



HAL
open science

Quelques contributions sur les modèles multibranches et de dépendance entre les sinistres en actuariat

Charles Minier

► **To cite this version:**

Charles Minier. Quelques contributions sur les modèles multibranches et de dépendance entre les sinistres en actuariat. Gestion et management. Université Claude Bernard - Lyon I, 2025. Français. ⟨NNT : 2025LYO10187⟩. ⟨tel-05565332⟩

HAL Id: tel-05565332

<https://theses.hal.science/tel-05565332v1>

Submitted on 24 Mar 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-ND 4.0 - Attribution - No Derivative Works - International License

THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Opérée au sein de :

l'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale 486

Sciences Économiques et de Gestion

Discipline : Sciences de Gestion

Soutenue publiquement le 03/10/2025, par :

Charles Minier

**Quelques contributions sur les modèles
multibranches et de dépendance entre les
sinistres en actuariat**

Devant le jury composé de :

José Luis Vilar Zanón

Professeur associé, Universidad Complutense de Madrid

Anis Matoussi

Professeur des universités, Université du Mans

Diana Dorobantu

Professeur des universités, Université Claude Bernard Lyon 1

Laurence Reboul

Maîtresse de conférences, Université d'Aix-Marseille

Frédéric Planchet

Professeur des universités, Université Claude Bernard Lyon 1

Stéphane Loisel

Professeur des universités,

Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM)

Rapporteur

Président, Rapporteur

Examinatrice

Examinatrice

Directeur de thèse

Co-directeur de thèse

« Science sans conscience n'est que
ruine de l'âme. »

Rabelais, *Pantagruel*.

Résumé

Cette thèse, qui s'inscrit dans le cadre de la théorie de la ruine, propose l'étude de plusieurs types de modèles de risques, tous inspirés du modèle original de Cramér-Lundberg, pour la plupart écrits en temps discret, et pour la plupart également impliquant des formes de dépendance spatio-temporelles diverses, motivées par l'émergence de deux thématiques concrètes et actuelles liées aux compagnies d'assurance : la question de la pollution liée aux composés perfluorés (couramment appelés PFAS), et les émissions de carbone de la résolution d'un sinistre automobile.

Elle se divise en trois principaux chapitres, précédés d'une introduction visant à décrire les particularités de chacun des modèles, ainsi que les raisons et les motivations de leur utilisation.

Une grande partie des modèles considérés au cours de cette thèse utilise un type particulier de sinistre, les sinistres *secondaires* (ou *de rechute*, ou « *by-claim* » en anglais), et qui sert à désigner toutes les pertes ultérieures à un événement source déjà répertorié dans la base de données d'une compagnie et donc déjà associé à un premier montant, désigné par opposition le *sinistre principal*.

Les deux premiers chapitres sont articulés autour de la pollution environnementale par les composés perfluorés, et ses conséquences néfastes pour l'homme. Dans chacun d'eux, on explique en quoi nos modèles pourraient représenter certains aspects d'une telle problématique du point de vue d'une compagnie d'assurance

Le premier chapitre porte sur un modèle avec à la fois des sinistres principaux et secondaires, et ces derniers sont comptés à l'aide d'une série temporelle autorégressive à valeurs entières, un processus INAR(1). A notre connaissance, c'est un type de modèle qui n'a encore jamais été étudié dans la littérature scientifique. Les résultats principaux de cette étude correspondent à des probabilités de ruine asymptotiques. On explore également des modèles tirés de ce premier, notamment certains où les hypothèses de dépendance sont atténuées, en comparant les résultats relatifs à chacun.

Le deuxième chapitre étudie trois différents modèles de risque avec une structure de prévention. On s'intéresse au montant de prévention optimal, défini comme étant celui qui minimise le risque associé à la probabilité de ruine (vue comme une fonction du montant de prévention investi). On cherche à chaque fois à avoir la caractérisation la plus fine et la plus précise possible concernant ce montant optimal. Des comparaisons sont établies entre les résultats de ces trois modèles, mais aussi avec des modèles similaires présentés dans la littérature scientifique.

Enfin, le troisième chapitre étudie deux modèles bidimensionnels : le premier, plus classique, fait intervenir des sinistres secondaires comptés par une série temporelle bivariée et autorégressive, un processus BINAR(1), faisant ainsi apparaître de la dépendance croisée entre les deux branches. Le deuxième, dont l'écriture s'inspire de ce premier, fait intervenir notamment l'idée d'un risque non-financier et non-assurable - ici, des quantités de dioxyde de carbone émises dans l'atmosphère -, et cherche à représenter certains éléments liés aux émissions de carbone de la gestion de sinistres automobiles. Nous présentons certains résultats associés, en particulier sous forme de probabilités de ruine asymptotiques, tout en dressant des parallèles entre ces deux modèles. Un autre objectif de ce chapitre est de proposer une analyse numérique liée à la gestion de sinistres automobiles. On insiste sur les intérêts à la fois financiers et écologiques à privilégier l'usage de pièces issues de l'économie circulaire plutôt que neuves lorsqu'on doit remplacer des éléments d'un véhicule endommagé.

Mots-clés : modèle de risque ; probabilité de ruine ; série temporelle ; processus INAR(1) ; processus BINAR(1) ; composés perfluorés (PFAS) ; sinistre secondaire (ou by-claim) ; modèle de prévention ; émissions de carbone en assurance automobile.

Abstract

This PhD thesis proposes the study of different kinds of risk models in a ruin theory framework. These models are all inspired by the original Cramér-Lundberg process, most of them are written in discrete time, but also most of them involving different kinds of spatio-temporal dependence, motivated by the emergence of two concrete and current thematics related with insurance companies : the pollution caused by perfluorinated compounds (namely, the PFAS issue), or the carbon emissions generated by claim management in motor insurance.

This thesis is divided in three main chapters, preceded by an introduction which aims at describing the particularities of each of the models regarded, but also the reasons or the motivations of their use.

Among the models considered, a large part of them involve "by-claims" : it refers to claims which always arise from a "main claim" when they occur, and often correspond to delayed claims towards the events leading to these initial main claims.

The two first chapters are organised around the PFAS issue. For both, we explain how the corresponding models could represent some aspects of the managing of such a problem by an insurance company.

The first chapter develops a discrete-time risk model, involving main claims and by-claims, where these latter ones are counted thank to an INAR(1) process. To our knowledge, this type of model had never been proposed in the scientific literature before. The main results correspond to asymptotical ruin probabilities. Then, we display some other models related with this first one, in particular two ones where the dependence assumptions are softened, and the aim is to draw a comparison with the results emerging from the initial model.

The second chapter presents three different risk models carrying a prevention structure. For each of them, we try to characterize the optimal prevention amount, defined as the amount spent in prevention which minimizes the ruin probability of a given model. We search each time the most accurate or refined characterisation for this optimal amount. Some comparisons are made between the results of the three models, but also with the other prevention risk models in the ruin theory literature.

The third chapter studies two bidimensional risk models : the first one, more classical, involves by-claims counted thank to a BINAR(1) process, which entails a "crossing" dependence between the two lines of business. The second, inspired from this first one,

incorporates the idea of a non-financial and uninsurable risk (here a quantity of carbon dioxide emitted), and is willing to represent some aspects of the carbon emissions engendered by claim management in motor insurance. We present some risk results for both models, particularly in terms of asymptotical ruin probabilities, while drawing parallels between them. Another aim of this chapter is to yield a numerical analysis linked with the carbon footprint of motor insurance. We enhance the fact that it is both more economical and more environmentally-friendly to use pieces coming from circular economy than brand-new pieces when some parts of a damaged car have to be replaced.

Keywords : risk model ; ruin probability modèle ; time series ; INAR(1) process ; BINAR(1) process ; PFAS (perfluorinated compounds) ; by-claim ; prevention model ; carbon footprint in motor insurance.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie chaleureusement Anis Matoussi et José Luis Vilar Zanón pour leur relecture de mon manuscrit, et pour leurs remarques pertinentes qui m'ont aidé à le perfectionner. Je suis également très reconnaissant envers Laurence Reboul et Diana Dorobantu d'avoir accepté de faire partie du jury lors de la soutenance de cette thèse.

Je remercie ensuite mes directeurs de thèse, Frédéric Planchet et Stéphane Loisel, pour leur encadrement de très grande qualité et leur confiance. Des remerciements particuliers à Stéphane pour son regard précis et rigoureux, ses conseils toujours précieux, ses orientations pertinentes tout au long de mon travail. Les points de discussions eurent souvent lieu sous une forme informelle et détendue : que ce soit les journées passées à Lausanne, ainsi que les multiples rendez-vous au restaurant, ou dans des cafés. Cela a apporté de l'originalité dans le déroulement de cette aventure.

Je tiens bien sûr à remercier les chercheurs internationaux avec qui j'ai collaboré pour certains de mes articles : Naushad Mamode Khan, en particulier pour son accueil à l'île Maurice, et Renata Alcoforado.

J'ai ensuite une pensée toute particulière pour Claude Lefèvre, avec lequel j'ai eu des conversations agréables et instructives à propos de la théorie de la ruine. Son écoute et son aide m'ont été précieuses dans mes travaux. Ce fut un véritable plaisir de pouvoir échanger autant avec un professeur émérite du domaine.

J'adresse un grand merci à Romain Gauchon pour sa disponibilité, ses conseils et nos discussions passionnées autour de la question de la prévention, ou sur le monde des assurances en général.

Mes remerciements également à Melchior Salgado et Caroline Hillairet pour leur accompagnement dans le cadre des conseils de suivi de thèse, et les indications qu'ils ont pu me donner.

Toute ma gratitude pour le personnel de l'ISFA et les membres du laboratoire SAF pour leur accueil, leur bienveillance, et tous les services rendus au cours de la thèse. J'ai particulièrement apprécié les mots d'encouragements de chacun lors de la dernière ligne droite. Je remercie spécialement les différents directeurs de l'école, directeurs du laboratoire, et directeurs administratifs que j'ai connus au cours de la thèse : Nicolas Leboisne, Christian Robert, Stéphane Loisel, Maud Thomas, Djana Mokthari, et Frédéric Serrano.

De plus, parmi les enseignants-chercheurs, mes remerciements vont en particulier à Alexis Bienvenüe pour son aide en informatique et les programmes qu'il m'a transmis afin

que je puisse effectuer proprement certaines simulations numériques.

L'équipe des doctorants ou des jeunes enseignants-chercheurs a été une motivation pour venir travailler à l'ISFA, une source de partage et de soutien, et l'occasion de passer des bons moments lors de séminaires ou de conférences : je remercie en particulier Rayane pour son aide en informatique, et Etienne pour ses indications à propos de choses liées à l'environnement. Parmi ces jeunes chercheurs, j'ai aussi une pensée pour Léonie, Pierrick, Ismaël, Abdou, Mathias, Martial, Aleksandr, Tachfine, ou Karim.

Je tiens également à saluer l'ensemble des enseignants de mathématiques qui m'ont transmis leur savoir-faire et leurs connaissances au cours de mes études secondaires. Je songe particulièrement à Yves Duval, qui m'a accompagné pendant deux ans en mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

Enfin, tous mes remerciements à ma famille et mes amis fidèles pour leur soutien discret mais constant et leur encouragement tout au long de mes études et de cette thèse. Ils ont su manifester de la curiosité pour ce que je faisais. Une pensée particulière pour ma chère Maman, avec qui j'ai une connivence en la matière, du fait qu'elle est professeur de mathématiques.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Remerciements	vii
Table des matières	ix
Introduction	1
1	Modèle de risque en théorie de la ruine 3
1.1	Modèle continu en théorie de la ruine 3
1.2	Modèles en temps discret 7
1.3	Processus de comptage 9
1.4	Quelques éléments d'analyse asymptotique 11
2	Formes de dépendance possibles 14
2.1	Dépendance entre les montants de sinistres 14
2.2	Dépendance entre temps d'arrivée et montants de sinistres 15
2.3	Corrélation temporelle 16
2.4	Sinistres secondaires (ou « by-claims ») 21
3	Processus de risque faisant intervenir des séries temporelles 23
4	Motivations concrètes 25
4.1	La notion de PFAS 25
4.2	Empreinte carbone de la gestion de sinistres automobiles 34
5	Notion de modèle multivarié 36
5.1	Motivations 37
5.2	Définition générale de modèle multivarié 38
5.3	Modèles bivariés étudiés dans cette thèse 39
5.4	Autres formes de dépendance pour un modèle multivarié 41
6	Modèles de risque avec une structure de prévention 43
6.1	Notion de prévention 43
6.2	Modèles de prévention 44
7	Principaux résultats 47
7.1	Étude classique unidimensionnelle 47
7.2	Études de prévention 48
7.3	Études en deux dimensions 48
1	Modèle unidimensionnel utilisant un processus INAR(1) et application au thème des composés perfluorés (PFAS) 51
1.1	Introduction 52
1.2	Some elements about the PFAS compounds 53

TABLE DES MATIÈRES

1.2.1	Some elements about the PFAS compounds	53
1.2.2	The possible meanings of the following model	55
1.3	The Novel risk model with INAR(1) structure	56
1.4	First properties of the model	58
1.4.1	Net profit condition	58
1.4.2	Covariances	59
1.5	Ruin probabilities with light-tailed distributions	60
1.6	Models with softened dependence	63
1.6.1	Half-independent model	63
1.6.2	Purely independent model	64
1.6.3	Some firsts comparisons of the three models	65
1.7	Ruin probabilities with heavy-tailed distributions	68
1.7.1	Asymptotics for subexponential and Pareto distributions	68
1.7.2	The BRV class, a particular case of dependence	75
1.8	Numerical results	77
1.8.1	First sets of ruin probabilities	77
1.8.2	Ignoring some effects	79
1.8.3	Prediction for a ten-year horizon	83
1.9	Changes with a pseudo INAR(2) equation	84
1.9.1	First properties (section 1.4)	84
1.9.2	Light-tailed distributions and softened dependent models (sections 1.5 and 1.6)	85
1.9.3	Heavy-tailed distributions (section 1.7)	86
1.10	Uncertainty model	87
1.11	Conclusion and openings	88
2	Etudes de modèles de prévention et application aux PFAS	91
2.1	Introduction	92
2.2	Context of the prevention studies	94
2.2.1	The PFAS issue in relation with our prevention studies	94
2.2.2	Different categories of prevention	95
2.2.3	A first ruin model with a prevention structure	97
2.2.4	Prevention studies in this article	99
2.3	In continuous time with by-claims	101
2.3.1	Context and model	101
2.3.2	Primary prevention	103
2.3.3	Reducing the frequency of the by-claims or the relapses	104
2.4	In discrete time, without by-claims	106
2.4.1	Primary prevention	106
2.4.2	Secondary and tertiary prevention	108
2.5	In discrete time, with by-claims counted by an INAR(1) process	110
2.5.1	Context and model	110
2.5.2	Prevention with exponential distributions	111
2.5.3	Finite time prevention with Pareto distributions	112
2.5.4	Prevention with partial insurance cover	113
2.6	Comparison of the models	114
2.6.1	Common properties with the literature	114
2.6.2	Adjustment coefficients	115
2.7	If $p_{min} > 0$	116

2.8	Conclusion	117
3	Deux modèles bidimensionnels appliqués aux émissions de carbone de la résolution d'un sinistre automobile	119
3.1	Introduction	120
3.2	Carbon footprint of claim management in motor insurance	121
3.2.1	A bivariate structure for carbon footprint	121
3.2.2	Different types of correlations	122
3.2.3	The bivariate carbon model	123
3.3	A bidimensional risk model using a BINAR(1) process	126
3.3.1	An unidimensional model with an INAR(1) process	126
3.3.2	The classical BINAR(1) risk process	126
3.4	Basic properties	128
3.4.1	Counting processes of the by-claims	128
3.4.2	Net profit conditions	130
3.4.3	Covariances and correlations	131
3.5	Asymptotic behaviour of the BINAR(1) process $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$	133
3.6	Ruin probabilities	136
3.6.1	With light-tailed distributions	136
3.6.2	With the presence of heavy-tailed distributions	143
3.6.3	Comparison and sensitivity analysis	145
3.7	Scenarios simulations	146
3.7.1	Data sources and aggregation method	146
3.7.2	Estimation of part costs	147
3.7.3	Simulation of strategic claim scenarios	149
3.8	Conclusion and continuations	151
	Conclusion	153
	Bibliographie	155

Introduction

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Science Actuarielle et Financière de l'Université Claude Bernard Lyon 1. Elle est composée de trois chapitres précédés de cette introduction. Le premier chapitre correspond à un article co-écrit avec Stéphane Loisel et Naushad Mamode Khan, intitulé « An INAR(1) Risk Model with by-claims applied to the PFAS issue », et en cours de soumission. Le deuxième chapitre correspond à un article co-écrit avec Stéphane Loisel et Naushad Mamode Khan, intitulé « Some prevention studies in ruin theory and their application to the PFAS issue », et en cours de soumission. Le troisième chapitre correspond à un article co-écrit avec Renata Alcoforado et Stéphane Loisel, intitulé « A BINAR(1) Risk Model for Financial and Carbon Claims : Application to Circular Auto Parts », et en cours de soumission.

Le travail produit s'inscrit dans le cadre de la théorie de la ruine. Nous proposons l'étude de plusieurs types de modèles qui sont chacun des extensions du modèle originel de Cramér-Lundberg, et nous tâchons d'en faire le lien avec la problématique actuelle de pollution par des composés perfluorés (PFAS), entre autres en termes de prévention, ou avec la réduction des émissions de carbone issues de la gestion d'un sinistre automobile. Plus spécifiquement, les modèles déployés sont unidimensionnels ou bidimensionnels, et proposent pour la plupart deux types de sinistres : les sinistres principaux, ainsi que les sinistres secondaires ou « de rechute », qui sont issus des principaux, et surviennent parfois avec un temps de retard. Nous utilisons des séries temporelles à valeurs entières pour compter ces sinistres secondaires dans certains de nos modèles : des processus INAR(1) (en dimension 1), ou BINAR(1) (en dimension 2).

Le reste de l'introduction est organisé comme suit : nous commençons par définir un certain nombre de notions mathématiques liées à la théorie de la ruine, et qui sont utilisées pour caractériser et étudier les modèles définis dans nos travaux.

Ensuite, nous présentons les différentes formes de dépendance apparaissant dans nos modèles de risque, en en mentionnant aussi certaines issues de la littérature scientifique qui sont proches des nôtres, mais que nous n'utilisons pas dans cette thèse.

Après cela, nous présentons le modèle de risque principal du chapitre 1, qui est un modèle unidimensionnel avec des sinistres secondaires comptés par un processus INAR(1). Ce modèle sera repris sous une forme adaptée dans le chapitre 2 lorsque nous nous intéresserons à la prévention.

Dans la quatrième partie de cette introduction, nous donnons des détails importants pour comprendre les problèmes et les enjeux actuels que représente la pollution par les PFAS, ou l'empreinte carbone émanant de l'activité d'une assurance automobile. De plus, cette partie fait office de transition entre le modèle unidimensionnel présenté lors de la partie d'avant (se rapportant aux PFAS), et les modèles bidimensionnels présentés dans la partie d'après (en lien avec les émissions de carbone).

La partie qui suit introduit quelques notions concernant les modèles multivariés, notamment

les besoins auxquels ils peuvent répondre, tout en présentant les deux modèles bivariés analysés dans le chapitre 3.

Nous expliquons subséquemment ce qu'est la notion de prévention, et comment on peut la représenter à travers des modèles de risque en théorie de la ruine. Nous mentionnons notamment les trois modèles possédant une structure de prévention intervenant dans le chapitre 2.

Enfin, nous synthétisons les principaux résultats de chacun des chapitres pour faciliter la lecture de ce manuscrit.

Notations. Au cours de cette thèse, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On ne manipulera que des variables aléatoires à valeurs réelles. De plus, pour une variable Z donnée, on désigne par f_Z sa fonction de densité, F_Z sa fonction de répartition, et \overline{F}_Z sa fonction de survie. On définit également sa fonction génératrice des moments par $M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ})$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, qui est à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Avertissement : L'ensemble des références utilisées dans la cadre de cette thèse est compilée dans une bibliographie à la fin de ce manuscrit, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de bibliographie propre à chaque chapitre ou à l'introduction.

1 Modèle de risque en théorie de la ruine

1.1 Modèle continu en théorie de la ruine

1.1.1 Description du modèle classique

La théorie de la ruine a été développée au début du XX^{ème} siècle à travers les travaux de Filip Lundberg et Harald Cramér. Le modèle le plus ancien a été introduit par Lundberg en 1903 dans [Lundberg \(1903\)](#), repris ensuite par Cramér en 1930 dans [Cramér \(1930\)](#). On l'a appelé par la suite « processus (ou modèle) de Cramér-Lundberg », il est aussi désigné sous le nom de « processus de Poisson composé ».

Ce modèle originel représente l'évolution des réserves d'une compagnie d'assurance, grâce à un processus $(R(t))_{t \geq 0}$:

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

où $u \geq 0$ et $c > 0$ sont deux réels représentant respectivement la réserve initiale de la compagnie, et le taux de prime par unité de temps (supposé constant), issu des cotisations des clients assurés. $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$ (à valeurs dans \mathbb{N}) qui permet de compter le nombre de sinistres survenus à l'instant t . On a donc $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ pour tout $t \geq 0$, et on note parfois $N \sim \mathcal{P}o(\lambda)$. Enfin, pour $i \in \mathbb{N}^*$, X_i est une variable aléatoire positive représentant le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre. De plus, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (noté i.i.d. par la suite), de moyenne commune $\mu > 0$, et indépendante du processus $(N(t))_{t \geq 0}$.

On note $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ la somme agrégée des sinistres à l'instant t . De la sorte, $S(t) = 0$ si $N(t) = 0$. On pose aussi $Y(t) = ct - S(t)$.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i la date du $i^{\text{ème}}$ sinistre. Cela nous permet de définir, pour $i \geq 2$, les temps inter-sinistres $\theta_i = T_i - T_{i-1}$. Par convention, on pose $\theta_1 = T_1$.

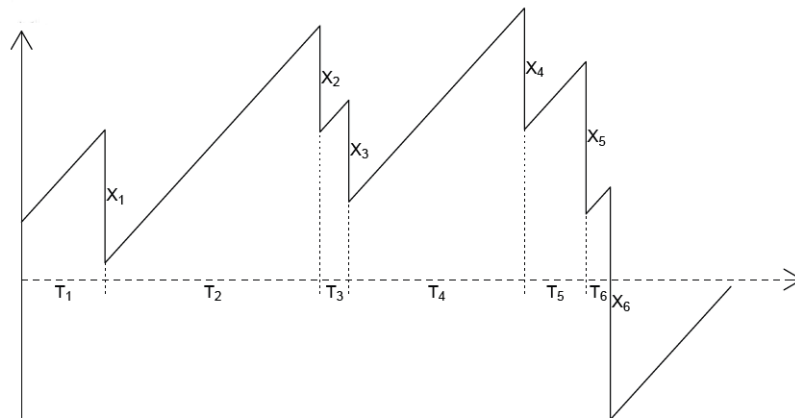


FIGURE 1 – Exemple de trajectoire d'un processus de Cramér-Lundberg

On peut proposer une première généralisation à ce modèle classique, qui est le modèle de Sparre-Andersen, parfois appelé « processus de renouvellement ». L'écriture demeure inchangée,

sauf que $N(t)$ n'est plus nécessairement un processus de Poisson, mais un processus de renouvellement stationnarisé, caractérisé par des temps inter-sinistres $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ qui sont i.i.d., toujours indépendants des X_i , mais de distribution quelconque.

De nombreux autres modèles probabilistes ont été proposés depuis en théorie de la ruine à partir de ces modèles d'origine, mais cherchant à être plus fidèle à la réalité du monde des assurances. Pour cela, des hypothèses supplémentaires peuvent être formulées, telles qu'introduire de la dépendance entre les données aléatoires, ou ajouter d'autres paramètres déterministes ou aléatoires. Il est possible aussi d'étudier des versions similaires en temps discret, c'est-à-dire, sous forme de processus indexés sur l'ensemble des entiers \mathbb{N} au lieu de \mathbb{R}_+ .

Les modèles étudiés au cours de nos travaux s'inspirent de ce modèle originel de Cramér-Lundberg, sont pour la plupart écrit en temps discret, et comportent certaines formes de dépendance.

Ceci étant dit, dans cette introduction, on énonce d'abord un certain nombre d'outils d'analyse et de propriétés associés à ce modèle de Cramér-Lundberg, car la compréhension de ces concepts et de ces résultats permet de mieux appréhender l'étude de modèles plus complexes tels que les nôtres.

1.1.2 Probabilité de ruine et mesures de risque

On considère qu'un processus est ruiné dès qu'il atteint une valeur négative. On peut observer ce phénomène sur un temps indéfiniment long, c'est-à-dire sur \mathbb{R}_+ tout entier, ou bien restreindre l'étude à un intervalle de temps fini.

Cela nous permet de définir la notion de probabilité de ruine :

Définition 1.1 (Probabilité de ruine).

La probabilité de ruine à l'instant $T > 0$ correspond à $\psi(u, T) = \mathbb{P} \left(\inf_{0 \leq t \leq T} R(t) < 0 \right)$.

La probabilité de ruine en temps infini est $\psi(u) = \mathbb{P} \left(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 \right)$.

On définit pareillement la probabilité de non-ruine en temps fini par $\varphi(u, T) = 1 - \psi(u, T)$, et même chose pour $\varphi(u)$.

On peut remarquer que l'application $T \mapsto \psi(u, T)$ est croissante, et converge vers $\psi(u)$ quand $T \rightarrow \infty$.

Bien sûr, un événement de « ruine » ne signifie pas la faillite immédiate de la compagnie d'assurances considérée, mais cela permet plutôt de décrire la probabilité qu'elle passe en-dessous de seuils réglementaires, ce qui en France pourrait se traduire par une mise sous tutelle par l'ACPR (l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution).

On définit ensuite le chargement de sécurité, auquel on associe la condition de profit net, qui permet de caractériser à long terme la rentabilité d'une compagnie.

Définition 1.2 (Chargement de sécurité). Concernant le modèle défini par l'équation 1, le chargement de sécurité s'écrit $\rho = c - \lambda\mu$.

Il existe d'autres manières de définir le chargement de sécurité dans la littérature actuarielle, mais elles reviennent au même.

Proposition 1.1 (Condition de profit net).

On dit que la condition de profit net est vérifiée si $\rho > 0$, L'activité est alors « rentable », et, presque sûrement (p.s.), $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$. Toutefois, la probabilité de non-ruine est non nulle, $\varphi(u) > 0$.

En revanche, si $\rho < 0$, alors p.s., $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = -\infty$. La ruine est presque sûre, $\psi(u) = 1$. Enfin, si $\rho = 0$, on a p.s. $\liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) = -\infty$, et $\limsup_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$, d'où $\psi(u) = 1$.

Par la suite, on ne considérera donc que des modèles où la condition de profit net est réalisée, sinon l'étude n'est pas intéressante.

On peut voir la probabilité de ruine et le chargement de sécurité comme des « mesures de risque ».

Il existe de nombreuses autres mesures de risque pour évaluer de manière plus fine le risque encouru par une compagnie d'assurances, mais parfois plus difficiles à étudier. Cependant, celles-ci ne seront pas employées lors de cette thèse.

En soulignant la dépendance en fonction du paramètre u , on peut citer :

- La date de la première ruine : $\tau(u) = \inf\{t > 0 / u + Y(t) < 0\}$, et la sévérité associée $u + Y(\tau(u))$.
- Le temps passé en-dessous de 0 entre la première ruine et le premier rétablissement, qui est $\tau'(u) - \tau(u)$, où $\tau'(u) = \inf\{t > \tau(u) / R(t) = 0\}$, ainsi que la sévérité agrégée de la première ruine jusqu'à rétablissement : $J(u) = \int_{\tau(u)}^{\tau'(u)} |R(t)| dt$. On pourrait en soi définir ces variables pour toute occurrence de ruine, pas seulement pour la première.
- Le temps total passé en-dessous de 0 : $T(u) = \int_0^\infty 1_{\{R(t) < 0\}}(t) dt$.

On peut aussi regarder le nombre total d'événements de ruine sur une période donnée, ainsi que la sévérité maximale de ruine, ou du moins la sévérité de chaque occurrence de ruine. On peut également s'intéresser aux notions de « Value-at-risk », ou de « Tail Value-at-risk ».

D'autre part, H. Gerber et E. Shiu ont défini en 1998 dans [Gerber and Shiu \(1998\)](#) une mesure de risque qui a été largement étudiée depuis dans la littérature, mais pas utilisée au cours de cette thèse : il s'agit de la fonction de pénalité de Gerber-Shiu, définie comme suit :

$$m(u) = \mathbb{E} \left(e^{-\delta\tau} w(R(\tau^-), |R(\tau)|) 1_{\{\tau < \infty\}} \mid R(0) = u \right), \quad (2)$$

où τ est l'instant de première ruine en fonction de u , comme défini plus haut, $\delta > 0$ est un facteur d'actualisation, et $(x, y) \mapsto w(x, y)$ est une fonction positive définie sur l'ensemble $[0, \infty]^2$ qui mesure une perte économique (telle qu'une sanction économique de l'ACPR). w est liée à l'événement de ruine à travers deux quantités : la valeur du processus juste avant la ruine, et le déficit au moment de la ruine. Pour $\delta = 0$, et $w(x, y) = 1$, on retrouve simplement $m(u) = \psi(u)$.

1.1.3 Exemples de probabilités de ruine

On peut présenter quelques résultats de base en termes de probabilité de ruine associés au modèle de Cramér-Lundberg. Tout d'abord, on a

$$\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}. \quad (3)$$

On peut remarquer que $\varphi(0)$ ne dépend de X qu'à travers sa moyenne μ .

Ensuite, la formule de Pollaczek-Khinchine exprime la probabilité de non-ruine pour une réserve initiale $u \geq 0$ quelconque :

$$\varphi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_{e,X}^{*n}(u). \quad (4)$$

où $F_{e,X}$ est la fonction de répartition d'équilibre associée à X , s'exprimant par

$$F_{e,X}(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u \overline{F_X}(y) dy.$$

De plus, la notation F^{*n} désigne la $n^{\text{ième}}$ convolution d'une fonction par elle-même.

On en déduit notamment la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi exponentielle d'espérance $\mu > 0$ (c'est-à-dire avec $X_1 \sim \text{Exp}(1/\mu)$, et $\overline{F_X}(x) = e^{-x/\mu}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$) :

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\right)u}. \quad (5)$$

Il n'est pas toujours facile de déduire des expressions exactes pour les probabilités de ruine. À la place, on peut chercher à les exprimer sous forme d'équivalents.

C'est le cas pour la famille des distributions sous-exponentielles. On utilisera grandement cette classe au cours de la thèse, et plus particulièrement la loi de Pareto.

Définition 1.3 (Distribution sous-exponentielle). Une variable Y à valeurs positives est dite sous-exponentielle si sa distribution vérifie, quand $x \rightarrow \infty$, $\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\overline{F}(x)$.

Comme conséquence immédiate, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{\varepsilon x} \overline{F}(x) \right] = +\infty$, ce qui justifie l'appellation.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{F^{*n}}(x) \sim n\overline{F}(x)$; et si on considère $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de même loi que Y , en notant $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, et $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} (Y_i)$, alors $\overline{F_{S_n}}(x) \sim \overline{F_{M_n}}(x)$ quand $x \rightarrow \infty$, soit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} = 1$.

Une sous-classe de cette famille est la classe $\mathcal{R}_{-\alpha}$ des distributions à variations régulières, pour un réel $\alpha > 0$.

Définition 1.4 (Variations régulières). Une distribution F est dite à variations régulières si sa queue vérifie $\overline{F}(x) = \frac{\overline{L}(x)}{x^{-\alpha}}$ quand $x \rightarrow \infty$, où L vérifie $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{L}(tx)}{\overline{L}(x)} = 1$ pour tout $t > 0$. (L est « à variations lentes », cf la définition 1.10 ci-dessous).

Cela implique que pour $t > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(x)} = t^{-\alpha}$. On note $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

Parmi ces distributions à variations régulières, on retrouve la loi de Pareto. Il existe plusieurs manières de la définir, mais elles reviennent presque au même, dans le sens où l'équivalent de $\overline{F_X}$ quand $x \rightarrow \infty$ reste le même. Voilà la définition utilisée dans nos travaux :

Définition 1.5 (Loi de Pareto). $Y \sim \text{Par}(\alpha, \theta)$ avec $\alpha, \theta > 0$ si

$$\overline{F_X}(x) = \left(\frac{\theta}{\theta + x} \right)^\alpha \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+.$$

L'équivalent quand $x \rightarrow \infty$ est donc $\overline{F_Y}(x) \sim \theta^\alpha x^{-\alpha}$, et la fonction de densité associée est $f_Y(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{(\theta + x)^{\alpha+1}}$. Son espérance est finie et vaut $\mu_Y = \frac{\theta}{\alpha - 1}$ si et seulement si $\alpha > 1$. Sinon, $\mu_Y = +\infty$.

Si les montants de sinistres X sont tels que leur loi d'équilibre X_e (définie par la distribution F_e , introduite ci-dessus) est une distribution sous-exponentielle, alors, grâce à la formule de Pollaczec-Khinchine, on trouve l'équivalent suivant quand $u \rightarrow \infty$:

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu} [1 - F_e(u)] = \frac{\lambda}{c - \lambda\mu} \int_u^\infty \overline{F_Y}(x) dx. \quad (6)$$

Pour une grande majorité des cas, on a l'équivalence entre le fait que X_e soit de loi sous-exponentielle, et que X soit de loi sous-exponentielle.

C'est vrai en particulier pour une loi de Pareto. On en déduit, si $X \sim \text{Par}(\alpha, \theta)$, avec $\theta > 0$ et $\alpha > 1$, que

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda\theta^\alpha}{c(\alpha-1) - \lambda\theta} u^{-\alpha+1}. \quad (7)$$

1.1.4 Différentes formes d'approfondissement de ce modèle de base

La simplicité d'écriture du modèle de Cramér-Lundberg lui permet d'être facilement modifié afin d'étudier l'influence et les effets de différents paramètres assurantiels. Cependant, les deux pistes (non exhaustives) mentionnées ci-après ne seront pas étudiées pas au cours de cette thèse.

Il est possible de prendre en compte les investissements dans un actif risqué. Cet actif peut se représenter par exemple par un mouvement brownien. Une autre manière de décrire $R(t)$ dans ce cas est d'ajouter un taux d'intérêt instantané déterministe $\delta > 0$. Le processus vérifie alors l'équation différentielle stochastique $dR(t) = dY(t)t + \delta R(t)dt$. Des résultats classiques en la matière se trouvent par exemple dans Segerdahl (1942) ou Sundt and Teugels (1995).

On peut également citer les modèles de dividendes. Les sociétés d'assurance reversent une partie de leurs bénéfices, que ce soit aux salariés, aux actionnaires (cas général), et parfois en plus aux adhérents (cas d'une mutuelle). Un tel versement ralentit cependant le rythme de constitution des réserves s'il est mal géré, affaiblissant ainsi la pérennité de l'entreprise. De nombreux chercheurs ont prolongé les travaux initiés par De Finetti De Finetti (1957), en étudiant diverses stratégies de versement de dividende. Par exemple, l'article Asmussen and Taksar (1997) étudie un modèle avec une « barrière de dividende constante ». Lors d'une telle étude, on cherche à étudier le montant cumulé des dividendes avant ruine, et notamment la probabilité qu'aucune dividende ne soit versée avant la ruine.

On peut aussi apporter de la complexité au modèle de Cramér-Lundberg en étudiant un modèle multivarié (ou « multidimensionnel ») permettant de décrire les différentes branches d'activité d'une compagnie d'assurances, en faisant intervenir un processus stochastique à valeurs dans \mathbb{R}^d , où $d \in \mathbb{N}^*$ est un entier quelconque. Cela sera détaillé et présenté davantage en Section 5 de cette introduction.

En outre, dans la pratique, les montants de sinistres ne sont pas des variables indépendantes. Typiquement, si plusieurs inondations surviennent à un endroit avec des intervalles courts, les dégâts en seront plus grands. Nous verrons donc en Section 2 de cette introduction certaines formes de dépendance qu'il est possible de considérer.

Dans la littérature, l'ouvrage Asmussen and Albrecher (2010) offre de nombreux résultats et de nombreux cas d'étude en théorie de la ruine et a été grandement utilisé lors de cette thèse. On peut également se référer aux ouvrages suivants : Gerber (1979) ; Rolski et al. (2009) ; Grandell (2012).

Parmi les ouvrages écrits en langue française, on peut citer notamment Denuit et al. (2004), qui introduit dans un cadre plus général des notions mathématiques liées à l'assurance non-vie.

1.2 Modèles en temps discret

L'intérêt des modèles à temps continu par rapport aux modèles à temps discret est que les calculs de probabilité de ruine sont plus faciles à effectuer.

Cependant, on peut estimer que la réalité pratique correspond plutôt à une temporalité discrète, et qu'un processus de risque consistant en une suite discrète de variables aléatoires plutôt qu'un processus stochastique indexé sur \mathbb{R}_+ représenterait mieux les instants où une

compagnie d'assurances observe sa richesse et contrôle sa potentielle situation de ruine et ses risques encourus. En somme, les bilans financiers se font plutôt de manière périodique (annuelle, mensuelle...), et une occurrence théorique de ruine qui survient entre deux bilans, mais qui est rectifiée dans le même intervalle passera inaperçue. Ces choses-là sont attestées par exemple chez [Li et al. \(2009\)](#), ou [Picard et al. \(2003\)](#). En outre, dans ce sens-là, l'article [Albrecher et al. \(2011a\)](#) propose un modèle écrit en temps continu, mais où la ruine potentielle est évaluée seulement en des instants discrets aléatoires.

La manière qui serait la plus générale pour définir un modèle en temps discret serait sous la forme d'une marche aléatoire avec des sauts Y_k vus comme les gains absolus en période $k \in \mathbb{N}^*$. Au début du chapitre II de [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#), on définit une telle suite de variables $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$: pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = R_0 + \sum_{k=1}^n Y_k$, où R_0 , ainsi que les Y_k , pour $k \in \mathbb{N}^*$, sont des variables aléatoires réelles. Il faudrait ensuite préciser les relations entre les Y_k , notamment en termes d'hypothèses d'indépendance. De surcroît, par analogie avec le modèle de Cramér-Lundberg, on aurait tendance à définir R_0 comme étant déterministe, avec $R_0(\omega) = u$, avec $u \in \mathbb{R}_+$ fixé, pour tout $\omega \in \Omega$.

On peut en tirer une écriture plus courante d'un modèle en temps discret, où les pertes sont agrégées :

$$R_n = u + c \cdot n - \sum_{k=1}^n Z_k . \quad (8)$$

$u \geq 0$ est la réserve initiale, $c > 0$ correspond à un taux de prime constant, et Z_k représente le montant agrégé des sinistres survenus en période $k \in \mathbb{N}^*$. Les $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables i.i.d. Vis-à-vis du modèle précédent, cela revient à effectuer le découplément $Y_k = c - X_k$.

Ensuite, on peut en déduire une « version discrète » du processus de Cramér-Lundberg. C'est un cas particulier du modèle précédent, où on tient compte du nombre de sinistres survenus à chaque période :

$$R_n = u + c \cdot n - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} . \quad (9)$$

On a remplacé Z_k par une somme agrégée de sinistres. $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ sont deux suites de variables indépendantes entre elles et chacune i.i.d., représentant respectivement le nombre de sinistres par périodes et les montants des sinistres. Plus précisément, $X_{1,1}$ est une variable positive de moyenne $\mu > 0$, et $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

On remarque notamment qu'à l'instant $s \in \mathbb{N}^*$, le nombre total de sinistres survenus a pour loi $\sum_{k=1}^s N_k \sim \mathcal{P}(\lambda s)$, ce qui est de même loi que $N(s)$ pour un modèle de Cramér-Lundberg. Si de plus les montants de sinistres ont la même loi, alors, à l'instant s , les deux processus (en temps discret et continu) ont aussi la même loi : $R_s \sim R(s)$.

Cette transcription semble donc pertinente, et elle sera notamment utilisée avec une structure de prévention dans le chapitre 2.

Là aussi, nous pouvons évaluer la ruine en temps fini comme en temps infini :

Définition 1.6 (Probabilités de ruine en temps discret). On note, en fonction de la réserve initiale $u > 0$, le temps d'arrêt suivant : $\tau(u) = \inf\{n \in \mathbb{N} / R_n < 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. La probabilité de ruine en temps infini associée est $\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty)$, et celle en temps fini, pour $T \in \mathbb{N}^*$, est : $\psi_T(u) = \mathbb{P}(\tau(u) \leq T)$.

La suite $(\psi_T(u))_{T \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, et converge vers $\psi(u)$.

Remarque 1.1. Une manière assez immédiate de récrire $\psi_T(u)$, avec le formalisme de l'équation 8 est : $\psi_T(u) = \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq T} \left(\sum_{k=1}^j (Z_k - c) \right) \geq u \right)$.

Un type de modèle en temps discret qui a été amplement étudié dans la littérature actuarielle est le modèle binomial composé. Nous ne l'étudierons pas dans cette thèse, mais nous l'introduisons ici pour son importance historique.

Ce modèle a été défini à l'origine dans Gerber (1988), et différentes extensions et variantes ont été analysées entre autres par Shiu (1989), Willmot (1993), Dickson (1994), De Vylder and Marceau (1996), Cheng et al. (2000), Yuen and Guo (2001).

Le formalisme est entièrement discret, c'est-à-dire qu'en plus d'avoir une temporalité discrète, les données monétaires sont toutes des nombres entiers.

Son écriture d'origine consisterait à reprendre l'équation 8, en supposant que $c = 1$, que $u \in \mathbb{N}$, que les montants $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, sont à valeurs dans \mathbb{N} , mais à la place, les pertes totales à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$ sont une somme $\sum_{k=1}^{M_n} Z_k$. On considère qu'à chaque période, un sinistre survient avec une probabilité $p \in \mathbb{N}$, et aucun sinistre n'a lieu avec une probabilité $1 - p$. Ainsi, à l'instant n , la variable M_n qui compte les sinistres suit une loi binomiale, $M_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, d'où l'appellation du modèle. Enfin, la condition de profit net s'écrit ici $p\mu < 1$, où μ est la moyenne des sinistres.

Dans les études associées, quand les probabilités de ruine ne s'expriment pas de manière exacte, elles peuvent très souvent se formuler de manière récurrente. Shiu (1989) propose notamment une généralisation de la formule de Pollaczek-Khinchine pour ce modèle binomial composé.

On peut toutefois noter qu'une version plus générale de cette formule en temps discret a été plus récemment proposée dans l'article Santana and Rincón (2020), qui est valable pour tout modèle discret dont les données monétaires sont des nombres entiers.

Cependant, on ne peut pas l'appliquer dans le cadre de nos travaux, car dans les modèles en temps discret que nous proposons, les données monétaires en jeu sont des paramètres ou variables aléatoires à valeurs réelles.

1.3 Processus de comptage

À cette idée de modèle en temps discret, on associe volontiers la notion de processus de comptage. Ceci dit, cette notion est employée de manière large en théorie de la ruine (donc également en temps continu), afin de déterminer le nombre de sinistres survenus au cours d'une période donnée.

Définition 1.7 (Processus de comptage). Cela correspond à un processus stochastique $N : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ croissant et càdlàg (continu à droite et possédant une limite à gauche) selon la variable t , donc $N(\omega, t^+) = N(\omega, t)$ pour tout $\omega \in \Omega$, mais $N(\omega, t^-) \leq N(\omega, t)$. En général, pour $\omega \in \Omega$, on a $N(\omega, t) - N(\omega, t-) \in \{0, 1\}$ pour $t \geq 0$, et on fixe l'origine à 0, soit $N_0(\omega) = 0$. On les appelle aussi *processus de sauts* parfois, et les sauts correspondent aux instants t où le processus est strictement croissant, c'est-à-dire $N(\omega, t) > N(\omega, t-)$. Sinon, le processus est localement constant.

Dans les modèles en temps discret, on pourrait plutôt parler de « variables de comptage » en ce qui concerne les suites de variables aléatoires qui dénombrent les sinistres. Cependant, on confondra volontiers ces deux terminologies. En effet, on pourrait étendre la notion de processus de comptage en temps discret, et alors les instants de sauts ne peuvent être que des entiers naturels.

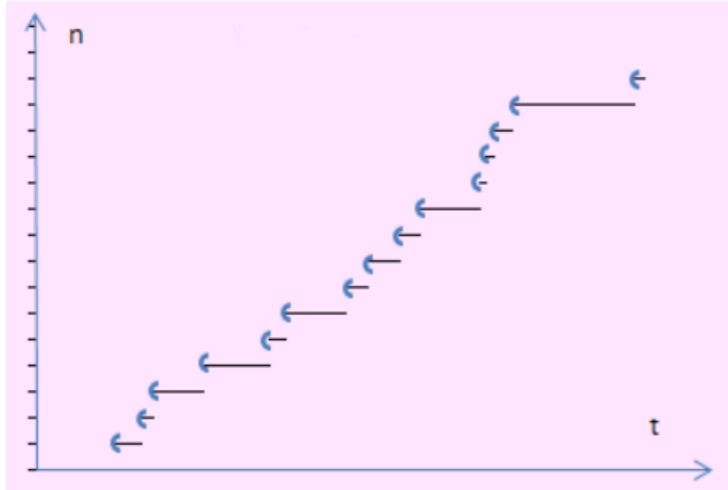


FIGURE 2 – Exemple de trajectoire d'un processus de comptage

On peut en déduire la notion de somme composée : cela correspond à une somme aléatoire $\sum_{i=1}^N X_i$, où N est un processus de comptage donné, et les X_i sont des variables aléatoires (très souvent des montants des sinistres en théorie de la ruine). Ce type de somme apparaît dans les écritures des modèles en équation 1 et 9 par exemple, mais aussi à travers tous les chapitres de cette thèse et les différents modèles associés. Dans ce deuxième exemple, comme dans une partie des modèles en temps discret de cette thèse, ces sommes servent à représenter des montants agrégés de sinistres sur une période.

Récemment, [Lefèvre and Picard \(2021\)](#) ont proposé, à partir « d'opérateurs Delta » une méthode récursive pour déterminer la loi de sommes composées utilisant des processus de comptage qui vérifient une certaine propriété de convolution en lien avec des séries entières.

Nous avons déjà évoqués certains processus de comptage précédemment. Nous allons les rappeler, et en citer d'autres à titre d'exemples, mais tous ne seront pas utilisés dans le cadre de cette thèse.

Le processus de Poisson homogène $N(t)$ utilisé dans le modèle classique de Cramér-Lundberg en temps continu (équation 1) en est un.

Une manière de généraliser cela est la notion de processus de Poisson non-homogène : désormais, le paramètre d'intensité dépend du temps, on note ses valeurs prises sur \mathbb{R}_+ par $(\lambda_t)_{t \geq 0}$. Il y a plusieurs possibilités : on peut considérer que $\lambda(\cdot)$ est une fonction déterministe, comme dans [Lu and Garrido \(2005\)](#), ou bien que c'est un processus stochastique, comme dans [Albrecher and Asmussen \(2006\)](#), ou comme pour le cas pour la famille des processus de Cox.

La version discrète du modèle de Cramér-Lundberg (équation 9) utilise une suite de variables i.i.d. de loi de Poisson. On pourrait également utiliser des variables de comptage qui soient des mélanges de lois de Poisson.

Dans la pratique, la loi de Poisson n'est pas la distribution optimale pour modéliser une grande étendue de risque concrets, mais malgré ces faiblesses, on l'utilise beaucoup en actuariat pour ses « bonnes » propriétés mathématiques qui facilitent les calculs.

On peut ensuite évoquer les exemples de la loi binomiale et de la loi négative binomiale, utilisées pour des modèles en temps discret. Avec la loi de Poisson, ce sont les trois seules distributions à valeurs dans \mathbb{N} qui vérifient la formule de Panjer, c'est-à-dire la relation

$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette relation permet de faciliter le calcul de sommes composées associées, si les sinistres sont des variables à valeurs dans \mathbb{N} aussi.

On peut aussi citer la loi de Polya-Aeppli (utilisable plutôt pour un modèle en temps discret), qui induit un processus de Polya-Aeppli (correspondant à un modèle en temps continu). Cela est introduit dans Minkova (2004) par exemple. On peut voir cette distribution comme une loi de Poisson généralisée, avec un paramètre de « zéro-inflation ».

Certains processus de comptage comportent une forme de dépendance. Parmi ceux-là, on peut citer les séries temporelles, et les processus de Hawkes ou de Cox. Les processus de Hawkes ou de Cox se rapportent en général à un modèle exprimé en temps continu, tandis que les séries temporelles interviennent plutôt pour des modèles à temps discrets. Nous en donnons plus de détails en Section 2.

Cependant, seront utilisés dans nos travaux seulement certains types de séries temporelles, des processus de Poisson, ou des suites discrètes de variables de Poisson i.i.d.

1.4 Quelques éléments d'analyse asymptotique

1.4.1 Différentes familles de distributions

Dans nos travaux, toutes les variables représentant des pertes sont à valeurs positives, et c'est parfois sous-entendu dans les définitions ci-dessous. Mais en soi, seul le comportement asymptotique de la queue de distribution importe, et cette classification pourrait se généraliser à des distributions définies sur tout domaine incluant un voisinage de l'infini $[M, +\infty[$, où $M \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque.

On peut commencer par distinguer les distributions définies sur \mathbb{R}_+ en deux catégories, au regard de leur comportement asymptotique : les distributions à queue fine, et les distributions à queue lourde.

Définition 1.8 (Queue fine). La distribution d'une variable aléatoire X est dite à queue fine s'il existe $s > 0$ tel que $M_X(s)$ est finie, c'est-à-dire $M_X(s) < \infty$.

Une conséquence de cela est que la queue de sa distribution \overline{F}_X présente une décroissance de nature exponentielle. En effet, on peut vérifier assez simplement que pour un tel réel s , et tout $x \geq 0$, cela implique que $\overline{F}_X(x) \leq \frac{M_X(s)}{e^{sx}}$.

Comme exemple de telles distributions, on peut bien sûr citer la loi exponentielle, mais aussi la loi Gamma, ou bien les lois à supports bornés.

Si les montants de sinistres suivent une distribution à queue fine, on peut notamment rechercher l'existence d'un « coefficient d'ajustement » (voir plus loin), qui assure à la probabilité de ruine une décroissance exponentielle selon u .

Par opposition, on définit la notion de queue lourde :

Définition 1.9 (Queue lourde). Une distribution est à queue lourde si pour tout $s > 0$, $M_X(s) = +\infty$.

Comme exemples de distributions à queue lourde, nous avons déjà rencontré ci-dessus la loi de Pareto (Définition 2.2.4). On peut également citer la loi log-normale, ou la loi de Burr.

Une des grandes sous-familles des distributions à queue lourde est la classe des distributions sous-exponentielles, (déjà mentionnée en Définition 1.3). Pour rappel, une des conséquences est que toute distribution de ce type vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} [e^{\varepsilon x} \overline{F}(x)] = +\infty$.

Il est beaucoup plus aisé de travailler avec des distributions sous-exponentielles, qu'avec des distributions étant seulement à queue lourde, lorsqu'on étudie un modèle s'inspirant de celui de Cramér-Lundberg. En effet, la définition de queue lourde est moins affinée, ainsi les résultats dans la littérature scientifique mentionnent bien plus de calculs de probabilité de ruine où les pertes suivent une distribution sous-exponentielle. Parfois, on est encore plus spécifique en proposant des résultats pour des sous-classes des distributions sous-exponentielles.

Une des sous-familles les plus courantes des distributions sous-exponentielles est la classe des distributions à variations régulières $\mathcal{R}_{-\alpha}$, déjà présentée également, en Définition 1.4, pour $0 < \alpha < \infty$.

On peut ajouter deux cas extrêmes à cette définition (pas ou peu employés dans cette thèse) : si $\alpha = 0$, ou $\alpha = \infty$.

Définition 1.10 (Variations lentes). Une distribution L est dite à variations lentes si elle vérifie, pour tout $t > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{L}(tx)}{\bar{L}(x)} = 1$. On note alors $L \in \mathcal{C}$, et cela correspondrait au cas où $\alpha = 0$ dans la définition mentionnée ci-dessus.

Définition 1.11 (Variations rapides). Si $\alpha = \infty$, on parle de distribution à variations rapides, cela se traduit par la relation : pour $y > 1$, $\bar{F}(xy) = o(\bar{F}(x))$ quand $x \rightarrow \infty$.

Les ouvrages [Bingham et al. \(1989\)](#) et [Embrechts et al. \(2013\)](#) fournissent de nombreux résultats en lien avec les distributions à variations régulières, notamment en ce qui concerne la théorie de Karamata.

Nous donnons pour finir deux autres définitions de familles qui sont parfois utilisées dans la littérature scientifique.

D'abord, la classe ERV permet d'étendre la notion de fonctions à variations régulières.

Définition 1.12 (Classe ERV). Soit F une distribution, et deux réels $0 < \alpha \leq \beta$. $F \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$, si pour tout $y \geq 1$,

$$y^{-\beta} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} \leq y^{-\alpha}.$$

Le cas $\alpha = \beta$ correspond à la classe $\mathcal{R}_{-\alpha}$.

D'ailleurs, l'acronyme ERV signifie en anglais « extended regular variations ».

Enfin, la famille des distributions à queue longue :

Définition 1.13 (Queue longue). Une distribution F est dite à queue longue si sa queue vérifie, pour tout $y > 0$, $\bar{F}(x + y) \sim \bar{F}(x)$. On peut alors noter $F \in \mathcal{L}$.

Comme conséquence immédiate, la classe des distributions sous-exponentielles est incluse dans la classe des distributions à queue longue, qui est elle-même incluse dans la classe des distributions à queue lourde.

Les distributions à queues lourdes peuvent notamment servir à modéliser ce qu'on appelle en actuariat des « événements extrêmes » : cela regroupe par exemple des catastrophes naturelles telles que des tempêtes, des inondations, ou des tremblements de terre, ou bien des attaques terroristes. Le changement climatique induit notamment une plus forte probabilité d'occurrence de catastrophes naturelles pouvant générer de gros dégâts.

1.4.2 Résultats asymptotiques associés

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats asymptotiques associés aux définitions précédentes.

Supposons d'abord que X est à queue lourde. Concernant le modèle de Cramér-Lundberg classique, un résultat asymptotique déjà mentionné précédemment (en équation 6) est l'équivalent de $\psi(u)$ quand $u \rightarrow \infty$ quand la loi d'équilibre X_e est sous-exponentielle. On en a déduit $\psi(u)$ quand plus précisément X suit une loi de Pareto (équation 7).

Il est possible d'étendre ces deux résultats pour la version discrète du modèle de Cramér-Lundberg (définie en équation 9), à l'aide de comparaisons stochastiques appropriées.

Supposons désormais que X est à queue fine. Pour un modèle de Cramér-Lundberg, on cherche alors à résoudre l'équation de Lundberg associée : $\lambda + cs = \lambda M_X(s)$.

Si elle existe, la solution de cette équation est unique, et on l'appelle « coefficient d'ajustement » (ou parfois « exposant de Lundberg »), noté en général κ . De plus, on a l'équivalent :

$$\psi(u) \sim C.e^{-\kappa u}, \quad C > 0 \quad \text{quand } u \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Plus précisément, l'inégalité dite de Lundberg induit que $C \leq 1$, soit $\psi(u) \leq e^{-\kappa u}$.

D'un point de vue concret, cela signifie que la probabilité de ruine est exponentiellement petite quand la réserve initiale u est suffisamment grande, et le coefficient κ contrôle la vitesse de cette décroissance exponentielle.

À titre d'exemple, l'équation 5 ci-dessus nous fournit l'expression exacte de $\psi(u)$ quand les montants de sinistres sont de loi exponentielle. Le coefficient d'ajustement vaut alors $\kappa = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}$, et $C = \frac{\lambda\mu}{c}$. On a bien $C \leq 1$ grâce à la condition de profit net.

En temps discret, on obtiendrait le même type de résultat. Pour le modèle de l'équation 8, l'équation de Lundberg est alors $e^{sc} = M_X(s)$. L'équivalent est le même quand le coefficient d'ajustement existe, et l'inégalité de Lundberg est toujours valable.

Toujours en temps discret, on peut étendre ce type de résultat quand les pertes ne sont pas i.i.d., grâce à la théorie des grandes déviations de Glynn et Whitt [Glynn and Whitt \(1994a\)](#), approfondie ensuite dans le cadre plus précis de la théorie de la ruine (voir par exemple [Nyrhinen \(1998\)](#), ou [Müller and Pflug \(2001\)](#)).

On peut là aussi parler d'équation de Lundberg, et la résolution de celle-ci aboutit à une relation asymptotique similaire, mais tout de même moins fine. Notamment, il n'est pas possible de généraliser l'inégalité de Lundberg. Si au moins une solution positive à l'équation de Lundberg existe, elle n'est pas forcément unique, mais alors le coefficient d'ajustement est alors la plus petite solution positive.

Contrairement à l'équation 10, ici l'équivalent est seulement de nature logarithmique, c'est-à-dire $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(\psi(u))}{u} = -\kappa$. En le formulant de manière abusive, cette écriture est équivalente à « $\psi(u) = e^{-\kappa u} e^{o(u)}$ ».

On constate que la plupart des résultats mentionnés dans cette section sont sous forme d'équivalents quand $u \rightarrow \infty$ (comme en équations 6, 7 ou 10). En effet, même pour le modèle original de Cramér-Lundberg, il est souvent difficile d'obtenir des expressions exactes de probabilités de ruine.

Pour obtenir de tels résultats asymptotiques, on effectue parfois des comparaisons ou des encadrements entre des variables ou des sommes aléatoires à l'aide d'ordres appropriés. Dans

les trois chapitres de cette thèse, le fait de manipuler des variables de pertes qui ne soient ni indépendantes, ni identiquement distribuées nous ont obligé à de tels raisonnements.

Il existe de nombreux ordres stochastiques mais au cours de cette thèse, nous avons utilisé uniquement le plus connu et le plus intuitif de ceux-ci : l'ordre stochastique « classique », parfois appelé « premier ordre ».

Parmi les autres ordres couramment utilisés en mathématiques actuarielles, on peut citer l'ordre convexe, l'ordre des taux de hasard (« hasard rate order »), ou l'ordre du rapport de vraisemblance.

L'ouvrage de [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#), mais aussi celui de [Szekli \(2012\)](#), proposent de nombreux résultats en termes d'ordres stochastiques.

2 Formes de dépendance possibles

Dans les modèles classiques de Cramér-Lundberg ou de Sparre-Andersen, on fait des hypothèses d'indépendance entre les variables aléatoires, concernant aussi bien l'indépendance entre la suite des montants de sinistres et la suite des temps de survenance des sinistres, que l'indépendance mutuelle entre les montants d'une part, et les temps inter-sinistres d'autre part.

Si ces hypothèses permettent de simplifier les calculs théoriques, dans la pratique, il n'est pas conforme à la réalité de supposer que toutes ces données sont indépendantes.

Dans cette partie, nous allons donc évoquer différentes manières d'apporter de la complexité aux modèles d'origine de la théorie de la ruine. On citera, de manière non exhaustive, des formes de dépendance déjà étudiées ou envisagées dans la littérature scientifique. Ces hypothèses d'indépendance doivent permettre de mieux appréhender le dynamisme de l'environnement concret dans lequel évolue une compagnie.

2.1 Dépendance entre les montants de sinistres

Une des premières formes de dépendance qui peut nous venir à l'esprit est celle entre les montants des sinistres.

Elle peut être représentée notamment à l'aide d'une copule liant les distributions de chaque montant de sinistre. Par définition, une copule est une fonction de répartition multivariée définie sur le cube unité $[0, 1]^d$ en dimension $d \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Ceci est exploré par exemple dans l'article [Albrecher et al. \(2011b\)](#), où, à partir d'un modèle de Poisson composé, sous certaines hypothèses, les montants de sinistres se retrouvent liés par une copule archimédienne. Pour donner plus de précisions : on considère une variable Θ à valeurs dans \mathbb{R}_+ , et conditionnellement au fait que $\Theta = \theta$, les montants de sinistres sont indépendants et suivent une loi $\text{Exp}(\theta)$. On peut en déduire un résultat explicite pour $\psi(u)$ dans certains cas particuliers de la distribution suivie par Θ .

Cet article mentionne ou explore d'autres pistes que la dépendance conjointe entre les montants de sinistres : par exemple, une dépendance conjointe entre les temps inter-sinistres, ou bien, sans effectuer de calculs pour cela, la possibilité d'avoir les deux. Ces deux dépendances pourraient avoir lieu indépendamment à travers deux variables Θ et Λ indépendantes, ou bien on peut considérer que les temps d'arrivée sont liés aux montants via la variable Θ : conditionnellement à $\Theta = \theta$, la fréquence d'arrivée des sinistres est $\lambda(\theta)$ (et la fonction $\lambda(\cdot)$ resterait à préciser). Ainsi, dans le premier cas, la corrélation entre les montants et la corrélation temporelle sont disjointes, tandis que dans le deuxième, ces deux formes de corrélation sont liées.

Comme autre exemple, on peut citer [Lefèvre and Loisel \(2009\)](#), où les auteurs étudient la potentialité d'une corrélation entre les montants de sinistres sous une forme générale. Les auteurs

font intervenir ici les polynômes d'Appell pour déterminer la probabilité de non-ruine.

2.2 Dépendance entre temps d'arrivée et montants de sinistres

Des relations de dépendance peuvent aussi être proposées pour lier les montants des sinistres avec les temps d'arrivée des sinistres (ou les temps inter-sinistres, mais cela revient au même).

On peut distinguer différents schémas : le temps peut induire des conséquences sur les montants de sinistres, ou bien le montant précédent peut avoir des effets sur le temps d'attente avant le prochain sinistre. Quand cela n'est pas précisé, les études citées s'inspirent du modèle de Poisson composé.

On peut tout aussi bien avoir une dépendance conjointe, où l'influence exercée entre temps et montants serait jugée équivalente. C'est le cas de [Ambagaspitiya \(2009\)](#), où les montants et les temps inter-sinistres sont liés par une distribution Gamma bivariée dans le cadre d'un modèle de Sparre-Andersen.

2.2.1 Le temps influe sur le montant

Nous allons ici présenter différentes manières d'aborder la question de l'influence des temps inter-sinistres sur les montants dans la littérature en théorie de la ruine.

L'article [Biard et al. \(2011\)](#) explore plusieurs possibilités en la matière, en étudiant précisément les catastrophes naturelles que sont les séismes et les inondations. Ces événements potentiellement dévastateurs sont représentés par des montants de sinistres dont la distribution est à queue lourde. Dans le cas des séismes, on s'attend à un événement particulièrement néfaste dès lors qu'un séisme de forte intensité n'a pas été observé depuis un certain temps. En termes de modélisation, les auteurs supposent donc qu'à la suite de plusieurs temps inter-sinistres suffisamment longs, un séisme sera considéré plus dangereux que les autres. En revanche, concernant les inondations, lorsque plusieurs sinistres successifs interviennent dans un laps de temps réduit, l'eau s'accumule dans les sols, et le nombre d'habitations susceptibles d'être touchées augmente. Ainsi, une inondation succédant à un ou plusieurs temps inter-sinistres courts présente un risque accru de causer des dégâts importants.

Dans [Meng et al. \(2008\)](#), le temps précédant un sinistre influence la distribution de son montant : le temps inter-sinistre T_i décide de la distribution du futur sinistre de manière binaire, selon s'il est plus grand qu'un certain seuil M ou non. La probabilité de ruine en temps infini est calculée avec des montants de sinistres exponentiels.

En la matière, on peut aussi citer [Boudreault et al. \(2006\)](#), qui étudie une fonction de Gerber-Shiu dans un tel contexte de dépendance, ou bien [Albrecher and Teugels \(2006\)](#), où le temps précédant un sinistre est lié au montant par une copule.

2.2.2 Les montants influent sur les temps inter-sinistres

Il existe différentes manières de modéliser cette potentielle influence des montants de sinistres sur les temps inter-sinistres.

Par exemple, dans [Albrecher and Boxma \(2004\)](#), les montants agissent de manière binaire : les temps inter-sinistres suivent une loi exponentielle quoi qu'il en soit, mais l'espérance vaut λ_1 ou λ_2 selon si le montant précédent est supérieur à un seuil donné ou non.

Autrement, comme mentionné ci-dessus, [Albrecher et al. \(2011b\)](#) évoque aussi (sans proposer de calculs) une forme de dépendance pour un modèle de Cramér-Lundberg : conditionnellement au fait que $\Theta = \theta$, où Θ est une variable aléatoire, les montants de sinistres sont indépendants et suivent une loi $\text{Exp}(\theta)$, et la fréquence d'arrivée des sinistres est $\lambda(\theta)$, où la fonction $\lambda(\cdot)$ resterait à préciser.

2.3 Corrélation temporelle

En plus des formes de dépendance citées dans les paragraphes précédents, il est parfois nécessaire de prendre en compte les potentielles corrélations temporelles entre les survenances des sinistres, ainsi que l'évolution de toute forme de corrélation au fil du temps : les risques peuvent être faiblement corrélés, voire indépendants lorsque les conditions extérieures (économiques, politiques,...) sont normales, et devenir fortement corrélés lorsqu'un événement inhabituel survient. On peut faire un parallèle avec le monde de la finance qui avait connu ce phénomène lors de la crise des subprimes : les pertes étaient nombreuses, et en plus, la corrélation entre les actifs ne cessait d'augmenter.

En ce sens, l'ouvrage [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#) formule l'idée que les processus de comptage indépendants ont bien sûr des propriétés plus « confortables », mais le dénombrement des sinistres dans les modélisations associées relève davantage de l'interpolation que d'une causalité issue de la réalité.

Il existe de nombreuses manières de proposer une corrélation temporelle : aussi bien entre les temps d'occurrence des sinistres lorsque l'on est en temps continu, qu'entre le nombre de sinistres survenant par période lorsqu'on est en temps discret.

Nous en présentons quelques-unes, en commençant par celle qui est la plus utilisée dans cette thèse : les relations provenant de séries temporelles.

2.3.1 Dépendance provenant de séries temporelles

L'utilisation de séries temporelles, ayant lieu surtout pour des modèles en temps discret, induit en général de la dépendance temporelle. Comme ouvrage présentant plus amplement les propriétés des processus introduits ci-dessus, on peut citer [Weiß \(2018\)](#).

Un des premiers articles en science actuarielle utilisant la notion de processus autorégressif est celui de [Gourieroux and Jasiak \(2004\)](#), dans le cadre de l'assurance automobile. Toutefois, le processus utilisé ici est seulement autorégressif, mais pas nécessairement à valeurs entières. Or, dans le cadre de notre travail, nous cherchons à utiliser ce type de processus probabiliste pour compter les sinistres survenant à chaque période.

Nous définissons ainsi l'opération d'amincissement (« thinning operator » en anglais), qui permet de travailler avec des séries temporelles en s'assurant que toutes les valeurs prises seront entières.

Définition 2.1 (Opération \circ). Soit X une variable à valeurs dans \mathbb{N} et $\rho \in [0, 1]$ un paramètre constant. La variable définie par $Y = \rho \circ X$ correspond à $Y = \sum_{i=1}^X b_i(\rho)$, où les $(b_i(\rho))_{i \in \mathbb{N}}$ sont i.i.d., de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\rho)$, et indépendantes de X .

Autrement dit, la loi conditionnelle de Y est : $Y | X \sim \mathcal{B}(X, \rho)$.

Parmi les propriétés notables de cet opérateur, il est linéaire par rapport à la variable aléatoire X , $\mathbb{E}(\rho \circ X) = \rho \mathbb{E}(X)$ si $\mathbb{E}(X) < \infty$, et $\alpha \circ (\rho \circ X) = (\alpha\rho) \circ X$ si $\alpha \in [0, 1]$. De plus, on a de manière triviale $0 \circ X = 0$, et $1 \circ X = X$.

Cela nous permet de définir la notion de processus INAR(p) et de processus INMA(q). En anglais, l'acronyme INAR signifie « integer-valued autoregressive », et INMA, « integer-valued moving average ». Le terme de « integer-valued » signifie « à valeurs entières », et « moving average » peut se traduire par « à moyenne changeante ». Enfin, les entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$ indiquent l'ordre du processus, c'est-à-dire jusqu'à quelle période antérieure on remonte pour exprimer la valeur du processus à un instant donné. Les premiers articles qui ont formalisé ces notions sont

McKenzie (1985) et Al-Osh and Alzaid (1987) pour le INAR(1), et Al-Osh and Alzaid (1988) pour le INMA(1).

Définition 2.2 (Processus INAR(p)). Une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est régie sous la forme d'un processus INAR(p) s'il existe des réels $(\rho_i)_{1 \leq i \leq p}$ compris entre 0 et 1, et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables i.i.d. et positives tels que, pour $n \geq p$,

$$Z_n = \rho_1 \circ Z_{n-1} + \rho_2 \circ Z_{n-2} + \dots + \rho_p \circ Z_{n-p} + \varepsilon_n. \quad (11)$$

Les ε_n sont appelés termes « d'erreur » ou « d'innovation » selon le contexte et la signification que l'on veut donner.

D'autre part, la condition pour éviter que le processus n'explose est alors $\sum_{i=1}^p \rho_i < 1$. Sinon, le processus est monotone et croît vers $+\infty$ p.s.

La loi imposée pour les valeurs initiales $(Z_n)_{0 \leq n \leq p-1}$ peut varier. On peut l'imposer de manière arbitraire; ou supposer par exemple que Z_0 est de même loi que ε_0 , puis que Z_k , pour $1 \leq k \leq p-1$, s'exprime comme une somme tronquée : $Z_k = \varepsilon_k + \sum_{i=1}^p \rho_i \circ Z_{k-i} \cdot 1(k-i \geq 0)$.

Définition 2.3 (Processus INMA(q)). Une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est régie sous la forme d'un processus INMA(q) s'il existe des réels $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq q}$ compris entre 0 et 1, et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables i.i.d. et positives tels que, pour $n \geq q$,

$$Z_n = \alpha_1 \circ \varepsilon_{n-1} + \alpha_2 \circ \varepsilon_{n-2} + \dots + \alpha_q \circ \varepsilon_{n-q} + \varepsilon_n. \quad (12)$$

Concernant la loi des $(Z_n)_{0 \leq n \leq p-1}$, on pourrait faire les remarques similaires : soit on l'impose de manière arbitraire, soit on peut l'exprimer comme une somme tronquée d'un processus INMA(q).

Notamment, à l'ordre 1, le INAR(1) correspond à $Z_n = \rho \circ Z_{n-1} + \varepsilon_n$, et le INMA(1) à $Z_n = \alpha \circ \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$.

De surcroît, il est possible de mélanger les idées d'autorégression et de moyenne changeante, pour proposer un processus appelé INARMA(p,q) : sans détailler le formalisme qui serait similaire aux précédents, cela s'écrirait : $Z_n = \varepsilon_n + \sum_{i=1}^p \rho_i \circ Z_{n-i} + \sum_{j=1}^q \alpha_j \circ \varepsilon_{n-j}$.

Parmi les modèles de risque en théorie de la ruine utilisant ces deux processus, on peut citer Yuan et al. (2018), Chen and Hu (2020), ou Guan and Hu (2022) avec un INAR(1), ou bien Hu et al. (2018) qui utilise un processus INMA(1), ou Cossette et al. (2010) qui compare deux modèles, l'un avec un INMA(1), et l'autre avec un INAR(1). Dans certains cas, sont même utilisées des versions plus complexes des définitions proposées ci-dessus.

À chaque fois, on s'intéresse à la loi de sommes agrégées : les sinistres, de montants i.i.d., sont comptés grâce à une suite de variables discrète régie par la série temporelle précisée. Parfois, les auteurs écrivent aussi à partir de cela un modèle classique de risque en temps discret à partir de ces pertes agrégées. Notamment, dans certains cas, on en déduit le coefficient d'ajustement lorsque les montants de sinistres constituent une suite i.i.d. de loi exponentielle.

Ces processus comportent des généralisations possibles pour un modèle multivarié. Notamment, en deux dimensions, on peut définir la notion de processus INAR bivarié :

Définition 2.4 (Processus BINAR(p)). Une suite de vecteurs aléatoires en 2 dimensions $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est régie sous la forme d'un processus BINAR(1) s'il existe des réels $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ compris entre 0 et 1, et une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs en 2D i.i.d. à valeurs positives tels que, pour $n \geq 1$,

$$\begin{cases} Z_{1,n} = \alpha_{11} \circ Z_{1,n-1} + \alpha_{12} \circ Z_{2,n-1} + \varepsilon_{1,n} , \\ Z_{2,n} = \alpha_{21} \circ Z_{1,n-1} + \alpha_{22} \circ Z_{2,n-1} + \varepsilon_{2,n} . \end{cases} \quad (13)$$

Ce qu'on peut noter sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} Z_{1,n} \\ Z_{2,n} \end{pmatrix} = A \circ \begin{pmatrix} Z_{1,n-1} \\ Z_{2,n-1} \end{pmatrix} + \varepsilon_n \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} . \quad (14)$$

On en déduit la généralisation à l'ordre p : $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est régie par un processus BINAR(p) s'il existe des matrices $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ vérifiant les mêmes propriétés que la matrice A , telles que pour $n \geq p$:

$$Z_n = A_1 \circ Z_{n-1} + \dots + A_p \circ Z_{n-p} + \varepsilon_n . \quad (15)$$

Concernant la loi imposée pour les valeurs initiales, les possibilités sont similaires à celles des définitions précédentes.

On peut ajouter que dans cette définition, si la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est i.i.d., aucune hypothèse particulière n'est faite pour la loi jointe des termes d'innovation $\varepsilon_{1,n}$ et $\varepsilon_{2,n}$ à n fixé. On peut aussi bien supposer que $\varepsilon_{1,n}$ et $\varepsilon_{2,n}$ sont indépendantes, que proposer une relation de dépendance entre ces variables.

La généralisation en deux dimensions pour un processus bivarié INMA(q), c'est à dire BINMA(q), devrait être similaire.

Toutefois, à notre connaissance, les processus BINMA sont encore peu étudiés dans la littérature, et les processus BINAR avec un ordre $p \geq 2$ sont beaucoup moins étudiés que le BINAR(1).

D'autre part, on remarque que pour le BINAR(1), une dépendance s'instaure entre les suites de variables réelles $(Z_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Z_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ dès que l'un des coefficients de croisement α_{12} ou α_{21} est non nul. Ce fait est bien sûr similaire en étendant cela à des processus de type BINAR(p) ou BINMA(q).

Notamment, l'article [Ma et al. \(2015\)](#) étudie des modèles de risque associés à deux processus bivariés particuliers : un processus BINAR(1), et un BINMA(1), avec des coefficients de croisement nuls, mais où pour chacun, la dépendance entre les branches vient du fait que les termes d'innovation ε_n suivent une loi de Poisson bivariée comportant un choc commun : de la sorte $\varepsilon_{1,n}$ et $\varepsilon_{2,n}$ sont dépendants.

Parmi les articles se positionnant davantage dans le domaine des statistiques et des probabilités théoriques, et utilisant de tels processus, on peut citer [Alzaid and Al-Osh \(1990\)](#), ou [Barczy et al. \(2011\)](#), pour l'usage d'un INAR(p), [Park and Kim \(1997\)](#), ou [Aries and Mamode Khan \(2023\)](#), pour un INMA(q), [Enciso-Mora et al. \(2009\)](#) pour un INARMA(p,q), et [Pedeli and Karlis \(2011\)](#), ou [Darolles et al. \(2018\)](#) pour le BINAR(1) ou le BINAR(p).

D'autre part, les exemples d'approfondissements de ces séries temporelles sont extrêmement nombreux, car les applications potentielles sont très diverses (économie, finance, climatologie...). On peut citer [Weiß \(2008\)](#), qui étudie une version modifiée du INAR(p), mais où à chaque instant, une seule occurrence du passé parmi les p précédentes est choisie de manière aléatoire, ou [Karlis et al. \(2024\)](#), qui décrit une forme « d'autorégression spatiale » en s'inspirant d'un processus INAR(1).

2.3.2 Dépendance issue de processus de comptage en temps continu

Si les séries temporelles sont des processus de comptage induisant de la dépendance, on les utilise plutôt pour des modèles en temps discret.

Nous évoquons ici des types de processus plutôt utilisés pour compter les sinistres survenus dans le cas d'un modèle en temps continu.

Ces processus sont régis par une intensité $\lambda(t)$ qui caractérise la probabilité de croître de manière instantanée à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire durant l'intervalle de temps infinitésimal $[t, t + dt]$. Cela se traduit par les relations suivantes, pour t et $h \geq 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda(t)h + o(h) \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h) \\ \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1) = o(h) \end{cases} \quad \text{quand } h \rightarrow 0. \quad (16)$$

Un processus de Poisson classique vérifie en particulier ces relations, avec une intensité constante, c'est-à-dire $\lambda(t) = \lambda$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Toutefois, c'est le seul processus de ce type qui sera utilisé dans nos travaux. Les extensions suivantes sont seulement présentées à titre indicatif.

Deux autres exemples courants sont les processus de Hawkes ou les processus de Cox, notamment utilisés pour modéliser les séismes ou les risques liés à la cybersécurité (les « cyber-risques »).

En effet, pour ces deux cas de figure, avoir un sinistre augmente temporairement la probabilité d'avoir un deuxième sinistre coup sur coup, dans le sens où plus l'intensité $\lambda(t)$ est élevée à l'instant t , plus la probabilité que N croisse de manière instantanée en t est grande, et donc plus il est probable que $\lambda(\cdot)$ croisse aussi en t .

Ces processus sont ainsi « auto-excitants » : ils représentent des potentialités de comportements dits explosifs, qui correspondent à un grand nombre de sinistres survenant subitement sur un intervalle de temps assez restreint.

En outre, ils sont tous deux des généralisations d'un processus de Poisson classique, sauf que contrairement à un tel processus, ils ne possèdent pas la propriété d'incrémentés indépendants. À chaque fois, par rapport à un tel processus, c'est comme si on avait ajouté une ou des quantités positives censées modéliser des perturbations qui peuvent s'atténuer au fil du temps, et provoquées par des événements extérieurs (tels que ceux mentionnés ci-dessus).

Les processus de Hawkes sont une notion introduite par Alan Hawkes en 1971 dans [Hawkes \(1971\)](#). L'intensité est elle-même un processus stochastique : dans la version d'origine, elle vaut, pour $t \geq 0$, $\lambda(t) = \nu + \int_0^t g(t-s)dN(s)$, où $\nu > 0$ est une constante, $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, et $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ est le processus de comptage associé.

On peut voir un processus de Poisson comme un processus de Hawkes avec une excitation nulle, c'est-à-dire $g(s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$.

On rencontre souvent, dans la littérature scientifique, une fonction g sous la forme d'une exponentielle décroissante. D'un point de vue concret, cela implique un risque accru de second saut peu après un saut donné, mais si ce nouveau saut ne se déclenche pas dans l'immédiat, on observe un « retour à la normale » assez rapide.

La condition de stationnarité s'écrit $\int_0^\infty g(s) ds < 1$. Si elle n'est pas vérifiée, le processus explose : il est alors possible d'observer sur des intervalles de temps finis une infinité de sauts.

Des exemples récents d'applications des processus de Hawkes pour les cyber-risques se trouvent dans [Bessy-Roland et al. \(2021\)](#) ou [Hillairet et al. \(2023\)](#). Un approfondissement de ce

type de processus pour décrire des phénomènes de « contagion » dans le domaine des assurances a été étudié dans [Barsotti et al. \(2016\)](#) par exemple.

Les processus de Cox sont une notion introduite par le statisticien anglais David Cox en 1955 dans [Cox \(1955\)](#). Dans la littérature, on les désigne par « shot-noise Cox process », ou par « shot-noise intensity process » pour parler de leur intensité $\lambda(\cdot)$ qui est un processus stochastique. Le terme de shot-noise peut se traduire par « bruit quantique » ou plus simplement « bruit ».

L'intensité s'écrit $\lambda(t) = \beta + \sum_{n \in \mathbb{N}} h(t - \sigma_n, U_n)$, où $\beta > 0$ est une constante, et h est une fonction positive définies sur \mathbb{R}^2 , telle que $h(t, x) = 0$ pour $t < 0$ et $x \in \mathbb{R}$. De plus, les $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les temps de saut d'un processus de Poisson homogène de paramètre $\zeta > 0$, et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des variables i.i.d. et positives. Là aussi, si $h(t, x) = 0$, on se ramène à un processus de Poisson classique.

Les événements extérieurs perturbants sont de la sorte régis par un processus de Poisson d'intensité $\zeta > 0$, ils surviennent aux instants σ_n , et on mesure leurs dégâts avec les variables U_n . L'article [Dassios and Jang \(2003\)](#) étudie par exemple le cas où h présente une décroissance exponentielle en fonction du temps, ce qui permet là aussi d'amoinrir rapidement l'influence d'un événement s'il n'y a pas ou peu de sinistres supplémentaires dans l'immédiat.

Dans la littérature, on peut aussi citer les papiers [Asmussen et al. \(1999\)](#) ou [Albrecher and Asmussen \(2006\)](#) qui étudient un tel processus.

2.3.3 Environnement markovien

Nous ne formulons ici qu'à titre indicatif l'expression générale d'un modèle dans un tel environnement. Cela ne sera pas utilisé plus tard au cours de notre thèse.

L'idée d'utiliser des processus markoviens pour modéliser des changements dans l'environnement dans lequel évolue une compagnie d'assurances a été introduite dans [Asmussen \(1989\)](#). En effet, la corrélation entre les risques encourus par une compagnie, ainsi que leur fréquence et leur dangerosité, peuvent être influencées par des facteurs économiques, juridiques, politiques ou écologiques.

Cette modulation par un processus d'environnement de Markov peut représenter notamment l'arrivée de sinistres en « cascade », ou sous forme de « clusters », quand la corrélation entre ceux-ci est maximale du fait d'événements exceptionnels. Ce fut le cas après les attentats du 11 septembre 2001, ou lors de la crise des subprimes en 2008.

Un processus de Markov est un processus stochastique $(J_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ qui satisfait la propriété dite de Markov : elle implique que le futur est indépendant du passé dès lors que l'on connaît le présent (nous n'allons pas détailler sa formulation mathématique ici).

Ici, ce processus d'environnement, selon l'état dans lequel il se trouve, module la dépendance entre les montants de sinistres ainsi que leur distribution marginale, mais aussi le paramètre d'intensité du processus de Poisson et le taux de prime demandé à l'assuré.

On considère un espace d'états \mathcal{S} fini, qu'on peut noter $\mathcal{S} = \{1, \dots, n\}$, et un processus de Markov (J_t) à valeurs dans \mathcal{S} , régi par une matrice de transition M . Conditionnellement au fait d'avoir $J_t = i$, le taux de prime de la compagnie étudiée est $c_i > 0$, et les sinistres surviennent selon un processus de Poisson N_i d'intensité $\lambda_i > 0$, leur distribution est F_i , et on note les montants $(X_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$, qui sont une suite i.i.d. Pour $i, j \in \mathcal{S}$, N^j et la suite X^i sont indépendantes, et si $i \neq j$, N_i et N_j sont indépendants, et les suites X^i et X^j sont indépendantes. Enfin, on note

$S_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t)} X_k$, et $(T_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ les instants des saut du processus J , avec $T_0 = 0$ par convention.

Le modèle s'exprime alors :

$$R(t) = u + \int_0^t c_{J_s} ds - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n (S_i(\min(T_{p+1}, t)) - S_i(T_p)) \cdot 1_{\{J_{T_p}=i, T_p \leq t\}} \quad (17)$$

La définition de la probabilité de ruine demeure la même pour $(R(t))_{t \geq 0}$.

Depuis l'introduction d'un tel modèle, de nombreux auteurs se sont intéressés à cette problématique. Nous pouvons citer notamment [Asmussen et al. \(1994\)](#), [Enikeeva et al. \(2001\)](#), ou encore [Biard et al. \(2008\)](#).

2.4 Sinistres secondaires (ou « by-claims »)

Un autre phénomène traduisant une forme de dépendance est la notion de rechute de sinistres. Dans la littérature actuarielle, le terme anglais associé est « by-claim ». Nous pouvons tenter de le traduire par « sinistre secondaire », « co-sinistre », ou bien par « sinistre de rechute ».

C'est une notion qui nous a grandement intéressé, et qui a été largement utilisée au cours de cette thèse.

Commençons par expliquer la pertinence d'une telle notion. Pour une compagnie d'assurances, les événements qui produisent des dommages sévères et des montants conséquents à rembourser engendrent en général deux types de sinistres : un premier qui a besoin d'être réglé rapidement, notamment de façon à enregistrer l'événement et les informations principales qui s'y rapportent dans la base de données de la compagnie, et des coûts ou des sinistres secondaires ou sous-jacents qui sont en principe quantifiés ultérieurement. Ici, il ne faut pas entendre le terme de « secondaire » au sens d'une chose qui aurait une importance moindre, mais qui survient après un premier événement.

Par exemple, dans le cas de l'assurance automobile, les sinistres concernent aussi bien les dégâts matériels subis par le véhicule que les dommages corporels des passagers et du conducteur. Si un accident est violent, les dégâts matériels prennent en général moins de temps à être estimés, tandis qu'il faudra attendre la fin de l'hospitalisation des victimes pour connaître précisément le coût des soins médicaux fournis. Une indemnité en cas de décès peut aussi prendre du temps à être déterminée.

On pourrait aussi citer l'exemple d'une catastrophe, pour lesquelles les plaintes ou les informations concernant les dégâts causés prennent plusieurs jours à être réunies. Cette catastrophe peut être naturelle (séisme, inondation), ou non, par exemple si une usine explose ou une infrastructure publique s'effondre et que cela cause des dommages à des tiers. Avant de donner plus de détails sur les significations concrètes qu'on peut en donner, nous présentons une part du formalisme mathématique associé.

Nous détaillons un modèle de risque commun faisant intervenir des sinistres secondaires, tout en évoquant plus amplement les significations qu'on peut y associer.

Ce type de modèle a été présenté originellement dans [Yuen et al. \(2005\)](#), et il s'agit à notre connaissance du premier modèle exprimé en temps continu avec à la fois des sinistres principaux et secondaires. Il a inspiré de nombreuses études similaires, comme chez [Li \(2013\)](#), [Fu and Li \(2016\)](#), ou [Yang et al. \(2019\)](#).

Voici son écriture :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i + Y_i \cdot 1_{(T_i + D_i \leq t)}) \quad (18)$$

En plus des hypothèses faites pour un modèle classique de Cramér-Lundberg (ou éventuellement Sparre-Andersen), on suppose ici que le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre secondaire est Y_i , survenant

avec un retard D_i par rapport au temps d'occurrence du $i^{\text{ème}}$ sinistre T_i . La suite de variables en 2 dimensions $(X_i, Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est i.i.d., et indépendante du processus de renouvellement $(N(t))_{t \geq 0}$.

Ensuite, les hypothèses varient d'un article à l'autre. Si [Yuen et al. \(2005\)](#) considère que la suite D est i.i.d., et que les 4 suites X, Y, D et T sont indépendantes, [Yang et al. \(2019\)](#) suppose une relation de dépendance entre X_i et Y_i à i fixé, mais impose en revanche que les retards D_i soient bornés, contrairement au précédent.

On peut remarquer que, même en considérant que les 4 suites de variables citées sont i.i.d. et mutuellement indépendantes, il existe une forme de dépendance entre les suites X et Y dans la mesure où, si à l'instant $t > 0$, un nombre $N(t)$ de sinistres sont apparus, alors on comptera au plus $N(t)$ sinistres secondaires survenus.

Autrement, à notre connaissance, le premier modèle en théorie de la ruine décrivant un ajout de sinistres secondaires se trouve dans [Yuen and Guo \(2001\)](#). Il est écrit en temps discret et correspond à un approfondissement du modèle binomial composé.

Cependant, toutes les références précédemment mentionnées supposent qu'un sinistre principal génère précisément un seul sinistre de rechute. C'est une hypothèse qui facilite les calculs, mais qui est simplificatrice vis-à-vis de la réalité. Plus récemment, [Li \(2023\)](#) a étudié une généralisation du modèle décrit précédemment avec un nombre aléatoires de sinistres, mais, contrairement à nos travaux, cela est étudié sur un plan théorique sans vraiment insister sur les liens possibles avec la réalité concrète ou bien une application précise.

Revenons aux significations concrètes. En soi, le fait qu'un sinistre principal ne génère qu'une rechute peut s'apparenter aux frais d'une expertise menée pour déterminer précisément le montant à rembourser lors d'un sinistre. On peut raisonnablement supposer qu'une telle enquête n'a lieu que si entrent en jeu des dégâts ou des montants conséquents, en vue de préserver la compagnie de tout ou une partie des dommages à réparer et rembourser.

Ainsi, le modèle décrit ci-dessous n'est pas dépourvu de sens, mais demeurerait susceptible d'approfondissements.

Comme autre sens général possible, on peut penser à l'actualisation de la valeur d'un premier sinistre, et cela peut se référer notamment à des cas où on observe plusieurs sinistres de rechute. En guise d'exemples, nous reprenons certaines choses déjà mentionnées.

Dans le cadre d'une hospitalisation suite à un accident de la route dont l'évolution est incertaine, le premier sinistre correspondrait à une première évaluation du coût des soins. Puis, selon si l'état de la personne blessée s'améliore ou empire par rapport à la première estimation, le coût initial pourra être revu à la hausse ou à la baisse, grâce à un sinistre secondaire.

Cela nous permet au passage de souligner qu'un sinistre secondaire peut avoir une *valeur négative* dans un tel cas de figure, au cas où le montant d'hospitalisation est revu à la baisse. Toutefois, dans notre travail, on ne considérera que des rechutes dont les montants sont positifs, afin de faciliter l'étude mathématique; mais c'est une hypothèse *simplificatrice*.

Autrement, dans le cas typique où une usine explose, on pourrait par exemple recenser le premier jour qui suit cinq plaintes de la part de voisins témoignant de dégâts causés à leurs habitations à cause de cela, le deuxième jour, on compterait dix plaintes, etc. Le sinistre principal pourrait alors se rapporter au N_1 plaintes déposées le premier jour, et le $k^{\text{ème}}$ sinistre secondaire aux plaintes reçues le $(k + 1)^{\text{ème}}$ jour.

D'autre part, une succession d'événements de rechute peut ne se déclencher qu'au bout d'un certain temps. Imaginons le cas d'un enfant de 10 ans qui se fait renverser par un véhicule et en devient handicapé. Le système français prévoit dans ces conditions, lorsque la majorité est atteinte à l'âge de 18 ans, le versement d'une pension, après ré-examen du pourcentage d'invalidité. Cependant, tant que l'enfant est sous tutelle de ses parents, il ne peut pas toucher cette pension.

Dans les trois chapitres principaux de cette thèse sont utilisés des modèles qui font intervenir ce genre de sinistre. Par exemple dans les chapitres 1 et 2, ces rechutes sont comptées grâce à une série temporelle INAR(1), dans le chapitre 3, grâce à une série temporelle bivariée BINAR(1). Le chapitre 2 introduit aussi à un moment un modèle plus classique où un sinistre génère précisément une rechute, inspiré de celui présenté ci-dessus en équation 18, et muni d'une structure de prévention.

3 Processus de risque faisant intervenir des séries temporelles

Dans la section 2 qui précède, nous avons défini ce qu'est une série temporelle, en donnant notamment l'exemple d'un processus INAR(1). Nous avons également introduit la notion de sinistre secondaire (ou de rechute) en expliquant sa signification, et les limites que cela présentait de considérer qu'un sinistre principal entraîne seulement un sinistre de rechute.

Ici, nous présentons le modèle en temps discret qui est au cœur du chapitre 1. C'est un modèle novateur, encore jamais introduit ou étudié dans la littérature scientifique, qui comprend des sinistres à la fois principaux et secondaires, et ces derniers sont comptés grâce à un processus INAR(1). Nous utilisons également une version adaptée de ce modèle dans le chapitre 2, où on a ajouté avec une structure de prévention (concernant la thématique de la prévention, voir en section 6).

Pour l'écrire, nous reprenons certaines idées et principes du processus originel de Cramér-Lundberg. Ce modèle, sous la forme d'une suite de variables discrètes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, décrit la réserve (ou la richesse) d'une compagnie d'assurance.

Encore une fois, $u \geq 0$ est la réserve initiale de la compagnie, et $c > 0$ le taux de prime constant et périodique issu des cotisations des personnes assurées.

Les sinistres principaux sont représentés par les variables aléatoires à valeurs positives $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ i.i.d., il en survient N_k à la période $k \in \mathbb{N}^*$. On pose X , comme étant une variable aléatoire telle que $X_{k,i} \sim X$ pour tous $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, son espérance vaut $\mu_X > 0$, et on peut noter F sa distribution.

Les sinistres secondaires sont représentés par les variables positives $(Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ i.i.d., il en survient M_k à la période $k \in \mathbb{N}^*$. On peut poser Y une des variables aléatoires telle que $Y_{k,i} \sim Y$ pour tous $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, son espérance vaut $\mu_Y > 0$, et on peut noter G sa distribution.

Le modèle s'écrit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = u + c \cdot n - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{M_k} Y_{k,i} \quad . \quad (19)$$

Concernant les processus de comptage, N_k et M_k sont donc à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que les $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont i.i.d., et que $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Les M_k sont régis par un processus INAR(1) :

$$M_k = \rho \circ M_{k-1} + N_k \quad \text{pour } k \geq 1 \quad . \quad (20)$$

où $\rho \in [0, 1[$ est un paramètre constant. Comme condition initiale, on impose $M_0 \sim \mathcal{P}(\gamma_0)$. En outre, à $k \geq 1$ fixé, on suppose que N_k est indépendant de M_0, \dots, M_{k-1} .

On peut interpréter l'écriture de cette manière-là : lors de la période $k \in \mathbb{N}^*$, chaque sinistre génère automatiquement un sinistre secondaire (un exactement). D'autre part, chacun de ces sinistres de rechute de la période k génère avec une probabilité ρ un nouveau sinistre de rechute lors de cette période $k + 1$. Cela sous-entend qu'un événement grave peut potentiellement perpétrer des pertes sous forme de sinistres durant un grand nombre de périodes.

Les suites de variables $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ et $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont considérées mutuellement indépendantes. De plus, on suppose que les suites $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ et $(Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ sont indépendantes de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

En fait, en ayant déjà supposé l'indépendance entre $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^}$ et les montants de sinistres, il suffirait de supposer que ces montants sont indépendants de M_0 pour avoir l'indépendance avec $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, le reste découlant de l'écriture sous forme de $INAR(1)$.*

On peut récrire le modèle en faisant intervenir seulement les pertes agrégées : à la période $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i}$ celle des sinistres, et $B_k = \sum_{i=1}^{M_k} Y_{k,i}$ celle des rechutes. La suite de variables $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est i.i.d. En revanche, les $(B_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne sont ni indépendantes, ni identiquement distribuées. Cela donne, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n = u + c \cdot n - \sum_{k=1}^n A_k - \sum_{k=1}^n B_k \quad . \quad (21)$$

D'autre part, la condition de profit net implique ici (cf chapitre 1 pour plus de détails) $c > \lambda \left(\mu_X + \frac{\mu_Y}{1 - \rho} \right)$. En fixant toutes les données excepté ρ , ceci est équivalent à $\rho \leq \rho_{max}$, où $\rho_{max} = 1 - \frac{\lambda \mu_Y}{c - \lambda \mu_X} < 1$. De la sorte, aussi élevé que soit le taux de prime c , et aussi faibles que puissent être $\mu_X > 0$ et $\mu_Y > 0$, quand ρ tend vers 1, la condition de profit net n'est pas vérifiée, et la ruine est presque sûre. Cela paraît cohérent, car en prenant $\rho = 1$, on aurait $M_k = M_{k-1} + N_k$, ce qui correspond à un phénomène d'explosions de sinistres.

Enfin, en ce qui concerne l'évaluation de la ruine associée à ce modèle, on peut se référer à la définition 1.6.

Ce modèle de risque innovant peut servir à décrire la gestion des problèmes liés aux composants chimiques que sont les perfluorés (ou « PFAS ») pour une compagnie d'assurances, et les mécanismes de risque qui sont impliqués par de tels enjeux.

Toutefois, nous tenons à préciser que, bien que motivés par cette problématique, nous n'avons pas pu récupérer de données en ce qui concerne la gestion de celle-ci. Cela est dû notamment au fait que les premières couvertures spécifiques proposées en la matière sont extrêmement récentes (comme précisé dans la section suivante).

Nous pouvons donc considérer que le but de ce travail est d'alerter sur les nouveaux risques liés aux PFAS, et que cela peut mener à la survenance en « cascade » de sinistres potentiellement très coûteux, à cause des différents niveaux de propagation du risque.

Nous expliquons plus amplement dans la section 4 qui suit, ce que nous considérons comme les éléments principaux pouvant intéresser une compagnie d'assurances se rapportant à la thématique des PFAS.

Plus loin, dans le chapitre 2, on ajoute à ce modèle une structure de prévention pour tenter de décrire comment une compagnie pourrait se prémunir de risques élevés en les anticipant grâce à des investissements.

Avant cela, nous détaillons néanmoins l'analogie qu'on peut établir entre la thématique des PFAS et le modèle décrit ci-dessus en équation 19.

Les sinistres principaux correspondent à des émissions de produits perfluorés libérés dans la nature, et la compagnie d'assurances pourrait indemniser alors la responsabilité de l'entreprise ou de l'industrie concernée. Ensuite, la compagnie serait en charge des contributions secondaires, comme tous les coûts et les moyens nécessaires pour nettoyer l'environnement de telles émissions, ainsi que guérir la population de maladies contractées à cause d'une exposition à ces produits chimiques. On peut imaginer que ces coûts secondaires puissent aussi servir à guérir les animaux

touchés, mais cela n'est pas encore ou peu mentionné dans la littérature ou la presse. Concernant le retrait de ces produits répandus dans l'environnement : bien entendu, pour commencer ils se répandent à proximité de l'entreprise considérée, mais l'expansion de cette pollution peut être facilitée par les cours d'eau ou par transport de ces molécules dans l'air, ce qui multiplie les points potentiels de pollution issu d'une entreprise source. D'autre part, des maladies graves telle que des cancers peuvent être suscitées chez l'homme, ce qui implique des traitements médicaux potentiellement de longue durée. Toutefois, ces maladies sont plutôt issues d'une exposition prolongée (et non pas occasionnelle) aux molécules perfluorées.

On peut ainsi voir l'événement associé au sinistre principal comme la « source » des sinistres secondaires. Dans la pratique, il est difficile d'évaluer les dommages produits par une seule émission de perfluorés, donc l'événement d'origine correspond davantage à une série d'émissions pendant une période donnée par une même compagnie.

Sur le plan théorique comme sur le plan pratique, à travers ce modèle, chaque sinistre principal engendre possiblement un nombre important de rechutes : ce comportement peut être vu comme de la « contagion » de sinistres, et se rapproche d'une explosion de sinistres qui serait représentée par un processus de Hawkes ou de Cox (en référence à la section 2.3). En anglais, on parlerait de « cluster » de sinistres (littéralement « grappe » ou « groupe »), cela peut notamment survenir en matière de cyber-risques.

Dans notre cas, on peut considérer que ce phénomène de contagion a lieu à partir d'une valeur seuil pour ρ : on peut considérer grossièrement que cela a lieu pour $\rho \geq 0.5$, quand une rechute a plus d'une chance sur 2 de se reproduire. Sinon, si ρ est trop faible, les risques sont bien moindres, et cela a moins de sens de parler de contagion.

Ici, le fait d'utiliser 2 types de sinistres au lieu d'un seul permet de distinguer la contribution d'origine ou l'événement source à travers le sinistre principal, et les multiples rechutes potentielles à travers les sinistres secondaires.

En outre, pour nourrir cette comparaison, on peut citer [Kirchner \(2016\)](#), qui montre qu'un processus de Hawkes peut être approché par un processus INAR(∞) d'ordre infini en termes de convergence en loi. Dans ce cas, on approche un processus décrit en temps continu par un processus discret.

Remarque 3.1. Vis-à-vis de ce modèle, nous avons aussi pensé à une éventuelle écriture à l'aide d'un modèle INAR d'ordre $p \geq 2$, pour décrire $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. En effet, un modèle d'ordre p pourrait décrire plus finement les liens entre les événements déclencheurs de sinistres qui ont lieu lors d'une période k , et la survenance potentielle d'une première rechute associée jusqu'en la période $k + p$. À titre d'exemple, nous avons tenté l'étude mathématique d'un tel modèle, mais elle s'est avérée assez difficile, et les quelques résultats qu'on peut en déduire sans que les formulations soient trop complexes sont plutôt similaires à ceux trouvés dans le chapitre 1 pour ce modèle.

4 Motivations concrètes

4.1 La notion de PFAS

Nous avons regroupé les apports de différentes sources bibliographiques pour rédiger cette section. On peut citer à la fois des articles scientifiques de chimie de l'environnement, ou des articles disponibles en ligne (sur le site de la chaîne France 3, du journal Le Monde, ou de la société de réassurance américaine GenRe par exemple). Nous avons pu observer des cartes de contamination à différentes échelles (toujours en ligne) : française, européenne, américaine, ou mondiale. Enfin, en matière de législation, nous sommes également allé consulter des sites

officiels du gouvernement français, le site officiel de la convention de Stockholm, ou des articles de recherche pour le cas des États-Unis.

Comme ressources plus spécifiques, on peut citer une conférence à laquelle nous avons assisté à Lyon par Pierre Labadie, un chimiste spécialiste de cette question [Labadie \(2024\)](#), ou bien un rapport de l'Académie des sciences [Chaudret et al. \(2025\)](#).

Les molécules perfluorées (ou PFAS) constituent un sujet d'importance mondiale fortement évoqué ces derniers temps. En effet, on peut à juste titre supposer que ces polluants « éternels » se sont répandus sur toute la surface du globe à l'heure actuelle, à travers l'eau et l'air notamment. Ces molécules de synthèse sont utilisées dans de nombreux objets du quotidien depuis plus de 50 ans, tels que des poêles de cuisson, ou des vêtements protégeant de températures extrêmes.

La nouveauté et l'actualité de ce sujet ne résident pas tant dans l'ancienneté de ces produits, et la connaissance de leur dangerosité pour l'être humain, mais plutôt dans les solutions qu'on cherche rapidement à déployer pour remédier à leurs effets nocifs.

Comme le souligne le rapport de l'Académie des sciences, la pollution de l'environnement par les composés perfluorés dépasse, au moins pour certains éléments, d'autres grands épisodes passés similaires en matière de pollution environnementale (notamment celle par les hydrocarbures ou les métaux lourds). En effet, cette pollution aux PFAS apparaît comme profondément diffuse et difficilement réversible à ce jour. Par ailleurs, certains usages de ces composants n'ont pas encore de substitut, en particulier dans certains aspects de la transition énergétique. S'il est encore peu concevable de s'en passer entièrement à l'heure actuelle, néanmoins, leur émission dans l'environnement devrait être entièrement interdite : ce sont aux fabricants industriels d'être vigilant et de faire en sorte de ne plus engendrer de libération de produits dans l'environnement.

Nous donnons certains chiffres pour souligner l'ampleur du phénomène : on estime la production annuelle mondiale à 300 000 tonnes par an, (dont 25 000 pour l'espèce du PFOA seulement). À côté de cela, le coût associé pour les systèmes de santé européens est actuellement compris entre 52 et 84 milliards d'euros par an, et, toujours à l'échelle européenne, le coût annuel pour éliminer les PFAS de l'eau potable est d'environ 238 milliards d'euros.

Afin de limiter les effets de cette pollution, des campagnes de détection à différentes échelles de ces molécules dans l'eau, la nourriture ou d'autres substances se multiplient.

En outre, les législations nationales ou internationales évoluent et sont amenées à devenir de plus en plus strictes au fil du temps. Ces réglementations se traduisent entre autres par des seuils de concentration à ne pas dépasser dans l'eau potable ou dans certains aliments.

De surcroît, même si de nombreuses offres assurantielles en matière de pollution existent déjà, des couvertures spécifiques aux PFAS sont en cours d'étude (en Europe ou aux États-Unis par exemple), et quelques compagnies comme MunichRe ont déjà précisé des conditions de couverture.

Après ce bref aperçu de la question, nous allons donner plus de détails sur ces points.

4.1.1 Définition, propriétés chimiques et historique

Les *substances per- et polyfluoroalkylées*, désignées communément sous l'acronyme *PFAS* (issu de l'anglais « *Per- and PolyFluoroAlkyl Substances* »), ou le terme de « *composés perfluorés* », constituent une catégorie de molécules, dont certaines sont des polymères.

Ce sont des composés organofluorés synthétiques comportant au moins un groupement perfluoroalkyle $-C_nF_{2n}-$ (pour un entier $n \geq 1$). Grossièrement, cela revient à créer une molécule où sur tout ou une partie de la chaîne carbonée, on a remplacé les atomes d'hydrogène par des atomes de fluor.

Ils sont de nature *xénobiotique* : leur origine n'est pas propre à l'environnement, mais ils sont issus d'une production industrielle humaine.

Ils possèdent un aspect résistant et presque indestructible, car la liaison carbone-fluor est une des plus stables de la chimie organique. De la sorte, on les appelle parfois « polluants éternels », à cause de leur persistance dans les organismes vivants (dont le corps humain) et plus largement dans l'environnement, et de la difficulté à les en retirer ou à les éliminer.

Un exemple connu est le tétra-fluoroéthylène, parfois désigné par l'abréviation PTFE, ou par le terme de « Téflon » dans le langage courant (qui est à l'origine une marque déposée par la société américaine DuPont de Nemours).

De 2011 à 2021, la définition ce qu'est une molécule de PFAS a évolué au cours du temps. Certains chimistes de l'environnement (comme Pierre Labadie) préfèrent retenir la formulation datant de 2018 : elle compte « seulement » 4730 composants (dont 3000 déjà mis sur le marché), contre 10000 à 12000 pour celle de 2021 ; mais cette dernière regroupe aussi, par exemple, des produits pharmaceutiques ou des pesticides ne représentant en principe pas la même dangerosité que les PFAS correspondant à la définition de 2018.

En fait, le terme de « polluants éternels » est incorrect, bien que proche de la vérité. En effet, il n'y a que quelques dizaines de molécules qui persistent presque éternellement dans l'environnement - ce qui correspond à une durée de vie de quelques décennies à plusieurs siècles-, le reste a un temps de demi-vie compris entre quelques jours et quelques années. Il s'agit en général de molécules à très courte chaîne, mobiles et se répandant facilement dans l'environnement. Ainsi, les PFAS polymériques ne sont pas forcément toxiques, mais les non-polymériques le sont davantage. Cependant, ils sont tous « éternels » de manière directe ou indirecte, car les composés polymériques finissent toujours par se dégrader en des composés éternels (plus des éthers non toxiques). [Labadie \(2024\)](#)

D'autre part, d'un point de vue historique, les PFAS ont été synthétisés pour la première fois à la fin des années 1930 par cette même entreprise DuPont, contribuant notamment au développement de l'arme nucléaire. Remarquant les propriétés intéressantes de ces matériaux, notamment l'aspect antiadhésif, l'entreprise commercialise à partir de 1949 des objets à usage quotidien fabriqués à l'aide de ces molécules, comme des poêles en Téflon [Rosso \(2023\)](#). Ensuite, c'est à partir des années 2000 qu'on a cherché à agir sur l'environnement : on a alors commencé les premières campagnes de détection de ces produits, et à réfléchir à des alternatives possibles et aux moyens de réduire les émissions de produits dans la nature.

4.1.2 Dégâts causés et réparations potentielles

Parmi les risques certains de ces polluants éternels pour la santé humaine, on peut citer le cancer du foie, les maladies thyroïdiennes, les maladies inflammatoires de l'intestin, une augmentation du taux de cholestérol, des lésions au rein, de l'hypertension, la réduction de la production d'anticorps, la modification du métabolisme cellulaire, le diabète, ou l'infertilité. Un risque particulier qui touche les hommes est le cancer des testicules. Pour les femmes, on peut évoquer le vieillissement ovarien, le cancer du sein, ainsi que plusieurs risques liés à la grossesse et au futur enfant, notamment car ces molécules sont transmissibles de génération en génération via le lait maternel. Ainsi, les nourrissons pourront avoir un poids plus faible à la naissance, et les effets des vaccins seront moins efficaces sur eux [Etienne and Moisan \(2024\)](#), [Rosso \(2023\)](#).

De fait, les molécules prennent généralement beaucoup de temps pour être éliminées par le corps humain, car elles sont en permanence ré-absorbées dans la circulation sanguine, et elles pénètrent aisément dans les cellules [Lohmann et al. \(2020\)](#).

Toutefois, ces dégâts sur le corps humain ne semblent pas être encore reconnus officiellement dans tous les pays à l'heure actuelle, comme l'indique sur son site le réassureur GenRe.

Ces composés chimiques présentent aussi des conséquences néfastes sur l'environnement, en particulier sur la faune et la flore.

Ils ne sont pas métabolisés par les organismes en général, et présentent un caractère bioaccumulable et bioamplifiable : les animaux comme les végétaux ont la capacité de les ingérer et les stocker, et ainsi les transmettre à travers les chaînes alimentaires, ce qui fait que certaines espèces vivantes peuvent être contaminées indirectement. C'est le cas de l'homme en particulier, qui peut être contaminé par sa nourriture animale [Labadie \(2024\)](#).

Plus spécifiquement, la présence de composés perfluorés dans les végétaux, par exemple les plants de maïs ou de blé, risque de perturber les mécanismes de photosynthèse et de photorespiration, ainsi que d'entraîner un taux de germination moins important, une croissance plus lente, et un raccourcissement des racines.

D'autre part, plusieurs centaines d'espèces animales infectées par ces produits ont déjà été détectées : les molécules se distribuent alors dans différents organes (comme le foie ou les reins), dans certains tissus (dont les tissus adipeux), ou dans le sang. Ensuite, ils peuvent affecter les systèmes hormonaux et immunitaires, et traverser les barrières naturelles de protection interne, notamment la barrière hémato-encéphalique des vertébrés, servant à limiter le passage d'agents pathogènes ou de molécules toxiques du sang vers le cerveau. Les facultés cérébrales en sont potentiellement affectées : chez l'homme, cela se traduirait par une diminution des fonctions d'apprentissage et de mémoire.

Les émissions dans la nature par une entreprise fabricante ont lieu en général quand la synthèse chimique est mal contrôlée. Ces rejets peuvent aussi provenir de sites ou entreprises qui ne fabriquent pas directement les molécules, mais les utilisent pour concevoir des produits de manufacture, ou les consomment abondamment (telles que des usines de fabrication de poêle en Téflon, ou bien des casernes de pompiers ou des bases militaires, à travers l'utilisation de mousses anti-incendie). Il faut également faire attention à la gestion des déchets. En effet, un incinérateur moyen à 800°C est une source secondaire d'émission, car on recrée par cette combustion d'autres molécules dangereuses. Il faut à la place utiliser un incinérateur d'au moins 1300 °C pour éviter les déchets dangereux et minéraliser les PFAS.

On peut envisager de manière (très) localisée la décontamination d'un sol, typiquement sur une friche industrielle, mais à plus large échelle, le processus est encore difficilement concevable [Labadie \(2024\)](#).

Il est également possible de filtrer les eaux usées à l'aide de procédés utilisant des charbons actifs, mais il faut ensuite pouvoir se débarrasser proprement de ces filtres. En somme, selon les spécialistes, ces derniers ne semblent pas être une solution optimale [Chaudret et al. \(2025\)](#).

Autrement, on peut faire appel à des procédés divers de lavage des sols à l'aide de techniques physico-chimiques, ou utilisant des approches de traitement biologique. Les processus sont parfois lents, mais potentiellement plus économiques et durables que l'usage de charbons actifs [Berns et al. \(2024\)](#).

4.1.3 Objets concernés et localisation

Ces composants se retrouvent dans de nombreux produits utilisés parfois quotidiennement.

Le Téflon peut se retrouver dans des objets comme des poêles et d'autres ustensiles de cuisine, des embouts de cigarettes électroniques, de l'isolation de câbles électriques, des lubrifiants, ou encore tous les vêtements incorporant du Gore-Tex.

Autrement, on peut trouver plus largement les molécules de PFAS dans les ordinateurs, les batteries de véhicules électriques, les lentilles de contact, les farts de ski, le papier-toilette (à cause des lubrifiants présents), les imperméabilisants de vêtements ou de meubles, certaines peintures et certains vernis, des cosmétiques étanches, des emballages alimentaires plastiques [Barral \(2024\)](#), mais également les combinaisons de pompiers ou les mousses anti-incendie [Leclerc and Mandard \(2024\)](#).

De nombreuses cartographies ou relevés ont déjà été réalisés pour cerner plus précisément la localisation de ces molécules dangereuses.

Pour cela, il est possible de mesurer leur quantité dans différentes substances : l'air, l'eau, le sol, mais aussi des aliments comme les œufs ou les légumes, ou dans les organes de certains animaux (comme le foie).

Parmi les méthodes scientifiques de détection des molécules, on peut citer la chromatographie, la spectrométrie de masse, ou la spectrométrie de mobilité ionique [Labadie \(2024\)](#).

Certains exemples de cartographies interactives sont présentés en ligne, et recouvrent différentes échelles : française chez [Barral \(2024\)](#), ou [Rosso \(2022\)](#), européenne [Dagorn et al. \(2022\)](#), américaine [Carte de PFAS \(2024\)](#), ou mondiale [EWG \(2023\)](#).

Plus récemment, le 31 juillet 2025, le ministère français de la Transition écologique a publié une carte qui recense la présence de polluants éternels dans les cours d'eaux et les robinets du territoire français, regroupant les résultats de près de 2,3 millions d'analyses. Cette carte a pour but de renseigner la population concernant l'état de l'eau potable dans chaque commune, et détaille si les PFAS sont présents dans les eaux souterraines, les eaux superficielles, l'eau distribuée ou les sites industriels.

Cependant, les limitations de telles données est que cela demeure loin de couvrir l'ensemble d'un territoire. En effet, il serait extrêmement coûteux (en temps et en argent) d'avoir des cartes exhaustives à l'échelle d'un pays ou d'une région par exemple, on ne peut qu'obtenir des données locales éparses. Il faut donc viser des endroits stratégiques pour effectuer ces relevés.

En tout cas, il n'est pas absurde de supposer qu'ils sont à l'heure actuelle présents sur toute la surface du globe terrestre. En effet, ils peuvent être transportés à large échelle, par la circulation océanique, les courants atmosphériques, ou par d'autres fluides. En particulier, des traces sont retrouvées chez des espèces animales à de nombreux endroits différents du planisphère, notamment aux niveaux des cercles arctiques, alors qu'il n'y a pas de source émettrice à proximité. [EWG \(2023\)](#).

Nous allons désormais donner plus de détails sur la présence de ces molécules dans des zones géographiques précises.

En Europe, les chiffres de la carte [Dagorn et al. \(2022\)](#) témoignent d'un phénomène de propagation important : il y a seulement 20 sites qui produisent des molécules de PFAS en Europe (dont 5 en France), et en plus de ces producteurs, on recense 232 sites utilisateurs de PFAS (c'est-à-dire des sites industriels qui emploient les molécules pour fabriquer les produits mentionnés ci-dessus).

Au total, on a relevé près de 23000 sites géographiques « contaminés » par ces composés. Ils sont considérés comme tels quand la concentration locale en molécules perfluorées (toutes espèces confondues) dans l'eau supérieure à 10 ng/L. Parmi ces sites contaminés, environ 12000 correspondent à de l'activité anti-incendie, 4700 à du traitement de déchets, 3000 à des sites industriels, 1000 à des aéroports, et 640 à des sites militaires.

En particulier, on compte plus de 2100 points chauds (« hot spots ») où la concentration dépasse les 100 ng/L, ce qui correspond au seuil pour l'eau potable en vigueur à partir de 2026 dans l'Union Européenne.

En plus de tout cela, on estime à 21500 le nombre de sites présumés contaminés sans qu'on y ait déjà effectué des mesures. En la matière, des approches prudentes sont effectuées, ce qui fait que le nombre de contaminations de sites géographiques sera très souvent nettement sous-estimé.

En France, ces molécules sont utilisées par de très nombreuses usines, mais, comme mentionné ci-dessus, il n'y en a que 5 qui les fabriquent.

D'autre part, 2 de ces 5 entreprises fabricantes se situent sur la commune d'Oullins-Pierre-Bénite, au sud de Lyon (les sociétés Arkema et Daikin). En conséquence, dans une partie de l'agglomération lyonnaise, l'eau potable s'est retrouvée polluée aux perfluorés. En octobre 2022, on dénombrait une centaine de communes concernées, à des taux plus ou moins hauts, soit environ 200 000 habitants [Rosso \(2022\)](#). Plus précisément, 19 communes dépassaient la future norme européenne de 100 ng/L pour les 20 espèces principales de PFAS.

L'entreprise Arkema est particulièrement visée, attaquée en justice par 10 associations et 37 riverains de l'usine. En effet, une enquête menée par la chaîne France 3 Auvergne-Rhône-Alpes a révélé des concentrations importantes de molécules de PFAS dans le sang de ces riverains de la plateforme industrielle. De surcroît, les autorités locales déconseillent la consommation d'œufs, de légumes, ainsi que l'utilisation de l'eau souterraine et de l'eau de pluie dans un périmètre de 500 mètres autour de l'usine [Rosso \(2024\)](#).

D'autre part, toujours en France, les quantités de PFAS retrouvées demeurent assez faibles dans les déchets issus de l'agriculture (lisier de porc, fumier de volailles ou de vaches laitières) mais sont élevées dans les déchets urbains et industriels [Berns et al. \(2024\)](#). En revanche, en Allemagne, la dépollution des PFAS présents dans le sol et l'eau à cause du secteur agricole est une affaire d'importance, le coût est de 30 à 40 millions d'euros [Vanbeneden \(2024\)](#).

Il existe d'autres exemples dans le monde de sites de contamination importants.

En Belgique, le site de la multinationale 3M a engendré des fuites de produits chimiques qui se sont infiltrés dans la nappe phréatique d'une des usines [Vanbeneden \(2024\)](#).

En Suède, le fournisseur d'eau potable Ronneby Miljöteknik a engendré la contamination de Kallinge, une ville avoisinant une de leur stations d'épuration. On a relevé des taux de PFAS dans l'eau supérieurs à 10 000 ng/L, soit plus de 100 fois la norme locale de 90 ng/L en vigueur lors de la découverte en 2013 (depuis, la norme est passée à 4 ng/L). Là encore, certains habitants ont des niveaux très élevés de PFAS dans le sang, et plusieurs ont souffert de maladies telles que le cancer [Vanbeneden \(2024\)](#).

Aux États-Unis, il y a l'exemple très connu du site de la compagnie DuPont de Nemours, près de Philadelphie, qui pour rappel fut l'entreprise pionnière à l'échelle mondiale concernant la production de PFAS. Certains échantillons d'eau prélevés à proximité ont parfois dépassés une concentration en PFAS de 300 000 ng/L. Dans d'autres endroits du pays, de telles concentrations s'élèvent parfois à plusieurs millions de ng/L, à proximité d'aéroports ou de bases militaires [Carte de PFAS \(2024\)](#).

4.1.4 Réglementation

Il n'existe pas pour l'instant de réglementation uniforme à l'échelle mondiale concernant les composés perfluorés. Celle qui soit la plus globale est la convention de Stockholm, signée par 152 pays et appliquée depuis 2004. Ainsi, les seuils de dangerosité peuvent varier selon si l'on se trouve dans l'Union Européenne ou aux États-Unis par exemple, et même au sein de l'UE, chaque pays peut imposer des seuils plus stricts que ceux prévus à l'échelle continentale. Ces normes devraient sans cesse être revues à la baisse, donc devenir plus exigeantes au fil du temps.

Il existe notamment des normes à l'échelle française ou européenne caractérisant la concentration maximale dans l'eau potable, ou dans certains aliments d'origine animale. Les seuils peuvent alors concerner les PFAS dans leur ensemble, ou seulement certaines molécules parmi les plus répandues (comme le PFOA, le PFOS, le PFNA ou le PFHxS).

Comme évoqué auparavant, une norme promulguée par l'Union Européenne appliquée à partir du 1^{er} janvier 2026 prévoit une concentration maximale dans l'eau potable de 100 ng/L pour 20 des espèces principales de PFAS (dont les 4 ci-dessus), et de 500 ng/L pour la somme de toutes les espèces de PFAS, selon [Johansson and Hermann \(2023\)](#).

Pour les aliments, la norme actuelle européenne est en vigueur depuis le 1^{er} janvier 2023. Elle exige que la somme des 4 espèces mentionnées ci-dessus ne dépasse pas (à l'état frais) 50 $\mu\text{g}/\text{kg}$ pour la chair d'animaux aquatiques, les viandes et les abats comestibles - parfois moins selon les espèces. Toutefois, dans la pratique, l'EFSA (l'autorité européenne de sécurité des aliments) recommande actuellement de ne pas dépasser en moyenne 4,4 ng/kg de poids corporel (i.e rapporté au poids de la personne consommatrice) pour 4 des principaux PFAS (dont le PFOS et le PFOA), ce qui est bien en-dessous de cette valeur de 50 $\mu\text{g}/\text{kg}$. [Johansson and Hermann \(2023\)](#)

En revanche, pour le moment, on ne dispose pas de seuil pour déterminer la dangerosité de la présence des PFAS dans les sols [Rosso \(2023\)](#).

Toutefois, certains pays de l'UE cherchent déjà à imposer des normes plus strictes que celles prévues pour 2026 concernant l'eau potable. Le Danemark, les Pays-Bas, la Suède et la Flandre ont toutes une norme inférieure à 4,4 ng/L pour les 4 PFAS principaux cités ci-dessus, tandis qu'en Allemagne elle est de 20 ng/L, et en Espagne de 70 ng/L [Johansson and Hermann \(2023\)](#).

À partir du 1er janvier 2026, en France, les collectivités auront l'obligation d'informer les habitants sur ces risques, d'évaluer l'eau du robinet afin de détecter la présence éventuelle des 20 espèces principales de perfluorés, et d'agir pour tenter de réduire cette pollution si un certain seuil est dépassé [Barral \(2024\)](#).

En plus de ces réglementations concernant la nourriture, les interdictions pourraient concerner directement certains produits industriels.

Récemment, le 27 février 2025, une loi française (la loi n°2025-188) a été votée pour chercher à endiguer les effets néfastes des composés perfluorés. Avec l'adoption de ce texte, la France s'affirme ainsi comme un pays pionnier contre les polluants éternels, au moins à l'échelle européenne. Elle prévoit, à compter du 1^{er} janvier 2026, l'interdiction de la fabrication, de l'importation et de la vente de tout produit cosmétique, textile d'habillement ou produit de fart pour skis contenant des perfluorés. Cette interdiction sera étendue au 1^{er} janvier 2030 à tous les textiles (d'ameublement, par exemple). Le texte instaure également une taxe ciblant les industriels dont les activités entraînent des rejets de PFAS, appliquant ainsi le principe du « pollueur-payeur ». Il faut préciser que ces interdictions se réfèrent à des seuils, de manière à ne pas pénaliser des objets qui contiendraient seulement des « traces » de ces molécules. De plus, un contrôle et des sanctions administratives en cas de violation des nouvelles interdictions posées par la loi sont prévus. Encore une fois, des exceptions seront autorisées pour les textiles à usage « essentiel », comme les tenues de pompiers ou militaires.

Autrement, les directives européennes ont interdit l'usage du PFOS en 2013, de 20 types de PFAS en 2020, et ont élargi cela à 24 espèces en 2023. Parfois, les grandes firmes fabricantes ont arrêté leur production avant ces mesures, conscientes des dégâts déjà causés et à réparer. Par exemple, la multinationale 3M (implantée en Belgique entre autres) avait déjà arrêté la production de PFOS en 2000, et prévoit d'arrêter complètement l'usage de ces substances d'ici fin 2025 [Labadie \(2024\)](#). À ce sujet, certaines entreprises vont même plus loin : afin d'éviter d'éventuelles procédures judiciaires, et devoir subir trop lourdement ce principe du pollueur-payeur, certains industriels prennent les devants et proposent spontanément de financer une partie de la dépollution. 3M a annoncé être prête à payer entre 10,5 et 12,5 milliards de dollars pour leur pollution de l'eau publique [Fletcher \(2024\)](#). Comparativement, aux États-Unis, les entreprises Chemours, DuPont et Corteva ont payé en 2023 une amende de près de 1,2 milliards de dollars pour solder les poursuites dont elles faisaient l'objet [Barral \(2024\)](#).

Aux États-Unis, la réglementation de plus de 30 États interdit déjà de manière large l'utilisation des PFAS en visant certains secteurs d'activité, comme ceux du textile, ou de la cosmétologie, [Vanbeneden \(2024\)](#). En ce sens, ils sont précurseurs par rapport aux pays européens.

À l'échelle globale, les composés perfluorés sont également réglementés et interdits par certains accords internationaux, comme la convention d'Aarhus signée par 39 États en 1998, puis par la convention de Stockholm sur les polluants organiques persistants (déjà mentionnée ci-dessus). Cette dernière, signée en 2001 par 152 pays (dont de nombreux pays européens), n'est pas figée et a connu des évolutions, afin d'assurer au mieux la protection de l'environnement et de l'être humain de certains produits dangereux. Ainsi, en parallèle des directives européennes, la convention de Stockholm a prohibé l'usage du composé PFOS en 2009 sauf pour certains cas jugés « acceptables ». Même chose pour le PFOA en 2019, en revanche, le PFHxS a été entièrement interdit en 2022.

En somme, il est tout à fait possible que soit déclarée dans les prochaines années une interdiction totale des composés perfluorés, ou du moins, ces interdictions entières pourraient viser certains domaines industriels ciblés. En effet, le fait de ne pas les interdire entièrement du marché fait que certains jugés dangereux et prohibés pourraient être remplacés par d'autres dans la dangerosité n'est pas encore évaluée et attestée, sauf que cela ne fait que déplacer le problème, car comme conformément aux propriétés chimiques énoncées ci-dessus, ils devraient finir par se dégrader en des composés dangereux et éternels. Un certain nombre de pays dont l'Allemagne, le Danemark et la Suède ont déjà proposé une interdiction de l'ensemble des PFAS par l'Agence européenne des produits chimiques (ECHA), sauf pour les usages dits « essentiels » comme la médecine ou la transition énergétique, mais cette initiative n'est pas soutenue par la France pour le moment [Barral \(2024\)](#).

4.1.5 Couvertures assurantielles proposées à l'heure actuelle

Les couvertures assurantielles proposées à l'heure actuelle diffèrent selon les zones géographiques : par exemple, selon si l'on est en France, dans l'Union Européenne, ou aux États-Unis.

La question des PFAS pourra susciter des cas complexes : en effet, la pollution générée par un site industriel donné traversera possiblement des frontières entre différents pays ou États, typiquement par la voie d'un cours d'eau. En outre, les exclusions s'appliquant à la notion de pollution de l'environnement n'étaient pas les mêmes pour des contrats souscrits dans la deuxième moitié du XX^{ème} siècle qu'au XXI^{ème} siècle.

L'importance de la question, associée à sa nouveauté, fait que des couvertures exclusives (ré)assurantielles vis-à-vis de ces composés sont actuellement étudiées. Différents types de polices seraient mises en jeu en termes de responsabilité civile (RC) : RC Entreprises et Collectivités, RC Produits, RC Employeurs, RC Mandataires sociaux... De plus, il existe plusieurs offres assurantielles auquel on peut souscrire : sectorielle, offre dédiée pollution, ou offres de pollution accidentelle et graduelle.

Ceci dit, les libellés des exclusions sont difficiles à rédiger en raison de l'omniprésence des molécules et de leur capacité à s'infiltrer dans le sol et dans les eaux. C'est une des raisons pour laquelle certaines entreprises préfèrent instaurer des exclusions totales ou presque.

D'une manière générale, en lien avec des idées déjà mentionnées, et selon le réassureur GenRe, les organismes qui pourraient être touchés par de lourds dédommagements financiers à l'État ou à des tiers, et donc susciter des remboursements potentiels de la part de leurs assureurs seraient, en plus des entreprises synthétisant les molécules, ceux qui les utilisent pour fabriquer des objets pratiques, ou des grands « consommateurs » de ces objets comme les aéroports ou les bases militaires. Il faudra prendre en compte les activités commerciales d'une entreprise ou d'un organisme, ainsi que celles de ses fournisseurs et de ses filiales ou succursales.

D'autre part, dans la mesure où les assureurs cherchent de plus en plus à limiter la couverture des expositions liées aux PFAS à l'avenir, il sera également important de déterminer les dates de l'activité polluante d'une entreprise qui voudrait se prémunir, pour voir quelle législation est

valable. Il faudra si nécessaire remonter cela jusqu'au début des années 50 dans ces examens, c'est-à-dire au moment où les premiers composants perfluorés sont apparus sur le marché. De fait, un contrat valable au moment où des émissions ont été générées, et sans exclusion spécifique aux PFAS, pourrait occasionner une obligation de la part de l'assureur de rembourser les dommages d'une société, même si c'était il y a plusieurs décennies et que cette dernière a changé d'assureur entre temps.

En outre, du fait des législations gouvernementales qui évoluent ou de ces polices d'assurance passées, certaines industries utilisant des perfluorés (sans en fabriquer), et qui se pensaient exemptes de ces problèmes, pourraient, avec leur assureur potentiellement, se retrouver « piégées » et devoir réparer de nombreux dégâts [Fletcher \(2024\)](#).

Evoquons désormais les régimes spécifiques propres à certaines parties du monde.

En France, trois régimes de réparation coexistent pour la réparation des préjudices causés par une atteinte à l'environnement : D'abord, la « RC Atteinte à l'Environnement » (un régime de droit civil visant à réparer les dommages causés à des tiers), ainsi que la « responsabilité environnementale », et le « préjudice écologique » (respectivement des régimes de droit administratif ou civil qui visent à l'indemnisation de dommages causés non à des tiers, mais à l'environnement lui-même). Pour ces deux derniers cas, l'indemnisation se fait selon le principe du pollueur-payeur [Vanbeneden \(2024\)](#).

Plus largement, à l'échelle européenne, une nouvelle directive concernant les produits défectueux, approuvée en septembre 2022 et en vigueur au bout de 24 mois, prévoit un champ d'application large. Selon les cas, il pourrait y avoir une réparation intégrale des préjudices, un assouplissement de la charge de la preuve, ou un allongement du délai de prescription. Ceci dit, cette directive renvoie également au droit national des États membres pour fixer certaines règles, notamment au regard du principe de réparation intégrale des préjudices corporels et matériels.

Les États membres doivent prévoir une indemnisation complète et adéquate de tous les préjudices matériels résultant d'un décès, d'un dommage corporel ou aux biens, et fixer les règles de calcul pour l'indemnisation des préjudices. En revanche, ils sont libres d'indemniser ou non les préjudices moraux liés aux dommages.

D'autre part, en suivant l'idée de la difficulté d'établir les libellés des exclusions, en août 2022, la Lloyd's Market Association a publié deux clauses similaires visant à exclure de façon presque totale la responsabilité de l'assureur ou du réassureur en matière de dommages consécutifs aux PFAS.

En revanche, en droit français des assurances, une exclusion doit être limitée. Le réassureur MunichRe a aussi prévu des exclusions limitées, par exemple [Vanbeneden \(2024\)](#).

Aux États-Unis, les législations et les seuils dépendent de chaque État [Chesler and Horkovich \(2021\)](#), [Chesler et al. \(2021\)](#).

Avant 2024, pas plus de 12 États s'étaient penchés sur une telle régulation. Donc l'idée de couverture assurantielle spécifique n'est pas encore présente partout, même si c'est en train de se répandre (comme en Europe).

Auparavant, des réglementations ou politiques assurantielles en matière de pollution ont été promulguées en 1973 et 1986. Par ailleurs, selon les situations, on prendra en compte la législation de l'État où les dégâts ont eu lieu, de celui où se trouve le siège principal du client assuré, ou bien de celui où le contrat d'assurances a été souscrit. En la matière, on peut dire que certaines compagnies sont devenues ou pourraient devenir des « archéologues de l'assurance » [Chesler and Horkovich \(2021\)](#).

4.1.6 Perspectives d'avenir

En guise de conclusion, on peut dresser un agenda du travail à mener pour lutter contre la pollution liée aux PFAS.

Il est nécessaire que la communauté scientifique poursuive les études et l'acquisition des données là-dessus, ne serait-ce que car l'environnement constitue une source indirecte de contamination aux PFAS pour l'homme, à travers son alimentation par exemple. Notamment, ce serait une très bonne chose de diversifier les méthodes de nettoyage de l'environnement afin de retirer les molécules de celui-ci, en trouvant des procédés plus efficaces que ceux connus actuellement.

Bien évidemment, il faut que les industries sachent maîtriser leurs procédés, et réduisent autant que possible les émissions, pour protéger à la fois l'environnement, mais aussi les employés directement exposés à ces produits. Même si la dangerosité est connue depuis plusieurs décennies, et que l'environnement est sûrement voué à contenir éternellement ces molécules, la lenteur du processus de dépollution est dû au fait qu'il y a une forme de confort professionnel pour les entreprises à retarder le moment où elles devront substituer des produits dangereux, mais manufacturés efficacement et par des procédés bien connus, à d'autres méthodes n'utilisant pas les perfluorés [Etienne and Moisan \(2024\)](#), [Rosso \(2023\)](#), [Rosso \(2024\)](#).

Cependant, les instances politiques et administratives jugent difficile d'interdire complètement ces produits-là pour des raisons pratiques, du moins à court terme. En effet, certaines matières n'ont pour le moment pas d'alternative crédible (le Gore-Tex, ainsi que d'autres substances utilisées dans le domaine militaire).

Toutefois, il est possible d'informer les populations de ces dangers-là, et d'éclairer le consommateur sur ses choix au quotidien pour limiter sa propre contamination. En particulier, certaines marques fabriquent des produits similaires à ceux utilisant des PFAS, mais sans de tels composés, et en font un argument de vente : typiquement, pour des poêles de cuisson [Labadie \(2024\)](#).

4.2 Empreinte carbone de la gestion de sinistres automobiles

On s'intéresse également, dans le cadre de cette thèse, à l'empreinte carbone issue de la gestion de sinistres dans le cadre de l'assurance automobile.

En effet, avec près d'un tiers des émissions de CO₂ en France, le secteur des transports est le premier contributeur aux émissions de gaz à effet de serre sur notre territoire. En outre, la loi Agec (Anti-gaspillage pour une économie circulaire) a défini en 2020 le cadre des ambitions en matière de lutte contre le gaspillage et de transition vers une économie circulaire, en permettant la démocratisation et le développement des filières de réparation et de réemploi. Elle propose entre autres des garanties presque systématiques dans le cas d'une réparation, ou d'utilisation de produits remanufacturés, au même titre que les produits neufs, mais aussi facilite le recours aux pièces issues de l'économie circulaire (appelées « *Piec* » par la suite), en lien avec l'article R224-22 du Code de la consommation qui oblige notamment les réparateurs à proposer une *Piec* en premier lieu lorsqu'un véhicule endommagé doit subir le remplacement d'une ou de plusieurs de ses pièces (sous réserve de disponibilité) [Livre Blanc \(2024\)](#).

De surcroît, on peut noter qu'à l'échelon européen, les acteurs de tous secteurs (selon leur taille) sont désormais tenus de mesurer et de communiquer leurs émissions de gaz à effet de serre dans le cadre de la CSRD (Corporate Sustainability Reporting Directive, valable depuis le 1er janvier 2024).

Pour cela, on se fonde sur deux ressources principales : le Livre Blanc [Livre Blanc \(2024\)](#), sous-titré « la réparation durable en automobile », et un rapport publié par la compagnie Allianz en janvier 2023 intitulé « *Repair or Replace – Investigating the relative GHG emissions of vehicle part repair vs. replacement* », [Allianz \(2023\)](#).

Le Livre Blanc est le fruit d'un travail conjoint mené par différents acteurs français, et publié en 2024. Parmi ces partenaires se trouvent aussi bien des compagnies d'assurance que des entreprises spécialisées dans différents aspects techniques de la réparation d'une automobile. Il existe deux versions complémentaires dont nous nous sommes servis : la version officielle datant de mai 2024, et une version plus courte distribuée à l'occasion d'une conférence donnée à l'institut Louis Bachelier en septembre 2024 par les différents collaborateurs pour présenter les résultats et les conclusions de l'étude associée. Les acteurs incluent notamment AkzoNobel, Assercar, Back2car, BCA Expertise, le Crédit Agricole Assurances, l'institut Louis Bachelier, Europ Assistance France, Valeo, le Groupe Covéa, la FRCI, la SRA, et France Pare-Brise.

L'objectif de ce Livre Blanc est de donner des détails sur les possibilités en ce qui concerne la gestion d'un sinistre automobile, notamment sur ce qu'il peut advenir d'un véhicule dont la réparation est jugée trop difficile, ou bien trop coûteuse et donc pas assez rentable, ou au contraire sur les différentes étapes d'une éventuelle réparation. On cherche notamment à quantifier tout cela en termes de bilan carbone, en détaillant la méthodologie adoptée pour faire ces évaluations, et trouver des solutions pour réduire les émissions de certaines parties du procédé quand c'est faisable.

Si un véhicule est considéré comme trop usé, on peut chercher à donner une seconde vie aux pièces de celui-ci qui ne sont pas touchées par l'accident. Ces pièces réutilisables sont récupérées dans un centre pour VHU (véhicules hors d'usage), et pourront être distribuées en tant que Picc, avant que le reste de la carcasse soit transmis à un centre de broyage. Environ 1,3 millions de véhicules sont ainsi traités chaque année en France.

Autrement, si le véhicule est réparable (sans que ce soit trop coûteux), on mesure pour chacune des parties du processus sa fréquence d'occurrence par sinistre, et les émissions en dioxyde de carbone associées.

D'abord, on observe l'assistance apportée à la personne victime d'un sinistre. Si le véhicule n'est pas apte à se rendre au garage sans aide, il faut en général déployer un remorquage, proposer au client assuré un déplacement en taxi ou un véhicule de remplacement. Pour quitter les lieux du sinistre. L'usage du véhicule de remplacement peut être conservé par le client durant la période de réparation afin d'être autonome.

D'autre part, une expertise est effectuée pour constater l'ampleur des dommages. Les expertises à distance ont tendance à se développer, et sont moins émissives qu'une expertise faite sur place.

Ensuite, la remise en état d'un véhicule consiste en la réparation ou le remplacement de certaines pièces. Comme nous l'avons mentionné précédemment, pour ces remplacements, on peut choisir des pièces toutes neuves, ou bien des Picc, permettant la réutilisation de pièces encore fonctionnelles ayant appartenu à un autre véhicule.

Enfin, quand tout est remis en état, il faut parfois appliquer de la peinture pour rendre au véhicule son esthétique d'origine.

Le Livre Blanc mentionne au passage les principaux freins et réticences à l'usage des Picc. Cela concerne surtout la logistique d'acheminement, la disponibilité des pièces ou encore la perception du client. Même si la sensibilité aux arguments environnementaux gagne du terrain, les questions de traçabilité et de sécurité sont récurrentes. Un accompagnement par l'assureur semble ainsi nécessaire pour rassurer sur ces pièces et inciter à se diriger vers le réemploi. Afin de dynamiser cela, son rôle doit être de synchroniser l'offre et la demande, donner des indications claires au recycleur et au réparateur, sensibiliser le client à la réparation durable, ainsi que valoriser les réparateurs et les former régulièrement.

Quant au rapport proposé par Allianz, il se nourrit de données récoltées à travers des études menées en France, au Royaume-Uni, en Italie, et en Allemagne, et correspondant à l'analyse d'un peu plus de 48 millions de sinistres automobiles. Les données sur le territoire européen

dans son ensemble sont ensuite déduites par extrapolation. Cependant, il se focalise uniquement sur les processus de réparation et de remplacement de pièce, et ne s'intéresse pas aux autres opérations d'un sinistre automobile telles que l'assistance.

Comparativement au Livre Blanc, ce rapport fournit davantage de détails sur les émissions de carbone par pièce. En effet, les émissions de carbone sont ici précisées pour huit des principales pièces concernées par les opérations en question, telles que les feux de circulation, ou différentes parties de la carrosserie.

Toutefois, parmi l'opération de remplacement de pièce, ce rapport ne fait pas la distinction entre les pièces neuves ou l'éventuelle réutilisation de composants du type *Piec*.

Par la suite, en demandant aux concepteurs du Livre Blanc plus d'informations, nous avons pu obtenir le nom des douze pièces les plus touchées par ce type d'opération, mais sans pour autant obtenir les chiffres par pièce.

En lien avec le travail mené dans cette thèse, dans le chapitre 3, après l'étude du modèle faisant intervenir un processus BINAR(1), on propose une étude se focalisant sur l'opération de remplacement de pièces. En effet, le Livre Blanc propose déjà certains leviers d'action pour réduire le bilan carbone de tout le processus de gestion d'un sinistre en l'état actuel, et nous ne pouvons pas proposer grand-chose de plus pour certaines activités. De plus, au regard des chiffres donnés, c'est sur le plan quantitatif un des secteurs de la réparation où il y a une grande marge de progression potentielle. Nous cherchons à quantifier les coûts à la fois financiers et environnementaux selon la proportion de *Piec* utilisées (par rapport aux pièces neuves) dans les opérations de remise en état.

Nous proposons à la fois des résultats numériques, ainsi qu'un modèle théorique décrivant la gestion d'une telle activité, qu'on compare dans le chapitre mentionné avec le modèle utilisant un processus BINAR(1). Pour plus de détails, ces deux modèles sont présentés en section 5.3 de cette introduction.

Du point de vue de l'assureur, il est bien sûr important de chercher à minimiser le montant des sinistres, mais du point de vue de la société en général, on espère surtout que les effets négatifs sur l'environnement soient limités, c'est-à-dire que la quantité de carbone émise soit minimale.

Il faut concilier ces deux points de vue, et un tel problème peut être l'occasion de tisser des liens entre la notion de modèle multivarié (ici, bivarié), et d'autre part des Objectifs de développement durable (tels que l'action climatique) ou la notion d'Enterprise Risk Management. Cela est détaillé dans la section suivante.

5 Notion de modèle multivarié

Nous nous intéressons désormais à la notion de modèle multivarié.

Les grandes compagnies d'assurance sont rarement spécialisées dans un seul secteur. Ainsi, de nombreuses extensions du modèle original de Cramér-Lundberg sous la forme d'un processus stochastique dans un espace de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ quelconque ont été proposées en théorie de la ruine, afin de décrire les différentes branches d'activités d'une compagnie.

Comme détaillé dans les motivations données ci-dessous, un modèle multidimensionnel permet aussi de répondre à des besoins actuels d'anticiper l'évolution conjointe de différents risques ayant des répercussions à grande échelle, en particulier dans une perspective de développement durable et de changement climatique.

5.1 Motivations

En 2015, l'ONU a proposé un vaste programme établi conjointement par les États membres des Nations unies en ce qui concerne le développement durable, « l'Agenda 2030 ». Il regroupe notamment 17 grands objectifs à atteindre d'ici l'an 2030, divisés eux-mêmes en 169 cibles secondaires au total. On désigne couramment ces 17 Objectifs de Développement Durable par l'acronyme ODD, ou SDGs en anglais (pour « Sustainable Development Goals »). Parmi ces 17 ODD, on peut citer le bien-être et la santé des personnes, l'action en faveur du climat, ainsi que divers objectifs de protection de l'environnement, et d'éducation des personnes.

Ces problématiques de développement durable interviennent dans la notion d'Enterprise Risk Management, ou ERM, qu'on pourrait traduire tout simplement par « gestion des risques d'entreprise ».

Cela désigne un ensemble de principes et de procédures par lequel on va gérer de manière conjointe et complète l'ensemble des risques critiques d'une entité ou d'une collectivité du point de vue de toutes les parties prenantes : par exemple les actionnaires s'ils existent, les employés, les clients, les parties régulatrices et juridiques, ou plus largement la société dans son ensemble. Le risque en ERM est défini par les effets de l'incertitude sur des objectifs stratégiques à atteindre. La bonne gestion et l'anticipation des risques contribue à assurer la pérennité d'une entreprise ou de la société.

Bien sûr, ce cadre théorique de l'ERM est abstrait, et les risques varient d'une entité à l'autre. Parfois, ils peuvent être de nature interne, et spécifiques à l'entreprise, tels que des dysfonctionnements techniques de l'équipement. Les risques externes peuvent à la fois être des catastrophes naturelles, des épidémies, des changements macroéconomiques, des cyber-attaques, ou les agissements d'entreprises concurrentes.

Les objectifs stratégiques des sociétés d'assurance incluent certains des 17 ODD, et, du fait qu'on doit tenir compte de toutes les parties prenantes, il est important en science actuarielle de s'intéresser non seulement aux risques de perte financière, mais également aux effets des décisions prises par les compagnies sur la santé des personnes ou sur l'environnement (notamment en matière de pollution et d'émissions de carbone). Cela justifie le besoin de s'intéresser à des approches multivariées puisque la santé et la pollution ne sont pas pareillement substituables ou réparables par un même investissement financier. En outre, ces risques-là peuvent naturellement présenter des corrélations, donc on s'intéressera, dans le cadre de cette thèse, aux liens entre des pertes financières et de potentiels effets sur la santé d'une population ou sur l'environnement (cela inclut aussi bien la thématique des PFAS que les émissions de carbone dans l'assurance automobile).

D'autre part, en théorie de la ruine, dans le cadre d'un modèle multivarié, les différentes branches décrivent en général des données monétaires. Or, dans la littérature d'économie du risque, est parfois adoptée une approche multivariée dans laquelle peuvent intervenir des données non monétaires comme la santé humaine ou l'état de l'environnement. On parle parfois aussi de risque « non-assurable », dans la mesure où une compensation ou un investissement financier (même bien ciblé) seraient insuffisants pour recouvrer un état d'origine associé au risque donné, suite à des dommages ou une dégradation. On peut citer [Courbage and Rey \(2007\)](#) ou [Eeckhoudt et al. \(2007\)](#), ou bien [Rey \(2003\)](#) en ce qui concerne l'idée du risque non financier uniquement.

En lien étroit avec cela, la notion de risque sous-jacent (« background risk ») désigne un risque secondaire émanant d'un risque principal ou étudié au premier plan dans un certain contexte. Ici, le terme « secondaire » n'implique pas forcément de moindre importance, mais simplement dont la présence ou l'intervention au sein d'un problème ne surgit pas au premier abord. De plus, ce risque sous-jacent est parfois non-assurable. Toujours dans la littérature en économie

du risque, [Doherty and Schlesinger \(1983\)](#), [Malevergne and Rey \(2010\)](#), ou [Courbage and Rey \(2012\)](#) étudient cette notion.

Toutes ces thématiques, qui à grande échelle incluent nécessairement des préoccupations liées aux ODD, doivent entre autres inciter les compagnies d'assurance (mais aussi plus largement la société et les institutions) à ne pas gérer des risques de manière séparée ou unilatérale, ou à ne considérer les choses sur le plan d'une optimisation financière. Il faut, en plus de ces aspects financiers, toujours prendre en compte les évolutions potentiellement corrélées de phénomènes pesant sur les personnes ou l'environnement.

5.2 Définition générale de modèle multivarié

L'ouvrage [Joe \(1997\)](#) évoque amplement les distributions multivariées avec des propriétés associées, en insistant notamment sur les formes de dépendance possibles. Ces distributions multibranches sont aussi présentées chez [Denuit et al. \(2004\)](#).

Un modèle multivarié, sous sa forme la plus classique, s'écrit sous la forme d'un processus $R(t) = (R_1(t), \dots, R_d(t))$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , où $d \in \mathbb{N}^*$, pour $t \in \mathbb{R}_+$. Chacune des branches R_j est décrite sous la forme d'un processus de Poisson composé comme dans l'équation 1 :

$$R_j(t) = u_j + c_j \cdot t - \sum_{i=1}^{N_j(t)} X_{j,i}.$$

Autrement dit, chaque branche $j \in \{1, \dots, d\}$ possède en propre sa réserve initiale $u_j \geq 0$, son taux de prime $c_j > 0$, un processus de Poisson $N_j(\cdot)$ comptant le nombre de sinistres survenus à chaque instant, et une suite représentant les montants de sinistres subits dans cette branche $(X_{j,i})_{i \in \mathbb{N}}$. Sans hypothèse supplémentaire, on peut supposer par défaut que les suites X_j sont chacune i.i.d., que X_j est indépendante de N_i pour tous $1 \leq i, j \leq d$, et que les suites X_j et X_i sont indépendantes dès que $i \neq j$.

Bien sûr, il est possible d'affiner ce modèle de base, et de faire intervenir certaines formes de dépendance au sein d'une même branche ou entre les différentes branches, mais nous rentrerons plus loin dans les détails.

En outre, cette notion de modèle multivarié en temps continu peut aussi bien s'étendre en temps discret, d'une manière similaire à ce qui est proposé en section 1.2.

Comme travaux notables sur les modèles multivariés, on peut d'abord citer des travaux sans hypothèse de dépendance notable. [Avram et al. \(2008\)](#) étudie un modèle bivarié, représentant à la fois une compagnie d'assurance et son réassureur. D'autre part, [Collamore \(1996\)](#) ou [Borovkov and Mogulskii \(2001\)](#) s'intéressent à la probabilité pour un processus en temps discret de prendre une valeur à un moment donné dans un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ quelconque. On peut tisser des liens ensuite, si on voit de manière large la notion de ruine multivariée comme le fait d'atteindre un certain sous-ensemble à un moment donné. Toutefois, nous verrons ci-dessous des définitions bien plus classiques de probabilités de ruine multivariées. En outre, [Huzak et al. \(2004\)](#) étudie le problème suivant : en considérant un modèle unidimensionnel où les pertes sont distinguées en d sommes agrégées indépendantes de montants (ce qui revient à étudier ψ_{sum} définie ci-dessous), on cherche à savoir quelle est la branche qui a causé la ruine quand celle-ci survient.

D'autre part, une des thématiques en lien avec les modèles multivariés est le problème de l'allocation optimale, qui consiste à trouver la meilleure répartition initiale de richesse pour que la compagnie soit solvable avec des branches équilibrées, ce qui est étudié dans [Loisel \(2005\)](#) par exemple.

De surcroît, on pourrait en soi considérer que les modèles unidimensionnels avec des sinistres secondaires présentés en sections 2.4 ou 3 sont des formes de modèle bivariés avec de la dépen-

dance, dans la mesure où ils prennent en compte deux types de pertes différentes. La probabilité de ruine associée dans ce cas serait ψ_{sum} (cf ci-dessous).

Plus de références seront citées lorsque nous évoquerons ci-dessous la notion de dépendance pour un modèle multivarié.

Le fait d'avoir plusieurs branches pour un tel modèle offre différentes manières d'évaluer la ruine. On note, pour $1 \leq j \leq n$, le temps d'arrêt suivant :

$\tau_j(u_j) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+^* / R_j(t) \leq 0 \mid R_j(0) = u_j\} \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Cela nous permet de définir les probabilités de ruine suivantes, introduites notamment dans [Biard \(2010\)](#), en fonction de $u = (u_1, \dots, u_j) \in \mathbb{R}^d$, le vecteur de réserve initiale :

- $\psi_{and}(u) = \mathbb{P}(\tau_{and}(u) < \infty)$, où $\tau_{and}(u) = \max_{1 \leq j \leq d} \{\tau_j(u_j)\}$.
- $\psi_{or}(u) = \mathbb{P}(\tau_{or}(u) < \infty)$, où $\tau_{or}(u) = \min_{1 \leq j \leq d} \{\tau_j(u_j)\}$.
- $\psi_{sum}(u) = \mathbb{P}(\tau_{sum}(u) < \infty)$, où $\tau_{sum}(u) = \inf \left(t \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{j=1}^d R_j(t) \leq 0 \right)$.
- $\psi_{sim}(u) = \mathbb{P}(\tau_{sim}(u) < \infty)$, où $\tau_{sim}(u) = \inf \left(t \in \mathbb{R}_+, \max_{1 \leq j \leq d} R_j(t) \leq 0 \right)$.

Comme suggéré par ces dénominations, ψ_{or} détermine la probabilité que la ruine soit survenue dans au moins l'une des branches, ψ_{and} qu'elle soit survenue au moins une fois dans chacune des branches, ψ_{sim} qu'elle survienne simultanément dans toutes les branches à un instant donné, et ψ_{sum} est associée à la ruine de la réserve cumulée par la compagnie à travers chacune de ses branches, vu comme un processus unidimensionnel.

On définit aussi la probabilité de ruine relative à chaque branche j : $\psi_j(u_j) = \mathbb{P}(\tau_j(u_j) < \infty)$. De manière quasi immédiate, nous avons les inégalités, pour $j \in \{1, \dots, d\}$:

$0 \leq \psi_j(u_j) \leq \psi_{or}(u)$ pour tout j , ainsi que $0 \leq \psi_{sim}(u) \leq \psi_{sum}(u) \leq \psi_{or}(u) \leq 1$, et $0 \leq \psi_{sim}(u) \leq \psi_{and}(u) \leq \psi_{or}(u) \leq 1$.

Parmi celle-ci, dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés surtout à la probabilité de ruine ψ_{sum} , et pas du tout à ψ_{sim} .

5.3 Modèles bivariés étudiés dans cette thèse

Nous présentons ici deux modèles multivariés étudiés dans le chapitre 3, dont un est particulièrement motivé par les éléments concrets issus de la section 4.2.

5.3.1 Modèle de risque faisant intervenir des rechutes comptées grâce à un processus BINAR(1)

Le premier modèle bivarié peut être vu comme une extension en deux dimensions du modèle de l'équation 19 :

$$\begin{pmatrix} R_{1,n} \\ R_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N_{1,k}} X_{1,k,i} \\ \sum_{i=1}^{N_{2,k}} X_{2,k,i} \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M_{1,k}} Y_{1,k,i} \\ \sum_{i=1}^{M_{2,k}} Y_{2,k,i} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$(R_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(R_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ décrivent donc les deux branches d'un processus de réserve bivarié, représenté notamment par ses vecteurs constants de réserve initiale $u = (u_1, u_2)$ et de cotisation des assurés $c = (c_1, c_2)$, avec $u_1, u_2 \geq 0$, et $c_1, c_2 > 0$.

Pour $k \geq 1$, le vecteur $M_k = (M_{1,k}, M_{2,k})$ s'exprime sous la forme d'un processus BINAR(1) :

$$\begin{pmatrix} M_{1,k} \\ M_{2,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} M_{1,k-1} \\ M_{2,k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{1,k} \\ N_{2,k} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Soit, en découplant sous forme d'équations :

$$\begin{cases} M_{1,k} = \alpha_{11} \circ M_{1,k-1} + \alpha_{12} \circ M_{2,k-1} + N_{1,k}, \\ M_{2,k} = \alpha_{21} \circ M_{1,k-1} + \alpha_{22} \circ M_{2,k-1} + N_{2,k}. \end{cases} \quad (24)$$

Les coefficients $\alpha_{ij} \in [0, 1[$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ sont supposés constants, et à l'instant $k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), les variables $\alpha_{ij} \circ M_{j,k}$ ($1 \leq i, j \leq 2$) sont conditionnellement indépendantes.

Comme conditions initiales, on pose $M_{1,0} \sim \mathcal{P}(\gamma_{1,0})$, et $M_{2,0} \sim \mathcal{P}(\gamma_{2,0})$, où $\gamma_{1,0} > 0$ et $\gamma_{2,0} > 0$ sont des réels quelconques. De plus, pour $k \geq 1$, on suppose que le vecteur $N_k = (N_{1,k}, N_{2,k})$ est indépendant de M_0, \dots, M_{k-1} .

Pour $j \in \{1, 2\}$, les suites $(X_{j,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ et $(Y_{j,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ représentant respectivement les montants des sinistres principaux et secondaires de la $j^{\text{ème}}$ branche, sont i.i.d. et à valeurs positives, et d'espérances finies $\mu_{X_j} > 0$ et $\mu_{Y_j} > 0$. De plus, $(N_{j,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite i.i.d, avec $N_{j,1} \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$, $\lambda_j > 0$.

Enfin, les suites $(X_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(X_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(Y_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(Y_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(N_{1,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(N_{2,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont supposées mutuellement indépendantes. De plus, les suites de vecteurs $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes de la suite de vecteurs $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Le modèle est dit indépendant si $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$. Cependant, avec cette configuration, si on n'ajoute pas d'hypothèse de dépendance supplémentaire parmi les variables introduites ci-dessus, le processus se comporte alors sous la forme de deux branches indépendantes, chacune régie par un processus INAR(1) et ainsi identique au processus de l'équation 19.

Comme annoncé en sections 2.4 et 3, le fait d'avoir deux types de sinistres, et en plus de compter le deuxième type à l'aide d'une telle série temporelle, peut servir à distinguer pour un événement donné les conséquences premières et clairement identifiables, du prolongement au cours du temps des effets de cet événement sous forme de rechutes potentiellement nombreuses.

5.3.2 Modèle bivarié pour la gestion des émissions de carbone

L'autre modèle de risque présenté dans le chapitre 3 est le suivant. Des liens et des comparaisons de résultats seront notamment effectués dans ce même chapitre entre ces deux modèles.

Nous précisons qu'ici, $R_{1,n}$ décrit un risque financier, tandis que $R_{2,n}$ décrit un risque non-financier, en l'occurrence une quantité de dioxyde de carbone émise.

On ajoute un "C" (pour "carbone") à certaines notations du problème pour faire la distinction avec le précédent modèle plus classique dans le chapitre concerné.

Le modèle est le suivant :

$$\begin{pmatrix} R_{1,n}^C \\ R_{2,n}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^C} \begin{pmatrix} X_{1,k,i} \\ X_{2,k,i} \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} M_{1,k}^C \\ M_{2,k}^C \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{M_{2,k}^C} Y_{2,k,i}, \quad (25)$$

où, pour $k \geq 1$,

$$\begin{cases} M_{1,k}^C = \omega_{12} \circ N_k^C + \delta \circ N_{k-1}^C + O_k, \\ M_{2,k}^C = \omega_{21} \circ N_k^C + O_k, \\ \text{et } O_k = \theta \circ O_{k-1} + \beta \circ N_{k-1}^C. \end{cases} \quad (26)$$

À l'instant k , toutes les opérations \circ sont supposées être conditionnellement indépendantes. Les coefficients $\omega_{12}, \omega_{21}, \delta, \beta$, et θ sont tous des réels compris dans $[0, 1]$.

Nous avons $v_1, v_2 \geq 0$, et $d_1, d_2 > 0$.

À la $k^{\text{ème}}$ période, la compagnie subit N_k^C couples de sinistres principaux. On suppose leur arrivée par couples, car à chaque sinistre, correspond une perte financière, mais aussi l'émission d'une quantité donnée de carbone afin de résoudre ce sinistre. Comparativement au modèle précédent, c'est comme si l'on avait $N_k^C = N_{1,k} = N_{2,k}$. Les $(X_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ et les $(X_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ sont les quantités aléatoires associées. De plus, $(N_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite i.i.d. telle que $N_1^C \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$.

Des pertes secondaires surviennent dans chaque branche, comptées respectivement par les $(M_{1,k}^C)_{k \in \mathbb{N}}$ et les $(M_{2,k}^C)_{k \in \mathbb{N}}$. Les montants respectifs associés sont les variables $(Y_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ et $(Y_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$.

On remarque que dans les écritures de $M_{1,k}$ et $M_{2,k}$ intervient une variable commune O_k à l'instant k . En fait, on pourrait voir $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme un processus INAR(1), il faut simplement faire attention à l'indexation : ici, à l'instant k , la contribution de la suite N^C est la variable $\beta \circ N_{k-1}^C$ (au lieu de N_k^C), qui fait office de terme source. De plus, d'un point de vue purement mathématique, on remarque ici que les coefficients α_{11} et α_{22} du processus BINAR(1) ont été substitués au paramètre θ .

En guise de conventions, on prend $N_0^C \stackrel{\mathcal{L}}{=} 0, M_{1,0}^C \stackrel{\mathcal{L}}{=} 0, M_{2,0}^C \stackrel{\mathcal{L}}{=} 0$, et $O_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} 0$.

Encore une fois, on suppose que toutes les suites décrivant des pertes aléatoires sont mutuellement indépendantes, chacune i.i.d., et en plus chacune indépendante de la suite $(N_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$. Comme conséquence directe, cela entraîne que ces suites sont aussi indépendantes de la suite $(M_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$.

Le sens concret potentiel d'un tel modèle est expliqué plus en détail dans le chapitre 3. Nous en donnons toutefois quelques éléments ci-après.

Parmi les significations qu'on peut donner aux composantes du modèle en lien avec l'assurance automobile, la variable O_k dénombre entre autres les usages d'une garantie qui serait valable seulement pendant une période. δ correspondrait à la proportion de clients bénéficiant d'une remise sur leur cotisation à la période suivant un sinistre, en guise de récompense pour un choix écologique dans le processus de réparation. Bien entendu, pour profiter de cette remise, il faut ne pas avoir résilié son contrat auprès de la compagnie concernée entre temps. Enfin, ω_{12} et ω_{21} peuvent servir à compter les surplus de coûts écologiques ou environnementaux engendrés par un sinistre donné. En fait, en poursuivant cette signification, les coûts standards respectifs sont alors représentés par les variables $(X_{j,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2, j \in \{1,2\}}$, tandis que les coûts additionnels par rapport à ces bases standards de coûts sont représentés par les $(Y_{j,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2, j \in \{1,2\}}$.

5.4 Autres formes de dépendance pour un modèle multivarié

En plus de toutes les formes d'indépendance présentées en section 2 et qui se rapportaient plutôt à des distributions univariées, il existe certaines formes de dépendance spécifiques aux modèles multivariés. En effet, dans la pratique, les différentes branches ne sont en général pas indépendantes.

Une forme de dépendance courante est la notion de chocs communs : un événement unique peut induire des sinistres dans plusieurs branches d'activités différentes. Par exemple, pour un accident de la route, il faut dans certains cas réparer la voiture (branche automobile), indemniser et réparer les dommages causés aux tiers (responsabilité civile), ou prendre en charge certains frais de santé. Autrement, un séisme peut détruire des habitations, engendrer des dégâts sur des

véhicules, ou causer la perte de vies humaines. De la sorte, les branches touchées seraient celles multirisques-habitation et automobile, ainsi que la branche vie.

L'outil le plus classique pour ce type de dépendance en théorie du risque est le modèle de Poisson à chocs communs. On peut citer [Loisel \(2004a\)](#), [Yuen et al. \(2006\)](#), ou [Biard \(2013\)](#) pour une utilisation en temps continu.

La dépendance peut également provenir de l'utilisation de séries temporelles multivariées. Comme formulé précédemment, nous étudions une telle chose dans le chapitre 3, notamment en utilisant un processus BINAR(1). Autrement, [Zhang et al. \(2007\)](#) propose un modèle multivarié en temps discret, où à la fois les taux de primes et les montants de sinistres agrégés à chaque période pour chaque branche sont des variables aléatoires, et ces données sont régies sous la forme d'un processus autorégressif à valeurs dans \mathbb{R}^{2d} , où $d \in \mathbb{N}^*$ est la dimension du modèle. [Ma et al. \(2015\)](#) utilise des séries temporelles pour compter les sinistres dans un modèle bivarié, mais ici la dépendance vient surtout du fait que les termes d'innovations de la série temporelle suivent une loi discrète bivariée de Poisson à chocs communs.

D'autre part, en reprenant le modèle multivarié décrit initialement, on pourrait simplement supposer que les survenances des sinistres dans chacune des branches sont régies par un même processus : autrement dit, il existe $N(\cdot)$ tel que $N_j(t) = N(t)$ pour tous $1 \leq j \leq d$, et $t \in \mathbb{R}_+$. De la sorte, quand un sinistre survient, il génère des pertes dans toutes les branches à la fois. Cela a été étudié dans [Chan et al. \(2003\)](#) sous une forme bivariée, ou par [Cai and Li \(2007\)](#) dans un cas multivarié général et avec certaines hypothèses de dépendance en plus.

Enfin, de la dépendance peut être induite si on choisit des distributions spécifiques multivariées. Cette forme de dépendance pourrait par exemple être utilisée pour un modèle multibranche où un sinistre génère toujours des pertes dans chacune des branches simultanément.

Comme outil pour gouverner de manière conjointe la distribution de montants de sinistres, on peut citer la notion de copule, déjà évoquée précédemment en section 2. À ce sujet, [Bregman and Klüppelberg \(2005\)](#) s'intéresse à la probabilité de ruine d'un modèle bivarié régi par une copule de Clayton-Lévy.

Autrement, on peut citer les distributions multivariées à variations régulières, en commençant par définir leur version bivariée, désignée par l'acronyme BRV (pour « Bivariate regular variations »).

Définition 5.1. (Distribution de type BRV) Soit $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ une distribution, et ν une mesure limite non-dégénérée (non identiquement nulle). Un couple de variables positives $(X, Y) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, F)$ si

$$\frac{1}{\bar{F}(t)} \mathbb{P} \left(\frac{1}{t} (X, Y) \in B \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \nu(B) .$$

pour tout ensemble borélien $B \subset [0, \infty]^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui est ν -continu, c'est-à-dire tel que $\nu(\partial B) = 0$. On peut récrire cela $\mathbb{P}((X/t, Y/t) \in B) \sim \bar{F}(t)\nu(B)$ quand $t \rightarrow \infty$.

On peut étendre cette définition au cas où $F \in \mathcal{C}$ est à variations lentes, on note alors $(X, Y) \in \text{BRV}(\nu, F)$ (sans indice).

Cette définition se généralise en dimension $d \geq 2$ quelconque sous la notion de distribution MRV (« Multivariate regular variations »). Il existe différentes définitions dans la littérature, mais elles sont similaires et le principe reste le même : par exemple, [Maulik and Resnick \(2004\)](#), ou [Konstantinides and Li \(2016\)](#), en proposent chacun une.

Nous proposons des résultats associés à la distribution BRV dans le chapitre 1, et de même dans le chapitre 3 concernant la généralisation sous forme MRV.

6 Modèles de risque avec une structure de prévention

6.1 Notion de prévention

Dans le cadre des compagnies d'assurance, la prévention est un terme vaste dans tout ce que cela peut représenter d'un point de vue pratique et concret, car cela fait référence à des moyens d'actions variés, mais qui est synthétique dans sa visée : anticiper et limiter, à l'aide d'un investissement financier, un risque, un mal, un danger, et ainsi réduire la quantité ou le montant de dommages à rembourser.

Comme mentionné dans la section 5 qui précède, la prévention et l'anticipation des risques sont des sous-objectifs liés aux 17 grands ODD formulés par l'ONU en 2015.

Cependant, s'il est bon de savoir modéliser la prévention, ses applications pratiques posent certains problèmes. En effet, un assureur doit judicieusement déterminer quand et à qui proposer un service de prévention. De plus, un potentiel manque de retours en termes de données sur les effets d'actions de prévention menées, ainsi que des réglementations diverses, obligent les compagnies d'assurance à être vigilantes et parfois innovantes.

Nous pouvons donner quelques exemples concrets de démarches de prévention.

Certaines mutuelles françaises ou internationales remboursent (au moins partiellement) les abonnements à des salles de sport, de manière à favoriser la bonne santé de leurs clients, et limiter le risque de maladies graves qui seraient coûteuses à assurer.

Autrement, certaines compagnies financent la mise en place de détecteurs d'incendie dans des bâtiments, pour se prémunir de dommages trop élevés en cas d'incendie, aussi bien en termes de santé ou de décès d'individus, que de réparation des locaux.

Ce qu'on peut considérer comme le premier travail sur cette notion de prévention en économie du risque est celui de Isaac Ehrlich et Gary Becker, datant de 1972, [Ehrlich and Becker \(1972\)](#). Ils montrent que, contre-intuitivement par rapport à leur époque, les actions de prévention et d'assurance peuvent être complémentaires. Ils établissent la distinction entre « l'auto-protection », et « l'auto-assurance ». Plus précisément, ils considèrent que la visée principale de l'auto-protection est de réduire la probabilité de survenance d'un risque perte, et celle de l'auto-assurance, de réduire le coût du risque lorsqu'il survient.

Comme autres travaux sur la prévention en économie du risque, on peut citer [Courbage and Rey \(2012\)](#), qui étudie les effets d'un risque sous-jacent ajouté à un risque donné. À travers l'étude de « fonctions d'utilité », on s'intéresse au niveau de prévention optimal, c'est-à-dire l'investissement en la matière qui engendre le meilleur résultat financier. De même, [Courbage et al. \(2013\)](#) propose une étude de prévention, et fournit au passage un aperçu plus détaillé de la littérature sur la prévention en économie.

D'autre part, la prévention a été étudiée pour la première fois en théorie de la ruine à travers deux chapitres de la thèse de Romain Gauchon, [Gauchon \(2020\)](#). Nous en donnons plus de détails dans la sous-section suivante.

Le milieu médical propose des définitions plus précises de la prévention, et en particulier distingue trois types principaux de prévention selon les visées des actions. Ces trois formes de prévention ont été introduites par Gruenberg en 1953, [Gruenberg \(1953\)](#), mais nous allons donner les définitions actuelles de l'OMS.

Avant cela, nous tenons à rappeler que la prévention, telle que définie par l'OMS en 1948, est « l'ensemble des mesures visant à éviter ou réduire le nombre et la gravité de maladies, d'accidents et de handicaps ». C'est donc proche de ce que nous avons formulé ci-dessus dans un contexte plus large concernant les compagnies d'assurance.

La prévention primaire désigne « l'ensemble des mesures applicables à une maladie ou groupe de maladies pour en bloquer les causes avant qu'elles n'agissent sur l'homme ; en d'autres termes, pour empêcher la survenue de la maladie ». Il s'agit donc de l'ensemble des actions faites pour éviter la survenance d'un risque. Typiquement, la vaccination contre des maladies comme la grippe ou les coronavirus sont des formes de prévention primaire. Inciter à porter une ceinture de sécurité lorsqu'on est dans une voiture est un autre exemple.

Ensuite, la prévention secondaire vise à « interrompre un processus morbide en cours pour prévenir de futures complications et séquelles, limiter les incapacités et éviter le décès ». On cherche donc à identifier ou détecter le plus rapidement possible la présence ou la survenance d'un risque avant qu'il n'empire. Un bon exemple est le dépistage contre les cancers.

Enfin, la prévention tertiaire regroupe « l'ensemble des mesures visant à permettre aux personnes handicapées de recouvrer leurs fonctions initiales ou d'utiliser au maximum les capacités qui leur restent ; la réadaptation comprend à la fois des interventions individuelles et des actions sur l'environnement ». Une illustration est la lutte contre les rechutes ou récidives de maladies, comme les métastases liées aux cancers. Toutefois, on peut voir cela de manière globale comme les moyens visant à diminuer les conséquences d'une maladie, donc cela comporte toute forme d'activité curative, mais aussi l'entretien de la santé après la guérison, en proposant par exemple de l'activité physique (chose qui pourrait aussi correspondre à de la prévention primaire, en soi).

À ces trois définitions classiques s'ajoute parfois celle de la prévention quaternaire, proposée notamment dans [Jamouille and Roland \(1995\)](#), qui consiste à limiter la surmédicalisation des patients.

Les liens possibles entre ces concepts médicaux d'une part, ainsi que les concepts économiques mentionnés plus haut sur lesquels ont insisté Ehrlich et Becker d'autre part, ont été soulignés par [Dervaux and Eeckhoudt \(2004\)](#). On peut en somme considérer que l'auto-protection correspond à la prévention primaire et l'auto-assurance aux préventions secondaire et tertiaire.

Nous allons voir dans la sous-section suivante comment on peut incorporer cette notion de prévention et ses conséquences d'un point de vue mathématique dans un modèle de théorie de la ruine.

6.2 Modèles de prévention

Pour commencer, nous introduisons le modèle proposé dans l'article [Gauchon et al. \(2020\)](#). Comme suggéré précédemment, en théorie de la ruine, c'est le premier modèle de risque faisant intervenir la notion de prévention.

On peut le voir comme un modèle de Cramér-Lundberg, auquel on a ajouté une structure de prévention : le taux de prime c est diminué d'un montant p , mais en conséquence la moyenne de la fréquence des pertes est réduite. Cela s'écrit :

$$R(t, p) = u + (c - p)t - \sum_{k=1}^{N(t, p)} X_k, \quad (27)$$

Là encore, $u \geq 0$ est la réserve initiale de la compagnie, et $c > 0$ est son taux de prime constant. Le montant de prévention investi est $p \in [0, c]$, et tout comme pour c , on fait l'hypothèse simplificatrice de considérer que p est constant par unité de temps. Les variables $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ correspondent à des montants de sinistres, et sont positives et i.i.d. Enfin, $(N(t, p))_{t \geq 0}$ est un processus continu de Poisson d'intensité $\lambda(p)$.

Concernant la fonction $\lambda(\cdot)$, elle est supposée positive, décroissante, strictement convexe, et de classe \mathcal{C}^2 . On la définit de manière large sur \mathbb{R}_+ tout entier (malgré la contrainte $p < c$).

Le fait de supposer que le paramètre $\lambda(\cdot)$ soit strictement convexe signifie que plus on dépense en prévention, moins la réduction supplémentaire (ou proportionnelle) de la fréquence des sinistres sera élevée. Cette hypothèse économique a déjà été faite chez [Ehrlich and Becker \(1972\)](#), ou [Courbage \(2001\)](#).

Les définitions de probabilités de ruine et de non-ruine ne changent pas, simplement, on les notes $\psi(u, p)$ ou $\varphi(u, p)$ pour insister sur la dépendance selon le paramètre p .

En fait, la contrainte $p < c$ est une des conséquences de la condition de profit net, qui s'exprime ici $c - p > \lambda(p)\mu$.

On peut montrer que, si c vérifie la condition de profit net en $p = 0$, alors il existe un unique $p_{max} \in [0, c[$ tel que $c - p_{max} = \lambda(p_{max})\mu$, de telle sorte que le champ des possibles pour p se restreint à l'intervalle $[0, p_{max}[$. On peut même fixer une valeur $0 < p_{lim} < p_{max}$ pour limiter le domaine d'étude à un intervalle fermé $[0, p_{lim}]$ (on choisira une valeur proche de p_{max} de préférence).

L'objectif principal d'une telle étude est avant tout de déterminer le montant de prévention optimal $p^*(u)$.

Définition 6.1 (Montant de prévention optimal). Cela correspond au montant de prévention p qui minimise la probabilité de ruine $\psi(u, p)$. S'il y a plusieurs candidats, on choisit le plus petit de ceux-là, soit :

$$p^* \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto \min \left(\operatorname{argmin}_{p \in [0, p_{lim}]} (\psi(u, p)) \right) \end{cases}$$

C'est équivalent au fait d'écrire $p^*(u) = \min \left(\operatorname{argmax}_{p \in [0, p_{lim}]} (\varphi(u, p)) \right)$.

On cherche donc, à partir des expressions dont on dispose pour la probabilité de ruine, pour quelle valeur de p elle est minimale.

Parfois, on peut associer aux montants de sinistres des distributions particulières, de sorte à avoir une expression plus précise de cette probabilité.

On pourrait tout à fait étudier le problème sous forme de cas particuliers, en attribuant au paramètre $\lambda(\cdot)$ une expression explicite qui vérifie les propriétés mentionnées.

Par ailleurs, il serait en fait plus vraisemblable de considérer que la fonction $\lambda(\cdot)$ est d'abord constante sur un certain intervalle $[0, p_1]$, où $0 < p_1 < p_{lim}$, puis strictement décroissante (ainsi que convexe et \mathcal{C}^2) sur $[p_1, p_{lim}]$. Un argument concret pour justifier ce fait est qu'une campagne de prévention insuffisante en termes d'ambition sera sans effet ou presque sur les sinistres. En guise d'analogie, pour un grand fumeur, consommer 38 ou 39 cigarettes par jour au lieu de 40 ne diminuera pas de manière significative les risques pour sa santé.

Néanmoins, cela ne change pas grand-chose dans la manière dont on présente les résultats dans [Gauchon et al. \(2020\)](#), ou à travers nos études dans le chapitre 2. Il faudrait seulement effectuer une disjonction de cas lorsqu'on énonce chaque résultat, et cela alourdirait les choses. Ainsi, on mentionne ce fait en introduction, tout en étudiant l'article en considérant que λ est strictement décroissante sur tout son intervalle de définition, puis en expliquant comment seraient modifiés les résultats avec cette nouvelle hypothèse.

Par la suite, [Gauchon et al. \(2021\)](#) a étudié une version approfondie du premier modèle décrit en équation 2.1, où on distingue les sinistres en deux catégories, comptés par deux processus de Poisson indépendants : les sinistres de plus faibles montants, et les sinistres de montants plus

forts, et on effectue de la prévention seulement pour chercher à réduire la fréquence d'apparition des sinistres aux montants élevés.

Ce sont pour le moment, à notre connaissance, les deux seuls travaux de la sorte en théorie de la ruine.

Dans le chapitre 2, nous étudions trois modèles de prévention. Le premier, consiste en une version avec de la prévention du modèle en temps continu de [Yuen et al. \(2005\)](#), où un sinistre principal génère précisément un sinistre secondaire de rechute avec un temps de retard. Le deuxième correspond au modèle de l'équation 9 auquel on a ajouté une structure de prévention. On peut aussi le voir comme une transcription du modèle de prévention d'origine (équation 2.1) en temps discret. Enfin, le troisième correspond au modèle de l'équation 19 auquel on a ajouté une structure de prévention. Pour rappel, c'est un processus de risque en temps discret où les sinistres principaux peuvent générer plusieurs sinistres de rechute, eux-mêmes comptés grâce à un processus INAR(1). D'entre les trois, c'est le dernier qui sera le plus difficile à caractériser, car il est plus complexe.

On insiste sur le fait que, contrairement à [Gauchon et al. \(2020\)](#) et [Gauchon et al. \(2021\)](#), on ne s'intéresse pas qu'à la prévention primaire à travers nos modèles de risques, mais aussi aux préventions secondaires et tertiaires. En référence aux définitions énoncées ci-dessous, pour un tel modèle de risque, la prévention primaire joue sur la fréquence des sinistres principaux, tandis que les effets des préventions secondaires et tertiaires se confondent : cela diminue l'espérance des montants de sinistres principaux, ou, quand ils existent, la probabilité de rechute financière sous la forme de sinistres secondaires, ainsi que l'espérance des montants de ces sinistres secondaires. À chaque fois, les paramètres théoriques affectés par la prévention vérifient l'hypothèse de décroissance et de convexité selon p .

En outre, on peut faire un lien entre la thématique des composés perfluorés et nos études de prévention, surtout celle qui consiste à reprendre le modèle défini par l'équation 19. En effet, comme précisé dans les sections 3 et 4, ce modèle est déjà une tentative de représenter cette problématique des PFAS.

7 Principaux résultats

Cette thèse est divisée en trois chapitres, chaque chapitre correspondant à un article sous la version de sa première soumission. En effet, nous n'avons pas eu le temps de soumettre lesdits articles à des revues scientifiques correspondantes avant le rendu de ce manuscrit.

Comme annoncé précédemment, nous pouvons diviser l'ensemble du travail de cette thèse en deux thématiques. La première est la représentation de la gestion des problèmes liés aux composés perfluorés (PFAS) par une compagnie d'assurances, à travers des modèles de risque unidimensionnels, et correspond aux deux premiers chapitres. Cela comprend d'une part à l'étude d'un modèle en temps discret inspiré de celui de Cramér-Lundberg, faisant intervenir un processus INAR(1), et d'autre part à l'examen de modèles avec une structure de prévention. Le deuxième thème correspond au chapitre 3, et considère deux modèles bivariés : un modèle de risque classique en temps discret décrit à l'aide d'un processus BINAR(1), et un deuxième s'inspirant de ce premier, ciblé sur la description de certains aspects de la gestion d'un sinistre automobile, et faisant intervenir un risque non-financier (ici, une quantité de CO₂ émise).

Cependant, nous tenons à être honnête vis-à-vis de la portée de notre travail sur les perfluorés : nous avons été motivés par ce sujet, du fait qu'il est fortement débattu ces derniers temps, en particulier à l'échelle française ou européenne, mais nous manquons encore de données en la matière. Les modèles que nous déployons pour cela cherchent néanmoins à mettre en avant l'idée de potentielles « cascades » ou nombreuses successions de sinistres à partir d'un premier événement-source détecté, et à proposer un aperçu au moins théorique des comportements auxquels on peut s'attendre. On peut considérer que le but de ce travail est d'alerter sur les nouveaux risques liés aux PFAS, et d'initier des travaux en la matière en science actuarielle, voire plus spécifiquement en théorie de la ruine.

Concernant les émissions de carbone, même si nous avons pu effectuer certaines analyses numériques, cela aurait pu être complété par des données plus vastes ou un peu plus précises, mais du fait des contraintes temporelles liées au rendu de cette thèse, nous n'avons pas pu obtenir à temps ce type de données.

7.1 Étude classique unidimensionnelle

Cela se réfère au chapitre 1, qui fait intervenir un modèle de risque novateur, avec des sinistres principaux, ainsi que des sinistres secondaires comptés à l'aide d'un processus INAR(1). Nous expliquons en particulier quels liens peuvent être tissés entre les paramètres du modèle et la question de la pollution liée aux PFAS.

On commence par énoncer quelques propriétés en rapport avec la condition de profit net. On fournit aussi certains calculs de covariance associés : ce ne sont pas les résultats principaux du chapitre, mais en cela, on procède comme dans les études en théorie de la ruine faisant intervenir des séries temporelles à valeurs entières telles qu'un processus INAR(1), et cela permet de s'inscrire dans cette littérature.

Concernant l'étude de probabilités de ruine, on parvient à déterminer la fonction génératrice des moments du modèle quand les distributions des pertes sont à queues fines, puis à en déduire l'existence d'un coefficient d'ajustement dans ce cas général à queues fines, et à le calculer explicitement quand les deux types de pertes suivent chacun une loi exponentielle. Nous introduisons par ailleurs deux autres modèles construits à partir du modèle d'origine, où les hypothèses de dépendance sont affaiblies, et pour ceux-ci aussi on peut déterminer explicitement le coefficient d'ajustement quand les pertes sont de distribution exponentielle. En comparant les trois coefficients respectifs, on démontre (au moins pour ce cas particulier) que le risque croît

quand le niveau de dépendance se renforce. Nous formulons également quelques résultats de ruine asymptotique en présence de queues lourdes.

Puis nous proposons deux manières d'affiner notre modèle d'origine, en cherchant à considérer sous d'autres aspects le lien avec la thématique des PFAS, et en expliquant comment s'adaptent les résultats précédents avec ce nouveau formalisme.

7.2 Études de prévention

Le chapitre 2 regroupe trois modèles avec une structure de prévention. Le premier est un modèle en temps continu où un sinistre principal génère exactement un sinistre secondaire retardé. Le deuxième correspond à un processus en temps discret de Cramér-Lundberg où on met en évidence le nombre de sinistres survenus par période. Le troisième correspond au modèle du chapitre 1 transcrit avec de la prévention. On cherche à lier les études mathématiques au thème des PFAS, en insistant sur les effets de démarches préventives qui pourraient être menées par des compagnies d'assurance pour anticiper et contenir de futurs dommages à réparer provoqués par une telle pollution.

Pour les deux premiers modèles, nous démontrons notamment que le montant de prévention optimal $p^*(u)$ est indépendant de la réserve initiale u si seule la fréquence des sinistres principaux décroît en fonction du montant de prévention investi.

On s'attache aussi à étudier les choses sous la forme de prévention secondaire ou tertiaire, c'est-à-dire en considérant que les effets des actions de prévention font décroître le risque lié à d'autres paramètres que la fréquence des sinistres principaux. Cela concerne par exemple la probabilité d'occurrence d'un sinistre secondaire, ou les espérances des montants de sinistres. Avec ce formalisme plus complexe, caractériser la prévention optimale donne lieu à des conclusions dont la formulation est moins synthétique en général.

En plus de confronter les résultats de nos modèles entre eux, on établit des comparaisons de ces résultats avec ceux issus de la littérature associée.

7.3 Études en deux dimensions

Cela correspond au chapitre 3, où on décrit deux modèles bidimensionnels. Le premier peut être vu comme une généralisation en deux dimensions du modèle principal du chapitre 1 : c'est un modèle en temps discret où chaque sinistre principal peut donner lieu à plusieurs sinistres secondaires, comptés à l'aide d'un processus BINAR(1), qui permet d'apporter une dépendance « croisée » entre les deux branches du modèle. Le second, s'inspire de ce premier, et vise à décrire plus spécifiquement certains aspects de la gestion des émissions de carbone pour un sinistre automobile.

Nous exposons plusieurs types de résultats pour ces modèles, parfois présentés conjointement, et en confrontant les résultats associés à chaque modèle.

Pour commencer, nous fournissons quelques propriétés liées aux conditions de profit net respectives des modèles, ainsi qu'en présentant des calculs de covariances.

Ensuite, pour le premier modèle, nous énonçons quelques caractérisations pour décrire le comportement asymptotique du processus BINAR(1) qui sert à compte les sinistres secondaires (notamment en termes de convergence en loi).

Ensuite, nous nous intéressons à des probabilités de ruine. Nous parvenons notamment à déterminer, pour chaque modèle, l'expression de la fonction génératrice des moments quand les pertes sont à queue fine, puis l'existence du coefficient d'ajustement. En revanche, même dans le cas le plus simple, c'est-à-dire quand toutes les distributions des pertes sont exponentielles, on ne parvient pas à calculer explicitement ces coefficients, ou du moins les expressions seraient

assez lourdes. Nous donnons également des résultats en présence d'une distribution multivariée à queue lourde. De surcroît, nous montrons que, sous certaines hypothèses on peut majorer le risque associé au modèle lié à la gestion du carbone par le risque issu du modèle classique.

Nous proposons enfin des résultats numériques pour estimer les émissions de carbone et les prix associés au remplacement d'une pièce de voiture endommagée par un accident, en fonction de la proportion de pièces de réutilisation issues de l'économie circulaire qu'on aura choisi. Nous mettons en valeur le fait que choisir de telles pièces « recyclées » plutôt que des pièces neuves réduit les coûts à la fois financiers et écologiques.

Modèle unidimensionnel utilisant un processus INAR(1) et application au thème des composés perfluorés (PFAS)

Ce chapitre correspond à un article intitulé « An INAR(1) Risk Model with by-claims applied to the PFAS issue », co-écrit avec Stéphane Loisel et Naushad Mamode Khan, et en cours de soumission.

Abstract

We propose there a new type of unidimensional discrete-time risk model in ruin theory involving both main claims and by-claims, where the latter ones are counted thanks to an INAR(1) process. In this way, the model embodies a contagion phenomenon, which may be used to describe the damages caused and covered by an insurance company ensuing the spreading of PFAS compounds in the environment. We present mostly asymptotic ruin probabilities, and multiple comparisons with other models derived from the aforementioned one, in particular with two models where the dependence assumptions are relaxed.

Keywords : INAR(1) Process ; Risk Model ; By-claims ; Perfluorinated Compounds (PFAS) ; Ruin Probabilities ; Dependence.

1.1 Introduction

Motivated by emerging risk from the perfluorinated compounds (commonly named PFAS), and for the purpose of doing a first work on this issue in ruin theory, we propose there an innovative discrete-time risk model, involving both main claims and by-claims, the latter ones counted thanks to an INAR(1) (integer-valued autoregressive) time series.

Due to the speed at which the damages may spread widely from emissions of these chemical products in the environment, it is an important question that encourages the settlement of some specific insurance policies nowadays. In fact, the current importance of the PFAS issue do not lie in the age of these products or the knowing of their hazards, but rather in the solutions tried to deal with such pollution and confine their harmful effects. Relying only on the data available at the moment, it is difficult to predict the related damages which will be revealed, even in the few subsequent years, but the scale of contamination remains surely underestimated, according to many specialists (see [Labadie et al. \(2020\)](#) or [EWG \(2023\)](#) for instance).

Moreover, in actuarial science, contagion models have been used to describe phenomena which generate risk propagation, or contamination, and thus may cause clusters of claims. We can cite for instance cyber risks, which may be represented thanks to Hawkes processes (see e.g. [Bessy-Roland et al. \(2021\)](#), [Hillairet et al. \(2023\)](#)), or epidemiological risks (see [Lefevre et al. \(2017\)](#), [Barigou et al. \(2020\)](#), or [Lefèvre and Simon \(2022\)](#)). In this paper, we explain how our model, structured thanks to an INAR(1) process, may also describe a contagion phenomenon.

In order to represent such a risk propagation, it is possible to refine the original model of Cramér-Lundberg by adding a second kind of loss, the by-claims, which always arise from a main claim when they occur. Indeed, for an insurance company, the events which cause serious damages and great amounts to reimburse engender generally two types of claims : the "main claims" which are settled quickly, and the so-called "by-claims" which often correspond to delayed claims. Such by-claims may describe allocated loss adjustment expenses (ALAE), or embody cost revising due to further events. An example of revising may be found typically in motor insurance, where the claims concern mainly material and health damages : the costs for the first ones are usually settled in due time, while the bodily injury claim can be delayed, because of the time needed to provide the necessary medical care and evaluate the total amount spent.

Some first models with delayed or by-claims were studied by [Waters and Papatriandafylou \(1985\)](#), [Yuen and Guo \(2001\)](#), or [Yuen et al. \(2005\)](#). The first one studies only the idea of delay, whereas the last two introduce both secondary claims and delays. While, other research articles ([Macci \(2006\)](#), [Zou and Xie \(2013\)](#), [Li \(2013\)](#), [Fu and Li \(2016\)](#), [Li \(2017\)](#), [Yang et al. \(2019\)](#), [Zhang et al. \(2021\)](#), [Li \(2023\)](#)) discuss about the by-claims in continuous-time models.

However, most of these articles assume that each main claim engenders exactly one by-claim. The only exception is [Li \(2023\)](#), which proposes a random number of by-claims coming from each main claim, but the variables counting the by-claims are assumed to be independent. This assumption would fit if we only considered ALAE for instance, but in our context, it is limiting : since the perfluorinated compounds are considered "forever pollutants" and may spread fast through the waters or the food chains, it is likely that one source event of toxic emission will induce many potential collateral damages.

Using an INAR(1) process incorporates this possibility of contagion with a dependence structure. This type of process was introduced for the first time in the work of [Al-Osh and Alzaid \(1987\)](#). Actually, in the existing ruin theory literature, researchers have proposed an ample class of discrete-time risk models where the number of settled claims is described thanks to time series and a thinning-based dependence structure (see e.g. [Cossette et al. \(2010\)](#), [Shi and Wang \(2014\)](#), [Ma et al. \(2015\)](#), [Hu et al. \(2018\)](#), [Guan and Hu \(2022\)](#)). However, contrary to the

work presented in this article, all of them include only one type of claim. Moreover, contrary to [Cossette et al. \(2010\)](#) or [Shi and Wang \(2014\)](#) for instance, which are using an INAR structure, we attempted to build a non-stationary process, since we try to represent a new category of risk which is still difficult to apprehend.

Thus, our model aims at describing the concrete behaviour of an insurance company willing to handle the PFAS issue, by taking into consideration the emissions and their consequences, and the related liabilities. Furthermore, we try to understand what happens if we reduce one aspect or another of the whole contamination process, notably through a better containment of the potential emissions, the detection of the chemicals, or recovery campaigns.

Nevertheless, as a disclaimer, we have to acknowledge we were motivated by this PFAS thematic, but here, the aim of our paper is rather to alert about this issue, and initiate some works in actuarial science about it, while displaying a model which emphasizes the different possible levels of risks. Indeed, for the moment, we lack of data to complete and apply our theoretical approach. It is mostly due to the fact that is still a new subject for insurance companies, and regulatory solutions are still harshly discussed (in particular, as specified later, some insurers have settled wide exclusions for the moment).

We provide first some properties linked with the net profit condition of the model, and covariances of the counting processes. Then, we derive the existence of an adjustment coefficient when the losses are light-tailed, and it is possible to compute it precisely when these losses are exponential. We propose also some asymptotic ruin probabilities in the presence of heavy-tailed distributions, and we linked these results with similar ones from models involving by-claims or an INAR process. We also highlight the fact that neglecting the level of dependence should lead to an underestimation of the risk incurred, through the comparison with two other models coming from the main one, where the dependence assumptions are "softened" (especially in terms of adjustment coefficients). In addition, we yield some numerical results of ruin probabilities, and through that we emphasize the hazard of understating the emissions or the contamination. Eventually, we consider other ways to link the concrete issue of the PFAS with our model by slightly modifying it.

The paper is organized as follows : in Section 1.2, we present some aspects of the chemical compounds, and their link with our study. In Section 1.3, we present the main risk model of this article. In Section 1.4, we give some first properties of this model. In Section 1.5, we present some results with light-tailed distributions for the main model. In Section 1.6, we introduce two other models derived from the main one, where the dependence assumptions are softened, and we compare these three models. In Section 1.7, we present results related with heavy-tailed distributions, while continuing to compare the three models. In Section 1.8, we provide numerical results. Eventually, in Section 1.9 and 1.10, we explain how the initial model could be refined to correspond in other ways to such an insurance context.

1.2 Some elements about the PFAS compounds

1.2.1 Some elements about the PFAS compounds

The damages related to PFAS molecules (or "Per- and polyfluoroalkyl substances", or "per-fluorinated compounds") constitute a burning issue currently.

Indeed, these molecules are extremely stable, and the bond between fluorine and carbon is among the strongest in organic chemistry. Therefore, it allows to build materials which are waterproof or resistant to extreme temperatures for example. However, all these good properties make these molecules almost indestructible, this is why they are called "forever pollutants".

In fact, the bigger perfluorinated molecules may decompose in the environment, but always in smaller ones, and these smaller elements will remain persistent (see e.g. [Lohmann et al. \(2020\)](#)). Nowadays, the best ways to clean the environment from these compounds is to collect them, and then stocking them, or using safe disposal methods (thanks to incinerators for example) to destroy or mineralize them, while avoiding re-emissions. However, it remains relatively slow processes regarding the widespread aspect of these products (see e.g. [Labadie et al. \(2020\)](#)).

These molecules are derived from chemical synthesis, namely they are not extracted from the environment. Manufactured products using PFAS have been marketed for the first time in the 1950s by the American company DuPont de Nemours, and have been used in numerous common objects such as pans, waterproof packaging, or clothes protecting from extreme temperatures.

We may reasonably assume that these forever chemicals have already spread on the whole world's surface, especially through the atmosphere or the waters : they may be found for instance in the liver of some animals living in the Arctic region, even if there is no humane industrial activity nearby.

As mentioned, the present importance of this question is not due to the time since they exist or since we know their hazards (above all for the human health, such as cancers), but rather in the regulatory or practical solutions which are tried in order to limit their damaging effects : detection campaigns, research and implementation of cleaning processes towards the environment, and in the field of insurance companies, specific coverages.

Indeed, even if they exist since the mid-XXth century, it seems that only during the last years some insurance companies have taken into consideration all the high risks coming from PFAS, so as to propose specific coverage (as underlined by Guy Carpenter for instance, in [Vanbeneden \(2024\)](#)). Although pollution policies already exist, the rapidity of the spreading and the harmful consequences have encouraged the establishment of policies focused on these perfluorinated compounds. However, for the moment, the exclusions are quite strict. For example, in August 2022, the Lloyd's Market Association published two clauses to exclude almost entirely the responsibility of the (re)insurer for damages related with perfluorinated substances. In June 2024, MunichRe proposed many exclusions, such as for the PFAS manufacturers or public or private entities responsible for water distribution or treatment. Comparatively, in France, the insurance law stipulates that an exclusion has to be limited ([Vanbeneden \(2024\)](#)).

Moreover, in the United States, the coverages proposed to industrialists depend on the period during which their activity occurred, regarding the legislation enacted since 1950 towards the PFAS. They might also be contentions depending on the state where the emissions took place, the state where the damages are signaled, and even the state where the insurance contract was signed ([Chesler et al. \(2021\)](#)). Thus, some industrial companies that incorporated perfluorinated into their products and thought to be exempt from this issue could be ensnared this way, according to some reports from GenRe for example ([Fletcher \(2024\)](#)).

In terms of regulation, more and more PFAS species are subject to European or American exclusions, and it should continue to be toughened in the coming years. For instance, in European Union, some new thresholds of drinking water will be applied in 2026, whereas for food, the current ones have existed since 2023. Besides, the thresholds still look heterogeneous on a global scale.

Regarding detection, multiple campaigns are led to identify at different scales the presence of molecules in the water or other substances, and sometimes, maps are consequently built to have a better overview, depicting the presence of the most common perfluorinated species in the waters or the bodies of animals, with their concentration at each point measured ([Munoz et al. \(2015\)](#)). For instance, a worldwide map is available on the website of the Environmental Working Group ([EWG \(2023\)](#)).

Eventually, the scientific community has to continue to acquire data and specific knowledge

about the issue. In particular, it would be good to find more efficient cleaning methods than the ones which are already known. Moreover, the industrial companies who were producing or using perfluorinated compounds should reduce as much as possible their usage, and change their business model if necessary. However, it seems difficult to prohibit completely these products at the present time for some reasons : in particular, some materials have no reliable alternatives for the moment. Besides, it is possible to educate the consumer about his choices : some brands manufacture products without PFAS similar to some others using these compounds for example, and advertise about it.

1.2.2 The possible meanings of the following model

The model written below in Section 1.3 aims at representing the mechanisms and the consequences of the pollution related to the perfluorinated compounds which could be covered by an insurance policy.

Firstly, a period should correspond to a year (or possibly a month, or a trimester).

The aggregate amount $\sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i}$ corresponds to the financial costs linked with civil liability about the pollution caused by some emissions or damages suffered by individuals coming from this pollution, which have been recorded during the k^{th} period. We can see N_k as the number of such clients targeted by a financial compensation.

On the other hand, the aggregate amount $\sum_{i=1}^{M_k} Y_{k,i}$ corresponds to the gathering of financial costs both to reduce the pollution in the environment, and to manage the health damages caused by emissions caused by a given client during or before the k^{th} period. As mentioned before, the aim of the depollution is to remove as many molecules as possible from the environment, and this could take a long time since the perfluorinated are able to spread widely through the air or the waters. Besides, we can state the related health care concern humans only, since taking care of contaminated animals or plant species would rather correspond to cleaning the environment.

As a remark, both types of claims should likely refer to the whole activity of the client. Indeed, it seems difficult to detect the effects of a single emission, and industrials threatened by financial compensation for their polluting activity should be judged for the whole damages, and not only small parts of that. However, it could also correspond to periods of several years, depending on the evolution of the regulations, according to what may happen in the United States for example (Chesler et al. (2021)).

In Equation 1.1, the contagion phenomenon is embodied by the sequence $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, which is the counting processes of the by-claims.

It is written as an INAR(1) time series, i.e for $k \geq 1$, $M_k = \rho \circ M_{k-1} + N_k$.

- N_k is the source term, it stands for the first losses linked with health and environmental damages for an insured client. These first losses are assumed to occur at period k , at the same period where the financial compensations related with the client's civil liability are settled.
- $\rho \circ M_{k-1}$ is the real contagion term, it represents the consequences of the pollution that were already causing financial losses at period $k - 1$, and are not completely solved or cured at period k . As it will be precised further, $\rho \circ M_{k-1} | M_{k-1} \sim \mathcal{B}(M_{k-1}, \rho)$, so the higher the reproduction coefficient ρ is, the larger the contagion is.

In general, when ρ is greater than 0.5, the risks coming from a given client have more chances to remain persistent and engender expenses in the next period than to be removed. And the

closer ρ is to 1, the more it must be difficult to predict the end of such a contagion event. Precisely, for the PFAS issue, ρ should be quite large, since the processes of decontamination and recovery are expected to be long because. Even with a conservative estimation relying only on intuition and not on data, we should observe $\rho \geq 0.5$.

Another fact to justify this writing and this estimation is : if one hot spot of PFAS is detected at a given place, or if some people from a same neighborhood are affected by a disease they suspect to be due to perfluorinated compounds, then people living near have suddenly more chances to be touched and to complain about that.

What is more, regarding the common contagion processes in ruin theory, this one seems appropriate to describe the problem. Indeed, the source of the emissions on the one hand, and their consequences on the other, are well highlighted. The sources, which refer to the clients who will benefit from financial compensations and are responsible for such pollution are counted by the variables $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$, which are involved in the aggregate amounts of both the main claims and the by-claims. Then, the clusters of claims aroused by the health care and the curing of the environment are represented by $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, and specifically the reproduction of the claims along the periods by the term $\rho \circ M_{k-1}$. Alternatively, a Hawkes process would not describe faithfully enough the progressive propagation of the molecules, or the fact that the processes of health care and environmental clean-up are relatively slow.

Even if, according to Proposition 1.4.1 the sequence $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is monotonic, the model fits if we consider that at the time origin $n = 0$, strong regulatory measures are taken, and will carefully be applied. In this way, we expect to have a frequency γ_0 which is surely larger than $\frac{\lambda}{1 - \rho}$. Therefore, from $n = 0$, the risks engendered by the perfluorinated decrease slowly thanks to the measures taken, and aim at reaching a stationary behaviour (but it should happen after a quite long time accordingly to the context).

Thus, this model could be applied to high levels of contamination, and to a cleaning process which takes time to be handled.

Remark 1.2.1 (Differences with a Hawkes process). To write it once for all, we summarize here the main differences between the INAR(1) process used in this paper and the notion of Hawkes process (which was mentioned in the introduction as a type of process that may embody a contagion phenomenon).

The classical Hawkes process does have a long memory, its trajectories are usually non-monotonic, and present jumps [Zhu \(2013\)](#).

As we will see later, the INAR(1) process cannot be characterized as a long-memory process, because the decreasing of its "asymptotic autocorrelation" is exponential and not in the form of a negative power [Kouamo \(2011\)](#). Moreover, it is monotonic, and does not present jumps.

Besides that, as we mentioned just above, a Hawkes process might be seen as a process with too much excitation to represent accurately the supposed slowness of the solving of the PFAS issue.

1.3 The Novel risk model with INAR(1) structure

In this paper, all the random variables and stochastic processes are defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Moreover, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ is the set of the nonnegative integers, and $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ are the positive integers.

We consider the unidimensional discrete-time risk model as follows :

$$R_n = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{M_k} Y_{k,i} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

where :

- $u \geq 0$ is a real number which is the initial surplus of the insurance company.
- $c > 0$ is the constant premium rate.
- The independent and identically distributed (i.i.d.) sequences of positive random variables $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ represent respectively the amounts of the main claims and the by-claims, with finite means μ_X and μ_Y . We note F and G their respective distributions, and to simplify, we also denote X and Y two random variables corresponding to these distributions.
- The company suffers N_k main claims and M_k by-claims at each period k , $k \geq 1$, where the sequence $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is i.i.d., with $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
- The sequences X , Y and N are mutually independent. Moreover, X and Y are independent of the sequence M . The relation of dependence between N and M is stated as follows.
- For $k \geq 1$, M_k is expressed in function of M_{k-1} , N_k and a constant parameter $\rho \in [0, 1[$ according to an INAR process of order 1 :

$$M_k = \rho \circ M_{k-1} + N_k, \quad (1.2)$$

where \circ is the binomial thinning operator such that $\rho \circ M_{k-1} = \sum_{i=1}^{M_{k-1}} b_i(\rho)$.

The $(b_i(\rho))_{i \in \mathbb{N}}$ are i.i.d. random variables with Bernoulli distribution $\mathcal{B}(\rho)$, independent of M_{k-1} and hence, $\rho \circ M_{k-1} | M_{k-1} \sim \mathcal{B}(M_{k-1}, \rho)$.

- We settle initially $M_0 \sim \mathcal{P}(\gamma_0)$, with $\gamma_0 > 0$, and note $\gamma_k = \mathbb{E}(M_k)$ for $k \in \mathbb{N}$. Moreover, for a fixed $k \geq 1$, we assume N_k is independent of M_0, \dots, M_{k-1} . We show later that with such assumptions, actually $M_k \sim \mathcal{P}(\gamma_k)$ for each k .

For the k^{th} period, we note $A_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i}$ and $B_k = \sum_{i=1}^{M_k} Y_{k,i}$, which are the respective aggregate amount of the main claims and the by-claims. What is more, we denote by $S_n = \sum_{k=1}^n (A_k + B_k)$ the aggregate amount of the whole losses at time $n \in \mathbb{N}^*$, which yields the writing : $R_n = u + cn - S_n$.

On a practical viewpoint, this structure with an INAR(1) process implies that during the k^{th} period, each main claim generates directly one by-claim precisely, and then, each by-claim which has occurred at this period engenders with probability ρ a new by-claim for the $(k+1)^{\text{th}}$ period.

One could underline the fact that the one main claim may engenders several types of subsequent losses at a same period. In this case, we simply consider that we gather all these losses in one claim $Y_{k,i}$, which would be therefore an aggregate amount of claims (rather than a single claim).

Moreover, as a technical remark, the by-claims have only *positive amounts* : it is a simplification of what could happen in practice. Indeed, in the context of cost revising for an insured loss, some main claims may be revised upward or downward. Actually, they are revised downward if

some damages appear to be less costly than firstly expected, and in that case, we should observe a by-claim with a negative amount.

For $u \geq 0$, we define the stopping time, $\tau(u) = \inf\{k \in \mathbb{N}^* / R_k < 0 \mid R_0 = u\}$, $\tau(u) \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Then, $\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty)$ is the ultimate ruin probability, and for $T \in \mathbb{N}^*$, and $\psi_T(u) = \mathbb{P}(\tau(u) \leq T)$ is the finite-time ruin probability at time T .

1.4 First properties of the model

1.4.1 Net profit condition

In this subsection, we outline the net profit condition related with the model. We also provide some basic properties linked with this condition.

We characterize first the law and the behaviour of the sequence $(M_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Proposition 1.4.1 (Distribution of $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$).

For $k \in \mathbb{N}$, $M_k \sim \mathcal{P}(\gamma_k)$, and $\gamma_k = \rho^k \left(\gamma_0 - \frac{\lambda}{1-\rho} \right) + \frac{\lambda}{1-\rho}$.

Since $0 \leq \rho < 1$, the sequence $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is monotonic, such that $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \frac{\lambda}{1-\rho}$, and more precisely, $M_k \xrightarrow{\mathcal{L}} M_\infty$, where $M_\infty \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{1-\rho}\right)$.

Démonstration. First, we derive the expression of γ_k thanks to an easy induction. The monotony and the limit of the sequence $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ are then quite obvious.

Moreover, the thinning operation \circ is distributive regarding the operation $+$ in \mathbb{N} , and we have the particular property that for a discrete Poisson random variable, if $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, therefore $\rho \circ N \sim \mathcal{P}(\rho\lambda)$. Eventually, we use the stability of the Poisson distribution by the convolution of two independent variables.

We deduce comfortably the convergence of $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Nevertheless, we do not have something more refined than this convergence in distribution. \square

Remark 1.4.1. In particular, the sequence is stationary if and only if $\gamma_0 = \frac{\lambda}{1-\rho}$.

Actually, for a classical continuous-time risk process, the net profit condition is equivalent to $\mathbb{E}(R_t - u) > 0$ for $t > 0$, which may be expressed simply if the losses are i.i.d. Here, the process should satisfy $\mathbb{E}(R_n - u) > 0$ for each $n \in \mathbb{N}^*$.

Lemma 1.4.1 (Net profit condition). We note $\gamma_{max} = \max\left(\gamma_0, \frac{\lambda}{1-\rho}\right)$. Then, the net profit condition is :

$$c > \lambda \mu_X + \mu_Y \gamma_{max} . \quad (1.3)$$

Démonstration. For all $n \in \mathbb{N}$, we shall have $\mathbb{E}(R_n - u) > 0$, which is satisfied if and only if $c > \lambda \cdot \mu_X + \mu_Y \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}^*} (\gamma_k)$. Due to the properties of monotony and convergence outlined previously, we deduce the formulation above. \square

If this condition is untrue, then the ultimate ruin is almost sure, namely $\psi(u) = 1$. So, for the remaining of this paper, we assume it is true.

In particular, this condition induces a maximal value for the parameter ρ . Indeed, ρ has to belong to the interval $[0, \rho_{max}[$, where :

$$0 < \rho_{max} = 1 - \frac{\lambda\mu_Y}{c - \lambda\mu_X} < 1. \quad (1.4)$$

This expression highlights that when ρ tends to be close to 1, the company should set a great premium amount c , or at least having a comfortable initial surplus u to face the uncertainty.

Moreover, it allows us to define a safety loading χ , and in accordance with usual ruin theory frameworks, $\chi > 0$ if and only if the net profit condition is true.

$$\chi = \frac{\lambda\mu_X + \gamma_{max}\mu_Y}{c} - 1 \quad (1.5)$$

1.4.2 Covariances

In this section, we present the main covariances computations regarding the model defined by Equation 1.1.

Proposition 1.4.2 (Variances and covariances of the counting processes).

- i) Since $N_k \sim \mathcal{P}(\lambda)$, for $k \geq 1$, we have $\mathbb{V}(N_k) = \lambda$. Similarly, for $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}(M_k) = \gamma_k$.
- ii) For $n > k \geq 1$, $\text{Cov}(N_n, N_k) = 0$ (by independence). Moreover, for $n > k \geq 0$, $\text{Cov}(M_n, M_k) = \rho^{n-k}\gamma_k$.
- iii) For $n \geq k \geq 1$, $\text{Cov}(M_n, N_k) = \rho^{n-k}\lambda$. But if $k > n$, then $\text{Cov}(M_n, N_k) = 0$.

Consequently, it is possible to decompose the autocovariance of $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Proposition 1.4.3 (Covariances of the risk process).

If $X, Y \in \mathcal{L}^2$, then we can compute the following : for $n \in \mathbb{N}^*$, and $1 \leq l \leq n$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(R_l, R_n) &= \sum_{i=1}^l (\mathbb{V}(A_i) + \mathbb{V}(B_i)) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq l} \text{Cov}(B_i, B_j) + \sum_{j=l+1}^n \sum_{i=1}^l \text{Cov}(B_i, B_j) \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq l} \text{Cov}(A_i, B_j) + \sum_{j=l+1}^n \sum_{i=1}^l \text{Cov}(A_i, B_j) \quad . \end{aligned} \quad (1.6)$$

where

$$\begin{cases} \mathbb{V}(A_i) = \lambda \mu_{(X^2)}, \\ \mathbb{V}(B_i) = \gamma_i \mu_{(Y^2)}, \\ \text{Cov}(B_i, B_j) = (\mu_Y)^2 \gamma_i \rho^{j-i} \quad \text{for } 1 \leq i < j, \\ \text{Cov}(A_i, B_j) = \lambda \mu_X \mu_Y \rho^{j-i} \quad \text{for } 1 \leq i \leq j. \end{cases}$$

We chose to present these results, because in similar models in ruin theory were also provided such covariances computations (see e.g. [Cossette et al. \(2010\)](#), or [Ma et al. \(2015\)](#)).

We notice that γ_k , seen as a function of ρ , λ , or even γ_0 , is an increasing function (for $k \in \mathbb{N}$). Therefore, as a whole, we find that when the level of risk increases, the level of uncertainty increases too.

1.5 Ruin probabilities with light-tailed distributions

In this section, we assume that both the distributions of X and Y are light-tailed. It implies in particular that there exists $s > 0$ such that $M_X(s) < \infty$ and $M_Y(s) < \infty$.

We display the moment-generating function (m.g.f.) of S_n in the next proposition. According to [Ma et al. \(2015\)](#) for instance, we express it as a multivariate function, with one variable corresponding to one type of loss (thus, things are clearer).

Further, we refer to the large deviations theory from Glynn and Whitt (see e.g. [Glynn and Whitt \(1994b\)](#)) and its applications to ruin theory (see e.g. [Nyrhinen \(1998\)](#) and [Müller and Pflug \(2001\)](#)) to derive the explicit Lundberg equation related, and then the existence of the adjustment coefficient for our "non-i.i.d." context.

Proposition 1.5.1 (M.g.f. in 1 dimension).

We assume X and Y are light-tailed. Let $t, s \geq 0$ be real numbers, and let us assume that we have $\rho M_Y(s) < 1$, and $M_X(t) < \infty$. Thus, for $n \in \mathbb{N}^*$, the moment-generating function of S_n is :

$$\mathcal{M}_{S_n}(t, s) = \exp \left[\gamma_0 [B_n(M_Y(s)) - 1] + \lambda \left(M_X(t) M_Y(s) \frac{1 - B_n(M_Y(s)) + n(1 - \rho)}{1 - \rho M_Y(s)} - n \right) \right]. \quad (1.7)$$

where $B_0(s) = 1$, then $B_i(s) = \rho s B_{i-1}(s) + (1 - \rho)$ for $i \geq 1$.

Corollary 1.5.1 (Lundberg equation). If X and Y are light-tailed, then for $t > 0$ such that $M_X(t) < \infty$ and $\rho M_Y(t) < 1$, the Lundberg equation linked with the model is :

$$ct = \lambda \left(\frac{M_X(t) M_Y(t) (1 - \rho)}{1 - \rho M_Y(t)} - 1 \right). \quad (1.8)$$

Démonstration. First, let us fix two real numbers $t, s > 0$ with the constraint $\rho s < 1$.

Then, let $n \in \mathbb{N}^*$ be a positive integer. We define the following probability-generating function (p.g.f.) :

$$P_n(t, s) = \mathbb{E} \left(t^{N_1 + \dots + N_n} s^{M_1 + \dots + M_n} \right).$$

To compute it explicitly, let us define $B_0(s) = 1$, and then, for $i \in \mathbb{N}$, $B_{i+1}(s) = \rho s B_i(s) + \bar{\rho}$, where $\bar{\rho} = 1 - \rho$. We have

$$P_n(t, s) = \left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left(t^{N_i} s^{(N_i + \rho \circ N_i + \dots + \rho^{\circ i} N_i)} \right) \right) \times \mathbb{E} \left(s^{(M_0 + \rho \circ M_0 + \dots + \rho^{\circ n} M_0)} \right), \quad (1.9)$$

where $\rho^{\circ i} N_k = \rho \circ (\rho \circ \dots (\rho \circ N_k) \dots)$ corresponds to i successive thinning operations.

Then, we derive the factor for $i = n - 1$ to show how it works :

$$\mathbb{E} \left(t^{N_{n-1}} s^{(N_{n-1} + \rho \circ N_{n-1})} \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(t^{N_{n-1}} s^{(N_{n-1} + \rho \circ N_{n-1})} \mid N_{n-1} \right) \right),$$

It yields

$$\mathbb{E} \left(t^{N_{n-1}} s^{(N_{n-1} + \rho \circ N_{n-1})} \right) = \mathbb{E} \left((ts)^{N_{n-1}} \mathbb{E} \left(s^{(\rho \circ N_{n-1})} \mid N_{n-1} \right) \right) = \mathbb{E} \left((ts)^{N_{n-1}} (1 - \rho + \rho s)^{N_{n-1}} \right),$$

$$\text{and} \quad \mathbb{E} \left(t^{N_{n-1}} s^{(N_{n-1} + \rho \circ N_{n-1})} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k s^k [\rho s + \bar{\rho}]^k \mathbb{P}(N_{n-1} = k).$$

Hence, $\mathbb{E} \left(t^{N_{n-1}} s^{(N_{n-1} + \rho \circ N_{n-1} + \dots)} \right) = \exp[\lambda(tsB_1(s) - 1)]$, as $\mathbb{P}(N_{n-1} = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ for $k \in \mathbb{N}$. Then, for $i = n - 2$, the computation would start like this :

$$\mathbb{E} \left(t^{N_{n-2}} s^{(N_{n-2} + \rho \circ N_{n-2} + \rho \circ \rho \circ N_{n-2})} \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(t^{N_{n-2}} s^{(N_{n-2} + \rho \circ N_{n-2} \dots)} \mid N_{n-2}, \rho \circ N_{n-2} \right) \right) \dots$$

Hence, we obtain, for $1 \leq i \leq n$, $\mathbb{E} \left(t^{N_i} s^{(N_i + \rho \circ N_i + \dots)} \right) = \exp[\lambda(tsB_{n-i}(s) - 1)]$, but also $\mathbb{E} \left(s^{(M_0 + \rho \circ M_0 + \dots)} \right) = \exp[\gamma_0(B_n(s) - 1)]$.

Therefore,

$$P_n(t, s) = \exp \left(\gamma_0(B_n(s) - 1) + \lambda \left(ts \sum_{i=0}^{n-1} B_i(s) - n \right) \right). \quad (1.10)$$

We can prove by induction that for $n \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_i(s) = \frac{1 - B_n(s) + n(1 - \rho)}{1 - \rho s}.$$

Finally, as a definition, $\mathcal{M}_{S_n}(t, s) = P_n(M_X(t), M_Y(s))$, and by substitution, it yields the expression outlined above.

Now, from this, we derive the Lundberg equation related with the model. As mentioned, for the next part, we use some large deviation results for ruin theory.

We take here $t > 0$ such that $M_X(t) < \infty$ and $\rho M_Y(t) < 1$.

For $n \in \mathbb{N}^*$, we define $c_n(t) = \ln(\mathcal{M}_{S_n}(t, t)) - nct$.

Then, the Lundberg equation corresponds to $f(t) = 0$, where $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} c_n(t)$.

Finally, since $\rho s < 1$, and $B_n(s) = \frac{\bar{\rho} + \rho(\rho s)^n - (\rho s)^{n+1}}{1 - \rho s}$, we get $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n(s)}{n} = 0$, and it yields the Lundberg equation outlined above. \square

Actually, the same kind of calculus was made in [Cossette et al. \(2010\)](#), [Shi and Wang \(2014\)](#), or [Ma et al. \(2015\)](#) for instance.

As for these papers, the asymptotic Lundberg-type result obtained regarding the so-called adjustment coefficient is only logarithmic here, i.e. $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(\psi(u))}{u} = -\kappa_D$.

Proposition 1.5.2 (General case with two light-tailed distributions).

i) Let us assume that both the distributions of X and Y are light-tailed. Then, when $u \rightarrow \infty$, the ultimate ruin probability is $\psi(u) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa_D u}$, where $\kappa_D > 0$ is the adjustment coefficient related with the model.

ii) Moreover, seen as a function of ρ , κ_D is non-increasing.

Démonstration. i) We still refer to the large deviation theory.

Let us take $I = [0, x_0[$, $x_0 > 0$, the maximal interval where the Lundberg equation is defined, that is to say $t \in I$ is equivalent to $M_X(t) < \infty$, and $\rho M_Y(t) < 1$.

We want to solve, for $t \in I$, Equation 1.8, which can be rewritten

$$f(t) = \lambda \frac{M_X(t)M_Y(t)(1 - \rho)}{1 - \rho M_Y(t)} - (\lambda + ct) = 0, \quad (1.11)$$

and if at least one solution exists, the so-called adjustment coefficient would be the smaller solution.

f is a convex function. Moreover, $f(0) = 0$, and $f'(0) = \lambda \left(\mu_X + \frac{\mu_Y}{1-\rho} \right) - c$, so $f'(0) < 0$ thanks to the net profit condition.

Moreover, by the definition of I and x_0 , $\lim_{t \rightarrow x_0^-} \frac{M_X(t)}{1 - M_Y(t)\rho} = +\infty$.

Therefore, $\lim_{t \rightarrow x_0^-} f(t) = +\infty$. We deduce that $f(t) < 0$ in a neighborhood of 0, and regarding the limit of f in x_0 , thanks to the intermediate value theorem, Equation 1.11 has at least one solution, and κ_D exists.

ii) Let us see f as a function of ρ . f is (at least) \mathcal{C}^1 according to this parameter, and

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(t, \rho) = \lambda \frac{M_X(t)M_Y(t)[M_Y(t) - 1]}{(1 - \rho M_Y(t))^2}. \quad (1.12)$$

So $\frac{\partial f}{\partial \rho}(t, \rho) \geq 0$, since for each $t \geq 0$, $M_Y(t) \geq 1$.

According to the previous reasoning, it means that if $\rho_1 \leq \rho_2$, then $f(t, \rho_1) \leq f(t, \rho_2)$ for every $t \geq 0$, and therefore $\kappa_D(\rho_1) \geq \kappa_D(\rho_2)$. In other words, κ_D is a nonincreasing function of ρ . \square

Remark 1.5.1. Actually, we have to be precise and distinguish between the possible types of light-tailed distributions. This previous property is true if the distributions of X and Y are such that $M_X(t) < \infty$ for $t \in [0, M[$, where $M \in]0, \infty]$ (and the same thing for Y), but it would not be necessary true if we had $M_X(t) < \infty$ for $t \in [0, M]$ with $0 < M < \infty$ (or similarly for Y). However, these distributions are rare, so for the rest of the paper and the following other adjustment coefficient analyses, we do not take into account this kind of distribution.

Then, it is possible to derive the explicit expression of κ_D when the amounts of the two kinds of losses both follow an exponential distribution.

Proposition 1.5.3 (With 2 exponential distributions).

Let us assume that $X \sim \text{Exp}(\eta)$, and $Y \sim \text{Exp}(\delta)$, with $\eta, \delta > 0$.

Then, when $u \rightarrow \infty$, we have the asymptotic ruin probability :

$$\psi(u) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa_D u}, \quad \kappa_D = \frac{\eta + \delta(1 - \rho)}{2} - \frac{\lambda + \sqrt{c^2[\eta - \delta(1 - \rho)]^2 + \lambda^2 + 2\lambda c[\eta + \delta(1 - \rho)]}}{2c}. \quad (1.13)$$

Démonstration. Since $M_X(t) = \frac{\eta}{\eta - t}$, and $M_Y(t) = \frac{\delta}{\delta - t}$, the Lundberg equation is here equivalent to

$$a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0 \quad \text{where} \quad \begin{cases} a_0 = c\eta\delta(1 - \rho) - \lambda(\eta + \delta(1 - \rho)), \\ a_1 = \lambda - c[\eta + \delta(1 - \rho)], \\ a_2 = c. \end{cases} \quad (1.14)$$

We have $a_1 < 0$, $a_0 > 0$ thanks to the net profit condition, and of course $a_2 > 0$.

We define also :

$$\Delta_D = a_1^2 - 4a_0a_2 = c^2[\eta - \delta(1 - \rho)]^2 + \lambda^2 + 2\lambda c[\eta + \delta(1 - \rho)].$$

Finally, κ_D is the smallest positive root of the second degree equation $a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0$, i.e.

$$\kappa_D = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta_D}}{2a_2}, \quad \text{which yields the expression outlined.} \quad \square$$

The expression of κ_D is quite heavy, so we would like to perceive it better, and in particular have bounds of the related incurred risk by an insurance company.

We can check that there is no redundancy in the following results. For example, the first upper bound is more refined when η and $\delta(1 - \rho)$ are close, whereas the second one is thinner when it is not the case.

A lower bound of κ_D would correspond to an upper bound of the risk incurred, but actually, such bounds were more difficult to derive.

Proposition 1.5.4 (Bounds of κ_D). We have the upper bounds :

$$\kappa_D < \frac{\eta + \delta(1 - \rho)}{2} - \frac{\lambda}{c} \quad ; \quad \kappa_D < \min(\eta, \delta(1 - \rho)) - \frac{\lambda}{2c} . \quad (1.15)$$

Démonstration. These bounds can be deduced by "direct" computations. For the first bound, we can observe that $\sqrt{\Delta_D} > \lambda$, and for the second, $\sqrt{\Delta_D} > c|\eta - \delta(1 - \rho)|$.

With similar considerations, it is possible to draw some other comparisons : for instance, by noticing that $\sqrt{\Delta_D} > |\lambda + c(\eta - \delta(1 - \rho))|$ (we provide more details just after this proof). \square

With only main claims, no by-claims, and an INAR(1) process counting the main claims, [Cossette et al. \(2010\)](#) found the following adjustment coefficient (with an adaptation of the notations) :

$$\kappa_1 = \delta(1 - \rho) - \frac{\lambda}{c} . \quad (1.16)$$

Since $\sqrt{\Delta_D} > |\lambda + c(\eta - \delta(1 - \rho))|$, we get $\kappa_D < \kappa_1$, hence our model from Equation 1.1 is more risky (which was quite intuitive).

Moreover, if $X = 0$ a.s., we would find $\kappa_D = \kappa_1$. And if in addition, we compare the respective expressions, it seems that κ_D is a fair generalization of κ_1 with another type of loss.

1.6 Models with softened dependence

From our initial risk model in Equation 1.1, we define two other similar models, however here we soften the dependence assumptions on the counting processes : thus, we present a "*half-independent*" model, and a "*purely independent*" model. Moreover, here we call the original model in Equation 1.1 the "*dependent model*", and we rewrite it R^D instead of R .

We express some of their risk properties, in particular their adjustment coefficients, and then we compare these three models.

1.6.1 Half-independent model

The half-independent model is :

$$R_n^S = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{M_k^S} Y_{k,i} \quad \text{for } n \in \mathbb{N} . \quad (1.17)$$

We keep most of the assumptions of the dependent model, but what changes is that M_k^S is no longer written as an INAR(1) model, but instead $M_k^S = N_k + O_k$ for $k \geq 1$.

Thus, we maintain the source term N_k , but we replace the contagion term by a variable O_k , defined this way : $O_k \sim \mathcal{P}(\gamma_k - \lambda)$ for $k \in \mathbb{N}^*$, and $(O_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is a sequence of independent variables, which is independent of the sequences N , X and Y .

In particular, it yields that $M_k^S \sim \mathcal{P}(\gamma_k)$ for each $k \in \mathbb{N}^*$. Hence, M_k^S has the same distribution as M_k^D . Actually, the sequences $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ and $(M_k^S)_{k \in \mathbb{N}^*}$ are still dependent, but now, the variables M_k^S are mutually independent. Specifically, for $k \in \mathbb{N}^*$, M_k^S and N_k are dependent, but $M_k^S \perp N_j$ as soon as $j \neq k$.

Proposition 1.6.1 (Adjustment coefficient of the half-independent model).

We assume that the losses have the same assumptions as in Proposition 1.5.3, that is to say $X \sim \text{Exp}(\eta)$, and $Y \sim \text{Exp}(\delta)$, with $\eta, \delta > 0$.

Therefore, the half-independent model satisfies $\psi_S(u) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa_S u}$, with the following adjustment coefficient :

$$\kappa_S = \frac{\eta + \delta}{2} - \frac{\lambda + \sqrt{4c\lambda\delta(1-\rho)^2 + [\lambda + c(1-\rho)(\eta - \delta)]^2}}{2c(1-\rho)}. \quad (1.18)$$

Démonstration. By writing $S_n^S = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{M_k^S} Y_{k,i}$ the cumulative amount of losses at time $n \in \mathbb{N}^*$, we find its m.g.f. similarly as for Proposition 1.5.3 :

$$\mathcal{M}_{S_n^S}(t, s) = \exp \left(n\lambda M_Y(s)(M_X(t) - 1) + (M_Y(s) - 1) \sum_{i=1}^n \gamma_i \right). \quad (1.19)$$

As before, according to large deviations results, we deduce the Lundberg equation :

$$ct = \lambda M_Y(t)(M_X(t) - 1) + \frac{\lambda}{1-\rho}(M_Y(t) - 1). \quad (1.20)$$

We have here $M_X(t) = \frac{\eta}{\eta - t}$, and $M_Y(t) = \frac{\delta}{\delta - t}$, which leads to the second degree equation : $a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0$, where :

$$\begin{cases} a_0 = c\eta\delta(1-\rho) - \lambda(\eta + \delta(1-\rho)), \\ a_1 = \lambda - c(1-\rho)(\eta + \delta), \\ a_2 = c(1-\rho). \end{cases} \quad (1.21)$$

$a_2 > 0$ is obvious, and the fact that $a_1 < 0$ and $a_0 > 0$ is a consequence of the net profit condition. Then, we deduce the adjustment coefficient κ_S as the smallest positive solution of this equation. \square

1.6.2 Purely independent model

The "purely independent" model is :

$$R_n^I = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{M_k^I} Y_{k,i} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \quad (1.22)$$

We keep most of the assumptions of the dependent model, but this time, we simply set a sequence of independent variables $(M_k^I)_{k \in \mathbb{N}^*}$ such that $M_k^I \sim \mathcal{P}(\gamma_k)$ for each $k \in \mathbb{N}^*$. Moreover, we assume that the counting processes $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ and $(M_k^I)_{k \in \mathbb{N}^*}$ are independent, and that M^I is also independent of X and Y . In short, here all the sequences of variables X , Y , N and M^I are mutually independent.

Proposition 1.6.2 (Adjustment coefficient of the purely independent model).

We still assume that $X \sim \text{Exp}(\eta)$, and $Y \sim \text{Exp}(\delta)$, with $\eta, \delta > 0$.

Therefore, this model satisfies $\psi_I(u) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa_I u}$, with :

$$\kappa_I = \frac{\eta + \delta}{2} - \frac{\lambda(2 - \rho) + \sqrt{4\lambda^2(1 - \rho) + [\lambda\rho + c(1 - \rho)(\eta - \delta)]^2}}{2c(1 - \rho)}. \quad (1.23)$$

Démonstration. It is the same kind of proof as for Proposition 1.18, but here we have :

$$\mathcal{M}_{S_n^I}(t, s) = \exp \left(n\lambda(M_X(t) - 1) + (M_Y(s) - 1) \sum_{i=1}^n \gamma_i \right). \quad (1.24)$$

Then, the Lundberg equation is

$$ct = \lambda(M_X(t) - 1) + \frac{\lambda}{1 - \rho}(M_Y(t) - 1). \quad (1.25)$$

It leads to $a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0$, where :

$$\begin{cases} a_0 = c\eta\delta(1 - \rho) - \lambda(\eta + \delta(1 - \rho)), \\ a_1 = \lambda(2 - \rho) - c(1 - \rho)(\eta + \delta), \\ a_2 = c(1 - \rho). \end{cases} \quad (1.26)$$

$a_2 > 0$ is obvious, then $a_1 < 0$ and $a_0 > 0$ thanks to the net profit condition. Then, we deduce κ_I as the smallest positive solution of this equation. \square

1.6.3 Some firsts comparisons of the three models

Here we derive the main result of this section, namely we understate the risk incurred if we underestimate the level of dependence of the contagion process (at least for this particular case of exponential distributions). In relation with the PFAS issue, it should entice companies who are covering such risks to assess carefully the potential underlying dependence.

Before that, we propose to compare the means and variances of the aggregate amount of losses for the 3 models, which we note here S_n^D , S_n^S and S_n^I .

Proposition 1.6.3 (Comparison of the means and variances).

We have $\mathbb{E}(S_n^I) = \mathbb{E}(S_n^S) = \mathbb{E}(S_n^D) = n\lambda\mu_X + \mu_Y \sum_{i=1}^n \gamma_i$.

However, if $X, Y \in \mathcal{L}^2$, $\mathbb{V}(S_n^I) < \mathbb{V}(S_n^S) < \mathbb{V}(S_n^D)$, and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{V}(S_n^D) - \mathbb{V}(S_n^S)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{V}(S_n^S) - \mathbb{V}(S_n^I)] = +\infty.$$

Indeed, $\mathbb{V}(S_n^S) - \mathbb{V}(S_n^I) = 2n\lambda\mu_X\mu_Y$, and

$$\mathbb{V}(S_n^D) - \mathbb{V}(S_n^S) = 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} (\mu_Y)^2 \gamma_i \rho^{j-i} + 2\mu_X\mu_Y \frac{\rho\lambda}{(1 - \rho)^2} [n(1 - \rho) - (1 - \rho^n)].$$

Démonstration. Computing the variances yields : $\mathbb{V}(S_n^I) = n\lambda\mu_{(X^2)} + \mu_{(Y^2)} \sum_{i=1}^n \gamma_i$, and

$$\mathbb{V}(S_n^S) = n\lambda\mu_{(X^2)} + \mu_{(Y^2)} \sum_{i=1}^n \gamma_i + 2n\lambda\mu_X\mu_Y, \text{ and}$$

$$\mathbb{V}(S_n^D) = n\lambda\mu_{(X^2)} + \mu_{(Y^2)} \sum_{i=1}^n \gamma_i + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} (\mu_Y)^2 \gamma_i \rho^{j-i} + 2\mu_X\mu_Y \frac{\lambda}{(1 - \rho)^2} [n(1 - \rho) - \rho(1 - \rho^n)].$$

\square

After that, we are interested in comparing the adjustment coefficients related with this double exponential case. We first outline a quite intuitive result :

Proposition 1.6.4 (Variations of κ_S and κ_I according to ρ).
Seen as functions of ρ , κ_S and κ_I are non-increasing.

Démonstration. We could prove it the same way as point ii) from Proposition 1.5.2 for a general case regarding the models $(R_n^S)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(R_n^I)_{n \in \mathbb{N}}$. Otherwise, since for this particular exponential case we know the exact expressions, we may compute and use directly the derivatives $\kappa'_S(\rho)$ and $\kappa'_I(\rho)$. \square

Then, we rank the adjustment coefficients :

Proposition 1.6.5 (Comparison of the 3 adjustment coefficients).

We keep the assumptions of Proposition 1.5.3 : $X \sim \text{Exp}(\eta)$, and $Y \sim \text{Exp}(\delta)$, $\eta, \delta > 0$. Therefore, $\kappa_D(0) = \kappa_S(0) < \kappa_I(0)$, and then, for $\rho \in]0, \rho_{max}[$,

$$\kappa_D(\rho) < \kappa_S(\rho) < \kappa_I(\rho) . \quad (1.27)$$

However, when $\rho \xrightarrow{\nearrow} \rho_{max}$, we have $\lim_{\rho \rightarrow \rho_{max}} \kappa_D(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \rho_{max}} \kappa_S(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \rho_{max}} \kappa_I(\rho) = 0$.

Démonstration. First of all, regarding the expressions, we see κ_I , κ_S and κ_D as continuous functions according to the positive parameters c, ρ, η, δ , and λ .

By extending the definition domains to $\rho = \rho_{max}$ (even if the net profit condition is not fulfilled for this value), we get $\kappa_I(\rho_{max}) = \kappa_S(\rho_{max}) = \kappa_D(\rho_{max}) = 0$. It yields the limits outlined, by continuity.

Let us compare κ_D and κ_S . First, we find easily $\kappa_S(0) = \kappa_D(0)$, and after that, we consider $\kappa_S(\rho) = \kappa_D(\rho)$ for $\rho \in]0, \rho_{max}[$.

We square twice the equations to get rid of the square roots involved in the expressions of κ_D and κ_S . By rearranging the terms, we have a fourth degree polynomial equation with λ and c as variables. After some heavy computations and simplifications, we find that $\kappa_S(\rho) = \kappa_D(\rho)$ implies $\rho^2 \lambda(\eta + \delta(1 - \rho)) = \rho^2 c\eta\delta(1 - \rho)$. If we assume $\rho \neq 0$, it induces $\lambda(\eta + \delta(1 - \rho)) = c\eta\delta(1 - \rho)$, which entails $\rho = \rho_{max}$. Therefore, $\kappa_S(\rho) = \kappa_D(\rho)$ has no solution in $]0, \rho_{max}[$.

However, we need an additional argument to justify that $\kappa_S(\rho) > \kappa_D(\rho)$ for $\rho \in]0, \rho_{max}[$. We compare the values of the derivatives $\kappa'_S(\rho)$ and $\kappa'_D(\rho)$ in 0, and we find that $\kappa'_S(0) = \kappa'_D(0)$ implies $\eta(c\delta - \lambda)^2 + \lambda c\delta(\delta + \eta) = 0$. It is never true, as $\lambda c\delta(\delta + \eta) > 0$, and $\eta(c\delta - \lambda)^2 \geq 0$. Moreover, $\kappa'_S(0)$ and $\kappa'_D(0)$ are continuous, and for $\lambda = \eta = \delta = 1$, and $c = 5$, we obtain $\kappa'_S(0) > \kappa'_D(0)$, thus (for the same set of values), there exists $0 < \varepsilon < \rho_{max}$ such that $\kappa_S(\rho) > \kappa_D(\rho)$ for $\rho \in]0, \varepsilon[$. By continuity, $\kappa_S(\rho) > \kappa_D(\rho)$ for $\rho \in]0, \rho_{max}[$, and for every $(c, \eta, \delta, \lambda)$ (such that the net profit condition is satisfied).

Let us now compare κ_I and κ_S .

First of all, we find $\kappa_I(0) > \kappa_S(0)$. For that, we solve the equation $\kappa_I(0) = \kappa_S(0)$, and we apply the same kind of comparison than for $\kappa'_S(0)$ and $\kappa'_D(0)$.

Then, with similar calculus, the equation $\kappa_S(\rho) = \kappa_I(\rho)$ for $\rho \in]0, \rho_{max}[$ leads to $\lambda(\eta + \delta(1 - \rho)) = c\eta\delta(1 - \rho)$. Once again, the only solution on $]0, \rho_{max}[$ is $\rho = \rho_{max}$. Finally, $\kappa_I(\rho) > \kappa_S(\rho)$ for every $\rho \in]0, \rho_{max}[$, and every $(c, \eta, \delta, \lambda)$. \square

An example of work in ruin theory where such a comparison between the Lundberg coefficients is made when we lighten some dependence assumptions is the one from [Wang and Yuen \(2005\)](#), which describes a multivariate model where a claim occurring in a line of business can affect the other lines.

In addition, we can derive lower bounds regarding κ_I . It is possible since the variables M_k^I are mutually independent for $k \geq 1$, and independent of the sequence $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$, but not for κ_D because the M_k^D are dependent (for $k \geq 0$). Similarly, it is neither possible for κ_S , since $(M_k^S)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ are dependent.

The corresponding properties used to prove the following proposition but also some further results, and according to which it is not possible to extend that to the models $(R_n^D)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(R_n^S)_{n \in \mathbb{N}}$, are Theorems 1.A.3 and 1.A.4 from [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#).

Remark 1.6.1. We also acknowledge that if the stochastic comparisons were possible, we would expect to have $R_n^D \leq_{st} R_n^S \leq_{st} R_n^I$ for $n \in \mathbb{N}$, or at least to derive in general $\psi_I(u) \leq \psi_S(u) \leq \psi_D(u)$. However, we were only able to establish such a risk comparison for the adjustment coefficients.

Proposition 1.6.6 (Lower bounds of κ_I). We have these lower bounds for κ_I , which actually correspond to an upper bound of the incurred risk :

$$\kappa_I \geq \eta \wedge \delta - \frac{\lambda(2-\rho)}{c(1-\rho)} \quad ; \quad \kappa_I \geq \frac{\eta \wedge \delta}{2} - \frac{\lambda}{c(1-\rho)} \quad . \quad (1.28)$$

Démonstration. i) Let us prove the first bound. We assume first that the sequence $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is decreasing.

Let us fix a positive integer $n_0 \geq 1$. We define the sequence $(L_k(n_0))_{k \in \mathbb{N}^*}$ such that $L_k(n_0) \sim \mathcal{P}(\gamma_k)$ for $1 \leq k \leq n_0$, and $L_k(n_0) \sim \mathcal{P}(\gamma_{n_0})$ for $k \geq n_0$. Moreover, we assume that $(L_k(n_0))_{k \in \mathbb{N}^*}$ is independent of the sequences $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $(M_k^I)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, and that the variables $L_k(n_0)$ are mutually independent for $k \in \mathbb{N}^*$.

Thus, $M_k \leq L_k(n_0)$ for a fixed $k \in \mathbb{N}^*$. So, thanks to [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#),

$$\sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} + \sum_{i=1}^{M_k^I} Y_{k,i} \leq_{st} \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} + \sum_{i=1}^{L_k(n_0)} Y_{k,i} \leq_{st} \sum_{i=1}^{N_k} Z_{1,k,i} + \sum_{i=1}^{L_k(n_0)} Z_{2,k,i} \quad .$$

where the sequence $(Z_{j,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq j \leq 2}$ is i.i.d., following a distribution $\text{Exp}(\eta \wedge \delta)$, and independent of N , M^I , X , Y , and $L(n_0)$.

This i.i.d. assumption provides $\sum_{i=1}^{N_k} Z_{1,i,k} + \sum_{i=1}^{L_k(n_0)} Z_{2,i,k} \sim \sum_{i=1}^{N_k+L_k(n_0)} Z_{1,i,k}$.

Then, by independence, $N_k + L_k(n_0) \sim \mathcal{P}(\lambda + \gamma_{n_0})$ for $k \geq n_0$.

We define the risk process : $P_n(n_0) = u + c \cdot n - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k+L_k(n_0)} Z_{1,k,i}$. By the same kind of proof as for Proposition 1.5.1, we obtain this Lundberg equation :

$$0 = (\lambda + \gamma_{n_0})(M_Z(t) - 1) - ct \quad . \quad (1.29)$$

As $M_Z(t) = \frac{\eta \wedge \delta}{\eta \wedge \delta - t}$, the equation has a unique solution, which yields :

$$\psi_I(u) \leq \psi_{P(n_0)}(u) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa(n_0)u} \quad , \quad \kappa(n_0) = (\eta \wedge \delta) - \frac{\lambda + \gamma_{n_0}}{c} \quad .$$

Thus, we infer that $\kappa(n_0) \leq \kappa_I$.

Since it is true for each $n_0 \geq 1$, when $n_0 \rightarrow \infty$, it yields $\kappa_I \geq (\eta \wedge \delta) - \frac{\lambda(2-\rho)}{c(1-\rho)}$.

And, if $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is nondecreasing, we may simply take $L_k \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{1-\rho}\right)$.

ii) We practice the same kind of reasoning for the second lower bound, but instead, we use

the stochastic inequality $\sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} + \sum_{i=1}^{M_k^I} Y_{k,i} \leq_{st} 2 \sum_{i=1}^{L_k(n_0)} Z_{k,i}$ for a fixed $k \in \mathbb{N}^*$, where the $(Z_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ are i.i.d., following a distribution $\text{Exp}(\eta \wedge \delta)$. Then, the corresponding Lundberg equation is :

$$\gamma_{n_0} (\mathcal{M}_Z(2t) - 1) - ct = 0. \quad (1.30)$$

It provides $\kappa_I \geq \kappa(n_0) = \frac{\eta \wedge \delta}{2} - \frac{\gamma_{n_0}}{c}$. Then, as $n_0 \rightarrow \infty$, $\kappa_I \geq \frac{\eta \wedge \delta}{2} - \frac{\lambda}{c(1-\rho)}$. \square

Remark 1.6.2. Actually, thanks to such comparisons, we might also be able to prove that, whatever are the fixed distributions for X and Y , then for $\rho_1 \leq \rho_2$, $R_n^D(\rho_2) \leq_{st} R_n^D(\rho_1)$, or at least $\psi_D(u, \rho_1) \leq \psi_D(u, \rho_2)$. The same problem exists for $(R_n^S)_{n \in \mathbb{N}}$. However, it is true for $(R_n^I)_{n \in \mathbb{N}}$, and we write it just after as a result.

Proposition 1.6.7 (Variations of $\psi_I(u)$ according to ρ).

For any distributions assigned to X and Y , and for two real numbers $0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 < \rho_{max}$, then, for every $u \geq 0$, $\psi_I(u, \rho_1) \leq \psi_I(u, \rho_2)$.

We could prove it quite easily thanks to suitable stochastic comparisons.

1.7 Ruin probabilities with heavy-tailed distributions

In this section, we propose some results related to heavy-tailed distributions. We continue to draw comparisons between the main model (Equation 1.1) and the two models with softened dependence (Equations 1.17 and 1.22). Actually, the most precise results are obtained for the purely independent model.

Regarding the PFAS issue, we could assume the distribution of the losses would likely be heavy-tailed, especially the distribution of the by-claims (yet, this should be checked with reliable data). Indeed, the risks carried by such a pollution should be high, and the health and environmental damages should represent huge amounts : as an example, in European Union, the annual related health costs are between 52 and 84 billion euros, and the expenses to remove these molecules from drinking water are around 238 billion euros.

1.7.1 Asymptotics for subexponential and Pareto distributions

An example of heavy tail is the Pareto distribution. There are several ways to define this distribution, and we choose the following :

Definition 1.7.1 (Pareto distribution). $X \sim \text{Par}(\alpha, \theta)$ with $\alpha, \theta > 0$ if for $x \in \mathbb{R}_+$, $\overline{F}_X(x) = \left(\frac{\theta}{\theta + x}\right)^\alpha$. The mean is finite if and only if $\alpha > 1$, and in that case, $\mu_X = \frac{\theta}{\alpha - 1}$.

More specifically, the Pareto distribution belongs to the class of subexponential distributions, which is itself a subclass of the heavy-tailed distribution.

Proposition 1.7.1 (Finite-time ruin probabilities with regular variations).

Let us consider the original model from Equation 1.1.

We assume that $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, and $G \in \mathcal{R}_{-\beta}$, where $\alpha, \beta > 1$. For $T \in \mathbb{N}^*$,

- i) If $\alpha < \beta$, then $\psi_T(u) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ (seen as a function of u).
- ii) If $\alpha > \beta$, therefore $\psi_T(u) \in \mathcal{R}_{-\beta}$.
- iii) If $\alpha = \beta$, we get naturally $\psi_T(u) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

Démonstration. We first look at the particular case where X and Y are Pareto distributions : $X \sim \text{Par}(\alpha, \theta)$ and $Y \sim \text{Par}(\beta, \eta)$ (with $\alpha, \beta > 1$ and $\theta, \eta > 0$).

We apply Lemma X.2.2 of [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#), which yields, for each $k \in \mathbb{N}^*$, $\overline{F_{A_k}}(x) \sim \lambda \overline{F}(x)$ and $\overline{F_{B_k}}(x) \sim \gamma_k \overline{G}(x)$.

On the other hand, we can write $\psi_T(u) = \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq T} \left(\sum_{k=1}^j (A_k + B_k) - cj \right) > u \right)$. Thus, we have $\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq T} \sum_{k=1}^j (A_k + B_k) > u + cT \right) \leq \psi_T(u) \leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq T} \sum_{k=1}^j (A_k + B_k) > u \right)$.

Since T is fixed, as $u \rightarrow \infty$, $\psi_T(u) \sim \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq j \leq T} \sum_{k=1}^j (A_k + B_k) > u \right)$. Moreover, by positivity, $\max_{1 \leq j \leq T} \sum_{k=1}^j (A_k + B_k) = \sum_{k=1}^T (A_k + B_k)$. Then, we are able to deduce the explicit equivalents with these Pareto distributions.

For the case i), since $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$, it gives $\psi_T(u) \sim (\theta^\alpha T \lambda) u^{-\alpha}$.

For ii), if $Y \sim \text{Par}(\beta, \eta)$, it gives $\psi_T(u) \sim (C_T \eta^\beta) u^{-\beta}$, where

$$C_T = \sum_{k=1}^T \gamma_k = \left(\frac{\lambda}{(1-\rho)^2} [T(1-\rho) - \rho(1-\rho^T)] + \frac{\rho \gamma_0 (1-\rho^T)}{1-\rho} \right).$$

Eventually, for iii), $\psi_T(u) \sim (T \lambda \theta^\alpha + C_T \eta^\alpha) x^{-\alpha}$.

These three points i), ii) and iii) may be generalized to the classes $\mathcal{R}_{-\alpha}$ and $\mathcal{R}_{-\beta}$ by adapting the proof to appropriate slowly varying functions L_1 and L_2 , such that $\overline{F}(x) = L_1(x)x^{-\alpha}$, and $\overline{G}(x) = L_2(x)x^{-\beta}$ for $x \geq 0$. \square

This result could be adapted to the two models with softened dependence.

Now, let us introduce a classical continuous-time Cramér-Lundberg risk process :

$R_c(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} Y_i$, where $u \geq 0$, $c > 0$, the $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ are positive i.i.d. random variables with mean $\mu > 0$, and $M \sim \mathcal{P}o(\lambda)$ is a Poisson process. We denote by $\psi_c(u)$ its ultimate ruin probability.

In particular, if the stationary excess distribution of Y_1 is subexponential, then, the asymptotic ruin probability when $u \rightarrow \infty$ is

$$\psi_c(u) \sim \frac{\lambda}{c - \lambda \mu} \int_u^\infty \overline{F_Y}(x) dx \quad (1.31)$$

In particular, if $Y_i = V_i + W_i$ is the sum of two independent variables (for instance, a main claim and a by-claim), we write

$$\psi_c(u) \sim \frac{\lambda}{c - \lambda(\mu_V + \mu_W)} \int_u^\infty (\overline{F_V}(x) + \overline{F_W}(x)) dx. \quad (1.32)$$

We can define the transcription of R_c in discrete time : for $n \in \mathbb{N}$,

$Q_n = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i}$, where the sequences $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ are i.i.d. and mutually independent, $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, and $X_{1,1} \sim Y_1$.

Lemma 1.7.1 (Link between discrete and continuous time). With the formalism outlined above, if $X \sim Y$, then $\psi_c(u+c) \leq \psi_{dis}(u) \leq \psi_c(u)$.

In particular, if $\psi(u) \sim C.u^{-\gamma}$ when $u \rightarrow \infty$, with $C, \gamma > 0$, then $\psi_{dis}(u) \sim \psi(u)$.

Démonstration. The key idea is when $t = n$ is an integer, we have, regarding the notations, $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} \sim \sum_{k=1}^{M(n)} Y_k$. Then, we compare $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to $R_c(u, t)$ and $R_c(u+c, t)$: for a fixed $n \in \mathbb{N}^*$, and $t \in [n-1, n]$, we have $R_n \leq_{st} R_c(u+c, t)$. We deduce $\psi_c(u+c) \leq \psi_{dis}(u)$ since it is true for all integer n .

Otherwise, looking at the ruin of the process $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is equivalent, in terms of distributions, to looking at the ruin of $(R_c(u, t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ only for the times where t is an integer. It yields $\psi_{dis}(u) \leq \psi(u)$. \square

This link between discrete and continuous time allows us to propose the following result :

Proposition 1.7.2 (Bound for a subexponential ruin probability). Let us consider the model from Equation 1.1. We assume that X is such that its stationary excess distribution X_e is subexponential, and $\bar{G}(x) = O(\bar{F}(x))$, or conversely.

Then, we have $\psi(u) \geq \psi_{min}(u)$, with

$$\psi_{min}(u) \sim D_0 \int_u^\infty (\bar{F}(x) + \bar{G}(x)) dx, \text{ where } D_0 = \frac{\lambda}{c - \lambda(\mu_X + \mu_Y)}. \quad (1.33)$$

Démonstration. Since $N_k \leq M_k$ for each $k \geq 1$, by defining

$$R_n^{min} = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} (X_{k,i} + Y_{k,i}), \quad (1.34)$$

we clearly have $R_n \leq R_n^{min}$ for each $n \in \mathbb{N}$. Then, the ruin probability $\psi_{min}(u)$ is deduced thanks to Equation 1.32, and Lemma 1.7.1. \square

Corollary 1.7.1 (Application for Pareto distributions).

Let us consider the model from Equation 1.1. We assume $X \sim \text{Par}(\alpha, \theta)$, and $Y \sim \text{Par}(\beta, \eta)$, with $\alpha, \beta > 1$, et $\theta, \eta > 0$. Then, regarding the framework from Proposition 1.7.2,

$$D_0 = \frac{\lambda(\alpha-1)(\beta-1)}{c(\alpha-1)(\beta-1) - \lambda[\theta(\beta-1) + \eta(\alpha-1)]}. \quad (1.35)$$

- i) If $\alpha < \beta$, therefore $\psi_{min}(u) \sim D_0 \frac{\theta^\alpha}{\alpha-1} u^{-\alpha+1}$.
- ii) If $\alpha > \beta$, then $\psi_{min}(u) \sim D_0 \frac{\eta^\beta}{\beta-1} u^{-\beta+1}$.
- iii) If $\alpha = \beta$, then $\psi_{min}(u) \sim D_0 \frac{\theta^\alpha + \eta^\alpha}{\alpha-1} u^{-\alpha+1}$.

These results are true for the three models.

Actually, for the purely independent model, it is possible to go further and compute precisely the asymptotic ruin probability in such a context.

Corollary 1.7.2 (Subexponential asymptotic ruin probability).

Let us consider the model from Equation 1.22. We assume that X is such that its stationary excess distribution X_e is subexponential, and $\bar{G}(x) = O(\bar{F}(x))$, or conversely.

Then, when $u \rightarrow \infty$, the ultimate ruin probability satisfies :

$$\psi_I(u) \sim D_1 \int_u^\infty \left(\bar{F}(x) + \bar{G}((1-\rho)x) \right) dx, \quad \text{where } D_1 = \frac{\lambda(1-\rho)}{c(1-\rho) - \lambda[(1-\rho)\mu_X + \mu_Y]}. \quad (1.36)$$

Remark 1.7.1. Even if it is not always true, for most of the cases, if X_e is subexponential, then X is also subexponential.

Démonstration. The proof for the converse case would be the same.

We are going to apply in particular Equation 1.32 and Lemma 1.7.1.

Let us fix the real numbers λ , γ_0 , c and ρ .

We define the i.i.d. sequences $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$, and for $q \in \mathbb{N}^*$, $(O_k^q)_{k \in \mathbb{N}}$, such that $O_1^q \sim \mathcal{P}(\gamma_q)$, and $L_1 \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{1-\rho}\right)$. We assume that for a fixed $q \in \mathbb{N}^*$, L and O^q are independent, and for $q' \neq q$, the sequences O^q and $O^{q'}$ are also independent. Moreover, each of these sequences is independent of the other sequences N , M^I , X , and Y .

Let us start with the case where $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is nonincreasing, which is equivalent to $\gamma_0 \geq \frac{\lambda}{1-\rho}$. The converse would be similar.

Under the stochastic order, for a fixed $q \in \mathbb{N}^*$, and for $k \geq q$, $L_k \leq_{st} M_k^I \leq_{st} O_k^q \leq_{st} O_k^1$.

For $q \in \mathbb{N}^*$, and $s \in \mathbb{N}^*$, we define for each $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} P_n = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{L_k} Y_{k,i}, \\ H_n^q = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{O_k^q} Y_{k,i}, \\ U_n^s = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=s}^n \sum_{i=1}^{O_k^s} Y_{k,i} - \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{i=1}^{O_k^k} Y_{k,i}. \end{cases} \quad (1.37)$$

Let us fix $n \in \mathbb{N}$. We have clearly $U_n^s \leq_{st} R_n^I \leq_{st} P_n$ for each $s \in \mathbb{N}^*$. Moreover, $U_n^1 = H_n^1$, and for $q \in \mathbb{N}^*$ and $r \in \mathbb{N}$, we have $U_n^q \leq_{st} H_n^q$, but also $H_n^q \leq_{st} H_n^{q+r}$, and $U_n^q \leq_{st} U_n^{q+r}$ (see for example Theorems 1.A.3 and 1.A.4 from [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#)).

Actually, the processes $(U^s)_{s \in \mathbb{N}}$ will serve as intermediate steps to compare R with the processes $(H^q)_{q \in \mathbb{N}}$.

The ultimate ruin probability of the process $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfies, when $u \rightarrow \infty$, $\psi_P(u) \sim D_1 \int_u^\infty \left(\bar{F}(x) + \bar{G}((1-\rho)x) \right) dx$, where D_1 has the expression outlined previously in Equation 1.36. To justify it, we apply Equation 1.32 in discrete time, which is possible due to Lemma 1.7.1. More precisely, the continuous-time model linked is

$$P_t = u + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} \left(X_i + \frac{1}{1-\rho} Y_i \right) \quad \text{for } t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.38)$$

where here, the i.i.d. variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ has the same distribution as X , and the i.i.d variables $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ the same as Y (and the two sequences are independent).

Actually, the comparison is appropriate since per "unit of time", the mean of the aggregate loss is the same for both processes. This unit of time, for $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a period, whereas for $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, it corresponds to the intervals of the form $]n, n + 1]$, where $n \in \mathbb{N}^*$.

Similarly, it is possible to get the asymptotic ruin probability for H^q , by replacing the variable $\frac{Y_k}{1 - \rho}$ by $\frac{\gamma_q Y_k}{\lambda}$. It yields

$$\psi_{H^q}(u) \sim D(q) \int_u^\infty \left(\bar{F}(x) + \bar{G} \left(\frac{\lambda}{\gamma_q} x \right) \right) dx, \quad \text{where } D(q) = \frac{\lambda}{c - (\lambda \mu_X + \gamma_q \mu_Y)}.$$

For U^2 , as we work with fixed parameters γ_0 and λ , there exists an integer $m \in \mathbb{N}^*$ such that $\gamma_2 m \geq \gamma_1$. We already have $U_n^2(u) \leq_{st} H_n^2(u)$. Then, we note $S_n^{H^2}$ and $S_n^{U^2}$ the aggregate amounts of losses at time $n \in \mathbb{N}^*$ for H^2 and U^2 .

Let us prove that $S_n^{H^2} \leq_{st} S_n^{U^2} \leq_{st} S_{n+m}^{H^2}$, which is equivalent to :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{O_k^2} Y_{k,i} \leq_{st} \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^{O_k^2} Y_{k,i} + \sum_{i=1}^{O_1^1} Y_{1,i} \leq_{st} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{i=1}^{O_k^2} Y_{k,i}.$$

For that, we define $V_n = \sum_{k=1}^n O_k^2$, and $W_n = O_1^1 + \sum_{k=2}^n O_k^2$, which are the respective total number of by-claims at time $n \in \mathbb{N}^*$ for H^2 and U^2 . By independence, $V_n \sim \mathcal{P}(n\gamma_2)$, and $W_n \sim \mathcal{P}(\gamma_1 + (n-1)\gamma_2)$. Thus, $V_n \leq_{st} W_n \leq_{st} V_{n+m}$.

As we are looking for results when $u \rightarrow \infty$, we can take u such that $u \geq cm$. Therefore, since $(Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ is i.i.d., $H_{n+m}^2(u - cm) \leq_{st} U_n^2(u) \leq_{st} H_n^2(u)$.

Taking the ultimate ruin probabilities, $\psi_{H^2}(u - cm) \leq \psi_{U^2}(u) \leq \psi_{H^2}(u)$. Since $\psi_{H^2}(u - cm) \sim \psi_{H^2}(u)$, we get $\psi_{U^2}(u) \sim \frac{\lambda}{c - (\lambda \mu_X + \gamma_2 \mu_Y)} \int_u^\infty \left(\bar{F}(x) + \bar{G} \left(\frac{\lambda}{\gamma_2} x \right) \right) dx$.

Now, to prove what we want, we start an induction for $s \geq 2$, using the processes $(U_n^s)_{n \in \mathbb{N}}$. We have already proved the case $s = 2$.

For $s \geq 3$, we have instead $V_n \sim \mathcal{P}(n\gamma_s)$, and $W_n \sim \mathcal{P} \left(\sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i + (n+1-s)\gamma_s \right)$. So we take

$m \in \mathbb{N}^*$ such that $m\gamma_s \geq \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i$.

Hence, $\psi_{U^s}(u) \sim \psi_{H^s}(u) \sim \frac{\lambda}{c - (\lambda \mu_X + \gamma_s \mu_Y)} \int_u^\infty \left(\bar{F}(x) + \bar{G} \left(\frac{\lambda}{\gamma_s} x \right) \right) dx$ when $u \rightarrow \infty$.

thanks to the framework outlined above, we have $\psi_P(u) \leq \psi_I(u) \leq \psi_{U^s}(u)$, for each $s \in \mathbb{N}^*$.

Then, as $s \rightarrow \infty$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_s = \frac{\lambda}{1 - \rho}$.

All in all, it yields $\psi_I(u) \sim D_1 \int_u^\infty \left(\bar{F}(x) + \bar{G}((1 - \rho)x) \right) dx$.

If $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is increasing, instead, for $k \geq q$, $O_k^q \leq_{st} M_k \leq_{st} L_k$, and $O_1^q \leq_{st} O_1^{q'}$ for some integers $q \leq q'$. The rest would be similar, this time we obtain the framework $\psi_{U^s}(u) \leq \psi_I(u) \leq \psi_P(u)$, but with the same asymptotic results. \square

Taking two Pareto distributions, we can apply the previous result :

Corollary 1.7.3 (Ultimate ruin probabilities with 2 Pareto distributions).

Let us consider the model from Equation 1.22. We assume $X \sim \text{Par}(\alpha, \theta)$, and $Y \sim \text{Par}(\beta, \eta)$, with $\alpha, \beta > 1$, and $\theta, \eta > 0$. From that, we get :

$$D_1 = \frac{\lambda(1-\rho)(\alpha-1)(\beta-1)}{c(1-\rho)(\alpha-1)(\beta-1) - \lambda[(1-\rho)\theta(\beta-1) + \eta(\alpha-1)]}.$$

- i) If $\alpha < \beta$, therefore $\psi_I(u) \sim D_1 \frac{\theta^\alpha}{\alpha-1} u^{-\alpha+1}$.
- ii) If $\alpha > \beta$, then $\psi_I(u) \sim D_1 \frac{\eta^\beta}{(1-\rho)^\beta(\beta-1)} u^{-\beta+1}$.
- iii) If $\alpha = \beta$, then $\psi_I(u) \sim D_1 \frac{\theta^\alpha \cdot (1-\rho)^\alpha + \eta^\alpha}{(1-\rho)^\alpha(\alpha-1)} u^{-\alpha+1}$.

Then, we can focus on a particular class of subexponential distribution, the class of extended regularly varying (ERV) functions, which generalizes the class of regularly varying functions. Other results involving the ERV class for models built with by-claims can be found in [Li \(2013\)](#) or [Fu and Li \(2016\)](#).

The interest of such a kind of distribution is to provide a larger framework (even if the results are consequently less refined), in case there is uncertainty on the heaviness of the risks : typically, if the distribution of the main claims or the by-claims is assumed to be Pareto distributed, but the shape parameter is not known precisely.

Definition 1.7.2 (ERV class). Let $0 < \alpha \leq \beta$ be real numbers. A distribution

$F \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$, if for all $y \geq 1$, $y^{-\beta} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq y^{-\alpha}$. The case $\alpha = \beta$ simply corresponds to the class $\mathcal{R}_{-\alpha}$.

Proposition 1.7.3 (Finite-time for the ERV class).

Let us consider the original model from Equation 1.1. We assume $F \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$, and $G \in \text{ERV}(-\delta, -\eta)$, with $1 < \alpha \leq \beta$ and $1 < \delta \leq \eta$. Then, for $T \in \mathbb{N}^*$,

- i) If $\beta < \delta$, then $\psi_T(u) \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$ seen as a function of u ,
- ii) If $\alpha > \eta$, we get $\psi_T(u) \in \text{ERV}(-\delta, -\eta)$,
- iii) Otherwise, $\psi_T(u) \in \text{ERV}(-(\alpha \wedge \delta), -(\beta \vee \eta))$.

Démonstration. The ERV distributions are subexponential, so with Lemma X.2.2 of [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#), for $k \in \mathbb{N}^*$, when $x \rightarrow \infty$, $\overline{F}_{A_k}(x) \sim \lambda \overline{F}(x)$ and $\overline{F}_{B_k}(x) \sim \gamma_k \overline{G}(x)$. Then, the rest is similar as for Proposition 1.7.1, and we distinguish the cases :

The case i) implies $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$, whereas for ii), $\overline{F}(x) = o(\overline{G}(x))$.

For iii), the key element is that if $F \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$, consequently, for $1 < a \leq \alpha$, and $\beta \leq b$, we have $y^{-b} \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq y^{-a}$.

Thus, $F \in \text{ERV}(-(\alpha \wedge \delta), -(\beta \vee \eta))$ and $G \in \text{ERV}(-(\alpha \wedge \delta), -(\beta \vee \eta))$. \square

This result could be extended to the two models with softened dependence.

Now, in infinite time, the following result is only true for the purely independent model :

Proposition 1.7.4 (Ultimate ruin probability for the ERV class).

Let us consider the model from Equation 1.22.

Under the same assumptions, we look at the ruin probabilities under an infinite-time horizon.

We draw the framework $K_1(u) \leq \psi_I(u) \leq K_2(u)$, where :

- i) If $\beta < \delta$, then $K_1, K_2 \in \text{ERV}(-\alpha + 1, -\beta + 1)$.
- ii) If $\alpha > \eta$, we get $K_1, K_2 \in \text{ERV}(-\delta + 1, -\eta + 1)$.
- iii) Otherwise, $K_1, K_2 \in \text{ERV}(-(\alpha \wedge \delta) + 1, -(\beta \vee \eta) + 1)$.

Démonstration. We deal only with the case i), because the two others would be similar.

We set, for $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, $Z_{k,i} = X_{k,i} + Y_{k,i}$. Thus, $(Z_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ is a sequence of i.i.d. variables. We also set a sequence $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ of i.i.d. variables such that $L_1 \sim \mathcal{P}(\gamma_{max})$. We assume that L is independent of N, M^I, X and Y . Then, we define

$$\begin{cases} R_n^{max} &= u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{L_k} Z_{k,i} \quad , \\ R_n^{min} &= u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} Z_{k,i} \quad . \end{cases} \quad (1.39)$$

Clearly, $R_n^{max} \leq_{st} R_n^I \leq_{st} R_n^{min}$.

To do it properly, we define the continuous-time transcription of the processes :

$R_c^{min}(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, and the same thing for R_c^{max} , replacing $N(t)$ by $L(t)$, where $(N(t))_{t \in \mathbb{R}_+} \sim \mathcal{Po}(\lambda)$ and $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+} \sim \mathcal{Po}(\gamma_{max})$ are Poisson processes.

Since Z is subexponential, we apply Equation 1.31 : $\psi_c^{min}(u) \sim \frac{\lambda \mu_Z}{c - \lambda \mu_Z} \int_u^\infty \overline{F_Z}(s) ds$, and

$$\psi_c^{max}(u) \sim \frac{\gamma_{max} \mu_Z}{c - \gamma_{max} \mu_Z} \int_u^\infty \overline{F_Z}(s) ds.$$

We note $H_Z(u) = \int_u^\infty \overline{F_Z}(s) ds$, and the same thing for H_X and H_Y .

Let $y \geq 1$ and $0 < \varepsilon < 1$ be real numbers.

By definition, $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\inf \left(\frac{\overline{F}(zy)}{\overline{F}(z)}, z \geq x \right) \right]$.

Since $X \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$, it means there exists $M > 0$ such that for each real number $x \geq M$,

we have $\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x) y^{-\beta}} \geq 1 - \varepsilon$. It yields $\overline{F}(xy) \geq (1 - \varepsilon) \overline{F}(x) y^{-\beta}$.

In particular, for $u \geq M$, $\int_u^\infty \overline{F}(sy) ds \geq (1 - \varepsilon) y^{-\beta} \int_u^\infty \overline{F}(s) ds$, which leads to

$$y^{-1} \int_{uy}^\infty \overline{F}(s) ds \geq (1 - \varepsilon) y^{-\beta} \int_u^\infty \overline{F}(s) ds, \text{ so } \frac{H_X(uy)}{H_X(u)} \geq (1 - \varepsilon) y^{-\beta+1}.$$

Since it is true for every $\varepsilon > 0$, we deduce that $\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{H_X(uy)}{H_X(u)} \geq y^{-\beta+1}$.

Similarly, we may prove that $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{H_X(uy)}{H_X(u)} \leq y^{-\alpha+1}$.

Thus, $H_X \in \text{ERV}(-\beta + 1, -\alpha + 1)$.

Moreover, since $\beta < \delta$, $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x))$. Therefore, $\overline{F_Z}(x) \sim \overline{F}(x)$.

What is more, the integral $\int_u^\infty \overline{F_Z}(s) ds$ converges for every $u \geq 0$, so thanks to asymptotic results for integration, when $u \rightarrow \infty$, we have $H_X(u) \sim H_Z(u)$.

We deduce easily that, for $y \geq 1$, when $u \rightarrow \infty$, $\frac{H_Z(yu)}{H_Z(u)} \sim \frac{H_X(yu)}{H_X(u)}$, and then $H_Z \in \text{ERV}(-\beta + 1, -\alpha + 1)$.

Therefore, $\psi_c^{\min}(u) \in \text{ERV}(-\beta + 1, -\alpha + 1)$, and same thing for $\psi_c^{\max}(u)$. Moreover, thanks to Lemma 1.7.1, we get

$$\psi_c^{\min}(u + c) \leq \psi^{\min}(u) \leq \psi_I(u) \leq \psi^{\max}(u) \leq \psi_c^{\max}(u) . \quad (1.40)$$

Since H_Z belongs to the ERV class, it is subexponential and thus long-tailed. Hence, when $u \rightarrow \infty$, $H_Z(u) \sim H_Z(u + c)$, and so $\psi_c^{\min}(u) \sim \psi_c^{\min}(u + c)$.

Thanks to this framework, we eventually obtain what we wanted. \square

For the original or the half-independent models, because of the corresponding dependence assumptions, it is not possible to establish the previous upper bound (or at least, to derive it the same way).

Remark 1.7.2. In general, the framework $f_1(u) \leq G(u) \leq f_2(u)$, with $f_1, f_2 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ provides an idea of the asymptotic behaviour of the function G , but it does not ensure that $G \in \mathcal{R}_{-\alpha}$. Of course, this remains true if $f_1, f_2 \in \text{ERV}(-\alpha, -\beta)$ instead.

What is more, we summarize the possible extensions of these results with heavy-tailed distributions :

Remark 1.7.3. Regarding Corollary 1.7.3, and Propositions 1.7.1, 1.7.3, or 1.7.4, we would get the same kind of results by exchanging some of the assumptions, as long as we keep the idea of dominance of a given tail by a heavy-tailed distribution.

For instance, we may replace the distribution of Y by an exponential or a light-tailed distribution, or conversely towards X . Otherwise, it is possible to mix the heavy-tailed distributions, for example a Pareto one with an ERV one, etc.

1.7.2 The BRV class, a particular case of dependence

It is possible to relax the independence assumptions of our model, and focus on the specific case of the bivariate regular variations class : here, the sequences representing the amounts of the losses $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, even if the bidimensional vectors $(X_{k,i}, Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ are still assumed to be independent.

Actually, as a practical point of view, the amount of a main claim should not be independent of the amounts of the associated by-claims. As a simple example, regarding the PFAS issue, the more molecules are released through emissions, the more it could cause damages towards the environment or human health.

Definition 1.7.3. (Bivariate regular variation) A random pair (X, Y) is said to follow a bivariate regularly varying distribution if there exists a distribution $F_0 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ and a nondegenerate limit measure ν on $[0, \infty]^2 \setminus \{0\}$, namely $(X, Y) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, F_0)$, if for every Borel set B ν -continuous (i.e. such that $\nu(\partial B) = 0$), we have

$$\frac{1}{F_0(t)} \mathbb{P} \left(\frac{1}{t} (X, Y) \in B \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \nu(B) .$$

It corresponds to a multivariate heavy-tailed distributions.

Proposition 1.7.5. (Finite-time with a BRV pair)

Let us consider the original model from Equation 1.1.

Let us set $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > 1\}$. We assume there exists $F_0 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, ($\alpha > 1$ to fulfill the net profit), and a nondegenerate measure ν on $[0, \infty]^2 \setminus \{0\}$ such that $\nu(A) > 0$, A is a ν -continuous set, and $(X_{1,1}, Y_{1,1}) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, F_0)$.

Let us fix $T \in \mathbb{N}^*$. Then, there exists $H_{1,T}, H_{2,T} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ such that

$$H_{1,T}(u) \leq \psi_T(u) \leq H_{2,T}(u) . \quad (1.41)$$

Démonstration. We pick up some elements of the proof of Proposition 1.7.4. For $n \in \mathbb{N}$, we keep the same expression for R_n^{\min} . For R_n^{\max} , we can be more precise here :

$$R_n^{\max} = u + cn - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{M_k} (X_{k,i} + Y_{k,i}) \right) .$$

Directly, $R_n^{\max} \leq R_n \leq R_n^{\min}$.

Then, if $(X, Y) \in \text{BRV}_{-\alpha}(\nu, F_0)$, for $u > 0$, $\mathbb{P}(X + Y > u) = \mathbb{P}\left(\frac{X + Y}{u} > 1\right)$, so

$\mathbb{P}(X + Y > u) = \mathbb{P}\left(\frac{(X, Y)}{u} \in A\right)$, which yields $\mathbb{P}(X + Y > u) \sim \nu(A) \overline{F_0}(u)$ when $u \rightarrow \infty$.

Eventually, we operate successive convolutions (see e.g. Proposition X.1.9 of [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#)), and we obtain the framework outlined above, with

$$\begin{cases} H_{1,T}(u) = \psi_T^{\min}(u) \sim T\lambda \nu(A) \overline{F_0}(u) , \\ H_{2,T}(u) = \psi_T^{\max}(u) \sim \left(\sum_{k=1}^T \gamma_k \right) \nu(A) \overline{F_0}(u) . \end{cases} \quad (1.42)$$

□

This result could be extended to the two models with softened dependence.

Once again, as mentioned in Remark 1.7.2, this kind of framework is not enough to deduce that $\psi_T(u)$ is $\mathcal{R}_{-\alpha}$, even if it suggests an idea of its asymptotic behaviour.

With such a framework, it is also possible to propose an ultimate ruin probability for the purely independent model (but not for the other models) :

Proposition 1.7.6. (Ultimate ruin probability for a BRV pair)

Let us consider the model from Equation 1.22. Under the same assumptions, we focus on an infinite-time horizon.

There exists $H_1, H_2 \in \mathcal{R}_{-(\alpha-1)}$ such that $H_1(u) \leq \psi_I(u) \leq H_2(u)$.

Démonstration. We keep the notations of Proposition 1.7.4. In particular, when $u \rightarrow \infty$, $\overline{F_Z}(u) = \mathbb{P}(X_{1,1} + Y_{1,1} > u) \sim \nu(A) \overline{F_0}(u)$, and since $F_0 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, we deduce $F_Z \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

Thus, F_Z is a subexponential distribution, we can apply Equation 1.31 and Lemma 1.7.1, to deduce that $\psi^{\min}(u) \sim \frac{\lambda}{c - \lambda\mu_Z} \int_u^\infty \overline{F_Z}(y) dy$, with $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$.

Thanks to Karamata's theorem (see e.g. [Bingham et al. \(1989\)](#)), there exists a slowly varying function L such that $\int_u^\infty \overline{F_Z}(y) dy \sim \frac{\nu(A) L(u)}{(\alpha - 1) u^{\alpha-1}}$.

For the upper bound, we derive similarly the asymptotic ruin probability $\psi^{max}(u)$ related to R^{max} , and we eventually deduce the framework outlined :

$$\begin{cases} H_1(u) = \psi^{min}(u) \sim \frac{\lambda \nu(A)L(u)}{[c - \lambda(\mu_X + \mu_Y)](\alpha - 1)} u^{-\alpha+1} , \\ H_2(u) = \psi^{max}(u) \sim \frac{\gamma_{max} \nu(A)L(u)}{[c - \gamma_{max}(\mu_X + \mu_Y)](\alpha - 1)} u^{-\alpha+1} . \end{cases} \quad (1.43)$$

□

In fact, it is not possible to derive the upper bound in the previous result for the two other models (or at least, to prove it the same way).

A similar result is found for instance in [Li \(2017\)](#), or [Yang et al. \(2019\)](#), describing continuous-time models where one main claim engenders exactly one by-claim (which may occur after a random bounded delay).

With the same kind of assumptions for the pair (X, Y) , it is found that $\psi(u) \sim \frac{\lambda \nu(A)}{c - \lambda(\mu_X + \mu_Y)} \int_u^\infty \bar{F}_0(y) dy$, which actually corresponds to the first result of Equation 1.43, but written differently.

Moreover, we can state that in both finite and infinite time, the asymptotic power of the ruin probability is the same as if the two distributions of the losses were independent, with one from the class $\mathcal{R}_{-\alpha}$ dominating the other (as in Proposition 1.7.1 and Corollary 1.7.3).

1.8 Numerical results

In this section, we yield numerical results related with the model defined by Equation 1.1, through some different approaches. First, we provide some ruin probabilities. Then, we study the influence of the parameters ρ and λ , and what could happen if we underestimate the value of one of these parameters. Eventually, closely linked to Solvency II, we try to draw predictions, and compute a ten-period ruin probability for some set of parameters satisfying $\psi_1(u) \simeq 0.005$.

Some technical precisions : for the Pareto distribution, we keep Definition 2.2.4. Moreover, a confidence level of 99% is applied for every margin displayed.

Eventually, to fit with the theoretical literature (see for instance [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#)), we choose each time a realistic safety loading, i.e. $12.5\% \leq \chi \leq 20\%$. Specifically, we fix each time $\lambda \geq \gamma_0$, which means $\gamma_{max} = \frac{\lambda}{1 - \rho}$, and therefore,

$$\chi = \frac{\lambda(\mu_X(1 - \rho) + \mu_Y)}{c(1 - \rho)} - 1 . \quad (1.44)$$

1.8.1 First sets of ruin probabilities

1.8.1.1 Starting with a small value of ρ

In this paragraph, we fix $\lambda = 10$, $\gamma_0 = 10$, and $\rho = 0.1$, and we are observing $T = 10$ periods.

We set $c = 37$, which leads to a safety loading $\chi \simeq 18.9\%$.

We vary the distributions of X and Y , and we give the ruin probabilities in function of u . We study four cases : one with two heavy-tailed (Pareto) distributions, one with two light-tailed (exponential) distributions, and two cases with one Pareto distribution and one exponential distribution, mixing this way an heavy-tailed and a light-tailed distribution.

	$X \sim \text{Exp}(1/2), Y \sim \text{Exp}(1)$		$X \sim \text{Exp}(1/2), Y \sim \text{Par}(3, 2)$	
u	$\psi_{10}(u)$	Confidence	$\psi_{10}(u)$	Confidence
0	0.452	0.00128	0.465	0.00129
1	0.427	0.00128	0.442	0.00128
5	0.337	0.00121	0.357	0.00124
10	0.244	0.00111	0.268	0.00114
20	0.121	0.00089	0.147	0.00091
30	0.058	0.00058	0.079	0.000694
50	0.012	0.00031	0.022	0.00038
100	0.00023	0.000074	0.0013	0.000093

TABLE 1.1 – Ruin probabilities with $X \sim \text{Exp}(1/2)$ for $\rho = 0.1$.

	$X \sim \text{Par}(2, 2), Y \sim \text{Exp}(1)$		$X \sim \text{Par}(2, 2), Y \sim \text{Par}(3, 2)$	
u	$\psi_{10}(u)$	Confidence	$\psi_{10}(u)$	Confidence
0	0.476	0.00129	0.489	0.00129
1	0.458	0.00129	0.470	0.00129
5	0.396	0.00126	0.411	0.00127
10	0.332	0.00122	0.346	0.00122
25	0.201	0.00104	0.214	0.00106
50	0.01	0.00077	0.108	0.00080
100	0.034	0.00047	0.036	0.00048
200	0.009	0.00024	0.0096	0.00025
500	0.0015	0.000010	0.0015	0.00010

TABLE 1.2 – Ruin probabilities with $X \sim \text{Par}(2, 2)$ for $\rho = 0.1$.

We state that the results are quite similar when $X \sim \text{Exp}(1/2)$ on the one hand, or when $X \sim \text{Par}(2, 2)$ on the other hand, but each time they are a little more risky when $Y \sim \text{Par}(3, 2)$.

1.8.1.2 Increasing the value of the reproduction coefficient

We almost keep the same safety loading (here, $\chi = 20\%$ contrary to $\chi = 18.9\%$ before).

We increase the value of ρ , and display the results : $\rho = 0.4$ (combined with $c = 44$), and $\rho = 0.7$ (combined with $c = 64$). Otherwise, we keep the same values for the other parameters.

However, we do not display all the cases.

For $\rho = 0.4$, when $X \sim \text{Exp}(1/2)$:

	$X \sim \text{Exp}(1/2), Y \sim \text{Exp}(1)$		$X \sim \text{Exp}(1/2), Y \sim \text{Par}(3, 2)$	
u	$\psi_{10}(u)$	Confidence	$\psi_{10}(u)$	Confidence
0	0.328	0.00383	0.353	0.0039
1	0.306	0.00376	0.331	0.00384
5	0.234	0.00345	0.266	0.0036
10	0.166	0.00304	0.199	0.00326
20	0.081	0.00223	0.111	0.00256
30	0.04	0.0016	0.061	0.00195
50	0.00895	0.00077	0.0195	0.00113
100	0.00025	0.00013	0.0015	0.00031

TABLE 1.3 – Ruin probabilities with $X \sim \text{Exp}(1/2)$ for $\rho = 0.4$.

For $\rho = 0.7$, when $X \sim \text{Par}(2, 2)$:

	$X \sim \text{Par}(2, 2), Y \sim \text{Exp}(1)$		$X \sim \text{Par}(2, 2), Y \sim \text{Par}(3, 2)$	
u	$\psi_{10}(u)$	Confidence	$\psi_{10}(u)$	Confidence
0	0.125	0.0027	0.141	0.00284
1	0.12	0.00265	0.136	0.00279
5	0.104	0.00249	0.118	0.00263
10	0.087	0.0023	0.098	0.00243
25	0.056	0.00187	0.064	0.002
50	0.032	0.00144	0.035	0.00151
100	0.014	0.00097	0.016	0.00102
200	0.0055	0.00060	0.0053	0.00059
500	0.00111	0.00027	0.00115	0.00028

TABLE 1.4 – Ruin probabilities with $X \sim \text{Par}(2, 2)$ for $\rho = 0.7$.

Regarding all the tables for $\rho = 0.1$, $\rho = 0.4$ and $\rho = 0.7$, it is interesting to see that for a same safety loading, a same set of values for the parameters (u, λ, γ_0) , and the same distributions for X and Y , the ruin probability $\psi_{10}(u)$ decreases in function of ρ . It looks quite counterintuitive, but it might due to the fact that here, μ_X and μ_Y have the same order of magnitude. In particular, it seems to decrease faster when X is exponential (than when it is Pareto distributed).

However, if we exchange the distributions of X and Y , we outline the reversed assertions.

1.8.2 Ignoring some effects

All the results shown here are related with a quite good confidence, the margin M is below 0.005. When the results become particularly close to 0 or 1 (typically $\psi \leq 0.01$), it becomes a bit less precise, with the quotient ψ/M smaller than 15 or 10 sometimes, but it doesn't really matter since it corresponds to cases where the ruin is close to be almost sure or almost impossible.

In this subsection, we are only focusing on cases with two heavy-tailed (Pareto) distributions or two light-tailed (exponential) distributions, but we vary the means μ_X and μ_Y .

Thus, in each table, the case 1 corresponds to $X \sim \text{Par}(2, 2)$ and $Y \sim \text{Par}(3, 2)$, the case 2 to $X \sim \text{Exp}(1/2)$ and $Y \sim \text{Exp}(1)$, the case 3 to $X \sim \text{Par}(3, 2)$ and $Y \sim \text{Par}(2, 2)$, the case 4 to $X \sim \text{Exp}(1)$ and $Y \sim \text{Exp}(1/2)$.

1.8.2.1 Ignoring or underestimating the contagion effects

We would like to explore in this paragraph what could be the consequences of understating or even ignoring the contagion effects.

Specifically, we take the example of an insurance company which determines the premium amounts without considering the potential contagion, i.e. which considers that $\rho = 0$ regarding Equation 1.1. Then, we increase ρ , and we look at the consequences on the risk in terms of ruin probability. Actually, these results should also represent quite well what should happen when ρ is simply underestimated and not just ignored.

In that context, the safety loading becomes $\chi = \frac{c}{\lambda(\mu_X + \mu_Y)} - 1$.

We fix $\lambda = \gamma_0 = 10$. We assume $\mu_X + \mu_Y = 3$, more precisely with $\mu_X, \mu_Y \in \{1, 2\}$. To ensure a safety loading of $\chi = 20\%$, we set $c = 36$.

It is interesting to determine, in function of μ_X and μ_Y , the threshold value over which the safety loading χ becomes negative. Actually, $\chi(\rho) = 0 \iff \rho = \rho_{max}$.

For the first two cases, $\mu_X = 2$, and $\mu_Y = 1$, and $\rho_{max} = 0.375$.

For the last two cases, $\mu_X = 1$, and $\mu_Y = 2$, and $\rho_{max} \simeq 0.2308$.

We first display the results with a null initial reserve, $u = 0$, and then when $u = 100$.

	Case 1		Case 2		Case 3		Case 4	
ρ	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$
0	0.262	0.480	0.284	0.446	0.261	0.482	0.284	0.445
0.1	0.280	0.525	0.313	0.509	0.302	0.578	0.344	0.580
0.2	0.301	0.582	0.343	0.586	0.348	0.688	0.402	0.726
0.3	0.326	0.649	0.374	0.678	0.392	0.803	0.466	0.868
0.4	0.347	0.729	0.404	0.776	0.432	0.904	0.528	0.956
0.5	0.372	0.821	0.434	0.878	0.483	0.969	0.588	0.992
0.6	0.397	0.911	0.469	0.956	0.528	0.995	0.645	0.999
0.7	0.421	0.976	0.5	0.993	0.571	0.9998	0.696	1
0.8	0.449	0.998	0.535	1	0.613	1	0.747	1
0.9	0.477	1	0.566	1	0.659	1	0.791	1

TABLE 1.5 – Underestimating ρ for 4 different cases, with $u = 0$.

	Case 1		Case 2		Case 3		Case 4	
ρ	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$
0	0.0035	0.034	0	0.00013	0.0039	0.036	0	0.00016
0.1	0.0036	0.041	0	0.0003	0.0044	0.053	0	0.0014
0.2	0.0037	0.049	0	0.0012	0.0048	0.086	0	0.0105
0.3	0.0039	0.065	0	0.005	0.006	0.158	0	0.067
0.4	0.004	0.094	0	0.021	0.0064	0.303	0	0.266
0.5	0.0041	0.156	0	0.081	0.0067	0.558	0	0.630
0.6	0.0042	0.298	0	0.268	0.0076	0.834	0	0.921
0.7	0.0044	0.575	0	0.636	0.009	0.977	0	0.995
0.8	0.0047	0.886	0	0.938	0.0097	0.999	0	1
0.9	0.0049	0.995	0	0.998	0.0107	1	0	1

TABLE 1.6 – Underestimating ρ for 4 different cases, with $u = 100$.

As we could expect, the risk becomes high if ρ is underestimated. However, with a comfortable initial reserve (i.e., $u = 100$), the risk at a one-period horizon is very low, and even null for sometimes. However, for a ten-period horizon, such an initial reserve is not enough to prevent the risks incurred when ρ is high (but if ρ is quite low, then the risks remain reasonable).

1.8.2.2 Underestimating the frequency

We now look at the case where the frequency is underestimated.

For each case, we assume the safety loading is determined from the value $\lambda = 10$, then we observe what happens when λ increases.

We set $\gamma_0 = 10$, and $u = 0$.

Once again, it is interesting to determine, in function of μ_X and μ_Y , the threshold value λ_{max} over which the safety loading χ becomes negative, by solving $\chi(\lambda) = 0$.

With $\mu_X = 2$ and $\mu_Y = 1$, we take $c = 37$, so $\chi \simeq 18.9\%$, and $\lambda_{max} \simeq 11.89$.

With $\mu_X = 1$ and $\mu_Y = 2$, we take $c = 38.5$, so $\chi \simeq 19.5\%$, and $\lambda_{max} \simeq 11.94$.

For $\rho = 0.1$, we display the following results.

	$c = 37$, and $\chi \simeq 18.9\%$				$c = 38.5$, and $\chi \simeq 19.5\%$			
	Case 1		Case 2		Case 3		Case 4	
λ	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$
10	0.262	0.489	0.285	0.452	0.256	0.476	0.277	0.436
11	0.327	0.624	0.375	0.645	0.318	0.615	0.363	0.625
12	0.396	0.757	0.47	0.817	0.383	0.746	0.453	0.804
13	0.466	0.866	0.555	0.928	0.45	0.855	0.541	0.920
15	0.602	0.976	0.714	0.996	0.588	0.971	0.702	0.995
17	0.723	0.998	0.832	0.9999	0.706	0.997	0.812	0.9999
20	0.858	1	0.936	1	0.844	1	0.928	1
25	0.963	1	0.99	1	0.957	1	0.989	1
30	0.994	1	0.999	1	0.991	1	0.999	1
40	0.9998	1	1	1	0.9999	1	1	1
50	1	1	1	1	1	1	1	1

TABLE 1.7 – Underestimating λ for 4 different cases, with $u = 0$ and $\rho = 0.1$.

For $\rho = 0.4$, we get the following results. With $\mu_X = 2$ and $\mu_Y = 1$, we take $c = 44$, so $\chi = 20\%$, and $\lambda_{max} = 12$. With $\mu_X = 1$ and $\mu_Y = 2$, we take $c = 52$, so $\chi = 20\%$, and $\lambda_{max} = 12$.

	$c = 44$, and $\chi = 20\%$				$c = 52$, and $\chi = 20\%$			
	Case 1		Case 2		Case 3		Case 4	
λ	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$
10	0.204	0.403	0.198	0.325	0.171	0.371	0.143	0.266
11	0.258	0.541	0.272	0.516	0.21	0.497	0.202	0.442
12	0.315	0.687	0.354	0.721	0.259	0.636	0.27	0.649
13	0.379	0.818	0.44	0.878	0.307	0.77	0.343	0.829
15	0.51	0.964	0.606	0.991	0.417	0.943	0.5	0.982
17	0.635	0.997	0.746	0.9998	0.532	0.994	0.643	0.999
20	0.787	1	0.886	1	0.691	1	0.816	1
25	0.934	1	0.978	1	0.878	1	0.954	1
30	0.984	1	0.997	1	0.964	1	0.992	1
40	0.9996	1	1	1	0.998	1	1	1
50	1	1	1	1	1	1	1	1

TABLE 1.8 – Underestimating λ for 4 different cases, with $u = 0$ and $\rho = 0.4$.

As for the case where ρ is underestimated, when the maximal value λ_{max} is exceeded, the ruin probabilities increase quickly, and reach 1 for a given threshold. Once again, when ρ increases, the ruin probabilities decrease. What is more, if we had instead a comfortable initial reserve, namely $u = 100$ as for the previous paragraph, then it would prevent from high risks if the underestimation of λ is not too large.

However, we can remark that here, the process is in general more risky for fixed values of μ_X and μ_Y with two light-tailed distributions rather than with two heavy-tailed. Actually, the heavy tails are more risky when λ is not too much underestimated, i.e. $\lambda \leq 13$.

1.8.2.3 Conclusion on the underestimations

We can draw the following conclusion by considering all the results found for $\psi_1(u)$ or $\psi_{10}(u)$ - which corresponds to a short or mid-term problem : if we look at the results when ρ or λ increase (i.e., when χ decreases), then, until $\chi = -20\%$, it looks worse to underestimate ρ when $\mu_X < \mu_Y$.

However, for all the other cases, it looks worse to underestimate λ than ρ . One argument to justify this point is that, for the moment, we have only considered a value μ_Y which is of the same order of μ_X , i.e. $0.5\mu_X \leq \mu_Y \leq 2\mu_X$. By taking $\mu_Y \gg \mu_X$, or maybe by looking at a 20 or 30-period horizon, we might find the converse.

1.8.3 Prediction for a ten-year horizon

We consider here that a period corresponds to a year.

In this section, depending on the pair of distributions we choose for (X, Y) , we try to identify the initial reserve u which fits the best with having a one-year ruin probability $\psi_1(u) = 0.005$, and then we compute $\psi_{10}(u)$.

Indeed, if an insurance company respects precisely the regulation proposed by Solvency II towards the one-year ruin probability, then one would like to know what is the related risk for the further years. Here, we look at a horizon of 10 years.

We keep $\lambda = \gamma_0 = 10$, and the same kind of pair of distributions as before. We fix $\rho = 0.1$. We choose a safety loading $\chi = 12.5\%$.

For Table 1.9, we take $\mu_X = 2$, $\mu_Y = 1$, and $c = 35$.

For Table 1.10, we take $\mu_X = 1$, $\mu_Y = 2$, and we adapt c to have the same safety loading : $c = 36.25$.

Distribution	u	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$
$X \sim \text{Par}(2, 2),$ $Y \sim \text{Par}(3, 2)$	93	0.00491 ± 0.00057	0.0527 ± 0.001823
$X \sim \text{Par}(2, 2),$ $Y \sim \text{Exp}(1)$	88	0.00486 ± 0.00057	0.05353 ± 0.00184
$X \sim \text{Exp}(1/2),$ $Y \sim \text{Par}(3, 2)$	37	0.00489 ± 0.00057	0.09348 ± 0.002375
$X \sim \text{Exp}(1/2),$ $Y \sim \text{Exp}(1)$	33	0.00479 ± 0.00056	0.0931 ± 0.0023

TABLE 1.9 – $\psi_{10}(u)$ if $\psi_1(u) \approx 0.005$, with $\chi = 12.5\%$, $\mu_X = 2$, and $\mu_Y = 1$.

Distribution	u	$\psi_1(u)$	$\psi_{10}(u)$
$X \sim \text{Par}(3, 2),$ $Y \sim \text{Par}(2, 2)$	93	0.00485 ± 0.00057	0.05866 ± 0.001917
$X \sim \text{Par}(3, 2),$ $Y \sim \text{Exp}(1/2)$	37	0.005 ± 0.000575	0.09779 ± 0.00242
$X \sim \text{Exp}(1),$ $Y \sim \text{Par}(2, 2)$	92	0.00496 ± 0.00057	0.05668 ± 0.001886
$X \sim \text{Exp}(1),$ $Y \sim \text{Exp}(1/2)$	33	0.00469 ± 0.00056	0.0983 ± 0.00243

TABLE 1.10 – $\psi_{10}(u)$ if $\psi_1(u) \approx 0.005$, with $\chi = 12.5\%$, $\mu_X = 1$, and $\mu_Y = 2$.

In the examples of Table 1.9, when $\mu_X > \mu_Y$, we can explain that $\psi_{10}(u)$ is greater when X is light-tailed by the fact that solving the equation $\psi_1(u) = 0.005$ leads to a smaller value of u

(than when X is heavy-tailed), and it may ensue after that $\psi_{10}(u)$ is greater for an exponential distribution because of this smaller value of u .

We then exchange the distributions of X and Y for each case in Table 1.10 to see what happens. Now, $\mu_Y > \mu_X$, and we remark that the results are almost the same, just by turning "X" into "Y".

1.9 Changes with a pseudo INAR(2) equation

Actually, the assumption made in Section 1.3 that each main claim engenders necessarily a by-claim through the term N_k in the expression of M_k might seem "rough".

Indeed, in a general framework of insurance companies, it is not likely that every main claim would cause later losses. For the particular case of the PFAS issue, regarding the approach of Section 1.2, we could say that not all the events of pollution by these compounds should lead to claims related with the cleaning of the environment or health care. For instance, it may refer to a case where the company accepted to insure the civil liability of the client but not the damages made, because of some possible exclusions in the contract, or depending the precise situation faced.

Hence, we could refine the original model from Equation 1.1, and modify the sequence $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ expressed thanks to a process INAR(1), and write instead for $k \geq 1$:

$$M_k = \rho_1 \circ M_{k-1} + \rho_2 \circ N_k, \quad (1.45)$$

where $\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$ (ρ_1 takes the role of ρ before, we change the notation to avoid the confusions). We may call it the "*pseudo INAR(2) equation*", since there are two thinning operations, but it does not correspond precisely to an INAR(2) process.

Thus, with a probability ρ_2 , each main claim would now produce a second loss (or several subsequent claims gathered in a by-claim as an aggregate amount, accordingly to Section 1.3). We set $\rho_2 \neq 0$, so that the source term of M_k is not null.

We assume this is the only substitution we make toward the initial framework presented in Section 1.3.

In the remainder of this section, we explain how the results of Sections 1.4 to 1.7 can be adapted.

As we will see, many properties and results are generalized easily by changing properly the writings, in particular by turning λ into $\rho_2 \lambda$.

Moreover, the first adaptation concerns the expression of γ_k (in Proposition 1.9.1 below), and accordingly to this new expression, some of the results do not need to be modified.

1.9.1 First properties (section 1.4)

First of all, Proposition 1.4.1 becomes :

Proposition 1.9.1 (New distribution of $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$).

For $k \in \mathbb{N}$, $M_k \sim \mathcal{P}(\gamma_k)$, while for $k \geq 1$, $\gamma_k = \rho^k \left(\gamma_0 - \frac{\rho_2 \lambda}{1 - \rho_1} \right) + \frac{\rho_2 \lambda}{1 - \rho}$.

The sequence $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is still monotonic, such that $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \frac{\rho_2 \lambda}{1 - \rho_1}$, and

$M_k \xrightarrow{\mathcal{L}} \xi$, where $\xi \sim \mathcal{P} \left(\frac{\rho_2 \lambda}{1 - \rho_1} \right)$.

It follows that $\gamma_{max} = \max\left(\gamma_0, \frac{\rho_2\lambda}{1-\rho_1}\right)$, and $0 < \rho_{max} = 1 - \frac{\rho_2\lambda\mu_Y}{c - \lambda\mu_X} < 1$.
 In particular, $\lim_{\rho_2 \rightarrow 0^+} \rho_{max} = 1^-$.

Yet, the net profit condition is still expressed $c > \lambda\mu_X + \mu_Y \gamma_{max}$.

Concerning the covariances, some of the changes are only due to the fact that ρ is rewritten as ρ_1 . Here there are :

- For $n \geq k \geq 0$, $\text{Cov}(M_n, M_k) = \rho_1^{n-k} \gamma_k$.
- For $n \geq k \geq 1$, $\text{Cov}(M_n, N_k) = \rho_1^{n-k} \rho_2 \lambda$.
- $\text{Cov}(A_i, B_j) = \lambda\mu_X \mu_Y \rho_1^{j-i} \rho_2$ for $1 \leq i \leq j$.
- $\text{Cov}(B_i, B_j) = (\mu_Y)^2 \gamma_i \rho_1^{j-i}$ for $1 \leq i < j$
- The rest remains unchanged.

1.9.2 Light-tailed distributions and softened dependent models (sections 1.5 and 1.6)

We now assume that both X and Y have light-tailed distributions.
 We first adapt Proposition 1.5.1 :

Proposition 1.9.2 (New m.g.f. for R^D).

Let $t, s \geq 0$ be real numbers, and let us assume that $\rho_1 M_Y(s) < 1$, and $M_X(t) < \infty$. Thus, the moment-generating function becomes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_n}(t, s) = & \exp\left[\gamma_0[B_n(M_Y(s)) - 1]\right. \\ & \left. + \lambda\left(M_X(t)\left(n(1-\rho_2) + \rho_2 M_Y(s) \frac{1 - B_n(M_Y(s)) + n(1-\rho_1)}{1 - M_Y(s)\rho_1}\right) - n\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

where $B_0(s) = 1$, then $B_i(s) = \rho_1 s B_{i-1}(s) + (1 - \rho_1)$ for $i \geq 1$.

Then, the associated Lundberg equation is

$$ct = \lambda \left[M_X(t) \left(1 - \rho_2 + \rho_2 \frac{M_Y(t)(1 - \rho_1)}{1 - \rho_1 M_Y(t)} \right) - 1 \right].$$

Let us now assume that $X \sim \text{Exp}(\eta)$, and $Y \sim \text{Exp}(\delta)$. Then, the adjustment coefficient of the dependent model (Equation 1.13) becomes :

$$\kappa_D = \frac{\eta + \delta(1 - \rho_1)}{2} - \frac{\lambda + \sqrt{c^2[\eta - \delta(1 - \rho_1)]^2 + \lambda^2 + 2\lambda c[\eta(2\rho_2 - 1) + \delta(1 - \rho_1)]}}{2c}.$$

We could also adapt accordingly the lower bounds of κ_D from Proposition 1.5.4, by taking into account ρ_2 , and of course all the bounds by rewriting ρ in ρ_1 .

We keep the same assumptions for the softened model $(R_n^I)_{n \in \mathbb{N}}$. In particular, $\mathbb{E}(M_k^I) = \gamma_k$, with the new value of γ_k taken in Proposition 1.9.1.

Then, for $(R_n^S)_{n \in \mathbb{N}}$, it remains almost the same : we keep $\mathbb{E}(M_k^S) = \gamma_k$, but this time $M_k^S = \rho_2 \circ N_k + O_k$, and $O_k \sim \mathcal{P}(\gamma_k - \rho_2 \lambda)$. Of course, we have the same independence assumptions between the sequences $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

By using $\bar{\rho}_1 = 1 - \rho_1$, and $\bar{\rho}_2 = 1 - \rho_2$, we find the new expressions :

$$\kappa_I = \frac{\eta + \delta}{2} - \frac{\lambda(\rho_2 + \bar{\rho}_1) + \sqrt{4\lambda^2\rho_2\bar{\rho}_1 + [\lambda(\rho_2 - \bar{\rho}_1) + c\bar{\rho}_1(\eta - \delta)]^2}}{2c(1 - \rho_1)},$$

$$\kappa_S = \frac{\eta + \delta}{2} - \frac{\lambda(\rho_2 + \bar{\rho}_1 \cdot \bar{\rho}_2) + \sqrt{4c\lambda(\delta - \eta\bar{\rho}_2)\bar{\rho}_1^2 + [\lambda(\rho_2 + \bar{\rho}_1 \cdot \bar{\rho}_2) + c\bar{\rho}_1(\eta - \delta)]^2}}{2c(1 - \rho_1)}.$$

In particular, we can check that these new expressions of the coefficients κ_D , κ_I and κ_S fit with the previous when $\rho_2 = 1$.

Regarding the variances, we just have to switch ρ into ρ_1 , and λ into $\rho_2\lambda$ (except for the term $n\lambda\mu_{(X^2)}$ in each case), and thus we adapt the expressions, and the differences calculated.

Regarding the comparison of the coefficients, the framework established in Section 1.6 (Proposition 1.6.5) is still true :

Proposition 1.9.3 (Comparison of the 3 coefficients).

For a fixed $\rho_2 \in]0, 1]$, and for $\rho_1 \in [0, \rho_{max}[$:

$$\kappa_D(0, \rho_2) = \kappa_S(0, \rho_2) < \kappa_I(0, \rho_2) \quad \text{and} \quad \kappa_D(\rho_1, \rho_2) < \kappa_S(\rho_1, \rho_2) < \kappa_I(\rho_1, \rho_2).$$

Démonstration. To underline the reliance of the models on the corresponding parameters, we write $R_n^D(\rho_1, \rho_2, \lambda)$, $R_n^S(\rho_1, \rho_2, \lambda)$ or $R_n^I(\rho_1, \rho_2, \lambda)$.

We have the equality in distribution, for each $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n^D(\rho_1, \rho_2, \lambda) \stackrel{\mathcal{L}}{=} R_n^D(\rho_1, 1, \rho_2\lambda) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{L_k} Z_{k,i}.$$

We have taken two sequences $(Z_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(L_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ which are i.i.d., mutually independent, and independent of the other sequences X , Y , N and M^D . Moreover, $Z_{1,1} \sim X_{1,1}$, and $L_1 \sim \mathcal{P}((1 - \rho_2)\lambda)$.

We could write the same thing for R^S or R^I , using the same compound sum, and with the same type of dependence assumptions.

Since $\kappa_D(\rho_1, 1, \rho_2\lambda) \leq \kappa_S(\rho_1, 1, \rho_2\lambda) \leq \kappa_I(\rho_1, 1, \rho_2\lambda)$ thanks to Proposition 1.6.5, we get the same framework as in this proposition and we can check that, for a fixed $\rho_2 \in]0, 1]$, the equality stands only between κ_D and κ_S when $\rho_1 = 0$. \square

1.9.3 Heavy-tailed distributions (section 1.7)

The main adjustments concern Corollaries 1.7.2 and 1.7.3.

Corollary 1.9.1 (New results for subexponential asympt. ruin. prob.).

We assume that X is such that its stationary excess distribution X_e is subexponential, and $\bar{G}(x) = O(\bar{F}(x))$, or conversely.

Then, when $u \rightarrow \infty$, the ultimate ruin probability satisfies :

$$\psi_I(u) \sim D_1 \int_u^\infty \left(\bar{F}(x) + \bar{G}\left(\frac{(1 - \rho_1)x}{\rho_2}\right) \right) dx, \quad \text{where } D_1 = \frac{\lambda(1 - \rho_1)}{c(1 - \rho_1) - \lambda[(1 - \rho_1)\mu_X + \rho_2\mu_Y]}. \quad (1.47)$$

Démonstration. The proof of Corollary 1.7.2 may be generalized with no great difficulty.

The main adaptations are the fact that $L_1 \sim \mathcal{P}\left(\frac{\rho_2\lambda}{1 - \rho_1}\right)$, and the process $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ becomes

$$P_t = u + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} \left(X_i + \frac{\rho_2}{1 - \rho_1} Y_i \right) \quad \text{for } t \in \mathbb{R}_+. \quad \square$$

Corollary 1.9.2 (New equivalents with Pareto distributions). Keeping the assumptions of Corollary 1.7.3, we get

$$D_1 = \frac{\lambda(1 - \rho_1)(\alpha - 1)(\beta - 1)}{c(1 - \rho_1)(\alpha - 1)(\beta - 1) - \lambda[(1 - \rho_1)\theta(\beta - 1) + \rho_2\eta(\alpha - 1)]} .$$

- i) If $\alpha < \beta$, therefore $\psi_I(u) \sim D_1 \frac{\theta^\alpha}{\alpha - 1} u^{-\alpha+1}$.
- ii) If $\alpha > \beta$, then $\psi_I(u) \sim D_1 \frac{\eta^\beta \rho_2^\beta}{(1 - \rho_1)^\beta (\beta - 1)} u^{-\beta+1}$.
- iii) If $\alpha = \beta$, then $\psi_I(u) \sim D_1 \frac{\theta^\alpha (1 - \rho_1)^\alpha + \eta^\alpha \rho_2^\alpha}{(1 - \rho_1)^\alpha (\alpha - 1)} u^{-\alpha+1}$.

The other changes are :

- In the proof of Proposition 1.7.4, λ has to be replaced by $\rho_2\lambda$, and the same thing for the proof or the results from Proposition 1.7.2 and Corollary 1.7.1.
- In Equation 1.42, the lower bound becomes $H_{1,T}(u) \sim T\rho_2\lambda\nu(A)\overline{F_0}(u)$.
- In Equation 1.43, the lower bound becomes $H_1(u) \sim \frac{\rho_2\lambda\nu(A)L(u)}{[c - \rho_2\lambda(\mu_X + \mu_Y)](\alpha - 1)} u^{-\alpha+1}$.

The rest is unmodified.

1.10 Uncertainty model

As we said before, in the model of Equation 1.1, we originally outlined that the term N_k involved in the expression of M_k stands for the new health or environmental damages due to the emissions of perfluorinated compounds occurring at period $k \geq 1$. In the previous section, we proposed a modification of the source term, which could actually be written $\rho_2 \circ N_k$.

Actually, regarding the specific case of the PFAS issue, we can have another point of view. Indeed, it is clear that not all the emissions would generate some damages towards health or the environment, which would be identified or detected (not too late) and potentially covered. We particularly refer to the fact mentioned in Section 1.2 that, at the moment, some companies propose specific PFAS coverages only for rare cases, or even for no case at all.

Thus, we could see instead N_k as the number of clients of a given company responsible for a polluting activity, and for who this activity is indeed detected and insured starting from the k^{th} period. M_k would accordingly correspond to the total series of treatments insured regarding health or the environment at period k .

Thus, in the following model, we introduce N_k^ξ and M_k^ξ which, in the PFAS context, are at period k the "real" numbers of emissions and active contaminations engendered by the clients of a given company. In addition, we apply a kind of filtration thanks to Bernoulli variables, to underline which damages have been actually observed and have triggered covered claims.

The parameter of uncertainty corresponds to a real number $0 < \xi < 1$. The new model is defined like this :

$$R_n^\xi = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^\xi} \beta_{k,i} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{M_k^\xi} \beta_{k,i} Y_{k,i} \quad \text{for } n \in \mathbb{N} , \quad (1.48)$$

The sequences $(\beta_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(N_k^\xi)_{k \in \mathbb{N}}$ are i.i.d., with $N_1^\xi \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\xi}\right)$ and $\beta_{1,1} \sim \mathcal{B}(\xi)$. Moreover, we keep the INAR(1) formulation for the counting of the by-claims :

$$M_{k+1}^\xi = \rho \circ M_k^\xi + N_k^\xi \text{ for } k \geq 1, \text{ but this time with } M_0^\xi \sim \mathcal{P}\left(\frac{\gamma_0}{\xi}\right).$$

Similarly to the original model, we assume that X , Y , and β are mutually independent, but also that N^ξ on the one hand, and M^ξ on the other hand are independent of these 3 sequences.

Let us compare the two processes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ from Equation 1.1, and $(R_n^\xi)_{n \in \mathbb{N}}$ from this section.

Let us note A_k^ξ and B_k^ξ the aggregate claim amounts respectively related to the main claims and the by-claims at period k for R^ξ .

We find easily that A_k and A_k^ξ have the same distribution.

Then, concerning the by-claims, thanks to Proposition 1.4.1, we get $M_k \sim \mathcal{P}(\gamma_k^\xi)$, for all $k \in \mathbb{N}$, where for $k \geq 1$, $\gamma_k = \rho^k \left(\frac{\gamma_0}{\xi} - \frac{\lambda}{\xi(1-\rho)} \right) + \frac{\lambda}{\xi(1-\rho)}$.

We have clearly $\gamma_k^\xi > \gamma_k$. Indeed, for each $k \in \mathbb{N}$, seen as a function of λ , $\lambda \mapsto \gamma_k(\lambda)$ is increasing. More precisely, $\gamma_k = \xi \gamma_k^\xi$.

Actually, due to the $(\beta_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, we can write $B_k^\xi \sim C_k$, where $C_k = \sum_{i=1}^{J_k^\xi} Y_{k,i}$, and the variables $(J_k^\xi)_{k \in \mathbb{N}}$ are independent, with $J_k^\xi \sim \mathcal{P}(\xi \gamma_k^\xi)$. All in all, $B_k \sim B_k^\xi$.

Therefore, $R_n =_{\mathcal{L}} R_n^\xi$, hence the risks from both models are the same.

We could also compare with the idea of the pseudo INAR(2) process proposed in Section 1.9 : if we apply Equation 1.45 to $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, with $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = \xi$, and $N_1 \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\xi}\right)$ instead of $\mathcal{P}(\lambda)$, it is still possible to draw a comparison. We can prove that once again, $R_n \sim R_n^\xi$ for each $n \in \mathbb{N}$.

All in all, in the context of this section, $(R_n^\xi)_{n \in \mathbb{N}}$ has maybe a better concrete sense than $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, however since the processes have the same distribution, all the results proved about the R allows us to understand the behaviour of R^ξ , especially in terms of risks.

1.11 Conclusion and openings

In this paper, we have written a new kind of discrete-time risk model in ruin theory, involving main claims and delayed by-claims counted thanks to a time series INAR(1), and this model could serve to represent the PFAS issue.

We acknowledge there are several things we do not have taken into account. For instance, in the practical reality, the frequency λ , the coefficient ρ , and the distributions of the main claims and the by-claims should be dependent, but also depend on the time. Yet, we stated that the analysis should become (very) difficult as soon as we add even only one of such assumptions.

Otherwise, when the contagion is quite spread it could be interesting to focus on the "filiation" of damages engendered by an initial event of this phenomenon, in order to link through the mathematical notations a main claim with all the by-claims it has produced, or at least to count at each period the number of by-claims coming from each one of the previous periods.

Besides, since these pollutants are called eternal and sometimes the effects take years to be detected, we could imagine to replace the INAR(1) process by an INAR(p) process, where $p \in \mathbb{N}^*$ could be a relatively great integer ($p \geq 20$ regarding the time scale of the issue). Such

an improvement could be another way to describe the idea of filiation. Another justification for such a process is the fact that, in the database of some insurance or reinsurance companies, some claims are registered at the year or the period where the first damages have occurred, and not at the time where the problem has been discovered. Yet, such modifications should not be simple to characterize if one aims at providing significant mathematical results. On the other hand, one could consider that such a meaning is included in the INAR(1), since we could register the propagation of such a path through the time until the first period where it does generate financial losses, and meanwhile assigning claims with a null value.

Furthermore, with reliable data in the future, one could check if this model is sufficiently accurate regarding the PFAS issue (possibly with a little bit of tuning), and if so, use it to predict the behaviour and the viability of a corresponding insurance company.

All these ideas are left for future research.

Etudes de modèles de prévention et application aux PFAS

Ce chapitre correspond à un article intitulé « Some prevention studies in ruin theory and their application to the PFAS issue », co-écrit avec Stéphane Loisel et Naushad Mamode Khan, et en cours de soumission.

Abstract

In this paper, we propose and study several risk models in which the insurer invests in a prevention plan to decrease the global risk. Specifically, two of these models include delayed or by-claims, and one of them uses an INAR(1) process to count the by-claims. Moreover, we consider here the effects of prevention can reduce not only the average frequency of the claims, but also the means of their random amounts, and more particularly, the probability of occurrence of the by-claims. We intend in particular to draw a link between the idea of prevention and the current issue of the perfluorinated chemical compounds (or PFAS).

Keywords : Prevention ; Ruin Theory ; Risk Model ; By-claims ; Perfluorinated Compounds (PFAS) ; Primary Prevention ; Secondary Prevention ; Tertiary Prevention ; INAR(1) Process.

2.1 Introduction

The insurance world currently feels hugely concerned by the emerging risk coming from PFAS compounds. Indeed, because of the speed at which the damages may spread widely from emissions of these chemical products in the environment, and the difficulty to predict the different levels of contamination related, even for the next few years, it is an important question that encourages the settlement of some specific insurance policies nowadays. Actually, the present importance of the PFAS issue is mostly due to the regulation enacted or the practical solutions tried to confine their harmful effects, rather than the time since they exist or we know their hazards.

In relation with this subject, and in order to describe the associated risks incurred by an insurer, in Chapter 1 of this thesis, we have proposed a discrete-time risk model involving two types of claims, namely main claims and by-claims, the latter ones counted thanks to an INAR(1) (integer-valued autoregressive) time series.

Besides, prevention has become a trendy subject in insurance. The first important prevention program was implemented in 1997 by the South African insurance company Discovery. Since then, a growing number of insurers have launched their own programs, such as John Hancock in the USA, or Generali Vitality or AXA prevention in Europe. Prevention is a term that implies wide potential solutions or practical actions, but it remains synthetic in its goal : spending an amount of money to anticipate and limit some risks or hazards, and thus reduce the global risk incurred by a company.

Hence, some insurers may be interested by prevention programs with the aim of cleaning the environment from these harmful PFAS molecules by removing them, and reducing the potential health damage of people contaminated or jeopardised by these compounds, while lowering their financial risks.

Motivated by these subjects, we present in this paper three risk models carrying a prevention structure, while intending to draw links with the PFAS issue.

A first approach about prevention was made by E. Gruenberg in 1953 ([Gruenberg \(1953\)](#)), which distinguishes three main categories of programs which can be applied to avoid or diminish some risks (but only described in a medical context) : the primary, the secondary or the tertiary prevention. After that, in 1972, I. Ehrlich and G. Becker ([Ehrlich and Becker \(1972\)](#)) proposed to dissociate two types of prevention in a more general economic or insurance framework : self-protection and self-insurance (the last one is close to the idea of reinsurance). Then, [Dionne and Eeckhoudt \(1985\)](#) among others, proposed the assumption that investing in prevention should always reduce the risk incurred. Besides, [Courbage et al. \(2017\)](#) investigated prevention of correlated risks. In this field, we can also mention [Furrer and Sandqvist \(2025\)](#) who studied the idea of prevention in relation with the question of pension for disability insurance.

All the previous papers enhance the idea of reducing risks thanks to prevention, sometimes in a framework more general than the case of an insurance company, but rather from an economical point of view. In ruin theory, the first risk model incorporating the theoretical mechanisms of prevention was implemented by [Gauchon et al. \(2020\)](#). It corresponds to the classical continuous-time Cramér-Lundberg process where a constant periodic amount p is spent to reduce the frequency of the claims $\lambda(\cdot)$. Then, this kind of model was deepened in [Gauchon et al. \(2021\)](#), by distinguishing between the lower or the higher amounts of claims, and where prevention is only applied to the frequency of the higher claims.

It is otherwise possible to refine the original model of Cramér-Lundberg by adding a second kind of loss, the by-claims, which always arise from a main claim when they occur. Indeed, the incidents causing serious damages or great amounts to reimburse for an insurance company

engender generally two types of claims : the "main claims" which are settled quickly, and the so-called "by-claims" which often correspond to delayed claims. Such a pattern may be found in motor insurance for example, where a single event can generate both immediate material damage claims and delayed bodily injury claims. The first model which was really inspired from the classical continuous-time Cramér-Lundberg process and involving delayed by-claims was introduced by [Yuen et al. \(2005\)](#). Before that, some models including by-claims or delayed claims were studied for example in [Waters and Papatriandafylou \(1985\)](#), or [Yuen and Guo \(2001\)](#). Then, many researchers have examined further this kind of model, by adding various dependence assumptions, such as [Fu and Li \(2016\)](#), [Yang et al. \(2019\)](#), or [Li \(2023\)](#).

Moreover, in a discrete-time risk model, it is possible to link the numbers of claims related with the different periods thanks to time series, while settling dependence between the aggregate amount of claims at each period. For example, some models where the claims are counted by an integer-valued moving average process (INMA), or an integer-valued autoregressive process (INAR) can be found in [Cossette et al. \(2010\)](#), [Hu et al. \(2018\)](#), or [Guan and Hu \(2022\)](#).

Furthermore, in actuarial science, and especially in ruin theory, some contagion models have been used to describe phenomena that generate risk propagation and cause clusters of claims. It may concern epidemiological risks (see e.g. [Barigou et al. \(2020\)](#), [Lefèvre and Simon \(2022\)](#)), but also cyber risks (see for instance [Hillairet et al. \(2023\)](#)).

Chapter 1 gathered these ideas of by-claims, time series and contagion in a discrete-time risk model which aims at describing the effects of the PFAS issue in an insurance context.

Studying prevention models including by-claims appears to be an improvement towards the first two prevention models in ruin theory from [Gauchon et al. \(2020\)](#) and [Gauchon et al. \(2021\)](#), since this notion is not involved in this paper. In addition, these papers focused only on reducing the average frequency of the claims thanks to prevention, which corresponds to the idea of primary prevention, and here, we also investigate the effects of secondary and tertiary prevention, which aim at lowering the means of the claims or the probability of occurrence of by-claims. Besides, as the results are sometimes different for a continuous-time risk model and its discrete-time equivalent, we tried to extend the study of the original model from [Gauchon et al. \(2020\)](#) in discrete time.

However, we have to acknowledge we were motivated by this PFAS thematic, but here since for the moment we lack data to complete our theoretical approach, the aim of the paper is rather to alert about this issue, and initiate some works in actuarial science about it. Therefore, we try to represent this issue by enhancing the different possible levels of propagation of the damages. Besides, we insist on the fact that there exists several ways for insurance companies to apply prevention, in order to avoid or limit the occurrence of future wide-scale damages.

The three prevention models presented are chronologically a continuous-time model where one main claim generates exactly one by-claim, a discrete-time model with no by-claim, and a discrete-time model where the by-claims are counted thanks to an INAR(1) time series (this last one is the transcription of the model from Chapter 1 with prevention). We attempt to find the most precise characterizations in terms of optimal prevention, while drawing links between the results of these models but also with those of the original model from [Gauchon et al. \(2020\)](#).

The paper is organized as follows : in Section 2.2, we introduce different notions associated with prevention, and how it can be connected with our specific models. In particular, we give some elements on the PFAS issue, to explain the possible links with such a problem. Then, in Sections 2.3, 2.4, and 2.5, we present the three respective prevention models mentioned, and the studies associated in terms of optimal prevention. Then, in Section 2.6, some comparisons are made between these models. Eventually, in Section 2.7, we explain briefly how the studies can be adapted with a new assumption which conveys a more concrete sense, but which would make the expressions of the results heavier.

2.2 Context of the prevention studies

In the remainder of the paper, all the random variables and stochastic processes are defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Moreover, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ is the set of the nonnegative integers, thus $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ are the positive integers.

Moreover, sometimes we lighten the notations by omitting the dependence of some variables or parameters according to the prevention amount p . Indeed, for instance we should write $N(t, p)$ in Section 2.3, or $N_k(p)$ or $M_k(p)$ in Section 2.5.

2.2.1 The PFAS issue in relation with our prevention studies

2.2.1.1 Some elements about the PFAS issue

The spreading of the PFAS molecules on a global scale constitutes a burning issue currently. "PFAS" means in fact "Per- and polyfluoroalkyl substances" - and we may also design these compounds by "perfluorinated". These molecules are not extracted from the environment, but they are derived from chemical synthesis. Moreover, they are extremely stable, and the bond between the fluorine and carbon is among the strongest in organic chemistry, which enables to manufacture solid materials. Products using PFAS have been marketed for the first time in the 1950s by the American company DuPont de Nemours, and are now used in numerous objects such as pans, waterproof packaging, or clothes protecting from extreme temperatures.

The problem is that all their good properties make these molecules almost indestructible, this is why they are called "forever pollutants". More precisely, the bigger perfluorinated molecules may decompose in the environment, but always in smaller ones, and these latter will remain persistent (see e.g. [Lohmann et al. \(2020\)](#)). It is likely that these "forever chemicals" have already spread on the whole world's surface, especially through the atmosphere or the waters. Currently, the best ways to clean the environment from these compounds is to collect and then stocking them, and sometimes using appropriate and safe disposal methods (thanks to incinerators for example) to destroy or mineralize them, while avoiding re-emissions. However, it is still relatively slow processes (see e.g. [Labadie et al. \(2020\)](#)).

Numerous scientific campaigns are led to detect at different scales the presence of molecules in the waters, the bodies of animals or other substances, and maps are consequently built to have a better overview of the presence of the most common perfluorinated species, with their concentration at each point measured. For instance, a worldwide map is available on the website of the Environmental Working Group ([EWG \(2023\)](#)). However, these maps also suggest that the true levels of contamination are still understated.

In fact, the current importance of this question is not related with the time since we know their hazards (above all for human health, such as cancers), but rather in the regulatory solutions tried in order to limit the damaging effects, such as detection campaigns, or implementation of cleaning processes towards the environment.

In terms of international regulation, more and more PFAS species are concerned by European or American exclusions, and it should continue to be toughened in the coming years. Yet, the thresholds still look heterogeneous on a global scale. Typically, in European Union, some new thresholds of drinking water will be applied in 2026, whereas for food, the current ones have existed since 2023.

In the insurance field, it seems that only during the last years some companies have taken under consideration all the high risks coming from PFAS, in order to propose specific coverage (as underlined by Guy Carpenter for instance, in [Vanbeneden \(2024\)](#)). Although pollution policies already exist, the rapidity of the spreading and the harmful consequences have encouraged the establishment of policies focused on these perfluorinated compounds, even though for the

moment, the exclusions are quite strict. As an example, in August 2022, the Lloyd's Market Association published two clauses to exclude almost entirely the responsibility of the (re)insurer for damages related with such substances.

In order to reduce the global pollution and the hazards engendered, the scientific community has to continue to acquire specific knowledge and data about this issue. In particular, it would be appropriate to find more efficient cleaning methods than the ones that are already known. What is more, the industrial companies that were producing or using perfluorinated compounds should reduce as much as possible their usage, and be able to change their business model if necessary. Even if it looks difficult to prohibit completely these products, since for example some materials have no reliable alternatives at the present time, it is possible to educate the consumer : for example, some brands make products without PFAS which are similar to some others using these compounds, and make this a selling point.

2.2.1.2 The link with the prevention models

In Sections 2.3 and 2.5, we propose models involving both main claims and by-claims.

We can see each main claim as the financial costs related with the client's liability regarding the pollution of the environment, or the harmful effects suffered by individuals coming from PFAS emissions.

Moreover, a by-claim would correspond to the gathering of the client's financial costs to repair the pollution emitted in the environment, but also to the medical expenses to manage the subsequent health damages towards mankind. As mentioned before, the aim of the depollution is to remove as much molecules as possible from the environment, and this kind of process could take a long time since the perfluorinated are able to spread widely through the air or the waters.

Both types of claims will more likely refer to the whole activity of the insured client (rather than parts of it) : indeed, industrials charged for their polluting activity should be judged for their whole damages. However, it could also correspond to periods of several years, depending on the evolution of the regulations (as in the United States for instance, [Chesler et al. \(2021\)](#)).

More precisely, in Section 2.3, we consider that one main claim engenders precisely one by-claim : it means that the by-claim corresponds to the total amount reimbursed to the client for all the damages generated in terms of pollution and medical care, after all the necessary actions have been done to cure that. However, the model from Section 2.5 allows to describe things differently : starting from the period where the civil liability compensation has been dealt, a series of by-claims coming from this event can emerge and last during several periods due to the INAR(1) structure. It means that compensations would be paid periodically until the end of the curing process.

Actually, we could more largely consider that the main claims could be null, in the context where an insurer does not always accept to pay the financial compensation for civil responsibility for a given insured client, but proposes in all cases to reimburse a part of the depollution procedure or the health care provided. Section 2.5.4 investigates such a scenario, by considering that all the main claims are equal to 0. Less roughly, some of the subsequent studies should be modified if we want to take into account this possibility for the main claims to be null. Yet, so as not to overcharge the assumptions, and provide significant results, we prefer considering a classic framework where the claims have positive values.

2.2.2 Different categories of prevention

To our knowledge, there are two main ways to describe the principles and the purposes of prevention and its effects, if we aim an application in actuarial science.

As mentioned before, a first approach is the one from Gruenberg in 1953 ([Gruenberg \(1953\)](#)), which distinguishes three main categories of prevention which can be made to avoid or diminish risks : the primary, the secondary or the tertiary prevention. These notions are particularly used in medical science, notably when one talk about cancer prevention. Hence, at the origin, this framework is rather medical than economic.

The second approach was made in [Ehrlich and Becker \(1972\)](#), which is much more focused on the insurance world, and considers only two different actions : the auto-protection, and the auto-insurance.

Let us provide some details about these two points of view, and explain the links between them.

In a nutshell, self-insurance would now be close to a classical reinsurance framework, whereas self-protection focuses rather on strategies in order to reduce the frequency of the claims.

Primary prevention consists in avoiding a hazard or a disease to occur, through vaccination for example, or enticing people to practice sports, and maintaining good health. For instance, an insurance company could reimburse partly or totally to their policyholders a pass or a subscription to practice a given sport.

Secondary prevention stands globally for risk detection. It aims at screening or detecting diseases as soon as possible, such as cancers, in order to anticipate and avoid complications or sequelae.

Tertiary prevention aims globally at reducing the cost of the risk. As mentioned, it is a notion used rather specifically in the health field, but it is a principle that could stand for every field possibly covered by an insurance company. It may concern the medical treatment to prevent from potential worsening or relapses of a disease, in particular metastasis for the case of cancer, but also for helping cured people to recover fully or the maximum of their previous abilities. Besides, it is important to note that this definition incorporates individual actions as well as potential modifications of the environment. What is more, we may distinguish two periods regarding this tertiary prevention : when people are still cured or hospitalized, or when they have recovered from a disease and live normally again, but are still threatened by a relapse.

It is difficult to distinguish secondary and tertiary prevention regarding their mathematical consequences on a risk model, all the more since one might confuse the concrete actions they refer to. That being said, if a model incorporates delayed claims or by-claims, trying to reduce their frequency correspond rather to tertiary than secondary prevention. Otherwise, primary prevention acts on the average frequency of the claims, and lowering the means of the claims corresponds to secondary and tertiary prevention.

Moreover, as [Gauchon et al. \(2020\)](#) precises for instance, we can globally consider that the auto-protection corresponds to primary prevention, and the auto-insurance to secondary and tertiary prevention.

To draw more precise links between these notions and the mathematical parameters used in the subsequent sections :

- Diminishing the average frequency λ of the main claims in Sections 2.3, 2.4, and 2.5 corresponds to primary prevention and auto-protection.
- Reducing the average mean of the amounts of the claims in Sections 2.3, 2.4, and 2.5 stands for secondary or tertiary prevention, and auto-insurance.
- Reducing the probability of occurrence of by-claims and relapses through the parameter π in Section 2.3, or α in Section 2.5 corresponds to secondary and tertiary prevention (but rather tertiary), and auto-insurance.

Eventually, we connect these notions with the concrete PFAS issue.

The primary prevention or the auto-protection would consist mainly in limiting the emissions of chemical products from the industrial activity, and thus targets the companies synthesizing or using such compounds. Regarding the previous section, the insurer could also help the industrials to modify their business models, or guide the consumers in making good choices. We can also consider that cleaning a contaminated area refers to primary prevention.

The goal of secondary prevention would be to collect figures and data about the concentration of the different perfluorinated species in waters or food, and then detecting potential diseases among people living near areas contaminated.

Finally, tertiary prevention refers essentially to curing properly people who have contracted a disease due to an apparent exposure to perfluorinated compounds, and thus avoiding more serious consequences.

For the remaining of the paper, we prefer using the denomination "secondary and tertiary prevention", even if it is heavier than "auto-insurance", because it conveys more refined ideas.

2.2.3 A first ruin model with a prevention structure

We introduce here the model from [Gauchon et al. \(2020\)](#), because, as outlined above, it is the first model in ruin theory which incorporated the idea of prevention for insurance companies, and it serves as a common reference to the models we are studying in this paper. In particular, the assumptions we will make on the parameters affected by prevention are the same or similar to the ones made on $\lambda(\cdot)$ in the mentioned paper.

2.2.3.1 Presentation of the model

The model from [Gauchon et al. \(2020\)](#) corresponds to the original Cramér-Lundberg process with a prevention structure. It is written :

$$R(t, p) = u + (c - p)t - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad (2.1)$$

where $u \geq 0$ is the initial surplus of the insurance company, $c > 0$ is the constant premium rate per unit of time, and $0 \leq p < c$ is the constant amount invested in prevention per unit of time. $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is an independent and identically distributed (i.i.d.) sequence of random variables representing the amounts of the claims. N is a Poisson process of arrival of intensity $\lambda(p)$, i.e. $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda(p)t)$. More details about the assumptions on $\lambda(\cdot)$ are provided below.

The ultimate ruin probability is $\psi(u, p) = \mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R}_+ / R(t, p) < 0)$, and the ultimate non-ruin probability is $\varphi(u, p) = 1 - \psi(u, p)$.

The net profit condition is, for a fixed $p > 0$, $c - p > \lambda(p)\mu$. It is a necessary condition for having $\varphi(u, p) > 0$.

In particular, it implies that c is large enough to fulfill the net profit condition without the effects of prevention, i.e. $c > \lambda(0)\mu$. Then, since $\lambda(\cdot)$ is positive, decreasing and continuous, the intermediate value theorem guarantees the existence of a unique

$p_{max} \in [0, c[$ such that $c - p_{max} = \lambda(p_{max})\mu$.

Therefore, we can restrict the study of the parameter p on the interval $[0, p_{lim}]$, where $0 < p_{lim} < p_{max}$ (in practice, it is more relevant to choose a value close to p_{max}).

2.2.3.2 Assumptions on $\lambda(\cdot)$

The aim of the prevention is here to reduce the frequency of the claims, so $\lambda(\cdot)$ is naturally a decreasing function of p . Moreover, we assume it is \mathcal{C}^2 and (strictly) convex. In addition to these quantitative properties, it is possible to study some particular cases where we assign to $\lambda(\cdot)$ an explicit expression.

Assuming $\lambda(\cdot)$ strictly convex means that the more one spends in prevention, the smaller are the additional effects in terms of reduction of the claim frequency. This assumption is a quite common economic hypothesis, already made in [Ehrlich and Becker \(1972\)](#) or [Courbage \(2001\)](#) for example. Moreover, the fact $\lambda(\cdot)$ is always positive (except for rare cases) means there is almost never "total prevention", that is to say one can hardly prevent all risk.

If we extend the assumptions, we may define $\lambda(\cdot)$ more broadly on \mathbb{R}_+ . It would still be decreasing, strictly convex, positive, and \mathcal{C}^2 . Then, depending on the values we fix for c and p_{min} , we simply have to restrict the study to $[0, p_{min}]$.

In particular, as a natural consequence of such assumptions, $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda'(p) = 0$. Indeed, $\lambda(\cdot)$ is decreasing and minorized by 0, so it converges when $p \rightarrow \infty$. Thus, $\lambda'(\cdot)$ is negative and increasing because of the convexity, so $\lambda'(\cdot)$ converges too, and in this context, the only limit possible is 0.

Regarding the limit λ_∞ of $\lambda(\cdot)$, since total prevention is something unusual (as mentioned before), we should consider $\lambda_\infty > 0$. The case $\lambda_\infty = 0$ could refer to vaccination campaigns for instance : investing enough money to vaccinate an entire population may enable the eradication of a disease, as for the case of the smallpox virus.

It is possible to assume that $\lambda(\cdot)$ would have the same shape regardless of $\lambda(0)$, that is to say, there exists a decreasing, convex, positive and \mathcal{C}^2 function $f(\cdot)$ satisfying $f(0) = 1$, and such that $\lambda(p) = \lambda_0 f(p)$.

In that case, it is clear that, from a theoretical point of view, a same amount spent on prevention has more beneficial effects when the initial risk is higher. Nonetheless, we may reasonably consider that it is still true without assuming the existence of such a function $f(\cdot)$.

Besides, it is actually a restrictive assumption to consider that the effects of the prevention start for $p = 0^+$. Indeed, it is unlikely that the slightest amount spent in prevention would necessarily produce beneficial effects and reduce the risks, and we should instead suppose that it is effective only over a certain threshold $p_{min} \in [0, p_{lim}]$. This idea is already stated in [Gauchon et al. \(2020\)](#). A concrete analogy to justify this idea is that, for a heavy smoker, consuming 38 or 39 cigarettes a day instead of 40 leads to almost the same health risk.

As in the mentioned article, we prefer presenting the results in this paper by still assuming $p_{min} = 0$, since it is simpler, and it does not really change the arguments given and the computations made. One just has to draw a distinction between the cases as done in Proposition 8 of the corresponding paper. Otherwise, in this paper, we explain in Section 2.7 what would change to have instead $p_{min} > 0$ for our studies.

2.2.3.3 Optimal prevention amount

One of the main objectives of such a prevention study is to determine the optimal prevention amount $p^*(u)$.

Definition 2.2.1 (Optimal prevention amount $p^*(u)$). For $u \in \mathbb{R}_+$, it is defined as the smallest amount $p \in [0, p_{lim}]$ which minimizes the ruin probability $\psi(u, p)$:

$$p^*(u) = \min \left(\operatorname{argmin}_{p \in [0, p_{lim}]} \psi(u, p) \right), \text{ or equivalently, } p^*(u) = \min \left(\operatorname{argmax}_{p \in [0, p_{lim}]} \varphi(u, p) \right).$$

Actually, in Proposition 1 from [Gauchon et al. \(2020\)](#), the authors prove that this optimal amount does not depend on p for the model from Equation 2.1. But of course, it is not true for all kinds of risk model including a prevention structure. We can assume this property is satisfied when the prevention framework remains relatively simple.

2.2.4 Prevention studies in this article

We first study two prevention models which are close to the model from Equation 2.1 : a first one in continuous time with the presence of by-claims, and a second one which is its transcription in discrete time. Finally, a third prevention model involving by-claims counted by an INAR(1) process is studied.

For each model, as conveyed above, we restrict the study to the interval $[0, p_{lim}]$, for a fixed $p_{lim} > 0$ such that the net profit condition is fulfilled for each $p \in [0, p_{lim}]$.

Of course, the main interest remains the general optimal prevention amount $p^*(u)$ as it is defined previously, but depending on the assumption made in each case, we will also look at some other optimal amounts. Indeed, the study of $p^*(u)$ is more difficult when the assumptions get complex.

Thus, for each model studied, if an adjustment coefficient exists (depending on the assumptions made on the losses), we define :

Definition 2.2.2 (Optimal amount p_κ^*). In this context, we note $\kappa(p)$ the associated adjustment coefficient. Then, we note $p_\kappa^* = \min_{p \in [0, p_{lim}]} \left(\operatorname{argmax} \kappa(p) \right)$. Regarding the asymptotic behaviour, it corresponds to searching for the amount for which the risk related with κ is minimal.

Moreover, if the distributions considered are Pareto, then the ultimate ruin probability may be written generally $\psi(u, p) \sim D(p) u^{-\gamma}$, when $u \rightarrow \infty$, with $\gamma > 0$, and $D(p) > 0$. It allows us to define :

Definition 2.2.3 (Optimal amount p_{Par}^*). With such assumptions, we note $p_{Par}^* = \min_{p \in [0, p_{lim}]} \left(\operatorname{argmin} D(p) \right)$, which is equivalent to minimizing the asymptotic risk related in function of p , when $u \rightarrow \infty$.

Note that, in this article, we take this definition for the Pareto distribution :

Definition 2.2.4 (Pareto distribution). $X \sim \operatorname{Par}(\alpha, \theta)$ with $\alpha, \theta > 0$ if for $x \in \mathbb{R}_+$, $\overline{F}_X(x) = \left(\frac{\theta}{\theta + x} \right)^\alpha$. The mean is finite if and only if $\alpha > 1$, and in that case, $\mu_X = \frac{\theta}{\alpha - 1}$.

The first two models from Sections 2.3 and 2.4 are easier to study. For both, as for [Gauchon et al. \(2020\)](#), it is possible to prove the independence of $p^*(u)$ according to u , if $\lambda(\cdot)$ is the only parameter affected by prevention (i.e., when we only consider primary prevention). Then, for each of these two models, we try to go further, and we propose some results in terms of secondary or tertiary prevention, even if they are not as light or concise as the previous ones.

The third model from Section 2.5 is more difficult to study. As for the paper from [Gauchon et al. \(2021\)](#), it seems some complexity is engendered by the presence of two types of claims occurring with different frequencies.

Eventually, we outline a result widely used in this article.

Proposition 2.2.1 (An important condition).

We define the function $h(p) = \lambda'(p)(c - p) + \lambda(p)$ for $p \in \mathbb{R}_+$. If $c\lambda'(0) + \lambda(0) < 0$, then h has precisely one root on the interval $]0, \infty[$. Moreover, in that case, the root p_1 satisfies $p_1 = c + \frac{\lambda(p_1)}{\lambda'(p_1)}$. Otherwise, h is positive on \mathbb{R}_+^* and has no zero.

Démonstration. Since $\lambda \in \mathcal{C}^2$, we can derive h on \mathbb{R}_+ , which yields $h'(p) = (c - p)\lambda''(p) > 0$ by convexity. Then, since $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda'(p) = 0$, we get $\lim_{p \rightarrow \infty} h(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(p) > 0$.

Moreover, the inequality outlined is equivalent to $h(0) < 0$. Therefore, if it is satisfied, since h is increasing, by the intermediate value theorem, h has a unique zero on \mathbb{R}_+^* . Otherwise, it means that $h(0) \geq 0$, so h has no root on \mathbb{R}_+^* .

Eventually, by rearranging the equation $h(p_1) = 0$, we find the expression mentioned for p_1 . □

Through such a formulation, finding p_1 appears to be a fixed-point problem. For example, it could be computed graphically if we had numerical expressions for the corresponding parameters.

Remark 2.2.1. There is a subtlety : if p_1 exists, since $\lambda'(p) < 0$, the expression of p_1 ensures $p_1 < c$. However, we should also compare p_1 to p_{lim} to draw our conclusions for most of the results of this paper. For instance, the conclusion of Corollary 2.3.1 should be instead :

Moreover, for the case where p_κ^ is positive, if in addition*

$h(p_{lim}) = \lambda'(p_{lim})(c - p_{lim}) + \lambda(p_{lim}) \geq 0$, then it satisfies $p_\kappa^ = c + \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda'(p_\kappa^*)}$. Otherwise, $p_\kappa^* = p_{lim}$.*

Besides, since $\lambda'(p)$ decreases and gets closer to 0 when p increases, we could assume that p_{lim} is tall enough to ensure that $p_1 \leq p_{lim}$. As suggested, the necessary and sufficient condition for that is simply $h(p_{lim}) \geq 0$. Anyway, to avoid surcharging the writing, we omit this subtlety from now on.

2.3 In continuous time with by-claims

2.3.1 Context and model

We generalize the prevention model from Equation 2.1 described in [Gauchon et al. \(2020\)](#), by adding the presence of by-claims in a continuous-time model. Actually, the following model may also be seen as a transcription of the original model from [Yuen et al. \(2005\)](#) with a prevention structure.

$$R(t, p) = u + (c - p)t - \sum_{k=1}^{N(t, p)} (X_k + Y_k \cdot 1_{(T_k + d_k \leq t)}) . \quad (2.2)$$

Here, we consider that each main claim engenders precisely one delayed by-claim. For $k \in \mathbb{N}^*$, the k^{th} main claim occurs at time T_k , and the associated by-claim at time $T_k + d_k$, with a random nonnegative delay d_k . $N \sim \mathcal{P}o(\lambda(p))$ is a Poisson process, with intensity $\lambda(p) > 0$. Seen as a function of p , $\lambda(\cdot)$ is \mathcal{C}^2 , convex, and decreasing on $[0, p_{lim}]$. The sequences $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ and $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ representing the respective amounts of the main claims and the by-claims are i.i.d. More precisely, X_1 and Y_1 are positive variables with finite means $\mu_X > 0$ and $\mu_Y > 0$. Eventually, we assume that the sequences X , Y and d are mutually independent, and they are also independent of the counting process N .

As detailed in Sections 2.2.1.2 and 2.2.2, this model can be seen as a representation of the PFAS issue.

We are focusing on studying the effects of prevention.

Some results in terms of asymptotic ruin probabilities involving subexponential distributions could be derived for such a model, but here it is not our main concern : indeed, one could easily adapt the results from [Li \(2017\)](#) or [Yang et al. \(2019\)](#) to such a model.

However, we are interested in providing the explicit expression of the adjustment coefficient κ_1 (precisely, $\kappa_1(p)$ in our context) of such a model when both distributions of X and Y are exponential, and the delays d are bounded, since to our knowledge, it has not been done yet in the literature. [Yuen et al. \(2005\)](#) already established the expression of the ultimate ruin probability for such a model in case the delays are exponential and i.i.d., and it entailed the existence of the adjustment coefficient, but the authors did not compute its expression.

Here, we compute it while assuming the delays are bounded, but the expressions would be the same in the context of the mentioned paper.

After that, we will see that the main result regarding the optimal prevention amount can be proved whether the delays are assumed bounded or not. Nevertheless, [Yang et al. \(2019\)](#) mentions a concrete reason why we could reasonably consider that they are bounded : in fact, the by-claims should occur before the termination date due to the insurance policy.

Proposition 2.3.1 (Adjustment coefficient with 2 exponential distributions).

We assume here that the delays $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ have a common bound. Moreover, $X \sim \text{Exp}(\eta)$, and $Y \sim \text{Exp}(\delta)$, with $\eta, \delta > 0$. Then, $\psi(u, p) \simeq e^{-\kappa_1(p)u}$, in the sense there exists $l : (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $\psi(u, p) = l(u, p) e^{-\kappa_1(p)u}$, and when u is tall enough, $l(u, p) \leq 1$. Moreover,

$$\kappa_1(p) = \frac{\eta + \delta}{2} - \frac{\lambda(p) + \sqrt{[\lambda(p) + (c - p)(\eta + \delta)]^2 - 4(c - p)^2 \eta \delta}}{2(c - p)} . \quad (2.3)$$

Démonstration. Let us fix $t \in \mathbb{R}_+$, $u \geq 0$, and $p \in [0, p_{lim}]$. We note $M_0 > 0$ a common bound of the $(d_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, i.e. $0 \leq d_k \leq M_0$ for $k \in \mathbb{N}^*$.

We define the process P_{X+Y} this way :

$$P_{X+Y}(u, t, p) = u + (c - p)t - \sum_{k=1}^{N(t)} (X_k + Y_k) . \quad (2.4)$$

If $t \geq M_0$, and with an initial surplus $u + (c - p)M_0 \geq 0$, we can write :

$$P_{X+Y}(u + (c - p)M_0, t - M_0, p) = u + (c - p)t - \sum_{k=1}^{N(t-M_0)} (X_k + Y_k) .$$

Hence, $P_{X+Y}(u + (c - p)M_0, t - M_0, p) \geq R(u, t)$.

Moreover, we have clearly $P_{X+Y}(u, t, p) \leq R(u, t)$.

Thus, for $T \in]M_0, \infty[$, with understandable notations,

$$\psi_{X+Y}(u + (c - p)M_0, T - M_0, p) \leq \psi(u, p, T) \leq \psi_{X+Y}(u, T, p) .$$

When $T \rightarrow \infty$, it yields

$$\psi_{X+Y}(u + (c - p)M_0, p) \leq \psi(u, p) \leq \psi_{X+Y}(u, p) . \quad (2.5)$$

Thus, by independence of the sequences $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ and $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, to determine $\kappa_1(p)$ we simply have to solve the Lundberg equation (involving the m.g.f. of X_1 and Y_1) :

$$\lambda(p) + (c - p)s = \lambda(p)M_X(s)M_Y(s) . \quad (2.6)$$

Due to the exponential assumptions, $M_X(s) = \frac{\eta}{\eta - s}$, and $M_Y(s) = \frac{\delta}{\delta - s}$.

Hence, $\kappa_1(p)$ is deduced as the smallest positive solution of a second-degree equation, and corresponds to the expression outlined above.

More precisely, this equation is $a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$, where :

$$\begin{cases} a_0 = (c - p)\eta\delta - \lambda(p)(\eta + \delta) , \\ a_1 = \lambda(p) - (c - p)(\eta + \delta) , \\ a_2 = c - p . \end{cases} \quad (2.7)$$

$a_2 > 0$ is obvious, then $a_1 < 0$ and $a_0 > 0$ thanks to the net profit condition.

First, it allows us to deduce $\psi_{X+Y}(u, p)$. Since we are in a framework of i.i.d. variables (for the sequences of losses), $\psi_{X+Y}(u, p) \sim C_1(p) e^{-\kappa_1(p)u}$, and in particular, $C_1(p) \leq 1$. Indeed, the so-called Lundberg inequality may be applied (see for instance Sections 4.4 and 4.5 of [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#)).

Moreover, even in our "non-i.i.d." context, according to the works of [Nyrhinen \(1998\)](#), and [Müller and Pflug \(2001\)](#), inspired from the large deviation theory, we get that $\kappa_1(p)$ is also the adjustment coefficient of the model defined by Equation 2.2, but only through a logarithmic relation : $\psi(u, p) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa_1(p)u}$. More precisely, since $\psi(u, p) \leq \psi_{X+Y}(u, p)$, we deduce the existence of $l : (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $\psi(u, p) = l(u, p) e^{-\kappa_1(p)u}$, and $0 \leq l(u, p) \leq C_1(p) \leq 1$, when $u \rightarrow \infty$. \square

Remark 2.3.1. The asymptotic result would still stand if instead X and Y were only assumed to be light-tailed (but not the expression of $\kappa_1(p)$).

In that case, we would have to be precise and distinguish between the possible types of light-tailed distributions. This previous property is true for distributions such that $M_X(t) < \infty$ for $t \in [0, M[$, where $M \in]0, \infty[$, but it would not be necessary true if we had $M_X(t) < \infty$ for $t \in [0, M]$ with $0 < M < \infty$. However, these cases are rare, so for the rest of the paper and the following other adjustment coefficient analyses, we do not take into account this kind of distribution.

As mentioned, this question was already studied in [Yuen et al. \(2005\)](#), but instead when the delays are exponential. Regarding their proof, the adjustment coefficient established would be the same as the one found here. Besides, using martingale techniques, they manage to prove a more precise result of the form $\psi(u) \sim C e^{-\kappa_1 u}$, when $u \rightarrow \infty$, with $C \leq 1$ thanks to the Lundberg inequality.

2.3.2 Primary prevention

In terms of risks, the greater the adjustment coefficient is, the lower is the risk associated. Thus, we look at the maximum of $\kappa_1(\cdot)$.

Corollary 2.3.1 (Optimal amount p_κ^*). The prevention amount p_κ^* which minimizes the risk related with $\kappa_1(p)$ is positive if and only if $\lambda(0) + c\lambda'(0) < 0$.

Moreover, if it is positive, it satisfies $p_\kappa^* = c + \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda'(p_\kappa^*)}$.

Démonstration. By deriving Equation 2.3,

$$\kappa_1'(p) = - \frac{[\lambda'(p)(c-p) + \lambda(p)] \cdot [\sqrt{\Delta(p)} + \lambda(p) + (c-p)(\eta + \delta)]}{2(c-p)^2 \sqrt{\Delta(p)}}$$

Since $\lambda(p) > 0$, $(c-p) > 0$, $\eta + \delta > 0$, and $\sqrt{\Delta(p)} > 0$, $\kappa_1'(p)$ is null if and only if $h(p) = \lambda'(p)(c-p) + \lambda(p)$ is null, which brings back to the formulation of Proposition 2.2.1. What is more, regarding the expression of $\kappa_1'(p)$ and the sign of h , if $\kappa_1'(p_1) = 0$ for $p_1 \in]0, p_{lim}[$, then $\kappa_1(p_1)$ corresponds indeed to a maximum. And if h has no root, h is positive on $[0, p_{lim}]$, then κ_1 is decreasing on this interval, so $p_\kappa^* = 0$. \square

Then, we find the same result as in [Gauchon et al. \(2020\)](#) towards the optimal prevention amount $p^*(u)$ and its independence according to the initial reserve u , with a similar proof.

Proposition 2.3.2 (Optimal prevention amount and independence from u).

The optimal prevention amount $p^*(u)$ related with the model from Equation 2.2 does not depend on $u \in \mathbb{R}_+$. Therefore, we can note it p_0^* , and it is positive if and only if $\lambda(0) + c\lambda'(0) < 0$. In that case, it satisfies $p_0^* = c + \frac{\lambda(p_0^*)}{\lambda'(p_0^*)}$.

Démonstration. Actually, it is not necessary to assume the delays are bounded for this proof. Indeed, in that case, we cannot establish Proposition 2.3.1 (or at least prove it the same way), but instead it is still possible to define $q_1 \in [0, p_{lim}]$, the prevention amount which minimizes $p \mapsto \frac{\lambda(p)}{c-p}$, and use it instead of p_κ^* .

Let us set $u \geq 0$, and $p \in [0, p_{lim}]$.

We fix $t \geq 0$, and we compare $R(t, p)$ with its dilated version $R_2(t, p)$, using a time dilatation factor $L = \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda(p)} \in \mathbb{R}_+^*$:

$$R_2(t, p) = u + (c-p)Lt - \sum_{k=1}^{N(Lt, p)} (X_k + Y_k \cdot 1_{(L(T_k + d_k) \leq Lt)}) .$$

More precisely, by noticing that $N(Lt, p) \sim \mathcal{P}(\lambda(p_\kappa^*)t) \sim N(t, p_\kappa^*)$,

$$R_2(t, p) = u + (c-p) \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda(p)} t - \sum_{k=1}^{N(t, p_\kappa^*)} (X_k + Y_k \cdot 1_{(T_k + d_k \leq t)}) .$$

It yields $R(t, p_\kappa^*) - R_2(t, p) = \lambda(p_\kappa^*)t \left(\frac{c - p_\kappa^*}{\lambda(p_\kappa^*)} - \frac{c - p}{\lambda(p)} \right)$.

So, regarding the definition of p_κ^* , $R(t, p_\kappa^*) \geq R_2(t, p)$.

Eventually, $\psi(u, p_\kappa^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, p_\kappa^*, t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_2(u, p, t) = \psi_2(u, p) = \psi(u, p)$.

Therefore, $p^*(u) = p_\kappa^*$, and $p^*(u)$ has the same properties as p_κ^* , in particular it does not depend from u . \square

Remark 2.3.2. We could even soften the assumptions and assume instead that the amounts X_i and Y_i are dependent when i is fixed.

2.3.3 Reducing the frequency of the by-claims or the relapses

Another way to apply prevention for such a model is by trying to reduce the frequency of the by-claims. According to Section 2.2.2, it corresponds to secondary and tertiary prevention, but rather tertiary.

Thus, we modify the original model from Equation 2.2 :

$$R(t, p) = u + (c - p)t - \sum_{k=1}^{N(t)} (X_k + \zeta_k Y_k \cdot 1_{(T_k + d_k \leq t)}) . \quad (2.8)$$

$(\zeta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is an i.i.d. sequence of Bernoulli variables. More precisely, $\zeta_1 \sim \mathcal{B}(\pi(p))$, where $\pi(\cdot)$ satisfies the same assumptions as for $\lambda(\cdot)$ in terms of reducing the risk, i.e. it is a \mathcal{C}^2 decreasing and convex function. However, we have obviously the constraint that $0 \leq \pi(p) \leq 1$. We also assume that ζ is independent of N , and from the sequences X and Y .

Otherwise, the assumptions on the model are the same as before.

We provide results for the general case where $\lambda(\cdot)$ is still affected by prevention, but also when λ is constant, and $\pi(\cdot)$ is the only parameter depending on p .

The key previous result, Proposition 2.3.2, cannot be generalized, because now the total loss amount coming from the k^{th} claim depends on p .

With the assumptions of Proposition 2.3.1, and with a similar reasoning, we find a new expression of the adjustment coefficient :

Proposition 2.3.3. Let us assume $X \sim \text{Exp}(\eta)$, and $Y \sim \text{Exp}(\delta)$, with $\eta, \delta > 0$. Then, the adjustment coefficient related with the model from Equation 2.8 :

$$\kappa_2(p) = \frac{\eta + \delta}{2} - \frac{\lambda(p) + \sqrt{[\lambda(p) + (c - p)(\delta - \eta)]^2 + 4(c - p)\lambda(p)\eta\pi(p)}}{2(c - p)} . \quad (2.9)$$

Notably, the expressions of κ_2 , and its derivative (see below), are consistent with Proposition 2.3.1 by fixing $\pi(p) = 1$.

We first focus on the general case where both $\lambda(\cdot)$ and $\pi(\cdot)$ are affected by p , which correspond on a concrete point of view to a global prevention, in the sense that primary, secondary and tertiary prevention are all targeted by such investments.

Searching the optimal prevention amount p_κ^* is equivalent to finding the roots of

$$G(p) = -2(c - p)^2 \sqrt{\Delta_2(p)} \kappa_2'(p) = h(p) F_1(p) + F_2(p), \text{ where :}$$

$$h(p) = \lambda'(p) (c - p) + \lambda(p), \text{ and}$$

$$F_1(p) = \sqrt{\Delta_2(p)} + \lambda(p) + (c - p)(\delta - \eta(1 - 2\pi(p))), \text{ and}$$

$$F_2(p) = 2(c - p)^2 \eta \lambda(p) \pi'(p) .$$

For $p \in [0, p_{lim}]$, we have clearly $F_1(p) > 0$, and $F_2(p) < 0$.

So, if $h(0) \leq 0$, then $G(0) < 0$. Regarding the expressions, it induces that κ_2 is increasing in a neighborhood of 0, therefore, the prevention have positive effects, and necessarily, $p_\kappa^* > 0$.

Otherwise, the study is difficult, because even if we know that h and F_2 are increasing, the variations of F_1 are uncertain. Indeed, we could imagine $G(0) \geq 0$ but $G'(0) < 0$, and possibly it would induce that there exists $p_2 \in]0, p_{lim}[$ such that $\kappa_2(p_2) > \kappa_2(0)$. Searching for the second or third derivative of G could maybe provide more precise results, but the computations would be complicated, so we prefer not to go further. Nonetheless, the study would be simplified by assigning precise expressions to the functions $\lambda(\cdot)$ and $\pi(\cdot)$.

To summarize :

Proposition 2.3.4. Let us consider the model defined by Equation 2.8, with $\lambda(\cdot)$ and $\pi(\cdot)$ depending on p , and $h(p) = \lambda'(p)(c - p) + \lambda(p)$.

- i) Then, $h(0) \leq 0$ is a sufficient condition for having $p_\kappa^* > 0$.
- ii) Conversely, a necessary condition for having $p_\kappa^* = 0$ is $h(0) > 0$.

Now, if only $\pi(\cdot)$ depends on p , the problem is the same, but the expressions of the functions are changed : $h(p) = \pi'(p)(c - p) + \pi(p)$, and $F_1(p) = 2\lambda(c - p)\eta$, and

$$F_2(p) = \lambda \left[\sqrt{\Delta_2(p)} + \lambda + (c - p)(\delta - \eta) \right] .$$

h is still an increasing function, and $F_1(p) > 0$ for $p \in [0, p_{lim}]$. However, this time, $F_2(p) > 0$ on $[0, p_{lim}]$. So, if $h(0) \geq 0$, then $G(p) > 0$ for all $p \in [0, p_{lim}]$. Therefore, κ_2 is decreasing on $[0, p_{lim}]$.

Otherwise, the study is difficult, because h is increasing, F_1 is decreasing, and the variations of F_2 are uncertain. Once again, we could maybe look at the second or third derivative of G (but it would be laborious), or instead, we may assign an explicit expression to $\pi(\cdot)$.

It yields the conclusion :

Proposition 2.3.5. Let us consider Equation 2.8, with only $\pi(\cdot)$ depending on p , and $h(p) = \pi'(p)(c - p) + \pi(p)$.

- i) Then, $h(0) \geq 0$ is a sufficient condition for having $p_\kappa^* = 0$.
- ii) Conversely, a necessary condition for having $p_\kappa^* > 0$ is $h(0) < 0$.

Remark 2.3.3 (General remark on the secondary and tertiary prevention studies). We could also imagine that investing in secondary and tertiary prevention would instead, or in addition to the assumption of this section, reduce the means of the losses, implying that $p \rightarrow \mathbb{E}(X(p))$ or $p \rightarrow \mathbb{E}(Y(p))$ is decreasing. Such a study could also be made for the other models studied in this paper, but in general, it is laborious and heavy to write, and it is difficult to derive quite light conditions to characterize the optimal prevention amount.

Nevertheless, we present such studies in Sections 2.4 and 2.5 to provide an idea of the framework it implies.

In all cases, the key idea of such a result is that if prevention does not produce enough effects in $p = 0^+$ on a theoretical point of view, then the optimal prevention amount is $p^* = 0$, and the insurance company should not invest in a corresponding prevention plan.

2.4 In discrete time, without by-claims

We translate the model 2.1 into a discrete-time framework, that is to say :

$$R_n(p) = u + (c - p)n - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k(p)} X_{k,i} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Here again, $u \geq 0$ and $c > 0$ are both real numbers, representing respectively the initial surplus and the premium amount. The prevention amount is $p \in [0, p_{min}]$. The losses are expressed thanks to two i.i.d. sequences : $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ which counts the number of claims per period, and $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ which represents the amount of the claims. More precisely, $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda(p))$, and $X_{1,1}$ is a positive variable with finite mean $\mu_X > 0$. As in Section 2.2.3.2, $\lambda(\cdot)$ is a decreasing \mathcal{C}^2 convex function on \mathbb{R}_+ .

We notice that, at time $n \geq 1$, the average total number of claims occurred is $\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n N_k(p) \right) = \lambda(p)n$ for this model, which is the same as for the continuous-time model from [Gauchon et al. \(2020\)](#) written in Equation 2.1, thus the transcription seems relevant. The results from the mentioned paper generalize well in discrete-time, even though the approaches sometimes differ.

Regarding the PFAS issue, this model is less complex and thus less precise than the others in this article ; therefore, it is not the best representation of the problem. The aim of this model is rather to draw links with the prevention literature, but also to propose a precise secondary and tertiary prevention study. As we will see further, the results displayed reveal how difficult it can be to derive quite light or understandable conditions for such a case.

2.4.1 Primary prevention

We focus here on primary prevention, that is to say, for the moment, $\lambda(\cdot)$ is the only parameter affected by the prevention.

We are first interested in determining p_κ^* when the claims are exponentially distributed. The Lundberg equation associated with the model from Equation 2.10 is

$$\lambda(p)(M_X(s) - 1) = (c - p)s, \quad (2.11)$$

where $M_X(s)$ is the moment generating function of $X_{1,1}$. From this equation, we deduce the corollary :

Corollary 2.4.1 (Optimal prevention for the exponential case).

If $X \sim \text{Exp}(\eta)$, with $\eta > 0$, the adjustment coefficient is $\kappa(p) = \eta - \frac{\lambda(p)}{c - p}$.

In particular, if $c\lambda'(0) + \lambda(0) < 0$, then $p_\kappa^* > 0$, and it satisfies $p_\kappa^* = c + \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda'(p_\kappa^*)}$. Otherwise, $p_\kappa^* = 0$.

Démonstration. The expression of $\kappa(p)$ is easily deduced from Equation 2.11.

Then, κ , seen as a function of p , is \mathcal{C}^2 on $]0, p_{lim}[$. We get $\kappa'(p) = -\frac{h(p)}{(c - p)^2}$, where h is the same as in Proposition 2.2.1. We infer consequently the result. \square

Then, in terms of independence towards u , we find the same result as in [Gauchon et al. \(2020\)](#) regarding the optimal prevention amount.

Proposition 2.4.1 ($p^*(u)$ is independent of u).

Let $u \geq 0$ be a real number. Then, the optimal prevention amount related with the model from Equation 2.10 does not depend on u . Thus, we can write it more simply p_0^* . Moreover, $p_0^* = p_\kappa^*$ (as defined in Corollary 2.4.1).

Démonstration. We fix $u \geq 0$ and $p \in [0, p_{lim}]$ for the rest of the proof.

For a classical continuous-time risk process $(R(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, it is possible to use a property of invariance of the ruin probability by time dilatation, in this sense : for each positive number $L > 0$, and each $u \geq 0$, $\psi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, Lt)$.

We would like to use this kind of property in discrete time, with the dilatation factor $L = \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda(p)}$ (by analogy with Proposition 2.3.2).

It generalizes easily when $L \in \mathbb{N}^*$: $\psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u, Ln)$.

Otherwise, if $L \notin \mathbb{N}$, but $L \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*$, it remains true. Let us write $L = \frac{r}{q}$, where $(r, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $r \wedge q = 1$. We are only looking at terms of ranges $n = mq$, $m \in \mathbb{N}^*$ from the process $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

It yields $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi(u, L(mq)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi(u, rm) = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi(u, m) = \psi(u)$.

We study more precisely the case $L = \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda(p)} \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*$, still by writing $L = \frac{r}{q}$. We define a new process $(R_n^*(p))_{n \in \mathbb{N}}$ which is the dilated version of $R_n(p)$ by L :

$$R_n^*(p) = u + (c - p)(L.n) - \sum_{k=1}^{L.n} \sum_{i=1}^{N_k(p)} W_{k,i} = u + (c - p) \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda(p)} n - \sum_{k=1}^{L.n} \sum_{i=1}^{N_k(p)} X_{k,i}. \quad (2.12)$$

Trough this dilatation, the premium amount $c - p$ is transformed, as well as the mean of the total number of claims happened at time $n \in \mathbb{N}^*$.

thanks to the mentioned invariance by dilatation, $\psi^*(u, p) = \psi(u, p)$.

Now, by computing the difference $R_n^*(p) - R_n(p_\kappa^*)$, we get :

$$R_n^*(p) - R_n(p_\kappa^*) = n\lambda(p_\kappa^*) \left[\frac{c - p}{\lambda(p)} - \frac{c - p_\kappa^*}{\lambda(p_\kappa^*)} \right] + \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k(p_\kappa^*)} X_{k,i} - \sum_{k=1}^{L.n} \sum_{i=1}^{N_k(p)} X_{k,i} \right).$$

Since $p \mapsto \frac{c - p}{\lambda(p)}$ is maximum for p_κ^* , $n\lambda(p_\kappa^*) \left[\frac{c - p}{\lambda(p)} - \frac{c - p_\kappa^*}{\lambda(p_\kappa^*)} \right] \leq 0$. Moreover,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k(p_\kappa^*)} X_{k,i} \sim \sum_{k=1}^{L.n} \sum_{i=1}^{N_k(p)} X_{k,i}, \text{ due to } \sum_{k=1}^n N_k(p_\kappa^*) \sim \mathcal{P}(n\lambda(p_\kappa^*)) \sim \sum_{k=1}^{L.n} N_k(p).$$

Therefore, $R_n^*(p) \leq_{st} R_n(p_\kappa^*)$, and regarding the ruin probabilities, $\psi(u, p_\kappa^*) \leq \psi^*(u, p) = \psi(u, p)$.

Let us now focus on the case where $L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. We extend the previous result by density of \mathbb{Q} in \mathbb{R} .

$\lambda(\cdot)$ is continuous and decreasing on $[0, p_{lim}]$, and its image is $[\lambda(p_{lim}), \lambda(0)]$.

Moreover, we can write $\lambda(p) = \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{L}$. Hence, by continuity and density, there exists a sequence $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ such that for $j \in \mathbb{N}$, $p_j \in [0, p_{lim}]$, $\lambda(p_j) = \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\xi_j}$, where $\xi_j \in \mathbb{Q}$, and $\lim_{j \rightarrow \infty} p_j = p$.

In particular, $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_j = L$.

What is more, we proved that for each $j \in \mathbb{N}$, $\psi(u, p_\kappa^*) \leq \psi(u, p_j)$, and $p \mapsto \psi(u, p)$ is clearly continuous. Finally, when $p_j \rightarrow p$, we get $\psi(u, p_\kappa^*) \leq \psi(u, p)$.

Thus, $\psi(u, p_\kappa^*) \leq \psi(u, p)$ for every $p \in [0, p_{lim}]$.

Therefore $p^*(u) = p_\kappa^*$. Since p_κ^* is unique and does not depend on u , we deduce that p^* is also independent of u (and we may rewrite $p^*(u) = p_0^*$). \square

2.4.2 Secondary and tertiary prevention

We are now interested in reducing the risk related with the amount of the claims, so from now on, prevention affects the mean of X , which is consequently decreasing.

It corresponds to secondary and tertiary prevention as defined and explained in Section 2.2.2. As a comparison, in [Gauchon et al. \(2020\)](#), the authors focus only on reducing the risks related with $\lambda(\cdot)$, which corresponds to primary prevention. However, the following results would be the same for their continuous time model, because the corresponding asymptotic ruin probabilities are the same for theirs.

What is more, as for Section 2.3, in this context of secondary and tertiary prevention, it is not possible to generalize the property of independence of p^* according to u , since now the mean of the losses depends on p : it is true when only primary prevention is applied.

2.4.2.1 The exponential case

We first look at the case where $X \sim \text{Exp}(\eta)$, with $\eta > 0$.

We assume here that $\eta(\cdot)$ is an increasing positive function which is \mathcal{C}^2 and concave. We can check that, this way, $p \mapsto \mathbb{E}(X(p)) = \frac{1}{\eta(p)}$ is decreasing, \mathcal{C}^2 and convex, which corresponds to the common assumptions for $\lambda(\cdot)$.

We look at the general case where both $\lambda(\cdot)$ and $\eta(\cdot)$ depends on p , which is a combination between the primary prevention on the one hand, and the secondary or tertiary prevention on the other hand.

Proposition 2.4.2.

If $\lambda(\cdot)$ and $\eta(\cdot)$ depends on p , then $p_\kappa^* > 0$ if and only if

$$0 > -\eta'(0)c^2 + \lambda'(0)c + \lambda(0). \quad (2.13)$$

If λ does not depend on p , the condition may simply be rewritten $\eta'(0)c^2 > \lambda$.

Démonstration. We derive κ , and we search if the following function have a root :

$$F(p) = (c - p)^2 \kappa'(p) = \eta'(p)(c - p)^2 - \lambda'(p)(c - p) - \lambda(p). \quad (2.14)$$

F is clearly \mathcal{C}^1 , and we get $F'(p) < 0$ when we derive. Thus, F is decreasing.

If $F(0) \leq 0$, then it means κ is nonincreasing, so the risk is minimal when $p = 0$, and $p_\kappa^* = 0$. Otherwise, $F(0) > 0$, then κ is increasing in a neighborhood of 0, which means prevention have benefit effects, so $p_\kappa^* > 0$.

Eventually, $F(0) > 0$ corresponds to the condition outlined above. \square

2.4.2.2 The Pareto case

The reasoning is similar with a Pareto distribution. According to Definition 2.2.4, if $X \sim \text{Par}(\delta, \theta)$, then $\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{\delta - 1}$ (for $\theta > 0$, and $\delta > 1$).

We choose to make only $\delta(\cdot)$ depend on p , and not θ . As for the exponential case, we assume $\delta(\cdot)$ is increasing, concave, and \mathcal{C}^2 , which makes $p \mapsto \mathbb{E}(X(p))$ decreasing and convex.

We focus on the general case where both $\lambda(\cdot)$ and $\delta(\cdot)$ depends on p .

Proposition 2.4.3.

- i) A sufficient condition for having $p_{Par}^* > 0$ is $G(0) < 0$, where
 $G(p) = h(p)(\delta(p) - 1) + F_1(p)$, and $h(p) = \lambda'(p)(c - p) + \lambda(p)$, and
 $F_1(p) = \delta'(p)\lambda(p) \cdot [(c - p) \cdot (\ln \theta(\delta(p) - 1) - 1) - \lambda(p)\theta \ln \theta]$.
- ii) If $\theta = 1$, then this condition is also necessary, and $G(0) < 0$ may be rewritten
 $(\delta(0) - 1)(c\lambda'(0) + \lambda(0)) < c\delta'(0)\lambda(0)$.
- iii) If $\theta < 1$, then there exists several sufficient conditions for having $G(0) < 0$:
- a) $h(0) < 0$, i.e. $c\lambda'(0) + \lambda(0) < 0$.
- b) $\delta(0) < 1 + \delta'(0)c - \lambda'(0)\theta$.
- iv) All these conditions may be turned into necessary conditions for having $p_{Par}^* = 0$ by reversing them.

Démonstration. The asymptotic ruin probability is in that case $\psi(u) \sim D_1(p)u^{-\delta(p)+1}$, where

$$D_1(p) = \frac{\lambda(p)\theta^{\delta(p)}}{(c - p)(\delta(p) - 1) - \lambda(p)\theta}.$$

We derive D_1 , and we are searching for the optimal prevention amount, which corresponds to a minimum of D_1 . The problem is equivalent to study the roots of

$$G(p) = \theta^{\delta(p)} E(p) D_1'(p) = h(p)(\delta(p) - 1) + F_1(p).$$

where $E(p) = [(c - p)(\delta(p) - 1) - \lambda(p)\theta]^2$ is a positive function,

$h(p) = \lambda'(p)(c - p) + \lambda(p)$, and

$F_1(p) = \delta'(p)\lambda(p) [(c - p)(\ln \theta(\delta(p) - 1) - 1) - \lambda(p)\theta \ln \theta]$.

i) If $G(0) < 0$, then D_1 is decreasing in a neighborhood of 0, so $D_1(0)$ is not the minimum of $p \mapsto D_1(p)$ on $[0, p_{lim}]$, and $p_{Par}^* > 0$.

ii) When $\theta = 1$, F_1 becomes simply $F_1(p) = -\delta'(p)\lambda(p)(c - p) < 0$. By computing $G'(p)$, we find G is increasing in that case, so $p_{Par}^* > 0$ if and only if $G(0) < 0$. Indeed, if instead $G(0) \geq 0$, it would be nondecreasing on $[0, p_{lim}]$.

iii) a) If $\theta < 1$, then $\ln \theta < 0$, and $F_1(p) < 0$ (using in particular the net profit condition). So $h(0) < 0$ becomes a sufficient condition for having $G(0) < 0$.

iii) b) Another way to compute $G(p)$ is :

$$G(p) = [\lambda'(p) + \lambda(p)\delta'(p) \ln \theta] \cdot E(p) + \lambda(p) \cdot [\lambda'(p)\theta - (1 - \delta(p) + \delta'(p)(c - p))].$$

Therefore, if $\ln \theta < 0$, the first term is always negative, and a sufficient condition for $G(0) < 0$ is having the second term negative for $p = 0$, which yields what is outlined. \square

Remark 2.4.1. Regarding the optimal prevention strategy for this Pareto case, it would be awkward to consider instead the minimum of $\psi_1(u, p) = D_1(p)u^{-\delta(p)+1}$, such that $\psi(u, p) \sim \psi_1(u, p)$.

Indeed, by deriving, $\psi_1'(u, p) = [(-\ln u)\delta'(p) D_1(p) + D_1'(p)] u^{-\delta(p)+1}$. Hence, we would search the zeros of $(-\ln u)\delta'(p) D_1(p) + D_1'(p)$. However, since this equivalent takes place when $u \rightarrow \infty$, it implies no solution for this equation when u is too high. However, when the initial surplus u is that high, we may invest in prevention without fearing a quick ruin.

To summarize this subsection, we have managed to express some theoretical conditions regarding the idea of secondary and tertiary prevention, and we state that even for a quite simple model, some formulations are already heavy.

2.5 In discrete time, with by-claims counted by an INAR(1) process

2.5.1 Context and model

Now, we study the following model, which is, as outlined before, simply the transcription of the main model from Chapter 1 with a prevention structure :

$$R_n(p) = u + (c - p)n - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{M_k} Y_{k,i} . \quad (2.15)$$

$(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is an i.i.d. sequence such that $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda(p))$.

M_k is expressed in function of M_{k-1} , N_k , and a parameter $\alpha(p) \in [0, 1[$, through an INAR(1) process :

$$M_k = \alpha(p) \circ M_{k-1} + N_k , \quad \text{for } k \geq 1 \quad (2.16)$$

As an initial condition, we settle $M_0 \sim \mathcal{P}(\gamma_0)$. We note $\gamma_k = \mathbb{E}(M_k)$ for $k \in \mathbb{N}$. Moreover, we assume for $k \in \mathbb{N}^*$ that N_k is independent of M_1, \dots, M_{k-1} .

The sequences representing the amount of the losses X and Y are positive and i.i.d., and the sequences X , Y , and N are mutually independent, and also independent of the variable M_0 .

The functions $\lambda(\cdot)$ and $\alpha(\cdot)$ are both assumed to be convex, decreasing, and \mathcal{C}^2 on $[0, p_{lim}]$.

In accordance with Section 2.2.2, primary prevention corresponds here to decrease $\lambda(\cdot)$, and secondary or tertiary prevention would correspond to lower any other parameter, i.e. $\alpha(\cdot)$ or the means of the claims.

Moreover, as detailed in Sections 2.2.1.2 and 2.2.2, this model can be seen as the representation of the PFAS issue. Diminishing the weight of the compound sums involving the $X_{k,i}$ is linked with protecting the environment from the emissions, and possibly helping an industrial to change his business model or his manufacturing methods, whereas reducing the cost related with the $Y_{k,i}$ would correspond to cure people touched by a related disease, cleaning the environment, and preventing these things from getting worse.

We first outline some basic results when $p \in [0, p_{lim}]$ is fixed, already established in Chapter 1 (but without prevention).

Lemma 2.5.1. For $k \geq 1$, $M_k \sim \mathcal{P}(\gamma_k)$, where

$$\gamma_k = \alpha(p)^k \left(\gamma_0 - \frac{\lambda(p)}{1 - \alpha(p)} \right) + \frac{\lambda(p)}{1 - \alpha(p)} . \quad \text{In particular, } \sup_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k = \max \left(\gamma_0, \frac{\lambda(p)}{1 - \alpha(p)} \right) .$$

Lemma 2.5.2. The net profit condition may be expressed here :

$$c > p + \lambda(p)\mu_X + \mu_Y \cdot \max \left(\gamma_0, \frac{\lambda(p)}{1 - \alpha(p)} \right) .$$

The study of the optimal prevention amount $p^*(u)$ as it was done for the previous sections looks difficult. Instead, in accordance with Section 2.2.4, we aim at minimizing the risks related with coefficients coming from asymptotic ruin probabilities : p_κ^* when the two losses are exponentially distributed, or p_{Par}^* when the two distributions are Pareto.

In each of these cases, we would like to derive a result similar to Proposition 5.1 or Proposition 6.1 of [Gauchon et al. \(2021\)](#). As a recall, the model from this paper distinguishes between the lower or heavier claims, and focuses only on reducing the frequency of the heavier claims. Instead, even if the authors did not find the independence of $p^*(u)$ according to u , they managed to establish results of the form $\lim_{u \rightarrow \infty} p^*(u) = p_\infty$ (namely, $p_\infty = p_\kappa^*$ when the adjustment

coefficient exists). Here, we would like to infer the same type of conclusion depending on the case considered, but it is difficult because of the assumptions on the aggregate losses which are neither independent nor identically distributed.

2.5.2 Prevention with exponential distributions

We assume here that $X \sim \text{Exp}(\eta)$ and $Y \sim \text{Exp}(\delta)$, with $\eta, \delta > 0$.

Then, the related adjustment coefficient is given by :

Proposition 2.5.1 (Adjustment coefficient). When $u \rightarrow \infty$, the ultimate ruin probability satisfies $\psi(u, p) \stackrel{\text{log}}{\sim} e^{-\kappa_D(p)u}$, with

$$\kappa_D(p) = \frac{\eta + \delta(1 - \alpha(p))}{2} - \frac{\lambda(p) + \sqrt{\Delta_D(p)}}{2(c - p)}, \quad (2.17)$$

where

$$\Delta_D(p) = (c - p)^2[\eta - \delta(1 - \alpha(p))]^2 + \lambda(p)^2 + 2\lambda(p)(c - p)[\eta + \delta(1 - \alpha(p))].$$

2.5.2.1 When only $\lambda(\cdot)$ depends on p

To begin with, we look at the case where α is actually constant, and only $\lambda(\cdot)$ may be affected by the effects of the prevention. So here, we are targeting primary prevention only.

Proposition 2.5.2 (Optimal prevention amount when only $\lambda(\cdot)$ varies).

In this case, we are brought back to a condition already encountered : $p_\kappa^* > 0$ if and only if $c\lambda'(0) + \lambda(0) < 0$. Moreover, in that case, $p_\kappa^* = c + \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda'(p_\kappa^*)}$.

Démonstration. By deriving $\kappa'_D(p)$, we get

$$\kappa'_D(p) = - \frac{[\lambda'(p)(c - p) + \lambda(p)] \cdot (\sqrt{\Delta_D(p)} + \lambda(p) + (c - p)(\eta + \delta(1 - \alpha)))}{2(c - p)^2 \sqrt{\Delta_D(p)}}. \quad (2.18)$$

It is clear that $2(c - p)^2 \sqrt{\Delta_D(p)} > 0$ and $\sqrt{\Delta_D(p)} + \lambda(p) + (c - p)(\eta + \delta(1 - \alpha)) > 0$ on $[0, p_{lim}]$. So $\kappa'_D(p) = 0 \iff h(p) = 0$, where h is the same as defined in Proposition 2.2.1. It yields the result. \square

With such a result, we would like to adapt the proof of Proposition 2.4.1 in order to infer the potential independence of $p^*(u)$ from u . As mentioned above, it is actually difficult, even for the stationary case where $\gamma_0 = \frac{\lambda}{1 - \rho}$. The problem concerns the aggregate amounts of the by-claims, which are difficult to handle.

2.5.2.2 When $\alpha(\cdot)$ depends on p

Now, we assume the parameter $\alpha(\cdot)$ is affected by p . Thus, we try here to stem the propagation of relapses through reducing the average number of by-claims. It embodies naturally secondary and tertiary prevention.

Contrary to the previous case, here the derivative of κ_D cannot be factored entirely thanks to a function involving $\lambda'(p)$ and $\alpha'(p)$.

Thus, as for almost each study of secondary and tertiary prevention, the problem is not linear anymore, and disjunctions have to be made, therefore things are heavier than for primary prevention only (see also Remark 2.3.3).

Proposition 2.5.3 (Optimal prevention amount when $\alpha(\cdot)$ varies).

- i) a) A sufficient condition for having $p_\kappa^* = 0$ is $f_1(0) \geq 0$, with
 $f_1(p) = \delta\alpha'(p)(c-p)^2 + \lambda'(p)(c-p) + \lambda(p)$.
 b) If only $\alpha(\cdot)$ depends on p , it is written simply : $f_1(0) \geq 0 \iff c^2\delta\alpha'(0) \geq -\lambda$.
 ii) Conversely, a necessary condition for having $p_\kappa^* > 0$ is $f_1(0) < 0$.

Démonstration. We are searching for the roots of

$$H(p) = \left(-2(c-p)^2\sqrt{\Delta_D(p)}\right)\kappa'_D(p) = f_1(p)G_1(p) + G_2(p),$$

With $f_1(p) = \delta\alpha'(p)(c-p)^2 + (c-p)\lambda'(p) + \lambda(p)$,

$G_1(p) = \sqrt{\Delta_D(p)} + (c-p)(\eta + \delta(1 - \alpha(p))) + \lambda(p)$,

and $G_2(p) = -2\delta(c-p)^2\alpha'(p)[\lambda(p) + \delta(c-p)(1 - \alpha(p))]$.

Actually, if H is positive on $[0, p_{lim}]$, then κ_D is decreasing, and $p_\kappa^* = 0$. Otherwise, if $H(0) < 0$, it means κ_D is increasing in a neighborhood of 0, and by continuity, κ_D presents a maximum on this interval reached in $p_\kappa^* \neq 0$.

Clearly, $G_1(p) > 0$ and $G_2(p) > 0$ on $[0, p_{lim}]$.

Then, f_1 is increasing. Indeed, $f'_1(p) = (c-p)[\delta\alpha''(p)(c-p) - 2\delta\alpha'(p) + \lambda''(p)]$, and $\lambda''(p) > 0$, $\alpha''(p) > 0$, $\alpha'(p) < 0$ due to the assumptions, so $f'_1(p) > 0$ for $p \in [0, p_{lim}]$.

If $f_1(0) \geq 0$, then $H(p) > 0$ for $p \in [0, p_{lim}]$, and $p_\kappa^* = 0$.

Otherwise, $f_1(0) < 0$, but it does not ensure $H(0) < 0$. Moreover, it is difficult to study the variations of H because of the term $\sqrt{\Delta(p)}$, so no simple conclusion can be drawn for that case.

Nothing really changes when λ does not depend on p anymore, we just get a more simple expression for f_1 : $f_1(p) = \delta\alpha'(p)(c-p)^2 + \lambda$. \square

2.5.3 Finite time prevention with Pareto distributions

We regard here the effects of prevention when the two distributions of the losses are heavy-tailed. Specifically, we try to characterize the optimal prevention amount regarding a finite horizon of time.

To this end, we focus on finite-time ruin probabilities. The results found below refer to the all-or-none principle. We assume $X \sim \text{Par}(\delta, \theta)$, and $Y \sim \text{Par}(\beta, \eta)$, with fixed parameters $\theta, \eta > 0$, and $\delta, \beta > 1$. Then, according to Chapter 1, the related asymptotic ruin probabilities are :

Proposition 2.5.4 (Finite-time ruin probabilities with Pareto distributions).

We express the asymptotic ruin probability related with the model from Equation 2.15 at time $T \in \mathbb{N}^*$.

i) If $\delta < \beta$, then $\psi_T(u) \sim C_{1,T}(p)u^{-\delta}$ when $u \rightarrow \infty$, with $C_{1,T}(p) = \theta^\delta T \lambda(p)$.

ii) If $\delta > \beta$, then $\psi_T(u) \sim C_{2,T}(p)u^{-\beta}$, where

$$C_{2,T}(p) = \eta^\beta \left[\lambda(p) \left(\frac{T}{1-\alpha(p)} - \frac{\alpha(p)(1-\alpha(p)^T)}{(1-\alpha(p))^2} \right) + \frac{\gamma_0\alpha(p)(1-\alpha(p)^T)}{1-\alpha(p)} \right].$$

iii) If $\delta = \beta$, then $\psi_T(u) \sim C_{3,T}(p)u^{-\delta}$, where $C_{3,T}(p) = C_{1,T}(p) + C_{2,T}(p)$.

According to this asymptotic results, we are searching the optimal prevention amount p_{Par}^* by looking at the minimums of $C_{1,T}$, $C_{2,T}$ et $C_{3,T}$.

Proposition 2.5.5 (Prevention in finite-time with Pareto distributions).

In almost all cases, the optimal prevention amount is $p_{Par}^* = p_{lim}$. The only exception is when $\delta < \beta$, and only $\alpha(\cdot)$ depends on p : in that case, $p_{Par}^* = 0$.

Preuve. We take again the disjunctions made for Proposition 2.5.4.

i) If $\delta < \beta$, and $\lambda(\cdot)$ depends on p , then $C'_{1,T}(p) = \theta^\delta T \lambda'(p)$. Thus, $C_{1,T}(p)$ is decreasing, therefore $C_{1,T}(p)$ is minimal for $p_{Par}^* = p_{lim}$. Otherwise, if λ is constant, and only $\alpha(\cdot)$ depends on p , then $C_{1,T}(p)$ is constant. So, according to Definition 2.2.3, $p_{Par}^* = 0$.

ii) If $\delta > \beta$, then we derive $C_{2,T}(p)$:

$$\left[(1 - \alpha(p))^3 \eta^{-\beta} \right] C'_{2,T}(p) = \lambda'(p) (1 - \alpha(p)) w_T(\alpha(p)) + \alpha'(p) \cdot [\lambda(p) y_T(\alpha(p)) + \gamma_0 (1 - \alpha(p)) z_T(\alpha(p))] ,$$

where we define, for $x \in [0, 1[$, and $q \geq 2$,

$$\begin{cases} w_q(x) = q - (q + 1)x + x^{q+1} , \\ y_q(x) = (q - 1) - qx + (q + 1)x^q - qx^{q+1} , \\ z_q(x) = 1 + qx^{q+1} - (q + 1)x^q . \end{cases}$$

thanks to some short studies, we deduce w_q , y_q and z_q are positive on $[0, 1[$. Besides, the case $T = 1$ was immediate.

Since $0 \leq \alpha(p) < 1$, we conclude that $C_{2,T}(p)$ is decreasing in all cases. Therefore, it reaches its minimum for $p_{Par}^* = p_{lim}$.

iii) If $\delta = \beta$, for the case where only $\alpha(\cdot)$ depends on p , $C_{1,T}(p)$ is constant, but $C_{2,T}(p)$ is decreasing on $[0, p_{lim}]$, so $C_{1,T}(p)$ is also decreasing, so the minimum is reached for $p = p_{lim}$, thus $p_{Par}^* = p_{lim}$. Otherwise, both coefficients $C_{1,T}$ and $C_{2,T}$ are decreasing, and once again $p_{Par}^* = p_{lim}$. \square

It seems quite natural to get such results, because since u is considered to be high, and we are looking at a finite-time horizon, the total amount spent in prevention would be finite, i.e. at most $p_{lim} \cdot T$. Hence, if a company has a sufficient initial surplus, it seems credible to invest as much as possible in prevention in order to reduce the corresponding risks.

Besides, it could also be possible to look at prevention for this model in infinite time with such Pareto distributions, but we prefer not to present it, because there would be heavy expressions. Instead, we refer to the points raised in Remark 2.3.3.

2.5.4 Prevention with partial insurance cover

As mentioned before, as the PFAS issue is for the moment something uncertain, with a lack of reliable or sufficient data, there are many exclusions in terms of insurance coverage, which are sometimes almost total, even if it depends on the companies (Vanbeneden (2024)).

Therefore, it is possible to assume a given insurance company could help the industrials to reduce their emissions or the spreading of their harmful consequences, but would not accept to cover the compensations in terms of civil responsibility. Thus, it seems meaningful to briefly look at the case where $X = 0$ a.s.

The adjustment coefficient simply becomes

$$\kappa_D(p) = \delta(1 - \alpha(p)) - \frac{\lambda(p)}{c - p} . \quad (2.19)$$

It corresponds to a version with prevention of the coefficient found in Cossette et al. (2010) or Shi and Wang (2014). It is consistent, because both these papers describe a model similar to ours, but with one type of loss and no by-claim, and where the losses are counted at each period by a stationary INAR(1) process.

Computing $\kappa'_D(p)$ leads to $\kappa'_D(p) = -\frac{f_1(p)}{(c-p)^2}$, where $f_1(\cdot)$ have the same expression as before in Section 2.5.2, namely $f_1(p) = \delta\alpha'(p)(c-p)^2 + \lambda'(p)(c-p) + \lambda(p)$.

As a recall, the risk decreases when the coefficient κ_D increases.

Since $f'_1(p) > 0$ for $[0, p_{lim}]$, we infer the following result :

Proposition 2.5.6. i) A necessary and sufficient condition for having $p_\kappa^* > 0$ is $f_1(0) < 0$, i.e. $c^2\delta\alpha'(0) + c\lambda'(0) + \lambda(0) < 0$.

ii) And if only $\alpha(\cdot)$ depends on p , the condition is written simply : $c^2\delta\alpha'(0) + \lambda < 0$.

2.6 Comparison of the models

2.6.1 Common properties with the literature

In this paragraph, we enumerate or outline some properties found for our prevention models which may be compared to some others established in the scientific literature. Actually, in this subsection, it concerns properties that are always written the same way.

The main common property has already been mentioned in the previous sections, that is to say the independence of the optimal prevention amount $p^*(u)$ according to u in the case of primary prevention only, i.e. when only $\lambda(\cdot)$ is affected by p . This assertion is true for the first two models from Sections 2.3 and 2.4, and in the literature it holds in [Gauchon et al. \(2020\)](#).

Still in the case where only $\lambda(\cdot)$ depends on p , here is a property characterizing the optimal prevention amount (independent of u) according to the parameter c , which is the same as Proposition 4 from [Gauchon et al. \(2020\)](#) :

Proposition 2.6.1. For the two models defined by Equations 2.2 and 2.10, we can extend immediately Proposition 4 from [Gauchon et al. \(2020\)](#) when only $\lambda(\cdot)$ depends on p , i.e. as soon as $p_0^* > 0$ (which is equivalent to $c\lambda'(0) + \lambda(0) < 0$), then we can see p_0^* as an increasing function of c . More generally, whether this condition is satisfied or not, p_0^* is a nondecreasing function of c .

Démonstration. The proof proposed in the mentioned paper may be directly adapted for our cases when $p_0^* > 0$, so we do not rewrite it.

We can add that, since $\lambda(0)$ and $\lambda'(0)$ are fixed, and $\lambda(0) > 0 > \lambda'(0)$, then $c \mapsto c\lambda'(0) + \lambda(0)$ is decreasing, positive when $c = 0$, and then negative over a threshold $c_{lim} > 0$ (and its limit when $c \rightarrow \infty$ is $-\infty$). Namely, the amounts $c > 0$ for which the condition $c\lambda'(0) + \lambda(0) < 0$ is not fulfilled is the interval $[0, c_{lim}]$. Thus, for $c \in [0, c_{lim}]$, $p_0^* = 0$, and then, if $c > c_{lim}$, $p_0^* > 0$, and on $]c_{lim}, \infty[$, $c \mapsto p_0^*(c)$ is increasing. So, all in all, p_0^* is a nondecreasing function of $c > 0$. \square

It is also possible to generalize Proposition 5 from the same paper, still for the same models :

Proposition 2.6.2. Let us consider the two models defined by Equations 2.2 and 2.10, with only λ depending on p . Then, $\lim_{c \rightarrow \infty} p_0^*(c) = +\infty$, and :

- i) If $\lim_{c \rightarrow \infty} \lambda'(c)c \neq 0$, then $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{p_0^*(c)}{c} \neq 0$.
- ii) If $\lim_{c \rightarrow \infty} \lambda'(c)c = 0$ and $\lim_{c \rightarrow \infty} \lambda(c) > 0$, then $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{p_0^*(c)}{c} = 0$.
- iii) If $\lim_{c \rightarrow \infty} \lambda(c) = 0$, then $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{p_0^*(c)}{c} = 0$ if and only if $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\lambda(c) - \lambda'(c)c}{\lambda(c)} = 1$.

The proof made in [Gauchon et al. \(2020\)](#) would be the same, and it is quite long, so we do not rewrite it here.

2.6.2 Adjustment coefficients

In this section, we intend to compare the effects of primary prevention on the three adjustments coefficients related with the three respective models studied in this paper : $\kappa_1(p)$ from Section 2.3, $\kappa(p)$ from Section 2.4, and $\kappa_D(p)$ from Section 2.5.

Actually, to derive such comparison, we allow ourselves to change the expression of $\kappa(p)$, which is $\kappa(p) = \eta - \frac{\lambda(p)}{c-p}$ and involves originally only one type of claim, into $\kappa(p) = \frac{\eta + \delta}{2} - \frac{\lambda(p)}{c-p}$, so as to establish the comparisons.

Let us fix common parameters η, δ, c, p and $\lambda(\cdot)$ for all the three models. The parameter α used in the model from Section 2.5 is considered fixed here because we only apply primary prevention. We also take a common bound p_{lim} for the three models, such that the net profit is satisfied for each one.

Proposition 2.6.3. For all $p \in [0, p_{lim}]$, and when $\alpha > 0$, thanks to some computations, we deduce quite easily

$$\kappa_D(p) < \kappa_1(p) < \kappa(p) . \tag{2.20}$$

However, if $\alpha = 0$, we find $\kappa_D(p) = \kappa_1(p)$.

Then, we compare the derivatives, and more precisely, the relative speed of the effects corresponding to the related amount invested in prevention.

We normalize the derivatives, i.e. we introduce three functions G, G_1 and G_D such that

$$\kappa'(p) = -\frac{h(p)}{2(c-p)^2}G(p) \quad ; \quad \kappa_1'(p) = -\frac{h(p)}{2(c-p)^2}G_1(p) \quad ; \quad \kappa_D'(p) = -\frac{h(p)}{2(c-p)^2}G_D(p) .$$

where $h(p) = \lambda'(p)(c-p) + \lambda(p)$ is the same as in Proposition 2.2.1.

Proposition 2.6.4. We find, thanks to some computations that

$$G(p) = 2 < G_D(p) < G_1(p) . \tag{2.21}$$

As a recall, the sign of h may vary.

This framework means that when h is positive, then the risk linked with κ_1 increases faster than the one of κ_D (but also κ). However, when h is negative, then the risk related with κ_1 is the one which decreases the fastest. This last fact looks quite counterintuitive.

What is important to retain is that, in presence of relapses represented thanks to by-claims, if there is a contagion phenomenon such as an INAR(1) process, then investing only in order to reduce the frequency of the main claims seems not enough to avoid great risks and potential great losses. To this purpose, the autoreproduction coefficient $\alpha(\cdot)$ should also be lowered.

So an insurance company dealing with such risk and ready to invest in prevention should have analysed carefully the losses due to secondary claims, and identify a potential contagion process. If such a phenomenon is revealed, then in order to stem the risk properly, such a company should invest not only in primary prevention, but also in secondary or tertiary prevention.

2.7 If $p_{min} > 0$

So far, we have assumed that investing in prevention necessarily reduces the risk incurred by an insurance company, even for an amount p close to 0. Actually, as mentioned in Section 2.2.3.2, it would be more faithful to the practical reality to assume that prevention is effective only over a certain amount spent : we note $p_{min} > 0$ this threshold value in this section.

More precisely, if we reconsider the model presented in Section 2.4 and Equation 2.10, we would change the assumptions like this : $\lambda(\cdot)$ is still continuous, but now piecewise \mathcal{C}^2 : it is constant on $[0, p_{min}]$, and then decreasing, convex, and \mathcal{C}^2 on $[p_{min}, p_{lim}]$.

The modifications of the assumptions would be similar for the other kind of parameters which at some moment depend on p .

Actually, it would not change so much all the results presented in the article. As an example, Proposition 2.2.1 from this article (with its proof) should be rewritten :

Proposition 2.7.1 (An important condition (with $p_{min} > 0$)).

We define the function $h(p) = \lambda'(p)(c - p) + \lambda(p)$ for $p \in \mathbb{R}_+$.

If $\lambda'(p_{min})(c - p_{min}) + \lambda(p_{min}) \leq 0$, then $h(\cdot)$ has exactly one root in \mathbb{R}_+ (and more precisely, this root p_1 is in $[p_{min}, \infty[$). Moreover, in that case, it satisfies $p_1 = c + \frac{\lambda(p_1)}{\lambda'(p_1)}$. Otherwise, h is positive on \mathbb{R}_+ and has no zero.

Démonstration. First, for $p \in [0, p_{min}[$, we have $\lambda'(p) = 0$, so $h(p) = \lambda(p) = \lambda(0) > 0$.

Then, we focus on $[p_{min}, \infty[$. $\lambda \in \mathcal{C}^2$, and by deriving, $h'(p) = (c - p)\lambda''(p)$, so $h'(p) > 0$ by convexity. Then, since $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda'(p) = 0$, we get $\lim_{p \rightarrow \infty} h(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(p) > 0$.

Moreover, the inequality outlined is equivalent to $h(p_{min}) \leq 0$. Therefore, if it is satisfied, since h is increasing, by the intermediate value theorem, h has a unique zero on $[p_{min}, \infty[$. Otherwise, it means that $h(p_{min}) > 0$, so h has no root on $[p_{min}, \infty[$, and thus no root on \mathbb{R}_+ .

By rearranging the equation $h(p_1) = 0$, we find the expression mentioned. \square

Then, for instance, Corollary 2.3.1 would become :

Corollary 2.7.1 (Optimal amount p_κ^* (with $p_{min} > 0$)).

We are looking at the amount p_κ^* minimizing the risk related with $\kappa_1(p)$.

If $\lambda'(p_{min})(c - p_{min}) + \lambda(p_{min}) \leq 0$, we note p_1 the solution of $\lambda'(p)(c - p) + \lambda(p) = 0$ on $[p_{min}, c]$. Then, $p_\kappa^* > 0$ if and only if the inequality $\kappa_1(0) < \kappa_1(p_1)$ is satisfied.

Otherwise, $p_\kappa^* = 0$. Moreover, if it is positive, then $p_\kappa^* = c + \frac{\lambda(p_\kappa^*)}{\lambda'(p_\kappa^*)}$.

The modifications of the results would be similar for all the other parameters which may be affected by prevention.

Actually, one of the practical problems raised is : if two (or more) parameters depend on p , for instance if in Section 2.5 both $\alpha(\cdot)$ and $\lambda(\cdot)$ are affected by prevention, should we consider a common threshold value p_{min} , or each parameter could have its own threshold? If the computations would be easier with a common threshold, there is a priori no concrete reason to force the parameters to have the same one. Simply, it induces that several disjunctions have to be made, considering the different thresholds.

2.8 Conclusion

We have carried several prevention studies coming from ruin theory models. For some of them, a parallel with the problematic of the perfluorinated compounds was drawn. We have attached importance to consider not only the case where the frequency of the claims may be reduced, but also the mean of the claims, and the possibility of relapse and propagation of subsequent claims. However, characterizing the optimal prevention amount was sometimes difficult, and the conditions found were not always written simply.

As a deepening of such a work, it is possible to propose explicit expressions depending on p of the parameters affected by the effects of prevention. One could thus lead a more precise (but less general) survey on tricky points, or adapt directly theoretical results existing in the related literature.

Otherwise, studying the case where the effects of prevention depend on the time appears to be a "quite natural" extension of such a work : $\lambda(\cdot)$ would become $\lambda(p, t)$, etc. It should be more complex but interesting, and once again, if the general cases were too difficult, one could focus on precise numerical expressions.

Besides, we are aware these studies could have been completed by reliable data on the PFAS issue for more relevance, but this is left for future research.

Deux modèles bidimensionnels appliqués aux émissions de carbone de la résolution d'un sinistre automobile

Ce chapitre correspond à un article intitulé « A BINAR(1) Risk Model for Financial and Carbon Claims : Application to Circular Auto Parts », co-écrit avec Renata Alcoforado et Stéphane Loisel, et en cours de soumission.

Abstract

This paper introduces two discrete-time bivariate risk models built thanks to the notion of BINAR(1) process to describe the joint behaviour of the financial and environmental costs of claim management in motor insurance. If the first is structured around a proper BINAR(1) process, the second presents some adjustments to better represent the particular aspects of carbon emissions in such a context.

We study jointly the risks related to the models, in particular their ruin probabilities or the distributions of their counting processes, and we establish comparisons between the respective results. Moreover, thanks to open access (but secondary) data, we estimate the average costs and CO₂ emissions associated with replacing damaged vehicle parts. We distinguish between new parts and reused parts from the circular economy, and our findings support the integration of circular economy practices in claims management, showing that high acceptance rates of such recycled pieces can lead to significant reductions in carbon footprint and average cost per claim.

Keywords : BINAR(1) ; Bivariate Risk Model ; Carbon Footprint ; Sustainable Insurance ; Circular Economy ; Claim Management.

3.1 Introduction

The growing awareness of environmental concerns has recently brought attention to the carbon footprint associated with claim management in motor insurance. Notably, French insurers and industry bodies have addressed this issue through publications such as the *Livre Blanc* ([Livre Blanc \(2024\)](#)), and companies like Allianz have contributed with detailed assessments of operational emissions ([Allianz \(2023\)](#)). In France, where the transport sector remains the leading source of greenhouse gas emissions, accounting for a substantial portion of national totals, reducing environmental impact in this domain is both urgent and strategic.

Since 2024, the European Corporate Sustainability Reporting Directive (CSRD) mandates certain corporations to disclose carbon emissions. This has increased the relevance of integrating non-financial risks, such as environmental impact, into traditional financial risk models. In this context, the relationship between the monetary cost of managing motor claims—especially those involving collisions—and their corresponding carbon emissions emerges as a key issue. The theoretical underpinnings of non-financial risk and its intersection with insurance are explored in works such as [Rey \(2003\)](#), [Eeckhoudt et al. \(2007\)](#), and [Courbage and Rey \(2007\)](#). Moreover, [Gong et al. \(2024\)](#) explored recently potential strategies developed by insurance companies for addressing carbon emissions in the automotive supply chain in the United Kingdom.

Motivated by these developments, this paper presents a bivariate risk modeling approach that jointly captures financial losses and carbon emissions. Our objective is to represent the dual risk faced by insurers : monetary costs and environmental liabilities.

While multivariate models have long been used to account for dependencies across insurance lines—see, for example, [Loisel \(2004b\)](#), [Biard \(2013\)](#), [Cai and Li \(2007\)](#), and [Konstantinides and Li \(2016\)](#)—, these studies typically model either common shock structures or claim amount correlations. Bidimensional risk models, such as those in [Avram et al. \(2008\)](#) and [Burnecki et al. \(2021\)](#), often consider insurer-reinsurer dynamics or claim splitting. Some discrete-time frameworks, such as [Ma et al. \(2015\)](#), introduce common shocks through autoregressive time series, but most of these contributions assume only one type of claim per line, which limits their application to more complex operational realities.

To overcome this, we draw inspiration from refinements to the classical Cramér-Lundberg model that introduce secondary or “by-claims”—losses that follow an initial main claim. This reflects real-world patterns in motor insurance, where a single incident can generate both immediate material damage claims and delayed bodily injury claims. Models such as [Waters and Papatriandafylou \(1985\)](#), [Yuen and Guo \(2001\)](#), and [Yuen et al. \(2005\)](#) incorporate by-claims either as delayed responses or as secondary claims linked to the initial one. More recent extensions [Fu and Li \(2016\)](#); [Li \(2023\)](#); [Macci \(2006\)](#); [Yang et al. \(2019\)](#) build on these ideas, but typically assume a fixed number of by-claims per main claim or independence between them - assumptions that may not hold in real-world operations.

Discrete-time models based on thinning operators, such as INAR or INMA processes, allow for richer stochastic dynamics and claim clustering. These have been employed in a variety of univariate contexts [Cossette et al. \(2010\)](#); [Guan and Hu \(2022\)](#); [Hu et al. \(2018\)](#); [Shi and Wang \(2014\)](#), or Chapter 1 of this thesis, with the last study capturing random by-claims using autoregressive time series. However, extending these insights to a multidimensional setting—especially one that jointly models financial and environmental risk—remains underexplored.

To address this gap, we introduce two discrete-time bivariate risk models. The first extends the framework from Chapter 1 using a bivariate integer-valued autoregressive process of order 1 (BINAR(1)). The second model builds on the same intuition but adapts its structure to better reflect the specific features of carbon emissions in motor claim operations. In particular, it insists on considering jointly both financial and ecological risks, with the possibility of subsequent losses

through by-claims. The first model is a natural, general extension of existing models, while the second one takes into account the claim-by-claim nature of emissions and costs, in a more particular way. Our study shows that it is interesting to study the properties of the first process, because it can be used as a benchmark for more sophisticated and more specific models like the second one, which could be studied and calibrated thanks to real data when it becomes available, and also because some proofs share similar steps for both types of processes (even if some specificities arise for some computations or proofs).

We examine both models in parallel, comparing their probabilistic properties and asymptotic behavior. We derive expressions for covariance structures, net profit conditions, and ruin probabilities. In cases where claim size distributions are light-tailed, we provide the corresponding Lundberg equations and adjustment coefficients.

Finally, using data from Allianz and the *Livre Blanc*, we simulate scenarios involving the substitution of new car parts with recycled alternatives (PIEC). These simulations offer insight into the trade-offs between financial costs and carbon emissions in post-collision claim scenarios.

The remainder of the paper is organized as follows : Section 3.2 introduces the carbon-based risk model and key concepts from operational data. Section 3.3 presents the BINAR(1)-based model. Section 3.4 derives basic statistical properties of both models. Section 3.5 explores the asymptotic behavior of the claim-count processes used for the proper BINAR(1) model. Section 3.6 develops the ruin theory results. Finally, Section 3.7 provides numerical illustrations and scenario analyses based on real-world data.

3.2 Carbon footprint of claim management in motor insurance

We are interested in modeling the carbon footprint of claim management in motor insurance through a bivariate structure. As mentioned in the introduction, we take jointly into account a financial risk and a non-financial risk, which respectively correspond, for a given insurer, to amounts of claims and to quantities of carbon dioxide generated and rejected in order to manage these claims.

In this paper, all the random variables and stochastic processes are defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Moreover, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ is the set of the nonnegative integers, thus $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ are the positive integers.

3.2.1 A bivariate structure for carbon footprint

To estimate the financial and environmental impacts of automobile collision claims, we rely on two complementary sources : the French *Livre Blanc*, namely the "*White Booklet on carbon footprint in claims management*" ([Livre Blanc \(2024\)](#)), and the 2023 Allianz report "*Repair or Replace – Investigating the relative GHG emissions of vehicle part repair vs. replacement*", [Allianz \(2023\)](#). If the Allianz report rather focuses on the different operations linked with the repairs (including piece replacement or painting), the *Livre Blanc* also evokes the necessary assistance provided to the client who has suffered an accident : for example, by proposing towing, a taxi or a replacement vehicle.

More specifically, we are willing to investigate on what can be done and chosen in terms of replacement of a damaged piece, in case the direct repair is difficult or too costly. We can distinguish between two categories : brand-new parts and reused parts from the circular economy (called PIEC in the *Livre Blanc*), which often correspond to pieces still functioning taken from a damaged car dedicated to be destroyed. In 2017, the European Union published a list with

a quite wide range of car parts for whose the use of PIEC is permitted. Specifically, the use of PIEC is particularly encouraged in France, in particular thanks to the Agec law voted in 2020 (*loi sur l'Antigaspillage pour une économie circulaire*), namely "law on anti-waste for a circular economy".

Therefore, it entices us to consider a bivariate claim structure, where the k^{th} claim can be represented here as :

$$Z_k = \begin{pmatrix} X_{1,k} \\ X_{2,k} \end{pmatrix} + Y_k$$

where $X_{1,k}$ is seen as the minimum financial cost of the k^{th} claim, and $X_{2,k}$ is the baseline CO₂ emissions associated with the claim. Moreover, Y_k is divided into two components, $Y_{1,k}$ and $Y_{2,k}$, which are the respective optional additional cost, or optional additional emissions. The latter two quantities may be equal to 0 depending on the choices made for the repair following the car damages.

3.2.2 Different types of correlations

According to conventional scenarios, a trade-off between financial cost and environmental impact should imply a negative correlation between these two types of risks. Indeed, it seems reasonable to assume a small fee entails the fact that the insurance company chose a simpler, but less environmentally-friendly solution. As a concrete example, one can think, in terms of traveling, of the difference between using the train instead of a plane : it takes more time (and may be more expensive), but the associated carbon emission is expected to be lower.

Thus, in most cases,

$$Y_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} Y_{1,k} \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{if carbon footprint reduction is prioritized,} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{2,k} \end{pmatrix}, & \text{if cost containment is prioritized.} \end{cases} \quad (3.1)$$

This representation makes sense when one considers vehicle painting, since we observe a negative correlation between cost and carbon footprint. For instance, using high-quality, water-based paints may result in a higher financial cost but lead to significantly lower emissions compared to cheaper solvent-based paints. In this case, insurers face a true trade-off between economic and ecological outcomes. The *Livre Blanc* specifies that for each collision claim, an average number of 2.31 operations of painting has to be made, representing an average quantity of 39.3 kgCO₂ generated per claim, and stands for 26.8 % of the total emissions for the claims studied by the booklet, so it is a significant part of the recovery process.

However, contrary to the mentioned conventional scenarios, our empirical application to the case of piece replacements and the information we were able to collect reveals the opposite : the additional risk components are positively correlated, that is to say opting for new parts instead of recycled pieces increases both the financial cost and the carbon emission.

In that case, we shall write instead

$$Y_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} Y_{1,k} \\ Y_{2,k} \end{pmatrix}, & \text{if new pieces are chosen,} \\ 0, & \text{if only recycled pieces are chosen.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Actually, this feature not only simplifies the strategic decision for insurers for this specific operation but also reinforces the dual benefit — economic and ecological — of promoting the

adoption of reused parts. Of course, it remains meaningful for any other kind of operation where we could observe such a positive correlation.

Piece replacements represent an average quantity of 37.5 kgCO₂ generated per claim (36.2 kgCO₂ for the new pieces, and 1.3 kgCO₂ for the PIEC), and stand for 25.6 % of the total emissions for the claims studied by the *Livre Blanc*, so it is also an important part of the problem.

This decomposition allows us further (in Section 3.7) to simulate strategic scenarios based on client acceptance rates of PIEC, modeling the trade-off between financial and environmental performance.

Yet, for now, we incorporate this idea of bivariate structure to derive in the next paragraph the writing of a discrete-time risk model to try to represent the financial and ecological aspects of the problem we are interested in.

3.2.3 The bivariate carbon model

We now propose a bidimensional risk model in order to represent several aspects of the carbon footprint for claim management in motor insurance. In particular, we emphasize the concept of piece replacement for collision claims. This can be seen as an extension of a more intuitive model with a BINAR(1) process which is defined below in Section 3.3.

Before that, we define the binomial thinning operation :

Definition 3.2.1 (Operation \circ).

Let X be an integer-valued random variable, and $\rho \in [0, 1]$ a real number. Then,

$\rho \circ X = \sum_{i=1}^X b_i(\rho)$, where the $(b_i(\rho))_{i \in \mathbb{N}}$ are i.i.d. random variables with Bernoulli distribution $\mathcal{B}(\rho)$, independent of X . Hence, $\rho \circ X | X \sim \mathcal{B}(X, \rho)$.

3.2.3.1 Presentation of the model

In the following model, we consider $R_{1,n}^C$ corresponds to a financial line, and $R_{2,n}^C$ to a quantity of carbon emitted. We note some variables of the problem with "C" as an exponent to insist on the difference with Equation 3.7.

$v_1 \geq 0$ is the initial financial surplus of the insurance company, and $d_1 > 0$ is the constant premium rate.

Then, we can see v_2 as an initial total quantity of carbon which should not be exceeded by the insurance company over a given period of time, balanced by an additional quantity d_2 allowed per period. Depending on the context, it could be possible to assume a proportional relation of the type $d_2 = \nu \cdot d_1$, and thus see ν as a quantity of carbon allowed per financial unit of premium, or, approximately, it corresponds to the idea of a quantity of carbon allowed per client insured.

$$\begin{pmatrix} R_{1,n}^C \\ R_{2,n}^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k^C} \begin{pmatrix} X_{1,k,i} \\ X_{2,k,i} \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} M_{1,k}^C \\ M_{2,k}^C \\ \sum_{i=1}^{M_{2,k}^C} Y_{2,k,i} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

where, for $k \geq 1$,

$$\begin{cases} M_{1,k}^C = \omega_{12} \circ N_k^C + \delta \circ N_{k-1}^C + O_k, \\ M_{2,k}^C = \omega_{21} \circ N_k^C + O_k, \\ \text{and, } O_k = \theta \circ O_{k-1} + \beta \circ N_{k-1}^C, \text{ for } k \geq 2. \end{cases} \quad (3.4)$$

At time k , all the thinning operations are assumed to be made conditionally independently. Moreover, $\theta, \delta, \beta, \omega_{12}, \omega_{21} \in [0, 1]$. In relation with the possible concrete meaning of this model, we display in the next section more precise potential values for some of these parameters.

Actually, the sequence $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$ can be seen as an INAR(1) time serie, where the source term for $k \geq 2$ is $\beta \circ N_{k-1}^C$.

For the k^{th} period, the insurance company suffers N_k^C joint main claims. Comparatively with Equation 3.7, here $N_k^C = N_{1,k} = N_{2,k}$. Indeed, an initial claim is always considered to cause both a financial loss and a carbon emission the company is responsible for. According to what is stated above, the random positive variables $X_{1,k,i}$ and $X_{2,k,i}$ correspond to the baseline claim cost and quantity of CO₂ emitted for the i^{th} claim of the k^{th} period. The $(N_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$ are independent and identically distributed (i.i.d.) such that $N_1^C \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$.

Then, the model also presents subsequent or additional losses for each line, counted respectively by $M_{1,k}^C$ and $M_{2,k}^C$ at period k . The corresponding positive amounts of these by-claims are $(Y_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(Y_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$.

As conventions, we take $N_0^C \stackrel{\mathcal{L}}{=} 0, M_{1,0}^C \stackrel{\mathcal{L}}{=} 0, M_{2,0}^C \stackrel{\mathcal{L}}{=} 0$, and $O_1 \stackrel{\mathcal{L}}{=} 0$. Moreover, we note $\xi_{1,k} = \mathbb{E}(M_{1,k}^C)$, and $\xi_{2,k} = \mathbb{E}(M_{2,k}^C)$ for $k \geq 1$. We also assume all the losses variables have respective finite means, $\mu_{X_1} > 0, \mu_{X_2} > 0, \mu_{Y_1} > 0$ and $\mu_{Y_2} > 0$.

We assume all the sequences of the different types of losses, $(X_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}, (X_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}, (Y_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(Y_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, are mutually independent and each one i.i.d. Moreover, they are each one independent of the sequence $(N_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$. As a direct consequence, they are also independent of $(M_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$.

To analyse the risks embodied by this model, we are going to apply a classical ruin study, despite the presence of the non-financial risk.

Actually, it makes sense, because it allows to identify risky situations where the insurance company has suffered too high financial losses, or has emitted too much carbon dioxide, or even both.

As suggested previously, in some situations, the priority of an insurance company is to minimize as much as possible its risks and its losses, and then, the carbon footprint is correspondingly reduced if possible. Yet, the following ruin study should spur the insurers to take care of both jointly. We precise later in Section 3.3 the definitions of these ruin probabilities.

For that, we note $W_n = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{N_k^C} (X_{1,k,i} + X_{2,k,i}) + \sum_{i=1}^{M_{1,k}^C} Y_{1,k,i} + \sum_{i=1}^{M_{2,k}^C} Y_{2,k,i} \right)$, for $n \geq 1$. It

corresponds to the sum of the aggregate amount of financial losses until the n^{th} period, and the aggregate quantity of CO₂ emitted in relation with all the claims managed during the same time.

3.2.3.2 Meaning of the model

Regarding the model from Equation 3.7 on a mathematical point of view, the crossing coefficients (here, ω_{12} and ω_{21}) do not have the same role, even if it looks quite similar. Yet, the main thing here is the fact that α_{11} and α_{22} have been merged through the parameter θ in a joint thinning operation which involves both lines. It is why, here, it would be awkward to propose a representation with matrices as in Section 3.3.

Let us give more some concrete details to explain the possible roles of the parameters.

The crossing coefficients ω_{12} and ω_{21} allow in particular to take into account for each line the additional costs discussed previously if environmentally-friendly decisions are taken or not.

Regarding δ , we consider that a client who has suffered an accident and has been convinced by his insurer to accept the use of at least one PIEC to repair his vehicle will benefit from a discount on his premium amount during the next period to reward this ecological choice. It could depend on the number or the type of PIEC used, but we can assume this discount is between 10 and 25 %, and it is not granted if only new pieces are used. However, the client may as well withdraw his contract, and in that case, the discount does not have to be made, of course. We reckon the proportion of withdrawal at a given period is between 10 and 20%.

Hence, we may propose the broad estimation $\delta \in [0.3, 0.7]$. Furthermore, this action has no ecological effects, therefore there is no relapse associated in terms of carbon emission.

Another possible interpretation of such a coefficient would be a financial penalty due to too high carbon emissions to manage the claims.

Besides, the use of PIEC may lead to legal problems for the company : indeed, if there is a problem with such a reused piece after that, the insurer could be assumed liable or responsible for an incorrect repair. An example is the case of a door which no longer opens properly after some time. Then, this PIEC should be replaced by a more functional piece, which engenders a new couple of financial and ecological costs. In that case, we could assume a brand-new piece would replace this defective piece, but it is not the most important. We can reckon the probability of this type of event is between 5 and 20 %. However, if only new pieces are used for the repair, and if such failure happens, we can assume the client will sue the garage or the repair company instead of the insurance company.

Anyway, whether PIEC or new pieces are used, there must be a one-year (or one-period) guarantee in case something happens to the replaced piece, and another repair have to be made. This new claim includes not only the necessary assistance, but also the procedure of repair. Then, we assume each time the guarantee is used, it is subsequently replicated for another period. As a detail, if the guarantee is used several times in a period, we consider all these uses are merged in a single loss for each line.

All these possibilities justify this potential propagation of relapses through by-claims, and are gathered in the coefficients β and θ . We consider $\theta \leq \beta$, since we can imagine that for the subsequent times, the persistent problems will be treated more carefully in order to avoid another couple of by-claims. We can reckon $\beta \in [0, 0.2]$.

We are aware this model is not universal for one who would like to model carbon footprint engendered by claim management from an insurer, especially in the field of motor insurance. There are several ways to interpret the model and the parameters, and we displayed in this subsection some possible concrete meanings.

As said before, we rather wrote it as an extension of a more intuitive model presented below in Equation 3.5 (from Section 3.3), and the similarities between these two models allow to compare their risks related. What seems important for such a study is to take into account the fact that the correlations between the financial or ecological cost may be either positive or negative.

3.3 A bidimensional risk model using a BINAR(1) process

3.3.1 An unidimensional model with an INAR(1) process

Let us first consider the following unidimensional discrete-time risk model. It is actually the original model from Chapter 1 :

$$R_n = u + cn - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{M_k} Y_{k,i} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

where $u \geq 0$ is the initial surplus of the insurance company, and $c > 0$ is the constant premium rate. The i.i.d. sequences of positive random variables $(X_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(Y_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ represent respectively the amounts of the main claims and the by-claims. Namely, the company suffers N_k main claims and M_k by-claims at each period k , $k \geq 1$, where the sequence $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is i.i.d., with $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, and for $k \geq 1$, M_k is expressed in function of M_{k-1} , N_k and a constant parameter $\rho \in [0, 1[$ according to an INAR process of order 1 :

$$M_k = \rho \circ M_{k-1} + N_k. \quad (3.6)$$

\circ is the binomial thinning operator, as defined previously. As an initial condition, $M_0 \sim \mathcal{P}(\gamma_0)$, with $\gamma_0 > 0$.

What is more, in this model, the sequences X , Y and N are mutually independent, and X and Y are independent of the sequence M , while the relation of dependence between N and M is stated as above.

On a practical viewpoint, this structure with an INAR(1) process implies that during the k^{th} period, each main claim generates directly one by-claim precisely, and then, each by-claim which has occurred at this period engenders with probability ρ a new by-claim for the $(k+1)^{th}$ period.

Moreover, as a technical remark, the by-claims have only *positive amounts* : it is thus a simplification of what could happen in practice. Indeed, in the context of cost revising for an insured loss, some main claims may be revised upward or downward. Actually, they are revised downward if some damages appear to be less costly than firstly expected, and in that case, we should observe a by-claim with a negative amount.

3.3.2 The classical BINAR(1) risk process

It is possible to extend the previous univariate discrete-time risk model, to deduce the following bivariate risk model of the form, for $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} R_{1,n} \\ R_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N_{1,k}} X_{1,k,i} \\ N_{2,k} \\ \sum_{i=1}^{N_{2,k}} X_{2,k,i} \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} M_{1,k} \\ \sum_{i=1}^{M_{1,k}} Y_{1,k,i} \\ M_{2,k} \\ \sum_{i=1}^{M_{2,k}} Y_{2,k,i} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

where, for $k \geq 1$, the two-dimension vector $M_k = (M_{1,k}, M_{2,k})$ is ruled according to a BINAR(1) process :

$$\begin{cases} M_{1,k} = \alpha_{11} \circ M_{1,k-1} + \alpha_{12} \circ M_{2,k-1} + N_{1,k}, \\ M_{2,k} = \alpha_{21} \circ M_{1,k-1} + \alpha_{22} \circ M_{2,k-1} + N_{2,k}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Namely, written as matrices,

$$\begin{pmatrix} M_{1,k} \\ M_{2,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} M_{1,k-1} \\ M_{2,k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{1,k} \\ N_{2,k} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

- $(R_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ and $(R_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ stands for two different lines of business of an insurance company.
- $u = (u_1, u_2)$ is the vector of initial surpluses, $u_1, u_2 \geq 0$.
- $c = (c_1, c_2)$ are the constant premium rates, $c_1, c_2 > 0$.
- For some integers $1 \leq i, j \leq 2$, $\alpha_{ij} \in [0, 1[$ is a constant parameter, and \circ is the binomial thinning operator (already defined above).
- For a fixed $k \in \mathbb{N}$, and for $1 \leq i, j \leq 2$, the variables $\alpha_{ij} \circ M_{j,k}$ are conditionally independent.
- For the j^{th} line ($j \in \{1, 2\}$), the company suffers $N_{j,k}$ main claims and $M_{j,k}$ by-claims at each period $k \geq 1$, where the sequence $(N_{j,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ is i.i.d, with $N_{j,1} \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$, $\lambda_j > 0$.
- We settle $M_{1,0} \sim \mathcal{P}(\gamma_{1,0})$, and $M_{2,0} \sim \mathcal{P}(\gamma_{2,0})$, where $\gamma_{1,0} > 0$, and $\gamma_{2,0} > 0$ are fixed. Moreover, for a fixed $k \geq 1$, we assume that the 2D vector N_k is independent of M_0, \dots, M_{k-1} , and we note $\gamma_{j,k} = \mathbb{E}(M_{j,k})$ for $k \in \mathbb{N}$ and $1 \leq j \leq 2$. We prove later that with such assumptions, actually $M_{j,k} \sim \mathcal{P}(\gamma_{j,k})$.
- For the j^{th} line, $(X_{j,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ and $(Y_{j,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ are i.i.d. sequences representing respectively the main claims and by-claims, with respective finite mean μ_{X_j} and μ_{Y_j} . We may note by X_j and Y_j two variables such that $X_{j,1,1} \sim X_j$, and $Y_{j,1,1} \sim Y_j$.
- The sequences $(X_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(X_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(Y_{1,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(Y_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$, $(N_{1,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ and $(N_{2,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ are mutually independent. Moreover, the sequences of vectors $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ are independent of the sequence $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Eventually, the relation of dependence between the sequences of 2D vectors N and M is stated as above through the BINAR(1) formulation.

Here again, we assume which could be seen as a simplification of the reality, that is to say, the by-claims have only *positive amounts*.

On a mathematical viewpoint, this structure with a BINAR(1) process engenders dependence between the two lines of business while representing the possibility for having subsequent losses along several periods coming from a same initial event. More specifically, it implies that during a given period, each main claim suffered in a given line generates directly a by-claim in the same line. Then, other losses may occur from this in the following periods, and it could affect either of the lines. The corresponding probabilities that such further claims happen are represented by the coefficients α_{ij} . Moreover, a BINAR(1) process correspond to a discrete sequence of random variables, and not a continuous process, therefore, it seemed more natural to us to implement such a process in discrete time, all the more since it is one of the first use of such a time series in ruin theory. Nonetheless, the transcription of such a crossing dependence in continuous time looks possible. Besides, to our knowledge, there is from now no continuous-time risk model in the ruin theory literature which involves an integer-valued time series as a process counting the claims.

What is more, on a concrete point of view, without delving too much into the details, such a model could be meaningful in a general case of motor insurance : indeed, the lines could stand for the material part, the civil liability part, or the health damage part for instance. In such a concrete context, we would observe dependence between the lines, in particular an event in a given line could engender repercussions or subsequent claims on both lines.

The model is said to be independent if $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$. However, if we keep the independence assumptions between the claims, the two lines of business will act separately, as if they were ruled by two respective independent INAR(1) processes (one could refer to the Chapter 1 of this thesis for corresponding results). Therefore, such a study would be interesting only if we modify the previous assumptions.

At time $n \geq 1$, we can define the aggregate amount of the losses :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{N_{1,k}} X_{1,k,i} + \sum_{i=1}^{N_{2,k}} X_{2,k,i} + \sum_{i=1}^{M_{1,k}} Y_{1,k,i} + \sum_{i=1}^{M_{2,k}} Y_{2,k,i} \right).$$

Eventually, there are several ways to characterize the ruin of a bidimensional risk process. First, we set the stopping times : $\tau_1(u_1) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* / R_{1,n} < 0 \mid R_{1,0} = u_1\}$, and $\tau_2(u_2) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* / R_{2,n} < 0 \mid R_{2,0} = u_2\}$. Thus, $\tau_1(u_1), \tau_2(u_2) \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Then, we define the ruin probabilities :

- $\psi_1(u_1) = \mathbb{P}(\tau_1(u_1) < \infty)$, and the same thing for $\psi_2(u_2)$.
- $\psi_{and}(u) = \mathbb{P}(\tau_{and}(u) < \infty)$, where $\tau_{and}(u) = \max\{\tau_1(u_1), \tau_2(u_2)\}$.
- $\psi_{or}(u) = \mathbb{P}(\tau_{or}(u) < \infty)$, where $\tau_{or}(u) = \min\{\tau_1(u_1), \tau_2(u_2)\}$.
- $\psi_{sum}(u) = \mathbb{P}(\tau_{sum}(u) < \infty)$, where $\tau_{sum}(u) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* / R_{1,n} + R_{2,n} < 0\}$.
- For an integer $T \geq 1$, we can define $\psi_{sum}^T = \mathbb{P}(\tau_{sum}(u) \leq T)$, and the same thing for $\psi_{or}^T(u), \psi_{and}^T(u), \psi_1^T(u_1)$, or $\psi_2^T(u_2)$.

As direct consequences, we get $0 \leq \psi_{and}(u) \leq \psi_1(u_1), \psi_2(u_2)$, and then, $0 \leq \psi_1(u_1), \psi_2(u_2), \psi_{sum}(u) \leq \psi_{or}(u) \leq \psi_1(u_1) + \psi_2(u_2)$.

What is more, we would have the same inequalities by looking at a finite-time horizon.

It is also possible to define the same kind of ruin probabilities for the model from Equation 3.3, such as $\psi_{sum}^C(v), \psi_1^C(v_1)$, or $\psi_2^C(v_2)$.

3.4 Basic properties

3.4.1 Counting processes of the by-claims

Before providing the net profit conditions related with both models, we yield some properties about the distributions of the counting processes related with the by-claims for each model.

First, we outline a useful lemma :

Lemma 3.4.1. Let $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence satisfying $a_0 > 0$, and $a_{n+1} = \rho a_n + b$ for $n \in \mathbb{N}$, where $\rho \in [0, 1[$ and $b > 0$. Then, $a_n = \rho^n \left(a_0 - \frac{b}{1 - \rho} \right) + \frac{b}{1 - \rho}$, the sequence is monotonic, and it converges towards $\frac{b}{1 - \rho}$.

Démonstration. The expression may be easily checked by induction, then the monotony and the limit follow from this expression, and the fact that $|\rho| < 1$. \square

Proposition 3.4.1 (Values of the limits).

When the sequences $(\gamma_{i,k})_{k \in \mathbb{N}, i \in \{1,2\}}$ converge, their limits are

$$\begin{cases} \gamma_{1,k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \gamma_{1,\infty} = \frac{(1 - \alpha_{22})\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2}{(1 - \alpha_{11})(1 - \alpha_{22}) - \alpha_{12}\alpha_{21}} \\ \gamma_{2,k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \gamma_{2,\infty} = \frac{(1 - \alpha_{11})\lambda_2 + \alpha_{21}\lambda_1}{(1 - \alpha_{11})(1 - \alpha_{22}) - \alpha_{12}\alpha_{21}} \end{cases}, \quad (3.10)$$

Specifically, these limits do not depend on the initial values $\gamma_{1,0}$ and $\gamma_{2,0}$.

Démonstration. As the thinning operator \circ satisfies $\mathbb{E}(\alpha \circ Z) = \alpha \mathbb{E}(Z)$ for $\alpha \in [0, 1]$, and an integer-valued random variable Z , we get, for $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \gamma_{1,k+1} = \lambda_1 + \alpha_{11} \gamma_{1,k} + \alpha_{12} \gamma_{2,k} , \\ \gamma_{2,k+1} = \lambda_2 + \alpha_{21} \gamma_{1,k} + \alpha_{22} \gamma_{2,k} . \end{cases} \quad (3.11)$$

By writing these relations satisfied for $k \rightarrow \infty$, it yields the expressions outlined. \square

For the model from Equation 3.3, from the fact that $(N_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$ is i.i.d., we deduce directly that $O_k \in \sigma(N_0, \dots, N_{k-1})$, so O_k is independent of N_j^C , for $j \geq k$ (in particular from N_k^C). This is helpful to deduce the following proposition :

Proposition 3.4.2 (Distribution of the $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$). For $k \geq 2$, we have $O_k \sim \mathcal{P}(\zeta_k)$, where

$$\zeta_k = \frac{\beta\lambda}{1-\theta}(1-\theta^{k-1}) .$$

In particular, $O_k \xrightarrow{\mathcal{L}} O_\infty$, where $O_\infty \sim \mathcal{P}\left(\frac{\beta\lambda}{1-\theta}\right)$.

To prove that, one may simply adapt properly Lemma 3.4.1 and use the fact that the $(N_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$ are i.i.d.

However, because of the underlying dependence in the expression of $M_{1,k}^C$ regarding the involvement of N_{k-1}^C , we cannot deduce the variables $(M_{1,k}^C)_{k \in \mathbb{N}}$ are also Poisson distributed.

However, it is possible to deduce the $(M_{2,k}^C)_{k \in \mathbb{N}}$ are Poisson distributed, similarly as for the $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$

In all cases, it is possible to explicitly state their means :

Corollary 3.4.1 (Distribution of the $(M_{1,k}^C)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(M_{2,k}^C)_{k \in \mathbb{N}}$). By traducing Equation 3.4 and using Proposition 3.4.2, we get, for $k \geq 1$:

$$\xi_{1,k} = \lambda \left(\frac{(\omega_{12} + \delta)(1-\theta) + \beta(1-\theta^{k-1})}{1-\theta} \right) , \quad (3.12)$$

and

$$\xi_{2,k} = \lambda \left(\frac{\omega_{21}(1-\theta) + \beta(1-\theta^{k-1})}{1-\theta} \right) . \quad (3.13)$$

In particular, they are both nondecreasing, and $M_{2,k}^C \sim \mathcal{P}(\xi_{2,k})$.

Moreover, when $k \rightarrow \infty$, $\xi_{1,k} \rightarrow \xi_{1,\infty}$, and $\xi_{2,k} \rightarrow \xi_{2,\infty}$, where

$$\xi_{1,\infty} = \lambda \left(\frac{(\omega_{12} + \delta)(1-\theta) + \beta}{1-\theta} \right) , \text{ and } \xi_{2,\infty} = \lambda \left(\frac{\omega_{21}(1-\theta) + \beta}{1-\theta} \right) . \quad (3.14)$$

Remark 3.4.1 (Comparison of the respective counting processes of the by-claims).

We can see these last expressions are quite different from the expressions found in Proposition 3.4.1. It is because in the autoregressive expressions, there are joint components coming from $(N_k^C)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$, but no component coming directly from $(M_{1,k}^C)_{k \in \mathbb{N}}$ or $(M_{2,k}^C)_{k \in \mathbb{N}}$, contrary to the BINAR(1) process.

Furthermore, for the bivariate carbon risk model, we are sure the sequences $(\xi_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ and $(\xi_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge, whereas for the classical model with the BINAR(1) process, it is not sure $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ and $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Numerous conditions regarding the possible convergence of these last two sequences are given in Section 3.5.

3.4.2 Net profit conditions

After these preliminaries, we are able to outline more precisely the net profit conditions related with each model.

These conditions are equivalent to having $\mathbb{E}(R_{1,n} - u_1) > 0$ and $\mathbb{E}(R_{2,n} - u_2) > 0$ for every $n \in \mathbb{N}^*$ for the classical BINAR(1) process (and similarly for the bivariate carbon model).

Proposition 3.4.3 (Net profit condition for the BINAR(1) model).

Let us assume that the sequences $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Thus, the net profit condition can be expressed as :

$$\begin{cases} c_1 > \lambda_1 \mu_{X_1} + \mu_{Y_1} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}^*} (\gamma_{1,k}) , & \text{and} \\ c_2 > \lambda_2 \mu_{X_2} + \mu_{Y_2} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}^*} (\gamma_{2,k}) . \end{cases} \quad (3.15)$$

If the sequences do not converge, then the net profit condition is not fulfilled. We refer to Section 3.5 for more details about such conditions of convergence.

Actually, this is a general formulation which distinguishes between the two lines of business.

Yet, if we focus on the ruin probability $\psi_{sum}(u)$, we should rather write it :

$$c_1 + c_2 > \lambda_1 \mu_{X_1} + \lambda_2 \mu_{X_2} + \mu_{Y_1} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}^*} (\gamma_{1,k}) + \mu_{Y_2} \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}^*} (\gamma_{2,k}).$$

In particular, if the last condition is not satisfied, then the ruin is almost sure, $\psi_{sum}(u) = 1$. If in Equation 3.15, the condition is not satisfied for a given line $i \in \{1, 2\}$, then $\psi_i(u_i) = 1$.

Therefore, in the remainder of the paper, these conditions are always assumed to be true.

Then, regarding the bivariate carbon model :

Proposition 3.4.4 (Net profit condition for the carbon model).

The net profit condition for this model is

$$\begin{cases} d_1 > \lambda \left(\mu_{X_1} + \mu_{Y_1} \frac{(\omega_{12} + \delta)(1 - \theta) + \beta}{1 - \theta} \right) , & \text{and} \\ d_2 > \lambda \left(\mu_{X_2} + \mu_{Y_2} \frac{\omega_{21}(1 - \theta) + \beta}{1 - \theta} \right) . \end{cases} \quad (3.16)$$

Specifically, regarding the ruin probability $\psi_{sum}(u)$, we could rather write it :

$$d_1 + d_2 > \lambda \left(\mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \mu_{Y_1} \frac{(\omega_{12} + \delta)(1 - \theta) + \beta}{1 - \theta} + \mu_{Y_2} \frac{\omega_{21}(1 - \theta) + \beta}{1 - \theta} \right) .$$

Démonstration. As before, the expression is $d_i > \lambda \mu_{X_i} + \mu_{Y_i} \cdot \sup_{k \geq 1} (\xi_{i,k})$ for each line

$i \in \{1, 2\}$. Since $(\xi_{i,k})_{k \geq 1}$ is nondecreasing, we get $\sup_{k \geq 1} (\xi_{i,k}) = \xi_{i,\infty}$. □

Then, it is possible to compare the net profit conditions of the two models from Equations 3.3 and 3.7.

If we consider the values of the means μ_{X_1} , μ_{Y_1} , μ_{X_2} and μ_{Y_2} are fixed, it is interesting to compare these conditions to see if a case is stricter than the other.

For that, we would like to compute the differences $\gamma_{i,\infty} - \xi_{i,\infty}$, and we have to adapt the formalism : here, we consider that $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_{12} = \omega_{12}$, $\alpha_{21} = \omega_{21}$, and $\theta = \alpha_{11} = \alpha_{22}$. Moreover, to simplify, we choose to take $\beta = \theta$.

The computation of $\gamma_{2,\infty} - \xi_{2,\infty}$ yields :

$$\gamma_{2,\infty} - \xi_{2,\infty} = \lambda \left(\frac{(1 - \theta)^3 + \theta \alpha_{12} \alpha_{21} + \alpha_{21} (1 - \theta) (\alpha_{12} \alpha_{21} + 2\theta - \theta^2)}{(1 - \theta) [(1 - \theta)^2 - \alpha_{12} \alpha_{21}]} \right) ,$$

which shows that $\gamma_{2,\infty} > \xi_{2,\infty}$, as $\theta \leq 1$.

The difference with the first line is the involvement of the parameter δ :

$$\gamma_{1,\infty} - \xi_{1,\infty} = \lambda \frac{(1-\theta)^3(1-\delta) + \theta\alpha_{12}\alpha_{21} + \alpha_{12}(1-\theta)(\alpha_{12}\alpha_{21} + 2\theta - \theta^2) + \delta(1-\theta)\alpha_{12}\alpha_{21}}{(1-\theta)[(1-\theta)^2 - \alpha_{12}\alpha_{21}]},$$

Since $\delta \leq 1$, we get $\gamma_{1,\infty} - \xi_{1,\infty} > 0$.

To summarize it as a result,

Proposition 3.4.5. If c_1 and c_2 satisfies the net profit condition for the BINAR(1) model, if $d_1 \geq c_1$ and $d_2 \geq c_2$, the net profit condition is also fulfilled for the bivariate carbon model.

It still stands if we assume more generally that $\lambda \leq \lambda_1, \lambda_2$, $\omega_{12} \leq \alpha_{12}$, $\omega_{21} \leq \alpha_{21}$, or $\theta \leq \beta \leq \alpha_{11}, \alpha_{22}$, since it increases the risk incurred by the classical model compared to the carbon model.

3.4.3 Covariances and correlations

For the classical BINAR(1) model, as the counting processes of the main claims are Poisson distributed, we can deduce the variances : for $k \geq 1$, we have $\mathbb{V}(N_{1,k}) = \lambda_1$, and $\mathbb{V}(N_{2,k}) = \lambda_2$.

Then, for the general covariances, it is difficult to get it explicitly as soon as a variable $M_{j,k}$ is involved, for $1 \leq j \leq 2$, and $k \geq 1$, so instead we present recurrence relations.

Of course, $\text{Cov}(N_{i,k}, N_{j,l}) = 0$ as soon as $i \neq j$ or $k \neq l$, but also, $\text{Cov}(N_{i,k}, M_{j,0}) = 0$ for every $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ and $k \geq 1$.

Proposition 3.4.6 (Covariances of the counting processes).

Let us take two integers $n, k \geq 1$.

$$\text{i) If } k = n, \begin{cases} \text{Cov}(N_{1,k}, M_{1,n}) = \lambda_1, \\ \text{Cov}(N_{1,k}, M_{2,n}) = 0. \end{cases} \quad \text{Otherwise,}$$

$$\begin{cases} \text{Cov}(N_{1,k}, M_{1,n+1}) = \alpha_{11} \text{Cov}(N_{1,k}, M_{1,n}) + \alpha_{12} \text{Cov}(N_{1,k}, M_{2,n}), \\ \text{Cov}(N_{1,k}, M_{2,n+1}) = \alpha_{21} \text{Cov}(N_{1,k}, M_{1,n}) + \alpha_{22} \text{Cov}(N_{1,k}, M_{2,n}). \end{cases}$$

$$\text{ii) If } k = n, \begin{cases} \text{Cov}(N_{2,k}, M_{1,n}) = 0, \\ \text{Cov}(N_{2,k}, M_{2,n}) = \lambda_2. \end{cases} \quad \text{Otherwise,}$$

$$\begin{cases} \text{Cov}(N_{2,k}, M_{1,n+1}) = \alpha_{11} \text{Cov}(N_{2,k}, M_{1,n}) + \alpha_{12} \text{Cov}(N_{2,k}, M_{2,n}), \\ \text{Cov}(N_{2,k}, M_{2,n+1}) = \alpha_{21} \text{Cov}(N_{2,k}, M_{1,n}) + \alpha_{22} \text{Cov}(N_{2,k}, M_{2,n}). \end{cases}$$

Démonstration. The key property for these relations is : for two integer-valued variables Z_1 and Z_2 , and $\alpha \in [0, 1]$, $\text{Cov}(\alpha \circ Z_1, Z_2) = \alpha \text{Cov}(Z_1, Z_2)$. \square

Proposition 3.4.7 (Covariances of the $(M_{j,k})_{k \in \mathbb{N}, j \in \{1, 2\}}$).

At range 0, $\text{Cov}(M_{1,0}, M_{2,0}) = 0$.

Then, for $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \text{Cov}(M_{1,k}, M_{1,n+1}) = \alpha_{11} \text{Cov}(M_{1,k}, M_{1,n}) + \alpha_{12} \text{Cov}(M_{1,k}, M_{2,n}), \\ \text{Cov}(M_{1,k}, M_{2,n+1}) = \alpha_{21} \text{Cov}(M_{1,k}, M_{1,n}) + \alpha_{22} \text{Cov}(M_{1,k}, M_{2,n}), \\ \text{Cov}(M_{2,k}, M_{1,n+1}) = \alpha_{11} \text{Cov}(M_{2,k}, M_{1,n}) + \alpha_{12} \text{Cov}(M_{2,k}, M_{2,n}), \\ \text{Cov}(M_{2,k}, M_{2,n+1}) = \alpha_{21} \text{Cov}(M_{2,k}, M_{1,n}) + \alpha_{22} \text{Cov}(M_{2,k}, M_{2,n}). \end{cases}$$

Even if it is difficult to compute, the variables $M_{1,k}$ and $M_{2,n}$ are clearly positively correlated.

For the bivariate carbon model, once again, we can infer some results from the fact that some variables are Poisson distributed.

Proposition 3.4.8 (Variances for the carbon model).

For $k \geq 1$, we have $\mathbb{V}(N_k^C) = \lambda$, and for $k \geq 2$, $\mathbb{V}(O_k) = \frac{\beta\lambda(1 - \theta^{k-1})}{1 - \theta}$.

Then, $\mathbb{V}(M_{2,k}^C) = \xi_{2,k} = \lambda \left(\frac{\omega_{21}(1 - \theta) + \beta(1 - \theta^{k-1})}{1 - \theta} \right)$.

For $M_{1,k}^C$, $\mathbb{V}(M_{1,1}^C) = \omega_{12}\lambda$, and for $k \geq 2$, $\mathbb{V}(M_{1,k}^C) = (\omega_{12} + \delta)\lambda + \frac{\beta\lambda(1 - \theta^{k-1})}{1 - \theta} + \beta\delta\lambda$.

Démonstration. For $\mathbb{V}(M_{1,k}^C)$, we use the fact that for an integer-valued variable X , $\alpha, \beta \in [0, 1]$, and if the thinning operations are made conditionally independently, then $\text{Cov}(\alpha \circ X, \beta \circ X) = \alpha\beta\mathbb{V}(X)$. □

Proposition 3.4.9 (Covariances for the carbon model).

For $k \geq 1$, we have $\text{Cov}(M_{1,k}^C, N_k^C) = \omega_{12}\lambda$, and $\text{Cov}(M_{2,k}^C, N_k^C) = \omega_{21}\lambda$.

Then, if $k \geq 2$, we get $\text{Cov}(M_{1,k}^C, N_{k-1}^C) = (\delta + \beta)\lambda$, and $\text{Cov}(M_{2,k}^C, N_{k-1}^C) = \beta\lambda$.

If $k \geq 3$, for $2 \leq j \leq k - 1$, $\text{Cov}(M_{1,k}^C, N_{k-j}^C) = \text{Cov}(M_{2,k}^C, N_{k-j}^C) = \beta\theta^{j-1}\lambda$.

Eventually, if $j > k$, then $\text{Cov}(M_{1,k}^C, N_j^C) = \text{Cov}(M_{2,k}^C, N_j^C) = 0$.

Proposition 3.4.10 (Covariances of the $(M_{j,k}^C)_{k \in \mathbb{N}, j \in \{1,2\}}$).

First, $\text{Cov}(M_{1,1}^C, M_{2,1}^C) = \omega_{12}\omega_{21}\lambda$.

For $k \geq 2$, $\text{Cov}(M_{1,1}^C, M_{2,k}^C) = \omega_{12}\beta\theta^{k-2}\lambda$, and $\text{Cov}(M_{1,k}^C, M_{2,1}^C) = \omega_{21}\beta\theta^{k-2}\lambda$.

Then, for $k \geq 2$, $\text{Cov}(M_{1,k}^C, M_{2,k}^C) = (\omega_{12}\omega_{21} + \beta\delta)\lambda + \frac{\beta\lambda(1 - \theta^{k-1})}{1 - \theta}$.

Now, for $k, j \geq 2$: if $j = k - 1$, $\text{Cov}(M_{1,k}^C, M_{2,j}^C) = \omega_{21}(\beta + \delta)\lambda + \frac{\beta\lambda(1 - \theta^{k-2})}{1 - \theta}$,

if $j \leq k - 2$, $\text{Cov}(M_{1,k}^C, M_{2,j}^C) = \omega_{21}\beta\theta^{k-j-1}\lambda + \frac{\beta\lambda(1 - \theta^{k-j-1})}{1 - \theta}$,

eventually, if $j > k$, $\text{Cov}(M_{1,k}^C, M_{2,j}^C) = (\omega_{12} + \theta\delta)\beta\theta^{j-k-1}\lambda + \frac{\beta\lambda(1 - \theta^{j-k-1})}{1 - \theta}$.

Démonstration. For $k \geq 2$, by developing,

$\text{Cov}(M_{1,k}^C, M_{2,k}^C) = \mathbb{V}(O_k) + \text{Cov}(\omega_{12} \circ N_k^C, \omega_{21} \circ N_k^C) + \text{Cov}(\beta \circ N_{k-1}^C, \delta \circ N_{k-1}^C)$. The other computations are similar. □

Therefore, contrary to the classical BINAR(1) model, for the bivariate carbon model, it is possible to compute explicitly all the covariances of the counting processes. It is mainly due to the fact there is no real crossing dependence between the two lines for this model, we simply have a joint dependence thanks to the variable O_k which is involved in both expressions of $M_{1,k}^C$ and $M_{2,k}^C$.

As a summary, through these covariances results, we discovered and enhanced some differences of behaviour between the two models of this paper.

3.5 Asymptotic behaviour of the BINAR(1) process

$(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$

In this section, we study for $i \in \{1, 2\}$ the sequences $(\gamma_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$, which as a recall, correspond to the means of the variables $(M_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$.

This appears necessary before studying proper ruin probabilities, because it allows to characterize the asymptotic behaviour of the risk process $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, and identify a potential divergence. In particular, links can be made with the net profit condition (Proposition 3.4.3).

We display here several properties to characterize the joint behaviour of the two sequences. As a recall, in Proposition 3.4.1 the values of the limits are already specified in case the two sequences converge.

Proposition 3.5.1 (Equivalent characterizations).

- i) $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded if and only if $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded.
- ii) $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converges if and only if $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converges.
- iii) The two sequences $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ and $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ are bounded if and only if they converge.

Démonstration. i) It holds that $\gamma_{2,k+1} \leq \alpha_{21}M_1 + \lambda_2 + \alpha_{22}\gamma_{2,k}$ if $M_1 > 0$ is an upper bound of $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$. By defining $t_0 = \gamma_{2,0}$, and $t_{k+1} = \alpha_{22}t_k + \alpha_{21}M_1 + \lambda_2$, we get $\gamma_{2,k} \leq t_k$ for $k \in \mathbb{N}$. Moreover, $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converges according to Lemma 3.4.1, so it is bounded. We deduce that $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded, and the proof is similar for the converse.

ii) We assume $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converges. Let us note l_1 its limit. Let $0 < \varepsilon \leq 1$ be a real number, and $N_0 \in \mathbb{N}$ such that for $k \geq N_0$, $|\gamma_{1,k} - l_1| < \varepsilon$. Then, for $k \geq N_0$,

$$\alpha_{21}(l_1 - \varepsilon) + \alpha_{22}\gamma_{2,k} + \lambda_2 \leq \gamma_{2,k+1} \leq \alpha_{21}(l_1 + \varepsilon) + \alpha_{22}\gamma_{2,k} + \lambda_2 .$$

Let us define $(u_k)_{k \geq N_0}$ and $(v_k)_{k \geq N_0}$ such that :

$$\begin{cases} u_{N_0} = v_{N_0} = \gamma_{2,N_0} , \\ u_{k+1} = \alpha_{21}(l_1 - \varepsilon) + \alpha_{22}u_k + \lambda_2 , \\ v_{k+1} = \alpha_{21}(l_1 + \varepsilon) + \alpha_{22}v_k + \lambda_2 . \end{cases}$$

Then, $u_k \leq \gamma_{2,k} \leq v_k$ for $k \geq N_0$. Moreover, the sequences $(u_k)_k$ and $(v_k)_k$ converge thanks to Lemma 3.4.1, respectively to $\frac{\alpha_{21}(l_1 - \varepsilon) + \lambda_2}{1 - \alpha_{22}}$, and $\frac{\alpha_{21}(l_1 + \varepsilon) + \lambda_2}{1 - \alpha_{22}}$.

So there exists $N_1 \in \mathbb{N}$ such that for $k \geq N_1 \geq N_0$, we have $\left| u_k - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \right| < \varepsilon$, and $\left| v_k - \lim_{k \rightarrow \infty} v_k \right| < \varepsilon$. Then, for $k \geq N_1$,

$$\frac{\lambda_2 + \alpha_{21}l_1}{1 - \alpha_{22}} - \varepsilon \frac{2l_1\alpha_{21} + \lambda_2}{1 - \alpha_{22}} \leq \gamma_{2,k} \leq \frac{\lambda_2 + \alpha_{21}l_1}{1 - \alpha_{22}} + \varepsilon \frac{\lambda_2\alpha_{21}(2l_1 + 1)}{1 - \alpha_{22}} .$$

We deduce that $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge, and its limit is $\frac{\lambda_2 + \alpha_{21}l_1}{1 - \alpha_{22}}$.

The proof would be the same for the converse.

iii) One sense is obvious since a converging sequence is always bounded.

Now, we assume the sequences are bounded.

We consider the matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ and the vector $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$. Moreover, we note

$$Z_k = \begin{pmatrix} \gamma_{1,k} \\ \gamma_{2,k} \end{pmatrix} . \text{ Then, for } k \in \mathbb{N}, Z_{k+1} = AZ_k + L = A^{k+1}Z_0 + \left(\sum_{i=0}^k A^i \right) L .$$

The aim is to know if the sequence of 2D-vectors $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ can be bounded without converging.

Some linear algebra theorems ensure that for a given matrix $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}^*$, the sequence $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converges if its spectral radius $\rho(M) = \sup\{|\xi|, \xi \in \text{Sp}(M)\}$ satisfies $\rho(M) < 1$, and the limit is the matrix 0 in that case.

Moreover, if $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded in $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, it implies that $\rho(M) \leq 1$. If in addition M is diagonalizable, then the converse assertion is true.

Therefore, let us focus on the spectrum of A . Its characteristic polynomial is :

$$\chi_A(X) = \det(X.I_2 - A) = X^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})X + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) . \quad (3.17)$$

Thus, the matrix A has two real eigenvalues,

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} - \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}}}{2} , \\ \xi_2 = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}}}{2} , \end{cases} \quad (3.18)$$

$\xi_1 = \xi_2$ is equivalent to $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, and $\alpha_{12} = 0$ or $\alpha_{21} = 0$. In that particular case, $\xi_1 = \xi_2 = \alpha_{11} < 1$, and both sequences converge according to Proposition 3.5.2, i).

Otherwise, $\xi_1 < \xi_2$, and A is diagonalizable. There exists $W \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ such that

$$A = W \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} W^{-1}, \text{ that is to say, for } k \in \mathbb{N},$$

$$Z_k = \left[W \begin{pmatrix} \xi_1^k & 0 \\ 0 & \xi_2^k \end{pmatrix} W^{-1} \right] Z_0 + \left[W \begin{pmatrix} \frac{1 - \xi_1^k}{1 - \xi_1} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \xi_2^k}{1 - \xi_2} \end{pmatrix} W^{-1} \right] L . \quad (3.19)$$

If $\xi_1 = 1$, or $\xi_2 = 1$, we have to replace $\frac{1 - \xi_1^k}{1 - \xi_1}$ or $\frac{1 - \xi_2^k}{1 - \xi_2}$ by k .

As a summary, here, $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converges (towards 0) $\iff |\xi_1| < 1$ and $|\xi_2| < 1$, and $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded $\iff |\xi_1| \leq 1$ and $|\xi_2| \leq 1$.

Regarding these equivalences and Equation 3.19,

$$\left(\sum_{i=0}^k A^i \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ is bounded} \Rightarrow (A^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converges towards 0} \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^k A^i \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converges} .$$

So, all in all, by also considering the term with Z_0 , if $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converges (towards 0), then $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converges too.

Now, we look at what happens if $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded without converging.

It implies $|\xi_1| \leq 1$, $|\xi_2| \leq 1$, and there exists $i \in \{1, 2\}$ such that $|\xi_i| = 1$.

We can show more precisely that $|\xi_1| < 1$, and $\xi_2 = 1$.

Indeed, $\xi_1 + \xi_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} \geq 0$, and $\xi_1 \xi_2 = \det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$. So $|\xi_1 \xi_2| < 1$. Thus, if we had $|\xi_1| = 1$, since $\xi_1 < \xi_2$, then $\xi_1 = -1$. But it implies $|\xi_2| < 1$ since $|\xi_1 \xi_2| < 1$, so $\xi_2 + \xi_1 < 0$, which is a contradiction.

Thus, in that case, the sequence $(A^k Z_0)_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded, whereas $\left[\left(\sum_{i=0}^k A^i \right) L \right]_{k \in \mathbb{N}}$ diverges.

So, all in all, $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diverges. So $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ cannot be bounded without converging.

Therefore, we get what we wanted,

$$(Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ bounded} \Rightarrow (A^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converges (towards 0)} \Rightarrow (Z_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converges}.$$

To go further, we may look at more precise conditions on the α_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$ to have the convergence. As a recall, the convergence of $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is equivalent to having $|\xi_1| < 1$ and $|\xi_2| < 1$.

First $|\xi_1| < 1 \iff H^-(A) < 2$, where

$$H^-(A) = \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{21} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\sqrt{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}}.$$

Then, $|\xi_2| < 1 \iff H^+(A) < 2$, with

$$H^+(A) = \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{21} + (\alpha_{11} + \alpha_{22})\sqrt{(\alpha_{11} + \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}}.$$

We note that $0 \leq H^-(A) \leq H^+(A)$, so $|\xi_2| < 1 \Rightarrow |\xi_1| < 1$.

With some calculus, we deduce that a necessary condition for $H^+(A) < 2$ is $\alpha_{12}\alpha_{21} + \max(\alpha_{11}, \alpha_{22})^2 < 1$.

Moreover, since $|\xi_2| < 1 \Rightarrow |\xi_1| < 1$, we deduce that $|\xi_2| < 1$ is *the* necessary and sufficient condition for the convergence of $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ and $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Furthermore, some other sufficient conditions hold by using the relations outlined above, $\xi_1 + \xi_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} \geq 0$, and $|\det A| = |\xi_1 \xi_2| < 1$.

If $\alpha_{11} + \alpha_{22} \geq 1$ and $\alpha_{11}\alpha_{22} \leq \alpha_{12}\alpha_{21}$, then $\xi_1 \leq 0$, and $\xi_2 \geq 1$, and thus, $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diverge. Indeed, $\alpha_{11}\alpha_{22} \leq \alpha_{12}\alpha_{21} \iff \det A = \xi_1 \xi_2 \leq 0$.

Conversely, if $\alpha_{11} + \alpha_{22} < 1$ and $\alpha_{11}\alpha_{22} \geq \alpha_{12}\alpha_{21}$, then $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 < 1$, and $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge. \square

Now, we propose an overview of some conditions related with the convergence of $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ and $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$. It may be sufficient as well as necessary conditions. However, what corresponds to *the necessary and sufficient condition* is outlined at the end. As this one is not the most concise, we chose to present some simpler and more understandable conditions before.

Proposition 3.5.2 (Conditions for the convergence).

- i) If $\alpha_{12} = 0$, or $\alpha_{21} = 0$, then the two sequences converge.
- ii) We assume $\max(\alpha_{11} + \alpha_{21}, \alpha_{12} + \alpha_{22}) < 1$. Then, the sequences converge.
- iii) Let us assume that $\min(\alpha_{11} + \alpha_{21}, \alpha_{12} + \alpha_{22}) \geq 1$. Then, $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{1,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{2,k} = +\infty$.
- iv) A necessary condition for the convergence is $\max(\alpha_{11}, \alpha_{22})^2 + \alpha_{12}\alpha_{21} < 1$.
- v) a) A sufficient condition for the divergence is having both $\alpha_{11} + \alpha_{22} \geq 1$, and $\alpha_{11}\alpha_{22} \leq \alpha_{12}\alpha_{21}$.
- b) A sufficient condition for the convergence is having both $\alpha_{11} + \alpha_{22} < 1$, and $\alpha_{11}\alpha_{22} \geq \alpha_{12}\alpha_{21}$.
- vi) Eventually, the convergence of the sequences *is equivalent to*
$$\frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}}}{2} < 1.$$

Démonstration. i) If $\alpha_{12} = 0$, $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ converges by Lemma 3.4.1. It is similar if $\alpha_{21} = 0$.

ii) We note $\Phi = \max(\alpha_{11} + \alpha_{21}, \alpha_{12} + \alpha_{22})$, and for $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_k = \gamma_{1,k} + \gamma_{2,k} \geq 0$.

Therefore, $\Gamma_{k+1} \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \Phi\gamma_{1,k} + \Phi\gamma_{2,k} = \lambda_1 + \lambda_2 + \Phi\Gamma_k$. We define $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ by $t_0 = \Gamma_0$ and $t_{k+1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \Phi t_k$. We get easily $\Gamma_k \leq t_k$ for $k \in \mathbb{N}$, and since $\Phi < 1$, thanks to Lemma 3.4.1, $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, so it is bounded. Hence, $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded, and by positivity, $(\gamma_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ and $(\gamma_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ are bounded too, and they converge.

iii) With the previous notations, we have this time $\Gamma_{k+1} \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \Gamma_k$ for $k \in \mathbb{N}$, which yields $\Gamma_{k+1} - \Gamma_k \geq \lambda_1 + \lambda_2$. So $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k = \infty$.

We deduce that $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{1,k} = \infty$, or $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{2,k} = \infty$. If we assume that $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{1,k} = \infty$, then, since $\gamma_{2,k+1} = \lambda_2 + \alpha_{21}\gamma_{1,k} + \alpha_{22}\gamma_{2,k} \geq \alpha_{21}\gamma_{1,k}$, and $\alpha_{21} > 0$ (because $\alpha_{21} + \alpha_{11} \geq 1$ and $\alpha_{11} < 1$), we deduce that $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{2,k} = \infty$. It would be similar by starting from $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{2,k} = \infty$.

iv), v), and vi), were already done at the end of the proof of Proposition 3.5.1. \square

3.6 Ruin probabilities

In this section, we derive some ruin probabilities related with the two models. After having displayed the results, we discuss the possibility of a comparison between both models, and the sensitivity analysis according to the parameters of each model.

3.6.1 With light-tailed distributions

In this section, we propose results in case all the distributions of the different types of losses are light-tailed. In particular, for each model, we manage to derive the expression of the corresponding Lundberg equation, and we deduce the existence of an adjustment coefficient.

So as not to merge and confuse the properties related to each model, we first study the model with a classical BINAR(1) process from Equation 3.7, then the carbon model from Equation 3.3.

3.6.1.1 Results for the classical BINAR(1) model

We display the moment generating function (m.g.f.) of S_n in the next proposition. Similarly as for [Ma et al. \(2015\)](#) for instance, we express it as a multivariate function, with one variable corresponding to one type of loss. Thus, things are clearer, and it allows us to derive the related Lundberg equation further. Then, we refer to the large deviations theory developed by Glynn and Whitt (in [Glynn and Whitt \(1994b\)](#)) and its applications to ruin theory (see e.g. [Nyrhinen \(1998\)](#) and [Müller and Pflug \(2001\)](#)) to derive the existence of the adjustment coefficient for our "non-i.i.d." context.

Concerning the subset where it is finite, assuming $M_{X_l}(t) < \infty$ for $l \in \{1, 2\}$, $\max(\alpha_{11}, \alpha_{21})M_{Y_1}(t) < 1$, and $\max(\alpha_{12}, \alpha_{22})M_{Y_2}(t) < 1$ should be a sufficient condition. More cautiously, we can replace the two previous conditions by $\left(\min_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{ij}\right) M_{Y_l}(t) < 1$ for $l \in \{1, 2\}$.

Proposition 3.6.1 (Moment-generating function in 2D).

Let us assume that the 4 distributions of the losses are light-tailed (respectively those of X_1 , X_2 , Y_1 , and Y_2). Then, the m.g.f. of S_n is, for $(r, s, t, u) \in \mathbb{R}_+^4$ such that $M_{X_1}(r) < \infty$, $M_{X_2}(s) < \infty$, and $\left(\min_{1 \leq i, j \leq 2} \alpha_{ij}\right) M_{Y_l}(t) < 1$ for $l \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_n}(r, s, t, u) &= \exp \left[\lambda_1 \left(M_{X_1}(r) M_{Y_1}(t) \sum_{i=0}^{n-1} g_i(M_{Y_1}(t), M_{Y_2}(u)) \right) \right] \\ &\times \exp \left[\lambda_2 \left(M_{X_2}(s) M_{Y_2}(u) \sum_{i=0}^{n-1} h_i(M_{Y_1}(t), M_{Y_2}(u)) \right) - n(\lambda_1 + \lambda_2) \right] \\ &\times \exp \left[\gamma_{1,0}(g_n(M_{Y_1}(t), M_{Y_2}(u)) - 1) + \gamma_{2,0}(h_n(M_{Y_1}(t), M_{Y_2}(u)) - 1) \right], \end{aligned} \tag{3.20}$$

where, for $(t, u) \in \mathbb{R}_+^2$, and $\overline{\alpha_{ij}} = 1 - \alpha_{ij}$,

$$\begin{cases} g_0(t, u) = h_0(t, u) = 1, \\ g_1(t, u) = (\overline{\alpha_{11}} + \alpha_{11}t)(\overline{\alpha_{21}} + \alpha_{21}u), \\ h_1(t, u) = (\overline{\alpha_{12}} + \alpha_{12}t)(\overline{\alpha_{22}} + \alpha_{22}u). \end{cases} \tag{3.21}$$

And for $n \geq 1$,

$$\begin{cases} g_{n+1}(t, u) = g_1(t, g_n(t, u), u, h_n(t, u)), \\ h_{n+1}(t, u) = h_1(t, g_n(t, u), u, h_n(t, u)). \end{cases} \tag{3.22}$$

The proof presents some similarities with the one for Proposition 5 of [Cossette et al. \(2010\)](#), or Proposition 3.1 of [Ma et al. \(2015\)](#), although we have 4 kinds of losses here instead of 2 or 1 in the models of these papers.

Démonstration. We define the probability-generating function (p.g.f.) P_n :

$$P_n(r, s, t, u) = \exp\left(r^{N_{1,1}+\dots+N_{1,n}} s^{N_{2,1}+\dots+N_{2,n}} t^{M_{1,1}+\dots+M_{1,n}} u^{M_{2,1}+\dots+M_{2,n}}\right).$$

After that, we obtain the m.g.f. simply thanks to the relation :

$$\mathcal{M}_{S_n}(r, s, t, u) = P_n(M_{X_1}(r), M_{X_2}(s), M_{Y_1}(t), M_{Y_2}(u)).$$

It is possible to compute P_n by induction for $n \in \mathbb{N}^*$. However, it would be quite heavy to write, and instead we give some computations for small values of n to give an idea of how it works in general.

$$\text{For } n = 1, \text{ we have } P_1(r, s, t, u) = \mathbb{E}\left(r^{N_{1,1}} s^{N_{2,1}} t^{M_{1,1}} u^{M_{2,1}}\right).$$

So $P_1(r, s, t, u) = \mathbb{E}\left((rt)^{N_{1,1}} (su)^{N_{2,1}} \left(t^{\alpha_{11} \circ M_{1,0}} u^{\alpha_{21} \circ M_{1,0}}\right) \left(t^{\alpha_{12} \circ M_{2,0}} u^{\alpha_{22} \circ M_{2,0}}\right)\right)$. By independence of $N_{1,1}$, $N_{2,1}$, $M_{1,1}$, and $M_{2,1}$,

$$P_1(r, s, t, u) = \mathbb{E}\left((rt)^{N_{1,1}}\right) \mathbb{E}\left((su)^{N_{2,1}}\right) \mathbb{E}\left(t^{\alpha_{11} \circ M_{1,0}} u^{\alpha_{21} \circ M_{1,0}}\right) \mathbb{E}\left(t^{\alpha_{12} \circ M_{2,0}} u^{\alpha_{22} \circ M_{2,0}}\right).$$

Since $N_{1,1} \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $\mathbb{E}\left((rt)^{N_{1,1}}\right) = \exp[\lambda_1(rt - 1)]$.

Similarly, $\mathbb{E}\left((su)^{N_{2,1}}\right) = \exp[\lambda_2(su - 1)]$.

Then, we can write : $\mathbb{E}\left(t^{\alpha_{11} \circ M_{1,0}} u^{\alpha_{21} \circ M_{1,0}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(t^{\alpha_{11} \circ M_{1,0}} u^{\alpha_{21} \circ M_{1,0}} | M_{1,0}\right)\right)$.

Hence, due to the conditional independence of $\alpha_{11} \circ M_{1,0}$ and $\alpha_{21} \circ M_{1,0}$:

$$\mathbb{E}\left(t^{\alpha_{11} \circ M_{1,0}} u^{\alpha_{21} \circ M_{1,0}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(t^{\alpha_{11} \circ M_{1,0}} | M_{1,0}\right) \mathbb{E}\left(u^{\alpha_{21} \circ M_{1,0}} | M_{1,0}\right)\right).$$

Which yields :

$$\mathbb{E}\left(t^{\alpha_{11} \circ M_{1,0}} u^{\alpha_{21} \circ M_{1,0}}\right) = \mathbb{E}\left((1 - \alpha_{11} + \alpha_{11}t)^{M_{1,0}} (1 - \alpha_{21} + \alpha_{21}u)^{M_{1,0}}\right) = \exp[\gamma_{1,0}(g_1(t, u) - 1)].$$

The calculus is similar for $\mathbb{E}\left(t^{\alpha_{12} \circ M_{2,0}} u^{\alpha_{22} \circ M_{2,0}}\right)$.

Similarly, for P_2 , the factor depending on $N_{1,1}$ is :

$$\mathbb{E}\left(r^{N_{1,1}} t^{N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left((rt)^{N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}} | N_{1,1}\right)\right).$$

Therefore, $\mathbb{E}\left(r^{N_{1,1}} t^{N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}}\right) = \mathbb{E}\left((rt)^{N_{1,1}} \mathbb{E}\left(t^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}} | N_{1,1}\right)\right)$.

Eventually, $\mathbb{E}\left(r^{N_{1,1}} t^{N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}}\right) = \exp[\lambda_1(rt g_1(t, u) - 1)]$.

At a higher stage, the factor in P_3 depending on $N_{1,1}$ is :

$$E_3 = \mathbb{E}\left(r^{N_{1,1}} t^{N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ \alpha_{11} \circ N_{1,1}} t^{\alpha_{12} \circ \alpha_{21} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{21} \circ \alpha_{11} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{22} \circ \alpha_{21} \circ N_{1,1}}\right).$$

Once again, $E_3 = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(r^{N_{1,1}} t^{N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ \alpha_{11} \circ N_{1,1}} t^{\alpha_{12} \circ \alpha_{21} \circ N_{1,1}}\right.\right.$
 $\left.\left.\times u^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{21} \circ \alpha_{11} \circ N_{1,1}} u^{\alpha_{22} \circ \alpha_{21} \circ N_{1,1}} | N_{1,1}, \alpha_{11} \circ N_{1,1}, \alpha_{21} \circ N_{1,1}\right)\right]$.

So

$$E_3 = \mathbb{E}\left[(rt)^{N_{1,1}} t^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} [(1 - \alpha_{11} + \alpha_{11}t)(1 - \alpha_{21} + \alpha_{21}u)]^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}}\right.$$

$$\left.\times u^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}} [(1 - \alpha_{12} + \alpha_{12}t)(1 - \alpha_{22} + \alpha_{22}u)]^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}}\right].$$

Which corresponds to $E_3 = \mathbb{E} \left[(rt)^{N_{1,1}} (t.g_1(t, u))^{\alpha_{11} \circ N_{1,1}} (u.h_1(t, u))^{\alpha_{21} \circ N_{1,1}} \right]$.

It yields eventually :

$$E_3 = \exp[\lambda_1 [(rt) g_1(t.g_1(t, u), u.h_1(t, u)) - 1]] = \exp[\lambda_1 [rt g_2(t, u) - 1]] . \quad (3.23)$$

From this type of reasoning, we can infer the expression of P_n for each $n \in \mathbb{N}$. \square

With the same assumptions on the losses, it is possible to derive the related Lundberg equation, and deduce the existence of the adjustment coefficient regarding the probability $\psi_{sum}(u)$.

Corollary 3.6.1 (Lundberg equation).

We keep the same assumptions, in particular the 4 distributions of the losses are still light-tailed. We can deduce the Lundberg equation associated with the classical BINAR(1) model.

Démonstration. We notice that $G_n : t \mapsto g_n(M_{Y_1}(t), M_{Y_2}(t))$ and $H_n : t \mapsto h_n(M_{Y_1}(t), M_{Y_2}(t))$ allow to define nondecreasing sequences, in this sense : for all $t \in \mathbb{R}_+$, and $n \in \mathbb{N}$, $G_n(t) \leq G_{n+1}(t)$, and the same thing for H_n . It may be proved easily by induction.

Therefore, $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges towards a function g_∞ . Similarly, $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges towards h_∞ . In particular, $G_n(0) = 1$ for each n , so $g_\infty(0) = 1$. Similarly, $h_\infty(0) = 1$.

We could work on the whole interval \mathbb{R}_+ , and $G_n(t)$, $H_n(t)$, $g_\infty(t)$, and $h_\infty(t)$ might be infinite. But from now, we are going to restrict on the maximal interval I such that $g_\infty(t) < \infty$ and $h_\infty(t) < \infty$ for $t \in I$.

It follows the Lundberg equation associated for $t \in I$ is

$$(c_1 + c_2)t = \lambda_1 (M_{X_1}(t)M_{Y_1}(t)g_\infty(t) - 1) + \lambda_2 (M_{X_2}(t)M_{Y_2}(t)h_\infty(t) - 1) . \quad (3.24)$$

By writing the relations from Equation 3.22 for $n \rightarrow \infty$, it yields :

$$\begin{cases} g_\infty(t) = g_1(M_{Y_1}(t)g_\infty(t), M_{Y_2}(t)h_\infty(t)) \\ h_\infty(t) = h_1(M_{Y_1}(t)g_\infty(t), M_{Y_2}(t)h_\infty(t)) \end{cases} \quad (3.25)$$

Then, it is possible to deduce the explicit expressions of g_∞ and h_∞ .

For the general case, even if the expressions are quite heavy, it is possible to handle them.

For g_∞ , it yields :

$$g_\infty(t) = \frac{2\bar{\alpha}_{11}(\bar{\alpha}_{21} + \bar{\alpha}_{12}M_{Y_2}(t)(\alpha_{21} - \alpha_{22}))}{1 - \alpha_{11}\bar{\alpha}_{21}M_{Y_1}(t) - \alpha_{22}\bar{\alpha}_{12}M_{Y_2}(t) - (\alpha_{21} - \alpha_{22})(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{12})M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t) - \sqrt{\Delta(t)}} , \quad (3.26)$$

where $\Delta(t) = b_1(t)^2 - 4b_2(t)b_0(t)$, and

$$\begin{cases} b_0(t) = \bar{\alpha}_{11}(\bar{\alpha}_{21} + \bar{\alpha}_{12}M_{Y_2}(t)(\alpha_{21} - \alpha_{22})) , \\ b_1(t) = -1 + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{21}M_{Y_1}(t) + \alpha_{22}\bar{\alpha}_{12}M_{Y_2}(t) + (\alpha_{21} - \alpha_{22})(\alpha_{11}\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{11}\alpha_{12})M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t) , \\ b_2(t) = \alpha_{12}M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t)(\alpha_{11}M_{Y_1}(t)(\alpha_{21} - \alpha_{22}) + \alpha_{22}) . \end{cases} \quad (3.27)$$

By starting from the two relations of Equation 3.25, and by rearranging them, we find that g_∞ must satisfy : $0 = b_0(t) + b_1(t)g_\infty(t) + b_2(t)(g_\infty(t))^2$, where $b_0(\cdot)$, $b_1(\cdot)$ and $b_2(\cdot)$ are the same as in Equation 3.27.

Then, since $\Delta(t)$ is nonnegative, the two possible solutions are

$$G_-(t) = \frac{-b_1(t) - \sqrt{\Delta(t)}}{2b_2(t)} , \text{ and } G_+(t) = \frac{-b_1(t) + \sqrt{\Delta(t)}}{2b_2(t)} .$$

To determine which one is the right solution, we can assess for $t = 0$, and use the fact that $g_\infty(0) = 1$. We deduce $G_+(0)$ is the right solution when $t = 0$, and then, by continuity of $g_\infty(\cdot)$, $G_+(t)$ is the right solution for each $t \in I$.

Eventually, we rearrange the expression of $g_\infty(t) = G_+(t)$ by multiplying the numerator and the denominator by $-b_1(t) - \sqrt{\Delta(t)}$: $g_\infty(t) = \frac{2b_0(t)}{-b_1(t) - \sqrt{\Delta(t)}}$.

We can check that, when $\alpha_{12} = 0$, we find the same expression as in Equation 3.30 below (since $b_2(t) = 0$ in particular).

All the reasoning would be the same to determine $h_\infty(t)$. Actually, we can check both expressions are symmetric, due to the symmetries of the problem.

$$h_\infty(t) = \frac{2\bar{\alpha}_{22}(\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{21}M_{Y_1}(t)(\alpha_{12} - \alpha_{11}))}{1 - \alpha_{11}\bar{\alpha}_{21}M_{Y_1}(t) - \alpha_{22}\bar{\alpha}_{12}M_{Y_2}(t) - (\alpha_{12} - \alpha_{11})(\alpha_{22}\bar{\alpha}_{21} + \bar{\alpha}_{22}\alpha_{21})M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t) - \sqrt{W(t)}}, \quad (3.28)$$

where $W(t) = r_1(t)^2 - 4r_2(t)r_0(t)$, and

$$\begin{cases} r_0(t) = \bar{\alpha}_{22}(\bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{21}M_{Y_1}(t)(\alpha_{12} - \alpha_{11})), \\ r_1(t) = -1 + \alpha_{11}\bar{\alpha}_{21}M_{Y_1}(t) + \alpha_{22}\bar{\alpha}_{12}M_{Y_2}(t) + (\alpha_{12} - \alpha_{11})(\alpha_{22}\bar{\alpha}_{21} + \bar{\alpha}_{22}\alpha_{21})M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t), \\ r_2(t) = \alpha_{21}M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t)(\alpha_{22}M_{Y_2}(t)(\alpha_{12} - \alpha_{11}) + \alpha_{11}). \end{cases} \quad (3.29)$$

□

Remark 3.6.1. For the particular case where $\alpha_{12} = 0$, the equation regarding g_∞ can be solved easily. Thus, the expressions are much simpler, in particular the square root disappear.

$$\begin{cases} g_\infty(t) = \frac{\bar{\alpha}_{11}(\bar{\alpha}_{21} + M_{Y_2}(t)(\alpha_{21} - \alpha_{22}))}{1 - \alpha_{11}\bar{\alpha}_{21}M_{Y_1}(t) - \alpha_{22}M_{Y_2}(t) - \alpha_{11}(\alpha_{21} - \alpha_{22})M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t)}, \\ h_\infty(t) = \frac{\bar{\alpha}_{22}}{1 - \alpha_{22}M_{Y_2}(t)}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Naturally, the expressions would be symmetric by assuming instead that $\alpha_{21} = 0$.

Then, from the expression of the Lundberg equation, we infer the existence of the adjustment coefficient.

Corollary 3.6.2 (Existence of the adjustment coefficient). We keep the same assumptions as before. Then, there exists an adjustment coefficient κ such that $\psi_{sum}(u) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa(u_1+u_2)}$ when $u = (u_1, u_2) \rightarrow \infty$.

Démonstration. As mentioned previously, we refer to the large deviations theory, and its application to ruin theory.

Let us define, for $t \in \mathbb{R}_+$, $f_1(t)$ such that the Lundberg equation may be written $f_1(t) = 0$. According to Equation 3.24,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \lambda_1 (M_{X_1}(t)M_{Y_1}(t)g_\infty(t) - 1) \\ &\quad + \lambda_2 (M_{X_2}(t)M_{Y_2}(t)h_\infty(t) - 1) - (c_1 + c_2)t. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Let us justify f_1 is convex, and (at least) \mathcal{C}^1 in 0.

A moment generating function is always nondecreasing, positive, convex, and indefinitely differentiable in a neighborhood of 0.

Hence, f_1 is \mathcal{C}^1 in a neighborhood of 0, since $g_\infty(\cdot)$ and $h_\infty(\cdot)$ are \mathcal{C}^1 in 0, as compositions of functions which are \mathcal{C}^1 , and because their denominators are not null in a neighborhood of 0.

Let us give some properties about g_∞ . For $n \geq 1$, G_n is convex because the product of two positive, nondecreasing and convex functions is convex, and then, as each G_n is nondecreasing,

positive and convex on I , g_∞ is also nondecreasing, positive and convex. It is true for h_∞ too, and by sum of convex functions, we deduce f_1 is convex.

Since $g_\infty(0) = 1$ and $h_\infty(0) = 1$, it yields in particular $f_1(0) = 0$.

Then, by deriving, we get

$$f_1'(0) = \lambda_1 \mu_{X_1} + \lambda_2 \mu_{X_2} + \gamma_{1,\infty} \mu_{Y_1} + \gamma_{2,\infty} \mu_{Y_2} - (c_1 + c_2). \quad (3.32)$$

To establish that, we might in particular use the fact $g_\infty(0) = 1$, and the relations it implies between $b_0(0)$, $b_1(0)$, and $b_2(0)$ (as they are defined in Equation 3.27).

thanks to the net profit condition for this model (Proposition 3.4.3), $f_1'(0) < 0$, hence f_1 is negative on a neighborhood of 0. As before, we note $I = [0, x_0[$ the maximal interval where f_1 is defined, namely when g_∞ and h_∞ are finite. We have clearly $\lim_{t \rightarrow x_0^-} f_1(t) = +\infty$. Therefore, f_1

has at least one root on $]0, x_0[$, and the smallest root is the adjustment coefficient κ satisfying the asymptotic relation outlined above. \square

Remark 3.6.2. Actually, we have to be precise and distinguish between the possible types of light-tailed distributions. This previous property is always true for distributions such that $M_X(t) < \infty$ for $t \in [0, M[$, where $M \in]0, \infty]$, but it would not be necessary true if we had $M_X(t) < \infty$ for $t \in [0, M]$ with $0 < M < \infty$. However, these types are rare, so as not to overcharge the corresponding studies, for the rest of the paper we do not take into account this kind of distribution.

It would be difficult to compute the precise adjustment coefficient in general, even for the case of 4 exponential distributions. Indeed, we would obtain heavy or hardly intelligible expressions. Instead, we provide an upper bound for such a case.

Proposition 3.6.2 (Upper bound of κ with 4 exponential distributions).

We assume $X_1 \sim \text{Exp}(\alpha)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\beta)$, $Y_1 \sim \text{Exp}(\delta)$, $Y_2 \sim \text{Exp}(\eta)$, with $\alpha, \beta, \delta, \eta > 0$. Therefore, regarding the coefficient κ from Corollary 3.6.2,

$$\kappa \leq \frac{\alpha + \beta + \delta + \eta}{4} - \frac{\lambda_1 \wedge \lambda_2}{c_1 + c_2}. \quad (3.33)$$

Démonstration. We define, for $n \in \mathbb{N}$, the sum of $R_{1,n}$ and $R_{2,n}$ (where $C = c_1 + c_2$, and $U = u_1 + u_2$) :

$$Q_n = U + Cn - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{N_{1,k}} X_{1,k,i} + \sum_{i=1}^{N_{2,k}} X_{2,k,i} + \sum_{i=1}^{M_{1,k}} Y_{1,k,i} + \sum_{i=1}^{M_{2,k}} Y_{2,k,i} \right). \quad (3.34)$$

For $k \geq 1$, since $N_{1,k} \leq M_{1,k}$, and Y_1 is a positive variable, we have

$$2 \sum_{i=1}^{N_{1,k}} \min(X_{1,k,i}, Y_{1,k,i}) \leq \sum_{i=1}^{N_{1,k}} (X_{1,k,i} + Y_{1,k,i}) \leq \sum_{i=1}^{N_{1,k}} X_{1,k,i} + \sum_{i=1}^{M_{1,k}} Y_{1,k,i}.$$

And the same thing for the second line. We define a sequence $(V_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ of i.i.d. variables, such that $V_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 \wedge \lambda_2)$. We assume V is independent of N , M , X and Y . We also define an i.i.d. sequence $(Z_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ such that $Z_{1,1} \sim \text{Exp}(\alpha + \beta + \delta + \eta)$. We remark that $Z_{k,i} \sim \min(X_{1,k,i}, Y_{1,k,i}, X_{2,k,i}, Y_{2,k,i})$ for every $(k, i) \in \mathbb{N}^2$. So, according to the stochastic order :

$$4 \sum_{i=1}^{V_k} Z_{k,i} \leq_{st} 2 \left(\sum_{i=1}^{N_{1,k}} \min(X_{1,k,i}, Y_{1,k,i}) + \sum_{i=1}^{N_{2,k}} \min(X_{2,k,i}, Y_{2,k,i}) \right).$$

By defining

$$P_n^{min} = U + Cn - 4 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{V_k} Z_{k,i}, \quad (3.35)$$

we get, for $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \leq_{st} P_n^{min}$.

Hence, with an understandable notation, $\psi_{min}(u) \leq \psi_{sum}(u)$.

By solving the Lundberg equation $sC = (\lambda_1 \wedge \lambda_2) \left(\frac{\alpha + \beta + \delta + \eta}{\alpha + \beta + \delta + \eta - 4s} - 1 \right)$, we find

$$\psi_{min}(u) \sim D_1 e^{-\kappa_1 U} \quad \text{with} \quad \kappa_1 = \frac{\alpha + \beta + \delta + \eta}{4} - \frac{\lambda_1 \wedge \lambda_2}{C}.$$

Moreover, with this framework, we can apply here the Lundberg inequality for discrete-time risk models, to deduce that $0 < D_1 \leq 1$. \square

It would have been appropriate to have a lower bound for κ , because here, such a lower bound would correspond to an upper bound of the risk incurred. Actually, because of the dependence between the counting processes $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ and $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$, it was more difficult to establish.

Since it is not simple to deduce the expression of the adjustment coefficient for such a model, it should be as well difficult for similar multivariate models with crossing dependence between the lines, but also for unidimensional risk models carrying an autoregression of order $p \geq 2$ (an INAR(p) process typically)-in case this coefficient exists.

3.6.1.2 Study for the bivariate carbon model

In case all the distributions of the losses are light-tailed for the bivariate carbon model, we can compute the associated moment-generating function. As for the previous model, we insist on presenting it as a multivariate function, with one variable corresponding to one type of loss.

Proposition 3.6.3 (M.g.f. of the carbon model). Let us assume X_1 , X_2 , Y_1 and Y_2 are light-tailed. Then, for $(r, s, t, u) \in \mathbb{R}_+^4$ such that $M_{X_1}(r) < \infty$, $M_{X_2}(s) < \infty$, and $\theta M_{Y_1}(t) M_{Y_2}(u) < 1$, we have :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{W_n}(r, s, t, u) &= \exp \left[\lambda M_{X_1}(r) M_{X_2}(s) h_{12}(M_{Y_1}(t)) h_{21}(M_{Y_2}(u)) \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + h_\delta(M_{Y_1}(t)) \sum_{i=1}^{n-1} h_\beta(g_i(M_{Y_1}(t), M_{Y_2}(u))) \right) - n\lambda \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

where, for $t \in \mathbb{R}_+$, $h_{12}(t) = (1 - \omega_{12} + \omega_{12}t)$, $h_\delta(t) = (1 - \delta + \delta t)$, and similarly for $h_{21}(\cdot)$, $h_\beta(\cdot)$, and $h_\theta(\cdot)$. Moreover, the g_i are defined recursively :

$$\begin{cases} g_1(t, u) = tu, & \text{and, for } n \geq 1 \\ g_{n+1}(t, u) = tu h_\theta(g_n(t, u)) \end{cases} \quad (3.37)$$

The computations would be similar to the ones made for Proposition 3.6.1, but we do not present it to avoid overcharging the paper.

Then, in relation with the concrete application, we choose, contrary to the previous model, to study also each line separately, because it could correspond to cases where the company is financially ruined, or where there has been too much pollution.

Thus, for $n \in \mathbb{N}^*$, we define $W_{1,n} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{N_k^C} X_{1,k,i} + \sum_{i=1}^{M_{1,k}^C} Y_{1,k,i} \right)$, and

$$W_{2,n} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{N_k^C} X_{2,k,i} + \sum_{i=1}^{M_{2,k}^C} Y_{2,k,i} \right).$$

We can deduce the corresponding m.g.f. :

Proposition 3.6.4 (M.g.f. of the financial line). Let us assume X_1 and Y_1 are light-tailed. Then, for $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ such that $M_{X_1}(s) < \infty$, $\theta M_{Y_1}(t) < 1$. Then, with the previous notations,

$$\mathcal{M}_{W_{1,n}}(s, t) = \exp \left[\lambda \left(M_{X_1}(s) h_{12}(M_{Y_1}(t)) \left(1 + h_\delta(M_{Y_1}(t)) \sum_{i=1}^{n-1} h_\beta(q_i(M_{Y_1}(t))) \right) - n \right) \right], \quad (3.38)$$

where here, for $t \in \mathbb{R}_+$, $q_1(t) = t$, and for $n \geq 1$, $q_{n+1}(t) = t h_\theta(q_n(t))$.

Proposition 3.6.5 (M.g.f. of the ecological line). Let us assume X_2 and Y_2 are light-tailed. Then, for $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ such that $M_{X_2}(s) < \infty$, $\theta M_{Y_2}(t) < 1$. Then, with the previous notations,

$$\mathcal{M}_{W_{2,n}}(s, t) = \exp \left[\lambda \left(M_{X_2}(s) h_{21}(M_{Y_2}(t)) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} h_\beta(l_i(M_{Y_2}(t))) \right) - n \right) \right], \quad (3.39)$$

where here, for $t \in \mathbb{R}_+$, $l_1(t) = t$, and for $n \geq 1$, $l_{n+1}(t) = t h_\theta(l_n(t))$.

Then, in terms of asymptotic ruin probabilities, we can derive the existence of an adjustment coefficient in all cases.

We first deal with the general case.

Corollary 3.6.3 (Adjustment coefficient κ_C). With the same assumptions as for Proposition 3.6.3, we deduce the existence of an adjustment coefficient related with the model from Equation 3.3, i.e. there exists κ_C such that $\psi_{sum}^C(u) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa_C u}$.

Démonstration. We apply the same reasoning as for Corollaries 3.6.1 and 3.6.2, in particular in terms of convexity. From the expression in Proposition 3.6.3, we deduce the related Lundberg equation which may be written $f_2(t) = 0$, where :

$$f_2(t) = \lambda [M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) h_{12}(M_{Y_1}(t)) h_{21}(M_{Y_2}(t)) h_\delta(M_{Y_1}(t)) h_\beta(g_\infty(t)) - 1] - (c_1 + c_2)t, \quad (3.40)$$

and

$$g_\infty(t) = \frac{(1 - \theta) M_{Y_1}(t) M_{Y_2}(t)}{1 - \theta M_{Y_1}(t) M_{Y_2}(t)}. \quad (3.41)$$

As it is made in Corollary 3.6.2, we can prove g_∞ is convex and deduce the existence of an adjustment coefficient, written κ_C . \square

As for the classical model, even for the easiest cases, it seems difficult to compute explicitly the adjustment coefficients, but instead we can propose an upper bound :

Proposition 3.6.6 (Upper bound of κ_C with 4 exponential distributions).

We assume $X_1 \sim \text{Exp}(\alpha)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\beta)$, $Y_1 \sim \text{Exp}(\delta)$, $Y_2 \sim \text{Exp}(\eta)$, with $\alpha, \beta, \delta, \eta > 0$. Then :

$$\kappa_C \leq \frac{\alpha + \beta + \delta + \eta}{4} - \frac{\lambda(\omega_{12} \wedge \omega_{21})}{d_1 + d_2}. \quad (3.42)$$

The proof would be similar than for Proposition 3.6.2.

By considering only one of the two lines, it is still possible to derive such a result.

Corollary 3.6.4. With the same assumptions as for Proposition 3.6.4, we can deduce the existence of an adjustment coefficient for this financial line, i.e. there exists κ_1 such that $\psi_1(u_1) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa_1 u_1}$ when $u_1 \rightarrow \infty$.

Corollary 3.6.5. With the same assumptions as for Proposition 3.6.5, we can deduce the existence of an adjustment coefficient for this ecological line, i.e. there exists κ_2 such that $\psi_2(u_2) \stackrel{\log}{\sim} e^{-\kappa_2 u_2}$ when $u_2 \rightarrow \infty$.

Démonstration. By taking the expressions from Propositions 3.6.4 and 3.6.5, we can reproduce the reasoning made in Corollary 3.6.3. For the first line, the Lundberg equation becomes :

$$c_1 t = \lambda \left[M_{X_1}(t) h_{12}(M_{Y_1}(t)) h_{\delta}(M_{Y_1}(t)) \left(1 - \beta + \beta \frac{(1 - \theta) M_{Y_1}(t)}{1 - \theta M_{Y_1}(t)} \right) - 1 \right]. \quad (3.43)$$

And for the second line :

$$c_2 t = \lambda \left[M_{X_2}(t) h_{21}(M_{Y_2}(t)) \left(1 - \beta + \beta \frac{(1 - \theta) M_{Y_2}(t)}{1 - \theta M_{Y_2}(t)} \right) - 1 \right]. \quad (3.44)$$

□

If we are interested in ψ_{or} and ψ_{and} , which are linked respectively with the ruin of at least one of the line, or the ruin of both lines, we can deduce as a direct corollary they have also an exponential decreasing (related with a logarithmic equivalent) when $(u_1, u_2) \rightarrow \infty$.

Indeed, as mentioned in Section 3.3, we have $\psi_{and}^C(u) \leq \min(\psi_1(u_1), \psi_2(u_2))$, and $\psi_{or}^C(u) \leq \psi_1(u_1) + \psi_2(u_2)$.

3.6.2 With the presence of heavy-tailed distributions

In case at least one of the losses distributions is heavy-tailed, we can derive other type of results. We focus mainly on the classical BINAR(1) model in this section, before briefly mentioning the comparison with the bivariate carbon model.

If one of the heavy tails is asymptotically dominating the others, we can derive asymptotics for finite-time ruin probabilities. Such results are already presented in Chapter 1 for the one-dimension version of the BINAR(1) model, and here it would be proved the same way. It also possible if this domination is "shared" by more than one of the distributions. The key properties to derive such results are Proposition X.1.9 and Lemma X.2.2 from the book of [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#), but here we prefer not to overcharge the paper with this kind of result or proof.

Besides, for multivariate models, there exist a class of distributions which generalizes the notion of regularly varying distribution, while settling dependence between the claims : the class of *multivariate regular variations (MRV)* distributions.

We choose the definition used in [Konstantinides and Li \(2016\)](#). There are other ways to define the MRV class, such as in [Maulik and Resnick \(2004\)](#), or [Einmahl et al. \(2021\)](#), but they all refer to the same principle and are very similar.

Definition 3.6.1 (Multivariate regular variations). Let $d \geq 2$ be an integer. The random vector (X_1, \dots, X_d) is said to follow a multivariate regularly varying distribution if there exists a distribution $H \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ and a nondegenerate limit measure ν on $[0, \infty]^d \setminus \{0\}$ if for every Borel set B which is ν -continuous (i.e. $\nu(\partial B) = 0$), we have :

$$\frac{1}{\overline{H}(t)} \mathbb{P} \left(\frac{1}{t} (X_1, \dots, X_d) \in B \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \nu(B) .$$

We may note $(X_1, \dots, X_d) \in \text{MRV}(\alpha, \nu, H)$, or $\text{MRV}_{-\alpha}(\nu, H)$.

From this definition, we infer results when the claims follow a joint MRV distribution. In this way, we relax the assumption made on the mutual independence between the sequences of the amounts of the losses, but we still consider these amounts are i.i.d. as four-dimension random vectors.

Proposition 3.6.7. (Ultimate ruin probability for MRV distribution)

Let us set $A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + w > 1\}$. We assume there exists a distribution $H \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, with $\alpha > 1$, and a nondegenerate measure ν on $[0, \infty]^4 \setminus \{0\}$ such that $\nu(A) > 0$, A is a ν -continuous set, and $(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \in \text{MRV}(\alpha, \nu, H)$. Yet, we still assume the random vectors $(X_{1,k,i}, Y_{1,k,i}, X_{2,k,i}, Y_{2,k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ are i.i.d. Then, there exists $h \in \mathcal{R}_{-(\alpha-1)}$ such that $h(u_1 + u_2) \leq \psi_{sum}(u_1, u_2)$.

Démonstration. We set, for $(k, i) \in \mathbb{N}^2$, $Z_{k,i} = X_{1,k,i} + Y_{1,k,i} + X_{2,k,i} + Y_{2,k,i}$. Thus, $(Z_{k,i})_{(k,i) \in \mathbb{N}^2}$ is a sequence of i.i.d. variables. We also set the sequence of i.i.d. variables $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ such that $L_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_0)$, where $\lambda_0 = \min(\lambda_1, \lambda_2)$. We assume that L is independent of the two-dimension sequences N, M, X and Y . Then, we define, for $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n^{min} = (u_1 + u_2) + (c_1 + c_2)n - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{L_k} Z_{k,i} . \quad (3.45)$$

Therefore, $R_{1,n} + R_{2,n} \leq_{st} R_n^{min}$. We could apply similar inequalities than for Proposition 3.6.2, thanks to the fact that for $k \geq 1$, $N_{1,k} \leq M_{1,k}$ and $N_{2,k} \leq M_{2,k}$, and because the sequences $(N_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ and $(N_{2,k})_{k \in \mathbb{N}}$ are independent.

Let us take $x > 0$. thanks to the assumptions, we can write

$$\mathbb{P}(X_{1,1,1} + Y_{1,1,1} + X_{2,1,1} + Y_{2,1,1} > x) = \mathbb{P} \left(\frac{X_{1,1,1} + Y_{1,1,1} + X_{2,1,1} + Y_{2,1,1}}{x} > 1 \right) .$$

So, $\mathbb{P}(X_{1,1,1} + Y_{1,1,1} + X_{2,1,1} + Y_{2,1,1} > x) = \mathbb{P} \left(\frac{(X_{1,1,1}, Y_{1,1,1}, X_{2,1,1}, Y_{2,1,1})}{x} \in A \right)$, which yields $\overline{F_Z}(x) = \mathbb{P}(X_{1,1,1} + Y_{1,1,1} + X_{2,1,1} + Y_{2,1,1} > x) \sim \nu(A) \overline{H}(x)$, when $x \rightarrow \infty$, Then, since $H \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, we find $F_Z \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

In particular, $\psi^{min}(x) \sim \frac{\lambda_0}{c - \lambda_0 \mu_Z} \int_x^\infty \overline{F_Z}(y) dy$, with $\mu_Z = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \mu_{Y_1} + \mu_{Y_2}$.

thanks to Karamata's theorem (see e.g. [Bingham et al. \(1989\)](#)), there exists a slowly varying function L such that $\int_x^\infty \overline{F_Z}(y) dy \sim \frac{\nu(A)L(x)}{(\alpha - 1)x^{\alpha-1}}$.

It yields the result outlined, with $h(x) = \frac{\lambda_0 \nu(A)L(x)}{(\alpha - 1)(c - \lambda_0 \mu_Z)} x^{-\alpha+1}$. □

It also possible to derive a finite-time result.

Proposition 3.6.8. (Finite-time ruin for a MRV distribution)

Let us fix $T \in \mathbb{N}^*$. With the same assumptions as before, there exists $h_T \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ such that $h_T(u_1 + u_2) \leq \psi_{sum}^T(u_1, u_2)$

Démonstration. For $n \in \mathbb{N}$, we keep the same expression for R_n^{min} as previously. Then, we can operate successive convolutions (see e.g. Proposition X.1.9 of [Asmussen and Albrecher \(2010\)](#)), and we obtain the framework outlined above, with $h_T(x) = \lambda_0 T \nu(A) \overline{H}(x)$ for $x \geq 0$. \square

Once again, it is difficult to derive upper bounds of such ruin probabilities because of the dependence assumptions made for this model.

Remark 3.6.3. We could modify some assumptions, and assume instead that only the distributions of X_1 and X_2 are ruled by a MRV distribution - which would be namely here a bivariate regular variations (BRV) distribution -, and the Y_1 and Y_2 are light-tailed, or conversely. We could also separate the lines of business, and assume the pair (X_1, Y_1) is BRV, or conversely. Otherwise, we could assume there are two couples ruled by a BRV distribution... There are numerous possibilities, and it allows to derive such asymptotics not only for ψ_{sum} , but also, with corresponding assumptions, for ψ_{or} , ψ_{and} , ψ_1 , or ψ_2 .

For the bivariate carbon model from Equation 3.3, we could apply the same types of reasoning to deduce similar asymptotic results.

3.6.3 Comparison and sensitivity analysis

Now, It would be of course interesting to draw precise comparison between the results of both models. As for the chapter 1, one would like to apply stochastic ordering properties, such as Theorems 1.A.3 and 1.A.4 from [Shaked and Shanthikumar \(2007\)](#). Unfortunately, it looks difficult because of the dependence structures involved in each of the model (particularly the classical model), even by trying to propose some reasonable additional assumptions. Nevertheless, regarding the comparisons in terms of risk proposed in Section 3.4, one would like to assert and prove that the ruin probability of the classical model is an upper bound of the one of the carbon model.

In terms of sensitivity, let us look at the classical model first. Intuitively, we would like to prove that the ruin probability $\psi(u)$, seen as a function of any of the parameters (λ_1 , λ_2 , α_{11} , α_{12} , α_{21} , and α_{22}), is nondecreasing. Here also, because of the dependence assumptions, it is difficult to prove in general (or at least by using "straightforward" stochastic comparisons). Instead, we can at least focus on the case where the four distributions involved are light-tailed. Indeed, f_1 , as defined in Equation 3.31, is a nondecreasing function according to each parameter (for g_∞ and h_∞ , this is true by passing to the limit, since it is true for G_n and H_n for each $n \in \mathbb{N}$). Therefore, κ is a nonincreasing function, which means the risk is nondecreasing according to each one of the parameters.

For the carbon model, for the same reasons, it is also complicated to establish a general comparison to encompass the impact of each parameter. Yet, when there are only light tails, by looking at f_2 , we state once again that κ_C is nonincreasing in function of each one of the parameters (λ , β , θ , δ , ω_{12} and ω_{21}). The result is similar for κ_1 and κ_2 , regarding the respective parameters implied in each case.

3.7 Scenarios simulations

3.7.1 Data sources and aggregation method

The *Livre Blanc* indicates that twelve car pieces account for approximately 73% of all components restored after collisions and provides average carbon emission values for the three types of restoration operations (repair of the piece, or replacement with a new piece or a PIEC). Namely, these 12 pieces are : front bumper, rear bumper, fender, headlights, front door, back door, quarter panel (and rear fender), hood, trunk lid (and tail gate), car spoiler, bumper hubcap, and front chassis (and core support).

However, the booklet does not specify the corresponding prices, nor the frequency related to each piece. Yet, it mentions that for each claim, there is an average number of 1.16 new pieces and 0.22 PIEC which are used to replace the damaged pieces in case the reparation is difficult or too costly, resulting in a ratio of 15.9% of the pieces replaced by PIEC. However, as mentioned before, the average carbon emission per claim is 36.2 kgCO₂ for the new pieces, but only 1.3 kgCO₂ for the PIEC, so they account for only 3.5 % of the carbon emissions.

In comparison, the eight most frequently damaged parts named by the Allianz report are : front doors, rear doors, windscreen, side panel, headlights, front bumper, rear bumper, and hood. Moreover, contrary to the *Livre Blanc*, this report provides the estimated number of times each part was affected across Europe, based on claims data scaled from Germany. Given this higher resolution of part-specific frequency, we adopt these eight parts as the basis for our costs and emissions estimation model. Actually, the total number of piece replacements considered by this survey is 48.24 million (see Figure 8 of this report). It concerns only the eight pieces mentioned (and not every possible piece), but the fact it is a quite large number is significant for our estimations.

Yet, we managed to obtain some figures for the most impacted pieces of a car by some partners involved in the drafting of the *Livre Blanc*. Indeed, following an annual survey, BCA Expertise, and Crédit Agricole Assurances provided proportions for what must be the 6 most impacted pieces from this survey : front doors, rear doors, front bumper, rear bumper, hood, and side panel. We can state these six parts are included in the eight ones from Allianz, and the twelve ones from the *Livre Blanc*. More precisely, for each part, we have the average frequency of damages caused by collision claims, and if it is damaged, the frequency of a direct repair (without resorting to piece replacement), or the use of a PIEC.

For consistency, we use the average emission values per action type from the *Livre Blanc*, and apply the Allianz frequency data to simulate the average financial cost per claim related to parts, by combining this with estimated unit prices for new and reused components.

To simulate the financial implications of claim scenarios involving different repair strategies, we estimated the unit costs of parts under the two categories (new pieces or PIEC). These values were not available in the Allianz report ; thus, we relied on average prices gathered from specialized automotive retail platforms and sustainability literature.

New part prices were derived from common price ranges observed on European automotive parts marketplaces such as Oscaro, Mister-Auto, and Norauto, as well as from data cited in sustainability and insurance studies, such as the Allianz report, or a document from the ADEME (the French Agency for Ecological Transition). These estimates reflect typical retail prices for parts relevant to mid-range electric vehicles, particularly the Volkswagen ID.3 model used in the Allianz study.

For reused parts (PIEC), we applied a standard 50% reduction to the new part prices, based on documented practices from industry leaders such as Renault's Re-Factory and Norauto's circular parts programs. This choice is consistent with published savings ranges for remanufactured

components, typically ranging from 30% to 70% off the price of a new part.

For instance, referring to webpages from different French partners, the price of a PIEC is between 50 and 70% of the price of a new part according to Thelem Assurances, Société Générale Assurances, Generali or the ADEME, between 50 and 60% according to Euro Assurance, between 40 and 70% according to AutoConsultant, from 30% to 70% according to MAAF. Besides, in the United Kingdom, this proportion is around 40 %, according to [Gong et al. \(2024\)](#).

Given the lack of standardized prices across different suppliers and models, the 50% benchmark offers a balanced and conservative approximation.

The resulting cost structure was combined with frequency data from the Allianz report and the French *Livre Blanc* to compute weighted average values for each scenario, enabling a realistic and policy-relevant simulation of claim management decisions.

3.7.2 Estimation of part costs

Before presenting the rest of the methodology and the figures, we insist on the fact we are willing to provide conservative lower bounds of the financial costs presented in the remainder of the section. Actually, we already reasoned this way when we considered just above that the price of a PIEC is approximately 50 % of the price of the same pieces sold as a new part.

We chose to think like that because of the quite broad range of prices for spare parts observed on the different websites or sources mentioned above. Moreover, the corresponding prices should depend on the brand or the type of car. Typically, the prices would be higher than these lower bounds for a SUV. Because of these wide different costs, we also decide not to enumerate the different prices for each part considered coming from each source, so as not to overcharge the paper.

As a recall, while the *Livre Blanc* indicates that twelve parts account for 73% of all components restored after collisions, without precisising the specific proportion of each one, the Allianz report provides explicit frequency data for only eight ones, but does not mention their total joint proportion.

Comparing the two lists of parts in Section 3.7.1, we can see that the eight main parts from Allianz are globally included in the twelve ones from the *Livre Blanc*, excepted the windscreen : this can be explained by the fact that the *Livre* treats with a different approach the case of glass breakage (including the windscreen or the car windows), and it is not taken into account in the figures of piece replacement. To simplify, in the remainder of the paper, we will consider the eight parts from Allianz are the most commonly affected. It seems a reasonable assumption based on their inclusion and ordering in the dataset, and since they include key external components such as bumpers, doors, headlights, and windshields, but above all, since it corresponds to a high number of pieces replaced (more than 48 million). Moreover, it seems more prudent to focus only on these eight pieces since for that we possess precise figures from Allianz in terms of frequency to draw the estimations, whereas for the other types of parts such information was difficult to find with enough reliability.

To approximate their representativity, we assume these eight parts capture approximately 80% of the volume within the twelve, which results in an estimated share of : $0.80 \times 0.73 = 0.584$.

This implies that our per-claim cost estimations based on these top parts represent approximately 58.4% of the total average material costs related to post-collision operations. This allows us to scale our results accordingly to approximate full claim-level values.

Table 3.1 presents the estimated average cost per claim of a new part or a PIEC, based on the eight mentioned parts. As suggested, these estimations are partial, but are still quite representative. Actually, two kind of parts are gathered in the same category : the front doors or the rear doors.

Part	Prop. (%)	NP (€)	NP prop. (€)	PIEC (€)	PIEC prop. (€)
Windscreen	24	300	71.46	150	35.73
Front or rear doors	18	350	62.11	175	31.05
Front bumper	17	450	76.68	225	38.34
Rear bumper	15	400	59.54	200	29.77
Side panel	11	400	44.78	200	22.39
Headlights	11	250	27.10	125	13.55
Hood	4	500	22.39	250	11.19
Total	100 %	–	364.04	–	182.02

TABLE 3.1 – Estimated costs per claim for the eight most frequently affected parts (according to the Allianz report).

The second column of Table 3.1 gives the relative proportion of occurrence for each piece considering all the claims registered in the data from the Allianz report (deduced accordingly to the numbers provided).

In the third and fifth columns, we provide the cost of the piece as a new part or a PIEC. Then, in the fourth and sixth columns, we deduce the respective proportional cost per piece for a given claim. It yields, in the last line, the average cost of a piece, depending on if it is a new piece or not.

Eventually, to obtain the resulting average part of the financial cost of a claim due to piece replacement, one has to multiply the two respective totals by the average number of pieces replaced per collision claim (which is as a recall, 1.38) : it yields €502.38 if only new parts are used, and €251.19 when using exclusively parts from the circular economy. As mentioned, these values may be considered as conservative lower-bound estimates for total material costs per collision.

In comparison, the figures from BCA Expertise and Crédit Agricole Assurances are a little different, and we preferred keeping the ones from Allianz to estimate the prices. However, it is still interesting to display them. In the first column of Table 3.2, we show the average frequency of damage caused to a piece when a collision claim happens. Then, in the second column, we precise the average frequency of a repair that does not require the use of a piece replacement, and in the third column, the average frequency of the use of a PIEC including all types of claims, i.e. whether a piece replacement is made or not. Then, in the fourth column, regarding the operation of replacement, we deduce the proportion of PIEC used for each kind of piece.

Part	Frequency (%)	Repair (%)	PIEC (%)	% of PIEC among piece repl.
Front doors	18	60	23	58
Rear doors	15	61	22	56
Front bumper	36	34	6	9.1
Rear bumper	7	57	24	56
Side panel	26	41	12	20
Hood	8	46	11	20

TABLE 3.2 – Proportions related to pieces repair for six parts (from an annual survey by BCA Expertise and Crédit Agricole Assurances).

Towards the Allianz report, these figures rather confirm we can merge the role of the front doors or the rear doors, because the corresponding proportions are very close. Globally, these

figures fit with the proportion of repair with or without piece replacement mentioned in the *Livre Blanc* : indeed, for each claim, there is in average 1.38 pieces replaced, and 1.03 pieces directly repaired. Here, by considering only these six pieces, and taking into account the frequencies in the first column, we have 1.1 pieces damaged per claim, with 0.506 pieces directly repaired, and 0.594 pieces replaced.

Besides, one thing that clearly differs from Table 3.1 is the number of rear bumpers damaged. Otherwise, by considering the corresponding frequencies properly, for the operation of piece replacement, we observe an approximate use of 30 % of PIEC. It is much more than the global figures of 15.9 % for all kinds of pieces mentioned above. We can assume it is due to the fact that it is easier to find a PIEC corresponding to one of these six pieces than for any other type of car piece. Moreover, we can observe the use of PIEC or a direct repair are much less frequent here for the three front pieces which are essential for people’s safety (front bumper, side panel, and hood), whereas PIEC are more used than new pieces for parts which seem less important in that sense (front and rear doors, and rear bumper). It seems consistent, and it should mean the insured client would insist on his safety first, before accepting the use of a PIEC as an environmentally-friendly choice.

What is more, an interesting consideration regarding the eight parts presented in Table 3.1 and the various operations described in the *Livre Blanc* concerns the conditions under which a towing service or replacement vehicle might be needed.

Rather than focusing solely on whether a specific part prevents the vehicle from being driven immediately after the accident, it is more relevant to consider how long the vehicle must remain in the repair shop — a factor that depends on part availability and the complexity of repairs, not only on the nature of the damage. For example, even if the vehicle remains technically drivable after a collision, it may still require a courtesy vehicle if repairs span several days due to logistical delays.

In addition, when reused parts are installed, a different type of inconvenience may arise. If the recycled component fails later — for instance, a door no longer opens properly — the insured might need to return to the garage after the initial claim has been closed. This worsens the overall customer experience, regardless of the severity of the original incident, and generates further indirect costs, including assistance costs. Namely, these subsequent costs correspond to by-claims in the bivariate carbon model from Equation 3.3, as specified in Section 3.2.3.

The *Livre Blanc* provides estimates of the carbon emissions associated with different assistance operations, though not their financial costs. These include 10.3 kgCO₂ for towing, 10.7 kgCO₂ when a taxi transports the insured from the accident site, and 154.6 kgCO₂ when a replacement vehicle is provided. However, these figures stand for a single operation, and the average emissions per claim for assistance are reported as 10.3 kgCO₂, suggesting that in most cases, neither taxis nor replacement vehicles are provided.

3.7.3 Simulation of strategic claim scenarios

To evaluate the impact of different strategic choices by insurers, we simulate various scenarios of client acceptance of PIEC. Based on the estimated average cost and carbon emissions per claim using exclusively new parts, or exclusively PIEC, we calculate weighted average values under intermediate acceptance scenarios.

The *Livre Blanc* acknowledges the carbon emission per operation of replacement for one piece is 6.1 kgCO₂ for a PIEC, and 31,4 for a new part. Once again, we multiply by the average number of pieces replaced by claim (1.38) to provide the figures outlined below.

By considering the proportion $\alpha \in [0, 1]$ of acceptance of reused parts in the processes of piece replacements, we propose the following numeric representation of the bivariate structure,

based on the cost computed previously when PIEC are fully accepted (i.e. $\alpha = 1$), or fully rejected ($\alpha = 0$) :

$$\mathbf{z}_k = \begin{pmatrix} 251.19 \\ 8.42 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \cdot \begin{pmatrix} 251.19 \\ 34.91 \end{pmatrix}$$

Thus, the first vector reflects the scenario in which only PIEC is used (financial cost of €251.19 and emissions of 3.8 kg CO₂ per claim), and the additive component reflects the additional burden of rejecting PIEC.

Table 3.3 summarizes the simulated values for different acceptance levels.

The line corresponding to 15.9% refers to the figures given by the *Livre Blanc*, as mentioned in Section 3.7.1. With our simulation, we find 37.77 kgCO₂, which corresponds approximately to the value of 37.5 given in the *Livre*. The slight error must be due to the different levels of approximation between our study and this one.

% of PIEC acceptance	Cost per claim (€)	Emission per claim (kgCO ₂)
0%	502.38	43.32
10%	477.26	39.84
15.9 %	462.44	37,77
20%	452.14	36.35
30%	427.02	32.86
40%	401.9	29.37
50%	376.79	25.88
65%	339.11	20.64
80%	301.43	15.4
100%	251.19	8.42

TABLE 3.3 – Simulated average financial and environmental impacts per claim under varying levels of PIEC acceptance.

Of course, the scenario where close to 100% PIEC are used is unlikely. Indeed, the *Livre Blanc* mentions several possible obstacles : the first one is the affordability of suitable pieces (especially those which are very specific). The customer might also be reluctant to use a piece that has already served for another car, in particular if the origin of the piece is uncertain or even unspecified. One could also mention logistic issues, if the corresponding pieces are stocked far from the repair garage.

Thus, the role of the insurers should be to convince their clients to privilege reused pieces from circular economy when it is possible, for the dual financial and environmental benefit. Actually, he could even be an intermediary or an interlocutor between all the stakeholders : the recycler, the repairer and the insured client. On the other hand, the possibility of a direct repair instead of replacing a piece (by a recycled part or not) remains surely the best financial and ecological solution.

As a remark, one would like to know what these figures could be for the specific case of electric vehicles. Actually, the pieces composing such a vehicle are in general heavier and larger than those of more conventional vehicles, especially for the car body. Thus, comparatively with its "classical equivalence", the carbon emissions to design such pieces may be three or four times higher for an electric vehicle. In addition, the accidents are more frequent during the first months

for a person who owns an electric vehicle for the first time, because of the time needed to get used to it.

Specifically, the whole electronic system makes the repair more complex and forces the repairer to be cautious, since the shock may have subtle consequences on this system. As a detail, if the battery is touched, it should be replaced and could difficultly be repaired. Thus, the whole repair is expected to be longer, or to require more workers. Because it should take more time, it implies in particular the replacement vehicle would also be lent longer to the insured client, so it increases the expenses and the emissions related.

We lack precise data on such electric vehicle claims to complete this analysis, but thanks to these elements, we can make the broad but still reasonable assumption that in average, the claim management related to an electric vehicle will be more costly both financially and ecologically.

3.8 Conclusion and continuations

We have proposed two bidimensional risk models, and one of them aimed at describing some aspects of claim management in motor insurance. We tried to represent some features which should occur in such a context : we discussed in particular the potential correlations between the financial costs and the ecological costs (represented here by carbon emissions), and we insisted on the fact that these risks should be studied jointly in this context. Moreover, we provided risk properties associated with each model (in particular ruin probabilities), and we tried to compare them.

Besides, our study on the carbon footprint points out that the motor insurers could invest in reused pieces to repair a car in order to reduce both the financial and environmental cost of a claim. Actually, the role of the insurers could be to guide their clients to such a choice when it is possible.

However, even if we presented some numerical illustrations, we are aware that this study is still quite theoretical, and would be more relevant thanks to broader or more precise data from real-world insurance. The application or the experimental validation of such a study with more consistent data is left for future research. The deepening could include the precise computations of the parameters of the bivariate carbon model.

What is more, it would be interesting to investigate more deeply the behaviour and the potential choices of customers (and more specifically insured clients) towards the possibility of selecting reused pieces from circular economy to repair their car. Yet, here again, such a study should be supported with significant data.

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons décrit différents types de modèles de risque dans un cadre de théorie de la ruine. En plus de proposer l'analyse de certaines de leurs propriétés sur le plan mathématique - avant tout en regardant leurs probabilités de ruine -, nous avons cherché à leur donner du sens sur le plan actuariel, en nous efforçant à dresser des liens avec des sujets d'actualité qui peuvent intéresser les compagnies d'assurance.

Dans le chapitre 1, nous avons développé un modèle de risque unidimensionnel en temps discret, comportant deux types de pertes : des sinistres « principaux », et des sinistres « secondaires » émergeant de ces premiers, correspondant en général à des conséquences ultérieurement détectées issues des événements ayant occasionné les sinistres principaux. En parallèle de son étude sur le plan mathématique, nous avons tâché d'établir des liens entre ce modèle et le thème de la pollution par les composés perfluorés (PFAS). D'autre part, les quantités aléatoires de ces types de sinistres survenant à chaque période sont régies par deux processus de comptage liés par une structure de dépendance utilisant un processus INAR(1). Après certaines propriétés de base, nous présentons les résultats essentiels du chapitre : des probabilités de ruine asymptotiques. Nous démontrons notamment l'existence du coefficient d'ajustement si les distributions des pertes sont à queue fines, tout en fournissant l'expression explicite pour le cas particulier de deux lois exponentielles. En employant ces mêmes distributions, nous effectuons une comparaison avec deux modèles où les hypothèses de dépendance ont été allégées, et nous retrouvons le fait que dans ce cas-ci, le risque augmente quand le niveau de dépendance croît selon les modèles. Nous nous intéressons aussi à des probabilités de ruine en présence de queues lourdes, en faisant notamment intervenir des distributions de Pareto. Enfin, nous établissons d'autres comparaisons avec des versions légèrement modifiées du modèle initial.

Dans le chapitre 2, nous introduisons trois modèles de risque comportant une structure de prévention : le premier, écrit en temps continu, où un sinistre principal génère exactement un sinistre secondaire retardé, le deuxième correspond à une version discrète d'un processus de Cramér-Lundberg, et le troisième est une transcription du modèle d'origine du chapitre 1 avec de la prévention. Là aussi, nous avons motivé ce chapitre par la question des composés perfluorés. Nous cherchons à étudier pour chacun le montant de prévention optimal, c'est-à-dire le montant dépensé en prévention qui assure un risque minimal. Pour les deux premiers modèles, nous montrons notamment qu'il est indépendant de la réserve initiale u si seule la fréquence des sinistres principaux est affectée par les effets de la prévention. En plus de cela, pour chacun des trois modèles, nous regardons les effets de la prévention secondaire ou tertiaire : cela consiste à supposer que les actions de prévention font décroître, en plus ou à la place de la fréquence des sinistres, la probabilité d'occurrence de sinistres secondaires, ou les espérances des montants de sinistres. Ces formes de prévention n'avaient pas encore été examinées dans la littérature scientifique similaire, toutefois, pour celles-ci, la formulation des conclusions et des résultats

est moins synthétique. Ensuite, nous comparons les résultats de ces modèles entre eux, et nous tissons aussi des liens avec la littérature associée.

Enfin, dans le chapitre 3, nous avons d'abord décrit deux modèles de risque bidimensionnels comportant plusieurs formes de dépendance : une dépendance entre les branches, mais aussi une dépendance liant les nombres respectifs de pertes survenues à chaque période. En plus de certains résultats théoriques déterminés, nous avons souligné comment faire le lien entre un de ces deux modèles théoriques et certains éléments liés à la gestion des émissions de carbone pour une assurance automobile. On montre notamment en quoi les risques théoriques du modèle classique peuvent être considérés comme plus élevés que ceux du modèle qui décrit la gestion des émissions. De surcroît, nous avons examiné les choix qui peuvent être faits quand une ou plusieurs pièces d'une voiture doivent être remplacées suite à une collision. Nous avons constaté que préférer des pièces issues de l'économie circulaire plutôt que des pièces neuves réduit à la fois l'empreinte carbone et le coût financier liés à la gestion d'un tel sinistre automobile. Nous avons illustré cela par quelques simulations numériques.

Comme annoncé dans l'introduction, il est vrai que notre étude sur les PFAS aurait mérité d'être complétée par des résultats numériques, néanmoins on peut considérer cela comme un travail d'initiation à cette thématique en théorie du risque. En effet, il a été difficile pour nous d'obtenir des données adéquates compte tenu de la date de rendu de cette thèse. Cela peut entre autres s'expliquer par le fait que cette problématique est nouvelle pour les compagnies d'assurance : ce n'est que depuis ces dernières années (en remontant jusqu'à 2020 environ) que les assureurs se sont penchés sur la mise en place de couvertures spécifiques à la pollution engendrée par ces produits chimiques, et parmi les compagnies qui en proposent, ces couvertures sont parfois très exclusives.

Nous laissons l'approfondissement de ce problème pour des recherches futures, notamment si des jeux de données suffisants deviennent disponibles.

Bibliographie

- Al-Osh, M. and Alzaid, A. A. (1988). Integer-valued moving average INMA process. *Statistical Papers*, 29 :281–300.
- Al-Osh, M. A. and Alzaid, A. A. (1987). First-order integer-valued autoregressive INAR (1) process. *Journal of Time Series Analysis*, 8(3) :261–275.
- Albrecher, H. and Asmussen, S. (2006). Ruin probabilities and aggregate claims distributions for shot noise cox processes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006(2) :86–110.
- Albrecher, H. and Boxma, O. J. (2004). A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance : Mathematics and Economics*, 35(2) :245–254.
- Albrecher, H., Cheung, E. C., and Thonhauser, S. (2011a). Randomized observation periods for the compound Poisson risk model : Dividends. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 41(2) :645–672.
- Albrecher, H., Constantinescu, C., and Loisel, S. (2011b). Explicit ruin formulas for models with dependence among risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 48(2) :265–270.
- Albrecher, H. and Teugels, J. L. (2006). Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *Journal of Applied Probability*, 43(1) :257–273.
- Allianz (2023). « *Allianz : repair or replace, Investigating the relative GHG emissions of repairing or replacing damaged vehicle parts* ». Rapport établi conjointement par Allianz SE, Allianz Center for Technology, Metsims Sustainability Consulting et Oakdene Hollins.
- Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. (1990). An integer-valued pth-order autoregressive structure INAR (p) process. *Journal of Applied Probability*, 27(2) :314–324.
- Ambagaspitiya, R. S. (2009). Ultimate ruin probability in the Sparre Andersen model with dependent claim sizes and claim occurrence times. *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(3) :464–472.
- Aries, N. and Mamode Khan, N. (2023). On periodic integer-valued moving average INMA (q) models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 93(3) :366–396.
- Asmussen, S. (1989). Risk theory in a markovian environment. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1989(2) :69–100.
- Asmussen, S. and Albrecher, H. (2010). *Ruin probabilities*, volume 14. World scientific.

- Asmussen, S., Henriksen, L. F., and Klüppelberg, C. (1994). Large claims approximations for risk processes in a Markovian environment. *Stochastic Processes and their Applications*, 54(1) :29–43.
- Asmussen, S., Schmidli, H., and Schmidt, V. (1999). Tail probabilities for non-standard risk and queueing processes with subexponential jumps. *Advances in Applied Probability*, 31(2) :422–447.
- Asmussen, S. and Taksar, M. (1997). Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out. *Insurance : Mathematics and Economics*, 20(1) :1–15.
- Avram, F., Palmowski, Z., and Pistorius, M. R. (2008). Exit problem of a two-dimensional risk process from the quadrant : exact and asymptotic results. *The Annals of Applied Probability*, 18(6) :2421–2449.
- Barczy, M., Ispány, M., and Pap, G. (2011). Asymptotic behavior of unstable INAR (p) processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 121(3) :583–608.
- Barigou, K., Loisel, S., and Salhi, Y. (2020). Parsimonious predictive mortality modeling by regularization and cross-validation with and without covid-type effect. *Risks*, 9(1) :5.
- Barral, A.-L. (2024). Enquête : eau du robinet, la carte de France de la contamination aux polluants éternels (article sur le site de la chaîne FranceTVinfo, URL : <https://www.francetvinfo.fr/>), septembre 2024. Consulté le : 05/11/2024.
- Barsotti, F., Milhaud, X., and Salhi, Y. (2016). Lapse risk in life insurance : correlation and contagion effects among policyholders' behaviors. *Insurance : Mathematics and Economics*, 71 :317–331.
- Berns, S., Ciccia, T., Faravel, L., Gestin, O., and Tison, L. (2024). « les substances per- et polyfluoroalkylées (PFAS) : quel risque ces "polluants éternels" font-ils peser sur l'environnement ? », sur le site « ecotoxicologie.fr », juillet 2023. URL : <https://ecotoxicologie.fr/pfas-risque-environnement>. Consulté le : 05/11/2024.
- Bessy-Roland, Y., Boumezoued, A., and Hillairet, C. (2021). Multivariate Hawkes process for cyber insurance. *Annals of Actuarial Science*, 15(1) :14–39.
- Biard, R. (2010). *Dépendance et événements extrêmes en théorie de la ruine : étude univariée et multivariée, problèmes d'allocation optimale*. PhD thesis, Citeseer.
- Biard, R. (2013). Asymptotic multivariate finite-time ruin probabilities with heavy-tailed claim amounts : Impact of dependence and optimal reserve allocation. *Bulletin Français d'Actuariat*, 13(26) :pp–79.
- Biard, R., Lefèvre, C., and Loisel, S. (2008). Impact of correlation crises in risk theory : Asymptotics of finite-time ruin probabilities for heavy-tailed claim amounts when some independence and stationarity assumptions are relaxed. *Insurance : Mathematics and Economics*, 43(3) :412–421.
- Biard, R., Lefèvre, C., Loisel, S., and Nagaraja, H. N. (2011). Asymptotic finite-time ruin probabilities for a class of path-dependent heavy-tailed claim amounts using Poisson spacings. *Applied stochastic models in business and industry*, 27(5) :503–518.

- Bingham, N. H., Goldie, C. M., and Teugels, J. L. (1989). *Regular variation*. Number 27. Cambridge university press.
- Borovkov, A. A. and Mogulskii, A. A. (2001). Integro-local limit theorems including large deviations for sums of random vectors. ii. *Theory of Probability & Its Applications*, 45(1) :3–22.
- Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D., and Marceau, E. (2006). On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006(5) :265–285.
- Bregman, Y. and Klüppelberg, C. (2005). Ruin estimation in multivariate models with Clayton dependence structure. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(6) :462–480.
- Burnecki, K., Teuerle, M. A., and Wilkowska, A. (2021). Ruin probability for the insurer-reinsurer model for exponential claims : a probabilistic approach. *Risks*, 9(5) :86.
- Cai, J. and Li, H. (2007). Dependence properties and bounds for ruin probabilities in multivariate compound risk models. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(4) :757–773.
- Carte de PFAS (2024). Carte « the PFAS sites and Community resources » en ligne sur le site « ArcGIS Experience Builder » by the PFAS project lab & the PFAS exchange, mai 2024. URL : <https://experience.arcgis.com/experience/12412ab41b3141598e0bb48523a7c940/>. Consulté le : 05/11/2024.
- Chan, W.-S., Yang, H., and Zhang, L. (2003). Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 32(3) :345–358.
- Chaudret, B., Donard, O. F. X., Eisenstein, O., Pietrykowski, E., and Rochet, J. (2025). *La pollution aux PFAS : état des lieux des connaissances et enjeux de société*. PhD thesis, Académie des sciences (France).
- Chen, M. and Hu, X. (2020). Risk aggregation with dependence and overdispersion based on the compound poisson INAR(1) process. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 49(16) :3985–4001.
- Cheng, S., Gerber, H. U., and Shiu, E. S. (2000). Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 26(2-3) :239–250.
- Chesler, R. D., Clarke, A. J., and Kelliher, R. (2021). PFAS : liability and insurance coverage issues for the “Forever Chemical”. *Environmental Claims Journal*, 33(2) :136–148.
- Chesler, R. D. and Horkovich, R. M. (2021). Insurance coverage for forever chemicals. *Risk Management*, 68(5) :16–18.
- Collamore, J. F. (1996). Hitting probabilities and large deviations. *The Annals of Probability*, pages 2065–2078.
- Cossette, H., Marceau, É., and Maume-Deschamps, V. (2010). Discrete-time risk models based on time series for count random variables. *ASTIN Bulletin*, 40 :123 – 150.
- Courbage, C. (2001). Self-insurance, self-protection and market insurance within the dual theory of choice. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 26 :43–56.

- Courbage, C., Loubergé, H., and Peter, R. (2017). Optimal prevention for multiple risks. *Journal of risk and insurance*, 84(3) :899–922.
- Courbage, C. and Rey, B. (2007). Precautionary saving in the presence of other risks. *Economic Theory*, 32(2) :417–424.
- Courbage, C. and Rey, B. (2012). Optimal prevention and other risks in a two-period model. *Mathematical Social Sciences*, 63(3) :213–217.
- Courbage, C., Rey, B., and Treich, N. (2013). Prevention and precaution. *Handbook of insurance*, pages 185–204.
- Cox, D. R. (1955). Some statistical methods connected with series of events. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)*, 17(2) :129–157.
- Cramér, H. (1930). *On the Mathematical Theory of Risk*. Skandia Jubilee Volume, Stockholm.
- Dagorn, G., Aubert, R., Horel, S., Martinon, L., and Steffen, T. (2022). Polluants éternels : explorez la carte d’Europe de la contamination par les PFAS (article sur le site du journal Le Monde, URL : <https://www.lemonde.fr>), février 2023. Consulté le : 04/11/2024.
- Darolles, S., Le Fol, G., Lu, Y., and Sun, T. R. (2018). Bivariate INAR processes with application to mutual fund share purchase/redemption counts. *Redemption Counts (July 18, 2018)*.
- Dassios, A. and Jang, J.-W. (2003). Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the Cox process with shot noise intensity. *Finance and Stochastics*, 7 :73–95.
- De Finetti, B. (1957). Su un’ipostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. In *Transactions of the XVth international congress of Actuaries*, volume 2, pages 433–443. New York.
- De Vylder, F. and Marceau, E. (1996). Classical numerical ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1996(2) :109–123.
- Denuit, M., Charpentier, A., and Bébéar, C. (2004). *Mathématiques de l’Assurance Non-Vie. Tome I : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque*.
- Dervaux, B. and Eeckhoudt, L. (2004). Prévention en économie et en médecine - à propos de quelques malentendus. *Revue économique*, 55(5) :849–856.
- Dickson, D. C. (1994). Some comments on the compound binomial model. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 24(1) :33–45.
- Dionne, G. and Eeckhoudt, L. (1985). Self-insurance, self-protection and increased risk aversion. *Economics Letters*, 17(1-2) :39–42.
- Doherty, N. A. and Schlesinger, H. (1983). Optimal insurance in incomplete markets. *journal of political economy*, 91(6) :1045–1054.
- Eeckhoudt, L., Rey, B., and Schlesinger, H. (2007). A good sign for multivariate risk taking. *Management Science*, 53(1) :117–124.
- Ehrlich, I. and Becker, G. S. (1972). Market insurance, self-insurance, and self-protection. *Journal of political Economy*, 80(4) :623–648.

- Einmahl, J. H., Yang, F., and Zhou, C. (2021). Testing the multivariate regular variation model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 39(4) :907–919.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (2013). *Modelling extremal events : for insurance and finance*, volume 33. Springer Science & Business Media.
- Enciso-Mora, V., Neal, P., and Subba Rao, T. (2009). Efficient order selection algorithms for integer-valued ARMA processes. *Journal of Time Series Analysis*, 30(1) :1–18.
- Enikeeva, F., Kalashnikov, V., and Rusaityte, D. (2001). Continuity estimates for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001(1) :18–39.
- Etienne, C. and Moisan, S. (2024). « PFAS : comment les industriels nous empoisonnent ? » (vidéo en ligne sur YouTube, sur la chaîne « Avant l’orage »), mars 2024. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=pIwL7gbcaVY>. Consulté le : 04/11/2024.
- EWG (2023). Map « Global danger : Wildlife at risk from PFAS exposure », by the Environmental Working Group (EWG) - non-profit organization, September 2023. URL : https://www.ewg.org/interactive-maps/pfas_in_wildlife/map/. Accessed in December 2024.
- Fletcher, T. (2024). « PFAS : Rougher waters ahead. », article on the website of GenRe, September 2024. URL : <https://www.genre.com/int/knowledge/publications/2024/september/pfas-rougher-waters-ahead-en>. Accessed in November 2024.
- Fu, K.-A. and Li, H. (2016). Asymptotic ruin probability of a renewal risk model with dependent by-claims and stochastic returns. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 306 :154–165.
- Furrer, C. and Sandqvist, O. L. (2025). Loss of earning capacity in Denmark - an actuarial perspective. *arXiv preprint arXiv :2501.11578*.
- Gauchon, R. (2020). *Contribution à l’étude de la prévention en assurance santé*. PhD thesis, Université de Lyon.
- Gauchon, R., Loisel, S., Rullière, J.-L., and Trufin, J. (2020). Optimal prevention strategies in the classical risk model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 91 :202–208.
- Gauchon, R., Loisel, S., Rulliere, J.-L., and Trufin, J. (2021). Optimal prevention of large risks with two types of claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2021(4) :323–334.
- Gerber, H. (1979). *An introduction to mathematical risk theory*.
- Gerber, H. U. (1988). Mathematical fun with the compound binomial process. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 18(2) :161–168.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1) :48–72.
- Glynn, P. W. and Whitt, W. (1994a). Large deviations behavior of counting processes and their inverses. *Queueing Systems*, 17 :107–128.
- Glynn, P. W. and Whitt, W. (1994b). Logarithmic asymptotics for steady-state tail probabilities in a single-server queue. *Journal of Applied Probability*, 31(A) :131–156.

- Gong, Y., Stanley, J., Wang, B., and Alharithi, M. (2024). Examining strategies developed by insurance companies for addressing carbon emissions in the automotive supply chain in the uk. *Sustainability*, 16(22) :9895.
- Gourieroux, C. and Jasiak, J. (2004). Heterogeneous INAR(1) model with application to car insurance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 34(2) :177–192.
- Grandell, J. (2012). *Aspects of risk theory*. Springer Science & Business Media.
- Gruenberg, E. M. (1953). The prevention of mental disease. *The ANNALS of the American Academy of Political and Social Science*, 286(1) :158–166.
- Guan, G. and Hu, X. (2022). On the analysis of a discrete-time risk model with INAR(1) processes. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2022(2) :115–138.
- Hawkes, A. G. (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58(1) :83–90.
- Hillairet, C., Réveillac, A., and Rosenbaum, M. (2023). An expansion formula for Hawkes processes and application to cyber-insurance derivatives. *Stochastic Processes and their Applications*, 160 :89–119.
- Hu, X., Zhang, L., and Sun, W. (2018). Risk model based on the first-order integer-valued moving average process with compound Poisson distributed innovations. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2018(5) :412–425.
- Huzak, M., Perman, M., Šikić, H., and Vondraček, Z. (2004). Ruin probabilities for competing claim processes. *Journal of applied probability*, 41(3) :679–690.
- Jamouille, M. and Roland, M. (1995). Quaternary prevention. In *Hong-Kong Wonca Classification Committee*.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts*. Chapman and Hall/CRC.
- Johansson, S. and Hermann, C. (2023). « Policy briefing : Toxic tide rising, time to tackle PFAS », site officiel de l’EEB, le Bureau européen de l’environnement. URL : <https://eeb.org/library/>. Consulté le : 08/11/2024.
- Karlis, D., Chutoo, A., Mamode Khan, N., and Jowaheer, V. (2024). The multilateral spatial integer-valued process of order 1. *Statistica Neerlandica*, 78(1) :4–24.
- Kirchner, M. (2016). Hawkes and INAR(∞) processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 126(8) :2494–2525.
- Konstantinides, D. G. and Li, J. (2016). Asymptotic ruin probabilities for a multidimensional renewal risk model with multivariate regularly varying claims. *Insurance : Mathematics and Economics*, 69 :38–44.
- Kouamo, O. (2011). *Analyse des séries chronologiques à mémoire longue dans le domaine des ondelettes*. PhD thesis, Télécom ParisTech.
- Labadie, P. (2024). Conférence « Présence et transfert des composés per- et polyfluoroalkylés (PFAS) dans les écosystèmes aquatiques : aperçu de l’état des connaissances » (Lyon, France), Octobre 2024. Lieu : Université Claude Bernard Lyon 1, Villeurbanne.

- Labadie, P., Alligant, S., Berthe, T., Budzinski, H., Bigot-Clivot, A., Collard, F., Dris, R., Gasperi, J., Guigon, E., Petit, F., et al. (2020). Contaminants of emerging concern in the Seine River basin : overview of recent research. *The Seine River Basin*, page 355.
- Leclerc, A. and Mandard, S. (2024). « PFAS : les pompiers sont "aux premières loges" dans la contamination aux polluants éternels »(article sur le site du journal Le Monde, URL : <https://www.lemonde.fr>), mai 2024. Consulté le : 05/11/2024.
- Lefèvre, C. and Loisel, S. (2009). Finite-time ruin probabilities for discrete, possibly dependent, claim severities. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11 :425–441.
- Lefèvre, C. and Picard, P. (2021). Delta operators, power series distributions and recursions for compound sums. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 499(1) :125031.
- Lefevre, C., Picard, P., and Simon, M. (2017). Epidemic risk and insurance coverage. *Journal of Applied Probability*, 54(1) :286–303.
- Lefèvre, C. and Simon, M. (2022). On the risk of ruin in a SIS type epidemic. *Methodology and computing in applied probability*, 24(2) :939–961.
- Li, J. (2013). On pairwise quasi-asymptotically independent random variables and their applications. *Statistics & Probability Letters*, 83(9) :2081–2087.
- Li, J. (2017). A note on a by-claim risk model : asymptotic results. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(22) :11289–11295.
- Li, J. (2023). Asymptotic ruin probabilities for a renewal risk model with a random number of delayed claims. *JIMO*, 19 :3840–3853.
- Li, S., Lu, Y., and Garrido, J. (2009). A review of discrete-time risk models. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales*, 103(2) :321.
- Livre Blanc (2024). « Livre blanc : la réparation durable en automobile ». Travail commun entre des assureurs et partenaires français à propos des émissions de carbone liées à la gestion des sinistres automobiles en France. Cela inclut AkzoNobel, Assercar, Back2car, BCA Expertise, Crédit Agricole Assurances, Institut Louis Bachelier, Europ Assistance France, Valeo, Groupe Covéa, FRCI, SRA, France Pare-Brise. La rédaction et la mise en forme sont surtout le travail du Groupe Covéa (dont Béatrice Dedenys and Caroline Henry).
- Lohmann, R., Cousins, I. T., DeWitt, J. C., Gluge, J., Goldenman, G., Herzke, D., Lindstrom, A. B., Miller, M. F., Ng, C. A., Patton, S., et al. (2020). Are fluoropolymers really of low concern for human and environmental health and separate from other PFAS? *Environmental science & technology*, 54(20) :12820–12828.
- Loisel, S. (2004a). Finite-time ruin probabilities in the Markov-modulated multivariate compound Poisson model with common shocks, and impact of dependence. *University Lyon*, 1.
- Loisel, S. (2004b). Ruin theory with k lines of business. *Mathematics Day*, page 61.
- Loisel, S. (2005). Differentiation of some functionals of risk processes, and optimal reserve allocation. *Journal of applied probability*, 42(2) :379–392.

- Lu, Y. and Garrido, J. (2005). Doubly periodic non-homogeneous poisson models for hurricane data. *Statistical Methodology*, 2(1) :17–35.
- Lundberg, F. (1903). *I. Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen : II. Aterforsäkring av kollektivrisker*. Almqvist Wiksell, Uppsala.
- Ma, D., Wang, D., and Cheng, J. (2015). Bidimensional discrete-time risk models based on bivariate claim count time series. *Journal of Inequalities and Applications*, 2015(1) :1–22.
- Macci, C. (2006). Large deviations for risk models in which each main claim induces a delayed claim. *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 78(2) :77–89.
- Malevergne, Y. and Rey, B. (2010). Preserving preference rankings under non-financial background risk. *Journal of the Operational Research Society*, 61(8) :1302–1308.
- Maulik, K. and Resnick, S. (2004). Characterizations and examples of hidden regular variation. *Extremes*, 7(1) :31–67.
- McKenzie, E. (1985). Some simple models for discrete variate time series 1. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, 21(4) :645–650.
- Meng, Q., Zhang, X., and Guo, J. (2008). On a risk model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Statistics & Probability Letters*, 78(13) :1727–1734.
- Minkova, L. (2004). The pólya-aeppli process and ruin problems. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2004.
- Müller, A. and Pflug, G. (2001). Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments. *Insurance : Mathematics and Economics*, 28(3) :381–392.
- Munoz, G., Giraudel, J.-L., Botta, F., Lestremau, F., Dévier, M.-H., Budzinski, H., and Labadie, P. (2015). Spatial distribution and partitioning behavior of selected poly- and perfluoroalkyl substances in freshwater ecosystems : a French nationwide survey. *Science of the Total Environment*, 517 :48–56.
- Nyrhinen, H. (1998). Rough descriptions of ruin for a general class of surplus processes. *Advances in Applied Probability*, 30(4) :1008–1026.
- Park, Y.-S. and Kim, M.-J. (1997). Some basic and asymptotic properties in INMA(q) processes. *Journal of the Korean Statistical Society*, 26(2) :155–170.
- Pedeli, X. and Karlis, D. (2011). A bivariate INAR(1) process with application. *Statistical modelling*, 11(4) :325–349.
- Picard, P., Lefèvre, C., and Coulibaly, I. (2003). Problèmes de ruine en théorie du risque à temps discret avec horizon fini. *Journal of Applied Probability*, 40(3) :527–542.
- Rey, B. (2003). A note on optimal insurance in the presence of a nonpecuniary background risk. *Theory and Decision*, 54 :73–83.
- Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., and Teugels, J. L. (2009). *Stochastic processes for insurance and finance*. John Wiley & Sons.

- Rosso, E. (2022). Carte. « Polluants éternels dans l'eau potable : êtes-vous contaminés par les PFAS ? Les résultats ville par ville. », (article sur le site de France 3 Auvergne-Rhône-Alpes). URL : <https://france3-regions.francetvinfo.fr/auvergne-rhone-alpes>), octobre 2022. Consulté le : 04/11/2024.
- Rosso, E. (2023). « Enquête : Polluants éternels », séries d'articles sur le site de France 3 Auvergne-Rhône-Alpes, URL : <https://france3-regions.francetvinfo.fr/auvergne-rhone-alpes>), juin 2023. Consulté le : 04/11/2024.
- Rosso, E. (2024). « Enquête PFAS », séries d'articles sur le site de France 3 Auvergne-Rhône-Alpes, URL : <https://france3-regions.francetvinfo.fr/auvergne-rhone-alpes>), juin 2024. Consulté le : 04/11/2024.
- Santana, D. J. and Rincón, L. (2020). Approximations of the ruin probability in a discrete time risk model. *Modern Stochastics : Theory and Applications*, 7(3) :221–243.
- Segerdahl, C.-O. (1942). Über einige risikothoretische fragestellungen. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1942(1-2) :43–83.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic orders*. Springer.
- Shi, H. and Wang, D. (2014). An approximation model of the collective risk model with INAR(1) claim process. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 43 :5305 – 5317.
- Shiu, E. S. (1989). The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 19(2) :179–190.
- Sundt, B. and Teugels, J. L. (1995). Ruin estimates under interest force. *Insurance : Mathematics and Economics*, 16(1) :7–22.
- Szekli, R. (2012). *Stochastic ordering and dependence in applied probability*, volume 97. Springer Science & Business Media.
- Vanbeneden, E. (2024). Conférence : « PFAS et (ré)assurance » par Eddy Vanbeneden (Head Advisory Continental Europe of Guy Carpenter). Institut des actuaires, Paris.
- Wang, G. and Yuen, K. C. (2005). On a correlated aggregate claims model with thinning-dependence structure. *Insurance : Mathematics and Economics*, 36(3) :456–468.
- Waters, H. R. and Papatriandafylou, A. (1985). Ruin probabilities allowing for delay in claims settlement. *Insurance : Mathematics and Economics*, 4(2) :113–122.
- Weiß, C. H. (2008). The combined INAR (p) models for time series of counts. *Statistics & probability letters*, 78(13) :1817–1822.
- Weiß, C. H. (2018). *An introduction to discrete-valued time series*. John Wiley & Sons.
- Willmot, G. E. (1993). Ruin probabilities in the compound binomial model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 12(2) :133–142.
- Yang, Y., Wang, X., Su, X., and Zhang, A. (2019). Asymptotic behavior of ruin probabilities in an insurance risk model with quasi-asymptotically independent or bivariate regularly varying-tailed main claim and by-claim. *Complexity*, 2019.

- Yuan, N., Hu, X., and Chen, M. (2018). Risk aggregation based on the Poisson INAR(1) process with periodic structure. *Lithuanian Mathematical Journal*, 58(4) :505–515.
- Yuen, K. C. and Guo, J. (2001). Ruin probabilities for time-correlated claims in the compound binomial model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 29(1) :47–57.
- Yuen, K. C., Guo, J., and Ng, K. W. (2005). On ultimate ruin in a delayed-claims risk model. *Journal of Applied Probability*, 42(1) :163–174.
- Yuen, K. C., Guo, J., and Wu, X. (2006). On the first time of ruin in the bivariate compound poisson model. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38(2) :298–308.
- Zhang, A., Liu, S., and Yang, Y. (2021). Asymptotics for ultimate ruin probability in a by-claim risk model. *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 26(2) :259–270.
- Zhang, Z., Yuen, K. C., and Li, W. K. (2007). A time-series risk model with constant interest for dependent classes of business. *Insurance : Mathematics and Economics*, 41(1) :32–40.
- Zhu, L. (2013). *Nonlinear Hawkes processes*. PhD thesis, New York University.
- Zou, W. and Xie, J.-H. (2013). On the probability of ruin in a continuous risk model with delayed claims. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 50(1) :111–125.