



**HAL**  
open science

# Cohomologie bigraduée arithmétique d'espaces réels clos

Pierre Martinez

► **To cite this version:**

Pierre Martinez. Cohomologie bigraduée arithmétique d'espaces réels clos. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Brest, 2025. Français. ⟨NNT : 2025BRUN0037⟩. ⟨tel-05491461⟩

**HAL Id: tel-05491461**

**<https://theses.hal.science/tel-05491461v1>**

Submitted on 3 Feb 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

ÉCOLE DOCTORALE N° 644

*Mathématiques et Sciences et Technologies*

*de l'Information et de la Communication en Bretagne Océane*

*Spécialité : Mathématiques et leurs Interactions*

Par

**Pierre MARTINEZ**

**Cohomologie bigraduée arithmétique d'espaces réels clos**

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 17 juin 2025

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique, CNRS, UMR 6205

## Rapporteurs avant soutenance :

Olivier BENOIST    Chargé de recherche CNRS, DMA ENS, Paris  
Jean FASEL        Professeur des universités, Institut Fourier, Grenoble

## Composition du Jury :

Président :	Erwan ROUSSEAU	Professeur des universités, Université de Bretagne Occidentale, LMBA
Examineurs :	Adrien DUBOULOZ	Directeur de recherche CNRS, Laboratoire de Mathématiques et Applications, Poitiers
	Jean FASEL	Professeur des universités, Institut Fourier, Grenoble
	Goulwen FICHOU	Maître de conférences, IRMAR, Rennes
	Lucy MOSER-JAUSLIN	Professeure des universités, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Dijon
	Susanna ZIMMERMANN	Professeure des universités, Dpt Mathematik und Informatik, Universität Basel
Dir. de thèse :	Johannes HUISMAN	Professeur des universités, Université de Bretagne Occidentale, LMBA



# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	5
<b>Introduction (en anglais)</b>	14
<b>1 L'exponentielle arithmétique et la complétion profinie</b>	<b>23</b>
1 Le cas ponctuel et discret . . . . .	23
2 Des remarques sur le point de vue topologique . . . . .	32
3 Quelques résultats généraux sur les groupes topologiques . . . . .	32
4 Groupes profinis . . . . .	34
5 Une notion de complétion profinie pour les (pré)faisceaux abéliens . . . . .	41
6 Objets profinis dans les catégories abéliennes . . . . .	42
<b>2 Cohomologie bigraduée d'espaces réels</b>	<b>53</b>
1 Espaces réels . . . . .	53
2 Complexes de réduction analytique . . . . .	55
3 Cohomologie bigraduée analytique . . . . .	56
4 Triangles exponentiel et fondamentaux sur un espace réel . . . . .	57
<b>3 Cohomologie bigraduée arithmétique d'espaces réels</b>	<b>59</b>
1 Morphismes de suites exponentielles et complétion de faisceaux abéliens . . . . .	59
1.1 La suite exponentielle arithmétique faisceautique . . . . .	59
1.2 Complexes de réduction arithmétique . . . . .	75
2 Des calculs rassurants . . . . .	81
2.1 La cohomologie du point . . . . .	81

2.2	La cohomologie des espaces affines . . . . .	82
3	Un théorème de comparaison pour les espaces réels . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Des versions semi-algébriques des cohomologies bigraduées</b>	<b>91</b>
1	Théorie semi-algébrique de Delfs, Knebusch, Schwartz et espaces réels clos . . . . .	92
2	Cohomologie bigraduée analytique d'espaces réels clos . . . . .	97
2.1	Espaces réels clos sur le corps des nombres réels . . . . .	102
2.2	Extension du corps réel clos . . . . .	105
3	Cohomologie bigraduée arithmétique d'espaces réels clos . . . . .	109
4	Un théorème de comparaison pour les espaces réels clos . . . . .	111
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>

# Introduction

---

CE texte trouve son origine dans le morphisme exponentiel et la suite exponentielle *en géométrie algébrique réelle* introduite par J. Huisman dans l'article [Hui02]. Cependant, le point de vue des catégories dérivées, chose essentielle pour la cohomologie dont il est question dans le titre de cette thèse, y est manquant. En se basant sur des idées de Huisman [Hui], D. Gleuher se chargera bien plus tard de remédier à cette situation dans sa thèse [Gle19] en construisant des groupes de *cohomologie bigradués*  $H_{\text{an}}^{*,*}$  à partir de complexes de faisceaux abéliens  $\mathbf{Z}(*)^{\text{an}}$  provenant du morphisme exponentiel en question.

Appelons  $C_2$  le groupe cyclique à deux éléments que l'on verra, concrètement, comme le groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ . En réalité, cette suite exponentielle n'est pas, comme à l'accoutumée, une suite exacte courte car on travaille sur l'espace quotient  $X := Y/C_2$  d'un  $C_2$ -espace topologique  $Y$  dont le faisceau des « fonctions continues » à valeurs complexes est noté  $\mathcal{O}_X$ . Il est défini par la formule  $\mathcal{O}_X := \gamma_*(\mathcal{C}_Y)^{C_2}$  où  $\gamma : Y \rightarrow X$  est le passage au quotient et  $\mathcal{C}_Y$  est le faisceau des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbf{C}$  sur  $Y$  que l'on munit d'une action du groupe  $C_2$  : pour tout ouvert  $\mathcal{U} \subseteq Y$  et à toute section  $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{C}_Y)$  on associe la section  $\sigma f \in \Gamma(\sigma(\mathcal{U}), \mathcal{C}_Y)$  définie par  $(\sigma f)(y) := \sigma(f(\sigma \cdot y))$ . En particulier, c'est un faisceau en  $\mathbf{R}$ -algèbres locales dont le corps résiduel de la fibre en l'image par  $\gamma$  d'un point fixe par l'action galoisienne est isomorphe à  $\mathbf{R}$  et non canoniquement isomorphe à  $\mathbf{C}$  dans le cas contraire. Le morphisme exponentiel

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}^{\text{an}}} \mathcal{O}_X^{\times}$$

n'étant ni injectif ni surjectif en général, la suite exacte exponentielle (complexe) habituelle se voit donc remplacée par un triangle exact dans la catégorie dérivée correspondante :

**Théorème 0.1** (cf. Théorème 4.1). *Soit  $X$  un espace réel. On a un triangle exact naturel en l'espace réel, appelé triangle exponentiel analytique sur  $X$ ,*

$$\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}^{\text{an}}} \mathcal{O}_X^{\times} \longrightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{an}}[1]$$

dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X)$ .

Les complexes supérieurs  $\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}$  sont ensuite donnés par les puissances tensorielles du complexe  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}$

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{an}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{an}})^{\otimes q}$$

et la cohomologie bigraduée est l'hypercohomologie de ces complexes de faisceaux,

$$H_{\text{an}}^{p,q}(X) := H_{\text{an}}^{p,q}(X, \mathbf{Z}) := \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{an}}).$$

L'intérêt de cette théorie cohomologique bigraduée réside alors dans son rapport avec la cohomologie  $C_2$ -équivariante. Plus précisément, comme expliqué dans [Hui] et, plus récemment, dans [Hui24], si  $Y$  est un  $C_2$ -espace dont on note  $X := Y/C_2$  l'espace des orbites, on a des morphismes *de raffinement*

$$r : H_{\text{an}}^{p,q}(X) \longrightarrow H_{C_2}^p(Y, \mathbf{Z}\{q\})$$

où  $\mathbf{Z}\{q\} := (\sqrt{-1})^q \mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{C}$  désigne le twist « à la Tate » muni de l'action naturelle du groupe  $\text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ . Un petit point lexical s'impose ici : un tel couple  $(X, Y)$  sera qualifié d'*espace réel*, l'espace  $Y$  est la *complexification* de l'espace réel et l'espace des *points réels*  $X(\mathbf{R})$  de l'espace réel est l'image par le morphisme quotient  $\gamma : Y \longrightarrow X = Y/C_2$  des points fixes de l'action, *i.e.*  $X(\mathbf{R}) := \gamma(Y^{C_2})$ . Ce choix de vocabulaire nous est dicté par la géométrie algébrique réelle. En effet, étant donnée  $X$  une variété algébrique réelle (un schéma séparé de type fini sur  $\mathbf{R}$ ), le groupe  $\text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$  agit naturellement sur l'espace des points complexes  $X(\mathbf{C})$  muni de sa topologie analytique et il y a une bijection

$$X(\mathbf{C})/C_2 \xrightarrow{\cong} \{\text{points fermés du schéma } X\}$$

dont on s'empresse de tirer parti pour munir l'espace  $X(\mathbf{C})/C_2$  de la topologie « euclidienne » et faire l'identification suivante,

$$X := X(\mathbf{C})/C_2.$$

On a ainsi des morphismes

$$r : H_{\text{an}}^{p,q}(X) \longrightarrow H_{C_2}^p(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}\{q\}).$$

De plus, Huisman montre que l'on peut construire des classes caractéristiques  $cw_p(E) \in H_{\text{an}}^{2p,p}(X)$ , dites *de Chern-Stiefel-Whitney*, attachées à tout fibré vectoriel réel  $E$  sur le quotient  $X = X(\mathbf{C})/C_2$  qui

sont telles qu'il y a un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\text{an}}^{2p,p}(X) & \xrightarrow{\quad \tilde{r} \quad} & H^{2p}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \\
 \downarrow \rho & \searrow r & \downarrow f \\
 & H_{C_2}^{2p}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}\{p\}) & \\
 & \swarrow \text{res} & \\
 H^p(X(\mathbf{R}), \mathbf{Z}/2) & & 
 \end{array} \tag{o.1}$$

dans lequel on ait les égalités

$$r(\text{cw}_p(E)) = c_p^{C_2}(E(\mathbf{C})), \quad \tilde{r}(\text{cw}_p(E)) = c_p(E(\mathbf{C})) \quad \text{et} \quad \rho(\text{cw}_p(E)) = w_p(E(\mathbf{R})) \tag{o.2}$$

avec  $c_*^{C_2}(E(\mathbf{C}))$  les classes de Chern équivariantes dues à B. Kahn et V.A. Krasnov [Kah87], [Kra91], [Kra94],  $c_*(E(\mathbf{C}))$  et  $w_*(E(\mathbf{R}))$  les classes de Chern et Stiefel-Whitney des fibrés complexe et réel  $E(\mathbf{C})$  et  $E(\mathbf{R})$ . Notamment, la première classe de Chern-Stiefel-Whitney est obtenue via le morphisme connectant

$$\text{cw}_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{Z}(1)^{\text{an}}) = H_{\text{an}}^{2,1}(X)$$

de la suite exacte longue de groupes de cohomologie issue du triangle exponentiel analytique.

*Remarque o.2.* Pour la commodité du lecteur nous n'avons inclus que le cas particulier d'un espace réel associé à une variété algébrique réelle mais ces résultats sont complètement topologiques. Plus généralement, on a toujours les diagrammes (o.1) et (o.2) pour un fibré vectoriel réel sur un espace réel  $(X, Y)$  et les classes de Chern-Stiefel-Whitney constituent une réelle unification de la théorie des classes de Chern et de Stiefel-Whitney puisque l'on peut relever celles-ci le long des morphismes  $\rho$  et  $\tilde{r}$ .

Inspiré par le papier de A. Grothendieck [Gro68] dans lequel il demande une définition *purement algébrique* de classes de Chern, il faut entendre par là de nature non topologique (analytique) ou transcendante, nous produisons un substitut *arithmétique* de l'exponentielle complexe

$$\text{exp} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$$

sur un espace topologique annelé par les fonctions continues à valeurs complexes (*i.e.*  $\mathcal{O}$  est le faisceau de telles fonctions) que l'on renommera *exponentielle analytique*, notée  $\text{exp}^{\text{an}}$ . Pour aller très vite, Grothendieck parvient au but qu'il s'est fixé en remplaçant la suite exacte exponentielle

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\text{exp}^{\text{an}}} \mathcal{O}^\times \longrightarrow 0$$

par la suite exacte de Kummer

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbf{G}_m \longrightarrow 0.$$

Cela n'a que peu d'importance mais nous préférons plutôt utiliser le mot *arithmétique* puisque nous faisons le choix de ne conserver de l'exponentielle analytique que la propriété de sélection cohérente de racines  $n$ -ièmes : pour tous les entiers  $m, n \geq 1$  tels que  $m$  divise  $n$ , on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 z^{\frac{1}{n}} = \exp^{\text{an}}\left(\frac{\omega}{n}\right) & & \\
 \uparrow & \searrow \cdot n & \\
 \mathbf{C}^\times & & \mathbf{C}^\times \\
 \downarrow \cdot \frac{n}{m} & \searrow \cdot m & \uparrow \\
 \mathbf{C}^\times & & z = \exp^{\text{an}}(\omega) \\
 \downarrow & & \\
 (z^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}} = (\exp^{\text{an}}\left(\frac{\omega}{n}\right))^{\frac{n}{m}} = \exp^{\text{an}}\left(\frac{\omega}{m}\right) = z^{\frac{1}{m}} & & 
 \end{array}$$

Reste alors à extraire de cette observation la définition centrale de notre étude.

**Définition 0.3** (cf. Définition 1.7). Soit  $A$  un groupe abélien, considérons l'ensemble partiellement ordonné  $(\mathbf{N}^*, |)$  et le système projectif de groupes abéliens sur  $(\mathbf{N}^*, |)$  donné par :

- Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $A_n := A$ ,
- Pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers  $\geq 1$  tels que  $m | n$ , le morphisme de transition  $\varphi_{nm}$  est la multiplication par l'entier  $\frac{n}{m}$ ,

$$\varphi_{nm} : \begin{array}{l} A_n \longrightarrow A_m \\ a \longmapsto \frac{n}{m} \cdot a \end{array} .$$

La *co-enveloppe uniquement divisible* de  $A$ , notée  $A_1$ , est la limite projective de ce système.

On obtient ensuite le *morphisme exponentiel arithmétique* en considérant la projection sur le premier facteur

$$\exp^{\text{ar}} : A_1 = \lim_{m|n} A \longrightarrow A_1 = A.$$

*Remarque 0.4.* La co-enveloppe uniquement divisible a auparavant été examinée par J-P. Serre dans le cadre des groupes algébriques [Ser60, §6.5, Prop. 9].

Remarquez que, par construction, ce dernier commute avec l'action naturelle du groupe des automorphismes  $\text{Aut}(A)$  donc, en particulier, avec l'action galoisienne dans les cas qui nous intéressent, ce

qui n'arrive pas (et c'est malheureux) avec l'exponentielle analytique à moins que les automorphismes ne soient continus. Comme on l'explique dans le chapitre 1, et c'est confirmé par la propriété universelle qui suit, tout ceci a fort à voir avec les propriétés de divisibilité des objets que l'on examine ce qui justifie, si l'on veut, la terminologie adoptée.

**Proposition 0.5** (cf. Faits 1.2). *Soient  $\mathcal{C}$  un site de Grothendieck et  $\mathcal{F}$  un objet de  $\mathbf{Ab}(\mathcal{C})$ .*

1. *La construction de la co-enveloppe uniquement divisible  $\mathcal{F}_!$  du faisceau  $\mathcal{F}$  et de l'exponentielle arithmétique  $\exp^{\text{ar}} : \mathcal{F}_! \rightarrow \mathcal{F}$  se font exactement de la même manière que dans le cas ponctuel.*
2. *Pour tout faisceau uniquement divisible  $\mathcal{D} \in \mathbf{Ab}(\mathcal{C})$  et pour tout morphisme de faisceaux  $\theta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ , il existe un unique morphisme de faisceaux  $\tilde{\theta} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}_!$  tel que  $\exp^{\text{ar}} \circ \tilde{\theta} = \theta$ ,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{F} \\ & \searrow \tilde{\theta} & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & & \mathcal{F}_! \end{array}$$

Explicitons, par exemple, la co-enveloppe uniquement divisible du groupe  $A = \mathbf{C}^\times$ . L'existence de la forme exponentielle des nombres complexes se traduit en un isomorphisme de groupes  $\mathbf{C}^\times \simeq \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}_{>0}$  donc, comme le groupe  $\mathbf{R}_{>0}$  est uniquement divisible et que l'opération  $\cdot_!$  préserve les produits, il suffit de traiter le cas du cercle unité  $\mathbf{S}^1$ . Or, par coïncidence, le groupe  $\mathbf{S}_!^1$  est un objet bien connu : c'est le *solénoïde adélique* [BV19]. On a un isomorphisme canonique de groupes topologiques avec le groupe des classes d'adèles [KS18, Prop. 2.1]

$$\mathbf{S}_!^1 \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{Q}} / \mathbf{Q}$$

où  $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}} := \mathbf{R} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^f = \mathbf{R} \times (\widehat{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})$  est l'anneau des adèles rationnelles et  $\mathbf{Q}$  est diagonalement plongé dans  $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ . Par conséquent, on se retrouve avec un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 2i\pi\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{C} & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathbf{C}^\times \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \widehat{\exp^{\text{an}}} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & \mathbf{C}_!^\times \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{Q}} / \mathbf{Q} \times \mathbf{R}_{>0} & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & \mathbf{C}^\times \longrightarrow 0. \end{array}$$

Si  $X := (X, Y)$  est un espace réel, on a un morphisme de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z}(1)^{\text{an}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathcal{O}_X^\times & \longrightarrow & \mathbf{Z}(1)^{\text{an}}[1] \\ & & \downarrow & & \downarrow \widehat{\exp^{\text{an}}} & & \parallel \\ \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^\times & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & \mathcal{O}_X^\times & \longrightarrow & \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}[1]. \end{array}$$

Une fois construit, à partir de l'exponentielle arithmétique, la variante arithmétique  $H_{\text{ar}}^{*,*}$  de la cohomologie de Gleuher, nous établissons un premier théorème de comparaison « analytique-arithmétique » - sous certaines conditions sur l'espace réel - dans l'esprit du théorème de comparaison de SGA I pour le groupe fondamental étale [GR71, Exposé XII, Sect. 5] ou encore chez M. Artin et B. Mazur [AM69, Sect. 12]. En faisant quelques raccourcis, voici comment cela fonctionne : soit  $X = (X, Y)$  un espace réel, partant du morphisme exponentiel analytique  $\exp^{\text{an}} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^\times$  que l'on voit comme un complexe  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}$  de faisceaux abéliens sur  $X$ , on récupère un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathcal{O}_X^\times \\ & \searrow & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & \mathcal{O}_{X!}^\times & \end{array}$$

grâce à la propriété universelle ci-dessus. En d'autres termes, en définissant  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  comme le complexe concentré en degrés 0 et 1

$$\exp^{\text{ar}} : \mathcal{O}_{X!}^\times \rightarrow \mathcal{O}_X^\times$$

on a un morphisme de complexes  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \rightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$ . Pour être plus juste,  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}$  et  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  sont des complexes que l'on pourrait appeler « discrets » dans la mesure où ils sont fabriqués à partir des faisceaux constants  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Z}/2$  et du morphisme de réduction les reliant. Nous démontrons par la suite qu'ils sont respectivement quasi-isomorphes aux cônes des morphismes  $\exp^{\text{an}}$  et  $\exp^{\text{ar}}$ . Nous nous penchons alors sur les complexes tensorisés

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{an}} \text{ et } \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes} q},$$

la notation  $\widehat{\otimes}$  signifiant le produit tensoriel *complété* au sens *profini* : notion, vraisemblablement inédite, que l'on présente au chapitre 1 et bien naturelle pour nous puisqu'il se trouve que le complexe  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  est, presque par construction, profini. Son avantage par rapport à la complétion profinie étant de pouvoir facilement s'exporter à n'importe quelle catégorie abélienne. Les groupes de *cohomologie bigraduée arithmétique* sont définis par

$$H_{\text{ar}}^{p,q}(X) := \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}})$$

et il y a des morphismes naturels  $H_{\text{an}}^{p,q}(X) \rightarrow H_{\text{ar}}^{p,q}(X)$ .

**Théorème de comparaison topologique analytique/arithmétique** (cf. Théorème 3.8). *Soit  $X$  un CW-complexe réel à squelettes finis. La cohomologie arithmétique (entière) de  $X$  s'obtient comme complété profini de la cohomologie analytique (entière) de  $X$  : les groupes de cohomologie  $H_{\text{ar}}^{p,q}(X)$  sont profinis et les morphismes*

naturels  $H_{\text{an}}^{p,q}(X) \longrightarrow H_{\text{ar}}^{p,q}(X)$  induisent des isomorphismes

$$\widehat{H_{\text{an}}^{p,q}(X)} \xrightarrow{\cong} H_{\text{ar}}^{p,q}(X).$$

Comme pour toute bonne théorie en géométrie algébrique réelle, on souhaiterait que ces cohomologies bigraduées soient disponibles sur n'importe quel corps réel clos. Soit donc  $R$  un corps réel clos. Pour ce faire, il nous faut remplacer, dans la définition d'espace réel, les espaces topologiques par les espaces (localement) semi-algébriques sur  $R$  au sens de H. Delfs et M. Knebusch : sans trop rentrer dans les détails, ce sont des espaces annelés en  $R$ -algèbres sur un site de Grothendieck formé de sous-espaces semi-algébriques de variétés algébriques affines sur  $R$  et dont on ne retient que les recouvrements finis. La définition d'espace réel clos sur  $R$  est alors obtenue en mimant celle d'espace réel. On peut ensuite construire des groupes de cohomologie *bigradués semi-algébriques* analytique  $H_{\text{san}}^{*,*}$  et arithmétique  $H_{\text{sar}}^{*,*}$  par le même procédé que dans le cas topologique. La bonne nouvelle étant que, lorsque l'espace réel clos est pris sur  $\mathbf{R}$ , on retombe sur nos pieds dans le contexte analytique comme arithmétique,

**Théorème de comparaison topologique/semi-algébrique version analytique** (cf. Théorème 2.17). *Soit  $X$  un espace réel clos sur  $\mathbf{R}$ , pour tous entiers  $p, q$  on a des isomorphismes canoniques*

$$i^* : H_{\text{san}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{an}}^{p,q}(X_{\text{top}}).$$

**Théorème de comparaison topologique/semi-algébrique version arithmétique** (cf. Théorème 3.5). *Soit  $X$  un espace réel clos sur  $\mathbf{R}$ , pour tous entiers  $p, q$  on a des isomorphismes canoniques*

$$i^* : H_{\text{sar}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{ar}}^{p,q}(X_{\text{top}}).$$

L'analogue semi-algébrique du théorème de comparaison « analytique-arithmétique » nous permet par ailleurs de le généraliser, au sens où l'on peut faire des hypothèses moins restrictives sur les espaces que l'on regarde, par une voie détournée.

**Théorème de comparaison semi-algébrique analytique/arithmétique** (cf. Théorème 4.10). *Soit  $X$  un espace réel clos affine. La cohomologie (semi-algébrique) arithmétique (entière) de  $X$  s'obtient comme complété profini de la cohomologie (semi-algébrique) analytique (entière) de  $X$  : les groupes de cohomologie  $H_{\text{sar}}^{p,q}(X)$  sont profinis et les morphismes naturels  $H_{\text{san}}^{p,q}(X) \longrightarrow H_{\text{sar}}^{p,q}(X)$  induisent des isomorphismes*

$$\widehat{H_{\text{san}}^{p,q}(X)} \xrightarrow{\cong} H_{\text{sar}}^{p,q}(X).$$

Mentionnons le comportement de ces espaces vis-à-vis d'une extension de corps réels clos  $R \hookrightarrow S$ . On dispose d'un foncteur d'extension du corps de base

$$\bullet_S : \mathbf{LSA}(R) \longrightarrow \mathbf{LSA}(S)$$

de la catégorie des espaces localement semi-algébriques sur  $R$  vers la catégorie des espaces localement semi-algébriques sur  $S$  qui nous donne le moyen d'associer à tout espace  $X$  réel clos sur  $R$  un espace  $X_S$  réel clos sur  $S$  tel qu'il n'y ait aucune perte d'information cohomologique.

**Théorème de comparaison d'extension du corps réel clos version analytique** (cf. Théorème 2.23). Soient  $S/R$  une extension de corps réels clos et  $X$  un espace réel clos sur  $R$ . Pour tous entiers  $p, q$  on a des isomorphismes canoniques

$$\pi^* : H_{\text{san}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{san}}^{p,q}(X_S).$$

**Théorème de comparaison d'extension du corps réel clos version arithmétique** (cf. Théorème 3.6). Soient  $S/R$  une extension de corps réels clos et  $X$  un espace réel clos sur  $R$ . Pour tous entiers  $p, q$  on a des isomorphismes canoniques

$$\pi^* : H_{\text{sar}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{sar}}^{p,q}(X_S).$$

Pour terminer, bien qu'il n'y ait pas de morphisme exponentiel analytique sur le corps  $C := R[\sqrt{-1}]$ , *i.e.* sous la forme de la somme d'une série entière, on peut tout de même lui substituer le revêtement universel localement semi-algébrique  $\widetilde{C}^\times$  de  $C^\times$  (voir [DK84, Cor. 5.12])

$$\exp^{\text{alg}} : \widetilde{C}^\times \longrightarrow C^\times$$

et en tirer une définition de l'exponentielle algébrique  $\exp^{\text{alg}}$  qui, par essence, est plus proche de la véritable exponentielle que l'exponentielle arithmétique

$$\exp^{\text{ar}} : C_!^\times \longrightarrow C^\times.$$

Cette thèse est organisée de la façon suivante :

- Le chapitre 1 est constitué de préliminaires algébriques et topologiques. Nous y introduisons principalement les notions de co-enveloppe uniquement divisible et de complétion profinie et définissons l'exponentielle arithmétique d'abord pour les groupes abéliens puis dans le cadre plus général des catégories abéliennes.
- Le chapitre 2 consiste en des rappels du travail effectué par Gleuher dans sa thèse de doctorat.

Il s'agit de présenter brièvement les objets de base, *i.e.* les espaces dont on se préoccupe, et la construction de la cohomologie correspondante ainsi que les triangles exacts permettant d'une part de montrer que cette dernière vérifie les axiomes d'Eilenberg-Steenrod et d'autre part de relier ces groupes bigradués à des groupes de cohomologie plus simples ce qui, pratiquement, nous donne l'occasion de faire des calculs.

- Le chapitre 3 est le cœur de ce document. Nous y construisons et étudions la suite exacte exponentielle arithmétique réelle, les complexes de réduction arithmétique et la cohomologie bigraduée arithmétique associée. Nous faisons ensuite le lien avec son avatar analytique via, notamment, un théorème de comparaison analytique-arithmétique.
- Le chapitre 4 étend les résultats des deux chapitres précédents à un corps réel clos quelconque grâce à la théorie semi-algébrique de H. Delfs et M. Knebusch et à sa relation avec la version semi-algébrique de la théorie des schémas due à N. Schwartz. En particulier, on obtient à nouveau divers théorèmes de comparaison comme corollaires de travaux de Delfs portant sur la cohomologie semi-algébrique.

# Introduction (en anglais)

---

**T**HIS text finds its origin in the exponential morphism and the exponential sequence *in real algebraic geometry* introduced by J. Huisman in the article [Hui02]. However, the point of view of derived categories, which is essential for the cohomology discussed in the title of this thesis, is missing. Based on Huisman's ideas [Hui], D. Gleuher much later addressed this gap in his PhD thesis [Gle19] by constructing *bigraded cohomology* groups  $H_{\text{an}}^{*,*}$  from complexes of abelian sheaves  $\mathbf{Z}(*)^{\text{an}}$  arising from the aforementioned exponential morphism.

Let  $C_2$  denote the cyclic group of two elements, which we will concretely view as the Galois group  $\text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ . In fact, this exponential sequence is not, as usual, a short exact sequence because we are working on the quotient space  $X := Y/C_2$  of a  $C_2$ -topological space  $Y$ , whose sheaf of complex-valued « continuous functions » is denoted  $\mathcal{O}_X$ . It is defined by the formula  $\mathcal{O}_X := \gamma_*(\mathcal{C}_Y)^{C_2}$  where  $\gamma : Y \rightarrow X$  is the quotient map and  $\mathcal{C}_Y$  is the sheaf of continuous functions taking values in  $\mathbf{C}$  on  $Y$ , equipped with an action of the group  $C_2$  : for any open set  $\mathcal{U} \subseteq Y$  and any section  $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{C}_Y)$  we associate the section  $\sigma f \in \Gamma(\sigma(\mathcal{U}), \mathcal{C}_Y)$  defined by  $(\sigma f)(y) := \sigma(f(\sigma.y))$ . In particular, this is a sheaf of  $\mathbf{R}$ -local algebras, whose residue field at the fiber over the image by  $\gamma$  of a point fixed by the Galois action is isomorphic to  $\mathbf{R}$  and not canonically isomorphic to  $\mathbf{C}$  otherwise. Since the exponential morphism

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}^{\text{an}}} \mathcal{O}_X^{\times}$$

is generally neither injective nor surjective, the usual (complex) exact exponential sequence is replaced by an exact triangle in the corresponding derived category :

**Théorème 0.6** (cf. Théorème 4.1). *Let  $X$  be a real space. There is a natural exact triangle in the real space, called the analytic exponential triangle on  $X$*

$$\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}^{\text{an}}} \mathcal{O}_X^{\times} \longrightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{an}}[1]$$

*in the triangulated category  $\mathcal{D}^b(X)$ .*

The higher complexes  $\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}$  are then given by the tensor powers of the complex  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}$

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{an}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{an}})^{\otimes q}$$

and the bigraded cohomology is the hypercohomology of these complexes of sheaves

$$H_{\text{an}}^{p,q}(X) := H_{\text{an}}^{p,q}(X, \mathbf{Z}) := \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{an}}).$$

The interest in this cohomology theory lies in its relationship with  $C_2$ -equivariant cohomology. More precisely, as explained in [Hui] and more recently in [Hui24], if  $Y$  is a  $C_2$ -space whose orbit space is denoted by  $X := Y/C_2$ , there are *refinement* morphisms

$$r : H_{\text{an}}^{p,q}(X) := H_{\text{an}}^{p,q}(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_{C_2}^p(Y, \mathbf{Z}\{q\})$$

where  $\mathbf{Z}\{q\} := (\sqrt{-1})^q \mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{C}$  refers to the Tate twist equipped with the natural action of the group  $\text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ . A lexical clarification is needed here : such a pair  $(X, Y)$  will be referred to as a *real space*, where the space  $Y$  is the *complexification* of the real space, and the space of *real points*  $X(\mathbf{R})$  of the real space is the image, under the quotient morphism  $\gamma : Y \rightarrow X = Y/C_2$ , of the fixed points of the action, *i.e.*  $X(\mathbf{R}) := \gamma(Y^{C_2})$ . This choice of terminology is dictated by real algebraic geometry. Indeed, given  $X$  a real algebraic variety (a separated scheme of finite type over  $\mathbf{R}$ ), the group  $\text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$  naturally acts on the space of complex points  $X(\mathbf{C})$  endowed with its analytic topology and there is a bijection

$$X(\mathbf{C})/C_2 \xrightarrow{\cong} \{\text{closed points of the scheme } X\}$$

that we quickly take advantage to endow the space  $X(\mathbf{C})/C_2$  with the « Euclidean » topology and make the following identification,

$$X := X(\mathbf{C})/C_2.$$

Thus we have morphisms

$$r : H_{\text{an}}^{p,q}(X) \longrightarrow H_{C_2}^p(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}\{q\}).$$

Furthermore, Huisman shows that one can construct characteristic classes  $\text{cw}_p(E) \in H_{\text{an}}^{2p,p}(X)$ , called *Chern-Stiefel-Whitney classes*, associated with any real vector bundle  $E$  over the quotient  $X = X(\mathbf{C})/C_2$ ,

which are such that there is a natural commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\text{an}}^{2p,p}(X) & \xrightarrow{\quad \tilde{r} \quad} & H_{\mathbb{C}_2}^{2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}\{p\}) \\
 \downarrow \rho & \searrow r & \downarrow f \\
 H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) & \xleftarrow{\text{res}} & H^{2p}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})
 \end{array} \tag{0.3}$$

in which the following equalities hold

$$r(\text{cw}_p(E)) = c_p^{\mathbb{C}_2}(E(\mathbb{C})), \quad \tilde{r}(\text{cw}_p(E)) = c_p(E(\mathbb{C})) \quad \text{and} \quad \rho(\text{cw}_p(E)) = w_p(E(\mathbb{R})) \tag{0.4}$$

with  $c_*^{\mathbb{C}_2}(E(\mathbb{C}))$  the equivariant Chern classes due to B. Kahn and V.A. Krasnov [Kah87], [Kra91], [Kra94],  $c_*(E(\mathbb{C}))$  and  $w_*(E(\mathbb{R}))$  being the Chern and Stiefel-Whitney classes of the complex and real bundles  $E(\mathbb{C})$  and  $E(\mathbb{R})$ , respectively. In particular, the first Chern-Stiefel-Whitney class is obtained via the connecting morphism

$$\text{cw}_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}(1)^{\text{an}}) = H_{\text{an}}^{2,1}(X)$$

of the long exact sequence of cohomology groups arising from the analytic exponential triangle.

*Remarque 0.7.* For the reader's convenience, we have only included the particular case of a real space associated with a real algebraic variety, but these results are entirely topological. More generally, the diagrams (0.3) and (0.4) still hold for a real vector bundle over a real space  $(X, Y)$ , and the Chern-Stiefel-Whitney classes represent a true unification of the Chern classes and Stiefel-Whitney classes, since they can be lifted along the morphisms  $\rho$  and  $\tilde{r}$ .

Inspired by A. Grothendieck's paper [Gro68], in which he calls for a *purely algebraic* definition of Chern classes, meaning one that is non-topological (analytic) or non-transcendental in nature, we produce an *arithmetic* substitute for the complex exponential function

$$\text{exp} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$$

on a ringed space using continuous functions with complex values (*i.e.*  $\mathcal{O}$  is the sheaf of such functions) which we will rename *analytic exponential*, denoted by  $\text{exp}^{\text{an}}$ . To put it briefly, Grothendieck achieves his goal by replacing the exponential exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\text{exp}^{\text{an}}} \mathcal{O}^\times \longrightarrow 0$$

with the Kummer exact sequence

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbf{G}_m \xrightarrow{\cdot n} \mathbf{G}_m \longrightarrow 0.$$

This is of little importance, but we would rather use the term *arithmetic* since we choose to retain from the analytic exponential only the property of consistent selection of  $n$ -th roots : for all integers  $m, n \geq 1$  such that  $m$  divides  $n$ , we have a commutative triangle

$$\begin{array}{ccc}
 z^{\frac{1}{n}} = \exp^{\text{an}}\left(\frac{\omega}{n}\right) & & \\
 \uparrow & \searrow \cdot n & \\
 \mathbf{C}^\times & & \mathbf{C}^\times \\
 \downarrow \cdot \frac{n}{m} & \nearrow \cdot m & \\
 \mathbf{C}^\times & & z = \exp^{\text{an}}(\omega) \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 (z^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{m}} = (\exp^{\text{an}}\left(\frac{\omega}{n}\right))^{\frac{n}{m}} = \exp^{\text{an}}\left(\frac{\omega}{m}\right) = z^{\frac{1}{m}} & & 
 \end{array}$$

It remains to extract from this observation the central definition of our study.

**Définition 0.8** (cf. Définition 1.7). Let  $A$  be an abelian group, consider the partially ordered set  $(\mathbf{N}^*, |)$  and the projective system of abelian groups over  $(\mathbf{N}^*, |)$  given by :

- For every integer  $n \geq 1$ , we define  $A_n := A$ ,
- For every pair of integers  $(m, n)$  with  $m \geq 1$  and  $n \geq 1$  such that  $m | n$ , the transition morphism  $\varphi_{nm}$  is the multiplication by the integer  $\frac{n}{m}$ ,

$$\varphi_{nm} : \begin{array}{ccc} A_n & \longrightarrow & A_m \\ a & \longmapsto & \frac{n}{m} \cdot a \end{array} .$$

The *uniquely divisible co-envelope* of  $A$ , denoted  $A_1$ , is the projective limit of this system.

We then obtain the *arithmetic exponential morphism* by considering the projection onto the first factor

$$\exp^{\text{ar}} : A_1 = \lim_{m|n} A \longrightarrow A_1 = A.$$

*Remarque 0.9.* The uniquely divisible co-envelope has previously been examined by J-P. Serre in the context of algebraic groups [Ser60, §6.5, Prop. 9].

Note that, by construction, the latter commutes with the natural action of the automorphism group  $\text{Aut}(A)$ , and in particular with the Galois action in the cases that concern us. This is not the case (and

unfortunately so) with the analytic exponential, unless the automorphisms are continuous. As explained in Chapter 1, and as confirmed by the universal property that follows, all of this is closely related to the divisibility properties of the objects under examination, which justifies, if one wishes, the adopted terminology.

**Proposition 0.10** (cf. Faits 1.2). *Let  $\mathcal{C}$  be a Grothendieck site and  $\mathcal{F}$  an object of  $\mathbf{Ab}(\mathcal{C})$ .*

1. *The construction of the uniquely divisible co-envelope  $\mathcal{F}_!$  of the sheaf  $\mathcal{F}$  and the arithmetic exponential  $\exp^{\text{ar}} : \mathcal{F}_! \rightarrow \mathcal{F}$  is carried out in exactly the same way as in the pointwise case.*
2. *For every uniquely divisible sheaf  $\mathcal{D} \in \mathbf{Ab}(\mathcal{C})$  and for every sheaf morphism  $\theta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ , there exists a unique sheaf morphism  $\tilde{\theta} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}_!$  such that  $\exp^{\text{ar}} \circ \tilde{\theta} = \theta$ ,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{F} \\ & \searrow \tilde{\theta} & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & \mathcal{F}_! & \end{array}$$

Let us, for example, make explicit the uniquely divisible co-envelope of the group  $A = \mathbf{C}^\times$ . The existence of the exponential form of complex numbers translates into a group isomorphism  $\mathbf{C}^\times \simeq \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}_{>0}$ . Therefore, since the group  $\mathbf{R}_{>0}$  is uniquely divisible and the operation  $\cdot_!$  preserves products, it is sufficient to handle the case of the unit circle  $\mathbf{S}^1$ . Now, by coincidence, the group  $\mathbf{S}_!^1$  is a well-known object : it is the *adelic solenoid* [BV19]. We have a canonical isomorphism of topological groups with the adèle class group [KS18, Prop. 2.1]

$$\mathbf{S}_!^1 \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{Q}} / \mathbf{Q}$$

where  $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}} := \mathbf{R} \times \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^f = \mathbf{R} \times (\widehat{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})$  is the ring of rational adèles and  $\mathbf{Q}$  is diagonally embedded in  $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$ . Consequently, we obtain a morphism of short exact sequences

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 2i\pi\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{C} & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathbf{C}^\times \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \widehat{\exp^{\text{an}}} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & \mathbf{C}_!^\times \simeq \mathbf{A}_{\mathbf{Q}} / \mathbf{Q} \times \mathbf{R}_{>0} & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & \mathbf{C}^\times \longrightarrow 0. \end{array}$$

If  $X := (X, Y)$  is a real space, we have a morphism of exact triangles

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z}(1)^{\text{an}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathcal{O}_X^\times & \longrightarrow & \mathbf{Z}(1)^{\text{an}}[1] \\ \downarrow & & \downarrow \widehat{\exp^{\text{an}}} & & \parallel & & \downarrow \\ \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^\times & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & \mathcal{O}_X^\times & \longrightarrow & \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}[1]. \end{array}$$

Once constructed, starting from the arithmetic exponential, the arithmetic variant  $H_{\text{ar}}^{**}$  of Gleuher's cohomology, we establish a first « analytic-arithmetic » comparison theorem — under certain conditions on the real space — in the spirit of the comparison theorem of SGA I for the étale fundamental group [GR71, Exposé XII, Sect. 5] or even in the work of M. Artin and B. Mazur [AM69, Sect. 12]. By taking some shortcuts, here is how it works : let  $X$  be a real space, starting from the analytic exponential morphism  $\exp^{\text{an}} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^{\times}$  which is viewed as a complex  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}$  of abelian sheaves on  $X$ , we obtain a commutative triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathcal{O}_X^{\times} \\ & \searrow & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & \mathcal{O}_{X!}^{\times} & \end{array}$$

thanks to the universal property mentioned above. In other words, by defining  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  as the complex concentrated in degrees 0 and 1

$$\exp^{\text{ar}} : \mathcal{O}_{X!}^{\times} \rightarrow \mathcal{O}_X^{\times}$$

we obtain a morphism of complexes  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \rightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$ . To be more precise,  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}$  and  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  are complexes that could be called « discrete » in the sense that they are constructed from the constant sheaves  $\mathbf{Z}$  and  $\mathbf{Z}/2$  and the reduction morphism connecting them. We then demonstrate that they are respectively quasi-isomorphic to the cones of the morphisms  $\exp^{\text{an}}$  and  $\exp^{\text{ar}}$ . We then consider the tensored complexes

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{an}} \text{ and } \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes} q},$$

the notation  $\widehat{\otimes}$  denotes the *completed* tensor product in the *profinite* sense : a presumably novel notion, which we introduce in Chapter 1, and which is quite natural for us since it turns out that the complex  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  is, almost by construction, profinite. Its advantage over profinite completion lies in its ability to be easily applied to any abelian category. The *bigraded arithmetic cohomology* groups are defined by

$$H_{\text{ar}}^{p,q}(X) := \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}})$$

and there are natural morphisms  $H_{\text{an}}^{p,q}(X) \rightarrow H_{\text{ar}}^{p,q}(X)$ .

**Topological analytic/arithmetic comparison theorem** (cf. Théorème 3.8). *Let  $X$  be a real cell complex with finite skeleta. The arithmetic (integral) cohomology of  $X$  is obtained as the profinite completion of the analytic (integral) cohomology of  $X$  : the cohomology groups  $H_{\text{ar}}^{p,q}(X)$  are profinite and the natural morphisms  $H_{\text{an}}^{p,q}(X) \rightarrow H_{\text{ar}}^{p,q}(X)$  induce isomorphisms*

$$\widehat{H_{\text{an}}^{p,q}(X)} \xrightarrow{\cong} H_{\text{ar}}^{p,q}(X).$$

As with any good theory in real algebraic geometry, we would like these bigraded cohomologies to be available over any real closed field. Let  $R$  be a real closed field. To achieve this, we must replace, in the definition of a real space, the topological spaces with (locally) semi-algebraic spaces over  $R$  in the sense of H. Delfs and M. Knebusch : without going into too much detail, these are ringed spaces in  $R$ -algebras over a Grothendieck site made up of semi-algebraic subspaces of affine algebraic varieties over  $R$ , where only finite coverings are considered. The definition of a *real closed space over  $R$*  is then obtained by mimicking that of a real space. One can then construct *bigraded semi-algebraic analytic cohomology groups*  $H_{\text{san}}^{*,*}$  and arithmetic cohomology groups  $H_{\text{sar}}^{*,*}$  using the same process as in the topological case. The good news is that, when the real closed space is taken over  $\mathbf{R}$ , we find ourselves back in familiar ground in both the analytic and arithmetic contexts.

**Analytic version of the topological/semi-algebraic comparison theorem** (cf. Théorème 2.17). *Let  $X$  be a real closed space over  $\mathbf{R}$ . For all integers  $p, q$ , there are canonical isomorphisms*

$$i^* : H_{\text{san}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{an}}^{p,q}(X_{\text{top}}).$$

**Arithmetic version of the topological/semi-algebraic comparison theorem** (cf. Théorème 3.5). *Let  $X$  be a real closed space over  $\mathbf{R}$ . For all integers  $p, q$ , there are canonical isomorphisms*

$$i^* : H_{\text{sar}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{ar}}^{p,q}(X_{\text{top}}).$$

The semi-algebraic analogue of the « analytic-arithmetic » comparison theorem also allows us to generalize it, in the sense that we can make less restrictive assumptions about the spaces we consider, through an indirect approach.

**Semi-algebraic analytic/arithmetic comparison theorem** (cf. Théorème 4.10). *Let  $X$  be an affine real closed space. The (semi-algebraic) arithmetic (integral) cohomology of  $X$  is obtained as the profinite completion of the (semi-algebraic) analytic (integral) cohomology of  $X$  : the cohomology groups  $H_{\text{sar}}^{p,q}(X)$  are profinite and the natural morphisms  $H_{\text{san}}^{p,q}(X) \longrightarrow H_{\text{sar}}^{p,q}(X)$  induce isomorphisms*

$$\widehat{H_{\text{san}}^{p,q}(X)} \xrightarrow{\cong} H_{\text{sar}}^{p,q}(X).$$

Let us mention the behavior of these spaces with respect to a real closed field extension  $R \hookrightarrow S$ . There is a *base field extension functor*

$$\bullet_S : \mathbf{LSA}(R) \longrightarrow \mathbf{LSA}(S)$$

from the category of locally semi-algebraic spaces over  $R$  to the category of locally semi-algebraic spaces

over  $S$ , which allows us to associate to any real closed space  $X$  over  $R$  a real closed space  $X_S$  over  $S$ , such that no cohomological information is lost.

**Analytic version of the real closed field extension comparison theorem** (cf. Théorème 2.23). *Let  $S/R$  be a real closed field extension and  $X$  a real closed space over  $R$ . For all integers  $p, q$ , there are canonical isomorphisms*

$$\pi^* : H_{\text{san}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{san}}^{p,q}(X_S).$$

**Arithmetic version of the real closed field extension comparison theorem** (cf. Théorème 3.6). *Let  $S/R$  be a real closed field extension and  $X$  a real closed space over  $R$ . For all integers  $p, q$ , there are canonical isomorphisms*

$$\pi^* : H_{\text{sar}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{sar}}^{p,q}(X_S).$$

To conclude, although there is no analytic exponential morphism on the field  $C := R[\sqrt{-1}]$ , *i.e.* under the form of the sum of a power series, we can still consider the locally semi-algebraic universal covering  $\widetilde{C}^\times$  of  $C^\times$  (see [DK84, Cor. 5.12])

$$\exp^{\text{alg}} : \widetilde{C}^\times \longrightarrow C^\times$$

and derive a definition of the *algebraic exponential*  $\exp^{\text{alg}}$ , which is, in essence, closer to the true exponential than the arithmetic exponential

$$\exp^{\text{ar}} : C_!^\times \longrightarrow C^\times.$$

This thesis is organized as follows :

- Chapter 1 consists of algebraic and topological preliminaries. We primarily introduce the notions of uniquely divisible co-envelope and prefinite completion, and define the arithmetic exponential morphism first for abelian groups, then in the more general context of abelian categories.
- Chapter 2 contains a review of the work done by Gleuher in his doctoral thesis. It briefly presents the basic objects, *i.e.* the spaces we are concerned with, and the construction of the corresponding cohomology, as well as the exact triangles that, on the one hand, show that this cohomology satisfies the Eilenberg-Steenrod axioms, and on the other hand, link these bigraded groups to simpler cohomology groups, which, practically, allows us to perform calculations.
- Chapter 3 forms the core of this document. Here, we construct and study the real arithmetic exponential exact sequence, the arithmetic reduction complexes, and the associated bigraded arithmetic cohomology. We then establish the connection with its analytical counterpart, notably through an

analytic-arithmetic comparison theorem.

- Chapter 4 extends the results of the previous two chapters to an arbitrary real closed field, using the semi-algebraic theory of H. Delfs and M. Knebusch and its connection to the semi-algebraic version of scheme theory developed by N. Schwartz. In particular, we once again derive various comparison theorems as corollaries of Delfs' work on semi-algebraic cohomology.

# L'exponentielle arithmétique et la complétion profinie

---

## 1 Le cas ponctuel et discret



DANS toute la suite, la lettre  $A$  désignera un groupe abélien dont la loi sera notée additivement. Les catégories des groupes abéliens et des groupes divisibles sans torsion seront respectivement notées  $\mathbf{Ab}$  et  $\mathbf{Dtf}$ .

Après quelques rappels concernant la notion de groupe divisible, une bonne référence étant [Fuc70, Chap. IV], on introduit et étudie la notion de *co-enveloppe uniquement divisible*.

**Définition 1.1** (Groupe divisible). On dit d'un groupe abélien  $A$  qu'il est *divisible* si tous ses éléments le sont : pour tout  $a \in A$  et pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe  $a' \in A$  tel que  $a = n.a'$ . Si de plus tous les  $a'$  sont uniques on dit que le groupe  $A$  est *uniquement divisible*. Autrement dit, le groupe  $A$  est divisible (respectivement, uniquement divisible) si et seulement si, pour tout entier  $n \geq 1$ , le morphisme

$$n : \begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ a \longmapsto n.a \end{array}$$

est surjectif (respectivement, bijectif).

Tout groupe abélien possède un sous-groupe divisible maximal,

**Définition 1.2.** Un élément  $a$  de  $A$  est dit *divisible en famille* s'il existe  $(b_n)_{n \geq 1}$  dans  $A$  telle que  $b_1 = a$  et pour tout  $m, n \geq 1$ ,  $m.b_{nm} = b_n$ .

**Proposition 1.3.** *Le sous-groupe de  $A$  formé des éléments divisibles en famille est le sous-groupe divisible maximal de  $A$ , on le note  $A_d$ .*

*Démonstration.*

- Pour tout  $a \in A_d$ , il existe  $(b_n)_{n \geq 1}$  dans  $A_d$  telle que, en particulier, pour tout  $n \geq 1$  on a  $n.b_n = b_1 = a$  donc le groupe  $A_d$  est divisible.
- Soit  $D$  un sous-groupe divisible de  $A$  et soit  $d$  élément de  $D$ . Posons  $b_{1!} := d$  et, pour  $n \geq 2$ , définissons par récurrence, puisque le groupe  $D$  est divisible, l'élément  $b_{n!}$  comme une solution de l'équation  $n.b_{n!} = b_{(n-1)!}$ . Plus généralement, étant donné un entier  $m \geq 1$ , comme il existe un plus petit entier  $n$  tel que  $m|n!$ , on peut poser  $b_m := \frac{n!}{m}.b_{n!}$ . La famille  $(b_n)_{n \geq 1}$  ainsi construite permet de montrer que  $d$  est divisible en famille. En effet, on a d'une part, par définition,  $b_1 = d$  et d'autre part, pour  $m, n \geq 1$ ,

$$m.b_{nm} = m.\frac{(i+j)!}{nm}.b_{(i+j)!} = \frac{i!}{n}.\frac{(i+j)!}{i!}.b_{(i+j)!} = \frac{i!}{n}.b_{i!} = b_n$$

avec  $i$  le plus petit entier tel que  $n|i!$  et  $j$  le plus petit entier tel que  $nm|(i+j)!$ . □

Dans la littérature, la notion de groupe uniquement divisible se substitue à celle de groupe divisible sans torsion, ceci se justifie de la manière suivante :

**Proposition 1.4.** *Un groupe divisible est uniquement divisible si et seulement s'il est sans torsion.*

*Démonstration.* Soient  $n \geq 1$  et  $a$  un élément d'un groupe uniquement divisible tels que  $n.a = 0$ , comme  $n.0 = 0$  et que  $a$  est unique on a  $a = 0$ . Réciproquement, soient  $n \geq 1$  et  $a$  un élément d'un groupe divisible sans torsion  $A$ , s'il existe  $a', a'' \in A$  tels que  $a = n.a' = n.a''$  alors  $n.(a' - a'') = 0$  donc  $a' = a''$  puisque  $A$  est sans torsion. □

**Exemples 1.5.**

- Le groupe abélien sous-jacent à un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel est uniquement divisible.
- Le groupe multiplicatif  $\mathbf{Q}^\times$  est de torsion et n'est pas divisible.
- Le groupe des inversibles d'un corps algébriquement clos est divisible mais jamais uniquement divisible.
- Le groupe multiplicatif des éléments strictement positifs d'un corps réel clos est uniquement divisible.
- Le groupe abélien  $\mathbf{Z}$  n'est pas divisible.
- Pour tout entier  $n \geq 2$ , le groupe abélien  $\mathbf{Z}/n$  n'est pas divisible.

- Étant donné  $p$  un nombre premier, le groupe abélien des entiers  $p$ -adiques  $\mathbf{Z}_p$  n'est pas divisible.
- Pour tout nombre premier  $p$ , le  $p$ -groupe de Prüfer

$$\mathbf{Z}(p^\infty) := \operatorname{colim}_n \mathbf{Z}/p^n \simeq \mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right]/\mathbf{Z},$$

où les morphismes de transition dans la colimite sont donnés par la multiplication par  $p$ , est divisible.

On connaît bien les groupes divisibles puisque l'on a le résultat suivant,

**Théorème 1.6** (de structure des groupes divisibles, [Fuc70, Chap. IV, Theorem 23.1]). *Tout groupe divisible  $D$  s'écrit comme somme directe de copies de  $\mathbf{Q}$  et de  $p$ -groupes de Prüfer :  $D \simeq \bigoplus_m \mathbf{Q} \oplus \bigoplus_{m_p} \mathbf{Z}(p^\infty)$ .*

**Définition 1.7** (Co-enveloppe uniquement divisible). Considérons l'ensemble partiellement ordonné  $(\mathbf{N}^*, |)$  et le système projectif de groupes abéliens sur  $(\mathbf{N}^*, |)$  donné par :

- Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $A_n := A$ ,
- Pour tout couple  $(m, n)$  d'entiers  $\geq 1$  tels que  $m \mid n$ , le morphisme de transition  $\varphi_{nm}$  est la multiplication par l'entier  $\frac{n}{m}$ ,

$$\varphi_{nm} : \begin{array}{ccc} A_n & \longrightarrow & A_m \\ a & \longmapsto & \frac{n}{m} \cdot a \end{array} .$$

La co-enveloppe uniquement divisible de  $A$ , notée  $A_!$ , est la limite projective de ce système.

*Remarque 1.8.* Étant donné  $G$  un groupe, si  $A$  est un  $\mathbf{Z}[G]$ -module, la construction précédente reste valable et on a  $(A_!)^G = (A^G)_!$ .

Par construction de  $A_!$ , on dispose de la projection sur le premier facteur

$$\pi_1 : A_! \longrightarrow A_1 = A.$$

Pour toutes les raisons que l'on a données dans l'introduction, on décide d'appeler ce morphisme l'*exponentielle arithmétique* et de le noter  $\exp^{\text{ar}}$ . On obtient alors immédiatement une description du noyau de l'exponentielle arithmétique en termes de limite projective : on a

$$\operatorname{Ker}(\exp^{\text{ar}}) = \lim_{m|n} T_n(A)$$

où  $T_n(A)$  est le sous-groupe des éléments de  $n$ -torsion de  $A$  et les morphismes de transition sont les mêmes que ceux de  $A_!$ .

**Exemples 1.9.**

- Lorsque  $A = \mathbf{Z}(p^\infty)$ , les seuls  $T_n(\mathbf{Z}(p^\infty))$  non triviaux sont les  $T_{p^\alpha}(\mathbf{Z}(p^\infty))$  où  $\alpha \geq 1$ . Ainsi, la condition de divisibilité  $p^\alpha | p^\beta$  est équivalente à  $\alpha \leq \beta$  et le système projectif obtenu est le même que celui associé aux entiers  $p$ -adiques donc  $\text{Ker}(\exp^{\text{ar}}) = \mathbf{Z}_p$ .
- Lorsque  $A = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , comme le groupe  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  s'identifie au sous-groupe de torsion du cercle  $T(\mathbf{S}^1)$ , pour tout  $n \geq 0$ , le groupe  $T_n(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  correspond aux racines  $n$ -ièmes de l'unité  $\mu_n(\mathbf{C}^\times)$  et donc, en notation additive, à  $\mathbf{Z}/n$ . En prenant la limite projective on a alors  $\text{Ker}(\exp^{\text{ar}}) = \widehat{\mathbf{Z}}$ .
- Lorsque  $A = \mathbf{S}^1$ , par les mêmes arguments que dans l'exemple ci-dessus on retrouve  $\text{Ker}(\exp^{\text{ar}}) = \widehat{\mathbf{Z}}$ .
- Lorsque  $A = \mathbf{C}^\times$ , on écrit l'isomorphisme  $\mathbf{C}^\times \simeq \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}_{>0}$  issu de la forme exponentielle des nombres complexes et comme le groupe  $\mathbf{R}_{>0}$  est uniquement divisible le noyau de l'exponentielle arithmétique est le même que dans le cas du cercle donc on retombe sur  $\text{Ker}(\exp^{\text{ar}}) = \widehat{\mathbf{Z}}$ .

**Proposition 1.10** (Fonctorialité de la co-enveloppe uniquement divisible). *Tout morphisme de groupes abéliens  $f : A \rightarrow B$  induit un unique morphisme  $f_! : A_! \rightarrow B_!$  tel que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} A_! & \xrightarrow{f_!} & B_! \\ \exp^{\text{ar}} \downarrow & & \downarrow \exp^{\text{ar}} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

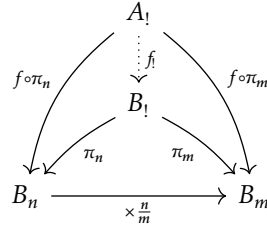
commute.

*Démonstration.* Par construction de  $A_!$ , pour tout  $m, n \geq 1$  tels que  $m|n$ , le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} & A_! & \\ \swarrow \pi_n & & \searrow \pi_m \\ A_n & \xrightarrow{\times \frac{n}{m}} & A_m \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ B_n & \xrightarrow{\times \frac{n}{m}} & B_m \end{array}$$

Donc par propriété universelle de la limite projective il existe un unique morphisme  $f_! : A_! \rightarrow B_!$  tel que

le diagramme



commute et il suffit ensuite de prendre  $m = 1$ . Pour ce qui est de l'unicité, il suffit de montrer que s'il existe un autre morphisme  $g : A_l \rightarrow B_l$  comme dans l'énoncé alors, on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\pi_n \circ g = f \circ \pi_n$  ce qui impliquera que  $g = f_l$  par unicité du morphisme  $f_l$ . On a par définition l'égalité  $\exp^{\text{ar}} \circ g = f \circ \exp^{\text{ar}}$ , or on a aussi, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\exp^{\text{ar}} = n \cdot \pi_n$  donc  $(n \cdot \pi_n) \circ g = f \circ (n \cdot \pi_n)$  d'où  $(n \cdot \pi_n) \circ g \circ \frac{1}{n} = f \circ (n \cdot \pi_n) \circ \frac{1}{n}$  mais le membre de droite vaut  $f \circ \pi_n$  tandis que le membre de gauche vaut  $\pi_n \circ g$ .  $\square$

*Remarque 1.11.* Comme la co-enveloppe uniquement divisible est obtenue en prenant la limite d'un certain diagramme, cette opération commute avec les limites donc, en particulier, avec les produits, les égaliseurs et les sommes directes finies (dans la catégorie des groupes abéliens, les produits finis et les coproduits finis sont les mêmes objets).

**Proposition 1.12.** *Le groupe  $A_l$  est sans torsion.*

*Démonstration.* Soit  $k \geq 1$  tel qu'il existe  $(a_n)_{n \geq 1} \in A_l$  tel que  $k \cdot (a_n)_{n \geq 1} = (k \cdot a_n)_{n \geq 1} = 0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $0 = k \cdot a_{kn} = \frac{kn}{n} \cdot a_{kn} = a_n$  donc  $(a_n)_{n \geq 1} = 0$ .  $\square$

*Remarque 1.13.* Si le sous-groupe de torsion  $T(A)$  est non trivial il n'existe donc pas de morphisme de  $A$  vers  $A_l$  et par conséquent l'exponentielle arithmétique n'admet ni section ni rétraction.

Étant donné  $D$  un groupe uniquement divisible, on peut toujours, par définition, considérer, pour tout entier  $k \geq 1$ , l'automorphisme de groupes

$$\frac{1}{k} : D \rightarrow D,$$

mais dans le cas où  $D = A_l$  cette construction est tout à fait explicite.

**Proposition 1.14.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , on a un automorphisme de groupes*

$$\frac{1}{k} : \begin{array}{ccc} A_l & \longrightarrow & A_l \\ (a_n)_{n \geq 1} & \longmapsto & (a_{kn})_{n \geq 1} \end{array}$$

appelé morphisme de  $k$ -ième décalage.

*Démonstration.* En effet, il suffit de vérifier que, d'une part  $k \cdot (a_{kn})_{n \geq 1} = (a_n)_{n \geq 1}$  et d'autre part  $(a_{kn})_{n \geq 1} \in A_!$  :

- Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $k \cdot a_{kn} = \frac{kn}{n} \cdot a_{kn} = a_n$ .
- Pour tout  $m, n \geq 1$  tels que  $m|n$ , on a  $\frac{n}{m} \cdot a_{kn} = \frac{kn}{km} \cdot a_{kn} = a_{km}$ . □

*Remarque 1.15.* Dans un groupe uniquement divisible, dès que  $m|n$ , en posant  $k := \frac{n}{m}$  on a les égalités  $k \cdot a = \frac{1}{m} (n \cdot a) = n \cdot (\frac{1}{m} a)$ . Ceci provient du fait que, par définition,  $\frac{1}{m} (n \cdot a)$  est l'unique élément tel que  $m \cdot (\frac{1}{m} (n \cdot a)) = n \cdot a$ , or c'est aussi le cas pour  $k \cdot a$  et  $n \cdot (\frac{1}{m} a)$ .

**Corollaire 1.16.** *Le groupe  $A_!$  est uniquement divisible.*

**Corollaire 1.17.** *L'image du morphisme exponentiel arithmétique est le sous-groupe divisible maximal  $A_d$ .*

*Démonstration.* Comme le groupe  $A_!$  est divisible et que l'image d'un groupe divisible est divisible on a  $\text{Im}(\exp^{\text{ar}}) \subseteq A_d$ . Réciproquement, si  $a \in A_d$  alors, d'après la proposition 1.3, il existe  $(b_n)_{n \geq 1}$  dans  $A$  telle que  $b_1 = a$  et, dès que  $m|n$ ,  $\frac{n}{m} \cdot b_n = \frac{n}{m} \cdot b_m \cdot \frac{n}{m} = b_m$ , i.e.  $(b_n)_{n \geq 1} \in A_!$  et  $a = \exp^{\text{ar}}((b_n)_{n \geq 1})$ . □

De plus, la construction de  $A_!$  vient avec une propriété universelle, à savoir :

**Proposition 1.18** (Propriété universelle de la co-enveloppe uniquement divisible). *Pour tout groupe uniquement divisible  $D$  et pour tout morphisme de groupes  $f : D \rightarrow A$ , il existe un unique morphisme de groupes  $\tilde{f} : D \rightarrow A_!$  tel que  $\exp^{\text{ar}} \circ \tilde{f} = f$ ,*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow \tilde{f} & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & & A_! \end{array}$$

*Démonstration.* C'est encore la propriété universelle de la limite projective : le groupe  $D$  étant uniquement divisible, pour tout  $n \geq 1$ , on dispose de l'automorphisme  $\frac{1}{n} : D \rightarrow D$ . En posant  $f_n := f \circ \frac{1}{n}$ , d'après la remarque 1.15, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ & \vdots \tilde{f} & \\ & A_! & \\ \swarrow f_n & & \searrow f_m \\ A_n & \xrightarrow{\times \frac{n}{m}} & A_m \\ \nwarrow \pi_n & & \nearrow \pi_m \end{array}$$

et en prenant  $m = 1$  on voit que le morphisme  $\tilde{f}$  convient. Quant à l'unicité, si  $g$  est un autre tel morphisme, alors d'une part, par définition on a  $\exp^{\text{ar}} \circ g = f$  et, d'autre part, pour tout  $n \geq 1$ ,  $n \cdot \pi_n = \exp^{\text{ar}}$ . Ainsi, on a  $n \cdot \pi_n \circ g = f$  donc  $n \cdot \pi_n \circ g \circ \frac{1}{n} = f \circ \frac{1}{n} = f_n$ . Or, pour tout  $d \in D$ , on a

$$n.\pi_n(g(\frac{1}{n}d)) = \pi_n(n.g(\frac{1}{n}d)) = \pi_n(g(n.\frac{1}{n}d)) = \pi_n(g(d))$$

donc  $\pi_n \circ g = n.\pi_n \circ g \circ \frac{1}{n} = f \circ \frac{1}{n} = f_n$  et, comme le morphisme  $\tilde{f}$  est unique, on a  $g = \tilde{f}$ .  $\square$

*Remarque 1.19.* Une autre preuve, plus courte, de la fonctorialité de la co-enveloppe uniquement divisible peut être obtenue en utilisant la propriété universelle et le corollaire 1.16 : si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme de groupes abéliens alors on applique la propriété universelle au morphisme  $f \circ \exp^{\text{ar}} : A_! \rightarrow B$ .

**Corollaire 1.20.** *L'exponentielle arithmétique  $\exp^{\text{ar}} : A_! \rightarrow A$  est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe  $A$  est uniquement divisible.*

*Démonstration.* En prenant  $D = A$  et  $f = \text{Id}_A$  dans la proposition précédente, on obtient la surjectivité du morphisme exponentiel. Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  un élément de  $\text{Ker}(\exp^{\text{ar}})$ , i.e.  $a_1 = 0$ . Comme  $(a_n)_{n \geq 1} \in A_!$ , pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $n.a_n = a_1 = 0$ . Or, d'après la proposition 1.4, le groupe  $A$  est sans torsion, ainsi, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = 0$  donc le morphisme  $\exp^{\text{ar}}$  est injectif. La réciproque est donnée par le corollaire 1.16.  $\square$

*Remarque 1.21.* Si le morphisme exponentiel arithmétique admet une section alors  $\exp^{\text{ar}}$  est surjective donc le groupe  $A$  est divisible. Donc, d'après la remarque 1.13, une condition nécessaire à l'existence du logarithme arithmétique est l'unique divisibilité du groupe  $A$  et dans ce cas ce dernier n'a aucun intérêt.

Par conséquent, lorsque le groupe  $A$  est divisible, on récupère une suite exacte courte que l'on appelle *suite exacte exponentielle arithmétique*,

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\exp^{\text{ar}}) \longrightarrow A_! \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} A \longrightarrow 0.$$

En, particulier, quand  $A = \mathbb{C}^\times$ , la proposition 1.18 implique que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathbb{C}^\times \\ \searrow \widehat{\exp^{\text{an}}} & & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & \mathbb{C}_!^\times & \end{array}$$

commute (le morphisme horizontal étant l'exponentielle complexe au sens analytique) ce qui nous permet d'obtenir le morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 2i\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathbb{C}^\times \longrightarrow 0 \\ & & \widehat{\exp^{\text{an}}} \downarrow & & \widehat{\exp^{\text{an}}} \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathbb{C}_!^\times & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & \mathbb{C}^\times \longrightarrow 0. \end{array} \tag{1.1}$$

**Corollaire 1.22.** *La projection sur la première composante*

$$\pi : (A_i)_i \longrightarrow A_1$$

*est un isomorphisme de groupes.*

*Démonstration.* On combine les corollaires 1.16 et 1.20. □

**Lemme 1.23.** *On a  $\mathbf{Z}_1 = 0$  et, pour tout  $m \geq 1$ ,  $(\mathbf{Z}/m)_1 = 0$ .*

*Démonstration.*

- Tout élément  $(a_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbf{Z}_1$  vérifie, pour tout  $n \geq 1$ ,  $n \cdot a_n = a_1$  donc, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_1 = a_n = 0$ .

- Soit  $(a_i)_{i \geq 1} \in (\mathbf{Z}/m)_1$ , on a pour tout  $i \geq 1$ ,  $0 = m \cdot a_{mi} = \frac{mi}{i} \cdot a_{mi} = a_i$ . □

**Corollaire 1.24.** *La co-enveloppe uniquement divisible de tout groupe abélien de type fini est le groupe trivial.*

*Démonstration.* Le théorème de structure des groupes abéliens de type fini nous fournit un entier  $l \geq 0$  et des entiers  $a_1, \dots, a_k \geq 2$  tels qu'il existe un isomorphisme de groupes

$$A \simeq \mathbf{Z}/a_1 \times \dots \times \mathbf{Z}/a_k \times \mathbf{Z}^l.$$

Donc, d'après la remarque 1.11, on a

$$A_1 \simeq (\mathbf{Z}/a_1)_1 \times \dots \times (\mathbf{Z}/a_k)_1 \times (\mathbf{Z}_1)^l$$

et on se sert du lemme 1.23 pour conclure. □

Ce dernier résultat implique, grâce à la remarque 1.11, que la co-enveloppe uniquement divisible de tout groupe profini est trivial et, en particulier, qu'appliquer la complétion profinie suivie de la co-enveloppe uniquement divisible (ou dans l'ordre inverse) ne donne jamais rien : c'est par exemple le cas pour les groupes abéliens  $\mathbf{Z}_p$  et  $\hat{\mathbf{Z}}$ .

**Proposition 1.25.** *Soit  $R$  un corps réel clos, on a  $R_1^\times = R_{>0}$ .*

*Démonstration.* Comme le groupe  $R_{>0}$  est uniquement divisible, la proposition 1.18 nous apporte le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} R_{>0} & \xrightarrow{i} & R^\times \\ & \searrow \tilde{i} & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & & R_1^\times \end{array}$$

De plus, l'application  $\tilde{t}$  envoie tout élément strictement positif  $x$  sur  $(\sqrt[n]{x})_{n \geq 1}$  donc si  $(a_n)_{n \geq 1} \in R_1^\times$  on a en particulier  $a_1 = a_2^2 \in R_{>0}$  et  $(a_n)_{n \geq 1} = \tilde{t}(a_1)$ .  $\square$

Il existe une notion duale d'*enveloppe divisible*, notée  $A_{\text{div}}$ , dont la caractérisation se réduit à la propriété universelle suivante,

**Théorème 1.26** ([Efro6, Chap. 1, Theorem 1.2.6]). *Soient  $A$  un groupe abélien sans torsion et  $G$  un groupe abélien contenant  $A$ . En identifiant  $A$  comme un sous-groupe de  $A_{\text{div}} := A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  via le morphisme*

$$\iota_A : \begin{array}{l} A \longrightarrow A_{\text{div}} \\ a \longmapsto a \otimes 1 \end{array},$$

les assertions suivantes sont équivalentes

1. Le groupe  $G$  est  $A$ -isomorphe à  $A_{\text{div}}$ ,
2. Le groupe  $G$  est sans torsion, le groupe quotient  $G/A$  est de torsion et pour tout groupe sans torsion  $H$  contenant  $A$  tel que  $H/A$  soit de torsion, il existe un  $A$ -monomorphisme  $H \rightarrow G$ ,
3. Le groupe  $G$  est uniquement divisible et, pour tout groupe uniquement divisible  $H$  contenant  $A$  il existe un  $A$ -monomorphisme  $G \hookrightarrow H$ ,
4. Le groupe  $G$  est uniquement divisible et le groupe quotient  $G/A$  est de torsion.

Il est alors légitime de se poser la question du lien entre la co-enveloppe uniquement divisible et l'enveloppe divisible. On peut déjà dire que lorsque le groupe est uniquement divisible, ces deux constructions donnent le même résultat : c'est le corollaire 1.20 et [Efro6, Chap. 1, Prop. 1.2.4]. En revanche, contrairement à la co-enveloppe uniquement divisible, cf. le corollaire 1.20, la réciproque est fautive : il suffit de penser au groupe non divisible  $\mathbf{Z}/n$ . De plus, ces deux dernières ne sont pas toujours égales. En effet, on a  $\mathbf{Z}_{\text{div}} = \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \simeq \mathbf{Q}$  mais  $\mathbf{Z}_1 = 0$  d'après le lemme 1.23.

*Remarque 1.27.* En général, la complétion profinie et la co-enveloppe uniquement divisible ne coïncident pas, en effet :

- Le premier point de la proposition ci-dessus implique que la complétion profinie et la co-enveloppe uniquement divisible d'un groupe abélien fini non trivial ne sont jamais isomorphes.
- La complétion profinie d'un groupe abélien uniquement divisible non trivial est le groupe trivial alors que, d'après le corollaire 1.20, sa co-enveloppe uniquement divisible est lui-même.

Les observations précédentes nous amènent naturellement à regarder le foncteur

$$\cdot_! : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Dtf}.$$

Il est essentiellement surjectif d'après le corollaire 1.20 mais ni plein ni fidèle. De plus, d'après la remarque 1.11 il est exact à gauche.

## 2 Des remarques sur le point de vue topologique

Dans cette section,  $A$  sera un groupe topologique abélien et la catégorie des groupes abéliens topologiques est notée  $\mathbf{TA}b$ .

On prendra garde au fait que lorsque le groupe  $A$  est uniquement divisible, la multiplication par un entier  $n \geq 2$  n'est pas toujours un homéomorphisme. En effet, soit un nombre premier  $p > n$  et considérons le groupe  $\mathbf{Q}$  muni de la topologie telle que  $\mathcal{B} = \{p^m \mathbf{Z}\}_{m \geq 0}$  soit une base de voisinages ouverts de 0 : le groupe  $\mathbf{Z}$  est un voisinage ouvert de 0 mais, en notant  $d$  la division par  $n$ , on a  $d^{-1}(\mathbf{Z}) = n\mathbf{Z}$  qui n'est pas un ouvert de  $\mathbf{Q}$  puisque, pour tout  $m \geq 0$ ,  $n \nmid p^m$ .

Le dernier exemple de 1.9 n'est pas pris au hasard : il s'agit du *solénoïde adélique*

**Proposition 2.1** ([KS18, Prop. 2.1]). *Les groupes topologiques suivants sont tous canoniquement isomorphes,*

1. *La dual de Pontryagin  $\tilde{\mathbf{Q}} := \text{Hom}_{\mathbf{TA}b}(\mathbf{Q}, \mathbf{S}^1)$  muni de la topologie compacte-ouverte où le groupe  $\mathbf{Q}$  est discret et  $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{C}^\times$*
2. *La limite projective  $\lim_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R} / \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$  où les morphismes de transition sont induits par  $\text{Id} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$*
3. *La co-enveloppe uniquement divisible du cercle  $\mathbf{S}_!^1$*
4. *Le groupe des classes d'adèles  $\mathbf{A} / \mathbf{Q}$  où  $\mathbf{Q}$  est diagonalement plongé dans  $\mathbf{A}$*

## 3 Quelques résultats généraux sur les groupes topologiques

Soit  $G$  un groupe, munir  $G$  d'une topologie compatible avec sa structure algébrique est équivalent à se donner une base  $\mathcal{N}$  de voisinages de l'élément neutre de  $G$ . Les groupes topologiques considérés dans la suite seront toujours supposés à bases dénombrables de voisinages et linéairement topologisés, *i.e.* les éléments d'une base  $\mathcal{N}$  sont des sous-groupes de  $G$ . Notons  $\tilde{G}$  le groupe des suites de Cauchy dans  $G$  et  $K \subseteq \tilde{G}$  le sous-groupe de telles suites convergeant vers l'élément neutre. Il y a alors, a priori, deux notions de complétion :

1. Si le morphisme canonique

$$\eta : G \longrightarrow \widehat{G} := \lim_{N \in \mathcal{N}} G / \langle\langle N \rangle\rangle$$

du groupe  $G$  vers sa complétion algébrique  $\widehat{G}$  est un isomorphisme de groupes topologiques on dit que le groupe  $G$  est algébriquement complet.

2. Si le morphisme canonique

$$\iota : G \longrightarrow \overline{G} := \widetilde{G} / K$$

du groupe  $G$  vers sa complétion topologique  $\overline{G}$  est un isomorphisme de groupes topologiques on dit que le groupe  $G$  est topologiquement complet.

**Proposition 3.1.** *Un groupe topologique abélien séparé  $A$  est algébriquement complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans  $A$  converge.*

*Démonstration.* Puisque le groupe est supposé séparé on a déjà l'injectivité du morphisme  $\eta$ , en effet on a  $\{0\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = \text{Ker}(\eta)$ . Soit  $\widehat{a} = (a_N)_{N \in \mathcal{N}}$  un élément de la complétion algébrique  $\widehat{A}$ . Par définition de la limite projective, la condition de compatibilité aux morphismes de transition signifie que la suite  $(a_N)_{N \in \mathcal{N}}$  est de Cauchy dans  $A$ . Si l'on suppose que toute suite de Cauchy dans  $A$  converge alors le morphisme  $\eta$  est surjectif car, en notant  $a$  la limite (nécessairement unique d'après l'hypothèse de séparation) de la suite  $(a_N)_{N \in \mathcal{N}}$  on a  $\eta(a) = (a_N)_{N \in \mathcal{N}} = \widehat{a}$ . Réciproquement, si le groupe  $A$  est algébriquement complet on peut « tirer en arrière les limites » : soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $A$ , comme le groupe  $\widehat{A}$  est complet au sens où toute suite de Cauchy y converge, la suite image  $(\eta(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy et converge donc vers un unique élément  $\widehat{a} \in \widehat{A}$ . Puisque le morphisme  $\eta$  est un isomorphisme, il existe un unique élément  $a \in A$  tel que  $\eta(a) = \widehat{a}$  et la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$ .  $\square$

**Proposition 3.2.** *Un groupe topologique abélien  $A$  est topologiquement complet si et seulement s'il est séparé et toute suite de Cauchy dans  $A$  converge.*

*Démonstration.* Si le groupe  $A$  est topologiquement complet alors, en particulier, le morphisme  $\iota$  est injectif donc  $\text{Ker}(\iota) = \overline{\{0\}} = \{0\}$  et le groupe  $A$  est séparé. De plus, la surjectivité de  $\iota$  revient à dire que pour toute suite de Cauchy  $(a_n)_n$  dans  $A$  il existe un élément  $a \in A$  tel que l'on ait  $\lim a_n - a = 0$  i.e. toute suite de Cauchy converge. Réciproquement, toute suite de Cauchy dans  $A$  converge vers un unique élément donc on peut définir un épimorphisme de groupes  $j : \widetilde{A} \longrightarrow A$  en posant  $j((a_n)_n) := \lim a_n$  de telle sorte que  $\text{Ker}(j) = K$  et que l'isomorphisme induit fournisse l'inverse de  $\iota$ .  $\square$

**Corollaire 3.3.** *Pour un groupe topologique abélien séparé, les deux propriétés de complétion coïncident.*

## 4 Groupes profinis

**Définition 4.1.** Soit  $G$  un groupe, si  $H$  est un sous-groupe normal de  $G$  nous dirons que  $H$  est d'indice fini dans  $G$  dès que le groupe quotient  $G/H$  est d'exposant fini.

**Lemme 4.2.** Soit  $H$  un sous-groupe normal d'un groupe  $G$ , si les groupes  $G/H$  et  $H$  sont d'exposants finis alors il en est de même pour  $G$ .

*Démonstration.* Appelons  $n$  et  $m$  les exposants respectifs des groupes  $G/H$  et  $H$ . Soit  $g \in G$ , on a  $\overline{g^n} = \overline{g^n} = \overline{1}$  donc  $g^n \in H$  et  $g^{nm} = 1$ . Le groupe  $G$  est par conséquent d'exposant fini.  $\square$

Avant toute chose, il est important de noter que l'ensemble partiellement ordonné par l'inclusion des sous-groupes normaux d'indices finis d'un groupe donné forme un système filtrant à gauche. En effet, si l'on se donne  $H, K \trianglelefteq G$  d'indices finis alors en se servant du lemme précédent puisque, d'une part, le groupe  $H/H \cap K$  est d'exposant fini (comme sous-groupe de  $G/K$  qui par hypothèse est d'exposant fini) et que l'on a, grâce au troisième théorème d'isomorphisme,

$$G/H \cap K / H/H \cap K \simeq G/H$$

qui est d'exposant fini on en déduit que le groupe  $G/H \cap K$  est d'exposant fini, i.e.  $H \cap K \trianglelefteq G$  est d'indice fini.

**Définition 4.3** (Topologie profinie). Étant donné  $G$  un groupe, la *topologie profinie* sur  $G$  est celle pour laquelle les sous-groupes (normaux) d'indices finis de  $G$  constituent une base de voisinages de l'élément neutre  $e \in G$ .

**Définition 4.4** (Groupe profini). On dit d'un groupe  $G$  qu'il est *profini* s'il est séparé et complet pour la topologie profinie, i.e. si l'une des structures uniformes droite ou gauche induites par la topologie profinie [Bou07, III.20, Déf. 1] munit le groupe topologique séparé  $(G, \text{ef})$  d'une structure d'espace complet.

*Remarque 4.5.* La propriété de séparation demandée dans la définition de groupe profini exclut d'emblée les groupes divisibles. En effet, tout groupe divisible est complet pour la topologie profinie puisque cette dernière est simplement la topologie grossière qui n'est jamais séparée sauf quand le groupe est trivial.

*Remarque 4.6.* Contrairement au cas profini on perd la propriété de compacité : qu'il suffise de penser au plus petit groupe non fini d'exposant fini  $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2$ , c'est un groupe profini mais certainement pas compact pour la topologie profinie !

De même que dans les cas profini [RZ10, Sect. 3.2] et de protorsion [PS93] on dispose d'une notion de complétion relative à la propriété de profinitude : soit  $G$  un groupe, on peut considérer sa *complétion profinie*

$$\widehat{G}^{\text{ef}} := \lim_{U \triangleleft_{\text{ef}} G} G/U,$$

où  $U \triangleleft_{\text{ef}} G$  signifie que  $U$  est un sous-groupe (normal) d'indice efini de  $G$  et l'ensemble sous-jacent du système projectif correspondant est  $(U \triangleleft_{\text{ef}} G, \subseteq^{\text{op}})$ . En munissant les groupes  $G/U$  de la topologie discrète, on fait de  $\widehat{G}^{\text{ef}}$  un groupe topologique via la topologie de la limite. Les projections

$$G \longrightarrow G/U$$

induisent par ailleurs un unique morphisme de groupes topologiques  $\eta : G \longrightarrow \widehat{G}^{\text{ef}}$  dont l'image est dense dans  $\widehat{G}^{\text{ef}}$  [RZ10, Lemma 1.1.7].

La *complétion profinie* d'un groupe  $G$  est le groupe défini par la formule

$$\widehat{G} := \lim_{N \triangleleft_f G} G/N$$

où, cette fois-ci,  $N \triangleleft_f G$  signifie que  $N$  est un sous-groupe (normal) d'indice fini de  $G$ . Tout groupe d'ordre fini étant d'exposant fini, on a donc, par propriété universelle, un unique morphisme de groupes

$$\epsilon : \widehat{G}^{\text{ef}} \longrightarrow \widehat{G}$$

rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G}^{\text{ef}} & & \\ \downarrow \epsilon & \searrow & \\ \widehat{G} & \xrightarrow{\pi_M} & G/M \\ \downarrow \pi_N & \nearrow \overline{\pi}_m & \\ G/N & & \end{array}$$

commutatif.

**Proposition 4.7.** Soit  $G$  un groupe, en notant  $\langle\langle G^n \rangle\rangle$  le plus petit-sous groupe normal de  $G$  contenant  $G^n$ , on a

$$\widehat{G}^{\text{ef}} \simeq \lim_{m|n} G / \langle\langle G^n \rangle\rangle \simeq \lim_n G / \langle\langle G^{n!} \rangle\rangle,$$

les limites des membres du milieu et de droite étant respectivement prises sur les systèmes projectifs dont les ensembles partiellement ordonnés sous-jacents sont  $(\mathbf{N}^*, |)$  et  $(\mathbf{N}^*, \leq)$ .

*Démonstration.* C'est essentiellement une conséquence du fait que  $(\langle\langle G^n \rangle\rangle, \subseteq^{\text{op}})$  forme une partie cofinale pour  $(U \triangleleft_{\text{ef}} G, \subseteq^{\text{op}})$  [Mac98, Chap. IX, §3]. Il suffit donc de montrer que pour tout  $U \triangleleft_{\text{ef}} G$  il existe  $n \geq 1$  tel que  $\langle\langle G^n \rangle\rangle \subseteq U$ . Puisque par hypothèse le groupe quotient  $G/U$  est d'exposant fini on peut choisir  $n := e(G/U)$ , on a alors, pour tout  $g \in G$ ,  $g^n \in U$  donc  $G^n \subseteq U$ . On a encore, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\langle\langle G^{n!} \rangle\rangle \subseteq \langle\langle G^n \rangle\rangle$  d'où les isomorphismes

$$\widehat{G}^{\text{ef}} \simeq \lim_{\subseteq^{\text{op}}} G / \langle\langle G^n \rangle\rangle \simeq \lim_{\subseteq^{\text{op}}} G / \langle\langle G^{n!} \rangle\rangle.$$

Les foncteurs

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}^*, |) &\longrightarrow (\langle\langle G^n \rangle\rangle, \subseteq^{\text{op}}) & (\mathbf{N}^*, \leq) &\longrightarrow (\langle\langle G^{n!} \rangle\rangle, \subseteq^{\text{op}}) \\ m|n &\longmapsto \langle\langle G^m \rangle\rangle \subseteq^{\text{op}} \langle\langle G^n \rangle\rangle & m \leq n &\longmapsto \langle\langle G^{m!} \rangle\rangle \subseteq^{\text{op}} \langle\langle G^{n!} \rangle\rangle \end{aligned}$$

étant des équivalences de catégories on a aussitôt

$$\lim_{\subseteq^{\text{op}}} G / \langle\langle G^n \rangle\rangle \simeq \lim_{m|n} G / \langle\langle G^n \rangle\rangle \text{ et } \lim_{\subseteq^{\text{op}}} G / \langle\langle G^{n!} \rangle\rangle \simeq \lim_n G / \langle\langle G^{n!} \rangle\rangle.$$

□

**Exemples 4.8.** Lorsque le groupe  $G$  est :

- d'exposant fini  $n$  on a, pour tout multiple  $m$  de  $n$ ,  $\langle\langle G^m \rangle\rangle = 0$  et par conséquent  $\widehat{G}^{\text{ef}} = G$ ,
- divisible on a, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $G / \langle\langle G^n \rangle\rangle = 0$  et par conséquent  $\widehat{G}^{\text{ef}} = 0$ .

A partir de maintenant on se restreindra au cas abélien et donc, en vertu de la proposition précédente, on a, si  $A$  est un groupe abélien,

$$\widehat{A}^{\text{ef}} \simeq \lim_{m|n} A / nA \simeq \lim_n A / n!A.$$

**Proposition 4.9.** Soit  $A$  un groupe abélien de type fini, le morphisme  $\epsilon : \widehat{A}^{\text{ef}} \longrightarrow \widehat{A}$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que tout sous-groupe d'indice efini de  $A$  est d'indice fini. Soit  $N \leq A$  un tel sous-groupe, le groupe quotient  $A/N$  est d'exposant fini donc de torsion et, comme  $A$  est de type fini, il est aussi de type fini. Or, tout groupe abélien de type fini et de torsion est nécessairement fini donc le groupe  $A/N$  est fini, i.e.  $N$  est d'indice fini dans  $A$ . □

Sous l'hypothèse de commutativité on sait bien [Bou07, III. 26, Théorème 2] que le groupe topologique  $(A, \text{ef})$  admet un *complété topologique*  $\overline{A}^{\text{ef}}$  qui est séparé : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de filtres de Cauchy pour la structure uniforme induite par la topologie profinie où l'on décrète que deux filtres sont équivalents si et seulement si leur différence converge vers 0. De plus, on a le résultat suivant,

**Théorème 4.10** ([Bou07, III. 61, Cor. 2]). Soient  $G$  un groupe d'élément neutre  $e$ ,  $(H_\alpha)_\alpha$  une famille filtrante décroissante de sous-groupes normaux de  $G$ . Si l'on munit  $G$  de la topologie pour laquelle les  $H_\alpha$  forment une base de voisinages de  $e$ , le groupe séparé associé à  $G$  est isomorphe à

$$G' := G / \bigcap_\alpha H_\alpha,$$

$G'$  admet un groupe complété et l'application canonique

$$G' \longrightarrow \widetilde{G} := \varprojlim_\alpha G / H_\alpha$$

se prolonge en un isomorphisme de groupes topologiques de  $\overline{G} = \overline{G'}$  sur  $\widetilde{G}$ .

Ce qui nous assure un isomorphisme entre  $\overline{A}^{\text{ef}}$  et  $\widehat{A}^{\text{ef}}$ . En particulier, la complétion profinie d'un groupe abélien est un groupe profini. En conséquence de quoi la proposition qui suit apparaît comme cas particulier de [Bou07, III. 25, Prop. 8],

**Proposition 4.11** (Propriété universelle de la complétion profinie). Soit  $A$  un groupe abélien, pour tout groupe profini  $P$  et pour tout morphisme de groupes  $\varphi : A \longrightarrow P$  il existe un unique morphisme continu  $\widehat{\varphi}^{\text{ef}} : \widehat{A}^{\text{ef}} \longrightarrow P$  tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & P \\ \eta \downarrow & \nearrow \widehat{\varphi}^{\text{ef}} & \\ \widehat{A}^{\text{ef}} & & \end{array}$$

commute et ceci caractérise le groupe  $\widehat{A}^{\text{ef}}$ .

La propriété universelle implique immédiatement la fonctorialité de l'association  $\widehat{\cdot}^{\text{ef}}$  :

**Proposition 4.12** (Fonctorialité de la complétion profinie). Tout morphisme de groupes abéliens  $f : A \longrightarrow B$  induit un unique morphisme  $\widehat{f}^{\text{ef}} : \widehat{A}^{\text{ef}} \longrightarrow \widehat{B}^{\text{ef}}$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \widehat{A}^{\text{ef}} & \xrightarrow{\widehat{f}^{\text{ef}}} & \widehat{B}^{\text{ef}} \end{array}$$

commute.

**Proposition 4.13.** La complétion profinie préserve les produits finis.

*Démonstration.* On procède de la même manière que dans le cas profini. Soient  $A, B$  deux groupes abéliens, il s'agit de démontrer que le groupe topologique  $\widehat{A}^{\text{ef}} \times \widehat{B}^{\text{ef}}$  satisfait la propriété universelle de  $\widehat{A \times B}^{\text{ef}}$ .

Soit donc  $P$  un groupe profini venant avec un morphisme de groupes  $A \times B \xrightarrow{\varphi} P$ , on en tire deux triangles commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_1} & P \\ \downarrow & \nearrow \widehat{\varphi}_1^{\text{ef}} & \\ \widehat{A}^{\text{ef}} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi_2} & P \\ \downarrow & \nearrow \widehat{\varphi}_2^{\text{ef}} & \\ \widehat{B}^{\text{ef}} & & \end{array}$$

qui fournissent un unique morphisme  $\widehat{A}^{\text{ef}} \times \widehat{B}^{\text{ef}} \longrightarrow P$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\varphi} & P \\ \downarrow & \nearrow & \\ \widehat{A}^{\text{ef}} \times \widehat{B}^{\text{ef}} & & \end{array}$$

puisque l'image de  $A \times B$  dans  $\widehat{A}^{\text{ef}} \times \widehat{B}^{\text{ef}}$  est dense et que le groupe topologique  $P$  est séparé.  $\square$

*Remarque 4.14.* Le foncteur  $\widehat{\cdot}^{\text{ef}}$  ne commute pas, en général, avec les colimites. Voici un contre-exemple : écrivons  $\mathbf{Q} = \text{colim}_{m|n} \frac{1}{n}\mathbf{Z}$ , comme  $\mathbf{Q}$  est un groupe divisible on a  $\widehat{\mathbf{Q}}^{\text{ef}} = 0$  mais  $\text{colim}_{m|n} \widehat{\frac{1}{n}\mathbf{Z}}^{\text{ef}} = \text{colim}_{m|n} \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} = \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \neq 0$ .

**Lemme 4.15.** *La complétion profinie d'un groupe abélien sans torsion est sans torsion.*

*Démonstration.* Soit  $A$  un groupe abélien sans torsion. Soient  $(s_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $A$  et  $k \in \mathbf{N}^*$  tels que l'on ait  $k \cdot (s_n)_n = 0$  dans  $\widehat{A}^{\text{ef}}$ , i.e. la suite  $(k \cdot s_n)_n$  converge vers 0 dans  $A$ . Par définition ceci signifie que pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , il existe  $M \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq M$  on ait  $k \cdot s_n \in N!A$ . Soit un entier  $L \geq 2$ , en prenant  $N = kL$  on sait donc qu'il existe  $M \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $n \geq M$ ,  $k \cdot s_n \in (kL)!A$ . Comme  $k \mid (kL)!$  et  $A$  est sans torsion on a alors, pour tout  $n \geq M$ ,  $s_n \in \frac{(kL)!}{k}A$ . Or,  $L! \mid \frac{(kL)!}{k}$  donc pour tout  $n \geq M$  on a  $s_n \in L!A$  : la suite  $(s_n)_n$  converge vers 0 dans  $A$ .  $\square$

**Proposition 4.16** ([God58, Chap. I, Théorème 5.3.1, p. 98]). *Pour un groupe abélien, être plat est équivalent à être sans torsion.*

Signalons que [Wil98, Prop. 1.5.3] reste vraie en remplaçant dans l'énoncé « groupe profini » par « groupe profini » :

**Proposition 4.17.** *Soit  $G$  un groupe profini,*

1. *Il existe une unique application continue  $\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \times G \longrightarrow G$  telle que  $(n, g) \mapsto g^n$  pour  $n \in \mathbf{Z}$ . Si  $g \in G$  et  $z \in \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$  l'élément  $g^z$  est donc bien défini.*
2. *Si  $g \in G$  et  $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$  alors  $g^{z_1+z_2} = g^{z_1}g^{z_2}$  et  $(g^{z_1})^{z_2} = g^{z_1z_2}$ .*

3. Si  $g_1, g_2 \in G$  commutent et  $z \in \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$  alors  $(g_1 g_2)^z = g_1^z g_2^z$ .

Ainsi, tout groupe abélien profini est un module sur l'anneau  $\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$  et, étant donné  $A$  un groupe abélien, on a, par propriété universelle du produit tensoriel, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A \times \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} & \xrightarrow{\otimes} & A \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \\
 \eta \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow \eta \otimes \text{Id} \\
 \widehat{A}^{\text{ef}} \times \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} & \xrightarrow{\otimes} & \widehat{A}^{\text{ef}} \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \\
 & \searrow & \downarrow \exists! \\
 & & \widehat{A}^{\text{ef}}
 \end{array}
 \quad \exists! \theta$$

**Proposition 4.18.** *La transformation naturelle restreinte aux groupes abéliens de type fini*

$$\cdot \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \xrightarrow{\theta} \widehat{\cdot}^{\text{ef}}$$

est un isomorphisme naturel.

*Démonstration.* D'après la proposition 4.9, c'est la même preuve que pour la complétion profinie. Soit  $A \simeq \mathbf{Z}/a_1 \times \dots \times \mathbf{Z}/a_k \times \mathbf{Z}^l$  un groupe abélien de type fini. Le lemme 4.15 et la proposition 4.16 impliquent que le foncteur  $\cdot \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$  est exact donc préserve les produits finis, on a alors

$$\begin{aligned}
 A \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} &\simeq (\mathbf{Z}/a_1 \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}) \times \dots \times (\mathbf{Z}/a_k \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}) \times (\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}})^l \\
 &\simeq \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} / a_1 \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \times \dots \times \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} / a_k \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \times (\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}})^l \\
 &\simeq \mathbf{Z}/a_1 \times \dots \times \mathbf{Z}/a_k \times \widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \\
 &\simeq \widehat{A}^{\text{ef}}
 \end{aligned}$$

où le dernier isomorphisme provient de la proposition 4.13. □

La complétion profinie ne préservant pas le produit tensoriel « algébrique » même quand les groupes sont de type fini (e.g.  $\widehat{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \widehat{\mathbf{Z}} \neq \widehat{\mathbf{Z}}$ ) nous nous intéressons davantage à sa version complétée : c'est un cas particulier du produit tensoriel complété de  $A$ -modules linéairement topologisés où l'anneau  $A$  est lui-même linéairement topologisé [DG60, Chap. 0. Sect. 7.7], en l'occurrence  $A$  est l'anneau des entiers  $\mathbf{Z}$  muni de la topologie profinie et  $M$  et  $N$  sont des groupes abéliens munis de la topologie profinie.

**Définition 4.19.** Soient  $A, B$  deux groupes abéliens munis de la topologie profinie, le *produit tensoriel complété*  $A \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}} B$  de  $A$  et de  $B$  est le  $\widehat{\mathbf{Z}}$ -module défini comme la limite du système projectif formé des  $\mathbf{Z}/n$ -

modules  $A/nA \otimes_{\mathbf{Z}/n} B/nB$ , i.e.

$$A \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} B := \lim_{m|n} A/nA \otimes_{\mathbf{Z}/n} B/nB.$$

En raison des isomorphismes

$$A/nA \otimes_{\mathbf{Z}/n} B/nB \simeq (A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/n) \otimes_{\mathbf{Z}/n} (B \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/n) \simeq A \otimes_{\mathbf{Z}} B/n(A \otimes_{\mathbf{Z}} B)$$

on a  $A \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} B \simeq \widehat{A \otimes_{\mathbf{Z}} B}^{\text{ef}}$  et on note  $\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} : A \times B \rightarrow A \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} B$  l'application bilinéaire obtenue par composition

$$A \times B \xrightarrow{\otimes} A \otimes_{\mathbf{Z}} B \xrightarrow{\eta} \widehat{A \otimes_{\mathbf{Z}} B}^{\text{ef}}.$$

Ce dernier vérifie la propriété universelle adéquate :

**Proposition 4.20** ([Wil98, Lemma 7.7.1]). *Soient  $A, B$  et  $P$  des groupes profinis, pour toute application bilinéaire continue  $f : A \times B \rightarrow P$  il existe un unique morphisme continu  $f^{\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}} : A \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} B \rightarrow P$  rendant le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & P. \\ \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \downarrow & \nearrow f^{\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}} & \\ A \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} B & & \end{array}$$

En particulier, on a  $\widehat{\mathbf{Z} \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \mathbf{Z}} \simeq \widehat{\mathbf{Z}}$  et  $A \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \mathbf{Z} = \lim_{m|n} A/nA \otimes_{\mathbf{Z}/n} \mathbf{Z}/n = \lim_{m|n} A/nA = \widehat{A}^{\text{ef}}$  donc dès que le groupe  $A$  est profini  $A \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \mathbf{Z} = A$ .

Étant donné  $n \geq 1$ , relevons à présent l'existence du diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \lim_{m|n} T_n(A) & \longrightarrow & A_! & \xrightarrow{\text{exp}^{\text{ar}}} & A \xrightarrow{\eta} \widehat{A}^{\text{ef}} \\ & & \downarrow & & \tau_n \downarrow & & \parallel & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T_n(A) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{n} & A \longrightarrow A/nA \longrightarrow 0. \end{array}$$

Notons de surcroît que l'on a l'égalité  $\text{Ker}(\eta) = \bigcap_{n \geq 0} nA$  et que comme, d'après le corollaire 1.17, on obtient  $\text{Im}(\text{exp}^{\text{ar}}) = A_d$  donc  $\text{Im}(\text{exp}^{\text{ar}}) \subseteq \text{Ker}(\eta)$  mais, en général, cette inclusion est stricte. En effet, examinons le groupe défini par générateurs et relations

$$G := \langle x, x_n \mid n.x_n = x, n \geq 2 \rangle^{\text{ab}} \simeq \bigoplus_{n \geq 1} \mathbf{Z} / \langle n.e_n - e_1 \mid n \geq 2 \rangle$$

où, pour  $n \geq 1$ , on pose  $e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ .

On va montrer que l'on a

- (i).  $\text{Div}(G) := \bigcap_{n \geq 1} nG = \langle \bar{e}_1 \rangle$
- (ii).  $\text{Im}(\exp^{\text{ar}})$  est le groupe trivial

*Démonstration.*

- (i). Soit  $g = \sum_{i=1}^d g_i e_i$  dans  $\text{Div}(G)$  tel que  $d \neq 1$  et  $g_d \neq 0$ . Comme, par définition du groupe  $G$ , on a  $i.e_i = e_1$ , on peut supposer que l'on a, pour tout  $1 \leq i \leq d$ , l'encadrement  $0 \leq g_i \leq i - 1$ . Soit maintenant  $n \geq 2$ , il existe  $h \in G$  tel que l'on ait  $n.h = g$  donc  $n.h - g = 0$  dans  $G$  i.e.  $n.h - g = \sum_{i \geq 2} k_i (i.e_i - e_1)$ . Ainsi, pour tout  $i \geq 2$ , on a  $n.h_i - g_i = k_i.i$  c'est-à-dire  $k_i.i \equiv -g_i \pmod{n}$ . Or, quand  $n = d$ , on a d'une part  $k_d.d \equiv 0 \pmod{d}$  et d'autre part  $-g_d \not\equiv 0 \pmod{d}$  car  $1 \leq g_d \leq d - 1$ .
- (ii). Le groupe  $\text{Im}(\exp^{\text{ar}})$  est un sous-groupe divisible du groupe monogène  $\langle \bar{e}_1 \rangle$  et l'élément  $\bar{e}_1$  est d'ordre infini dans  $G$  : si  $N$  est un entier positif tel que  $N.\bar{e}_1 = 0$  dans  $G$  alors on a  $N.e_1 = \sum_{i \geq 2} k_i (i.e_i - e_1)$  donc  $N = (N.e_1)_1 = \sum_{i \geq 2} k_i = 0$  parce que, pour tout  $i \geq 2$ , on a  $(N.e_1)_i = 0 = i.k_i$  donc  $k_i = 0$ . Le groupe  $\text{Im}(\exp^{\text{ar}})$  est par conséquent un sous-groupe divisible du groupe  $\mathbf{Z}$  et est nécessairement trivial. □

## 5 Une notion de complétion profinie pour les (pré)faisceaux abéliens

Soit  $\mathcal{F}$  un préfaisceau en groupes abéliens sur un espace topologique  $X$ , on lui associe un préfaisceau en groupes profinis de la façon la plus naïve qu'il soit : si  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $X$  on pose  $\widehat{\mathcal{F}}^{\text{psh}}(\mathcal{U}) := \widehat{\mathcal{F}(\mathcal{U})}$  et par fonctorialité de la complétion profinie des groupes abéliens ceci nous définit un préfaisceau sur  $X$ , que l'on note  $\widehat{\mathcal{F}}^{\text{psh}}$ , qui vient avec une transformation naturelle  $\mathcal{F} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}^{\text{psh}}$ . Cette construction est de plus fonctorielle, i.e. on obtient un foncteur

$$\widehat{\cdot}^{\text{psh}} : \mathbf{PAb}(X) \longrightarrow \mathbf{Psh}^{\text{prof}}(X).$$

En notant  $i$  le foncteur d'oubli des faisceaux vers les préfaisceaux et  $\cdot^a$  l'opération de faisceautisation on introduit également un foncteur  $\widehat{\cdot}^{\text{sh}}$  au niveau des faisceaux abéliens sur  $X$  de telle manière qu'il fasse commuter le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ab}(X) & \xrightarrow{\widehat{\cdot}^{\text{sh}}} & \mathbf{Ab}(X) \\ i \downarrow & & \uparrow \cdot^a \\ \mathbf{PAb}(X) & \xrightarrow{\widehat{\cdot}^{\text{psh}}} & \mathbf{Psh}^{\text{prof}}(X). \end{array}$$

Par définition de  $\widehat{\cdot}^{\text{sh}}$  et par adjonction  $\cdot^a \dashv i$  on a donc une transformation naturelle

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{PAb}(X) & \xleftarrow{i} & \mathbf{Ab}(X) \\
 \downarrow \widehat{\cdot}^{\text{psh}} & \searrow & \downarrow \widehat{\cdot}^{\text{sh}} \\
 \mathbf{Psh}^{\text{prof}}(X) & \xleftarrow{i} & \mathbf{Ab}(X)
 \end{array}$$

et on se pose la question de savoir sous quelles conditions est-ce un isomorphisme naturel : pour quels espaces  $X$  et quels faisceaux  $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(X)$ , a-t-on  $i(\widehat{\mathcal{F}}^{\text{psh}}) \simeq i(\widehat{\mathcal{F}}^{\text{sh}})$  ?

## 6 Objets prefinis dans les catégories abéliennes

Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie (abélienne) de Grothendieck (pour garantir l'existence des limites infinies). On peut y définir la notion d'objet d'exposant fini : il s'agit d'un objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  tel que, pour un certain entier naturel  $n \geq 1$ , le monomorphisme

$$nA := \text{Im}(n\mathbb{1}_A) \hookrightarrow A$$

soit le morphisme nul. Si  $m|n$  sont deux entiers naturels et  $A$  est un objet d'une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  on a le monomorphisme de groupes abéliens

$$n \cdot \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) \hookrightarrow m \cdot \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$$

qui fait de  $nA$  un sous-objet de  $mA$  et, en notant  $A/nA := \text{Coker}(n\mathbb{1}_A)$ , induit un élément de  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A/nA, A/mA)$ .

**Définition 6.1.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie (abélienne) de Grothendieck et  $A$  un objet de  $\mathcal{A}$ . On écrit

$$\widehat{A} = \lim_{m|n} A/nA \text{ (notez que l'on se débâte de l'exposant)}$$

pour désigner la limite du diagramme obtenu via l'association précédente : c'est la *complétion prefinie* de l'objet  $A$ . Un objet d'une catégorie abélienne est dit *prefini* si le morphisme  $\eta : A \rightarrow \widehat{A}$  provenant des flèches naturelles  $A \rightarrow \text{Coker}(n\mathbb{1}_A)$  est un isomorphisme.

On obtient bien la fonctorialité et la propriété universelle attendue,

**Proposition 6.2.** *Tout morphisme  $f : A \rightarrow B$  de la catégorie  $\mathcal{A}$  induit un unique morphisme  $\widehat{f} : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$*

rendant commutatif le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{B}. \end{array}$$

Démonstration. Pour tout  $n \geq 1$ , on a la factorisation

$$A \xrightarrow{f \circ n\mathbb{1}_A} \text{Im}(f \circ n\mathbb{1}_A) \hookrightarrow nB \hookrightarrow B$$

d'où le triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{n\mathbb{1}_A} & A \\ & \searrow 0 & \downarrow f \\ & & B \\ & & \downarrow \pi \\ & & \text{Coker}(n\mathbb{1}_B) \end{array}$$

donc il existe un unique morphisme tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Coker}(n\mathbb{1}_A) & \cdots \cdots \cdots & \text{Coker}(n\mathbb{1}_B). \end{array}$$

Comme, pour tout entier  $m|n$ , on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Coker}(n\mathbb{1}_A) & \longrightarrow & \text{Coker}(n\mathbb{1}_B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Coker}(m\mathbb{1}_A) & \longrightarrow & \text{Coker}(m\mathbb{1}_B) \end{array}$$

il s'ensuit qu'il existe bien une unique flèche

$$\hat{f} : \hat{A} = \lim_{m|n} \text{Coker}(n\mathbb{1}_A) \longrightarrow \hat{B} = \lim_{m|n} \text{Coker}(n\mathbb{1}_B)$$

telle que  $\hat{f} \circ \eta = \eta \circ f$ .

□

**Proposition 6.3.** Soit  $P$  un objet profini de la catégorie  $\mathcal{A}$ . Tout morphisme  $f : A \rightarrow P$  de la catégorie  $\mathcal{A}$  se factorise de façon unique à travers le morphisme canonique  $\eta : A \rightarrow \widehat{A}$ ,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & P \\ \eta \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ \widehat{A} & & \end{array}$$

*Démonstration.* Grâce à la fonctorialité on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & P \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta' \\ \widehat{A} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{P} \end{array}$$

et comme on a supposé le morphisme  $\eta'$  inversible, il suffit de choisir  $\bar{f} := (\eta')^{-1} \circ \widehat{f}$ , l'unicité découlant de celle de  $\widehat{f}$ . □

La catégorie des complexes  $\text{Ch}(\mathcal{A})$  étant à son tour (abélienne) de Grothendieck on peut encore y parler de complétion et d'objet profinis dont les définitions nous sont imposées puisque toutes les constructions catégoriques (e.g. (iso)morphismes, (co)noyaux, (co)images, etc.) relatives à cette dernière se font ponctuellement. Le cas qui nous intéresse plus particulièrement est celui où  $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}(X)$  est la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur un espace topologique  $X$ .

**Définition 6.4.** Un faisceau est *profini par fibres* quand toutes ses fibres sont des groupes profinis.

**Proposition 6.5.** Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sans torsion sur  $X$ . Si le faisceau  $\mathcal{F}$  est profini par fibres alors, pour tout ouvert  $\mathcal{U} \subseteq X$ , le groupe  $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  est profini.

*Démonstration.* Il suffit de montrer le résultat pour  $X$  puisque la restriction d'un faisceau sans torsion reste sans torsion, on suppose donc que  $\mathcal{U} = X$ . Soit  $(s_n)_n$  une suite de Cauchy pour la topologie profinie dans  $\Gamma(X, \mathcal{F})$ , c'est-à-dire pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , il existe  $M \in \mathbf{N}$  tel que pour tous  $m, n \geq M$  on ait  $s_m - s_n \in N!\Gamma(X, \mathcal{F})$ . Étant donné  $x \in X$ , on peut regarder la suite des fibres associée  $((s_n)_x)_n$  qui, par supposition sur  $\mathcal{F}$ , converge vers  $s_x \in \mathcal{F}_x$  : pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , il existe  $M' \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq M'$ , on ait  $(s_n)_x - s_x \in N!\mathcal{F}_x$ . Choisissons, pour chaque  $x \in X$ , un représentant  $s_x = [t^x, \mathcal{U}^x]$  où  $t^x \in \Gamma(\mathcal{U}^x, \mathcal{F})$  et fixons l'entier  $N$ . Quitte à restreindre à une intersection, pour tout  $n \geq M'$ , il existe un ouvert  $x \in \mathcal{U}_{N,n}^x \subseteq \mathcal{U}^x$  tel que l'on ait  $s_n|_{\mathcal{U}_{N,n}^x} - t^x|_{\mathcal{U}_{N,n}^x} \in N!\Gamma(\mathcal{U}_{N,n}^x, \mathcal{F})$ . Nous pouvons uniformiser tout ceci en le paramètre  $n$  car, en particulier quand  $n = M'' := \max(M, M')$ , nous obtenons

$$s_{M''}|_{\mathcal{U}_{N,M''}^x} - t^x|_{\mathcal{U}_{N,M''}^x} \in N!\Gamma(\mathcal{U}_{N,M''}^x, \mathcal{F})$$

et, comme  $(s_n)_n$  est de Cauchy, nous avons

$$s_n|_{\mathcal{U}_{N,M''}^x} - s_{M''}|_{\mathcal{U}_{N,M''}^x} \in N!\Gamma(\mathcal{U}_{N,M''}^x, \mathcal{F})$$

donc, pour tout  $n \geq M''$ ,

$$s_n|_{\mathcal{U}_{N,M''}^x} - t_{|\mathcal{U}_{N,M''}^x}^x = (s_n|_{\mathcal{U}_{N,M''}^x} - s_{M''}|_{\mathcal{U}_{N,M''}^x}) + (s_{M''}|_{\mathcal{U}_{N,M''}^x} - t_{|\mathcal{U}_{N,M''}^x}^x) \in N!\Gamma(\mathcal{U}_{N,M''}^x, \mathcal{F}).$$

Notons alors  $\mathcal{U}_N^x := \mathcal{U}_{N,M''}^x$  et, pour  $x, x' \in X$ ,  $\mathcal{U}_N^{x,x'} := \mathcal{U}_N^x \cap \mathcal{U}_N^{x'}$ . Soit  $y \in \mathcal{U}_N^{x,x'}$ , on a

$$\left( t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^x \right)_y = \left( t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^{x'} \right)_y$$

puisque pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq M$

$$\begin{cases} s_n|_{\mathcal{U}_N^{x,x'}} - t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^x \in N!\Gamma(\mathcal{U}_N^{x,x'}, \mathcal{F}) \\ s_n|_{\mathcal{U}_N^{x,x'}} - t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^{x'} \in N!\Gamma(\mathcal{U}_N^{x,x'}, \mathcal{F}) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (s_n)_y - \left( t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^x \right)_y \in N!\mathcal{F}_y \\ (s_n)_y - \left( t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^{x'} \right)_y \in N!\mathcal{F}_y \end{cases}$$

et par unicité de la limite on obtient  $\left( t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^x \right)_y = s_y = \left( t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^{x'} \right)_y$ . Par conséquent nous avons l'égalité  $t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^{x'} - t_{|\mathcal{U}_N^{x,x'}}^x = 0$  et la condition de recollement nous fournit une section globale  $t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$  telle que pour tout  $x \in X$  et pour tout  $n \geq M$  on ait

$$s_n|_{\mathcal{U}_N^x} - t_{|\mathcal{U}_N^x} \in N!\Gamma(\mathcal{U}_N^x, \mathcal{F}).$$

Nous pouvons ensuite appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble partiellement ordonné des couples  $(V, r)$  où  $V \subseteq X$  est un ouvert,  $r \in \Gamma(V, \mathcal{F})$  vérifiant, pour tout  $n \geq M$ , l'égalité  $N!r = s_n|_V - t|_V$  et la relation d'ordre choisie est définie par  $(V, r) \leq (V', r')$  si et seulement si  $V \subseteq V'$  et  $r'|_V = r$ . Soit  $\mathcal{V} \subseteq X$  l'ouvert maximal ainsi obtenu, montrons que  $\mathcal{V} = X$  : supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in X \setminus \mathcal{V}$  et considérons l'ouvert  $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \cup \mathcal{U}_N^x$ . Par construction des ouverts en jeu nous pouvons trouver des sections  $r \in \Gamma(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  et  $r^x \in \Gamma(\mathcal{U}_N^x, \mathcal{F})$  telles que  $N!r = s_n|_{\mathcal{V}} - t|_{\mathcal{V}}$  et  $N!r^x = s_n|_{\mathcal{U}_N^x} - t|_{\mathcal{U}_N^x}$ . Au niveau de l'intersection  $\mathcal{V}^x := \mathcal{V} \cap \mathcal{U}_N^x$  on a donc  $N!(r|_{\mathcal{V}^x} - r^x|_{\mathcal{V}^x}) = 0$  et comme le faisceau  $\mathcal{F}$  est supposé sans torsion la condition de recollement implique l'existence d'une section globale  $\sigma \in \Gamma(\mathcal{V}', \mathcal{F})$  telle que  $\sigma|_{\mathcal{V}} = r$  et  $\sigma|_{\mathcal{U}_N^x} = r^x$  ce qui contredit la maximalité de  $\mathcal{V}$ . Finalement, la suite  $(s_n)_n$  converge donc vers  $t$ .  $\square$

Dès lors que l'on s'occupe d'un faisceau sans torsion  $\mathcal{F}$  et que l'on a un isomorphisme entre les groupes  $\widehat{\mathcal{F}}_x^{\text{ef}}$  et  $(\widehat{\mathcal{F}})_x$ , e.g. dans les conditions de la proposition 6.11, la combinaison des propositions 4.11 et 6.5 implique l'existence d'un morphisme  $\varphi$  faisant commuter le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \widehat{\mathcal{F}}). \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \widehat{\Gamma(X, \mathcal{F})}^{\text{ef}} & & \end{array}$$

**Proposition 6.6.** Soient  $X$  un espace topologique compact et  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sans torsion sur  $X$ , le morphisme  $\varphi$ , s'il existe, est un monomorphisme de groupes abéliens,

$$\widehat{\Gamma(X, \mathcal{F})}^{\text{ef}} \xleftarrow{\varphi} \Gamma(X, \widehat{\mathcal{F}}).$$

*Démonstration.* Soit  $(s_n)_n$  une suite de Cauchy pour la topologie profinie dans  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  telle que  $\varphi((s_n)_n) = 0$ . Pour tout  $x \in X$ , la suite des fibres  $((s_n)_x)_n$  est donc nulle dans  $\widehat{\mathcal{F}}_x^{\text{ef}}$  : pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , il existe  $M_{x,N} \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq M$  on ait  $(s_n)_x \in N! \mathcal{F}_x$ . Autrement dit, en choisissant des représentants, pour tout  $N \in \mathbf{N}$ , il existe  $M_{x,N} \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq M$  il existe des ouverts  $x \in \mathcal{U}_{x,N,n} \subseteq X$  et des sections  $t_{x,N,n} \in \Gamma(\mathcal{U}_{x,N,n}, \mathcal{F})$  tels que l'on ait  $s_n|_{\mathcal{U}_{x,N,n}} = N! t_{x,N,n}$ . Fixons l'entier  $N$  et, pour  $n \in \mathbf{N}$ , posons  $Y_n := \{x \in X, M_{x,N} \leq n\}$ . Nous avons alors d'une part  $X = \bigcup_{n \geq 0} Y_n$  et, en considérant les ouverts  $\mathcal{U}_{N,n} := \bigcup_{x \in Y_n} \mathcal{U}_{x,N,n} \subseteq X$ , d'autre part  $X = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{U}_{N,n}$ . Comme la suite  $(s_n)_n$  est de Cauchy il existe  $M' \in \mathbf{N}$  tel que pour tous  $n, m \geq M'$   $s_n - s_m \in N! \Gamma(X, \mathcal{F})$  et nous pouvons restreindre à des recouvrements plus grossiers, i.e.  $X = \bigcup_{n \geq M'} Y_n = \bigcup_{n \geq M'} \mathcal{U}_{N,n}$ . Notons également que la propriété de recollement et l'hypothèse sur la torsion fournissent des sections  $t_{N,n} \in \Gamma(\mathcal{U}_{N,n}, \mathcal{F})$  vérifiant  $s_n|_{\mathcal{U}_{N,n}} = N! t_{N,n}$ . Par compacité, il existe un nombre fini d'entiers  $n_i \geq M'$  tels que les ouverts  $\mathcal{U}_{N,n_i}$  recouvrent l'espace  $X$ . Comme les  $s_{n_i}|_{\mathcal{U}_{N,n_i}} \in N! \Gamma(\mathcal{U}_{N,n_i}, \mathcal{F})$  et que pour tout  $n \geq n_i \geq M'$  on a  $s_n|_{\mathcal{U}_{N,n_i}} - s_{n_i}|_{\mathcal{U}_{N,n_i}} \in N! \Gamma(\mathcal{U}_{N,n_i}, \mathcal{F})$  nous savons que, pour tout  $n \geq n_i$ ,  $s_n|_{\mathcal{U}_{N,n_i}} \in N! \Gamma(\mathcal{U}_{N,n_i}, \mathcal{F})$ . Considérons enfin  $M'' := \max\{n_i\}$  pour en déduire que pour tout  $n \geq M''$  et pour tout indice  $i$ ,  $s_n|_{\mathcal{U}_{N,n_i}} \in N! \Gamma(\mathcal{U}_{N,n_i}, \mathcal{F})$  et donc pour tout  $n \geq M''$ ,  $s_n \in N! \Gamma(X, \mathcal{F})$ , c'est-à-dire que la suite  $(s_n)_n$  est nulle dans  $\widehat{\Gamma(X, \mathcal{F})}^{\text{ef}}$ .  $\square$

On a encore dans le contexte faisceutique le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \lim_{m|n} \mu_m(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F}_! & \xrightarrow{\text{exp}^{\text{ar}}} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\eta} & \widehat{\mathcal{F}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi_n & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mu_n(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{n} & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}/n\mathcal{F} \longrightarrow 0. \end{array}$$

**Lemme 6.7.** Soit  $X$  un espace topologique localement connexe. Pour tout faisceau constant  $A_X$  les faisceaux  $\widehat{A}_X$  et  $(\widehat{A}^{\text{ef}})_X$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{U} \subseteq X$  un ouvert, le morphisme naturel  $A \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{U}}} \Gamma(\mathcal{U}, A_X)$  provenant de la faisceautisation induit, pour tout  $n \geq 1$ , une flèche  $nA \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{U}|nA}} n\Gamma(\mathcal{U}, A_X)$  telle que  $\text{Im}(\alpha_{\mathcal{U}|nA}) \subseteq \Gamma(\mathcal{U}, nA_X)$ . On récupère donc un morphisme de préfaisceaux

$$A/nA \xrightarrow{\quad} \Gamma(\mathcal{U}, A_X) / \Gamma(\mathcal{U}, nA_X) \xrightarrow{\cdot a} \Gamma(\mathcal{U}, A_X/nA_X)$$

$\xrightarrow{\quad \bar{\alpha}_{\mathcal{U}} \quad}$

et, par propriété universelle, un morphisme de faisceaux

$$(A/nA)_X \xrightarrow{\bar{\alpha}} A_X/nA_X$$

qui est un isomorphisme car, pour tout  $x \in X$ , nous avons

$$A/nA \simeq (A_X)_x / (nA_X)_x \simeq (A_X/nA_X)_x.$$

Les faisceaux  $\lim_{m|n} A_X/nA_X = \widehat{A}_X$  et  $\lim_{m|n} (A/nA)_X$  sont par conséquent isomorphes. En notant  $\widehat{A}^{\text{ef}} \xrightarrow{\pi_n} A/nA$  les projections (évidemment continues pour la topologie discrète), nous pouvons construire le morphisme

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{U}, (\widehat{A}^{\text{ef}})_X) = \text{Cont}(\mathcal{U}, \widehat{A}_{\text{disc}}^{\text{ef}}) &\longrightarrow \lim_{m|n} \Gamma(\mathcal{U}, (A/nA)_X) = \lim_{m|n} \text{Cont}(\mathcal{U}, A/nA_{\text{disc}}) \\ f &\longmapsto (\pi_n \circ f)_n \end{aligned}$$

et cette association est une transformation naturelle. Les groupes concernés étant munis de la topologie discrète et par connexité locale de l'espace  $X$  on obtient bien un isomorphisme entre  $(\widehat{A}^{\text{ef}})_X$  et  $\lim_{m|n} (A/nA)_X$  en passant aux fibres.  $\square$

**Corollaire 6.8.** Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau localement constant sur un espace topologique localement connexe  $X$ . Pour tout  $x \in X$ , il existe un ouvert  $\mathcal{U} \subseteq X$  et un groupe abélien  $A$  tels que  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}_x} \simeq A_{\mathcal{U}_x}$  et on a  $(\widehat{\mathcal{L}})_x = \widehat{A}^{\text{ef}}$ .

*Démonstration.* La première assertion est la définition d'être localement constant, pour la seconde on se ramène d'emblée au cas constant.  $\square$

**Lemme 6.9.** Soient  $\mathcal{U} \xrightarrow{j} X$  une inclusion ouverte et  $\mathcal{L}$  un faisceau abélien localement constant sur  $\mathcal{U}$ , les faisceaux  $j_!(\mathcal{L}/n\mathcal{L})$  et  $j_!\mathcal{L}/n j_!\mathcal{L}$  sont isomorphes.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du fait que le foncteur

$$j_! : \mathbf{Shv}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbf{Shv}(X)$$

soit un adjoint à gauche [Ive86, Chap. II, Prop. 6.6, p. 108] : il préserve donc en particulier les conoyaux.  $\square$

En reprenant le foncteur  $D$  du paragraphe juste après le diagramme (1.1) où  $I$  est l'ensemble partiellement ordonné  $(\mathbf{N}^*, |)$  et  $D(n) = \mathcal{F} / n\mathcal{F}$  nous en déduisons, pour tout  $x \in X$ , l'existence de morphismes

$$(\lim D)_x = \left(\widehat{\mathcal{F}}\right)_x \xrightarrow{\varphi_x} \lim_{m|n} (\bullet_x \circ D) = \lim_{m|n} \left(\mathcal{F} / n\mathcal{F}\right)_x = \lim_{m|n} \mathcal{F}_x / n\mathcal{F}_x = \widehat{\mathcal{F}}_x^{\text{ef}}$$

**Définition 6.10.** Un (pré)faisceau  $\mathcal{F} \in (\mathbf{P})\mathbf{Ab}(X)$  est *ef-admissible* dès que, pour tout  $x \in X$ , les morphismes  $\varphi_x$  sont inversibles.

Tout faisceau ef-admissible et prefini par fibres est automatiquement un faisceau prefini et tout faisceau prefini et ef-admissible est prefini par fibres :

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\eta_x} \left(\widehat{\mathcal{F}}\right)_x \xrightarrow{\varphi_x} \widehat{\mathcal{F}}_x^{\text{ef}}$$

**Proposition 6.11.** Soient  $X$  un espace topologique localement connexe,  $\mathcal{U} \xrightarrow{j} X$  une inclusion ouverte et  $\mathcal{F} = j_!\mathcal{L}$  l'extension par zéro d'un faisceau localement constant  $\mathcal{L} \in \mathbf{Ab}(X)$ . Le faisceau  $\mathcal{F}$  est ef-admissible.

*Démonstration.* Soit  $Z := X \setminus \mathcal{U}$  le complémentaire fermé, on distingue deux cas :

- Si  $x \in Z$ , on a  $\mathcal{F}_x = 0$  donc  $\widehat{\mathcal{F}}_x^{\text{ef}} = 0$ . En outre, si  $\mathcal{O} \subseteq X$  est un ouvert tel que  $x \in \mathcal{O}$  alors, pour tout  $y \in \mathcal{O}$ , on a  $\mathcal{F}_y = 0$  donc

$$\left(\text{for}(\mathcal{F}) / n\text{for}(\mathcal{F})\right)_y = \text{for}(\mathcal{F})_y / n\text{for}(\mathcal{F})_y = 0$$

d'où l'égalité

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\mathcal{F}}\right)_x &= \text{colim}_{x \in \mathcal{O}} \Gamma\left(\mathcal{O}, \lim_{m|n} \left(\text{for}(\mathcal{F}) / n\text{for}(\mathcal{F})\right)_y^a\right) \\ &= \text{colim}_{x \in \mathcal{O}} \left(\lim_{m|n} \Gamma\left(\mathcal{O}, \left(\text{for}(\mathcal{F}) / n\text{for}(\mathcal{F})\right)_y^a\right)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Si  $x \in \mathcal{U}$ , il existe un ouvert  $x \in \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$  et un groupe abélien  $A$  tels que l'on ait

$$\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_x} \simeq \mathcal{L}|_{\mathcal{U}_x} \simeq A_{\mathcal{U}_x}$$

donc

$$\widehat{\mathcal{F}}_x^{\text{ef}} \simeq \widehat{\mathcal{L}}_x^{\text{ef}} \simeq \widehat{A}^{\text{ef}}.$$

Quitte à restreindre les sections à une intersection d'ouverts, écrivons ensuite directement

$$\left(\widehat{\mathcal{F}}\right)_x = \text{colim}_{x \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}_x} \left( \lim_{m|n} \Gamma \left( \mathcal{O}, \left( \text{for}(\mathcal{F}) / n \text{for}(\mathcal{F}) \right)^a \right) \right)$$

et remarquons que puisque

$$\prod_{y \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}_x} \mathcal{F}_y / n \mathcal{F}_y \simeq \prod_{y \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}_x} \mathcal{L}_y / n \mathcal{L}_y \simeq \prod_{y \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}_x} A / nA$$

nous obtenons

$$\left(\widehat{\mathcal{F}}\right)_x = \text{colim}_{x \in \mathcal{O}} \Gamma \left( \mathcal{O}, \lim_{m|n} (A_X / nA_X)^a \right) = \left(\widehat{A}_X\right)_x$$

et concluons à l'aide du lemme 6.7. □

*Remarque 6.12.* Soit  $X := \mathbf{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$  l'espace topologique dont les parties ouvertes sont les intervalles semi-ouverts de la forme  $\mathcal{U}_n := ]n, \infty]$  pour  $n \geq 1$  et l'ensemble vide :  $\text{Ouv}(X) := \{\mathcal{U}_n, n \geq 1\} \cup \{\emptyset\}$ . Comme le treillis des ouverts est totalement ordonné pour l'inclusion, on a

$$\mathbf{Shv}(X) = \mathbf{Psh}^\emptyset(X) := \{\mathcal{F} \in \mathbf{Psh}(X), \mathcal{F}(\emptyset) = 0\}.$$

Reprenons l'exemple de la remarque 4.14 et construisons un faisceau  $\mathcal{F}$  en posant, pour  $n \geq 1$ ,  $\Gamma(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}) := \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right]$ . Nous trouvons alors  $\mathcal{F}_\infty = \text{colim}_{\mathcal{U}_n} \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right] = \mathbf{Q}$  donc  $\widehat{\mathcal{F}}_\infty^{\text{ef}} = 0$  mais

$$\left(\widehat{\mathcal{F}}\right)_\infty = \text{colim}_{\mathcal{U}_n} \left( \lim_{j|k} \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right] / k \mathbf{Z} \left[ \frac{1}{n} \right] \right) = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^f \neq 0.$$

**Définition 6.13.** Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  des faisceaux abéliens sur un espace topologique  $X$ , le *produit tensoriel complété*  $\mathcal{F} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est le faisceau associé au préfaisceau qui à  $\mathcal{U} \in \text{Ouv}(X)$  fait correspondre le groupe abélien  $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}(\mathcal{U})$ .

**Proposition 6.14.** Le produit tensoriel complété de faisceaux abéliens induit un (bi)foncteur additif

$$- \widehat{\otimes}^{\text{ef}} - : \mathbf{Ab}(X) \times \mathbf{Ab}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}(X).$$

*Démonstration.* Soit  $(\alpha, \beta) : (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{F}', \mathcal{G}') = (\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}', \beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}')$  un morphisme de la catégorie produit  $\mathbf{Ab}(X) \times \mathbf{Ab}(X)$ . En utilisant la fonctorialité du produit tensoriel de groupes abéliens et de la complétion profinie on a une transformation naturelle  $\alpha \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \beta : \mathcal{F} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}' \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}'$  donnée par les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}'(U) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathcal{F}(U) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}(U) \simeq \widehat{\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(U)}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}'(U) \simeq \widehat{\mathcal{F}'(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}'(U)}^{\text{ef}} \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}'(U) \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ \mathcal{F}(\mathcal{V}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}(\mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathcal{F}'(\mathcal{V}) \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}'(\mathcal{V}) \end{array}$$

où  $\mathcal{V} \subseteq U$  sont des ouverts de  $X$ . De plus, on vérifie sans peine que les propriétés de compatibilité avec l'identité et la composition sont satisfaites. Quant à l'additivité de ce foncteur, elle provient de la distributivité du produit tensoriel complété  $\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}}^{\text{ef}}$  de groupes abéliens sur les sommes directes : voir [Wil98, Prop. 7.7.5].  $\square$

Le plus souvent, les faisceaux  $\mathcal{F} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}$  et  $\widehat{\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}}$  sont des objets bien distincts mais, sur des espaces topologiques agréables, ils sont isomorphes dans le cas constant.

**Lemme 6.15.** *Soient  $X$  un espace localement connexe et ayant un nombre fini de composantes connexes (en particulier, un espace topologique compact et localement connexe),  $A$  et  $B$  des groupes abéliens. Les faisceaux  $A_X \widehat{\otimes}^{\text{ef}} B_X$  et  $\widehat{A_X \otimes B_X}$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* D'après le lemme 6.7 on a les isomorphismes

$$\widehat{A_X \otimes B_X} \simeq \widehat{(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)_X} \simeq \left( \widehat{A \otimes_{\mathbb{Z}} B}^{\text{ef}} \right)_X = \left( A \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}}^{\text{ef}} B \right)_X$$

donc, comme les composantes connexes de  $X$  sont en nombre fini, d'après la proposition 4.13 on obtient une transformation naturelle

$$A_X \widehat{\otimes}^{\text{ef}} B_X \xrightarrow{\tau} \widehat{A_X \otimes B_X}$$

en prenant les projections

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cont}(\mathcal{U}, A^{\text{disc}}) \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} \text{Cont}(\mathcal{U}, B^{\text{disc}}) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{U}}} & \Gamma\left(\mathcal{U}, \left(A \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} B\right)_x\right) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 A^{\pi_0(\mathcal{U})} \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} B^{\pi_0(\mathcal{U})} \simeq \widehat{\left(A \otimes_{\mathcal{Z}} B\right)^{2\pi_0(\mathcal{U})}}^{\text{ef}} & & \text{Cont}\left(\mathcal{U}, \left(A \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} B\right)^{\text{disc}}\right) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 \left(A \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} B\right)^{2\pi_0(\mathcal{U})} & \xrightarrow{\text{proj}} & \left(A \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} B\right)^{\pi_0(\mathcal{U})}.
 \end{array}$$

Le morphisme  $\tau$  est inversible puisque qu'en passant aux fibres on peut se restreindre aux ouverts connexes ce qui nous donne

$$\left(A_X \widehat{\otimes}^{\text{ef}} B_X\right)_x = \text{colim}_{x \in \mathcal{U}} \text{Cont}\left(\mathcal{U}, A^{\text{disc}}\right) \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} \text{Cont}\left(\mathcal{U}, B^{\text{disc}}\right) = A \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} B \xrightarrow[\cong]{\tau_x} \left(\widehat{A_X \otimes B_X}\right)_x.$$

□

Alternativement, en notant  $\cdot^a : \mathbf{PAb}(X) \xleftrightarrow{\quad} \mathbf{Ab}(X) : i$  l'adjonction oubli-faisceautisation et  $\otimes_p$  le produit tensoriel de préfaisceaux on a

$$\mathcal{F} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G} = \left(\widehat{i(\mathcal{F}) \otimes_p i(\mathcal{G})}\right)^a.$$

Contrairement au produit tensoriel usuel, les morphismes canoniques

$$\left(\mathcal{F} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}\right)_x \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{F}_x \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}_x \simeq \left(\widehat{i(\mathcal{F}) \otimes_p i(\mathcal{G})}\right)_x^{\text{ef}}$$

ne sont pas, en général, des isomorphismes : ceci se produit précisément quand le préfaisceau  $i(\mathcal{F}) \otimes_p i(\mathcal{G})$  est ef-admissible. Résumons la situation avec le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\mathcal{F} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}\right)_x & \xrightarrow{\phi_x} & \mathcal{F}_x \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}_x \\
 \eta_x \downarrow & & \downarrow \cong \\
 \left(\widehat{\mathcal{F} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}}\right)_x & \xrightarrow{\quad} & \widehat{\mathcal{F}_x \widehat{\otimes}_{\mathcal{Z}}^{\text{ef}} \mathcal{G}_x}^{\text{ef}} \\
 \varphi_x \searrow & & \nearrow \\
 & \widehat{\left(\mathcal{F} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}\right)_x}^{\text{ef}} &
 \end{array} \tag{6.1}$$

Par construction, il y a une transformation naturelle  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \widehat{\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}}$  et on peut étendre le foncteur de la proposition 6.14 aux complexes de faisceaux abéliens

$$-\widehat{\otimes}^{\text{ef}}- : \text{Ch}^b(\mathbf{Ab}(X)) \times \text{Ch}^b(\mathbf{Ab}(X)) \rightarrow \text{Ch}^b(\mathbf{Ab}(X))$$

en faisant comme d'habitude : soient  $\mathcal{F} := \mathcal{F}^\bullet$  et  $\mathcal{G} := \mathcal{G}^\bullet$  des complexes de faisceaux abéliens, considérons d'abord le complexe double  $\mathcal{F}^\bullet \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}^\bullet$  défini par  $\mathcal{F}^i \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}^j$  en degré  $(i, j)$  et dont les différentielles horizontale et verticale sont  $\partial^h := \partial^{\mathcal{F}} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \text{Id}_{\mathcal{G}}$  et  $\partial^v := \text{Id}_{\mathcal{F}} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \partial^{\mathcal{G}}$ . Le produit tensoriel complété des complexes  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est alors obtenu comme le complexe total de ce complexe double,

$$\left(\widehat{\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}}\right)^\bullet := \text{Tot}_{\oplus}^\bullet \left(\mathcal{F}^\bullet \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}^\bullet\right).$$

# Cohomologie bigraduée d'espaces réels

---

DANS ce chapitre, nous présentons dans les grandes lignes la théorie développée par Dewi Gleuher dans sa thèse de doctorat [Gle19] et rappelons les résultats issus de cette dernière sans en donner les démonstrations. L'adjectif « analytique » étant absent de la thèse de Gleuher, nous l'introduisons pour deux raisons :

- la cohomologie bigraduée en question est construite comme hypercohomologie de certains complexes, que l'on appelle aussi (de réduction) analytiques car dépendants eux-mêmes d'un morphisme basé sur l'exponentielle analytique,
- nous construisons dans le chapitre 3 une variante arithmétique de cette dernière, par opposition à analytique, dans la mesure où il est censément possible d'adapter la théorie établie pour le groupe  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  à n'importe quel groupe de Galois absolu.

## 1 Espaces réels

Nous introduisons les catégories avec lesquelles nous travaillons et étudions plus en détail la notion d'espace réel présente dans [Gle19].

**Définition 1.1** (Espace réel). Un *espace réel* est un triplet  $(X, Y, \gamma)$  où  $X$  est un espace topologique,  $Y$  est un  $C_2$ -espace, la *complexification* de l'espace réel, et  $Y \xrightarrow{\gamma} X$  est une application continue qui passe au quotient telle que l'application induite

$$Y/C_2 \xrightarrow{\bar{\gamma}} X$$

soit un homéomorphisme. Un morphisme d'espaces réels  $(X, Y, \gamma) \rightarrow (X', Y', \gamma')$  est un couple

$$(f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y')$$

où  $f$  est une application continue et  $g$  est un morphisme de  $C_2$ -espaces tels que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y' \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma' \\ X & \xrightarrow{f} & X'. \end{array}$$

L'ensemble des *points réels*  $X(\mathbf{R})$  d'un espace réel  $(X, Y, \gamma)$  est l'image par le morphisme  $\gamma$  des points fixes de l'action sur  $Y$ , i.e.  $X(\mathbf{R}) := \gamma(Y^{C_2})$ .

On écrira souvent simplement  $X$  pour désigner l'espace réel  $(X, Y, \gamma)$ .

Une *paire d'espaces réels* est un couple  $(X, \mathcal{Z})$  où  $X$  est un espace réel et  $\mathcal{Z} \xrightarrow{i} X$  est un fermé de l'espace topologique  $X$ . Un morphisme de paires d'espaces réels  $(X, \mathcal{Z}) \rightarrow (X', \mathcal{Z}')$  est un couple

$$(f : X \rightarrow X', g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}')$$

où  $f$  est un morphisme d'espaces réels et  $g$  est une application continue tels que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{g} & \mathcal{Z}' \\ i \downarrow & & \downarrow i' \\ X & \xrightarrow{f} & X'. \end{array}$$

*Notation 1.2.* Soit  $X$  un espace réel. À condition que sa complexification  $Y$  soit un espace topologique séparé, hypothèse que l'on fera systématiquement jusqu'à la fin de ce chapitre, on notera les inclusions fermée et ouverte des points réels et non réels par  $X(\mathbf{R}) \xrightarrow{i} X$  et  $X \setminus X(\mathbf{R}) \xrightarrow{j} X$ .

Les objets initial et terminal de la catégorie des espaces réels sont respectivement  $\emptyset_{\mathbf{R}}$  et le singleton réel  $\{\bullet_{\mathbf{R}}\}$  : ce sont les espaces réel  $(\emptyset, \emptyset, \mathbb{1})$  et  $(\{\bullet\}, \{\bullet\}, \mathbb{1})$  lorsque  $\emptyset$  et  $\{\bullet\}$  sont munis de l'action triviale de  $C_2$ .

**Définition 1.3** (Homotopie réelle). Soit  $I = [0, 1]$  l'intervalle unité que l'on voit comme l'espace réel trivial  $(I, I, \mathbb{1})$ . Deux morphismes d'espaces réels  $f_1, f_2 : (X, Y, \gamma) \rightarrow (X', Y', \gamma')$  sont *homotopes réellement* s'il existe un morphisme d'espace réels

$$H : X \times I \rightarrow X',$$

où  $X \times I$  est l'espace réel  $(X \times I, Y \times I, \gamma \times \mathbb{1})$ , tel que  $H|_{X \times \{0\}} = f_1$  et  $H|_{X \times \{1\}} = f_2$ .

## 2 Complexes de réduction analytique

Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel, le point de départ de la cohomologie bigraduée analytique de  $X$  est le faisceau des entiers imaginaires purs sur  $X$ . Nous choisissons de présenter une définition équivalente (voir [Gle19, Prop. 1.2.3]) à celle qui est donnée dans la thèse de Gleuher.

**Définition 2.1.** Soit  $X$  un espace réel. On fait du faisceau constant  $\mathbf{Z}$  sur le  $C_2$ -espace  $Y$ , en tant qu'espace étalé  $p : \mathbf{Z} \times Y \rightarrow Y$ , un faisceau  $C_2$ -équivariant en faisant agir  $\sigma \in C_2$  par multiplication par  $-1$ , i.e. pour  $(m, y) \in \mathbf{Z} \times Y$ , on a  $\sigma.(m, y) := (-m, \sigma y)$ . Le faisceau des entiers imaginaires purs sur  $X$  est le faisceau des sections invariantes de l'image directe par  $\gamma$  de ce faisceau équivariant : on pose  $J^{\text{an}} := \gamma_*^{C_2} \mathbf{Z}$ .

L'étape suivante est de calculer les fibres de ce faisceau,

**Proposition 2.2** ([Gle19, Prop. 1.2.2]). *Soit  $X$  un espace réel,*

1. *Si  $x \in X(\mathbf{R})$  alors  $J_x^{\text{an}} = \{0\}$ .*
2. *Le faisceau  $J_{|X \setminus X(\mathbf{R})}^{\text{an}}$  est localement isomorphe au faisceau constant  $\mathbf{Z}$  sur  $X \setminus X(\mathbf{R})$ . En particulier, si  $x \in X \setminus X(\mathbf{R})$  alors  $J_x^{\text{an}} \simeq \mathbf{Z}$ .*

D'après [Gle19, Lemme 2.1.1] on a un isomorphisme canonique  $J^{\text{an}} / 2J^{\text{an}} \simeq j_* \mathbf{Z} / 2$  et le morphisme de réduction analytique  $\rho^{\text{an}}$  est le morphisme de faisceaux abéliens sur  $X$  obtenu par composition

$$J^{\text{an}} \longrightarrow J^{\text{an}} / 2J^{\text{an}} \simeq j_* \mathbf{Z} / 2 \longleftarrow \mathbf{Z} / 2.$$

$\rho^{\text{an}}$

**Définition 2.3** ([Gle19, Déf. 2.1.1]). Soit  $X$  un espace réel, le complexe de réduction analytique  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \in \text{Ch}^b(X) := \text{Ch}^b(\mathbf{Ab}(X))$  est le complexe de faisceaux abéliens sur  $X$

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow J^{\text{an}} \xrightarrow{\rho^{\text{an}}} \mathbf{Z} / 2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

concentré en degrés 0 et 1. Plus généralement, pour tout entier  $q \geq 0$  on note

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{an}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{an}})^{\otimes q} \in \text{Ch}^b(X).$$

**Proposition 2.4** ([Gle19, Prop. 1.2.5]). *Soit  $X$  un espace réel, le faisceau quotient  $\gamma_* \mathbf{Z} / \mathbf{Z}$  est isomorphe à  $J^{\text{an}}$ . En particulier, on a une suite exacte courte de faisceaux abéliens sur  $X$*

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \gamma_* \mathbf{Z} \xrightarrow{1-\sigma} J^{\text{an}} \longrightarrow 0$$

telle que la composition

$$J^{\text{an}} \simeq (\gamma_* \mathbf{Z})^{\sigma=-1} \longrightarrow \gamma_* \mathbf{Z} \xrightarrow{1-\sigma} J^{\text{an}}$$

soit la multiplication par 2.

### 3 Cohomologie bigraduée analytique

**Définition 3.1.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel, la *cohomologie bigraduée analytique* de  $X$  est obtenue en prenant l'hypercohomologie des complexes de réduction analytique  $\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}$  : pour  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$  on pose

$$H_{\text{an}}^{p,q}(X) := \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{an}}).$$

Pour  $q$  un entier naturel non nul, nous nous attardons sur les puissances tensorielles non dérivées  $\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}$  du complexe  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}$ . Rappelons d'abord que, en posant  $\mathbf{Z}^L(q)^{\text{an}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{an}})^{\otimes L q} \in \mathcal{D}^b(X)$ , l'on sait construire le cup-produit

$$\smile : \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}^L(q)^{\text{an}}) \times \mathbf{H}^r(X, \mathbf{Z}^L(s)^{\text{an}}) \longrightarrow \mathbf{H}^{p+r}(X, \mathbf{Z}^L(q+s)^{\text{an}})$$

grâce aux identifications

$$\mathbf{H}^*(X, \mathbf{Z}^L(q)^{\text{an}}) \simeq \mathbf{Ext}^*(\mathbf{Z}_X, \mathbf{Z}^L(q)^{\text{an}}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(X)}(\mathbf{Z}_X, \mathbf{Z}^L(q)^{\text{an}}[*]).$$

Il se trouve que l'information des puissances tensorielles dérivées est déjà contenue dans les puissances tensorielles non dérivées,

**Théorème 3.2** ([Gle19, Théorème 2.3.1]). *Sur un espace réel, on a, pour  $q \geq 1$ , l'égalité de complexes*

$$\mathbf{Z}^L(q)^{\text{an}} = \mathbf{Z}(q)^{\text{an}} \oplus \left( \bigoplus_{r=2}^q i_* \mathbf{Z} / 2 [r - (q+1)]^{\binom{q-1}{r-1}} \right).$$

**Définition 3.3.** Soit  $(X, \mathcal{Z})$  une paire d'espaces réels, la *cohomologie bigraduée analytique relative* de  $(X, \mathcal{Z})$  est définie par

$$H_{\text{an}}^{*,*}(X, \mathcal{Z}) = \mathbf{H}^*(X, \mathcal{Z}, \mathbf{Z}(*)^{\text{an}}) := \mathbf{H}^*(X, j_* \mathbf{Z}(*)^{\text{an}}_{\mathcal{U}})$$

avec  $j : \mathcal{U} := X \setminus \mathcal{Z} \hookrightarrow X$  l'inclusion ouverte du complémentaire de  $\mathcal{Z}$  et  $\mathbf{Z}(*)^{\text{an}}_{\mathcal{U}}$  le complexe  $\mathbf{Z}(*)^{\text{an}}$  sur l'espace réel  $(\mathcal{U}, \gamma^{-1}(\mathcal{U}), \gamma|_{\gamma^{-1}(\mathcal{U})})$ .

**Théorème 3.4** ([Gle19, Sect. 2.4]). *Soit  $q \geq 0$ , les groupes de cohomologie  $H_{\text{an}}^{p,q}(-) = \mathbf{H}^p(-, \mathbf{Z}(q)^{\text{an}})$  vérifient les axiomes d'Eilenberg-Steenrod, i.e.*

(Homotopie) Soient  $f_1, f_2 : (X, Y, \gamma) \rightarrow (X', Y', \gamma')$  des morphismes d'espaces réels homotopes réellement, alors les morphismes induits en cohomologie sont égaux :  $f_1^* = f_2^* : H_{\text{an}}^{p,q}(X') \rightarrow H_{\text{an}}^{p,q}(X)$ .

(Excision) Soit  $(X, \mathcal{Z})$  une paire d'espaces réels et  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $X$  tel que  $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \overset{\circ}{\mathcal{Z}}$ . Le morphisme d'inclusion  $\iota : (X \setminus \mathcal{V}, \mathcal{Z} \setminus \mathcal{V}) \rightarrow (X, \mathcal{Z})$  induit des isomorphismes en cohomologie

$$\iota^* : H_{\text{an}}^{p,q}(X, \mathcal{Z}) \rightarrow H_{\text{an}}^{p,q}(X \setminus \mathcal{V}, \mathcal{Z} \setminus \mathcal{V}).$$

(Exactitude) Soit  $(X, \mathcal{Z})$  une paire d'espaces réels, les inclusions  $\mathcal{Z} \xrightarrow{i} X$  et  $\mathcal{U} \xrightarrow{j} X$  induisent des suites exactes longues en cohomologie

$$\dots \rightarrow H_{\text{an}}^{p,q}(X, \mathcal{Z}) \xrightarrow{j^*} H_{\text{an}}^{p,q}(X) \xrightarrow{i^*} H_{\text{an}}^{p,q}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\delta} H_{\text{an}}^{p+1,q}(X, \mathcal{Z}) \rightarrow \dots$$

(Additivité) Soit  $(X, \mathcal{Z})$  une paire d'espaces réels, si  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  et  $\mathcal{Z}_i := X_i \cap \mathcal{Z}$  alors on a des isomorphismes

$$H_{\text{an}}^{p,q}(X, \mathcal{Z}) \simeq \prod_{i \in I} H_{\text{an}}^{p,q}(X_i, \mathcal{Z}_i).$$

(Dimension) Dès que  $q \neq 0$ , la théorie cohomologique  $H_{\text{an}}^{p,q}(-)$  est généralisée puisque l'on a un isomorphisme d'anneaux bigradués

$$H_{\text{an}}^{s,*}(\{\bullet_{\mathbf{R}}\}) \simeq \mathbf{Z}[t] / (2t)$$

où  $t$  est de bidegré  $(1, 1)$ .

## 4 Triangles exponentiel et fondamentaux sur un espace réel

Nous exposons les triangles exacts dans lesquels s'insèrent les complexes de réduction analytique. Pour le premier, nous rectifions une petite incohérence qui s'était glissée dans l'énoncé correspondant de la thèse de Gleuher mais qui, heureusement, est sans incidence sur le reste.

**Théorème 4.1** ([Gle19, Corollaire 2.1.1]). Soit  $X$  un espace réel. On a un triangle exact naturel en l'espace réel, appelé triangle exponentiel analytique sur  $X$ ,

$$\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp}^{\text{an}}} \mathcal{O}_X^{\times} \rightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{an}}[1]$$

dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X)$ .

**Théorème 4.2** ([Gle19, Théorème 2.2.1]). *Soit  $X$  un espace réel. Pour chaque entier  $q \geq 0$  on a un triangle exact naturel en l'espace réel, appelé triangle fondamental analytique sur  $X$ ,*

$$(J^{\text{an}})^{\otimes q} \longrightarrow \mathbf{Z}(q)^{\text{an}} \longrightarrow i_* \mathbf{Z}/2[-q] \longrightarrow (J^{\text{an}})^{\otimes q}[1]$$

*dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X)$ .*

# Cohomologie bigraduée arithmétique d'espaces réels

---

## 1 Morphismes de suites exponentielles et complétion de faisceaux abéliens

### 1.1 La suite exponentielle arithmétique faisceautique

**N**ous généralement, étant donné  $\mathcal{C}$  un site de Grothendieck, puisque la catégorie  $\mathbf{Ab}$  est complète, la construction  $\cdot_!$  du chapitre 1 vaut pour la catégorie des faisceaux abéliens  $\mathbf{Ab}(\mathcal{C})$  et la catégorie des foncteurs  $[\mathcal{C}, \mathbf{Ab}]$ . Le morphisme exponentiel arithmétique est défini de la même manière dans ce cadre et la preuve de la fonctorialité est identique puisqu'elle consiste uniquement à utiliser la définition de limite :

**Proposition 1.1.** *Dans la catégorie  $\mathbf{Ab}(\mathcal{C})$ , toute transformation naturelle  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induit une unique transformation naturelle  $\theta_! : \mathcal{F}_! \rightarrow \mathcal{G}_!$  telle que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_! & \xrightarrow{\theta_!} & \mathcal{G}_! \\ \text{exp}^{\text{ar}} \downarrow & & \downarrow \text{exp}^{\text{ar}} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{G} \end{array}$$

*commute.*

De plus, les limites étant calculées ponctuellement dans n'importe quel topos de Grothendieck (respectivement, dans la catégorie  $[\mathcal{C}, \mathbf{Ab}]$ ) [Mac98, Chap. V, §3, pp. 115-116], [MM94, Chap. III, §4, p. 128], on a pour tout faisceau abélien  $\mathcal{F}$  sur un site de Grothendieck,  $\mathcal{F}_!(X) \simeq \mathcal{F}(X)_!$  (respectivement, pour tout foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ,  $F_!(X) \simeq F(X)_!$ ). En particulier, l'opération  $\cdot_!$  préserve les faisceaux constants

et le corollaire 1.16 implique que le foncteur

$$\bullet_! : \mathbf{Ab}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Ud}(\mathcal{C})$$

est à valeurs dans la catégorie des faisceaux uniquement divisibles (un faisceau  $\mathcal{F}$  étant (uniquement) divisible dès que, pour tout  $n \geq 1$ , le morphisme de faisceaux  $\mathcal{F} \xrightarrow{n} \mathcal{F}$  est un épimorphisme (un isomorphisme)). La proposition 1.18 et les corollaires 1.20 et 1.22 se traduisent alors littéralement comme suit,

**Faits 1.2.** Soit  $\mathcal{F}$  un objet de  $\mathbf{Ab}(\mathcal{C})$ ,

1. Pour tout faisceau uniquement divisible  $\mathcal{D} \in \mathbf{Ab}(\mathcal{C})$  et pour tout morphisme de faisceaux  $\theta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}$ , il existe un unique morphisme de faisceaux  $\tilde{\theta} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{F}_!$  tel que  $\exp^{\text{ar}} \circ \tilde{\theta} = \theta$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{F} \\ & \searrow \tilde{\theta} & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & & \mathcal{F}_! \end{array}$$

2. L'exponentielle arithmétique  $\exp^{\text{ar}} : \mathcal{F}_! \longrightarrow \mathcal{F}$  est un isomorphisme naturel si et seulement si le faisceau  $\mathcal{F}$  est uniquement divisible.
3. La projection sur la première composante  $\pi : (\mathcal{F}_!)_! \longrightarrow \mathcal{F}_!$  est un isomorphisme naturel.

Le corollaire 1.17 implique quant à lui que, pour tout faisceau divisible  $\mathcal{F}$  sur un espace topologique  $X$  et pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , la suite de morphismes de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\exp_U^{\text{ar}}) \longrightarrow \mathcal{F}_!(U) \simeq \mathcal{F}(U)_! \xrightarrow{\exp_U^{\text{ar}}} \mathcal{F}(U) \longrightarrow 0$$

est exacte. Par conséquent, on obtient une suite exacte courte de faisceaux abéliens

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\exp^{\text{ar}}) \longrightarrow \mathcal{F}_! \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

que l'on nomme aussi *suite exacte exponentielle arithmétique*. Il est à noter que, comme dans le cas des groupes abéliens, le faisceau abélien  $\text{Ker}(\exp^{\text{ar}})$  n'est rien d'autre que la limite  $\lim_{m|n} \mu_n(\mathcal{F})$ , où  $\mu_n(\mathcal{F})$  désigne le noyau  $\text{Ker}(\mathcal{F} \xrightarrow{n} \mathcal{F})$  dans la catégorie des faisceaux abéliens  $\mathbf{Ab}(X)$  et que l'on a une suite exacte longue induite en cohomologie

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^p\left(X, \lim_{m|n} \mu_n(\mathcal{F})\right) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F}_!) \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} H^p(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}\left(X, \lim_{m|n} \mu_n(\mathcal{F})\right) \longrightarrow \dots$$

Soit  $X$  un espace topologique, en notant  $\mathcal{C}_X$  le faisceau uniquement divisible des fonctions continues à valeurs complexes sur  $X$  et  $\mathcal{I}_X := \mathcal{C}_X^\times$  son sous-faisceau multiplicatif, qui reste divisible, le premier point des faits 1.2 fournit le diagramme commutatif (le morphisme horizontal étant l'exponentielle complexe au sens analytique [Ive86, Chap. IV, §3, p. 211])

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_X & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathcal{I}_X \\ & \searrow \widehat{\exp^{\text{an}}} & \nearrow \exp^{\text{ar}} \\ & & \mathcal{I}_{X!} \end{array}$$

Ainsi, en identifiant  $\lim_{m|n} \mu_n(\mathcal{I}_X)$  avec le faisceau constant  $\widehat{\mathbf{Z}}_X$  via l'isomorphisme

$$(\mathbf{Z}/n)_X \xrightarrow{\cong} \mu_n(\mathcal{I}_X)$$

qui fait correspondre la section 1 de  $\mathbf{Z}/n$  avec la racine  $n$ -ième  $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ , la suite exacte exponentielle arithmétique donne le morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 2i\pi\mathbf{Z}_X & \longrightarrow & \mathcal{C}_X & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathcal{I}_X & \longrightarrow & 0 \\ & & \widehat{\exp^{\text{an}}}\downarrow & & \widehat{\exp^{\text{an}}}\downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{Z}}_X & \longrightarrow & \mathcal{I}_{X!} & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & \mathcal{I}_X & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.1)$$

donc le morphisme de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & H^p(X, 2i\pi\mathbf{Z}_X) & \longrightarrow & H^p(X, \mathcal{C}_X) & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & H^p(X, \mathcal{I}_X) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(X, 2i\pi\mathbf{Z}_X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & H^p(X, \widehat{\mathbf{Z}}_X) & \longrightarrow & H^p(X, \mathcal{I}_{X!}) & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & H^p(X, \mathcal{I}_X) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(X, \widehat{\mathbf{Z}}_X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

*Remarque 1.3.* En particulier, le groupe de Picard topologique  $\text{Pic}(X) := H^1(X, \mathcal{I}_X)$  et le groupe de Brauer cohomologique  $\text{Br}'(X) := H^2(X, \mathcal{I}_{X!})_{\text{tors}}$  trouvent leur place dans les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, 2i\pi\mathbf{Z}_X) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{C}_X) & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & H^2(X, 2i\pi\mathbf{Z}_X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \widehat{\mathbf{Z}}_X) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{I}_{X!}) & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & H^2(X, \widehat{\mathbf{Z}}_X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\delta} & H^2(X, 2i\pi\mathbf{Z}_X)_{\text{tors}} & \longrightarrow & H^2(X, \mathcal{C}_X)_{\text{tors}} & \xrightarrow{\text{exp}^{\text{an}}} & H^3(X, 2i\pi\mathbf{Z}_X)_{\text{tors}} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 \cdots & \xrightarrow{\delta} & H^2(X, \widehat{\mathbf{Z}}_X)_{\text{tors}} & \longrightarrow & H^2(X, \mathcal{I}_{X!})_{\text{tors}} & \xrightarrow{\text{exp}^{\text{ar}}} & H^3(X, \widehat{\mathbf{Z}}_X)_{\text{tors}} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Soit  $x \in X$  et  $D : I \rightarrow \mathbf{Ab}(X)$  un diagramme de faisceaux abéliens sur  $X$ . Pour tout objet  $i$  de  $I$ , les morphismes  $\lim D \rightarrow D(i)$  induisent des flèches  $(\lim D)_x \rightarrow D(i)_x$  telles que, pour tout  $f \in \text{Hom}_I(i, j)$ , le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc}
 & (\lim D)_x & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 D(i)_x & \xrightarrow{D(f)_x} & D(j)_x
 \end{array}$$

Il existe donc, par propriété universelle de la limite, un morphisme

$$(\lim D)_x \xrightarrow{\varphi_x} \lim(\cdot \circ D)$$

qui, dans un contexte général, n'est ni injectif ni surjectif. Nous allons montrer que, sous certaines conditions sur l'espace  $X$ , quand la catégorie des indices  $I$  est l'ensemble partiellement ordonné  $(\mathbf{N}^*, |)$  et  $D$  est le diagramme dont  $\mathcal{I}_{X!}$  est la limite, le morphisme  $\varphi_x$  est un isomorphisme.

Rappelons d'abord qu'un revêtement topologique  $p : Y \rightarrow X$  est dit *cyclique* si son groupe d'automorphismes  $\text{Aut}(p)$  l'est en tant que groupe.

**Définition 1.4** (Cyclo-connexité). Soit  $X$  un espace topologique que l'on suppose connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe pour assurer l'existence de la correspondance galoisienne pour les revêtements [May99, Chap. 3, Sect. 8]. Dans ce cas, l'espace  $X$  est dit *cycliquement connexe* si son seul revêtement cyclique connexe est le revêtement trivial, *i.e.* si tout quotient cyclique de son groupe fondamental est trivial en vertu de la correspondance bijective entre les sous-groupes de  $\pi_1(X, -)$  et les classes d'isomorphismes de revêtements connexes par arcs de  $(X, -)$ . Il est *localement cycliquement connexe* s'il admet une base d'ouverts cycliquement connexes.

**Lemme 1.5.** Si  $X$  est un espace cycliquement connexe alors, pour tout choix de point de base  $x \in X$ , pour tout  $n \geq 1$  et pour toute application continue pointée  $f : (X, x) \rightarrow (\mathbf{C}^\times, f(x))$  telle que les racines  $n$ -ièmes de  $f(x)$

soient fixées, les racines  $n$ -ièmes de  $f$  existent et sont uniques, i.e. le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbf{C}^\times, \sqrt[n]{f(x)}) \\ & \exists! \sqrt[n]{f} \nearrow & \downarrow \cdot^n \\ (X, x) & \xrightarrow{f} & (\mathbf{C}^\times, f(x)). \end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $f : (X, x) \rightarrow (\mathbf{C}^\times, f(x))$  une application continue pointée et considérons le changement de base le long de  $f$ ,

$$\begin{array}{ccc} P := (X, x) \times_{(\mathbf{C}^\times, f(x))} (\mathbf{C}^\times, \sqrt[n]{f(x)}) & \longrightarrow & (\mathbf{C}^\times, \sqrt[n]{f(x)}) \\ p \downarrow & & \downarrow \cdot^n \\ (X, x) & \xrightarrow{f} & (\mathbf{C}^\times, f(x)). \end{array}$$

D'après [Sza09, Prop. 2.2.4] on a  $\text{Aut}(\cdot^n) = \mu_n(\mathbf{C})$  donc le revêtement  $(p, X)$  ainsi obtenu est tel que  $\mu_n(\mathbf{C})$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(p)$ . Soit maintenant  $Y$  une composante connexe de  $P$ , comme cette dernière est stable par le groupe cyclique  $G := \{\sigma \in \mu_n(\mathbf{C}), \sigma Y = Y\}$  on a un homéomorphisme

$$Y/G \xrightarrow{\cong} X$$

induit par  $p$  qui est donc un revêtement cyclique connexe de  $X$ . Or, l'espace  $X$  est cycliquement connexe donc en regardant toutes les composantes connexes de  $P$  le revêtement  $p$  est de la forme

$$\coprod_n X_n \xrightarrow{p} X$$

tel que, pour tout  $n$ ,  $p|_{X_n}$  est un isomorphisme. □

*Remarque 1.6.* En géométrie algébrique (complexe), l'analogue du lemme précédent est [Lazo4, Prop. 4.1.6].

On note encore  $\mathcal{C}_X$  le faisceau des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbf{C}$  (muni de sa topologie euclidienne),  $\mathcal{I}_X := \mathcal{C}_X^\times$  son sous-faisceau multiplicatif et étant donné  $x \in X$ ,  $\exp_x^{\text{ar}}$  le morphisme induit au niveau de la fibre en  $x$  par  $\exp^{\text{ar}} : \mathcal{I}_{X!} \rightarrow \mathcal{I}_X$ .

Soient  $x \in X$  et  $\varphi_x : (\mathcal{I}_{X!})_x \longrightarrow (\mathcal{I}_{X,x})_!$  le morphisme tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{I}_{X!})_x & \xrightarrow{\varphi_x} & (\mathcal{I}_{X,x})_! \\ & \searrow \exp_x^{\text{ar}} & \swarrow \exp^{\text{ar}} \\ & \mathcal{I}_{X,x} & \end{array}$$

commute.

**Théorème 1.7.** Soient  $X$  un espace topologique et  $x$  un élément de  $X$ .

- Si l'espace  $X$  est localement connexe en  $x$  alors  $\varphi_x$  est un monomorphisme de groupes abéliens,

$$(\mathcal{I}_{X!})_x \xhookrightarrow{\varphi_x} (\mathcal{I}_{X,x})_!$$

- Si l'espace  $X$  est localement cycliquement connexe en  $x$  alors  $\varphi_x$  est un isomorphisme de groupes abéliens,

$$(\mathcal{I}_{X!})_x \xrightarrow{\varphi_x} \cong (\mathcal{I}_{X,x})_!$$

*Démonstration.*

- Soit  $(\mathcal{U}, f) = (\mathcal{U}, (f_n)_{n \geq 1}) \in (\mathcal{I}_{X!})_x$  tel que  $\varphi_x((\mathcal{U}, f)) = 1$ . Comme l'espace  $X$  est localement connexe on peut supposer l'ouvert  $\mathcal{U}$  connexe. Comme  $\varphi((\mathcal{U}, f)) = 1$ , pour tout  $n \geq 1$  il existe un ouvert  $\mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{U}$  contenant  $x$  tel que  $f_n|_{\mathcal{W}_n} = 1$  dans  $\mathcal{I}_X(\mathcal{W}_n)$ . En supposant que l'ouvert  $\mathcal{W}_1$  est connexe on a ainsi, pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n|_{\mathcal{W}_1} = f_1|_{\mathcal{W}_1} = 1$  dans  $\mathcal{I}_X(\mathcal{W}_1)$  et la fonction  $f_n|_{\mathcal{W}_1}$  est donc constante. Or, on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n|_{\mathcal{W}_n} = 1$  donc  $f_n|_{\mathcal{W}_1} = 1$  et  $(\mathcal{U}, f) = (\mathcal{U}, (f_n)_{n \geq 1}) = \mathbf{1}$  dans  $(\mathcal{I}_{X!})_x$ .

- Par définition, un espace localement cycliquement connexe est localement connexe donc, d'après le point précédent, le morphisme  $\varphi_x$  est injectif. Soit maintenant  $g = (\mathcal{U}_n, g_n)_{n \geq 1} \in (\mathcal{I}_{X,x})_!$ . Par définition, pour tout  $m|n$ , il existe un ouvert  $\mathcal{W}_{n,m} \subseteq \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_m$  contenant  $x$  tel que  $g_n^m|_{\mathcal{W}_{n,m}} = g_m|_{\mathcal{W}_{n,m}}$ . En particulier, on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $g_n^1|_{\mathcal{W}_{n,1}} = g_1|_{\mathcal{W}_{n,1}}$  et, pour  $m|n$ , quitte à remplacer  $\mathcal{W}_{n,m}$  par  $\mathcal{W}_{n,m} \cap (\mathcal{W}_{n,1} \cap \mathcal{W}_{m,1})$  on peut supposer que  $\mathcal{W}_{n,m} \subseteq \mathcal{W}_{n,1} \cap \mathcal{W}_{m,1}$ . Comme on peut supposer que l'ouvert pointé  $(\mathcal{U}_1, x)$  est cycliquement connexe, en appliquant le lemme 1.5 à la section  $g_1 \in \mathcal{I}_X(\mathcal{U}_1)$  on récupère, pour tout  $n \geq 1$ , une unique racine  $n$ -ième  $\sqrt[n]{g_1} \in \mathcal{I}_X(\mathcal{U}_1)$ . Par conséquent, on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\left( \frac{g_n}{\sqrt[n]{g_1}}|_{\mathcal{W}_{n,1}} \right)^n = 1$  donc

$$\frac{g_n}{\sqrt[n]{g_1}}|_{\mathcal{W}_{n,1}} : \mathcal{W}_{n,1} \longrightarrow \mu_n(\mathbf{C})$$

et comme on peut supposer  $\mathcal{W}_{n,1}$  connexe ceci implique que  $\xi_n := \frac{g_n}{\sqrt[n]{g_1}}|_{\mathcal{W}_{n,1}} \in \mu_n(\mathbf{C})$ . On a donc, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$g_n|_{\mathcal{U}_n} = g_n|_{\mathcal{W}_{n,1}} = \xi_n \cdot \sqrt[n]{g_1}|_{\mathcal{W}_{n,1}} = \xi_n \cdot \sqrt[n]{g_1}|_{\mathcal{U}_1} \text{ dans } \mathcal{I}_{X,x}$$

et comme, pour tout  $m|n$ , on a d'une part, d'après le lemme 1.5,  $(\sqrt[n]{g_1}|_{\mathcal{U}_1})^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{g_1}|_{\mathcal{U}_1}$  et d'autre part, puisque  $\mathcal{W}_{n,m} \subseteq \mathcal{W}_{n,1} \cap \mathcal{W}_{m,1}$ ,

$$\xi_n^{\frac{n}{m}} = \left( \frac{g_n}{\sqrt[n]{g_1}|_{\mathcal{W}_{n,1}}} \right)^{\frac{n}{m}} = \left( \frac{g_n}{\sqrt[n]{g_1}|_{\mathcal{W}_{n,m}}} \right)^{\frac{n}{m}} = \frac{g_m}{\sqrt[m]{g_1}|_{\mathcal{W}_{n,m}}} = \frac{g_m}{\sqrt[m]{g_1}|_{\mathcal{W}_{m,1}}} = \xi_m$$

on obtient ainsi  $g = (\mathcal{U}_n, g_n)_{n \geq 1} = \varphi_x \left( (\mathcal{U}_1, \xi_n \cdot \sqrt[n]{g_1})_{n \geq 1} \right)$ .  $\square$

*Remarque 1.8.* En particulier, le théorème précédent est vrai dès que l'on a affaire à un espace localement simplement connexe : c'est une conséquence du théorème de relèvement [May99, Chap. 3, Sect. 7].

Étant donné  $(X, Y, \gamma)$  un espace réel au sens du chapitre 2 tel que  $Y$  soit localement cycliquement connexe, on parlera d'ailleurs dans ce cas d'espace réel localement cycliquement connexe, le théorème 1.7 nous fournit, pour tout  $y \in Y$ , un isomorphisme

$$(\mathcal{I}_{Y!})_y \xleftarrow{\varphi_y} \twoheadrightarrow (\mathcal{I}_{Y,y})_1.$$

On sait donc calculer les fibres du faisceau  $\mathcal{I}_{Y!}$  (que l'on note, lorsque le contexte est clair,  $\mathcal{I}_{y!}$  pour alléger la notation). En effet, si l'on se donne  $Y$  un espace topologique,  $y$  un point de  $Y$  et que l'on note  $1 + \mathfrak{m}_y$  les germes de fonctions continues en  $y$  qui valent 1 en  $y$ , le morphisme d'évaluation  $\text{ev}_y$  donne lieu à la suite exacte courte scindée de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow 1 + \mathfrak{m}_y \xrightarrow{i} \mathcal{I}_y \xleftarrow{\text{ev}_y} \kappa(y) \simeq \mathbf{C}^\times \longrightarrow 0.$$

Par fonctorialité de la co-enveloppe uniquement divisible on récupère donc le diagramme suivant dans lequel on a bien  $\text{Ker}(i_!) \simeq \text{Ker}(i)_!$  vu que les limites commutent entre elles,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (1 + \mathfrak{m}_y)_! & \xrightarrow{i_!} & \mathcal{I}_{y!} & \xleftarrow{(\text{ev}_y)_!} & \kappa(y)_! \simeq \mathbf{C}_!^\times \\ & & \text{exp}^{\text{ar}} \downarrow & & \text{exp}^{\text{ar}} \downarrow & & \text{exp}^{\text{ar}} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 1 + \mathfrak{m}_y & \xrightarrow{i} & \mathcal{I}_y & \xleftarrow{\text{ev}_y} & \kappa(y) \simeq \mathbf{C}^\times \longrightarrow 0. \end{array} \quad (1.2)$$

Ceci a pour conséquence le résultat ci-dessous.

**Proposition 1.9.** Soient  $Y$  un espace topologique et  $y$  un point de  $Y$ . Le morphisme de groupes abéliens

$$\psi : \begin{array}{l} (1 + \mathfrak{m}_y)_! \oplus \mathbf{C}_!^\times \longrightarrow \mathcal{I}_{y!} \\ ((g_n)_{n \geq 1}, (z_n)_{n \geq 1}) \longmapsto (z_n \cdot g_n)_{n \geq 1} \end{array}$$

est un isomorphisme. Si de plus  $Y$  est localement cycliquement connexe en  $y$  on a, via le morphisme  $\psi$ , un isomorphisme

$$\mathcal{I}_{y!} \simeq (1 + \mathfrak{m}_y) \oplus \mathbf{C}_1^\times.$$

*Démonstration.* La première assertion découle directement de l'existence du diagramme (1.2) tandis que la seconde provient du lemme 1.5 : puisque tout germe  $g \in 1 + \mathfrak{m}_y$  admet, pour tout  $n \geq 1$ , une unique racine  $n$ -ième  $\sqrt[n]{g}$  le groupe  $1 + \mathfrak{m}_y$  est uniquement divisible et il suffit de considérer le morphisme

$$\psi \circ (\exp^{-1} \oplus \text{Id}_{\mathbf{C}_1^\times}) : \begin{array}{ccc} (1 + \mathfrak{m}_y) \oplus \mathbf{C}_1^\times & \longrightarrow & (1 + \mathfrak{m}_y)_! \oplus \mathbf{C}_1^\times & \longrightarrow & \mathcal{I}_{y!} \\ (g, (z_n)_{n \geq 1}) & \longmapsto & ((\sqrt[n]{g})_{n \geq 1}, (z_n)_{n \geq 1}) & \longmapsto & (z_n \cdot \sqrt[n]{g})_{n \geq 1}. \end{array}$$

□

Rappelons ici que, dans [Gle19, Chap. 1], le faisceau  $\mathcal{C}_Y$  est muni d'une action de  $C_2$  au sens de [Sch94, Section 8] ou [Ham97, Chap. 2] de la façon suivante : pour tout ouvert  $\mathcal{U} \subseteq Y$  et à toute section  $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{C}_Y)$  on associe la section  $\sigma f \in \Gamma(\sigma(\mathcal{U}), \mathcal{C}_Y)$  définie par  $(\sigma f)(y) := \sigma(f(\sigma \cdot y))$ . On peut alors munir le faisceau  $\mathcal{I}_{Y!}$  de l'action ponctuelle correspondante, *i.e.* pour tout ouvert  $\mathcal{U} \subseteq Y$  et à toute section  $f = (f_n)_{n \geq 1} \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{I}_{Y!})$  on associe la section  $\sigma f \in \Gamma(\sigma(\mathcal{U}), \mathcal{I}_{Y!})$  définie par  $(\sigma f)_n := \sigma f_n$ , de telle manière que l'exponentielle arithmétique devienne un morphisme équivariant

$$C_2 \curvearrowright \mathcal{I}_{Y!} \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} \mathcal{I}_Y \curvearrowleft C_2$$

et induise donc un morphisme

$$\mathcal{J}_{X!} := (\gamma_* \mathcal{I}_{Y!})^{C_2} \xrightarrow{\gamma_*(\exp^{\text{ar}})^{C_2}} (\gamma_* \mathcal{I}_Y)^{C_2} =: \mathcal{J}_X$$

que l'on appelle *exponentielle arithmétique (en géométrie algébrique) réelle* et que l'on continue de noter  $\exp^{\text{ar}}$ . De plus, le sous-faisceau

$$\text{Ker}(\exp^{\text{ar}}) = \lim_{m|n} \mu_n(\mathcal{I}_Y) \simeq \widehat{\mathcal{Z}}_Y$$

de  $\mathcal{I}_{Y!}$  est  $C_2$ -invariant sous cette action.

*Remarque 1.10.* Comme les opérations  $\bullet, \cdot^{C_2}$  correspondent à calculer la limite de certains diagrammes et que le foncteur  $\gamma_*$  est un adjoint à droite, on a, en notant  $\mathcal{J} := \mathcal{J}_X$  et  $\mathcal{I} := \gamma_* \mathcal{I}_Y$ , la suite d'isomorphismes

$$\mathcal{J}_! = \left( \mathcal{I}^{C_2} \right)_! \simeq (\mathcal{I}_!)^{C_2} \simeq (\gamma_* \mathcal{I}_{Y!})^{C_2} = \mathcal{J}_{X!}.$$

Avant de poursuivre l'étude du faisceau  $\mathcal{J}_{X^!}$ , notons un fait remarquable : les lettres  $C$  et  $R$  désignant respectivement n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique nulle et un corps réel clos obtenu via la proposition 0.1, lorsque  $C^\times$  est muni de l'action naturelle du groupe  $\text{Gal}(C/R)$  et  $C_!^\times$  de l'action ponctuelle correspondante, le morphisme induit au niveau des points fixes par l'exponentielle arithmétique

$$(C_!^\times)^{C_2} \xrightarrow{(\exp^{\text{ar}})^{C_2}} (C^\times)^{C_2} \simeq R^\times \simeq R_{>0} \times \mathbf{Z}/2 \quad (1.3)$$

est injectif. En effet, tout point  $z \in C^\times$  fixe pour cette action est un point réel, i.e.  $z \in R$ , et on distingue deux cas : si  $(z_n)_{n \geq 1} \in (C_!^\times)^{C_2}$  est tel que  $z_1 = 1$  alors, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $z_n^n = 1$  et soit l'indice  $n$  est impair auquel cas  $z_n = 1$  soit l'indice est pair mais comme  $z_{2n}^2 = z_n$  on a  $z_n \neq -1$  puisque  $R$  est un corps réel.

On connaît par ailleurs l'image de ce dernier morphisme : si  $x \in \text{Im}((\exp^{\text{ar}})^{C_2})$  alors il existe en particulier un élément  $y \in R^\times$  tel que  $y^2 = x$  donc  $x \in R_{>0}$  et réciproquement si  $x \in R_{>0}$  alors on a  $(\exp^{\text{ar}})^{C_2}((\sqrt[n]{x})_{n \geq 1}) = x \in \text{Im}((\exp^{\text{ar}})^{C_2})$ .

On a par conséquent démontré le résultat suivant,

**Proposition 1.11.** *Soit  $\varepsilon$  le morphisme (1.3), on a  $\text{Ker}(\varepsilon) = \{0\}$  et  $\text{Coker}(\varepsilon) \simeq \mathbf{Z}/2$ .*

Posons  $X(\mathbf{R}) := \gamma(Y^{C_2})$ , c'est l'ensemble des points réels de  $X$ . On a alors, en adoptant à nouveau la notation  $\mathcal{J}_x$  (resp.,  $\mathcal{J}_{x^!}$ ) pour les fibres du faisceau  $\mathcal{J}_X$  (resp.,  $\mathcal{J}_{X^!}$ ),

**Proposition 1.12.** *Soient  $X$  un espace réel et  $x$  un point de  $X$ ,*

1. *Si  $\{x\} = \gamma(\{y\}) \in X(\mathbf{R})$  alors  $\mathcal{J}_{x^!} \simeq \mathcal{I}_{y^!}^{C_2} \simeq (1 + \mathfrak{m}_y)_1^{C_2} \oplus \mathbf{R}_{>0}$ .*
2. *Si  $\{x\} = \gamma(\{y_1, y_2\}) \notin X(\mathbf{R})$  alors  $\mathcal{J}_{x^!} \simeq \mathcal{I}_{y_1^!} \simeq (1 + \mathfrak{m}_{y_1})_1 \oplus C_!^\times$ .*

*Si de plus l'espace réel  $X$  est localement cycliquement connexe en  $x$  alors on a*

$$\mathcal{J}_{x^!} \simeq (1 + \mathfrak{m}_y)^{C_2} \oplus \mathbf{R}_{>0}$$

*dans le cas réel et*

$$\mathcal{J}_{x^!} \simeq (1 + \mathfrak{m}_{y_1}) \oplus C_!^\times$$

*dans le cas non réel.*

*Démonstration.*

1. Comme les opérations  $\bullet_x$  et  $\bullet^{C_2}$  commutent entre elles et grâce au théorème 1.7, on a

$$\mathcal{J}_{x!} \simeq ((\gamma_* \mathcal{I}_{Y!})_x)^{C_2} \simeq ((\mathcal{I}_{Y!})_y)^{C_2} \simeq \mathcal{I}_{y!}^{C_2}.$$

Quant au dernier isomorphisme, il est donné par les propositions 1.9 et 1.11.

2. On a dans ce cas l'isomorphisme

$$(\gamma_* \mathcal{I}_{Y!})_x \simeq \mathcal{I}_{y_1!} \oplus \mathcal{I}_{y_2!}$$

donc  $((\gamma_* \mathcal{I}_{Y!})_x)^{C_2} \simeq \mathcal{I}_{y_1!}$  et pour les mêmes raisons que précédemment, on a

$$\mathcal{J}_{x!} \simeq \mathcal{I}_{y_1!} \simeq (1 + \mathfrak{m}_{y_1})_! \oplus \mathbf{C}_!^{\times}.$$

Le reste de la proposition provient à nouveau de la proposition 1.11. □

Soit  $J^{\text{an}} := (\gamma_* i \mathbf{Z}_Y)^{C_2} \hookrightarrow \mathcal{O}_X := (\gamma_* \mathcal{C}_Y)^{C_2}$  le faisceau des entiers imaginaires purs sur  $X$  de la définition 2.1 (voir aussi [Gle19, p. 14]). Ce dernier s'insère dans une suite exacte courte de faisceaux abéliens sur  $X$  que l'on appelle *suite exponentielle analytique (en géométrie algébrique) réelle*

$$0 \longrightarrow 2\pi J^{\text{an}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} \mathcal{J}_X^+ \longrightarrow 0, \quad (1.4)$$

$\mathcal{J}_X^+$  étant défini comme le sous-faisceau de  $\mathcal{J}_X$  des fonctions strictement positives en les points réels de  $X$ . Intéressons-nous à présent à son analogue arithmétique, à savoir

$$J^{\text{ar}} := (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y)^{C_2} \hookrightarrow \mathcal{J}_{X!}.$$

Les observations précédentes ainsi que le résultat suivant,

**Lemme 1.13** ([Gle19, Lemme 1.2.1]). *Soient  $X$  un espace réel séparé et  $x$  un point non réel de  $X$ . Il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $x$  dans  $X \setminus X(\mathbf{R})$  tel que l'on ait  $\gamma^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2$  où  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont deux ouverts disjoints de  $Y$  vérifiant  $\mathcal{V}_2 = \sigma(\mathcal{V}_1)$ .*

nous permettent de déterminer les fibres de ce faisceau :

**Proposition 1.14.** *Soient  $X$  un espace réel séparé et  $x$  un point de  $X$ , à condition que l'espace  $X$  soit localement cycliquement connexe en  $x$  on a*

1. Si  $x$  est un point réel alors on a  $J_x^{\text{ar}} = \{0\}$ .
2. Le faisceau  $J_{|X \setminus X(\mathbf{R})}^{\text{ar}}$  est localement isomorphe au faisceau constant  $\widehat{\mathbf{Z}}_X$  sur  $X \setminus X(\mathbf{R})$ . En particulier, si  $x$  est un point non réel alors on a  $J_x^{\text{ar}} \simeq \widehat{\mathbf{Z}}$ .

*Démonstration.*

1. Soit  $y \in Y$  l'unique antécédent de  $x$  par l'application  $\gamma$ , on a

$$\mathcal{J}_x = \left( (\gamma_* \mathcal{I}_Y)^{C_2} \right)_x \simeq \left( (\gamma_* \mathcal{I}_Y)_x \right)^{C_2} \simeq (\mathcal{I}_y)^{C_2} \simeq (1 + \mathfrak{m}_y)^{C_2} \oplus (\mathbf{C}^\times)^{C_2}$$

d'après la ligne du bas du diagramme (1.2) et

$$\mathcal{J}_{x!} \simeq (1 + \mathfrak{m}_y)^{C_2} \oplus (\mathbf{C}_!^\times)^{C_2}$$

d'après le premier point de la proposition 1.12 donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\varepsilon) & \longrightarrow & (1 + \mathfrak{m}_y)^{C_2} \oplus (\mathbf{C}_!^\times)^{C_2} & \xrightarrow{\text{Id} \oplus \varepsilon} & (1 + \mathfrak{m}_y)^{C_2} \oplus (\mathbf{C}^\times)^{C_2} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & J_x^{\text{ar}} & \longrightarrow & \mathcal{J}_{x!} & \xrightarrow{\text{exp}_x^{\text{ar}}} & \mathcal{J}_x \end{array}$$

permet de conclure en utilisant la proposition 1.11.

2. Soient  $y_1, y_2 \in Y$  les deux antécédents de  $x$  par l'application  $\gamma$ , on a

$$\mathcal{J}_x = \left( (\gamma_* \mathcal{I}_Y)^{C_2} \right)_x \simeq \left( (\gamma_* \mathcal{I}_Y)_x \right)^{C_2} \simeq (\mathcal{I}_{y_1} \oplus \mathcal{I}_{y_2})^{C_2} \simeq \mathcal{I}_{y_1} \simeq (1 + \mathfrak{m}_{y_1}) \oplus \mathbf{C}^\times$$

d'après la ligne du bas du diagramme (1.2) et

$$\mathcal{J}_{x!} \simeq (1 + \mathfrak{m}_{y_1}) \oplus \mathbf{C}_!^\times$$

d'après le second point de la proposition 1.12 donc le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\text{exp}^{\text{ar}}) & \longrightarrow & (1 + \mathfrak{m}_{y_1}) \oplus \mathbf{C}_!^\times & \xrightarrow{\text{Id} \oplus \text{exp}^{\text{ar}}} & (1 + \mathfrak{m}_{y_1}) \oplus \mathbf{C}^\times \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & J_x^{\text{ar}} & \longrightarrow & \mathcal{J}_{x!} & \xrightarrow{\text{exp}_x^{\text{ar}}} & \mathcal{J}_x \end{array}$$

permet de conclure grâce à la ligne du bas du diagramme (1.1). □

**Lemme 1.15.** *Soit  $X$  un espace réel séparé et localement cycliquement connexe. Le faisceau  $J^{\text{ar}}$  s'intercale dans une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathbf{Z}} \longrightarrow \gamma_*(\widehat{\mathbf{Z}}) \longrightarrow J^{\text{ar}} \longrightarrow 0.$$

*Démonstration.* On applique le foncteur  $\widehat{\phantom{x}}$  à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \gamma_*(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathbb{1} - \sigma} J^{\text{an}} \longrightarrow 0$$

de la proposition 2.4 pour produire la suite de morphismes

$$\widehat{\mathbf{Z}} \longrightarrow \widehat{\gamma_*(\mathbf{Z})} \longrightarrow \widehat{J^{\text{an}}}. \quad (1.5)$$

Or, on a  $\widehat{\gamma_*(\mathbf{Z})} \simeq \gamma_*(\widehat{\mathbf{Z}})$  et, en anticipant un peu, on sait montrer que l'on a un isomorphisme entre les faisceaux  $\widehat{J^{\text{an}}}$  et  $J^{\text{ar}}$  (cf. la proposition 1.28). Vu la définition du faisceau  $J^{\text{ar}}$ , la suite (1.5) est une suite exacte courte par les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 2.4.  $\square$

Reprenons la ligne du bas du diagramme (1.1) où l'espace topologique  $Y$  considéré est la complexification d'un espace réel  $X$ , i.e.

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathbf{Z}}_Y \longrightarrow \mathcal{I}_{Y!} \xrightarrow{\text{exp}^{\text{ar}}} \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0,$$

le foncteur  $\gamma_*$  étant exact à gauche (puisque c'est un adjoint à droite), on en tire la suite exacte

$$0 \longrightarrow \gamma_*\widehat{\mathbf{Z}}_Y \longrightarrow \gamma_*\mathcal{I}_{Y!} \xrightarrow{\gamma_*(\text{exp}^{\text{ar}})} \gamma_*\mathcal{I}_Y.$$

Reste à considérer les sections fixes pour obtenir la suite exponentielle arithmétique (en géométrie algébrique) réelle sur  $X$ ,

$$0 \longrightarrow J^{\text{ar}} \longrightarrow \mathcal{J}_{X!} \xrightarrow{\text{exp}^{\text{ar}}} \mathcal{J}_X. \quad (1.6)$$

Répondons tout de suite à la question du calcul de l'image du morphisme exponentiel arithmétique : soit  $i : X(\mathbf{R}) \hookrightarrow X$  l'inclusion des points réels, on construit le morphisme signe

$$\text{sgn} : \mathcal{J}_X \longrightarrow i_*\{\pm 1\}_{X(\mathbf{R})}$$

en associant pour tout ouvert  $\mathcal{U} \subseteq X$  et à toute section fixe  $f : \gamma^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{C}^\times \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{J}_X)$  l'application continue

$$\mathcal{U} \cap X(\mathbf{R}) \simeq \gamma^{-1}(\mathcal{U}) \cap Y^{\mathbf{C}_2} \xrightarrow{f|_{\gamma^{-1}(\mathcal{U}) \cap Y^{\mathbf{C}_2}}} \mathbf{R}^\times \xrightarrow{\text{signe}} \{\pm 1\}$$

qui est bien un élément de  $\Gamma(i^{-1}(\mathcal{U}), \{\pm 1\}_{X(\mathbf{R})}) = \Gamma(\mathcal{U}, i_*\{\pm 1\}_{X(\mathbf{R})})$ . La naturalité de cette construction est immédiate.

**Proposition 1.16.** *Si l'espace réel  $X$  est séparé et localement cycliquement connexe alors la suite de faisceaux abéliens sur  $X$*

$$\mathcal{J}_{X!} \xrightarrow{\text{exp}^{\text{ar}}} \mathcal{J}_X \xrightarrow{\text{sgn}} i_*\{\pm 1\}_{X(\mathbf{R})} \longrightarrow 0$$

est exacte. En particulier, on a  $\text{Im}(\text{exp}^{\text{ar}}) = \text{Ker}(\text{sgn})$ .

*Démonstration.* On vérifie que la suite de groupes abéliens induite en passant aux fibres est exacte. D'après [Gle19, Prop. 1.1.2] l'ensemble des points réels  $X(\mathbf{R})$  est fermé dans  $X$ , on a ainsi  $(i_* \{\pm 1\}_{X(\mathbf{R})})_x = \{\pm 1\}$  si  $x \in X(\mathbf{R})$  et  $(i_* \{\pm 1\}_{X(\mathbf{R})})_x = 0$  sinon. (La preuve du) second point de la proposition 1.14 implique donc le résultat dans le cas non réel. Si  $x = \gamma(\{y\}) \in X(\mathbf{R})$ , (la preuve du) premier point de la proposition 1.14 nous assure la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (1 + \mathfrak{m}_y)^{C_2} \oplus (\mathbf{C}_1^\times)^{C_2} & \xrightarrow{\text{Id} \oplus \varepsilon} & (1 + \mathfrak{m}_y)^{C_2} \oplus \mathbf{R}^\times & \xrightarrow{\text{ev}_y \oplus \text{signe}} & \{\pm 1\} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathcal{J}_{X!} & \xrightarrow{\exp_x^{\text{ar}}} & \mathcal{J}_x & \xrightarrow{\text{sgn}_x} & \{\pm 1\} \end{array}$$

et la proposition 1.11 entraîne  $\text{Im}(\varepsilon) = \text{Ker}(\text{signe})$ . Comme il est clair que le morphisme signe est surjectif, la démonstration est démontrée.  $\square$

On peut constater que  $\text{Ker}(\text{sgn}) = \mathcal{J}_X^+$  et donc que l'on a, comme dans le contexte analytique,  $\text{Im}(\exp^{\text{ar}}) = \mathcal{J}_X^+$ . En remplaçant les deux lignes du diagramme (1.1) par les suites (1.4) et (1.6), on obtient alors un morphisme de la suite exponentielle analytique réelle vers la suite exponentielle arithmétique réelle

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 2\pi J^{\text{an}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} & \mathcal{J}_X^+ \longrightarrow 0 \\ & & \widehat{\exp^{\text{an}}} \downarrow & & \widehat{\exp^{\text{an}}} \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & J^{\text{ar}} & \longrightarrow & \mathcal{J}_{X!} & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & \mathcal{J}_X^+ \longrightarrow 0. \end{array} \quad (1.7)$$

Soit maintenant  $\mu_2 := \mu_2(\mathcal{J}_X) \simeq \{\pm 1\}_X \simeq \mathbf{Z}/2$  et considérons  $(\exp^{\text{ar}})^{-1}(\mu_2) \hookrightarrow \mathcal{J}_{X!}$  le sous-faisceau de  $\mathcal{J}_{X!}$  qui, par définition, associe à tout ouvert  $\mathcal{U} \subseteq X$  l'ensemble des sections  $(f_n)_{n \geq 1} \in \Gamma(\mathcal{U}, (\exp^{\text{ar}})^{-1}(\mu_2))$  telles que l'on ait  $\exp^{\text{ar}}((f_n)_{n \geq 1}) = f_1 \in \mu_2$ . En particulier, on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n^n = f_1 \in \mu_2$  donc  $f_n^{2n} = \mathbb{1}$ , i.e. pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n \in \mu_{2n}$ . Ainsi, on a  $(\exp^{\text{ar}})^{-1}(\mu_2) = \lim_{m|n} \mu_{2n}(\mathcal{J}_X)$ . Puisque  $J^{\text{ar}}$  est un sous-faisceau du faisceau uniquement divisible  $\mathcal{J}_{X!}$ , on hérite de l'automorphisme de faisceaux de  $\mathcal{J}_{X!}$  restreint à  $J^{\text{ar}}$

$$\frac{1}{2} : J^{\text{ar}} \longrightarrow J^{\text{ar}}$$

dont l'image est, par définition, le faisceau  $\frac{1}{2}J^{\text{ar}}$  qui contient  $J^{\text{ar}}$  comme sous-faisceau. Ceci nous autorise à passer au quotient et à regarder le morphisme induit par restriction de l'exponentielle arithmétique à  $\frac{1}{2}J^{\text{ar}}$ . En notant  $X \setminus X(\mathbf{R}) \xrightarrow{j} X$  l'inclusion ouverte des points non réels, on a :

**Lemme 1.17.** *L'image du morphisme  $\exp_{\frac{1}{2}J^{\text{ar}}}^{\text{ar}}$  est l'extension par zéro  $j_! \mu_2$ .*

*Démonstration.* Commençons par remarquer que  $\text{Im}(\exp_{\frac{1}{2}J^{\text{ar}}}^{\text{ar}}) \hookrightarrow \mu_2$ , en effet, si  $\frac{1}{2}(r_n)_{n \geq 1} \in \frac{1}{2}J^{\text{ar}}$  alors on a  $\exp^{\text{ar}}(\frac{1}{2}(r_n)_{n \geq 1}) = \frac{1}{2}r_1 \in \mu_2$  car  $(r_n)_{n \geq 1} \in J^{\text{ar}} = \text{Ker}(\exp^{\text{ar}})$  donc  $2(\frac{1}{2}r_1) = r_1 = \mathbb{1}$ . Reste à montrer qu'en

passant aux fibres dans

$$\frac{1}{2}J^{\text{ar}} \xrightarrow{\text{exp}^{\text{ar}}} \mu_2 \hookrightarrow \mathcal{J}_X$$

on obtient une suite exacte courte

$$\left(\frac{1}{2}J^{\text{ar}}\right)_x \xrightarrow{\text{exp}_x^{\text{ar}}} (j_!\mu_2)_x \longrightarrow 0. \quad (1.8)$$

Rappelons que, par définition, on a

$$(j_!\mu_2)_x = \begin{cases} (\mu_2)_x = \mathbf{Z}/2 & \text{si } x \in X \setminus X(\mathbf{R}) \\ 0 & \text{si } x \in X(\mathbf{R}) \end{cases}$$

et, d'après la proposition 1.14,

$$J_x^{\text{ar}} = \begin{cases} \widehat{\mathbf{Z}} & \text{si } x \in X \setminus X(\mathbf{R}) \\ 0 & \text{si } x \in X(\mathbf{R}). \end{cases}$$

La surjectivité de (1.8) est donc évidente dans le cas réel et, comme la fibre de l'inclusion de  $J^{\text{ar}}$  dans  $\frac{1}{2}J^{\text{ar}}$  est isomorphe à l'inclusion de  $\widehat{\mathbf{Z}}$  dans  $\frac{1}{2}\widehat{\mathbf{Z}}$  en un point non réel, elle est donnée par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} \lim_{m|n} \mu_n(\mathbf{C}^\times) = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{Z}} & \xrightarrow{\text{exp}_{\frac{1}{2}\widehat{\mathbf{Z}}}^{\text{ar}}} & \mu_2 = \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \\ \left(\frac{1}{2}J^{\text{ar}}\right)_x & \xrightarrow{\text{exp}_x^{\text{ar}}} & (j_!\mu_2)_x & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans le cas contraire. □

On s'intéresse dans la suite au *morphisme de réduction arithmétique*  $\rho^{\text{ar}} : J^{\text{ar}} \rightarrow \{\pm 1\}_X \simeq \mathbf{Z}/2$  de  $\mathbf{Ab}(X)$  obtenu par composition,

$$J^{\text{ar}} \xleftarrow{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}J^{\text{ar}} \xrightarrow{\pi} \frac{1}{2}J^{\text{ar}} / J^{\text{ar}} \xrightarrow{\overline{\text{exp}^{\text{ar}}}} j_!\mu_2 \hookrightarrow \mu_2 \simeq \mathbf{Z}/2.$$

$\rho^{\text{ar}}$

**Définition 1.18.** Soit  $X$  un espace réel séparé, le *complexe de réduction arithmétique*  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}} \in \text{Ch}^b(X) := \text{Ch}^b(\mathbf{Ab}(X))$  est le complexe de faisceaux abéliens sur  $X$

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow J^{\text{ar}} \xrightarrow{\rho^{\text{ar}}} \mathbf{Z}/2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

concentré en degrés 0 et 1.

**Proposition 1.19.** *Le morphisme de complexes  $f : \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}} \rightarrow C(\exp^{\text{ar}})[-1]$  vers le cône du morphisme exponentiel arithmétique défini par*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J^{\text{ar}} & \xrightarrow{\rho^{\text{ar}}} & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \frac{1}{2} & & \downarrow \iota & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{X!} & \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} & \mathcal{J}_X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
 \end{array} \tag{1.9}$$

est un quasi-isomorphisme.

*Démonstration.* On a, par construction du morphisme  $\rho$  et d'après le diagramme (1.6),

$$\mathcal{H}^0(\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}) = \text{Ker}(\rho^{\text{ar}}) = \text{Ker}(\overline{\exp^{\text{ar}}} \circ \pi \circ \frac{1}{2}) = 2J^{\text{ar}} \text{ et } \mathcal{H}^0(C(\exp^{\text{ar}})[-1]) = \text{Ker}(\exp^{\text{ar}}) = J^{\text{ar}}$$

donc le morphisme

$$\mathcal{H}^0(\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}) = 2J^{\text{ar}} \xrightarrow{\mathcal{H}^0(f)} \mathcal{H}^0(C(\exp^{\text{ar}})[-1]) = J^{\text{ar}}$$

qui correspond à la division par 2 est un isomorphisme.

D'après le lemme 1.17 et la proposition 1.16 on a

$$\mathcal{H}^1(\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}) = \mu_2 / \text{Im}(\rho^{\text{ar}}) = \mu_2 / \text{Im}(\overline{\exp^{\text{ar}}}) = \mu_2 / j_! \mu_2 = i_! \mu_2 = i_* \mu_2$$

et

$$\mathcal{H}^1(C(\exp^{\text{ar}})[-1]) = \mathcal{J}_X / \text{Im}(\exp^{\text{ar}}) = \mathcal{J}_X / \mathcal{J}_X^+ \simeq i_* \mu_2$$

donc le morphisme

$$\mathcal{H}^1(\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}) = i_* \mu_2 \xrightarrow{\mathcal{H}^1(f)} \mathcal{H}^1(C(\exp^{\text{ar}})[-1]) = i_* \mu_2$$

qui correspond à l'inclusion  $\iota$  de  $\mu_2$  dans  $\mathcal{J}_X$  est un isomorphisme.  $\square$

**Corollaire 1.20.** *Soit  $X$  un espace réel séparé et localement cycliquement connexe, on a un triangle exact, appelé triangle exponentiel arithmétique sur  $X$ ,*

$$\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}} \longrightarrow \mathcal{J}_{X!} \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} \mathcal{J}_X \longrightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}[1]$$

dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X)$ .

*Démonstration.* On part du triangle exact donné par le cône du morphisme exponentiel arithmétique

$$\mathcal{J}_{X!} \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} \mathcal{J}_X \longrightarrow C(\exp^{\text{ar}}) \longrightarrow \mathcal{J}_{X!}[1]$$

que l'on tourne dans le sens anti-horaire pour obtenir le triangle exact

$$C(\exp^{\text{ar}})[-1] \longrightarrow \mathcal{J}_{X!} \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} \mathcal{J}_X \longrightarrow C(\exp^{\text{ar}})$$

et d'après la proposition 1.19 les complexes  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  et  $C(\exp^{\text{ar}})[-1]$  sont quasi-isomorphes.  $\square$

On récupère en prime une suite exacte longue

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^p(X, \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{J}_{X!}) \xrightarrow{\exp^{\text{ar}}} H^p(X, \mathcal{J}_X) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X, \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}) \longrightarrow \dots$$

Soit  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}$  le complexe de réduction analytique (cf. définition 2.3), on a un morphisme

$$\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \longrightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$$

dans  $\text{Ch}^b(X)$  via le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J^{\text{an}} & \xrightarrow{\rho^{\text{an}}} & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \scriptstyle{\widehat{\exp^{\text{an}} \circ \frac{1}{2\pi}}} & & \parallel & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J^{\text{ar}} & \xrightarrow{\rho^{\text{ar}}} & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Plus généralement, pour  $q \geq 1$ , en tenant compte des puissances tensorielles de complexes

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{an}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{an}})^{\otimes q} \in \mathcal{D}^b(X) \text{ et } \widetilde{\mathbf{Z}}(q)^{\text{ar}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}})^{\otimes q} \in \mathcal{D}^b(X),$$

on a un morphisme de complexes

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{an}} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{Z}}(q)^{\text{ar}} \tag{1.10}$$

donc, pour tout couple  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ , un morphisme induit en hypercohomologie

$$H_{\text{an}}^{p,q}(X) := \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{an}}) \longrightarrow \mathbf{H}^p(X, \widetilde{\mathbf{Z}}(q)^{\text{ar}}) =: \widetilde{H}_{\text{ar}}^{p,q}(X).$$

*Remarque 1.21.* Étant donné  $A$  un groupe abélien, on pourrait aussi s'intéresser aux groupes d'hypercohomologie à valeurs dans les complexes tensorisés

$$A(q)^{\text{an}} := \mathbf{Z}(q)^{\text{an}} \otimes A \text{ (resp. } \widetilde{A}(q)^{\text{ar}} := \widetilde{\mathbf{Z}}(q)^{\text{ar}} \otimes A)$$

dont la cohomologie bigraduée, à coefficients dans  $A$ , devrait être désignée par  $H_{\text{an}}^{p,q}(X, A)$  (resp.  $\widetilde{H}_{\text{ar}}^{p,q}(X, A)$ ).

Dans le cas entier, le seul dont nous nous préoccupons, nous choisissons d'omettre la lettre  $\mathbf{Z}$ , *i.e.*

$$H_{\text{an}}^{p,q}(X) = H_{\text{an}}^{p,q}(X, \mathbf{Z}) \text{ (resp. } \widetilde{H}_{\text{ar}}^{p,q}(X) = \widetilde{H}_{\text{ar}}^{p,q}(X, \mathbf{Z})).$$

**Lemme 1.22.** *Pour tout entier naturel  $q$ , il existe un triangle exact naturel en l'espace réel*

$$(J^{\text{ar}})^{\otimes q} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{Z}(q)}^{\text{ar}} \longrightarrow i_* (\mathbf{Z}/2)[-q] \longrightarrow (J^{\text{ar}})^{\otimes q}[1]$$

dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X)$ .

*Démonstration.* Quand  $q = 1$  on peut inspecter la suite exacte courte de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J^{\text{ar}} & \xrightarrow{\overline{\exp^{\text{ar}} \circ \pi \circ \frac{1}{2}}} & j_! (\mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J^{\text{ar}} & \xrightarrow{\rho^{\text{ar}}} & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & i_* (\mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

et observer le quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J^{\text{ar}} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J^{\text{ar}} & \xrightarrow{\overline{\exp^{\text{ar}} \circ \pi \circ \frac{1}{2}}} & j_! (\mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

La preuve du cas général est strictement identique à celle du théorème 4.2. □

## 1.2 Complexes de réduction arithmétique

Soit  $q \geq 0$ , définissons un nouvel objet de  $\text{Ch}^b(X)$  en posant

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{ar}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q} \quad \text{et} \quad H_{\text{ar}}^{p,q}(X) := \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}})$$

pour les groupes d'hypercohomologie *ad hoc*, la remarque 1.21 étant toujours valable.

**Définition 1.23.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel, les groupes  $H_{\text{ar}}^{*,*}(X)$  introduits ci-dessus sont appelés *groupes de cohomologie bigraduée arithmétique* de  $X$ .

Remarquons déjà que le complexe  $\mathbf{Z}(q)^{\text{ar}} = \mathbf{Z}(q-1)^{\text{ar}} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  vérifie :

1. Pour tout  $i < 0$  et  $i > q$ ,  $\mathbf{Z}(q)_i^{\text{ar}} = 0$ .
2.  $\mathbf{Z}(q)_0^{\text{ar}} = (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q}$  et  $\mathbf{Z}(q)_q^{\text{ar}} = \mathbf{Z}/2$ .

3. Pour tout  $0 \leq i \leq q-1$ ,  $\mathbf{Z}(q)_i^{\text{ar}} = \bigoplus_{l < +\infty} (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} l} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathbf{Z}/2$  où  $0 \leq l \leq q-1$ .

**Lemme 1.24.** Soit  $X$  un espace réel compact et localement connexe. Pour tout entier naturel  $q$  il existe un triangle naturel

$$(J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q} \longrightarrow \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}} \longrightarrow i_*(\mathbf{Z}/2)[-q] \longrightarrow (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q}[1]$$

dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X)$ .

*Démonstration.* Le cas  $q = 1$  est fait dans la preuve du lemme 1.22. On obtient le triangle approprié en se servant de la transformation naturelle  $\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}^\bullet \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathcal{G}^\bullet$  qui induit de plus un morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc} (J^{\text{ar}})^{\otimes q} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{Z}(q)}^{\text{ar}} & \longrightarrow & i_*(\mathbf{Z}/2)[-q] & \longrightarrow & (J^{\text{ar}})^{\otimes q}[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q} & \longrightarrow & \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}} & \longrightarrow & i_*(\mathbf{Z}/2)[-q] & \longrightarrow & (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q}[1]. \end{array}$$

□

**Lemme 1.25.** Soient  $X$  un espace topologique,  $A$  un anneau et  $M, N$  des  $A$ -modules, dès que  $M$  est de présentation finie on a  $\mathcal{H}om_{A_X}(M_X, N_X) = \text{Hom}_A(M, N)_X$ .

*Démonstration.* A partir de la suite exacte

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(A^n, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(A^m, N)$$

et pour la même raison on a aussi la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{A_X}(M_X, N_X) \longrightarrow \mathcal{H}om_{A_X}(A_X^n, N_X) \longrightarrow \mathcal{H}om_{A_X}(A_X^m, N_X)$$

d'où le morphisme de suites exactes suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N)_X & \longrightarrow & \text{Hom}_A(A^n, N)_X & \longrightarrow & \text{Hom}_A(A^m, N)_X \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{A_X}(M_X, N_X) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{A_X}(A_X^n, N_X) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{A_X}(A_X^m, N_X). \end{array}$$

Or le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_A(A^r, N)_X \longrightarrow \mathcal{H}om_{A_X}(A_X^r, N_X)$$

pour un module libre de rang fini est un isomorphisme donc la fonctorialité des noyaux permet de conclure.  $\square$

**Proposition 1.26.** *Soient  $A$  un groupe monogène,  $e$  l'exposant (nécessairement fini) du groupe  $\mathrm{Aut}(A)$  et  $X$  un espace topologique localement connexe. Si  $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(X)$  est localement isomorphe au faisceau constant  $A_X$  alors le faisceau  $\mathcal{F}^{\otimes e}$  est canoniquement isomorphe au faisceau  $A_X^{\otimes e}$ .*

*Démonstration.* Soit donc  $\{\mathcal{U}_i\}_i$  un recouvrement ouvert de  $X$  tel que l'on ait des isomorphismes

$$\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow[\cong]{\varphi_i} (A_X)|_{\mathcal{U}_i}.$$

Pour tous  $i \neq j$ , en posant  $\mathcal{U}_{ij} := \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ , on a ainsi des éléments  $\varphi_{ij} := (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|_{\mathcal{U}_{ij}} \in \mathrm{Aut}((A_X)|_{\mathcal{U}_{ij}})$ . Comme l'espace  $X$  est localement connexe on peut écrire  $U_{ij} = \coprod_k \mathcal{V}_k$  où les  $\mathcal{V}_k \subseteq X$  sont des ouverts connexes ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}((A_X)|_{\mathcal{U}_{ij}}) &= \Gamma(\mathcal{U}_{ij}, \mathcal{A}ut(A_X)) \\ &= \prod_k \Gamma(\mathcal{V}_k, \mathcal{A}ut(A_X)) \\ &= \prod_k \mathrm{Aut}(A), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du lemme 1.25 puisque le groupe  $A$  est monogène donc de type fini. Une fois choisi un générateur  $g$  du groupe  $A$  on considère le morphisme  $\alpha_g : A \longrightarrow A^{\otimes e}$  défini par  $\alpha_g(g) := g \otimes \cdots \otimes g$  et si  $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$  alors  $\alpha_g^{-1} \circ \varphi^{\otimes e} \circ \alpha_g = \varphi^e$ , en effet de  $\varphi(g) = m.g$ , où  $m \in \mathbf{Z}$ , on déduit

$$\varphi^{\otimes e}(\alpha_g(g)) = \varphi^{\otimes e}(g \otimes \cdots \otimes g) = \varphi(g) \otimes \cdots \otimes \varphi(g) = m^e.g \otimes \cdots \otimes g = \alpha_g(m^e.g) = \alpha_g(\varphi^e(g)).$$

Dans le cas présent ceci signifie que les  $\varphi_{ij}^{\otimes e} \in \mathrm{Aut}((A_X^{\otimes e})|_{\mathcal{U}_{ij}})$  sont tels que  $\varphi_{ij}^{\otimes e} = \mathrm{Id}_{(A_X^{\otimes e})|_{\mathcal{U}_{ij}}}$  donc on peut construire par recollement un isomorphisme entre les faisceaux  $\mathcal{F}^{\otimes e}$  et  $A_X^{\otimes e}$ .  $\square$

**Corollaire 1.27.** *Sur un espace topologique localement connexe, tout faisceau localement isomorphe au faisceau constant  $\mathbf{Z}/2$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/2$ .*

D'après les propositions 2.2 et 1.14 les faisceaux  $J^{\mathrm{an}}$  et  $J^{\mathrm{ar}}$  sont respectivement localement isomorphes aux faisceaux constants  $\mathbf{Z}_X$  et  $\widehat{\mathbf{Z}}_X$  au-dessus des points non réels  $X \setminus X(\mathbf{R})$ . Par conséquent, sur un espace

réel  $X$  séparé et localement connexe dont on note  $X \setminus X(\mathbf{R}) \xrightarrow{j} X$  l'inclusion ouverte des points non réels la proposition 6.11 s'applique. Revenons au morphisme  $J^{\text{an}} \rightarrow J^{\text{ar}}$  du diagramme (1.7),

**Proposition 1.28.** *Sur un espace réel  $X$  séparé et localement connexe, il existe un unique morphisme rendant le triangle suivant*

$$\begin{array}{ccc} J^{\text{an}} & \xrightarrow{\widehat{\exp^{\text{an}} \circ \frac{1}{2\pi}}} & J^{\text{ar}} \\ \eta \downarrow & \nearrow \simeq & \uparrow \gamma \\ \widehat{J^{\text{an}}} & & \end{array}$$

commutatif et c'est un isomorphisme.

*Démonstration.* D'après ce que l'on a dit ci-dessus on a

$$(\widehat{J^{\text{an}}})_x \simeq \widehat{J_x^{\text{an}}} = \{0\} = J_x^{\text{ar}}$$

quand  $x$  est un point réel et

$$(\widehat{J^{\text{an}}})_x \simeq \widehat{J_x^{\text{an}}} = \widehat{\mathbf{Z}} = J_x^{\text{ar}}$$

dans le cas contraire. □

**Corollaire 1.29.** *Sur un espace réel  $X$  séparé et localement connexe, les complexes  $\widehat{\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}}$  et  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}}$  sont isomorphes via le morphisme du diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}(1)^{\text{an}} & \xrightarrow{\widehat{\exp^{\text{an}} \circ \frac{1}{2\pi}}} & \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}} \\ \eta \searrow & \nearrow \simeq & \uparrow \gamma \\ & \widehat{\mathbf{Z}(1)^{\text{an}}} & \end{array}$$

La flèche qui nous intéresse maintenant est la composition du morphisme (1.10) avec le morphisme de complexes  $\widehat{\mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}} \rightarrow \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}$  : nous étendons la proposition 1.28 à tous les entiers  $q \geq 1$ .

**Proposition 1.30.** *Pour tout  $q \geq 1$  et sur un espace réel compact et localement connexe, les faisceaux  $(\widehat{J^{\text{an}}})^{\otimes q}$  et  $(J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q}$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* Nous différencions deux cas en fonction de la parité de  $q$  :

- Si  $q$  est pair alors il suffit de montrer le résultat pour  $q = 2$  puisque, par associativité des opérations  $\widehat{\otimes}^{\text{ef}}$  et  $\otimes$ , nous aurons d'une part

$$(\widehat{J^{\text{an}}})^{\otimes q} = (\widehat{J^{\text{an}}})^{\otimes 2k} \simeq (\widehat{(J^{\text{an}})^{\otimes 2}})^{\otimes k} \simeq (\widehat{j_! \mathbf{Z}})^{\otimes k} \simeq j_! \widehat{\mathbf{Z}} \simeq j_! \widehat{\mathbf{Z}}$$

et d'autre part

$$(J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q} = (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} 2k} \simeq \left( (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} 2} \right)^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} k} \simeq \left( \widehat{(J^{\text{an}})^{\otimes 2}} \right)^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} k} \simeq (j_! \widehat{\mathbf{Z}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} k} \simeq j_! \widehat{\mathbf{Z}}.$$

Nous nous servons donc de l'isomorphisme canonique  $(J^{\text{an}})^{\otimes 2} \simeq j_! \mathbf{Z}$  obtenu grâce aux propositions 2.2 et 1.26, ce dernier combiné à la proposition 6.11 implique que l'on a un isomorphisme

$$\widehat{(J^{\text{an}})^{\otimes 2}} \simeq j_! \widehat{\mathbf{Z}} \simeq j_! \widehat{\mathbf{Z}}$$

et il s'agit alors de montrer que la transformation naturelle

$$\widehat{(J^{\text{an}})^{\otimes 2}} \simeq j_! \widehat{\mathbf{Z}} \longrightarrow (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} 2}$$

est un isomorphisme de faisceaux. En regardant le morphisme induit au niveau des fibres on se rend compte que seul le cas non réel, *i.e.*  $x \in X \setminus X(\mathbf{R})$ , demande une justification : en notant  $\widehat{\mathbf{Z}}\{1\}$  le faisceau constant  $\widehat{\mathbf{Z}}$  sur le complexifié  $Y$  muni de l'action non triviale du groupe  $C_2$  on a, par définition,

$$\left( (J^{\text{ar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} 2} \right)_x = \text{colim}_{x \in \mathcal{U}} \Gamma \left( \mathcal{U}, (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}\{1\})^{C_2} \right)_{\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}} \Gamma \left( \mathcal{U}, (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}\{1\})^{C_2} \right)$$

or

$$\begin{aligned} \Gamma \left( \mathcal{U}, (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}\{1\})^{C_2} \right) &= \Gamma \left( \gamma^{-1}(\mathcal{U}), \widehat{\mathbf{Z}}\{1\} \right)^{C_2} \\ &= \Gamma \left( \mathcal{V} \bigsqcup \sigma(\mathcal{V}), \widehat{\mathbf{Z}}\{1\} \right)^{C_2} \\ &= \text{Cont} \left( \mathcal{V} \bigsqcup \sigma(\mathcal{V}), \widehat{\mathbf{Z}}\{1\} \right)^{C_2} \end{aligned}$$

en choisissant l'ouvert  $\mathcal{V}$  comme dans le lemme 1.13 (l'espace réel  $X$  est supposé compact donc séparé). Ainsi

$$\Gamma \left( \mathcal{U}, (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}\{1\})^{C_2} \right) = \left( \{(n, -n), n \in \widehat{\mathbf{Z}}\} \simeq \widehat{\mathbf{Z}} \right)$$

et par construction

$$\widehat{\mathbf{Z}}_{\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}} \widehat{\mathbf{Z}} \simeq \widehat{\mathbf{Z}} = (j_! \widehat{\mathbf{Z}})_x.$$

- Sinon, on profite du cas pair et de de la proposition 1.28 □

**Théorème 1.31.** *Soit  $X$  un espace réel compact et localement connexe. Pour tout  $q \geq 0$ , il existe un unique*

morphisme  $\psi$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}(q)^{\text{an}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{Z}(q)}^{\text{ar}} & \longrightarrow & \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}} \\ & \searrow \eta & & \nearrow \psi & \\ & & \widehat{\mathbf{Z}(q)}^{\text{an}} & & \end{array}$$

commutatif et c'est un isomorphisme.

*Démonstration.* Soit  $Y$  la complexification de l'espace réel  $X$ . Nous montrons dans un premier temps que le complexe  $\mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}$  est prefini donc, d'après la proposition 6.3, l'existence (et l'unicité) du morphisme  $\psi$ . Le lemme 6.15 implique en particulier que le morphisme vertical de gauche du diagramme (6.1) est inversible pour tout faisceau constant. D'après ce que l'on a déjà dit sur les composants du complexe  $\mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}$  et grâce à la proposition 4.13, il suffit de montrer que les faisceaux  $J^{\text{ar}} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} J^{\text{ar}}$  et  $J^{\text{ar}} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathbf{Z}/2$  sont prefinis :

- Rappelons que l'on a, par définition,  $J^{\text{ar}} = (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y)^{C_2}$  où le faisceau constant  $\widehat{\mathbf{Z}}_Y$  est muni de l'action ponctuelle de  $C_2$  (au-dessus de l'action de  $C_2$  sur  $Y$ ) associée à celle sur  $(\mathbf{Z}/n)_Y$  qui consiste à envoyer toute fonction localement constante  $f \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathbf{Z}/n)$  sur son opposé  $-f$ . On part de l'isomorphisme

$$\widehat{\mathbf{Z}}_X \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \widehat{\mathbf{Z}}_X \xrightarrow[\simeq]{\eta} \widehat{\mathbf{Z}}_X \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \widehat{\mathbf{Z}}_X$$

qui, via la flèche  $\widehat{\mathbf{Z}}_X \rightarrow \gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y$ , nous donne un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbf{Z}}_X \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \widehat{\mathbf{Z}}_X & \xrightarrow[\simeq]{\eta} & \widehat{\mathbf{Z}}_X \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \widehat{\mathbf{Z}}_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y & \xrightarrow[\eta']{} & \gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y \end{array}$$

$C_2$ -équivariant pour l'action, à nouveau, ponctuelle de  $C_2$  sur le produit tensoriel  $\widehat{\mathbf{Z}}_Y \widehat{\otimes} \widehat{\mathbf{Z}}_Y$  et induit donc un isomorphisme en passant aux sections fixes

$$(\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y)^{C_2} \simeq (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y)^{C_2} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y)^{C_2} \xrightarrow[\simeq]{(\eta')^{C_2}} \left( \widehat{\mathbf{Z}}_Y \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \widehat{\mathbf{Z}}_Y \right)^{C_2} \simeq (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y)^{C_2} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y)^{C_2}.$$

- On fait de même pour le faisceau  $J^{\text{ar}} \widehat{\otimes}^{\text{ef}} \mathbf{Z}/2$  en notant que puisque le groupe  $\mathbf{Z}/2$  est d'exposant fini le faisceau constant  $(\mathbf{Z}/2)_X$  est prefini.

L'inversibilité du morphisme  $\psi$  obtenu par propriété universelle est ensuite essentiellement donnée par la proposition 1.30.  $\square$

**Corollaire 1.32.** *Sur un espace réel  $X$  compact et localement connexe, les groupes d'hypercohomologie  $\mathbf{H}^p(X, \widehat{\mathbf{Z}}(q)^{\text{an}})$  et  $H_{\text{ar}}^{p,q}(X)$  sont deux à deux isomorphes.*

*Remarque 1.33.* Dans la proposition 1.30, le théorème 1.31 et le corollaire 1.32, l'hypothèse de compacité est pratique mais n'est pas optimale. En fait, d'après le lemme 6.15, il suffit de supposer que l'espace réel est séparé, localement connexe et ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes.

## 2 Des calculs rassurants

Dans cette section on recopiera essentiellement les preuves de [Gle19, Chap. 2] en remplaçant  $J^{\text{an}}$  par son analogue arithmétique. À la lumière de la proposition 4.9 nous écrirons indistinctement  $\widehat{\mathbf{Z}}$  pour désigner l'une ou l'autre des complétions. Il nous faudra voir tout faisceau prefini, notamment le faisceau  $J^{\text{ar}}$ , comme faisceau en  $\widehat{\mathbf{Z}}$ -modules : l'objet unité pour le produit tensoriel  $\otimes$  de  $\mathbf{Shv}(X, \widehat{\mathbf{Z}}\text{Mod})$  sera donc le faisceau constant  $\widehat{\mathbf{Z}}$ .

### 2.1 La cohomologie du point

Notons  $\{\bullet_{\mathbf{R}}\}$  l'objet terminal de la catégorie des espaces réels. La théorie cohomologique « arithmétique » est généralisée,

**Proposition 2.1.** *On a un isomorphisme d'anneaux bigradués*

$$H^*(\{\bullet_{\mathbf{R}}\}, \mathbf{Z}(*)^{\text{ar}}) \simeq \widehat{\mathbf{Z}}[t] / (2t)$$

où  $t$  est de bidegré  $(1, 1)$ . En particulier, pour  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ , on obtient

$$H^p(\{\bullet_{\mathbf{R}}\}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{Z}} & \text{si } p = q = 0 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{si } p = q \neq 0. \end{cases}$$

*Démonstration.* Le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & J^{\text{ar}} & \xrightarrow{\rho^{\text{ar}}} & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & & \mathbf{Z}(1)^{\text{ar}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & i_*(\mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & & i_*(\mathbf{Z}/2)[-1] \end{array}$$

induisant en cohomologie une flèche

$$H^*(\{\bullet_{\mathbf{R}}\}, \mathbf{Z}(*)^{\text{ar}}) \longrightarrow H^*(\{\bullet_{\mathbf{R}}\}, i_*(\mathbf{Z}/2)[-1]^{\otimes *})$$

il suffit de savoir que

$$H^p(\{\bullet_{\mathbf{R}}\}, \widehat{\mathbf{Z}}) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{Z}} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } H^p(\{\bullet_{\mathbf{R}}\}, i_*(\mathbf{Z}/2)[-q]) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour arriver au résultat. □

## 2.2 La cohomologie des espaces affines

Soient  $0 \leq w \leq n$  des entiers, notons  $\mathbb{A}^{n,w}$  l'espace réel affine de dimension  $n$  et de poids  $w$  [Gle19, Exemple 1.1.2.3]. On démontre d'abord une version « arithmétique » de [Gle19, Prop. 2.5.1].

**Proposition 2.2.** *Le morphisme entre les anneaux de cohomologie*

$$H^*(\{\bullet_{\mathbf{R}}\}, \mathbf{Z}(*)^{\text{ar}}) \longrightarrow H^*(\mathbb{A}^{n,w}, \mathbf{Z}(*)^{\text{ar}})$$

induit par le morphisme d'espaces réels

$$\mathbb{A}^{n,w} \xrightarrow{\pi} \{\bullet_{\mathbf{R}}\}$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* Le triangle du lemme 1.22 donne lieu à une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(\mathbb{A}^{n,w}, i_*(\mathbf{Z}/2)[-q]) \\ & & & & & \swarrow & \\ H^p(\mathbb{A}^{n,w}, (J^{\text{ar}})^{\otimes q}) & \longleftarrow & H^p(\mathbb{A}^{n,w}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}) & \longrightarrow & H^p(\mathbb{A}^{n,w}, i_*(\mathbf{Z}/2)[-q]) & & (2.1) \\ & & & & & \swarrow & \\ H^{p+1}(\mathbb{A}^{n,w}, (J^{\text{ar}})^{\otimes q}) & \longleftarrow & & \longrightarrow & \dots & & \end{array}$$

On a d'une part

$$H^p(\mathbb{A}^{n,w}, i_*(\mathbf{Z}/2)[-q]) = H^{p-q}(\mathbb{A}^{n,w}, i_*(\mathbf{Z}/2)) = H^{p-q}(\mathbf{R}^{n,w}, \mathbf{Z}/2) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'autre part, comme  $\mathbf{Z}(0)^{\text{ar}} = \widehat{\mathbf{Z}}$ ,

$$H^0(\mathbb{A}^{n,w}, \mathbf{Z}(0)^{\text{ar}}) = \widehat{\mathbf{Z}}.$$

D'après la proposition 2.1 il suffit donc de montrer que

$$H^p(\mathbb{A}^{n,w}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2 & \text{si } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Quand  $p \neq q, q + 1$ , nous pouvons lire l'isomorphisme

$$H^p(\mathbb{A}^{n,w}, (J^{\text{ar}})^{\otimes q}) \simeq H^p(\mathbb{A}^{n,w}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}})$$

sur la suite exacte longue (2.1). Il reste simplement à expliquer pourquoi l'égalité

$$H^p(\mathbb{A}^{n,w}, (J^{\text{ar}})^{\otimes q}) = 0$$

est vraie dès que  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$  : c'est le [Gle19, Lemme 2.5.1] en utilisant le fait (qui provient du second point de la proposition 1.14) que  $(J^{\text{ar}})^{\otimes q} \simeq j_! \widehat{\mathbf{Z}}$  quand  $q$  est pair et la suite exacte courte du lemme 1.15.  $\square$

Le lieu des points réels des espaces réels affines  $\mathbb{A}^{n,n}$  dont la dimension et le poids sont égaux étant réduit à  $\{0\}$ , calculer leur cohomologie à support dans les points réels consiste à déterminer les groupes de cohomologie locale  $H_{\{0\}}^p(\mathbb{A}^{n,n}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}})$ . Nous établissons l'équivalent du [Gle19, Théorème 2.6.1] dans notre cadre,

**Proposition 2.3.** Soit  $(n, p, q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ , on a

$$1. H_{\{0\}}^p(\mathbb{A}^{n,n}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{Z}} & \text{si } p = 1 \text{ et } 2 \mid q \neq 0 \\ \mathbf{Z}/2 & \text{si } 2 \leq p \leq n, 2 \nmid (p - q) \text{ et } p \neq q + 1 \\ \widehat{\mathbf{Z}} & \text{si } p = n \text{ et } 2 \mid (q - n) \\ \mathbf{Z}/2 & \text{si } p = q \geq n + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Le morphisme connectant

$$H^{n-1}(\mathbb{A}^{n,n} \setminus \{0\}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}) \xrightarrow{\delta} H_{\{0\}}^n(\mathbb{A}^{n,n}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}})$$

est un isomorphisme dès que  $q \neq n$  et  $2 \mid (q - n)$ .

3. Le morphisme

$$H_{\{0\}}^n(\mathbb{A}^{n,n}, \mathbf{Z}(n)^{\text{ar}}) \xrightarrow{\gamma^*} H_{\{0\}}^n(\mathbb{A}_{\mathbb{C}_2}^{n,n}, \mathbf{Z}(n)^{\text{ar}})$$

induit par le morphisme de complexification  $\gamma : \mathbb{A}_{\mathbb{C}_2}^{n,n} \rightarrow \mathbb{A}^{n,n}$  (vu comme un morphisme d'espaces réels) est un isomorphisme.

4. Le morphisme

$$H_{\{0\}}^n(\mathbb{A}^{n,n}, \mathbf{Z}(n)^{\text{ar}}) / 2 \xrightarrow{i^*} H_{\{0\}}^n(\mathbb{A}^{n,n}(\mathbf{R}), \mathbf{Z}(n)^{\text{ar}})$$

induit par l'inclusion des points réels  $i : \mathbb{A}^{n,n}(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathbb{A}^{n,n}$  (vu comme un morphisme d'espaces réels) est un isomorphisme.

### 3 Un théorème de comparaison pour les espaces réels

Pratiquement, si l'on veut comprendre les groupes  $\mathbf{H}^*(X, \widehat{\mathbf{Z}(*)^{\text{an}}})$ , on devra se passer de résolutions injectives. En effet, étant donné  $\mathcal{F}^\bullet$  un complexe de faisceaux abéliens sur  $X$ , une façon de calculer son hypercohomologie consiste à construire des résolutions injectives pour chaque objet du complexe et à considérer les groupes de cohomologie du complexe total. Or appliquer fonctoriellement l'opération  $\widehat{\cdot}$  aux résolutions en question ne calculera rien : les sections globales d'un faisceau injectif sont des groupes injectifs qui sont des groupes divisibles et on a déjà vu que dans ce cas la complétion profinie est triviale.

**Proposition 3.1.** Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un morphisme entre groupes abéliens libres de type fini. Les morphismes canoniques

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Ker}(\varphi)}^{\text{ef}} &\longrightarrow \text{Ker}(\widehat{\varphi}^{\text{ef}}) & \widehat{\text{Im}(\varphi)}^{\text{ef}} &\longrightarrow \text{Im}(\widehat{\varphi}^{\text{ef}}) \\ \widehat{\text{Coker}(\varphi)}^{\text{ef}} &\longrightarrow \text{Coker}(\widehat{\varphi}^{\text{ef}}) & \widehat{\text{Coim}(\varphi)}^{\text{ef}} &\longrightarrow \text{Coim}(\widehat{\varphi}^{\text{ef}}) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

*Démonstration.* Puisque les groupes sont libres de type fini on peut supposer que l'on a  $A = \mathbf{Z}^n$  et  $B = \mathbf{Z}^m$ . Posons  $M := \text{Mat}(\varphi) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Z})$ , une fois  $M$  mise sous forme normale de Smith, i.e.

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & d_s & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où, pour tout  $1 \leq i \leq s$ ,  $d_i \neq 0$  et  $d_i | d_{i+1}$ , on constate que l'on a  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}^s \times \mathbf{Z}^{n-s} \subseteq \mathbf{Z}^n$  et par conséquent  $\widehat{\text{Ker}(\varphi)}^{\text{ef}} = \{0\}^s \times (\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}})^{n-s} \subseteq (\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}})^n = \widehat{A}^{\text{ef}}$ . Or on a aussi  $\widehat{\varphi}^{\text{ef}} : (\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}})^n \rightarrow (\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}})^m$  avec  $M = \text{Mat}(\widehat{\varphi}^{\text{ef}})$  et

comme le groupe  $\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$  est sans torsion

$$\text{Ker}(\widehat{\varphi}^{\text{ef}}) = \{0\}^s \times (\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}})^{m-s} = \widehat{\text{Ker}(\varphi)}^{\text{ef}}.$$

De l'égalité  $\text{Im}(\varphi) = d_1\mathbf{Z} \times \cdots \times d_s\mathbf{Z} \times \{0\}^{m-s} \subseteq \mathbf{Z}^m$  on déduit ensuite immédiatement

$$\widehat{\text{Im}(\varphi)}^{\text{ef}} = d_1\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \times \cdots \times d_s\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}} \times \{0\}^{m-s} = \text{Im}(\widehat{\varphi}^{\text{ef}})$$

puisque  $\widehat{d\mathbf{Z}}^{\text{ef}} = d\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$  dans  $\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$ . □

**Corollaire 3.2.** Soit  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  un complexe de groupes abéliens libres de type fini. Le morphisme canonique

$$\widehat{\text{Ker}(g) / \text{Im}(f)}^{\text{ef}} \longrightarrow \text{Ker}(\widehat{g}^{\text{ef}}) / \text{Im}(\widehat{f}^{\text{ef}})$$

est un isomorphisme. Plus généralement, soit  $C^\bullet$  un complexe de groupes abéliens libres de type fini, pour tout  $p \in \mathbf{Z}$  il existe un isomorphisme

$$\widehat{H^p(C^\bullet)}^{\text{ef}} \xrightarrow{\cong} H^p(\widehat{C^\bullet}^{\text{ef}}).$$

On peut faire mieux, en effet :

**Proposition 3.3.** Soit  $C^\bullet$  un complexe de groupes abéliens de type fini, pour tout  $p \in \mathbf{Z}$  il existe un isomorphisme

$$\widehat{H^p(C^\bullet)}^{\text{ef}} \xrightarrow{\cong} H^p(\widehat{C^\bullet}^{\text{ef}}).$$

*Démonstration.* Tout groupe abélien de type fini pouvant s'écrire comme quotient d'un groupe abélien libre de type fini on obtient une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow N^\bullet \longrightarrow L^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

où  $N^\bullet$  et  $L^\bullet$  sont des complexes de groupes abéliens libres de type fini. D'après le lemme 4.15 et la proposition 4.16 le groupe abélien  $\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{ef}}$  est plat donc la proposition 4.18 implique que le foncteur  $\widehat{\cdot}^{\text{ef}}$  est exact sur la sous-catégorie des (complexes de) groupes abéliens de type fini. On a ainsi une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \widehat{N^\bullet}^{\text{ef}} \longrightarrow \widehat{L^\bullet}^{\text{ef}} \longrightarrow \widehat{C^\bullet}^{\text{ef}} \longrightarrow 0$$

et une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow \widehat{H^p(N^\bullet)}^{\text{ef}} \longrightarrow \widehat{H^p(L^\bullet)}^{\text{ef}} \longrightarrow \widehat{H^p(C^\bullet)}^{\text{ef}} \xrightarrow{\widehat{\delta}^{\text{ef}}} \widehat{H^{p+1}(N^\bullet)}^{\text{ef}} \longrightarrow \dots$$

telles que le morphisme de suites exactes longues induites en cohomologie

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & \widehat{H^p(N^\bullet)}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^p(L^\bullet)}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^p(C^\bullet)}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^{p+1}(N^\bullet)}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^{p+1}(L^\bullet)}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \dots \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H^p(\widehat{N^\bullet}^{\text{ef}}) & \longrightarrow & H^p(\widehat{L^\bullet}^{\text{ef}}) & \longrightarrow & H^p(\widehat{C^\bullet}^{\text{ef}}) & \longrightarrow & H^{p+1}(\widehat{N^\bullet}^{\text{ef}}) & \longrightarrow & H^{p+1}(\widehat{L^\bullet}^{\text{ef}}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

donne le résultat grâce au corollaire précédent et au lemme des cinq.  $\square$

**Corollaire 3.4.** Soient  $X$  un CW-complexe fini (de dimension finie?) et  $A$  un groupe abélien de type fini, les groupes de cohomologie  $H^*(X, \widehat{A}^{\text{ef}})$  et  $H^*(X, \underline{A})$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Il suffit de prouver le résultat pour la cohomologie cellulaire : tout CW-complexe est localement contractile [Hato2, Prop. A.4], la cohomologie cellulaire coïncide avec la cohomologie singulière [Hato2, Theorem 3.5] et, dès que l'espace  $S$  est localement contractile, on a, pour tout groupe abélien  $A$ , des isomorphismes  $H_{\text{sing}}^*(S, A) \simeq H^*(S, \underline{A})$  [Sel16]. Soit donc  $p$  un entier, on a  $H_{\text{cell}}^p(X, A) = H^p(C_{\text{cell}}^\bullet(X, A))$  où  $C_{\text{cell}}^\bullet(X, A)$  désigne le dual  $\text{Hom}(-, A)$  du complexe de chaînes cellulaires  $H_*(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)})$  qui, puisque  $X$  est un CW-complexe fini, est un complexe de groupes abéliens libres de type fini. Le groupe  $A$  étant de type fini le complexe  $C_{\text{cell}}^\bullet(X, A)$  est aussi abélien libre de type fini et la proposition précédente s'applique : on a des isomorphismes entre  $\widehat{H_{\text{cell}}^*(X, A)}^{\text{ef}}$  et  $H^*(\widehat{C_{\text{cell}}^\bullet(X, A)}^{\text{ef}})$  or

$$\begin{aligned} C_{\text{cell}}^\bullet(X, \widehat{A}^{\text{ef}}) &= \text{Hom}\left(H_*(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)}), \widehat{A}^{\text{ef}}\right) \\ &\simeq \lim_{m|n} \text{Hom}\left(H_*(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)}), A/n\right) \\ &\simeq \lim_{m|n} \text{Hom}\left(H_*(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)}), A\right)/n \\ &= \widehat{C_{\text{cell}}^\bullet(X, A)}^{\text{ef}}, \end{aligned}$$

le dernier isomorphisme étant vérifié car les groupes  $H_*(X^{(\bullet)}, X^{(\bullet-1)})$  sont abéliens libres donc projectifs et on se sert de [Jacog, Prop. 3.9].  $\square$

Soit donc  $(X, Y, \gamma)$  un CW-complexe réel fini, i.e. un espace réel tel que l'espace topologique  $X$  soit un CW-complexe fini, le corollaire précédent implique ainsi le théorème de comparaison souhaité dans le

cas  $q = 0$  : on a un isomorphisme entre les groupes  $H^p(X, \widehat{\mathbf{Z}}) = H_{\text{ar}}^{p,0}(X)$  et  $\widehat{H^p(X, \mathbf{Z})}^{\text{ef}} = \widehat{H_{\text{an}}^{p,0}(X)}^{\text{ef}}$ .

En nous servant de cette réduction de cas, nous montrons que le résultat est plus généralement vrai en tout poids  $q$ .

Partant du triangle fondamental dans le cas analytique, *i.e.*

**Théorème 3.5** ([Gle19, Théorème 2.2.1]). *Soit  $X$  un espace réel et  $q \in \mathbf{N}$ . Il existe un triangle naturel*

$$(J^{\text{an}})^{\otimes q} \longrightarrow \mathbf{Z}(q)^{\text{an}} \longrightarrow i_*(\mathbf{Z}/2)[-q] \longrightarrow (J^{\text{an}})^{\otimes q}[1]$$

dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X)$ .

nous produisons, par fonctorialité de la complétion prefinie, le morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc} (J^{\text{an}})^{\otimes q} & \longrightarrow & \mathbf{Z}(q)^{\text{an}} & \longrightarrow & i_*(\mathbf{Z}/2)[-q] & \longrightarrow & (J^{\text{an}})^{\otimes q}[1] \\ \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow \\ \widehat{(J^{\text{an}})^{\otimes q}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}} & \longrightarrow & \widehat{i_*(\mathbf{Z}/2)[-q]} & \longrightarrow & \widehat{(J^{\text{an}})^{\otimes q}[1]}. \end{array} \quad (3.1)$$

**Proposition 3.6.** *Sur un CW-complexe réel à squelettes finis, le morphisme de suites exactes longues de groupes de cohomologie induit par le morphisme de triangles (3.1) se factorise à travers les complétés prefinis correspondants,*

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(X, i_*\mathbf{Z}/2[-q]) & \longrightarrow & H^p(X, (J^{\text{an}})^{\otimes q}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{an}}) & \longrightarrow & H^p(X, i_*\mathbf{Z}/2[-q]) & \longrightarrow & H^{p+1}(X, (J^{\text{an}})^{\otimes q}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & & \\ \dots & \longrightarrow & \widehat{H^{p-1}(X, i_*\mathbf{Z}/2[-q])}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^p(X, (J^{\text{an}})^{\otimes q})}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H_{\text{an}}^{p,q}(X)}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^p(X, i_*\mathbf{Z}/2[-q])}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^{p+1}(X, (J^{\text{an}})^{\otimes q})}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \dots \\ & & \vdots \downarrow & & \vdots \downarrow & & \phi \downarrow & & \vdots \downarrow & & \vdots \downarrow & & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(X, \widehat{i_*\mathbf{Z}/2[-q]}) & \longrightarrow & H^p(X, \widehat{(J^{\text{an}})^{\otimes q}}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^p(X, \widehat{\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}}) & \longrightarrow & H^p(X, \widehat{i_*\mathbf{Z}/2[-q]}) & \longrightarrow & H^{p+1}(X, \widehat{(J^{\text{an}})^{\otimes q}}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

*Démonstration.* La proposition 4.11 nous indique que ceci résulte du fait que les groupes  $\mathbf{H}^\star(X, \widehat{\mathcal{F}^\bullet})$  sont prefinis si

$$\mathcal{F}^\bullet \in \{i_*\mathbf{Z}/2, (J^{\text{an}})^{\otimes q}, \mathbf{Z}(q)^{\text{an}}\}.$$

Plus précisément, nous le ferons directement dans le théorème 3.7 quand les complexes sont concentrés en un seul degré (les deux premiers éléments de l'ensemble ci-dessus) et lorsque  $\mathcal{F}^\bullet = \mathbf{Z}(q)^{\text{an}}$ , en supposant que l'on a déjà montré l'assertion initiale dans les deux premiers cas et en posant  $H := \mathbf{H}^p(X, \widehat{\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}})$ ,

on se retrouve avec une suite exacte de la forme

$$A \xrightarrow{e} B \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

où les groupes  $A, B, C, D$  sont prefinis. On s'intéresse alors à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \text{Im}(f) \longrightarrow H \xrightarrow{g} \text{Im}(g) \longrightarrow 0$$

dans laquelle  $\text{Im}(g)$  est un sous-groupe fermé du groupe complet (pour la topologie prefinie)  $C$  donc à son tour prefini. De plus, comme  $\text{Im}(f) \simeq B / \text{Im}(e)$ , que  $B$  est complet (pour la topologie prefinie), que  $\text{Im}(e)$  est un sous-groupe fermé de  $B$  et que tous les groupes considérés sont à bases dénombrables de voisinages, le groupe  $\text{Im}(f)$  est prefini et  $H$  aussi car toute extension de groupes prefinis de type fini est prefinie, cf. la proposition 4.9 combinée à [RZ10, Prop. 2.2.1, p. 28].

Pour finir : la suite de morphisme du milieu reste exacte puisque, vu les conditions que l'on impose sur l'espace réel  $X$ , les groupes de cohomologie sont de type fini et on peut utiliser la proposition 4.18 ; le diagramme inférieur commute par unicité du morphisme en pointillés dans la proposition 4.11 et grâce au fait que les diagrammes extérieur et supérieur commutent.  $\square$

**Théorème 3.7.** *Soit  $X$  un CW-complexe réel à squelettes finis, le morphisme*

$$\phi : \widehat{H_{\text{an}}^{p,q}}(X)^{\text{ef}} \longrightarrow \mathbf{H}^p\left(X, \widehat{\mathbf{Z}}(q)^{\text{an}}\right)$$

*de la proposition 3.6 est un isomorphisme en tout degré  $p$  et tout poids  $q$ .*

*Démonstration.* On s'appuie sur le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & \widehat{H^{p-1}(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}}/2[-q])}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^p(X, (J^{\text{an}})^{\otimes q})}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H_{\text{an}}^{p,q}}(X)^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^p(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}}/2[-q])}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^{p+1}(X, (J^{\text{an}})^{\otimes q})}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \dots \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \phi \downarrow & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{p-1}\left(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}}/2[-q]\right) & \longrightarrow & H^p\left(X, (J^{\text{an}})^{\otimes q}\right) & \longrightarrow & \mathbf{H}^p\left(X, \widehat{\mathbf{Z}}(q)^{\text{an}}\right) & \longrightarrow & H^p\left(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}}/2[-q]\right) & \longrightarrow & H^{p+1}\left(X, (J^{\text{an}})^{\otimes q}\right) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

issu de la proposition 3.6 auquel il suffit d'appliquer le lemme des cinq après avoir montré que les morphismes  $\alpha$  et  $\beta$  sont des isomorphismes :

- Le corollaire 3.4 justifie l'inversibilité des morphismes  $\alpha$  puisque l'on a

$$\widehat{H^\star(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}}/2[-q])}^{\text{ef}} = \widehat{H^{\star-q}(X(\mathbf{R}), \widehat{\mathbf{Z}}/2)}^{\text{ef}} \quad \text{et} \quad H^\star\left(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}}/2[-q]\right) = H^{\star-q}\left(X(\mathbf{R}), \widehat{\mathbf{Z}}/2\right).$$

- Pour ce qui est des morphismes  $\beta$ , on traite séparément les cas selon la parité de l'entier  $q$ , i.e.

$$\beta : \widehat{H^\star(X, j_! \mathbf{Z})}^{\text{ef}} \longrightarrow H^\star(X, \widehat{j_! \mathbf{Z}})$$

quand  $q$  est pair et

$$\beta : \widehat{H^\star(X, J^{\text{an}})}^{\text{ef}} \longrightarrow H^\star(X, \widehat{J^{\text{an}}})$$

sinon. Les suite exactes courtes de faisceaux

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & j_! j^* \mathbf{Z} = j_! \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & i_* i^* \mathbf{Z} = i_* \mathbf{Z} \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \gamma_* \mathbf{Z} & \xrightarrow{1-\sigma} & J^{\text{an}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

(la seconde provenant de la proposition 2.4) induisent respectivement des morphismes de suites exactes longues analogues au diagramme du début de la démonstration et on conclut encore grâce au corollaire 3.4 et au lemme des cinq.  $\square$

En joignant ce dernier résultat au corollaire 1.32 on obtient le théorème de comparaison attendu :

**Théorème 3.8.** *Sur un espace réel  $X$  suffisamment sympathique, à savoir un CW-complexe réel à squelettes finis, la cohomologie arithmétique (entière) de  $X$  s'obtient comme complété profini de la cohomologie analytique (entière) de  $X$  : le diagramme suivant est commutatif,*

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{an}}^{p,q}(X) & \longrightarrow & \mathbf{H}^p(X, \widehat{\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}}) \\ \eta \downarrow & \nearrow \exists! \phi \cong \gamma & \cong \downarrow \mathbf{H}^p(\psi) \\ \widehat{H_{\text{an}}^{p,q}(X)} & \xrightarrow{\cong} & H_{\text{ar}}^{p,q}(X). \end{array}$$



# Des versions semi-algébriques des cohomologies bigraduées

---

**S**OIENT  $R$  un corps réel clos et posons  $C := R[\sqrt{-1}]$  : d'après [BCR98, Chap. 1, Theorem 1.2.2], c'est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et le groupe de Galois  $\text{Gal}(C/R)$  est le groupe cyclique à deux éléments  $C_2$ . Réciproquement, tout corps soumis à ces conditions peut être vu de cette façon :

**Proposition 0.1** ([Art24]). *Tout corps  $C$  algébriquement clos de caractéristique nulle possède (au moins) un sous-corps réel clos  $R$  tel que  $C = R[\sqrt{-1}]$ . En particulier,  $\text{Gal}(C/R)$  est le groupe cyclique à deux éléments  $C_2$ .*

*Démonstration.* Comme le corps  $C$  est de caractéristique nulle il contient le corps réel  $\mathbf{Q}$  et le lemme de Zorn nous permet d'affirmer qu'il existe un sous-corps réel maximal de  $C$  que l'on note  $R$ . En particulier, puisque  $C$  est algébriquement clos, le corps  $R$  n'admet pas d'extension algébrique réelle non triviale et est donc réel clos. D'après [BCR98, Chap. 1, Theorem 1.2.2], l'extension intermédiaire  $R[\sqrt{-1}]$  est donc algébriquement close. Or, l'extension  $C$  est algébrique sur  $R$  donc sur  $R[\sqrt{-1}]$  : si ce n'était pas le cas il existerait un élément transcendant  $a \in C$  tel que  $R(a) \simeq R(X)$  ce qui contredirait la maximalité de  $R$  car  $R(X)$  est un corps réel.  $\square$

Dans un premier temps, nous étendons à  $R$  la théorie cohomologique initialement développée pour les espaces réels « sur  $\mathbf{R}$  » [Gle19]. Le morphisme exponentiel analytique n'ayant plus cours sur  $C$  - en tout cas sous sa forme habituelle de série entière - le pendant semi-algébrique du triangle exponentiel analytique (voir le théorème 4.1)

$$\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp^{\text{an}}} \mathcal{O}^\times \longrightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{an}}[1]$$

manque à l'appel. Nous remédions à cet état de fait via son avatar arithmétique, la construction du

morphisme exponentiel arithmétique n'étant subordonnée à aucune contrainte topologique. On aura ainsi, *a priori*, deux nouvelles théories cohomologiques :

- Une version semi-algébrique de la cohomologie analytique, notée  $H_{\text{san}}^{p,q}(X)$ .
- Une version semi-algébrique de la cohomologie arithmétique, notée  $H_{\text{sar}}^{p,q}(X)$ .

## 1 Théorie semi-algébrique de Delfs, Knebusch, Schwartz et espaces réels clos

Nous nous appuyerons sur la théorie des espaces localement semi-algébriques (parfois aussi appelés espaces géométriques) qui est essentiellement due à H. Delfs et M. Knebusch [DK84], [DK85] et sur sa variante abstraite (par opposition à géométrique) développée par N. Schwartz [Sch89b]. Pour une exposition complète et relativement récente de toutes ces idées nous ne saurions que conseiller la lecture de l'article [Kne92]. Enfin, pour un point de vue plus moderne sur ces objets, signalons le papier [EP16].

Commençons par introduire deux définitions qui ne sont que des exemples particuliers de sites de Grothendieck associés à un ensemble,

**Définition 1.1** (Espace topologique restreint). Soit  $X$  un ensemble, on dit que  $X$  est un *espace topologique restreint* s'il est doté d'une famille  $\mathring{S}(X)$  de sous-ensembles de  $X$ , que l'on appelle ouverts de la topologie restreinte, vérifiant  $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathring{S}(X)$  et stable par intersections finies et unions finies. On voit tout espace topologique restreint  $X$  comme un site de Grothendieck, le *site restreint*  $X_{\text{res}}$ , en considérant la catégorie des ouverts de la topologie restreinte dont les morphismes sont les inclusions et les recouvrements du site sont les recouvrements topologiques finis.

**Définition 1.2** (Espace topologique généralisé). Soit  $X$  un ensemble, on dit que  $X$  est un *espace topologique généralisé* s'il est doté

1. d'une famille  $\mathring{I}(X)$  de sous-ensembles de  $X$ , que l'on appelle ouverts de la topologie généralisée, vérifiant  $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathring{I}(X)$  et stable par intersections finies et unions finies,
2. d'un ensemble  $\text{Cov}_X$  de familles  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  dans  $\mathring{I}(X)$ , que l'on appelle *recouvrements admissibles*, satisfaisant les propriétés suivantes (les axiomes d'une (pré)topologie de Grothendieck) :
  - (i) Toute famille finie d'éléments dans  $\mathring{I}(X)$  est dans  $\text{Cov}_X$
  - (ii) Si  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est un élément de  $\text{Cov}_X$  alors l'union  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$  est dans  $\mathring{I}(X)$

- (iii) Si  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est un recouvrement admissible de  $\mathcal{U} \in \mathring{\mathcal{T}}(X)$  et si  $\mathring{\mathcal{T}}(X) \ni \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  alors  $(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{V})_{i \in I}$  est un recouvrement admissible de  $\mathcal{V}$
- (iv) Si  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est un recouvrement admissible de  $\mathcal{U} \in \mathring{\mathcal{T}}(X)$  et, pour tout  $i \in I$ ,  $(\mathcal{V}_{ij})_{j \in J_i}$  est un recouvrement admissible de  $\mathcal{U}_i$  alors  $(\mathcal{V}_{ij})_{(i,j) \in I \times J_i}$  est un recouvrement admissible de  $\mathcal{U}$
- (v) Si  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est une famille d'éléments dans  $\mathring{\mathcal{T}}(X)$  telle que  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i =: \mathcal{U} \in \mathring{\mathcal{T}}(X)$  et si  $(\mathcal{V}_j)_{j \in J}$  est un recouvrement admissible de  $\mathcal{U}$  raffinant  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  alors  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est un recouvrement admissible de  $\mathcal{U}$
- (vi) Si  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est un recouvrement admissible de  $\mathcal{U} \in \mathring{\mathcal{T}}(X)$  et  $\mathcal{V}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{U}$  tel que, pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}_i \in \mathring{\mathcal{T}}(X)$  alors  $\mathcal{V} \in \mathring{\mathcal{T}}(X)$ .

**Définition 1.3** (Espace semi-algébrique). Un *espace semi-algébrique affine* sur  $R$  est un espace topologique restreint annelé en  $R$ -algèbres commutatives  $(M, \mathcal{O}_M)$  isomorphe à un sous-espace semi-algébrique d'une variété algébrique affine sur  $R$  [DK81, §6]. Un *espace semi-algébrique* sur  $R$  est un espace topologique restreint annelé en  $R$ -algèbres commutatives  $(M, \mathcal{O}_M)$  possédant un recouvrement ouvert fini  $(M_i)_{i \in I}$  tel que les  $(M_i, \mathcal{O}_{M|M_i})$  soient des espaces semi-algébriques affines sur  $R$ . Un morphisme d'espaces semi-algébriques est un morphisme d'espaces annelés.

**Définition 1.4** (Espace localement semi-algébrique). Un *espace localement semi-algébrique* sur  $R$  est un espace topologique généralisé annelé en  $R$ -algèbres commutatives  $(M, \mathcal{O}_M)$  possédant un recouvrement admissible  $(M_i)_{i \in I}$  tel que les  $(M_i, \mathcal{O}_{M|M_i})$  soient des espaces semi-algébriques sur  $R$ . Un morphisme d'espaces localement semi-algébriques est un morphisme d'espaces annelés.

Si  $M$  est un espace localement semi-algébrique, le *site semi-algébrique*  $M_{\text{sa}}$  est (le site de) l'espace topologique généralisé sous-jacent à  $M$ .

Par construction, la catégorie des espaces semi-algébriques sur  $R$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement semi-algébriques sur  $R$ .

À partir de maintenant, si  $(M, \mathcal{O}_M)$  est un espace (localement) semi-algébrique sur  $R$  on omettra volontairement le faisceau structural en l'appelant simplement  $M$ .

**Définition 1.5** (Espace réel clos). Un *espace réel clos* sur  $R$  est la donnée d'un triplet  $(X, Y, \gamma)$  où  $X$  est un espace localement semi-algébrique sur  $R$ ,  $Y$  est un espace localement semi-algébrique sur  $R$  muni d'une action semi-algébrique [Kne89, Chap. IV, §11] du groupe  $C_2$  et  $\gamma : Y \rightarrow X$  est un morphisme d'espaces localement semi-algébriques sur  $R$  induisant un isomorphisme d'espaces localement semi-algébriques sur  $R$

$$Y / C_2 \xrightarrow[\cong]{\bar{\gamma}} X.$$

Un morphisme d'espaces réels clos  $(X, Y, \gamma) \longrightarrow (X', Y', \gamma')$  est un couple

$$(f : X \longrightarrow X', g : Y \longrightarrow Y')$$

où  $f$  est un morphisme d'espaces localement semi-algébriques sur  $R$  et  $g$  est un morphisme  $C_2$ -équivariant d'espaces localement semi-algébriques sur  $R$  tels que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Y' \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma' \\ X & \xrightarrow{f} & X'. \end{array}$$

On écrira souvent simplement  $X$  pour désigner l'espace réel clos  $(X, Y, \gamma)$ .

*Remarque 1.6.* En principe, la définition d'espace (localement) semi-algébrique, a fortiori d'espace réel clos et des objets attachés à de tels espaces (faisceaux, cohomologie, etc.), dépend du choix d'un corps réel clos mais comme ce dernier est, sauf mention contraire, fixé une fois pour toutes nous parlerons librement d'espace localement semi-algébrique (d'espace réel clos) sans faire référence au corps de base.

Soit  $(X, Y, \gamma)$  un espace réel clos. L'ensemble des points fixes  $Y^{C_2} \subseteq Y$  est un espace localement semi-algébrique. En effet, on a

$$Y^{C_2} = (\text{Id}_Y, \sigma)^{-1}(\Delta_Y),$$

la diagonale  $\Delta_Y \subseteq Y \times Y$  est un espace localement semi-algébrique [DK85, Chap. I, Prop. 3.7] et l'image réciproque de tout espace localement semi-algébrique par un morphisme d'espaces localement semi-algébriques est localement semi-algébrique [DK85, Chap. I, Prop. 3.1]. Par analogie avec la théorie sur  $\mathbf{R}$ , on aimerait par la suite introduire l'espace des *points réels clos*  $X(R) := \gamma(Y^{C_2})$  mais la prudence est de mise : l'image d'un espace localement semi-algébrique par un morphisme d'espaces localement semi-algébriques n'est pas nécessairement localement semi-algébrique [DK85, Chap. I, 6.3]. Pour pallier ce problème, nous supposons dorénavant que l'espace  $Y$  est *semi-algébrique* (voir la définition 1.3). À ce moment-là, le morphisme  $\gamma$  est semi-algébrique au sens de la définition qui suit,

**Définition 1.7.** Un morphisme d'espaces localement semi-algébriques  $f : M \longrightarrow N$  est dit *semi-algébrique* dès que, pour tout sous-ensemble semi-algébrique  $X \subseteq N$ , l'image réciproque  $f^{-1}(X) \subseteq M$  est un sous-ensemble semi-algébrique.

**Proposition 1.8** ([DK85, Chap. I, Prop. 5.3]). *Soit  $f : M \longrightarrow N$  un morphisme semi-algébrique. L'image  $f(X)$  d'un sous-espace localement semi-algébrique  $X \hookrightarrow M$  est localement semi-algébrique.*

En pratique, avec les exemples que nous en avons en tête, l'hypothèse de semi-algébricité sur  $Y$  est

peu restrictive : si  $V$  est une variété algébrique sur  $R$  alors les espaces  $V(R)$  et  $V(C)$  sont tous deux semi-algébriques [DK85, Chap. I, Ex. 7.1].

**Exemples 1.9.**

- Soit  $X$  un espace localement semi-algébrique sur lequel agit semi-algébriquement le groupe  $C_2$ , grâce aux résultats de [Kne89, Chap. IV, Cor. 11.8], on peut regarder l'espace réel clos associé  $(X/C_2, X, \pi)$  avec  $\pi : X \rightarrow X/C_2$  la projection canonique.
- Soient  $0 \leq w \leq n$  des entiers. Des cas particuliers du point précédent sont donnés par les *espaces affines réels clos de dimension  $n$  et de poids (ou dimension motivique)  $w$* , notés  $\mathbf{A}_R^{n,w}$ , qui sont les espaces réels clos associés aux  $C_2$ -espaces (localement) semi-algébriques  $R^{n,w} := R^{n-w} \times R^w$  dont l'action est triviale sur le premier terme et antipodale sur le second.
- Soit  $X$  un schéma sur  $R$ , on munit l'espace topologique  $X(C)$ , considéré avec l'action naturelle du groupe  $\text{Gal}(C/R)$ , d'une structure de  $C_2$ -espace localement semi-algébrique complet comme expliqué dans [BFMQ22, Sect. 4.1] ou [BW20, Sect. 1.1] :  $\text{Res}_{C/R}$  désignant le foncteur de restriction des scalaires à la Weil, il s'agit essentiellement de se servir de l'identification  $X(C) = \text{Res}_{C/R}(X \otimes_R C)(R)$ . L'espace réel clos associé est donc  $(X(C)/C_2, X(C), \pi)$ .

Quand on parle de cohomologie dans le contexte des espaces localement semi-algébriques il s'agit, de prime abord, de la cohomologie du site semi-algébrique  $M_{\text{sa}}$  mais l'approche privilégiée, par exemple dans le livre de Delfs [Del91], consiste à remplacer tout espace géométrique  $M$  par son *abstraction*  $\tilde{M}$  qui est un vrai espace topologique (il est même spectral) : dans le cas affine, soit donc  $V$  une variété algébrique affine sur  $R$ , on utilise la correspondance bijective entre les sous-ensembles semi-algébriques de  $V(R)$  et les constructibles du spectre réel  $\text{Sper}(R[V])$  et plus généralement, le lecteur pourra consulter [DK85, Appendix A], [Sch89b, Chap. III]. Étant donné que les catégories  $\mathbf{Shv}(M_{\text{sa}})$  et  $\mathbf{Shv}(\tilde{M})$  sont équivalentes [Del91, Chap. I, Prop. 1.4] il en résulte l'égalité

$$H_{\text{sa}}^*(M, \mathcal{F}) = H^*(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$$

pour tout faisceau  $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(M_{\text{sa}})$ .

**Proposition 1.10.** *Soit  $M$  un espace localement semi-algébrique, le foncteur d'abstraction*

$$\tilde{\cdot} : \mathbf{Ab}(M_{\text{sa}}) \longrightarrow \mathbf{Ab}(\tilde{M})$$

*préserve le produit tensoriel de faisceaux.*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux faisceaux en groupes abéliens sur le site  $M_{\text{sa}}$ . Pour montrer que l'on a un isomorphisme (canonique) de faisceaux  $\widetilde{\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}} \simeq \widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{G}}$  il suffit de vérifier que  $\widetilde{\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}}$  satisfait la propriété universelle de  $\widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{G}}$ . Soit donc  $\widetilde{\mathcal{H}} \in \mathbf{Ab}(\widetilde{M})$ , le foncteur d'abstraction étant un isomorphisme de catégories, on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{Ab}(\widetilde{M})}(\widetilde{\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{H}}) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{Ab}(M)}(\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \\ &\simeq \text{Bil}_{\mathbf{Ab}(M)}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H}) \\ &\simeq \text{Bil}_{\mathbf{Ab}(\widetilde{M})}(\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{H}}) \\ &\simeq \text{Bil}_{\mathbf{Ab}(\widetilde{M})}(\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme se justifie de la façon suivante : pour tout ouvert localement constructible  $\widetilde{U} \subseteq \widetilde{M}$ , on a

$$\begin{aligned} \Gamma(\widetilde{U}, \widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{\mathcal{G}}) &= \Gamma(\widetilde{U}, \widetilde{\mathcal{F}}) \times \Gamma(\widetilde{U}, \widetilde{\mathcal{G}}) \\ &\simeq \Gamma(\widetilde{U} \cap M, \mathcal{F}) \times \Gamma(\widetilde{U} \cap M, \mathcal{G}) \\ &= \Gamma(\widetilde{U} \cap M, \mathcal{F} \times \mathcal{G}) \\ &\simeq \Gamma(\widetilde{U}, \widetilde{\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}}). \quad \square \end{aligned}$$

Soit  $M$  un espace localement semi-algébrique, on lui adjoint un autre brave espace topologique  $M_{\text{top}}$  dont la topologie, que l'on appelle *topologie forte sur  $M$* , est engendrée par les ouverts de l'espace topologique généralisé sous-jacent à  $M$ . C'est d'ailleurs un sous-espace topologique de l'abstraction  $\widetilde{M}$ . Comme un morphisme d'espaces localement semi-algébriques  $f : M \rightarrow N$  induit une application continue  $f_{\text{top}} : M_{\text{top}} \rightarrow N_{\text{top}}$ , tout espace réel clos  $X := (X, Y, \gamma)$  donne lieu à un espace réel  $X_{\text{top}} := (X_{\text{top}}, Y_{\text{top}}, \gamma_{\text{top}})$  au sens de [Gle19]. Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau abélien sur le site  $M_{\text{sa}}$ , on récupère un faisceau sur l'espace  $M_{\text{top}}$  en posant  $\mathcal{F}_{\text{top}} := \iota^*(\widetilde{\mathcal{F}})$  où  $\iota$  désigne l'inclusion  $M_{\text{top}} \hookrightarrow \widetilde{M}$ .

**Définition 1.11.** Un espace localement semi-algébrique  $M$  est *séparé* s'il est séparé pour la topologie forte, i.e. si la diagonale  $\Delta_M \subseteq M \times M$  est fermée.

**Proposition 1.12** ([Del85, Prop. 4.7]). *L'espace semi-algébrique  $[0, 1]_{\mathbb{R}}$  est acyclique, i.e. pour tout entier  $p \geq 1$  et pour tout groupe abélien  $A$  on a  $H_{\text{sa}}^p([0, 1]_{\mathbb{R}}, A) = 0$ .*

**Lemme 1.13.** *Les espaces semi-algébriques  $[0, 1]_{\mathbb{R}}$  et  $]0, 1[_{\mathbb{R}}$  sont semi-algébriquement homotopiquement équivalents à l'intervalle unité  $[0, 1]_{\mathbb{R}}$ .*

*Démonstration.* C'est exactement la même preuve que dans le cas purement topologique et pour les deux

intervalles. En considérant l'application semi-algébriquement continue  $f : ]0, 1[_R \longrightarrow ]0, 1[_R$  définie par  $f(x) = \frac{x+1}{3}$  et  $\iota$  l'inclusion  $]0, 1[_R \hookrightarrow [0, 1]_R$  on obtient l'homotopie semi-algébrique recherchée entre  $f \circ \iota$  et  $\text{Id}_{]0, 1[_R}$  (respectivement, entre  $\iota \circ f$  et  $\text{Id}_{[0, 1]_R}$ ) en posant  $H(x, t) := tx + (1-t)\frac{x+1}{3}$ .  $\square$

**Proposition 1.14.** *Pour tout entier  $p$ , on a  $H_{\{0\}}^p(\mathbf{A}_R^{1,1}, \mathbf{Z}) = 0$ .*

*Démonstration.* Notons d'abord que les espaces semi-algébriques  $\mathbf{A}_R^{1,1} = R_{\geq 0}$  et  $\mathbf{A}_R^{1,1} \setminus \mathbf{A}_R^{1,1}(R) = R_{>0}$  sont tous deux semi-algébriquement acycliques : l'application  $x \mapsto \frac{x}{1-x}$  est un homéomorphisme semi-algébrique de  $]0, 1[_R$  (respectivement,  $]0, 1[_R$ ) vers  $R_{>0}$  (respectivement,  $R_{>0}$ ) et on applique le lemme 1.13 suivi de la proposition 1.12. Quand l'entier  $p$  est strictement négatif, les groupes de cohomologie sont nuls par définition. Si  $p \geq 1$ , on peut regarder la suite exacte longue de cohomologie locale

$$\dots \longrightarrow H^p(\mathbf{A}_R^{1,1} \setminus \mathbf{A}_R^{1,1}(R), \mathbf{Z}) = 0 \longrightarrow H_{\mathbf{A}_R^{1,1}(R)}^{p+1}(\mathbf{A}_R^{1,1}, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbf{A}_R^{1,1}, \mathbf{Z}) = 0 \longrightarrow \dots$$

et en déduire que  $H_{\{0\}}^p(\mathbf{A}_R^{1,1}, \mathbf{Z}) = 0$  dès que  $p \geq 2$ . Dans les deux autres cas, on a  $H_{\{0\}}^0(\mathbf{A}_R^{1,1}, \mathbf{Z}) = 0$  et pour  $p = 1$  c'est de nouveau la même suite exacte longue

$$H_{\{0\}}^0(\mathbf{A}_R^{1,1}, \mathbf{Z}) = 0 \longrightarrow H^0(\mathbf{A}_R^{1,1}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{res}} H^0(\mathbf{A}_R^{1,1} \setminus \mathbf{A}_R^{1,1}(R), \mathbf{Z}) \longrightarrow H_{\{0\}}^1(\mathbf{A}_R^{1,1}, \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

car l'espace  $R_{>0}$  est semi-algébriquement connexe.  $\square$

## 2 Cohomologie bigraduée analytique d'espaces réels clos

Dès à présent et jusqu'à la fin de ce chapitre, on supposera que les espaces réels clos  $(X, Y, \gamma)$  sont tels que l'espace semi-algébrique  $Y$  est séparé au sens de la définition 1.11.

Comme expliqué dans l'introduction, on devra se passer de l'exponentielle analytique dans la situation des espaces réels clos. En particulier, la construction de l'analogue semi-algébrique du faisceau  $J^{\text{an}}$  dérive du faisceau constant  $\mathbf{Z}$  (sur le site semi-algébrique) :

**Définition 2.1.** Soient  $M$  un  $C_2$ -espace localement semi-algébrique,  $\alpha : C_2 \times M \longrightarrow M$  le morphisme donné par l'action du groupe  $C_2$  et  $\text{pr}_2 : C_2 \times M \longrightarrow M$  la projection sur le second facteur. Un *faisceau équivariant semi-algébrique* sur  $M$  est un faisceau en groupes abéliens  $\mathcal{F}$  sur le site semi-algébrique  $M_{\text{sa}}$  tel que l'on ait un isomorphisme de faisceaux

$$\alpha^* \mathcal{F} \xrightarrow{\cong} \text{pr}_2^* \mathcal{F}$$

soumis à la condition de cocycle suivante :

$$(m \times \text{Id}_M)^* \phi = \text{pr}_{23}^* \phi \circ (\text{Id}_{C_2} \times \alpha)^* \phi,$$

$m : C_2 \times C_2 \longrightarrow C_2$  étant la multiplication du groupe  $C_2$  et  $\text{pr}_{23} : C_2 \times C_2 \times M \longrightarrow C_2 \times M$  la projection sur les deux dernières composantes.

**Définition 2.2.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos, on fait du faisceau constant  $\mathbf{Z}$  sur le site  $Y_{\text{sa}}$  un faisceau équivariant en prescrivant un isomorphisme

$$\alpha^* \mathbf{Z} \xrightarrow[\simeq]{\phi} \text{pr}_2^* \mathbf{Z}$$

défini par  $\phi_{\mathcal{U}}(f)(x) = -f(x)$ , où  $\mathcal{U} \subseteq Y$  est un ouvert localement semi-algébrique et  $f \in \Gamma(\sigma_{\mathcal{U}}, \mathbf{Z})$ . En notant  $\mathbf{Z}^{\text{tw}}$  le faisceau constant  $\mathbf{Z}$  considéré avec l'action précédente, on introduit alors le faisceau  $J^{\text{san}} \in \mathbf{Ab}(X_{\text{sa}})$  de la manière suivante :  $J^{\text{san}} := \gamma_*^{C_2}(\mathbf{Z}^{\text{tw}})$ .

*Remarque 2.3.* Dans le cas des espaces réels, le faisceau des entiers imaginaires purs  $J^{\text{an}}$  peut aussi être obtenu à partir de la construction ci-dessus, cf. [Gle19, Prop. 1.2.3].

Puisque le groupe  $C_2$  agit semi-algébriquement sur l'espace localement semi-algébrique  $Y$  et que le passage à l'abstraction préserve les produits fibrés [Sch89b, Chap. III, Theorem 2.1], on hérite d'une action sur son abstraction  $\tilde{Y}$ , i.e.  $\tilde{Y}$  est un  $C_2$ -espace topologique. On a ainsi, a priori, deux espaces des orbites, à savoir  $\tilde{Y}/C_2$  et  $\widetilde{Y/C_2}$  mais il s'avère que, en tant qu'espaces topologiques, ce sont les mêmes objets.

**Lemme 2.4.** Les espaces topologiques  $\tilde{Y}/C_2$  et  $\widetilde{Y/C_2}$  coïncident.

*Démonstration.* Par construction, l'espace topologique généralisé sous-jacent à l'espace géométrique quotient  $Y/C_2$  est l'espace topologique généralisé des orbites, i.e.,  $\pi : Y \longrightarrow Y/C_2$  désignant l'application ensembliste de projection,  $\mathcal{U}$  est un ouvert de l'espace topologique (généralisé)  $Y/C_2$  si et seulement  $\pi^{-1}(\mathcal{U})$  est un ouvert de l'espace topologique (généralisé)  $Y$ . En conséquence, la bijection entre ouverts semi-algébriques d'un espace géométrique et ouverts de son espace abstrait termine la preuve.  $\square$

**Corollaire 2.5.** Le triplet  $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\gamma})$  forme un espace réel au sens de [Gle19].

**Proposition 2.6.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos. L'abstraction de l'espace localement semi-algébrique des points réels clos de  $X$  correspond à l'espace des points réels de l'espace réel  $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\gamma})$  :

$$\widetilde{X(\mathbf{R})} = \tilde{X}(\mathbf{R}).$$

*Démonstration.* Comme l'espace  $Y$  est supposé semi-algébrique, nous avons déjà dit que le morphisme  $\gamma$  est semi-algébrique et on a même, pour tout ouvert semi-algébrique  $\mathcal{U} \subseteq Y$  et pour tout ouvert semi-algébrique  $\mathcal{V} \subseteq X$ , les égalités [Del91, Chap. I, Remark 1.3], [BCR98, Chap. 7, Prop. 7.2.8]

$$\tilde{\gamma}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \gamma(\overline{\mathcal{U}}), \tilde{\gamma}^{-1}(\widetilde{\mathcal{V}}) = \gamma^{-1}(\overline{\mathcal{V}}).$$

Notons en premier que l'on a  $\widetilde{Y^{C_2}} = \widetilde{Y}^{C_2}$ . En effet, les égalités ci-dessus sont aussi vraies pour les fermés semi-algébriques et, comme  $Y$  est séparé de telle sorte que la diagonale  $\Delta_Y$  soit fermée, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{Y^{C_2}} &= (\text{Id}_Y, \sigma)^{-1}(\Delta_Y) \\ &= (\text{Id}_{\widetilde{Y}}, \sigma)^{-1}(\widetilde{\Delta_Y}) \\ &= (\text{Id}_{\widetilde{Y}}, \sigma)^{-1}(\Delta_{\widetilde{Y}}) \\ &= \widetilde{Y}^{C_2}. \end{aligned}$$

On en tire la correspondance annoncée,

$$\begin{aligned} \widetilde{X(\mathbf{R})} &= \gamma(\widetilde{Y^{C_2}}) \\ &= \tilde{\gamma}(\widetilde{Y^{C_2}}) \\ &= \tilde{\gamma}(\widetilde{Y}^{C_2}) \\ &= \widetilde{X(\mathbf{R})}. \end{aligned} \quad \square$$

**Définition 2.7.** Considérons le faisceau constant  $\widetilde{\mathbf{Z}}$  sur l'espace  $\widetilde{Y}$  (ce dernier correspond bien au faisceau constant  $\mathbf{Z}$  sur le site semi-algébrique  $Y_{\text{sa}}$  via l'équivalence de catégories mentionnée un peu plus haut) : via le point de vue espace étalé, on en fait un  $C_2$ -faisceau équivariant sur  $\widetilde{Y}$  en posant

$$\sigma(m, y) := (-m, \sigma y)$$

où  $(m, y) \in \mathbf{Z} \times \widetilde{Y}$ . On définit le faisceau  $J^{\text{aux}}$  sur le site semi-algébrique  $X_{\text{sa}}$  comme étant le faisceau associé à  $\tilde{\gamma}_*^{C_2}(\widetilde{\mathbf{Z}})$  sur l'abstraction  $\widetilde{X}$ .

**Lemme 2.8.** Les faisceaux  $J^{\text{san}}$  et  $J^{\text{aux}}$  sont isomorphes.

*Démonstration.* On se sert toujours de l'égalité  $\tilde{\gamma}^{-1}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \gamma^{-1}(\overline{\mathcal{U}})$ , valable pour tout ouvert semi-algébrique

$\mathcal{U}$  de  $X$ . On a par conséquent

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\mathcal{U}, J^{\text{aux}}) &= \Gamma(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\gamma}_*^{C_2}(\widetilde{\mathcal{Z}})) \\
 &= \Gamma(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\gamma}_*(\widetilde{\mathcal{Z}}))^{C_2} \\
 &= \Gamma(\widetilde{\gamma}^{-1}(\widetilde{\mathcal{U}}), \widetilde{\mathcal{Z}})^{C_2} \\
 &= \Gamma(\overline{\gamma^{-1}(\mathcal{U})}, \widetilde{\mathcal{Z}})^{C_2} \\
 &\simeq \Gamma(\gamma^{-1}(\mathcal{U}), \mathbf{Z}^{\text{tw}})^{C_2} \\
 &= \Gamma(\mathcal{U}, \gamma_* \mathbf{Z}^{\text{tw}})^{C_2} \\
 &= \Gamma(\mathcal{U}, J^{\text{san}}). \quad \square
 \end{aligned}$$

Avant de s'aventurer plus loin il est capital de s'appesantir sur la topologie des espaces abstraits associés aux espaces géométriques. Dans la thèse de D. Gleuher, l'accent est mis sur la propriété de séparation : tous les espaces topologiques sont supposés Hausdorff avant même d'exhiber le faisceau  $J^{\text{an}}$ . Or, c'est une condition bien trop forte, nous nous contenterons ici du strict minimum dans la mesure où nous n'avons pas le choix : à cause de la topologie spectrale, il est très rare que l'abstraction d'un espace localement semi-algébrique soit séparée.

**Lemme 2.9.** *Soient  $A$  un anneau,  $\alpha$  et  $\beta$  des éléments du spectre réel  $\text{Sper}(A)$ . Les points  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas séparables (au sens Hausdorff) si et seulement si l'un est une spécialisation de l'autre.*

*Démonstration.* Supposons, par exemple,  $\beta \rightsquigarrow \alpha$ , i.e.  $\alpha \in \overline{\{\beta\}}$ . S'il existait deux ouverts  $\alpha \in \mathcal{U}$ ,  $\beta \in \mathcal{V}$  de  $\text{Sper}(A)$  tels que  $\beta \notin \mathcal{U}$  et  $\alpha \notin \mathcal{V}$  alors on aurait  $\beta \in \text{Sper}(A) \setminus \mathcal{U}$  donc  $\alpha \in \overline{\{\beta\}} \subseteq \text{Sper}(A) \setminus \mathcal{U}$  ce qui est impossible. Réciproquement, si  $\alpha$  n'est pas une spécialisation de  $\beta$  et *vice versa* alors, d'après [BCR98, Chap. 7, Prop. 7.1.18], il existe deux éléments  $a \neq b \in A$  tels que

$$a(\alpha) > 0, b(\beta) > 0, a(\beta) \leq 0, b(\alpha) \leq 0$$

donc

$$(a - b)(\alpha) > 0, (b - a)(\beta) > 0.$$

Autrement dit,  $\widetilde{\mathcal{U}}(-)$  désignant un ouvert basique de la topologie spectrale, on a

$$\alpha \in \widetilde{\mathcal{U}}(a - b), \beta \in \widetilde{\mathcal{U}}(b - a),$$

avec  $\widetilde{\mathcal{U}}(a - b) \cap \widetilde{\mathcal{U}}(b - a) = \emptyset$ . □

**Corollaire 2.10.** Soit  $A$  un anneau dont le spectre réel  $\text{Sper}(A)$  est muni d'une action du groupe  $C_2$ . Pour tout point non fixe  $\alpha \in \text{Sper}(A)^{C_2}$  il existe un ouvert  $\mathcal{U} \subseteq \text{Sper}(A)$  tel que  $\alpha \in \mathcal{U}$  et  $\mathcal{U} \cap \sigma\mathcal{U} = \emptyset$ .

*Démonstration.* S'il n'existe pas d'ouvert  $\alpha \in \mathcal{U} \subseteq \text{Sper}(A)$  tel que  $\mathcal{U} \cap \sigma\mathcal{U} = \emptyset$  alors  $\alpha$  et son conjugué  $\sigma\alpha$  ne peuvent pas être séparés par des ouverts disjoints  $\alpha \in \mathcal{U}_1, \sigma\alpha \in \mathcal{U}_2$  sinon il suffirait de poser  $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \cap \sigma\mathcal{U}_2$  pour contredire l'hypothèse de départ. Le lemme 2.9 implique donc que  $\alpha$  se spécialise en  $\sigma\alpha$  ou inversement. Dans les deux cas, comme  $\sigma$  préserve la relation de spécialisation et que  $C_2$  est d'ordre 2, on a  $\alpha \rightsquigarrow \sigma\alpha$  et  $\sigma\alpha \rightsquigarrow \alpha$  donc, puisque  $\text{Sper}(A)$  est de Kolmogorov,  $\alpha = \sigma\alpha$ , i.e.  $\alpha \in \text{Sper}(A)^{C_2}$ .  $\square$

La proposition 2.6, le lemme 2.8 et le corollaire 2.10 nous autorisent à traduire intégralement, pour ainsi dire, la théorie cohomologique analytique des espaces réels clos en termes de l'espace réel abstrait associé.

**Définition 2.11.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos, on définit le morphisme (resp., complexe) de réduction (semi-algébrique) analytique  $\rho^{\text{san}}$  de la catégorie  $\mathbf{Ab}(X_{\text{sa}})$  (resp.,  $\mathbf{Z}(1)^{\text{san}} \in \mathbf{Ch}^b(X_{\text{sa}})$  concentré en degrés 0 et 1)

$$J^{\text{san}} \xrightarrow{\rho^{\text{san}}} \mathbf{Z}/2$$

en décrétant que le morphisme (resp., complexe) concordant de la catégorie  $\mathbf{Ab}(\tilde{X})$  est le morphisme (resp., complexe) de réduction analytique

$$\widetilde{J^{\text{san}}} = \tilde{\gamma}_*^{C_2}(\tilde{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\rho^{\text{an}}} \mathbf{Z}/2$$

(resp.,  $\mathbf{Z}(1)^{\text{an}} \in \mathbf{Ch}^b(\tilde{X})$ ) sur l'espace réel  $\tilde{X}$ .

**Faits 2.12.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos,

1. Pour tout  $q \geq 2$ , on obtient un complexe de faisceaux abéliens  $\mathbf{Z}(q)^{\text{san}}$  sur le site semi-algébrique  $X_{\text{sa}}$  en posant

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{san}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{san}})^{\otimes q}$$

dont le complexe correspondant sur l'espace réel  $\tilde{X}$  est  $\mathbf{Z}(q)^{\text{an}}$ .

2. On a, pour tout  $q \geq 1$ , des triangles fondamentaux analytiques dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X_{\text{sa}})$

$$(J^{\text{san}})^{\otimes q} \longrightarrow \mathbf{Z}(q)^{\text{san}} \longrightarrow i_*(\mathbf{Z}/2)[-q] \longrightarrow (J^{\text{san}})^{\otimes q}[1],$$

où  $i$  désigne l'inclusion (localement semi-algébrique) des points réels clos  $X(R) \hookrightarrow X$ .

*Démonstration.*

1. C'est une conséquence de la proposition 1.10 et du fait que le foncteur d'abstraction, qui est un isomorphisme de catégories, préserve les sommes directes finies de faisceaux.
2. C'est encore la proposition 1.10 ainsi que la proposition 2.6 et le fait que le foncteur d'abstraction commute avec l'image directe de faisceaux : tout ceci nous permet d'affirmer que les triangles fondamentaux de l'énoncé ne sont que les versions géométriques des triangles fondamentaux analytiques sur l'espace réel  $\tilde{X}$ . □

*Remarque 2.13.* Dans les faits précédents, la version semi-algébrique du triangle exponentiel analytique est absente mais, comme on l'a dit dans l'introduction de cette thèse, il est tout à fait possible d'imaginer que le revêtement universel localement semi-algébrique  $\widetilde{C}^\times$  fournisse la bonne alternative. Pour cela, il suffit effectivement de considérer le morphisme d'espaces localement semi-algébriques

$$\exp^{\text{alg}} : \widetilde{C}^\times \longrightarrow C^\times$$

venant avec le revêtement que l'on nomme *exponentielle algébrique* et de définir un complexe de faisceaux abéliens  $\mathbf{Z}(1)^{\text{alg}} \in \text{Ch}^b(X_{\text{sa}})$  comme le cône du morphisme, encore noté  $\exp^{\text{alg}}$ ,

$$\exp^{\text{alg}} : \widetilde{\mathcal{O}}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times$$

obtenu par composition où  $\widetilde{\mathcal{O}}_X$  est le faisceau des fonctions continues à valeurs dans  $\widetilde{C}^\times$ .

**Définition 2.14.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos, on nomme *cohomologie bigraduée (semi-algébrique) analytique*  $H_{\text{san}}^{*,*}(X)$  de  $X$  les groupes d'hypercohomologie

$$H_{\text{san}}^{p,q}(X) := \mathbf{H}_{\text{sa}}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{san}}) = \mathbf{H}^p(\tilde{X}, \mathbf{Z}(q)^{\text{an}}).$$

## 2.1 Espaces réels clos sur le corps des nombres réels

Dans sa thèse de doctorat [Del80], H. Delfs a établi plusieurs théorèmes de comparaison, dont un stipulant que quand  $R = \mathbf{R}$ , les groupes de cohomologie semi-algébrique et singulière coïncident :

**Théorème 2.15** ([Del91, Chap. II, Cor. 5.4, Theorem 5.7]). *Supposons que  $R$  soit le corps des nombres réels  $\mathbf{R}$ . Soient  $M$  un espace localement semi-algébrique,  $\Phi$  une famille de supports sur  $M$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur le site  $M_{\text{sa}}$ . Dès que l'espace  $M$  est partiellement complet ou que le faisceau  $\mathcal{F}$  est un système local on a des isomorphismes canoniques*

$$i^* : H_\Phi^*(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} H_{\Phi_{\text{top}}}^*(M_{\text{top}}, \mathcal{F}_{\text{top}}).$$

Ce dernier nous permet de démontrer un théorème de comparaison pour la cohomologie bigraduée analytique :

**Proposition 2.16.** *Soit  $X$  un espace réel clos sur  $\mathbf{R}$ , pour tout entier  $p \geq 0$  on a des isomorphismes canoniques*

$$l^* : H_{\text{sa}}^p(X, J^{\text{san}}) \xrightarrow{\simeq} H^p(X_{\text{top}}, J_{\text{top}}^{\text{san}}).$$

*Démonstration.* Premièrement, le faisceau  $J_{\text{top}}^{\text{san}}$  s'identifie au faisceau  $J^{\text{an}}$  sur l'espace réel  $X_{\text{top}}$  puisque l'on a, par définition et grâce au lemme 2.8,

$$J_{\text{top}}^{\text{san}} = l^*(\widetilde{J^{\text{san}}}) = l^*(\widetilde{J^{\text{aux}}}) = l^*(\widetilde{\gamma_*^{C_2}(\widetilde{\mathbf{Z}})}) \simeq (\gamma_{\text{top}})_{*}^{C_2}(\mathbf{Z}) = J^{\text{an}},$$

l'avant-dernier isomorphisme demandant une explication : comme tous les morphismes en jeu sont équivariants, partant du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y_{\text{top}} & \xleftarrow{l'} & \widetilde{Y} \\ \gamma_{\text{top}} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\gamma} \\ X_{\text{top}} & \xleftarrow{l} & \widetilde{X} \end{array}$$

qui est un carré cartésien car il est isomorphe au carré

$$\begin{array}{ccc} Y_{\text{top}} & \xleftarrow{l'} & \widetilde{Y} \\ \gamma_{\text{top}} \downarrow & & \downarrow \widetilde{\gamma} \\ Y_{\text{top}}/C_2 & \xleftarrow{l} & \widetilde{Y}/C_2 \end{array}$$

il s'agit de démontrer que, quand  $\widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{\mathbf{Z}}$  et  $r = 0$ , le morphisme de changement de base

$$l^*(R^r \widetilde{\gamma}_* \widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow R^r (\gamma_{\text{top}})_*(l^* \widetilde{\mathcal{F}})$$

issu de celui-ci est un isomorphisme. On l'a déjà fait remarquer, les espaces abstraits ne sont presque jamais séparés donc le théorème de changement de base propre usuel en topologie n'est pas applicable ici. Cependant, on peut se servir de la généralisation de ce dernier due à Schnürer et Soergel pour laquelle on a seulement besoin des hypothèses de propriété locale et de séparation des morphismes  $\widetilde{\gamma}$  et  $\gamma_{\text{top}}$  [SS16, Theorem 4.4]. D'après [SS16, Prop. 2.12], toute application propre et séparée est localement propre donc il suffit de savoir si le morphisme  $\widetilde{\gamma}$  est propre. C'est bien le cas parce que :

- un morphisme localement semi-algébrique  $f$  est séparé si et seulement si le morphisme  $\widetilde{f}$  est séparé [Sch89b, Chap. III, Theorem 3.1],

- un morphisme semi-algébrique  $f$  est propre si et seulement si le morphisme  $\tilde{f}$  est propre [Sch89b, Chap. III, Theorem 4.10].

Or, les espaces localement semi-algébriques sont supposés séparés (pour la topologie forte) et le groupe semi-algébrique  $C_2$  est complet (au sens semi-algébrique) c'est pourquoi, d'après [Kne89, Chap. IV, Cor. 11.8], le morphisme quotient  $Y \rightarrow Y / C_2$ , auquel  $\gamma$  est identifié, est propre.

On peut alors se servir de la suite exacte courte de faisceaux sur l'espace réel  $\tilde{X}$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \tilde{\gamma}_*(\mathbf{Z}) \xrightarrow{1-\sigma} \widehat{J^{\text{san}}} \longrightarrow 0$$

pour obtenir le diagramme suivant

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^p(X, \mathbf{Z}) = H^p(\tilde{X}, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^p(X, \gamma_*(\mathbf{Z})) = H^p(\tilde{X}, \tilde{\gamma}_*(\mathbf{Z})) & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^p(X, J^{\text{san}}) = H^p(\tilde{X}, \widehat{J^{\text{san}}}) & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^{p+1}(X, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^{p+1}(X, \gamma_*(\mathbf{Z})) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^p(X_{\text{top}}, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H^p(X_{\text{top}}, (\gamma_{\text{top}})_*(\mathbf{Z})) & \longrightarrow & H^p(X_{\text{top}}, J^{\text{an}}) & \longrightarrow & H^{p+1}(X_{\text{top}}, \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H^{p+1}(X_{\text{top}}, (\gamma_{\text{top}})_*(\mathbf{Z})) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et conclure en combinant le théorème 2.15 au lemme des cinq. □

**Théorème 2.17.** Soit  $X$  un espace réel clos sur  $\mathbf{R}$ , pour tous entiers  $p, q$  on a des isomorphismes canoniques

$$i^* : H_{\text{san}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{an}}^{p,q}(X_{\text{top}}).$$

*Démonstration.* Soient  $p, q$  des entiers. C'est encore et toujours la même machinerie. On examine le diagramme

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^{p-1}(X, i_*\mathbf{Z}/2[-q]) & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^p(X, (J^{\text{san}})^{\otimes q}) & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^{p,q}(X) & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^p(X, i_*\mathbf{Z}/2[-q]) & \longrightarrow & H_{\text{sa}}^{p+1}(X, (J^{\text{san}})^{\otimes q}) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow i^* & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^{p-1}(X_{\text{top}}, (i_{\text{top}})_*(\mathbf{Z}/2)) & \longrightarrow & H^p(X_{\text{top}}, (J_{\text{top}}^{\text{san}})^{\otimes q}) & \longrightarrow & H_{\text{an}}^{p,q}(X_{\text{top}}) & \longrightarrow & H^p(X_{\text{top}}, (i_{\text{top}})_*(\mathbf{Z}/2)) & \longrightarrow & H^{p+1}(X_{\text{top}}, (J_{\text{top}}^{\text{san}})^{\otimes q}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

fourni par l'analogie semi-algébrique des triangles fondamentaux (cf. le point (3) des faits 2.12) et le foncteur  $i^*$ . Notez que, dans la ligne du bas, la cohomologie est bien à valeurs dans les faisceaux  $(J_{\text{top}}^{\text{san}})^{\otimes \star}$  et  $(i_{\text{top}})_*(\mathbf{Z}/2)$  : cela découle de la proposition 1.10 et des isomorphismes canoniques

$$i^*(\widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbf{Z}} \widetilde{\mathcal{G}}) = i^*\widetilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbf{Z}} i^*\widetilde{\mathcal{G}} ; \quad i_*\widetilde{\mathcal{F}} = \tilde{i}_*\widetilde{\mathcal{F}}.$$

Puis le théorème 2.15 appliqué à l'espace localement semi-algébrique  $X(\mathbf{R})$  nous dit que les morphismes  $\alpha$  sont des isomorphismes tandis que pour les morphismes  $\beta$  on procède de la même manière (en distinguant les cas selon la parité de  $q$ ) que dans la preuve du théorème 3.7 en utilisant la proposition 2.16. □

## 2.2 Extension du corps réel clos

Soit  $S/R$  une extension réelle close. On dispose d'un foncteur d'extension du corps de base

$$\bullet_S : \mathbf{LSA}(R) \longrightarrow \mathbf{LSA}(S).$$

Dans le cas affine, ce dernier est construit comme suit : soit  $M \subset R^n$  un sous-ensemble semi-algébrique,

$$M = \bigcup_{i=1}^r \{x \in R^n, g_i(x) = 0, f_{ij}(x) > 0, 1 \leq j \leq s_i\}, \quad (2.1)$$

en reprenant les mêmes (in)égalités qui définissent  $M$ , on acquiert un sous-ensemble semi-algébrique  $M_S \subset S^n$ ,

$$M_S := \bigcup_{i=1}^r \{x \in S^n, g_i(x) = 0, f_{ij}(x) > 0, 1 \leq j \leq s_i\}. \quad (2.2)$$

Grâce au principe de Tarski, ce dernier ne dépend pas du choix de la description de l'ensemble semi-algébrique  $M$  et toute application semi-algébrique  $f : M \longrightarrow N$  donne lieu à une unique application semi-algébrique  $f_S : M_S \longrightarrow N_S$ . Le cas général se fait en passant à la colimite et est détaillé dans [DK85, Chap. I, Example 2.10].

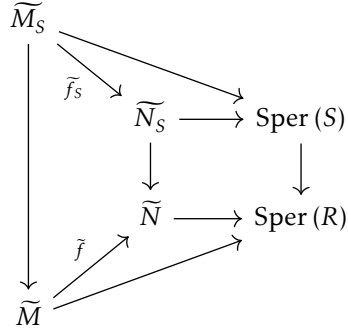
A propos des faisceaux, si  $\mathcal{F} \in \mathbf{Ab}(M_{\text{sa}})$  on définit  $\mathcal{F}_S \in \mathbf{Ab}((M_S)_{\text{sa}})$  par son abstraction  $\widetilde{\mathcal{F}}_S := \pi^* \mathcal{F}$  où  $\pi$  est la projection sur le premier facteur

$$\widetilde{M}_S \simeq (\widetilde{M})_S := \widetilde{M} \times_{\text{Sper}(R)} \text{Sper}(S) \longrightarrow \widetilde{M},$$

le produit fibré étant calculé dans la catégorie des espaces abstraits de Schwartz et l'isomorphisme de la source provenant du résultat ci-dessous.

**Théorème 2.18** ([Sch89b, Chap. III, Theorem 2.2]). *Les foncteurs d'abstraction et d'extension du corps de base commutent. En d'autres termes, si  $f : M \longrightarrow N$  est un morphisme d'espaces localement semi-algébriques*

sur  $R$  et  $S/R$  est une extension réelle close, le diagramme



est commutatif et tous les carrés sont cartésiens.

**Exemple 2.19.** Explicitons le morphisme  $\pi$  dans le cas le plus simple : soit  $M \subset V(R)$  un sous-ensemble semi-algébrique de la forme (2.1) où  $V = \text{Spec}(A)$  est une variété algébrique affine. L'extension de  $M$  au corps réel clos  $S$  donnée par l'expression (2.2) est alors un sous-ensemble semi-algébrique

$$M_S \subset (V \otimes_R S)(S) = \text{Spec}(A \otimes_R S)(S)$$

et le morphisme  $\pi$  n'est que la restriction à  $\widetilde{M}_S$  de l'application

$$(\widetilde{V \otimes_R S})(S) = \text{Sper}(A \otimes_R S) \longrightarrow \text{Sper}(A) = \widetilde{V}(R)$$

induite par le morphisme naturel  $A \longrightarrow A \otimes_R S$ .

**Lemme 2.20** ([DK82, Lemma 4.1], [DK85, Chap. I, Prop. 3.22]). Soient  $M \subset R^n, N \subset R^m, L \subset R^r$  des sous-ensembles semi-algébriques,  $A \subset M, B \subset N$  des sous-ensembles semi-algébriques de  $M$  et  $N$ ,  $f : M \longrightarrow N, g : N \longrightarrow L$  des applications semi-algébriques. On a :

1.  $(M \times N)_S = M_S \times N_S$
2.  $\Gamma(f_S) = \Gamma(f)_S$
3. L'application  $f$  est injective (resp. surjective, ouverte, fermée) si et seulement si  $f_S$  est injective (resp. surjective, ouverte, fermée)
4.  $f_S(A_S) = f(A)_S ; (f_S)^{-1}(B_S) = f^{-1}(B)_S ; (f_A)_S = f_{S|A_S}$
5.  $(g \circ f)_S = g_S \circ f_S$
6. Si  $\iota$  désigne l'inclusion  $A \hookrightarrow M$ ,  $A_S$  est contenu dans  $M_S$  via  $\iota_S : A_S \longrightarrow M_S$

Delfs parvient également à obtenir un théorème de comparaison remarquable portant sur ce foncteur d'extension,

**Théorème 2.21** ([Del91, Chap. II, Theorem 6.1]). *Soient  $S/R$  une extension de corps réels clos,  $M$  un espace localement semi-algébrique sur  $R$ ,  $\Phi$  une famille de supports sur  $M$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau abélien sur le site  $M_{\text{sa}}$ . Le morphisme de projection*

$$\pi : \widetilde{M}_S = \widetilde{M} \times_{\text{Sper}(R)} \text{Sper}(S) \longrightarrow \widetilde{M}$$

*induit des isomorphismes canoniques*

$$H_{\Phi}^*(M, \mathcal{F}) = H_{\Phi}^*(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\pi^*} H_{\Phi_S}^*(\widetilde{M}_S, \widetilde{\mathcal{F}}_S) = H_{\Phi_S}^*(M_S, \mathcal{F}_S).$$

Pour justifier le fait que le foncteur  $\bullet_S$  produit un espace réel clos  $X_S = (X_S, Y_S, \gamma_S)$  sur  $S$  à partir d'un espace réel clos  $X = (X, Y, \gamma)$  sur  $R$ , on répond aux mêmes questions que pour l'association  $M \mapsto M_{\text{top}}$  :

- Puisque le foncteur  $\bullet_S$  préserve les produits directs d'espaces géométriques, si  $Y$  est un  $C_2$ -espace localement semi-algébrique sur  $R$  alors  $Y_S$  est un  $C_2$ -espace localement semi-algébrique sur  $S$ .
- Au niveau des points fixes de l'action, on a d'après les points (2) et (4) du lemme 2.20,

$$(Y^{C_2})_S = ((\text{Id}_Y, \sigma)^{-1}(\Delta_Y))_S = (\text{Id}_Y, \sigma)_S^{-1}((\Delta_Y)_S) = (\text{Id}_{Y_S}, \sigma)^{-1}(\Delta_{Y_S}) = (Y_S)^{C_2}.$$

- Le point précédent implique que les espaces géométriques quotients  $(Y/C_2)_S$  et  $Y_S/C_2$  coïncident.
- L'extension de l'espace des points réels clos de  $X$  donne l'espace des points réels clos de  $X_S$  car, d'après le point (4) du lemme 2.20, on a

$$X(R)_S = \gamma(Y^{C_2})_S = \gamma_S(Y_S^{C_2}) = X_S(S).$$

Attention néanmoins à la deuxième égalité qui est vraie, dans le cadre des espaces localement semi-algébriques, si  $Y^{C_2} \subseteq Y$  est un sous-espace semi-algébrique (on trouvera un contre-exemple à la fin de la page 39 du livre [DK85]) : c'est effectivement le cas puisque l'on a supposé que l'espace  $Y$  est semi-algébrique.

**Corollaire 2.22.** *Soient  $S/R$  une extension de corps réels clos et  $X$  un espace réel clos sur  $R$ . Pour tout entier  $p \geq 0$  on a des isomorphismes canoniques*

$$\pi^* : H_{\text{sa}}^p(X, J^{\text{san}}) \xrightarrow{\cong} H_{\text{sa}}^p(X_S, J_S^{\text{san}}).$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que le faisceau  $J_S^{\text{san}}$  n'est rien d'autre que le faisceau  $J^{\text{san}}$  de la définition 2.2 sur l'espace réel clos  $X_S$ , noté temporairement  $J_{X_S}^{\text{san}}$ . On a

$$\widetilde{J}_S^{\text{san}} = \pi^* \widetilde{J}^{\text{san}} = \pi^* \widetilde{J}^{\text{aux}} = \pi^* (\widetilde{\gamma}_*^{C_2}(\widetilde{Z})) \simeq \widetilde{\gamma}_{S_*}^{C_2}(\widetilde{Z}) = \widetilde{J}_{X_S}^{\text{san}}$$

en appliquant, comme pour la proposition 2.16, le théorème de changement de base propre de Schnürer et Soergel au morphisme de changement de base

$$\pi^* (\mathbb{R}^r \widetilde{\gamma}_* \widetilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathbb{R}^r \widetilde{\gamma}_{S_*} (\pi^* \widetilde{\mathcal{F}})$$

issu du carré cartésien (cf. le théorème 2.18)

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y}_S & \xrightarrow{\pi'} & \widetilde{Y} \\ \widetilde{\gamma}_S \downarrow & & \downarrow \widetilde{\gamma} \\ \widetilde{X}_S & \xrightarrow{\pi} & \widetilde{X}. \end{array}$$

C'est à nouveau la propriété du morphisme  $\gamma$  qui est invoquée pour les mêmes raisons :

- un morphisme localement semi-algébrique  $f$  est séparé si et seulement si le morphisme  $\tilde{f}$  est séparé [Sch89b, Chap. III, Theorem 3.1],
- un morphisme semi-algébrique  $f$  est propre si et seulement si le morphisme  $\tilde{f}$  est propre [Sch89b, Chap. III, Theorem 4.10],
- un morphisme localement semi-algébrique  $f$  est propre si et seulement si le morphisme  $f_S$  est propre [DK85, Theorem B.4].

Reste ensuite à appliquer le théorème 2.21. □

**Théorème 2.23.** Soient  $S/R$  une extension de corps réels clos et  $X$  un espace réel clos sur  $R$ . Pour tous entiers  $p, q$  on a des isomorphismes canoniques

$$\pi^* : H_{\text{san}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\simeq} H_{\text{san}}^{p,q}(X_S).$$

*Démonstration.* Écrivons temporairement  $\mathbf{Z}(q)_{X_S}^{\text{san}}$  pour parler du complexe  $\mathbf{Z}(q)^{\text{san}}$  sur l'espace réel clos  $X_S$ . On vérifie simplement que

$$\pi^* (\widetilde{\mathbf{Z}(q)}^{\text{san}}) = \widetilde{\mathbf{Z}(q)}_{X_S}^{\text{san}}.$$

Comme dans la preuve du théorème 2.17, cela provient de la proposition 1.10, du fait que le foncteur

$\pi^*$  préserve les sommes directes finies et les produits tensoriels de faisceaux, les faisceaux constants et de l'égalité  $\pi^* \widehat{f}^{\text{san}} = \widehat{f}_{X_S}^{\text{san}}$  (voir la démonstration du corollaire 2.22). On utilise alors [Del91, Chap. II, Theorem 10.4] qui est la version hypercohomologique du théorème 2.21.  $\square$

### 3 Cohomologie bigraduée arithmétique d'espaces réels clos

Dans le contexte des espaces localement semi-algébriques, on dispose d'une bonne théorie des revêtements (c'est d'ailleurs une des raisons qui motivait leur introduction), voir [DK84, Sect. 5]. En particulier, on ne s'étendra pas sur le sujet mais il n'y a aucune obstruction à y transposer la notion de cyclo-connexité (locale) du chapitre 3. Pour simplifier (comme dans la remarque 1.8), on pourra toujours supposer que l'on travaille avec des espaces localement semi-algébriques localement semi-algébriquement simplement connexes en se servant du théorème de relèvement semi-algébrique [DK84, Theorem 5.10].

Soit  $(X, Y, \gamma)$  un espace réel clos, nous commençons par considérer le faisceau  $\mathcal{I}_Y$  des fonctions semi-algébriquement continues inversibles à valeurs dans  $C$  qui est aussi vu comme espace localement semi-algébrique, *i.e.*  $C = \text{Res}_{C/R}(\mathbf{A}_C^1)(R)$  : c'est un faisceau sur le site semi-algébrique  $Y_{\text{sa}}$ . On dispose donc encore du morphisme exponentiel arithmétique que l'on notera  $\exp^{\text{sar}}$  pour éviter toute confusion,

$$\exp^{\text{sar}} : \mathcal{I}_{Y!} \longrightarrow \mathcal{I}_Y.$$

Le corps  $C$  étant algébriquement clos et de caractéristique nulle, on a un isomorphisme  $\mu_n(C) \simeq \mathbf{Z}/n$  et par conséquent le noyau du morphisme  $\exp^{\text{sar}}$  est le faisceau constant  $\lim_{m|n} \mu_n(\mathcal{I}_Y) \simeq \widehat{\mathbf{Z}}_Y$  sur le site semi-algébrique  $Y_{\text{sa}}$ . Munissant les faisceaux  $\mathcal{I}_Y$  et  $\mathcal{I}_{Y!}$  de la même action (semi-algébrique) du groupe  $C_2$  que dans le cas des espaces réels de façon à forcer l'équivariance du morphisme  $\exp^{\text{sar}}$  (cf. 1.1), on obtient, après application du foncteur image directe induit par le morphisme de sites  $\gamma^{-1} : Y_{\text{sa}} \longrightarrow X_{\text{sa}}$  un morphisme de faisceaux sur le site  $X_{\text{sa}}$

$$\mathcal{J}_{X!} := (\gamma_* \mathcal{I}_{Y!})^{C_2} \xrightarrow{\exp^{\text{sar}}} (\gamma_* \mathcal{I}_Y)^{C_2} =: \mathcal{J}_X.$$

Posons alors  $J^{\text{sar}} := (\gamma_* \widehat{\mathbf{Z}}_Y)^{C_2} = \gamma_*^{C_2}(\widehat{\mathbf{Z}}^{\text{tw}}) \in \mathbf{Ab}(X_{\text{sa}})$ , on a une suite de faisceaux abéliens sur le site semi-algébrique  $X_{\text{sa}}$  :

$$0 \longrightarrow J^{\text{sar}} \longrightarrow \mathcal{J}_{X!} \xrightarrow{\exp^{\text{sar}}} \mathcal{J}_X.$$

**Lemme 3.1.** *On a  $\widehat{f}^{\text{sar}} = \widehat{\gamma}_*^{C_2}(\widehat{\mathbf{Z}}^{\sim})$  où l'action du groupe  $C_2$  sur le faisceau constant  $\widehat{\mathbf{Z}}^{\sim}$  est l'action ponctuelle correspondante à celle de la définition 2.7.*

*Démonstration.* C'est exactement la même preuve que pour le lemme 2.8.  $\square$

On fabrique ensuite les équivalents semi-algébriques des complexes  $\mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}$ ,

**Définition 3.2.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos, on définit le *morphisme (resp., complexe) de réduction (semi-algébrique) arithmétique*  $\rho^{\text{sar}}$  de la catégorie  $\mathbf{Ab}(X_{\text{sa}})$  (resp.,  $\mathbf{Z}(1)^{\text{sar}} \in \mathbf{Ch}^b(X_{\text{sa}})$  concentré en degrés 0 et 1)

$$J^{\text{sar}} \xrightarrow{\rho^{\text{sar}}} \mathbf{Z}/2$$

en décrétant que le morphisme (resp., complexe) concordant de la catégorie  $\mathbf{Ab}(\tilde{X})$  est le morphisme (resp., complexe) de réduction arithmétique

$$\widetilde{J}^{\text{sar}} = \widehat{\gamma}_*^{C_2}(\widehat{\mathbf{Z}}^{\sim}) \xrightarrow{\rho^{\text{ar}}} \mathbf{Z}/2$$

(resp.,  $\mathbf{Z}(1)^{\text{ar}} \in \mathbf{Ch}^b(\tilde{X})$ ) sur l'espace réel  $\tilde{X}$ .

**Faits 3.3.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos,

1. Pour tout  $q \geq 2$ , on obtient un complexe de faisceaux abéliens  $\mathbf{Z}(q)^{\text{sar}}$  sur le site semi-algébrique  $X_{\text{sa}}$  en posant

$$\mathbf{Z}(q)^{\text{sar}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{sar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q}$$

dont le complexe correspondant sur l'espace réel  $\tilde{X}$  est  $\mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}$ .

2. On a, pour tout  $q \geq 1$ , des triangles fondamentaux arithmétiques dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X_{\text{sa}})$

$$(J^{\text{sar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q} \longrightarrow \mathbf{Z}(q)^{\text{sar}} \longrightarrow i_* (\mathbf{Z}/2)[-q] \longrightarrow (J^{\text{sar}})^{\widehat{\otimes}^{\text{ef}} q}[1],$$

où  $i$  désigne l'inclusion (localement semi-algébrique) des points réels clos  $X(R) \hookrightarrow X$ .

3. On a un triangle exact, dit exponentiel (semi-algébrique) arithmétique,

$$\mathbf{Z}(1)^{\text{sar}} \longrightarrow \mathcal{J}_{X!} \xrightarrow{\exp^{\text{sar}}} \mathcal{J}_X \longrightarrow \mathbf{Z}(1)^{\text{sar}}[1]$$

dans la catégorie triangulée  $\mathcal{D}^b(X_{\text{sa}})$ .

*Démonstration.*

1. On reprend la preuve du premier point des faits 2.12 en y ajoutant l'observation suivante : le foncteur d'abstraction préserve les limites et les conoyaux donc la complétion prefinie de faisceaux. En effet, vu la description explicite des composantes du complexe  $\mathbf{Z}(q)^{\text{sar}}$ , la proposition 1.30 (il faut se méfier des hypothèses artificielles sur l'espace réel que l'on trouve dans l'énoncé de cette

proposition, en réalité il suffit de disposer d'un espace localement connexe, voir la remarque 1.33 à ce propos, ce qui est le cas des espaces localement semi-algébriques !) nous permet d'affirmer que les arguments ci-dessus sont suffisants.

2. Voir le point précédent et la preuve des faits 2.12. On arrive à la même conclusion : les triangles fondamentaux de l'énoncé ne sont que les versions géométriques des triangles fondamentaux arithmétiques sur l'espace réel  $\tilde{X}$ .
3. C'est le corollaire 1.20 où, comme d'habitude, on remplace l'espace réel par un espace réel clos.  $\square$

**Définition 3.4.** Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos, on nomme *cohomologie bigraduée (semi-algébrique) arithmétique*  $H_{\text{sar}}^{*,*}(X)$  de  $X$  les groupes d'hypercohomologie

$$H_{\text{sar}}^{p,q}(X) := \mathbf{H}_{\text{sa}}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{sar}}) = \mathbf{H}^p(\tilde{X}, \mathbf{Z}(q)^{\text{ar}}).$$

**Théorème 3.5.** Soit  $X$  un espace réel clos sur  $\mathbf{R}$ , pour tous entiers  $p, q$  on a des isomorphismes canoniques

$$i^* : H_{\text{sar}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{ar}}^{p,q}(X_{\text{top}}).$$

*Démonstration.* Similaire en tout point à la preuve du théorème 2.17 en remplaçant les faisceaux  $\tilde{\mathbf{Z}}$  et  $J^{\text{san}}$  par  $\hat{\tilde{\mathbf{Z}}}$  et  $J^{\text{sar}}$  dans la proposition 2.16 et les faits 2.12 par les faits 3.3.  $\square$

**Théorème 3.6.** Soient  $S/R$  une extension de corps réels clos et  $X$  un espace réel clos sur  $R$ . Pour tous entiers  $p, q$  on a des isomorphismes canoniques

$$\pi^* : H_{\text{sar}}^{p,q}(X) \xrightarrow{\cong} H_{\text{sar}}^{p,q}(X_S).$$

*Démonstration.* Similaire en tout point à la preuve du théorème 2.23 en remplaçant les faisceaux  $\tilde{\mathbf{Z}}$  et  $J^{\text{san}}$  par  $\hat{\tilde{\mathbf{Z}}}$  et  $J^{\text{sar}}$  dans le corollaire 2.22 et les faits 2.12 par les faits 3.3.  $\square$

## 4 Un théorème de comparaison pour les espaces réels clos

Nous présentons une version semi-algébrique du théorème de comparaison pour les espaces réels, c'est-à-dire un analogue du théorème 3.8 dans le cadre des espaces réels clos. Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos, les groupes de cohomologie  $H_{\text{san}}^{*,*}(X)$  et  $H_{\text{sar}}^{*,*}(X)$  sont respectivement isomorphes aux groupes  $H_{\text{an}}^{*,*}(\tilde{X})$  et  $H_{\text{ar}}^{*,*}(\tilde{X})$  de l'espace abstrait réel associé  $\tilde{X} = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\gamma})$ . Il devrait donc suffire, pour arriver au résultat proclamé, de mettre les bonnes hypothèses, géométriques ou topologiques, sur l'espace réel

clos  $X$  afin de garantir que l'espace réel  $\tilde{X}$  soit un CW-complexe à squelettes finis. Malheureusement, on l'a déjà constaté à plusieurs reprises, les abstractions d'espaces localement semi-algébriques ne sont pas, en règle générale, séparées. En particulier, ces espaces sont loin d'être aussi agréables que des CW-complexes topologiques. Pour cette raison, nous travaillerons, contrairement à ce qui a été fait jusqu'ici dans ce chapitre, directement au niveau semi-algébrique.

Les ensembles semi-algébriques étant localement (semi-algébriquement) connexes, il en va de même pour les espaces semi-algébriques et, a fortiori, pour les espaces localement semi-algébriques. Nous nous occupons en premier lieu de savoir sous quelles conditions ces espaces n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes. Dans le cas semi-algébrique, la réponse est déjà connue puisque les espaces semi-algébriques ont le bon goût de n'avoir toujours qu'un nombre fini de composantes connexes semi-algébriques,

**Théorème 4.1** ([DK81, Theorem 11.2]). *Soit  $M$  un espace semi-algébrique, l'ensemble  $\pi_0(M)$  est fini et toutes les composantes connexes par arcs de  $M$  sont des sous-ensembles semi-algébriques de ce dernier.*

Il se trouve que ce dernier résultat nous suffit. En effet, on a déjà supposé, dès la section 1 de ce chapitre, que les espaces réels clos  $(X, Y, \gamma)$  que l'on regarde sont tels que  $Y$  est un espace semi-algébrique!

**Théorème 4.2.** *Soit  $X = (X, Y, \gamma)$  un espace réel clos dont le complexifié  $Y$  est un espace semi-algébrique. Pour tout  $q \geq 0$ , il existe un unique morphisme  $\psi$  rendant le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}(q)^{\text{san}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{Z}(q)}^{\text{sar}} & \longrightarrow & \mathbf{Z}(q)^{\text{sar}} \\ & \searrow \eta & & \nearrow \psi & \\ & & \widetilde{\mathbf{Z}(q)}^{\text{san}} & & \end{array}$$

commutatif et c'est un isomorphisme.

*Démonstration.* Comme sur les espaces réels, le complexe  $\widetilde{\mathbf{Z}(q)}^{\text{sar}}$  est défini par  $\widetilde{\mathbf{Z}(q)}^{\text{sar}} := (\mathbf{Z}(1)^{\text{sar}})^{\otimes q}$ . Pour le reste, visiblement, c'est la structure topologique du complexifié  $Y$  qui compte donc on a juste besoin du théorème 4.1 : voir la preuve du théorème 1.31.  $\square$

**Corollaire 4.3.** *Sur un espace réel clos  $X$  dont le complexifié est semi-algébrique, les groupes d'hypercohomologie  $\mathbf{H}^p(X, \widetilde{\mathbf{Z}(q)}^{\text{san}})$  et  $H_{\text{sar}}^{p,q}(X)$  sont deux à deux isomorphes.*

À la différence du cas topologique, il semblerait que l'on ne dispose pas d'une bonne théorie semi-algébrique des CW-complexes : bonne signifiant, pour nous, telle que la cohomologie cellulaire coïncide avec la cohomologie faisceautique. Dans son livre, Knebusch parvient bien à définir des complexes cellulaires au sens des espaces faiblement semi-algébriques [Kne89, Chap. V, §7] mais la cohomologie de

ces objets n'a, a priori, rien à voir avec la cohomologie des faisceaux, cf. [Kne89, Intro., pp. XII - XIII], [Kne89, Chap. VI, §5, Open Question B].

On choisit donc de s'intéresser ensuite au lien entre les groupes  $\widehat{H_{\text{san}}^{p,q}}(X)$  et  $\mathbf{H}^p(X, \widehat{\mathbf{Z}}(q)^{\text{san}})$  quand  $X$  est un espace réel clos affine pour le motif suivant :

**Théorème 4.4** ([DK82, Theorem 2.1]). *Tout espace semi-algébrique affine est (simultanément) triangulable.*

*Remarque 4.5.* Une bonne classe d'espaces localement semi-algébriques sont ceux qui sont à la fois réguliers et paracompacts puisqu'on peut aussi les trianguler [DK85, Chap. II, §4].

**Théorème 4.6** ([DK82, Theorem 3.3]). *Soit  $M$  un espace semi-algébrique affine dont on note  $K$  le cœur par rapport à une bonne triangulation de  $M$  [DK82, §2]. Pour tout groupe abélien  $A$ , on a des isomorphismes naturels*

$$H_{\Delta}^*(K, A) \simeq H_{\Delta}^*(|K|, A) \simeq H_{\text{sa}}^*(M, A),$$

$|K|$  étant la réalisation géométrique du complexe simplicial abstrait  $K$ .

Notez-bien : dans le théorème ci-dessus, les complexes simpliciaux abstraits et géométriques  $K$  et  $|K|$  sont finis, c'est précisément ce qui nous permet de démontrer le résultat à venir.

**Corollaire 4.7.** *Soit  $M$  un espace semi-algébrique affine. Pour tout groupe abélien de type fini  $A$ , les groupes de cohomologie  $H_{\text{sa}}^*(M, \widehat{A})$  et  $\widehat{H_{\text{sa}}^*(M, A)}$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* D'après le théorème 4.6, il suffit de se concentrer sur les groupes de cohomologie simpliciale  $H_{\Delta}^*(K, A)$ . Le complexe simplicial  $K$  est fini et le groupe  $A$  est de type fini donc le complexe de cochaines simpliciales  $C_{\Delta}^*(K, A) = \text{Hom}(C_{\Delta}^{\Delta}(K), A)$  est abélien libre de type fini. Ainsi, la proposition 3.3 nous assure des isomorphismes

$$\widehat{H_{\text{sa}}^*(M, A)} \simeq \widehat{H^*(C_{\Delta}^*(K, A))} \xrightarrow{\simeq} H^*(\widehat{C_{\Delta}^*(K, A)}).$$

De plus, comme dans la démonstration du corollaire 3.4, les complexes  $\widehat{C_{\Delta}^*(K, A)}$  et  $C_{\Delta}^*(K, \widehat{A})$  sont isomorphes.  $\square$

Le corollaire précédent constituant le cas où  $q = 0$  de la variante semi-algébrique du théorème de comparaison 3.7 et les suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} (J^{\text{san}})^{\otimes q} & \longrightarrow & \mathbf{Z}(q)^{\text{san}} & \longrightarrow & i_*(\mathbf{Z}/2)[-q] & \longrightarrow & (J^{\text{san}})^{\otimes q}[1] \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \gamma_*\mathbf{Z} & \xrightarrow{\mathbb{1}-\sigma} & J^{\text{san}} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (4.1)$$

auxquelles on a accès grâce aux faits 2.12 et au foncteur d'abstraction nous donnent le droit d'achever ce chapitre sans trop alourdir le propos. Toutefois, pour le confort du lecteur, nous réécrivons les preuves de la dernière section du chapitre 3 dans le contexte semi-algébrique.

**Proposition 4.8.** *Soit  $X$  un espace réel clos affine. Le morphisme de suites exactes longues de groupes de cohomologie induit par l'analogie semi-algébrique du morphisme de triangles (3.1) se factorise à travers les complétés prefinis correspondants,*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(X, i_* \mathbf{Z} / 2 [-q]) & \longrightarrow & H^p(X, (J^{\text{san}})^{\otimes q}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^p(X, \mathbf{Z}(q)^{\text{san}}) & \longrightarrow & H^p(X, i_* \mathbf{Z} / 2 [-q]) & \longrightarrow & H^{p+1}(X, (J^{\text{san}})^{\otimes q}) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \eta \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \widehat{H^{p-1}(X, i_* \mathbf{Z} / 2 [-q])}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^p(X, (J^{\text{san}})^{\otimes q})}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H_{\text{san}}^{p,q}(X)}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^p(X, i_* \mathbf{Z} / 2 [-q])}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \widehat{H^{p+1}(X, (J^{\text{san}})^{\otimes q})}^{\text{ef}} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \vdots \downarrow & & \vdots \downarrow & & \phi \downarrow & & \vdots \downarrow & & \vdots \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}} / 2 [-q]) & \longrightarrow & H^p(X, \widehat{(J^{\text{san}})^{\otimes q}}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^p(X, \widehat{\mathbf{Z}(q)^{\text{san}}}) & \longrightarrow & H^p(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}} / 2 [-q]) & \longrightarrow & H^{p+1}(X, \widehat{(J^{\text{san}})^{\otimes q}}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

*Démonstration.* Comme pour la proposition 3.6, il suffit de montrer que les groupes de cohomologie de la dernière ligne du diagramme de l'énoncé sont prefinis. On a

$$H^\star(X, i_* \widehat{\mathbf{Z}} / 2 [-q]) \simeq H^{\star-q}(X(R), \widehat{\mathbf{Z}} / 2) \simeq \widehat{H^{\star-q}(X(R), \mathbf{Z} / 2)}^{\text{ef}} \simeq \widehat{H^\star(X, i_* \mathbf{Z} / 2 [-q])}^{\text{ef}}$$

en appliquant le corollaire 4.7 à l'espace semi-algébrique affine des points réels clos  $X(R)$  et

$$H^\star(X, \widehat{(J^{\text{san}})^{\otimes q}}) \simeq \widehat{H^\star(X, (J^{\text{san}})^{\otimes q})}^{\text{ef}}$$

puisque en degré impair c'est essentiellement le corollaire 4.7 appliqué à l'espace semi-algébrique affine  $Y$  en s'aidant de la deuxième suite exacte courte de (4.1) et en degré pair on renvoie au second point de la démonstration du théorème 3.7. Les groupes  $\mathbf{H}^\star(X, \widehat{\mathbf{Z}(q)^{\text{san}}})$  sont donc prefinis comme extensions de groupes prefinis de type fini.  $\square$

**Théorème 4.9.** *Soit  $X$  un espace réel clos affine, le morphisme*

$$\phi : \widehat{H_{\text{san}}^{p,q}(X)}^{\text{ef}} \longrightarrow \mathbf{H}^p(X, \widehat{\mathbf{Z}(q)^{\text{san}}})$$

*de la proposition 4.8 est un isomorphisme en tout degré  $p$  et tout poids  $q$ .*

*Démonstration.* On applique le lemme des cinq à la partie inférieure du diagramme de la proposition 4.8.  $\square$

**Théorème 4.10.** *Sur un espace réel clos affine  $X$ , la cohomologie (semi-algébrique) arithmétique (entière) de  $X$  s'obtient comme complété profini de la cohomologie (semi-algébrique) analytique (entière) de  $X$  : le diagramme suivant est commutatif,*

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\text{san}}^{p,q}(X) & \longrightarrow & \mathbf{H}^p\left(X, \widehat{\mathbf{Z}(q)}^{\text{san}}\right) \\
 \eta \downarrow & \begin{array}{c} \exists! \phi \\ \nearrow \gamma \\ \simeq \end{array} & \downarrow \mathbf{H}^p(\psi) \\
 \widehat{H_{\text{san}}^{p,q}(X)} & \xrightarrow{\simeq} & H_{\text{sar}}^{p,q}(X).
 \end{array}$$

*Démonstration.* Joindre le corollaire 4.3 au théorème 4.9. □

Terminons en faisant remarquer au lecteur que, d'après ce qui a été dit en introduction de cette section, ce dernier théorème généralise le théorème de comparaison pour les espaces réels aux espaces que l'on obtient en appliquant le foncteur d'abstraction aux espaces semi-algébriques affines.



# Bibliographie

---

- [Art24] E. ARTIN, « Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen », in : *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 3 (1924), p. 319-323 (cf. p. 91).
- [AM69] M. ARTIN et B. MAZUR, *Etale Homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin, Heidelberg, 1969 (cf. p. 10, 19).
- [BW20] O. BENOIST et O. WITTENBERG, « On the integral Hodge conjecture for real varieties, I », in : *Inventiones mathematicae* 222.1 (2020), p. 1-77 (cf. p. 95).
- [BFMQ22] F. BERNARD, G. FICHOU, J-P. MONNIER et R. QUAREZ, *Algebraic characterizations of homeomorphisms between algebraic varieties*, 2022, arXiv : 2203.09967 [math.AG] (cf. p. 95).
- [BCR98] J. BOCHNAK, M. COSTE et M-F. ROY, *Real Algebraic Geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer Berlin, Heidelberg, 1998 (cf. p. 91, 99, 100).
- [Bou07] N. BOURBAKI, *Topologie générale : Chapitres 1 à 4*, Springer Berlin, Heidelberg, 2007 (cf. p. 34, 36, 37).
- [Bru87] G.W. BRUMFIEL, « Quotient Spaces for Semialgebraic Equivalence Relations », in : *Mathematische Zeitschrift* 195 (1987), p. 69-78.
- [BV19] J. M. BURGOS et A. VERJOVSKY, *Adelic solenoid I : Structure and topology*, 2019, arXiv : 1603.05676 [math.CV] (cf. p. 9, 18).
- [Del80] H. DELFS, « Kohomologie affiner semialgebraischer Räume », thèse de doct., Universität Regensburg, 1980 (cf. p. 102).
- [Del85] H. DELFS, « The homotopy axiom in semialgebraic cohomology », in : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1985.355 (1985), p. 108-128 (cf. p. 96).
- [Del91] H. DELFS, *Homology of Locally Semialgebraic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin, Heidelberg, 1991 (cf. p. 95, 99, 102, 107, 109).
- [DK81] H. DELFS et M. KNEBUSCH, « Semialgebraic Topology over a Real Closed Field II : Basic Theory of Semialgebraic Spaces. », in : *Mathematische Zeitschrift* 178 (1981), p. 175-214 (cf. p. 93, 112).

- [DK82] H. DELFS et M. KNEBUSCH, « On the homology of algebraic varieties over real closed fields. », in : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1982.335 (1982), p. 122-163 (cf. p. 106, 113).
- [DK84] H. DELFS et M. KNEBUSCH, « An introduction to locally semialgebraic spaces », in : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 14.4 (1984), p. 945-964 (cf. p. 12, 21, 92, 109).
- [DK85] H. DELFS et M. KNEBUSCH, *Locally Semialgebraic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1985 (cf. p. 92, 94, 95, 105-108, 113).
- [DG60] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK, « Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas », fr, in : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 4 (1960), p. 5-228, URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1960\\_\\_4\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/) (cf. p. 39).
- [EP16] M. J. EDMUNDO et L. PRELLI, « Sheaves on  $T$ -topologies », in : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 68.1 (2016), p. 347-381 (cf. p. 92).
- [Efr06] I. EFRAT, *Valuations, Orderings, and Milnor K-Theory*, Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, 2006 (cf. p. 31).
- [Fuc70] L. FUCHS, *Infinite Abelian Groups*, vol. 1, Academic Press, 1970 (cf. p. 23, 25).
- [Gle19] D. GLEUHER, « Hypercohomologie bigraduée de variétés algébriques réelles », thèse de doct., Université de Bretagne Occidentale, 2019 (cf. p. 5, 14, 53, 55-58, 66, 68, 71, 81-83, 87, 91, 96, 98).
- [God58] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958 (cf. p. 38).
- [Gro68] A. GROTHENDIECK, « Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets », in : *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Masson, 1968, p. 215-305 (cf. p. 7, 16).
- [GR71] A. GROTHENDIECK et M. RAYNAUD, *Revêtements Étales et Groupe Fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61 (SGA 1)*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin, Heidelberg, 1971 (cf. p. 10, 19).
- [Ham97] J. van HAMEL, « Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties », thèse de doct., Vrije Universiteit Amsterdam, 1997 (cf. p. 66).
- [Hato2] A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002 (cf. p. 86).
- [Hui02] J. HUISMAN, « The exponential sequence in real algebraic geometry and Harnack's inequality for proper reduced real schemes », in : *Communications in Algebra* 30.10 (2002), p. 4711-4730 (cf. p. 5, 14).

- [Hui24] J. HUISMAN, « Cohomologie bigraduée de variétés algébriques réelles », Cours donné aux Journées de géométrie algébrique réelle à Vannes, mai 2024 (cf. p. 6, 15).
- [Hui] J. HUISMAN, « Chern-Stiefel-Whitney classes of real vector bundles », En préparation (cf. p. 5, 6, 14, 15).
- [Ive86] B. IVERSEN, *Cohomology of Sheaves*, Universitext, Springer Berlin, Heidelberg, 1986 (cf. p. 48, 61).
- [Jac09] N. JACOBSON, *Basic Algebra II*, Dover Publications, 2009 (cf. p. 86).
- [Kah87] B. KAHN, « Construction de classes de Chern équivariantes pour un fibré vectoriel Réel », in : *Communications in Algebra* 15.4 (1987), p. 695-711 (cf. p. 7, 16).
- [Kne89] M. KNEBUSCH, *Weakly Semialgebraic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1989 (cf. p. 93, 95, 104, 112, 113).
- [Kne92] M. KNEBUSCH, « Semialgebraic topology in the last ten years », in : *Real Algebraic Geometry*, sous la dir. de Michel COSTE, Louis MAHÉ et Marie-Françoise ROY, Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1992, p. 1-36 (cf. p. 92).
- [Kra91] V. A. KRASNOV, « Characteristic classes of vector bundles on a real algebraic variety », Russian, in : *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 55.4 (1991), p. 716-746 (cf. p. 7, 16).
- [Kra94] V. A. KRASNOV, « On equivariant Grothendieck cohomology of a real algebraic variety, and its applications », English, in : *Russ. Acad. Sci., Izv., Math.* 44.3 (1994), p. 461-477 (cf. p. 7, 16).
- [KS18] R. A. KUCHARCZYK et P. SCHOLZE, « Topological Realisations of Absolute Galois Groups », in : *Cohomology of Arithmetic Groups*, sous la dir. de James W. COGDELL, Günter HARDER, Stephen KUDLA et Freydoon SHAHIDI, Cham : Springer International Publishing, 2018, p. 201-288 (cf. p. 9, 18, 32).
- [Lazo04] R.K. LAZARSFELD, *Positivity in Algebraic Geometry I : Classical Setting : Line Bundles and Linear Series*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer, 2004 (cf. p. 63).
- [Mac98] S. MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, NY, 1998 (cf. p. 36, 59).
- [MM94] S. MAC LANE et I. MOERDIJK, *Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory*, Universitext, Springer New York, NY, 1994 (cf. p. 59).
- [May99] J.P. MAY, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1999 (cf. p. 62, 65).

- [PS93] G. PESCHKE et P. SYMONDS, « Pro-torsion completions of abelian groups », in : *Journal of Pure and Applied Algebra* 88.1 (1993), p. 187-197 (cf. p. 35).
- [RZ10] L. RIBES et P. ZALESKII, *Profinite Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer Berlin, Heidelberg, 2010 (cf. p. 35, 88).
- [Sch89a] C. SCHEIDERER, « Quotient of semi-algebraic spaces », in : *Mathematische Zeitschrift* 201 (1989), p. 249-271.
- [Sch94] C. SCHEIDERER, *Real and Étale Cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin, Heidelberg, 1994 (cf. p. 66).
- [SS16] O. SCHNÜRER et W. SOERGEL, « Proper base change for separated locally proper maps », in : *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 135 (2016), p. 223-250 (cf. p. 103).
- [Sch89b] N. SCHWARTZ, *The Basic Theory of Real Closed Spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, 1989 (cf. p. 92, 95, 98, 103-105, 108).
- [Sel16] Y. SELLA, *Comparison of sheaf cohomology and singular cohomology*, 2016, arXiv : 1602.06674 (cf. p. 86).
- [Ser60] J-P. SERRE, « Groupes proalgébriques », fr, in : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 7 (1960), p. 5-67, URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1960\\_\\_7\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__7__5_0/) (cf. p. 8, 17).
- [Sza09] T. SZAMUELY, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2009 (cf. p. 63).
- [Wil98] J. S. WILSON, *Profinite groups*, London Math. Soc. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1998 (cf. p. 38, 40, 50).



---

**Titre :** Cohomologie bigraduée arithmétique d'espaces réels clos

**Mot clés :** Géométrie algébrique réelle, hypercohomologie, complétion profinie, espaces semi-algébriques

**Résumé :** Le point de départ de cette thèse est la cohomologie bigraduée (analytique) des variétés algébriques réelles développée par Johannes Huisman et Dewi Gleuher. En prenant pour prétexte l'étude des groupes abéliens uniquement divisibles, nous présentons d'abord un substitut arithmétique à l'exponentielle analytique complexe basé sur le comportement agréable de cette dernière vis-à-vis des racines  $n$ -ièmes ou, en notation additive, de sa relation avec les propriétés de divisibilité. L'ambition première étant de s'affranchir de toute contrainte d'ordre topologique sur les objets considérés dans la construction de la cohomologie analytique, nous produisons dans un second temps une variante arithmétique de cette cohomologie bigraduée en

étendant la définition et les propriétés de l'exponentielle arithmétique au cadre des catégories abéliennes (de Grothendieck) et en introduisant une version modifiée de la notion de complétion profinie d'un groupe. Nous nous occupons ensuite de répondre à la question, dans le cas analytique comme arithmétique, de l'adaptation de cette théorie cohomologique à des variétés algébriques sur un corps réel clos quelconque en s'appuyant sur des méthodes semi-algébriques : à savoir, la théorie des espaces (localement) semi-algébriques de H. Delfs et M. Knebusch. Ceci nous amène finalement à démontrer un théorème de comparaison entre les cohomologies analytique et arithmétique pour les complexes cellulaires à squelettes finis.

---

**Title:** Bigraded arithmetic cohomology of real closed spaces

**Keywords:** Real algebraic geometry, hypercohomology, profinite completion, semi-algebraic spaces

**Abstract:** The starting point of this thesis is the bigraded (analytic) cohomology of real algebraic varieties developed by Johannes Huisman and Dewi Gleuher. Using the study of uniquely divisible abelian groups as a pretext, we first present an arithmetic substitute for the complex analytic exponential based on its nice behavior with respect to  $n$ -th roots, or, in additive notation, its relationship with divisibility properties. The primary goal is to free the construction of analytic cohomology from any topological constraint on the objects considered. We then produce an arithmetic variant of this bigraded cohomology by extending the definition

and properties of the arithmetic exponential to the framework of (Grothendieck) abelian categories and introducing a modified version of the notion of the profinite completion of a group. Next, we address the question, both in the analytic and arithmetic cases, of adapting this cohomological theory to algebraic varieties over any real closed field, relying on semi-algebraic methods: namely, the theory of (locally) semi-algebraic spaces by H. Delfs and M. Knebusch. This leads us to ultimately prove a comparison theorem between the analytic and arithmetic cohomologies for cellular complexes with finite skeletons.