = 10 \mu\text{def}$ ) alors les amplitudes obtenues seraient bien différentes et très éloignées de leurs valeurs de référence en raison du mauvais conditionnement du problème. Par ailleurs, la matrice de covariance n'est pas diagonale et montre que des couplages existent entre les paramètres. Un autre indicateur permettant de visualiser ces couplages est la matrice de corrélation  $[\mathbf{R}]$  définie par

$$R_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}} \quad (5.17)$$

Les termes diagonaux de cette matrice sont égaux à 1 car chaque paramètre est parfaitement corrélé avec lui-même tandis que les termes hors-diagonale varient entre -1 et 1 et indiquent le degré de dépendance linéaire des paramètres. La matrice de corrélation obtenue est représentée sur la Figure 5.11.

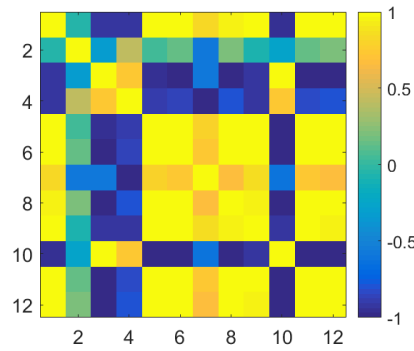


FIGURE 5.11 – Matrice de corrélation des paramètres  $[\mathbf{R}]$  pour une instrumentation classique

On constate que les paramètres sont fortement corrélés ou anti-corrélés, les corrélations pour chaque paire de paramètres caractérisant l'inclinaison de l'ellipsoïde des incertitudes dans l'espace des paramètres. Par conséquent, les paramètres ne peuvent pas être considérés comme indépendants et l'écart-type  $\gamma_k$  défini précédemment n'est pas le plus adapté pour représenter les incertitudes. Pour prendre en compte les variations de l'ensemble des paramètres, il est nécessaire de considérer les directions principales de l'ellipsoïde des incertitudes (Gras *et al.*, 2015c). En diagonalisant la matrice d'information selon l'équation (5.9), la variance de l'amplitude du  $k$ -ième vecteur propre s'écrit

$$\tau_k^2 = \frac{\gamma_\varepsilon^2}{D_{kk}} \quad (5.18)$$

et l'écart-type  $\tau_k$  caractérise donc la longueur du  $k$ -ième demi-axe de l'ellipsoïde des incertitudes. L'instrumentation classique présentée sur la Figure 5.6 n'étant clairement pas adaptée à l'identification des paramètres de chargement recherchés, on propose dans la suite de définir une instrumentation optimale à partir des critères et des procédures d'optimisation proposées au § 5.3.

### 5.5.3 Instrumentations optimisées

Afin d'optimiser l'instrumentation pour identifier au mieux les 12 amplitudes modales recherchées, on considère un ensemble de 148 jauges doubles potentielles permettant de couvrir la totalité de la zone de mesure retenue. Ces jauges sont représentées sur la Figure 5.12 et constituent un total de  $M_{tot} = 296$  « points » de mesure.

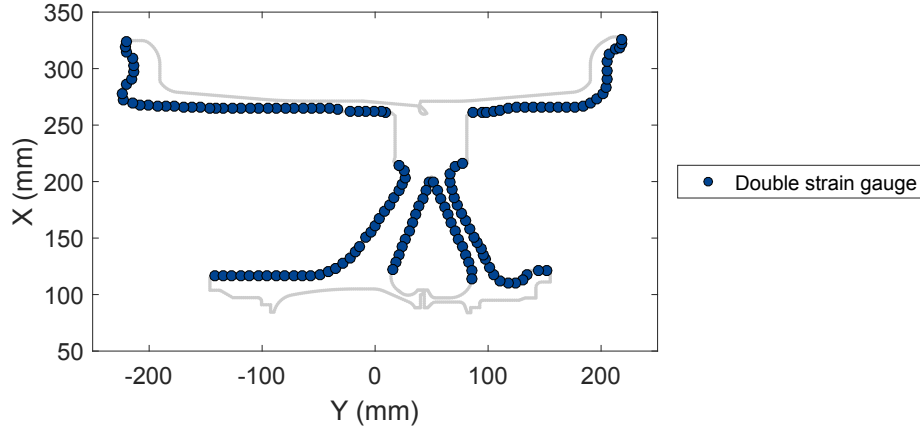


FIGURE 5.12 – Positions des 148 jauges potentielles pour l'identification des chargements

On propose de réaliser plusieurs optimisations de l'instrumentation en considérant les deux critères détaillés au § 5.3 : le déterminant de la matrice d'information et la direction de plus grande incertitude. Les résultats obtenus pour chaque critère sont présentés successivement et plusieurs algorithmes d'optimisation sont évalués. Dans tous les cas, on conservera au minimum  $M = 12$  mesures pour calculer les 12 paramètres recherchés.

#### Critère basé sur le déterminant

Afin de maximiser le déterminant de la matrice d'information pour un nombre de mesures fixé, l'algorithme le plus simple consiste à partir des  $M_{tot} = 296$  points de mesure potentiels (Figure 5.12) et à supprimer successivement le point où la variance  $v$  définie par l'équation (5.12) est minimale. La Figure 5.13 illustre la diminution du déterminant de la matrice d'information en fonction du nombre d'itérations. Le calcul ne prend que quelques secondes à résoudre en raison de la taille et de la linéarité du modèle utilisé.

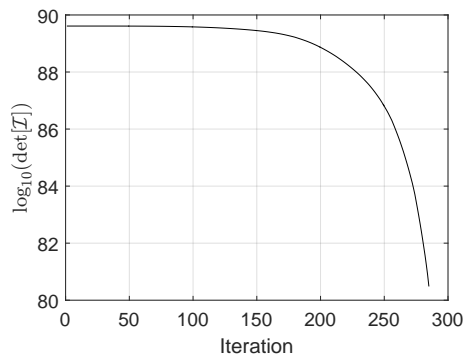


FIGURE 5.13 – Évolution du déterminant de la matrice d'information en fonction du nombre d'itérations

En arrêtant l'algorithme de manière à conserver  $M = 12$  points de mesure, on obtient l'instrumentation illustrée sur la Figure 5.14. On constate que toutes les jauges retenues sont positionnées sur la jante de la roue. Ce résultat était prévisible compte tenu de la sensibilité de cette zone à la répartition locale du chargement à l'interface pneu-jante. Néanmoins, on remarque que les 12 jauges sélectionnées sont réparties de manière uniforme sur la jante. De plus, elles mesurent toutes une déformation dans la direction axiale à l'exception de celle positionnée à l'extrémité du bourrelet de la demi-roue extérieure.

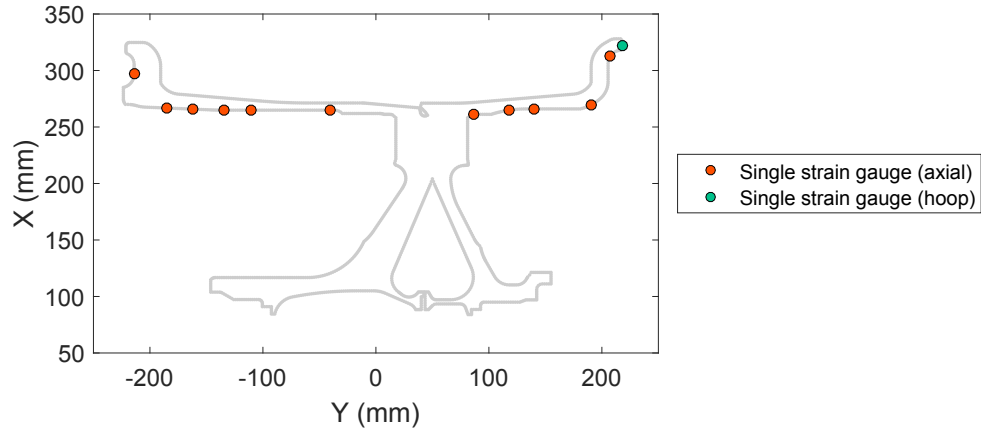


FIGURE 5.14 – Positions des 12 jauges retenues pour l'instrumentation optimisée #1

On peut alors déterminer les matrices de covariance et de corrélation des paramètres recherchés pour cette nouvelle instrumentation (Figure 5.15).

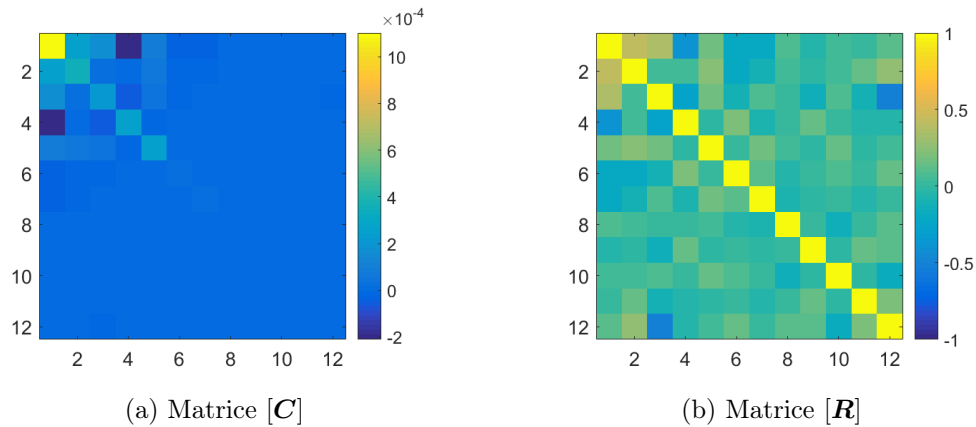


FIGURE 5.15 – Matrices de covariance et de corrélation des paramètres pour l'instrumentation optimisée #1

On constate que les incertitudes sur les paramètres ont été fortement diminuées par rapport à l'instrumentation classique étudiée précédemment (Figure 5.9). De plus, la plupart des couplages entre les différents paramètres ont été supprimés. Tous les coefficients de corrélation hors-diagonale sont en effet inférieurs ou égaux à 0,5. En considérant que des mesures ont été obtenues aux positions des jauges retenues après optimisation lors des deux essais virtuels générés, on peut résoudre le problème inverse et comparer les amplitudes modales obtenues à leurs valeurs de référence sur la Figure 5.16. On remarque que les différences sont très faibles et que chaque amplitude est obtenue avec une grande précision.

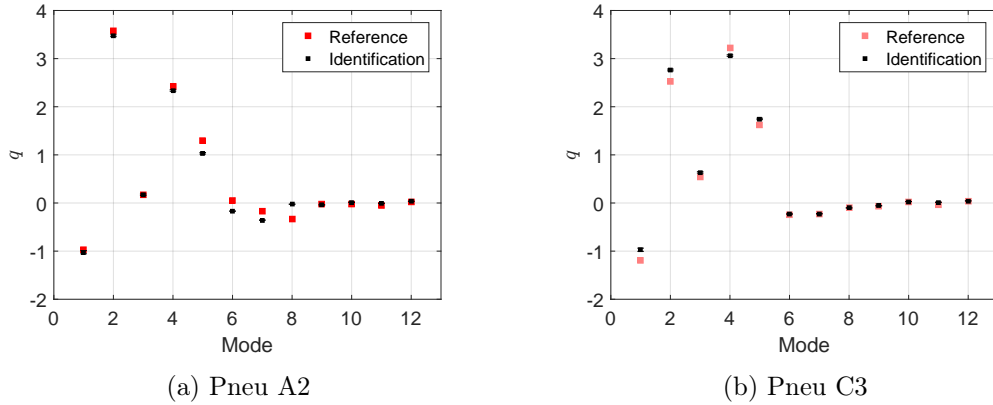


FIGURE 5.16 – Comparaison entre les amplitudes modales de référence et celles identifiées avec l'instrumentation optimisée #1 pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3

L'algorithme d'échange séquentiel consistant à ajouter et à supprimer un capteur à chaque itération (cf. § 5.3.2) a également été testé. Cependant, il s'est révélé particulièrement sensible au choix initial des  $M = 12$  capteurs nécessaires à son exécution. En effectuant plusieurs optimisations avec différentes initialisations aléatoires, une valeur de déterminant de la matrice d'information supérieure à celle obtenue avec l'instrumentation optimisée #1 (*i.e.*,  $\log_{10}(\det([\mathcal{I}])) = 80,54$  contre  $80,48$ ) a néanmoins pu être obtenue, représentant ainsi une différence d'environ 12%. Toutefois, l'instrumentation résultante illustrée sur la Figure 5.17 diffère de la précédente uniquement pour une jauge de la demi-roue extérieure dont la nouvelle position est immédiatement voisine à sa position antérieure.

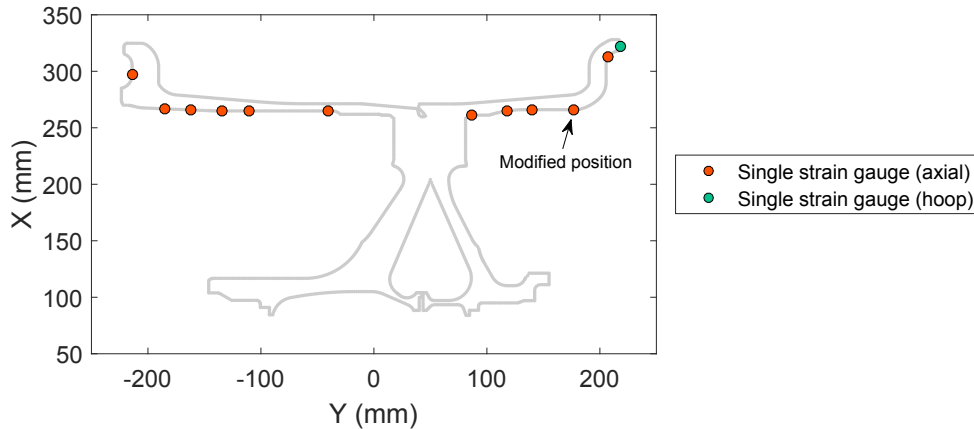


FIGURE 5.17 – Positions des 12 jauges retenues pour l'instrumentation optimisée #2

Enfin, l'algorithme de Fedorov modifié a été évalué. Cet algorithme permet d'effectuer des échanges directs entre des paires de capteurs à chaque itération au lieu de procéder de manière séquentielle. Quelle que soit l'initialisation choisie, l'algorithme démontre une robustesse lui permettant de ne pas rester « piégé » dans un minimum local très éloigné du minimum global recherché. De plus, la valeur du déterminant de la matrice d'information a encore pu être augmentée d'environ 2% par rapport à l'instrumentation #2 (*i.e.*,  $\log_{10}(\det([\mathcal{I}])) = 80,55$  contre  $80,54$ ). Cette valeur n'a pas été dépassée lors des différentes optimisations réalisées et l'instrumentation associée est présentée sur la Figure 5.18.

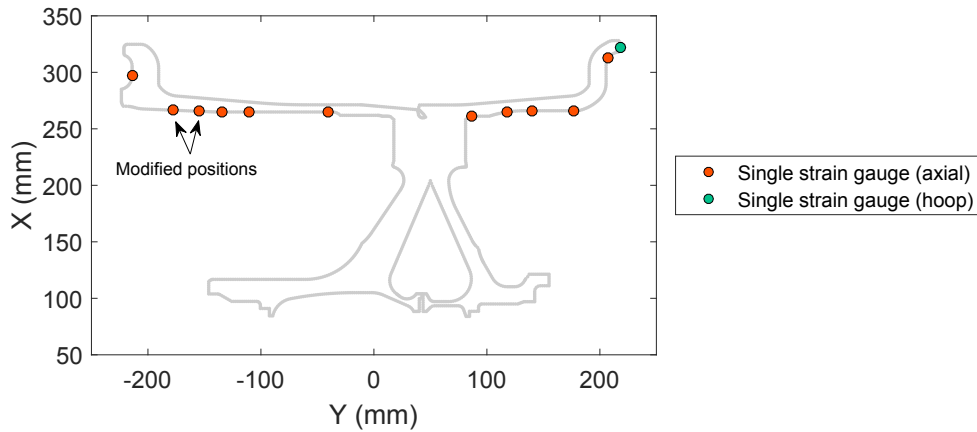


FIGURE 5.18 – Positions des 12 jauges retenues pour l'instrumentation optimisée #3

Deux jauges situées sur la demi-roue intérieure ont été légèrement déplacées par rapport à l'instrumentation optimisée #2. De plus, on remarque que les jauges au niveau du *bead seat* sont similaires à celles de l'instrumentation classique présentée sur la Figure 5.6, en particulier pour la demi-roue intérieure. Les matrices de covariance et de corrélation des paramètres obtenus avec cette instrumentation sont illustrées sur la Figure 5.19 et on remarque qu'elles ont peu évolué par rapport à l'instrumentation #1 (Figure 5.15).

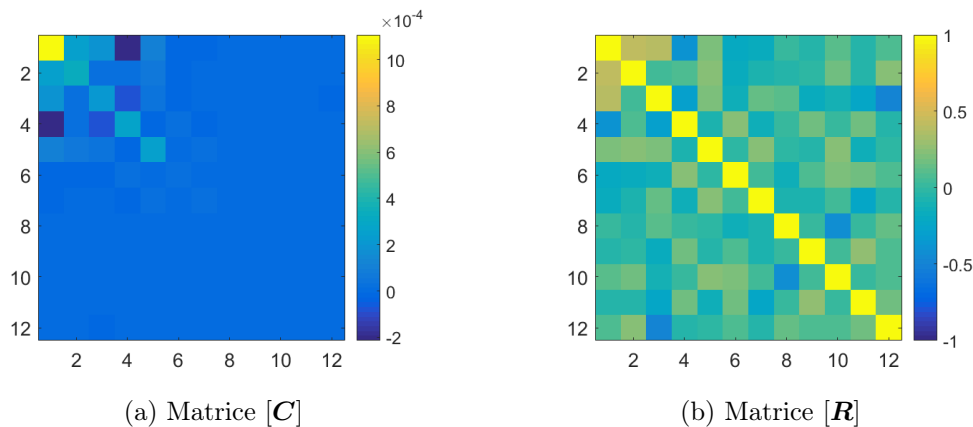


FIGURE 5.19 – Matrices de covariance et de corrélation des paramètres pour l'instrumentation optimisée #3

L'optimisation de l'instrumentation basée sur la maximisation du déterminant de la matrice d'information a donc permis d'aboutir au placement optimal de  $M = 12$  jauges de déformation afin d'identifier au mieux les  $N = 12$  paramètres de chargement recherchés. On propose désormais de changer de critère d'optimisation en considérant la direction de plus grande incertitude.

**Remarque 8** Les modes propres statiques de la roue à l'interface pneu-jante  $\{\Phi_i\}$  peuvent être considérés comme des modes de chargement  $\{f_i\}$  lorsqu'ils sont prémultipliés par la matrice de raideur réduite  $[\hat{K}]$  ou par leur valeur propre associée  $\lambda_i$  (cf. § 3.4.2). Pour les comparer, on peut se demander quel mode requiert le plus d'énergie pour atteindre un certain état de déformation ? Ou, autrement dit, quel mode induit le moins de déformation pour une valeur prédéfinie d'énergie stockée (Olsson *et al.*, 2004) ?

L'impact de la normalisation des modes en énergie sur l'optimisation de l'instrumentation a ainsi été étudié. L'énergie de déformation de la structure  $W_k$  associée à l'application unitaire de chaque mode  $\{\Phi_k\}$  étant égale à  $\lambda_k/2$  d'après l'équation (3.35), normer les modes en énergie consiste à créer une nouvelle base de modes  $\{\Phi'_i\}$  telle que

$$\{\Phi'_k\} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_k}} \{\Phi_k\} \quad (5.19)$$

Les déformations induites par chaque mode  $\{\Phi'_k\}$  peuvent alors être plus facilement comparées puisqu'elles sont associées à un même niveau d'énergie  $W'_k$  unitaire. En utilisant cette « nouvelle » paramétrisation des chargements à l'interface pneu-jante, l'optimisation de l'instrumentation basée sur la maximisation du déterminant de la matrice d'information a de nouveau été relancée avec l'*algorithme de Fedorov modifié* et une instrumentation identique à celle présentée sur la Figure 5.18 a été obtenue. La normalisation des modes en énergie n'a donc pas d'impact majeur sur la procédure d'optimisation. On note néanmoins que les matrices de covariance et de corrélation des paramètres recherchés étaient naturellement différentes des précédentes en raison du changement de paramétrisation effectué.

### Critère basé sur la direction de plus grande incertitude

Pour maximiser la plus petite valeur propre de la matrice d'information, on utilise dans un premier temps l'*algorithme de suppression séquentielle* dans lequel le capteur associé à la grandeur  $f^2$  la plus faible est supprimé à chaque itération. L'évolution du critère en fonction des itérations est illustrée sur la Figure 5.20.

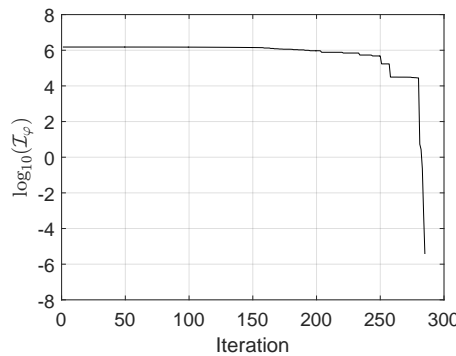


FIGURE 5.20 – Évolution de la plus petite valeur propre de la matrice d'information en fonction du nombre d'itérations

On constate que la diminution du critère est relativement lente jusqu'à l'itération 160. Ensuite, des paliers apparaissent et sont caractéristiques d'un changement brutal dans la direction de plus grande incertitude. En conservant  $M = 12$  points de mesure, on constate que le critère atteint une valeur extrêmement faible ( $\mathcal{I}_\varphi = 3,7 \times 10^{-6}$ ), ce qui indique, d'après l'équation (5.18), que les incertitudes sur les paramètres recherchés seront très importantes en considérant l'instrumentation associée. Il n'est donc pas envisageable de la considérer pour réaliser l'identification inverse. On choisit alors d'utiliser une instrumentation composée de  $M = 17$  points de mesure afin d'obtenir une valeur raisonnable du critère ( $\mathcal{I}_\varphi = 2,8 \times 10^4$ ) caractérisée par le dernier palier sur la Figure 5.20. Cette instrumentation est représentée sur la Figure 5.21.

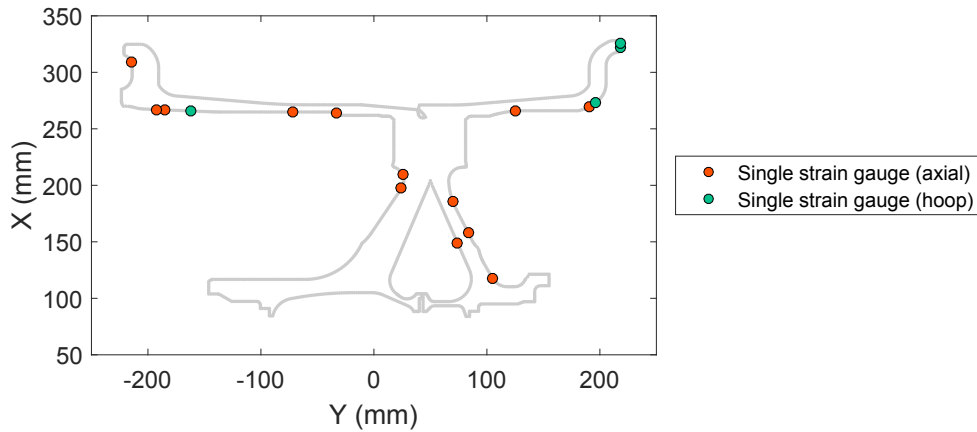


FIGURE 5.21 – Positions des 17 jauges retenues pour l'instrumentation optimisée #4

L'instrumentation obtenue est moins intuitive que celles déterminées précédemment en utilisant le déterminant de la matrice d'information comme critère d'optimisation. En effet, 11 jauges sont positionnées sur la jante de manière assez hétérogène et 6 sont placées sur les voiles de la roue, dont une à la limite du moyeu sur le côté extérieur. Ces dernières semblent pourtant moins sensibles à la répartition locale des chargements à l'interface pneu-jante que celles positionnées sur la jante. Ce résultat peut s'expliquer par une direction de plus grande incertitude dans l'espace des paramètres très éloignée des directions qui caractérisent les chargements « habituellement » supportés par la roue. Les matrices de covariance et de corrélation des paramètres obtenues avec cette instrumentation sont illustrées sur la Figure 5.22.

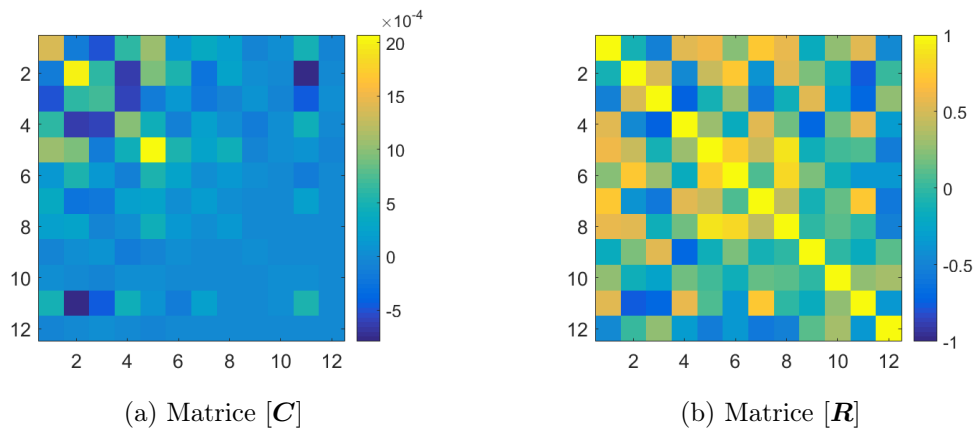


FIGURE 5.22 – Matrices de covariance et de corrélation des paramètres pour l'instrumentation optimisée #4

Les incertitudes sont plus élevées que précédemment et on constate que la nouvelle instrumentation proposée conserve de nombreuses corrélations entre les paramètres. Néanmoins, les amplitudes modales recherchées sont bien identifiées et les incertitudes associées restent acceptables (Figure 5.23).

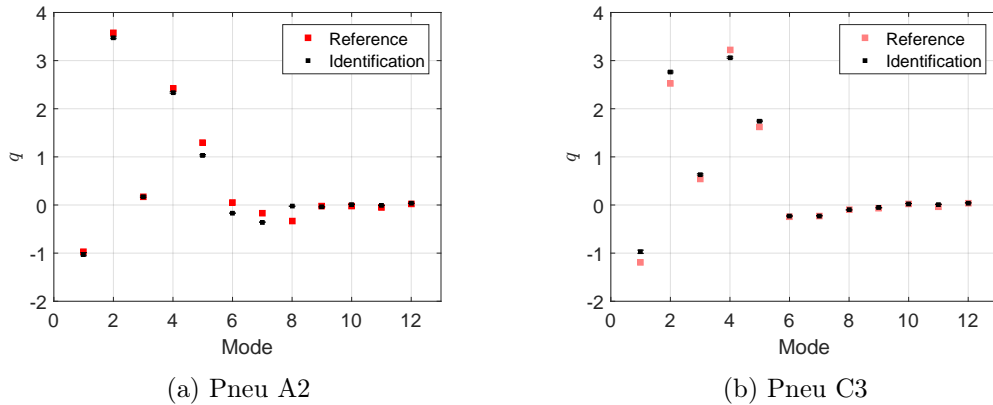


FIGURE 5.23 – Comparaison entre les amplitudes modales de référence et celles identifiées avec l’instrumentation optimisée #4 pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3

Les résultats obtenus en cherchant à maximiser la plus petite valeur propre de la matrice d’information n’ont pas permis de définir une instrumentation plus adaptée à l’identification des chargements recherchés que celle générée avec le critère du déterminant. Des investigations avec d’autres algorithmes d’optimisation n’ont pas été menées sur ce critère mais auraient peut-être permis d’améliorer les résultats. Néanmoins, le critère basé sur la direction de plus grande incertitude ne semble pas être le plus approprié au problème étudié. Un critère unidirectionnel pourrait éventuellement être utilisé si des directions spécifiques de chargement étaient identifiées dans l’espace des paramètres recherchés.

## 5.6 Conclusions

Ce chapitre a permis d’aborder le problème du placement optimal de capteurs pour l’identification de chargements à l’interface pneu-jante. Dans le cadre général de l’identification de paramètres, une synthèse bibliographique a tout d’abord montré que l’optimisation de l’essai consistait à *minimiser les incertitudes sur les paramètres recherchés*. Pour ce faire, de nombreux critères ont été proposés dans la littérature afin de *condenser l’information* contenue dans la matrice de covariance des paramètres et des procédures associées ont été développées.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, l’optimisation de l’essai s’est portée sur l’instrumentation de la roue par jauges d’extensométrie. Le problème inverse consistant à identifier les amplitudes modales de modes propres statiques d’interface pneu-jante à partir de mesures de déformation a été détaillé et l’application à l’identification d’un cas de gonflage a été proposée en considérant une modélisation 2D axisymétrique de la roue. Deux critères d’optimisation ont ensuite été étudiés afin d’obtenir la meilleure estimation des paramètres recherchés. Les instrumentations déterminées à partir de la maximisation du déterminant de la matrice d’information de Fisher se sont révélées particulièrement efficaces afin d’identifier correctement les amplitudes modales recherchées. En revanche, le critère basé sur la plus petite valeur propre de la matrice d’information est apparu peu approprié pour le problème étudié.

L’extension de ces travaux aux cas de chargement 3D (*i.e.*, ligne droite et ripés) est nécessaire afin de déterminer l’instrumentation optimale permettant d’identifier l’ensemble des chargements appliqués par le pneumatique sur la roue. Pour ce faire, un travail analogue à celui présenté dans ce chapitre peut être réalisé sur le modèle de calcul par éléments

finis 3D de la roue. Des éléments coques pourraient être utilisés afin de simuler les jauges de déformation potentielles et le post-traitement du tenseur de déformation aux points d'intégration de ces éléments permettrait notamment d'automatiser la recherche de l'orientation optimale de chaque jauge. La prise en compte des non-linéarités du modèle numérique devra également être envisagée. Par ailleurs, d'autres critères d'optimisation pourront être proposés pour assurer, par exemple, une robustesse à la défaillance des capteurs.



# Conclusions et perspectives

L'objectif du travail rapporté dans ce manuscrit était de proposer une méthodologie d'identification des chargements appliqués par un pneumatique sur une roue d'aéronef. Une approche consistant à identifier les chargements recherchés par méthode inverse à partir de la mesure de la déformée de la roue pour les différents cas de charge envisagés (*i.e.*, gonflage, ligne droite et ripés) a ainsi été choisie.

## Sur la paramétrisation des chargements

Une première partie des travaux a été dédiée à la paramétrisation des chargements appliqués à l'interface pneu-jante. L'analyse de la base de données pneumatiques disponible chez *Safran Landing Systems* a tout d'abord permis d'identifier des tendances caractéristiques du comportement de l'interface pneu-jante. En se basant sur ces observations, des premières tentatives de paramétrisation en séries de Fourier et en somme de pics élémentaires ont été proposées. Un changement de paradigme a ensuite été opéré afin de se focaliser sur la réponse mécanique de la roue plutôt que sur la forme des champs de pression de contact fournis par les pneumaticiens. Une paramétrisation optimale des chargements basée sur des techniques de réduction de modèle a alors été définie. Les modes propres statiques de la matrice de raideur de la roue condensée à l'interface pneu-jante ont été utilisés pour approcher les chargements appliqués sur la roue par n'importe quel pneumatique et les propriétés de symétrie cyclique se sont révélées bénéfiques pour les calculer. Un critère fondé sur la conservation de l'énergie de déformation élastique de la structure a permis de réduire considérablement le nombre de modes conservés. Cette paramétrisation, qui dépend uniquement de la structure de la roue étudiée, est objective et s'est révélée plus robuste et plus compacte que d'autres paramétrisations basées sur des fonctions de forme arbitraires ou des modèles numériques de pneumatique.

Le modèle réduit obtenu a permis de hiérarchiser de manière naturelle les chargements à l'interface pneu-jante et d'établir un lien direct avec la réponse mécanique de la roue, ce qui est particulièrement utile pour *Safran Landing Systems*. Les amplitudes des modes dominants ont donc été choisies comme paramètres à calibrer lors des identifications des chargements en raison de leur identifiabilité potentielle. Toutefois, le critère de sélection basé sur la conservation de l'énergie de déformation élastique n'est pas le seul envisageable. Des critères liés à des *quantités dimensionnantes* définies par *Safran Landing Systems* pourraient permettre de sélectionner les modes « critiques » par rapport à celles-ci. Par ailleurs, la fiabilité des champs de pression de contact fournis par les pneumaticiens étant régulièrement remise en question, leur projection sur la base réduite des modes d'interface dominants pourrait permettre à l'avenir de les évaluer de manière plus quantitative. Il serait également intéressant d'examiner la capacité de cette paramétrisation à représenter les chargements appliqués lors des cas à *limite élastique* et *ultimes* pour lesquels les pneumaticiens ne parviennent pas à fournir des champs de pression de contact.

### Sur les identifications de chargements et le placement optimal de capteurs

Une approche FEMU- $u$  a été choisie et mise en œuvre en milieu industriel pour une structure complexe à l'échelle réelle. Les données expérimentales générées lors du post-doctorat de [Gras \(2015a\)](#) ont ensuite été utilisées pour réaliser des identifications de chargements à l'interface pneu-jante lors de différents cas de charge.

Plusieurs identifications d'un cas de gonflage d'un pneumatique sur une roue d'aéronef ont été menées et l'impact du choix de la paramétrisation des chargements a été étudié. Une erreur de mesure systématique a néanmoins été découverte en fin de thèse, remettant en question l'interprétation des résultats obtenus jusqu'alors. L'impact non négligeable du serrage de la tringle du pneumatique sur le comportement mécanique de la roue n'était pas pris en compte dans les essais réalisés. Cette erreur s'est révélée être la base de nombreux écarts constatés sur diverses corrélations essai-calcul de *Safran Landing Systems*. Un nouveau protocole d'essais a été proposé afin d'obtenir une mesure fiable et répétable et celui-ci est désormais utilisé pour les nouveaux essais réalisés.

Cette découverte a toutefois permis de mettre en évidence l'impact majeur du gonflage du pneumatique sur le comportement mécanique de la roue. La connaissance de l'état de contrainte associé à ce chargement est en effet cruciale pour l'analyse de la durée de vie en fatigue de la roue puisqu'il impacte directement la contrainte moyenne. De plus, cet « état initial » conditionne les chargements vus par la roue lors des cas de roulage. De nouveaux essais seront donc nécessaires pour identifier correctement le chargement réellement appliqué sur la roue étudiée lors du gonflage. Par ailleurs, l'identification d'un cas de ligne droite a été abordée. Si les mesures de champs de déplacement obtenues par stéréocorrélation n'ont pas permis d'aboutir à un chargement fiable, le potentiel d'une identification basée sur les déformations mesurées par les jauges d'extensométrie a été démontré. L'optimisation du nombre et de la position des jauges, dont une preuve de concept a été réalisée sur un cas de gonflage, constitue une piste intéressante pour déterminer les chargements appliqués par le pneu lors des différents cas de charge.

Des campagnes d'essais similaires à celle présentée dans ce manuscrit doivent être menées par *Safran Landing Systems* avec différents types de pneus et de roues afin d'accroître la connaissance sur les chargements à l'interface pneu-jante. La procédure proposée dans le cadre de ces travaux permettra d'identifier les paramètres clés de ces chargements à condition que les mesures soient suffisamment fiables, ce qui nécessite de caractériser les différentes sources d'incertitudes associées avec précision. Les méthodes et outils de dimensionnement pourront alors être mis à jour avec ces nouvelles connaissances afin d'obtenir des simulations numériques plus prédictives.

# Bibliographie

- AMIOT, F., HILD, F. et ROGER, J. P. (2007). Identification of elastic property and loading fields from full-field displacement measurements. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 9, pages 2863-2887. doi : [10.1016/j.ijsolstr.2006.08.031](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.08.031) (cf. pages 1, 17).
- ANSYS, INC. (2015). *ANSYS DesignXplorer user's guide*. ANSYS, Inc., Canonsburg, Pennsylvania, USA (cf. page 107).
- ANSYS, INC. (2017). *ANSYS Mechanical APDL substructuring analysis guide*. ANSYS, Inc., Canonsburg, Pennsylvania, USA (cf. page 75).
- ATKINSON, A. C. (1982). Developments in the design of experiments. *International Statistical Review*, vol. 50, no. 2, pages 161-177. doi : [10.2307/1402599](https://doi.org/10.2307/1402599) (cf. pages 146, 149).
- ATKINSON, A. C. et DONEV, A. N. (1989). The construction of exact D-optimum experimental designs with application to blocking response surface designs. *Biometrika*, vol. 76, no. 3, pages 515-526. doi : [10.2307/2336117](https://doi.org/10.2307/2336117) (cf. page 151).
- AUDIER, A., PLOUVIER, P., RACHIDI, M., CAILLIAU, S., GODBARGE, C., F.-H., Derrien, DORIDOT, A., ROBIEUX, L. et SOULARD, B. (2018). *Industrie du futur : enjeux et perspectives pour la filière aéronautique*. Rapport technique. Boston Consulting Group, PI-PAME, Direction Générale des Entreprises, Ministère des Armées, GIFAS (cf. page 1).
- AVRIL, S., GRÉDIAC, M. et PIERRON, F. (2004). Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, vol. 34, no. 6, 439–452. doi : [10.1007/s00466-004-0589-6](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0589-6) (cf. page 97).
- AVRIL, S., BONNET, M., BRETTELLE, A.-S., GRÉDIAC, M., HILD, F., IENNY, P., LATOURTE, F., LEMOSSE, D., PAGANO, S., PAGNACCO, E. et PIERRON, F. (2008). Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, vol. 48, no. 4, pages 381-402. doi : [10.1007/s11340-008-9148-y](https://doi.org/10.1007/s11340-008-9148-y) (cf. page 96).
- BAJAN, R. L., FENG, C. C. et JASZLICS, I. J. (1969). Vibration analysis of complex structural systems by modal substitution. *Shock and Vibration Bulletin*, vol. 39, no. 3, pages 99-105 (cf. page 81).

- BALABIN, I. V. et ZUBAREV, N. A. (1964). Force interaction between a wide profile tire and the wheel rim. *Automobil'naya Promyshlennost*, vol. 30, no. 6, pages 16-19 (cf. page 17).
- BALLO, F., GOBBI, M., MASTINU, G., PREVIATI, G. et ZERBONI, R. (2015). Motorcycle tire modeling. *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Boston, Massachusetts, USA*. ASME. doi : [10.1115/DETC2015-46607](https://doi.org/10.1115/DETC2015-46607) (cf. page 22).
- BALLO, F., PREVIATI, G., GOBBI, M. et MASTINU, G. (2017). A semi-analytical tyre model for the study of tyre/rim interaction on a road vehicle. *ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Cleveland, Ohio, USA*. ASME. doi : [10.1115/DETC2017-67730](https://doi.org/10.1115/DETC2017-67730) (cf. page 22).
- BALLO, F., PREVIATI, G., GOBBI, M. et MASTINU, G. (2018). Tire-rim interaction, a semi-analytical tire model. *Journal of Mechanical Design*, vol. 140, no. 4. doi : [10.1115/1.4038927](https://doi.org/10.1115/1.4038927) (cf. page 22).
- BALMÈS, E. (1996a). Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. *Proceedings of the 14th IMAC, Dearborn, Michigan, USA*. Society for Experimental Mechanics, pages 204-210 (cf. page 74).
- BALMÈS, E. (1996b). Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition. *AIAA Journal*, vol. 34, no. 6, pages 1256-1260. doi : [10.2514/3.13221](https://doi.org/10.2514/3.13221) (cf. page 82).
- BARALDI, R., NARDINI, J., THORPE, E. et BANKS, H. T. (2014). *The effects of parametrization on inverse problems*. Rapport technique CRSC-TR14-07. Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State University (cf. pages 44, 69).
- BEAUBIER, B., DUFOUR, J.-E., HILD, F., ROUX, S., LAVERNHE, S. et LAVERNHE-TAILLARD, K. (2014). CAD-based calibration and shape measurement with stereoDIC: principle and application on test and industrial parts. *Experimental Mechanics*, vol. 54, no. 3, pages 329-341. doi : [10.1007/s11340-013-9794-6](https://doi.org/10.1007/s11340-013-9794-6) (cf. pages 33, 37, 38).
- BECK, J. V. et ARNOLD, K. J. (1977). *Parameter estimation in engineering and science*. John Wiley and Sons, New York, USA (cf. page 100).
- BERTIN, M., HILD, F., ROUX, S., MATHIEU, F., LECLERC, H. et AIMEDIEU, P. (2016). Integrated digital image correlation applied to elastoplastic identification in a biaxial experiment. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 51, no. 2, pages 118-131. doi : [10.1177/0309324715614759](https://doi.org/10.1177/0309324715614759) (cf. pages 99, 104, 146, 149).
- BERTSEKAS, D. P. (1982). *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, New York, USA (cf. pages 103, 104).

- 
- BESL, P. J. et MCKAY, N. D. (1992). A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 14, no. 2, pages 239-256. doi : [10.1109/34.121791](https://doi.org/10.1109/34.121791) (cf. page 37).
- BESNARD, G., HILD, F. et ROUX, S. (2006). "Finite-element" displacement fields analysis from digital images: application to Portevin-Le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, vol. 46, no. 6, pages 789-803. doi : [10.1007/s11340-006-9824-8](https://doi.org/10.1007/s11340-006-9824-8) (cf. page 34).
- BESSET, S. (2006). *Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l'aide d'une synthèse modale généralisée*. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, France (cf. pages 70, 73).
- BIDERMAN, V. L., GUSLITSER, R. L., SAKHAROV, S. P., NENAKHOV, B. V., SELEZNEV, I. I. et TSUKERBERG, S. M. (1969). *Automotive tires, construction, design, testing and operation*. NASA Technical Translation F-12, 382, NASA, Washington, District of Columbia, USA (cf. page 20).
- BLADH, R. (2001). *Efficient predictions of the vibratory response of mistuned bladed disks by reduced order modeling*. Thèse de doctorat. University of Michigan, USA (cf. page 190).
- BONNET, M. (2018). *Identification et inversion*. Support pédagogique, Master (MS)2SC, Université Paris-Saclay, France (cf. page 99).
- BONNET, M. et CONSTANTINESCU, A. (2005). Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, vol. 21, no. 2, pages 1-50. doi : [10.1088/0266-5611/21/2/R01](https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/R01) (cf. page 96).
- BRIDGESTONE (2016). *Tire care & maintenance*. Bridgestone (cf. page 134).
- BRUCK, H. A., MCNEILL, S. R., SUTTON, M. A. et PETERS, W. H. (1989). Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction. *Experimental Mechanics*, vol. 29, no. 3, pages 261-267. doi : [10.1007/BF02321405](https://doi.org/10.1007/BF02321405) (cf. page 33).
- CHAVENT, G. et BISSELL, R. (1998). Indicator for the refinement of parameterization. *International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 1998 (ISIP '98) Nagano, Japan*. Elsevier Science Ltd., pages 309-314. doi : [10.1016/B978-008043319-6/50036-4](https://doi.org/10.1016/B978-008043319-6/50036-4) (cf. page 70).
- CHEN, C. H. S. (1982). Prediction of bead area contact load at the tire-wheel interface using NASTRAN. *Tenth NASTRAN Users' Colloquium, New Orleans, Louisiana, USA*. NASA Conference Publication 2249. NASA, pages 133-142 (cf. page 21).
- CHEN, Y. et MEDIONI, G. (1992). Object modelling by registration of multiple range images. *Image and Vision Computing*, vol. 10, no. 3, pages 145-155. doi : [10.1016/0262-8856\(92\)90066-C](https://doi.org/10.1016/0262-8856(92)90066-C) (cf. page 37).
- CHEVALIER, L., CALLOCH, S., HILD, F. et MARCO, Y. (2001). Digital image correlation used to analyze the multiaxial behavior of rubber-like materials. *European Journal of*
-

- Mechanics - A/Solids*, vol. 20, no. 2, pages 169-187. doi : [10.1016/S0997-7538\(00\)01135-9](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)01135-9) (cf. page 34).
- CHIANG, Y. J., SHIH, C. D., LIN, C. C., LEE, H. K., TSENG, Y. Y., TSAI, K. C. et CHENG, Y. H. (2000). Multi-variable effects on sealing pressure between tyres and rims. *International Journal of Vehicle Design*, vol. 23, no. 1-2. doi : [10.1504/IJVD.2000.001884](https://doi.org/10.1504/IJVD.2000.001884) (cf. page 21).
- CHOCK, J. M. K. et KAPANIA, R. K. (2003). Load updating for finite element models. *AIAA Journal*, vol. 41, no. 9, pages 1667-1673. doi : [10.2514/2.7312](https://doi.org/10.2514/2.7312) (cf. pages 1, 17).
- CLARKS, S. K. (1971). *Mechanics of pneumatic tires*. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards (cf. pages 9, 130).
- COLLINS, J. D., HART, G. C., HASELMAN, T. K. et KENNEDY, B. (1974). Statistical identification of structures. *AIAA Journal*, vol. 12, no. 2, pages 185-190. doi : [10.2514/3.49190](https://doi.org/10.2514/3.49190) (cf. page 104).
- COOK, R. D. et NACHTSHEIM, C. J. (1980). A comparison of algorithms for constructing exact D-optimal designs. *Technometrics*, vol. 22, no. 3, pages 315-324. doi : [10.2307/1268315](https://doi.org/10.2307/1268315) (cf. page 151).
- CORUS, M. (2015). *Calcul modal par sous-structuration dynamique classique*. Rapport technique. Code\_Aster (cf. page 70).
- COSSERON, K., GRAS, R., MELLÉ, D., DIEBOLD, J.-F., HILD, F. et ROUX, S. (2018). Inverse identification of the loading applied by a tire on a landing gear wheel. *Residual Stress, Thermomechanics & Infrared Imaging, Hybrid Techniques and Inverse Problems, Proceedings of the 2018 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics, Greenville, South Carolina, USA*. Society for Experimental Mechanics, Springer, Cham, pages 13-16. doi : [10.1007/978-3-319-95074-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-95074-7_3) (cf. page 105).
- COSSERON, K., MELLÉ, D., HILD, F. et ROUX, S. (2019). Optimal parameterization of tire-rim interaction for aircraft wheels. *Journal of Aircraft* (accepté pour publication). doi : [10.2514/1.C035343](https://doi.org/10.2514/1.C035343) (cf. page 70).
- CRAIG, R. R. et BAMPPTON, M. C. (1968). Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, vol. 6, no. 7, pages 1313-1319. doi : [10.2514/3.4741](https://doi.org/10.2514/3.4741) (cf. page 71).
- CURREY, N. S. (1988). *Aircraft landing gear design: principles and practices*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), Washington, District of Columbia, USA. doi : [10.2514/4.861468](https://doi.org/10.2514/4.861468) (cf. page 6).
- CURTISS, W. W. (1973). Principles of tire design. *Tire Science and Technology*, vol. 1, no. 1, pages 77-98. doi : [10.2346/1.2167156](https://doi.org/10.2346/1.2167156) (cf. page 20).
- DOLLAR, H. (2005). *Iterative linear algebra for constrained optimization*. Thèse de doctorat. University of Oxford, United Kingdom (cf. page 104).

- 
- DUBREUIL, L., DUFOUR, J.-E., QUINSAT, Y. et HILD, F. (2016). Mesh-based shape measurements with stereocorrelation. *Experimental Mechanics*, vol. 56, no. 7, pages 1231-1242. doi : [10.1007/s11340-016-0158-x](https://doi.org/10.1007/s11340-016-0158-x) (cf. page 39).
- DUFOUR, J.-E. (2015a). *Mesures de forme, de déplacement, et de paramètres mécaniques par stéréo-corrélation d'images isogéométrique*. Thèse de doctorat. Ecole Normale Supérieure de Cachan, France (cf. pages 33, 35, 37).
- DUFOUR, J.-E., BEAUBIER, B., HILD, F. et ROUX, S. (2015b). CAD-based displacement measurements with stereo-DIC: principle and first validations. *Experimental Mechanics*, vol. 55, no. 9, pages 1657-1668. doi : [10.1007/s11340-015-0065-6](https://doi.org/10.1007/s11340-015-0065-6) (cf. page 37).
- DUFOUR, J.-E., HILD, F. et ROUX, S. (2015c). Shape, displacement and mechanical properties from isogeometric multiview stereocorrelation. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 50, no. 7, pages 470-487. doi : [10.1177/0309324715592530](https://doi.org/10.1177/0309324715592530) (cf. page 37).
- DUFOUR, J.-E., LECLERCQ, S., SCHNEIDER, J., ROUX, S. et HILD, F. (2016). 3D surface measurements with isogeometric stereocorrelation: application to complex shapes. *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 87, no. 7, pages 146-155. doi : [10.1016/j.optlaseng.2016.02.018](https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.02.018) (cf. page 37).
- DUMOUCHEL, W. et JONES, B. (1994). A simple bayesian modification of D-optimal designs to reduce dependence on a assumed model. *Technometrics*, vol. 36, no. 1, pages 37-47. doi : [10.1080/00401706.1994.10485399](https://doi.org/10.1080/00401706.1994.10485399) (cf. page 151).
- DUNLOP (2008). *General practices manual for aircraft tyres and tubes DM1172*. Dunlop (cf. page 134).
- DYKSTRA, O. (1971). The augmentation of experimental data to maximize  $|X'X|$ . *Technometrics*, vol. 13, no. 3, pages 682-688. doi : [10.2307/1267180](https://doi.org/10.2307/1267180) (cf. pages 149, 151).
- EUROPEAN AVIATION SAFETY AGENCY (2010). *European technical standard order (ETSO) C135a - Large aeroplane wheels and wheel and brake assemblies*. European Aviation Safety Agency, Köln, Germany (cf. page 11).
- FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION (2008). *Technical standard order (TSO) C135a - Transport airplane wheels and wheel and brake assemblies*. Federal Aviation Administration, Washington, District of Columbia, USA (cf. page 11).
- FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION (2012). *Aviation maintenance technician handbook - Airframe*. U. S. Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Airman Testing Standards Branch, AFS-630, Oklahoma City, Oklahoma, USA (cf. page 6).
- FEDOROV, V. V. (1972). *Theory of optimal experiments*. Academic Press, New York and London (cf. pages 146, 150, 151).
-

- FISH, B. E., PAJOT, J. J. et PATTERSON, D. K. (2002). FEA cyclic symmetric fatigue analysis of aircraft wheels. *SAE Technical Paper Series 2002-01-3001*. doi : [10.4271/2002-01-3001](https://doi.org/10.4271/2002-01-3001) (cf. page 13).
- FISHER, R. A. (1935). *The design of experiments*. Oliver and Boyd, London and Edinburgh, United Kingdom (cf. page 146).
- FORTESCUE, C. L. (1918). Method of symmetrical co-ordinates applied to the solution of polyphase networks. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 37, no. 2, pages 1027-1140. doi : [10.1109/T-AIEE.1918.4765570](https://doi.org/10.1109/T-AIEE.1918.4765570) (cf. page 193).
- GALIL, Z. et KIEFER, J. (1980). Time and space saving computer methods, related to Mitchell's DETMAX, for finding D-optimum designs. *Technometrics*, vol. 22, no. 3, pages 301-313. doi : [10.2307/1268314](https://doi.org/10.2307/1268314) (cf. page 151).
- GARCIA, D. (2001). *Mesure de formes et de champs de déplacements tridimensionnels par stéréo-corrélation d'images*. Thèse de doctorat. Institut National Polytechnique de Toulouse, France (cf. pages 29, 35).
- GATT, A. (2017). *Instabilité des freins aéronautiques - Approche transitoire et multi-physique*. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, France (cf. page 73).
- GENT, A. N. et WALTER, J. D. (2006). *The pneumatic tire*. U.S. Department of Transportation, National Highway Traffic Safety Administration, Washington, District of Columbia, USA (cf. pages 9, 130).
- GERHARDT, J. S., FULLER, R. L., FOLLEN, G. D. et SCHNUTH, C. L. (1997). The use of tangential X-ray tools in the analysis of tire/wheel mismatch. *Tire Science and Technology*, vol. 25, no. 2, pages 96-118. doi : [10.2346/1.2137537](https://doi.org/10.2346/1.2137537) (cf. page 130).
- GOODYEAR (2016). *Aircraft tire care & service manual*. Goodyear (cf. page 134).
- GRAS, R. (2015a). *Activités de post-doctorat sur l'identification des chargements pneumatique*. Rapport technique. Ecole Normale Supérieure de Cachan, France (cf. pages 2, 24, 26, 28-30, 36-40, 59, 61, 64, 66, 112, 128, 170).
- GRAS, R., MELLÉ, D. et HILD, F. (2015b). Loading identification on a tire/rim contact for an inflation pressure. *10th International Conference on Advances in Experimental Mechanics, Edinburgh, United Kingdom*. British Society for Strain Measurement (BSSM) (cf. pages 1, 59, 64).
- GRAS, R., LECLERC, H., HILD, F., ROUX, S. et SCHNEIDER, J. (2015c). Identification of a set of macroscopic elastic parameters in a 3D woven composite: uncertainty analysis and regularization. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 55, no. 1, pages 2-16. doi : [10.1016/j.ijsolstr.2013.12.023](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.023) (cf. pages 1, 40, 99, 159).
- GRÉDIAC, M. et HILD, F. (2011). *Mesures de champs et identification en mécanique des solides*. Hermès Science publications - Lavoisier, Paris, France (cf. pages 1, 28, 33, 34).

- GUICHARD, J. (1996). Freinage à très hautes performances - Exemple aéronautique. *Techniques de l'ingénieur B5580* (cf. page 11).
- GUPTA, D. K. et DHINGRA, A. K. (2013). Input load identification from optimally placed strain gages using D-optimal design and model reduction. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 40, no. 2, pages 556-570. doi : [10.1016/j.ymssp.2013.06.011](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.06.011) (cf. page 146).
- GUYAN, R. J. (1965). Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, vol. 3, no. 2, pages 380-380. doi : [10.2514/3.2874](https://doi.org/10.2514/3.2874) (cf. pages 71, 74, 189).
- HADAMARD, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, vol. 13, pages 49-52 (cf. page 96).
- HANSEN, P. C. (1992). Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, vol. 34, no. 4, pages 561-580. doi : [10.1137/1034115](https://doi.org/10.1137/1034115) (cf. page 103).
- HARVENT, J., COUDRIN, B., BRÈTHES, L., ORTEU, J.-J. et DEVY, M. (2013). Multi-view dense 3D modelling of untextured objects from a moving projector-camera system. *Machine Vision and Applications*, vol. 24, no. 8, pages 1645-1659. doi : [10.1007/s00138-013-0495-z](https://doi.org/10.1007/s00138-013-0495-z) (cf. page 37).
- HEINRIETZ, A., LEHRKE, H.-P., RUPP, A. N. et BARTHEL, C. (2003). Identification of parametric tire models for the fatigue evaluation of suspension components. *SAE Technical Paper Series 2003-01-1276*. doi : [10.4271/2003-01-1276](https://doi.org/10.4271/2003-01-1276) (cf. pages 19, 22).
- HENDRIKS, M. A. N. (1991). *Identification of the mechanical behavior of solid materials*. Thèse de doctorat. Eindhoven University of Technology, Netherlands. doi : [10.6100/IR347994](https://doi.org/10.6100/IR347994) (cf. pages 96, 97).
- HILD, F. et ROUX, S. (2006a). Digital image correlation: from displacement measurement to identification of elastic properties—a review. *Strain*, vol. 42, no. 2, pages 69-80. doi : [10.1111/j.1475-1305.2006.00258.x](https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.2006.00258.x) (cf. pages 1, 26).
- HILD, F. et ROUX, S. (2006b). Measuring stress intensity factors with camera: integrated digital image correlation (I-DIC). *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 334, no. 1, pages 8-12 (cf. page 34).
- HILD, F., BUMEDIJEN, R., BAUDEQUIN, M., ROUX, S. et CANTELAUBE, F. (2002). Multiscale displacement field measurements of compressed mineral-wool samples by digital image correlation. *Applied Optics*, vol. 41, no. 32, pages 6815-6828. doi : [10.1364/AO.41.006815](https://doi.org/10.1364/AO.41.006815) (cf. page 34).
- HILD, F. et ROUX, S. (2012). Comparison of local and global approaches to digital image correlation. *Experimental Mechanics*, vol. 52, no. 9, pages 1503-1519. doi : [10.1007/s11340-012-9603-7](https://doi.org/10.1007/s11340-012-9603-7) (cf. pages 29, 34, 106).

- HOLLAND, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, USA (cf. page 100).
- HURTY, W. C. (1965). Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, vol. 3, no. 4, pages 678-685. doi : [10.2514/3.2947](https://doi.org/10.2514/3.2947) (cf. page 71).
- JANSEN, K. M. B. (1997). Effect of pressure on electrical resistance strain gages. *Experimental Mechanics*, vol. 37, no. 3, pages 245-249. doi : [10.1007/BF02317414](https://doi.org/10.1007/BF02317414) (cf. page 152).
- JEUSETTE, J. P. et THEVES, M. (1992). Finite element analysis of tire/rim interface forces under braking and cornering loads. *Tire Science and Technology*, vol. 20, no. 2, pages 83-105. doi : [10.2346/1.2139512](https://doi.org/10.2346/1.2139512) (cf. page 21).
- JOANNIN, C. (2017). *Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires : application à la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, France (cf. page 70).
- JOHNSON, M. E. et NACHTSHEIM, C. J. (1983). Some guidelines for constructing exact D-optimal designs on convex design spaces. *Technometrics*, vol. 25, no. 3, pages 271-277. doi : [10.1080/00401706.1983.10487880](https://doi.org/10.1080/00401706.1983.10487880) (cf. page 151).
- JÉZÉQUEL (1985). *Synthèse modale : théorie et extensions*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard, France (cf. pages 72, 73).
- KAIPIO, J. et SOMERSALO, E. (2005). *Statistical and computational inverse problems*. Springer-Verlag New York, USA. doi : [10.1007/b138659](https://doi.org/10.1007/b138659) (cf. pages 99, 158).
- KAIPIO, J. et SOMERSALO, E. (2007). Statistical inverse problems: discretization, model reduction and inverse crimes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 198, no. 2, pages 493-504. doi : [10.1016/j.cam.2005.09.027](https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.09.027) (cf. page 99).
- KAMMER, D. C. (1991). Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 2, pages 251-259. doi : [10.2514/3.20635](https://doi.org/10.2514/3.20635) (cf. page 146).
- KAMMER, D. C. et TINKER, M. L. (2004). Optimal placement of triaxial accelerometers for modal vibration tests. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 18, no. 1, pages 29-41. doi : [10.1016/S0888-3270\(03\)00017-7](https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00017-7) (cf. page 146).
- KANDARPA, S., SPENCER, B. F., KIRKNER, D. J. et CHAMPION, M. (1994). Determination of tire-wheel interface loads for aircraft wheels. *Journal of Aircraft*, vol. 31, no. 2, pages 433-440. doi : [10.2514/3.46504](https://doi.org/10.2514/3.46504) (cf. pages 18, 59).
- KAVANAGH, K. T. et CLOUGH, R. W. (1971). Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, no. 1, pages 11-23. doi : [10.1016/0020-7683\(71\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90015-1) (cf. pages 2, 24, 104).

- 
- KIEFER, J. (1959). Optimum experimental designs. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 21, no. 2, pages 272-319 (cf. page 146).
- KIEFER, J. et WOLFOWITZ, J. (1960). The equivalence of two extremum problems. *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 12, pages 363-366. doi : [10.4153/CJM-1960-030-4](https://doi.org/10.4153/CJM-1960-030-4) (cf. page 149).
- KIRKEGAARD, P. H. (1991). *Optimal design of experiments for parametric identification of civil engineering structures*. Thèse de doctorat. Aalborg University, Denmark (cf. pages 100, 146).
- KIRKNER, D. J., SPENCER, B. F., SCHUDT, E. E., KANDARPA, S. et CHAWLA, M. D. (1993). Determination of tire-wheel interface pressure distribution for aircraft wheels. *34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, La Jolla, California, USA*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), pages 415-423. doi : [10.2514/6.1993-1343](https://doi.org/10.2514/6.1993-1343) (cf. pages 18, 59).
- KUHN, H. W. et TUCKER, A. W. (1951). Nonlinear programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press, Berkeley, California, USA, pages 481-492 (cf. page 104).
- LECLERC, H., PÉRIÉ, J.-N., ROUX, S. et HILD, F. (2009). Integrated digital image correlation for the identification of mechanical properties. *Computer Vision/Computer Graphics Collaboration Techniques. Mirage 2009. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5496, pages 161-171. doi : [10.1007/978-3-642-01811-4\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-642-01811-4_15) (cf. page 34).
- LECOMPTE, D., SMITS, A., SOL, H., VANTOMME, J. et HEMELRIJCK, D. V. (2007). Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 5, pages 1643-1656. doi : [10.1016/j.ijsolstr.2006.06.050](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.06.050) (cf. page 104).
- LEE, C. (2006). Rim slip and bead fitment of tires: analysis and design. *Tire and Science Technology*, vol. 34, no. 1, pages 38-63. doi : [10.2346/1.2169829](https://doi.org/10.2346/1.2169829) (cf. pages 21, 130).
- LEE, C.-C. (2002). *Method of tire bead flange profiling*. Brevet US 6,487,900 B1 (cf. page 21).
- LEE, C.-C. et TALUG, A. (2001). *A bead profile for pneumatic tires*. Brevet EP 1 149 713 A2 (cf. page 21).
- LEVENBERG, K. (1944). A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 2, pages 164-168. doi : [10.1090/qam/10666](https://doi.org/10.1090/qam/10666) (cf. pages 64, 102).
- MACNEAL, R. H. (1971). A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, vol. 1, no. 4, pages 581-601. doi : [10.1016/0045-7949\(71\)90031-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(71)90031-9) (cf. page 72).
-

- MACNEAL, R. H., HARDER, R. L. et MASON, J. B. (1973). NASTRAN cyclic symmetry capability. *NASTRAN: Users' Experiences*, pages 395-421 (cf. page 193).
- MAHALANOBIS, P. C. (1936). On the generalized distance in statistics. *Proceedings of National Institute of Sciences (India)*, vol. 2, no. 1, pages 49-55 (cf. page 97).
- MALINVERNO, A. (2000). A Bayesian criterion for simplicity in inverse problem parametrization. *Geophysical Journal International*, vol. 140, no. 2, pages 267-285. doi : [10.1046/j.1365-246x.2000.00008.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00008.x) (cf. page 69).
- MARQUARDT, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 2, pages 431-441. doi : [10.1137/0111030](https://doi.org/10.1137/0111030) (cf. pages 64, 102).
- MARTINI, D. (2011). *Mesures en service et reconstruction de champs mécaniques sur structures*. Thèse de doctorat. Université de Provence - Aix Marseille I, France (cf. page 1).
- MARTINI, D., HOCHARD, C. et CHARLES, J.-P. (2012). Load identification for full-field reconstruction: applications to plates under tension loads. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, no. 10, pages 1073-1086. doi : [10.1002/nme.4304](https://doi.org/10.1002/nme.4304) (cf. pages 1, 17).
- MARTINSONS, C. D. (2005). Optimal parameterization of a mathematical model for solving parameter estimation problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 13, no. 2, pages 109-131. doi : [10.1080/10682760412331313405](https://doi.org/10.1080/10682760412331313405) (cf. pages 44, 69).
- MASROOR, S. A. et ZACHARY, L. W. (1991). Designing an all-purpose force transducer. *Experimental Mechanics*, vol. 31, no. 1, pages 33-35. doi : [10.1007/BF02325720](https://doi.org/10.1007/BF02325720) (cf. pages 146, 149).
- MATHIEU, F., HILD, F. et ROUX, S. (2012). Identification of a crack propagation law by digital image correlation. *International Journal of Fatigue*, vol. 36, no. 1, pages 146-154. doi : [10.1016/j.ijfatigue.2011.08.004](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.08.004) (cf. page 1).
- MATHIEU, F., LECLERC, H., HILD, F. et ROUX, S. (2015). Estimation of elastoplastic parameters via weighted FEMU and integrated-DIC. *Experimental Mechanics*, vol. 55, no. 1, pages 105-119. doi : [10.1007/s11340-014-9888-9](https://doi.org/10.1007/s11340-014-9888-9) (cf. pages 40, 99, 104, 105).
- MEHRA, R. (1974). Optimal inputs for linear system identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, no. 3, pages 192-200. doi : [10.1109/TAC.1974.1100554](https://doi.org/10.1109/TAC.1974.1100554) (cf. page 146).
- MENG, J., ZHU, P., JI, Q. H. et LIU, Z. (2012). An improved pressure distribution model of automotive wheel's radial fatigue. *Applied Mechanics and Materials*, vol. 201-202, pages 287-291. doi : [10.4028/www.scientific.net/AMM.201-202.287](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.201-202.287) (cf. pages 21, 22).

- 
- MEO, M. et ZUMPANO, G. (2005). On the optimal sensor placement techniques for a bridge structure. *Engineering Structures*, vol. 27, no. 10, pages 1488-1497. doi : [10.1016/j.engstruct.2005.03.015](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.03.015) (cf. page 146).
- MEUWISSEN, M. H. H., OOMENS, C. W. J., BAAIJENS, F. P. T., PETTERSON, R. et JANSSEN, J. D. (1998). Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method. *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 75, no. 1-3, pages 204-211. doi : [10.1016/S0924-0136\(97\)00366-X](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(97)00366-X) (cf. page 104).
- MEYER, R. K. et NACHTSHEIM, C. J. (1995). The coordinate-exchange algorithm for constructing exact optimal experimental designs. *Technometrics*, vol. 37, no. 1, pages 60-69. doi : [10.2307/1269153](https://doi.org/10.2307/1269153) (cf. page 151).
- MICHELIN (2016). *Michelin aircraft tire care & maintenance manual*. Michelin (cf. pages 9, 134).
- MITCHELL, T. J. (1974). An algorithm for the construction of "D-optimal" experimental designs. *Technometrics*, vol. 16, no. 2, pages 203-210. doi : [10.2307/1267940](https://doi.org/10.2307/1267940) (cf. page 149).
- MORELLI, E. A. et KLEIN, V. (1990). Optimal input design for aircraft parameter estimation using dynamic programming principles. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Portland, Oregon, USA*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) (cf. page 146).
- MOROZOV, V. A. (1984). *Methods for solving incorrectly posed problems*. Springer-Verlag New York, USA. doi : [10.1007/978-1-4612-5280-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5280-1) (cf. page 103).
- MOSEGAARD, K. et TARANTOLA, A. (1995). Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, vol. 100, no. B7, pages 12431-12447. doi : [10.1029/94JB03097](https://doi.org/10.1029/94JB03097) (cf. page 103).
- MOTTERSHEAD, J. E. et FRISWELL, M. I. (1993). Model updating in structural dynamics: a survey. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 167, no. 2, pages 347-375. doi : [10.1006/jsvi.1993.1340](https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1340) (cf. page 104).
- NAKAGIRI, S. et SUZUKI, K. (1999). Finite element interval analysis of external loads identified by displacement input with uncertainty. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 168, no. 1-4, pages 63-72. doi : [10.1016/S0045-7825\(98\)00134-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00134-0) (cf. pages 1, 17).
- NAKAMURA, T., IGAWA, H. et KANDA, A. (2012). Inverse identification of continuously distributed loads using strain data. *Aerospace Science and Technology*, vol. 23, no. 1, pages 75-84. doi : [10.1016/j.ast.2011.06.012](https://doi.org/10.1016/j.ast.2011.06.012) (cf. pages 1, 17).
- NEGGERS, J., MATHIEU, F., HILD, F., ROUX, S. et SWIERGIEL, N. (2017). Improving full-field identification using progressive model enrichments. *International Journal of*

- Solids and Structures*, vol. 118-119, pages 213-223. doi : [10.1016/j.ijstr.2017.03.013](https://doi.org/10.1016/j.ijstr.2017.03.013) (cf. page 99).
- NEGGERS, J., MATHIEU, F., HILD, F. et ROUX, S. (2019). Simultaneous full-field multi-experiment identification. *Mechanics of Materials*, vol. 133, pages 71-84. doi : [10.1016/j.mechmat.2019.03.001](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.03.001) (cf. page 99).
- NELDER, J. A. et MEAD, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, vol. 7, no. 4, pages 308-313. doi : [10.1093/comjnl/7.4.308](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308) (cf. page 100).
- NGUYEN, T., SCHONNING, A., EASON, P. et NICHOLSON, D. (2012). Methods for analyzing nose gear during landing using structural finite element analysis. *Journal of Aircraft*, vol. 49, no. 1, pages 275-280. doi : [10.2514/1.C031519](https://doi.org/10.2514/1.C031519) (cf. page 20).
- OHAYON, R. et SOIZE, C. (1998). *Structural acoustics and vibration: mechanical models, variational formulations and discretization*. Academic Press, San Diego, California, USA (cf. pages 193, 195).
- OLSSON, P., ERIKSSON, P. et OLSSON, K.-G. (2004). Static eigenvalue analysis as an aid in furniture design. *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture and the 2004 Conference of the AIA Technology in Architectural Practice Knowledge Community, Cambridge and Toronto, Ontario, Canada*. ACADIA, pages 126-137 (cf. pages 75, 163).
- ORTEU, J.-J. (2002). Mesure 3D de formes et de déformations par stéréovision. *Techniques de l'ingénieur BM7015* (cf. page 28).
- PAGNACCO, E., MOREAU, A. et LEMOSSE, D. (2007). Inverse strategies for the identification of elastic and viscoelastic material parameters using full-field measurements. *Materials Science and Engineering*, vol. 452-453, pages 737-745. doi : [10.1016/j.msea.2006.10.122](https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.10.122) (cf. page 104).
- PELLE, R. G. (1994). FEM simulation of tire/rim seating process. *Tire and Science Technology*, vol. 22, no. 2, pages 76-98. doi : [10.2346/1.2139537](https://doi.org/10.2346/1.2139537) (cf. pages 21, 130).
- PETELET, M. (2007). *Analyse de sensibilité globale de modèles thermomécaniques de simulation numérique du soudage*. Thèse de doctorat. Université de Bourgogne, France (cf. pages 69, 101, 109).
- PETIT, D. et MAILLET, D. (2008). Techniques inverses et estimation de paramètres. *Techniques de l'ingénieur AF4515* (cf. pages 44, 99, 110).
- PHILIPPE, J. (2016). *Prédiction robuste du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés désaccordés*. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, France (cf. page 70).
- PIEGL, L. et TILLER, W. (1995). *The NURBS book*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany (cf. page 37).

- 
- PIERRÉ, J.-E. (2016). *Stéréo corrélation d'images numériques éléments finis : application à la validation de modèles de structures composites sous sollicitations complexes*. Thèse de doctorat. Université de Toulouse, France (cf. pages 34, 35, 39).
- POTTIER, T. (2010). *Identification paramétrique par recalage de modèles éléments finis couplée à des mesures de champs cinématiques et thermiques*. Thèse de doctorat. Université de Savoie, France (cf. page 104).
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. et FLANNERY, B. P. (2007). *Numerical recipes 3rd edition: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York, USA (cf. page 99).
- ROUX, S. et HILD, F. (2018). Optimal procedure for the identification of constitutive parameters from experimentally measured displacement fields. *International Journal of Solids and Structures* (accepté pour publication). doi : [10.1016/j.ijsolstr.2018.11.008](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.11.008) (cf. pages 40, 96, 97).
- RÉTHORÉ, J., ROUX, S. et HILD, F. (2008). Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 75, no. 13, pages 3763-3781. doi : [10.1016/j.engfracmech.2007.04.018](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.04.018) (cf. page 97).
- RÉTHORÉ, J., ROUX, S. et HILD, F. (2011). Optimal and noise-robust extraction of fracture mechanics parameters from kinematic measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 78, no. 9, pages 1827-1845. doi : [10.1016/j.engfracmech.2011.01.012](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.01.012) (cf. page 97).
- RUBIN, S. (1975). Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, vol. 13, no. 8, pages 995-1006. doi : [10.2514/3.60497](https://doi.org/10.2514/3.60497) (cf. page 72).
- RUPP, A. N., HEINRIETZ, A. et EHL, O. (2002). Simulation of the experimental proof out of wheels and hubs. *SAE Technical Paper Series 2002-01-1202*. doi : [10.4271/2002-01-1202](https://doi.org/10.4271/2002-01-1202) (cf. page 19).
- SAE INTERNATIONAL (2018). Recommended practice for measurement of static and dynamic characteristic properties of aircraft tires APR4955A. *SAE Aerospace Recommended Practice*. doi : [10.4271/APR4955A](https://doi.org/10.4271/APR4955A) (cf. page 134).
- SCHITTKOWSKI, K. (1986). NLPQL: a fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research*, vol. 5, no. 2, pages 485-500. doi : [10.1007/BF02022087](https://doi.org/10.1007/BF02022087) (cf. page 107).
- SCHMALTZ, S. et WILLNER, K. (2014). Comparison of different biaxial tests for the inverse identification of sheet steel material parameters. *Strain*, vol. 50, no. 5, pages 389-403. doi : [10.1111/str.12080](https://doi.org/10.1111/str.12080) (cf. page 146).
- SCHUDT, E. E., KIRKNER, D. J., SPENCER, B. F. et CHAWLA, M. D. (1994). Three-dimensional verification of an axisymmetric algorithm for tire-wheel interface load recovery. *SAE Technical Paper 941176*. doi : [10.4271/941176](https://doi.org/10.4271/941176) (cf. pages 18, 59).
-

- SHAH, P. C. et UDWADIA, F. E. (1977). A methodology for optimal sensor locations for identification of dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, no. 1, pages 188-196. doi : [10.1115/1.3424225](https://doi.org/10.1115/1.3424225) (cf. page 149).
- SHERWOOD, J. A., FUSSELL, B. K., EDWARDS, W. R., GROSS, T. S. et WATT, D. W. (1995a). Study of the pressure distribution on an aircraft tire-wheel interface. *Journal of Aircraft*, vol. 32, no. 5, pages 921-928. doi : [10.2514/3.46819](https://doi.org/10.2514/3.46819) (cf. pages 17, 19).
- SHERWOOD, J. A., AYRES, J. M., GROSS, T. S. et WATT, D. W. (1995b). An investigation of tire-wheel interface loads using ADINA. *Computers and structures*, vol. 56, no. 2-3, pages 377-387. doi : [10.1016/0045-7949\(95\)00030-K](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00030-K) (cf. page 19).
- SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J. et HAJELA, P. (1979). Accuracy of an approximate static structural analysis technique based on stiffness matrix eigenmodes. *20th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, St. Louis, Missouri, USA*. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), pages 127-136. doi : [10.2514/6.1979-748](https://doi.org/10.2514/6.1979-748) (cf. pages 74, 81).
- SPENCER, B. F., KIRKNER, D. J., SCHUDT, E. E. et KANDARPA, S. (1993). *Aircraft life wheel assessment*. Rapport technique. University of Notre Dame, Indiana, USA (cf. pages 18, 59).
- SPENCER, B. F., KIRKNER, D. J., SCHUDT, E. E., CHAWLA, M. et HOMA, D. (1995). Experimental verification of an algorithm for determination of tire-wheel interface loads. *SAE Technical Paper 951435*. doi : [10.4271/951435](https://doi.org/10.4271/951435) (cf. pages 18, 59).
- STEARNS, J. C. (2000). *An investigation of stress and displacement distribution in a aluminium alloy automobile rim*. Thèse de doctorat. University of Akron, Ohio, USA (cf. pages 20, 59, 64).
- STEARNS, J. C., SRIVATSAN, T. S., GAO, X. et LAM, P. C. (2006). Understanding the influence of pressure and radial loads on stress and displacement response of a rotating body: the automobile wheel. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 2006. doi : [10.1155/IJRM/2006/60193](https://doi.org/10.1155/IJRM/2006/60193) (cf. page 64).
- SUN, Y., PANG, J. H. L., WONG, C. K. et SU, F. (2005). Finite element formulation for a digital image correlation method. *Applied Optics*, vol. 44, no. 34, pages 7357-7363. doi : [10.1364/AO.44.007357](https://doi.org/10.1364/AO.44.007357) (cf. page 34).
- SUTTON, M. A., WOLTERS, W. J., PETERS, W. H., RANSON, W. F. et MCNEILL, S. R. (1983). Determination of displacements using an improved digital image correlation method. *Image and Vision Computing*, vol. 1, no. 3, pages 133-139. doi : [10.1016/0262-8856\(83\)90064-1](https://doi.org/10.1016/0262-8856(83)90064-1) (cf. page 34).
- SUTTON, M. A., ORTEU, J.-J. et SCHREIER, H. (2009). *Image correlation for shape, motion and deformation measurements: basic concepts, theory and applications*. Springer, New York, USA (cf. pages 28, 29, 33, 34).

- 
- TARANTOLA, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, USA. doi : [10.1137/1.9780898717921](https://doi.org/10.1137/1.9780898717921) (cf. pages 1, 44, 96, 103).
- TARANTOLA, A. et VALETTE, B. (1982). Inverse problems = quest for information. *Journal of Geophysics*, vol. 50, pages 159-170 (cf. page 69).
- THOMAS, D. L. (1979). Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, no. 1, pages 81-102. doi : [10.1002/nme.1620140107](https://doi.org/10.1002/nme.1620140107) (cf. page 193).
- TIKHONOV, A. N. et ARSEININ, V. Y. (1977). *Solutions of ill-posed problems*. Winston & Sons, Washington, District of Columbia, USA (cf. page 103).
- TIRE AND RIM ASSOCIATION, INC. (2018). *2018 Aircraft year book*. Tire and Rim Association, Inc., Copley, Ohio, USA (cf. pages 10, 45, 74).
- TRAN, D.-M. (2001). Component mode synthesis methods using interface modes: application to structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, vol. 79, no. 2, pages 209-222. doi : [10.1016/S0045-7949\(00\)00121-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00121-8) (cf. page 73).
- TRAN, D.-M. (2009). Component mode synthesis methods using partial interface modes: application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, vol. 87, no. 17-18, pages 1141-1153. doi : [10.1016/j.compstruc.2009.04.009](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.04.009) (cf. page 73).
- TSENG, N. T., PELLE, R. G. et CHANG, J. P. (1989). Numerical simulation for the tire-rim interface for a radial passenger tire. *SAE Technical Paper Series 890641*. doi : [10.4271/890641](https://doi.org/10.4271/890641) (cf. pages 21, 130).
- TURANYI, T. (1990). Sensitivity analysis of complex kinetic systems. Tools and applications. *Journal of Mathematical Chemistry*, vol. 5, no. 3, pages 203-248. doi : [10.1007/bf01166355](https://doi.org/10.1007/bf01166355) (cf. pages 69, 101, 109).
- TURCO, E. (1999). A boundary element approach to identify static boundary conditions in elastic solids from stresses at internal points. *Inverse Problems in Engineering*, vol. 7, no. 4, pages 309-333. doi : [10.1080/174159799088027700](https://doi.org/10.1080/174159799088027700) (cf. pages 1, 17).
- TURCO, E. (2005). Is the statistical approach suitable for identifying actions on structures? *Computers & Structures*, vol. 83, no. 25-26, pages 2112-2120. doi : [10.1016/j.compstruc.2005.03.006](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.03.006) (cf. pages 1, 17).
- TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C. et TOPP, L. J. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, vol. 23, no. 9, pages 805-823. doi : [10.2514/8.3664](https://doi.org/10.2514/8.3664) (cf. page 71).
- VALID, R. et OHAYON, R. (1985). Static and dynamic analysis of cyclically symmetric structures. *La Recherche Aérospatiale*, vol. 4, pages 41-53 (cf. page 193).
-

- VAN SCHALKWYK, D. J. (1971). *On the design of mixture experiments*. Thèse de doctorat. University of London, United Kingdom (cf. page 151).
- VEAUX, J. (2006). *Un demi-siècle d'aéronautique en France : les trains d'atterrissage et les systèmes associés*. Centre des hautes études de l'armement, Division Histoire de l'armement (cf. page 6).
- VESCOVO, R. (1997). Inversion of block-circulant matrices and circular array approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 10, pages 1565-1567. doi : [10.1109/8.633869](https://doi.org/10.1109/8.633869) (cf. page 192).
- VITSE, M., PONCELET, M., ISKEF, A. E., DUFOUR, J.-E., GRAS, R., BOUTERF, A., RAKA, B., GIRY, C., GATUINGT, F., HILD, F., RAGUENEAU, F. et ROUX, S. (2019). Toward virtual design and optimization of a structural test monitored by a multi-view system. *SAGE journals* (soumis) (cf. pages 28, 29).
- WALTER, J. D. et KIMINECZ, R. K. (1975). Bead contact pressure measurements at the tire-rim interface. *SAE Technical Paper Series 750458*. doi : [10.4271/750458](https://doi.org/10.4271/750458) (cf. pages 17, 130).
- WAN, X., SHAN, Y., LIU, X., WANG, H. et WANG, J. (2016). Simulation of biaxial wheel test and fatigue life estimation considering the influence of tire and wheel camber. *Advances in Engineering Software*, vol. 92, pages 57-64. doi : [10.1016/j.advengsoft.2015.11.005](https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2015.11.005) (cf. page 21).
- WAN, X., SHAN, Y., LIU, X., HE, T. et WANG, J. (2017). Tire-rim interface pressure of a commercial vehicle wheel under radial loads: theory and experiment. *Measurement Science and Technology*, vol. 28, no. 11, pages 1-9. doi : [10.1088/1361-6501/aa8895](https://doi.org/10.1088/1361-6501/aa8895) (cf. page 17).
- WEYL, H. (1952). *Symmetry*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA (cf. page 76).
- WICKHAM, M. J., RILEY, D. R. et NACHTSHEIM, C. J. (1995). Integrating optimal experimental design into the design of a multi-axis load transducer. *Journal of Engineering for Industry*, vol. 117, no. 3, pages 400-405. doi : [10.1115/1.2804346](https://doi.org/10.1115/1.2804346) (cf. page 146).
- WITZ, J.-F., ROUX, S., HILD, F. et RIEUNIER, J.-B. (2008). Mechanical properties of crimped mineral wools: identification from digital image correlation. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 130, no. 2, pages 1-7. doi : [10.1115/1.2884575](https://doi.org/10.1115/1.2884575) (cf. page 104).
- WYNN, H. P. (1970). The sequential generation of D-optimum experimental designs. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 41, no. 5, pages 1655-1664. doi : [10.1214/aoms/1177696809](https://doi.org/10.1214/aoms/1177696809) (cf. page 151).
- XU, S., DENG, X., TIWARI, V., SUTTON, M. A., FOURNEY, W. L. et BRETALL, D. (2010). An inverse approach for pressure load identification. *International Journal of Impact*

*Engineering*, vol. 37, no. 7, pages 865-877. doi : [10.1016/j.ijimpeng.2009.10.007](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2009.10.007) (cf. pages 1, 17).

ZAHAROV, S. P. (1957). Feasibility study of how to make compression measurements of the tire bead against the rim. *Kauchuk i Rezina*, vol. 16, no. 8, pages 30-31 (cf. page 17).

ZHANG, Z. (1994). Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces. *International Journal of Computer Vision*, vol. 13, no. 2, pages 119-152. doi : [10.1007/BF01427149](https://doi.org/10.1007/BF01427149) (cf. page 37).



## Annexe A

# Utilisation des propriétés de symétrie cyclique

On présente la méthodologie permettant d'obtenir la matrice de raideur de la roue condensée sur l'interface pneu-jante en utilisant les propriétés des structures à symétrie cyclique et en ne modélisant qu'un seul secteur fondamental de la roue.

### Première condensation statique

On considère un secteur fondamental de la roue, comme illustré sur la Figure A.1. Dans la suite, les exposants à gauche  $l$  et  $h$  dénotent, respectivement, les ddl situés sur les frontières basse et haute de ce secteur, tandis que l'exposant  $i$  indique les ddl de l'interface pneu-jante. Les indices supplémentaires 1 et 2 permettent de distinguer respectivement les ddl appartenant uniquement aux frontières et ceux appartenant simultanément aux frontières et à l'interface pneu-jante. Le nombre de ddl associés est désigné ci-après par  $n_l$ ,  $n_h$ ,  $n_i$ ,  $n_{l_1}$ ,  $n_{h_1}$ ,  $n_{l_2}$ , et  $n_{h_2}$ . Pour chaque nœud, les ddl sont définis dans un système de coordonnées cylindriques ( $u_R$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$ ).

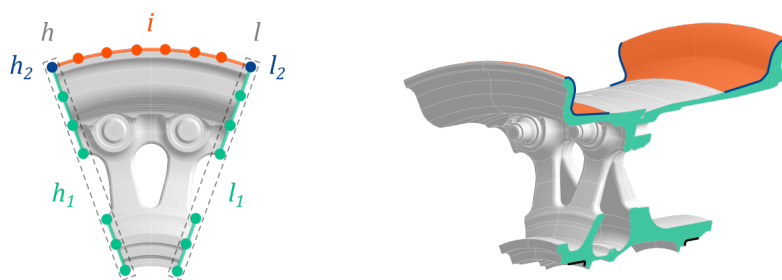


FIGURE A.1 – Secteur fondamental d'une roue d'aéronef

Une première condensation statique (Guyan, 1965) de ce secteur sur les ddl appartenant aux frontières inter-secteurs et à l'interface pneu-jante est réalisée. Une condition d'encastrement est imposée sur les surfaces d'appui des roulements. Une matrice de raideur réduite est obtenue

$$[\hat{\mathbf{K}}_{sec}^{bound+int}] = \begin{bmatrix} [{}^{ll}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{li}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{lh}\hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{li}\hat{\mathbf{K}}]^\top & [{}^{ii}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{ih}\hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{lh}\hat{\mathbf{K}}]^\top & [{}^{ih}\hat{\mathbf{K}}]^\top & [{}^{hh}\hat{\mathbf{K}}] \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\begin{aligned}
 [{}^{ll}\hat{\mathbf{K}}] &= \begin{bmatrix} [{}^{l_1 l_1}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{l_1 l_2}\hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{l_1 l_2}\hat{\mathbf{K}}]^\top & [{}^{l_2 l_2}\hat{\mathbf{K}}] \end{bmatrix} & [{}^{hh}\hat{\mathbf{K}}] &= \begin{bmatrix} [{}^{h_1 h_1}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{h_1 h_2}\hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{h_1 h_2}\hat{\mathbf{K}}]^\top & [{}^{h_2 h_2}\hat{\mathbf{K}}] \end{bmatrix} \\
 [{}^{lh}\hat{\mathbf{K}}] &= \begin{bmatrix} [{}^{l_1 h_1}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{l_1 h_2}\hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{l_2 h_1}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{l_2 h_2}\hat{\mathbf{K}}] \end{bmatrix} & [{}^{li}\hat{\mathbf{K}}] &= \begin{bmatrix} [{}^{l_1 i}\hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{l_2 i}\hat{\mathbf{K}}] \end{bmatrix} \\
 [{}^{ih}\hat{\mathbf{K}}] &= \begin{bmatrix} [{}^{ih_1}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{ih_2}\hat{\mathbf{K}}] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

### Utilisation des propriétés de symétrie cyclique

La matrice de raideur d'une structure à symétrie cyclique est circulante par blocs, chaque bloc étant défini par la matrice de raideur du secteur fondamental (Bladh, 2001). Par extension, la matrice de raideur de la roue condensée sur toutes ses frontières inter-secteurs et sur l'interface pneu-jante peut être obtenue de la même manière (Figure A.2).

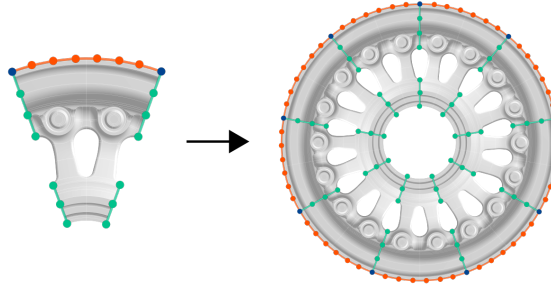


FIGURE A.2 – Utilisation des propriétés de symétrie cyclique

En considérant chaque secteur comme une partie intégrante de la structure complète, les ddl de la frontière haute sont vus comme ceux de la frontière basse du secteur adjacent. Par conséquent, les ddl réduits de la structure complète s'écrivent

$$\{\hat{\mathbf{u}}_{360}\} = \left\{ \{\hat{\mathbf{u}}_0\} \{\hat{\mathbf{u}}_1\} \dots \{\hat{\mathbf{u}}_{N-1}\} \right\}^\top \tag{A.3}$$

avec

$$\{\hat{\mathbf{u}}_j\} = \left\{ \{{}^l\hat{\mathbf{u}}_j\} \{{}^i\hat{\mathbf{u}}_j\} \right\}^\top \quad \forall j \in [0, N-1] \tag{A.4}$$

Les matrices de raideur réduite de tous les secteurs étant identiques, leur assemblage permet d'obtenir la matrice de raideur de la roue condensée sur toutes les frontières inter-secteurs et sur l'interface pneu-jante

$$[{}^{\hat{\mathbf{K}}}_{360}{}^{bound+int}] = \text{Bcirc} \left( [{}^{\hat{\mathbf{K}}}_A], [{}^{\hat{\mathbf{K}}}_B], [\mathbf{0}], \dots, [\mathbf{0}], [{}^{\hat{\mathbf{K}}}_B]^\top \right) \tag{A.5}$$

avec

$$[{}^{\hat{\mathbf{K}}}_A] = \begin{bmatrix} [{}^{ll}\hat{\mathbf{K}}] + [{}^{hh}\hat{\mathbf{K}}] & [{}^{li}\hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{li}\hat{\mathbf{K}}]^\top & [{}^{ii}\hat{\mathbf{K}}] \end{bmatrix} \quad [{}^{\hat{\mathbf{K}}}_B] = \begin{bmatrix} [{}^{lh}\hat{\mathbf{K}}] & [\mathbf{0}]_{n_l \times n_i} \\ [{}^{ih}\hat{\mathbf{K}}] & [\mathbf{0}]_{n_i \times n_i} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

---

## Deuxième condensation statique

Pour obtenir la matrice de raideur de la roue condensée uniquement sur les ddl de l'interface pneu-jante, une seconde condensation statique est nécessaire. Tout d'abord, la matrice de raideur réduite  $[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{bound+int}]$  est réorganisée afin de faire apparaître les nouveaux ddl maîtres et esclaves considérés. Les ddl maîtres (resp. esclaves) sont ceux dénotés par les exposants  $l_2$ ,  $h_2$  et  $i$  (resp.  $l_1$  et  $h_1$ ). Ils sont surlignés en orange et en vert sur la Figure A.3.

$$[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{bound+int}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{K}}_{ss}] & [\hat{\mathbf{K}}_{sm}] \\ [\hat{\mathbf{K}}_{ms}] & [\hat{\mathbf{K}}_{mm}] \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

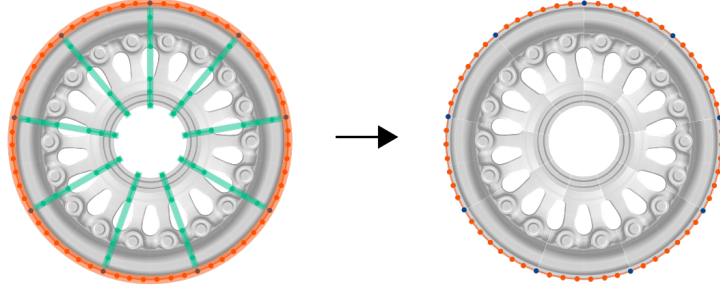


FIGURE A.3 – Deuxième condensation statique

On remarque alors que les sous-blocs  $[\hat{\mathbf{K}}_{ss}]$ ,  $[\hat{\mathbf{K}}_{sm}]$ ,  $[\hat{\mathbf{K}}_{ms}]$  et  $[\hat{\mathbf{K}}_{mm}]$  sont des matrices circulantes par blocs, chaque bloc étant défini à partir de la matrice de raideur réduite du secteur de référence. De plus, les matrices  $[\hat{\mathbf{K}}_{ss}]$  et  $[\hat{\mathbf{K}}_{mm}]$  sont symétriques

$$[\hat{\mathbf{K}}_{ss}] = \text{Bcirc} \left( [{}^{l_1 l_1} \hat{\mathbf{K}}] + [{}^{h_1 h_1} \hat{\mathbf{K}}], [{}^{l_1 h_1} \hat{\mathbf{K}}], [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n_{l_1}}, \dots, [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n_{l_1}}, [{}^{l_1 h_1} \hat{\mathbf{K}}]^\top \right) \quad (\text{A.8})$$

$$[\hat{\mathbf{K}}_{sm}] = \text{Bcirc} \left( \left[ \begin{array}{c} [{}^{l_1 l_2} \hat{\mathbf{K}}] + [{}^{h_1 h_2} \hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{l_1 i} \hat{\mathbf{K}}] \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} [{}^{l_1 h_2} \hat{\mathbf{K}}] \\ [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n_i} \end{array} \right], \right. \\ \left. [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n}, \dots, [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n}, \left[ \begin{array}{c} [{}^{l_2 h_1} \hat{\mathbf{K}}]^\top \\ [{}^{i h_1} \hat{\mathbf{K}}]^\top \end{array} \right] \right) \quad (\text{A.9})$$

$$[\hat{\mathbf{K}}_{mm}] = \text{Bcirc} \left( \left[ \begin{array}{c} [{}^{l_2 l_2} \hat{\mathbf{K}}] + [{}^{h_2 h_2} \hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{l_2 i} \hat{\mathbf{K}}]^\top \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} [{}^{l_2 h_2} \hat{\mathbf{K}}] \\ [{}^{i h_2} \hat{\mathbf{K}}] \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} [\mathbf{0}]_{n_{l_2} \times n_i} \\ [\mathbf{0}]_{n_i \times n_i} \end{array} \right], \right. \\ \left. [\mathbf{0}]_{n \times n}, \dots, [\mathbf{0}]_{n \times n}, \left[ \begin{array}{c} [{}^{l_2 h_2} \hat{\mathbf{K}}]^\top \\ [\mathbf{0}]_{n_i \times n_{l_2}} \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} [{}^{i h_2} \hat{\mathbf{K}}]^\top \\ [\mathbf{0}]_{n_i \times n_i} \end{array} \right] \right) \quad (\text{A.10})$$

avec  $n = n_{l_2} + n_i$ . Par souci de simplicité, on utilise la notation suivante

$$[\hat{\mathbf{K}}_{ss}] = \text{Bcirc} \left( [\mathbf{A}_1], [\mathbf{A}_2], [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n_{l_1}}, \dots, [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n_{l_1}}, [\mathbf{A}_2]^\top \right) \quad (\text{A.11})$$

$$[\hat{\mathbf{K}}_{sm}] = \text{Bcirc} \left( [\mathbf{B}_1], [\mathbf{B}_2], [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n}, \dots, [\mathbf{0}]_{n_{l_1} \times n}, [\mathbf{B}_N] \right) = [\hat{\mathbf{K}}_{ms}]^\top \quad (\text{A.12})$$

$$[\hat{\mathbf{K}}_{mm}] = \text{Bcirc} \left( [\mathbf{C}_1], [\mathbf{C}_2], [\mathbf{0}]_{n \times n}, \dots, [\mathbf{0}]_{n \times n}, [\mathbf{C}_2]^\top \right) \quad (\text{A.13})$$

Ensuite, la matrice de raideur de la roue condensée sur les ddl de l'interface pneu-jante est obtenue en utilisant l'équation classique de la condensation statique

$$[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}] = [\hat{\mathbf{K}}_{mm}] - [\hat{\mathbf{K}}_{ms}][\hat{\mathbf{K}}_{ss}]^{-1}[\hat{\mathbf{K}}_{sm}] \quad (\text{A.14})$$

Puisque la matrice  $[\hat{\mathbf{K}}_{ss}]$  est symétrique et circulante par blocs, son inverse possède les mêmes propriétés. Par conséquent, puisque toutes les matrices impliquées dans l'équation (A.14) sont circulantes par blocs, la matrice  $[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}]$  est également circulante par blocs. Il ne reste plus qu'à déterminer l'expression de ses blocs constitutifs, au lieu d'utiliser l'équation (A.14) telle quelle. L'étape la plus délicate consiste à déterminer les blocs de l'inverse de la matrice  $[\hat{\mathbf{K}}_{ss}]$

$$[\hat{\mathbf{K}}_{ss}]^{-1} = \text{Bcirc} ([\mathbf{D}_1], [\mathbf{D}_2], \dots, [\mathbf{D}_N]) \quad (\text{A.15})$$

Vescovo (1997) a proposé une procédure simplifiée permettant le calcul de l'inverse d'une matrice circulante par blocs basée sur la transformée de Fourier discrète. Les blocs constitutifs de  $[\hat{\mathbf{K}}_{ss}]^{-1}$  sont déterminés par

$$[\mathbf{D}_p] = \text{Re} \left( \frac{1}{N^2} \sum_{q=1}^N \exp \left( \frac{2\pi i(q-1)(p-1)}{N} \right) \times [A^{(q)}]^{-1} \right) \quad \forall p \in [1, N] \quad (\text{A.16})$$

avec

$$[A^{(q)}] = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N [A_p] \exp \left( \frac{-2\pi i(q-1)(p-1)}{N} \right) \quad \forall q \in [1, N] \quad (\text{A.17})$$

On peut alors calculer les produits matriciels de l'équation (A.14)

$$[\hat{\mathbf{K}}_{ms}][\hat{\mathbf{K}}_{ss}]^{-1} = \text{Bcirc} ([\mathbf{E}_1], [\mathbf{E}_2], \dots, [\mathbf{E}_N]) \quad (\text{A.18})$$

et

$$[\hat{\mathbf{K}}_{ms}][\hat{\mathbf{K}}_{ss}]^{-1}[\hat{\mathbf{K}}_{sm}] = \text{Bcirc} ([\mathbf{F}_1], [\mathbf{F}_2], \dots, [\mathbf{F}_N]) \quad (\text{A.19})$$

---

avec

$$[\mathbf{E}_p] = [\mathbf{B}_1]^\top [\mathbf{D}_p] + [\mathbf{B}_2]^\top d_1([\mathbf{D}_p]) + [\mathbf{B}_N]^\top d_{N-1}([\mathbf{D}_p]) \quad \forall p \in [1, N] \quad (\text{A.20})$$

$$[\mathbf{F}_p] = [\mathbf{E}_p][\mathbf{B}_1] + d_{N-1}([\mathbf{E}_p])[\mathbf{B}_2] + d_1([\mathbf{E}_p])[\mathbf{B}_N] \quad \forall p \in [1, N] \quad (\text{A.21})$$

et

$$d_k([\mathbf{D}_p]) = \begin{cases} [\mathbf{D}_{p+k}] & \text{if } p+k \leq N \\ [\mathbf{D}_{p+k-N}] & \text{if } p+k > N \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Enfin, l'expression de chaque bloc de la matrice de raideur de la roue condensée sur les ddl à l'interface pneu-jante est obtenue

$$[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}] = \text{Bcirc}([\mathbf{G}_1], [\mathbf{G}_2], \dots, [\mathbf{G}_N]) \quad (\text{A.23})$$

avec

$$[\mathbf{G}_p] = [\mathbf{C}_p] - [\mathbf{F}_p] \quad \forall p \in [1, N] \quad (\text{A.24})$$

Par conséquent, il n'est pas nécessaire de construire la matrice dans son intégralité, ce qui permet un stockage réduit. De plus, on note que cette matrice est symétrique

$$[\mathbf{G}_p] = [\mathbf{G}_{N-p+2}]^\top \quad \forall p \in [L, N] \quad (\text{A.25})$$

avec  $L = (N + 1)/2$  si  $N$  est impair et  $L = N/2 + 1$  si  $N$  est pair.

## Diagonalisation

La matrice de raideur de la roue condensée à l'interface pneu-jante ayant été obtenue, il est nécessaire de la diagonaliser afin de déterminer les modes propres statiques d'interface pneu-jante

$$\left( [\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}] - \lambda_i [\mathbf{I}] \right) \{\boldsymbol{\Phi}_i\} = \{\mathbf{0}\} \quad (\text{A.26})$$

Cependant, la diagonalisation peut être réalisée d'une manière plus efficace qu'en résolvant directement l'équation précédente. Selon la théorie de la représentation linéaire des groupes finis (Valid et Ohayon, 1985; Ohayon et Soize, 1998) et suivant les travaux de Fortescue (1918), MacNeal *et al.* (1973) et Thomas (1979), la quantité  $\{\hat{\mathbf{u}}_j\}$  associée au  $j$ -ième secteur peut être exprimée en base physique comme une somme de fonctions harmoniques

$$\{\hat{\mathbf{u}}_j\} = \{\tilde{\mathbf{u}}_0^0\} + \sum_{k=1}^K \left[ \{\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,c}\} \cos(jk\alpha) + \{\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,s}\} \sin(jk\alpha) \right] + (-1)^j \{\tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2}\} \quad (\text{A.27})$$

avec  $K = (N - 1)/2$  si  $N$  est impair, et  $K = N/2 - 1$  si  $N$  est pair, et où  $\{\tilde{\mathbf{u}}_0^k\}$  sont les composantes harmoniques complexes d'ordre  $k$ , aussi appelées composantes cycliques, définies sur le secteur fondamental (généralement associée à l'indice 0). En ordonnant les composantes physiques et cycliques de la structure complète telles que

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{u}}\} &= \{\{\hat{\mathbf{u}}_0\} \ \{\hat{\mathbf{u}}_1\} \ \dots \ \{\hat{\mathbf{u}}_{N-1}\}\}^\top \\ \{\tilde{\mathbf{u}}\} &= \left\{ \{\tilde{\mathbf{u}}_0^0\} \ \dots \ \{\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,c}\} \ \{\tilde{\mathbf{u}}_0^{k,s}\} \ \dots \ \{\tilde{\mathbf{u}}_0^{N/2}\} \right\}^\top \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

l'équation (A.27) s'écrit sous forme matricielle

$$\{\hat{\mathbf{u}}\} = ([\mathcal{F}] \otimes [\mathbf{I}]) \{\tilde{\mathbf{u}}\} \quad (\text{A.29})$$

où  $\otimes$  correspond au produit de Kronecker,  $[\mathbf{I}]$  est la matrice identité de taille  $(n_{l_2} + n_i) \times (n_{l_2} + n_i)$ , et  $[\mathcal{F}]$  la matrice de Fourier réelle. En utilisant le changement de coordonnées défini ci-dessus, l'expression de la matrice de raideur réduite  $[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}]$  est obtenue en base cyclique

$$[\tilde{\mathbf{K}}] = \left( [\mathcal{F}]^\top \otimes [\mathbf{I}] \right) [\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}] ([\mathcal{F}] \otimes [\mathbf{I}]) \quad (\text{A.30})$$

Puisque  $[\hat{\mathbf{K}}_{360}^{int}]$  une matrice circulante par blocs, la transformation en composantes cycliques conduit à une matrice pseudo-diagonale par blocs  $[\tilde{\mathbf{K}}]$  où chaque bloc  $[\tilde{\mathbf{K}}^k]$  est défini par

$$[\tilde{\mathbf{K}}^0] = \sum_{p=1}^N [\mathbf{G}_p] \quad (\text{A.31})$$

$$[\tilde{\mathbf{K}}^k] = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^N [\mathbf{G}_p] \cos(k\alpha(p-1)) & \sum_{p=1}^N [\mathbf{G}_p] \sin(k\alpha(p-1)) \\ -\sum_{p=1}^N [\mathbf{G}_p] \sin(k\alpha(p-1)) & \sum_{p=1}^N [\mathbf{G}_p] \cos(k\alpha(p-1)) \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$[\tilde{\mathbf{K}}^{N/2}] = \sum_{p=1}^N (-1)^{p-1} [\mathbf{G}_p] \quad (\text{A.33})$$

Par conséquent, le problème aux valeurs propres (A.26) exprimé en base physique peut être découplé en plusieurs sous-problèmes, de taille plus petite, définis en base cyclique sur le secteur fondamental de la roue et dépendant d'un indice harmonique  $k$

$$[\tilde{\mathbf{K}}^k] \{\tilde{\Phi}_0^k\} = \lambda \{\tilde{\Phi}_0^k\} \quad (\text{A.34})$$

Les solutions de ces problèmes aux valeurs propres peuvent être classées en deux catégories (Ohayon et Soize, 1998). La première correspond aux solutions dites non-dégénérées pour lesquelles la matrice  $[\tilde{\mathbf{K}}^k]$  est de dimension  $(n_{l_2} + n_i) \times (n_{l_2} + n_i)$  et la valeur propre  $\lambda$  est de multiplicité 1. Ces solutions sont associées aux indices harmoniques  $k = 0$  et  $k = N/2$  si  $N$  est pair. Pour  $k = 0$ , tous les secteurs de la structure sont en phase, alors que deux secteurs adjacents sont en opposition de phase pour  $k = N/2$ . La seconde catégorie correspond aux solutions dégénérées pour lesquelles la matrice  $[\tilde{\mathbf{K}}^k]$  est de dimension  $2(n_{l_2} + n_i) \times 2(n_{l_2} + n_i)$ , et la valeur propre  $\lambda$  est de multiplicité 2. Ces solutions sont associées aux indices harmoniques  $k \in [1, K]$ . Les deux modes propres associés à la même valeur propre sont orthogonaux et toute combinaison linéaire de ces modes est également un mode propre de la structure. Une fois que ces problèmes ont été résolus en base cyclique, les modes propres de la structure complète exprimés en base physique sont obtenus en appliquant l'équation (A.27) pour chaque secteur  $j \in [0, N - 1]$ . Ils sont reconstruits séparément pour chaque indice harmonique  $k$

$$\{\Phi\} = (\{\mathcal{F}^0\} \otimes [I]) \{\tilde{\Phi}_0^0\} \quad \text{for } k = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$\{\Phi\} = ([\mathcal{F}^k] \otimes [I]) \begin{bmatrix} \{\tilde{\Phi}_0^{k,c}\} \\ \{\tilde{\Phi}_0^{k,s}\} \end{bmatrix} \quad \forall k \in [1, K] \quad (\text{A.36})$$

$$\{\Phi\} = (\{\mathcal{F}^{N/2}\} \otimes [I]) \{\tilde{\Phi}_0^{N/2}\} \quad \text{for } k = N/2 \quad (\text{A.37})$$

avec

$$\{\mathcal{F}^0\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$[\mathcal{F}^k] = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos(jk\alpha) & \sin(jk\alpha) \\ \vdots & \vdots \\ \cos((N-1)jk\alpha) & \sin((N-1)jk\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$\{\mathcal{F}^{N/2}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Pour les solutions dégénérées, on observe des diamètres nodaux dans les formes des modes (*i.e.*, des lignes le long desquelles le déplacement de la structure est nul). L'utilisation des propriétés de symétrie cyclique permet ainsi d'effectuer l'analyse modale en ne modélisant qu'un secteur fondamental de la roue, ce qui représente un gain important en termes de temps de calcul et de stockage, et sans compromis sur la qualité du résultat obtenu.



# Table des figures

1.1	Exemples d'architecture de roues principales (source : <i>Safran</i> ) . . . . .	6
1.2	Vue détaillée d'une roue principale . . . . .	7
1.3	Repère cartésien global centré sur la roue . . . . .	8
1.4	Exemples d'architecture de pneumatiques pour avion ( <i>Michelin, 2016</i> ) . . . . .	9
1.5	Illustration de la zone basse d'un pneu radial . . . . .	9
1.6	Extrait de l'Aircraft Year Book ( <i>Tire and Rim Association, Inc., 2018</i> ) . . . . .	10
1.7	Machines pour les essais de validation d'une roue d'aéronef (source : <i>Safran</i> ) . . . . .	11
1.8	Modèle de calcul par éléments finis d'une roue d'aéronef . . . . .	12
1.9	Équivalence statique-dynamique pour l'analyse en fatigue d'une roue d'aéronef ( <i>Fish et al., 2002</i> ) . . . . .	13
1.10	Écrasement et déport du pneumatique sous charges . . . . .	14
1.11	Évolution des déformations mesurées et calculées pour un tour de roue dans différentes zones d'une roue principale pour un cas de ripé (source : <i>Safran</i> ) . . . . .	15
1.12	Moyens de mesure des chargements à l'interface pneu-jante . . . . .	17
1.13	Identification de la distribution de la pression de contact à l'interface pneu-jante à partir de mesures par jauges d'extensométrie ( <i>Spencer et al., 1995</i> ) . . . . .	18
1.14	Identification d'efforts nodaux à l'interface pneu-jante à partir de mesures par jauges d'extensométrie ( <i>Heinrietz et al., 2003</i> ) . . . . .	19
1.15	Identification de la distribution de la pression de contact à l'interface pneu-jante à partir de mesures par interférométrie holographique ( <i>Sherwood et al., 1995a</i> ) . . . . .	19
1.16	Expressions analytiques des efforts radial et axial appliqués sur la jante lors d'un cas de gonflage ( <i>Curtiss, 1973</i> ) . . . . .	20
1.17	Approximation de la répartition angulaire de la composante radiale de la pression de contact pneu-jante pour un cas de ligne droite ( <i>Stearns, 2000</i> ) . . . . .	20
1.18	Distributions de la pression de contact à l'interface pneu-jante pour des cas de gonflage obtenues à partir de modélisations par éléments finis du pneumatique . . . . .	21
1.19	Modélisation par éléments finis de l'ensemble pneu-roue ( <i>Meng et al., 2012</i> ) . . . . .	22
1.20	Approximation de la répartition angulaire des efforts radiaux et axiaux à l'interface pneu-jante pour un cas de ligne droite ( <i>Ballo et al., 2018</i> ) . . . . .	22
1.21	Illustration de la démarche choisie . . . . .	23
2.1	Montage expérimental ( <i>Gras, 2015a</i> ) . . . . .	26
2.2	Zones de la roue observées par stéréovision (orange) et sections instrumentées par jauges d'extensométrie (vert) . . . . .	27
2.3	Montage expérimental importé dans le logiciel Blender <sup>TM</sup> ( <i>Gras, 2015a</i> ) . . . . .	28
2.4	Vue de la jante à travers un imageur dans le logiciel Blender <sup>TM</sup> ( <i>Gras, 2015a</i> ) . . . . .	29

TABLE DES FIGURES

2.5	Vues de la jante à travers les différents imageurs (Gras, 2015a)	30
2.6	Positions des jauges dans la section A de la roue	31
2.7	Illustration des jauges positionnées sur la roue	31
2.8	Principe de la mesure de champs de déplacement 3D par stéréocorrélation (Pierré, 2016)	34
2.9	Mires utilisées pour l'étalonnage des imageurs	35
2.10	Illustration des champs de déplacement mesurés pour chaque système de stéréovision avec le logiciel Correli <sup>STC</sup> (Gras, 2015a)	36
2.11	Superposition de la surface reconstruite (bleue) et de la surface théorique observée (verte/jaune) issue du modèle CAO de la roue (Gras, 2015a)	36
2.12	Champs de déplacement mesurés avec le logiciel Correli <sup>STC</sup> pour le cas de gonflage à la pression nominale (Gras, 2015a)	37
2.13	Illustration de l'étape de sélection des surfaces	38
2.14	Écarts de forme entre la surface théorique issue du modèle CAO et celle mesurée après étalonnage (Gras, 2015a)	38
2.15	Superposition de la surface de mesure et du modèle numérique de la roue	39
2.16	Champs de déplacement mesurés avec le code CAD-Correli pour le cas de gonflage à la pression nominale (Gras, 2015a)	39
2.17	Degré de confiance associé à chaque point de mesure et dans chaque direction (Gras, 2015a)	40
2.18	Champs de déplacement mesurés pour le cas de ligne droite	40
2.19	Comparaison des déformations mesurées dans la jante pour différentes sections de la roue (cf. Figures 2.2 et 2.6) en fonction de la pression de gonflage	41
2.20	Illustration de l'évolution au cours du temps des charges et des déformations enregistrées lors du cas de ligne droite	41
3.1	Cas de gonflage du pneu A1 (P = 16,1 bar)	46
3.2	Cas de gonflage du pneu A2 (P = 14,8 bar)	46
3.3	Cas de gonflage du pneu A3 (P = 16,1 bar)	46
3.4	Cas de gonflage du pneu B1 (P = 6,07 bar)	47
3.5	Cas de gonflage du pneu B2 (P = 13,5 bar)	47
3.6	Cas de gonflage du pneu B3 (P = 16,2 bar)	47
3.7	Cas de gonflage du pneu C1 (P = 15,9 bar)	48
3.8	Cas de gonflage du pneu C2 (P = 15,9 bar)	48
3.9	Cas de gonflage du pneu C3 (P = 16,2 bar)	48
3.10	Zones caractéristiques de la jante pour un cas de gonflage	49
3.11	Cas de ligne droite du pneu A1 (P = 16,8 bar et Z = 21780 daN)	51
3.12	Cas de ligne droite du pneu A2 (P = 15,5 bar et Z = 22542 daN)	51
3.13	Cas de ligne droite du pneu A3 (P = 16,7 bar et Z = 31330 daN)	51
3.14	Cas de ligne droite du pneu B1 (P = 6,07 bar et Z = 5868 daN)	52
3.15	Cas de ligne droite du pneu B2 (P = 13,5 bar et Z = 18022 daN)	52
3.16	Cas de ligne droite du pneu B3 (P = 16,2 bar et Z = 27368 daN)	52
3.17	Cas de ligne droite du pneu C1 (P = 15,9 bar et Z = 21530 daN)	53
3.18	Cas de ligne droite du pneu C2 (P = 15,9 bar et Z = 21530 daN)	53
3.19	Cas de ligne droite du pneu C3 (P = 16,2 bar et Z = 27370 daN)	53
3.20	Zones caractéristiques de la jante pour un cas de ligne droite	54
3.21	Influence de la dissymétrie des bourrelets pour des cas de ligne droite des pneus A3 (haut) et B3 (bas)	54

3.22	Cas de ripé du pneu A1 ( $Z = 21780$ daN et $Y = 0,3 Z$ ) . . . . .	56
3.23	Cas de ripé du pneu A2 ( $Z = 22542$ daN et $Y = 0,53 Z$ ) . . . . .	56
3.24	Cas de ripé du pneu A3 ( $Z = 31330$ daN et $Y = -0,3 Z$ ) . . . . .	56
3.25	Cas de ripé du pneu B1 ( $Z = 5868$ daN et $Y = 0,15 Z$ ) . . . . .	57
3.26	Cas de ripé du pneu B2 ( $Z = 18022$ daN et $Y = -0,3 Z$ ) . . . . .	57
3.27	Influence de la dissymétrie des bourrelets pour des cas de ripé du pneu A3 .	58
3.28	Projection des données du pneumaticien sur le maillage éléments finis . . . .	60
3.29	Paramétrisation en séries de Fourier – Cas de gonflage du pneu A2 . . . . .	61
3.30	Paramétrisation en séries de Fourier – Cas de gonflage des pneus B3 et C3 .	61
3.31	Paramétrisation en séries de Fourier – Cas de ligne droite du pneu A2 . . . .	63
3.32	Paramétrisation en séries de Fourier - Cas de ligne droite du pneu C3 . . . .	63
3.33	Paramétrisation en somme de pics – Cas de gonflage du pneu A2 . . . . .	65
3.34	Evolution des déplacements dans la zone de mesure en fonction du nombre de pics – Côté intérieur (gauche) et côté extérieur (droite) . . . . .	66
3.35	Evolution des déformations aux positions des jauges en fonction du nombre de pics – Côté intérieur (gauche) et côté extérieur (droite) . . . . .	67
3.36	Paramétrisation en somme de pics – Cas de ligne droite du pneu A2 . . . . .	68
3.37	Paramétrisation en somme de pics – Cas de ligne droite du pneu C3 . . . . .	69
3.38	Modèle par éléments finis d'une roue d'aéronef . . . . .	73
3.39	Symétrie cyclique d'une roue d'aéronef . . . . .	76
3.40	Utilisation des propriétés de symétrie cyclique pour la détermination des modes propres statiques d'interface pneu-jante . . . . .	77
3.41	Maillage du secteur fondamental . . . . .	77
3.42	Premier mode de l'harmonique 0 . . . . .	78
3.43	Deuxième mode de l'harmonique 0 . . . . .	78
3.44	Troisième mode de l'harmonique 0 . . . . .	78
3.45	Premier mode de l'harmonique 1 . . . . .	79
3.46	Deuxième mode de l'harmonique 1 . . . . .	79
3.47	Premier mode symétrique de l'harmonique 1 . . . . .	79
3.48	Premier mode symétrique de l'harmonique 2 . . . . .	80
3.49	Premier mode symétrique de l'harmonique 3 . . . . .	80
3.50	Premier mode symétrique de l'harmonique 4 . . . . .	80
3.51	Profil de jante de la roue étudiée . . . . .	83
3.52	Exemples de champs de pression de contact pneu-jante pour le pneu A2 . .	84
3.53	Exemples de champs de pression de contact pneu-jante pour le pneu C3 . .	84
3.54	Contribution énergétique des modes propres statiques d'interface pneu-jante pour différents cas de charge – Pneu A2 . . . . .	85
3.55	Classement par contribution énergétique décroissante – Cas de ligne droite du pneu A2 . . . . .	86
3.56	Evolution des résultantes d'effort en fonction du nombre de modes conservés – Cas de ligne droite du pneu A2 . . . . .	86
3.57	Déplacements à l'interface pneu-jante obtenus avec le chargement de ré- férence (haut), l'approximation à 19 modes (milieu) et différence associée (bas) - Cas de ligne droite du pneu A2 . . . . .	87
3.58	Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JF3 . . . . .	88
3.59	Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JF5 . . . . .	88

3.60	Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JF8 . . . . .	89
3.61	Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JV11 . . . . .	89
3.62	Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JV13 . . . . .	89
3.63	Évolution des déformations pour un tour de roue en fonction du nombre de modes – Jauge JV17 . . . . .	90
3.64	Contribution énergétique des modes propres statiques d’interface pneu-jante pour différents cas de charge – Pneu C3 . . . . .	90
3.65	Classement par contribution énergétique décroissante – Cas de ligne droite du pneu C3 . . . . .	91
3.66	Évolution des résultantes d’effort en fonction du nombre de modes conservés – Cas de ligne droite du pneu C3 . . . . .	91
3.67	Déplacements à l’interface pneu-jante obtenus avec le chargement de référence (haut), l’approximation à 18 modes (milieu) et différence associée (bas) - Cas de ligne droite du pneu C3 . . . . .	92
4.1	Schéma de principe de la méthode de recalage de modèle par éléments finis (FEMU- $u$ ) . . . . .	105
4.2	Processus d’identification inverse dans la plateforme <i>ANSYS® Workbench™</i>	106
4.3	Maillage du modèle éléments finis non-linéaire . . . . .	107
4.4	Conditions aux limites du modèle éléments finis non-linéaire . . . . .	108
4.5	Maillage du modèle éléments finis linéaire . . . . .	108
4.6	Écarts en déplacement dus à une variation de 10% du paramètre $p_{s1}$ . . . . .	111
4.7	Écarts en déplacement dus à une variation de 10% du paramètre $p_{s2}$ . . . . .	111
4.8	Écarts en déplacement dus à une variation de 10% du paramètre $h_2$ . . . . .	111
4.9	Matrice hessienne pour les champs de déplacement . . . . .	112
4.10	Diagonalisation de la matrice hessienne pour les champs de déplacement . . . . .	113
4.11	Écarts en déformation aux positions des jauges dus à une variation de 10% des paramètres décrivant le champ de pression . . . . .	114
4.12	Matrices hessiennes des jauges de déformation positionnées sur la demi-roue intérieure . . . . .	115
4.13	Matrices hessiennes des jauges de déformation positionnées sur la demi-roue extérieure . . . . .	116
4.14	Matrice hessienne pour l’ensemble des déformations aux positions des jauges	117
4.15	Diagonalisation de la matrice hessienne pour les déformations aux positions des jauges . . . . .	117
4.16	Évolutions de l’écart RMS en déplacement (gauche) et des paramètres recherchés par rapport à leur valeur initiale (droite) en fonction du nombre d’itérations . . . . .	119
4.17	Comparaison des champs de pression de contact avant/après identification . . . . .	119
4.18	Comparaison entre les champs de déplacement mesurés (haut), calculés avant identification (milieu) et après identification (bas) dans chaque direction . . . . .	120
4.19	Résidus entre les champs de déplacement mesurés et calculés : avant identification (haut) et après identification (bas) . . . . .	121

4.20	Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification . . . . .	122
4.21	Comparaison des champs de pression de contact pour différentes identifications	123
4.22	Évolution de l'écart RMS en déplacement en fonction du nombre d'itérations	124
4.23	Évolution des paramètres recherchés par rapport à leur valeur initiale en fonction du nombre d'itérations . . . . .	125
4.24	Comparaison des chargements à l'interface pneu-jante avant/après identification . . . . .	125
4.25	Résidus entre les champs de déplacement mesurés et calculés après identification : avec la paramétrisation en somme de deux pics gaussiens (haut) et avec la paramétrisation basée sur les modes propres d'interface (bas) . . . .	126
4.26	Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification . . . . .	127
4.27	Degré de confiance associé à chaque point de mesure et dans chaque direction	127
4.28	Comparaison entre les déformations mesurées et calculées après identification – Influence de la prise en compte des incertitudes de mesure – 5 modes	128
4.29	Comparaison entre les déformations mesurées et calculées après identification – Influence de la prise en compte des incertitudes de mesure – 9 modes	129
4.30	Interférence pneu-jante . . . . .	130
4.31	Évolution de la zone de compression lors de la montée du pneu sur la jante	131
4.32	Impact du gonflage sur la répartition des pressions de contact pneu-jante . .	131
4.33	Montage et gonflage d'un pneumatique sur une roue d'aéronef . . . . .	132
4.34	Historique des essais réalisés . . . . .	132
4.35	Instrumentation de la section A de la roue testée et jauges d'intérêt . . . . .	133
4.36	Évolution de la pression d'azote et des déformations mesurées aux positions des jauges (cf. Figure 4.35) en fonction du temps – Gonflage 2 . . . . .	133
4.37	Déformées de la jante en fonction de l'étape considérée . . . . .	134
4.38	Évolution de la pression d'azote et des déformations mesurées aux positions des jauges (cf. Figure 4.35) en fonction du temps – Gonflage 3 . . . . .	135
4.39	Comparaison entre les déformations mesurées lors des différents gonflages	136
4.40	Classement par contribution énergétique décroissante – Différence entre les cas de ligne droite et de gonflage du pneu A2 . . . . .	138
4.41	Comparaison entre les champs de déplacement mesurés (haut), calculés avant identification (milieu) et après identification (bas) dans chaque direction . . . . .	139
4.42	Résidus entre les champs de déplacement mesurés et calculés : avant identification (haut) et après identification (bas) . . . . .	140
4.43	Sections de la roue instrumentées par jauges de déformation . . . . .	140
4.44	Positions des jauges dans la section A de la roue . . . . .	141
4.45	Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification au niveau du moyeu . . . . .	141
4.46	Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification au niveau du voile . . . . .	142
4.47	Comparaison entre les déformations mesurées et calculées avant/après identification au niveau de la jante . . . . .	142
5.1	Modèle éléments finis 2D axisymétrique de la roue . . . . .	152

TABLE DES FIGURES

---

5.2	Déformée de la roue pour les 8 premiers modes propres d'interface pneu-jante 2D (facteur d'échelle $\times 100$ ) – Norme du déplacement (mm) . . . . .	153
5.3	Contribution énergétique des modes propres statiques d'interface pneu-jante 2D pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3 . . . . .	154
5.4	Déformée de la roue pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3 (facteur d'échelle $\times 50$ ) – Norme du déplacement (mm) . . . . .	155
5.5	Amplitudes modales de référence pour les cas de gonflage des deux pneumatiques A2 et C3 . . . . .	156
5.6	Instrumentation classique d'une section de la roue testée . . . . .	156
5.7	Déformations aux positions des jauges pour les cas de gonflage étudiés . . . . .	157
5.8	Matrice $[\mathbf{A}]$ pour une instrumentation classique . . . . .	157
5.9	Matrice de covariance des paramètres $[\mathbf{C}]$ pour une instrumentation classique	158
5.10	Comparaison entre les amplitudes modales de référence et celles identifiées avec une instrumentation classique pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3 . . . . .	158
5.11	Matrice de corrélation des paramètres $[\mathbf{R}]$ pour une instrumentation classique	159
5.12	Positions des 148 jauges potentielles pour l'identification des chargements . . . . .	160
5.13	Évolution du déterminant de la matrice d'information en fonction du nombre d'itérations . . . . .	160
5.14	Positions des 12 jauges retenues pour l'instrumentation optimisée #1 . . . . .	161
5.15	Matrices de covariance et de corrélation des paramètres pour l'instrumentation optimisée #1 . . . . .	161
5.16	Comparaison entre les amplitudes modales de référence et celles identifiées avec l'instrumentation optimisée #1 pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3 . . . . .	162
5.17	Positions des 12 jauges retenues pour l'instrumentation optimisée #2 . . . . .	162
5.18	Positions des 12 jauges retenues pour l'instrumentation optimisée #3 . . . . .	163
5.19	Matrices de covariance et de corrélation des paramètres pour l'instrumentation optimisée #3 . . . . .	163
5.20	Évolution de la plus petite valeur propre de la matrice d'information en fonction du nombre d'itérations . . . . .	164
5.21	Positions des 17 jauges retenues pour l'instrumentation optimisée #4 . . . . .	165
5.22	Matrices de covariance et de corrélation des paramètres pour l'instrumentation optimisée #4 . . . . .	165
5.23	Comparaison entre les amplitudes modales de référence et celles identifiées avec l'instrumentation optimisée #4 pour les cas de gonflage des pneumatiques A2 et C3 . . . . .	166
A.1	Secteur fondamental d'une roue d'aéronef . . . . .	189
A.2	Utilisation des propriétés de symétrie cyclique . . . . .	190
A.3	Deuxième condensation statique . . . . .	191

**Titre :** Identification des chargements exercés par un pneumatique sur une roue d'aéronef

**Mots clefs :** roue, pneumatique, corrélation d'images numériques, stéréocorrélation, identification, problème inverse

**Résumé :** Le caractère prédictif des simulations numériques faites pour dimensionner une structure dépend directement de la précision avec laquelle sont introduites les conditions aux limites imposées en service à la structure. Dans le cas d'une roue d'aéronef, les chargements appliqués par les différents pneumatiques qui peuvent être montés sur celle-ci lors des manœuvres au sol de l'aéronef jouent un rôle crucial dans la précision du modèle numérique. Cependant, ces chargements sont complexes et mal connus. Les charges globales appliquées à l'interface pneu-piste sont transférées à la roue au niveau de l'interface pneu-jante grâce au pneumatique, qui est un composant intermédiaire sophistiqué que ne maîtrise pas le fabricant de roue. La détermination des conditions aux limites directement appliquées à la roue est donc particulièrement difficile et nécessite de faire des hypothèses sur le comportement en déformation du pneumatique. L'approche proposée dans le cadre de ces travaux de thèse consiste à identifier les chargements induits par le pneumatique sur la roue via la mesure de la déformée de cette dernière pour les différents cas de charge envisagés. L'objectif est de permettre au concepteur de la roue de mieux comprendre et de modéliser l'interaction entre le pneumatique et la roue afin d'obtenir des simulations numériques plus prédictives. Pour ce faire, une paramétrisation objective des chargements à l'interface pneu-jante, aussi robuste et compacte que possible, est tout d'abord définie. Des mesures non-intrusives par corrélation d'images numériques (CIN) et jauges d'extensométrie, réalisées lors d'un post-doctorat antérieur à ces travaux de thèse, sont ensuite utilisées pour calibrer les paramètres recherchés. Une procédure de recalage de modèle par éléments finis est notamment mise en œuvre. Enfin, la problématique du placement optimal de capteurs est abordée afin de définir une instrumentation permettant de minimiser les incertitudes sur les paramètres à identifier.



**Titre :** Identification des chargements exercés par un pneumatique sur une roue d'aéronef

**Mots clefs :** roue, pneumatique, corrélation d'images numériques, stéréocorrélation, identification, problème inverse

**Résumé :** Le caractère prédictif des simulations numériques faites pour dimensionner une structure dépend directement de la précision avec laquelle sont introduites les conditions aux limites imposées en service à la structure. Dans le cas d'une roue d'aéronef, les chargements appliqués par les différents pneumatiques qui peuvent être montés sur celle-ci lors des manœuvres au sol de l'aéronef jouent un rôle crucial dans la précision du modèle numérique. Cependant, ces chargements sont complexes et mal connus. Les charges globales appliquées à l'interface pneu-piste sont transférées à la roue au niveau de l'interface pneu-jante grâce au pneumatique, qui est un composant intermédiaire sophistiqué que ne maîtrise pas le manufacturier de roue. La détermination des conditions aux limites directement appliquées à la roue est donc particulièrement difficile et nécessite de faire des hypothèses sur le comportement en déformation du pneumatique. L'approche proposée dans le cadre de ces travaux de thèse consiste à identifier les charge-

ments induits par le pneumatique sur la roue via la mesure de la déformée de cette dernière pour les différents cas de charge envisagés. L'objectif est de permettre au concepteur de la roue de mieux comprendre et de modéliser l'interaction entre le pneumatique et la roue afin d'obtenir des simulations numériques plus prédictives. Pour ce faire, une paramétrisation objective des chargements à l'interface pneu-jante, aussi robuste et compacte que possible, est tout d'abord définie. Des mesures non-intrusives par corrélation d'images numériques (CIN) et jauges d'extensométrie, réalisées lors d'un post-doctorat antérieur à ces travaux de thèse, sont ensuite utilisées pour calibrer les paramètres recherchés. Une procédure de recalage de modèle par éléments finis est notamment mise en œuvre. Enfin, la problématique du placement optimal de capteurs est abordée afin de définir une instrumentation permettant de minimiser les incertitudes sur les paramètres à identifier.

**Title :** Identification of the loading applied by a tire on an aircraft wheel

**Keywords :** wheel, tire, digital image correlation, stereocorrelation, identification, inverse problem

**Abstract :** The predictive character of numerical simulations run to design a structure critically depends on the accuracy with which the boundary conditions prescribed on the structure are introduced. For aircraft wheel manufacturers, the loadings applied to the wheel during ground maneuvering by various tires that are mounted play an important role. However, they are hardly known apart from the resultant force between the ground and the tire. Aircraft wheel manufacturers do not control the tire, which is a complex intermediate component, but must still work with it to design their products. Because tire-ground loads are transmitted to the wheel through the tire at the tire-rim interface, assumptions on the deformation behavior of the tire are to be made to determine the correct applied loading to the wheel and many experiments are often required to evaluate the wheel structural response. The knowledge of tire-rim interface loadings would thus provide an invaluable help to shorten aircraft wheel design pro-

cesses. To tackle this challenge, an inverse identification procedure of tire-rim loadings for several cases is proposed herein. The aim is to identify the loadings applied by a tire on an aircraft wheel via the measurement of the wheel deformation and to allow the wheel manufacturer to better understand and model the interaction between the wheel and the tire. First, an objective parameterization of tire-rim loadings, which is as robust and compact as possible, is defined. Then, non-intrusive measurements (*e.g.*, displacement fields obtained by Digital Image Correlation analyses, strains at gauge locations) obtained during a previous postdoctoral research are used to calibrate the loading parameters. A finite element model updating algorithm is used to solve this inverse problem. Last, the optimal sensor placement problem is considered to define an instrumentation that yields the most accurate estimates of the loading parameters.