



HAL
open science

Modèles et Catégories : la théorie des catégories comme épistémologie effective

Sylvain Cabanacq

► **To cite this version:**

Sylvain Cabanacq. Modèles et Catégories : la théorie des catégories comme épistémologie effective. Philosophie. Université Clermont Auvergne, 2025. Français. ⟨NNT : 2025UCFA0157⟩. ⟨tel-05579330⟩

HAL Id: tel-05579330

<https://theses.hal.science/tel-05579330v1>

Submitted on 3 Apr 2026

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE
ÉCOLE DOCTORALE
LETTRES, SCIENCES HUMAINES ET SOCIALES

THÈSE
pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Clermont Auvergne
Discipline : Philosophie

Présentée et soutenue par
Sylvain CABANACQ

le 11 Décembre 2025

MODÈLES ET CATÉGORIES
La théorie des catégories comme épistémologie effective

Sous la direction de :

M. Sébastien GANDON, Professeur, Université Clermont Auvergne
M. Brice HALIMI, Professeur, Université Paris Cité

Jury :

Mme Juliette KENNEDY, Professeur émérite, Université d'Helsinki, *examinatrice*
Mme Hourya SINACEUR, Directrice de recherche émérite, CNRS, *examinatrice*
M. Jean-Pierre MARQUIS, Professeur, Université de Montréal, *rapporteur*
M. Ivahn SMADJA, Professeur, Université de Nantes, *rapporteur et président du jury*

*pour Pascale
et Vivian*

« Quand je danse, je danse ; quand je dors, je dors. Rien de plus simple. Et quand je me promène seul dans un beau verger, il peut arriver que, pendant un certain temps, mes pensées soient accaparées par des sujets étrangers à ce qui m'entoure, mais le reste du temps, je fais en sorte de les ramener à la promenade, au verger, au plaisir d'y goûter la solitude, à moi-même. [...] Nous sommes stupides quand nous disons : « Il a vécu dans l'oisiveté », ou bien : « Je n'ai rien fait aujourd'hui. - Quoi, n'avez-vous donc pas vécu ? C'est non seulement la plus fondamentale de vos occupations, mais aussi celle qui a le plus d'éclat. » « Si seulement on m'avait confié quelque tâche importante, j'aurais montré ce dont je suis capable. - Avez-vous su penser et conduire votre vie ? Oui ? Alors, vous vous êtes acquitté de la plus grande des tâches. »

Montaigne, *Les Essais*, III, 13

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier mes directeurs de thèse : Sébastien Gandon, pour avoir accepté de diriger ce travail de recherche, pour son accueil chaleureux à l'Université Clermont-Auvergne, pour sa disponibilité et son exigence philosophique, et Brice Halimi, pour avoir accepté d'accompagner ce travail, avec une rigueur constante.

Je souhaite remercier Ivahn Smadja d'avoir bien voulu être rapporteur de ce travail de recherche, mais aussi de m'avoir soutenu et accompagné lors de mes débuts d'enseignant à l'Université, et Jean-Pierre Marquis, d'avoir également accepté d'être rapporteur, et d'avoir encouragé ce projet de recherche tout au long de son développement.

Je suis par ailleurs très reconnaissant à Hourya Benis-Sinaceur, d'avoir non seulement accepté de prendre part au jury, mais également de l'attention bienveillante qu'elle a accordé à ce projet, et à Juliette Kennedy, pour son soutien constant et la chaleur de son accueil à Helsinki.

Je remercie enfin toute l'équipe du PHIER et de l'Ecole Doctorale LLSHS, et plus particulièrement Vincent Gérard et Henri Galinon, pour l'aide qu'ils m'ont apportée, et Valérie Geneste pour sa patience et sa réactivité.

La liste serait longue, de tous les chercheurs, enseignants-chercheurs, post-doctorants et doctorants qui m'ont aidé à mener à bien ce travail de thèse. J'espère avoir l'occasion de croiser à nouveau leur chemin, pour les en remercier.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Deux méta-théories mathématiques

Les années 1950 ont vu émerger dans le champ mathématique deux théories au statut bien particulier : la théorie des modèles d'une part, la théorie des catégories d'autre part. Ces deux théories visaient en effet d'une part à être développées pour elles-mêmes à partir de leur propres notions fondamentales (la théorie « pure ») mais également à fournir aux mathématiciens des outils généraux pour résoudre les difficultés qu'ils pourraient rencontrer dans des domaines spécifiques (la théorie « appliquée »). D'où leur position d'extériorité ou de surplomb par rapport au reste du paysage mathématique. Une telle position se distingue de celle occupée par d'autres théories mathématiques, comme la théorie des groupes, qui pourraient elles également trouver des applications dans d'autres domaines mathématiques (la topologie algébrique par exemple). En effet ces dernières théories présentent un caractère local d'un point de vue conceptuel : elles sont centrées sur un unique type de structure dont il s'agit de développer les propriétés ou de retrouver des instanciations dans d'autres domaines théoriques. Théorie des modèles et théorie des catégories semblent au contraire prendre pour objets les structures mathématiques elles-mêmes dans leur diversité et dépasser les limites conceptuelles pour dégager ce qu'elles peuvent avoir de commun.

Cette situation particulière se manifeste non seulement dans des objets communs mais également dans les visées qu'elles partagent.

1.1.1 Des objets communs

Théorie des catégories et théorie des modèles développent leurs méthodes afin d'étudier les structures mathématiques indépendamment de la « nature » des éléments de ces structures et examinent les propriétés de classes de structures. Toutes deux ont ainsi été élaborées à partir du tournant structural des mathématiques dans les années 1920-1930, tournant dans lequel elles trouvent leur racine et leur sens. Cette homogénéité des domaines des

deux théories se trouve par ailleurs révélée par ce qui semble constituer leur horizon : la caractérisation « à isomorphisme près » apparaît comme une limite de discernabilité des objets mathématiques pour le théoricien des modèles comme pour le catégoricien. Par là-même les deux théories semblent se placer à un même niveau d'*abstraction* : la classe de structures d'un type donné.

Cette attention commune aux classes de structures et à leurs relations apparaît par exemple à travers certains résultats de théorie des modèles qui trouvent une formulation « naturelle » en contexte catégorique, ce que souligne A. Mac Intyre en fixant les débuts de la théorie des modèles à l'émergence de la notion d'« application élémentaire »¹ :

« model theory is a little older than category theory, and was certainly more subtle in 1950, but the subject could have benefited early on from a category-theoretic approach. This would have inevitably led one to elementary maps, of which elementary extensions are a special case.

It is in category-theoretic terms that one can best explain the advantages of introducing elementary maps. Tarski's basic theorem tells us that if L is a first order logic, then the category of L -structures with elementary maps has direct limits, and that the same holds for the subcategory of models of a fixed L -theory. Another desirable feature of the category and the above subcategories is the amalgamation property. » ([158], 140-141)

Ces remarques de Mac Intyre mettent en évidence le fait que la théorie des catégories aurait pu permettre de dégager de façon naturelle les notions fondamentales de la théorie des modèles et soulignent ainsi la familiarité essentielle entre ces deux théories : elles prennent pour objets les classes de structures et leurs relations.

1.1.2 Des objectifs communs

Les méthodes développées par les deux théories semblent en outre répondre à des objectifs communs. Pour les mettre en évidence il s'agira dans un premier temps d'effectuer un travail de comparaison du discours secondaire développé par les mathématiciens et par les épistémologues à propos de ces deux théories.

1. La question pourrait se poser de savoir à quel moment naît véritablement la théorie des modèles : on peut en effet considérer le théorème de Lowenheim-Skolem en 1915-1920 comme son acte de naissance, ou attendre la rencontre de la définition formelle de la vérité de Tarski et des structures mathématiques dans les années 1950, comme le propose W. Hodges dans [106].

Du côté de la théorie des modèles

Si les objectifs explicites de la théorie des modèles ont pu évoluer depuis les années 1950 il reste possible cependant de dégager les points suivants :

- la formalisation, c'est-à-dire la mathématisation, de notions considérées jusque-là comme « intuitives », vagues ou extra-mathématiques. On peut penser par exemple à la notion de définissabilité élaborée par Tarski en 1931. Cette perspective doit cependant être distinguée de celle proposée par l'axiomatisation formelle héritée de Hilbert : il ne s'agit pas tant d'utiliser un langage formel pour caractériser des notions appartenant déjà au champ mathématique que de faire rentrer dans le champ mathématique des notions qui lui étaient jusque-là étrangères.
- la *construction de modèles* : selon W. Hodges : « Model theorists look for ways of constructing models of given sentences » ([108], vii), et plus précisément :

« Construction means building structures, or sometimes families of structures, which have some feature that interests us. For example we might look for a graph which has very many automorphisms, or a group in which many systems of equations are solvable ». ([107], ix)

L'importance des procédures de construction de structures en théorie des modèles est soulignée en outre par Chang et Keisler :

« The three theorems [compacité, Lowenheim-Skolem et Morley] say something positive about the existence of models having certain properties. Indeed, in almost all of the deeper theorems in model theory the key to the proof is to construct the right kind of model [...]. There are a small number of extremely important ways in which models have been constructed. For example, for various purposes they can be constructed from individual constants, from functions, from Skolem terms, or from unions of chains. These constructions give the subject of model theory unity. » ([36], 2)

- la *classification des structures* : selon B. Poizat,

« We realize that attacking head-on the problem of truth in mathematics presents some difficulty, and that it would be more valuable, at the start, to keep our ambitions more modest, and to begin by trying to classify and compare structures with the common property of being models of the same theory T : This is model theory. » ([208], xxvii)

Ce que W. Hodges développe ainsi :

« 'Classifying' a class of structures means grouping the structures into subclasses in a useful way, and then proving

that every structure in the collection does belong in just one of the subclasses. An archetypal example from algebra is the classification of vector spaces over a fixed field. » ([107], ix)

Cet objectif de classification inhérent à la théorie des modèles a été en outre développé par les travaux de Shelah et la « classification theory ».

De ces trois objectifs fondamentaux résulte la possibilité pour la théorie des modèles de revendiquer d'autres finalités :

— la *généralisation*, comme le souligne A. Robinson :

« The suggestion that numerous important concepts of Algebra possess natural generalizations within the framework of the Theory of Models has met with a rather less lively response. Nevertheless, it is still the author's belief that investigations in this direction are both interesting and valuable. » ([215], vi)

Un exemple d'un tel mouvement de généralisation de l'algèbre vers la théorie des modèles serait la notion d'extension algébriquement close qui trouve une portée naturelle dans un cadre méta-mathématique.

— la *compréhension*, comme le souligne Haskell, Pillay et Steinhorn :

« For an area of mathematics to contribute significantly to another, the new point of view must add to the understanding of the objects in the area of application, and not, for example, merely provide convenient new terminology. In the case of the model theory of fields, [...] the deep advances that have been made in abstract model theory over the last thirty or forty years have generated concepts and methods that have found meaning and application in classical mathematical contexts, ultimately leading to important new results in these areas. » ([101], 1)

— Cette compréhension des structures mathématiques que rend possible la théorie des modèles semble aller de pair avec la mise en lumière de *correspondances* entre des domaines mathématiques distincts, comme le remarque I. Fesenko :

« In some of them [areas of number theory and related parts of mathematics] one can feel important similarities between two mathematical theories, which are still not formalized and well understood. A model theoretical analysis may provide a valuable help.

The main reason to hope for such developments involving model theory, for example as a bridge between two currently

separated areas in mathematics, is that for many of the situations listed below it is natural to anticipate existence of certain common structures remaining invisible at the current level of knowledge. Model theoretical analysis could help to reveal some of those structures. » ([78], 327)

ou Hrushovski :

« Instead of defining the abstract context for [stability] theory, I will present a number of its results in a number of special and hopefully more familiar, guises : compact complex manifolds, ordinary differential equations, difference equations, highly homogeneous finite structures. Each of these has features of its own and the transcription of results is not routine ; they are *nonetheless* readily recognizable as instances of a single theory. » ([109], 281)

Hourya Sinaceur fait de ces correspondances un des apports essentiels de la théorie des modèles :

« elle multiplie les correspondances [entre disciplines] ou les amplifie. Plus encore, elle les *explique*. Et même elle les *prévoit*. [...].

Elle n'ouvre pas seulement la possibilité d'une nouvelle traduction. Elle rend compte *a priori* de la possibilité de traduire, de passer d'une classe de modèles à une autre, d'un langage mathématique à un autre. Par vocation, la théorie des modèles est métastructurale, et donc aussi métadisciplinaire.

Ce pouvoir elle le tient évidemment de son versant logique. C'est grâce à cette analyse du langage, guère pratiquée par le mathématicien ordinaire, que l'on peut considérer simultanément et sous le même point de vue des structures différentes appartenant éventuellement à des genres distincts (arithmétique, algèbre, analyse, topologie). C'est elle qui livre des énoncés logiques dont la traduction mathématique se fait toujours au pluriel. » ([230], 19)

— enfin, l'*unification*. Selon Haskell, Pillay et Steinhorn en effet :

« What is it then that provides this unified perspective ? It is not just the scope and generality of structures in the above sense [au sens de l'Algèbre structural] that makes the model-theoretic point of view distinctive. Rather it is the objects that model theory attaches to these structures, and the tools and methods that model theory employs to analyze and understand these objects that sets the subject apart. Just as a complex analyst, for example, concentrates on holomorphic functions

on the field of complex numbers, model theory focuses on a particular class of relations and functions, the so-called definable ones. [...]

The power the point of view of definability confers comes from the fact that many of the sets that arise in mathematics can be described by formulas in exactly the way that mathematicians ordinarily do so. » ([101], 5)

Là encore ce serait de l'attention au langage que viendrait cette portée unificatrice, comme le note H. Sinaceur : « l'analyse des langages de ces théories livre une *forme* unique. Des énoncés de ces langages différents peuvent relever d'un même schème logique. Et ainsi le multiple apparaît un *sub specie logicae*. » ([230], 19)

Ces différentes remarques montrent ce qui sépare la théorie des modèles d'autres théories mathématiques comme la théorie des groupes ou la topologie. En effet même si ces dernières peuvent trouver des applications dans d'autres domaines mathématiques et parfois même au cœur de la théorie des modèles elles ne portent pas sur la notion-même de structure mathématique et sur les relations que peuvent entretenir des classes de structures. La théorie des modèles se présente donc bien comme une méta-théorie mathématique.

Du côté de la théorie des catégories

Qu'en est-il de la théorie élaborée par S. Eilenberg et S. MacLane? Ici encore l'examen du discours secondaire développé par les mathématiciens et les épistémologues peut permettre de dégager les objectifs de la théorie des catégories. Si dans ce cas également les fonctions et les objectifs de la théorie ont pu évoluer selon les problèmes abordés il est possible de dégager les points suivants :

— la *formulation précise* de notions « intuitives », comme le souligne J.-P. Marquis :

« the major function of the concept of category in Eilenberg and Mac Lane's original paper is to provide a conceptual clarification : the concept of category is required to state and understand the concepts of natural transformation and natural isomorphism in full generality. » ([171], 229)

— la *classification*, à différents niveaux et sous différentes formes, apparaît comme un enjeu central du développement de la théorie des catégories. Ainsi par exemple dès l'article de 1945 d'Eilenberg et Mac Lane :

« This emphasis on the specification of the types of mappings employed gives more insight into the degree of invariance of

the various concepts involved. For instance, we show [...] that the concept of the commutator subgroup of a group is in a sense a more invariant one than that of the center, which in its turn is more invariant than the concept of the automorphism group of a group, even though in the classical sense all three concepts are invariant. [...]

This may be regarded as a continuation of the Klein Erlangen Programm, in the sense that a geometrical space with its group of transformation is generalized to a category with its algebra of mappings. » ([67], 237)

« Various types of subgroups of G may be classified in terms of the degree of invariance of the ‘subfunctors’ of the identity which they generate. This classification is similar to, but not identical with, the known distinction between normal subgroups, characteristic subgroups, and strictly characteristic subgroups of a single group. » ([67], 264)

Toutefois, comme le montre Jean-Pierre Marquis, un tel projet de classification mathématique interne à la théorie des groupes s’est révélé une impasse. Dans le cadre de l’algèbre homologique au contraire la théorie des catégories est apparue comme le levier essentiel d’une classification des théories :

« homology theories can be very different with respect to other properties, e.g. facility of computation. It is the fact that homology theories can be systematically related to one another via natural transformations that allowed their classification. One can compare systematically, that is with the help of the morphisms in the target category, different homology theories and determine how and where they differ with respect to their role, that is capturing fundamental properties of the spaces studied. » ([172], 68)

— la *généralisation* rendue possible par la théorie des catégories se révèle presque à chaque étape de son développement.

Ainsi par exemple, pour Gelfand et Manin :

« The Grothendieck idea to overcome [the] insufficiency [of Zariski topology] was to extend the notion of topology : he suggested to consider as « open sets » not just open embeddings but certain more general mappings $f : U \rightarrow X$ such as, for example, [...] flat morphisms (in the category of schemes), etc. In such [a] generalization open sets become objects of some category. [...] The essential point is that the notion of [...] covering is not deduced from some structures in the category, but instead forms a part of the definitions » ([84], 99)

au cœur des travaux d'Eilenberg et MacLane dès 1945 :

« In a metamathematical sense our theory provides general concepts applicable to all branches of abstract mathematics, and so contributes to the current trend towards uniform treatment of different mathematical disciplines. In particular, it provides opportunities for the comparison of constructions and of isomorphisms occurring in different branches of mathematics; in this way it may occasionally suggest new results by analogy. » ([67], 236)

- la *compréhension* : sur ce plan la notion de foncteurs adjoints entre autres concepts catégoriques joue un rôle crucial, comme le souligne J.-P. Marquis :

« Once category theory was developed and used, in particular when the central theoretical role played by adjoint functors was understood, [...] what was seen as a useful tool in organizing and guiding mathematical thought became a theoretical framework that revealed the basic or fundamental principles underlying mathematical concepts, theories and theorems. Thus, Stone duality theorem is indeed more perspicuously presented in the context of categories and functors – it is organized neatly and the basic consequences of the result are transparent – but once it is seen as a special case of a very general adjoint situation, a *theoretical* understanding of the phenomenon becomes available. Category theory is not *applied* to Stone's theorem, it is the latter that becomes a specific instance of a general, universal conceptual situation. » ([171], 251)

- les *correspondances* entre domaines mathématiques apparaissent au cœur de ce mouvement de généralisation et de compréhension animant le développement de la théorie des catégories et cela se comprend d'autant plus si l'on considère le cadre dans lequel la théorie a trouvé ses premières applications : la topologie algébrique, ainsi caractérisée par Eilenberg et Steenrod :

« A homology theory is a *algebraic image* of topology. The *domain* of a homology theory is the topologist's field of study. Its *range* is the field of study of the algebraist. Topological problems are converted into algebraic problems.

In this respect, homology theory parallels analytic geometry. However, unlike analytic geometry, it is not reversible. The derived algebraic system represents only an aspect of the given topological system, and is usually much simpler. This has the

advantage that the geometric problem is stripped of inessential features and replaced by a familiar type of problem which one can hope to solve. It has the disadvantage that some essential feature may be lost ». ([65], vii)

Au centre d'une telle description des objectifs de la topologie algébrique apparaît la notion catégorique essentielle de *foncteur* dont la fonction même semble être la mise en correspondance de domaines mathématiques distincts.

- l'*unification* par là-même se retrouve au cœur des développements de la théorie des catégories. Il suffirait de considérer l'apport essentiel de la notion de « propriété universelle ». Un autre exemple emblématique serait le concept de topos ainsi présenté par Grothendieck :

« Tel a été le cas, notamment, de la notion unificatrice cruciale de topos, au cœur même de la géométrie nouvelle – celle-là même qui fournit l'intuition géométrique commune pour la topologie, la géométrie algébrique et l'arithmétique – celle aussi qui m'a permis de dégager aussi bien l'outil cohomologique étale et l -adique, et les idées maîtresses (plus ou moins oubliées depuis, il est vrai...) de la cohomologie cristalline. » ([92], 113)

L'examen du discours secondaire développé par les mathématiciens et les épistémologues nous a donc permis de constater que si les deux théories occupent dans le paysage mathématique des positions similaires c'est non seulement du fait de leurs objets communs mais aussi du fait des finalités qu'elles partagent même si celles-ci trouvent de part et d'autre des modalités d'application sensiblement distinctes : mathématiser, classer, généraliser, organiser, unifier, comprendre². Cette position similaire en surplomb de la théorie des modèles comme de la théorie des catégories dans l'édifice mathématique général amène à considérer ces deux cadres conceptuels comme deux formes distinctes d'un même geste, deux mises en œuvre différentes de cette réflexivité propre et interne à l'activité mathématique. Il s'agit donc bien à proprement parler de deux méta-théories se distinguant des autres théories mathématiques, comme la théorie des groupes ou la topologie, en ce qu'elles offrent un point de vue théorique sur la notion même de type de structures sous la forme soit des classes élémentaire soit des catégories.

Se pose alors la question de savoir ce qui distingue ces deux formes de réflexivité.

2. Il serait pertinent de conduire un examen systématique et précis de ce qui sépare la mise en œuvre modèle-théorique de ces gestes mathématiques de leur réalisation catégorique. Une telle étude dépasse cependant le cadre de ce travail de recherche, qui entend seulement tirer parti de leur rapprochement.

1.2 Le langage au cœur de la théorie des modèles

1.2.1 La sensibilité au langage

A la lecture des remarques précédentes concernant la théorie des modèles deux notions semblent essentielles à son projet : celle de « langage » et celle de « logique ». Ces deux notions peuvent être comprises comme étroitement liées à la condition de possibilité de la théorie des modèles : la formalisation. Ce processus de formalisation suppose :

1. la description d'un vocabulaire, c'est-à-dire la spécification des notions primitives ;
2. la définition d'une logique, c'est-à-dire :
 - une classe de formules bien formées ;
 - la définition de la vérité d'une formule de cette classe dans une structure ;
 - la spécification de la notion de déduction formelle ;
3. la formulation d'axiomes spécifiant les propriétés de base de la structure en question par des énoncés.

Le point de départ d'une approche modèle-théorique est donc la détermination d'un vocabulaire³. La détermination d'une signature (ou d'un langage) revient alors à fixer les notions qui seront considérées comme primitives et qui seront définies à l'intérieur d'une théorie formelle – des axiomes et des règles de déduction. Mais la formalisation n'a de sens en théorie des modèles que si elle s'accompagne d'un théorème de complétude pour la logique considérée⁴.

Ici par complétude il faut entendre la propriété énoncée dans le théorème démontré par Gödel en 1930 :

Théorème 1 *Soit Σ un ensemble d'énoncés d'un langage \mathcal{L} ,
Si Σ est cohérent alors Σ admet un modèle.*

La complétude doit donc être ici comprise comme la correspondance entre prouvabilité et vérité. Ainsi l'articulation syntaxe/sémantique dans le cas du calcul des prédicats classique du premier ordre constitue le noyau du réseau

3. Comme le souligne J. Baldwin :

« Specifying a vocabulary (signature, similarity type) is only one aspect of the notion of a formal system. But it is a crucial one and one that is often overlooked by non-logicians. From the standpoint of formalization, fixing the vocabulary is a first step, singling out the 'primitive concepts'. » ([11], 35)

4. J. Baldwin insiste sur ce point :

« A completeness theorem sets up a syntactic/semantic duality. The ability to translate results between syntax and semantic is the essence of model theory. » ([11], 43)

de concepts, d'outils et de méthodes appliqués à ces problèmes mathématiques « traditionnels ». Elle met en lumière la possibilité non seulement de caractériser des structures mathématiques par des systèmes formels mais aussi d'un va-et-vient entre les deux plans, révélant ce que M.E.W. Beth caractérisait dès 1953 comme un « parallélisme logico-mathématique ». Ce parallélisme prend par exemple la forme de résultats (conséquences du théorème de compacité) tels que :

- une classe de structures est close par sous-structure ssi elle est \forall -axiomatisable,
- une classe de structures est close par union de chaînes ssi elle est $\forall\exists$ -axiomatisable,

résultats où l'on voit mises en correspondance des propriétés syntaxiques, c'est-à-dire concernant la façon dont se présentent des énoncés formels (dans ce cas la forme des axiomes de la théorie) et des propriétés sémantiques, c'est-à-dire des propriétés de la classe des modèles de ces énoncés. La théorie des modèles « classique » apparaît ainsi comme l'exploitation systématique de cette correspondance syntaxe/sémantique dans un va-et-vient constant d'un plan à l'autre rendu possible par le théorème de Gödel qui en un sens constitue le cœur et la marque d'une approche modèle-théorique des concepts mathématiques ⁵.

1.2.2 L'efficacité mathématique de cette sensibilité au langage

L'examen de la compréhension modèle-théorique des concepts mathématiques met ainsi en lumière l'attention portée au langage mathématique qui apparaît cruciale dès les travaux de Tarski sur la définissabilité, notion qui ne prend sens que dès lors que les ressources linguistiques sont spécifiées.

5. C'est ces termes qu'Hourya Sinaceur présente le travail du théoricien des modèles, qui

« se constitue donc dans un va-et-vient entre une syntaxe (un système formel écrit dans un certain langage) et une sémantique dont les notions de base sont définies dans le vocabulaire de la théorie naïve des ensembles. Ses résultats sont ainsi le produit d'une analyse double : syntaxique et sémantique » ([230], 10-11)

Ce va-et-vient entre le syntaxique et le sémantique, Tarski l'explicitait ainsi dès 1954 :

« I should like to point out a new direction of meta-mathematical research – the study of the relations between models of formal systems and the syntactical properties of these systems (in other words the semantics of formal systems). The problems studied in this domain are of the following character : Knowing the formal structure of an axiom system, what can we say about the mathematical properties of the models of this system ; conversely, given a class of models having certain mathematical properties, what can we say about the formal structure of postulate systems by means of which we can define this class of models ». ([238],19)

Ainsi cette prise en compte du langage pourrait caractériser l'approche du théoricien des modèles, comme le souligne Daniel Lascar :

« le théoricien des modèles est un mathématicien qui s'écoute parler. Il s'intéresse aux mêmes objets que le mathématicien classique : entiers naturels, nombres réels, groupes, corps, etc. Mais il est conscient, par exemple, que le langage nécessaire à la définition d'un corps valué est beaucoup plus simple que celui requis pour définir un anneau noethérien. Et ces faits, il sait les exploiter ». ([135], 238)

Et l'efficacité mathématique de cette attention au langage est attestée par l'ensemble des résultats mathématiques « concrets » obtenus au XX^{ème} siècle par des méthodes modèle-théoriques à travers par exemple :

- la simplification et l'affinement de la démonstration du dix-septième problème de Hilbert par Robinson en 1955 ;
- les applications de la méthode d'élimination des quantificateurs (théorème de Tarski-Chevalley, résolution d'une conjecture d'Artin par Ax et Kochen, rationalité des séries de Poincaré) ;
- le théorème d'Ax en 1968 ;
- le développement de la géométrie algébrique réelle ;
- les apports récents de la « théorie des modèles géométriques » de Zilber et Hrushovski aux problèmes de type mordellien en géométrie algébrique.

De ce point de vue la théorie des modèles semble avoir passé avec succès le « test d'applicabilité » évoqué par Tarski dès 1952⁶.

Mais l'efficacité de ces outils « linguistiques » repose en même temps sur la mise en correspondance de la syntaxe et de la sémantique, c'est-à-dire en dernière analyse sur l'élaboration mathématique de la notion de satisfaction ou de réalisation⁷. Langage, interprétation, vérité : il apparaît ainsi que la théorie des modèles développe, afin d'atteindre ses objectifs mathématiques, tout un réseau de notions introduites par la formalisation à l'intérieur du champ mathématique et une « structure conceptuelle »⁸ qui lui est propre.

6. « When new notions are introduced in mathematics, the question of their usefulness and applicability is often raised. Mathematicians want to know whether the discussions of the new notions leads to interesting results whose significance is not restricted to the intrinsic development of the theory of these notions. We believe that the theory of arithmetical classes has good chances to pass the test of applicability » ([237], 693)

7. Comme le met en lumière W. Hodges, lorsque qu'il suggère qu'en théorie des modèles tout « repose sur une unique notion fondamentale, et c'est la notion de formule ϕ vraie sous une interprétation I »

8. Nous empruntons l'expression à W. Demopoulos [50].

1.2.3 Les problèmes épistémologiques induits par cette sensibilité au langage

Ce rôle central et cette attention accordés au langage, si l'on prend pour point de départ la formalisation et le choix d'un vocabulaire fondamental \mathcal{L} , implique que les structures mathématiques que l'on peut espérer définir seront toujours caractérisées comme des \mathcal{L} -structures, c'est-à-dire des structures déterminées par le choix d'un langage, d'un ensemble de constantes non-logiques. Cette situation a pu être décrite comme la « sensibilité au langage » de la théorie des modèles : même si l'on fixe la logique sous-jacente et les règles d'inférence comme le fait la théorie des modèles « classique » (c'est-à-dire au calcul des prédicats classique du premier ordre), demeure l'arbitraire du choix de la signature.

Cette dépendance des structures au langage constitue, du point de vue mathématique, une opportunité et il est possible de considérer que c'est sur cette « sensibilité » que se construit tout le projet de la théorie des modèles. C'est en s'appuyant sur le langage, qui se présente alors comme un outil de contrôle des structures étudiées, que le théoricien des modèles examine les concepts mathématiques et en met en lumière les propriétés essentielles. On peut citer comme exemple d'outils propres à la théorie des modèles s'appuyant sur le langage la méthode des diagrammes ou comme notion centrale la définissabilité dans une structure, toujours relative à un langage donné.

Pendant du point de vue de la théorie des modèles la situation est alors la suivante, comme le rapporte G. Reyes :

« Tarski told us in his course on 'General Algebraic Systems' that there was no such thing as the theory of groups, but rather an infinite number of theories of groups, according to the choice of primitive operations and axioms ! » ([214], 392)

Certes une telle diversité n'est pas un obstacle à l'étude modèle-théorique des structures mathématiques : la théorie des modèles semble en effet rester en retrait de tout engagement concernant l'identité des structures étudiées par delà la diversité des théories, adoptant sur cette question une position « pragmatique ».

Mais que faire d'un point de vue non pas mathématique mais épistémologique, de cette distance, implicite dans cette remarque de Tarski, entre d'un côté l'unité d'un concept (le concept de groupe par exemple) et la pluralité « infinie » des théories définissant formellement ce concept ? On pourrait aller jusqu'à considérer que cette distance est consubstantielle à l'activité mathématique elle-même, qui consisterait à travailler dans cet écart et à proposer sans cesse de nouvelles caractérisations axiomatiques formelles de ces concepts, comme s'il n'était réellement possible de connaître un concept

qu'en multipliant les points de vue ou les perspectives sur lui⁹. Ainsi la théorie des modèles ne ferait ici que mettre en lumière l'essentiel de la pratique mathématicienne en lui donnant les moyens formels de tirer parti de cet espace où elle se déploie.

Afin de préciser cette idée nous pouvons utiliser ici une distinction développée par J. Kennedy à l'intérieur du champ mathématique entre des propriétés liées au langage utilisé et des propriétés qui en seraient indépendantes : distinction entre d'une part l'intrication (« entanglement ») et d'autre part l'indépendance à l'égard du formalisme (« formalism independence » ou « formalism freeness »)¹⁰. J. Kennedy donne ainsi pour exemple d'indépendance à l'égard du formalisme, à la suite de Gödel, la notion de calculabilité, dans la mesure où la classe des fonctions récursives est stable à travers une large classe de « formalismes ». Apparaît alors une difficulté d'ordre philosophique selon J. Kennedy :

« Entanglement signals a breakdown in the adequacy of our formalisations by exposing misalignments between entangled formalisations and the intuitive concepts they are meant to capture.
» ([121], 7)

La possibilité même de l'intrication introduit donc l'idée de limites de la formalisation. Elle introduit la possibilité d'une inadéquation essentielle des formalismes, de leur incapacité à déterminer véritablement les concepts structurels¹¹. Ainsi ce que met en évidence la remarque de J. Kennedy, c'est qu'il

9. C'est en tout cas ce que proposent Gian-Carlo Rota, David H. Sharp and Robert Sokolowski :

« The mathematician's search for further axiomatizations presupposes the certainty of the identity of the object, but recognizes that the properties of the object can never be completely revealed. The mathematician wants to find out what else the real line can be. He wants ever more perspectives on one and the same object, and the perspectives of mathematics are precisely the various axiomatizations [...]. The need for more perspectives on one and the same mathematical object is not a mere psychological or sociological quirk [...]. It is part of the formal – we might even say part of the ontological – structure of mathematics itself. It pertains to the way mathematics is structured, and to the kind of things that mathematics deals with. » ([221], 384)

10. Dans les termes de J. Kennedy,

« the phenomenon of entanglement : the fact that certain canonical mathematical objects are remarkably sensitive to slight perturbation of syntax and logic; and on the other hand the dual phenomenon of formalism independence, the idea that certain canonical concepts and constructions are stable across a variety of conceptually distinct formalisations. » ([121], 2)

11. H. Sinaceur propose pour sa part de dépasser cette idée de contenu « informel » :

« C'est un autre aspect des rapports forme-contenu, l'existence mise en évidence ici étant celle non pas de contenus formels mais de contenus informels, ou, plus exactement « transformels », c'est-à-dire chevauchant des formali-

devient nécessaire de recourir à une forme d'« intuition » du contenu sémantique, de compréhension du concept considéré indépendamment de ses présentations formelles¹².

Tarski lui-même par ailleurs ne passait pas complètement sous silence cette situation¹³. Il souligne en effet que :

« ce qui importe c'est uniquement la nature des concepts, non le caractère des moyens de preuve. » ([236], 305-306)

Pour Hourya Sinaceur cette remarque est capitale, surtout après l'établissement du principe de transfert¹⁴. Elle peut être vue comme le signe d'une épistémologie implicitement à l'œuvre dans les travaux de Tarski et en dernière analyse impliquée par la démarche même de la théorie des modèles : en effet, prendre acte d'un écart entre un nombre infini de théories formelles et l'unité d'un concept, même si cet écart ne fait pas l'objet d'une théma-

sations différentes. » ([230], 352)

12. Cette idée est d'ailleurs déjà présente dans l'article de Rota, Sharp et Sokolokowski précédemment cité :

« the fact that a variety of axiom systems exist for the theory of groups abolishes the presumed privilege of any one system bringing into being the notion of a group, but on the contrary presupposes a pre-axiomatic grasp of the notion of group. » ([221], 382)

Les auteurs défendent ainsi l'idée selon laquelle cette saisie pré-axiomatique du concept serait le produit d'une « familiarité » avec la notion :

« Once a mathematician has gained familiarity with the notion of group (say), his understanding of this notion is not necessarily tied to any particular axiomatic formulation of the concept of a group ». ([221], 381)

Cependant cette idée d'une familiarisation avec un concept reste vague et largement indéterminée.

13. Je remercie vivement H. Sinaceur d'avoir attiré mon attention sur ce point et sur ces références.

14. Comme le note H. Sinaceur,

« ce point mérite une certaine réflexion, car il met en évidence l'existence d'un « contenu » mathématique indépendant des moyens de sa preuve et même des moyens de son expression. C'est sans doute ce contenu que Tarski désigne par le terme 'nature' [...]. Il nous renvoie à quelque chose qui se conserve, à une vérité mathématique qui se transfère automatiquement d'un modèle à tous les autres de la théorie sans qu'il y ait nécessairement transfert simultané de sa formulation ou de sa preuve. Le contenu est relativement indépendant de la forme, forme d'expression ou de preuve. [...] L'application d'un principe de transfert conduit à distinguer entre contenu, énoncé (d'un contenu) et démonstration (d'un énoncé). Au même contenu correspondent généralement divers énoncés ne relevant pas forcément du même langage et un énoncé peut donner lieu à diverses démonstrations. Cette distinction implique par elle-même la possibilité d'assigner à un contenu un sens qui ne soit strictement déterminé ni par l'énoncé grâce auquel le mathématicien travaille sur le contenu, ni par la démonstration grâce à laquelle il en établit la vérité dans un modèle. » ([230], 351-352)

tisation explicite, revient nécessairement à accorder du crédit à une forme de « réalisme sémantique » compris comme la thèse selon laquelle le sens dépasse le langage formel¹⁵.

Ainsi les résultats et les travaux de Tarski, de même que l'approche générale de la théorie des modèles, semble défendre l'idée que

« truth is not just proof, and meaning not just language. » ([232], 393)

Mais se pose alors la question de l'accès au sens si celui-ci ne se fait pas à travers un langage formel du premier ordre. Quelle relation établir entre ce contenu mathématique et les différentes théories du premier ordre qui le présentent ? Et même, en amont de cela, comment caractériser ce « contenu mathématique » ? L'approche modèle-théorique semble en effet conduire à l'appréhender comme un invariant, au sens d'une classe d'équivalence des présentations formelles. Mais cela ne va pas de soi et d'autres caractérisations seraient envisageables.

Quoi qu'il en soit cela pose la question de savoir s'il est possible de dépasser l'apparente nécessité d'une intuition du contenu des concepts structurels et de rendre compte précisément de cette identité du concept à travers ses différentes définitions axiomatiques formelles.

Nous sommes donc confrontés à la situation suivante : s'est développée dans les années 1950 une théorie mathématique des structures, la « théorie des modèles », qui a à plusieurs reprises montré son efficacité mathématique. Cette théorie fait reposer son efficacité sur la « sensibilité au langage » qui en même temps qu'elle se révèle un puissant outil *mathématique* constitue une difficulté *épistémologique* qu'il semble difficile d'ignorer : celui de l'accès aux concepts structurels ou (autrement dit) des limites des langages formels, pouvant prendre la forme *in fine* d'un réalisme sémantique posant plus de difficultés qu'il n'en résout.

1.3 La théorie des catégories à l'écart des considérations linguistiques

Or compte-tenu de la position analogue qu'occupent la théorie des modèles et la théorie des catégories par rapport au champ mathématique il nous

15. « From an epistemological point of view, this fact means that understanding a concept is not reducible to the technique of reasoning about it in some well-defined frame [...]. But again what is 'meaning'? This a philosophical issue, which Tarski did *not* tackle. [...] But Tarski *showed* (notably through the transfer principle) that meaning transcends formal language. This naturally leads to a realist view of meaning [...]. If we adopt Wolenski's distinction between different kinds of realism, in particular between metaphysical realism and semantic realism [Wolenski defines semantic realism by the fact or supposition that meaning transcends use. Here I assume that semantic realism means also that meaning transcends language.] we may say that Tarski's views on truth and mathematical concepts pertain to semantic realism. » ([232], 385-386).

semble possible de poser la question de savoir ce que devient cette difficulté dans le contexte de cette dernière. Le problème posé par cet écart entre les définitions formelles et leur contenu sémantique serait-il lié à cette position de surplomb de ces deux théories et dès lors se pose-t-il également dans le cadre de la théorie des catégories ?

Nous souhaiterions dans ce travail de recherche examiner la forme que prend la question de la sensibilité au langage dans le contexte non seulement de la théorie des modèles mais également de la théorie des catégories, en particulier à partir des travaux fondamentaux de Lawvere et la sémantique fonctorielle. En effet si le théoricien des modèles a cherché à élaborer des outils pour dépasser cette difficulté, que nous analyserons dans le premier chapitre, la question se pose de savoir ce que devient cette difficulté dans le cadre catégorique et, en admettant qu'elle soit résolue, ce qui rend possible dans la « structure conceptuelle » propre de la théorie des catégories une telle solution.

Une telle perspective s'appuie notamment sur certaines analyses de S. Awodey dans [7]. Awodey défend en effet l'idée que s'est développé, depuis le XIX^{ème} siècle et les travaux de Dedekind, un « structuralisme mathématique » qui aboutit à l'élaboration de la théorie des catégories. Et cependant :

« the actual methods of mathematical structuralism seem to have been largely ignored ; philosophical accounts often proceed instead from model theory or from scratch. This neglect seems unfortunate ; a view based instead on the methods of mathematical structuralism would at least be more consonant with current mathematical practice, and could benefit from this substantial tradition by drawing on a now well developed technical apparatus. The latter is, of course, the mathematical theory of categories. »
([7], 210)

Le fait souligné par Awodey, selon lequel les questionnements philosophiques sur les mathématiques se sont essentiellement appuyés sur la théorie des modèles, peut s'expliquer par les motivations philosophiques implicites soulignées par H. Sinaceur : d'une certaine façon, dans un tel cadre conceptuel, l'épistémologie « s'y retrouve ». Awodey fait cependant ici l'hypothèse qu'il serait possible de développer à partir d'une certaine pratique mathématique (catégorique) une autre voie épistémologique, alors même que la théorie des catégories historiquement semble avoir émergé de considérations purement mathématiques.

Awodey rapproche la voie modèle-théorique de l'approche de la notion de structure développée par Bourbaki dans les *Eléments* ; Bourbaki dépassant les limites imposées à la théorie des modèles par la prise en compte du seul premier ordre. Il insiste par ailleurs sur les limites de cette approche modèle-théorique (ou de manière équivalente, à-la-Bourbaki) et par là-même défend une forme de supériorité, en termes d'efficacité mathématique, de la théorie

des catégories :

« While the Bourbaki notion of mathematical structure surely plays a role in such studies, the method of using mappings to isolate, describe, and compare different kinds of mathematical structure has emerged as a more effective tool. Category theory thus arose, not as an alternative foundational scheme, but in response to a mathematical need for a language and methods well suited to problems involving different kinds of mathematical structures. » ([7], 212)

Nous partageons avec Awodey l'idée qu'il ne s'agit nullement ici de questions fondationnelles qui concerneraient la nature des objets mathématiques mais bien plutôt de méthodes mathématiques de résolution de problèmes. L'efficacité mathématique de l'approche catégorique lui viendrait ainsi du fait qu'elle met au premier plan la structure des applications entre structures d'un type donné, et non pas les éléments qui « portent » ces structures. Ces morphismes entre les structures (les objets d'une catégorie) sont caractérisés comme préservant le type de structure. Ainsi par exemple, les applications continues préservent la structure d'espace topologique. Une catégorie consiste donc en des objets présentant un certain type de structure et des applications entre ces objets préservant la structure en question. Ainsi les espaces topologiques et les applications continues entre eux forment une catégorie de même que la classe des groupes avec les homomorphismes de groupes. Mais en quel sens peut-on dire que la structure des morphismes détermine la structure « interne » des objets de la catégorie ? Si une application $f : A \rightarrow B$ préserve une structure cela suppose tout d'abord que les objets A et B présentent cette structure. Si en outre $g : B \rightarrow C$ préserve aussi cette structure alors c'est le cas également de l'application composée $g \circ f : A \rightarrow B \rightarrow C$. Par ailleurs chaque objet A de la catégorie est accompagnée d'une application identité $1_A : A \rightarrow A$ préservant toute la structure. On a là les propriétés minimales que doit satisfaire une application qui préserve une structure. On peut alors caractériser un certain type de structure indépendamment des moyens initiaux de sa spécification. Par exemple la topologie d'un espace topologique est déterminée par les applications continues vers et hors des autres espaces topologiques, même si la topologie a été initialement définie en termes d'ouverts, de points limites, etc. De même la multiplication d'un groupe peut être retrouvée à partir de la structure des homomorphismes. On comprend de cette façon en quel sens la notion de catégorie rend possible la détermination d'un type de structure.

On voit également comment apparaît ainsi dans le contexte de la théorie des catégories la question épistémologique que posait la théorie des modèles de la sensibilité au langage. La théorie des catégories en effet semble passer outre cette dépendance au langage comme le souligne Awodey :

« the categorical method has certain advantages which have led to

its wide-spread acceptance in mathematics. One such advantage can be indicated already ; the categorical notion is 'syntax invariant', i.e. it depends on no particular choice among the different possible Bourbaki descriptions of a given kind of mathematical structure. [...] Given any category, one automatically knows the 'right' notion of having the same structure. » ([7], 214)

Se révèle ainsi un point de contact entre la théorie des modèles et la théorie des catégories autour de la question de la place et du rôle du langage dans l'élaboration de la connaissance mathématique : le contexte catégorique semble en effet se placer au delà des contraintes du langage.

Les analyses d'Awodey, si elles mettent en évidence de façon pertinente un point de contraste possible entre théorie des modèles et théorie des catégories, montrent cependant quelques insuffisances. Il nous semble tout d'abord difficile d'associer dans une même approche la théorie des modèles et la définition bourbakiste de la notion de structure. Cette dernière ne s'appuie en aucune façon sur ce qui est au contraire central dans la voie ouverte par Tarski, à savoir la distinction syntaxe/sémantique sur laquelle nous avons déjà insisté¹⁶.

En outre l'idée d'une supériorité mathématique de la théorie des catégories nous semble très discutable comme en témoignent les nombreux exemples de résultats mathématiques obtenus par des méthodes modèle-théoriques. Si certes les méthodes élaborées par la théorie des modèles sont d'un usage moins répandu que celles issues de la théorie des catégories, on ne peut en conclure une plus grande efficacité de ces dernières¹⁷. Il ne s'agira donc nullement dans ce travail de recherche de défendre l'idée d'une supériorité mathématique de la théorie des catégories sur la théorie des modèles mais bien au contraire d'essayer de comprendre la possibilité et la signification de cette diversité d'approches.

Par ailleurs Awodey laisse ouverte la question des « moyens initiaux de spécification » des types de structures : tout se passe comme si la théorie des catégories intervenait *après-coup*, une fois les structures définies d'une façon non-catégorique. Ainsi, pour reprendre un exemple d'Awodey, la catégorie Grp caractérise indépendamment de tout langage la structure de groupe par les applications entre les objets de la catégorie. Mais il reste à savoir comment est définie la structure même de groupe, c'est-à-dire finalement ce que sont les objets de cette catégorie ou le contenu du concept de « groupe ». Autrement dit l'examen de la seule catégorie des groupes ne nous semble pas permettre de saisir le contenu du concept de groupe. Or la théorie des catégories offre en elle-même les moyens de caractériser les concepts structurels, c'est-à-dire

16. Pour davantage d'arguments en ce sens on pourra se reporter aux travaux de Ph. de Rouilhan dans [49].

17. On pourra prendre pour exemple l'idée née de l'approche catégorique de Grothendieck d'une « topologie modérée », dans *L'Esquisse d'un programme*, développée en termes modèle-théoriques par L. van den Dries sous la forme de l'o-minimalité.

d'une certaine façon de prolonger dans le cadre mathématique des catégories la méthode axiomatique – ce qu'Awodey ne semble pas prendre en compte. Ces outils catégoriques de définition des concepts structurels sont notamment les théories de Lawvere, les catégories syntaxiques et les esquisses, qui feront l'objet des chapitres 2, 4 et 5 du présent travail de recherche. Il s'agira alors de savoir ce que peut signifier « axiomatiser » dans le contexte de la théorie des catégories.

Enfin si Awodey met en évidence de façon pertinente l'existence d'une forme mathématique de structuralisme le prolongement épistémologique de ce structuralisme reste indéterminé dans [7]. A quoi ressemblerait dès lors un structuralisme philosophique ancré sur les analyses de la théorie des catégories ?

1.4 Le structuralisme catégorique en débat

Un tel structuralisme philosophique prenant appui sur la théorie des catégories a été développé par la suite par S. Awodey à l'occasion d'un débat avec G. Hellman. Nous souhaiterions à présent examiner en détails les apports conceptuels de ce débat mais aussi et surtout les insuffisances des réponses apportées par Awodey. En effet si nous souhaitons à notre tour esquisser une épistémologie qui serait intimement articulée à la théorie des catégories (ce sera l'objet du chapitre 6) l'examen de ce débat devrait nous permettre d'en établir un sorte de cahier des charges, de formuler précisément les difficultés auxquelles il nous faudra répondre par la suite. En un sens l'examen de ce débat entre Awodey et Hellman nous permettra de repérer les écueils sur lesquels s'est échouée jusqu'ici la philosophie des mathématiques lorsqu'il s'agit de prendre en compte ce qui se joue dans une approche catégorique des concepts structurels.

Le structuralisme de S. Awodey

S. Awodey développe¹⁸ donc dans [8] ce que seraient les traits essentiels d'un structuralisme épistémologique qui s'appuierait sur le structuralisme mathématique mis en lumière précédemment. Awodey décrit ainsi sa thèse de façon très générale :

« As a first, very rough, approximation, we may say that the point of view that we are going to describe emphasizes form over content, descriptions over constructions, specification of assumptions over deductive foundations, characterization of essential properties over constitution of objects having those properties. »
([8], 55)

18. En réponse aux objections formulées par G. Hellman dans [103].

Ce qu'Awodey décrit ainsi, c'est une position philosophique qu'il considère comme « antifondationaliste » : il oppose une approche globale reposant sur la spécification d'un univers unique d'objets à une approche locale déterminant pour chaque théorème ou théorie les propriétés structurelles essentielles, nécessaires et requises par cette situation sans supposer la connaissance ultime ou la détermination des « objets » impliqués. Plus précisément cela revient à soutenir pour Awodey que les théorèmes mathématiques sont toujours des énoncés « schématiques » à propos d'une structure et que ces énoncés peuvent dès lors avoir différentes instanciations. Ainsi pour Awodey, ce que nous apprend la théorie des catégories, c'est qu'un théorème mathématique est toujours implicitement de la forme « Si ... alors... » et qu'il ne nécessite nullement de spécifier la nature des objets sur lesquels porte l'implication. Par conséquent la position d'Awodey peut être caractérisée d'une part comme une forme de structuralisme éliminativiste et d'autre part comme un « if-thenism ». La dimension éliminativiste suppose de son point de vue de renoncer à toute forme de quantification universelle sur tous les éléments d'un système fondationnel spécifique : peu importe la nature des entités impliquées dans un énoncé mathématique, seule la structure (relations et opérations) compte.

La différence entre ces deux approches est cruciale pour Awodey dans la mesure où elle implique selon lui une prise de distance avec la notion de vérité :

« In the case of the quantified statement, we consider what is true for an arbitrary real number, while in the indeterminate case we, in effect, consider what holds for an arbitrary number x , in an arbitrary ring over \mathbb{R} . One could say, rather speculatively, that the difference in both cases seems to be related to that between what is *true* for all of a fixed range of values, as opposed to what can be *proved* for an indeterminate value. » ([8], 60)

La quantification universelle pour Awodey semble en effet impliquer l'idée de satisfaction, de réalisation par un élément désigné par la variable liée par le quantificateur de l'énoncé mathématique. Elle suppose donc un univers sous-jacent d'objets où serait vérifié l'énoncé, alors que sa version du structuralisme, faisant l'économie de tout domaine de satisfaction, remplacerait la vérité par la prouvabilité.

Pour ce qui est du deuxième aspect de son structuralisme Awodey anticipe certaines objections et distingue son « if-then-ism » de celui d'un Russell :

« First, if-then-ism is sometimes understood to pertain to the underlying methods of reasoning – the laws, axioms, and rules of the foundational system. The theorems of mathematics, even when stated in the form 'if A, then B', are supposed 'really' to mean 'if the laws, axioms, and rules of the system are true and

correct, then if A, then B. [...] The argument against if-then-ism in this form is that it makes all theorems hypothetical [...] But in our case, the conditions are rather of the kind 'if G is a finitely generated abelian group', not 'if the axioms of ZFC are true'. There is usually no question about *whether* such conditions are ever satisfied; rather, like axiomatic definitions, they serve to specify the range of applications of the subsequent statement. » ([8], 60)

Enfin une différence cruciale entre l'approche d'Awodey et celle de Russell est que le structuralisme catégorique rend possible une spécification 'top-down' des concepts mathématiques qui ne se ferait pas dans le cadre d'une hiérarchie 'bottom-up' d'entités¹⁹ et cela grâce à une notion « parfaitement autonome » ([8], 61) de morphisme ouvrant la voie à une description purement relationnelle. Selon Awodey en effet, alors que l'analyse russellienne suppose une antériorité des relata sur les relations, et donc finalement une hiérarchie fondée sur des entités de niveau inférieur, la structure de catégories permettrait de considérer les relations pour elles-mêmes comme objets du discours indépendamment de ce qu'elle relie. Une telle remarque peut être étendue à une opposition entre théorie des catégories et théorie des modèles : cette dernière, si on place au cœur de son efficacité mathématique la possibilité d'un va-et-vient entre syntaxe et sémantique, semble supposer implicitement l'existence d'un modèle d'une théorie des ensembles, où les relations, quelle que soit leur définition, sont construites à partir des éléments comme ensembles de couples.

Voilà pourquoi s'impose à l'épistémologue structuraliste pour Awodey le contexte de la théorie des catégories :

« In category theory, such notions as relation, connection, property, and operation are all subsumed under the primitive notion of a morphism [...]. Many apparently different phenomena can be described in a uniform way, and thus easily related to each other, by the language of category theory [...]. How, then, do we make precise the notions of schematic statements about *structures* that have different *instances*? Simply by using the usual language and methods of category theory; they automatically treat mathematical objects as 'structures', and categorical statements about them are inherently 'schematic' ». ([8], 61-62)

Pour synthétiser le structuralisme philosophique élaboré par Awodey, on pourra ainsi souligner qu'il cherche à faire l'économie de tout univers d'entités unifié sur lequel porterait une quantification (éliminativisme), qu'il laisse de côté la notion de vérité au profit de la prouvabilité et qu'il accorde une place

19. Cette idée est notamment mise en lumière par J.-P. Marquis et E. Landry dans [132].

centrale et essentielle à la notion de morphisme conçue comme « parfaitement autonome ».

Les objections de G. Hellman

Cependant G. Hellman, en réponse à cet article d'Awodey, montre dans [104] que ce structuralisme catégorique soulève de nouvelles difficultés. Selon Hellman le structuralisme d'Awodey aboutit à un « dilemme » : soit les mathématiques doivent être comprises comme un réseau complexe de connexions déductives et conceptuelles soit ce n'est pas le cas. La première alternative de ce dilemme revient à faire du structuralisme catégorique d'Awodey une variété de « formalisme » abandonnant la notion de vérité mathématique au profit de la seule validité logique déductive. Et c'est là en effet ce que laisse penser le propos d'Awodey. Or dans ce cas, insiste Hellman, Awodey doit pouvoir répondre aux critiques auxquelles est confronté de façon générale le déductivisme. Si l'on suit A. Paseau et F. Pregel dans [188], les difficultés que rencontre le déductivisme en général sont les suivantes :

1. la première difficulté est de rendre compte de la notion de *prouvabilité* : soit cela nécessite d'accepter l'existence d'objets linguistiques abstraits que sont les preuves soit cela revient à introduire des opérateurs modaux et ainsi à retrouver le structuralisme modal défendu par Hellman ;
2. la deuxième objection possible porte sur les parties ni axiomatiques ni déductives des mathématiques qui ne peuvent dès lors plus être prises en compte (on pensera par exemple au théorème des quatre couleurs) ;
3. le déductiviste est par ailleurs exposé à une potentielle régression à l'infini quant à la justification des règles de déduction. On notera sur ce point qu'Awodey évite cette difficulté en écartant les règles de déduction de sa démarche déductiviste :

« The laws, rules and axioms involved in a particular piece of reasoning, or a field of mathematics, may vary from one to the next, or even from one mathematician or epoch to another. The statement of the inferential machinery involved thus becomes (tacit) part of the mathematics [...]. The methods of reasoning involved in different parts of mathematics are not 'global' and uniform across fields or even between different theorems, but are themselves 'local' or relative. »
([104], 56)

Solution qui n'est pas pleinement satisfaisante.

4. le problème de l'applicabilité des mathématiques à la physique se pose de façon essentielle au déductiviste ;
5. la dernière difficulté relevée par Paseau et Pregel est celle que posent les énoncés indécidables :

« on the deductivist view, undecidable sentences in any formalisation of arithmetic and analysis are false and their negations are also false, since neither deductively follows from the axioms. That there are undecidable sentences follows from Gödel's First Incompleteness Theorem together with standard constraints on deductive systems. » [188]

Une solution pour résoudre cette difficulté serait de rejeter par principe le tiers-exclu et d'adopter ainsi une position constructiviste avec toutes les limitations que cela implique.

Le structuralisme catégorique n'étant pas en mesure, selon Hellman, de répondre à ces difficultés il ne reste donc que la seconde branche du dilemme :

« On the other horn of the dilemma, we take seriously the idea that 'morphism' is a primitive with definite, if multifaceted, meaning, giving genuine content to mathematics beyond mere inferential relations. But what is that meaning? And what is the content beyond inferential relations? [...] It seems clear, then, that the notion of morphism – which, unlike the notion of 'part/whole' employed in modal-structuralism and also exhibiting a kind of '« schematic character', is a mathematical term of art, not a familiar one in ordinary English – depends on the context, viz. *on the category or categories presupposed or in which one is working*. As indicated at the outset, arrows (i.e. morphisms) need not be ordinary functions. They need only satisfy the conditions on 'arrows' of the CT axioms or extensions thereof. Surely, this is what should be said in explaining 'what morphisms are'. Moreover, functors do more than ordinary functions, and they are centrally involved in 'the usual language and methods of category theory' (Awodey [2004], p. 62). But then what we really have as primitives are 'satisfaction of axioms' and 'functor between categories'; i.e. we are presupposing 'category' as a primitive as well. But this brings us right up against the same problem that confronted the previous view, namely that we are falling back on *prima facie* set-theoretic notions after all. [...] In any case, the CT 'arrows only' explications of 'relations', 'operations', and so forth, are of no avail until we first understand 'morphism' (i.e. 'arrow'), 'functor' and 'category', i.e. until we already understand satisfaction or equivalent (second- or higher-order) notions. » ([104], 159)

L'argument de Hellman est donc que l'échec d'une stratégie déductiviste suppose de donner un contenu au concept de morphisme, ce qui ne peut être fait en dernière analyse selon lui qu'en s'appuyant sur la notion de satisfaction (telle que la propose la théorie des modèles ou d'autres formulations équivalentes) ou sur des notions ensemblistes. Ce dernier point fait d'ailleurs écho

aux objections proposées par S. Feferman dans [76].

En effet ce dernier, dans cet article, propose une objection à toute entreprise fondationnelle en théorie des catégories :

« The point is simply that *when explaining* the general notion of structure and of particular kinds of structures such as groups, rings, categories, etc. we implicitly *presume as understood* the ideas of *operation* and *collection* ; e.g. we say that a group consists of a collection of an object together with a binary operation satisfying such and such conditions. Next, when explaining the notion of *homomorphism* for groups or *functor* for categories, etc., we must again understand the concept of operation. [...] Thus at each step we must make use of the unstructured notions of operation and collection to explain the structural notions to be studied. The *logical* and *psychological priority* if not primacy of the notions of operation and collection is thus evident. » ([76], 150)

L'objection que propose Feferman repose donc sur l'idée d'une antériorité logique et psychologique des notions d'opération et de collection que la théorie des catégories prend pour acquises alors que la théorie des ensembles en propose une analyse conceptuelle. Cette idée est ainsi précisée :

1. « My use of 'logical priority' refers not to relative strength of formal theories but to order of definition of concepts in the cases where certain of these *must* be defined before others. For example, [...] closer to home, the (or rather some) notions of set and function are logically prior to the concept of cardinal equivalence. [...]
2. On the other hand, 'psychological priority' has to do with natural order of understanding. [...] Thus one cannot understand abstract mathematics unless one has understood the use of the logical particles 'and', 'implies', 'for all', etc. and understood the conception of the positive integers. Moreover, in these cases formal systems do not serve to explain what is not already understood since these concepts are implicitly involved in understanding the workings of the systems themselves.[...]
3. My claim above is that the general concepts of operation and collection have logical priority with respect to structural notions (such as 'group', 'category', etc.) because the latter are defined in terms of the former but not conversely. At the same time, I believe our experience demonstrates their psychological priority. » ([76], 153)

Cette présentation du structuralisme catégorique de S. Awodey²⁰ a permis de mettre en évidence certaines possibilités épistémologiques ouvertes par la théorie des catégories, comme la mise à distance de la notion de vérité ou l'importance de la notion de morphisme. Elle a dans le même temps permis de dégager quelques difficultés auxquelles un tel structuralisme se trouve par là-même confronté. Le dilemme proposé par Hellman semble en effet pertinent et nous place face à un défi dès lors que l'on envisage d'élaborer un structuralisme philosophique prenant appui sur la théorie des catégories : soit on fait face aux difficultés auxquelles est confrontée toute forme de déductivisme soit on donne un contenu réellement autonome à la notion de morphisme. C'est cette seconde voie que notre travail de recherche suivra, en particulier dans le chapitre 6, dans lequel il s'agira implicitement de répondre à l'objection de Feferman.

Par ailleurs ce débat nous semble paradigmatique des approches philosophiques qui ont été élaborées jusqu'à présent de la théorie des catégories. Celles-ci laissent dans l'ombre un point crucial, pourtant mis en lumière dans l'article initial d'Awodey et sur lequel nous avons insisté, mais qu'il ne semble pas être parvenu à élaborer plus avant : la place du langage dans le contexte de la théorie des catégories. On a vu en effet que, pour Awodey, un des avantages du structuralisme mathématique appuyé sur la théorie des catégories est le fait que cette dernière est « syntax-independant ». Or ce point disparaît complètement des discussions ultérieures, voire même semble d'une certaine façon occulté par sa lecture déductiviste du structuralisme catégorique. Nous souhaiterions au contraire sortir cette question de l'angle mort du discours philosophique en la plaçant au premier plan de nos analyses.

1.5 L'idée d'épistémologie effective

1.5.1 La théorie des modèles comme épistémologie effective

A la lumière de cette dernière remarque, il semble maintenant possible de préciser le point de départ de nos analyses. On a pu voir comment la théorie des modèles a démontré son efficacité *mathématique* tout en accentuant une difficulté *épistémologique* – la sensibilité au langage – et a laissé entrevoir ainsi les limites possibles de la formalisation et la nécessité d'un recours à une forme d'intuition. Au contraire la théorie des catégories paraît avoir ouvert la voie à une mise à distance du langage dans la caractérisation des concepts structurels et s'être développée ainsi comme l'envers de la théorie des modèles.

Dès lors il s'agira d'examiner ce que devient le problème de la sensibilité au langage dans le contexte de la théorie des catégories. Que signifie cette

20. D'autres formes de structuralisme catégorique sont également possibles, comme le structuralisme *in re* proposé par E. Landry dans [130] et [131].

« indépendance par rapport à la syntaxe » soulignée par Awodey du point de vue méta-théorique offert par la théorie des catégories ? Quels sont les ressorts d'un agir mathématicien qui ne s'appuie plus sur le langage qu'il emploie ?

Pour répondre à ces questions nous souhaiterions reprendre un concept introduit par H. Sinaceur concernant la théorie des modèles et la logique en général : l'idée d'une *épistémologie effective*. En effet cette mathématisation de concepts et de méthodes métamathématiques que nous voyons à l'œuvre au cœur de la théorie des modèles, si elle se place explicitement à distance des questions philosophiques sur les mathématiques, semble néanmoins apporter avec elle, implicitement, certaines prises de position épistémologiques. Certes la théorie des modèles ne réalise en aucune façon un projet logiciste dans la mesure où elle ne vise pas à *réduire* les mathématiques à des notions logiques. Mais les racines extra-mathématiques des procédures logiques et les présupposés d'une formalisation du langage naturel amènent à s'interroger sur la portée épistémologique de ce rapprochement du logique et du mathématique mis en lumière par la théorie des modèles ; comme le remarque H. Sinaceur :

« Le but explicite de la théorie des modèles est de contribuer [...] à l'étude mathématique des structures abstraites sans aborder les questions fondationnelles. La conception instrumentale de la logique la décapite de ses présupposés philosophiques ou du moins en neutralise l'impact sur le travail quotidien. On doit pourtant reconnaître la trace d'une motivation philosophique dans l'effort de traiter des questions telles que celles de la définissabilité – trace non moins significative que celle que l'on repère dans les questions de prouvabilité. »²¹ ([230], 338)

Le but de la théorie des modèles est donc une étude des structures mathématiques qui prend appui sur la logique et donc, comme nous l'avons vu, sur la formalisation du langage. Mais cela semble impliquer que la logique et le langage formalisé sont bien en mesure de nous apprendre quelque chose des structures mathématiques. S'il y a bien quelque chose comme une « motivation philosophique » à l'œuvre dans la théorie des modèles, c'est dans cette idée que l'analyse logique des concepts mathématiques est réellement en prise avec l'essence de ces concepts. Ce qui se manifeste ici, c'est ainsi le présupposé d'une forme de « productivité mathématique du langage symbolique » [22]. Fruit le plus élaboré du tournant linguistique en mathématiques, la théorie des modèles apparaît ainsi comme le contexte le plus adéquat pour mettre en œuvre et « analyser thématiquement *le pouvoir de la langue dans la constitution de la connaissance* » et comme le lieu d'une « réflexion sur la langue intégrée à la production du savoir » : elle peut alors se présenter

21. A titre de remarque, on peut noter que Tarski dans [237] se présente ainsi : « being a mathematician (as well as a logician, and perhaps a philosopher of a sort) ».

comme « épistémologie effective ».

Dans [231], H. Sinaceur développe cette vision de la logique, et notamment de la théorie des modèles, comme « épistémologie effective » : certes le logicien ne fait pas porter son attention sur la nature des entités mathématiques qu'il étudie et se fixe avant tout comme objectif la résolution de problèmes mathématiques. Néanmoins,

« l'utilité mathématique de la logique ne doit toutefois pas cacher son autre fonction, proprement épistémologique celle-là puisqu'elle consiste en une élucidation de la pratique mathématique. » ([231], 339)

Ce qui fait le cœur de cette synthèse entre l'épistémologie, la logique et les mathématiques, c'est l'analyse logique. Ainsi, si l'épistémologue trouve son compte dans une approche modèle-théorique des structures mathématiques, c'est donc dans la mesure où elle lui offre les moyens de comprendre les ressorts du travail du mathématicien, notamment en portant à la lumière les notions primitives à partir desquelles il élabore ses concepts et les mécanismes de cette construction. Mais

« en même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir : mieux comprendre n'a pas de fin en soi. Lorsqu'on argue que l'analyse logique de telle procédure mathématique la rend plus intelligible, cela signifie toujours, du point de vue du logicien comme du mathématicien, que sont ainsi révélées des possibilités d'extension et de renouvellement de son agir. » ([231], 341)

Si l'analyse logique peut acquérir cette portée mathématique, c'est donc d'abord à travers le travail de formalisation qui contribue à porter à l'attention du mathématicien des notions absentes de son expérience « naïve ». Et cela se retrouve même en dehors de la théorie des modèles, dans toute approche logique des mathématiques. H. Sinaceur prend ainsi l'exemple du concept de fonction récursive dans l'analyse de la notion de calculabilité ou du concept de type dans l'analyse de la conception « naïve » de la notion d'ensemble. Mais cela passe également, et plus spécifiquement, dans le cadre de la théorie des modèles par le fait de « *choisir* les bons axiomes et les bons concepts » ([231] 342). Ainsi,

« Distinguer, choisir, dégager le sens ou le redéfinir, réorienter la réflexion et le travail, tous ces verbes renvoient à des actes dont on ne sait *a priori* s'il faut les attribuer au logicien ou à l'épistémologue. Le premier ayant assumé pour son propre compte bien des « gestes » du second, celui-ci ne peut en retour ignorer ses analyses. » ([231], 344)

1.5.2 La théorie des catégories

L'hypothèse que nous souhaiterions défendre est qu'il est également possible de considérer la théorie des catégories comme une épistémologie effective et que l'examen du « devenir-catégorique » de la sensibilité au langage, c'est-à-dire les réponses que le contexte catégorique apporte à cette difficulté, nous permettra de dégager les traits essentiels de cette épistémologie implicite. Nous défendrons ainsi l'idée que lorsque la théorie des catégories reprend à son compte la démarche axiomatique et se donne les moyens de caractériser les concepts structurels, elle laisse entrevoir des décisions épistémologiques et des préconceptions concernant les mécanismes d'élaboration de la connaissance et ouvre la voie à une analyse philosophique renouvelée.

Il y aurait ainsi quelque chose comme une « motivation philosophique » à l'œuvre dans l'usage mathématique de la théorie des catégories qu'il nous appartiendrait, du point de vue épistémologique, de mettre en lumière, reprenant ainsi pour la théorie des catégories le projet proposé par H. Sinaceur dans le prolongement des travaux de Desanti :

« La leçon liminaire des *Idéalités mathématiques* tient dans la nécessité pour l'épistémologue des mathématiques de « s'installer en quelque endroit de [leur] édifice », de « se garder d'y rien importer » et d'apprendre à « déchiffrer les réseaux du discours second qui se produit et se déploie du fait que la mathématique se montre ». Tâche modeste : se mettre à l'école, apprendre, observer sans préjuger, « laisser les choses à leur pur apparaître » [...], repérer pourtant et éclairer les connexions que le mathématicien établit sans s'y arrêter, mû par l'urgence de problèmes toujours nouveaux à résoudre. Laisser donc advenir les significations dans l'« effectuation » active du savoir, développer le « germe » épistémologique [...]. » ([231], 331).

Dans cette perspective, dans un premier chapitre, nous verrons quelles réponses la théorie des modèles, adoptant une démarche réflexive sur ses propres limites, a apportées au problème de la sensibilité au langage. En essayant de saisir formellement l'idée d'une unité du concept par-delà la diversité de ses formulations, elle a intégré au champ mathématique la relation de synonymie. Il apparaîtra que ce faisant, la théorie des modèles a retrouvé des questions auxquelles était également confrontée l'algèbre universelle sous une forme spécifique qu'il s'agira également d'examiner.

Nous présenterons ensuite les diverses voies empruntées par la théorie des catégories pour rendre possible une caractérisation catégorique des concepts structurels à travers un prolongement catégorique de la méthode axiomatique. Cela prendra la forme tout d'abord, dans le chapitre 2, des théories de Lawvere et de la sémantique fonctorielle. Les travaux de Lawvere ont en effet joué un rôle décisif dans l'orientation de la théorie des catégories vers ces questions en plaçant l'articulation entre l'unité du concept et la diversité

des présentations au centre de leurs préoccupations. Nous verrons également quels en ont été les élargissements successifs dans les travaux de Bénabou, Volger et Roisin, ainsi que les premières conséquences épistémologiques, notamment sur la place à accorder à la distinction entre syntaxe et sémantique.

Le chapitre 3 présentera l'usage qui a été fait dans le champ de l'informatique théorique des concepts et méthodes introduits par Lawvere. Il apparaîtra ainsi que la théorie des langages formels et la sémantique des langages de programmation peuvent jeter une lumière nouvelle sur les questions épistémologiques. Elles proposent en particulier une compréhension originale de la notion de morphisme, liée étroitement à celle de comportement calculatoire. Nous verrons notamment ainsi en quoi les structures mathématiques peuvent être dès lors considérées non plus comme des objets mais comme des propriétés du calcul.

Cependant les limitations internes à l'approche de Lawvere, notamment la difficulté à dépasser le cadre algébrique, nous conduira au chapitre 4 à examiner une autre approche catégorique du rôle joué par le langage dans l'élaboration de la connaissance mathématique, à savoir celle de la théorie catégorique des modèles, développée notamment par Joyal, Reyes et Makkai. Cet examen portera principalement sur un résultat de Makkai qui nous semble particulièrement significatif du point de vue de la question de la sensibilité au langage : la complétude conceptuelle forte. La présentation de ce théorème nous permettra de présenter et d'examiner les notions essentielles de ce champ de recherche et notamment le rôle joué par les catégories syntaxiques et les topos de Grothendieck.

Se posera alors la question de savoir s'il est possible d'élargir cette approche à la notion de preuve mathématique, ce qui supposerait une compréhension interne à la théorie des catégories de la notion de déduction. Une réponse à cette question sera apportée au chapitre 5 par les esquisses de Charles Ehresmann. Nous essaierons alors de replacer ces objets dans le prolongement des réflexions d'Ehresmann sur la notion générale de structure qui sont enracinées dans une approche géométrique des concepts mathématiques. Ce sera l'occasion notamment de revenir sur le rôle joué par la distinction entre le local et l'algébrique dans le champ catégorique.

Dans le sixième et dernier chapitre, il s'agira dans un premier temps de faire le bilan des analyses épistémologiques rendues possibles par les outils catégoriques introduits tout au long de ce travail de recherche et d'esquisser sur ce fondement les linéaments d'une philosophie des mathématiques prenant appui sur la théorie des catégories. A partir de là, nous illustrerons la possibilité d'une telle perspective en montrant en quoi le projet de Jean Piaget d'une « épistémologie génétique », adossée à la méthode expérimentale de la psychologie du développement et malgré des limites que nous mettrons en lumière, offre l'exemple d'une philosophie des mathématiques répondant aux exigences d'un structuralisme catégorique.

1.6 Remarques

Il ne nous a pas paru pertinent de proposer une analyse épistémologique de tout le champ de la logique catégorique, qui ne cesse de se développer depuis les travaux fondateurs de Lawvere en 1963. Certaines notions, bien que cruciales dans ce champ, sont donc absentes de ce travail de recherche.

C'est le cas en particulier de la notion de topos élémentaire telle qu'elle a été développée par Lawvere et Tierney à partir de 1970. La notion de topos dont il sera question, principalement au chapitre 4, sera celle de topos de Grothendieck, qui ne coïncide pas avec celle de Lawvere et Tierney : si tout topos de Grothendieck est un topos élémentaire, la réciproque n'est pas vraie. Nous n'avons pas abordé la notion de topos élémentaire, d'une part parce que celle-ci semble intimement liée à des questions ensemblistes et d'autre part car le classifiant des sous-objets intervenant dans la définition des topos élémentaires, dans l'œuvre de Lawvere, paraît porter les traits d'une « intuition » logique. En effet, comme le remarque C. McLarty dans [176], la notion de classifiant des sous-objets apparaît dans l'axiomatisation élémentaire par Lawvere de la catégorie des ensembles en 1964, et

« In the category of sets the subobject classifier is also the co-product $1 + 1$. Between 1964 and 1969 Lawvere did pursue the idea of $1 + 1$ as an object of truth value » ([176], 361)

Au contraire les topos de Grothendieck ont été élaborés pour répondre à des questions proprement géométriques, comme le souligne McLarty :

« In fact Grothendieck designed toposes by looking for a powerful natural generalization as defined in standard topology which would embrace other concepts which he found relevant to his work in geometry. » ([176], 357)

Ainsi la notion de topos de Grothendieck nous a semblé marquer plus nettement la distance entre la théorie des catégories et la théorie des modèles sur laquelle nous souhaitons appuyer notre propos. Par là-même, la notion de langage interne d'un topos (ou langage de Bénabou-Mitchell) ne sera pas abordée par notre travail de recherche, car elle dépend de façon essentielle de l'axiomatisation par Lawvere et Tierney des topos. Certes, un résultat important de J. Bell établit que tout topos est le topos canonique de sa logique interne mais un tel énoncé nous semble implicitement prolonger une appréhension modèle-théorique des concepts mathématiques, dans la mesure où, en tant que résultat de complétude, cela suppose encore une distinction de la syntaxe et de la sémantique (intégrée à un topos compris comme univers).

Par ailleurs notre analyse se fonde sur un parallèle entre théorie des modèles et théorie des catégories qui nous est apparu justifié par l'efficacité mathématique de ces deux méta-théories. La « logique » dont il sera question sera donc restreinte à des langages du premier ordre, pour lesquels la théorie des modèles a essentiellement développé ses outils et ses méthodes, alors

même que la théorie des catégories fournit un cadre pertinent pour l'étude et la mise en œuvre de logiques d'ordre supérieur ou de différentes théories des types. Par conséquent nous avons fait le choix de ne pas traiter les formes d'axiomatisation abordées par exemple dans le cadre de la Théorie des Types d'Homotopie et les « Fondations Univalentes »²².

Les notions fondamentales de théorie des modèles et de théorie des catégories ne seront pas toujours définies. On se référera dans les cas où cela s'avérerait nécessaire, pour la théorie des modèles à [169], et pour la théorie des catégories à [159].

Cela nous amène à apporter quelques précisions sur la façon dont nous avons souhaité articuler, dans ce travail de recherche, nos analyses au travail mathématique. Nous avons en effet été conduits à présenter un grand nombre de définitions mathématiques afin de nourrir la réflexion épistémologique et conceptuelle : ces définitions ont été pour nous le matériau essentiel à partir duquel élaborer des thèses philosophiques. Nous avons également fait référence à un certain nombre de théorèmes mathématiques dont nous n'avons pas, le plus souvent, donné les démonstrations. Même si nous admettons qu'une grande partie du travail mathématique se manifeste dans les démonstrations et non seulement dans la construction de concepts, ce choix est motivé par plusieurs raisons : d'une part nous n'avons pas voulu obscurcir le propos principal par la présentation, même résumée, de démonstrations qui auraient rendu nécessaire l'introduction d'un grand nombre de définitions auxiliaires. D'autre part ce sont les concepts mathématiques eux-mêmes, davantage que leur mise en œuvre dans les démonstrations, qui illustrent le plus clairement l'approche générale que nous souhaitions analyser. Nous avons cependant indiqué les références des démonstrations afin que le lecteur, s'il le souhaite, puisse s'y reporter.

Par ailleurs certains chapitres ou sections de chapitre privilégient une présentation historique des notions et des questions mathématiques. Il ne s'agit pas seulement d'un choix de présentation dans la mesure où cela repose sur l'idée que l'histoire d'un concept, son contexte d'émergence et ses reprises successives, peuvent éclairer l'analyse épistémologique quant aux motivations sous-jacentes à son élaboration. Il s'agit de mettre en lumière une intention, un projet, une trajectoire qui en éclairent le sens et la portée. Il ne s'agit ici pas d'un travail d'histoire des mathématiques à proprement parler ; cela ne signifie pas pour autant que le développement historique n'ait pas un rôle à jouer dans l'analyse épistémologique.

Enfin les citations sont données en langue originale. Nous avons en effet privilégié une lecture « directe » des textes afin d'éviter les ambiguïtés qu'aurait pu introduire une traduction en français.

22. On se reportera sur ces questions à [217].

Chapitre 2

La « synonymie », entre théories et algèbres

La question qui se pose est celle de la sensibilité au langage de la théorie des modèles. Que signifie l'affirmation selon laquelle deux théories formelles distinctes, formulées dans des langages différents, désignent le même concept structurel ? Précisons ici que par « concept structurel » nous entendons par exemple les notions de « groupe », « corps » ou « espace topologique », c'est-à-dire des concepts considérés indépendamment de leurs instanciations (le groupe des entiers par exemple) et ayant en commun de caractériser un type de structure. De ce fait, toutes les théories mathématiques ne rentrent pas dans le champ de notre analyse : les théories envisagées dans ce travail de recherche sont des systèmes axiomatiques formels déductivement clos déterminant un tel type de structure (nous ne considérerons donc pas, par exemple, les théories de la mesure ou de l'intégration).

On peut repartir de la remarque de Tarski selon laquelle il y aurait une infinité de théories des groupes, et dans laquelle on voit apparaître une tension entre d'un côté la diversité infinie des systèmes axiomatiques possibles, et de l'autre l'identité apparente du concept défini par ces théories. Deux langages différents \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 permettraient de construire deux systèmes axiomatiques différents T_1 et T_2 qui, malgré ces différences, décriraient le même concept. Or comme le notait W. Hodges, pour le théoricien des modèles,

« the group with \cdot is one structure and the group with $+$ is a different structure. Change the name and you change the structure. » ([107], 1)

Comment articuler la diversité des structures et l'unité du concept ?

Cette question prend d'autant plus de force que l'on pourrait considérer, avec Moritz Schlick, dans *Forme et contenu*, qu'il y a un lien essentiel entre langage, structure et signification. Pour Schlick en effet, « la caractéristique essentielle du langage est sa capacité à exprimer des faits » ([222], 42) et « c'est l'agencement, l'ordre particulier ou la combinaison spécifique

des signes qui constitue l'essence du langage » ([222], 43). Il y a donc pour Schlick une relation essentielle entre les faits et l'agencement des signes : cette relation passe par la notion de structure, ou d'ordre logique. Ainsi

« on peut exprimer un seul et même fait en mille langages différents : les mille propositions différentes auront la même structure, et le fait qu'elles expriment aura également la même structure, car c'est précisément pour cette raison que toutes ces propositions expriment précisément ce fait-là . ([222], 45)

Il n'y a ainsi rien d'exprimable pour Schlick en dehors de la structure ou de la forme, l'idée même de « contenu » n'ayant pas réellement de sens.

Par ailleurs cette remarque de Schlick fait signe précisément vers ce qui nous occupe : le fait que plusieurs langages désignent le même fait n'est possible que parce qu'il y a formellement quelque chose de commun à ces différents langages et au fait qu'ils expriment. Mais en quoi peut consister ce noyau formel commun entre, par exemple, une axiomatisation de la notion de groupe dans le langage $\mathcal{L}_1 = \{ \cdot, {}_{-1} \}$ et une axiomatisation dans le langage $\mathcal{L}_2 = \{ \cdot, /, e \}$? Que veut-on dire quand on dit que deux mathématiciens « comprennent » la même notion de groupe quel que soit la langage utilisé ?

Schlick montre que « la compréhension et le sens sont tout à fait indépendants du contenu et n'ont absolument rien à voir avec lui » ([222], 57). Compréhension et sens sont donc entièrement une question de forme, de structure. Or

« le processus grâce auquel une phrase reçoit un sens [...] consiste à définir l'usage des symboles qui figurent dans la phrase. Pour ce faire, on indique à chaque fois les circonstances exactes dans lesquelles, conformément aux règles d'un certain langage, les mots devraient être employés. » ([222], 76)

On voit ici clairement en quoi Schlick opère pour ainsi dire une synthèse entre la théorie de la signification de Frege et l'axiomatisation formelle héritée de Hilbert : c'est toujours dans le cadre d'un système axiomatique que se constitue le sens. Il apparaît aussi clairement en quoi il devient épistémologiquement crucial de définir une relation formelle d'équivalence entre des systèmes axiomatiques, qui permettrait d'établir l'identité de leur signification.

De façon générale, nous dirons que deux théories formelles qui désignent le même concept structurel sont synonymes. Mais peut-on trouver une définition formelle de cette relation d'équivalence ? C'est cette même question que soulève A. Visser :

« We just want to say of certain theories that they are essentially the same. Consider, for example, the theory of partial order involving the weak ordering relation versus a formulation involving the strong ordering. Many people would judge these versions to

embody the same theory as a matter of course. But what does sameness mean here ? » ([244], 285)

On retrouve cette même question abordée par T. Button et S. Walsh :

« We consider whether there is a better notion than *isomorphism* for characterising what it means for two mathematicians to have 'the same structure' in mind » ([75], 107).

La situation est semblable à celle dans laquelle on se trouve concernant la notion de calculabilité. Est-il possible de définir formellement la notion informelle de calculabilité ? On sait que cette question trouve une solution (partielle) dans la Thèse de Church-Turing : la convergence des formalismes utilisés pour décrire la notion de calculabilité laisse à penser que la classe de fonctions calculables ainsi définie est la bonne.

Mais peut-on procéder de la même façon pour la notion informelle de synonymie ?

La nécessité d'une définition d'une telle relation d'équivalence formelle de synonymie est ainsi justifiée par Button et Walsh :

« Structures are relative to a specific signature. For example, the natural numbers with $<$, and the natural numbers with both $<$ and 0 , are technically different structures. Invoking isomorphism-types cannot correct this, since isomorphisms are defined so that they only obtain between structures in the same signature. But this jars with our informal ways of thinking and speaking about 'mathematical structures', like the natural numbers. » ([75], 107)

On pourrait s'attendre par ailleurs à ce que la relation formelle de synonymie, une fois précisément définie, satisfasse certains attendus raisonnables, et cependant décisifs. Button et Walsh proposent par exemple la « Thèse du transfert de vérité », qu'une relation de synonymie devrait satisfaire :

Proposition 1 *Si T^* interprète T et T^* est vraie, alors T est vraie.*

2.1 Une pluralité de relations d'équivalence

Si la question de la synonymie entre les théories formelles est présente, de façon problématique, dès le XIX^{ème} siècle en logique et philosophie des mathématiques, chez Peano, Poincaré et Hilbert par exemple, elle apparaît explicitement, en tant qu'objet d'étude dans le champ particulier de la théorie des modèles, constituée comme discipline mathématique, dans les années 1960. Elle a par ailleurs dépassé ce cadre et est devenue objet de débat dans le champ de la philosophie générale des sciences, notamment pour ce qui est des théories physiques. Il s'agira ici de se restreindre au cas des théories mathématiques.

2.1.1 L'équivalence définitionnelle

Historiquement, une des premières tentatives, dans le champ de la théorie des modèles, pour capturer formellement la relation de synonymie est la définition de l'équivalence définitionnelle. Deux théories dans cette relation sont ainsi considérées par J. Corcoran comme de simples « variantes notationnelles » :

« Hilbert's geometry and Veblen's geometry are sometimes thought to be 'notational variants' of each other. Likewise, Sheffer's 'Boolean algebra' and Huntington's 'Boolean algebra' are sometimes thought to somehow be 'the same basic theory' encoded using different primitive symbols. » ([43], 231)

On retrouve cette idée formulée par A. Robinson dans [215], lorsqu'il cherche à rendre précise l'idée de « different sets of axioms for the same intuitive notion » ([215], 31) ou par K. de Bouvere dans [46], parlant de deux théories « expressing the same thing or having the same meaning » ([46], 622).

Informellement, deux théories formelles T_1 et T_2 sont définitionnellement équivalentes si T_1 peut définir tout le vocabulaire utilisé par T_2 , et de façon compatible, T_2 peut définir tout le vocabulaire de T_1 . La relation d'équivalence définitionnelle a été introduite par R. Montague dans sa thèse de doctorat sous la forme de « l'interprétabilité bilatérale » ([183], section 6).

Pour définir formellement une telle relation d'équivalence, quelques définitions sont nécessaires. Il faut d'abord formaliser la notion de définition : soit $\Sigma \subset \Sigma^+$ des signatures et $p \in \Sigma^+ - \Sigma$ un symbole de prédicat n -aire. Une définition explicite de p en termes de Σ est un énoncé de Σ^+ de la forme

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (p(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n))$$

où $\phi(x_1 \dots x_n)$ est une formule de Σ . De la même façon, une définition explicite d'un symbole de fonction n -aire f de $\Sigma^+ - \Sigma$ est un énoncé de Σ^+ de la forme

$$(1) \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y (f(x_1, \dots, x_n) = y \Leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n, y))$$

et une définition explicite d'un symbole de constante $c \in \Sigma^+ - \Sigma$ est un énoncé de Σ^+ de la forme

$$(2) \forall x (x = c \Leftrightarrow \psi(x))$$

où $\phi(x_1, \dots, x_n)$ et $\psi(x_1, \dots, x_n)$ sont des formules de Σ .

(1) et (2) ont des conséquences dans la signature Σ : en effet, ces énoncés impliquent les énoncés $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists! y \phi(x_1, \dots, x_n, y)$ et $\exists! x \psi(x)$. Ces deux énoncés sont appelés des conditions d'admissibilité pour les définitions explicites (1) et (2).

Un extension définitionnelle d'une Σ -théorie T au langage Σ^+ est une Σ^+ -théorie

$$T^+ = T \cup \{\delta_s : s \in \Sigma^+ - \Sigma\}$$

telle que

1. pour chaque symbole $s \in \Sigma^+ - \Sigma$ l'énoncé δ_s est une définition explicite de s dans les termes de Σ ;
2. si s est un symbole de constante ou de fonction et α_s la condition d'admissibilité pour δ_s , alors $T \models \alpha_s$.

On peut alors définir la relation d'équivalence recherchée :

Définition 1 *Soit Σ_1 et Σ_2 deux langages disjoints, soit T_1 une Σ_1 -théorie et T_2 une Σ_2 -théorie,*

T_1 et T_2 sont définitionnellement équivalentes ($T_1 \sim_{def} T_2$) s'il y a une extension définitionnelle T_1^+ de T_1 à la signature $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ et une extension définitionnelle T_2^+ de T_2 au langage $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ telle que $T_1^+ \vdash \phi$ pour toute formule ϕ de T_2^+ et $T_2^+ \vdash \psi$ pour toute formule ψ de T_1^+ .

Un des intérêts majeurs de l'équivalence définitionnelle est qu'elle préserve un ensemble de « bonnes » propriétés, telles que l'axiomatisabilité finie, la catégoricité, la complétude ou la décidabilité.

On trouve cependant plusieurs définitions équivalentes de cette relation d'équivalence. Il est ainsi possible, par exemple, d'étendre la relation d'équivalence définitionnelle à des langages non disjoints. C'est ce que proposent K. Lefever et G. Székely dans [144] :

Définition 2 *1. Les théories T et T' sont des **renommages disjoints** ssi leur langage \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont disjoints, c'est-à-dire $Pred_{\mathcal{L}} \cap Pred_{\mathcal{L}'} = \emptyset$ et s'il y a une bijection préservant l'arité $R_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} : Pred_{\mathcal{L}} \rightarrow Pred_{\mathcal{L}'}$ qui peut être naturellement étendue à une bijection $\bar{R}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} : Form_{\mathcal{L}} \rightarrow Form_{\mathcal{L}'}$ et $T' = \{\bar{R}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}(\phi) : \phi \in T\}$;*

*2. Les théories T_1 et T_2 sont **définitionnellement mélangeables** ssi il y a une théorie T^+ qui est une extension définitionnelle commune de T_1 et T_2 ;*

*3. Les théories T_1 et T_2 sont **définitionnellement équivalentes** ssi il existe une théorie T'_2 qui est un renommage disjoint de T_2 à un langage qui est aussi disjoint du langage de T_1 et telle que T'_2 et T_1 sont définitionnellement mélangeables.*

On trouve également une définition, sur le plan sémantique cette fois, de l'équivalence définitionnelle, par Tarski, Henkin et Monk :

« In many discussions of special classes of algebraic structures, such as groups, rings, etc., the underlying class can be construed in several different ways, and both the fundamental operations and the similarity types of the structures are not unambiguously discussed [...].

The source of this ambiguity lies in the fact that the classes of algebras involved [...] are *definitionally equivalent*. By saying this

we mean that it is possible to establish a one-one correspondance between structures in K and those in K^* so as to satisfy the following conditions : il $\mathfrak{G} = \langle G, . \rangle \in K$ and $\mathfrak{G}^* = \langle G^*, ., ^{-1*} \rangle \in K^*$ are two corresponding structures, then their universes G and G^* coincide and the fundamental operations of either of the structures are definable in terms of the fundamental operations of the other ; moreover, the definitions of these operations can be chosen in such a way that they are formally the same for all the pairs of corresponding structures $\langle \mathfrak{G}, \mathfrak{G}^* \rangle$ involved. » ([127], 56, Remarque 0.1.6)

Une définition sémantique proche est proposée par K. de Bouvère, dans un des premiers articles publiés consacrés à une définition formelle de la synonymie [47] :

Définition 3 Soit $R \in \mathcal{L}$ et $S \in \mathcal{L}'$ deux symboles de prédicats respectivement m -aires et n -aires. On notera $\mathcal{K}_{RS \upharpoonright S}$ la classe élémentaire \mathcal{K}_{RS} restreinte au langage ne contenant pas le symbole de prédicat S .

1. la classe élémentaire \mathcal{K}_{RS} est un **enrichissement définitionnel** de la classe élémentaire \mathcal{K}_R par S ssi $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_{RS \upharpoonright S}$ et pour tout $\mathcal{M}_R \in \mathcal{K}_R$ il existe un unique modèle $\mathcal{M}_{RS} \in \mathcal{K}_{RS}$ tel que $\mathcal{M}_R \mathcal{M}_{RS \upharpoonright S}$;
2. Les classes élémentaires \mathcal{K}_R et \mathcal{K}_S sont **coalescentes** s'il existe une classe élémentaire \mathcal{K}_{RS} qui est un enrichissement définitionnel de \mathcal{K}_R par S et de \mathcal{K}_S par R ;
3. Soit \mathcal{K}_R la classe des modèles d'une théorie T_R et \mathcal{K}_S la classe des modèles d'une théorie T_S , les théories T_R et T_S sont **définitionnellement équivalentes** ssi les classes \mathcal{K}_R et \mathcal{K}_S sont coalescentes.

Enfin, H. Andréka, J. Madarász, I. Németi, et G. Székely proposent une autre définition sémantique de l'équivalence définitionnelle ([98], Théorème 2) :

Définition 4 Deux théories T_1 et T_2 sont **définitionnellement équivalentes** ssi il existe une bijection b entre leurs classes de modèles qui satisfait les deux conditions suivantes :

1. un isomorphisme entre deux modèles différents de T_1 est un isomorphisme entre leur b -images, et réciproquement. En particulier, les univers de \mathcal{M} et de $b(\mathcal{M})$ sont identiques ;
2. les ultraproducts sont préservés par b au sens où $b(\Pi_U \mathcal{M}_i) = \Pi_U b(\mathcal{M}_i)$ pour tous les ultrafiltres U et tous les modèles \mathcal{M}_i de T_1 .

2.1.2 L'interprétabilité mutuelle

L'équivalence définitionnelle rencontre cependant certaines limites, comme dans le cas de la définition d'une structure à partir d'une autre par définition d'un quotient ([75], p.111). Il est par conséquent possible de définir une

autre relation d'équivalence satisfaisant cette construction usuelle en mathématiques : l'interprétabilité mutuelle. C'est précisément pour cette raison que l'interprétabilité mutuelle suppose au préalable la définition de la notion de structure quotient :

Définition 5 *Soit \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure et \mathcal{B} une \mathcal{L}^* -structure. On dira que \mathcal{B} est une structure quotient de \mathcal{A} ssi les propositions suivantes sont vérifiées :*

1. *le domaine de \mathcal{B} est l'ensemble $B = \{[a]_E : a \in X\}$ de classes d'équivalence d'un certain ensemble \mathcal{A} -définissable $X \subseteq A^m$ pour une relation d'équivalence \mathcal{A} -définissable $E \subseteq X \times X$;*
2. *pour chaque \mathcal{L}^* -symbole de constante c , chaque \mathcal{L}^* -symbole relationnel R d'arité n et chaque \mathcal{L}^* -symbole fonctionnel f d'arité n , les ensembles suivants sont \mathcal{A} -définissables :*
 - $(c^{\mathcal{B}})^{-1} = \{\vec{a} \in X : \mathcal{B} \models c = [a]_E\}$,
 - $(R^{\mathcal{B}})^{-1} = \{(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in X^n : \mathcal{B} \models R([\vec{a}_1]_E, \dots, [\vec{a}_n]_E)\}$,
 - $(f^{\mathcal{B}})^{-1} = \{(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}) \in X^{n+1} : \mathcal{B} \models f([\vec{a}_1]_E, \dots, [\vec{a}_n]_E) = [\vec{a}_{n+1}]_E\}$.

On peut alors poser la définition suivante :

Définition 6 *Soit \mathcal{A} une \mathcal{L} -structure et \mathcal{B} une \mathcal{L}^* -structure. On dira que \mathcal{A} est interprétable dans \mathcal{B} ssi \mathcal{A} est isomorphe à une structure quotient de \mathcal{B} . On dira que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont mutuellement interprétables ssi chacune est interprétable dans l'autre.*

L'exemple canonique d'interprétabilité mutuelle est celle entre les entiers et les rationnels, établie par J. Robinson en 1949 [216]. Button et Walsh soulignent cependant les limites de l'interprétabilité mutuelle :

« For all its virtues, mutual interpretability tends not to be used directly by mathematicians. The reason for this is that the isomorphisms that witness mutual interpretability need not be 'recognisable' by the structures in question, so that whether two structures are mutually interpretable is decided by facts of the ambient metatheory, rather than just by facts about the structures themselves. » ([75], 112)

Button et Walsh illustrent cette difficulté par l'argument suivant : soit \mathcal{G} une structure géométrique et \mathcal{A} une structure algébrique, les deux étant mutuellement interprétables. Donc \mathcal{G} définit une copie isomorphe \mathcal{A}_1 de \mathcal{A} . Cette structure algébrique \mathcal{A}_1 peut permettre d'étudier algébriquement la structure géométrique originale \mathcal{G} . Pour ce faire, il faut considérer une copie isomorphe \mathcal{G}_1 de \mathcal{G} dans \mathcal{A} . Par composition des définitions, \mathcal{G}_1 est bien définissable dans \mathcal{G} , mais rien n'assure qu'il y ait un isomorphisme \mathcal{G} -définissable entre \mathcal{G} et \mathcal{G}_1 . Par conséquent, si on obtient des informations sur \mathcal{G}_1 par les moyens algébriques de \mathcal{A}_1 , et que l'on veut « ramener » ces informations

à la structure géométrique originale \mathcal{G} , il faut s'appuyer sur des ressources supplémentaires¹.

La conclusion de Button et Walsh est la suivante :

« Fortunately, in practice the relevant isomorphisms tend to be denable. And this leads to a stronger notion of sameness of structures, namely biinterpretability. » ([75], 112)

2.1.3 La biinterprétabilité

Cette notion est introduite pour la première fois par G. Ahlbrandt et M. Ziegler dans [4]. Nous suivons la définition proposée par la suite par W. Hodges dans [107]. Cette présentation nécessite quelques définitions préalables. Tout d'abord, soit \mathcal{L} une signature, par une **formule atomique non-imbriquée** de signature \mathcal{L} on entend une formule atomique correspondant à une des quatre formes suivantes :

1. $x = y$;
2. $c = y$ pour une certaine constante c de \mathcal{L} ;
3. $F(\vec{x}) = y$ pour un certain symbole fonctionnel f de \mathcal{L} ;
4. $R\vec{x}$ pour un symbole relationnel R de \mathcal{L} .

Définition 7 Soit \mathcal{K} et \mathcal{L} deux signatures, A une \mathcal{K} -structure et B une \mathcal{L} -structure, et n un entier positif. Une interprétation (n -dimensionnelle) Γ de B dans A est définie comme la donnée de trois items :

1. une formule $\partial_\Gamma(x_0, \dots, x_{n-1})$ de signature \mathcal{K} (la formule-domaine de Γ);
2. pour chaque formule atomique non-imbriquée $\phi(y_0, \dots, y_{m-1})$ de \mathcal{L} , une formule $\phi_\Gamma(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{m-1})$ de signature \mathcal{K} dans laquelle les \vec{x}_i sont des n -uplets disjoints de variables distinctes (les formules définissantes de Γ);
3. une application surjective $f_\Gamma : \partial_\Gamma(A^n) \rightarrow \text{dom}(B)$ (l'application-coordonnée de Γ), telle que pour toute formule ϕ atomique non-imbriquée de \mathcal{L} et tous $\vec{a}_i \in \partial_\Gamma(A^n)$,
4. $B \models \phi(f_\Gamma \vec{a}_0, \dots, f_\Gamma \vec{a}_{m-1}) \Leftrightarrow A \models \phi_\Gamma(\vec{a}_0, \dots, \vec{a}_{m-1})$.

Pour illustrer cette notion d'interprétation, on peut penser à l'interprétation usuelle des rationnels dans les entiers, qui est une interprétation Γ 2-dimensionnelle :

1. $\partial_\Gamma(x_0, x_1) := x_1 \neq 0$;
2. $=_\Gamma(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}) := x_{00}.x_{11} = x_{01}.x_{10}$;

1. On trouvera un exemple concret de cette situation, sous la forme de l'introduction de coordonnées, dans ([107], 222, exemple 1).

3. $+_{\Gamma}(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}; x_{20}, x_{21}) := x_{21} \cdot (x_{00} \cdot x_{11} + x_{01} \cdot x_{10}) = x_{01} \cdot x_{11} \cdot x_{20}$;
4. $\times_{\Gamma}(x_{00}, x_{01}; x_{10}, x_{11}; x_{20}, x_{21}) := x_{00} \cdot x_{10} \cdot x_{21} = x_{01} \cdot x_{11} \cdot x_{20}$.

L'application-coordonnée envoie chaque paire (m, n) avec $n \neq 0$ sur le nombre rationnel m/n . Les formules ψ_{Γ} pour les formules atomiques non-imbriquées restantes expriment l'addition et la multiplication des nombres rationnels en termes d'addition et de multiplication d'entiers.

On suppose à présent que V est une classe de \mathcal{K} -structures et W une classe de \mathcal{L} -structures, et que Γ est une interprétation de W dans V . On dira que Γ est totale-à gauche si pour tout $A \in V$, on a $\Gamma A \in W$.

Soit maintenant deux interprétations totales-à gauche Γ et Δ de W dans V . En suivant Ahlbrandt et Ziegler [4], on dira que Γ et Δ sont homotopes s'il y a une formule $\chi(\vec{x}, \vec{y})$ de \mathcal{K} avec la propriété suivante : pour toute structure A dans V , la relation $\{(\vec{a}, \vec{b}) : A \models \chi(\vec{a}, \vec{b})\}$ définit une bijection entre $dom(\Gamma A)$ et $dom(\Delta A)$, et cette bijection induit un isomorphisme de ΓA dans ΔA . La formule χ est appelée une homotopie de Γ dans Δ .

En particulier, une auto-interprétation est une interprétation totale-à gauche de la classe V dans elle-même qui est homotope à l'interprétation identité.

Définition 8 Une bi-interprétation entre V et W consiste en une interprétation totale-à gauche Γ de W dans V et une interprétation totale-à gauche Δ de V dans W , telle que $\Delta \circ \Gamma$ est une auto-interprétation de V et $\Gamma \circ \Delta$ est une auto-interprétation de W .

On dira alors que W et V sont bi-interprétables.

Pour illustrer cette relation d'équivalence, Hodges ([107], 223) prend l'exemple des plans projectifs arguesiens et des anneaux à divisions.

Pour ce qui est des propriétés préservées par bi-interprétabilité, un des intérêts majeurs de cette relation d'équivalence est qu'elle préserve des propriétés importantes, telles que les groupes d'automorphismes, l'axiomatisabilité finie et la κ -catégoricité. C'est là un des arguments forts en faveur de l'idée que la bi-interprétabilité est la « bonne » formalisation de la synonymie.

Comme le remarquent A. Visser et H. Friedman, l'écart entre l'équivalence définitionnelle et la bi-interprétabilité est ténue :

« Surprisingly it is not easy to provide natural examples of pairs of theories that are bi-interpretable but not synonymous. For example PA is *prima facie* bi-interpretable with an appropriate theory of the hereditarily finite sets. However, on closer inspection, these theories are also synonymous. » ([245], 2)

Du point de vue de la théorie des modèles, pour A. Pillay, la bi-interprétabilité est la bonne formalisation de la synonymie. Elle permet en effet d'une part d'introduire des outils de théorie des catégories en théorie des modèles, dès lors que l'on se place sur le plan sémantique des ensembles définissables par une théorie :

« This links up with our earlier insistence on the category of definable sets $D(T)$ of a theory T : the bi-interpretability of complete theories T_1 and T_2 roughly translates into an equivalence of categories between $D^{eq}(T_1)$ and $D^{eq}(T_2)$. » ([204], 1379)

D'autre part, le fait de considérer les théories et les structures à bi-interprétabilité près permet de faire entrer dans le champ de la théorie des modèles la recherche d'invariant, et d'ouvrir ainsi la voie à la théorie de la classification :

« Historically the development of “model theory for its own sake” focused on a certain invariant I_T . This I_T is the function that associates to a cardinal κ the number of models of T of cardinality κ , up to isomorphism ; it is rather clearly an invariant of the bi-interpretability type of T . This may seem to be a rather strange invariant to consider, but it was quite natural, as set-theoretic language and concerns permeate logic.

Boris Zilber invented what is now called geometric stability theory by posing the problem of classifying uncountably categorical theories up to bi-interpretability ». ([204], 1379)

Enfin, la classification des théories et des structures à bi-interprétabilité près permet d'introduire en logique des outils de caractérisation algébrique des structures, et d'articuler la théorie des modèles à d'autres disciplines mathématiques :

« Let us restrict our attention to countable structures M with the feature that the automorphism group $Aut(M)$ of M has finitely many orbits on n -tuples for all n . Such a structure M will be the unique countable model of its theory. $Aut(M)$ becomes a topological group when we stipulate that the stabilizers of finite tuples are basic open subsets. Then the bi-interpretability type of M is determined by $Aut(M)$ as a topological group, and one issue is when and whether this can be recovered from the abstract group $Aut(M)$. » ([204], 1379)

On voit donc apparaître comment, pour A. Pillay, dans les différents programmes de recherche ouverts pour la théorie des modèles contemporaine, la bi-interprétabilité est devenu le niveau auquel se présentent les théories du premier-ordre.

On pourrait cependant discuter l'idée selon laquelle la bi-interprétabilité serait *la* bonne formalisation de la synonymie. Button et Walsh proposent là encore un contre-exemple :

« Consider, again, the question of when two mathematicians are discussing 'the same structure', in some intuitive, informal, sense. If one mathematician is talking about the natural numbers and the other is talking about the integers, then in certain contexts it will surely be right to say that they are talking about importantly

different structures, since the former has a least element and the latter does not. This is so, even though these two structures will be biinterpretable (given the right signature)². » ([75], 114)

Ce que met en évidence ce contre-exemple, ce n'est pas tant la faiblesse de l'argumentation de Pillay, que le fait que la théorie des modèles contemporaine, en tant que discipline mathématique, semble opérer un choix ou se définir un niveau d'étude des structures mathématiques apparaissant comme pertinent : tout se passe comme si, compte-tenu des propriétés qui sont conservées par la bi-interprétabilité et des outils qu'ils se donnent, les théoriciens des modèles se plaçaient à une échelle d'étude donnée des concepts structurels, identifiant ce que d'autres contextes disciplinaires pourraient être amenés à distinguer.

Ce qui apparaît ainsi, c'est que la question de l'identité des structures par delà la diversité des langages n'est pas en soi un problème pour la théorie des modèles en tant que discipline mathématique, qui commence par se situer à un certain niveau d'examen des concepts structurels, mais plutôt un problème proprement épistémologique, concernant les limites des langages formels.

2.1.4 La F-Morita-équivalence

Une des principales limites de l'équivalence définitionnelle est qu'elle ne permet pas de penser l'équivalence entre des théories formulées dans des langages à plusieurs sortes. Un langage formel du premier ordre à plusieurs sortes peut être défini comme une signature Σ telle que Σ est un ensemble de symboles de sortes, de prédicats, de fonctions et de constantes. Chaque symbole de prédicat a une arité $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$, où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont des symboles de sortes (non nécessairement distinctes). De la même façon, chaque symbole de fonction $f \in \Sigma$ a une arité $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_n \rightarrow \sigma$, où $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma$ sont des symboles de sortes (non nécessairement distinctes). Enfin, chaque symbole de constante $c \in \Sigma$ se voit assigné une sorte $\sigma \in \Sigma$. Chaque variable a une sorte $\sigma \in \Sigma$.

On peut penser, à titre d'exemples de telles théories, à la géométrie euclidienne définie par Hilbert avec des points et des lignes, dans les *Grundlagen der Geometrie*, ou à la théorie des catégories définies avec des objets et des flèches.

Si l'équivalence définitionnelle ne permet pas de penser l'équivalence entre des théories formulées dans des langages à plusieurs sortes, c'est parce que la définition de l'équivalence définitionnelle ne donne pas de moyens de définir de nouveaux symboles de sortes? On pourra par conséquent facilement montrer que si T_1 et T_2 sont définitionnellement équivalentes, alors leurs signatures respectives Σ_1 et Σ_2 doivent avoir les mêmes symboles de sortes. La

2. Ces deux structures sont en effet biinterprétables dans une signature contenant l'addition et la multiplication.

question qui se pose est alors de savoir s'il est possible d'étendre l'équivalence définitionnelle à des langages à plusieurs sortes : c'est le rôle de la Morita-équivalence définie par T. W. Barrett et H. Halvorson [17]. Pour éviter les confusions avec une relation d'équivalence qui sera examinée au chapitre 4, nous parlerons de F-Morita-équivalence.

Barrett et Halvorson donnent l'exemple suivant, pour illustrer l'idée de théories à plusieurs sortes équivalentes : soit $\Sigma_1 = \{\sigma_1, p, q\}$ et $\Sigma_2 = \{\sigma_2, \sigma_3\}$, deux signatures, avec σ_1, σ_2 et σ_3 des symboles de sortes et p et q des symboles de prédicats unaires sur σ_1 . On considère la Σ_1 -théorie :

$$T_1 = \{\exists_{\sigma_1} x_1 p(x_1), \exists_{\sigma_1} x_2 q(x_2), \forall_{\sigma_1} x_1 (p(x_1) \vee q(x_1)), \forall_{\sigma_1} \neg(p(x_1) \wedge q(x_1))\}$$

et la Σ_2 -théorie $T_2 = \emptyset$. Puisque T_1 et T_2 ont des symboles de sortes différents, elles ne peuvent être définitionnellement équivalentes, mais il est cependant assez raisonnable de penser qu'elles sont synonymes : T_1 répartit les éléments entre ceux qui sont p et ceux qui sont q , alors que T_2 répartit les éléments entre ceux qui sont σ_2 et ceux qui sont σ_3 . La seule différence entre ces deux théories est que l'une utilise des prédicats, et l'autre des sortes. Comme le remarquent Barrett et Halvorson :

« Morita equivalence is essentially the same as definitional equivalence, except that it allows one to define new sort symbols in addition to new predicate symbols, function symbols, and constant symbols. » ([17], 563)

Il est donc nécessaire de préciser comment définir de nouvelles sortes. Soit $\Sigma \subset \Sigma^+$ deux signatures et on considère $\sigma \in \Sigma^+ - \Sigma$. On peut définir la sorte σ comme une sorte produit, une sorte coproduit, une sous-sortes ou une sorte-quotient. Dans chaque cas, on définit σ en utilisant les sortes de Σ et de nouveaux symboles fonctionnels dans $\Sigma^+ - \Sigma$:

1. pour définir σ comme une sorte produit, on a besoin de deux symboles fonctionnels π_1 et π_2 de $\Sigma^+ - \Sigma$, avec $\pi_1 : \sigma \rightarrow \sigma_1$ et $\pi_2 : \sigma \rightarrow \sigma_2$, avec $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. Les symboles fonctionnels π_1 et π_2 désignent les « projections canoniques » associées à la sorte produit σ . Une définition explicite des symboles σ, π_1 et π_2 comme sorte produit en termes de Σ est un Σ^+ -énoncé de la forme

$$\forall_{\sigma_1} x \forall_{\sigma_2} y \exists_{\sigma} !z (\pi_1(z) = x \wedge \pi_2(z) = y)$$

2. pour définir σ comme une sorte coproduit, on a besoin de deux symboles fonctionnels $\rho_1, \rho_2 \in \Sigma^+ - \Sigma$, avec $\rho_1 : \sigma_1 \rightarrow \sigma$ et $\rho_2 : \sigma_2 \rightarrow \sigma$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$. Les symboles fonctionnels ρ_1 et ρ_2 désignent les « injections canoniques » associées à la sorte co-produit σ . Une définition explicite des symboles σ, ρ_1 et ρ_2 en termes de Σ est un Σ^+ -énoncé de la forme

$$\forall_{\sigma} z (\exists_{\sigma_1} !x (\rho_1(x) = z) \vee \exists_{\sigma_2} !y (\rho_2(y) = z)) \wedge \forall_{\sigma_1} x \forall_{\sigma_2} y \neg(\rho_1(x) = \rho_2(y))$$

3. pour définir σ comme une sous-sorte, on a besoin d'un symbole fonctionnel $i \in \Sigma^+ - \Sigma$ tel que $i : \sigma \rightarrow \sigma_1$, avec $\sigma_1 \in \Sigma$. Le symbole i désigne « l'inclusion canonique » associée à la sous-sorte σ . Une définition explicite des symboles σ et i en termes de Σ est un Σ^+ -énoncé de la forme :

$$\forall_{\sigma_1} x(\phi(x) \Leftrightarrow \exists_{\sigma} z(i(z) = x \wedge \forall_{\sigma} z_1 \forall_{\sigma} z_2(i(z_1) = i(z_2) \rightarrow z_1 = z_2))$$

avec $\phi(x)$ une Σ -formule. Ce Σ^+ -énoncé implique le Σ -énoncé $\exists_{\sigma_1} x\phi(x)$ qui est sa condition d'admissibilité,

4. pour définir σ comme une sorte-quotient, on a besoin d'un symbole fonctionnel $\epsilon \in \Sigma^+ - \Sigma$, tel que $\epsilon : \sigma_1 \rightarrow \sigma$ avec $\sigma_1 \in \Sigma$. Une définition explicite des symboles σ et ϵ en termes de Σ est un Σ^+ -énoncé de la forme :

$$\forall_{\sigma_1} x_1 \forall_{\sigma_1} x_2(\epsilon(x_1) = \epsilon(x_2) \Leftrightarrow \phi(x_1, x_2)) \wedge \forall_{\sigma} z \exists_{\sigma_1} x(\epsilon(x) = z)$$

où $\phi(x_1, x_2)$ est une Σ -formule. Cet énoncé définit σ comme une sorte-quotient obtenue en quotientant la sorte σ_1 relativement à la formule $\phi(x_1, x_2)$. La sorte σ doit être vue comme l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de σ_1 relativement à la relation $\phi(x_1, x_2)$ » et ϵ comme la « projection canonique » qui envoie un élément de σ_1 dans sa classe d'équivalence.

Cette définition explicite implique que $\phi(x_1, x_2)$ est une relation d'équivalence, et les Σ -énoncés correspondant à cette propriété sont les conditions d'admissibilité de cette définition explicite.

On peut alors formuler une première définition :

Définition 9 Soient $\Sigma \subset \Sigma^+$ deux signatures et T une Σ -théorie, Une F -Morita-extension de T à la signature Σ^+ est une Σ^+ -théorie

$$T^+ = T \cup \{\delta_s : s \in \Sigma^+ - \Sigma\}$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. pour chaque symbole $s \in \Sigma^+ - \Sigma$, l'énoncé δ_s est une définition explicite de s en termes de Σ ;
2. si $\sigma \in \Sigma^+ - \Sigma$ est un symbole de sorte et $f \in \Sigma^+ - \Sigma$ un symbole fonctionnel utilisé dans la définition explicite de σ , alors $\delta_f = \delta_\sigma$;
3. si α_s est une condition d'admissibilité pour une définition δ_s alors $T \models \alpha_s$.

On peut illustrer cette définition par un exemple, comme le font T. Barrett and H. Halvorson. Soit $\Sigma = \{\sigma, p\}$ et $\Sigma^+ = \{\sigma, \sigma^+, p, i\}$ deux signatures, avec σ et σ^+ deux symboles de sortes, p un prédicat sur σ et i un symbole

fonctionnel tel que $i : \sigma^+ \rightarrow \sigma$. On considère la Σ -théorie $T = \{\exists_{\sigma} xp(x)\}$. Le Σ^+ -énoncé suivant définit le symbole de sorte σ^+ comme la sous-sortie consistant dans « les éléments de σ qui sont p » :

$$\forall_{\sigma} x(p(x) \Leftrightarrow \exists_{\sigma^+} z(i(z) = x) \wedge \forall_{\sigma^+} z_1 \forall_{\sigma^+} z_2 (i(z_2) = i(z_1) \rightarrow z_2 = z_1))$$

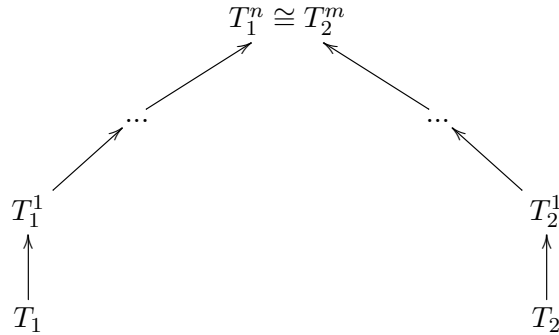
La Σ^+ -théorie $T^+ = T \cup \{\delta_{\sigma^+}\}$ est une F-Morita-extension de T à la signature Σ^+ . La théorie T^+ ajoute à la théorie T la possibilité de quantifier sur « l'ensemble des éléments de sorte σ qui sont p ».

A partir de là, comme pour l'équivalence définitionnelle, on peut poser la définition centrale :

Définition 10 Soit T_1 une Σ_1 -théorie et T_2 une Σ_2 -théorie,

T_1 et T_2 sont F-Morita-équivalentes s'il y a des théories $T_1^1 \dots T_1^n$ et $T_2^1 \dots T_2^m$ qui satisfont les trois conditions suivantes :

1. chaque théorie T_1^{i+1} est une F-Morita-extension de T_1^i ;
2. chaque théorie T_2^{i+1} est une F-Morita-extension de T_2^i ;
3. T_1^n et T_2^m sont des Σ -théories, avec $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \Sigma$, telles que $\text{Mod}(T_1^n) = \text{Mod}(T_2^m)$.



où chaque flèche indique une F-Morita-extension.

Barrett et Halvorson défendent donc l'idée que la Morita-équivalence est la bonne formalisation de la notion de synonymie. On trouve cependant différents contre-arguments : ainsi P. Anh McEldowney défend l'idée, dans [175], que la F-Morita-équivalence n'est qu'une forme stricte de bi-interprétabilité, en soulignant les nombreux points faibles de l'argumentation de Barrett et Halvorson. On peut cependant préciser la relation entre la F-Morita-équivalence et la bi-interprétabilité : c'est tout l'enjeu de la thèse de E. E. Washington [249], où il est prouvé que la F-Morita-équivalence et la bi-interprétabilité coïncide pour les théories « propres ». La notion de théorie propre est introduite par V. Harnik dans [100] :

Définition 11 Une théorie classique T est dite propre s'il existe une sorte D telle que $T \models \exists x, x'(x \neq x')$ avec x et x' de sorte D .

Informellement, une théorie est propre quand ses modèles ont au moins deux éléments. On voit ici apparaître le fait que l'écart entre la F-Morita-équivalence et la bi-interprétabilité est relativement ténue.

2.1.5 L'équivalence catégorique

En dehors de la théorie des modèles, on peut considérer la relation d'équivalence entre deux catégories comme une candidate possible à la formalisation de la relation de synonymie. En effet, T. Barrett et H. Halvorson soulignent une limite essentielle des approches vues jusqu'ici, en particulier la F-Morita-équivalence qu'ils ont introduite :

« Morita equivalence captures a clear and robust sense in which theories might be equivalent, but it is a difficult criterion to apply outside of the framework of first-order logic. Indeed, without a formal language one does not have the resources to say what an explicit definition is. Questions of equivalence and inequivalence of theories, however, still come up outside of this framework. It is well known, for example, that there are different ways of formulating the theory of smooth manifolds. There are also different formulations of the theory of topological spaces. None of these formulations are first-order theories. » ([17], 17)

Le contexte de la théorie des catégories vient donc résoudre cette difficulté, en permettant l'application de la relation d'équivalence de catégories au-delà du seul premier ordre :

Définition 12 *Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une équivalence de catégories (notée \sim_{cat}) s'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ et des isomorphismes naturels $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ et $\epsilon : F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{D}}$.*

On a vu précédemment, dans la remarque d'A. Pillay, qu'il était possible d'utiliser l'équivalence de catégories pour ressaisir la bi-interprétabilité : en effet deux théories T_1 et T_2 sont bi-interprétables ssi les catégories formées par les ensembles définissables $D^{eq}(T_1)$ and $D^{eq}(T_2)$ sont équivalentes. Mais une telle caractérisation reste limitée au premier ordre, et pour dépasser cette limite, comme le suggèrent T. Barrett et H. Halvorson, il est nécessaire de définir la notion de catégorie de modèles $Mod(T)$ pour une théorie T quelconque, et non nécessairement du premier ordre :

« A first-order theory T has a category of models $Mod(T)$. This categorical structure, however, is not particular to first-order theories. Indeed, one can easily define categories of models for the different formulations of the theory of smooth manifolds and for the different formulations of the theory of topological spaces. [...] This means that the following criterion for theoretical equivalence is applicable in a more general setting than definitional

equivalence and Morita equivalence. In particular, it can be applied outside of the framework of first-order logic. » ([17], 18)

Le critère de synonymie en question est le suivant :

Définition 13 *Deux théories T et T' sont catégoriquement équivalentes (notée \sim_{cat}) si leurs catégories de modèles respectives sont équivalentes.*

Barrett et Halvorson montrent ainsi dans [17] que, pour ce qui est du premier ordre :

$$\sim_{def} \rightarrow \sim_{F-Mor} \rightarrow \sim_{cat}$$

mais que les implications réciproques sont fausses. Cependant une question apparaît naturellement, et montre le lien entre l'équivalence définitionnelle et l'équivalence de catégories : quelle propriété doit satisfaire le foncteur F d'une équivalence de catégories pour constituer une équivalence définitionnelle ? Cette question est résolue par H. Andréka, J. Madarász, I. Németi, et G. Székely dans [98], comme un corollaire de leur Théorème 2 :

Théorème 2 *Deux théories T_1 et T_2 sont définitionnellement équivalentes ssi il existe entre leurs catégories de modèles un foncteur F qui est une équivalence de catégories, qui commute avec les foncteurs d'oubli dans Ens et préserve les ultraproducts.*

Barrett et Halvorson montrent cependant que l'équivalence catégorique n'est pas une formalisation satisfaisante de la synonymie, dans la mesure où elle serait trop « libérale ». Ils proposent dans cette perspective l'exemple suivant : soient les signatures $\Sigma_1 = \{\sigma_1, p_0, p_1, p_2, \dots\}$ où σ_1 est un symbole de sorte et p_0, p_1, p_2, \dots une infinité dénombrable de prédicats unaires sur σ_1 , et $\Sigma_2 = \{\sigma_2, q_0, q_1, q_2, \dots\}$ où σ_2 est un symbole de sorte et q_0, q_1, q_2, \dots une infinité dénombrable de prédicats unaires sur σ_2 . On définit la Σ_1 -théorie T_1 et la Σ_2 -théorie T_2 de la façon suivante : $T_1 = \{\exists_{\sigma_1}!x(x = x)\}$ et $T_2 = \{\exists_{\sigma_2}!y(y = y), \forall_{\sigma_2}y(q_0(y) \rightarrow q_1(y)), \forall_{\sigma_2}y(q_0(y) \rightarrow q_2(y)), \dots\}$.

Ils montrent ensuite que d'une part $Mod(T_1)$ et $Mod(T_2)$ ont toutes les deux 2^{\aleph_0} objets non-isomorphes, et que par ailleurs $Mod(T_1)$ et $Mod(T_2)$ sont toutes deux des catégories discrètes (c'est-à-dire des catégories dont les seuls morphismes sont les identités). Toute bijection entre ces deux catégories est donc une équivalence de catégories. Mais ces deux théories ne sont pas F-Morita-équivalentes. De sorte que

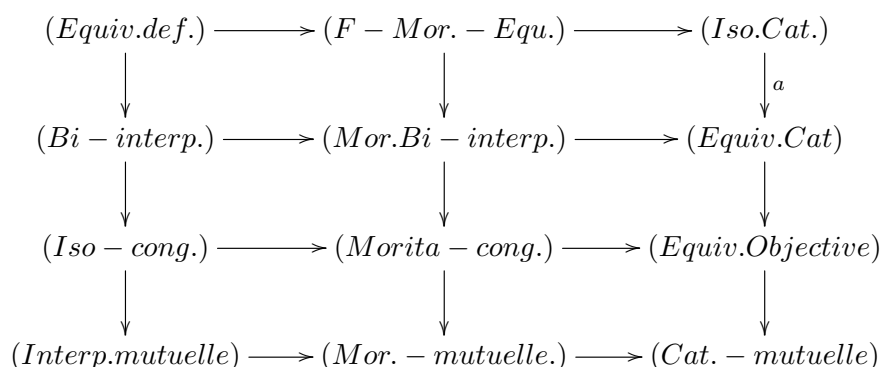
« categorical equivalence is too liberal a criterion for theoretical equivalence. The example [...] is quite general. Any two theories with discrete categories of models will be categorically equivalent, as long as they have the same number of models. But one often has good reason to consider two such theories inequivalent. For example, there is a sense in which the two theories [...] do not “say the same thing.” According to the theory T_2 , there is a special

predicate q_0 . If the predicate q_0 holds, that completely determines what else is true according to T_2 . The theory T_1 however, singles out no such predicate. If one takes categorical equivalence as the standard for theoretical equivalence, then one is forced to consider T_1 and T_2 equivalent. Morita equivalence, on the other hand, allows one to consider them inequivalent. » ([17], 23)

Cet argument n'est cependant pas entièrement satisfaisant dans la mesure où il suppose d'accepter que les deux théories ne « disent pas la même chose ». Or c'est précisément une formulation formelle de cette idée qu'il s'agit de trouver : Barrett et Halvorson ne peuvent donc s'appuyer que sur un argument « raisonnable » ou « évident » pour montrer l'inadéquation de l'équivalence catégorique.

Conclusion

Comment articuler ces différentes relations d'équivalence ? En suivant les résultats obtenus par T. Meadows in [178], on peut établir le diagramme suivant :



où la flèche signifie « implique ». T. Meadows montre dans le même article que la flèche (a) va en réalité dans les deux directions : si T et T' sont deux théories du premier ordre, alors $Mod(T)$ et $Mod(T')$ sont isomorphes ssi il y a entre ces deux catégories une équivalence de catégories.

Ce diagramme ouvre également un certain nombre de questions, concernant soit les conditions d'implications réciproques, soit des implications « diagonales ». Il offre cependant un aperçu des connaissances actuelles concernant les relations d'équivalence entre théories.

2.2 Leur « signification philosophique »

L'idée que ces relations d'équivalence puissent avoir une « philosophical significance » est mise en lumière par J. Corcoran dans [43]. Cette portée philosophique apparaît de façon essentielle en philosophie des mathématiques.

2.2.1 Synonymie et structuralisme mathématique

Dans le cadre d'une philosophie structuraliste des mathématiques, c'est la relation d'équivalence définitionnelle qui semble adéquate selon S. Shapiro, affirmant que « [this] equivalence is a good candidate for « sameness of structure » among systems » ([228], 91). Autrement dit, en reprenant la terminologie de Shapiro, si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont des « systèmes » (c'est-à-dire des \mathcal{L} -structures au sens de la théorie des modèles), et si l'application *ante*(.) associe à chaque système la structure *ante-rem* dont elle est l'instantiation,

Proposition 2 *Pour toute structure \mathcal{M} et \mathcal{N} , $\text{ante}(\mathcal{M}) = \text{ante}(\mathcal{N})$ ssi \mathcal{M} et \mathcal{N} sont isomorphes à de structures définitionnellement équivalentes³.*

Il est intéressant de noter par ailleurs qu'au chapitre 7 de [228], Shapiro fait un usage philosophique de la relation d'équivalence définitionnelle : il cherche en effet à montrer que sa position structuraliste réaliste est plus pertinente que les structuralismes modaux de Field, Hellman et Chihara. Pour ce faire il montre que les systèmes philosophiques de ces auteurs sont « équivalents » à celui qu'il propose :

« The epistemological problems with the antirealist programs are just as serious and troublesome as those of realism in ontology. Moreover, the problems are, in a sense, equivalent to those of realism.

In each case, the structure of the argument is the same. I show that there are straightforward, often trivial, translations from the set-theoretic language of the realist to the proposed modal language and vice versa. The translations preserve warranted belief, at least, and probably truth (provided, of course, that both viewpoints are accepted, at least temporarily). [...] The contention is that, because of these translations, neither system has a major epistemological advantage over the other. » ([228], 218)

Et Shapiro propose d'utiliser comme relation d'équivalence entre les systèmes formels l'équivalence définitionnelle :

« I propose that definitional equivalence serve as a criterion of the formal strength of modal and nonmodal theories and [...] that this notion be used as an indication that the intended structures, and thus the ontology/ideology of different theories, are the same. If T is definitionally equivalent to T' , then neither is to be preferred to the other on ontological/ideological grounds.

My conclusion is now concise. I showed [...] that the theories developed in Field [1980] ; Hellman [1989] ; Chihara [1990] ; and Boolos [1984], [1985] are each, under certain (plausible) conditions,

3. Formulation proposée par T. Button et S. Walsh ([75], 109).

definitionally equivalent to a standard, “realist” theory. Thus, the intended structure – and the ontology/ideology – of each theory is the same as that of the corresponding realist theory.

The same goes for the various formulations of structuralism itself [...]. *Ante rem* structuralism, eliminative structuralism formulated over a sufficiently large domain of abstract objects, and modal eliminative structuralism are all definitionally equivalent, and neither is to be preferred to any other on ontological/ideological grounds. I hold that the *ante rem* version is more perspicuous and fits mathematical practice more smoothly, but the approaches are equivalent on the crucial ontological/ideological front. They are also indistinguishable on the troublesome epistemological front. » ([228], 242)

On voit ici apparaître le rôle philosophiquement central de l'équivalence définitionnelle, qui met sur le même plan les différentes positions philosophiques structuralistes envisagées par Shapiro, sa propre version du structuralisme ne se détachant en fin de compte, selon lui, que par son adéquation à la pratique mathématique⁴. On peut noter que Shapiro appuie son argumentation sur un article de M. Wilson [253] où celui-ci introduit la relation d'interdéfinissabilité entre théories, dont l'équivalence définitionnelle est une généralisation naturelle. Pour Wilson il est clair en effet que deux théories interdéfinissables, donc ayant la même « force formelle », partagent la même ontologie, et soutenir une telle idée est même le cœur du structuralisme :

« The general point is that the ontology of a mathematician is to be determined by the *formal* properties of the structure he postulates, not by the names he employs in the description of it. The claim that any two theories meeting the conditions of several paragraphs back share an ontology, I shall call *structuralism*, since this thesis represents a plausible reading of the jingle « Mathematics is only interested in structure up to isomorphism ». » ([253], 414)

et plus loin

« The spiritual affinity between structuralism and the double standard lies in the idea that if one accepts a theory of a certain formal strength, one cannot deny it its standard ontology, no matter in what syntactic guise its assertions may appear. » ([253], p.419)

4. Il est important de préciser que Shapiro fait ici un usage argumentatif et polémique de la relation d'équivalence définitionnelle, dans le but de répondre aux positions opposées à son réalisme. En réalité, sa justification du structuralisme *ante-rem* ne passe pas par l'équivalence définitionnelle : les structures mathématiques existeraient même si l'on ne pouvait pas capturer formellement leur identité à travers des présentations formelles variables. L'équivalence définitionnelle n'est pas première, mais seconde par rapport à l'existence des structures.

Ce même lien essentiel entre structuralisme et équivalence définitionnelle se retrouve dans le structuralisme de M. Resnik , concernant les *patterns* :

« The pattern-occurrence relation corresponds to the notion of the interpretability of theories (by means of definitions) and there are theories which are mutually interpretable but not essentially the same from the metamathematical point of view.

If we look at well-known examples of ‘essentially the same’ theories we see that they meet a stronger condition than that of mutual interpretability. They are definitionally equivalent. [...]

To capture the notion of patterns which are essentially the same we need a relationship like that of definitional equivalence. The thought that definitionally equivalent theories are distinct encapsulations of a common set of theorems suggests a similar approach for patterns. » ([212], 208-209)

On voit ainsi apparaître un lien étroit entre la position structuraliste en philosophie des mathématiques et le choix de l'équivalence définitionnelle comme relation d'équivalence pertinente entre théories.

2.2.2 Les limites de ces relations d'équivalence

Mais il est cependant possible de dégager plusieurs difficultés, liées à ces différentes formalisations de la notion de synonymie.

La première est que l'application de ces critères d'équivalence sont tous sensibles à la logique d'arrière-plan que l'on utilise. Ainsi par exemple, en logique du premier-ordre les nombres naturels dans la signature $\{0, S\}$ ne sont pas définitionnellement équivalents aux nombres naturels dans la signature $\{0, S, +, \times\}$. Cependant ces structures sont définitionnellement équivalentes en logique du second-ordre. Cela conduit donc à régler au préalable la question de savoir quel cadre logique est le plus adéquat. Un structuraliste comme S. Shapiro privilégie le second ordre, mais d'autres contre-exemples peuvent se présenter, comme le remarquent Button et Walsh ([75], 109) : en second-ordre, les nombres naturels dans la signature $\{0, S\}$ sont définitionnellement équivalents à une copie isomorphe des entiers dans la même signature, alors même que le passage des naturels aux entiers relatifs semble impliquer un changement d'objets du discours.

Mais même si l'on fixe le cadre logique et les différents paramètres en jeu, il reste la difficulté de la pluralité des relations d'équivalence elles-mêmes, considérées comme candidates à une formalisation adéquate de la notion de synonymie. On voit en effet apparaître la diversité de formalisations possibles de la relation informelle de synonymie. Il est clair dès lors que l'on ne peut espérer résoudre la difficulté que pose cette notion de la même façon que pour la notion de calculabilité (la thèse de Church-Turing). En effet, la confrontation de deux domaines mathématiques distincts – la théorie des mo-

dèles et la théorie des catégories – n’a pas permis de dégager de convergence conceptuelle (ou d’identité extensionnelle). Bien au contraire, les relations d’équivalences envisageables ont paru se multiplier.

Dès lors plusieurs voies sont possibles :

1. soit on considère, de façon sceptique, que c’est là le signe de l’impossibilité de saisir formellement la synonymie, et donc l’identité de signification, et que ces notions doivent rester dans le domaine de l’informel ou de l’intuitif. Mais dans ce cas, c’est la démarche même de formalisation qui court le risque de manquer son objet : comment s’assurer en fait qu’une définition axiomatique formelle, par exemple de la notion d’anneau, nous apprenne bien quelque chose de ce concept structurel ?
2. soit on privilégie, dans cette diversité de relations d’équivalence possible, l’une des candidates. Mais on a vu comment la plupart de ces relations laissent échapper des cas de « synonymie intuitive », ou identifie ce qui apparaît « clairement distinct ».
3. soit on est amené à relativiser la notion de synonymie : c’est dans un certain contexte mathématique que deux théories formelles peuvent être considérées comme synonymes, et ce contexte dès lors rend pertinent l’usage d’une relation d’équivalence plutôt qu’une autre.

C’est cette troisième voie que proposent T. Button et S. Walsh : relativiser la synonymie à des objectifs mathématiques ou à des contextes :

« we consider whether there is a better notion than *isomorphism* for characterising what it means for two mathematicians to have ‘the same structure’ in mind ; we suggest that it is likely to be interest-relative » ([75], 107)

Autrement dit cela signifie que si le mathématicien A propose une définition T_1 et le mathématicien B propose une définition T_2 , il n’y aurait pas de réponse absolue à la question de savoir si les deux mathématiciens ont bien la même structure à l’esprit. Ainsi, si dans une certaine situation, ils pourront avoir le même concept à l’esprit, dans une autre ce ne sera pas le cas. Mais de quelle « situation » est-il question ?

Les limites des différentes relations d’équivalence envisagées amènent les auteurs à préciser leur positions :

« [it] again suggests that it may be purpose-relative, context-sensitive, or indeterminate, which features of a structure are relevant to the question of whether they are ‘the same’ ». ([75], 114)

De cette remarque on peut tirer l’idée que selon Button et Walsh, les structures, qui présentent une forme d’identité, déterminent un ensemble de « features » ou de propriétés, et que parmi ces propriétés l’objectif visé (« purpose ») ou le « contexte » en sélectionne, pour ainsi dire, un certain nombre, qui permettront ensuite de décider s’il y a synonymie ou pas. La conclusion de leur article précise encore quelque peu cette idée :

« interpretations of theories result in proofs from one area being translated into proofs in another area. There are obvious reasons why this can be useful, and especially so if the two areas initially seemed only be distantly related. (It was important and useful to discover that geometry and algebra are closely related, and similarly for number theory and finite set theory.) » ([75], 130)

Autrement dit, supposons qu'un mathématicien rencontre un certain problème P concernant une structure \mathcal{S}_1 , qu'il n'arrive pas à résoudre directement. Il peut montrer que \mathcal{S}_1 est dans une certaine relation d'équivalence R (par exemple l'interprétabilité mutuelle) avec une autre structure \mathcal{S}_2 , de sorte que dans \mathcal{S}_2 la « traduction » du problème « P » est plus facile à résoudre, voire déjà résolue. Il montre ainsi que relativement à P , les théories définissant ces deux structures, respectivement T_1 et T_2 , sont synonymes. Mais supposons maintenant qu'il rencontre un autre problème P' concernant \mathcal{S}_1 , et que ce problème « ne passe pas » à \mathcal{S}_2 par R . Il lui faudra alors trouver une autre relation R' entre \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 , qui pourrait permettre une telle traduction (par exemple l'équivalence catégorique). Mais supposons que \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 ne soient pas dans cette relation. alors du point de vue de P' , T_1 et T_2 ne sont donc pas synonymes. Une telle sensibilité au contexte s'expliquerait alors par le fait qu'un problème sélectionne des propriétés de la structure étudiée et que ces propriétés ne peuvent pas toujours être « traduites » par une relation d'équivalence donnée.

Mais, dans la mesure où la synonymie véhicule l'idée d'une identité de la signification, la position de Button et Walsh reste cependant ambiguë : il y a en effet d'un côté une forme de stabilité de la structure par delà la variation des contextes (c'est-à-dire des problèmes) sélectionnant de façon partielle des propriétés sur un fond global de signification, et de l'autre une forme de contextualisme pragmatique, qui relativise le contenu sémantique d'une théorie à un objectif mathématique.

Cette tension peut venir du fait qu'une telle relativisation semble s'éloigner de la pratique effective des mathématiciens, qui paraissent bien plutôt associer un sens constant et absolu aux notions qu'ils utilisent : ainsi l'expression « groupe abélien » désigne le même concept en théorie des modèles ou en topologie algébrique, qu'il soit défini axiomatiquement ou par générateurs et relations ; de même pour les « nombres entiers », qu'ils soient utilisés pour indexer une famille d'ensembles ou étudiés en eux-mêmes en géométrie diophantienne⁵.

L'approche de la notion de synonymie envisagée jusqu'ici n'est donc peut-être pas la bonne, puisqu'elle fait naître un certain nombre de difficultés. Button et Walsh renforcent par ailleurs eux-mêmes cette conclusion en sou-

5. On retrouve ici, en fin de compte, l'argument de S. Shapiro : un nominaliste, qui se contenterait de l'aspect formel en premier ordre, perd de vue cette dimension de la pratique.

lignant que les relations d'équivalence qu'ils considèrent échouent à satisfaire certaines exigences raisonnables, comme la « Thèse du transfert de vérité ».

La question qui se pose alors est de savoir comment assurer la stabilité apparente du contenu sémantique des théories. L'approche privilégiée jusqu'ici était peut être trop ambitieuse, puisqu'elle envisageait la question de la synonymie au niveau de la logique classique du premier-ordre dans sa totalité. Ne pourrait-on pas en effet résoudre ces difficultés en considérant un fragment de cette logique, comme par exemple le fragment équationnel, avant dans un second temps, armés de nouvelles modalités de définition des concepts structurels, de chercher à capturer le cas général? Que deviendraient dans ce cas des exigences telles que la thèse du transfert de vérité?

2.3 L'approche de l'algèbre universelle

C'est dans ce cadre équationnel en effet, qui est celui de l'algèbre universelle, étudiant les structures définies par un système d'équations (universellement quantifiées), les classes de telles structures constituant des variétés, que la question du dépassement de la sensibilité au langage s'est également présentée. En effet, l'idée même de l'algèbre universelle peut être décrite, selon G. Grätzer comme

« the study of finite operations on a set, and the purpose of research is to find and develop the properties with such diverse algebras as rings, fields, Boolean algebras, lattices, and groups may have in common. » ([88], vii)

Grätzer rattache ainsi l'objet d'étude de l'algèbre universelle aux travaux de Whitehead, où celui-ci notait :

« Such algebras have an intrinsic value for separate detailed study ; also they are worthy for a comparative study, for the sake of the light thereby thrown on a general theory of symbolic reasoning, and on algebraic symbolism in particular. » ([251], v)

Ainsi, sans entrer dans les détails de l'histoire de l'algèbre universelle, ses présupposés épistémologiques et ses liens avec la théorie des modèles, on voit en quoi la question de l'identité des concepts structurels derrière la variété des définitions formelles apparaît au cœur de cette discipline.

Pour aborder cette question dans le cadre de l'algèbre universelle, on peut s'appuyer sur les travaux de W. Taylor, en particulier [240]. Taylor prend l'exemple traditionnel de la structure de groupes, et propose deux axiomatisations équationnelles possibles du concept de groupe : d'une part

$$\Gamma_1 : x(yz) = (xy)z$$

$$u(xx^{-1}) = (y^{-1}y)u = u$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\Gamma_2 : (xy)z &= x(yz) \\ ex &= xe = x \\ x/x &= e \\ x/y &= x(e/y) \\ u(e/u) &= (e/u)u = e\end{aligned}$$

Taylor remarque :

« Clearly Γ_1 and Γ_2 do not define the *same* variety, for they are of different types – (2,1) and (2,2,0). But examination of the models of Γ_1 and the models of Γ_2 will convince one that there is no *essential* difference between a non-empty Γ_1 -group and a non-empty Γ_2 -group. » ([240], 16)

Ainsi, par delà la différence de présentations, il est clair pour Taylor que ces deux axiomatisations font signe vers la même « essence ». Il s'agira dès lors de définir une relation d'équivalence (Taylor propose une relation équivalente à l'équivalence définitionnelle) entre ces différentes axiomatisations, qui rende compte de cette synonymie, de telle sorte que

« Properties of varieties seem more natural and interesting if they are equivalence-invariant, if only because then they do not force us to make any « unnatural » choice between, say Γ_1 and Γ_2 above. For example, the similarity type (2,1) is obviously not *intrinsic*⁶ to the idea of a group. Many of the properties considered below are (obviously) equivalence-invariant, but a few, such as being « one-based » are not [...]. Moreover, certain results cannot even be stated without mentioning equivalence. » ([240], 17)

Cependant, comme c'était le cas pour la théorie des modèles, plusieurs relations d'équivalence peuvent être définies entre les systèmes équationnels. Certaines de ces relations d'équivalence pourraient également être formulées non plus pour les systèmes formels, mais entre les structures et les classes de structures qu'ils définissent. Il s'agira alors, dans le cadre du premier ordre et par complétude-adéquation, de déplacer le cœur de nos analyses de la synonymie entre théories à une relation d'équivalence entre classes de structures⁷. On pourra ainsi penser, par exemple, à la relation d'équivalence rationnelle, proposée par Anatoli I. Mal'cev en 1958 dans [166] :

Définition 14 Une classe K_1 d'algèbres de signature σ_1 et une classe K_2 d'algèbres de signature σ_2 sont rationnellement équivalentes s'il y a des applications F_1 (F_2) assignant aux symboles de la signature σ_1 des termes de la

6. Nous soulignons, et renvoyons au chapitre suivant pour une analyse de cette notion.

7. On trouvera une formulation précise de ce déplacement dans ([75], 114).

signature σ_2 (aux symboles de la signature σ_2 des termes de la signature σ_1) de telle sorte que les arités soient préservées (i.e. les nombres d'arguments d'une fonction $f \in \sigma_i$ et du terme $F_i(f)$ sont les mêmes) et les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. pour tout K_1 -algèbre $\mathcal{A} = \langle A, \sigma_1 \rangle$, l'algèbre $F_2(\mathcal{A}) = \langle A, \sigma_2 \rangle$ appartient à K_2 ; dans ce cas, les σ_2 -opérations de l'algèbre $F_2(\mathcal{A})$ sont définies sur A au moyen des $F_2(\sigma_2)$ -termes correspondants de l'algèbre \mathcal{A} ;
2. pour tout K_2 -algèbre $\mathcal{A} = \langle A, \sigma_2 \rangle$, l'algèbre $F_1(\mathcal{A}) = \langle A, \sigma_1 \rangle$ appartient à la classe K_1 ;
3. l'égalité $F_1(F_2(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ vaut pour tout K_1 -algèbre;
4. l'égalité $F_2(F_1(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ vaut pour tout K_2 -algèbre.

Il est intéressant de noter que dans le même article de 1958, Mal'cev démontre une équivalence entre l'équivalence rationnelle et une relation d'équivalence formulée dans les termes de la théorie des catégories : si K est une classe arbitraires d'algèbres, soit \vec{K} la catégorie ayant pour objets les K -algèbres et pour morphismes les homomorphismes de K -algèbres.

Définition 15 Des classes K_1 et K_2 d'algèbres sont catégorie-équivalentes s'il y a un isomorphisme de la catégorie \vec{K}_1 vers la catégorie \vec{K}_2 qui commute avec le foncteur d'oubli de la catégorie \vec{K}_i vers la catégorie des ensembles.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3 Soit \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 des variétés quelconques d'algèbres universelles,

alors \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont rationnellement équivalentes ssi elles sont catégorie-équivalentes.

Il serait alors pertinent de chercher à situer dans le diagramme des relations d'équivalence vu précédemment, restreint à la logique équationnelle, cette relation d'équivalence rationnelle⁸. Quoi qu'il en soit, on retrouve dans le contexte de l'algèbre universelle, la même difficulté que pour l'approche model-théorique qu'il y a à capturer de façon formelle la relation de synonymie.

Cependant une autre approche est possible, propre à l'algèbre universelle, comme le remarque W. Taylor :

« It is possible to define equational classes so as to make all expressible properties automatically equivalence-invariant, i.e. to give no preference to any of the possible equivalent forms of a given variety. This amounts to considering the *set* (rather than a sequence $(F_t)_{t \in T}$) of *all* possible operations defined by V-terms. » ([240], 17)

8. Nous réservons cette question à un travail ultérieur.

C'est cette approche, propre à l'algèbre universelle dans la mesure où elle nécessite la réduction de la logique considérée au cadre équationnel, qu'il s'agira à présent d'examiner : il ne sera donc plus question de définir une relation formelle de synonymie entre des systèmes formels (ou de manière équivalente, une relation d'équivalence entre classe de \mathcal{L} -structures), mais de porter l'attention directement sur le système des opérations caractérisant un type de structures, c'est-à-dire sur la totalité organisée de ces opérations : des objets algébriques.

2.3.1 Les représentations algébriques

Les clones de Hall

Il semblerait que cette piste de recherche ait été proposée pour la première fois par Philip Hall, sans être publiée [39].

Soit A un ensemble. Un domaine d'opérateurs est un ensemble Ω avec une application $a : \Omega \rightarrow N$; les éléments de Ω sont les opérateurs, et si $\omega \in \Omega$, alors $a(\omega)$ est appelé l'arité de ω . Si $a(\omega) = n$, on dira que ω est n -aire, et on écrit

$$\Omega(n) = \{\omega \in \Omega \mid a(\omega) = n\}$$

Une structure d' Ω -algèbre sur A est une famille d'applications

$$\{\Omega(n) \rightarrow A^{A^n}\}_{n \in N}$$

de sorte qu'à chaque $\omega \in \Omega(n)$ une opération n -aire sur A est associée. L'ensemble A muni de cette structure est une Ω -algèbre, notée A_Ω .

On note $O(A)$ l'ensemble de toutes les opérations finitaires sur A . Une structure d' Ω -algèbre sur A est déterminée par un certain sous-ensemble de $O(A)$; à partir des opérations de ce sous-ensemble, on peut former les autres opérations par composition, et le rôle décisif est joué non pas par l'ensemble des opérations sur A définie par Ω mais par l'ensemble de toutes les opérations que l'on peut obtenir à partir d'elles par composition. La façon selon laquelle les opérations sur A sont combinées peut être vue comme l'effet de certains opérateurs agissant sur $O(A)$, et permettent donc de voir $O(A)$ comme une certaine structure algébrique.

On remarque d'abord que $O(A)$ est identique à la somme disjointe $\bigsqcup_{n \in N} O_n(A)$, où $O_n(A)$ est l'ensemble de toutes les opérations n -aires sur A . Etant donné m éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in O_n(A)$ et $\beta \in O_m(A)$, il existe une unique opération n -aire γ définie par

$$\gamma(c) = \beta(\alpha_1(c), \dots, \alpha_m(c))$$

pour tout $c \in A^n$. Cette opération γ sera appelé la composition de $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ avec β , notée $(\beta \circ \alpha_1, \dots, \beta \circ \alpha_m)$, de sorte que l'on a

$$(\beta \circ \alpha_1, \dots, \beta \circ \alpha_m)(c) = \beta(\alpha_1(c), \dots, \alpha_m(c))$$

En outre, pour chaque $n > 0$, il y a n éléments $\delta_n^i \in O_n(A)$ définis par

$$\delta_n^i(c_1, \dots, c_n) = c_i$$

L'effet de δ_n^i , appelé opérateur unité, est donc d'extraire la i -ème coordonnée.

Dès lors, $O(A)$ peut être vu comme une algèbre partielle avec la composition comme opération $(m+1)$ -aire et les opérateurs unités, dont les valeurs sont les opérations n -aires sur A . Pour chaque type de composition il est nécessaire de spécifier son domaine de définition : la possibilité de composer $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ avec β dépend seulement des arités de $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$.

Tout ensemble d'opérations sur A clos par composition et contenant les opérateurs unités est un « ensemble clos d'opérations » sur A , ou clone sur A . On peut noter que cette première notion de clone fait apparaître de façon essentielle l'ensemble A sur lequel sont définies les opérations du clone. On trouve cependant dès les travaux de P. Hall une notion indépendante de cet ensemble de base : les clones abstraits.

Un clone abstrait est une algèbre partielle A telle que : à chaque $c \in A$ un entier non-négatif $\alpha(c)$ est associé ; on trouve parmi les éléments de A des opérateurs constants $d_n^{(i)}$ (pour $i = 1, \dots, n$ et $n \in N$) tels que $\alpha(d_n^{(i)}) = n$ et pour tout entier r il y a sur A une opération $(r+1)$ -aire

$$(a_1, \dots, a_r, b) \mapsto a_1, \dots, a_r b \mu$$

qui est définie chaque fois que $\alpha(a_1) = \dots = \alpha(a_r)$ et $\alpha(b) = r$; de plus, dans ce cas on a $\alpha(a_1, \dots, a_r b \mu) = \alpha(a_1)$. Ces opérations satisfont les lois suivantes :

$$(ab_1 \mu) \dots (ab_s \mu) c \mu = abc \mu \mu$$

où $a = (a_1, \dots, a_r)$, $b = (b_1, \dots, b_s)$ et $\alpha(a_i) = n$, $\alpha(b_j) = r$ et $\alpha(c) = s$; et

$$ad_r^{(i)} \mu = a_i$$

où $a = (a_1, \dots, a_r)$

Les compositeurs de Lazard

La notion de clone est en fait très proche de la notion de compositeurs, proposée en 1955 par Michel Lazard [143].

Soit en effet M un ensemble quelconque. l'ensemble des fonctions à n de M dans lui-même sera noté $\mathcal{F}_n(M)$. La notion de compositeur apparaît comme « une généralisation naturelle » de la notion de demi-groupe d'applications d'un ensemble dans lui-même. On prend dans chaque $\mathcal{F}_n(M)$ une partie E_n , et on considère la suite d'ensembles $(E_n)_{n=1,2,\dots}$ à laquelle on impose deux conditions :

1. chaque E_n contient les projections π_i^n pour $1 \leq i \leq n$;
2. si $f \in E_m$ et $g_1, \dots, g_m \in E_n$, alors $f(g_1 \dots g_m) \in E_n$.

Il suffit alors d'assurer l'associativité de la composition :

Définition 16 *Un compositeur E est la donnée de :*

1. d'une suite d'ensembles $(E_n$ avec $n = 1, 2, \dots$;
2. d'une famille d'éléments distingués $\pi_i^n \in E_n$ pour $1 \leq i \leq n$;
3. une famille d'applications $T_{m,n} : E_m \rightarrow \mathcal{F}_m(E_n)$ définis pour $1 \leq m, n \leq \infty$ vérifiant les deux axiomes suivants :
 - (associativité) $((T_{m,n}f)(g_1, \dots, g_m))(h_1, \dots, h_n) = (T_{m,p}f)((T_{n,p}g_1)(h_1, \dots, h_n), \dots, (T_{n,p}g_m)(h_1, \dots, h_n))$ pour tous $f \in E_m$, $g_1, \dots, g_m \in E_n$ et $h_1, \dots, h_n \in E_p$;
 - (élément neutre) $(T_{m,n}\pi_i^m)(f_1, \dots, f_m) = f_i$ pour tous $f_1, \dots, f_m \in E_n$ et $(T_{n,n}f)(\pi_1^n, \dots, \pi_n^n) = f$ pour tout $f \in E_n$.

On dira qu'un compositeur E opère sur un ensemble M si l'on a une famille d'applications $\tau_n : E_n \rightarrow \mathcal{F}_n(M)$ satisfaisant :

1. à la composition dans E correspond la composition des fonctions dans M ;
2. aux éléments distingués π_i^n de E correspondent les fonctions de même nom dans M .

On définit alors la notion de sous-compositeur F d'un compositeur E : c'est la famille des ensembles $F_n = F \cap E_n$, supposée contenir les éléments distingués et stable par composition. On définit un système de générateurs A d'un compositeur E comme une famille d'ensembles $A_n \subset E_n$, tels que E soit le seul sous-compositeur de E qui contienne A .

Soit $A = (A_n)$ une suite d'ensembles. Un compositeur libre E engendré par A est un compositeur admettant A comme système de générateurs, et tel que pour tout compositeur F et toute application $\phi : A \rightarrow F$ (c'est-à-dire pour toute famille d'applications $\phi_n : A_n \rightarrow F_n$), il existe un homomorphisme (nécessairement unique) $\psi : E \rightarrow F$ prolongeant ϕ .

Tout compositeur E peut alors être défini au moyen de générateurs et de relations entre ces générateurs. Ainsi par exemple le compositeur des demi-groupes a pour générateur $f \in E_2$ et comme relation $f(f(x_1, x_2), x_3) = f(x_1, (x_2, x_3))$.

Cependant, Lazard insiste sur les limites de la notion de compositeur :

« Plus généralement, on peut considérer que les ensembles sur lesquels opère un compositeur E donné appartiennent tous à une même espèce de structure algébrique. Les opérations (lois de compositions) de l'espèce considérée correspondent à un système de générateurs du compositeur E ; les relations entre ces générateurs se traduisent par des identités génériques (c'est-à-dire valables pour un choix quelconque des arguments) dans les structures de l'espèce en question. Par exemple, pour les demi-groupes, on prend une opération (le produit) et une identité (la relation d'associativité).

Il est aisé de caractériser les espèces de structures algébriques que l'on peut définir à partir d'un compositeur : ce sont celles où les opérations sont partout définies, et ne sont assujetties qu'à vérifier des « identités génériques ». Ces structures comprennent, par exemple, les demi-groupes, groupes, groupes abéliens, anneaux, anneaux de Lie, Ω -modules (Ω désignant un anneau donné), etc. Par contre elles ne comprennent pas les corps (l'inverse n'est pas partout défini) ni les p -groupes (« pour tout x il existe un h tel que $x^{p^h} = 1$ » n'est pas une identité générique, puisque h peut varier), ni les demi-groupes avec règles de simplification (« $xy = xz$ implique $y = z$ » n'est pas une « identité »), etc. On obtient donc une classe assez restreinte de structures algébriques. » ([143], 5-03)

L'idée d'utiliser la structure de demi-groupe pour représenter une variété d'algèbre se retrouve par ailleurs dans les travaux de B.H. Neumann et E.C. Wiegold [73]. Ces derniers se confrontent à la même difficulté :

« It is well known that the class of groups can be defined in a number of different ways : in terms of a binary multiplication, or in terms of a binary multiplication and an unary inversion, or in terms of a binary right division, and so on. How are these different definitions interrelated ? In order to study this problem, not just for the class of groups, but more generally for classes of algebras, a semigroup will be defined in connection with the class ; and if the class is a variety, that is to say, equationally defined, then the semigroup will in a sense specify it completely. » ([73], 111)

Les auteurs proposent d'introduire des « opérateurs standard », agissant sur les suites dénombrables de variables : l'opérateur identité ι , l'opérateur de répétition ϕ , l'opérateur d'effacement ψ et les opérateurs de transitions τ_i pour $i = 1, 2, 3, \dots$ définis par

- $\dots x_3 x_2 x_1 \iota = \dots x_3 x_2 x_1$;
- $\dots x_3 x_2 x_1 \phi = \dots x_3 x_2 x_1 x_1$;
- $\dots x_3 x_2 x_1 \psi = x_3 x_2$;
- $\dots x_{i+2} x_{i+1} x_i x_{i-1} \dots x_1 \tau_i = \dots x_{i+2} x_i x_{i+1} x_{i-1} \dots x_1$.

On considère alors le demi-groupe Γ engendré par ces opérateurs standard et par les opérateurs propres à la variété considérée (par exemple, pour les groupes, la multiplication μ et l'élément neutre η) ; les opérateurs standard engendrent un sous-demi groupe Σ de Γ et Σ est fixé une fois pour toutes. On a alors trois types de relations dans ces présentations :

1. celles qui définissent les relations entre opérateurs standard (fixées) ;
2. celles qui connectent les opérateurs standard et les opérateurs spécifiques (dites relations de « dénominations ») ;
3. celles qui définissent les relations entre opérateurs spécifiques.

On peut alors définir une relation d'équivalence, qui répond à la question posée plus haut pas les auteurs :

Définition 17 *Les demi-groupes Γ_i associés aux variétés \mathfrak{B}_i sont isomorphes, par un isomorphisme dont la restriction à Σ est l'identité, si et seulement si les variétés \mathfrak{B}_i sont les mêmes algèbres décrites en termes d'opérations différentes.*

Telle est la forme « abstraite » de l'invariant des présentations élaboré dans le cadre de l'algèbre universelle. Ce détour par l'algèbre universelle permet de souligner que l'idée « d'invariant des présentations », que nous envisagerons au prochain chapitre, ne peut être considérée comme propre à l'approche catégorique de l'algèbre universelle. Cette notion d'invariance peut en outre être rapprochée des « invariants topologiques » formulés en topologie algébrique : de même que deux espaces topologiques homéomorphes auront (par exemple) des groupes fondamentaux isomorphes, de même deux variétés (au sens algébrique) rationnellement équivalentes auront des clones isomorphes. Mais la réciproque, dans les deux cas, est fautive.

On notera, comme propriétés essentielles de ces algèbres, le caractère « abstrait » de tels objets, au sens où le domaine sur lequel agissent les opérations caractérisées par ces « définitions » n'apparaît pas dans la construction de l'objet. Seules sont considérées les opérations elles-mêmes, indépendamment des objets sur lesquels elles portent. A ce titre, les clones abstraits comme les compositeurs semblent se placer au niveau purement opératoire, et un tel mouvement d'abstraction peut être distingué de celui menant à la constitution d'une théorie formelle. En effet, ce passage des variétés d'algèbres aux clones abstraits efface d'une certaine façon les individus concernés par les opérations, c'est-à-dire « formellement » se passent des variables sur lesquelles portent ces opérations. Les opérations sont directement prises pour objet. La seule trace, pour ainsi dire, du domaine d'objets apparaît dans l'arité des opérations, non dans des n-uplets de variable.

En un certain sens, il semblerait possible de considérer que les clones et les compositeurs font l'économie du « moment de la variable » mis en avant par Cavallès,

« remplaçant les déterminations d'actes par la place vide pour une substitution » ([34], 44)

Ce qui semble disjoint par l'élaboration de telles descriptions purement opératoires des concepts algébriques, c'est la corrélation opérations-objets.

Cette particularité nous conduit à penser que ces objets dépassent une caractérisation *syntactique* des variétés considérées, car le passage aux algèbres « concrets » ne pourra se faire par assignation d'une valeur à des variables, ou par une interprétation de symboles jusque-là dépourvus de sens. La détermination des variétés algébriques se fait donc selon une modalité échappant

au cadre « linguistique ». Mais cela fait apparaître un second trait caractéristique des clones abstraits et des compositeurs : ils capturent « l'essence d'un concept algébrique » en synthétisant la totalité des opérations caractérisant une structure algébrique donnée, et dans les deux cas cette synthèse est rendue possible par la structure algébrique dont sont munis ces objets. Cette « essence » du concept structurel, ce contenu sémantique stable à travers la variété de ses présentations formelles, n'est donc pas saisie seulement par réduction (abstraction faite de la nature des objets sur lesquels portent les opérations, remplacés par des variables) mais aussi et conjointement par extension systématique, c'est-à-dire en tant que totalité (algébrique) close : toute opération possible appartient déjà à ces objets algébriques.

2.3.2 Le cas des algèbres partielles

Cependant, comme le notait M. Lazard, les espèces de structures ainsi définies ne sont qu'une classe restreinte, à savoir seulement dans le cas où les opérations sont partout définies. Il semble donc naturel de chercher à étendre cette démarche à des structures où les opérations ne sont définies que de façon partielle. C'est tout l'enjeu des travaux de Philip Higgins .

« There are many important algebraic systems which do not fit conveniently into the theory of abstract algebras (that is, algebras whose operations are everywhere defined). In the first place there are various types of groupoids, categories and ringoids, which have often been treated as partial algebras, that is, as sets with operations not everywhere defined. The general theory of partial algebras has been developed to some extent, but its content does not compare favourably with that of the theory of "full" abstract algebras. » ([105], 115)

Pour parvenir à une représentation des algèbres partielles, il est possible de partir de l'exemple des catégories. Il va s'agir de construire « algébriquement » la structure de catégorie à partir de son ensemble d'objets $Ob\mathcal{C}$.

On pose $I = Ob\mathcal{C} \times Ob\mathcal{C}$, de sorte qu'un élément i de I sera un couples d'objets de \mathcal{C} . On pose également $A_i = \mathcal{C}(B, C)$ pour toutes les paires d'objets de \mathcal{C} . On a ainsi une famille d'ensembles disjoints $A = \bigcap A_i$ indexée par I . Par ailleurs, on définit une relation n -aire sur I comme un sous-ensemble de I^n , et on note $\mathcal{R}(I)$ l'ensemble des relations finitaires sur I .

Pour définir une catégorie à partir de ses objets, il est nécessaire d'introduire deux « opérateurs », ϵ et \circ , éléments d'un ensemble $\Omega = \{\epsilon, \circ\}$. On peut alors définir une application $\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{R}(I)$ de la façon suivante :

- $\alpha(\epsilon) = \{(B, B)/B \in Ob\mathcal{C}\}$, de sorte que ϵ extrait un unique élément ϵ_B de chaque ensemble $\mathcal{C}(B, B)$, qui sera la flèche identité de B ;
- $\alpha(\circ) = \{((B, C), (C, D))/B, C, D \in Ob\mathcal{C}\}$, de sorte que \circ définit sur A la multiplication $\mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(C, D) \rightarrow \mathcal{C}(B, D)$

On peut alors définir les propriétés, comme l'associativité de \circ de ces deux opérateurs par des équations appropriées.

Il est alors possible de généraliser cet exemple pour définir des algèbres avec schémas d'opérateur.

Soit I un ensemble, Ω un ensemble distinct de I qui est l'union disjointes d'ensembles Ω_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Une Ω -structure sur I est une application $\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{R}(I)$, où $\mathcal{R}(I)$ est l'ensemble des relations finitaires sur I , et cette application envoie Ω_n sur \mathcal{R}_{n+1} . La paire $\Sigma = (I, \alpha)$ est un schéma d'opérateurs ou Ω -schéma.

Il va alors d'agir d'appliquer ce schéma sur des ensembles de base. Soit $A = \{A_i\}$ une famille d'ensembles indexée par I . On suppose donné, pour chaque $\omega \in \Omega_n$ et pour chaque $(i_1, i_2, \dots, i_n, i) \in \alpha(\omega)$ une application $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n} \rightarrow A_i$. Alors la famille A avec les applications données sera une Ω -algèbre à schéma d'opérateurs Σ , ou Σ -algèbre. Les éléments de Ω sont les opérateurs.

Pour illustrer à nouveau cette définition, il est possible de prendre un second exemple : celui des groupes abéliens gradués⁹ Soit I un ensemble, on pose $\Omega_0 = \{\omega\}$, $\Omega_1 = \{-\}$ et $\Omega_2 = \{+\}$. Alors une Σ -algèbre $A = \{A_i\}_{i \in I}$ a la structure suivante :

- ω extrait un élément distingué ω_i de chaque A_i ;
- on a une application $a \mapsto -a$ de chaque A_i dans lui-même ;
- il y a une addition $(a, b) \mapsto a + b$ définie sur chaque A_i .

Par les équations appropriées on fait de chaque A_i un groupe abélien avec élément neutre ω_i , et on obtient ainsi la classe des groupes abéliens gradués par un ensemble fixé I .

On voit ainsi apparaître la possibilité de développer, même dans le cas des algèbres partielles, le projet de l'algèbre universelle d'une étude proprement opératoire des concepts structurels, à travers la mise en lumière d'invariants de nature algébrique de ces concepts, par delà la diversité des présentations formelles. Une des difficultés que rencontre cependant l'algèbre universelle est le caractère *ad hoc* de ces invariants algébriques qu'elle introduit, qui restent propres au champ de cette discipline, et qu'il reste difficile de mettre en relation avec les autres domaines mathématiques. Ainsi, comme le remarque F. E. J. Linton :

« The theory of equationally definable classes of algebras, initiated by BIRKHOFF in the early thirties, is, despite its power, elegance and simplicity, hampered in its usefulness by two defects. The first is its refusal to deal with infinitary operations; the second is the awkwardness inherent in the presentation of an equationally definable class in terms of operations and equations. [...] SLOMINSKI rectified the first defect without, however, rectifying the second. » ([146], 84)

9. Un groupe abélien gradué est une somme directe de sous-groupes abéliens.

L'approche catégorique de ces questions permet de corriger ce « défaut ».

Conclusion

Nous avons donc vu dans ce chapitre les difficultés que l'on rencontre dès lors que l'on tente de saisir formellement la relation de synonymie, à partir des définitions axiomatiques formelles des concepts structurels, telles que les conçoit la théorie des modèles : ces problèmes sont essentiellement la pluralité des relations formelles envisageables et le caractère relatif de la notion de synonymie qui en découle. Or, dans la mesure où, derrière cette notion, se cache celle de l'identité de la signification, c'est là encore la question du contenu sémantique des théories formelles qui s'est présentée : quel rapport établir entre une théorie formelle et sa signification ? Comment rendre compte de la stabilité des concepts structuraux à travers les contextes multiples qui organisent le champ mathématique ?

On a vu que ces difficultés mettaient en question également le statut à accorder à la vérité du langage mathématique formalisé, à travers la « thèse du transfert de vérité » : en admettant que le mathématicien se dote d'outils lui permettant de saisir la signification dans sa globalité, est-ce encore la vérité qui sera préservée par la synonymie, ou quelque nouvelle propriété de ces objets ?

On a vu également que l'algèbre universelle avait ouvert la voie à une nouvelle modalité de définition des concepts structurels, par des objets algébriques et non linguistiques. Or ce projet va être repris, généralisé et enrichi par la théorie des catégories et la logique catégorique naissant avec les travaux de Lawvere. Dès lors la question qui se pose est de savoir ce que le contexte catégorique va apporter à la voie ainsi ouverte, et quel rapport à cet horizon de signification va y être élaboré.

Chapitre 3

Les théories de Lawvere

3.1 Introduction

La reprise catégorique du programme de l'algèbre universelle, que nous avons présenté au chapitre précédent, est ainsi présentée par G. Wraith en 1969 :

« In the last few decades categorical methods have been invading more and more branches of mathematics. From the beginning, it was clear that universal algebra was ripe prey. To paraphrase, one could say that universal algebra is the study of algebraic systems defined by operations and universal sentences which relates these operations. For example, rings are defined by operations called 'multiplication', 'addition', etc., and laws relating them, e.g. associativity, distributivity. This was the classical approach. The laws were expressed by using variables. In the categorical approach, we would say that (many-sorted) universal algebra was the study of limit-preserving functors [...]. Instead of variables we have the categorical notion of product. Instead of laws we have categorical diagrams. » ([255], iv)

Le prolongement de ce programme dans le contexte de la théorie des catégories apparaît donc naturel : il prendra la forme des théories algébriques et de la sémantique fonctorielle développée en particulier par Lawvere dans sa thèse.

Nous entrons ainsi pleinement dans la question centrale de notre travail de recherche : que devient le problème de la sensibilité au langage dans le contexte de la théorie des catégories ? Que peut-on conclure, sur un plan épistémologique, de cette compréhension catégorique de la notion de sémantique ?

3.2 La thèse de Lawvere

3.2.1 Éléments de contexte

William Lawvere soutient sa thèse en mai 1963 à Columbia, sous la direction de Samuel Eilenberg. Il s'est tourné vers la théorie des catégories après avoir étudié les travaux de Kelley et Godement, et après des études initiales en mécanique rationnelle auprès de Truesdell. Au cours de sa thèse, Lawvere se forme à la théorie des modèles à Berkeley auprès de Feferman, Scott, Tarski et Vaught, et participe au congrès de théorie de modèles de Berkeley qui se tient en juin-juillet 1963, à l'occasion duquel il présentera les principaux résultats de sa thèse.

Nous souhaiterions dans un premier temps rappeler quelques éléments du contexte d'élaboration de la sémantique fonctorielle de Lawvere, afin de révéler, par contraste, les apports de ses travaux.

Théorie des modèles et théorie des catégories

Au cours de ce même congrès de théorie des modèles de 1963, d'autres mathématiciens présenteront des travaux articulant théorie des modèles et théorie des catégories. C'est le cas notamment de Peter Freyd. Mais l'approche proposée par Peter Freyd est cependant différente de celle de Lawvere, dans la mesure où il s'agit pour lui

« to describe a little of the theory of abelian categories and the model-theoretic results therein ; secondly [...] to describe the main existence theorem in the theory of adjoints functors and its applications to model theory » ([82], 107)

Le but est donc pour Freyd d'appliquer des méthodes de théorie des modèles, notamment le théorème de Löwenheim-Skolem, aux catégories abéliennes. Ainsi,

« without elements in the objects how do we know how many of the lemmas needed form homological algebra are true in all abelian categories [?] » ([82], 111-112)

Cet exposé de Freyd de 1963 montre ce qui sépare ces résultats des travaux parallèles de Lawvere : Freyd se place dans le cadre plus général des théories du premier ordre, et non seulement dans le contexte algébrique, et la notion de « modèle » considérée est identique à celle examinée dans le cadre de la théorie des modèles traditionnelle, adossée à une conception ensembliste. Apparaît ainsi clairement, par contraste, l'apport essentiel des travaux de Lawvere : la « sémantique fonctorielle »¹.

1. Lors du colloque de théorie des modèles de 1963, un autre exposé propose par ailleurs d'articuler théorie des catégories et théorie des modèles : « Free structures and categories », de W. Felscher et G. Jafre. Cet exposé se rapproche des travaux de Lawvere et mentionne d'autres travaux sur cette question :

Concernant les travaux de Lawvere sur cette période (sa thèse ne sera publiée qu'en 2004), on relèvera en particulier, par ordre de parution :

- « An elementary theory of the category of sets ». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52 :1506–1511, 1964.
- « Algebraic theories, algebraic categories, and algebraic functors ». In *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley)*, pages 413–418. North-Holland, Amsterdam, 1965.
- « Functorial semantics of elementary theories ». *Journal of Symbolic Logic*, 31 :294–295, 1966.
- « Theories as categories and the completeness theorem ». *Journal of Symbolic Logic*, 32 :562, 1967.
- « Adjointness in foundations ». *Dialectica*, 23 :281–296, 1969.

Les structures de groupes de Eckmann et Hilton

Il semblerait possible de prendre en compte un autre élément du contexte d'élaboration de la sémantique fonctorielle et des théories de Lawvere, même si à proprement parler les recherches de Lawvere semblent avoir été développées indépendamment de ces travaux : il s'agit de la série d'articles publiés, entre 1960 et 1963, par B. Eckmann et P. J. Hilton, dans le cadre de la théorie de l'homotopie, intitulée « Group-like structures in general categories ». Si les résultats de ces articles n'ont pas joué de rôle dans le développement des recherches de Lawvere, le rapprochement de ces deux projets met en lumière, cependant, certains aspects essentiels du programme de Lawvere. La motivation centrale de Eckmann et Hilton dans ces articles est liée à des questions d'homotopie et ainsi explicitée :

« to give precise meaning to and to answer the question how group structures arise in homotopy theory and why these group structures satisfy the familiar conditions of naturality. » ([56], 227)

La solution à ce problème passera par la définition, à l'intérieur de la catégorie considérée, de la structure en question, plus précisément :

« The basic idea of this paper is to consider categories C rich enough in objects and maps to enable us to formulate a set of axioms which, in the case where C is the category S of (based) sets, are equivalent to the group axioms. Of course these axioms

-
- les travaux d'Ehresmann sur les espèces de structure d'une part, antérieurs aux esquisses et s'appuyant sur les outils catégoriques pour proposer une construction analogue à celles de la géométrie différentielle,
 - les travaux de Chevalley d'autre part, séjournant également à Berkeley de juillet 1962 à janvier 1963, et en particulier un exposé donné le 1er novembre 1962 intitulé « Definitions of algebraic structures », non publié par la suite.

are formulated entirely in terms of the maps of the category C . »
([56], 227)

Cette dernière remarque met l'accent sur deux aspects importants d'une compréhension catégorique d'un système d'axiomes, qui seront au cœur de l'approche fonctorielle de Lawvere :

1. les axiomes énoncent les propriétés que doivent satisfaire des applications entre objets d'une catégorie donnée, pour que ces derniers puissent être considérés comme des structures d'un certain type. L'« axiomatisation » ne porte plus dès lors sur un objet en particulier, dont les éléments entretiendraient des relations déterminées par les axiomes : la caractérisation des objets comme structures d'un certain type se fait au contraire de l'extérieur de ces objets, sans considération de leurs éléments ;
2. les conditions de « richesse » de la catégorie-support permettent d'envisager d'autres contextes que l'univers ensembliste, c'est-à-dire d'autres catégories présentant les mêmes propriétés.

On peut noter cependant dans la proposition de Eckmann et Hilton une forme de confusion entre les ressources linguistiques nécessaires à la définition et les propriétés des objets : « rich enough in *objects and maps* to enable us to *formulate* a set of axioms » et « these axioms are *formulated entirely in terms of the maps* of the category ». Les théories de Lawvere viendront au contraire séparer ces deux niveaux, rétablissant une forme de séparation entre le langage et les objets.

Les travaux de Eckmann et Hilton, même s'ils ne constituent pas une référence explicite des recherches de Lawvere, ouvrent néanmoins la voie à une approche proprement catégorique de la définition de structures dans un « contexte » non-ensembliste. L'apport essentiel de Lawvere serait alors le suivant : considérer certains objets catégoriques comme des caractérisations de notions algébriques (plus générales que les groupes). Partant de la propriété de transfert de structure par des foncteurs appropriés, mise en évidence par Eckmann et Hilton, il s'agit dès lors de déterminer des objets catégoriques qui pourront jouer le rôle de définition d'un type de structure, en suivant en cela la voie de l'algèbre universelle : les « théories algébriques ».

Le projet de Lawvere

Le pas que franchit Lawvere constitue le point de départ de la « sémantique fonctorielle », autour de l'idée centrale selon laquelle :

« Algebras (and other structures, models, etc.) are actually functors to a background category from a category which abstractly concentrates the essence of a certain general concept of algebra. »
([140], 8)

Ce pas consiste dans l'explicitation d'une distinction entre des catégories qui joueront le rôle de description d'un certain type de structures algébriques et des catégories fournissant le « contexte » dans lequel ces objets seront décrits. Il ne s'agit dès lors plus de caractériser à l'intérieur d'une catégorie « suffisamment riche » un certain type de structure, i.e. les propriétés de certaines applications, et « d'induire » cette structure sur d'autres objets (comme les ensembles de morphismes), comme c'était encore le cas dans les travaux de Hilton et Eckmann, mais de déterminer de l'extérieur ces propriétés des applications. En ce sens, les travaux de Lawvere semblent bien offrir un point de vue proprement catégorique sur une distinction de niveaux entre d'une part la description d'un type de structure et d'autre part des objets décrits dans un contexte donné. Ce point apparaît clairement dans le commentaire de Lawvere de sa thèse :

« Much of mathematics consists in calculating in various abstract theories, specifically interpreting one abstract theory into another, interpreting an abstract theory into a background to obtain a concrete category of structures, and transforming these structures in and among these categories. » ([140], 10)

La sémantique fonctorielle, ainsi décrite, s'inscrit par ailleurs explicitement et dès l'introduction de la thèse, dans le prolongement des travaux de l'algèbre universelle que nous avons décrits au chapitre précédent :

« In this paper we attempt to achieve further unification of general algebra by replacing 'equationally definable classes of algebras' with 'algebraic categories'. » ([140], 24)

Afin d'atteindre cet objectif, Lawvere va développer sa thèse selon le plan suivant :

1. La catégorie des catégories et les foncteurs adjoints
 - La catégorie des catégories
 - Les foncteurs adjoints
 - Épimorphismes et monomorphismes réguliers
2. Les théories algébriques
 - La catégorie des théories algébriques
 - Les présentations des théories algébriques
3. Les catégories algébriques
 - La sémantique comme foncteur coadjoint
 - Caractérisation des catégories algébriques
4. Les foncteurs algébriques
 - L'algèbre engendrée par un préalgèbre
 - Les foncteurs algébriques et leurs adjoints
5. Certaines extensions 0-aires et unaires des théories algébriques
 - Présentations d'algèbre : « polynomial algebras »

- Monoïdes d'opérateurs
- Anneaux d'opérateurs (théories des catégories de modules)

Les chapitres qui retiendront tout particulièrement notre attention seront les chapitres II, III et IV, et nous décrirons plus brièvement les notions et les résultats présentés dans les chapitres I et V.

Le chapitre I présente les outils catégoriques nécessaires aux constructions de la thèse, notamment les foncteurs adjoints induits, mais présente également un contenu « fondationnel » : Lawvere y expose une théorie en premier ordre de la catégorie des catégories en insistant sur le fait que ce travail est « encore incomplet »².

Lawvere explicite ainsi l'intérêt de ce premier chapitre :

« what of the relation itself between abstract theory and concrete background? To conceptually relate any two things, it is necessary that they belong to a common category; that is, speaking more mathematically, it is first necessary to functorially transport them into a common third category [...], but then if the attempt to relate them is successful, the clearest exposition of the whole matter may involve presenting the two things themselves as citizens of that third category. » ([140], 11)

Ce point nous semble important car Lawvere insiste ici sur la nécessaire homogénéité entre théories et modèles qui, si l'on veut comprendre leur relation, doivent être intégrés à un paysage commun : ici la catégorie des catégories.

Lawvere introduit par ailleurs trois catégories particulières dans ce chapitre : la catégorie vide $\mathbf{0}$, déterminée à isomorphisme près par la propriété que pour toute catégorie \mathcal{A} , il y a un unique foncteur $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{A}$; la catégorie singleton $\mathbf{1}$ définie dualement : les objets dans toute catégorie \mathcal{A} sont en bijection avec les foncteurs $\mathbf{1} \rightarrow \mathcal{A}$; la catégorie $\mathbf{2}$ est la catégorie avec deux objets, 0 et 1, et trois flèches : les flèches identité de 0 et 1 et une flèche de 0 vers 1.

3.2.2 Les théories algébriques

Le chapitre II introduit donc la notion centrale de théorie algébrique, qui y est ainsi définie :

Définition 18 Soit Ens_f la catégorie des ensembles finis, et Cat la catégorie des petites catégories. On note $(\{Ens_f\}, Cat)$ la catégorie dont les applications peuvent être identifiées aux triangles commutatifs de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc}
 & Ens_f & \\
 A \swarrow & & \searrow B \\
 \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B}
 \end{array}$$

2. On trouve par ailleurs dans l'introduction une explication en termes ensemblistes (Zermelo-Fraenkel-Skolem) de la distinction entre petites et grandes catégories

Soit $A : \text{Ens}_f \rightarrow \mathcal{A}$ un objet de $(\{\text{Ens}_f\}, \text{Cat})$. Si n est un objet de Ens_f , on notera $A(n)$ la valeur à n de A , ainsi $A(n)$ est un objet de \mathcal{A} . Si σ est une application dans Ens_f , on écrira parfois simplement σ pour la valeur de σ à A . Cependant, dans le cas particulier des applications $i : 1 \rightarrow n$ dans Ens_f , on écrira π_i^n pour la valeur à i de A . Pour tout objet n dans Ens_f , une opération n -aire de \mathcal{A} est une application $\theta : A(1) \rightarrow A(n)$ dans \mathcal{A} .

La catégorie \mathcal{T} des théories algébriques est la sous-catégorie pleine de $(\{\text{Ens}_f\}, \text{Cat})$ déterminée par les objets $A : \text{Ens}_f \rightarrow \mathcal{A}$ tel que A commute avec les coproduits finis et A est bijectif sur les objets.

Il résulte de cette définition que $A(n)$ est le n -ième coproduit de $A(1)$ avec lui-même : $A(1)$ est donc un générateur de \mathcal{A} .

La question qui se pose alors est de savoir comme s'articule la théorie algébrique à ses présentations formelles. Le point de départ de cette articulation est la définition du foncteur $T : \mathcal{T} \rightarrow \text{Ens}^N$, où N est une catégorie discrète avec un ensemble dénombrable d'objets notés $0, 1, 2, \dots$. La catégorie de foncteurs Ens^N a pour objets des foncteurs qui peuvent être vus comme des suites dénombrables d'ensembles.

Le foncteur T est défini de la façon suivante :

- $T(A)$ est la suite d'ensembles dont le n -ième terme est l'ensemble des morphismes $A(n) \rightarrow A(1)$ dans \mathcal{A}
- pour $f : A \rightarrow B$ dans \mathcal{T} , $T(f)$ est la suite d'applications dans Ens de $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A(1), A(n)) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(B(1), B(n))$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3 T admet un foncteur adjoint à gauche $F : \text{Ens}^N \rightarrow \mathcal{T}$

Ainsi à partir de toute suite dénombrable d'ensembles S , considérée comme une « signature », on peut construire une théorie algébrique, la « théorie algébrique libre engendrée par S »³. Au moyen de cette adjonction, on a :

Définition 19 Une « présentation d'une théorie algébrique » est la donnée de deux foncteurs S et E de Ens^N et d'un morphisme dans Ens^N $f : E \rightarrow UF(S) \times UF(S)$. La « théorie présentée par $\langle S, E, f \rangle$ » est le coégaliseur dans \mathcal{T} des morphismes

$$g', d' : F(E) \rightrightarrows F(S)$$

correspondant aux morphismes $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ de Ens^N par l'isomorphisme naturel $\mathcal{T}(F(E), F(S)) \cong \text{Ens}^N(E, UF(S))$

Lawvere propose alors la terminologie suivante :

- les éléments de S_n sont les **polynômes de base à n variables** de la présentation ;

3. On trouvera dans [187] une construction explicite de cette théorie libre.

- les éléments de E_n sont les **identités de base**, ou **axiomes**, à n **variables** de la présentation ;
- $UFS(n)$ sont les **polynômes à n variables** de la présentation ;
- les éléments de $UF(E)$ sont les **théorèmes** de la présentation ;
- le polynôme à n variables π_n^i est la i -ème variable n -aire.

Exemple 1 Soit la présentation suivante :

n	$S(n)$	$E(n)$
0	{ e }	\emptyset
1	{ s }	{ $\langle m(Id_1, s); e0_1 \rangle, \langle m(Id_1, e0_1); Id_1 \rangle$ }
2	{ m }	\emptyset
3	\emptyset	{ $\langle m(m(\pi_3^1, \pi_3^2), \pi_3^3); m(\pi_3^1, m(\pi_3^2, \pi_3^3)) \rangle$ }

$S(n) = E(n) = \emptyset$ pour $n \geq 4$. Il s'agit d'une présentation possible de la théorie des groupes.

En effet ce tableau pour la théorie des groupes signifie qu'il existe des morphismes $e : 0 \rightarrow 1$, $s : 1 \rightarrow 1$ et $m : 2 \rightarrow 1$ tels que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{(Id_1, s)} & 1 \times 1 \\ 0_1 \downarrow & & \downarrow m \\ 0 & \xrightarrow{e} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{(Id_1, e0_1)} & 1 \times 1 \\ & \searrow Id_1 & \downarrow m \\ & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \times 1 \times 1 \times Id_1^m & \xrightarrow{\quad} & 1 \times 1 \\ Id_1 \times m \downarrow & & \downarrow m \\ 1 \times 1 & \xrightarrow{m} & 1 \end{array}$$

où $0_1 : 1 \rightarrow 0$ est le morphisme de 1 vers l'objet final 0 et où $Id_1 \times m = (\pi_3^1, m(\pi_3^2, \pi_3^3))$ et $m \times Id_1 = (m(\pi_3^1, \pi_3^2), \pi_3^3)$. Si on interprète e comme l'élément neutre, s comme la formation d'inverse et m comme la multiplication, alors les diagrammes représentent la théorie des groupes.

Les théories algébriques, ainsi définies, sont présentées en ces termes dans l'introduction de sa thèse :

« Essentially, algebraic theories are an invariant notion of which the usual formalism with operations and equations may be regarded as a 'presentation'. » ([140], 24)

Dans le commentaire de ses travaux en 2004, Lawvere développe cette idée, en en faisant un des points essentiels de sa thèse :

« Algebras (and other structures, models, etc.) are actually functors to a background category from a category which abstractly concentrates the essence of a certain general concept of algebra [...]. The dialectical contrast between presentations of abstract concepts and the abstract concepts themselves, as also the contrast between word problems and groups, polynomial calculations and rings, etc. can be expressed as an explicit construction of a new adjoint functor out of any given adjoint functor. Since in practice many abstract concepts (and algebras) arise by means other than presentations, it is more accurate to apply the term « theory », not to the presentations as had become traditional in formalist logic, but rather to the more invariant abstract concepts themselves which serve a pivotal role, both in their connection with the syntax of the presentations, as well as with the semantics of representations. » ([140], 8)

Ces remarques de Lawvere soulignent plusieurs points importants. Tout d'abord l'idée que la théorie algébrique constitue un invariant des présentations : ainsi, par delà l'infinie diversité des langages permettant de présenter un concept structurel (tel que le concept de groupe), la théorie algébrique permettrait d'identifier à l'intérieur de ces variations une équivalence, de la même façon qu'un groupe fondamental permet d'identifier les espaces topologiques homéomorphes.

Mais Lawvere ne se contente pas de cette idée d'invariance, puisqu'il indique en outre que la théorie algébrique révèle « l'essence » du concept : elle n'est donc pas seulement un invariant des présentations formelles, mais elle permet de dégager le contenu, l'intension du concept structurel.

Enfin, cette position privilégiée de la théorie algébrique par rapport aux présentations amène Lawvere à substituer à la relation « formaliste » traditionnelle entre syntaxe et sémantique, une relation à trois termes, dans laquelle la théorie algébrique jouerait le rôle de « pivot ».

E. Manes explicite ces différents points, et fait le lien avec les notions que nous avons examinées au chapitre précédent :

« Different equational presentations can give rise to the same variety (up to an isomorphism that commutes with the underlying set functor). There are many well know examples, for example Boolean algebras and Boolean rings. Lawvere's model was intrinsically presentation-invariant. 'Boolean algebras' have only one 'algebraic theory', a certain category [...]. The presentation invariance is achieved by putting into the theory category all derived operations (modulo the equations); this idea was already well known in universal algebra. What is entirely new is that

simple axioms suffice to construct an algebraic theory without any reference to a presentation. » ([168], 88)

De la même façon, une continuité est établie entre l'algèbre universelle et les travaux de Lawvere, par A. Kock et G. Reyes en ouverture de leur section du chapitre de théorie des modèles du *Handbook of mathematical logic* :

« The “equational theories” are the same, or the “totality” of operations (primitive and derived) can be identified in the two cases, and in such a way that the substitution process of operations into other operations are preserved under the identification. To understand this phenomenon in precise terms as an isomorphism between two mathematical structures “consisting of” operations, and equipped with some kind of substitution structure, led to invention of concepts like “Clone of operations” (P. Hall, see COHN [1965]), or “compositeur” (LAZARD [1955]), but these were somewhat unmanageable notions. The right way of conceiving the totality of operations for an equational theory was found by LAWVERE [1963] who realized that substitution should be viewed as the composition of arrows in a certain kind of category. » ([122], 285)

Mais qu'est-ce qui, dès lors, est « entièrement nouveau » dans l'approche de Lawvere, comme le remarque Manes ? En quoi est-ce « la bonne façon » de résoudre ces difficultés ?

Il est possible de démontrer l'équivalence entre théories algébriques et clones abstraits ([239], [156]) : à tout clone abstrait correspond une théorie de Lawvere, et réciproquement (avec une précision concernant les opérations 0-aires). Les deux constructions inverses constituant la preuve de cette équivalence mettent en lumière la proximité entre ces deux notions, sur laquelle insiste F. Linton (« closely akin », [146]). Les propriétés des clones abstraits peuvent ainsi permettre d'éclairer celles des théories algébriques. Au premier rang de ces propriétés se trouve le fait que ces objets résultent d'un processus d'abstraction, au sens où le domaine sur lequel agissent les opérations caractérisées par ces « définitions » n'apparaît pas dans la construction de l'objet. Seules sont considérées les opérations elles-mêmes, indépendamment des objets sur lesquels elles portent. A ce titre, les clones abstraits comme les théories algébriques semblent se placer au niveau purement opératoire. Ainsi le passage des variétés d'algèbres aux clones abstraits ou aux théories de Lawvere se fait sans tenir compte des individus concernés par les opérations. Les opérations sont directement prises pour objet. La seule trace du domaine d'objets apparaît dans l'arité des opérations, mais elle n'apparaît que sous la forme de produits d'ensembles, non de n-uplets de variables.

Cette particularité nous conduit à penser que ces objets dépassent une caractérisation *syntactique* des variétés considérées, car le passage aux algèbres « concrets » ne se fait pas par assignation d'une valeur à des variables, ou

par une interprétation de symboles jusque-là dépourvus de sens. La détermination des variétés algébriques se fait donc selon une modalité échappant au cadre sémantique modèle-théorique traditionnel.

Second trait caractéristique des clones abstraits et des théories algébriques : les théories algébriques, comme les clones abstraits capturent « l'essence d'un concept algébrique » en synthétisant la totalité des opérations caractérisant une structure algébrique donnée, et dans les deux cas cette synthèse est rendue possible par la structure algébrique dont sont munis ces objets, en tant qu'algèbre partielle ou comme catégorie .

Mais par-delà ces similitudes, quel pourrait être l'apport propre des théories algébriques par rapport aux clones abstraits, en tant qu'invariants des présentations ? Compte-tenu de cette équivalence entre clones abstraits et théories algébriques, il semble à première vue difficile de mettre en lumière des traits propres à l'approche catégorique de cette forme d'invariance. L'intérêt de la notion de théorie algébrique serait avant tout technique, dans la mesure où elle permet d'employer dans le cadre de l'algèbre universelle les concepts et méthodes de la théorie des catégories, et en particulier l'adjonction.

Il est cependant possible de dégager des éléments de distinction, entre les clones et les théories algébriques. Ceux-ci reposent essentiellement sur le fait que les travaux de Lawvere enrichissent l'algèbre universelle de notions propres à une approche modèle-théorique. En effet, tout en cherchant à dépasser les difficultés liées aux présentations syntaxiques des structures, Lawvere introduit dans sa thèse, concernant les théories algébriques, la notion de théorie « inconsistante » : toute théorie $A : \mathit{Ens}_f \rightarrow \mathcal{A}$ telle que \mathcal{A} est équivalente soit à $\mathbf{2}$ soit $\mathbf{1}$ est dite *inconsistante*. On alors la proposition suivante :

Proposition 4 *Soit $A : \mathit{Ens}_f \rightarrow \mathcal{A}$ une théorie algébrique. S'il y a dans Ens_f deux applications distinctes $\sigma, \tau : m \rightarrow n'$ telles que $A(\sigma) = A(\tau)$, alors la théorie est inconsistante.*

En outre, puisque les compositions $0 \rightarrow 1 \rightrightarrows 2$ sont égales dans Ens_f , pour toute théorie algébrique A on a des compositions égales $A(0) \rightarrow A(1) \rightrightarrows A(2)$ dans \mathcal{A} , et par là-même des compositions égales entre ensembles de flèches $(A(1), A(0)) \rightarrow (A(1), A(1)) \rightrightarrows (A(1), A(2))$. Cependant $(A(1), A(0))$ n'est pas nécessairement l'égaliseur des deux autres flèches. Si on note cet égaliseur K , alors les éléments de K sont les *constantes définissables* de la théorie. Autrement dit, une constante définissable est une opération unaire θ telle que $\theta \circ \pi_0^2 = \theta \circ \pi_1^2$.

Ainsi, tout en s'éloignant des présentations syntaxiques des structures, les travaux de Lawvere se distinguent des outils issus de l'algèbre universelle en reprenant à nouveaux frais des concepts essentiels à l'approche modèle-théorique, en particulier une forme de séparation entre plusieurs niveaux

rappelant la distinction syntaxe/sémantique et en élaborant mathématiquement (c'est-à-dire en termes catégoriques) l'articulation entre ces différents niveaux, des présentations aux théories d'une part, et des théories aux modèles d'autre part.

Une dernière remarque, concernant la définition des théories algébriques elles-mêmes. La définition que donne Lawvere dans sa thèse ne sera pas en effet celle qu'il exposera par ailleurs au congrès de théorie des modèles de Berkeley, ou qui sera reprise par la suite dans la littérature. Les théories algébriques sont en effet alors définies de façon multiplicative et non additive :

« By an algebraic theory we mean a small category \mathbf{A} whose objects are the natural numbers $0, 1, 2, \dots$ and in which each object n is the categorical direct product of the object 1 with itself n times. By an n -ary operation of \mathbf{A} is meant any map $n \rightarrow 1$ in \mathbf{A} . Since n is a product, the projections $\pi_i^{(n)} : n \rightarrow 1$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ are always n -ary operations for each n in any algebraic theory, but in general there will be more. The maps $n \rightarrow m$ in an algebraic theory \mathbf{A} are in one-to-one correspondence with the m -tuples of n -ary operations of \mathbf{A} . » ([142], 414)

Lawvere explique ainsi, dans son commentaire de 2004, ce passage de la formulation additive à la version multiplicative :

« Finally, there was the choice, which I now view as anachronistic, of considering that an algebraic theory is a category with coproducts rather than with products. The “coproduct” convention, which involves defining algebras themselves as contravariant functors from the theory into the background, indeed did permit viewing the theory itself as a subcategory of the category of models. However, for logics more general than the equational one considered here, such a direct inclusion of a theory into its category of models cannot be expected. The “product” convention permits the concrete definition of models as covariant functors from the theory; thus the theory appears itself as a generic model. Moreover, the “product” convention seems to be more compatible with the way in which algebra of quantities and geometry of figures are opposed. In algebraic geometry, C^∞ geometry, group invariance geometry, etc. it became clear that there were many potential applications of universal algebra in contexts that do not fit the view that signatures are more basic than clones (i.e. that no examples of algebra exist beyond those whose algebraic theories are given by presentations). In these geometric (equally concrete) examples, the algebraic theories typically arise with products, not coproducts. For example, the algebraic theory whose operations are just all smooth maps between Euclidean spaces is not likely to ever find a useful presentation by

signatures, yet its category of algebras contains many examples (the function algebras of arbitrary manifolds, formal power series, infinitesimals) that need to be related to each other by the appropriate homomorphisms. » ([140], 20)

L'avantage de la formulation additive est donc qu'elle souligne l'homogénéité entre la théorie et ses modèles, puisque dans ce cas la théorie peut être vue comme une sous-catégorie de la catégorie de ses modèles. La version multiplicative, elle, apparaît à Lawvere plus proche de ses applications « concrètes », essentiellement géométriques.

3.2.3 Les modèles des théories : la sémantique fonctorielle

Dans le chapitre III de sa thèse, Lawvere présente le versant sémantique de ses travaux : la notion de « modèle » d'une théorie algébrique, dans le but de caractériser de façon abstraite les « catégories algébriques ».

Définition 20 *Soit \mathbb{A} une théorie algébrique. On dira que X est une pré-algèbre de type \mathbb{A} ssi X est un foncteur $\mathbb{A}^{op} \rightarrow Ens$. X est une algèbre de type \mathbb{A} ssi X est une pré-algèbre de type \mathbb{A} et X commute avec les produits finis. On note $Ens^{(\mathbb{A}^{op})}$ la sous-catégorie pleine de $Ens^{\mathbb{A}^{op}}$ déterminée par les objets qui sont des algèbres. On dira que \mathcal{X} est une catégorie algébrique ssi pour une théorie algébrique \mathbb{A} , \mathcal{X} est équivalente à $Ens^{(\mathbb{A}^{op})}$.*

Ainsi une pré-algèbre X de type \mathbb{A} est une suite d'ensembles avec, pour chaque $\theta : A(n) \rightarrow A(m)$ dans \mathbb{A} , une application $\theta_X : X_m \rightarrow X_n$ dans Ens , telle que $(\theta\phi)_X = \phi_X\theta_X$. X est une algèbre ssi $X_n \cong X_1^n$ pour tout ensemble fini n . Ainsi dans une algèbre X de type \mathbb{A} , toute opération n -aire θ de \mathbb{A} détermine une application $X_1^n \rightarrow X_1$ dans Ens .

La spécificité de cette notion de « modèle » semble bien être le fait que la structure algébrique est désormais vue comme une application d'un certain type, une relation entre une description et un « espace » d'objets ainsi décrit, et non plus un ensemble muni d'une structure (même s'il est néanmoins possible de parler de l'« ensemble sous-jacent » à ce modèle, à savoir $X(A^1)$). Ce changement de statut des objets considérés est semblable à ce qui se retrouve par ailleurs du côté de la topologie : en effet, un chemin dans un espace topologique ne sera pas vu comme un ensemble de points d'un espace topologique E , mais comme une application $f : [0, 1] \rightarrow E$. En ce sens, un « modèle » d'une théorie n'est plus un objet structuré, mais peut être vu comme une « comparaison » entre une théorie, considéré comme objet « descriptif », et son « image » dans un espace donné, le transfert entre les deux pôles étant garanti par la préservation des produits finis (comme la continuité dans le cas topologique).

Soit $U_{\mathbb{A}}$ le foncteur d'ensemble sous-jacent de $Ens^{\mathbb{A}^{op}}$ dans Ens . On note $\{U_{\mathbb{A}}\}$ le foncteur $\mathbf{1} \rightarrow Ens^{Ens^{(\mathbb{A}^{op})}}$, objet dans la catégorie de foncteurs correspondante.

Théorème 4 *Pour toute théorie algébrique \mathbb{A} , le foncteur d'ensemble sous-jacent $U_{\mathbb{A}}$ a la propriété que $(\{U_{\mathbb{A}}\}^n, \{U_{\mathbb{A}}\}^m) \cong (A(m), A(n))$ pour tout ensemble finis m et n , et avec $A(m)$ et $A(n)$ vus comme objets de \mathbb{A} .*

Ce résultat occupe pour Lawvere une place centrale dans sa thèse. Il est en effet annoncé dès l'introduction en ces termes :

« [The] explicit consideration of the categorical structure has several advantages. For example, from the category (or more precisely from an underlying-set functor) we can recover, not only the identities which hold between given operations in a class of algebras, but also the operations themselves (Theorem III.1.1). »
([140], 24)

On voit ici apparaître un élément essentiel de l'approche catégorique des concepts structurels⁴ : l'idée de retrouver, à partir de la catégorie des structures d'un même type, une « théorie » déterminant ce type de structure.

Soit $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ une application entre théories algébriques. On a alors un foncteur $f^* : \mathbb{A}^{op} \rightarrow \mathbb{B}^{op}$, et un foncteur $Ens^{(f^*)} : Ens^{(\mathbb{B}^{op})} \rightarrow Ens^{(\mathbb{A}^{op})}$. On pose alors la définition suivante :

Définition 21 *Soit \mathcal{K} la sous-catégorie pleine de $(CAT, \{Ens\})$ déterminée par les objets $U : \mathcal{X} \rightarrow Ens$ pour lesquels $(\{U\}^n, U)$ est petite pour tout ensemble fini n .*

Le foncteur $\mathfrak{S} : \mathcal{T}^{op} \rightarrow \mathcal{K}$ défini par

$$\mathfrak{S}(\mathbb{A}) = U_{\mathbb{A}}$$

$$\mathfrak{S}(f) = Ens^{(f^*)}$$

est appelé foncteur sémantique. Dans ce cas, pour $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ dans \mathcal{T} , $\mathfrak{S}(f) = Ens^{(f^)}$ est vu comme une application $U_{\mathbb{B}} \rightarrow U_{\mathbb{A}}$ dans \mathcal{K} , où $U_{\mathbb{B}}$ et $U_{\mathbb{A}}$ sont les foncteurs d'ensembles sous-jacents.*

Lawvere commente ainsi cette définition :

« Thus intuitively the semantics functor assigns to each algebraic theory the category of algebras of which it is a theory ». ([140], 77)

On peut également définir un autre foncteur :

Définition 22 *On définit un foncteur $\widehat{\mathfrak{S}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T}^{op}$ de la façon suivante. Etant donné un objet $U : \mathcal{X} \rightarrow Ens$ dans \mathcal{K} , on considère l'objet $\{U\} \in |Ens^{\mathcal{X}}|$. Il existe un unique foncteur $Ens_f^{op} \rightarrow Ens^{\mathcal{X}}$ qui commute avec les produits finis et qui envoie 1 sur $\{U\}$. Soit $\widehat{\mathfrak{S}}(U)$ la théorie algébrique*

4. Ce point sera étendu et discuté au chapitre 4, sous la forme du théorème de complétude conceptuelle forte.

$Ens_f \rightarrow \mathbb{A}$, où \mathbb{A} est la duale de l'image pleine de $Ens_f^{op} \rightarrow Ens^{\mathcal{X}}$. On appelle $\widehat{\mathfrak{S}}(U)$ la structure algébrique de U .

Si $T : U \rightarrow U'$ dans \mathcal{K} , alors $\widehat{\mathfrak{S}}(T) : \widehat{\mathfrak{S}}(U') \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}(U)$ dans \mathcal{T} est défini en dualisant le petit triangle dans

$$\begin{array}{ccc}
 & Ens_f^{op} & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 A^{op} & \xrightarrow{(\widehat{\mathfrak{S}}(T))^{op}} & \mathbb{A}^{op} \\
 \swarrow & & \searrow \\
 Ens^{\mathcal{X}'} & \xrightarrow{Ens^T} & Ens^{\mathcal{X}}
 \end{array}$$

le grand triangle étant commutatif puisque pour $n \in Ens_f$ on a $T(U^n) = (TU')^n = U^n$.

Lawvere explique ainsi cette définition :

« Explicitly, the n -ary operations of the algebraic structure of $U : \mathcal{X} \rightarrow Ens$ are in one-to-one correspondence with the natural transformations $\{U\}^n \rightarrow \{U\}$ in $Ens^{\mathcal{X}}$. Theorem 1.1 states that $\widehat{\mathfrak{S}} \cong \{\mathcal{T}^{op}\}$. » ([140], 78)

On a alors le théorème central de ce troisième chapitre :

Théorème 5 « Algebraic structure is adjoint to (algebraic) semantics. »

Pour Lawvere, dans l'introduction de sa thèse, l'intérêt de ce résultat est le suivant : « suggesting a possible principle of philosophy (namely a generalization of our Theorem III.1.2) » ([140], 24). Cette idée est reformulée dans son commentaire de 2004 :

« that semantics has an adjoint called « structure » with a very general domain, appears as a kind of philosophical theorem in a soft mathematical guise. » ([140], 16)

On peut considérer qu'il est fait ici référence à la dualité entre le Formel et le Conceptuel, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

3.2.4 L'algèbre engendrée par une préalgèbre

Le chapitre IV, centré sur l'étude des « foncteurs algébriques », expose un résultat qui nous apparaît important :

Théorème 6 Si \mathbb{A} est une théorie algébrique, alors l'inclusion $Ens^{(\mathbb{A}^{op})} \rightarrow Ens^{\mathbb{A}^{op}}$ des algèbres dans les préalgèbres admet un adjoint.

Lawvere dans l'introduction présente ainsi ce résultat :

« There is a certain analogy with sheaf theory here. Namely, our 'prealgebras' of a given type form a category of unrestricted functors, whereas 'algebras' are prealgebras which commute with a specified class of inverse limits. The analogy with sheaf theory is further seen in the theorem of IV.1.1 which results. » ([140], 24)

Nous reviendrons plus loin sur cette analogie, qui sera reprise et développée dans d'autres travaux⁵.

3.2.5 Quelques résultats autour des théories algébriques de Lawvere

Dans [122], A. Kock et G. Reyes présentent quelques résultats essentiels autour de la notion de théorie algébrique (ici donnée dans sa forme multiplicative). Ces résultats joueront un rôle significatif dans la suite de nos analyses.

L'interprétation relative

Dans le contexte théorique élaboré par Lawvere, la notion d'interprétation relative d'une théorie dans une autre se présente naturellement, sous la forme d'un morphisme entre théories algébriques :

Définition 23 *Un morphisme de théories algébriques est un foncteur $f : T \rightarrow T'$ avec $f(n) = n$ et avec $f(\pi_i) = \pi'_i$, pour toutes les projections spécifiées.*

Ainsi par exemple, si T est la théorie des groupes abéliens, T' la théorie des anneaux commutatifs, on a une inclusion évidente $T \rightarrow T'$, dans la mesure où $T(n, 1)$ peut être vu comme le sous-ensemble de $T'(n, 1)$ (i.e. l'ensemble des polynômes à n variables) consistant dans les polynômes homogènes de degré 1.

Si $f : T \rightarrow T'$ est un morphisme de théories algébriques, on a alors par là-même un foncteur $f^b : \text{Alg}(T', \text{Ens}) \rightarrow \text{Alg}(T, \text{Ens})$.

Les algèbres libres

Lawvere, dans sa thèse, montre que de tels foncteurs admettent des adjoints à gauche, et en particulier un foncteur « algèbre libre ». On a alors le résultat suivant :

Proposition 5 *Soit T une théorie algébrique. Alors T est équivalente à la duale de la sous-catégorie pleine de $\text{Alg}(T, \text{Ens})$ définie par les algèbres libres.*

5. En particulier dans la thèse de Jean Bénabou.

On voit ainsi apparaître, même dans le cadre multiplicatif, l'homogénéité entre une théorie et la catégorie de ses modèles, que soulignait Lawvere dans la version « coproduit ».

Ce résultat permet à Kock et Reyes de construire une structure algébrique de façon originale :

« The following is an example of an algebraic theory which is neither obtained by a presentation, nor by « semantic » means, but rather by a construction performed in the category of algebraic theories. Let \widehat{T}_0 be the theory whose n -ary operations are formal power series in n variables and without constant terms. They can be substituted into each other without any convergence trouble, since the constant term is missing. Formally, \widehat{T}_0 can be obtained as an inverse limit formation in the category of algebraic theories, $\varprojlim T_{0,n}$ is the algebraic theory for commutative rings without unit and satisfying $\forall x : x^n = 0$. The algebras for \widehat{T}_0 are not known, neither is a syntactic presentation. » ([122], 288, Exemple 1.14)

Cet exemple montre que les théories algébriques constituent bien des outils autonomes de description de structures algébriques, qui peuvent être indépendants de toute forme de présentation formelle.

Faire varier le « contexte »

La nature fonctorielle des modèles semble d'autant plus cruciale qu'elle permet d'effectuer un pas que Lawvere ne franchit pas dans ses premiers travaux, développés « as an attempt to make contact with the work of the universal algebra community » [140], c'est-à-dire dans un contexte ensembliste : considérer les modèles d'une théorie algébrique dans un contexte non-enssembliste.

Dès 1966, Freyd, dans [81], envisage, dans le prolongement des travaux de Eckmann et Hilton, la possibilité de faire varier la catégorie dans laquelle sont définies les structures du type considéré : il est en effet possible de remplacer la catégorie des ensembles par une catégorie arbitraire \mathcal{C} présentant les propriétés appropriées. Ainsi par exemple, si T est la théorie algébrique des Groupes :

- la catégorie $Mod(T, Ens)$ est équivalente à la catégorie des groupes ;
- la catégorie $Mod(T, Grp)$, où Grp est la catégorie des groupes, est équivalente à la catégorie des groupes abéliens ;
- la catégorie $Mod(T, Top)$, où Top est la catégorie des espaces topologiques, est équivalente à la catégorie des groupes topologiques ;
- ma catégorie $Mod(T, Man)$, où Man est la catégorie des variétés différentielles, est équivalente à la catégorie des groupes de Lie.

En outre, si $Alg(T, \mathcal{C})$ est la catégorie des T -algèbres dans \mathcal{C} , on peut considérer à la place de \mathcal{C} la catégorie $(Alg(T', Ens))^{op}$, et obtenir ainsi la ca-

tégorie des « T -coalgèbres dans la catégorie des T' -algèbres », qui contient des structures comme les algèbres de Hopf, qui ne peuvent être décrits en termes d'algèbre universelle (ni même en logique du premier ordre finitaire). On voit ainsi apparaître le fait que le cadre théorie introduit par Lawvere élargit le champ de l'algèbre universelle.

L'algèbre générique

Si $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un foncteur préservant les produits, on obtient un foncteur « transport le long de p »

$$\text{Alg}(T, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Alg}(T, \mathcal{C}')$$

en composant avec p . On a un exemple trivial qui jouera cependant un rôle important par la suite : la structure générique. Pour une théorie algébrique donnée T , on peut en effet considérer la catégorie $\text{Alg}(T, T)$, possible puisque T a des produits finis. Parmi les T -algèbres dans T , on a le foncteur identité $id_T : T \rightarrow T$. C'est une T -algèbre générique au sens où toute autre T -algèbre $A : T \rightarrow \mathcal{C}$ peut être obtenue par transport de l'algèbre id_T le long du foncteur préservant les produits A .

3.3 L'extension du programme de Lawvere

Au-delà de l'algèbre universelle, le cadre théorique introduit par Lawvere présente cependant des limites. Ainsi par exemple, ne sont pas algébriques au sens de Lawvere les petites catégories, les théories algébriques elles-mêmes ou les ordres partiels. De là, un programme de recherche semble s'imposer : l'extension de ce cadre au-delà du contexte algébrique.

3.3.1 La thèse de Bénabou

Plusieurs tentatives ont été réalisées en ce sens. On peut penser notamment à la prise en compte des opérations infinitaires dans les travaux de Linton [146]. Mais ce sont les travaux de Jean Bénabou qui vont retenir notre attention.

La thèse de Jean Bénabou est publiée en 1968 dans les *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, mais dès l'introduction, Bénabou indique que ses travaux ont été présentés en 1963, avant la publication des travaux de Higgins, mais surtout de Lawvere. L'objet de ses travaux est d'étudier

« systématiquement (c'est-à-dire fonctoriellement !) les structures algébriques sur les familles finies ou infinies d'ensembles, ou plus généralement d'objets d'une catégorie quelconque. » ([21], 2)

La chronologie de la naissance de la sémantique fonctorielle se révèle donc plus complexe qu'il ne semble de prime abord, et la reprise catégorique du programme de l'algèbre universelle apparaît plus généralement « dans l'air du temps » au début des années 1960.

Algèbres, types et espèces de structure

La notion centrale dans la thèse de Bénabou est celle de type d'algèbres. Sa définition formelle suppose quelques indications préalables⁶.

Dans la thèse I désigne un ensemble fixe, dont les éléments i, i', i_1, \dots sont appelés *indices*. Un *multi-indice* de longueur n est un élément $\mu = i_1 \dots i_n$ du monoïde libre $M = M(I)$ engendré par I . Soit \mathcal{C} une catégorie à produits finis, et $X^{(I)}$ une famille d'objets de \mathcal{C} . Pour tout $\mu = i_1 \dots i_n \in M$ on choisit un objet $X^\mu = X^{i_1 \dots i_n}$, produit dans \mathcal{C} des objets X^{i_1}, \dots, X^{i_n} , et des projections

$$pr_\mu^k(X^{(I)}) = pr_\mu^k : X^\mu \rightarrow X^{i_k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

On peut alors définir la notion de type et la sémantique fonctorielle à la façon de Bénabou :

Définition 24 *Un type d'algèbres à une dimension sur I termes de base (abrégé en I -type) est une catégorie \mathbf{T} ayant $M(I)$ comme ensemble des objets et telle que tout multi-indice $\mu = i_1 \dots i_n$ est muni de flèches $pr_\mu^k : i_1 \dots i_n \rightarrow i_k$ avec $(k = 1, \dots, n)$ dites projections canoniques, qui en font, dans \mathbf{T} , le produits des objets i_1, \dots, i_n .*

Si \mathbf{T} et \mathbf{T}' sont deux I -types, un *morphisme* de \mathbf{T} dans \mathbf{T}' est un foncteur de \mathbf{T} dans \mathbf{T}' dont la restriction aux objets est l'application identique de $M(I)$, et qui commute avec les projections canoniques. On note alors $\underline{Typ}(I)$ la catégorie des I -types.

Bénabou propose alors la définition suivante :

Définition 25 *Soit \mathbf{T} un I -type et \mathcal{C} une catégorie à produits finis. Une algèbre de type \mathbf{T} (ou \mathbf{T} -algèbre) de \mathcal{C} est un foncteur $A : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{C}$ qui commute avec les produits finis. Si A et A' sont deux \mathbf{T} -algèbres, un morphisme de A dans A' est une transformation naturelle.*

La catégorie \mathcal{C} étant petite, les \mathbf{T} -algèbres de \mathcal{C} et leurs morphismes déterminent une catégorie $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$.

Dans la version publiée de sa thèse en 1968, Bénabou précise le lien entre sa définition et celle de Lawvere :

6. Nous présentons les définitions de Bénabou en respectant les conventions de notation originales.

« Si $I = 1 (= \{\emptyset\})$, M s'identifie canoniquement à \mathbb{N} et la catégorie \mathcal{I} des théories algébriques de Lawvere s'identifie à la catégorie $\underline{Typ}(1)$ des types d'algèbres à une dimension sur 1 terme. Ses catégories algébriques ne sont autres que les catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens})$ où \mathbf{T} est un I -type. » ([21], 11)

Les travaux de Bénabou constituent donc bien une généralisation des notions proposées par Lawvere.

La suite du premier chapitre de la thèse vise à intégrer au contexte catégorique les concepts de l'algèbre universelle que nous avons présentés au chapitre 1, et à « donner un sens *précis* à la phrase « \mathcal{S} est une espèce de structures algébriques définie par des opérations, internes ou externes et des relations entre opérations composées ». » ([21], 3).

Tout d'abord, un I -schéma d'opérations Σ est un couple (Ω, τ) formé d'un ensemble Ω et d'une application $\tau : \Omega \rightarrow M \times I$. Les éléments de Ω sont les opérations du schéma, $\tau(\omega) = (i_1 \dots i_n, i)$ est le type de l'opération ω , caractérisé par son multi-indice source $\mu = i_1 \dots i_n$, et son but i , et la longueur n de μ est le degré de ω . Les opérations de degré 0, $\omega : 0 \rightarrow i$ sont des opérations internes particulières dites constantes. On peut alors définir une notion de I -morphisme entre I -schémas d'opérations, de telle sorte que l'on a une catégorie $Op(I)$ des I -schémas d'opération.

On peut également définir la notion de préalgèbre : soit \mathcal{C} une catégorie à produits finis, une préalgèbre de schéma Σ est un couple $P = (X^{(I)}, \phi^{(\Omega)})$ d'une famille (X^i) ($i \in I$) d'objets de \mathcal{C} et d'une famille (ϕ^ω) $\omega \in \Omega$ de flèches de \mathcal{C} telles que, si ω est de type $(i_1 \dots i_n, i)$, $\phi^\omega : X^{i_1} \times \dots \times X^{i_n} \rightarrow X^i$. La famille $X^{(I)}$ est sous-jacente à P , et ϕ^ω est la loi de composition structurale associée à ω . On peut alors définir une catégorie $\underline{Prealg}(\Sigma, \mathcal{C})$ des préalgèbres de schéma Σ .

Bénabou remarque que « la notion de préalgèbre a une « interprétation » très commode » ([21], 14) : soit \mathcal{C} une catégorie à produits finis, pour tout objet X^I de \mathcal{C}^I et tout $(\mu, i) \in M \times I$, on pose $\Omega_\mu^i(X^{(I)}) = \{\mu\} \times Hom(X^\mu, X^i) \times \{i\}$. Le I -schéma ainsi déterminé est dit schéma des lois de compositions de $X^{(I)}$ et noté $\Sigma(X^{(I)})$. Une préalgèbre de schéma Σ ayant $X^{(I)}$ comme famille sous-jacente s'identifie à un morphisme de I -schémas $f : \Sigma \rightarrow \Sigma(X^{(I)})$ au moyen de la correspondance $f \rightsquigarrow (X^{(I)}, (f(\omega)))$ pour $\omega \in \Omega$. Cette « interprétation » nous semble importante car elle met en lumière, comme dans le cas de la sémantique fonctorielle à la Lawvere, un même changement de point de vue sur les structures, vues non plus comme objets de nature ensembliste, mais comme morphismes.

Bénabou montre alors que cette notion de schéma est équivalente d'une part à celle de schéma d'opérateurs de Higgins [105] et d'autre à celle schéma de diagramme au sens de Grothendieck [91].

On peut alors définir les notions de projections et d'opérations composées. Une I -projection standard est un couple (μ, k) formé d'un multi-indice $\mu =$

$i_1 \dots i_n$ et d'un entier $k \in \{1, \dots, n\}$. On note Ω_0 l'ensemble de ces couples, $\tau : \Omega_0 \rightarrow M \times I$ l'application $(i_1 \dots i_n, k) \rightsquigarrow (i_1 \dots i_n, i_k)$ et $S = (\Omega_0, \tau)$ le I -schéma standard. Un I -schéma à projections est un couple $\Pi = (\Sigma, p)$ d'un I -schéma Σ et d'un morphisme $p : S \rightarrow \Sigma \in Op(I)$. Les opérations $p(\mu, k)$ du schéma sous-jacent Σ sont dites projections et notées pr_μ^k . On définit une catégorie $Proj(I)$ des I -schémas à projections.

On définit alors précisément la notion d'opération composée. Soit $\Sigma = (\Omega, \tau)$ un I -schéma d'opérations, on peut en effet « construire toutes les opérations formelles que l'on peut déduire de celles de Ω 'par superposition' » ([21], 18). Sans entrer dans les détails de la définition, on notera ici un rapprochement avec la stratégie de définition examinée au chapitre 1, dans le cadre de l'algèbre universelle : construire un objet algébrique synthétisant la totalité des opérations définissables, comme dans le cas des clones de Hall. Cet objet est noté $\widehat{\Sigma}$ et est défini par Bénabou comme le saturé de Σ , « dont les opérations $\widehat{\omega}$ sont toutes les opérations composées construites à partir des projections standard et des $\omega \in \Omega$ » ([21], 20). On pourra noter que Bénabou, dans sa thèse, dépasse la simple définition de tels objets, pour étudier leur structure algébrique propre :

« Les définitions des mots significatifs (Bourbaki), des Σ -mots (Higgins), ou des Ω -mots (Cohn) « mélangent » les opérations composées et les variables sur lesquelles elles opèrent. Cela ne permet pas de dégager la structure abstraite du saturé $\widehat{\Sigma}$ d'un I -schéma Σ [...] indépendamment de la façon dont ils peuvent opérer sur des ensembles [...]. Même si l'on se restreint aux structures algébriques sur les ensembles, cela rend difficile et artificielle la définition des Σ -identités (Higgins) ou des Ω -lois, c'est-à-dire des axiomes de la structure, car il est nécessaire d'utiliser des « alphabets » auxiliaires, tout à fait « parasites » ([21], 21).

On voit ainsi apparaître plus clairement le projet de Bénabou dans ce premier chapitre : non seulement reformuler catégoriquement les notions antérieures, mais également intégrer au cadre catégorique l'axiomatisation même des structures algébriques.

Soit $\Sigma = (\Omega_\mu^i)$ un I -schéma d'opérations et (Ω_μ^ν) la famille d'ensembles définie par $\Omega_\mu^\nu = \Omega_\mu^{i_1} \times \dots \times \Omega_\mu^{i_n}$ avec $(\mu \in M, \nu = i_1 \dots i_n \in M)$. Une multiplication T sur Σ est une famille $(T_{\nu\mu}^i)$ avec $(i, \nu, \mu) \in I \times M \times M$ et où $T_{\nu\mu}^i : \Omega_\mu^i \times \Omega_\nu^\mu \rightarrow \Omega_\mu^i$ est une application notée $(\omega, (\omega_1, \dots, \omega_n)) \rightarrow \omega(\omega_1, \dots, \omega_n)$. On appelle schéma multiplicatif un couple (Σ, T) . On appelle compositeur sur I -termes ou I -compositeur \mathcal{K} un I -schéma multiplicatif (Σ, T) où T est associative et unitaire. Bénabou montre alors que cette notion de I -compositeur s'identifie à celle de compositeur de Lazard d'une part, et à celle de clone d'opérations de Hall d'autre part.

Il est alors possible de définir la notion d'espèce de structures algébriques. Soit $\Sigma = (\Omega_\mu^i)$ un I -schéma et $\widehat{\Sigma}$ le saturé de Σ pour les projections et

opérations composées. On appelle schéma des relations de Σ le I -schéma produit $R(\Sigma) = \widehat{\Sigma} \times \widehat{\Sigma}$. Ses opérations, dites relations de Σ , sont donc les couples $\rho = (\widehat{\omega}, \widehat{\omega}')$ d'opérations de $\widehat{\Omega}$ tels que $\tau(\widehat{\omega}) = \tau(\widehat{\omega}')$. Une espèce de structures algébriques élémentaires sur I -termes, ou I -espèce, est une couple $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$, où Σ est un I -schéma et \mathcal{A} est un ensemble de relations de Σ , dit ensemble des axiomes de l'espèce \mathcal{S} . Un morphisme (banal) de \mathcal{S} dans l'espèce $\mathcal{S}' = (\Sigma', \mathcal{A}')$ est un triple $(\mathcal{S}, f, \mathcal{S}')$ où f est un morphisme de schémas tel que $R(f)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. On peut alors définir une catégorie des I -espèces $\underline{Esp}(I)$ et un foncteur d'oubli des axiomes qui associe à chaque espèce \mathcal{S} son schéma sous-jacent Σ .

On peut alors associer à une espèce de structure \mathcal{S} une algèbre d'espèce \mathcal{S} . Soit \mathcal{C} une catégorie à produits finis et $X^{(I)}$ une famille d'objets de \mathcal{C} . La préalgèbre identique $Id : \Sigma(X^{(I)}) \rightarrow \Sigma(X^{(I)})$ se prolonge en une préalgèbre \widehat{Id} de schéma (saturé) $\widehat{\Sigma}(X^{(I)})$. Le schéma $R(X^{(I)}) = R(\Sigma(X^{(I)}))$ est dit schéma des relations de $X^{(I)}$. On a alors les projections canoniques $pr_1, pr_2 : R(X^{(I)}) \rightarrow \widehat{\Sigma}(X^{(I)})$ et χ_1 et χ_2 les morphismes composés (avec $k = 1, 2$)

$$\chi_k : R(X^{(I)}) \xrightarrow{pr_k} \widehat{\Sigma}(X^{(I)}) \xrightarrow{\widehat{Id}} \Sigma(X^{(I)})$$

Le noyau du couple de flèches $(\chi_1, \chi_2) : R(X^{(I)}) \rightarrow \Sigma(X^{(I)})$ est l'ensemble $\mathcal{A}(X^{(I)})$ des relations vraies dans $X^{(I)}$ et le couple $\mathcal{S}(X^{(I)}) = (\Sigma(X^{(I)}), \mathcal{A}(X^{(I)}))$ est l'espèce de $X^{(I)}$.

Une algèbre d'espèce $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$, ou \mathcal{S} -algèbre de \mathcal{C} , est un couple $A = (\mathcal{S}, f)$ où $f : \Sigma \rightarrow \Sigma(X^{(I)})$ est une préalgèbre telle que $(\mathcal{S}, f, \mathcal{S}(X^{(I)})) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}(X^{(I)})$. On a alors une catégorie $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$. Bénabou explicite ainsi ces définitions :

« De manière moins formelle, soit $P = (X^i, \phi^\omega) : \Sigma \rightarrow \Sigma(X^{(I)})$ une préalgèbre de schéma Σ sur $X^{(I)}$. Par adjonction de projections puis d'opérations composées, on a une préalgèbre $\widehat{P} = (X^i, \phi^{\widehat{\omega}})$ de schéma $\widehat{\Sigma}$, ayant même famille sous-jacente. Une relation $\rho = (\widehat{\omega}, \widehat{\omega}')$ de Σ est satisfaite par P si, dans la famille $X^{(I)}$, les deux « opérations composées » $\phi^{\widehat{\omega}}$ et $\phi^{\widehat{\omega}'}$ coïncident. Une algèbre d'espèce \mathcal{S} « est » une préalgèbre satisfaisant à tous les axiomes de \mathcal{S} . » ([21], 28)

Ces dernières remarques mettent en évidence le projet de Bénabou de resaisir, dans un contexte catégorique, les notions fondamentales de la théorie des modèles traditionnelle que sont la « vérité » et la « satisfaction ». De ce point de vue, on voit ainsi en quoi la thèse de Bénabou approfondit et systématise la démarche de Lawvere.

Il reste cependant à montrer comment s'articulent les différentes notions introduites dans ce premier chapitre.

L'unification des différentes notions d'algèbres

Dans le deuxième chapitre de sa thèse, Bénabou montre tout d'abord que les notions de I -type et de I -compositeur sont équivalentes, « aussi bien du point de vue « sémantique », (leurs catégories de « modèles » étant isomorphes) que du point de vue syntaxique » ([21], 32).

Bénabou démontre ensuite le résultat important suivant :

Théorème 7 *Il existe un foncteur de la catégorie des I -types $\underline{Typ}(I)$ dans la catégorie des I -espèces $\underline{Esp}(I)$, qui associe à chaque type son « espèce sous-jacente », et ce foncteur admet un adjoint à gauche : le foncteur du type engendré $\mathbb{T}(\cdot) : \underline{Esp}(I) \rightarrow \underline{Typ}(I)$.*

La démonstration de ce résultat amène Bénabou à introduire la notion d'algèbre générique de l'espèce \mathcal{S} , noté $G(\mathcal{S})$:

« Pour toute espèce de structures algébriques \mathcal{S} , il y a une famille canonique d'objets de $\mathbb{T}(\mathcal{S})$ munie d'une structure de \mathcal{S} -algèbre, dite \mathcal{S} -algèbre générique, qui joue le rôle d'un « modèle universel » pour toutes les \mathcal{S} -algèbres. De façon précise : pour toute catégorie \mathcal{C} et toute structure de \mathcal{S} -algèbre A sur une famille d'objets de \mathcal{C} , il existe un unique foncteur $\mathbb{T}_{\mathcal{S}}(A) : \mathbb{T}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}$ tel que A soit l'image directe de $G(\mathcal{S})$ par $\mathbb{T}_{\mathcal{S}}(A)$. En particulier, pour toute \mathcal{S} -algèbre A , les opérations structurales de A sont les images des opérations structurales de $G(\mathcal{S})$, et une relation entre ces opérations structurales est identiquement vérifiée, pour toute \mathcal{S} -algèbre, ssi elle est vérifiée dans l'algèbre générique $G(\mathcal{S})$. » ([21], 4)

En articulant ce résultat au théorème selon lequel les foncteurs $\mathcal{S}_{\mathbb{T}} : \underline{Alg}(\mathbb{T}, \mathcal{C}) \rightarrow \underline{Alg}(\mathcal{S}(\mathbb{T}), \mathcal{C})$ et $\mathbb{T}_{\mathcal{S}} : \underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \rightarrow \underline{Alg}(\mathbb{T}(\mathcal{S}), \mathcal{C})$ sont des isomorphismes de catégories, compatibles avec les foncteurs d'oubli, Bénabou répond ainsi à une question soulevée par A. Heller [102] concernant les liens entre les schémas d'opérateurs de Higgins et les théories algébriques de Lawvere⁷ : ces deux notions sont équivalentes.

Bénabou définit alors une notion d'équivalence entre espèces de structures : deux I -espèces sont (sémantiquement) équivalentes s'il existe deux morphismes $\tilde{f} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ et $\tilde{g} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ tels que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \tilde{1}_{\mathcal{S}'}$, et $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{1}_{\mathcal{S}}$, c'est-à-dire si, pour toute catégorie \mathcal{C} à produits finis, il existe un isomorphisme $\underline{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \simeq \underline{Alg}(\mathcal{S}', \mathcal{C})$ fonctoriel en \mathcal{C} et compatible avec les foncteurs d'oubli. Muni de cette relation d'équivalence, Bénabou démontre :

Proposition 6 *Deux I -espèces \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont équivalentes ssi leurs types $\mathbb{T}(\mathcal{S})$ et $\mathbb{T}(\mathcal{S}')$ sont isomorphes.*

7. On remarquera que dans la même note, A. Heller soulève la question du rapport entre ces connexions et celles proposées par J. Isbell dans [110], mais cette dernière connexion n'est pas abordée par Bénabou.

Il apparaît ainsi que le type « classifie » ([21], 3) les espèces de structures, et constitue un invariant pour cette relation d'équivalence entre espèces de structures. Cette notion de type associé à une espèce est centrale pour Bénabou :

« Tous les résultats qui précèdent, une grande partie de ceux qui suivent, et [...] la justification même de la notion de I -type résultent formellement [...] de l'existence et des propriétés du type $\mathbb{T}(\mathcal{S})$ engendré par une I -espèce \mathcal{S} . Nous allons en donner deux descriptions, l'une de nature « logique » fait le lien avec la théorie des modèles, l'autre comme algèbre définie par générateurs et relations. » ([21], 40)

Cette voie logique repose sur la définition dans des termes catégoriques de la notion de conséquence : soit $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$ une I -espèce. La réunion $\bigcup_{\mathcal{C}} \text{Alg}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ (où \mathcal{C} est une catégorie à produits finis) est dite classe des \mathcal{S} -algèbres et notée $\text{Alg}(\mathcal{S})$. Pour toute $A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}(X^i) \in \text{Alg}(\mathcal{S})$, on note $P_A : \Sigma \rightarrow \Sigma(X^i)$ la préalgèbre sous-jacente. L'ensemble $\overline{\mathcal{A}} \subset R(\Sigma)$ des relations satisfaites par la famille (P_A) (pour $A \in \text{Alg}(\mathcal{S})$) est dit ensemble des conséquences de \mathcal{A} . Autrement dit, une relation $\rho = (\omega, \omega') \in R(\Sigma)$ est conséquence de \mathcal{A} si elle est satisfaite pour toute \mathcal{S} -algèbre. On a alors le résultat suivant :

Proposition 7 *Soit $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$ une I -espèce. Une relation de Σ est conséquence de \mathcal{A} ssi elle est satisfaite par l'algèbre générique de \mathcal{S} .*

Dans le cas ensembliste, Bénabou montre que cette relation de conséquence coïncide avec celle de la théorie des modèles. En effet, on a

Proposition 8 *Soit $\mathcal{S} = (\Sigma, \mathcal{A})$ une espèce de structures élémentaires. Une relation de Σ est conséquence des axiomes de \mathcal{S} si et seulement si elle est satisfaite par toute algèbre d'espèce \mathcal{S} sur une famille d'ensembles.*

Par ailleurs, dans ce même chapitre, Bénabou précise le rapport entre les types et les faisceaux, en examinant la notion de faisceaux d'algèbres d'un certain type. En effet, soient \mathcal{L} et \mathcal{K} deux catégories, Λ une classe, $\Phi^{(\Lambda)} = (\Phi^\lambda : \mathcal{L}^\lambda \rightarrow \mathcal{K})$ une famille de foncteurs et, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\pi^\lambda = (\pi_{L_\lambda}^\lambda : K^\lambda \rightarrow \Phi^\lambda(L_\lambda))$ un système projectif de source $K^\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ et de but le foncteur Φ^λ . La famille $\pi^{(\lambda)}$ est dite topologie projective sur \mathcal{K} et le couple $\overline{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}, \pi^{(\lambda)})$ est dit catégorie pro-topologique. Si \mathcal{X} est une catégorie quelconque, un préfaisceau sur \mathcal{K} à valeurs dans \mathcal{X} est un couple $(\overline{\mathcal{K}}, P)$, identifié à P , où P est un foncteur de \mathcal{K} dans \mathcal{X} . Un faisceau sur $\overline{\mathcal{K}}$ à valeurs dans \mathcal{X} est un préfaisceau $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{X}$ qui transforme tous les π^λ en limites projectives.

Bénabou montre tout d'abord que cette définition des faisceaux sur une catégorie pro-topologique coïncide avec la définition par Grothendieck des

faisceaux sur un site, puis que les faisceaux de \mathbf{T} -algèbres de \mathcal{X} s'identifient, à isomorphisme près, aux \mathbf{T} -algèbres de faisceaux, c'est-à-dire que l'on a un isomorphisme

$$\bar{\chi}(\bar{\mathcal{K}}, \mathbf{T}, \mathcal{X}) : \underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Faisc}(\bar{\mathcal{K}}, \mathcal{X})) \rightarrow \underline{Faisc}(\bar{\mathcal{K}}, \underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{X}))$$

Mais le point qui semble le plus important est la remarque suivante :

« La notion de faisceau, ainsi généralisée, contient celle de \mathbf{T} -algèbres, où \mathbf{T} est un type quelconque. En effet, on peut associer à \mathbf{T} une catégorie pro-topologique $\bar{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}, \pi^{(\Lambda)})$ telle que, pour toute catégorie à produits finis \mathcal{X} , $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{X})$ s'identifie canoniquement à $\underline{Faisc}(\mathcal{K}(\mathbf{T}), \mathcal{X})$. La catégorie \mathcal{K} est la catégorie sous-jacente au I -type \mathbf{T} . L'ensemble Λ est $M[\dots]$ et le système projectif de source λ et de but Φ^λ est défini par les projections canoniques $pr_\lambda^I : \lambda \rightarrow i_I$ données dans la structure de \mathbf{T} . » ([21], 58)

On voit ainsi apparaître formellement le rapprochement entre algèbre et faisceau, qui n'était présenté par Lawvere que comme une « analogie » :

« On voit de la même façon que certaines structures algébriques, où figurent des « opérations à un nombre infini de variables », s'interprètent comme des foncteurs qui commutent avec des produits infinis et rentrent par conséquent dans le formalisme des faisceaux.

En réalité, la plus grande partie des propriétés obtenues pour les catégories $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \mathcal{C})$ s'étend aux catégories de faisceaux sur une catégorie pro-topologique quelconque. » ([21], 59)

Il y a donc un lien étroit entre l'algébrisation et la faisceautisation, qui prennent la forme d'un processus commun⁸.

Présentations, types et algèbres ensemblistes

Le dernier chapitre place au cœur de ses analyses les relations entre les notions introduites jusqu'ici et les présentations des algèbres ensemblistes par générateurs et relations. Le premier résultat consiste ainsi à montrer que pour tout I -type \mathbf{T} , le foncteur d'oubli $\underline{Alg}(\mathbf{T}, \underline{Ens}) \rightarrow \underline{Ens}^I$ a un adjoint à gauche. La construction de cet adjoint proposée par Bénabou est originale dans la mesure où la \mathbf{T} -algèbre libre engendrée par une famille d'ensembles apparaît comme algèbre des constantes d'un autre I -type :

« Ce point de vue fait le lien entre la construction usuelle, comme quotient d'un ensemble de mots par une équivalence, et la notion de « diagramme de la réalisation d'un langage », essentielle dans la théorie des modèles. » ([21], 68)

8. Processus qui sera formalisé dans le cadre de la théorie des esquisses, au chapitre 5.

Le deuxième point important du chapitre concerne le passage d'un I -type à sa présentation par générateurs et relations : soit $E^{(I)}$ une famille d'ensembles, et $\widehat{E}^{(I)}$ la famille d'ensembles sous-jacente à la \mathbf{T} -algèbre libre engendrée par $E^{(I)}$. Une \mathbf{T} -relation d'indice i dans $(E^{(I)})$ est un couple $\rho = (\widehat{\epsilon}, \widehat{\epsilon}') \in \widehat{E}^i \times \widehat{E}^i$. Si $A : \mathbf{T} \rightarrow \underline{Ens}$ est une \mathbf{T} -algèbre et $\phi^{(I)} : \widehat{E}^{(I)} \rightarrow A^{(I)} \in \underline{Ens}^I$, on dit que ρ est satisfaite par $\phi^{(I)}$, si $\widehat{\phi}^i(\widehat{\epsilon}) = \widehat{\phi}^i(\widehat{\epsilon}')$. Une \mathbf{T} -présentation est un couple $\mathcal{P} = (E, \mathcal{R})$ d'une famille $E = E^{(I)}$ d'ensembles, et d'une famille $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{(I)}$, où $\mathcal{R}^i \subset \widehat{E}^i \times \widehat{E}^i$ pour $i \in I$. On peut généraliser cette définition de la façon suivante :

Définition 26 Une \mathbf{T} -présentation (généralisée) est un couple $\mathcal{P} = (E, \mathcal{R})$ dans lequel :

1. $E = E^{(K)}$ est une K -famille d'ensembles, avec $K \subset M \times I$;
2. \mathcal{R} est un ensemble de relations du schéma $\Sigma(\mathbf{T} \sqcup E^{(K)})$ sous-jacent à $\mathbf{T} \sqcup E^{(K)}$.

Ainsi par exemple les présentations ordinaires s'identifient aux présentations généralisées pour lesquelles $K = \{0\} \times I$, et \mathcal{R} est homogène de degré 0.

Mais la notion centrale de ce dernier chapitre est sans doute celle de méta-type, dont la définition formelle et précise nécessite de reprendre toutes les notions introduites dans le premier chapitre. Soit I un ensemble. On pose $\tilde{I} = M \times I$; les éléments de \tilde{I} sont notés $\tilde{i} = (\mu, i)$, $\tilde{i}' = (\mu', i')$, etc. Le monoïde libre engendré par \tilde{I} est noté \tilde{M} . On définit alors un \tilde{I} -schéma d'opérations $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Omega}_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}}$ de la façon suivante :

1. supposons $\tilde{\mu} = \tilde{i}_0 \tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_p \neq 0$, où $\tilde{i}_k = (\mu_k, i_k)$ (avec $k = 0, 1, \dots, p$) et soit $\tilde{i} = (\mu, i)$. On prend $\tilde{\Omega}_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}} = \emptyset$, sauf si $i = i_0$ ou bien $\mu_1 = \dots = \mu_p = \mu$ ou bien $i_1 \dots i_p = \mu_p = \mu_0$, auquel cas $\tilde{\Omega}_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}}$ est réduit à un seul élément noté $\theta_{\mu_0 \mu}^i$.
2. si $\tilde{\mu} = 0$ et $\tilde{i} = (\mu, i) = (i^1 \dots i^n, i)$, on prend pour $\tilde{\Omega}_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}}$ un ensemble en correspondance biunivoque avec l'ensemble des entiers k tels que $i^k = i$. L'élément de $\tilde{\Omega}_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}}$ qui correspond à un entier k est noté π_{μ}^k .

Soit $\Sigma = \Omega_{\mu}^i$ un I -schéma, $T = T_{\nu \mu}^i$ une multiplication sur Σ et $p = (pr_{\mu}^k) : S \rightarrow \Sigma$ un système de projections dans Σ . On associe à ces données une préalgèbre $P = (X^{\tilde{I}}, \phi^{(\tilde{\Omega})})$ de schéma $\tilde{\Sigma}$, dans Ens , de la façon suivante :

1. Si $\tilde{i} = (\mu, i) \in \tilde{I}$, alors $X^{\tilde{i}} = \Omega_{\mu}^i$;
2. soit $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}}$. Si $\tilde{\mu} \neq 0$, alors $\tilde{\omega}$ est de la forme $\theta_{\mu_0 \mu}^i$ et le triple (i, μ_0, μ) est tel que l'on ait une application

$$T_{\mu_0 \mu}^i : \Omega_{\mu_0}^{i_0} \times \Omega_{\mu}^{i_1} \times \dots \times \Omega_{\mu}^{i_n} = X^{i_0} \times \dots \times X^{i_n} = X^{\tilde{\mu}} \rightarrow X^{\tilde{i}} = \Omega_{\mu}^i$$

on pose alors $\phi^{\tilde{\omega}} = T_{\mu_0 \mu}^i$.

3. De même si $\tilde{\omega} = \pi_\mu^k$, on pose $\phi^{\tilde{\omega}} = pr_\mu^k$ qui est défini.

On vérifie de cette manière que l'associativité de T et le fait que T est élément neutre s'expriment par des relations dans $\tilde{\Sigma}$. Soit $\tilde{\mathcal{A}}$ l'ensemble de ces relations et $\tilde{\mathcal{S}} = (\tilde{\Sigma}, \tilde{\mathcal{A}})$. Le type $\mathbf{T}(\tilde{\mathcal{S}})$ qui ne dépend que de l'ensemble I est appelé le méta-type de I -types et noté $\mathbf{M}(I)$.

On a lors le théorème suivant :

Théorème 8 *Pour tout ensemble I , il existe un type $\mathbf{M}(I)$ sur $M \times I$ termes tel que les catégories $\underline{Typ}(I)$ et $\underline{Alg}(\mathbf{M}(I), \text{Ens})$ sont équivalentes.*

Ce résultat a des conséquences importantes, que souligne Bénabou :

« Les espèces de structures apparaissent comme des présentations des types, considérés comme algèbres de type $\mathbf{M}(I)$. De façon précise, le type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$ associé à une espèce \mathcal{S} est la $\mathbf{M}(I)$ -algèbre ayant pour générateurs les opérations de \mathcal{S} et pour relations les axiomes de \mathcal{S} . Ce qui montre à nouveau que le type est le « vrai » objet mathématique. » ([21], 6).

On voit donc ici Bénabou insister sur le caractère central, dans le développement général de la connaissance mathématique, de la notion de type. Il indique par ailleurs :

« cette interprétation présente les avantages suivants :

1. Elle permet de remplacer les notions métamathématiques de « lois de composition » et « axiomes » d'une espèce de structures algébriques sur I -termes par les notions mathématiques, et particulièrement simples, de « générateurs » et « relations » d'une algèbre (d'un type fixe $\mathbf{M}(I)$ ne dépendant que de I).

Les théories algébriques deviennent elles-mêmes de cette façon des ensembles munis de structures algébriques, très simples, et justiciables des théorèmes généraux de l'algèbre [...].

2. Elle justifie, s'il en était encore besoin, le passage de l'espèce \mathcal{S} au type $\mathbf{T}(\mathcal{S})$: l'espèce \mathcal{S} correspond dans la catégorie des $\mathbf{M}(I)$ -algèbres à une présentation de l'algèbre $\mathbf{T}(\mathcal{S})$. La notion de présentation n'est pas intrinsèque, et en particulier ne se prête pas bien à la « comparaison » de deux théories, alors que le type est l'« invariant » commun à toutes les espèces de structures algébriques équivalentes. » ([21], 79)

3.

La première conséquence de cette « interprétation » met en lumière un point que nous avons déjà souligné à propos de la thèse de Lawvere : on voit en effet apparaître dans le travail de Bénabou une reprise, dans le contexte mathématique de la théorie des catégories, de la méthode axiomatique, par

un rapprochement avec la méthode de définition « par générateurs et relations », ce qui permet dans le même temps de voir une théorie formelle comme un objet mathématique, c'est-à-dire comme un modèle d'un certain type de structure algébrique. Une notion de nature syntaxique peut donc être elle-même considérée comme la sémantique d'une autre caractérisation formelle, ce qui, en dernière analyse, met en évidence le caractère relatif de la distinction entre le plan de la syntaxe et celui de la sémantique.

L'invariant et l'intrinsèque

La seconde conséquence nous semble appeler davantage de commentaires. La notion d'invariant des présentations était également présente dans la thèse de Lawvere, mais sans être reprise ni développée formellement ; ce que démontre au contraire Bénabou : le type est bien l'invariant des espèces de structures, dans le même sens que le groupe fondamental est un invariant des espaces topologiques. Cependant, Bénabou associe ici cette notion d'invariance à une autre notion, celle de l'intrinsèque, au moins négativement, lorsqu'il précise que « la notion de présentation n'est pas intrinsèque ». On retrouve par ailleurs dans l'œuvre de Bénabou, une remarque similaire, où il développe la même idée :

« La définition de Birkhoff des structures algébriques au moyen de familles de lois de composition « finitaires » internes partout définies satisfaisant des relations universelles, ainsi que ses généralisations au cas d'opérations infinies (SLOMINSKI) ou externes (HIGGINS), n'est pas intrinsèque : la structure de groupe, par exemple, peut être définie par une opération ternaire satisfaisant les axiomes appropriés. Outre le manque d'élégance, ce « défaut d'invariance » présente les inconvénients suivants : impossibilité de comparer deux théories algébriques, d'étudier la catégorie des théories algébriques, de définir de manière générale les structures algébriques sur les objets d'une catégorie, etc. » ([29], 14-01)

On voit donc se dessiner dans les travaux de Bénabou une recherche non seulement d'un invariant des présentations, mais également d'une caractérisation intrinsèque des concepts structurels. Bénabou nous semble ainsi effectuer un pas supplémentaire en direction des concepts structurels, dépassant un structuralisme de l'invariant en un structuralisme de l'intrinsèque.

Cette analyse est confirmée par la présentation que fait Charles Ehresmann, directeur de thèse de Bénabou, des travaux de son étudiant :

« we define a structure of kind p over H^\bullet as a neofunctor F from U^\bullet toward H^\bullet satisfying similar properties. Such a definition will result from the section 1. It admits as special cases the definition of a structure of monoid on an object of H^\bullet given in [12] , and its refinements for other elementary algebraic structures (such as

groups in [11], and the general intrinsic notion in [9] of algebras of type T over H^\bullet . » ([59], iii)

La référence [9] correspond ici aux travaux de Bénabou. On trouve par ailleurs une analyse semblable⁹ dans l'article de Joyal et Reyes, « Forcing and generic models in categorical logic » :

« A theory is a category with certain operations (defined up to isomorphism) [...]. The notion of theory is thus « intrinsic », i.e. independent of a particular presentation via formal languages and axiomatic systems. In this sense, categorical logic may be viewed as « synthetic » or « intrinsic » logic by opposition to the usual « analytic » « formal » logic. » [118]

La question se pose alors de comprendre en quel sens un type (ou une théorie de Lawvere) peuvent être compris comme une caractérisation « intrinsèque » des concepts structurels.

On peut tout d'abord rappeler le sens de la distinction entre l'intrinsèque et l'extrinsèque, telle que la présente G. Roncaglia [220] :

« An intrinsic denomination of a thing is a reference to it through some intrinsic and real features of it, the loss or variation of which would determine a real mutation in the thing itself. To refer to a man as 'animal', i.e. by means of essential features, would be a typical case of intrinsic denomination. Intrinsic denomination may, however, also arise from internal accidents, for example when we refer to a swan as white. We have extrinsic denomination, on the contrary, when we refer to a thing, rather than through its inherent forms or features, by means of some relation or *habitus* it has toward something else – e.g. toward the perceiving subject. A purely extrinsic denomination does not really affect the thing denominated, and may be lost without any intrinsic mutation of it. In this way, we say of something, e.g. a wall, that is 'seen' or 'known'. » ([220], 208)

Cette analyse de la distinction entre intrinsèque et extrinsèque¹⁰ éclaire les remarques de Bénabou. En effet, en précisant que « la notion de présentation n'est pas intrinsèque », ce dernier insiste sur le fait qu'une telle caractérisation par l'espèce de structure reste comme extérieure au concept caractérisé, qui se trouve alors déterminé dans et par sa relation à l'activité mathématicienne, comme acte de connaissance. L'intrinsèque au contraire

9. Nous laissons de côté ici l'usage de la distinction entre « synthétique » et « analytique ».

10. En réalité, la notion d'intrinsécité fait l'objet de nombreux débats du côté de la métaphysique analytique contemporaine, qui sont résumés par D. Marshall et B. Weatherston [174]. Il serait pertinent d'analyser quelle notion d'intrinsécité est réellement en jeu dans les différentes branches des mathématiques, mais cela dépasse le cadre du présent travail de recherche.

serait lié au concept en lui-même, indépendamment de toute relation au sujet connaissant. Il faut noter cependant que Roncaglia met en évidence une différence entre l'intrinsèque et l'essentiel, puisqu'un accident peut être intrinsèque. Ainsi, si le type revendique une forme d'intrinsécité, de caractérisation en lui-même du concept mathématique, indépendamment de sa relation au sujet connaissant, il ne capture pas pour autant l'essence du concept.

On pourra souligner par ailleurs, avec F. Ferro, que la recherche de l'intrinsèque a partie liée avec une position philosophique réaliste :

« Le problème des propriétés intrinsèques se retrouve non seulement comme problème de la métaphysique mais même comme un élément constitutif de la métaphysique réaliste qui toujours cherche à connaître la réalité intrinsèque des choses indépendamment de la relation au sujet connaissant. » ([77], 502)

Et il précise en note de bas de page :

« C'est en ces termes de propriétés intrinsèques que Hilary Putnam pose le problème du réalisme métaphysique. »

La volonté de dépasser la recherche de l'invariant par une recherche de l'intrinsèque n'apparaît donc pas neutre épistémologiquement, et semble d'ores-et-déjà nous engager sur la voie d'une forme de réalisme¹¹. Ainsi associer la théorie des catégories à une recherche de l'intrinsèque nous conduirait à mettre en évidence certains présupposés philosophiques de l'approche catégorique des concepts structurels.

Un tel rapprochement entre théorie des catégories et recherche de l'intrinsèque se retrouve par ailleurs dans les descriptions que fait Grothendieck de son activité mathématique, dans *Récoltes et Semailles*, et qui font écho à ses analyses de Bénabou. Ainsi durant ses années universitaires, Grothendieck reproche à ses professeurs de s'en tenir à

« des recettes de calcul à tout venant, pour des longueurs, des aires et des volumes, à coups d'intégrales simples, doubles, triples [...], la question d'en donner une définition intrinsèque ne semblait pas se poser, pas plus pour mes professeurs que pour les auteurs des manuels. » ([92], 20)

Cette même idée se retrouve à plusieurs reprises sous la plume de Grothendieck. Ainsi, par exemple :

« s'il y a une chose en mathématique qui [...] me fascine plus que toute autre, ce n'est ni « le nombre », ni « la grandeur », mais toujours la forme. Et parmi les mille et un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre [...], c'est la structure cachée dans les choses mathématiques.

11. Nous reviendrons sur ce point dans le sixième et dernier chapitre.

La structure d'une chose n'est nullement une chose que nous puissions « inventer » [...]. Ainsi sommes-nous amenés à constamment « inventer » le langage apte à exprimer de plus en plus finement la structure intime de la chose mathématique [...]. Ce qui fait la qualité de l'inventivité et de l'imagination du chercheur, c'est la qualité de son attention, à l'écoute de la voix des choses. Car les choses de l'Univers ne se lassent jamais de parler d'elles-mêmes et de se révéler, à celui qui se soucie d'entendre. » ([92], 52)

Ainsi l'insistance de Grothendieck sur « l'humble voix des choses » ([92], 59), « sous la dictée des choses elles-mêmes » ([92], 688) nous semble aller dans le même sens que cette recherche de l'intrinsèque que l'on peut voir à l'œuvre dans les travaux de Bénabou, à travers la notion de type.

3.3.2 Les travaux de Keane

Mais les travaux de Bénabou, comme ceux de Lawvere, se heurtent aux limites imposées par une compréhension restreinte de ce qui peut être considéré comme algébrique. Comme le remarque en effet Bénabou :

« La structure de corps, ou les structures algébriques dans lesquelles certaines opérations sont partiellement définies, ne rentrent pas dans ce formalisme. Ce fait est à rapprocher des remarques suivantes :

1. Un produit de corps n'est pas un corps.
2. si \mathcal{C} est une catégorie à produits finis, il n'y a pas de bonne définition d'une structure de corps sur un objet X de \mathcal{C} . » ([21], 29)

La question s'est donc rapidement posée de la possibilité d'un élargissement de la sémantique fonctorielle au-delà du cadre algébrique

En 1975, O. Keane [119] propose une extension du programme de Lawvere au delà du contexte algébrique, en caractérisant les catégories dont les objets sont des modèles de théories universelles de Horn et dont les applications sont les homomorphismes de modèles.

Une théorie universelle de Horn est une théorie du premier ordre dont les axiomes sont de la forme A ou $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$ où les A, A_1, \dots, A_n, B sont des formules atomiques.

On trouve parmi cette classe de catégories

- la catégorie des ordres partiels,
- la catégorie des groupes sans torsion,
- la catégorie des théories algébriques.

Keane définit donc les « théories de Horn abstraites » de la façon suivante :

« By an abstract Horn theory we mean a small skeletal finitely complete category \mathcal{I} with a cogenerator M such that :

1. Every object in \mathcal{I} can be embedded in a finite power of M so that M looks injective with respect to the embedding.
2. The maps which make M look injective are closed under pullbacks and products. » ([119], 17)

3.4 Vers la logique classique du premier ordre

3.4.1 Les théories élémentaires de Lawvere

Dès 1965 en réalité, Lawvere propose une définition d'un équivalent, pour la logique classique du premier ordre, des théories algébriques, dans [138]. Il reformule ensuite dans [141] cette définition de la façon suivante :

Définition 27 *Une théorie élémentaire \mathcal{T} est une petite catégorie avec produits finis, dont le produit vide 1, satisfaisant :*

1. *il y a un objet distingué B avec deux morphismes $\perp : 1 \rightarrow B$ et $\top : 1 \rightarrow B$ tels que pour tout objet X , les morphismes $\langle 1_X, \top_X \rangle : X \rightarrow X \times B$ et $\langle 1_X, \perp_X \rangle : X \rightarrow X \times B$, où $\top_X : X \rightarrow 1 \rightarrow B$ et $\perp_X : X \rightarrow 1 \rightarrow B$ constituent un coproduit de X avec lui-même, i.e. $X \times B = X + X$. Conséquence : pour chaque objet X de \mathcal{T} , $\text{Hom}(X, B)$ est un algèbre de Boole, dont la relation d'ordre est noté \vdash_X ;*
2. *pour tout $f : X \rightarrow Y$ et $\phi : X \rightarrow B$, il y a un morphisme $\exists_f[\phi] : Y \rightarrow B$ tel que pour tout $\psi : Y \rightarrow B$, $\exists_f[\phi] \vdash_Y \psi$ ssi $\phi \vdash_X \psi \circ f$;*
3. *il y a un second objet distingué A de \mathcal{T} tel que chaque objet X de \mathcal{T} a une représentation unique de la forme $A^n \times B^k$, où $n, k \geq 0$.*

Les morphismes $A^n \rightarrow A$ sont les termes n -aires, les morphismes $A^n \rightarrow B$ sont les formules à n variables libres et $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(1, B)$ est l'ensemble des énoncés de \mathcal{T} .

Définition 28 *Un modèle de \mathcal{T} est un foncteur préservant les produits $\mathcal{M} : \mathcal{T} \rightarrow \text{Ens}$:*

1. *qui envoie B sur un ensemble à deux éléments,*
2. *qui envoie chaque $\exists_f[\phi]$ sur l'image de ϕ sous f , i.e. si $f : X \rightarrow Y$ et $\phi : X \rightarrow B$ et $\mathcal{M}(B)$ est identifié à l'ensemble à deux éléments, alors un élément $y \in \mathcal{M}(Y)$ est dans $\mathcal{M}(\exists_f[\phi])^{-1}(1)$ ssi il existe $x \in \mathcal{M}(\phi)^{-1}(1)$ tel que $\mathcal{M}(f)(x) = y$.*

$\mathcal{M}(A)$ est l'univers du modèle.

Dans le même article, Lawvere mentionne l'existence d'un théorème de complétude, mais sans en donner l'énoncé. Il ne donne que les trois étapes principales de la démonstration. On notera par ailleurs que cette définition fait intervenir un objet distingué, noté B . Comme le remarquent J.-P. Marquis et G. Reyes :

« This object, which will be called the *object of truth-values* [...], will become pivotal in his characterization of the notion of elementary topos in 1969. » ([173], 23)

3.4.2 Les travaux sur les théories élémentaires

La notion de théorie élémentaire, telle qu'elle est définie par Lawvere, n'a finalement été que peu développée. Et ce tout d'abord par Aubert Daigneault, dans son article « Lawvere's elementary theories and polyadic and cylindric algebras » [44]. La notion d'algèbre polyadique associée à une théorie du premier ordre est due à P. Halmos, celle d'algèbre cylindrique à Tarski (entre autres).

L'article de Daigneault présente deux résultats importants :

1. la catégorie \mathcal{T} des théories élémentaires et la catégorie \mathcal{P} dont les objets sont des paires (P, D) où P est un algèbre polyadique et D un ensemble d'opérations de P admissibles (en un certain sens) sont équivalentes, si on ajoute un axiome à la définition d'une théorie pour éliminer les répétitions parmi les morphismes $A^n \rightarrow A$;
2. le foncteur sémantique $Th \rightarrow Mod^{Ens}(Th)$ et le foncteur qui associe à une paire (P, D) la catégorie des représentations 2-valuées sont équivalents. On a donc une correspondance biunivoque entre les modèles de Th et les représentations¹² de (P, D) .

Daigneault propose également une formulation du théorème de complétude dans le contexte catégorique :

Théorème 9 *Pour toute théorie \mathcal{T} et $\phi : 1 \rightarrow L$ dans \mathcal{T} tel que $\phi \neq \perp$, il existe un modèle $\mathcal{M} \models_{\phi}$ de \mathcal{T} tel que $\mathcal{M}_{\phi}(\phi) = \top$.*

Daigneault précise ainsi le rapprochement entre le domaine des théories algébriques et celui des algèbres polyadique :

« the representation theorem for polyadic algebras [...] takes lieu of 'completeness theorem' for this approach of first order logic. » [44]

L'article de Joyal « Polyadic Spaces and Elementary Theories » de 1971 [117] montre par ailleurs qu'à toute théorie élémentaire peut être associée « canoniquement » un espace polyadique, et réciproquement. J.-P. Marquis et G. Reyes notent, à propos de cet article :

« It is asserted that under this correspondance, the two concepts of model coincide and that classical theorems of logic are interpreted and proven. We are not told which classical theorems of logic are interpreted and proven. Finally, and this is an important remark, it is claimed, without any detail, that polyadic spaces arise naturally in algebraic geometry. » ([173], 50)

12. Nous reviendrons sur ce résultat à la fin du chapitre 4.

On voit ainsi apparaître, dans le travail de Joyal, les prémices d'un rapprochement entre logique et géométrie algébrique, avant même l'introduction dans le paysage de la notion de topos.

3.4.3 Les travaux de Volger

Mais les développements les plus importants des concepts introduits par Lawvere sont dus à Hugo Volger, dans les articles « Completeness theorem for logical categories » [246] et « Logical categories, semantical categories and topoi » [247]. Le premier de ces articles propose en effet une preuve, inspirée par les remarques de Lawvere, purement catégorique, du théorème de complétude, en suivant par ailleurs les lignes de la preuve « traditionnelle » de Henkin. Volger se place cependant dans un cadre plus large que celui des théories élémentaires : celui des catégories logiques, permettant l'extension à la logique d'ordre supérieur. En outre, Volger montre de façon purement catégorique l'équivalence entre le théorème d'interpolation de Craig, le lemme de consistance de Robinson et le théorème d'amalgamation de Daigneault.

Définition 29 Une catégorie \mathcal{C} est dite logique si elle satisfait les conditions suivantes :

1. \mathcal{C} a les produits finis et un objet terminal 1 ;
2. \mathcal{C} a un objet spécifié Ω qui est un objet algèbre de Boole, i.e. il y a des morphismes $0, 1 : 1 \rightarrow \Omega$, $\sim : \Omega \rightarrow \Omega$ et $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ qui satisfont les identités d'une algèbre de Boole. Par conséquent, $\mathcal{C}(X, \Omega)$ est un algèbre de Boole pour tout X ;
3. pour tout $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} , il existe un foncteur $\exists_f : \mathcal{C}(X, \Omega) \rightarrow \mathcal{C}(Y, \Omega)$ adjoint à gauche de $\mathcal{C}(f, \Omega) : \mathcal{C}(Y, \Omega) \rightarrow \mathcal{C}(X, \Omega)$;
4. — étant donné le pullback

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(X,f)} & X \times Y \\ f \downarrow & & \downarrow f \times Y \\ Y & \xrightarrow{\Delta_Y} & X \times Y \end{array}$$

alors on a $\exists_{(X,f)}[1_Y f] = \exists_{\Delta_Y}[1_Y](f \times Y)$
— étant donné le pullback

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{\pi_2} & Z \\ 1_X \times g \downarrow & & \downarrow g \\ X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \end{array}$$

alors on a $\exists_{\pi_Y}[\phi]g = \exists_{\pi_2}[\phi](X \times g)$

5. — soit $e_Y = \exists_{\Delta_Y}[1_Y]$ l'égalité sur Y . Si $e_Y(f_1, f_2) = 1_X$ alors $f_1 = f_2$;
 — $e_\Omega = \Leftrightarrow$ où \Leftrightarrow est la bi-implication.

Définition 30 Soit \mathcal{C} une catégorie logique. Un foncteur logique $\mathcal{M} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est un \mathcal{C} -modèle.

De là la formulation d'un théorème de complétude, qui selon Volger :

« The completeness theorem states that the concept of an elementary theory is the abstraction of its models. » ([246])

Théorème 10 Soit \mathcal{C} une petite catégorie logique qui est :

- consistante, ie $0_x \neq 1_X$,
 - « nice », ie $\exists !_X[1_X] = 1$ pour tout $X \in \text{Objet}(\mathcal{C})$,
1. pour toute paire de morphismes $f, g : X \rightarrow Y$, il existe un \mathcal{C} -modèle \mathcal{M} tel que $\mathcal{M}(f) \neq \mathcal{M}(g)$;
 2. il existe un \mathcal{C} -modèle \mathcal{M} tel que $\text{card}(\mathcal{M}(X)) \leq \text{card}(\mathcal{C})$ pour tout $X \in \text{Objet}(\mathcal{C})$

La preuve par Volger de ce théorème de complétude est rigoureusement parallèle à celle de Henkin : il s'agit de construire pour \mathcal{C} une extension qui soit maximale consistante et riche. Comme pour la logique du premier ordre ordinaire, la construction d'une extension riche de \mathcal{C} implique une extension $\mathcal{C}[K]$ de \mathcal{C} par un ensemble de constantes K , c'est-à-dire de morphismes de la forme $1 \rightarrow X$ avec $X \in \text{Objet}(\mathcal{C})$. Cette extension doit être conservative, i.e. le foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[K]$ doit être fidèle.

Mais les travaux de Volger n'ont pas été développés par ailleurs. Selon Marquis et Reyes dans « History of categorical logic », cela tient essentiellement à l'existence de l'objet des valeurs de vérité :

« The object of truth-values will constitute an *obstacle* for the characterization of first-order logic. » ([173], 23)

Ils soulignent en effet que, du point de vue d'André Joyal et de Gonzalo Reyes¹³ :

« Volger's mistake had been to include the object Ω in the data of a logical category. They came to the conclusion that this object does not belong to first-order logic, neither in its syntax nor in its semantics. » ([173], 52)

Cette remarque nous semble importante car elle met l'accent sur le fait que la sémantique fonctorielle héritée de Lawvere vient brouiller, en quelque sorte, la distinction entre le plan de la syntaxe et celui de la sémantique, comme en témoigne l'introduction de cet objet distingué Ω .

13. Point de vue qui sera développé au chapitre 4 du présent travail de recherche : « While Volger was following Lawvere's path and suggestions, André Joyal together with Gonzalo Reyes were looking at categorical logic from a slightly different perspective. » ([173], 43)

3.4.4 Les travaux de Roisin

On trouve également un développement des notions élaborées par Lawvere dans les travaux de Jean-Roger Roisin, dans sa thèse [219] et son article [218] « On functorializing usual first-order model theory »¹⁴. Il est important de souligner que les travaux de Roisin s'inscrivent dans le prolongement direct des recherches de Lawvere d'un invariant des présentations :

« A big stumbling block for earlier attempts to functorialize first-order logic has been the notion of morphism between models. Indeed, if one follows the ideas of the so successful functorial treatment of universal algebra, one is led to think that there is a preferred notion of morphism, recaptured by that of natural transformation between functors that stand for models. But in model theory, one is used to considering many notions of morphisms : besides that of elementary extension and that of extension one also uses often 1-extensions and in fact, for some problems, a denumerable list of intermediates (to be recalled below). Reflecting on that one sees that a suitable categorical formalization should at least allow a distinction between open (i.e. quantifierless) and other formulas, and even permit to speak of the quantification degree (i.e. the number of blocks of quantifiers in front of the prenex form – in classical logic) of a formula. We show that this can be done without abandoning the idea that a theory should be in a sense invariant with respect to various presentations by means of particular atomic formulas and particular axioms. Meanwhile we show that one can meet some other requirements for a categorization of first-order logic : possibility of putting types (complete, existential or quantifierless) into the game, of speaking of the set of universal consequences of a given theory or of placing purely algebraic theories within the general framework. » ([218], 612)

Roisin reproche ainsi à Volger, par exemple, de ne pouvoir décrire que l'enrichissement d'une théorie par le diagramme élémentaire d'un modèle, et non le diagramme en général. Roisin est ainsi conduit à proposer sa propre définition d'une théorie élémentaire :

Définition 31 *Une théorie élémentaire est un triplet (A, T^0, t) où :*

- A est une théorie algébrique au sens de Lawvere ;
- T^0 est une théorie relationnelle à A -opérations ;
- t est un renforcement de QT^0 déterminant une théorie T quantifiée sur T^0 .

¹⁴. Je remercie vivement M. Roisin d'avoir mis à ma disposition un exemplaire de sa thèse, et de toutes ses indications

L'intérêt des travaux de Roisin est qu'il s'inspire fortement des résultats obtenus par Bénabou entre 1972 et 1973 sur les catégories déductives, concernant notamment la dissociation de la partie opératoire et la partie relationnelle d'une théorie, et qu'il tire également parti de la théorie catégorique des faisceaux, une théorie relationnelle étant définie comme un préfaisceau d'algèbre de Boole sur \mathbb{N} . On peut alors développer dans ce cadre et de façon naturelle des notions essentielles de la théorie des modèles, comme la méthode des diagrammes, la notion de model-complétude et un théorème d'omission des types.

Si un des principaux avantages de ce formalisme est de se passer de l'objet distingué Ω , et dans le même temps de se rapprocher de la théorie des modèles usuelle, il repose néanmoins sur une machinerie catégorique assez lourde et fait perdre la possibilité de faire varier la catégorie d'arrivée, les modèles des théories élémentaires ne pouvant être dans ce cadre qu'ensemblistes.

3.5 Eléments d'analyse épistémologique

3.5.1 Théories et modèles : trois analogies mathématiques

Pour comprendre la relation entre la théorie et ses modèles qu'introduit la sémantique fonctorielle, et qui fait l'économie des notions de vérité ou de satisfaction, il est possible de la rapprocher d'autres méthodes de description des structures, issues d'autres domaines mathématiques.

Anneaux et modules

La relation sémantique entre théorie et modèle n'est pas comprise dans ce cadre en termes d'interprétation ou de satisfaction. La détermination des variétés algébriques se fait donc selon une modalité échappant au cadre modèle-théorique. Il est possible de comprendre cette détermination en suivant une analogie développée par G. Wraith [255] :

« Giving a ring R with unit (not necessarily commutative) we may consider the category of its left-modules, R^b . Since an R -module is simply an abelian group with the elements of R acting as unary operators on it, it is clear that R -modules are an algebraic system of the kind we want to consider, i.e. they are defined by operations and laws. The algebraic theory of R -modules is uniquely determined by R and vice-versa. This suggests a generalization whereby we think of an algebraic theory as a sort of generalized ring, and its algebras as generalized modules. It turns out that this analogy is exceedingly fruitful. A good many definitions and theorems valid for rings/modules carry over to theories/algebras. » ([?], 3)

Wraith part ainsi de la définition usuelle des modules : soit \mathcal{R} un anneau avec unité, non nécessairement commutatif, $\mathcal{R}\mathbf{b}$ la catégorie de ses modules à gauche. Les \mathcal{R} -modules sont les groupes abéliens avec les éléments de \mathcal{R} agissant comme opérations unaires sur lui. Par conséquent la théorie algébrique des \mathcal{R} -modules est uniquement déterminée par \mathcal{R} et réciproquement. On peut alors généraliser cette construction de la façon suivante :

- la théorie algébrique devient un anneau généralisé,
- l'algèbre devient un module généralisé.

Cette analogie met alors en lumière la dimension opératoire de la théorie algébrique : les opérations se trouvent dissociées des individus sur lesquels elles portent, à la manière de l'action d'un anneau sur le groupe abélien, les éléments de l'anneau étant vus comme des « opérations unaires ». On retrouve ainsi la stratégie mis en œuvre par l'algèbre universelle, dissociant les opérations (sous le forme de clone par exemple) de leur domaine d'application.

Wraith insiste par ailleurs sur la dimension heuristique de cette analogie :

« a good many definitions and theorems valid for ring/modules carry over to theories/algebras. »

On peut citer comme exemple d'une telle application la définition d'une équivalence de Morita entre théories : deux théories \mathcal{T} et \mathcal{T}' sont Morita-équivalentes si leur catégorie de modèles respectives sont équivalentes. Il devient ainsi possible d'étudier les propriétés des théories algébriques conservées par Morita-équivalence¹⁵.

Mais comment faut-il comprendre le rapport entre un anneau et ses modules ? Anderson et Fuller, dans *Rings and categories of modules*, décrivent ainsi cette articulation :

« Rings admit a valuable and natural representation theory, analogous to permutation representation theory of groups. As we shall see, each ring admits a vaste horde of representation as an endomorphism ring of an abelian group. Each of these representations is called a *module*. A substantial amount of information about a ring can be learned from a study of the class of modules it admits. » ([5], 10)

On peut tirer de cette description plusieurs enseignements, concernant l'articulation de la théorie et de ses modèles : d'une part la définition des modules suppose l'action d'un anneau sur un groupe, c'est-à-dire une homogénéité entre la théorie et ses modèles ; d'autre part, le rapport de la théorie à ses modèles peut alors être pensé comme une relation de représentation¹⁶ ; enfin la classe des modèles nous renseigne sur la théorie, ce qui nous semble faire clairement écho au projet de Lawvere de définir une procédure permettant de retrouver la théorie à partir de la classe de ses modèles.

15. La relation de Morita-équivalence sera reprise et développée au chapitre 4.

16. Voir fin du chapitre 4.

Les objets semi-simpliciaux

Lorsque Lawvere définit une algèbre de type A comme un foncteur de A dans Ens satisfaisant certaines conditions, une autre analogie se présente pour éclairer cette définition qui, si elle n'est pas explicitée par Lawvere dans sa thèse, apparaît néanmoins dans une des références de la bibliographie : l'ouvrage de Godement *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* [85]. On trouve en effet, au §2 de l'Appendice consacré aux « résolutions simpliciales standard », la définition d'un « objet semi-simplicial » dans une catégorie quelconque :

Définition 32 Soit Δ la catégorie suivante :

- les objets de Δ sont les « simplexes types » Δ_n , où Δ_n est l'ensemble des entiers rationnels compris entre 0 et n ,
- $Hom(\Delta_p, \Delta_q)$ est l'ensemble des applications croissantes (au sens large) de Δ_p dans Δ_q .

Etant donnée une catégorie quelconque \mathcal{C} , un objet semi-simplicial de \mathcal{C} sera un foncteur covariant $F_* : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$.

A partir de cette définition, Godement définit la notion de simplexes singuliers et d'opérateurs de face et de dégénérescence.

Ce rapprochement ouvre plusieurs pistes

- d'une part, il permet de voir la catégorie-contexte (Ens dans la thèse de la Lawvere) comme un espace que la théorie algébrique viendrait structurer, de la même façon qu'un simplexe singulier viendrait « découper » une portion de l'espace, sans pour autant être une partie de cet espace,
- d'autre part, Godement propose cette définition dans l'Appendice de son ouvrage, qui vise à définir les « constructions fondamentales ». Or il se trouve que ces « constructions fondamentales » sont la première formulation de ce qui deviendra par la suite les monades, dont la proximité avec les théories algébriques du côté de l'algèbre, sera rapidement mis en évidence,
- enfin, Godement applique dans l'Appendice sa définition dans un cas particulier, en remplaçant la catégorie quelconque \mathcal{C} par la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace donné X .

Or c'est précisément en s'appuyant sur la théorie des Faisceaux que Lawvere, dans sa thèse, explicite certains de ses résultats.

Algèbres et faisceaux

La distinction entre algèbres et préalgèbres constitue en effet ce que Lawvere présente comme « une certaine analogie avec la théorie des faisceaux », plus précisément :

« Our 'prealgebras' of a given type form a category of unrestricted functors, whereas 'algebras' are prealgebras which commute with a specified class of inverse limit ». [140]

Cette analogie établit ainsi un lien entre le travail de Lawvere dans le cadre de l'algèbre universelle et les concepts élaborés par une approche catégorique de la théorie des faisceaux. Cela apparaît d'autant plus clairement à travers la notion d'« algèbre engendré par une préalgèbre », au cœur du théorème 1 du chapitre IV :

Proposition 9 *Si \mathcal{A} est une théorie algébrique, l'inclusion $i : \text{Mod}(\mathcal{A}, \text{Ens}) \rightarrow \text{Ens}^{\mathcal{A}}$ des algèbres dans les pré-algèbres admet un adjoint à gauche.*

Cette proposition peut apparaître comme le pendant algébrique du théorème du faisceau associé. Parmi les références explicites de Lawvere dans sa thèse, il est possible de rapprocher cette analogie de la remarque 1.2.3 du chapitre II de l'ouvrage de Godement *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* [85] :

« La démonstration du Théorème 1.2.1 prouve que tout *préfaisceau* d'ensembles \mathcal{F} définit canoniquement un espace étalé dans X , i.e., un *faisceau* $\tilde{\mathcal{F}}$ d'ensembles de base X ; on dit que c'est le *faisceau engendré par \mathcal{F}* ; on notera qu'on a un homomorphisme canonique $\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ de préfaisceaux. » ([85], 112)

La terminologie retenue par Lawvere (« the algebra engendered by a pre-algebra ») peut appuyer un tel rapprochement. Par ailleurs la seconde référence de Lawvere sur cette question, à savoir l'article de J.W. Gray [89], propose une démonstration de l'existence d'un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux¹⁷. Plus exactement :

« there is a functor R from presheaves to sheaves which has the inclusion functor of sheaves into presheaves as a right adjoint. Equivalently, there is a natural transformation $r_F : F \rightarrow R(F)$ such that if $\phi : F \rightarrow G$, where G is a sheaf, then there is a unique $\phi' : R(F) \rightarrow G$ with $\phi' \circ r_F = \phi$. » ([89], 1)

C'est l'équivalent algébrique de cette dernière formulation que prouve Lawvere, en démontrant l'existence de la transformation naturelle considérée via la propriété de l'application universelle.

Si l'on développe cette analogie, il est alors possible de mettre en parallèle :

- une théorie algébrique et une catégorie d'ouverts d'un espace topologique : aux ouverts correspondent les produits de $A(1)$ et à l'inclusion des ouverts les opérations entre ces produits ;

17. Remarque terminologique : pour Gray, contrairement à Godement et à l'usage devenu standard, un préfaisceau est un foncteur covariant, non contravariant

- les opérations sur les ensembles associées par la préalgèbre aux objets de la théorie correspondent aux applications de restriction sur les ensembles associés aux ouverts.

On peut rappeler qu'à grands traits un faisceau permet d'associer à un espace topologique des données d'une autre nature, notamment algébrique, tout en conservant les articulations local/global déterminées par la forme de l'espace topologique étudié ; ainsi par exemple le faisceau associant à chaque ouvert d'un espace topologique l'ensemble des fonctions continues à valeur dans \mathbb{R} définie sur cet ouvert. Les axiomes des faisceaux garantissent alors la possibilité de recoller ces ensembles de façon à passer des fonctions définies sur les ouverts de l'espace à celles définies sur l'espace tout entier. Au contraire le foncteur qui associe aux ouverts de l'espace topologique l'ensemble des fonctions bornées n'est pas un faisceau, dans la mesure où il n'est pas possible de « recoller » les fonctions tout en conservant la propriété de l'existence de bornes.

La faisceautisation d'un préfaisceau \mathcal{F} consiste donc à considérer le « plus petit » faisceau portant sur les mêmes données que \mathcal{F} mais satisfaisant ces contraintes de cohérence local-global. Dans le cas du préfaisceau des fonctions bornées, on considérera le faisceau des fonctions localement bornées. Dès lors, si la faisceautisation revient à une forme de localisation, imposant des contraintes de cohérence entre le local et le global, quel sens donner à la procédure d'algébrisation décrite par Lawvere ?

En examinant la preuve donnée par Lawvere de l'existence de l'algèbre associée à une préalgèbre, parallèlement à la construction du faisceau associé donnée par exemple dans [241], il semblerait possible de montrer que les contraintes imposées à une préalgèbre visent à faire d'applications entre ensembles des opérations sur un ensemble. En dernière analyse, les conditions de recollement imposées aux sections d'un faisceau se trouvent donc mises en parallèle avec des conditions imposées aux ensembles pour permettre la définition d'une opération.

Ce rapprochement entre algèbre d'un type donné et faisceau est par ailleurs bien mis en évidence par Bénabou dans sa thèse, lorsqu'il montre que la plupart des résultats concernant les algèbres d'un certain type s'étendent aux faisceaux (sur une catégorie pro-topologique). En ce sens, le rapport entre algèbre et faisceau est davantage qu'une analogie : l'algébrisation et la faisceautisation apparaissent bien comme deux opérations de même nature.

Si par ailleurs on considère que la construction de Lawvere reflète bien le passage du préalgébrique à l'algébrique, et que par ailleurs la faisceautisation, par les conditions de recollement qu'elle impose à un préfaisceau, caractérise le passage du local au global, on peut considérer qu'un tel rapprochement montre que, dans le contexte catégorique, le local et l'algébrique relèvent de procédés de même nature¹⁸

18. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 5.

3.5.2 Le Formel et le Conceptuel

Dans son article de 1969 « Adjointness in Foundations », Lawvere donne des éléments pour comprendre le statut des théories algébriques, et cela passe par l'introduction, à l'intérieur du champ mathématique, d'une distinction entre le Formel et le Conceptuel. Ainsi pour illustrer cette distinction, on peut prendre l'exemple des équations polynomiales qui appartiennent au niveau formel, quand une courbe géométrique appartient au niveau conceptuel : « the Conceptual is in a certain sens the subject matter of the Formal » ([139], 281)

Mais Lawvere ajoute un autre exemple : « we concentrate in one moment on the deduction of theorems from the axioms of group theory, and in the next consider the classes of actual groups to which the theorems refer. » ([139], 281) On pourrait alors penser que la distinction Formel/Conceptuel recoupe la distinction entre syntaxe et sémantique. J.-P. Marquis nuance cependant cette idée :

« Thus, at first sight, Lawvere's terminology coincides with the classical distinction between the syntax and the semantics of formal languages. However, Lawvere has the actual practice of mathematics in mind and therefore does not equate his distinction with the fundamental metamathematical distinction. In fact, he sees foundational research as being part of mathematics [...] Thus, the syntax of a logical system is part of the Formal, whereas the semantics is part of the Conceptual. But Lawvere's presentation of the semantics is somewhat odd. » ([?], 213)

En effet, Lawvere précise :

« Naturally the formal tendency in Foundations can also deal with the conceptual aspect of mathematics, as when the semantics of a formalized theory T is viewed itself as another formalized theory T' , or in a somewhat different way, as in attempts to formalize the study of the category of categories. On the other hand, Foundations may conceptualize the formal aspect of mathematics, leading to BOOLEAN algebras, cylindric and polyadic algebras, and certain of the structures discussed below. » ([139], 282)

Ainsi Lawvere semble mettre en avant la porosité de la frontière entre le Formel et le Conceptuel, tout en mettant en avant le fait que les catégories correspondent selon lui aux mathématiques conceptuelles.

Par ailleurs, Lawvere entend montrer dans ce même article que la notion catégorique d'adjonction permet d'articuler le Formel et le Conceptuel, sous la forme d'une authentique dualité. Cette dualité serait en réalité une forme généralisée de connexion de Galois, étendue à des questions « fonda-

tionnelles »¹⁹, sous la forme d'une relation entre les ensembles d'axiomes et la classe de leurs modèles :

« in Foundations there is the familiar Galois connection between sets of axioms and classes of models, for a fixed set of relation variables R_i . Globalizing to an adjoint pair allows making precise the semantical effects, not only of increasing the axioms, but also of omitting some relation symbols or reinterpreting them, in a unified way, and if we deal with *categories* of models, allows the latter to determine their own full sets of natural relation variables, thus giving definability theory a new significance outside the realm of axiomatic classes. To do this for a given species — equational, elementary, higher-order, etc. — of, say, I -sorted theories, one defines an adjoint situation » ([139], 295)

$$\text{Theories}^{op} \underset{\text{structure}}{\overset{\text{semantics}}{\rightleftarrows}} (\text{Cat}, [\text{Set}^I])$$

Dans ce diagramme, directement issu de sa thèse, Lawvere entend par « Theories » les théories algébriques. On voit ici comment Lawvere généralise les résultats mathématiques obtenus dans sa thèse, pour constituer sur le plan épistémologique un programme de recherche en logique catégorique :

« The invariant notion of theory here appropriate has, in all cases considered by the author, been expressed most naturally by identifying a theory T itself with a category of a certain sort, in which case the semantics (categories of models) of T is a certain subcategory of the category of functors $T \rightarrow \text{Sets}^I$. There is then a further adjoint situation

$$\text{Formal} \rightleftarrows \text{Theories}$$

describing the presentation of the invariant theories by means of the formalized languages appropriate to the species. » ([139], 295)

Dès lors, si l'on identifie le plan conceptuel à la catégorie des modèles d'une théorie,

« Composing these two adjoint situations, and tentatively identifying the Conceptual with categories of the general sort $(\text{Cat}, [\text{Sets}^I])$, we arrive at a family of adjoint situations

$$\text{Formal}^{op} \rightleftarrows \text{Conceptual}$$

(one for each species of theory) which one may reasonably hope constitute the fragments of a precise description of the duality with which we began our discussion. » ([139], 295)

19. Au sens particulier que Lawvere donne à ce mot dans cet article.

Ainsi la fin de l'article accorde aux théories algébriques un statut ambigu. L'usage du formalisme catégorique semble en effet caractériser le niveau conceptuel, et dès lors la définition de cette notion invariante de théorie sous la forme d'une catégorie ramène les théories algébriques du côté conceptuel. Mais de la même façon, elles semblent conserver des aspects du niveau formel, comme par exemple à travers la définition de la « consistance » chez Lawvere ou la preuve à la Henkin du théorème de complétude chez Volger.

Tout se passe donc comme si les théories algébriques pouvaient jouer ce rôle d'intermédiaire entre le Formel et le Conceptuel précisément parce qu'elles appartiennent à ces deux plans, comme des « objets dualisants » ou « schizophrènes ».

3.5.3 Théorie et modèles, sens et dénotation

Néanmoins, cette relation à trois termes, entre les présentations formelles, les théories algébriques et les catégories de modèles, peut également être comprise à la lumière d'une autre distinction, plus traditionnelle en philosophie.

En effet, dans [141], Lawvere propose l'analyse suivante :

« Given a first order language with axioms \mathcal{L} , the associated theory \mathcal{T} may be thought of as the « Sinn » of \mathcal{L} and the category $S^{[T]}$ as the « Bedeutung » of \mathcal{L} . »

Cette remarque de Lawvere est une référence à une distinction introduite par Frege entre Sens et Dénotation [79]. On peut alors établir la correspondance suivante, en complétant la première ligne :

Langage avec axiomes L	Signes, mots
Théorie élémentaire \mathcal{T}	<i>Sinn</i>
$Mod_{Ens}(\mathcal{T})$	<i>Bedeutung</i>

Une première remarque s'impose. Cette référence implicite à Frege dans ce cadre peut surprendre, si on garde présente à l'esprit la controverse entre Frege et Hilbert après la publication par ce dernier des *Grundlagen der Geometrie* en 1899. Demopoulos [50] considère en effet que dans ce texte Hilbert introduit les bases de la conception modèle-théorique moderne des théories mathématiques, associant à un système d'axiomes formels un modèle satisfaisant ces énoncés, à travers notamment une technique de réinterprétation des axiomes de la géométrie euclidienne visant à prouver leur consistance relative. Or Frege, dans ses lettres à Hilbert, conteste la légitimité de cette technique, sa critique reposant sur l'idée qu'un axiome a toujours un contenu, un sens, qu'il tient de la signification des termes qui le composent : une théorie mathématique porte toujours sur un domaine spécifique d'objets (les nombres ou les points de l'espace). Un système d'axiomes est donc un ensemble de « pensées » portant sur un certain domaine d'entités. Au contraire pour Hilbert un axiome est un énoncé qui fonctionne comme une définition implicite des concepts, à travers la caractérisation formelle de leurs relations.

L'approche axiomatique de Lawvere semble ainsi plus proche des méthodes introduites par Hilbert que du logicisme de Frege.

Mais alors qu'Hilbert semblait pouvoir faire l'économie de la catégorie du sens, en ne retenant que la relation entre un système formel et ses réalisations possibles, Lawvere la réintroduit dans ce même contexte. Pour Frege, chaque énoncé de la théorie en tant que proposition a un sens (une « pensée »), et également une dénotation (le vrai ou le faux). Or pour Hilbert un énoncé n'a pas de sens, et n'acquiert sa vérité que dans le contexte du système d'axiomes, si celui-ci est consistant. Lawvere ici ne réintroduit pas le sens des énoncés pris individuellement, mais du système d'axiomes lui-même. Cela met en lumière le fait que, si le sens est évacué du niveau des termes et des énoncés, il ne disparaît pas totalement, puisque le système d'axiomes dans sa totalité conserve un sens. Ainsi, un système formel caractérise bien un domaine d'objets, mais non pas les entités du plus bas niveau (nombres, points), mais des collections de telles entités : des structures. Mais si l'on admet la distinction proposée par Frege, sur quel type d'expressions porte-t-elle dans le cas de son application par Lawvere ? Pour Frege, au premier plan, celui des signes et des mots, on ne trouve que deux types d'expressions : les expressions « complètes », « achevées » ou « saturées » d'une part et les expressions « incomplètes » ou « insaturées » d'autre part. Dans le premier groupe se trouvent les noms propres et les propositions affirmatives, dans le second les « termes conceptuels ». Prenons l'exemple de la théorie des groupes : la présentation axiomatique formelle permet de définir implicitement une structure donnée comme étant un groupe. Ainsi on peut affirmer « G est un groupe », comme on affirmerait « Bucéphale était un mammifère ». Une présentation axiomatique semble donc pouvoir être vue comme un terme conceptuel, ce que Frege confirme dans sa correspondance avec Hilbert en considérant que celui-ci examine des concepts de second ordre.

La question du *Sinn* et de la *Bedeutung* des termes conceptuels est principalement abordée par Frege dans sa lettre à Husserl du 24 mai 1891 et dans « Ausführungen über Sinn und Bedeutung » de 1892-1895. Cette analyse peut

se résumer dans le tableau suivant :

Mots	Terme conceptuel
<i>Sinn</i>	Sens du terme conceptuel
<i>Bedeutung</i>	Référence du terme conceptuel = Concept

Ainsi, la dénotation d'un terme conceptuel est pour Frege un concept. Comme le remarque P. de Rouilhan [48], Frege prolonge ainsi la distinction saturé/insaturé du plan des termes, au plan du sens, mais également jusqu'au plan des objets, de la *Bedeutung* : la dénotation d'un terme conceptuel est une réalité incomplète, insaturée. Quand dès lors un objet tombe sous un concept, il y a une union réelle entre l'objet et le concept, rendue possible par l'insaturation de ce dernier, que souligne Frege dans « Ausführungen über Sinn und Bedeutung » :

« les mots 'insaturé' et 'prédicatif' semblent mieux adaptés au

Sinn qu'à la *Bedeutung* ; il doit cependant y avoir quelque chose du côté de la *Bedeutung* qui corresponde à cela »

Cette réalité insaturée qu'est le concept doit être cependant rigoureusement distinguée de l'extension du concept :

« les extensions de concepts sont des objets, non des concepts »

Frege ne déviera jamais de cette conception de la dénotation d'un terme conceptuel, malgré les paradoxes qu'elle engendre, sur lesquels insiste P. de Rouilhan.

On peut dès lors noter que Lawvere effectue un écart par rapport à l'analyse originale de Frege, en considérant comme dénotation du terme conceptuel non pas le concept lui-même, mais l'extension du concept, $Mod_{Ens}(\mathcal{T})$. En associant ainsi la *Bedeutung* du terme conceptuel à l'extension du concept et non pas au concept lui-même, Lawvere se rapproche ainsi de la solution (« husserlienne ») proposée par P. de Rouilhan [48] aux différents paradoxes qui naissent de l'analyse des termes conceptuels proposée par Frege : le sens d'un terme conceptuel serait ainsi le concept lui-même, ramené au plan de la pensée, le concept en intension, et sa dénotation serait l'extension du concept. On obtiendrait ainsi l'analyse suivante :

Mots	Terme conceptuel	Présentation \mathcal{L}
<i>Sinn</i>	Concept en intension	Théorie (comme catégorie) \mathcal{T}
<i>Bedeutung</i>	Extension du concept	$Mod_{Ens}(\mathcal{T})$

Mais que gagne-t-on à un telle analyse ?

D'une part, l'analyse de Frege permet de substituer à la relation binaire, centrale en théorie des modèles, entre syntaxe et sémantique, une relation à trois termes, entre le mot, son sens et sa dénotation, permettant ainsi de créer la place pour les théories de Lawvere. Par ailleurs, cette analyse permet de comprendre le statut intermédiaire des théories algébriques, comme articulations entre les présentations formelles et les classes de modèles. Comme le remarque P. Ludwig,

« Frege soutient en effet qu'un terme ne réfère que par l'intermédiaire, ou la médiation, de son sens : c'est parce que nous saisissons le sens d'un terme que nous sommes capables de déterminer [...] sa référence » ([153], 27)

De la même façon, la théorie algébrique peut être vue comme l'intermédiaire entre une présentation formelle et la classe de ses modèles. En outre, cette analyse frégréenne permet à Lawvere de rendre compte de la situation mathématique dans laquelle plusieurs présentations formelles, dans des langages différents, et donc avec des axiomes distincts, renvoient à la même structure, l'exemple caractéristique de cette situation étant la théorie des groupes. Par cette relation à trois termes, Lawvere peut donc rendre compte de ces situations de « synonymie » entre théories mathématiques, termes distincts renvoyant à un même sens. Enfin, Frege dans « Sens et dénotation » [79] in-

siste sur le fait que le sens n'est pas subjectif comme l'est la représentation, mais n'est pas non plus l'objet lui-même :

« le sens d'un signe [...] peut être la propriété commune de plusieurs individus; il n'est donc pas partie ou mode de l'âme individuelle [...] il n'y a pas d'obstacle à ce que plusieurs individus saisissent le même sens » ([79], 106).

Il met ainsi en évidence la nature intersubjective du sens, qui en fait une réalité non psychologique, comme les représentations. Or, en identifiant les théories de Lawvere et le sens de présentations formelles, il devient possible de rendre compte de la situation décrite par W. Felscher :

« Everybody understands me when I speak of a 'Boolean algebra' - without that I list its basic operations [cup, cap, minus; cup, minus; cap, minus; the previous and the constant Zero; the previous and the constant One ...] or its defining equations. Also, everybody knows that I can describe them just as well as 'Boolean rings'.

So we speak of Boolean algebras, knowing that we can refer to the fundamental facts about them - e.g. the representation theorems - without making precise which particular kind of basic operations and equations we would choose to prove them : what matters is that the various definitions are intertranslatable AND that the homomorphisms are always the same. » [248]

Les théories de Lawvere constitueraient le contenu intersubjectif des concepts structurels, indépendamment de leur présentation formelle, ce qui est compris à travers une théorie formelle, sans pour autant être de nature mentale ou psychologique.

Cependant, cette reprise par Lawvere de la distinction proposée par Frege soulève encore une difficulté. Il faut noter en effet que Lawvere considère comme *Bedeutung* associée à une présentation formelle la catégorie $Mod_{Ens}(\mathcal{T})$. Or les travaux de Freyd, dans le prolongement de ceux de Hilton et Eckmann, ont montré qu'il est possible de remplacer la catégorie d'arrivée des ensembles par n'importe quelle catégorie de la même « doctrine ». Il serait donc peut-être plus précis de dépasser cette restriction ensembliste et de considérer comme dénotation des présentations formelles la catégorie $Mod_{\mathcal{C}}(\mathcal{T})$, où \mathcal{C} est une catégorie quelconque présentant les propriétés adéquates. Mais la question se pose alors de savoir quel est la fonction de cette catégorie-cible : peut-être faudrait peut-être plutôt envisager une relation à quatre termes, articulant l'analyse frégréenne et, en première approximation, un schéma hylémorphique, que d'autres analyses de Lawvere semblent impliquer :

« even in foundations, not Substance but invariant Form is the carrier of the relevant mathematical information. » ([136], 1506)

Mot	Présentation axiomatique
Forme-Sens	Théorie de Lawvere \mathcal{T}
Matière	Catégorie-cible \mathcal{C}
Dénotation	$Mod_{\mathcal{C}}(\mathcal{T})$

Ainsi, la théorie de Lawvere semble venir jouer le rôle d'intermédiaire entre la présentation formelle et ses modèles, en représentant objectivement et sous une forme non-linguistique, mais catégorique, l'intension du concept visé par une théorie axiomatique.

Néanmoins, une dernière remarque pourrait venir accentuer la distance entre l'analyse de Frege et celle de Lawvere. En effet, la possibilité de varier la catégorie cible ouvre la possibilité de modifier les positions des différents objets mathématiques dans ce dernier tableau : les mêmes objets semblent ainsi pouvoir jouer les différents rôles mis en évidence par l'analyse de Lawvere, renforçant encore l'homogénéité du champ mathématique mise en évidence notamment par l'analogie avec les anneaux/modules.

3.5.4 Une distinction fonctionnelle, non essentielle

On a vu en effet, dès les travaux de Lawvere, que la distinction syntaxe-sémantique s'avérait non pas absolue, mais relative : les mêmes objets mathématiques peuvent jouer tout à tour le rôle de « théorie » et de « modèles ». Cela rejoint cette remarque d'Anand Pillay, citée par J. Kennedy :

« the traditional notions of semantics and syntax are also fluid. Categorical logic gives an account of the basic syntactic object of first order logic, namely a complete theory, as a suitable category (event topos). Another point of view is to take the type spaces as the fundamental objects, so a first order theory is a suitable functor from the category of natural numbers to profinite spaces. From this point of view some of the syntactic aspects of model theory appears in functional analysis, in other languages. So the old notion of semantic being about mathematics and syntax about logical formalism is modified. The formalism is itself an object of mathematics. » ([121], 10)

Cette dernière remarque nous semble avoir été particulièrement bien illustrée dans la thèse de Bénabou, avec la notion de « méta-type ».

Mais la fluidité de cette distinction n'implique pas nécessairement qu'elle perde toute pertinence.

On peut rapprocher cette situation de la position que défend William James à l'égard de la notion de conscience. En effet, James nie la réalité de la conscience, comme entité stable, de nature psychologique, s'opposant au réel, impliquant donc une forme de dualisme, et lui préfère l'uniformité, antérieure à toute dichotomie, de l'expérience. Il défend ainsi une position qu'il qualifie de « monisme neutre » de l'expérience pure. Sa position concernant la notion

de conscience est résumée en six thèses, dans l'article (en français) intitulé « La notion de conscience » :

1. « La Conscience, telle qu'on l'entend ordinairement, n'existe pas, pas plus que la Matière, à laquelle Berkeley a donné le coup de grâce ;
2. Ce qui existe et forme la part de vérité que le mot de « Conscience » recouvre, c'est la susceptibilité que possèdent les parties de l'expérience d'être rapportées ou connues ;
3. Cette susceptibilité s'explique par le fait que certaines expériences peuvent mener les unes aux autres par des expériences intermédiaires nettement caractérisées, de telle sorte que les unes se trouvent jouer le rôle de choses connues, les autres celui de sujets connaissants ;
4. On peut parfaitement définir ces deux rôles sans sortir de la trame de l'expérience même, et sans invoquer rien de transcendant ;
5. Les attributions sujet et objet, représenté et représentatif, chose et pensée, signifient donc une distinction pratique qui est de la dernière importance, mais qui est d'ordre FONCTIONNEL seulement, et nullement ontologique comme le dualisme classique se la représente ;
6. En fin de compte, les choses et les pensées ne sont point foncièrement hétérogènes, mais elles sont faites d'une même étoffe, étoffe qu'on ne peut définir comme telle, mais seulement éprouver, et que l'on peut nommer, si on veut, l'étoffe de l'expérience en général. » ([114], 232)

Rapporté à ce que nous avons appris de la sémantique fonctorielle, cela revient à défendre l'idée que la distinction entre syntaxe et sémantique n'aurait de réalité que « pratique », elle ne serait que « fonctionnelle », et ne désignerait nullement une frontière fixe et définitive. La distinction syntaxe-sémantique, la mise en vis-à-vis du langage et des objets, dans le contexte mathématique, peut être vue non pas comme une distinction essentielle, mais comme une certaine forme de relation entre diverses « expériences ».

Ce rapprochement avec la position de James soulève alors deux questions, auxquelles il s'agira de répondre dans les prochains chapitres : d'une part en quoi peut consister cette relation entre « expériences » évoquée par James dans la deuxième thèse, dans le contexte des mathématiques ? Et d'autre part, que peut-on dire de cette « étoffe de l'expérience », dans le cas de la connaissance mathématique ?

Pour tenter de répondre à ces questions, il nous est apparu possible de considérer le rôle qu'ont joué les théories de Lawvere dans un autre contexte formel : l'informatique théorique.

Chapitre 4

Logique catégorique et informatique théorique

Les liens entre la théorie des catégories et la théorie des langages formels d'une part, l'informatique théorique d'autre part, sont précoces et prennent des formes multiples [203]. On peut penser par exemple à l'utilisation des Catégories Cartésiennes Fermées pour le typage du lambda-calcul, des monades pour modéliser des propriétés de programmes ou aux formulations catégoriques des domaines de Scott [55]. Dans ce cadre, les notions introduites par Lawvere dans sa thèse ont joué dans un premier temps un rôle plus latéral (en témoigne par exemple le fait que ces notions sont rarement abordées dans les ouvrages de synthèse tels que [15]), mais certains développements de l'informatique théorique, notamment la sémantique des langages de programmation, accordent une place centrale aux théories algébriques. Ces recherches s'inscrivent dans le prolongement des recherches en calculabilité et théorie des langages formels de Samuel Eilenberg.

4.1 Les travaux de Samuel Eilenberg

Martin Hyland and John Power soulignent que les travaux de Lawvere ont exercé une influence importante sur les recherches en théorie des langages formels de Samuel Eilenberg :

« Eilenberg, who let it be known that he did not read Lawvere's thesis when it was written, did do so a few years later and for computer science reasons. Apparently this influenced his lectures 'Universal algebras and the theory of automata' at the AMS summer meeting in Toronto in 1967. » ([157], 440).

Les premières recherches de Samuel Eilenberg, associé à Jesse Wright, ont conduit à l'article de 1967, « Automata in General algebra », première application publiée de la théorie des catégories dans le domaine de l'informatique théorique, dans le cadre conceptuel des théories de Lawvere. Les

auteurs reconnaissent dès l'introduction que cet article n'apporte aucun résultat nouveau : « *this paper contains nothing that is essentially new, except perhaps for a point a view* » ([68], 453). En quoi consiste ce nouveau point de vue, et quel rôle jouent les théories de Lawvere dans ce cadre ?

4.1.1 Le théorème de Mezei et Wright

L'article propose une reprise en contexte catégorique d'un résultat dû à Mezei et Wright, publié la même année . L'objectif des auteurs dans ce dernier article est de montrer, sous certaines conditions, l'équivalence entre les langages hors contexte (« context-free languages ») et les automates à états finis :

« Context-free languages and finite-state language become realizations of the same general concept (of equational sets) when the proper algebra is specified. A principal objective of the paper is to establish in the context of abstract algebra, relationships between such concepts as equational and recognizable sets. » ([179], 3)

et plus loin,

« the purpose of this investigation is to provide a basis for the theory of an arbitrary algebra, which will subsume the theory $F(\Sigma)$ [du côté des langages *context-free*] and M_Σ [du côté des langages à états finis] in such a way that context-free languages and finite-states languages become realizations of the same general concept when the *proper* algebra is specified ». ([179], 3)

L'idée générale de l'article est donc d'utiliser les outils de l'algèbre universelle pour démontrer l'équivalence entre deux types de langage. Le point de départ de ce travail, s'appuyant sur des résultats antérieurs, est donc le passage de la théorie des langages formels et des automates à l'algèbre universelle, s'appuyant d'une part sur le fait que les langages « context-free » sur un alphabet fini Σ sont définis par un système d'équations à point fixe dans lequel la juxtaposition représente l'opération d'un semi-groupe $F(\Sigma)$ librement engendré par Σ , et d'autre part sur le résultat selon lequel les langages à états finis sur le même alphabet sont définissables par un système d'équations dans lequel les symboles de Σ dénote les opérateurs d'une algèbre monadique générique M_Σ .

L'article de Mezei et Wright se situe donc à l'intersection de plusieurs domaines de recherche :

1. la théorie des langages formels et les problèmes de décision, l'article citant par exemple les travaux de N. Chomsky [37] ou de D. Scott [186],
2. l'algèbre « abstraite » ou « universelle ».

Il va donc s'agir d'articuler les concepts de langages « context-free », automates à états finis, semi-groupes, algèbres monadiques et systèmes d'équations à point fixe, en en proposant une unification par généralisation :

« A major objective of this investigation is to reformulate the several types of inductive definitions [...] in such a way that the common features can be abstracted to become basic components of a unified general theory. [...] We wish to introduce the general concept of « an equational subset of an arbitrary algebra », a set defined by « a system of simultaneous equations of the fixed-point form », appropriate for the given algebra. In particular, context-free sets are equational sets defined by semigroup equations and finite-automaton recognizable sets are equational sets defined by monadic algebra equations, both subsumed under the single concept of equational sets. » ([179], 5-6).

Le cœur de cet article est donc la définition de la notion d'« ensembles équationnels » : pour une algèbre abstraite arbitraire \mathfrak{A} , si a dénote un ensemble d'éléments de \mathfrak{A} , a est équationnel ssi il est définissable par un système d'équations à points fixes sur la syntaxe de \mathfrak{A} . Pour ce faire, Mezei et Wright vont introduire une série de notions, héritées de l'algèbre universelle.

Soit $\{\Omega_n : n \geq 0\}$ une collection d'ensembles disjoints deux-à-deux et $\Omega = \bigcup\{\Omega_n : n \geq 0\}$. Ω est l'ensemble des symboles d'opérateurs, un élément de Ω_n est un symbole d'opérateur n -aire. Une algèbre $\mathcal{A} = (S, h)$ consiste en un ensemble non-vide S , le « parcours » de \mathcal{A} , et d'une application h qui associe à chaque symbole d'opérateurs $J \in \Omega$ un opérateur h_J sur S . Si $J \in \Omega_n$ alors $h_J : S^n \rightarrow S$ est un opérateur n -aire.

Soit $\mathcal{V} = \{X_1, X_2, \dots\}$ un ensemble de variables ordonnées par énumération. La collection \mathcal{T} des termes est le plus petit ensemble tel que :

1. $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$,
2. $\Omega_0 \subseteq \mathcal{T}$,
3. pour tout $J \in \Omega_n$, $n > 0$ et tout $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{T}$, on a $JT_1 \dots T_n \in \mathcal{T}$.

Soit un terme $T \in \mathcal{T}$, Ω_T est la collection des symboles d'opérateurs apparaissant dans T , \mathcal{V}_T est la collection des variables apparaissant dans T . Soit E une collection de termes, $E \subseteq \mathcal{T}$. Soit $\Omega_E = \bigcup\{\Omega_T : T \in E\}$, $\mathcal{V}_E = \bigcup\{\mathcal{V}_T : T \in E\}$. On suppose en outre qu'une algèbre $\mathcal{A} = (S, h)$ est donnée. On associe à E une application $|\mathcal{A}E| : (2^S)^n \rightarrow S$, où $n = \text{card}(\mathcal{V}_E)$ de la façon suivante : pour tout $S_1, \dots, S_n \subseteq S$,

$$|\mathcal{A}E|(S_1, \dots, S_n) = \bigcup\{|\mathcal{A}T|(S_1, \dots, S_n) : T \in E\}$$

Un système d'équations \mathcal{E} est une suite finie d'expressions de la forme $V_i = E_i$, pour $1 \leq i \leq m$, où les V sont des variables distinctes et les E_i sont des ensembles de termes. Soit $\mathcal{V}_{\mathcal{E}} = \{V_1, \dots, V_m\}$ l'ensemble des inconnues de \mathcal{E} . $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}$ est ordonné et les équations sont ordonnées de façon correspondante. A moins que cela ne soit spécifié, on suppose :

1. E_i est fini pour $1 \leq i \leq m$,
2. $\mathcal{V}_{E_i} \leq \mathcal{V}_{\mathcal{E}}$ pour $1 \leq i \leq m$.

Enfin, on peut définir la notion d'algèbre générique : l'algèbre générique $\mathcal{D} = (\mathcal{T}_{\Omega}, e)$ est définie de la façon suivante : le parcours \mathcal{T}_{Ω} est la collection des termes $T \in \mathcal{T}$ qui sont sans variables (i.e. $\mathcal{V}_T = \emptyset$). L'application e est donnée par :

1. pour $J \in \Omega_0$, $e_J = J$,
2. pour $J \in \Omega_n$, avec $n > 0$ et $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{T}_{\Omega}$, $e_J(T_1, \dots, T_n) = JT_1 \dots T_n$.

Enfin, Soit $\mathcal{A} = (S, h)$ et $\mathcal{B} = (Z, k)$ des algèbres. Une application $\eta : S \rightarrow Z$ est un homomorphisme de \mathcal{A} dans \mathcal{B} ssi :

1. pour tout $J \in \Omega_0$, $\eta h_J = k_J$;
2. pour tout $J \in \Omega_n$, $n > 0$, et tout $s_1, \dots, s_n \in S$, on a $\eta h_J(s_1, \dots, s_n) = k_J(\eta(s_1), \dots, \eta(s_n))$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 11 *Soit Ω fini et $\Omega_0 \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{A} = (S, h)$ une algèbre, C un sous-ensemble de S . C est équationnel par rapport à \mathcal{A} ssi C est l'image homomorphe d'un ensemble reconnaissable par rapport à l'algèbre générique.*

La fin de l'article montre que les semi-groupes, caractérisant les langages « context-free » et les algèbres monadiques définissant les automates à états finis, sont des cas particuliers des algèbres ainsi définis, et en déduit que les langages « context-free » et les automates à états finis sont équivalents. On voit ainsi comment l'algèbre universelle est utilisée par Mezei et Wright pour unifier, par généralisation, des modèles calculatoires distincts à travers une notion plus large d'algèbre définie par un système d'équations à point fixe.

4.1.2 Automates et théories de Lawvere

L'année suivante (en septembre 1967) S. Eilenberg et J. Wright proposent une reprise de ce résultat dans le contexte de la théorie des catégories, et c'est dans ce cadre que les théories de Lawvere vont jouer un rôle essentiel.

Le premier avantage, selon ces auteurs, de cette reprise catégorique d'un résultat antérieur, est son élargissement :

« The study of automata and of context-free languages usually deals with monoids or semi-groups. The purpose of this paper is to propose an extension of the domain of study to other algebraic systems. In the process, a better understanding of what takes place in monoids can be achieved. » ([69], 452)

Ainsi, les théories de Lawvere vont permettre de prendre en compte des modèles calculatoires plus généraux que les modèles traditionnels de langage et d'automates. La question qui se pose alors est de savoir quel rôle jouent précisément les théories de Lawvere dans ce cadre.

Pour décrire ce théorème et les notions qu'il suppose, nous nous appuyons sur la présentation qu'en propose P. Lescanne dans sa thèse [145].

Rappelons tout d'abord que Ens est la catégorie des ensembles, et que dans cette catégorie deux objets jouent un rôle particulier : l'ensemble vide \emptyset , objet initial de Ens et l'ensemble singleton I , objet terminal dans Ens . Pour chaque entier n , on notera $[n]$ l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ de sorte que $[0] = \emptyset$ et $[1] = I$. Les ensembles $[n]$ avec les morphismes entre eux forment une sous-catégorie Ens_0 de Ens .

Les théories

Eilenberg et Wright proposent une définition des théories algébriques sensiblement différente de celle de Lawvere, mais équivalente. En effet, une théorie T est définie comme une catégorie telle que :

1. les objets de T sont les $[n]$;
2. Ens_0 est une sous-catégorie de T ;
3. étant donné les morphismes $\phi_i : I \rightarrow [p]$ dans T avec $i = 1, \dots, n$, il existe un unique morphisme $\phi : [n] \rightarrow [p]$ tel que ϕ_i est la composition

$$I \xrightarrow{i} [n] \xrightarrow{\phi} [p]$$

pour chaque $i \in [n]$.

On notera $\langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$ pour le morphisme ϕ . En outre, contrairement à ce qui se passe dans Ens_0 , on pourra avoir dans T des morphismes $\phi : I \rightarrow \emptyset$: ce sont les opérations 0-aires qui joueront un rôle central par la suite.

Les algèbres

Sur ce point également la définition diffère quelque peu de celle de Lawvere. En effet, une T -algèbre A consiste en un ensemble A et une règle qui assigne, à chaque $\phi : [n] \rightarrow [p]$ dans T et à chaque p -uplet (x_1, \dots, x_p) d'éléments de A , un n -uplet $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_p)\phi$ d'éléments de A , soumis aux deux axiomes suivants :

1. si ϕ est dans Ens_0 , alors $x'_i = x_{\phi_i}$;
2. si $\psi : [k] \rightarrow [n]$ dans T , alors $(x'_1, \dots, x'_n)\psi = (x_1, \dots, x_p)(\phi\psi)$.

On peut définir une catégorie T^b des T -algèbres.

On notera que si $\phi : I \rightarrow [p]$ dans T , alors $(x_1, \dots, x_p)\phi \in A$, de sorte que ϕ donne une application $A^p \rightarrow A$ où A^p est le p -ième produit cartésien de A . Si par ailleurs $p = 0$, c'est-à-dire $\phi I \rightarrow \emptyset$, alors $(\)\phi \in A$ est un élément de A déterminé par ϕ indépendamment de toute « entrée » a_1, \dots, a_p . On note cet élément ϕ_A .

Les algèbres libres

Soit $A_k = T(I, [k])$ l'ensemble de tous les morphismes $I \rightarrow [k]$. On transforme A_k en une T -algèbre de la façon suivante : étant donné $\phi : [n] \rightarrow [p]$ dans T , et étant donné $x_1, \dots, x_p \in A_k$, on a $x_i : I \rightarrow [k]$ et par conséquent $\langle x_1, \dots, x_p \rangle : [p] \rightarrow [n]$ dans T . Ainsi la composition $\gamma = \langle x_1, \dots, x_p \rangle \phi$ est un morphisme $\gamma : [n] \rightarrow [k]$ dans T . On pose $(x_1, \dots, x_p)\phi = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$. On vérifie que A_k est une T -algèbre.

Chaque application $i : I \rightarrow [k]$ avec $i = 1, \dots, n$ dans Ens_0 est un élément de A_k et ainsi $[k]$ est un sous-ensemble de A_k . On a alors le résultat suivant : si A est une T -algèbre, alors tout morphisme $f : [k] \rightarrow A$ admet une unique extension $\bar{f} : A_k \rightarrow A$ en un morphisme de T -algèbres. En effet, on a, pour $\phi \in A_k$, $\bar{f}\phi = (f_1, \dots, f_k)\phi \in A$. Tout cela montre que les algèbres A_k sont des algèbres libres de base $[k]$. En particulier, A_0 est l'algèbre libre de base vide et, d'après le résultat précédent, pour toute T -algèbre A il y a un unique morphisme $\zeta_A : A_0 \rightarrow A$. En fait, $\zeta_A\phi = \phi_A$ pour $\phi \in A_0$, c'est-à-dire pour $\phi : I \rightarrow \emptyset$. Ainsi A_0 est objet initial dans la catégorie T^b .

Les théories libres

Comme en algèbre, on peut définir des théories comme théories quotient de théories libres.

Soit $\Omega = \{\Omega_n\}$, pour $n = 0, 1, \dots$ une suite d'ensembles. On considère une théorie T telle que $\Omega_n \subset T(I, [n])$. On suppose par ailleurs qu'à chaque morphisme $\phi : [n] \rightarrow [p]$ dans T est associé un entier $d\phi \geq 0$, le « degré de ϕ ») satisfaisant les conditions suivantes :

1. $d\phi = 0$ si ϕ est dans Ens_0 ,
2. $d\phi = d(\phi_1) + \dots + d(\phi_n)$,
3. si $\omega \in \Omega_n$, alors $d(\phi\omega) = 1 + d\phi$,
4. si $\phi : I \rightarrow [p]$ et $d\phi > 0$, alors il existe un unique $k \geq 0$ et une unique factorisation

$$I \xrightarrow{\omega} [k] \xrightarrow{\psi} [p]$$

de ϕ avec $\omega \in \Omega$ et ψ dans T .

On a alors une théorie libre de base Ω notée $Ens_0[\Omega]$.

Congruences

Soit A une T -algèbre. Une congruence Q dans A consiste en une relation d'équivalence \sim dans A satisfaisant $(a_1, \dots, a_p)\phi \sim (a'_1, \dots, a'_p)\phi$ pour tout $\phi : I \rightarrow [p]$ dans T , pourvu que $a_i \sim a'_i$ pour $i = 1, \dots, p$. L'ensemble-quotient A/Q a une structure de T -algèbre.

Une congruence Q dans une théorie T est une famille de relations d'équivalence, une dans chaque ensemble $T([n], [p])$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. Si $\phi_1, \phi_2 : [n] \rightarrow [p]$ et $\phi_1 \sim \phi_2$, alors $\phi_1\psi \sim \phi_2\psi$ pour tout $\psi : [q] \rightarrow [n]$ et $\gamma\phi_1 \sim \gamma\phi_2$ pour tout $\gamma : [p] \rightarrow [q]$,
2. Si $\phi_1, \phi_2 : [n] \rightarrow [p]$ et $\phi_1 i \sim \phi_2 i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors $\phi_1 \sim \phi_2$,
3. si $\phi_1, \phi_2 : I \rightarrow [p]$ sont dans Ens_0 et si $\phi_1 \sim \phi_2$, alors $\phi_1 = \phi_2$.

La première condition permet de définir une catégorie T/Q dans laquelle les morphismes sont des classes d'équivalence de morphismes dans T . La troisième condition assure que Ens_0 se plonge dans T/Q et la deuxième montre que T/Q est une théorie : la théorie-quotient de T par la congruence Q .

Présentation de théories

Le §9 de l'article de Eilenberg et Wright [69], qui n'est pas repris dans la thèse de Lescanne, n'introduit pas de nouvelles notions ni de nouveaux résultats, mais éclaire le rôle joué par les théories de Lawvere dans l'étude des langages formels et des automates. En effet, dans ce paragraphe, les auteurs montrent comment la notion de théorie algébrique unifie les concepts algébriques essentiels de la théorie des automates, tels que les semigroupes, les monoïdes ou les algèbres monadiques, caractérisant chacun des classes de langages formels.

Ainsi par exemple, dans le cas des semigroupes, l'article propose de construire la théorie Sg de la façon suivante : on commence avec une théorie libre T engendrée par un unique morphisme $\pi : I \rightarrow [2]$. Plus précisément, $T = Ens_O[\Omega]$ où $\Omega_2 = \{\pi\}$ et $\Omega_n = \emptyset$ pour $i \neq 0$. Les T -algèbres sont alors des ensembles A avec une multiplication binaire $(a_1, a_2)\pi \in A$ sans autre condition supplémentaire. Pour introduire l'associativité, il faut « égaliser » certaines paires de morphismes $I \rightarrow [3]$ dans T ou de façon équivalente deux éléments de la T -algèbre libre A_3 . Ces deux éléments sont $((1, 2)\pi, 3)\pi$ et $(1, (2, 3)\pi)\pi$. Cela engendre une congruence Q sur T . Une T -algèbre A est compatible avec Q ssi

$$((a_1, a_2)\pi, a_3)\pi = (a_1, (a_2, a_3)\pi)\pi$$

vaut pour tous les $a_1, a_2, a_3 \in A$, c'est-à-dire ssi A est un semi-groupe. La théorie Sg est alors définie comme la théorie quotient T/Q .

La même procédure permet de définir les monoïdes et les algèbres monadiques.

Ensembles reconnaissables, automates et algèbres relationnelles

Soit A une T -algèbre et Q une congruence sur A . On dira que Q est fini si A a un nombre fini de classes d'équivalence $\text{mod}Q$, ou de façon équivalente si A/Q est une T -algèbre finie. Un sous-ensemble X de A est clos pour Q si X est l'union de classes de congruence $\text{mod}Q$, ou de la même façon si $a \sim b$

et $a \in X$ implique que $b \in X$. Un sous-ensemble X de A qui est clos pour une certaine congruence finie Q est dit reconnaissable.

Soit T une théorie. Un T -automate est une paire $\mathbf{A} = (A, t)$ où A est une T -algèbre finie et t est un sous-ensemble de A . Les T -automates constituent une catégorie T_a^b avec pour morphismes $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ où $\mathbf{B} = (B, s)$ les morphismes de T -algèbres tels que $f^{-1}s = t$. Le comportement $\mathcal{B}\mathbf{A}$ est défini comme un sous-ensemble du T -algèbre initial A_0 de la façon suivante : soit $\zeta_A : A_0 \rightarrow A$ l'unique T -morphisme, alors $\mathcal{B}\mathbf{A} = \zeta_A^{-1}t$. On a alors le résultat suivant : la classe de tous les comportements des T -automates coïncide avec la classe des ensembles reconnaissables de A_0 .

Afin de généraliser la notion d'automate non-déterministe, on se restreint au cas où la théorie T est libre : $T = \text{Ens}_0[\Omega]$. Une T -algèbre A est alors décrite par des fonctions $(x_1, \dots, x_n)\omega \in A$ avec $x_1, \dots, x_n \in A$ et $\omega \in \Omega_n$. On définit une T -algèbre relationnelle A par un ensemble A muni de fonctions qui, à $x_1, \dots, x_n \in A$ et $\omega \in \Omega_n$, assigne un sous-ensemble $(x_1, \dots, x_n)\omega$ de A . Si X_1, \dots, X_n sont des sous-ensembles de A , alors on pose

$$(X_1, \dots, X_n)\omega = \bigcup (x_1, \dots, x_n)\omega$$

l'union étendue, sur tous les n -uplets (x_1, \dots, x_n) dans A tels que $x_i \in X_i$ pour $i = 1, \dots, n$. De cette façon l'ensemble \hat{A} de tous les sous-ensembles de A devient une T -algèbre. Inversement, si sur l'ensemble \hat{A} on a une structure de T -algèbre, satisfaisant l'égalité ci-dessus, avec A vu comme un sous-ensemble de \hat{A} , en restreignant chaque $\omega \in \Omega_n$ à A on obtient une T -algèbre A . Les T -algèbres relationnelles forment une catégorie T^b , dont T^b est une sous-catégorie.

Les ensembles algébriques

Soit T une théorie quotient d'une théorie libre. Un polynôme $P : [n] \rightarrow [p]$ est un n -uplet $P = (P_1, \dots, P_n)$ où les P_1, \dots, P_n sont des sous-ensembles finis de $T(I, [p])$. Les éléments de P_i sont appelés les constituants de P et si tous ces constituants sont de degré 1, alors on dira que P est de degré 1.

Soient A une \mathbb{T} -algèbre relationnelle et $X = (X_1, \dots, X_n)$ un p -uplet de sous-ensembles de A . On définit

$$XP_i = \bigcup_{\phi \in P_i} (X_1, \dots, X_p)\phi$$

$$XP = (XP_1, \dots, XP_n)$$

Alors XP est un n -uplet de sous-ensembles de A et P définit une fonction $P_A : \hat{A}^p \rightarrow \hat{A}^n$.

Dans le p -ième produit \hat{A}^p de \hat{A} on définit l'inclusion et l'union coordonnée par coordonnée. On a alors la propriété suivante de P_A : si dans \hat{A}^p on

a $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^k \subset \dots$, alors

$$\left(\bigcup_k X^k\right)P_A = \bigcup_k (X^k P_A)$$

Cette propriété implique que $XP_A \subset YP_A$, chaque fois que $X \subset y$ dans \widehat{A}^p .

On considère à présent un polynôme $P : [n] \rightarrow [n]$. Alors la transformation $P_A : \widehat{A}^n \rightarrow \widehat{A}^n$ peut être itérée, sous la forme $P_A^k : \widehat{A}^n \rightarrow \widehat{A}^n$. En particulier, si $\emptyset \in \widehat{A}^n$ est le n -uplet $(\emptyset, \dots, \emptyset)$, on a alors $\emptyset \subset \emptyset P_A \subset \emptyset P_A^2 \subset \dots \subset \emptyset P_A^k \subset \dots$ et on définit

$$\overline{P}_A = \bigcup_k \emptyset P_A^k$$

On a alors le résultat suivant : \overline{P}_A est la plus petite solution de l'équation $XP_A = X$, pour $X \in A^n$, de même que la plus petite solution de l'inégalité $XP_A \subset X$.

Un ensemble X de l'algèbre initiale A_0 pour une théorie \mathbb{T} est dit *algébrique* s'il existe un entier n et un polynôme $P : [n] \rightarrow [n]$ tel que $X = \overline{P}_i$, c'est-à-dire que X est la première coordonnée de la plus petite solution de l'équation $YP_{A_0} = Y$ pour $Y \in \widehat{A}_0^n$.

On a alors le théorème de Mezei et Wright, repris dans un cadre catégorique par Eilenberg et Wright :

Théorème 12 *Si $\mathbb{T} = E_0[\Omega]$ est une théorie libre de base finie, alors dans la \mathbb{T} -algèbre initiale A_0 les ensembles reconnaissables et algébriques coïncident.*

Dans toutes ces constructions, le rôle joué par les théories de Lawvere apparaît clairement : les théories algébriques permettent en effet de synthétiser ou de déterminer le contenu calculatoire des formalismes considérés, comme par exemple dans le cas des T -automates, dans le cadre duquel les différentes formes de langages vont coïncider. Elles permettent ainsi la construction de structures algébriques caractérisant les différents modèles calculatoires, comme l'algèbre initial.

4.2 Sémantique des langages de programmation

4.2.1 Sémantique opérationnelle et sémantique dénotationnelle

La sémantique des langages de programmation vise, selon G. Winkel [254], à associer à des programmes des objets mathématiques, dans le but de comprendre leurs propriétés, de comparer leurs comportements et de raisonner sur ces programmes.

Appliquée aux langages de programmation, la notion de sémantique se distingue à la fois de la sémantique du langage naturel et de la sémantique

modèle-théorique. Si le contexte informatique partage avec les langages formels de la logique le fait d'être artificiels et symboliques, le point commun avec la sémantique du langage naturel apparaît dans le fait que le langage est donné en premier : en effet, les systèmes formels de la logique mathématique sont généralement conçus comme venant après leur sémantique, à savoir les structures mathématiques étudiées. Une autre différence essentielle entre la sémantique des langages de programmation et l'approche modèle-théorique de la sémantique apparaît dans la nature des énoncés du langage considérés : les énoncés formels de la théorie des modèles sont en effet descriptifs, et peuvent dès lors être dotés d'une valeur de vérité, alors que les énoncés des programmes informatiques sont des commandes, appelant une exécution. D'une certaine façon, la sémantique des langages de programmation se place du côté du *faire*, quand la sémantique modèle-théorique usuelle se situe du côté du *dire*.

Ainsi par exemple, une des questions auxquelles répond la sémantique des langages de programmation est celle de l'équivalence calculatoire des énoncés formels : comment savoir si deux commandes sont équivalentes ? Une telle question n'a en réalité de sens qu'une fois déterminé un niveau d'abstraction, comme le souligne C. Gunter :

« The two programs [...] are equivalent at one level of abstraction, that which considers only the value of the output on a given input, but inequivalent at another level, in which the computational steps are considered. Showing that the efficient implementation is « correct » in the sense that it really does compute the Fibonacci function involves considering its meaning at an abstract level ; the justification that it is efficient is based on a more « low-level » semantics ». ([97], 8)

Une autre fonction de la sémantique des langages de programmation peut être en outre d'éviter les ambiguïtés dans les descriptions informelles, en langage naturel, du comportement calculatoire des programmes.

Mais comment est-il possible de remplir formellement ces fonctions ?

On distingue traditionnellement trois approches de la sémantique des langages de programmation :

- la sémantique *opérationnelle*, qui décrit le processus d'exécution d'un programme, souvent sous forme de règles de transition entre états d'un interpréteur ou d'une machine abstraite, afin de montrer comment un programme s'exécute, étape par étape ;
- la sémantique *dénotationnelle*, ainsi décrite par Nielson :

« we are merely interested in the effect of executing a program. By effect we mean here an association between initial states and final states. The idea then is to define a semantic function for each syntactic category. It maps each syntactic construct to a mathematical object, often a function, that describes the

effect of executing that construct.

The hallmark of denotational semantics is that semantic functions are defined compositionally ; that is,

- there is a semantic clause for each of the basic elements of the syntactic category, and
- for each method of constructing a composite element (in the syntactic category) there is a semantic clause defined in terms of the semantic function applied to the immediate constituents of the composite element. » ([185], 91)

- la sémantique *axiomatique*, qui fixe la signification d'un programme en lui associant des règles d'inférence dans un système logique.

La distinction entre sémantique dénotationnelle et sémantique opérationnelle est explicitée par Dana Scott :

« Thus the mathematical meaning of a *procedure* ought to be the *function* from elements of the data type of the input variables to elements of the data type of the output. On the other hand, the operational meaning will generally provide a *trace* of the whole *history* of the computation following the sequencing stipulated in the stated procedure definition and will involve an explicit finitary choice of *representations* of data eventually in something close to bit patterns. » ([223], 169)

Pour Scott, l'avantage de la sémantique dénotationnelle tient au fait qu'une fonction est indépendante de ses moyens de calcul effectif, qui, dans le cadre d'une sémantique opérationnelle, nécessite des choix plus ou moins arbitraires de procédures de stockage des résultats partiels et des liens entre les phases du calcul, choix que Scott considère comme « irrelevant for a true understanding » of a program ». Certes il est essentiel d'étudier comment un programme peut être implémenté « concrètement » dans une machine et donner lieu à un calcul effectif, mais pour Scott l'étude mathématique, abstraite, du programme doit être la première étape de l'examen de ses propriétés.

Par ailleurs, la sémantique opérationnelle peut prendre deux formes :

- la sémantique opérationnelle « *à grands pas* » : il s'agit dans ce cas d'associer au programme une description mathématique de « ce qu'il fait », c'est-à-dire d'associer à une commande l'état résultant de l'exécution de cette commande dans son intégralité. On peut montrer de cette façon qu'un programme est déterministe ou que deux programmes sont « observationnellement équivalents » (c'est-à-dire associent au même état de départ le même résultat d'arrivée). Mais cette approche ne permet pas d'appréhender le programme dans son exécution, mais seulement dans ses résultats. En particulier, elle ne permet pas de décrire les programmes qui ne terminent pas, puisque ceux-ci ne mènent pas à un résultat ;

- la sémantique opérationnelle « à *petits pas* », qui décrit l'exécution d'un programme étape par étape, en lui associant un système de transition d'états.

Pour ce qui est de la sémantique dénotationnelle, que P. Dybjer [55] décrit comme une sémantique « mathématique », on peut distinguer trois approches :

- la sémantique topologique, comprenant la sémantique dénotationnelle proprement dite et la théorie des domaines de Scott,
- la sémantique logique, dont la théorie intuitionniste des types de Martin-Löf peut être un exemple,
- la sémantique algébrique, qui s'appuie de façon essentielle sur les théories de Lawvere.

Quelle que soit l'approche retenue, la théorie des catégories joue un rôle central dans la construction d'une sémantique des langages de programmation, comme le remarque D. Scott :

« Another word about category theory : I actually feel that it is particularly significant and important for the theory and the whole area of semantics. » ([225], 578)

Mais comment expliquer cette pertinence de la théorie des catégories dans le contexte de la sémantique des langages de programmation ? Pour éclairer ce point, on peut ici encore citer Dana Scott :

« What we are probably seeking is a « pure » view of functions : a theory of functions in themselves, not a theory of functions derived from sets. What then is a pure theory of functions ? Answer : category theory. » ([224], 406)

Ainsi, en tant que « théorie pure des fonctions »¹, la théorie des catégories se présente comme le cadre adéquat au développement d'une sémantique des langages de programmation, tout particulièrement, pour D. Scott, dans une perspective dénotationnelle. Mais quel serait dès lors le rôle des théories algébriques de Lawvere dans cette perspective ?

4.2.2 Les travaux de Calvin Elgot

L'idée selon laquelle la théorie des catégories serait un contexte adapté aux programmes de recherche de l'informatique se retrouve dans les travaux de Calvin Elgot, qui le premier utilise les théories algébriques de Lawvere pour construire une sémantique mathématique de type algébrique, sous l'influence de Samuel Eilenberg.

1. Nous retrouverons cette idée au chapitre 6 dans le cadre de la psychologie du développement introduite par Jean Piaget.

L'apport du contexte catégorique : une forme de constructivité

Elève de Tarski à Berkeley en 1954-1955, les travaux de Calvin Elgot se sont centrés, selon D. Scott, sur l'étude du processus calculatoire en lui-même, d'un point de vue « finitiste et constructiviste » ([226], v). De ce point de vue, la théorie des catégories est considérée par Elgot comme le contexte adéquat :

« despairing that progress in the foundations of the theory of computation was taking place much too slowly, I came to the conclusion that what was needed was a “suitable” framework for such a theory. [...] One conclusion concerning the nature of the framework which has been slowly evolving in my mind : *the language of categorical algebra would be essential.* » ([71], 85)

Dès lors, Elgot compte parmi les « nouveaux rôles » de la théorie des catégories le fait d'être « a common foundation for theoretic computer science and finitely describable mathematics » ([71], 86). Pour illustrer cette idée, il définit à titre d'exemple la catégorie $D - Sta$, à la manière d'un groupe défini par générateurs et relations, catégorie essentielle à la théorie des calculs dans la mesure où elle représente algébriquement une forme de « machine abstraite », mettant ainsi en évidence le fait qu'une catégorie peut être vue comme une structure algébrique à plusieurs sortes ou peut permettre de spécifier des types de données, les objets de la catégorie étant vus comme des types.

Par ailleurs, pour clarifier l'idée d'un fondement constructif, Elgot la distingue de l'usage fondationnel proposé par Lawvere, et précise :

« I would like the underlying logic to be quantifier-free [...]. The underlying language I have (only vaguely) in mind would gain power by having available the ability to describe general algorithmic procedures for introducing new functions and having available, for proof, a principle (or principles) of mathematical induction. » ([71], 88)

S'appuyant sur une description par Hermann Weyl de l'intuitionnisme de Brouwer, qu'il reprend à son compte, Elgot vise ainsi à proposer, à travers sa vision constructive de la théorie des catégories, selon D. Scott, « a balance between being constructive and being abstract » ([226], p.vii). Ce dernier critique cependant l'exigence d'une logique sans quantificateur, soulevant le problème du choix de la catégorie devant servir de cadre à la théorie du calcul recherchée (et privilégiant pour sa part les Catégories Cartésiennes Fermées pour sa théorie des domaines).

C'est précisément relativement à cette question du choix de la bonne catégorie que s'établit le lien entre les travaux d'Elgot et les théories algébriques de Lawvere, dans la mesure où, comme le rapporte Samuel Eilenberg :

« Cal was convinced that iteration was a key operation in the theory of formal languages [...]. Lawvere's theory of Algebraic Theories was then a relatively new subject : when I told Cal about it he recognized immediately that the notion of iteration belongs there, and gradually the notion of an Iterative Theory evolved. I believed that this invention was the fulfillment of one of Cal's dearest secret dreams. » ([66], xix)

Mais comment comprendre l'idée selon laquelle la théorie des catégories présenterait une forme de constructivité qui la rendrait adéquate à la formulation d'une sémantique mathématique des langages de programmation ?

On peut trouver des arguments à l'appui de cette idée dans l'analyse proposée par Colin MacLarty dans [177]. En effet, selon McLarty, les axiomes de la théorie des catégories (qui en font une théorie « essentiellement algébrique » au sens introduit par P. Freyd dans [80]) permettent des preuves qui ne reposent pas sur des négations, des disjonctions, une quantification existentielle ou l'axiome du choix, de telle sorte que

« Many theorems in category theory are proven by explicit, and evident, diagrams. » ([177], 98)

Après avoir présenté une preuve catégorique qu'il considère comme représentative des arguments catégoriques, McLarty précise ainsi :

« More significant proofs often use the same pattern. We need an arrow with such-and-such domain, and such-and-such codomain, and a certain property. The data offers just one straightforward construction of an arrow with that domain and codomain. And indeed the arrow has the property. These proofs are constructive in the sense that they use no argument by contradiction, nor excluded middle, nor choice. The answer is explicitly constructed from the data of the problem. » ([177], 99)

Ainsi si l'on formalise la logique inhérente à la théorie des catégories :

« the only rules of inference are the equality rules, the modified cut rule and term substitution. These are all explicit constructions. The same weak logic suffices for many extensions of the category axioms : categories with all finite products, or with all finite colimits, or cartesian closed categories, and much more. [...] Each of these naturally uses explicit constructions. » ([177], 103)

Enfin, un dernier argument de McLarty repose sur les apports propres d'une preuve catégorique, à savoir le fait de fournir une *explication* des résultats mathématiques :

« It is not too young but rather too focused on explication to rely heavily on non-constructive proofs. » ([177], 104)

Ces différents arguments permettent ainsi d'éclairer le projet de Calvin Elgot, tel que le rappelle D. Scott : « a balance between being constructive and being abstract ».

Les théories de Lawvere dans les travaux d'Elgot

Les théories algébriques de Lawvere apparaissent dans un grand nombre de travaux de C. Elgot. Mais c'est dans la notion de « théorie algébrique itérative » qu'apparaît le plus clairement le lien entre les travaux de Lawvere et la théorie de la calculabilité. Cette notion est introduite dans l'article « Monadic computation and iterative algebraic theories », présenté en 1973 :

« We make use of [Lawvere theories] to study Turing machines and machines with a similar kind of control at a level of abstraction which disregards the nature of 'storage' or 'external memory'. » ([70], 179)

L'objectif des travaux d'Elgot est donc de proposer un modèle mathématique des machines abstraites, et donc d'explicitier dans une structure algébrique la notion d'itération qui y est implicitement présente, comme le souligne S. Goncharov :

« Iteration is fundamental in many areas of computer science, such as semantics, verification, theorem proving, automata theory, formal languages, computability theory, compiler optimisation, etc. An early effort to identifying a generic notion of iteration is due to Elgot, who proposed to consider an algebraic theory induced by a notion of abstract machine (motivated by Turing machines, and their variants) and regard iteration as an operator over this algebraic theory. » ([86], 1)

Elgot présente ses résultats ainsi :

« Our interest here is in the procedure, not at all in the numerical function it may compute. For example, we are interested in a step-by-step record of the external memory state $x \in X$ of a machine as it passes through a sequence of « instantaneous descriptions ». This information is incorporated in the notion « track of a machine » defined [...] as a certain « sequacious function » over X determined by the machine [...].

Thus, in particular, the family of all Turing tracks may be described without recourse to the notion « Turing machine ». The scalar conditional reiteration operation is closely related to Markov's « reiteration » and to the « whiledo » or « dowhile » operations used in programming language. [...]

The main notion of this paper is « iterative algebraic theory » [...]. This notion is abstract in the sense that the elements « morphisms » of the structure may be entities of any kind. Our main

example of an iterative algebraic theory has sequacious functions
as its elements. » ([70], 176)

Ainsi, comme dans les travaux de Eilenberg et Wright, le contexte catégorique va permettre de définir une forme abstraite de structure, dont un modèle calculatoire pourra être vu comme un cas particulier.

Dans son article, Elgot prend pour point de départ une caractérisation abstraite des « machines », dont les machines de Turing sont des cas particuliers : ces machines ont en commun la façon dont le séquençage des « actes atomiques » est exécuté par une \mathbf{M} -machine M . A chaque notion de machine \mathbf{M} de ce type est associé un ensemble X dont les éléments peuvent être appelés des « états (de mémoire) externes ». Dans le cas d'une notion à la Turing \mathbf{M} un élément $x \in X$ représente à la fois la position de la tête de lecture d'une machine à un instant donné du temps et le contenu du ruban à cet instant. En plus de l'état externe, une \mathbf{M} -machine M , à un instant donné du temps, est dans un, parmi un nombre fini, d'états (de mémoire) internes. L'état externe et interne (qui ensemble forment l'état total) de M à un instant donné, détermine son fonctionnement futur. On restreint les ensembles d'états internes à des ensembles finis $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ où $m \in \mathbb{N}$ est un entier positif.

Les états internes d'une machine M sont en outre partitionnés en « actifs » et « au repos ». Les états au repos sont parfois désignés comme « sorties ». On formalise cette partition en spécifiant l'ensemble des états internes sous la forme $[s + p]$, où M a le poids s et p sorties. Les éléments de $[s]$ sont actifs tandis que les éléments de $s + [p] = \{s + 1, s + 2, \dots, s + p\}$ sont au repos. L'élément $s + j$ est la j -ième sortie. Si X est l'ensemble des états externes d'une \mathbf{M} -machine M et $[s + p]$ l'ensemble de ses états internes, $X \cdot [s + p] = \{xk; x \in X, k \in [s + p]\}$ est l'ensemble des états totaux ; dans ce cas, $xk = x \cdot k$ est la suite de longueur 2 dont le premier terme est x et le second terme est k . Certains de états internes sont désignés comme « initiaux ».

Les notions de machine \mathbf{M} ont aussi des « actes atomiques » qui leur sont associés. Un acte atomique peut effectuer un changement dans un état externe, et dans ce cas cet effet peut être spécifié par une fonction $X \rightarrow X$. Un acte atomique peut aussi avoir pour effet de « tester » si $x \in X$ a une certaine propriété ou non ; un tel acte atomique peut être spécifié par une fonction $X \rightarrow [2]$. Les tests peuvent aussi être m -valués, $m \geq 1$, donnant une fonction $X \rightarrow [m]$. Les actes atomiques peuvent aussi simultanément transformer la mémoire externe et tester la mémoire externe : une telle combinaison peut être décrite par une fonction $X \rightarrow X \cdot [m]$. On dira qu'une telle fonction à m résultats.

On peut associer à une notion de machine \mathbf{M} une famille $\Gamma = \{\Gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, qu'on appelle le genre de \mathbf{oM} , où Γ_m est un ensemble de fonctions de type $X \rightarrow X \cdot [m]$. Habituellement les ensembles Γ_m sont finis et, sauf pour un

nombre fini de m , vides. Les éléments de Γ_m sont des \mathbf{M} -générateurs avec m résultats.

Si M a un poids $s \geq 0$ et $p \geq 0$ sorties, son « action » est déterminée par une « table » avec s « lignes » :

$$\begin{aligned} 1 \quad & g_1 : X \rightarrow X \cdot [m_1]; \quad e_1 : [m_1] \rightarrow [s + p] \\ 2 \quad & g_2 : X \rightarrow X \cdot [m_2]; \quad e_2 : [m_2] \rightarrow [s + p] \\ & \dots \\ s \quad & g_s : X \rightarrow X \cdot [m_s]; \quad e_s : [m_s] \rightarrow [s + p] \end{aligned}$$

où g_i est un \mathbf{M} -générateur avec m_i résultats et e_i est une fonction de source $[m_i]$ et de cible $[s + p]$ pour chaque $i \in [s]$. Une ligne est appelée une « instruction ». Ainsi par exemple, si \mathbf{M} part avec une instruction i sur une entrée $x \in X$, \mathbf{M} agit d'abord en évaluant $xg_i = x'i'$; $i'e_i$ spécifie le numéro d'instruction suivante qui doit être exécutée; si $i'e_i = s + j$, $j \in [p]$, alors \mathbf{M} s'arrête à la sortie j dans l'état externe x' ; si $i'e_i i'' \in [s]$, alors une deuxième action est lancée par l'instruction i'' , etc.

Les fonctions finies $f : [n] \rightarrow [p]$, où $n, p \in \mathbb{N}$, jouent un rôle important. Des cas particuliers de ces fonctions sont utilisées pour spécifier la partie « go-to » d'une instruction. La famille de toutes les fonctions de ce type (indexées par n, p) forme une catégorie \mathcal{N} . Les objets de \mathcal{N} sont les ensembles $[n]$, pour $n \in \mathbb{N}$; l'ensemble $\mathcal{N}_{n,p}$ est l'ensemble des morphismes de $[n]$ dans $[p]$.

On peut alors introduire la notion de théorie algébrique, telle qu'elle est définie par Elgot, permettant « to study equationally definable classes of algebras from a more intrinsic point of view. » ([70], 186). Une théorie algébrique L est une catégorie dont les objets sont $0, 1, 2, \dots$ qui, en outre, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, admet des morphismes distingués $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p : p \rightarrow 1$ satisfaisant la propriété suivante : étant donné une famille de morphismes $f_j : n \rightarrow 1$, $j \in [p]$, il y a un unique morphisme $f = \langle f_1, f_2, \dots, f_p \rangle : n \rightarrow p$ tel que $f\pi_j = f_j$ pour chaque j .

En fait, pour appliquer les résultats de Lawvere, Elgot est amené à dualiser cette définition :

Définition 33 Une théorie (co)algébrique T est une petite catégorie dont les objets sont $[0], [1], [2], \dots$ qui, en outre, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, admet des morphismes distingués $1, 2, \dots, n : [1] \rightarrow [n]$ satisfaisant la propriété suivante : étant donné une famille de morphismes scalaires $f_i : [1] \rightarrow [p]$, avec $i \in [n]$, il existe un unique morphisme $(f = f_1, f_2, \dots, f_n) : [n] \rightarrow [p]$ tel que $if = f_i$ pour chaque i , c'est-à-dire

$$[1] \xrightarrow{i} [n] \xrightarrow{f} [p]$$

L'opération décrite par cette propriété est appelée « source-tupling ». Elle opère sur n morphismes scalaires pour produire un morphisme dont le i -ième composant est le i -ième morphisme scalaire.

On dira par ailleurs que T est non-dégénérée si \mathcal{N} peut être plongée dans T .

Une théorie idéale I est une théorie algébrique non-dégénérée qui satisfait en outre la propriété suivante de l'idéal à droite : si $f : [1] \rightarrow [p]$ n'est pas distingué, alors fg n'est pas non plus distingué, où $g : [p] \rightarrow [q]$. On dira qu'un morphisme $f : [n] \rightarrow [p]$ dans I est idéal si aucun de ses composants n'est distingué.

Soit $f : [s] \rightarrow [s + p]$ un morphisme dans une théorie idéale I . On dira que f a un itéré (conditionnel) dans I , si l'équation suivante en $\xi : [s] \rightarrow [p]$ admet une unique solution :

$$\xi = f(\xi, 1_p).$$

On note la solution unique à cette équation f^\dagger . On dira que la théorie idéale I est close par rapport à l'itération conditionnelle ssi tout morphisme idéal f dans I a un itéré f^\dagger dans I .

Définition 34 Une théorie itérative est une théorie idéale qui est enrichie par une opération, l'itération conditionnelle, qui associe à un morphisme idéal $s : [s] \rightarrow [s + p]$ un morphisme $f^\dagger : [s] \rightarrow [p]$ tel que

$$f^\dagger = f(f^\dagger, 1_p),$$

$$g = f(g, 1_p) \Rightarrow g = f^\dagger,$$

où $g : [s] \rightarrow [p]$.

Cet article de C. Elgot met en lumière de façon explicite le lien entre la notion abstraite de machine et les théories algébriques de Lawvere, mais aussi ce qu'il manque à ces dernières pour constituer de véritables modèles du calcul : une notion d'itération (sous la forme d'une équation à point fixe). Tout se passe donc comme si la théorie algébrique venait décrire le contenu calculatoire attendu et la notion d'itération mettait en œuvre ce contenu de façon mécanique.

Ainsi, l'œuvre d'Elgot apparaît comme une illustration claire de l'idée selon laquelle la théorie des catégories peut représenter en elle-même une forme de processus calculatoire, que les théories algébriques viennent déterminer.

4.2.3 Les Théories de Lawvere comme modélisation des propriétés du calcul

Mais les théories de Lawvere jouent également un rôle central, dans le cadre d'une sémantique dénotationnelle des langages de programmation,

dans la modélisation des propriétés particulières des programmes, telles que les effets de bord, le non-déterminisme ou la partialité. Cette orientation des notions élaborées par Lawvere est essentiellement due aux travaux de John Power, et se comprend dans le prolongement des recherches initiées à la fin des années 1980 par Eugenio Moggi.

Le programme de Moggi : les « notions de computation »

Le problème auquel était confronté Moggi était celui de l'équivalence des programmes. Une approche traditionnelle revenait à identifier les programmes à des λ -termes, et à prouver leur équivalence en utilisant la $\beta\eta$ -conversion. Moggi remarque cependant, par exemple dans [180], que cela implique une simplification importante du problème puisque cette procédure laisse de côté le comportement calculatoire des programmes concrets tels que la non-terminaison, le non-déterminisme ou les effets de bord.

La méthodologie de Moggi s'inspire, pour résoudre cette difficulté, de travaux antérieurs de Dana Scott sur les Catégories Cartésiennes Fermées : c'est depuis la théorie des catégories qu'il va s'agir de définir une forme de lambda-calcul permettant de prouver l'équivalence des programmes, comme l'indique Scott :

« I am trying to find out where λ -calculus *should* come from, and the fact that the notion of a cartesian closed category is a late developing one (Eilenberg and Kelly(1966)), is not relevant to the argument : I shall try to explain in my own words [...] why we should look at it *first*. » ([224], 408)

Le programme de Moggi est essentiellement développé dans [181]. Il s'agira :

1. de considérer la théorie des catégories comme une théorie générale des fonctions et de développer dans ce cadre une sémantique des computations basée sur les monades ;
2. de définir un système formel correspondant à cette sémantique catégorique ;
3. d'étendre la sémantique catégorique et le système formel afin de capturer des langages plus riches, comme le lambda-calcul.

Le choix de la théorie des catégories dans cette perspective est également justifié, selon trois points de vue :

« What does Category Theory offer :
 — a way of thinking and general guidelines,
 — an abstract view of objects, which hide the internal structure [...],
 — a syntax independant view of languages/theories (suggested by Categorical Logic) » ([182], 3)

Pour Moggi, la possibilité offerte par la théorie des catégories d'étudier les propriétés des langages de programmation indépendamment des propriétés particulières des langages joue ainsi un rôle central ; l'informatique théorique semble ainsi reprendre un élément essentiel du programme de Lawvere. Plus précisément, Moggi utilise le cadre de la théorie des catégories pour développer une approche

« based on logics for reasoning about mathematical structures that provide models for (functional) programming languages. Such a logic is **programming language independant**, but potentially it can be used to prove properties of programs (like equivalence and correctness). » ([182], 14)

Moggi distingue différents niveaux d'abstraction pour une sémantique catégorique des langages de programmation :

1. les suites d'exécution de commandes peuvent être vues comme des catégories, dont les objets sont les événements et les morphismes des relations entre ces événements ;
2. les programmes peuvent être vus comme des catégories, où les objets sont les états de ces programmes et les morphismes sont les transitions – c'est en un sens l'approche de Elgot ;
3. les programmes ou les suites d'exécution peuvent être vus comme les objets d'une catégorie ;
4. les programmes peuvent être vus comme les morphismes d'une catégorie, dont les objets sont les types.

C'est dans cette dernière perspective que s'inscrivent les travaux de Moggi :

« we [...] consider programs as morphisms in a category. To be precise a *complete program* should be identified with an element, i.e. a morphism with domain the terminal object, while a *program in a environment* corresponds to a morphism. » ([182], 17)

Dans ce cadre, Moggi introduit l'idée centrale de « **notions of computation** », définie comme « a **qualitative** description of the denotations of programs in a certain programming language ». Ainsi, comme exemple de notions de computation, Moggi mentionne les computations avec effets de bord, où un programme dénote une application d'un espace de stockage vers une paire constituée d'une valeur et d'un espace de stockage modifié, les computations avec exceptions, où un programme dénote soit une valeur soit une exception, ou les computations non-déterministes, où un programme dénote un ensemble de valeurs possibles.

Pour modéliser ces propriétés du calcul, Moggi va utiliser la notion catégorique de **monade**, de la façon suivante :

1. on choisit d'abord une catégorie \mathcal{C} comme modèle fonctionnel à l'intérieur duquel seront définis les types de valeur et les computations.

- Plus précisément on introduit une opération unaire T sur les objets de \mathcal{C} qui envoie un objet A de \mathcal{C} considéré comme l'objet des valeurs de type τ , sur un objet TA vu comme objet des computations de type τ ,
2. un programme prenant en entrée une valeur de type A et après un certain calcul donne une valeur de type B , peut être identifié à un morphisme de A vers TB dans \mathcal{C} ,
 3. enfin, on formule un ensemble minimal de conditions sur les valeurs et les computations de telle sorte que les programmes forment les morphismes d'une catégorie.

L'idée générale de Moggi est non pas de se concentrer sur des notions de computation spécifiques, mais plutôt d'identifier les propriétés générales que l'objet TB des computations doit présenter. Cela suppose l'introduction de la notion de monade :

Définition 35 Une monade sur une catégorie \mathcal{C} est un triple (T, η, μ) , où $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur, $\eta : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow T$ et $\mu : T^2 \rightarrow T$ sont des transformations naturelles telles que les équations suivantes sont satisfaites :

1. $\mu_{TA}; \mu_A = T(\mu_A); \mu_A$;
2. $\eta_{TA}; \mu_A = id_{TA} = T(\eta_A); \mu_A$.

Un modèle computationnel est une monade (T, η, μ) satisfaisant la propriété suivante : pour tout $A \in \mathcal{C}$, η_A est un monomorphisme.

Il y a une définition alternative des monades, qui se justifie plus facilement d'un point de vue calculatoire : c'est la notion de **triple de Kleisli**.

Définition 36 Un **triple de Kleisli** sur \mathcal{C} est un triplet $(T, \eta, *)$, où $T : Obj(\mathcal{C}) \rightarrow Obj(\mathcal{C})$, $\eta_A : A \rightarrow TA$, $f^* : TA \rightarrow TB$ pour $f : A \rightarrow TB$ et les équations suivantes sont vérifiées² :

$$\begin{aligned} \eta_A^* &= id_{TA} \\ \eta_A; f^* &= f \\ f^*; g^* &= (f; g^*)^* \end{aligned}$$

Tout triple de Kleisli $(T, \eta, *)$ correspond à une monade (T, η, μ) où $T(f : A \rightarrow B) = (f; \eta_B)^*$ et $\mu_A = id_{TA}^*$. Intuitivement, η_A est l'inclusion des valeurs dans les computations et f^* est l'extension d'une fonction f des valeurs dans les computations en une fonction des computations dans les computations, qui d'abord évalue une computation puis applique f à la valeur qui en résulte. Les équations pour les triples de Kleisli affirment que les programmes forment une catégorie, la catégorie de Kleisli \mathcal{C}_T , où l'ensemble

2. on conserve ici la notation originale, plus proche des usages de l'information théorique, où $g \circ f$ sera noté $f; g$.

$\mathcal{C}_T(A, B)$ de morphismes de A vers B est le même que $\mathcal{C}(A, TB)$, l'identité de A est η_A et la composition de f suivi de g est $f;g^*$: $la;g^*$ prend une valeur a et applique f pour produire une computation fa , puis il l'évalue.

On peut alors proposer quelques exemples de monades sur la catégorie des ensembles :

1. les computations non-déterministes :
 - $T(A) = \mathcal{P}(A)$ et $T(f)(X)$ est l'image de X le long de f ,
 - $\eta_A(a) = \{a\}$,
 - $\mu_A(X) = \bigcup X$.
2. les computations avec effets de bord :
 - $T()$ est le foncteur $(\times S)^S$, où S est un ensemble non-vidé d'espaces de stockage. Intuitivement une computation prend un espace de stockage et retourne une valeur avec l'espace de stockage modifié,
 - $\eta_A(a)$ est $(\lambda s : S < a, s >)$, $\mu_A(f)$ est $(\lambda s : S.eval(fs))$, c'est-à-dire la computation qui étant donné un espace de stockage s , calcule d'abord la paire computation-espace de stockage $< f', s' > = fs$ et ensuite renvoie la paire valeur-espace de stockage $< a, s'' > = f's'$.

La stratégie de Moggi est ensuite d'introduire un langage de programmation tel que les programmes dénotent des morphismes dans la catégorie de Kleisli \mathcal{C}_T correspondant à un modèle computationnel (T, η, μ) sur une catégorie \mathcal{C} . Pour pouvoir interpréter des λ -termes dans un modèle computationnel, il faut alors définir la notion de « monade forte sur une catégorie \mathcal{C} à produits finis », dans la mesure où les modèles catégoriques usuels du λ -calcul sont les catégories cartésiennes fermées. Ces contraintes amènent Moggi à définir une version enrichie du λ -calcul typé : le λ_c -calcul.

Il est intéressant de noter la conclusion de Moggi :

« Our work is just an example of what can be achieved in the study of programming languages by category-theoretic methodology, which free us from the irrelevant detail of syntax and focus our mind on the important structures underlying programming languages. » ([180], 6)

On voit ainsi réapparaître cette idée récurrente, dans le champ de la logique catégorique, d'un dépassement de la syntaxe, comme cela était mis en lumière dès l'introduction de la thèse de Lawvere.

Du point de vue de leurs applications, les travaux de Moggi ont permis notamment le développement du langage de programmation Haskell.

Monades et théories algébriques

La convergence entre la théorie des mondes et le cadre conceptuel introduit par Lawvere a été mise en lumière dès 1966, notamment par Linton [146], qui établit une connexion générale entre les monades et les théories de Lawvere : toute théorie de Lawvere donne une monade sur Ens dont la

catégorie des algèbres est équivalente à la catégorie des modèles de la théorie de Lawvere, et, en généralisant la définition de théorie algébrique, toute monade peut être déterminée de cette façon (à isomorphisme cohérent près).

La question qui se pose alors est de savoir ce que cette connexion entre monades et théories de Lawvere pourrait apporter, concernant une sémantique dénotationnelle. Comme le remarquent M. Hyland et J. Power, cette question se pose d'autant plus après la mise en lumière par Moggi du fait que la monade des effets de bord peut être reconstruite à partir d'opérations plus élémentaires :

« The recognition that Moggi's monad for side-effects arises from the computationally natural operations *lookup* and *update* subject to computationally natural equations was critical to the development of the ideas [...]. The general situation of knowing the monad and reconstructing the theory is not that familiar in mathematics : theory has had to be developed adequately to ground the practice, and the computationally significant examples have had to be worked through [...]. But one should recognise that issues of presentation are also mathematically significant. » ([157], 452)

Une des difficultés inhérentes à l'approche de Moggi des notions de computation par la notion de monade est qu'elle semble à rebours de la pratique mathématique usuelle, prenant pour point de départ les présentations et les opérations.

En outre, Hyland et Power mettent en lumière l'intérêt des théories de Lawvere si l'on cherche à combiner les effets computationnels :

« Returning briefly to the sum of theories we note that in the non-degenerate cases of interest it provides a way of combining theories without adding new equations to either. There is a way to do that (again in non-degenerate cases) purely in terms of monads by using a distributive law. From a distributive law $TS \rightarrow ST$ one gets a composite monad ST ; but from the point of view of Lawvere theories this distributes the operations of L_S over those of L_T , and so the result is very different from the monad corresponding to the sum $L_S + L_T$. Moreover in important instances distributive laws do not exist. It was shown by Plotkin and Varacca that there is no distributive law for any of the non-deterministic choice monads over the probabilistic choice monad or vice versa. [...] In contrast with the situation for distributive laws, the various kinds of composite of Lawvere theories, such as sum, tensor, and a distributive tensor, always exist. Those we know include the combinations of computational effects of primary interest; and it seems likely that further combinations of computational effects which may well arise in particular in the

enriched setting will also be best treated in terms of Lawvere theories. » ([157], 455)

Ainsi l'utilisation des théories de Lawvere pour modéliser les propriétés du calcul, outre sa plus grande proximité avec la pratique mathématique usuelle, va apparaître comme une solution au problème de la combinaison des effets de computation.

Les théories de Lawvere pour modéliser les propriétés du calcul

Cette reformulation dans les termes des théories de Lawvere des travaux de Moggi est essentiellement due à John Power. Elle nécessite dans un premier temps une généralisation des théories algébriques, sous la forme de théories de Lawvere enrichies, notion proposée par John Power en 1999 dans [209]. Cette généralisation des théories de Lawvere s'appuie sur la notion de catégorie enrichie, définie dès 1965 par différents auteurs (sous la forme par exemple des « catégories relatives » de Bénabou). Pour définir la notion de catégorie enrichie, il faut définir au préalable la notion de catégorie monoïdale.

Définition 37 Une catégorie monoïdale est une catégorie \mathcal{C} munie :

- d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$,
- d'un objet I de \mathcal{C} appelé « objet unité »,
- d'un isomorphisme naturel a appelé « associateur » tel que pour tout objet A, B et C de \mathcal{C} , $a_{A,B,C}$ soit un isomorphisme de $(A \otimes B) \otimes C$ dans $A \otimes (B \otimes C)$,
- de deux isomorphismes naturels λ et ρ induisant, pour tout objet A, B et C de \mathcal{C} , des isomorphismes $\lambda_A : I \otimes A \longrightarrow A$ et $\rho_A : A \otimes I \longrightarrow A$.

tels que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes I) \otimes B & \xrightarrow{a_{A,I,B}} & A \otimes (I \otimes B) \\
 \searrow \rho_A \otimes Id_B & & \swarrow Id_A \otimes \lambda_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{a_{A,B,C} Id_D} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{a_{A,B \otimes C,D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\
 \downarrow a_{A \otimes B,C,D} & & & & \downarrow Id_A \otimes a_{B,C,D} \\
 (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{a_{A,B,C \otimes D}} & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
 \end{array}$$

On peut prendre pour exemples de catégories monoïdales la catégorie des ensembles *Set* munie de la réunion disjointe, l'ensemble vide jouant alors le rôle de l'objet unité, ou, si k est un corps commutatif, la catégorie des k -espaces vectoriels munis du produit tensoriel usuel, k jouant le rôle de l'objet unité.

On peut alors définir la notion de catégorie enrichie :

Définition 38 Soit \mathcal{V} une catégorie monoïdale,

une \mathcal{V} -catégorie \mathcal{C} , ou catégorie enrichie sur \mathcal{V} est la donnée de :

- d'un ensemble $Ob(\mathcal{C})$,
- pour toute paire $(A, B) \in Ob_{\mathcal{C}} \times Ob_{\mathcal{C}}$ d'objets de \mathcal{C} , d'un objet $\mathcal{C}(A, B)$ de \mathcal{V} , objet des morphismes de A dans B ,
- pour chaque triplet (A, B, C) d'objets de \mathcal{C} , d'un morphisme $\circ_{A,B,C} : \mathcal{C}(B, C) \otimes \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$ dans \mathcal{V} , appelé morphisme de composition,
- pour chaque objet A de \mathcal{C} , d'un morphisme $j_A : I \rightarrow \mathcal{C}(A, A)$, l'élément identité,

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}(C, D) \otimes \mathcal{C}(B, C)) \otimes \mathcal{C}(A, B) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{C}(C, D) \otimes (\mathcal{C}(B, C) \otimes \mathcal{C}(A, B)) \\
 \downarrow \circ_{B,C,D} \otimes Id_{\mathcal{C}(A,B)} & & \downarrow Id_{\mathcal{C}(C,D)} \otimes \circ_{A,B,C} \\
 \mathcal{C}(B, D) \otimes \mathcal{C}(A, B) & \xrightarrow{\circ_{A,B,D}} & \mathcal{C}(A, D) \xleftarrow{\circ_{A,C,D}} \mathcal{C}(C, D) \otimes \mathcal{C}(A, C)
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{C}(B, B) \otimes \mathcal{C}(A, B) & \xrightarrow{\circ_{A,B,B}} & \mathcal{C}(A, B) & \xleftarrow{\circ_{A,A,B}} & \mathcal{C}(A, B) \otimes \mathcal{C}(A, A) \\
 \uparrow j_B \otimes Id_{\mathcal{C}(A,B)} & \nearrow l & & \nwarrow r & \uparrow Id_{\mathcal{C}(A,B)} \otimes j_A \\
 I \otimes \mathcal{C}(A, B) & & & & \mathcal{C}(A, B) \otimes I
 \end{array}$$

La motivation essentielle de cette définition est de munir l'ensemble de morphismes entre deux objets de la catégorie \mathcal{C} d'une structure supplémentaire : $\mathcal{C}(A, B)$ peut en effet être muni, par exemple d'une structure d'espace topologique, de groupe abélien, de graphe, voire de catégorie (ce qui donne alors une 2-catégorie). La nécessité d'enrichir la catégorie \mathcal{C} sur une catégorie monoïdale vient alors de l'objectif de pouvoir composer des morphismes tout en tenant compte de cette structure supplémentaire. Les catégories enrichies sont étudiées de façon détaillées dans [120].

C'est à l'aide de cette notion que John Power introduit les théories de Lawvere enrichies, qui lui permettent de reprendre le programme de Moggi, et d'utiliser le cadre des théories de Lawvere pour modéliser les propriétés du calcul. John Power introduit sa définition « in seeking a general account of what have been called notions of computations » ([209], 83). On généralise en passant de Ens à une catégorie V qui est localement finiment présentable³ en tant que catégorie close monoïdale (symétrique)⁴ Cela inclut des catégories telles que Cat , $Poset$ et $Graph$, ainsi que toutes les catégories d'algèbres pour une signature équationnelle commutative ordinaire. On peut alors définir la notion de cotenseur :

3. Au sens de Gabriel et Ulmer [83].

4. On trouvera les définitions plus précises de ces notions dans l'ouvrage de Kelly [[120].

Définition 39 *Etant donné un objet X de V et un objet B d'une V -catégorie \mathcal{C} , le X -cotenseur de B , s'il existe, est l'objet B^X de \mathcal{C} accompagné d'une famille d'isomorphismes*

$$\mathcal{C}(A, B)^X \cong \mathcal{C}(A, B^X)$$

V -naturels en A .

Si on remplace V par Ens , le cotenseur définit simplement le X -ième produit de copies de B . Un X -cotenseur est dit fini si X est finiment présentable.

Définition 40 *Une V -théorie de Lawvere est une petite V -catégorie L avec des cotenseurs finis, associés à un V -foncteur $I : V_f^{op} \rightarrow L$ préservant strictement les cotenseurs finis et identique sur les objets, où V_f est le squelette d'une sous- V -catégorie pleine de V déterminée par les objets finiment présentables de V .*

La notion de V -théorie de Lawvere permet ainsi à Power de retrouver, dans le contexte des théories algébriques, les effets computationnels tels que la partialité, les effets de bords ou la récursion. Pour illustrer cette reformulation, on peut prendre l'exemple de la théorie de Lawvere pour les effets de bord.

Soit L un ensemble fini, considéré comme l'ensemble des « emplacements », et V un ensemble dénombrable, considéré comme l'ensemble des « valeurs ». Par exemple, on peut prendre pour V l'ensemble des nombres naturels. On définit l'ensemble S des états d'un langage, comme ensemble V^L des fonctions des emplacements dans les valeurs. S est donc un ensemble dénombrable. On considère les deux opérations de base *lookup* $V \rightarrow L$ et *update* $1 \rightarrow L \times V$, qui ont respectivement pour fonctions, intuitivement, de donner la valeur présente dans un emplacement, et d'inscrire dans un emplacement donné le valeur donnée. On peut alors montrer que la théorie de Lawvere dénombrable⁵ L_S pour les effets de bord est la théorie de Lawvere dénombrable libre engendrée par ces deux opérations, dès lors qu'elles satisfont les équations suivantes : si on définit un symbole de fonction V -aire l_{loc} pour chaque $loc \in L$ et un symbole de fonction unaire $u_{loc,v}$ pour chaque $loc \in L$ et $v \in V$, on a :

1. $l_{loc}(u_{loc,v}(x))_v = x$
2. $l_{loc}(l_{loc}(t_{vv'})_v)_{v'} = l_{loc}(t_{vv'})_v$
3. $u_{loc,v}(u_{loc,v'}(x)) = u_{loc,v'}(x)$
4. $u_{loc,v}(l_{loc}(t_{v'})_{v'}) = u_{loc,v}(t_v)$
5. $l_{loc}(l_{loc'}(t_{vv'})_{v'})_v = l_{loc'}(l_{loc}(t_{vv'})_v)_{v'}$ avec $loc \neq loc'$
6. $u_{loc,v}(u_{loc',v'}(x)) = u_{loc',v'}(u_{loc,v}(x))$ avec $loc \neq loc'$

5. Au sens où on autorise les arités dénombrables.

$$7. u_{loc,v}(l_{loc'}(t_{v'})_{v'}) = l_{loc'}(u_{loc,v}(t_{v'}))_{v'} \text{ avec } loc \neq loc'$$

Les quatre premières équations spécifient les interactions entre les deux opérations de base, les trois suivantes des propriétés de commutation.

Bilan de ces travaux

A partir de ces différents travaux et programmes de recherche, plusieurs points peuvent être mis en évidence. On retrouve tout d'abord dans ce cadre l'idée déjà présente dans les travaux de Lawvere selon laquelle les théories de Lawvere permettent de décrire les programmes indépendamment du choix d'un langage de programmation et rendent possible une forme de détachement des choix syntaxiques pour décrire le contenu calculatoire des programmes qu'elles synthétisent.

Par ailleurs, en montrant que les théories de Lawvere modélisent les propriétés du calcul, telles que le non-déterminisme ou les effets de bord, il serait possible d'étendre cette idée aux travaux originaux de Lawvere en algèbre universelle. Cela reviendrait ainsi à considérer qu'une théorie de Lawvere, de façon générale, capturerait une propriété du calcul, ordinairement pensée en termes de structure ensembliste. Des concepts structurels tels que « Groupe » ou « Anneau » pourraient alors être vus non plus comme des objets (c'est-à-dire des ensembles munis d'une ou plusieurs opérations) mais comme des propriétés d'opérations plus fondamentales, ou du calcul en général. Un groupe abélien par exemple, dans ce cadre, ne serait plus un ensemble sur lequel serait définie une opération, mais une certaine façon de procéder à un calcul.

4.2.4 De la sémantique dénotationnelle à la sémantique opérationnelle

Il semblerait possible de renforcer encore cette idée en examinant d'autres travaux, utilisant les théories de Lawvere non plus comme une forme de sémantique dénotationnelle, comme dans les travaux de Calvin Elgot, mais les réorientant vers une sémantique opérationnelle des langages de programmation.

Les travaux utilisant les théories de Lawvere dans la perspective d'une sémantique opérationnelle sont relativement peu nombreux : on peut penser aux résultats de Selly [227] appliquant les théories *Cat*-enrichies comme sémantique du λ -calcul, les travaux de Ghani et L  th [155] analysant la notion de « modularit   » dans les syst  mes de réécriture de termes au moyen des th  ories *Poset*-enrichies ou les travaux de Meredith et Stay [234] sur une s  mantique   rationnelle utilisant des th  ories de Lawvere    plusieurs sortes enrichies sur la cat  gorie des graphes pour une version   largie du calcul des combinateurs SKI de Post.

J. Baez et C. Williams proposent dans [9] l'unification, à travers la notion de théorie de Lawvere enrichie, des différentes formes de sémantique pour les langages de programmation :

« We thus obtain a spectrum of cartesian closed categories V to enrich over, each connected to the next by a product-preerving functor, which allows us to examine the computation of term calculi in various ways :

- **Simplicial sets** : $sSet$ -theories represent « small-step » operational semantics : an edge is single term rewrite.
- **Categories** : Cat -theories represent « big-step » operational semantics : [...] a morphism is a finite sequence of rewrites.
- **Posets** : Pos -theories represent « full-step » operational semantics : a boolean is the existence of a big-step rewrite.
- **Sets** : Set -theories represent denotational semantics : an element is a connected component of the rewrite relation. » ([9], 108)

On voit ainsi comme, en dernière analyse, la notion de théorie de Lawvere enrichie permet d'unifier les différentes formes de sémantique des langages de programmation :

« a choice of enrichment for Lawvere theories corresponds to a choice of *computation*, and changing enrichments corresponds to a *change of computations*. » ([9], 119)

4.3 Remarques générales

Cette trajectoire des théories de Lawvere dans le contexte de l'informatique théorique met en lumière plusieurs points.

Se révèle ici le caractère fondamentalement opératoire des théories de Lawvere, au delà du cadre de l'algèbre universel : tout se passe en effet comme si les théories de Lawvere permettaient de représenter, dans le cadre formel de la théorie des catégories, l'idée intuitive d'un contenu calculatoire, ce qui détermine la réalisation effective du processus calculatoire. Les théories de Lawvere viendraient ainsi représenter, d'une certaine façon, non pas ce qui est calculé par le calcul, mais ce qui se calcule dans le calcul.

Ce faisant, c'est la dimension constructive de la théorie générale des catégories, qui est ainsi mise en évidence, comme l'ont montré les analyses de McLarty : avant même la théorie des topos et l'intuitionnisme qui leur est inhérent, la théorie des catégories présente une forme de constructivité propre, héritée de l'algèbre.

Ainsi nous avons vu que les langages de programmation, à la différence de la conception modèle-théorique des langages formels, n'appellent pas une évaluation en termes de vérité ou de satisfaction, mais demandent à être mis en œuvre, exécutés : ils ne sont pas du côté de ce qui se *dit*, mais de ce qui

se *fait*. A travers les différents usages qui ont pu être faits des théories de Lawvere dans le contexte de la théorie des automates ou de l'informatique théorique, il nous apparaît ainsi possible de défendre l'idée d'une nature opératoire de la théorie des catégories, opérations dont les propriétés ne seraient pas déterminées ou caractérisées par des systèmes d'axiomes, toujours tributaires d'un choix arbitraire de syntaxe, mais d'objets algébriques spécifiques, dépassant les contraintes des langages formels.

Chapitre 5

La théorie catégorique des modèles

Un des enjeux des travaux de Lawvere étudiés au chapitre 2 était de retrouver la théorie à partir de la catégorie des modèles. L'introduction de sa thèse précisait en effet :

« from the category (or more precisely from an underlying-set functor) we can recover, not only the identities which hold between given operations in a class of algebras, but also the operations themselves (Theorem III.1.1). » ([140], 24)

On a vu cependant, à travers les travaux de Volger et Roisin notamment, qu'il était difficile d'étendre ce projet au delà des limites du cadre algébrique, à la logique du premier ordre en général, sans perdre les avantages du contexte catégorique. Steve Awodey indique néanmoins dans [7], dans une note de bas de passage, la possibilité d'un tel dépassement :

« Technical results concerning the recovery of syntactical 'structure' from a suitable category of models often fall under the heading of 'conceptual completeness' following Makkai and Reyes ». ([7], 213)

L'idée de retrouver la théorie définissant un concept structurel à partir de la catégorie des modèles apparaît donc au cœur de l'approche catégorique de la logique. La question est alors de savoir ce qu'implique ce projet d'extraire de la sémantique la structure syntaxique correspondante. Cela présuppose tout d'abord une antériorité de la classe des modèles, considérée comme une donnée absolue, sur la théorie, c'est-à-dire *in fine* sur le langage qui la caractérise, ce qui soulève le problème épistémologique de l'accès à ces structures. En outre, on peut également poser la question du statut de cette théorie « extraite » de la sémantique, par rapport aux présentations formelles traditionnelles : doit-elle être considérée comme « plus adéquate » au concept que des formulations concurrentes ? Et quel sens donner précisément à une telle « adéquation » ?

C'est dans ses travaux sur la complétude conceptuelle forte que Michael Makkai introduit ce projet :

« The most interesting phenomena in model theory are conclusions concerning the syntactical structure of a first order theory drawn from the examination of the models of the theory. With these phenomena in mind, it is natural to ask if it is possible to endow the collections of models of the theory with a natural abstract structure so that from the resulting entity one can fully recover the theory as a syntactical structure. » ([162], 97)

Le projet développé par Makkai se situe cependant dans un axe de développement différent de celui de Lawvere, ou, pour reprendre Jean-Pierre Marquis et Gonzalo Reyes, « from a slightly different perspective » ([173], 43). Cet axe de recherche pourrait être caractérisé comme l'élaboration progressive d'une théorie catégorique des modèles, initiée dès 1970 essentiellement par les travaux d'André Joyal, formé à la géométrie algébrique issue de EGA4, enrichis par la perspective modèle-théorique de Gonzalo Reyes – formé à Berkeley, il vient alors de terminer sa thèse sous la direction de Craig.

Nous souhaiterions donc placer au cœur de ce chapitre la complétude conceptuelle forte, afin d'en dégager les implications épistémologiques. Ainsi dans une première section, nous examinerons les notions nécessaires à la définition du versant « syntaxique » de ce résultat, en profitant de cette construction pour présenter les concepts fondamentaux de la théorie catégorique des modèles. Dans une deuxième section, nous étudierons le versant sémantique du résultat de Makkai, et principalement les « ultracatégories ». Dans un troisième temps, nous présenterons une conséquence importante de ce résultat, également mise en lumière par Makkai : la complétude conceptuelle. Enfin, nous terminerons ce chapitre en présentant un résultat central, pour ce qui nous occupe, découlant de ces théorèmes : les théorèmes de complétude.

Les analyses de ce chapitre s'appuieront de façon essentielle sur les concepts définis par les mathématiciens : les définitions techniques y occuperont donc une place importante, dans la mesure où c'est en entrant dans les détails de celles-ci que nous essaierons de répondre aux questions épistémologiques soulevées dans les chapitres précédents.

5.1 Les notions fondamentales

5.1.1 Une première approche de la complétude conceptuelle forte

Dans [162], Makkai présente en ces termes la complétude conceptuelle forte :

« The category of structure preserving functors from $\text{Mod } T$ to SET with morphisms the structure preserving natural transformations is equivalent to the pretopos completion of the theory » ([162], 98)

Un tel résultat doit selon Makkai être rapproché de la dualité de Stone pour les algèbres de Boole et les espaces de Stone : si T est une théorie de la logique propositionnelle classique, on peut lui associer son algèbre de Lindenbaum-Tarski B ; les éléments de B sont alors les classes d'équivalence $\phi / \sim \psi$ des formules propositionnelles pour la relation d'équivalence

$$\phi \sim \psi \Leftrightarrow T \vdash \phi \leftrightarrow \psi.$$

Un modèle est une assignation de valeurs de vérité aux atomes propositionnels qui rendent vrais les axiomes de T , et les modèles de T sont en bijection avec les ultrafiltres sur B . L'espace de Stone $S(B)$ des ultrafiltres sur B peut alors être vu comme l'espace des modèles de T . En identifiant les théories propositionnelles avec leurs algèbres de Lindenbaum-Tarski qui, pour citer Makkai, « means an abstraction from the 'presentation' given by the language and the axioms » (p.98), et en identifiant les interprétations d'une théorie propositionnelle dans une autre par des homomorphismes Booléens entre les algèbres de Lindenbaum-Tarski correspondant, on obtient la catégorie \mathcal{BOOLE} des théories propositionnelles vues comme des algèbres de Boole. D'autre part, pour tout objet B de la catégorie \mathcal{BOOLE} , B est un objet de *Stone*, la catégorie des espaces de Stone. On a donc un foncteur

$$S : \mathcal{BOOLE}^{op} \rightarrow \text{Stone}$$

et le théorème de dualité affirme que S est une équivalence de catégories. Le résultat présenté par Makkai est donc le suivant :

« In our theory, propositional theories are replaced by theories in first order predicate logic (with equality) ; the L-T algebra of a propositional theory is replaced by the pretopos completion $P(T)$ of a first order theory T [...]. Just as propositional models of T (a propositional theory) became 2-valued homomorphisms $B(T) \rightarrow 2$, models of T (a first order theory) become identified with certain functors $P(T) \rightarrow \text{SET}$ where SET is the category of all sets and functions [...]. The category \mathcal{BOOLE} is thus replaced by \mathcal{PT} , the category of pretoposes and elementary functors.

The counterpart of *Stone* is of course the new contributions of this paper ; it is UC , the category of *ultracategories* [...].

The Stone functor is $S : \mathcal{BOOLE}^{op} \rightarrow \text{Stone}$ is naturally replaced by the functor

$$\text{Mod} : \mathcal{PT}^{op} \rightarrow UC$$

([162], 99)

Il est donc nécessaire, pour comprendre la complétude conceptuelle forte, de présenter, dans un premier temps, les notions essentielles de ce résultat, et en particulier le passage d'une théorie de la logique du premier ordre à sa complétion de prétopos, et par là même l'identification des théories cohérentes et des prétopos défendue dans [74].

Les concepts utilisés dans cette section, leurs définitions et les résultats qui les concernent sont essentiellement issus des travaux de Makkai et Reyes [74], de la section D de l'ouvrage de Peter Johnstone [115], des résultats d'Olivia Caramello présentés dans [31] et du cours de Jacob Lurie [154].

5.1.2 De la théorie à la catégorie syntaxique

La sémantique catégorique, généralisation de la sémantique Tarskienne

Le point de départ de ces analyses est une théorie T du 1er ordre « classique », comme la théorie des groupes ou la théorie des corps. Il s'agirait donc dans un premier temps de définir précisément cette notion¹.

Relativement à cette syntaxe, il est possible de définir une sémantique, qui peut être vue comme une généralisation catégorique de la sémantique Tarskienne usuelle, définissant la notion de satisfaction d'une formule du premier ordre dans une structure ensembliste. Nous allons donc, dans les paragraphes qui suivent, nous écarter quelque peu de l'approche syntaxique initiale afin d'introduire quelques éléments de la sémantique catégorique, afin de montrer ce qui la sépare de l'approche de Lawvere examinée au chapitre 2.

Définition 41 1. soit \mathcal{C} une catégorie avec produits finis et Σ une signature. Une Σ -structure M dans \mathcal{C} est spécifiée par les données suivantes :

- une fonction assignant à chaque sorte A dans $\Sigma - \text{Sort}$, un objet MA dans \mathcal{C} . Cette fonction est étendue aux suites finies de sortes en définissant $M(A_1, \dots, A_n) = MA_1 \times \dots \times MA_n$ (en posant $M(\square)$, où \square dénote la suite vide, égal à l'objet terminale 1 de \mathcal{C}).
- une fonction assignant à chaque symbole fonctionnel $f : A_1 \dots A_n \rightarrow B$ dans $\Sigma - \text{Fun}$ un morphisme $MF : M(A_1, \dots, A_n) \rightarrow MB$ dans \mathcal{C} .
- une fonction assignant à chaque symbole relationnel $R \mapsto A_1 \dots A_n$ dans $\Sigma - \text{Rel}$ un sous-objet $MR \mapsto M(A_1, \dots, A_n)$ dans \mathcal{C} .

2. les Σ -structures dans \mathcal{C} sont les objets d'une catégorie $\Sigma - \text{Str}(\mathcal{C})$ dont les morphismes sont les homomorphismes de Σ -structures. Un tel homomorphisme $h : M \rightarrow N$ est spécifié par une collection de morphismes

1. Le lecteur est invité, pour cette définition, à se reporter à l'annexe 1

$h_A : MA \rightarrow NA$ dans \mathcal{C} indexée par les sortes de Σ et satisfaisant les deux conditions suivantes :

- pour chaque symbole de fonction $f : A_1 \dots A_n \rightarrow B$ dans $\Sigma - Fun$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M(A_1 \dots A_n) & \xrightarrow{Mf} & MB \\ h_{A_1} \times \dots \times h_{A_n} \downarrow & & \downarrow h_B \\ N(A_1 \dots A_n) & \xrightarrow{Nf} & NB \end{array}$$

- pour chaque symbole relationnel $R \rightrightarrows A_1 \dots A_n$ dans $\Sigma - Rel$, il y a un diagramme commutatif dans \mathcal{C} de la forme

$$\begin{array}{ccc} MR & \longrightarrow & M(A_1 \dots A_n) \\ \downarrow & & \downarrow h_{A_1} \times \dots \times h_{A_n} \\ NR & \longrightarrow & N(A_1 \dots A_n) \end{array}$$

Cette interprétation s'étend aux termes formulés dans Σ :

Définition 42 Soit M une Σ -structure dans une catégorie \mathcal{C} avec produits finis, étant donné un terme-en-contexte $\{\vec{x}.t\}$ sur Σ , où $\vec{x} = (x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})$ et $t : B$, on définit inductivement une flèche

$$[[\vec{x}.t]]_M : MA_1 \times \dots \times MA_n \rightarrow MB$$

dans \mathcal{C} de la façon suivante :

- si t est une variable, alors il est nécessairement un x_i pour un unique $i \in \{1, \dots, n\}$, et on pose $[[\vec{x}.t]]_M$ égale à la i -ième projection du produit

$$\pi_i : MA_1 \times \dots \times MA_n \rightarrow MA_i$$

- si t est $f(t_1, \dots, t_n)$, où $t_i : C_i$, alors $[[\vec{x}.t]]_M$ est égal à la composée

$$MA_1 \times \dots \times MA_n \xrightarrow{\langle [[\vec{x}.t_1]]_M, \dots, [[\vec{x}.t_m]]_M \rangle} MC_1 \times \dots \times MC_m \xrightarrow{Mf} MB$$

Afin d'interpréter les formules du premier ordre dans une catégorie \mathcal{C} , il est nécessaire que la catégorie \mathcal{C} présente une certaine forme de structure catégorique, permettant d'interpréter les connecteurs et les quantificateurs présents dans la formule. Ainsi par exemple, pour interpréter les conjonctions finies, on doit pouvoir former dans \mathcal{C} les pullbacks. Cela conduit à une hiérarchie de types de catégories (ou « doctrines »), de plus en plus structurées.

Définition 43 Une catégorie cartésienne est une catégorie avec les limites finies.

Dans les catégories cartésiennes, on pourra interpréter les formules atomiques et leurs conjonctions finies.

- Définition 44**
1. étant donné deux monomorphismes $m_1 : a_1 \rightarrow c$ et $m_2 : a_2 \rightarrow c$ d'un objet c d'une catégorie \mathcal{C} , on dira que m_1 se factorise par m_2 s'il existe un unique morphisme $r : a_1 \rightarrow a_2$ dans \mathcal{C} tel que $m_2 \circ r = m_1$. Cela définit une relation de préordre \leq sur la collection $Sub_{\mathcal{C}}(c)$ des sous-objets d'un objet donné c ;
 2. on dit qu'une catégorie cartésienne \mathcal{C} a des images si pour tout morphisme f de \mathcal{C} il existe un sous-objet $Im(f)$ de $Cod(f)$, appelé l'image de f , qui est le plus petit, pour la relation de préordre \leq , sous-objet de $Cod(f)$ par lequel f se factorise;
 3. une catégorie régulière est une catégorie cartésienne qui a des images qui sont stables par pullbacks.

Ces définitions peuvent sembler peu intuitives, mais elles reposent sur une forme de routine, comme le précise O. Caramello :

« The process by which these classes of categories are defined is quite canonical : first one looks at the set-theoretic structure needed to interpret the connective and quantifiers occurring in the given fragment, then one proceeds to characterize it in categorical terms, and finally one uses the resulting categorical structure for interpreting the given fragment of logic. » ([31], 30)

Définition 45 Une catégorie cohérente est une catégorie régulière \mathcal{C} dans laquelle tout treillis de sous-objets a des unions finies qui sont stables par pullbacks.

- Définition 46**
1. une catégorie \mathcal{C} est dite *well-powered* si tous les préordres $Sub_{\mathcal{C}}(a)$, pour a un objet quelconque de \mathcal{C} , sont équivalents à une petite catégorie;
 2. une catégorie géométrique est une catégorie régulière *well-powered*, dont les treillis de sous-objets ont des unions arbitraires qui sont stables par pullback.

Définition 47 Une catégorie de Heyting est une catégorie cohérente \mathcal{C} telle que pour toute flèche $f : a \rightarrow b$ dans \mathcal{C} , le foncteur de pullback $f^* : Sub_{\mathcal{C}}(b) \rightarrow Sub_{\mathcal{C}}(a)$ a un adjoint à droite $\forall_f : Sub_{\mathcal{C}}(a) \rightarrow Sub_{\mathcal{C}}(b)$ (en plus de l'adjoint à gauche $\exists_f : Sub_{\mathcal{C}}(a) \rightarrow Sub_{\mathcal{C}}(b)$ qui existe par définition des catégories régulières).

On notera que tous les treillis de sous-objets d'une catégorie de Heyting sont des algèbres de Heyting.

Définition 48 une catégorie cohérente \mathcal{C} est dite booléenne, si tout sous-objet $m : a \rightarrow c$ dans \mathcal{C} est complété, au sens où il existe un unique sous-objet n de c tel que $m \cup n = 1_c$ et $m \cap n = 0_c$.

On a alors un résultat essentiel pour la suite des analyses :

Théorème 13 Tout topos de Grothendieck est une catégorie géométrique.

Avec ces catégories structurées, on peut alors construire l'interprétation des formules du premier-ordre dans les catégories. Soit M une Σ -structure dans une catégorie cartésienne \mathcal{C} . Une formule-en-contexte $\{\vec{x}.\phi\}$ sur Σ (où $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ et $x_i : A_i$) sera interprétée comme un sous-objet $[[\vec{x}.\phi]]_M \rightarrow MA_1 \times \dots \times MA_n$ selon les règles inductives suivantes :

1. si $\phi(\vec{x})$ est $R(t_1, \dots, t_m)$ où R est un symbole de relation de type B_1, \dots, B_m , alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est le pullback

$$\begin{array}{ccc} [[\vec{x}.\phi]]_M & \longrightarrow & MR \\ \downarrow & & \downarrow \\ MA_1 \times \dots \times MA_n & \xrightarrow{\langle [[\vec{x}.t_1]]_M, \dots, [[\vec{x}.t_m]]_M \rangle} & MB_1 \times \dots \times MB_m \end{array}$$

2. si $\phi(\vec{x})$ est $(s = t)$, où s et t sont des termes de type B , alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est l'égaliseur des deux morphismes $[[\vec{x}.s]]_M, [[\vec{x}.t]]_M : MA_1 \times \dots \times MA_n \rightarrow MB$;
3. si $\phi(\vec{x})$ est \top alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est le plus grand élément de $Sub_{\mathcal{C}}(MA_1 \times \dots \times MA_n)$;
4. si ϕ est $\psi \wedge \chi$, alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est l'intersection (i.e. pullback)

$$\begin{array}{ccc} [[\vec{x}.\phi]]_M & \longrightarrow & [[\vec{x}.\chi]]_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ [[\vec{x}.\psi]]_M & \longrightarrow & MA_1 \times \dots \times MA_n \end{array}$$

5. si $\phi(\vec{x})$ est \perp et \mathcal{C} est une catégorie cohérente, alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est le plus petit élément de $Sub_{\mathcal{C}}(MA_1 \times \dots \times MA_n)$;
6. si ϕ est $\psi \vee \chi$ et \mathcal{C} est une catégorie cohérente, alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est l'union des sous-objets $[[\vec{x}.\psi]]_M$ et $[[\vec{x}.\chi]]_M$;
7. si ϕ est $\psi \Rightarrow \chi$ et \mathcal{C} est une catégorie de Heyting, alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est l'implication $[[\vec{x}.\psi]]_M \Rightarrow [[\vec{x}.\chi]]_M$ dans l'algèbre de Heyting $Sub_{\mathcal{C}}(MA_1 \times \dots \times MA_n)$ (de la même façon, $\neg\psi$ est interprété comme le pseudocomplément de $[[\vec{x}.\psi]]_M$) ;

8. si ϕ est $(\exists y)\psi$ où y est de sorte B et \mathcal{C} est une catégorie régulière, alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est l'image de la composée

$$[[\vec{x}.\psi]]_M \longrightarrow MA_1 \times \dots \times MA_n \times MB \xrightarrow{\pi} MA_1 \times \dots \times MA_n$$

où π est la projection du produit sur les n premiers facteurs ;

9. si ϕ est $(\forall y)\psi$ où y est de sorte B et \mathcal{C} est une catégorie de Heyting, alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est $\forall_\pi([[\vec{x}.\psi]]_M)$, où π est le même morphisme que précédemment ;
10. si ϕ est $\bigvee_{i \in I} \phi_i$ et \mathcal{C} est une catégorie géométrique, alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est l'union des sous-objets $[[\vec{x}.\phi_i]]_M$;
11. si ϕ est $\bigwedge_{i \in I} \phi_i$ et \mathcal{C} a des intersections arbitraires de sous-objets, alors $[[\vec{x}.\phi]]_M$ est l'intersection des sous-objets $[[\vec{x}.\phi_i]]_M$.

On notera ainsi une différence fondamentale entre les termes, qui seront interprétés comme des morphismes, et les formules qui sont interprétées comme des objets.

Une difficulté se présente alors ([115], 823) : toutes les formules n'ont pas une interprétation « naturelle » relativement à des homomorphismes arbitraires entre Σ -structures. On dira tout d'abord que, si M est une Σ -structure dans une catégorie cartésienne \mathcal{C} , une formule-en-contexte $\{\vec{x}.\phi\}$ sur Σ (où $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ et $x_i : A_i$) est « interprétable dans \mathcal{C} » s'il existe dans \mathcal{C} un sous-objet $[[\vec{x}.\phi]]_M \multimap MA_1 \times \dots \times MA_n$ respectant les règles inductives précédentes. On ne peut alors avoir, au mieux, que le résultat suivant :

Lemme 1 *Soit \mathcal{C} une catégorie au moins cartésienne, soit $h : M \rightarrow N$ un homomorphisme de Σ -structures dans \mathcal{C} , et soit $\vec{x}.\phi$ une formule-en-contexte qui est à la fois géométrique et interprétable dans \mathcal{C} . On a alors le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} [[\vec{x}.\phi]]_M & \multimap & M(A_1, \dots, A_n) \\ \downarrow & & \downarrow h_{A_1} \times \dots \times h_{A_n} \\ [[\vec{x}.\phi]]_N & \multimap & N(A_1, \dots, A_n) \end{array}$$

Selon P. Johnstone, cette difficulté tient au fait que l'implication ne préserve pas l'ordre sur sa première variable, autrement dit si $X_1 \leq Y_1$ et $X_2 \leq Y_2$, dans un treillis de sous-objet dans une catégorie de Heyting, cela n'implique pas nécessairement que $(X_1 \Rightarrow X_2) \leq (Y_1 \Rightarrow Y_2)$. Le même problème se présente pour la négation et le quantificateur universel. Il est donc nécessaire de préciser la notion de morphisme si l'on souhaite établir un lien avec la théorie des modèles usuelle.

Définition 49 1. on appellera un homomorphisme $h : M \rightarrow N$ de Σ -structure dans une catégorie de Heyting un morphisme élémentaire si, pour toute formule-en-contexte du premier ordre $\vec{x}.\phi$ sur Σ , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} [[\vec{x}.\phi]]_M & \longrightarrow & M(A_1, \dots, A_n) \\ \downarrow & & \downarrow h_{A_1} \times \dots \times h_{A_n} \\ [[\vec{x}.\phi]]_N & \longrightarrow & N(A_1, \dots, A_n) \end{array}$$

2. on appellera h un plongement élémentaire si ce diagramme non seulement commute, mais est un pullback pour toute formule-en-contexte du premier ordre ;
3. on appellera h un plongement (ou on dira que M est sous-structure de N) si le carré ci-dessus est un pullback pour toutes les formules atomiques (incluant l'égalité).

Muni de ces définitions, on peut alors définir formellement la satisfaction d'un axiome dans une structure :

Définition 50 Soit M une Σ -structure dans une catégorie \mathcal{C} ,

1. Si $\sigma = (\phi \vdash \vec{x}\psi)$ est un séquent sur Σ interprétable dans \mathcal{C} , on dira que σ est satisfait dans M (noté $M \models \sigma$) si $[[\vec{x}.\phi]]_M \leq [[\vec{x}.\psi]]_M$ dans $\text{Sub}_{\mathcal{C}}(M(A_1, \dots, A_n))$;
2. si \mathbf{T} est une théorie sur Σ interprétable dans \mathcal{C} , on dira que M est un modèle est un modèle de \mathbf{T} (noté $M \models \mathbf{T}$) si tous les axiomes de \mathbf{T} sont satisfaits dans M ;
3. on écrit $\mathbf{T} - \text{Mod}(\mathcal{C})$ pour la sous-catégorie pleine de $\Sigma - \text{Struc}(\mathcal{C})$ dont les objets sont les modèles de \mathbf{T} , et $\mathbf{T} - \text{Mod}(\mathcal{C})_e$ pour la sous-catégorie non-pleine avec les mêmes objets mais seulement les morphismes élémentaires.

On peut donner quelques exemples concrets de cette démarche :

1. un groupe topologique peut être vu comme un modèle de la théorie algébrique des groupes dans la catégorie des espaces topologiques ;
2. un groupe algébrique (resp. de Lie) est un modèle de la théorie algébrique des groupes dans la catégorie des variétés algébriques (resp. dans la catégories des variétés lisses) ;
3. un faisceau d'anneau sur un espace topologique X peut être vu comme un modèle de la théorie des anneaux dans le topos $Sh(X)$ des faisceaux sur X .

On peut alors démontrer un résultat indispensable au développement de la théorie des modèles : un **théorème d'adéquation**.

Théorème 14 *Soit \mathbf{T} une théorie de Horn (resp. régulière, cohérente, intuitionniste, classique, géométrique) sur une signature Σ , et soit M un modèle de \mathbf{T} dans une catégorie cartésienne (resp. régulière, cohérente, de Heyting, cohérente booléenne, géométrique) \mathcal{C} ,*

si σ est un séquent (dans le fragment approprié du langage de premier ordre sur Σ) qui est prouvable dans \mathbf{T} , alors $M \models \sigma$.

On trouvera une preuve par exemple dans ([115], 832).

Ces définitions et ces résultats permettent par ailleurs d'introduire un résultat « syntaxique » important, qui articule les théories mathématiques « usuelles » et les théories telles que les étudie en général la théorie catégorique des modèles, et la complétude conceptuelle forte en particulier :

Théorème 15 *Soit \mathbf{T} une théorie du premier ordre sur une signature Σ . Alors il existe une signature Σ' contenant Σ , et une théorie cohérente \mathbf{T}' sur Σ' , telle que pour toute catégorie cohérente booléenne \mathcal{C} on a*

$$\mathbf{T} - \text{Mod}(\mathcal{C})_e \simeq \mathbf{T}' - \text{Mod}(\mathcal{C})$$

La théorie \mathbf{T}' est parfois appelée la Morleyization de \mathbf{T} .

On trouvera une preuve de ce résultat dans ([115], 859-860). Ainsi, la restriction du résultat de Makkai au fragment cohérent n'empêche en rien son application aux théories mathématiques « usuelles », via la Morleyization.

P. Johnstone résume en ces termes les premières étapes de la théorie catégorique des modèles :

« The definitions [...] provide an extremely useful tool for constructing objects and morphisms with prescribed properties in a given category \mathcal{C} . Starting with (a structure for) a signature with names some 'basic' objects and morphisms of \mathcal{C} , we can use the terms and formulae over this signature to name more complicated objects and morphisms via the categorical semantics. »

([115], 828)

On voit ainsi ce qui sépare la perspective ouverte par la théorie catégorique des modèles de la sémantique fonctorielle de Lawvere étudiée au chapitre 2. En effet, le résultat principal semble identique, à savoir munir les objets d'une catégorie d'une structure, dans la filiation des travaux de Hilton et Eckmann sur la structure de groupe. Mais la méthode mise en œuvre est bien distincte. Alors que Lawvere dans sa thèse met l'accent sur la recherche d'un invariant des présentations, reprenant ainsi un programme de recherche ouvert par l'algèbre universelle et que l'on retrouve jusque dans les travaux de Roisin sur le premier ordre, la théorie catégorique des modèles commence par se donner une signature Σ , à partir de laquelle elle élabore d'une part une syntaxe, c'est-à-dire un ensemble de formules, et d'autre part une sémantique, sous la forme des Σ -structures. La notion de langage formel reste donc

centrale dans cette nouvelle approche. Par ailleurs, alors que dans le cadre des travaux de Lawvere les théories deviennent des catégories et les modèles des foncteurs, dans le cadre de la théorie catégorique des modèles ces derniers restent des objets (certes généralisés au-delà de la catégorie des ensembles). Il ne s'agit dès lors pas dans ce cadre d'une sémantique fonctorielle.

En réalité cependant, les deux trajectoires, semblent converger, comme le souligne P. Johnstone dans [115]. Après avoir posé la définition suivante :

Définition 51 *Soient \mathbf{T} et \mathbf{T}' deux théories sur la même signature Σ . On dira que \mathbf{T} et \mathbf{T}' sont équivalentes si tout axiome de \mathbf{T}' est prouvable (dans le fragment du premier ordre approprié) dans \mathbf{T} , et réciproquement.*

Johnstone précise :

« Note, however, that our notion of equivalence is still signature-dependent : we cannot say, for example, that the theory of Boolean algebras (that is, complemented distributive lattices) is equivalent to the theory of Boolean rings (that is, rings in which every element x satisfies $x^2 = x$), because they are written over different signatures. Later on, we shall introduce the weaker notion of 'Morita equivalence' which frees our theories from this dependence on a particular signature. » ([115], 835)

On voit apparaître, dans cette remarque de Johnstone et les notions qu'il y introduit, ce même projet, déjà présent chez Lawvere, de dépasser les difficultés posées par la dépendance des structures au langage. Il semblerait ainsi également possible, dans le cadre de la théorie catégorique des modèles, de ressaisir cette « formalism-freeness » que visait J. Kennedy [121] en introduction. Mais pour ce faire, il est nécessaire d'introduire une nouvelle notion : les catégories syntaxiques.

Les catégories syntaxiques

Historiquement, la notion de catégorie syntaxique est introduite en 1973 [53] par Jean Dionne dans sa thèse de master sous la direction de Gonzalo Reyes (voir [173]). La procédure de construction d'une catégorie syntaxique (ou « conceptuelle » dans les termes de Dionne) est la suivante : étant donné une signature Σ et une théorie \mathbf{T} dans Σ , on définit une relation d'équivalence entre les formules de Σ par

$$\phi \sim \psi \quad \text{ssi} \quad \mathbf{T} \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) (\phi \Leftrightarrow \psi)$$

où x_1, \dots, x_n sont les variables libres de ϕ et ψ . Les classes d'équivalence de formules sont alors les objets de la catégorie syntaxique, dont les morphismes sont les classes d'équivalence de relations fonctionnelles définissables sur la

signature. Ainsi une flèche entre deux objets $[\phi(\vec{x})]$ et $[\psi(\vec{y})]$ sera représentée par une formule fonctionnelle $\alpha(\vec{x}, \vec{y})$; plus exactement $[\alpha(\vec{x}, \vec{y})]$ sera un morphisme $[\phi(\vec{x})] \rightarrow [\psi(\vec{y})]$ si et seulement si

$$\mathbf{T} \vdash (\forall \vec{x})(\phi(\vec{x}) \Rightarrow (\exists! \vec{y}) \wedge \alpha(\vec{x}, \vec{y}))$$

où $\phi(\vec{x})$, $\psi(\vec{y})$ et $\alpha(\vec{x}, \vec{y})$ sont n'importe quel représentant de $[\phi(\vec{x})]$, $[\psi(\vec{y})]$ et $[\alpha(\vec{x}, \vec{y})]$ respectivement.

Pour Jean Dionne, les avantages de cette construction sont multiples : d'une part,

« ainsi munis d'une structure de catégorie conceptuelle, notre langage et notre théorie forment un objet d'étude plus simple et surtout plus complet, en ce sens que l'on peut maintenant étudier un nombre beaucoup plus grand de rapports entre les concepts. Auparavant, nous étions limités aux relations inclusives ou, si l'on préfère, implicatives, alors que maintenant, toute relation fonctionnelle devient immédiatement accessible à la fois comme objet et comme morphisme de notre catégorie. Si nous admettons mieux connaître un concept à mesure que nous découvrons ses rapports avec les autres, l'avantage de notre construction devient évident » ([53], 3)

et d'autre part,

« la théorie des modèles sera justement un autre exemple des simplifications apportées par les catégories conceptuelles. Jusqu'à maintenant on ne s'intéressait le plus souvent, pour les modèles, qu'à la théorie des ensembles; or plusieurs théories parfaitement consistantes n'ont aucune réalisation ensembliste. » ([53], 4)

Pour illustrer son propos, Dionne mentionne un exemple de Ryll-Nardzewski alors inédit d'une théorie \mathbf{T} de $\mathcal{L}_{\omega_1, \omega}$ qui est complète et telle que tout sous-ensemble dénombrable d'énoncés de \mathbf{T} a un modèle dans les ensembles alors que la théorie elle n'en possède pas. Dionne conclut ses travaux en indiquant que sa construction des catégories syntaxiques offre :

« l'avantage de nous permettre maintenant de travailler sans utiliser les axiomes, les règles d'inférence, les démonstrations formelles et le reste. Nous pouvons même oublier les variables, lesquelles se sont toujours avérées fort difficiles à manier. Passant aux catégories, nous pouvons faire de la logique de façon « abstraite » en termes d'objets, de flèches, de foncteurs et de diagrammes, ce qui, de tous les avantages mentionnés dans ce travail, n'est pas le moindre, le logicien étant naturellement plus intéressé par les concepts que par les indices à donner aux variables. » ([53], 110)

Il serait possible de discuter l'idée selon laquelle les classes d'équivalence de formules ainsi définies donneraient accès à des « concepts » à proprement parler. Mais, quoi qu'il en soit, les travaux de Dionne constituent clairement une première étape de rapprochement avec la sémantique fonctorielle de Lawvere.

Cette définition des catégories syntaxiques est utilisée par Makkai et Reyes dans ([74] chapitre 8, §2). Néanmoins, cette notion y est introduite de façon proprement catégorique, par une propriété universelle. On peut noter en effet le fait que M soit un modèle de la théorie \mathbf{T} dans une catégorie \mathcal{C} sous la forme $M : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{C}$. On peut alors formuler le résultat suivant :

Théorème 16 *Pour toute théorie cohérente finitaire \mathbf{T} , il y a une catégorie cohérente $\mathcal{C}_{\mathbf{T}}$, avec un $\mathcal{C}_{\mathbf{T}}$ -modèle $M_{\mathbf{T}}$ de \mathbf{T} tel que, pour tout modèle $M : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{D}$, un \mathcal{D} -modèle de \mathbf{T} pour une catégorie cohérente arbitraire \mathcal{D} , on a un foncteur cohérent $I : \mathcal{C}_{\mathbf{T}} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T} & \xrightarrow{M_{\mathbf{T}}} & \mathcal{C}_{\mathbf{T}} \\ & \searrow M & \downarrow I \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

où I est unique à isomorphisme près.

Makkai et Reyes commentent ainsi cette caractérisation catégorique des catégories syntaxiques² :

« $\mathcal{R}_{\mathbf{T}}$ is the result of a usual sort of 'universal construction' that is quite straightforward, and in fact, essentially determined by the property of $\mathcal{R}_{\mathbf{T}}$ itself [...]. Let us point out that there is a close analogy between the construction of $\mathcal{R}_{\mathbf{T}}$ and the construction of the Lindenbaum-Tarski algebra $\mathcal{B}_{\mathbf{T}}$ of a theory. [...] This is a point where we can observe how categories provide an algebraization of logic. Just as cylindric and polyadic algebras are richer than Boolean algebras, the category $\mathcal{R}_{\mathbf{T}}$ is a richer structure than the Lindenbaum-Tarski algebra, and this makes it able to fully reflect the content of the theory \mathbf{T} .

[...] For all practical purposes, \mathbf{T} and $\mathcal{R}_{\mathbf{T}}$ are the same. If one draws the conclusion from this that thereby logic as conceived traditionally has been eliminated in favor of categorical notions, then one should be reminded that [some theorems] will equally show that categories (in the « logical » situations at least) can be eliminated in favor of logic. We think that the main point is that the present natural identification of logic with categorical

2. Makkai et Reyes n'utilisent pas ici la même terminologie que celle que nous avons introduite : la catégorie syntaxique associée à une théorie \mathbf{T} est notée $\mathcal{R}_{\mathbf{T}}$.

formulation is, at least potentially, useful since it makes possible relating two vast but so far rather unrelated resources, namely logical-model theoretical experience and category theoretical experience. » ([74], 241)

Ainsi, le rapprochement que nous proposons d'opérer dans ces analyses entre théorie des catégories et théorie des modèles semble pleinement, et formellement, légitime. C'est sur le plan de la méthode (« for all practical purposes ») qu'un tel lien prend sens, bien plus que sur des questions fondationnelles.

Par ailleurs, ce lien établi par Makkai et Reyes entre la catégorie syntaxique $\mathcal{C}_{\mathbf{T}}$ et le modèle M_0 est également mis en lumière par P. Johnstone dans ([115], section D1.4). Dans cette perspective la première utilité du modèle $M_{\mathbf{T}}$, dit « modèle générique », est de permettre la démonstration du théorème de complétude :

« One advantage of considering models in general categories, rather than just in \mathbf{Set} , is that the [completeness] theorem has a particularly simple form : given a theory \mathbf{T} , we shall construct a category $\mathcal{C}_{\mathbf{T}}$ of the appropriate kind (the syntactic category of \mathbf{T}) containing a particular \mathbf{T} -model $M_{\mathbf{T}}$ (the generic model of \mathbf{T}) with the property that the sequents valid in $M_{\mathbf{T}}$ are precisely those provable in \mathbf{T} . [...]

The basic idea behind the construction of $\mathcal{C}_{\mathbf{T}}$ is that its objects are precisely those things which have to be present in any category (of the appropriate kind), containing a model of \mathbf{T} . More specifically, every object of $\mathcal{C}_{\mathbf{T}}$ will be the interpretation in $M_{\mathbf{T}}$ of some formula-in-context of the language of \mathbf{T} . » ([115], 841)

Ces remarques éclairent non seulement la construction du modèle générique, mais également sa fonction : la généricité de $M_{\mathbf{T}}$ peut ainsi être comprise comme le fait que tout ce qui est vrai de ce modèle est démontrable. Le modèle générique, d'une certaine façon, a pour fonction de faire le lien entre la syntaxe et la sémantique, dans la mesure où ces deux versants semblent y coïncider. À travers cette notion de modèle générique, apparaît ainsi un lien entre la sémantique fonctorielle de Lawvere et la théorie catégorique des modèles.

Le rôle joué par le modèle générique dans la démonstration du théorème de complétude amène à rapprocher cette notion de la construction du modèle syntaxique proposé par L. Henkin dans le même cadre : ce modèle syntaxique de Henkin en effet, de la même façon que le modèle générique $M_{\mathbf{T}}$, fait coïncider la syntaxe et la sémantique en une même structure. Il est cependant possible de mettre en lumière ce qui distingue ces deux approches, et de révéler ainsi, par contraste, ce qui est propre à l'approche catégorique en théorie des modèles. La construction de Henkin en effet passe par un travail sur le langage et, *en même temps*, sur le domaine d'interprétation : le langage de départ est en effet enrichi par un ensemble de « constantes

témoins » qui, une fois cet ensemble quotienté par une relation d'équivalence adéquate, va constituer l'univers du modèle syntaxique. Le modèle générique M_T au contraire n'est déterminé que par sa « place » dans la catégorie des modèles de la théorie (le diagramme commutatif du théorème précédent) : les « éléments » du modèle générique ne sont aucunement pris en compte.

Cela apparaît en outre dans la construction possible du modèle générique $M_{\mathbf{T}}$, de la façon suivante ([31], 47³) :

Définition 52 Soit \mathbf{T} une théorie géométrique sur une signature Σ . Le modèle générique de \mathbf{T} dans \mathcal{C}_T est la structure $M_{\mathbf{T}}$ qui associe :

- à une sorte A de Σ l'objet $[x^A.\top]$ où x^A est une variable de sorte A ;
- à un symbole de fonction $f : A_1 \dots A_n \rightarrow B$ le morphisme

$$[x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}.\top] \xrightarrow{[f(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})=y^B]} [y^B.\top]$$

- à un symbole de relation $R \multimap A_1 \dots A_n$ le sous-objet

$$[x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}.R(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})] \xrightarrow{[R(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})]} [x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}.\top]$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 17 Soit \mathbf{T} une théorie géométrique sur une signature Σ ,

1. pour toute formule-en-contexte géométrique $[\vec{x}.\phi]$ sur Σ , son interprétation $[[\vec{x}.\phi]]_{M_{\mathbf{T}}}$ dans $M_{\mathbf{T}}$ est le sous-objet $[\phi] : [\vec{x}.\phi] \multimap [\vec{x}.\top]$;
2. un séquent géométrique $(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$ sur Σ est satisfait dans $M_{\mathbf{T}}$ si et seulement si il est prouvable dans \mathbf{T} .

Les théorèmes essentiels concernant les catégories syntaxiques sont alors les suivants :

Théorème 18 1. pour toute théorie cartésienne \mathbf{T} , \mathcal{C}_T est une catégorie cartésienne ;

2. pour toute théorie régulière \mathbf{T} , \mathcal{C}_T est une catégorie régulière ;
3. pour toute théorie cohérente \mathbf{T} , \mathcal{C}_T est une catégorie cohérente ;
4. pour toute théorie du premier ordre intuitionniste \mathbf{T} , \mathcal{C}_T est une catégorie de Heyting ;
5. pour toute théorie géométrique \mathbf{T} , \mathcal{C}_T est une catégorie géométrique ;
6. pour toute théorie du premier ordre classique \mathbf{T} , \mathcal{C}_T est une catégorie cohérente booléenne.

et par ailleurs,

3. O. Caramello, comme P. Johnstone, définit les catégories syntaxiques en utilisant une autre relation d'équivalence, mais les résultats obtenus sont équivalents.

- Théorème 19**
1. pour toute théorie cartésienne \mathbf{T} et toute catégorie cartésienne \mathcal{D} , on a une équivalence de catégories $\text{Cart}(\mathcal{C}_{\mathbf{T}}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{T} - \text{mod}(\mathcal{D})$ naturelle en \mathcal{D} ;
 2. pour toute théorie régulière \mathbf{T} et toute catégorie régulière \mathcal{D} , on a une équivalence de catégories $\text{Reg}(\mathcal{C}_{\mathbf{T}}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{T} - \text{mod}(\mathcal{D})$ naturelle en \mathcal{D} ;
 3. pour toute théorie cohérente \mathbf{T} et toute catégorie cohérente \mathcal{D} , on a une équivalence de catégories $\text{Coh}(\mathcal{C}_{\mathbf{T}}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{T} - \text{mod}(\mathcal{D})$ naturelle en \mathcal{D} ;
 4. pour toute théorie géométrique \mathbf{T} et toute catégorie géométrique \mathcal{D} , on a une équivalence de catégories $\text{Cart}(\mathcal{C}_{\mathbf{T}}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{T} - \text{mod}(\mathcal{D})$ naturelle en \mathcal{D} ;
 5. pour toute théorie du premier ordre finitaire intuitionniste \mathbf{T} et toute catégorie de Heyting \mathcal{D} , on a une équivalence de catégories $\text{Heyt}(\mathcal{C}_{\mathbf{T}}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{T} - \text{mod}_e(\mathcal{D})$ naturelle en \mathcal{D} ;
 6. pour toute théorie du premier ordre finitaire classique \mathbf{T} et toute catégorie Booléenne \mathcal{D} , on a une équivalence de catégories $\text{Bool}(\mathcal{C}_{\mathbf{T}}, \mathcal{D}) \simeq \mathbf{T} - \text{mod}_e(\mathcal{D})$ naturelle en \mathcal{D} .

Ce dernier théorème montre ainsi la convergence entre l'approche de Lawvere et les catégories syntaxiques de Dionne : *in fine*, les modèles sont bien conçus comme des foncteurs, une fois ramenée la présentation « linguistique » à une catégorie. Mais qu'en est-il dès du second aspect essentiel de l'approche de Lawvere, à savoir la recherche d'un invariant des présentations, évoquée plus haut ?

Ce point est développé par P. Johnstone :

« So, up to equivalence of model categories, cartesian categories are 'the same thing as' small cartesian categories. This is the basis of the notion of Morita-equivalence at which we have hinted earlier : we say that two cartesian theories \mathbf{T} et \mathbf{T}' are Morita-equivalent if their syntactic categories $\mathcal{C}_{\mathbf{T}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbf{T}'}$ are equivalent. By 1.4.7 [le théorème ci-dessus], this is equivalent to saying that their categories of models in any cartesian category \mathcal{D} are equivalent, in a fashion which is natural in \mathcal{D} . (The term 'Morita-equivalence' is borrowed from ring theory, where it is used to describe the relation between two rings which says that their categories of modules are equivalent ; the analogy between modules over a ring and models of a theory is often a fruitful one.)

In passing, we note the following result about Morita-equivalence, which shows that (for fragments of logic containing cartesian logic) there was some redundancy in Definition 1.1.1, in that we could have done without either the relation symbols or the function symbols. » ([115], 846)

(On se souvient que, dans le chapitre 2, Gavin Wraith avait exploité de façon systématique cette analogie dans le cadre des théories algébriques de Lawvere).

On a en effet le résultat suivant, valable pour tout fragment du premier ordre contenant la logique cartésienne :

Lemme 2 *Pour toute théorie cartésienne \mathbf{T} , il existe des théories cartésiennes \mathbf{T}' et \mathbf{T}'' , Morita-équivalente à \mathbf{T} , telle que la signature de \mathbf{T}' n'a pas de symbole relationnel, et celle de \mathbf{T}'' n'a pas de symbole fonctionnel.*

Pour Johnstone, ce résultat fait donc signe vers une forme d'indépendance à l'égard du langage : la Morita-équivalence capturerait ainsi le 'contenu' d'une théorie indépendamment de la signature dans laquelle elle est donnée.

Munis de toutes ces notions et résultats, il est alors possible de démontrer, de façon presque immédiate, un théorème de complétude :

Théorème 20 *Soit \mathbf{T} une théorie cartésienne (resp. régulière, cohérente, géométrique, du premier-ordre) sur une signature Σ . Si un séquent σ cartésien (resp. régulier, cohérent, géométrique, de Heyting) est satisfait dans tous les modèles de \mathbf{T} dans des catégories cartésiennes (resp. régulières, cohérentes, géométriques, de Heyting), alors il est prouvable dans \mathbf{T} .*

5.2 Le versant « syntaxique »

5.2.1 De la catégorie syntaxique au topos classifiant

Afin d'introduire le versant « syntaxique » de la complétude conceptuelle forte en suivant les travaux de Makkai, la démonstration du théorème rend nécessaire l'introduction d'un concept essentiel à l'élaboration d'une théorie catégorique des modèles : le topos classifiant. Sans rentrer dans les détails historiques du développement de cette notion (que l'on retrouve dans [116]), on peut comprendre cette notion comme une généralisation en termes catégoriques de la notion topologique d'espace classifiant, et on trouve dans les travaux de Makkai et Reyes les premières analyses du topos classifiant d'une théorie du premier ordre.

Un exemple d'espace classifiant

Afin d'illustrer et de motiver l'élaboration de la notion de topos classifiant, il est possible de partir d'un exemple d'espace classifiant, en contexte topologique : les groupes de cohomologie.

Ainsi, on définit tout d'abord les n -simplexes standard

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t_n \leq 1, \sum t_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Δ^n a pour sommets $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $v_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1)$ dans \mathbb{R}^{n+1} et a pour i -ème face

$$\Delta^{n-1}(i) = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) : t_i = 0\}$$

Définition 53 1. un n -simplexe singulier de l'espace topologique X est une application continue $f_i : \Delta^n \rightarrow X$;

2. une n -chaîne singulière est une combinaison linéaire finie $\sum n_i f_i$ où chaque $f_i : \Delta^n \rightarrow X$ est un n -simplexe singulier, avec n_i pris dans un groupe abélien G ;

3. le groupe des n -chaînes singulières $C_n(X; G)$ est un groupe abélien libre engendré par tous les n -simplexes singuliers de X ;

4. l'homomorphisme de bord ∂ est défini par

$$\partial : C_n(X; G) \rightarrow C_{n-1}(X; G), f \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i e_i(f)$$

où e_i est donné par $e_i(f) = f|_{\Delta^{n-1}(i)}$, restriction de f à la i -ième face de Δ^n

On peut alors définir la cohomologie singulière à proprement parler :

Définition 54 1. Etant donné un espace topologique X et un groupe abélien π , le groupe de cochaînes singulières $C^n(X; \pi)$ à coefficients dans π est défini comme le groupe dual donné par $C^n(X; \pi) = \text{Hom}(C_n(X; \pi), \pi)$ du groupe de chaînes singulières $C_n(X; \pi)$;

2. étant donné une cochaîne $\alpha \in C^n(X; \pi)$, α est un homomorphisme de groupe $C_n(X; \pi) \rightarrow \pi$. L'application de cobord $\delta : C_{n+1} \rightarrow \pi$ est définie par $\delta(\alpha) : \alpha \circ \partial$ qui est l'application composée

$$C_{n+1}(X; \pi) \xrightarrow{\partial} C_n(X; \pi) \xrightarrow{\alpha} \pi$$

3. le groupe de cohomologie $H^n(X; \pi)$ avec ses coefficients dans le groupe abélien π est défini comme le groupe quotient $\ker \delta / \text{Im} \delta$ à $C^n(X; \pi)$ dans le complexe de cochaînes

$$\dots \longleftarrow C^{n+1}(X; \pi) \xleftarrow{\delta^n} C^n(X; \pi) \xleftarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1}(X; \pi) \longleftarrow \dots \longleftarrow C^0(X; \pi) \longleftarrow 0$$

Pour un espace topologique X le groupe de cohomologie singulière de dimension n à coefficients dans un groupe abélien π , $H^n(X; \pi)$, est donc défini pour tout entier naturel n . C'est un foncteur covariant sur π et contravariant sur X . De plus deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ qui sont homotopes ($f \simeq g$) induisent un unique homomorphisme de groupe de cohomologie

$$f \simeq g \Rightarrow f^* = g^* : H^n(Y, \pi) \rightarrow H^n(X, \pi)$$

Il y a en particulier un espace topologique $K(\pi, n)$ qui a pour groupe de cohomologie $H^n(K(\pi, n), \pi)$ isomorphe à $Hom(\pi, \pi)$. Cet isomorphisme envoie une classe de cohomologie γ_n en dimension n sur l'homomorphisme de groupe identité $\pi \rightarrow \pi$. Il a la propriété suivante : pour toute classe de cohomologie de dimension n $c_n \in H^n(X, \pi)$ dans un espace paracompact X , il existe une application continue $f : X \rightarrow K(\pi, n)$ avec $f^*\gamma_n = c_n$, et cette application est unique à homotopie près. Ainsi, si $[X, Y]$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues $X \rightarrow Y$, on a une bijection

$$\theta_X : H^n(X, \pi) \rightarrow [X, K(\pi, n)]$$

$$c_n \mapsto f : X \rightarrow K(\pi, n)$$

avec $f^*\gamma_n = c_n$. Cette bijection est naturelle en X et π et détermine la classe universelle comme la préimage de l'application identité de $K(\pi, n)$.

$K(\pi, n)$ est l'espace classifiant pour la cohomologie, ou espace d'Eilenberg-Mac Lane. On trouvera dans ([2], 409-413), différentes constructions de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane. On trouvera également dans ([133], 423-434) d'autres exemples d'espaces classifiants.

Les topos de Grothendieck

La reformulation catégorique de la notion d'espace classifiant suppose l'introduction des topos de Grothendieck, dont les topos classifiants sont des exemples.

On peut définir, dans une catégorie \mathcal{C} donnée, la notion de crible :

Définition 55 *Soit \mathcal{C} une catégorie et X un objet de \mathcal{C} . Un crible sur X est une collection de flèches de cible X qui est stable par composition à droite, c'est-à-dire qui est telle que pour toute flèche f de la collection, les flèches de la forme $f \circ g$ sont encore dans la collection. Pour toute flèche $f : Z \rightarrow X$, le crible principal associé à f est la collection, notée $\langle f \rangle$, des flèches de la forme $f \circ g$. Le crible maximal sur X est le crible principal $\langle 1_X \rangle$ associé à l'identité de X , c'est-à-dire la collection de toutes les flèches de cible X .*

A partir de la notion de crible, on peut alors introduire celle de topologie de Grothendieck sur une catégorie :

Définition 56 *Soit \mathcal{C} une petite catégorie, et pour chaque objet U de \mathcal{C} , soit $J(U)$ un ensemble de cribles sur U . La famille d'ensembles $(J(U))_{U \in Ob(\mathcal{C})}$ est appelée une topologie de Grothendieck sur \mathcal{C} si :*

1. pour chaque objet U le crible maximal sur U appartient $J(U)$;
2. (stabilité) pour toute flèche $f : U' \rightarrow U$, et tout crible sur U $\gamma \in J(U)$, on a $f^*(\gamma) \in J(U')$;

3. (transitivité) pour tout $\gamma \in J(U)$ et tout crible δ sur U tel que pour toute flèche $f : V \rightarrow U$ de γ , $f^*(\delta) \in J(V)$, on a $\delta \in J(U)$.

Le couple (\mathcal{C}, J) est appelé un site. Les éléments de $J(U)$ sont appelés les cribles couvrants (sous-entendu : couvrant U).

Il est alors possible d'introduire les notions essentielles :

Définition 57 Soit (\mathcal{C}, J) un site :

1. un préfaisceau d'ensembles sur \mathcal{C} est un foncteur $P : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ens}$;
2. un faisceau sur (\mathcal{C}, J) (ou J -faisceau sur \mathcal{C}) est un préfaisceau $P : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Ens}$ tel que pour tout crible J -couvrant $S \in J(c)$ et toute famille $\{x_f \in P(\text{dom}(f)) \mid f \in S\}$ tel que $P(g)(x_f) = x_{f \circ g}$ pour tout $f \in S$ et toute flèche g de \mathcal{C} composable avec f , il existe un unique élément $x \in P(c)$ tel que $x_f = P(f)(x)$ pour tout $f \in S$;
3. la catégorie $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ des faisceaux sur (\mathcal{C}, J) a pour objets les faisceaux sur (\mathcal{C}, J) et comme flèches les transformations naturelles entre eux ;
4. un topos de Grothendieck est une catégorie équivalente à une catégorie $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ de faisceaux sur un petit site (\mathcal{C}, J) ;
5. un site de définition pour un topos de Grothendieck \mathcal{E} est un petit site tel que $\mathcal{E} \simeq \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$.

On peut définir deux types de morphismes entre topos : les morphismes géométriques et les morphismes logiques. La théorie des topos classifiants implique de définir le premier type de morphisme.

- Définition 58** 1. un morphisme géométrique de topos $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ est une paire de foncteurs adjoints $f_* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ et $f^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, appelés respectivement l'image directe et l'image inverse de f , tels que l'adjoint à gauche f^* préserve les limites finies (f^* préserve nécessairement les colimites car il a un adjoint à droite, tandis que f_* préserve toujours les limites) ;
2. une transformation géométrique $\alpha : f \rightarrow g$ entre deux morphismes géométriques $f, g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ est une transformation naturelle $f^* \rightarrow g^*$.

On peut alors introduire la notion de topos classifiant (on reprendra ici la présentation de MacLane et Moerdijk dans ([133], 435)).

Si (informellement) on rassemble les axiomes caractérisant un certain type de structure (comme les anneaux) dans une « théorie \mathbf{T} , et qu'on appelle ces structures M dans la catégorie \mathcal{E} des \mathbf{T} -modèles dans \mathcal{E} , on peut former $\text{Mod}(\mathcal{E}, \mathbf{T})$ la catégorie de ces modèles dans \mathcal{E} . De plus, on suppose que le morphisme image inverse d'un morphisme géométrique $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ sur les ensembles envoie tout \mathbf{T} -modèle dans \mathcal{E} vers un \mathbf{T} -modèle $f^*(M)$ dans \mathcal{F} ,

de sorte que $Mod(\mathcal{E}, \mathbf{T})$ pour toute théorie \mathbf{T} sera un foncteur contravariant de \mathcal{E} .

Un topos classifiant pour des \mathbf{T} -modèles est alors un topos $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ sur les ensembles ayant la propriété que pour tout topos ayant toutes les colimites \mathcal{E} on a une équivalence de catégories

$$c_{\mathcal{E}} : Mod(\mathcal{E}, \mathbf{T}) \simeq Geom(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{T}))$$

qui est naturelle en \mathcal{E} . Cette condition de naturalité signifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Mod(\mathcal{E}, \mathbf{T}) & \xrightarrow{c_{\mathcal{E}}} & Geom(\mathcal{E}, \mathcal{B}(\mathbf{T})) \\ f^* \downarrow & & \downarrow Geom(f, \mathcal{B}(\mathbf{T})) \\ Mod(\mathcal{F}, \mathbf{T}) & \xrightarrow{c_{\mathcal{F}}} & Geom(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbf{T})) \end{array}$$

Il suit par ailleurs de cette « définition » informelle qu'il existe un \mathbf{T} -modèle universel ou générique $M_{\mathbf{T}}$ dans $\mathcal{B}(\mathbf{T})$, plus exactement le modèle correspondant à l'identité sur $\mathcal{B}(\mathbf{T})$ pour l'équivalence $c_{\mathcal{B}(\mathbf{T})}$. Ce \mathbf{T} -modèle $M_{\mathbf{T}}$ a la propriété caractéristique suivante : pour tout topos \mathcal{E} et tout \mathbf{T} -modèle M dans \mathcal{E} , il existe un morphisme géométrique $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{T})$ (unique à isomorphisme près), tel que $M \simeq f^*(M_{\mathbf{T}})$.

Exemples de topos classifiants

Pour illustrer cette « définition », on peut prendre différents exemples de topos classifiants (on trouvera dans [133] les démonstrations de ces résultats).

Le classifiant des objets Soit Fin la catégorie des ensembles finis, Ens^{Fin} est un topos de Grothendieck, que l'on notera $S[U]$. On a par ailleurs un foncteur d'inclusion $Fin \rightarrow Ens$ que l'on notera U .

On a alors le résultat suivant : pour tout topos cocomplet \mathcal{E} , on a une équivalence de catégories entre les objets de \mathcal{E} et les morphismes $\mathcal{E} \rightarrow S[U]$ naturelle en \mathcal{E}

$$c_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow Hom(\mathcal{E}, S[U])$$

qui envoie un objet de \mathcal{E} sur son morphisme géométrique « caractéristique ».

Ens^{Fin} est donc le topos classifiant des objets de \mathcal{E} et le modèle générique est le morphisme identité $S[U] \rightarrow S[U]$, à savoir le foncteur d'inclusion $U : Fin \rightarrow Ens$.

Le classifiant des anneaux De façon générale si \mathcal{C} est une catégorie avec limites finies, un objet-anneau de \mathcal{C} est un objet R de \mathcal{C} équipé des morphismes

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{1} \end{array} R \begin{array}{c} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{\cdot} \end{array} R \times R$$

dans \mathcal{C} pour lesquels les identités usuelles des anneaux commutatifs sont valides. Ainsi par exemple, un objet anneau dans Ens est un anneau ordinaire, un anneau dans $Sh(X)$ est un faisceau d'anneaux sur X . Pour tout topos \mathcal{E} , on a une catégorie $Ring(\mathcal{E})$. Cette catégorie admet un topos classifiant, autrement dit pour tout topos cocomplet \mathcal{E} , il existe un topos \mathcal{R} avec un objet-anneau R tel qu'on ait une équivalence de catégories $Ring(\mathcal{E}) \simeq Hom(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ naturelle en \mathcal{E} .

On dira qu'un anneau est finiment présenté s'il est isomorphe à un anneau de la forme $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_k)$ où les P_i sont des polynômes sur les indéterminées X_1, \dots, X_n . On a alors une catégorie (fp -rings) des anneaux finiment présentés.

Le topos de préfaisceaux $Ens^{(fp\text{-rings})}$ est le topos classifiant \mathcal{R} recherché, et l'anneau générique R est le foncteur d'inclusion de (fp -rings) dans la catégorie des anneaux.

Le classifiant des ordres linéaires Dans un topos \mathcal{E} quelconque, on peut définir sur un objet de \mathcal{E} un ordre linéaire : un ordre est alors un objet I de \mathcal{E} , avec un sous-objet $\leq \rightarrow I \times I$ et deux « éléments globaux » $b, t : 1 \rightrightarrows I$ tels que les énoncés suivants du langage de Bénabou-Mitchell soient valides dans \mathcal{E} :

1. $\forall x \in I (x \leq x)$
2. $\forall x, y, z \in I (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$
3. $\forall x, y \in I (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
4. $\forall x \in I (b \leq x \wedge x \leq t)$
5. $\neg(b = t)$
6. $\forall x, y \in I (x \leq y \vee y \leq x)$

Les objets-ordres dans \mathcal{E} forment une catégorie $Ord(\mathcal{E})$.

On définit par ailleurs, comme on le fait en homologie, la catégorie simpliciale Δ ayant pour objets tous les ensembles non-vides finis ordonnés de la forme $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ avec $0 \leq n$, et pour morphismes $\alpha : [n] \rightarrow [m]$ les fonctions croissantes. On définit alors un ensemble simplicial comme un foncteur $S : \Delta^{op} \rightarrow Ens$.

La catégorie des ensembles simpliciaux $Ssets$ est donc la catégorie de foncteurs $Ens^{\Delta^{op}}$ et tout nombre entier naturel m détermine un foncteur représentable $\mathbf{y}[m] : Hom_{\Delta}(\dots, [m])$ qui est un ensemble simplicial. On a alors le résultat suivant :

Théorème 21 *Le topos $Ssets$ des ensembles simpliciaux est un topos classifiant pour les ordres, avec comme ordre générique $G = Hom_{\Delta}(\dots, [1])$.*

Autrement dit, pour un topos cocomplet \mathcal{E} , on a une équivalence de catégories $\text{Ord}(\mathcal{E}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{E}, \text{Ssets})$ naturelle en \mathcal{E} .

Cette équivalence associe à un ordre $I \in \mathcal{E}$ le morphisme géométrique $\mathcal{E} \rightarrow \text{Ssets}$ dont le foncteur image inverse est le foncteur de réalisation géométrique $|\dots|_I : \text{Ssets} \rightarrow \mathcal{E}$ et le foncteur image directe est le foncteur de complexe singulier $S_I : \mathcal{E} \rightarrow \text{Ssets}$.

Ces différents exemples montrent que la notion de topos classifiant permet l'unification de constructions très différentes : une généralisation de la notion ensembliste de « fonction caractéristique » d'une part, un outil de dépassement des structures algébriques finiment présentées vers les structures en général d'autre part, et enfin un rapprochement entre des concepts en première analyse distants, comme les ordres linéaires et les ensembles simpliciaux. Mais c'est en étant rapporté à une théorie du premier ordre que les topos classifiants apparaissent essentiels.

Le topos classifiant d'une théorie du premier ordre

On a vu que tout topos de Grothendieck est une catégorie géométrique. De ce fait, le fragment de la logique du premier ordre qui sera majoritairement utilisé, lorsqu'il s'agira d'appliquer la notion de topos classifiant, sera la logique géométrique, telle qu'elle a été définie plus haut. Cela ne constitue cependant nullement une limitation, et les résultats obtenus dans le cadre de la théorie des topos de Grothendieck conserve une pertinence pour les mathématiques usuelles.

C'est ce que rappelle O. Caramello :

« Whilst the notion of geometric theory might seem quite restrictive at first sight, it turns out that most of the (first-order) theories naturally arising in mathematics have a geometric axiomatization (over their signature). Also, the possibility of employing infinitary disjunctions (of an arbitrary cardinality) in the construction of geometric formulae makes geometric logic particularly expressive and suitable for axiomatizing theories which do not belong to the realm of classical first-order logic (think for example of the notion of algebraic extension of a given field [...]). » ([31], 53)

Ce passage du premier ordre classique à la logique géométrique peut par exemple s'opérer via la Morleyzation vue précédemment, associant à toute théorie du premier ordre classique une théorie cohérente.

Afin d'associer à une théorie du premier ordre un topos classifiant, il est nécessaire de munir la catégorie syntaxique associée à cette théorie d'une

topologie de Grothendieck, et de construire ainsi un site syntaxique. Ainsi, si on définit une famille couvrante comme une famille de flèches telle que l'union de leurs images est le sous-objet maximal, on a :

- Définition 59**
1. pour une catégorie cohérente \mathcal{C} , la topologie cohérente J^{coh} est la topologie de Grothendieck sur \mathcal{C} dont les cribles couvrants sont ceux qui contiennent des familles couvrantes finies ;
 2. pour une catégorie géométrique \mathcal{C} , la topologie géométrique J^{geom} est la topologie de Grothendieck sur \mathcal{C} dont les cribles couvrants sont ceux qui contiennent des petites familles couvrantes.

On a alors le résultat suivant :

- Théorème 22**
1. pour toute théorie cohérente \mathbf{T} , le topos $Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{T}}, J^{coh})$ classifie \mathbf{T} ;
 2. pour toute théorie géométrique \mathbf{T} , le topos $Sh(\mathcal{C}_{\mathbf{T}}, J^{geom})$ classifie \mathbf{T} .

On trouvera une preuve de ce résultat dans ([31], 57).

Une théorie du premier ordre, cohérente et géométrique, est donc classifiée par le topos des faisceaux sur le site syntaxique qui lui est associée, et on peut alors construire, à l'intérieur de ce topos, un modèle universel de la théorie, tel qu'il a été défini plus haut. On peut alors définir (voir ([31], 56, Remarque 2.1.5) le topos classifiant d'une théorie donnée comme un objet représentant du (pseudo-)foncteur de la catégorie des topos dans la catégorie des catégories

$$\mathbf{T} - mod : TOPOS \rightarrow CAT$$

associant :

- à un topos \mathcal{E} la catégorie $\mathbf{T} - Mod(\mathcal{E})$ des modèles de \mathbf{T} dans \mathcal{E} ;
- à un morphisme géométrique $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ le foncteur $\mathbf{T} - Mod(f^*) : \mathbf{T} - Mod(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{T} - Mod(\mathcal{E})$ envoyant un modèle M de \mathbf{T} dans \mathcal{F} vers son image $f^*(M)$.

Cette notion d'objet représentant souligne que le topos classifiant semble capturer, pour ainsi dire, le contenu conceptuel d'une théorie, et déterminer de la même façon que cette dernière l'existence de structures du type ainsi défini. Par ailleurs, l'existence du modèle générique dans ce topos classifiant, dans lequel la syntaxe et la sémantique coïncident, puisque tout ce qui y est vrai est prouvable, et réciproquement, montre la possibilité qu'offre ce contexte catégorique de dépasser la distinction syntaxe-sémantique de façon « structurale », sans passer par un travail sur le langage comme dans le cas du modèle syntaxique de Henkin.

Pour P. Johnstone, la définition du modèle universel dans le contexte des topos est même l'intérêt principal des topos classifiants :

« There is a category $\mathcal{C}_{\mathbf{T}}$ of the appropriate kind containing a model of \mathbf{T} that is generic, in the sense defined here. Since we are mainly interested in models which live in toposes, it would be convenient to be able to construct a topos containing a model of a given theory which is generic amongst models in toposes » ([115], 890).

Le caractère central de ce modèle générique apparaît par ailleurs dans un résultat énoncé par O. Caramello ([31], 57), selon lequel :

Remarque 1 *Par le lemme de Yoneda, si un topos de Grothendieck \mathcal{G} contient un modèle générique d'une théorie géométrique \mathbf{T} alors \mathcal{G} satisfait la propriété universelle du topos classifiant de \mathbf{T} . Réciproquement, si un topos de Grothendieck \mathcal{E} classifie une théorie géométrique \mathbf{T} , alors \mathcal{E} contient un modèle générique de \mathbf{T} .*

Mais la notion la plus importante, notamment du point de vue des techniques développées par O. Caramello dans [31] (« toposes as 'bridges' »), est celle de Morita-équivalence, déjà considérée précédemment ; pour la distinguer de la relation de F-Morita-équivalence vue au chapitre 1, nous parlerons plutôt ici de T-Morita-équivalence ; formellement,

Définition 60 *Deux théories géométriques \mathbf{T} et \mathbf{T}' sont dites T-Morita-équivalentes, si elles ont des topos classifiants équivalents, autrement dit si pour tout topos de Grothendieck \mathcal{E} , il y a une équivalence de catégories*

$$\tau_{\mathcal{E}} : \mathbf{T} - \text{mod}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{T}' - \text{mod}(\mathcal{E})$$

telle que pour tout morphisme géométrique $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ le diagramme suivant commute (à isomorphisme près) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T} - \text{mod}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{E}}} & \mathbf{T}' - \text{mod}(\mathcal{E}) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \mathbf{T} - \text{mod}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{F}}} & \mathbf{T}' - \text{mod}(\mathcal{F}) \end{array}$$

De façon générale, selon O. Caramello :

« The notion of Morita-equivalences materializes in many situations the intuitive feeling of 'looking at the same thing in different ways', meaning, for instance, describing the same structure(s) in different languages or constructing a given object in different ways. » ([31], 73)

Il y a donc bien derrière la Morita-équivalence quelque chose comme une identité sous-jacente à différente présentation d'un même concept. Or cette identité rejoint celle définie en théorie des modèles « classique » par la relation de bi-interprétabilité. On a en effet le résultat suivant :

Théorème 23 *Si deux théories \mathbf{T} et \mathbf{T}' sont bi-interprétables alors leur Morleyisation sont Morita-équivalentes.*

Bi-interprétabilité et Morita-équivalence ne sont cependant pas strictement équivalentes, et il est possible de préciser la relation entre ces deux notions, comme le propose H. Aratake dans [6]. Quoi qu'il en soit, compte tenu de cette non-équivalence de la relation de Morita-équivalence et de la bi-interprétabilité, on peut chercher à clarifier ce que capture véritablement la Morita-équivalence telle que la définit O. Caramello. C'est l'enjeu d'un résultat de D. Tzementzis démontré dans [242] :

Théorème 24 *Deux théories cohérentes T et T' sont Morita-équivalentes au sens de la théorie des topos ssi elles sont F -Morita-équivalentes.*

La Morita-équivalence, qu'elle soit définie syntaxiquement ou par les topos classifiants, désigne donc une seule et même relation d'équivalence, plus stricte que la bi-interprétabilité. Malgré cette équivalence, O. Caramello précise néanmoins :

« The view underlying the 'bridge' technique consists in regarding a topos as an object which, together with all its different representations, embodies a great amount of relationships existing between the different theories classified by it. Any topos-theoretic invariant behaves in this context like a 'pair of glasses' which allows us to discern information which is 'hidden' in a given Morita-equivalence. Toposes can thus act as 'universal translators' across different mathematical theories which have the same 'semantic content'. » ([31], 80)

Le problème reste donc de savoir ce qu'il faut entendre précisément par « contenu sémantique » dans ce cas, par cette « information » conservée par Morita équivalence.

5.2.2 La complétion de prétopos

Dans tous les cas, il est alors possible de définir la complétion de prétopos, telle qu'elle est présentée dans [162]. Pour ce faire, il faut introduire la notion d'objets cohérents d'un topos :

Définition 61 *Soit \mathcal{E} un topos :*

1. *un objet X de \mathcal{E} est quasi-compact si tout recouvrement $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ (avec la topologie canonique sur \mathcal{E}) a un sous-recouvrement fini $(X_i \rightarrow X)_{i \in I'}$, avec $I' \subset I$ fini ;*

2. un objet X de \mathcal{E} est cohérent s'il est quasi-compact et si la condition suivante est vraie : chaque fois que Q_1 et Q_2 sont des objets quasi-compactes dans \mathcal{E} et $Q_1 \rightarrow X$ et $Q_2 \rightarrow X$ sont des morphismes quelconques de \mathcal{E} , alors $Q_1 \times_X Q_2$ défini par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Q_1 \times_X Q_2 & \longrightarrow & Q_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_1 & \longrightarrow & X \end{array}$$

est quasi-compact ;

3. $\text{Coh}(\mathcal{E})$, la catégorie des objets cohérents de \mathcal{E} , est la sous-catégorie pleine de \mathcal{E} dont les objets sont les objets cohérents de \mathcal{E} .

Le théorème 9.2.2 de [74] montre ainsi que

Théorème 25 *Pour tout topos cohérent \mathcal{E} , $\text{Coh}(\mathcal{E})$ est un prétopos.*

Le concept de prétopos, issu des travaux de Grothendieck dans SGA4, est une notion centrale de l'approche catégorique de la théorie des modèles. Makkai et Reyes proposent une définition logique et abstraite des prétopos ([74], 122) :

Définition 62 *Une prétopos P est une catégorie cohérente ayant en outre les propriétés suivantes :*

1. P a les quotients des relations d'équivalence (i.e. toutes les relations d'équivalence dans P admettent un quotient dans P ;
2. toute famille finie d'objets de P a une somme disjointe dans P .

Mais ils montrent que cette définition est équivalente à celle donnée par Grothendieck dans SGA4 (Exposé VI, 3.11) :

Définition 63 *P est un prétopos si c'est une catégorie telle que :*

1. P a des limites finies à gauche ;
2. P a des sommes finies disjointes stables ;
3. les relations d'équivalence dans P sont effectives ;
4. tout épimorphisme dans P est effectif et stable ;
5. P est une petite catégorie.

On peut alors définir la complétion de prétopos $P(T)$ d'une théorie T :

Définition 64 *Soit T une théorie cohérente, la complétion de prétopos $P(T)$ est le prétopos des objets cohérents du topos classifiant de la théorie T .*

Cette définition est présentée au chapitre 9 de l'ouvrage de Makkai et Reyes [74].

De la complétion de prétopos à l'élimination des imaginaires

A l'automne 1980, Makkai remarque que le passage d'une théorie à sa complétion de prétopos correspond à une opération syntaxique élaborée par Saharon Shelah quelques années auparavant (dans [229]) : le passage d'une théorie T à la théorie T^{eq} (cette correspondance permet une construction alternative de la complétion de prétopos (voir [154])).

Il est ainsi possible de noter, avec V. Harnik :

« the very same new mathematical concept came up in two, seemingly totally unrelated, pieces of mathematical research [...] The pretopos completion of the logical category \mathbb{T} , identified with \mathbf{T} , is nothing but the logical category \mathbb{T}^{eq} which is identified with the first order theory \mathbf{T}^{eq} . » ([100], 80)

Shelah propose d'associer à toute théorie \mathbf{T} dans un langage du premier ordre \mathcal{L} , une théorie \mathbf{T}^{eq} dans un langage \mathcal{L}^{eq} . Ce langage est à plusieurs sortes, même si \mathcal{L} est à une seule sorte. Une \mathcal{L} -formule $\epsilon(\vec{x}, \vec{y})$ avec \vec{x}, \vec{y} de sorte (d_1, \dots, d_n) est appelée une formule d'équivalence de \mathbf{T} ssi pour tout modèle $\mathcal{M} \models \mathbf{T}$, la relation $\epsilon(M) \subset \vec{d}(M) \times \vec{d}(M)$ est une relation d'équivalence. Le langage \mathcal{L}^{eq} est une extension de \mathcal{L} : il comporte, en plus des symboles de \mathcal{L} , un nouveau symbole de sorte d_ϵ pour chaque formule d'équivalence $\epsilon(\vec{x}, \vec{y})$, ainsi qu'un symbole fonctionnel $f_\epsilon : \vec{d} \rightarrow d_\epsilon$.

La théorie \mathbf{T}^{eq} est également une extension de \mathbf{T} : ses axiomes sont ceux de \mathbf{T} et pour chaque formule d'équivalence $\epsilon(\vec{x}, \vec{y})$, on a en outre les deux axiomes suivants disant que les éléments de d_ϵ sont en correspondance biunivoque avec les classes d'équivalence de la relation définie par $\epsilon(\vec{x}, \vec{y})$ et que f_ϵ envoie chaque uplet sur sa classe d'équivalence :

$$\forall z \exists \vec{x} f_\epsilon(\vec{x}) = z$$

$$\forall \vec{x} \forall \vec{y} (\epsilon(\vec{x}, \vec{y}) \Leftrightarrow f_\epsilon(\vec{x}) = f_\epsilon(\vec{y}))$$

avec z de sorte d_ϵ .

Etant donné que \mathbf{T}^{eq} est une extension de \mathbf{T} , tout modèle $\mathcal{N} \models \mathbf{T}^{eq}$ admet une restriction à un modèle $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \upharpoonright \mathcal{L} \models \mathbf{T}$. Par conséquent, pour tout \mathcal{L} -énoncé ϕ , si $\mathbf{T} \models \phi$ alors $\mathbf{T}^{eq} \models \phi$. En outre, tout modèle $\mathcal{M} \models \mathbf{T}$ admet une extension canonique $\mathcal{M}^{eq} \models \mathbf{T}$. L'existence de l'extension canonique des modèles de \mathbf{T} implique que \mathbf{T}^{eq} est une extension conservative de \mathbf{T} : si ϕ est un \mathcal{L} -énoncé tel que $\mathbf{T}^{eq} \models \phi$ alors on a déjà $\mathbf{T} \models \phi$.

On notera ici que la correspondance entre la complétion de prétopos et le passage de \mathbf{T} à \mathbf{T}^{eq} , mis en évidence par Makkai, n'a rien de mystérieux : si l'on pense que \mathbf{T}^{eq} vise à actualiser les classes d'équivalence virtuellement suscitées par \mathbf{T} dans chacun de ses modèles, et si l'on pense à la condition 1 de la Définition ??, la coïncidence apparaît assez naturelle.

V. Harnik met évidence le fait que la construction de Shelah

« is a very useful device. By skilfully swtiching between \mathbf{T} ad \mathbf{T}^{eq} , [Shelah] manages to obtain results pertaining to \mathbf{T} , that he could not obtain otherwise. » ([100], 86)

Pour V. Harnik, l'utilité principale de la eq-construction se situe au niveau des types, notion centrale en théorie des modèles. On rappelle qu'un type est ainsi défini : Si \mathcal{M} est une \mathcal{L} -structure, $A \subset M$ et $b \in M$, alors le type de b sur A est la liste des propriétés du premier ordre de b exprimables dans \mathcal{L} auquel on ajoute des constantes individuelles dénotant les éléments de A . Autrement dit,

$$tp^{\mathcal{M}}(b, A) = \{\phi(x, \vec{a}) : \phi(x, \vec{y}) \in \mathcal{L}, \vec{a} \in A, \mathcal{M} \models \phi[b, \vec{a}]\}$$

Ainsi,

« Shelah came to the conclusion that the notion of full type in the given theory is too crude. To remedy this, he sometimes « steps out of \mathbf{T} » and looks at full type in \mathbf{T}^{eq} [...] and then return to the original theory \mathbf{T} [...]. Shelah's way is conceptually simpler and is universally accepted. » ([100], 86-87)

Un des intérêts principaux de la eq-construction est que \mathbf{T} et \mathbf{T}^{eq} ont *essentiellement* les mêmes modèles. V. Harnik utilise le cadre catégorique pour préciser cette idée : il y a entre les catégories $Mod(\mathbf{T})$ et $Mod(\mathbf{T}^{eq})$ une équivalence de catégories, ce qu'il explicite ainsi :

« if we have an equivalence of categories $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, then the categories \mathbb{C} and \mathbb{D} [...] are the same from the point of view of category theory. Equivalent categories differ from each other only in the number of isomorphic copies each object has. » ([100], 88).

Cependant, en associant à la théorie \mathbf{T} la catégorie syntaxique (au sens de J. Dionne) \mathbb{T} V. Harnik précise ce résultat. On dira tout d'abord qu'une théorie \mathbf{T}_1 est une extension de \mathbf{T} ssi il existe un foncteur logique au sens de Makkai et Reyes [74] $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_1$. En ce sens \mathbf{T}^{eq} est bien une extension de \mathbf{T} , en prenant pour foncteur d'extension $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^{eq}$ le foncteur de plongement. On dira par ailleurs qu'une extension $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_1$ est *significative* ssi I n'est pas une équivalence de catégories.

Or pour la plupart des théories du premier ordre, le foncteur de plongement $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^{eq}$ n'est pas une équivalence de catégories. Le passage de \mathbf{T} à \mathbf{T}^{eq} est donc une extension significative. Ce n'est que dans de rares cas que l'on a une équivalence de catégories. On peut alors poser la définition suivante :

Définition 65 *On dira qu'une théorie \mathbf{T} admet l'élimination des imaginaires ssi le foncteur de plongement $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^{eq}$ est une équivalence de catégories.*

Cette notion a été introduite, en termes modèle-théoriques, par Bruno Poizat dans [207]. Les théories admettant l'élimination des imaginaires existent : c'est le cas par exemple de toute théorie \mathbf{T}^{eq} pour une théorie du premier ordre quelconque \mathbf{T} . On voit ici apparaître un autre rapprochement entre l'approche catégorique des théories et la théorie des modèles usuelle. Mais qu'en est-il de la complétion de prétopos ?

On a sur ce point le résultat suivant : si \mathbf{T} est une théorie du premier ordre complète avec des modèles infinis, alors la complétion de prétopos définie par Makkai et Reyes de la catégorie \mathbb{T} est équivalente à la catégorie \mathbb{T}^{eq} , qui est de façon générale un prétopos lorsque \mathbf{T} est une théorie propre au sens défini par Harnik.

Il y a donc bien une correspondance étroite entre les deux constructions de Shelah et de Makkai-Reyes. Quelles conclusions peut-on en tirer ?

Du côté catégorique, il apparaît ainsi que la complétion de prétopos est bien une opération sur le langage et la théorie formelle, malgré l'introduction des concepts issus de la géométrie algébrique de Grothendieck. Et réciproquement, cette correspondance jette une lumière nouvelle sur les opérations formelles de la théorie des modèles : on peut ainsi en effet leur donner, en un sens précis, une portée géométrique.

Cette présentation du versant « syntaxique » de la complétude conceptuelle forte a ainsi permis d'introduire les concepts essentiels de la théorie catégorique des modèles : nous sommes ainsi passés de la théorie du premier ordre classique à sa Morleyisation cohérente, de là au site syntaxique et à son topos classifiant, et enfin à sa complétion de prétopos. Ce parcours a permis non seulement de mettre en évidence les liens étroits entre l'approche catégorique et la théorie des modèles usuelle, mais également de retrouver sous une autre forme des questions abordées précédemment dans le cadre des théories de Lawvere. Ainsi, alors même que la théorie catégorique des modèles accorde une place centrale au langage, et semble exposée comme la théorie des modèles usuelle au problème de la sensibilité au langage, on retrouve la question de l'invariance au niveau des catégories syntaxiques (résultat de Johnstone) et la question de l'identité du contenu sémantique, cette fois sous les traits de la Morita-équivalence (travaux de Caramello). C'est donc un même projet de recherche qui anime cette branche de la logique catégorique et celle examinée au chapitre 2.

5.3 Le versant « sémantique »

Nous avons présenté jusqu'ici les concepts catégoriques correspondant à la dimension syntaxique du théorème de complétude conceptuelle forte. Cette section sera essentiellement centrée sur l'introduction de la notion d'ultracatégorie, pendant sémantique de la complétion de prétopos. Essentiellement technique, elle visera à mettre en place les définitions nécessaires à la formulation de la complétude conceptuelle forte de Makkai, et s'appuiera pour cela non seulement sur l'article de Makkai [162] mais également sur les travaux de Francisco Marmolejo [170].

5.3.1 Ultrafiltres et ultraproducts

Le théorème de Los (1955) joue un rôle essentiel dans les travaux de Makkai. Il s'agit donc dans un premier temps d'en introduire les éléments essentiels. La notion d'ultraproduit constitue en fait une méthode de construction de modèles, qui s'enracine dans les travaux de Skolem dès les années 1930.

Soit I un ensemble non-vide, $S(I)$ l'ensemble des sous-ensembles de I . Un filtre D sur I est défini comme un ensemble $D \subset S(I)$ tel que :

- $I \in D$;
- si $X, Y \in D$ alors $X \cap Y \in D$;
- si $X \in D$ et $X \subset Z \subset I$, alors $Z \in D$.

D est un filtre propre s'il est différent de $S(I)$.

On dira que U est un ultrafiltre sur I ssi D est un filtre sur I tel que pour tout $X \in S(I)$,

$$X \in D \Leftrightarrow \neg((I \setminus X) \in D)$$

On peut alors introduire la notion d'ultraproduit, d'abord sur les ensembles, puis sur les modèles. Soit I un ensemble non-vide, D un filtre propre sur I , et pour chaque $i \in I$, A_i est un ensemble non vide. Soit $C = \prod_{i \in I} A_i$ le produit cartésien de ces ensembles. C est donc l'ensemble des fonctions f de domaine I telles que pour chaque $i \in I$, $f(i) \in A_i$. Pour deux fonctions $f, g \in C$, on dira que f et g sont D -équivalentes, noté $f =_D g$, ssi $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D$. La relation $=_D$ est une relation d'équivalence et on notera f_D la classe d'équivalence de f , $f_D = \{g \in C : f =_D g\}$.

On définit alors le produit réduit des A_i modulo D comme l'ensemble des classes d'équivalence de $=_D$, noté $\prod_D A_i$. On a donc

$$\prod_D A_i = \{f_D : f \in \prod_{i \in I} A_i\}$$

I est alors l'ensemble index pour $\prod_D A_i$.

Dans le cas particulier où D est un ultrafiltre sur I , le produit réduit $\prod_D A_i$ est un ultraproduit. Si tous les A_i sont identiques à un même ensemble A , alors $\prod_D A$ est une ultrapuissance de A modulo D .

On peut alors définir ces notions pour les modèles : soit I un ensemble non-vide, D un filtre propre sur I , et pour chaque $i \in I$, soit \mathcal{M}_i un modèle pour le langage \mathcal{L} . Par convention on pose que dans les \mathcal{M}_i les symboles de relations P sont interprétés par R_i , les symboles fonctionnels F par G_i et les constantes c par a_i .

Le produit réduit $\Pi_D \mathcal{M}_i$ est le modèle pour \mathcal{L} décrit comme suit :

1. le domaine de $\Pi_D \mathcal{M}_i$ est $\Pi_D A_i$;
2. soit P un symbole de relation à n places de \mathcal{L} . Alors l'interprétation de P dans $\Pi_D \mathcal{M}_i$ est la relation S telle que

$$S(f_D^1 \dots f_D^n) \text{ ssi } \{i \in I : R_i(f^1(i) \dots f^n(i))\} \in D$$

3. soit F un symbole fonctionnel de \mathcal{L} à n places. Alors F est interprété dans $\Pi_D \mathcal{M}_i$ par la fonction H donnée par

$$H(f_D^1 \dots f_D^n) = \langle G_i(f^1(i) \dots f^n(i)) : i \in I \rangle_D$$

4. soit c une constante de \mathcal{L} . Alors c est interprétée par l'élément $b \in \Pi_D A_i$, où $b = \langle a_i : i \in I \rangle_D$

On peut alors introduire le théorème de Los, ou Théorème fondamental des Ultraproduits dans ([36], 217) :

Théorème 26 *Soit \mathcal{N} l'ultraproduit $\Pi_D \mathcal{M}_i$ et soit I l'ensemble index. Alors*

1. *pour tout terme $t(x_1 \dots x_n)$ de \mathcal{L} et des éléments $f_D^1 \dots f_D^n \in N$, on a $t_{\mathcal{N}}[f_D^1 \dots f_D^n] = \langle t_{\mathcal{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] : i \in I \rangle_D$;*
2. *étant donné une formule $\phi(x_1 \dots x_n)$ de \mathcal{L} et des éléments $f_D^1 \dots f_D^n \in N$ on a $\mathcal{N} \models \phi[f_D^1 \dots f_D^n]$ ssi $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in D$;*
3. *pour tout énoncé ϕ de \mathcal{L} , $\mathcal{N} \models \phi$ ssi $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi\} \in D$.*

On peut reformuler le théorème de Los en termes de catégories. On notera que [162] modifie la terminologie de [74] : les foncteurs « logiques » deviennent des « foncteurs élémentaires ». On a lors le théorème

Théorème 27 *Soit (I, \mathcal{G}) un ultrafiltre. Le foncteur ultraproduit $\Pi_{\mathcal{G}} : \text{Ens}^I \rightarrow \text{Ens}$ est élémentaire.*

5.3.2 Les ultracatégories et la dualité de Makkai

Soit P un prétopos, vu comme la traduction catégorique d'une théorie du premier ordre. On considère la catégorie $\text{Mod}(P)$ des modèles ensemblistes de P , c'est-à-dire des foncteurs préservant la structure « logique » de P vers Ens . Quelle est la structure catégorique de $\text{Mod}(P)$? Par exemple, cette catégorie n'a pas nécessairement de limite : ainsi pour reprendre un exemple classique, dans la catégorie des corps, un produit n'est pas un corps. Cependant, en vertu théorème de Los, on sait que $\text{Mod}(T)$ admet les ultraproduits. La notion de pré-ultracatégorie est conçue pour capturer cette notion. On s'appuiera ici sur les définitions introduites par Makkai dans [162].

Les pré-ultracatégories

Définition 66 Une pré-ultracatégorie \underline{A} est une catégorie A avec un foncteur $[\mathcal{U}]_{\underline{A}} : A^I \rightarrow A$ pour tout ultrafiltre (I, \mathcal{U}) .

On peut alors définir, pour deux pré-ultracatégories \underline{A} et \underline{B} , un pré-ultrafoncteur $\underline{F} : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ comme un foncteur $F : A \rightarrow B$ avec un isomorphisme naturel $[\mathcal{U}, \underline{F}]$

$$\begin{array}{ccc} A^I & \xrightarrow{[\mathcal{U}]_{\underline{A}}} & A \\ F^I \downarrow & \Downarrow [\mathcal{U}, \underline{F}] & \downarrow F \\ B^I & \xrightarrow{[\mathcal{U}]_{\underline{B}}} & B \end{array}$$

pour tout ultrafiltre (I, \mathcal{U}) .

Etant donné deux pré-ultrafoncteurs $\underline{F}, \underline{G} : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$, une pré-ultra-transformation naturelle $\underline{\tau} : \underline{F} \rightarrow \underline{G}$ est une transformation naturelle $\tau : F \rightarrow G$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} F \circ [\mathcal{U}]_{\underline{A}} & \longrightarrow & G \circ [\mathcal{U}]_{\underline{A}} \\ [\mathcal{U}, \underline{F}] \downarrow & & \downarrow [\mathcal{U}, \underline{G}] \\ F \circ [\mathcal{U}]_{\underline{B}} & \longrightarrow & G \circ [\mathcal{U}]_{\underline{B}} \end{array}$$

On a une 2-catégorie PUC des pré-ultracatégories. Par exemple, si P est un prétopos, $Mod(P)$ est une pré-ultracatégorie. La catégorie des ensembles est également une pré-ultracatégorie.

Ultragraphes et ultramorphismes

Comme le remarque F. Marmolejo ([170], 41), la définition d'un ultraproduct de modèles ne s'accompagne pas de la définition de morphismes canoniques vers ou hors de ces objets, comme c'est le cas pour les limites et colimites usuelles. C'est ce manque que viennent combler les ultramorphismes : Makkai remarque ainsi : « An ultramorphism is a 'canonically defined map between ultraproducts' » ([162], 117). Mais cette notion nécessite au préalable celle d'ultragraphe.

Définition 67 Un ultragraph \underline{G} est un graphe G muni d'une partition $G^f \cup G^b$ des sommets en G^f et G^b et telle que pour tout $\beta \in G^b$ on a un triplet $(I_\beta, \mathcal{U}_\beta, g_\beta)$ où $(I_\beta, \mathcal{U}_\beta)$ est un ultrafiltre et $g_\beta : I_\beta \rightarrow G^f$ une fonction. Les sommets de G^f sont les sommets libres et les sommets dans G^b sont les sommets liés.

F. Marmolejo remarque que les ultragraphes sont aux ultraproducts ce que les esquisses limites, qui seront présentées au chapitre 5, sont aux limites : dans un ultragraph on veut spécifier les sommets qui représenteront l'ultraproduit des autres sommets.

On peut alors définir la notion d'ultradiagramme, c'est-à-dire un diagramme qui assigne à un sommet lié un ultraproduit des images des sommets associés au sommet lié.

Définition 68 *Etant donné une pré-ultracatégorie \underline{A} et un ultragraphe \underline{G} , un ultradiagramme $\underline{D} : \underline{G} \rightarrow \underline{A}$ est un diagramme $D : G \rightarrow A$ avec un isomorphisme*

$$d_\beta : D(\beta) \rightarrow \prod_{I_\beta} D(g_\beta(i)) / \mathcal{U}_\beta$$

pour tout $\beta \in G^b$.

Etant donné deux ultradiagrammes $\underline{D}, \underline{D}' : \underline{G} \rightarrow \underline{A}$, un morphisme $\underline{\sigma} : \underline{D} \rightarrow \underline{D}'$ est une transformation naturelle $\sigma : D \rightarrow D'$ entre diagrammes telle que le carré suivant commute pour tout $\beta \in G^b$

$$\begin{array}{ccc} D(\beta) & \xrightarrow{d_\beta} & \prod_{I_\beta} D(g_\beta(i)) / \mathcal{U}_\beta \\ \sigma_\beta \downarrow & & \downarrow \prod_{I_\beta} \sigma(g_\beta(i)) / \mathcal{U}_\beta \\ D'(\beta) & \xrightarrow{d'_\beta} & \prod_{I_\beta} D'(g_\beta(i)) / \mathcal{U}_\beta \end{array}$$

On a alors une catégorie $UD(\underline{G}, \underline{A})$.

Soit un sommet k dans \underline{G} , on définit un foncteur $ev_k : UD(\underline{G}, \underline{A}) \rightarrow A$ comme une évaluation en k , c'est-à-dire $ev_k(\underline{D}) = D(k)$ et $ev_k(\sigma) = \sigma k$ pour tout $\sigma : \underline{D} \rightarrow \underline{D}'$ dans $UD(\underline{G}, \underline{A})$.

Définition 69 *Soit \underline{A} une pré-ultracatégorie, \underline{G} un ultragraphe, k et l des sommets de \underline{G} , un ultramorphisme δ de type (\underline{G}, k, l) est une transformation naturelle $\delta : ev_k \rightarrow ev_l$ où $ev_k, ev_l : UD(\underline{G}, \underline{A}) \rightarrow A$.*

On notera $\Delta \underline{Ens}$ l'ensemble des ultramorphismes⁴ dans \underline{Ens} .

Les ultracatégories et le théorème de Makkai

Définition 70 *Une ultracatégorie \underline{A} est une pré-catégorie \underline{A} avec un ultramorphisme $\delta_{\underline{A}} : ev_k \rightarrow ev_l : UD(\underline{G}, \underline{A}) \rightarrow A$ pour tout $\delta : ev_k \rightarrow ev_l : UD(\underline{G}, \underline{Ens}) \rightarrow \underline{Ens}$ dans $\Delta \underline{Ens}$.*

Etant donné deux ultracatégories \underline{A} et \underline{B} , un ultra-foncteur $\underline{F} : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ est un pré-ultrafoncteur $\underline{F} : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ tel que $\underline{F}\delta_{\underline{A}} = \delta_{\underline{B}}$.

Etant donné deux ultrafoncteurs $\underline{F}, \underline{G} : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$, une ultratransformation naturelle $\underline{\sigma} : \underline{F} \rightarrow \underline{G}$ est une pré-ultratransformation naturelle $\underline{\sigma} : \underline{F} \rightarrow \underline{G}$.

4. On peut noter que la définition par Makkai d'un ultramorphisme reprend le paradigme de la fibration $Fam(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, où \mathcal{C} est une catégorie quelconque et $Fam(\mathcal{C})$ la catégorie des familles de \mathcal{C} indexées par un ensemble (voir [113], 31).

On a ainsi une 2-catégorie des ultracatégories UC .

Soit P un prétopos. On rappelle que $Mod(P)$ est la catégorie des foncteurs élémentaires de P dans Ens . $Mod(P)$ est une pré-ultracatégorie. Comment en faire une ultracatégorie ? Pour tout ultragraphe \underline{G} est tout objet p de P , on peut définir le foncteur $UD(\underline{G}, Mod(P)) \rightarrow UD(\underline{G}, Ens)$ qui associe à l'ultra-diagramme D de modèles de P l'ultra-diagramme d'ensembles $D()(p)$ et au morphisme σ d'ultra-diagramme dans $UD(\underline{G}, Mod(P))$ le morphisme $\sigma()(p)$, avec $D()(p)(k) = D(k)(p)$ pour tout sommet k de \underline{G} .

Soient deux foncteurs $ev_k, ev_l : UD(\underline{G}, Ens) \rightarrow Ens$, étant donné un ultramorphisme $\delta : ev_k \rightarrow ev_l$ on peut définir $\delta_{Mod(T)} : ev_k \rightarrow ev_l$, cette fois avec $ev_k, ev_l : UD(\underline{G}, Mod(P)) \rightarrow Mod(P)$, tel que pour tout $p \in P$,

$$(\delta_{Mod(P)} D)p = \delta D()p$$

On obtient ainsi l'ultracatégorie $\underline{Mod(P)}$ des modèles de P en relevant les ultramorphismes de la catégorie des ensembles à la catégorie des modèles d'une théorie.

On a alors un premier résultat important :

Théorème 28 *Pour toute ultracatégorie \underline{A} , la catégorie d'ultrafoncteurs $UC(\underline{A}, \underline{Ens})$ est un prétopos.*

On peut, de là, prouver le théorème de Makkai. Soit P un petit prétopos. Pour tout objet p de P , le foncteur $ev_p : Mod(P) \rightarrow Ens$ est un ultrafoncteur $ev_p : \underline{Mod(P)} \rightarrow \underline{Ens}$. On peut alors définir un foncteur

$$ev : P \rightarrow UC(\underline{Mod(P)}, \underline{Ens})$$

$$p \mapsto ev_p$$

Théorème 29 *Etant donné un petit prétopos P , le foncteur $ev : P \rightarrow UC(\underline{Mod(P)}, \underline{Ens})$ est une équivalence de catégories.*

Autrement dit, on a une adjonction du même type que la dualité de Stone entre les 2-catégories des prétopos \mathcal{PT} et des ultracatégories UC

$$\mathcal{PT}^{op} \begin{array}{c} \xleftarrow{F=Hom(-, \underline{ENS})} \\ \xrightarrow{G=Hom(-, Ens)=Mod(-)} \end{array} UC$$

où $Hom(P, Ens) = Mod(P)$, pour tout prétopos P , est l'ultracatégorie des foncteurs élémentaires $P \rightarrow Ens$; $Hom(\underline{K}, \underline{ENS})$, pour une ultracatégorie \underline{K} , est la catégorie (un prétopos) de tous les ultrafoncteurs et ultra-transformations naturelles de \underline{K} dans \underline{ENS} .

Ce résultat s'appuie en réalité sur le fait que la catégorie des ensembles peut être vue soit comme un prétopos (Ens) soit comme une ultracatégorie

(ENS). La catégorie des ensembles joue ici le rôle d'objet dualisant, ou « schizophrène », c'est-à-dire qui participe de deux « propriétés » distinctes.

Mais en quoi le prétopos de tous les ultrafoncteurs et ultratransformations naturelles de \underline{K} dans ENS correspond-il au versant syntaxique ? C'est là le « résultat principal » de [?], à savoir le théorème 4.1 : les ultrafoncteurs sont caractérisés par Makkai comme « essentiellement seulement » des foncteurs standard [162], p.98. Les foncteurs standard sont ainsi définis : toute formule ϕ d'une théorie T , disons avec une seule variable libre, donne un foncteur $[\phi]$ de $Mod(T)$ dans Ens : $[\phi]$ associe à tout modèle M l'extension $\phi(M)$ de ϕ dans M et à tout morphisme $h : M \rightarrow N$ l'application $h \mapsto h(a)$. Puisque h est, par définition de $Mod(T)$, élémentaire, on a une fonction $\phi(M) \rightarrow \phi(N)$. Les foncteurs standard sont les foncteurs de $Mod(T)$ dans Ens qui ont la forme $[\phi]$. Le foncteur $F = Hom(-, \underline{ENS})$ permet donc bien, en ce sens, de retrouver la syntaxe à partir de la sémantique.

5.3.3 Quelle théorie ?

Mais la question qui se pose alors est de savoir quelle est exactement la théorie obtenue à partir de la dualité de Makkai. H. Andréka, J. Madarász, I. Németi et G. Székely, dans ([98], Remarque 7), souligne que la théorie obtenue à l'aide de la dualité de Makkai est déterminée à Morita-équivalence près.

Les auteurs proposent au contraire, à partir du théorème 2 déjà mentionn e au chapitre 1, de munir une catégorie de modèles d'une autre structure permettant de retrouver la syntaxe à équivalence définitionnelle près : les ultracatégories concrètes, fonctionnant ainsi comme invariants de l'équivalence définitionnelle. Il est nécessaire au préalable de définir une catégorie concrète :

Définition 71 *Soit \mathcal{X} une catégorie. Une catégorie concrète sur \mathcal{X} est une aire (\mathcal{A}, U) où \mathcal{A} est une catégorie et $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ un foncteur fidèle. Parfois U est appel e le foncteur d'oubli (ou sous-jacent) de la catégorie concrète et \mathcal{X} la catégorie de base de (\mathcal{A}, U) .*

On peut alors établir la définition suivante :

Définition 72 1. *Une ultracatégorie concrète est un triple (\mathcal{C}, F, p) où (\mathcal{C}, F) est une catégorie concrète et la structure additionnelle p est un système de fonctions infinitaires $\langle p_U \rangle$ pour U un ultrafiltre, sur les objets de \mathcal{C} tel que si U est un ultrafiltre sur l'ensemble I , alors $F(p_U(m_i)_{i \in I}) \Pi_U F(m_i)$ pour tout $m : I \rightarrow Ob(\mathcal{C})$;*

2. *soit T une théorie, son ultracatégorie concrète est (\mathcal{C}, F, p) où (\mathcal{C}, F) est la catégorie des modèles de T avec seulement les isomorphismes entre modèles comme morphismes, avec F le foncteur d'oubli naturel,*

et pour tous les ultrafiltres sur I et tous les systèmes $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ on a $p_U((\mathcal{M}_i)_{i \in I}) = \Pi_U \mathcal{M}_i$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 30 *Deux théories T_1 et T_2 sont définitionnellement équivalentes ssi leurs ultracatégories concrètes sont isomorphes.*

5.3.4 Un exemple d'application

On trouve une application du théorème de Makkai, ou ce que Makkai nomme dans ([163], 169) un « résultat de reconstruction », dans un article de M. Zawadowski [256]. Soit deux catégories logiques \mathbb{T} et \mathbb{T}_1 et un foncteur préservant la structure $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_1$. On appelle $Mod_I \mathbb{T}$ la sous-catégorie pleine de $Mod \mathbb{T}$ dont les objets sont les modèles $M : \mathbb{T} \rightarrow Ens$ de \mathbb{T} qui peuvent être étendus en un modèle M_1 de \mathbb{T}_1 (c'est-à-dire que $M = M_1 \circ I : \mathbb{T} \rightarrow Ens$).

Dans le cas le plus simple, dans lequel les deux catégories représentent des théories \mathbf{T} et \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_1 étend \mathbf{T} au sens usuel, c'est-à-dire que le langage et l'ensemble des axiomes de la première incluent ceux de la seconde. Dans ce cas, Zawadowski remarque⁵ :

« Note that $Mod_I \mathbb{T}$ is the categorical analogue of a pseudoelementary class the same way $Mod \mathbb{T}$ is the analogue of an elementary class . » ([256], 132)

Comme le souligne V. Harnik :

« In general, the category $Mod_I \mathbb{T}$ has fewer objects than the category $Mod \mathbb{T}$ of all the models of \mathbb{T} . And yet, Zawadowski uses [Makkai's theorem] and proves that in certain cases, \mathbb{T} can be recovered from this proper subcategory of $Mod \mathbb{T}$. Indeed, the main result of [his paper] implies that if \mathbb{T}, \mathbb{T}_1 are pretoposes and $I : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_1$ is conservative, then \mathbb{T} can be recovered from $Mod_I \mathbb{T}$. » ([100], 101)

5.4 Complétude et représentation

5.4.1 La complétude conceptuelle

Une des implications les plus immédiates de la complétude conceptuelle forte est, naturellement, la complétude conceptuelle, établie Par Makkai et Reyes dans [74]. L'énoncé est le suivant :

Théorème 31 *Soit \mathbb{T}_1 un prétopos, \mathbb{T}_2 une catégorie cohérente et $I : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ un foncteur cohérent.*

5. Pour une définition et des exemples, voir ([107], 207).

Si $I^ : Mod(\mathbb{T}_2) \rightarrow Mod(\mathbb{T}_1)$ est une équivalence de catégories, alors I l'est également.*

Pour Makkai, plus précisément, la relation entre la complétude conceptuelle et la complétude conceptuelle forte équivaut à un passage du local au global⁶ :

« conceptual completeness is a ‘local’ phenomenon, since it refers to a given comparison between two theories. On the other hand, SCC is meant to be ‘global’ : a uniform construction that, when applied to the structure of models (e.g. $Mod(\mathbb{T})$ possibly with additional structure), gives back the theory itself.

Naturally, conceptual completeness should be a direct consequence of any good formulation of SCC. » ([163], 168)

J.-P. Marquis et G. Reyes éclairent ainsi ce théorème :

« Two facets of the result have to be emphasized. First, the conceptual completeness theorem provides a characterization of pretoposes among coherent categories. Indeed, the result fails whenever \mathbb{T}_1 is not a pretopos. Second, the theorem can be read as follows : suppose that $I : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ is thought of an interpretation and that \mathbb{T}_2 is considered to be an extension of \mathbb{T}_1 . One could say that I is strongly conservative whenever I^* is an equivalence. Then the theorem asserts that pretoposes and only pretoposes do not have proper strongly extensions. Still put differently, one could say that although \mathbb{T}_2 is an extension of \mathbb{T}_1 , it has the same category of models. » ([173], 78)

Le premier aspect insiste sur le fait que ce théorème présente une propriété caractéristique des prétopos. Ainsi, pour citer M. Zawadowski :

« In other words, conceptual completeness says that pretoposes contain all concepts definable in first-order coherent logic. » ([256], 138)

Le concept de prétopos semble donc parfaitement adéquat, en tant que contrepartie catégorique de la logique du premier ordre classique (modulo la Morleyisation).

Par ailleurs – et c’est le second aspect – ce théorème indique que si $Mod(\mathbb{T}_1)$ et $Mod(\mathbb{T}_2)$ sont « les mêmes », alors les théories sont également les « mêmes ». Autrement dit, on voit ici apparaître l’idée, qui sera reprise plus tard par Makkai, comme cela a été montré précédemment, que les modèles déterminent les théories, ou qu’il est possible de retrouver la syntaxe à partir de la sémantique, le « comment » étant explicité par la complétude

6. Il serait possible de discuter ce rapprochement effectué par Makkai, et de comprendre bien plutôt le passage de la complétude conceptuelle à la complétude conceptuelle forte comme un passage du relatif à l’absolu.

conceptuelle forte. En ce sens, il y a bien davantage dans la complétude conceptuelle que dans les théorèmes de complétude usuels. Ce point est mis clairement en évidence dans [74] : c'est le lien entre ce théorème et la notion de définissabilité. En effet, Makkai et Reyes introduisent leur théorème de la façon suivante :

« We are going to prove results of the form that certain properties of I^* imply certain other properties of I . We will point out that those statements are essentially equivalent to model-theoretic ones, some of them well-known such as the Beth definability theorem. » ([74], 194).

Le théorème de complétude conceptuelle peut ainsi être vu comme un théorème de définissabilité⁷. Il ne s'agit donc pas seulement s'assurer la possibilité de retrouver la syntaxe à partir de la sémantique, comme le garantit déjà un théorème de complétude, mais de garantir que cette syntaxe reflète bien les propriétés définissables de la sémantique, que la structure syntaxique constitue l'image fidèle de ce qui est commun aux structures de la classe considérée. Ce point est d'ailleurs souligné par P. Johnstone :

« [This theorem] asserts that if something exists (in a 'natural' way) in all models of a theory, then 'the theory should have a name for it'. [...] More generally, we should like to prove that if every model M comes equipped with some particular subobjects $R_M \rightarrow M(A_1, \dots, A_n)$ (where A_1, \dots, A_n are sorts of the appropriate signature), and every homomorphism of models preserves this relation, then there should exist some formula-in-context $\vec{x}.\phi$ (where $x_i : A_i$ for each i) whose interpretation in each model M is precisely R_M . » ([115], 931)

Le théorème de complétude conceptuelle assure ainsi la définissabilité de la structure interne des modèles. Johnstone propose un exemple : la notion de semi-treillis peut être définie – en tant que monoïde idempotent commutatif – d'une façon qui ne mentionne pas d'ordre partiel ; mais du fait que tout semi-treillis possède un ordre partiel canonique, et tout homomorphisme de semi-treillis préserve l'ordre, on peut s'attendre à ce que l'ordre soit définissable

7. Makkai et Reyes associent donc ce théorème au théorème de définissabilité de Beth (voir ([107], 301)) :

Théorème 32 Soit \mathcal{L} et \mathcal{L}^+ deux langages du premier ordre avec $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, soit \mathbf{T} une théorie dans \mathcal{L}^+ et $\phi(\vec{x})$ une formule de \mathcal{L}^+ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :

1. si A et B sont des \mathcal{L}^+ -structures modèles de \mathbf{T} et $A \upharpoonright \mathcal{L} = B \upharpoonright \mathcal{L}$, alors pour tous les n -uplets \vec{a} dans A , $A \models \phi(\vec{a})$ ssi $B \models \phi(\vec{a})$;
2. $\phi(\vec{x})$ est équivalente modulo \mathbf{T} à une formule $\psi(\vec{x})$ de \mathcal{L} .

Ce théorème peut être reformulé de la façon suivante : du point de vue d'une théorie du premier ordre, la définissabilité implicite équivaut à la définissabilité explicite.

par une formule-en-contexte sur la signature des monoïdes – et en effet, il l’est, par la formule $x, y.(mxy = x)$ où m est l’opération du monoïde.

De fait, Johnstone montre que le théorème de complétude conceptuelle peut être vu comme la généralisation du théorème suivant pour la logique cohérente :

Théorème 33 *Soit \mathbf{T} une théorie cohérente sur une signature Σ , soit $A_1 \dots A_n$ une suite de sortes de Σ , et supposons donné, pour tout modèle dans \mathbf{Ens} de \mathbf{T} , un sous-ensemble distingué R_M de $M(A_1, \dots, A_n)$ tel que tout homomorphisme de \mathbf{T} -modèle $h : M \rightarrow N$ dans \mathbf{Ens} envoie R_M sur R_N .*

Alors il existe une formule-en-contexte cohérente $\vec{x}.\phi$ de Σ , où $x_i : A_i$ pour chaque i , tel que $[[\vec{x}.\phi]]_M = R_M$ pour chaque M .

Ainsi, la complétude conceptuelle, dans cette version « cohérente », montre bien en quoi le contexte de la théorie catégorique des modèles offre la possibilité de retrouver, à partir de la sémantique, une forme syntaxique essentielle ou propre, qui serait comme adhérente aux concepts définis, comme c’était déjà le projet dans la thèse de Lawvere en 1963 (voir chapitre 2). En prenant pour point de départ les structures mathématiques elles-mêmes, et non leurs définitions formelles, il apparaît ainsi possible, comme l’indique la notion même de définissabilité – en tant que propriété des structures – de faire de leurs définitions un objet mathématique second, extrait ou construit, une image fidèle des structures, et non ce par quoi elles existent.

5.4.2 Différentes versions du théorème de complétude

La complétude conceptuelle forte implique enfin un théorème de complétude. Il est à noter cependant que le théorème de complétude pour le premier ordre classique prend dans le contexte de la théorie catégorique des modèles une forme particulière : il se présente en effet comme un théorème de représentation.

C’est ce que défendent notamment J.-P. Marquis et G. Reyes [173], mais également M. Makkai :

« A completeness theorem asserts the equality of the formal decidability relation and the semantic consequence relation in a particular logic. Algebraic Logic and, in particular, Categorical Logic replaces a completeness theorem by a representation theorem. Witness the examples of the Stone representation theorem for Boolean algebras, which is the algebraic equivalent of the (strong) completeness theorem for classical propositional logic; the representation theorem for cylindric and polyadic algebras that correspond similarly to the Gödel-Mal’cev theorem for Classical First Order Logic (CFOL); or the categorical representation theorems, also to be mentioned below, similarly corresponding to

the same completeness theorem and to other completeness theorems in logic. » ([164], 49)

Ce rapprochement qu'opère la littérature entre résultats de complétude et résultats de représentation implique que le contexte catégorique amène à considérer la logique comme intégrée au champ mathématique. L'étude formelle des concepts mathématiques n'est plus en effet qu'une forme de représentation parmi d'autres. Cela n'empêche pas cependant de laisser à la logique sa spécificité. Mais la question n'est plus « quelle différence y a-t-il entre la logique et les mathématiques ? », mais bien plutôt « qu'est-ce qui distingue la logique des autres formes de représentation mathématique ? ». Les analyses conceptuelles du chapitre 6 nous amèneront à réexaminer cette question du rapporte entre logique et mathématiques.

Il apparaît ainsi que l'idée que le théorème de complétude revient à un théorème de représentation traverse tous les développements de la Théorie Catégorique des Modèles. Un des premiers rapprochements entre complétude et Représentation apparaît dans le travail d'A. Daigneault, que nous avons décrit au chapitre 2 : celui-ci établit en effet une équivalence entre le théorème de complétude pour les théories élémentaires de Lawvere et un théorème de représentation pour les algèbres polyadiques. Comme le soulignent J.-P. Marquis et G. Reyes :

« Although Daigneault uses Lawvere's theorem in his paper, he points out that Lawvere's completeness theorem could be reduced to the representation theorem for polyadic algebras and ultimately to the ordinary completeness theorem for polyadic algebras. » ([173], 47)

Un deuxième rapprochement entre théorème de complétude et théorème de représentation est possible à partir d'un article de G. Reyes de 1974 [213]. En effet, la dernière section de cet article, §2, présente une preuve du théorème de complétude par André Joyal. Le théorème de complétude s'énonce dans ce contexte :

Théorème 34 *Soit \mathcal{A} une petite catégorie booléenne. Si A est distinct du plus petit objet de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, alors il existe un modèle booléen $M : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ens}$ tel que $M(A) \neq \emptyset$.*

La démonstration de Joyal utilise d'une part une suite infinie de catégories booléennes à partir de \mathcal{A} et la définition d'un ultrafiltre sur cette suite, et par ailleurs le passage de \mathcal{A} à une catégorie de faisceaux sur \mathcal{A} pour la topologie de la double négation. Concernant ce théorème de complétude, Marquis et Reyes font deux remarques conceptuellement importantes. D'une part, cette formulation du théorème de complétude s'avère très proche de celle de Daigneault, et donc de la formulation originale de Lawvere, que nous avons présentée dans le chapitre 2. D'autre part, cette formulation du théorème de complétude est telle qu'elle est équivalente au théorème de

représentation suivant (bien que ce rapprochement ne soit pas mentionné dans l'article de 1974) :

Théorème 35 *Soit \mathcal{C} une (petite) catégorie cohérente. Alors il existe un ensemble I et un foncteur cohérent reflétant les isomorphismes $M : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}^I$.*

Cette formulation est par ailleurs très proche du théorème de représentation pour les algèbres polyadiques formulé par Daigneault.

Mais c'est à la lumière des concepts introduits par Makkai et Reyes dans [74] qu'il est possible de clarifier la relation entre complétude et représentation. En effet, dans le contexte de ces travaux, il devient possible, selon Marquis et Reyes, de reformuler le théorème de Joyal dans les termes suivants :

Théorème 36 *Soit \mathcal{C} une catégorie cohérente et soit $\text{Mod}_{\text{Ens}}(\mathcal{C})$ la catégorie de foncteurs cohérents $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$, c'est-à-dire la catégorie des modèles de \mathcal{C} .*

Il y a une petite sous-catégorie pleine P de $\text{Mod}_{\text{Ens}}(\mathcal{C})$ telle que le foncteur d'évaluation $ev : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}^P$ reflète les isomorphismes et préserve toutes les limites finies, les sups finis stables, les images stables et les $\forall_f(\mathcal{C})$ stables existant dans \mathcal{C} .

En s'appuyant sur cette formulation du théorème de complétude, il est alors possible de montrer son équivalence avec un théorème de représentation pour les catégories cohérentes. Marquis et Reyes insistent sur le contexte historique d'une telle équivalence. En effet, au début des années 1960, Lubkin, Héron, Mitchell et Freyd démontrent un théorème de représentation pour les catégories abéliennes. A leur suite, M. Barr élabore la notion de catégorie exacte et régulière et démontre pour ces notions un théorème de représentation. Comme le remarquent Marquis et Reyes :

« Barr's representation theorem for regular categories turns out to be equivalent to a completeness theorem for coherent logic when it is looked at from the proper angle. » ([173], 76)

Cette suite de résultat et ce contexte expliquent comment, par exemple, Makkai en vient à proposer un « théorème de représentation de Gödel-Deligne-Joyal », et explique ainsi ce rapprochement :

« A word about the connections with ordinary formulations in logic. There is an essentially one-to-one correspondence between first order theories on the one hand and pretoposes on the other. Models of a theory correspond to elementary functors from the corresponding pretopos to SET, and in fact, elementary functors in general correspond to interpretations suitably defined. The pretopos corresponding to a theory (its pretopos completion) is obtained in a simple syntactical way, much the same as the

Lindenbaum-Tarski algebra of the theory. Once one establishes these translations, the representation theorem becomes equivalent to Gödel's completeness theorem. » ([161], 221)

5.4.3 La notion de représentation en mathématiques

Mais une fois établie cette correspondance entre théorème de complétude et théorème de représentation, il reste à déterminer la fonction et la portée épistémologique d'un théorème de représentation en mathématique. Afin de saisir celles-ci, il s'agira dans un premier temps de présenter de façon générale la notion de représentation, puis dans un second temps d'examiner son fonctionnement sur un exemple précis.

Représenter une structure, c'est la décrire en termes de son action sur d'autres objets préalablement connus. Ainsi dans le cas des groupes, pour lesquels s'est développée la théorie de la représentation proprement dite, représenter un groupe G , c'est donner G comme groupe des symétries d'une ensemble structuré X préalablement donné. De façon générale, représenter G c'est se donner un morphisme de groupe $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(X)$, tel que pour tout $g \in G$, on a un automorphisme $\rho(g)$ de X qui est une permutation de X . Comme le remarque Serge Lang,

« On rencontre les représentations dans de nombreux contextes, [comme par exemple] les représentations des groupes dans des espaces vectoriels de dimension finie [ou les] représentations d'un groupe dans des modules sur un anneau. En topologie et en géométrie différentielle, on représente des groupes en les faisant opérer sur des espaces topologiques divers, des sphères par exemple. » ([134], 58)

Une représentation est d'autant plus efficace que l'ensemble X , « base » de l'action, est élémentaire ou mieux connu. C'est le cas par exemple quand X est un espace vectoriel. On parle de représentation linéaire lorsque X est un espace vectoriel V ; le groupe des automorphismes de V est alors $GL(V)$. Lorsque V est de dimension finie, on parle de représentation linéaire de dimension finie. Une représentation linéaire d'un groupe G dans l'espace vectoriel V , c'est donc un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$. En dimension finie et sous l'hypothèse que ρ est injectif, représenter linéairement un groupe abstrait G , c'est donc le représenter comme groupe de matrices. Une représentation linéaire est dite irréductible si V n'a pas de sous-espace stable sous l'action de G .

L'idée fondamentale de la théorie des représentations est qu'il est possible d'étudier des propriétés de la structure abstraite à partir des propriétés de sa représentation. Ainsi par exemple, la notion fondamentale de la théorie des représentations linéaires des groupes finis est celle de caractère. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation de dimension finie de G . Son caractère χ_ρ est la fonction sur G à valeurs complexes définie par la trace :

$\chi_\rho(g) = \text{tr}\rho(g)$, où la trace est la somme des éléments diagonaux de la matrice. Dans ce contexte, une représentation ρ est complètement déterminée par son caractère χ_{rho} . La correspondance entre représentations et caractères permet d'associer à tout groupe fini sa table de caractères, c'est-à-dire le tableau de nombres complexes dont les entrées sont les valeurs des caractères unitaires, et cette table en un certain sens détermine le groupe. Ainsi cette correspondance ramène la structure du groupe fini abstrait G à de simples données numériques. On montre ainsi par exemple qu'un groupe fini G est commutatif si et seulement si pour tout caractère unitaire χ , $\chi(1_G) = 1$.

En contexte catégorique, on peut penser, à titre d'exemple de théorème de représentation, au plongement de Freyd-Mitchell qui associe à toute catégorie abélienne une catégorie de modules sur un anneau approprié.

À titre d'exemple plus précis, et plus proche de considérations logiques, on peut examiner l'article de M. Stone de 1936, « The theory of representations of Boolean algebras ». Le problème y est ainsi présenté :

« In the present paper [...] we shall be concerned primarily with the problem of determining the representation of a given Boolean algebra by algebras of classes, aggregates, or combinations. It is natural to surmise that the problem always has a solution leading to the construction of an algebra of classes isomorphic to the given Boolean algebra. » ([235], 37)

Stone éclaire ensuite ce problème par une analogie avec le théorème de Cayley, à une réserve près :

« Such a result is a precise analogue of the theorem that every abstract group is represented by an isomorphic group of permutations. Here we shall establish the validity of this surmise and, in addition, shall characterize all possible algebras of classes homomorphic to a given Boolean algebra. It is a curious fact that these results are considerably more recondite than the corresponding theorems for abstract groups : the elements of the representative classes must be taken as certain classes of elements in the given Boolean algebra (in particular, as the prime ideals in the algebra), whereas the elements of the permutations representing an abstract group are taken as elements of the group itself » ([235], 38).

Un point central de l'article de Stone est le déplacement des algèbres de Boole, vers les anneaux Booléens, ce qui va lui permettre d'utiliser toutes les notions liées aux idéaux, ce qu'il explicite ainsi :

« The representation problem is closely bound up with the theory of ideals, particularly the prime ideals. Suppose that the Boolean ring A has a homomorph B with elements which are subclasses of a fixed class E . Then each element of E is associated [...] with

a prime ideal in B and hence, [...] with a prime ideal in A . We may therefore suppose that each element of E is replaced by the associated prime ideal, so that A is represented by an algebra of classes of its own prime ideals. If this representation be further analyzed, it becomes clear that a given element a in A must be represented by the class of those prime ideals which are thus determined by the given basic class E and do not contain a as an element. Thus any attempt to solve the representation problem must be based upon a preliminary theory of the existence and divisibility properties of prime ideals. » ([235], 99)

Ce qui amène à la formulation du théorème fondamental de l'article⁸ :

Théorème 37 *Soit A un anneau booléen, \mathfrak{a} un idéal arbitraire dans A , \mathfrak{E} la classe de tous les idéaux premiers de A , \mathfrak{I} le système algébrique de tous les idéaux dans A sous les opérations d'addition non-restreinte et de multiplication finie, $\mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ la classe de tous les idéaux premiers qui ne sont pas diviseurs de \mathfrak{a} et $I(A)$ le système algébrique composé des classes de $\mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ comme éléments et avec les opérations de formation d'unions non-restreintes et d'intersections finies. Alors la correspondance $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{E}(\mathfrak{a})$ détermine un isomorphisme $\mathfrak{I} \rightarrow I(A)$ en accord avec les relations :*

1. $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{b})$ ssi $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$;
2. si \mathfrak{B} est une classe non-vide d'idéaux, alors

$$\mathfrak{E}(S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) = \Sigma_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{E}(\mathfrak{a})$$

3. $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{E}(\mathfrak{a})\mathfrak{E}(\mathfrak{b})$.

Soit $\mathfrak{E}(a)$ la classe $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}(a))$ correspondant à l'idéal principal $\mathfrak{a}(a)$; soit $B(A)$ le système algébrique avec les classes $\mathfrak{E}(a)$ comme éléments et comme opérations la formation d'unions finies, de différences symétriques (unions modulo 2) et d'intersections finies. Alors $B(A)$ est un anneau Booléen concret ou une algèbre de classe isomorphe à A en vertu de la correspondance $a \rightarrow \mathfrak{E}(a)$ en accord avec les relations :

- $\mathfrak{E}(a) = \mathfrak{E}(b)$ ssi $a = b$;
- $\mathfrak{E}(a + b) = \mathfrak{E}(a)\Delta\mathfrak{E}(b)$;
- $\mathfrak{E}(a \vee b) = \mathfrak{E}(a) \subset \mathfrak{E}(b)$;
- $\mathfrak{E}(ab) = \mathfrak{E}(a)\mathfrak{E}(b)$.

Le système $B(A)$ est une algèbre parfaite réduite de classes.

Ainsi Stone définit l'algèbre de classes $B(A)$ associé à l'anneau Booléen A comme la « représentation parfaite » de A .

On notera par ailleurs que l'article de Stone ne mentionne des concepts topologiques que de façon latérale :

8. le symbolisme original de l'article de Stone est ici conservé, et devrait être explicité.

« It will be evident from a closer inspection of our solution of the representation problem, that the relations thereby revealed are of such a nature that they can appropriately be stated in topological terms. Once such a statement has been made, a number of interesting topological connections are suggested. The further development of the theory in the indicated direction will be carried out in another paper. » ([235], 100)

5.4.4 Quel concept de représentation ?

Quelles sont dès lors les caractéristiques de la notion mathématique de représentation ? Que signifie le fait que A représente X ?

On notera tout d'abord que A est un concept mathématique à part entière, qui peut être étudié en soi, indépendamment de tout « intentionnalité » : ce n'est que dans un certain contexte que A est vue comme une représentation de quelque chose d'autre.

Ensuite, il semble nécessaire de souligner le fait que le représentant et le représenté sont dans tous les exemples considérés de même nature : des groupes, des anneaux booléens ou des catégories. Il n'y a pas de différence de nature entre A et X , mais seulement une différence de statut relationnel.

Pour ce qui est de cette relation, il faut noter que A et X sont généralement dans une relation d'équivalence, donc symétrique : le plus souvent le représentant et le représenté sont isomorphes. Mais cette symétrie est pour ainsi dire brisée par une asymétrie : A est en effet « mieux connu » que X , « plus élémentaire » ou « plus concret » que X . La relation de représentation, s'appuyant sur une relation d'équivalence, semble cependant introduire une asymétrie. Cette asymétrie semble répondre à une certaine finalité de la représentation : A doit « servir » à mieux connaître X , à en déterminer des propriétés ou à rendre possible une classification (dans le cas des groupes).

Ces caractéristiques étant posées, quels sont les traits essentiels de la notion de représentation en contexte mathématique ? Nous avons souligné le fait que le caractère asymétrique de la représentation mathématique provient de l'intérêt et des connaissances du mathématicien qui la met en œuvre : elle est donc contextuelle, et certaines théories de la représentation, parmi les nombreuses proposées dans la littérature philosophique, permettent de rendre compte de cette contextualisation. C'est le cas en particulier des analyses développées par B. van Fraassen dans *Scientific representation* [243], sur lesquelles nous allons nous appuyer. Les analyses de van Fraassen concernent certes les sciences de la nature : en quoi une théorie scientifique représente-t-elle une certaine classe de phénomènes ? En quoi, par exemple, la température représente-t-elle la chaleur, et comment la mesure-t-on ? Nous souhaitons néanmoins, dans les développements qui suivent, faire l'hypothèse que ces analyses de van Fraassen sont néanmoins transposables aux mathématiques.

Le point de départ de van Fraassen est la relation complexe entre res-

semblance et représentation. En effet, pour qu'il y ait représentation à proprement parler, il ne faut pas qu'il y ait production de copies parfaitement conformes à l'original : une « distorsion » peut être nécessaire pour que la représentation soit réussie. Ainsi,

« Distortion, infidelity, lack of resemblance in some respect, may in general be crucial to the success of a representation. This does not rule out that that resemblance in some other respect may be required. Yet even when that is the case – and it may be a special case – the *choice* of those respects in which resemblance or a specific kind of distortion is required, and those for which just anything at all will do, will have to be seen as crucial as well. » ([243], 13)

Toute représentation suppose donc à la fois de la ressemblance et de la distorsion, et cela repose sur un choix fait par celui qui représente. Le cas de la caricature est pour van Fraassen riche d'enseignements : il permet en effet d'introduire l'idée d'une distinction entre la représentation de X, et la représentation de X en tant que Y, et cet « attribut interprétatif » ajoutée par la caricature suppose un contexte social. En posant qu'il y a dans la représentation au moins une relation à trois termes (« X représente Y en tant que Z »), van Fraassen reprend une analyse de N. Goodman⁹ :

« Undeniably [...] Goodman has brought into the limelight the strong analogy : a picture is a picture *of* something, and depicts that something *as thus or so*, and so is in that respect similar to how a verbal description is a description *of* something, and describes that something *as being thus or so*. » ([243], 17)

Et ce dernier (le « en tant que Z ») est pour van Fraassen un « attribut interprétatif », qui dépend éminemment du contexte social pour être reconnu comme tel.

De ces analyses, van Fraassen déduit qu'il y a dans la représentation une forme d'asymétrie, qui cependant n'exclut pas la ressemblance :

« Certain modes or forms of representations (but not all) do trade on *selective* (and not arbitrary) resemblances for their effect, efficacy, and usefulness, and this typically goes in one direction only. » ([243], 18)

On voit ainsi réapparaître l'idée d'un choix entre ressemblance et distorsion, mais ce choix n'est plus arbitraire : il est orienté par des considérations pragmatiques, c'est-à-dire une certaine recherche d'efficacité. Cette idée est illustrée par l'exemple de la photocopie d'une photo de la Tour Eiffel accrochée à un mur : de quoi cette image est-elle une image ? De la Tour Eiffel ou de la photo de la Tour Eiffel ?

9. On peut considérer que les racines des analyses de van Fraassen et Goodman se trouvent dans l'œuvre de Wittgenstein

« If it is an image of something at all then *what it is an image of* depends on the use, on *what I use it to represent*. So the question *what does it represent?* must in this case be taken as elliptic for *what is it being used to represent?* » ([243], 21)

L'analyse de la représentation devrait donc être relation à quatre termes : « Z utilise X pour dépeindre Y comme F ». La représentation suppose dès lors, pour fonctionner, un contexte commun au producteur et au récepteur de la représentation : un « système de représentation », « some pre-existing communally understood form of representation » ([243], 22) :

« Wether or not A represents B, and wether or not it represents the represented item as C, depends largely, and sometimes only, *on the way in which A is being used*. « Use » must here be understood to encompass many contextual factors : the intention of the creator, the coding conventions extant in the community, the way in which an audience or viewer takes it, the ways in which the representing objects is displayed, and so forth. To understand representation we must therefore look to the practice of representating, to how representation is a matter of use? [...] *use*, in the appropriate sense, must determine the selection of likeness and unlikeness which may, in their different ways, play a role in determining what the thing is a representation of, and how it represents it. » ([243], 23)

En ce sens, toute représentation¹⁰ est intentionnelle : elle est représentation-*de*, et dès lors

« Given this intentionality it is perhaps not surprising that in the case of representation, the relations can change with the context of use. The very same object or shape can be used to represent different things in different context, and in other context not represent at all. » ([243], 27)

Van Fraassen s'appuie ici sur une idée développée par Ronald Giere dans *Scientific perspectivism* :

« If we think of representation as a relationship, it should be a relationship whith more than two components. One components should be agents, the scientist who do the representing. Because scientists are intentional agents with goals and purposes I propose explicitly to provide a space for purposes in my understanding of representational practices in science. So we are looking at a relationship with roughly the following form : S uses X to represent W for purposes P. » ([243], 28)

10. La conséquence de cette compréhension pragmatique de la représentation est selon van Fraassen qu'on ne peut utiliser cette notion pour les images mentales : la pensée en ce sens ne saurait être affaire de représentation.

En quoi une telle description correspond-elle à la notion mathématique de représentation ?

On peut retenir d'une part l'idée d'une tension, dans la représentation mathématique, entre ressemblance et distorsion. En effet, si le représentant est toujours isomorphe au représenté, il y a également un écart entre les objets. Cet écart a pour première conséquence que la représentation est bien une sorte de relation d'équivalence asymétrique : il y a bien isomorphisme, mais également une direction du représenté vers le représentant. Cet écart, comme le souligne van Fraassen, est bien le résultat d'un choix, c'est-à-dire le produit de l'intervention d'un agent qui sélectionne, déterminant une ressemblance nécessaire au transfert de propriétés, mais également une distorsion vers ce qui est « mieux connu », plus « concret » ou plus élémentaire. Et c'est ici le point de vue du mathématicien qui détermine ce qui sera une représentation efficace. Cet objectif défini par le mathématicien, le but qu'il poursuit, selon ses propres critères de ce qui est élémentaire ou mieux connu – critères sans doute historiquement déterminés – oriente dès lors la forme de la représentation, mais également le fait même qu'il y ait représentation. En effet, en mathématiques comme dans le cas général, rien ne se présente en soi comme une représentation, mais seulement relativement à un projet de connaissance, à l'intention d'un agent. Ainsi toutes les représentations mathématiques sont des objets que l'on peut examiner en soi, pour eux-mêmes, ou doter d'une intentionnalité en en faisant une représentation-de.

Seule la distinction entre *representation-of* et *representation-as* semble moins adaptée à la pratique mathématique de la représentation : il n'est pas clair que la représentation mathématiques attribue un prédicat à ce qui est représenté.

Quoiqu'il en soit, la pratique de la représentation mise en évidence par van Fraassen et la frontière qu'elle trace entre ressemblance et distorsion selon des critères contextuels – objectif poursuivi, détermination du « mieux connu », etc – semblent particulièrement adéquates pour comprendre la dimension pragmatique de la représentation mathématique.

5.4.5 La relation entre complétude et représentation

Quelles analyses peut-on dès lors tirer, d'un point de vue épistémologique, de cette équivalence entre complétude et représentation ?

Il est d'abord important de souligner la relation qu'entretiennent précisément les théorèmes de représentation et les théorèmes de complétude en logique catégorique. Makkai souligne en effet que ces différents résultats sont dans une relation de traductibilité réciproque :

« A common element in these correspondences is the fact that the algebraic and the logical formulations are *translation-equivalent* ; given either the algebraic or the logical formulation, the other can be deduced by a formal argument that is a routine translation, all

of whose elements are in view already when the algebraic version of the logic is introduced. In particular, it (the formal argument) can be carried out in a weak metatheory, not going, in strength, beyond a fragment of first order arithmetic. » ([164], 50)

C'est donc par une traduction mécanique (une « routine ») qu'un théorème de complétude peut être compris comme théorème de représentation.

Mais au delà de cette idée, comprendre la complétude comme représentation revient à préciser la nature de la relation entre sémantique et syntaxe d'un système formel. En effet, s'il est en droit possible de passer d'un pôle à l'autre de la relation (complétude et adéquation), la syntaxe peut être vue du côté de ce qui est « mieux connu » que la sémantique. Cela peut être perçu à travers la dimension « mécanique » des règles d'inférence qui gouvernent la syntaxe. Il y aurait ainsi une forme d'asymétrie dans la relation entre sémantique et syntaxe, cette relation n'étant plus par ailleurs qu'un cas particulier de représentation. Ainsi la définition syntaxique, par un système d'axiomes formels, d'un concept structurel n'apparaît plus que comme une procédure de représentation parmi d'autres, sans préséance particulière dans la détermination des structures (on rappelle par exemple qu'une table de caractères détermine un groupe fini), si ce n'est selon des critères pragmatiques, relativement à des objectifs poursuivis et à un état de la connaissance mathématique en général à un moment donné.

En outre, et ce point rejoint certaines analyses du chapitre 2, considérer un théorème de complétude comme un théorème de représentation met en lumière l'homogénéité entre la sémantique et la syntaxe d'un système formel. En effet pour qu'une telle relation soit possible, il faut que les termes de la relation soient de même nature (autrement dit, appartiennent à une même catégorie), de telle sorte que la relation sémantique/syntaxe n'est plus une relation en soi, figée et déterminée une fois pour toutes, mais une relation fluide, dessinée essentiellement par des considérations contextuelles et pragmatiques.

Il serait cependant nécessaire d'apporter un bémol à ses analyses, comme le propose M. Makkai

« Thus, categorical logic already has a framework for expressing completeness theorems. However, it can be legitimately argued that completeness-as-representation does not express the full intended meaning of completeness. The fact that truth is carried adequately by finite combinatorial objects, namely the formal deductions, has, apparently, disappeared in the statement of the representation theorem.

[...] The fact remains that the Abstract Completeness Theorem can be derived from representation; however, this derivation, going through the translation to completeness expressed in the usual syntax of CFOL, requires stepping out of the framework of

categorical logic : apparently, categorical logic is not sufficient in itself for expressing the ACT.

To rectify this situation, what is needed is a syntax directly related to categorical logic, which provides an adequate notion of formal deduction. » ([164], 50)

Cette syntaxe, qui va permettre de compléter l'outillage de la Logique Catégorique afin de mener jusqu'à son terme le rapprochement entre complétude et représentation, sera donnée par les Esquisses d'Ehresmman, objet du prochain chapitre.

Conclusion

La présentation des théorèmes de complétude conceptuelle forte et de complétude conceptuelle, ainsi que que l'analyse du théorème de complétude comme théorème de représentation, nous a conduit à introduire les notions principales de la Théorie Catégorique des Modèles et par là-même nous a permis de retrouver tous les problèmes principaux soulevés par la détermination catégorique des concepts structurels, que ce soit la recherche d'un invariant des présentations présente dans la définition des catégories syntaxiques ou à travers l'idée centrale selon laquelle la sémantique détermine la syntaxe, la recherche d'une relation de synonymie détachée du langage sous les traits de la Morita-équivalence, ou l'idée d'une fluidité de la relation syntaxe/sémantique désormais considérée comme une forme parmi d'autres de la représentation, déterminée par la pratique d'un agent mathématicien.

Il y a donc davantage dans la Théorie Catégorique des Modèles qu'une simple reformulation de la théorie des modèles usuelle. Même si ce passage par la Logique Catégorique n'a pas encore produit à ce jour de résultat mathématique nouveau, il est possible de considérer qu'elle offre une perspective originale sur les notions fondamentales de la sémantique, relativisant *in fine* l'importance du langage formel. Il reste cependant à saisir ce que devient, dans le contexte catégorique, la notion de langage formel, à doter la Logique Catégorique de ce qui pourrait jouer le rôle d'une syntaxe : les Esquisses.

Chapitre 6

Ehresmann et les esquisses

Introduction

La notion d'esquisse¹ est présentée par Charles Ehresmann en 1966 dans [59]. Elle répond au même programme de recherche que les théories de Lawvere, comme le souligne Charles Ehresmann lui-même, avec Andrée Bastiani :

« In the last decade algebraic structures have been defined on the objects of a category V :

1. A multiplication on an object e of V is a morphism k from a product $e \times e$ to e ; monoids on e , groups on e , ... are obtained if further axioms are imposed on k by way of commuting diagrams. [...]
2. The theory of fibre spaces and local structures led to p -structured categories (such as topological categories, differentiable categories, ordered categories, double categories) relative to a faithful functor p from V to the category of mappings, and more generally to categories in V (or category-objects in V).

Algebraic theories of Lawvere give an axiomatic way to define universal algebras; but they do not cover structures defined by partial laws, such as categories. However, all these structures may be defined by « sketches ». » ([18], 105)

Ces remarques distinguent ainsi deux trajectoires pour résoudre une même difficulté : définir une structure « algébrique » sur les objets d'une catégorie. Une première voie qui s'ouvre avec l'article de B. Eckmann et P. J. Hilton [56] et qui aboutit aux théories algébriques de Lawvere; une seconde voie, qui est celle suivie par Ehresmann, qui repose sur des considérations nettement distinctes de la première, puisque les notions de départ sont les

1. Je remercie vivement M. René Guitart sa disponibilité et son aide dans la préparation de ce chapitre.

« espaces fibrés » et les « structures locales ». Cette seconde voie aboutit à la notion d'esquisse. Ehresmann marque par ailleurs dès l'abord l'intérêt de cette dernière notion par sa généralité : même les structures où les opérations sont partiellement définies sont définissables par ce biais, mettant ainsi en évidence un lien entre ce qui est « partiel » et ce qui est « local ».

La portée générale des esquisses sera par la suite clairement définie par un résultat central, le théorème de Lair [128] :

Théorème 38 *Une structure est esquissable dans Ens ssi elle est axiomatisable dans un langage du premier ordre infinitaire.*

Les esquisses se présentent ainsi véritablement comme le pendant catégorique des systèmes formels usuels. Se dessine ainsi un parcours conceptuel, parallèle à celui de Lawvere et aboutissant à une notion plus générale que les théories algébriques, puisqu'elles s'appliquent également aux structures où les opérations ne sont que partiellement définies, et dont la portée apparaît non seulement équivalente à celle des systèmes formels, mais même révélatrice de certaines propriétés essentielles de ces derniers : la complétude d'une théorie formelle, par exemple, peut ainsi « apparaître » graphiquement sur l'esquisse des modèles de cette théorie, selon Makkai et Paré qui soulignent que :

[there is] « an (obvious) identification of a class of sketches S so that the categories $Mod(S)$ for such sketches are precisely the categories of models of complete theories with elementary embeddings as morphisms. » ([165], 58)

Questions

Cette première approche, génétique, des esquisses permet ainsi de faire émerger différentes questions :

1. on a vu apparaître au chapitre 2, en particulier dans les travaux de J. Bénabou, l'idée que le formalisme catégorique permettrait de décrire de façon *intrinsèque* les concepts structurels. Mais quel sens donner, à la lumière du parcours conceptuel que trace l'œuvre d'Ehresmann, à cette recherche de l'intrinsèque ?
2. alors que les travaux de Lawvere et Bénabou, examinés au chapitre 2, s'inscrivaient dans le prolongement de l'algèbre universelle, quel éclairage sur la notion même de structure les esquisses offrent-elles, compte tenu de ce parcours conceptuel géométrique ?
3. que devient, dans le contexte global des travaux d'Ehresmann, l'idée que nous avons présentée en introduction d'un dépassement de la sensibilité au langage ?

6.1 La théorie des esquisses en contexte : Le local et l'intrinsèque

L'approche de Lawvere et de Bénabou des concepts structurels revendiquent une forme d'intrinsécité, par opposition au caractère extrinsèque des systèmes axiomatiques formels, vus comme des choix arbitraires de constantes ou de paramétrages. C'est ce que souligne J. Bénabou en affirmant dans sa thèse :

« La notion de présentation n'est pas intrinsèque, et en particulier ne se prête pas bien à la « comparaison » de deux théories, alors que le type est l'« invariant » commun à toutes les espèces de structures algébriques équivalentes. » ([21], 79).

La question qui se pose alors est de savoir quelle est la portée réelle de cette distinction entre l'intrinsèque et l'extrinsèque, concernant les concepts structurels, et s'il y a dans cette remarque de Bénabou davantage qu'une simple critique de l'arbitraire du langage. Si les présentations sont extrinsèques, peut-on en conclure que la description catégorique des concepts serait, elle, intrinsèque aux concepts eux-mêmes ? Rien n'indique en effet que l'extrinsécité des présentations formelles, mise en lumière par la diversité des façons de viser un même concept structurel, implique nécessairement l'existence d'un intrinsèque qui serait à trouver. Que signifierait dès lors un tel caractère intrinsèque ?

Or l'œuvre d'Ehresmann est celle d'un géomètre différentiel, pour lequel la dualité intrinsèque/extrinsèque présente un sens précis². Dans ce cadre hérité du théorème remarquable de Gauss, à la description extrinsèque des surfaces correspond bel et bien une caractérisation intrinsèque de la courbure. Dès lors, la théorie des structures d'Ehresmann peut-elle permettre de mieux comprendre cette idée d'une caractérisation intrinsèque des concepts structurels ?

Il semble possible, dans cette perspective, de repartir du projet formulé par Ehresmann lui-même dès 1939, comme le montre son intervention le 4 février 1939 à la Société française de Philosophie, lors d'une séance durant laquelle Jean Cavaillès et Albert Lautman présentaient leur thèse respective. Avec ce dernier, Ehresmann exprime cependant un désaccord, en affirmant que la formulation des problèmes dont les théories mathématiques sont des solutions concrètes n'échappe pas à la mathématique elle-même, défendant ainsi une totale autonomie de la pensée mathématique. Les conditions d'une telle autonomie selon Ehresmann sont les suivantes :

— donner une définition mathématique de la notion de structure,

2. Nous ferons ici l'hypothèse que la notion d'« intrinsèque » au sens de la géométrie différentielle est la même que celle que vise Bénabou. Une telle identification appellerait sans aucun doute des justifications ou des nuances, qui dépassent cependant le cadre du présent travail de recherche.

— placer au cœur de cette entreprise la notion de structure induite.
En effet,

« Étant donné un ensemble fondamental muni d'une structure mathématique *particulière*, par exemple une structure de groupe ou une structure d'espace topologique, le rapport entre cet Ensemble fondamental et une de ses parties se traduit par la notion *mathématique* de structure induite sur la partie. Je ne peux pas préciser davantage, parce qu'il faudrait d'abord définir la notion générale de structure mathématique. Le problème des relations entre propriétés intrinsèques et extrinsèques et le problème des propriétés de situation d'une partie dans un ensemble fondamental, ce n'est pas autre chose que le problème des relations entre la structure de l'ensemble fondamental et les structures induites sur une partie et sur la partie complémentaire.

En ce qui concerne les notions de *local* et de *global*, il me semble que la notion de local n'a de sens que pour une structure d'espace topologique : comme on a alors la notion de voisinage d'un point, la notion de propriété locale en un point pourra se déduire de la notion de structure induite sur un voisinage *quelconque* du point. Nous arrivons de nouveau à une notion purement mathématique. » ([35], 618-619)

On voit ainsi se dégager le caractère central, dans le projet ehresmannien, de la notion de structure « induite », à laquelle s'articulent différents problèmes mathématiques, comme le couple intrinsèque/extrinsèque, ou la dualité local/global. Il semble en effet que la notion de structure induite soit le lieu où se nouent les problèmes essentiels de la géométrie d'Ehresmann. Mais cette notion se révèle adossée à une définition générale de la notion de structure, et sur ce point, ce sont les liens entre Ehresmann et Bourbaki qu'il peut être pertinent de mettre en évidence.

Ce caractère central de la notion de structure explique en effet la place qu'Ehresmann occupe dans le paysage mathématique de son temps. Membre de Bourbaki à partir du 22 mars 1936, Ehresmann y interviendra rapidement pour mettre au premier plan la notion générale de structure. Ainsi, selon Jean Dieudonné, « dès avant 1940, il rêvait d'une théorie abstraite de toutes les espèces possibles de structure » [52]. Cet attachement à la notion de structure est confirmé d'une part par la participation active d'Ehresmann, selon Pierre Ageron [3], à l'élaboration des définitions générales de structure et de structure locale en septembre 1936, lors du « Congrès de l'Escorial » – malgré les réticences de certains membres du groupe, la notion pouvant apparaître primitive ; et d'autre part par le fait que la définition générale de la notion de structure apparaissant à la fin du premier tome des *Eléments* sera réélaborée à plusieurs reprises par Ehresmann, ainsi par exemple :

— en 1952 dans son cours de Rio sur « Structures locales et revêtements »

- en 1957 dans « Gattungen von lokalen Strukturen », où il démontre que sa définition générale et catégorique des espèces de structures coïncident dans le cas des structures sur des ensembles avec celles de Bourbaki,
- en 1960 dans « Catégorie des foncteurs types », où il donne une formulation catégorique de la procédure bourbakiste de construction d'espèces de structures par schéma de constructions d'échelons.

Tout ceci amène à considérer, avec Pierre Ageron, que la théorie des espèces de structures développée par Ehresmann constitue, davantage qu'une prise de distance, une « réélaboration profonde, mais fidèle, des idées bourbakistes des années 30 ».

Dans le parcours conceptuel élaboré par Ehresmann, il est ainsi possible de dégager quatre grands moments :

1. du projet initial au cours de Rio (1952),
2. le tournant catégorique : les « espèces de structures locales » (1957),
3. les catégories p -structurées,
4. la théorie des esquisses (1966)

L'hypothèse qu'il s'agira de défendre ici est que ce travail progressif des notions de structure et de structure induite, et cette mise à distance progressive de Bourbaki vers la théorie des catégories et les esquisses, ouvrent la voie à une compréhension mathématique de l'idée d'intrinsécité des descriptions des concepts structurels. Cette hypothèse se trouve par ailleurs justifiée par l'importance accordée par Ehresmann à l'idée de définition intrinsèque, comme le remarquent par exemple André Haefliger :

« Pour Ehresmann une des principales motivations pour introduire les espaces fibrés était de donner une définition intrinsèque globale des connexions considérées par E. Cartan et du transport parallèle (c'est pour cette même raison que les physiciens se sont enfin décidés à étudier la théorie des espaces fibrés !). » ([64], 559)

ou par ailleurs, Paulette Libermann, commentant les travaux d'Ehresmann en géométrie différentielle :

« Le souci d'établir un calcul différentiel intrinsèque sur les variétés, déjà apparent dans son article sur les connexions, a conduit C. Ehresmann à introduire la notion de jet comme base de la Géométrie Différentielle. » ([64], 516)

6.1.1 Du projet initial au cours de Rio

Pour expliciter le mouvement général du premier moment, il est possible de s'appuyer sur le compte-rendu proposé en 1955 par Ehresmann de ses différents travaux. Y est présentée une certaine idée de la Géométrie,

comme « théorie des structures plus ou moins riches, dans lesquelles on discerne en général des structures algébriques et des structures topologiques sous-jacentes » ([64], 471). Une telle définition s'appuie sur l'idée d'une généralisation de la géométrie élémentaire selon le point de vue du programme d'Erlangen, élargi au domaine algébrique :

« D'une part, on a les structures essentiellement algébriques définies sur un ensemble par un groupe de transformations (suivant l'idée développée, par exemple, par Felix Klein dans son programme d'Erlangen) ; d'autre part, on a les structures topologiques, qui forment l'objet de la Topologie. Mais la notion de groupe de transformations est un cas particulier de la notion de pseudogroupe de transformations, dont les transformations ne sont définies que sur certains sous-ensembles de l'espace considéré. Ces sous-ensembles sont les ensembles ouverts d'une structure topologique, de sorte qu'on admet déjà une structure topologique sous-jacente. On est conduit ensuite à une notion générale de structure locale, étroitement liée à celle de pseudogroupe. Par combinaison de structures algébriques et de structures topologiques, on aboutit à des structures de plus en plus riches : groupes topologiques, groupes de Lie, espaces homogènes de Lie, espaces feuilletés, espaces fibrés, enfin toutes les structures qu'on peut appeler infinitésimales et qui forment l'objet de la Géométrie Différentielle. » ([64], 471)

Apparaît ici clairement l'influence de son directeur de thèse Elie Cartan : celui-ci proposait en effet le projet, dans « La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle », d'une synthèse de deux points de vue en géométrie, celui de Riemann et celui du programme d'Erlangen :

« Est-il possible de faire rentrer dans le cadre, suffisamment élargi, du programme d'Erlangen, toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres ? [...]

A première vue, la notion de groupe semble étrangère à la Géométrie des espaces de Riemann, car ils ne possèdent l'homogénéité d'aucun espace à groupe fondamental. Néanmoins, si un espace de Riemann ne possède pas une homogénéité absolue, il possède cependant une sorte d'homogénéité infinitésimale ; au voisinage immédiat d'un point donné il est assimilable à un espace euclidien. [...]

En résumé, dans les généralisations précédentes, l'idée directrice est la suivante. Dans un espace holonome, au sens de M. F. Klein, tout est commandé par le groupe fondamental et ses différentes opérations. Ce sont ces opérations qui font de l'espace un tout organique. Dans les espaces non holonomes, ce sont encore les opérations du groupe qui sont un principe d'organisation, mais

uniquement de proche en proche. C'est précisément en analysant ce que cette organisation a d'incomplet que nous allons arriver au rôle tout à fait nouveau que va jouer encore la notion de groupe dans les Géométries nouvelles. » ([32], 6-10)

On notera par ailleurs que la notion « générale » de structure locale joue un rôle central dans la première partie de l'œuvre d'Ehresmann, en tant qu'elle « permet de reconnaître l'unité de la Géométrie sous sa grande diversité » ([64], 471). Il faut souligner cependant que cette notion unificatrice n'est introduite explicitement qu'en 1951 dans un Compte-Rendu à l'Académie des Sciences, « Structures locales et structures infinitésimales », alors que dès 1943 Ehresmann fait reposer les définitions des différentes sortes de structures géométriques sur le « pseudogroupe de transformations ». Dans l'articulation entre « espèce de structures locales » et « pseudogroupe », c'est cette dernière notion qui semble essentielle en tant qu'outil de caractérisation des variétés différentiables, des espaces fibrés et des espaces feuilletés.

C'est ce que met en évidence l'exposé donné par Ehresmann à Rio en 1952 ([63], 3-24), où l'on voit se dégager l'interaction entre une définition « à la Bourbaki » des structures et la mise au premier plan du pseudogroupe de transformations, notion « étroitement liée » à celle de structures locales.

Dans son cours de Rio, Ehresmann appuie sa définition des structures sur celle de Bourbaki à partir de l'exemple des espaces topologiques.

« Partons de l'exemple de structures topologiques. Une structure topologique (ou une topologie) est définie par la donnée d'un ensemble O de parties de E vérifiant les conditions suivantes :

- (O_1) La réunion d'une famille quelconque d'ensembles appartenant à O appartient aussi à O .
- (O_2) L'intersection d'une famille finie d'ensembles appartenant à O appartient aussi à O .

Un espace topologique est un ensemble E muni d'une structure topologique. Toute partie de E appartenant à l'ensemble O correspondant est appelé ensemble ouvert de cet espace topologique. [...]

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . L'ensemble O est une partie de $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire un élément \mathcal{T} de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, que nous pouvons appeler *l'élément structural* définissant la topologie. Les propriétés (O_1) et (O_2) définissent une partie Ω de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, ensemble des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ qui possèdent ces propriétés. Tout élément \mathcal{T} de Ω définit une topologie sur E ; l'ensemble Ω définit l'espèce des structures topologiques sur E . Nous pouvons partir d'un ensemble E quelconque. La loi de formation de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ à partir de E et en plus les deux propriétés (O_1) et (O_2) définissent la classe de structures topologiques sur un ensemble quelconque, et cette classe s'appellera l'espèce des structures to-

pologiques. Les propriétés (O_1) et (O_2) sont appelés les axiomes de l'espèce des structures topologiques. »([63], p.4)

On peut noter plusieurs éléments importants dans cet exemple, explicitement inspiré de Bourbaki :

- d'une part, l'espèce de structures est toujours définie relativement à un ensemble de base, et non pas abstraitement ;
- d'autre part, l'espèce de structures reste déterminée de l'extérieur, pour ainsi dire, par des axiomes.

Ehresmann peut alors donner la définition suivante d'une espèce de structures :

Définition 73 « une espèce de structures mathématiques est déterminée par :

1. La donnée d'une loi de formation d'un ensemble M à partir d'un ensemble quelconque E et d'un certain nombre d'ensembles auxiliaires A_1, A_2, \dots, A_k . Cette loi de formation indique une suite d'opérations du type suivant : a) formation de l'ensemble des parties d'un ensemble déjà obtenu ; b) formation du produit de deux ensembles déjà obtenus ;
2. La donnée d'un système d'axiomes imposant des conditions aux éléments de M , c'est-à-dire déterminant une partie W de M .

La loi de formation donnée définit un type de structures ; tout élément de M définit une structure de ce type sur E .

L'ensemble W constitue une espèce de structures mathématiques sur E . Tout élément V de W sera une structure de cette espèce sur E . »([63], 5-6)

On peut alors définir des applications entre structures, et c'est à ce niveau qu'apparaît la structure de groupe. En effet,

« Considérons une espèce de structures mathématiques pour laquelle les ensembles auxiliaires A_1, A_2, \dots, A_k sont fixés et munis éventuellement de structures déterminées préalablement. Etant donnés deux ensembles E et E' , le type de structures considéré détermine, à partir de E et E' deux ensembles M et M' , et le système d'axiomes en détermine deux sous-ensembles W et W' . Toute application biunivoque f de E sur E' admet une extension f' appliquant d'une façon biunivoque M sur M' . Comme les axiomes ne font intervenir aucune structure préalable sur E et sur E' , l'extension f' applique W sur W' ; c'est-à-dire transforme toute structure de l'espèce considérée donnée sur E en une structure de même espèce sur E' . Si S et S' sont deux structures de l'espèce considérée sur E et sur E' , c'est-à-dire deux éléments de W et W' , un isomorphisme de S sur S' est une application biunivoque f de E sur E' dont l'extension f' applique S sur S' . En particulier le groupe des permutations de E laisse invariant W . Le sous-groupe qui laisse invariant S est le groupe des automorphismes de S . [...]

Considérons maintenant deux espèces de structures, en général de types différents. Sur un ensemble E , les deux types correspondent à deux ensembles M et M' et les deux espèces de structures correspondent à deux sous-ensembles $W \subset M$ et $W' \subset M'$. On dira que les deux espèces de structures sont équivalentes sur E lorsqu'on aura défini une application biunivoque de W sur W' , invariante par les permutations de E . On pourra identifier alors les structures qui se correspondent par cette application. Si l'ensemble E n'est pas fixé, on dira que les deux espèces de structures sont équivalentes lorsque pour un ensemble E quelconque on aura défini une application biunivoque (dite application d'équivalence) de W sur W' de telle façon que les applications d'équivalences associées à deux ensembles E et E' se correspondent par toute application biunivoque de E sur E' . » ([63], 6)

Sur ce dernier point Ehresmann prend à nouveau l'exemple des espaces topologiques, qui peuvent être définis de plusieurs manières différentes, par la donnée de l'ensemble des ensembles fermés, ou par la donnée des ensembles de voisinages des points de E , ou par la donnée des adhérences des sous-ensembles de E . On voit donc apparaître l'idée de saisir un contenu commun « derrière » des définitions différentes, par le biais d'une application invariante par le groupe de permutations sur l'ensemble de base.

Il devient alors possible de définir la notion de structure locale, essentielle au développement de la géométrie pour Ehresmann :

Définition 74 « Une espèce de structures locales est une espèce de structures (α) pour laquelle il existe une loi d'induction, c'est-à-dire une loi qui associe à toute structure S d'espèce (α) , donnée sur un ensemble E , un ensemble Φ de parties de E et qui détermine sur tout ensemble $U \in \Phi$ une structure d'espèce (α) appelée structure induite par S sur U muni de cette structure induite étant appelée sous-espace distingué de E , de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. La loi d'induction est canonique. C'est-à-dire si une application biunivoque f de E sur E' transporte la structure S sur une structure S' définie sur E' , la restriction de f à chaque sous-espace distingué de E est un isomorphisme sur un sous-espace distingué de E' muni de la structure S' .
2. Φ est l'ensemble des ensembles ouverts non vides d'une topologie \mathcal{T} sur E . On dira que S est une structure locale par rapport à cette topologie.
3. Transitivité des structures induites. Si U est un sous-espace distingué de E (et par conséquent muni de la structure induite par S), les sous-espaces distingués de U sont les sous-espaces distingués de E qui sont contenus dans U .

4. *Axiome du recollement.* Soit E' la réunion d'une famille de sous-ensembles de E dont chacun est muni d'une structure d'espèce (α) telle que la condition suivante soit satisfaite : si E_i et E_j sont deux ensembles de la famille dont l'intersection $E_i \cap E_j$ ne soit pas vide, celle-ci est sous-espace distingué de E_i et E_j et les structures induites sur $E_i \cap E_j$ par les structures données sur E_i et E_j sont identiques. Il existe alors sur E' une structure S' d'espèce (α) bien déterminée telle que chaque E_i muni de sa structure soit sous-espace distingué de E' muni de S' . Nous dirons que les structures données sur les E_i se raccordent et que E' muni de la structure S' est obtenu par recollement des sous-espaces E_i .

En vertu des conditions précédentes la structure induite par S sur E est identique à S . » ([63], 7)

Ehresmann remarque alors qu'une telle définition, permet un passage du global au local, mais non dans le sens inverse : en effet, on peut retrouver à partir de la topologie de l'espace E la topologie induite sur un sous-ensemble A de E , mais par recollement de sous-espaces formant un recouvrement de E on ne retrouve pas forcément l'espace topologique E . Il y a donc une forme d'asymétrie qui apparaît ici dans le couple local/global.

On peut alors définir le pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure locale :

Définition 75 « Soit S une structure locale d'une espèce donnée définie sur E . Soit Γ l'ensemble des automorphismes locaux de E , c'est-à-dire des isomorphismes d'un sous-espace distingué sur un sous-espace distingué. Γ est un pseudogroupe de transformations, c'est-à-dire un ensemble de transformations vérifiant les axiomes suivants :

1. Tout $f \in \Gamma$ est une application biunivoque dont la source et le but appartiennent à Φ , où Φ est l'ensemble des ouverts non vides d'une topologie sur E ; cette topologie s'appellera la topologie sous-jacente au pseudogroupe de transformations.
2. Soit U la réunion d'une famille d'ensembles $U_i \in \Phi$. Pour qu'une application biunivoque f de U sur un sous-ensemble $f(U)$ de E appartienne à Γ , il faut et il suffit que la restriction de f à U_i appartienne à Γ , pour chaque indice i .
3. Pour tout $U \in \Phi$, l'application identique de U appartient à Γ . Si $f \in \Gamma$, on a aussi $f^{-1} \in \Gamma$. Si $f \in \Gamma$ et $f' \in \Gamma$ et si de plus $f'f$ est défini, on a aussi $f'f \in \Gamma$. » ([63], 8)

Γ admet en réalité une structure de groupoïde, et c'est par l'intermédiaire de cette notion que la théorie des catégories intégrera par la suite l'outillage ehresmannien. Quelques définitions sont encore nécessaires, qui viennent de la théorie des espaces fibrés d'Ehresmann.

Définition 76 « Soit S une structure locale sur E ; soit S' une structure de même espèce sur E' . Un isomorphisme local f de E sur E' , c'est-à-dire un isomorphisme d'un sous-espace distingué de E sur un sous-espace distingué de E' , sera aussi appelé une carte locale de E sur E' . Etant données deux cartes locales f_1 et f_2 dont les buts (c'est-à-dire les buts des applications f_1 et f_2) ont une intersection non vide, au couple (f_1, f_2) est alors associé l'automorphisme local ϕ_{21} de E tel que $f_1(x) = f_2(x')$, où $x \in E$ et $x' \in E$, soit équivalent à $x' = \phi_{21}(x)$. Nous dirons que ϕ_{21} est le changement de cartes locales associé à (f_1, f_2) .

Appelons atlas de E sur E' un ensemble de cartes locales de E sur E' dont les buts recouvrent E' . [...]

Si E' est localement isomorphe à E , l'ensemble des cartes locales de E sur E' est appelé atlas complet de E sur E' . [...]

Un atlas complet de E sur E' compatible avec Γ définit sur E' une structure associée à Γ . La classe des structures associées à Γ , sur un ensemble quelconque, s'appellera l'espèce des structures associées à Γ . » ([63], 9)

On peut alors formuler et démontrer le résultat suivant :

Théorème 39 *L'espèce des structures associées à Γ est une espèce de structures locales.*

L'intérêt de ces définitions et de ce résultat est qu'il met en avant une façon de définir une structure sur un ensemble d'arrivée E' , modalité de définition qui semble proprement géométrique, dans la mesure où elle passe par des notions introduites pour les espaces fibrés, comme les atlas et leur complétion, mais surtout, si l'on s'en tient à la Notice de 1955, repose sur le groupoïde de transformations. Certes, demeure l'extrinsèque des déterminations axiomatiques de l'espèce de structure de départ, mais il semble que le passage par la notion de structure induite, l'atlas et le pseudogroupe constitue bien une voie vers une caractérisation intrinsèque de la structure d'arrivée E' .

6.1.2 Le tournant catégorique

Ces différentes constructions vont cependant être généralisées dans un deuxième temps, grâce aux outils de la théorie des catégories, dès 1957 dans l'article d'Ehresmann intitulé « Gattungen von lokalen Strukturen », traduit dans [57].

Catégories et opérateurs

La notion de catégorie venant, chez Ehresmann, généraliser celle de groupoïde, cela implique une définition de la notion de catégorie sensiblement

différente de celle d'Eilenberg et MacLane, par deux classes distinctes et hétérogènes d'objets et de morphismes. Ehresmann met en effet l'accent sur les morphismes :

Définition 77 « Une catégorie est une classe \mathcal{C} d'éléments dans laquelle est définie une multiplication $(f, g) \rightarrow fg$ pour certains couples (f, g) d'éléments de \mathcal{C} , multiplication qui vérifie les axiomes suivants :

1. Si $h(fg)$ ou $(hf)g$ est défini, alors les deux éléments sont définis et $h(fg) = (hf)g$.
2. Si hf et fg sont définis, alors $h(fg)$ est défini. Un élément e de \mathcal{C} est appelé unité si $fe = f$ et $eg = g$ pour tous les éléments f et g de \mathcal{C} pour lesquels fe et eg sont définis.
3. Pour tout $f \in \mathcal{C}$ il existe deux unités $\alpha(f)$ et $\beta(g)$ telles que $f\alpha(f)$ et $\beta(f)f$ soient définis.

Les éléments de \mathcal{C} sont généralement appelés morphismes. Si on s'est donné une application bi-univoque de la classe des unités de \mathcal{C} sur une classe \mathcal{C}_0 alors \mathcal{C}_0 sera souvent appelée une classe d'objets pour \mathcal{C} .

[...]

Un groupoïde est une catégorie \mathcal{C} dont les éléments sont tous inversibles. » ([57], 2)

Ehresmann introduit alors une nouvelle notion, au cœur de laquelle se trouve l'idée d'action d'une structure sur une classe, c'est-à-dire l'idée de deux objets différents, mais tel que le premier « agit » sur le second :

Définition 78 « Une catégorie d'opérateurs sur une classe \mathcal{S}_0 est une catégorie \mathcal{C} munie d'une multiplication $(f, z) \rightarrow fz$ définie pour certains couples (f, z) , où $f \in \mathcal{C}$, $z \in \mathcal{S}_0$, $fz \in \mathcal{S}_0$, et qui satisfait aux axiomes suivants :

1. Si $g(fz)$ ou $(gf)z$ est défini, alors les deux éléments sont définis et $g(fz) = (gf)z$.
2. Si gf et fz sont définis, alors $g(fz)$ est aussi défini.
3. Si e est une unité de \mathcal{C} et si ez est défini, alors $ez = z$.
4. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, il existe un $z \in \mathcal{S}_0$ tel que fz soit défini et pour chaque $z \in \mathcal{S}_0$ il existe un $f \in \mathcal{C}$, tel que fz soit défini. » ([57], 3)

Par ailleurs, on a alors le résultat suivant :

Théorème 40 « Si \mathcal{C} est une catégorie d'opérateurs sur \mathcal{S}_0 , alors à chaque $z \in \mathcal{S}_0$ correspond une seule unité $e \in \mathcal{C}$ pour laquelle ez soit défini. Nous désignons cette unité par $p(z)$. » ([57], 4)

Cette définition éclaire en retour la définition par Ehresmann des catégories : en effet, ce sont les morphismes qui se trouvent mis au premier plan (non les objets), c'est-à-dire ce qui est susceptible d'agir sur un autre objet mathématique. Ainsi, si Ehresmann inclue la classe des objets dans la classe des morphismes, *via* les morphismes-identité, c'est afin de pouvoir faire agir une catégorie sur un ensemble.

Espèces de structures et groupoïdes des isomorphismes

On peut alors définir la notion d'espèce de structures :

Définition 79 « Soit \mathcal{C} un groupoïde d'opérateurs sur une classe \mathcal{S}_0 et soit \mathcal{S} le groupoïde correspondant des couples (f, S) , où $S \in \mathcal{S}_0$, $f \in \mathcal{C}$, pour lesquels fS est défini ; p désignera la projection de \mathcal{S}_0 sur \mathcal{C}_0 ainsi que le foncteur projection de \mathcal{S} sur \mathcal{C} . Alors \mathcal{S}_0 est appelé espèce de structures sur \mathcal{C} . Un élément S de \mathcal{S}_0 est appelé structure sur $p(S) \in \mathcal{C}_0$. $(f, S) \in \mathcal{S}$ est appelé isomorphisme de S sur fS ; \mathcal{S} est appelé groupoïde des isomorphismes. Un isomorphisme (f, S) de S sur S est appelé un automorphisme de S . La classe des automorphismes de S forme un sous-groupe de \mathcal{S} qui sera appelé groupe des automorphismes de S . La projection p applique celui-ci de façon biunivoque sur un sous-groupe de \mathcal{C} qui est souvent appelé aussi groupe des automorphismes de S . » ([57], 5)

Une telle définition des espèces de structures appelle plusieurs commentaires. On peut noter tout d'abord une évolution par rapport à la définition donnée dans le cours de Rio précédemment cité, qui reprenait la définition de Bourbaki. En effet, l'objet structuré (dans \mathcal{C}) se trouve ici clairement distinct de la structure (élément de \mathcal{S}_0) et de l'espèce de structure. Ainsi, les objets structurés sont les objets du groupoïde d'opérateurs et la structuration se fait par l'action de ce groupoïde sur l'espèce de structure (une classe). Par ailleurs, on a là une formulation dans les termes de la théorie des catégories de certains faits déjà mis en lumière dans le cours de Rio de 1952, en particulier le fait, pour les espèces de structure générales, que « le groupe de permutations de E [l'ensemble de base] laisse invariant W [l'espèce de structure] ». On peut également voir cette définition comme une généralisation du « pseudogroupe de transformations », dont la structure de groupoïde était déjà mise en évidence. Ainsi, cette mise au premier plan des structures de groupoïde et de catégorie peut être vue comme le prolongement de la compréhension de la Géométrie que proposait Ehresmann dans sa Notice de 1955, mettant en avant la structure de groupe. Comme le remarque en effet Ehresmann en 1965 ,

« il est naturel de se demander s'il existe une notion unificatrice pour toutes ces théories diverses, comme la notion de groupe qui a permis de rétablir l'unité de la Géométrie après la découvertes des géométries non-euclidiennes. » ([58], VII)

Application au cas ensembliste : le lien avec Bourbaki et la notion de type de structure

Dans « Gattungen von lokalen Strukturen », Ehresmann rapproche sa définition de la définition bourbakiste des structures :

« Les espèces habituelles de structures sont définies sur des sous-groupeïdes de \mathcal{E} [catégories des fonctions entre ensembles] ou sur un groupeïde produit $\Pi_i \mathcal{C}_i$, où \mathcal{C}_i est un sous-groupeïde de \mathcal{E} . On construit un foncteur de $\Pi_i \mathcal{C}_i$ dans \mathcal{E} en partant des deux foncteurs fondamentaux \mathcal{P} et Π .

Etant donné un ensemble \mathcal{E} , on désigne par $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des sous-ensembles de \mathcal{E} . À chaque application biunivoque f de \mathcal{E} sur \mathcal{E}' correspond une application biunivoque $\mathcal{P}(f)$ de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{E}')$ et \mathcal{P} est un foncteur de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui applique un sous-groupeïde \mathcal{C} de \mathcal{E} sur un sous-groupeïde $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans \mathcal{E} . Le foncteur Π est un foncteur de $\Pi_i \mathcal{C}_i$ dans \mathcal{E} qui est défini de la manière suivante : un élément de $\Pi_i \mathcal{C}_i$ est une famille (f_i) , où $f_i \in \mathcal{C}_i$. Soit $(x_i) \in \Pi_i E_i$, $x_i \in E_i$, alors $\Pi(f_i)$ est l'application $(x_i) \rightarrow (f_i x_i)$, où $E_i = \alpha(f_i)$. À l'aide de \mathcal{P} et Π on peut définir certains foncteurs Φ de $\Pi_i \mathcal{C}_i$ dans \mathcal{E} . Par Φ est alors définie une espèce de structure \mathcal{S}_0 sur $\Pi_i \mathcal{C}_i$ d'un certain type. Une sous-espèce de \mathcal{S}_0 , qui est d'ordinaire définie par un *système d'axiomes*, est alors une espèce de structures au sens de Bourbaki. » ([57], 8)

Ce lien entre les catégories d'opérateurs et la définition de Bourbaki met en évidence un élément qui sera central par la suite : le fait de définir une espèce de structures par un foncteur. Cependant ces remarques soulignent également la nécessité de définir une sous-espèce de structures par un « système d'axiomes » : ainsi, même si le contexte catégorique a permis de clarifier le rapport entre la structure et l'objet structuré, il reste à « catégorifier » les axiomes eux-mêmes, déterminant cette sous-espèce.

6.1.3 Les catégories structurées

Dans un premier temps, il faut noter que la première étape de cette catégorisation des espèces de structures passe par l'étude systématique des foncteurs Φ mis en évidence dans le cas des définitions « à la Bourbaki », foncteurs qu'Ehresmann définit à partir de 1960 comme des « foncteurs-types » (voir ([62], 101-116)). À partir de ces foncteurs-types, le système d'axiomes définissant l'espèce de structures est alors remplacé par des « foncteurs typiques » :

« D'après les définitions de [1] [il s'agit de « Gattungen von lokalen Strukturen »], un foncteur $\phi' \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ définit une espèce de structures sur \mathcal{E} . Le procédé régulier de définition d'une espèce

de structures sur \mathcal{E} consiste à prendre pour ϕ' un foncteur typique ; un tel foncteur sera, en général, déduit d'un foncteur type donné par un système d'axiomes. Chaque axiome du système définit un foncteur déduit et le système définit l'intersection de ces foncteurs déduits. » ([62], 116)

Toutefois, en 1963, dans l'introduction de *Catégories et structures*, Ehresmann semble d'une certaine façon mettre à distance le projet bourbakiste, ou tout du moins proposer une alternative :

« Deux attitudes sont possibles :

1. le point de vue « constructif », partant de la question : comment définir d'une façon générale une structure d'une certaine espèce au-dessus d'un ensemble E ? Ceci conduit Bourbaki à la définition de l'échelle des ensembles associés à E . [...] Une espèce de structures sur les ensembles est alors définie d'une manière précise par la donnée d'un sous-foncteur d'un foncteur type.
2. le point de vue « algébriste » : oubliant comment les structures ont été construites, on ne conserve que l'ensemble des structures au-dessus de E et l'ensemble des homomorphismes entre les structures. On est ainsi amené à la théorie algébrique de la catégorie des homomorphismes et du foncteur p de cette catégorie vers une autre (dans les cas usuels, le foncteur « oubliant » les structures). » ([58], VII)

Au point de vue constructif, Ehresmann va donc préférer la voie algébrique, qui apparaît clairement catégorique : au lieu de partir de l'ensemble E , on considère directement les structures au-dessus de E . On notera ici qu'Ehresmann marque la séparation, déjà aperçue dans « Gattungen von lokalen Strukturen », entre l'ensemble de base et la structure définie sur cet ensemble. Ces deux éléments sont encore solidaires dans la définition bourbakiste, mais c'est précisément ce lien que l'approche ehresmannienne va retravailler, entre la structure comme objet et la structure comme loi.

Cependant, la voie algébriste présente elle aussi des limites. Et en explicitant celles-ci, Ehresmann révèle le cœur de son projet d'une théorie des espèces de structures :

« Il est évident que, en partant uniquement des propriétés algébriques du foncteur p , on ne peut espérer obtenir tous les résultats spécifiques relatifs à une situation particulière, c'est-à-dire à une espèce de structure construite explicitement. Pour aller plus loin, il faut recourir aux espèces de structures et aux catégories dominées. Ceci n'est pas encore suffisant ; le stade ultérieur est celui des catégories structurées (ordonnées, inductives, topologiques, différentiables, etc...). Ainsi développée, la théorie

des catégories tend réellement à unifier les mathématiques actuelles » ([58], VIII).

Tel semble donc être le cœur du projet d'Ehresmann : trouver au cœur des mathématiques les moyens de la spécification de leurs objets. Et c'est à ce niveau qu'interviendront les esquisses, qui constitue le termes d'un processus de généralisation menant des espèces de structures locales aux catégories structurées.

Les catégories structurées sont définies en 1963 dans « Catégories structurées » ([61], 21-98) : elles constituent le dernier palier de généralité de la théorie des structures d'Ehresmann, et viennent unifier ses différents travaux de topologie ou de géométrie différentielle. L'idée est alors de répondre à la question de savoir comment munir une catégorie d'une structure supplémentaire (topologique, différentielle, d'ordre, etc.) et cette procédure pourra ensuite être généralisée à tout type de structure.

L'article de 1963 prend pour point de départ les définitions de catégories d'opérateurs et d'espèces de structures exposées dans en 1957 dans « Gattungen ». Si Σ_0 est une espèce de structure au-dessus de la catégorie \mathcal{C} , alors p_0 est l'application correspondante de Σ_0 dans \mathcal{C}_0 ; on dira aussi que $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ est une espèce de structures.

Soit $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ une espèce de structure. Soit Σ la classe des couples $(f, z) \in \mathcal{C} \times \Sigma_0$ tels que fz soit défini, c'est-à-dire tels que $\alpha(f) = p_0(z)$. Munie de la loi de composition $(f', z').(f, z) = (f'.f, z)$ ssi $z' = fz$, Σ est une catégorie, appelée catégorie des hypermorphisms associée à l'espèce de structure $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$.

On a par ailleurs le résultat suivant : soit \mathcal{M}_0 la classe des classes, \mathcal{M} la catégorie des applications entre classes. Soit $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ une espèce de structures telle que $p^{-1}(e) \in \mathcal{M}_0$ pour tout $e \in p_0(\Sigma_0)$. Soit $f \in p(\Sigma)$, $e = \alpha(f)$ et $e = \beta(f)$.

Posons que $F(f)$ une application $\tilde{f} : p^{-1}(e) \rightarrow p^{-1}(e')$ dans \mathcal{M} . $\tilde{f}(z) = fz$ pour tout z tel que $f(z) = e$. $F(e)$ sera identifié à $p^{-1}(e)$. Si f est un élément inversible de $p(\Sigma)$, l'application \tilde{f} est une bijection de $F(e)$ vers $F(e')$. Par conséquent l'application $F : f \rightarrow F(f)$ pour tout $f \in p(\Sigma)$ est un foncteur de $\alpha(F) = p(\Sigma)$ vers \mathcal{M} , vérifiant la propriété suivante : soient $e \in \alpha(F)_0$ et $e' \in \alpha(F)_0$, on a $F(e) \neq \emptyset$; et si $e \neq e'$, on a $F(e) \cap F(e') = \emptyset$.

Le couple (\mathcal{C}, F) détermine entièrement l'espèce de structures (\mathcal{C}, p, Σ) . On notera ici comment Ehresmann « functorialise » la détermination d'une espèce de structures.

On peut alors construire la définition d'une « espèce de structures dominée » :

Définition 80 Soit \mathcal{C} une catégorie et $\gamma : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$ un foncteur.

On appellera espèce de structures dominée par (γ, \mathcal{K}) un couple (\mathcal{C}, F) tel que $F : \alpha(F) \rightarrow \mathcal{K}$ soit un foncteur et que $(\mathcal{C}, \gamma F)$ définisse une espèce de

structures ; l'espèce de structures définie par $(\mathcal{C}, \gamma F)$ sera appelée espèce de structures sous (\mathcal{C}, F) .

Ainsi par exemple, si $\tilde{\Omega}$ est la catégorie des classes strictement ordonnées, avec les applications respectant l'ordre, et ω le foncteur « d'oubli » de $\tilde{\Omega}$ dans \mathcal{M} , alors une espèce de structures (\mathcal{C}, F) dominée par $(\omega, \tilde{\Omega})$ sera une espèce de structures ordonnée. On a ici affaire à un premier niveau de structuration des objets d'une catégorie. Dans [58], Ehresmann enrichit la liste d'exemples : en effet, outre les objets-groupes de Eckmann et Hilton, les exemples de catégories dominées sont nombreux :

« De nombreuses questions requièrent l'étude d'espèces de structures dominées ; ainsi les espèces de structures dominées par des applications continues interviennent en théorie des espaces fibrés, les espèces de structures dominées par des applications continues pointées ou par des classes d'homotopie entre espaces topologiques pointés en Topologie Algébrique (Berstein-Hilton), les espèces de morphismes en Géométrie Algébrique (Grothendieck) et en Algèbre homologique (cohomologie générale). La donnée sur une catégorie C^\bullet d'une topologie de Grothendieck revient à celle d'une certaine espèce de structures. » ([58], 338)

On voit ainsi clairement apparaître en quoi les catégories dominées permettent de généraliser un grand nombre de situations mathématiques. Mais cette étape peut encore être généralisée : c'est le rôle des catégories structurées. Pour définir ces dernières, plusieurs notions doivent être définies au préalable, notamment celle de « catégorie d'homomorphismes », introduite dès 1957 mais précisée et développée dans l'article de 1963 :

Définition 81 Soient \mathcal{C} et \mathcal{H} deux catégories,

on dira que $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $p : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur ;
2. \mathcal{S} est une sous-catégorie de \mathcal{H} contenant \mathcal{H}_0 ;
3. $(\mathcal{C}, p', \mathcal{S})$ est une espèce de structures, où p' désigne la restriction de p à \mathcal{S} ;
4. soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$, si $\alpha(h) = \alpha(h')$, $\beta(h) = \beta(h')$ et $p(h) = p(h')$, alors $h = h'$.

Ainsi par exemple,

- soit \mathcal{T}_0 la classe des topologies sur les classes $M \in \mathcal{M}_0$;
- soit $\tilde{\mathcal{T}}$ la catégories des applications continues $f : S \rightarrow S'$, où S est une topologie sur M et S' une topologie sur M' ;
- soit θ le foncteur « d'oubli » qui à $f : S \rightarrow S'$ associe $f : M \rightarrow M'$;

— soit \mathcal{T} le groupoïde des éléments inversibles de $\tilde{\mathcal{T}}$ (les homéomorphismes);

$(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ est une catégorie d'homomorphismes.

De là, on construit la définition des « catégories structurées » :

Définition 82 Soit \mathcal{H} , une catégorie, \mathcal{H}' et \mathcal{H}'' deux sous-catégories de \mathcal{H} contenant le groupoïde Γ des éléments inversibles de \mathcal{H} ,

on appellera catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ -structurée une couple (\mathcal{C}^\bullet, s) où \mathcal{C}^\bullet est une catégorie, $s \in \mathcal{H}_0$ et $p(s) = \mathcal{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. il existe $s_0 \in \mathcal{H}_0$ tel que $p(s_0) = \mathcal{C}_0^\bullet$, $\iota \in \mathcal{H}$ de s_0 dans s , et $[\beta, \alpha]$ dans \mathcal{H}' de s vers $s_0 \times s_0$;
2. soit $\mathcal{C}^\bullet \star \mathcal{C}^\bullet$ la classe de couples $(f', f) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tel que $f'.f$ soit défini et κ^\bullet l'application $(f', f) \rightarrow f'.f$ où $(f', f) \in \mathcal{C}^\bullet \star \mathcal{C}^\bullet$, il existe une sous-structure s' de $s \times s$ telle que $p(s') = \mathcal{C}^\bullet \star \mathcal{C}^\bullet$ et on a κ de s dans s' dans \mathcal{H}'' .

En particulier, une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ -structurée sera appelée une catégorie \mathcal{H} -structurée.

Ainsi par exemple, si $\tilde{\mathcal{T}}$ est la catégorie des applications continues entre espaces topologiques, alors une catégorie $\tilde{\mathcal{T}}$ -structurée est une catégorie topologique. Si \mathcal{D}' est la catégorie des morphismes de semi-groupes avec élément neutre, alors une catégorie \mathcal{D}' -structurée est une catégorie avec multiplication au sens de Bénabou. Enfin, soit \mathcal{F} la catégorie de tous les foncteurs, alors une catégorie \mathcal{F} -structurée est une catégorie double (ou objet-catégorie interne à la catégorie des Catégories).

Au terme de ce parcours, des structures locales aux catégories structurées, il est possible de mettre en lumière différents points. D'une part, ce qui a été développé jusqu'ici, c'est bien une théorie *géométrique* des espèces de structures, en un sens précis. En effet, alors que la Notice de 1955, dans la filiation de Cartan, plaçait la notion de groupe au premier plan de la Géométrie, l'introduction de *Catégories et structures* en 1965 met en évidence le prolongement de cette démarche dans une étude systématique des espèces de structures, où le rôle joué par les groupes est désormais joué par les catégories, qui en ce sens viennent pour Ehresmann unifier les mathématiques structurales. Cela implique par ailleurs la compréhension proprement ehresmannienne des catégories, comme classe de morphismes sans objets, pouvant agir sur une autre structure.

D'autre part, cette théorie des espèces de structures peut être vue comme une recherche d'une caractérisation intrinsèque des structures, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, dès 1957, les structures sont thématiques comme des objets à part entière, distincts des objets structurés eux-mêmes, l'articulation entre les deux étant pensée comme action d'une catégorie sur

une classe. Les structures sont ainsi détachées des ensembles structurés (ou des données de base en général), notamment grâce aux outils de la théorie des fibrés. Par ailleurs, dès 1939 la question de l'intrinsécité est ramenée à celle des structures induites, celles-ci étant au cœur de la notion de structure locale, cette dernière étant définie dès 1952 (cours de Rio) par une « loi d'induction ». Ainsi, tout se passe comme si le propre d'une espèce de structure, ce qui la caractérise ou la détermine de façon intrinsèque, était donné par la façon dont la structure globale détermine les structures locales, ce passage du global au local étant caractéristique de la démarche d'Ehresmann, comme le remarque Renaud Chorlay :

« Le *Gestalt-switch* d'Elie Cartan l'amenait à caractériser rétrospectivement les travaux classiques (y compris les siens jusqu'en 1925) comme implicitement locaux ; il s'engageait alors dans une démarche double. Mieux cerner, d'une part, ce caractère local [...]. D'autre part, aborder les questions globales, ce qui englobe encore deux tâches : définir globalement les objets à étudier, établir des théorèmes de passage du local au global. De tout cela, Ehresmann est l'héritier direct, mais il infléchit déjà la recherche dans une autre direction, celle d'un retour aux questions locales. Ce retour n'est en rien une réaction, et on n'imagine pas retomber dans un point de vue universellement et implicitement local. Un langage ensembliste strict – qui n'a jamais été celui de Cartan ! – et un savoir faire acquis par un travail régulier sur les systèmes d'axiomes sont mis au service de la question du local. Les objets sont a priori définis globalement – Ehresmann ne revient en rien sur cet héritage –, la question de la caractérisation des structures locales n'en est que plus délicate ; le global joue ici le rôle du donné et du (mieux) connu, il s'agit de comprendre ce qu'implique la localisation. » ([38], 725-726)

Or la notion de « loi d'induction » définissant les structures locales est remplacée, dans l'œuvre d'Ehresmann, par le pseudo-groupe des transformations, généralisé ensuite sous la forme des catégories d'opérateurs. Ainsi, Ehresmann ne semble pas perdre de vue le projet de donner un sens à l'idée de caractérisation intrinsèque, à travers la généralisation catégorique. Il reste cependant à expliciter le contenu de ces espèces de structures, à « axiomatiser ces propriétés dans le cadre général des catégories » ([58], 336) : une première tentative de « catégorisation » des systèmes d'axiomes a consisté dans la définition des « foncteurs typiques », puis dans la définition des catégories p -structurées, où les foncteurs, comme par exemple les foncteurs d'oubli, viennent « coder » l'information contenue dans un système formel. Mais il reste encore à intégrer le système formel au contexte catégorique : ce sera le rôle des esquisses.

6.2 Les esquisses et leurs enjeux épistémologique

6.2.1 Éléments de théorie des esquisses

Lorsqu'il introduit les esquisses en 1966, Ehresmann les présente comme une réponse au problème suivant :

« If p is a functor from a category C^\bullet toward a category \widehat{C}^\bullet , a unit s of C^\bullet is called a p -structure on $p(s)$. If \widehat{C}^\bullet is a category \mathcal{M} of mappings, p -structures on classes are usually defined by the construction of a typical functor (CS, appendix II) from a subcategory of \mathcal{M} toward \mathcal{M} . In many cases, it may be shown that the p -structures obtained by such a construction are equivalent to structures defined by using only « functorial » properties of the category \mathcal{L} , so that « similar » structures can also be defined when \mathcal{M} is replaced by a category H^\bullet . So an important problem is the following one :

From now on, we suppose that p is a functor from C^\bullet toward the category \mathcal{M} of mappings associated to a universe \mathcal{M}_0 . How to define « canonically », for a category H^\bullet , the notion of a structure of kind p over H^\bullet (or more strictly on a unit e of H^\bullet), so that a p -structure be a structure of kind p over \mathcal{M} ? » ([59], i)

On voit ici qu'il s'agit pour Ehresmann d'une part de dépasser l'approche de Bourbaki (les « foncteurs typiques »³) et d'autre part de montrer la possibilité de structurer des objets autres que des ensembles. A ce problème fondamental, Ehresmann propose alors trois réponses possibles.

La première mentionnée par Ehresmann est celle proposée par Grothendieck dans [90] :

« On voit de cette façon que la notion de structure de « C -groupe », « C -anneau », etc. sur un objet X de C s'exprime de la façon la plus commode (en théorie comme en pratique) en disant que pour tout $Y \in C$, on a une loi de groupe (resp. anneau, etc.) au sens usuel sur l'ensemble $h_X(Y) [= C(Y, X)]$, les applications $h_X(Y) \rightarrow h_X(Y')$ correspondant à des morphismes $Y \rightarrow Y'$ devant être des homomorphismes de groupes (resp. anneaux, etc.). C'est la façon la plus intuitive et la plus commode par exemple, pour définir les divers groupes classiques $G_a, G_m, G\uparrow(n)$, etc. sur un pré-schéma S de base quelconque et pour écrire les relations classiques entre ces groupes, pour mettre sur le schéma affine $V(F)$ au-dessus de S , défini par un faisceau quasi-cohérent F , une structure de « fibré vectoriel », pour définir et étudier

3. Le lien entre les foncteurs-types à-la-Bourbaki et les esquisses a été précisément examiné par A. Burroni dans (Réf?), sous la forme de la procédure de typification.

les diverses variétés de drapeaux (grassmaniennes, fibrés projectifs) associés, etc. ; le yoga général étant d'identifier purement et simplement, à l'aide du foncteur canonique h , les objets de C à des foncteurs contravariants particuliers, les foncteurs représentables. » ([59], 370)

Cependant, cette première méthode ne satisfait pas Ehresmann :

« This property is satisfied if p is the forgetting functor from the category of homomorphisms between some elementary algebraic structures (groups, rings,...) or from the category of functors or neofunctors. However it is not fulfilled for many usual functors p such as the forgetting functor from the category of continuous mappings or from the category of homomorphisms between fields. » ([59], ii)

C'est pour dépasser les limites auxquelles est confrontée la méthode de Grothendieck, à savoir l'impossibilité de dépasser le cadre algébrique, qu'Ehresmann introduit la deuxième méthode, celle des catégories structurées vu précédemment. Mais « this second method leads to a more abstract approach » : celle des esquisses.

Il est ici nécessaire d'introduire les éléments fondamentaux de la théorie des esquisses d'Ehresmann. Pour ce faire, nous utiliserons les travaux d'Ehresmann ([59], [60]), de L. Coppey [40]) et C. Lair ([41], [42]), de René Guitart ([93], [94]) et de Marie Bjerrum ([25]).

Définitions préliminaires

Dans un premier temps on rappellera quelques définitions catégoriques fondamentales, dans le style de l'école d'Ehresmann, qui diffère quelque peu des définitions usuelles (comme on l'a déjà vu pour la notion même de catégorie).

Catégories, foncteurs et transformations naturelles On dira que $\mathcal{S} = (Ob_{\mathcal{S}}, Fl_{\mathcal{S}}, c, d, id)$ est un **graphe orienté** ssi :

- $Ob_{\mathcal{S}}$ est un ensemble (ensemble d'objets) ;
- $Fl_{\mathcal{S}}$ est un ensemble (ensemble de flèches) et on écrit $\mathcal{S}(A, B)$ ou $Hom(A, B)$ pour le sous-ensemble de flèches de A vers B ;
- $c : Fl_{\mathcal{S}} \rightarrow Ob_{\mathcal{S}}$ est une application envoyant une flèche vers sa cible (co-domaine) ;
- $d : Fl_{\mathcal{S}} \rightarrow Ob_{\mathcal{S}}$ est une application envoyant une flèche vers sa source (domaine) ;
- $id : Ob_{\mathcal{S}} \rightarrow Fl_{\mathcal{S}}$ est une application qui envoie un objet $C \in \mathcal{S}$ vers la flèche identité correspondante 1_C tel que :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{d} & \\
 \text{Obs}_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{id} & \text{Fl}_{\mathcal{S}} : c \cdot id = d \cdot id = 1_{\text{Obs}_{\mathcal{S}}} \\
 & \xrightarrow{c} &
 \end{array}$$

On dira que $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, Co_{\mathcal{S}}, k)$ est un **graphe multiplicatif** ssi :

- \mathcal{S} est un graphe orienté ;
- $Co_{\mathcal{S}}$ est l'ensemble des paires de flèches composables, c'est-à-dire un sous-ensemble de toutes les paires de flèches consécutives $\{(g, f) \in Fl_{\mathcal{S}} \times Fl_{\mathcal{S}} \mid d(g) = c(f)\}$;
- $k : Co_{\mathcal{S}} \rightarrow Fl_{\mathcal{S}}$ est une composition partielle (multiplication) de flèches $k(g, f) = g \circ f$, qui satisfait les axiomes suivants :
 1. *Unitarité* : $\forall g \in Fl_{\mathcal{S}} : (id \cdot c(g), g), (g, id \cdot d(g)) \in Co_{\mathcal{S}}$ et $k(id \cdot c(g), g) = k(g, id \cdot d(g)) = g$;
 2. *Position* : $\forall (g, f) \in Co_{\mathcal{S}} : d(g \circ f) = d(f), c(g \circ f) = c(g)$.

Une **catégorie** \mathcal{C} est un graphe multiplicatif où $Co_{\mathcal{C}}$ est l'ensemble de toutes les flèches consécutives et où la composition k est associative.

Etant donné \mathcal{D} et \mathcal{C} des graphes multiplicatifs, un **foncteur (covariant)** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une paire d'applications $F = (F_0, F_1)$, $F_0 : Ob_{\mathcal{C}} \rightarrow Ob_{\mathcal{D}}$ et $F_1 : Fl_{\mathcal{C}} \rightarrow Fl_{\mathcal{D}}$, telles que $\forall (g, f) \in Co_{\mathcal{C}} : (F(g), F(f)) \in Co_{\mathcal{D}}, F(g \circ f) = F(g) \circ F(f); \forall C \in Ob_{\mathcal{C}} : F(1_C) = 1_{F(C)}$ en notant F au lieu de F_0 et F_1 .

Etant donné des foncteurs $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, une **transformation naturelle** $\tau : F \rightarrow G$ est définie par une famille d'applications $(\tau_C : F(C) \rightarrow G(C))_{C \in Ob_{\mathcal{C}}}$ telle que pour toute flèche $f : C \rightarrow D$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 F(C) & \xrightarrow{\tau_C} & G(C) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(D) & \xrightarrow{\tau_D} & G(D)
 \end{array}$$

Si pour tout objet $C \in \mathcal{C}$, τ_C est un isomorphisme, on dira que F et G sont **naturellement isomorphes** et on écrit $F \cong G$. On dira que deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} sont **équivalentes**, et on écrira $\mathcal{C} \sim \mathcal{D}$, s'il existe des foncteurs $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tels que $F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$ et $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$.

Limites projectives et inductives, limites et co-limites Soit \mathcal{I} un graphe orienté, \mathcal{C} une catégorie et $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur (entre graphes orientés).

Un **cône projectif** ou **cône** (dans \mathcal{C}) de base ϕ est un couple (A, q) tel que A est un objet de \mathcal{C} et q une famille $(q_I : A \rightarrow \phi(I))_{I \in Ob_{\mathcal{I}}}$ de flèches dans \mathcal{C} , satisfaisant

$$\forall i : I \rightarrow J \in Fl_{\mathcal{I}} : \phi(i) \circ q_I = q_J,$$

c'est-à-dire que tous les triangles dans le cône commutent. Λ_ϕ dénote l'ensemble des cônes projectifs (dans \mathcal{C} de base ϕ).

Un **cône inductif** ou **cocône** dans \mathcal{C} de base ϕ est un couple (B, ι) tel que B est un objet de \mathcal{C} et ι est une famille $(\iota_I : \phi(I) \rightarrow B)_{I \in \text{Ob}_{\mathcal{I}}}$ de flèches dans \mathcal{C} telle que $\forall i : I \rightarrow J \in Fl_{\mathcal{I}}$, on a $\iota_J \circ \phi(i) = \iota_I$ et on note V_ϕ l'ensemble des cocônes de base ϕ .

Un **cône limite** (de ϕ) est un cône (P, p) de base ϕ , écrit $\varprojlim \phi$, satisfaisant la *propriété universelle* suivante :

$$\forall (A, q) \in \Lambda_\phi, \exists ! h : A \rightarrow P : (A, q) = (P, p) \circ h,$$

où $(P, p) \circ h$ doit être compris comme le cône $(A, p \circ h)$ obtenu en composant toutes les flèches dans p avec h .

Dualement, un **cocône limite** (de ϕ) est un co-cône (S, s) de base ϕ , écrit $\varinjlim \phi$ satisfaisant la propriété universelle suivante :

$$\forall (B, \iota) \in V_\phi \exists ! k : S \rightarrow B : (B, \iota) = k \circ (S, s).$$

Soit \mathcal{I} un graphe orienté et \mathcal{C} une catégorie, on dira que \mathcal{C} **a toutes les \mathcal{I} -limites** [respectivement **a toutes les \mathcal{I} -colimites**], si pour tout foncteur $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, $\varprojlim \phi$ existe [respectivement $\varinjlim \phi$ existe].

Les esquisses

Une **esquisse projective** est une paire $(\mathcal{S}, \mathfrak{P})$ où \mathcal{S} est un graphe multiplicatif, appelé le graphe sous-jacent de l'esquisse, et \mathfrak{P} est un ensemble de cônes dans \mathcal{S} , appelé l'ensemble des cônes distingués.

Une **esquisse mixte** est un triple $(\mathcal{S}, \mathfrak{P}, \mathfrak{J})$, avec un ensemble \mathfrak{J} de co-cônes distingués.

Un **morphisme d'esquisses** $s : \sigma \rightarrow \sigma'$ est un morphisme de graphe tel que tout cône (cocône) distingué est envoyé sur un cône (cocône) distingué dans σ' , c'est-à-dire si un cône distingué c dans σ est de base $B : \mathcal{I} \rightarrow \sigma$, alors $s(c)$ sera un cône distingué dans σ' de base $s \circ B$.

Modèles et esquissabilité Une **réalisation ou un modèle d'une esquisse** $\sigma = (\mathcal{S}, \mathfrak{P}, \mathfrak{J})$ (avec \mathfrak{J} possiblement vide) est un foncteur $R : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ du graphe sous-jacent vers une catégorie \mathcal{C} qui transforme tous les cônes et cocônes distingués dans σ en limites et co-limites dans \mathcal{C} .

Comme le remarque C. Wells :

« For example, there is a sketch for groups; its models “are” groups and the homomorphisms between its models are exactly the group homomorphisms. There is a clear analogy with the way a path in a topological space is defined as a continuous map from a closed interval to the space. » ([250], 3)

Une catégorie \mathcal{C} est dite **esquissable dans une catégorie** \mathcal{D} s'il existe une esquisse σ , telle que l'on ait une équivalence de catégories

$$\text{Mod}(\sigma, \mathcal{D}) \sim \mathcal{C}$$

où $\text{Mod}(\sigma, \mathcal{D})$ est la catégorie ayant pour objets tous les modèles $\sigma \rightarrow \mathcal{D}$ et pour flèches toutes les transformations naturelles entre modèles.

Quel est alors le rapport entre une structure définie de façon ensembliste traditionnelle et une structure définie par une esquisse ? C. Wells précise ainsi ce point :

« There are two ways of thinking of algebraic structures. I will illustrate them using semi-groups as an example.

1. A semigroup is a set S together with a function that takes each ordered pair of elements of S to an element of S , such that...
2. A semigroup consists of a function $m : S \times S \rightarrow S$ such that...

Many mathematicians would say these are exactly the same, since $S \times S$ is the set of ordered pairs of elements of S . To a categorist, $S \times S$ is the product of S with itself, so its elements can be represented as ordered pairs of elements of S , but in fact $S \times S$ is determined only by what you specify its first and second coordinate functions to be together with the universal property of products. For this reason, the category of models of a sketch for semi-groups is *equivalent* but not *isomorphic* to the category of semigroups in sense (1) above. » ([250], 5)

On voit ici apparaître la distinction que nous avons vue apparaître dans le champ de l'algèbre universelle au premier chapitre, approfondie par le contexte catégorique par les travaux de Lawvere et leurs prolongements informatiques, entre deux conceptions des structures, soit comme ensembles structurés, soit comme lois définissant des opérations. C'est précisément cette seconde voie que nous avons vu se dégager précédemment de l'œuvre d'Ehresmann, notamment à travers la notion de catégorie d'opérateurs en 1957.

Exemples En suivant [25], on construira l'esquisse des graphes multiplicatifs.

Si on considère la définition d'un graphe multiplicatif, on s'aperçoit qu'il y a quatre ensembles en jeu : les *objets*, les *flèches*, les *flèches consécutives* et les *flèches composables*. Par conséquent, une esquisse des graphes multiplicatifs dans Ens devra contenir quatre Objets : S_1 l'ensemble des objets, S_2 l'ensemble des flèches entre eux et les flèches identité. On a donc un premier graphe :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{d} & \\
 S_1 & \xrightarrow{id} & S_2 \\
 & \xrightarrow{c} & \\
 \end{array}$$

$$d.id = c.id = 1_{S_1}$$

On ajoute alors un objet S_3 qui sera réalisé comme l'ensemble des flèches consécutives, sous-ensemble de toutes les paires de flèches (f, g) pour lesquelles le domaine de f correspond au codomaine de g . On a alors

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{d} & \xleftarrow{p_1} \\
 S_1 & \xrightarrow{id} & S_2 & \xrightarrow{p_2} & S_3 \\
 & \xrightarrow{c} & & \xrightarrow{p_2} & \\
 \end{array}$$

où p_1 et p_2 sont les restrictions des projections à partir du produit. Si S_3 joue le rôle attendu, il devra, une fois réalisé par un modèle de graphe multiplicatif sous-jacent \mathcal{S} présenter la propriété universelle selon laquelle pour toutes flèches $f, g : A \rightarrow Fl_{\mathcal{S}}$ avec $d.g = c.f$, il existe une unique flèche $h : A \rightarrow Fl_{\mathcal{S}} \times_{Ob_{\mathcal{S}}} Fl_{\mathcal{S}}$ tel que $p_1 h = g$, $p_2 h = f$, où $Fl_{\mathcal{S}} \times_{Ob_{\mathcal{S}}} Fl_{\mathcal{S}}$ est le produit fibré au-dessus de $Ob_{\mathcal{S}}$. Cela signifie que l'on devra distinguer le cône suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S_3 & \xrightarrow{p_2} & S_2 \\
 p_1 \downarrow & \searrow s_1 & \downarrow c \\
 S_2 & \xrightarrow{d} & S_1
 \end{array}$$

s_1 désignant la composée.

Enfin on devra introduire un objet S'_3 qui sera réalisé comme le sous-ensemble de l'objet des flèches consécutives pour lesquelles la composition est définie. On obtient

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xleftarrow{d} & & \xleftarrow{p_1} & \\
 S_1 & \xrightarrow{id} & S_2 & \xrightarrow{p_2} & S_3 \\
 & \xrightarrow{c} & & \xrightarrow{p_2} & \\
 & & p'_1 \uparrow & \uparrow k & \uparrow p'_2 \\
 & & S'_3 & & \\
 & & \downarrow j & & \downarrow j
 \end{array}$$

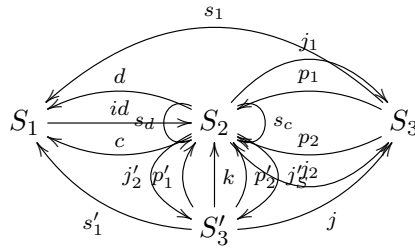
Pour s'assurer que S'_3 est réalisé comme un sous-ensemble des flèches consécutives, on distingue le cône suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S'_3 & \xrightarrow{1_{S'_3}} & S'_3 \\
 1_{S'_3} \downarrow & \searrow j & \downarrow j \\
 S'_3 & \xrightarrow{j} & S_3
 \end{array}$$

signifiant que j est réalisé comme un monomorphisme (i.e. une injection dans Ens). La composition est soumise à quelques axiomes (unitarité, position) qui rendent nécessaires les applications $j_1, j_2 : S_2 \rightarrow S_3$ qui, intuitivement, envoient une flèche vers $(1_{c(f)}, f)$ (resp. $(f, 1_{d(f)})$), c'est-à-dire qu'on a les équations :

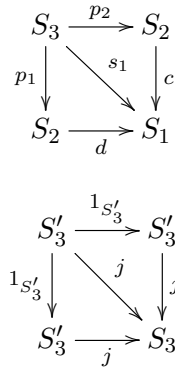
- $p_2 \cdot j_1 = 1_{S_2}, p_1 \cdot j_2 = 1_{S_2},$
- $p_1 \cdot j_1 = id \cdot c, p_2 \cdot j_2 = id \cdot d,$
- alors, si $j'_1, j'_2 : S_2 \rightarrow S'_3, j \cdot j'_1 = j_1, j \cdot j'_2 = j_2,$
- unitarité : $k \cdot j'_1 = 1_{S_2} = k \cdot j'_2,$
- position : $d \cdot k = d \cdot p'_2 \cdot j, c \cdot k = c \cdot p'_1 \cdot j.$

On a donc le graphe multiplicatif sous-jacent de l'esquisse des graphes multiplicatifs :



Les équations sont les suivantes : $p_1 \cdot j = p'_1$; $c \cdot i = d \cdot i = 1_{S_1}$; $p_2 \cdot j = p'_2$. $d \cdot p'_1 = c \cdot p'_2 = s'_1$. $j \cdot j'_1 = j_2$; $p_1 \cdot j_1 = id \cdot d = s_d$; $j \cdot j'_2 = j_2$; $p_2 \cdot j_2 = id \cdot c = s_c$; $p_2 \cdot j_1 = 1_{S_2}$; $k \cdot j'_1 = 1_{S_2} = k \cdot j'_2$ et $p_1 \cdot j_2 = 1_{S_2}$.

On a les cônes projectifs distingués suivants :



tous les deux indexés par $\cdot \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot$.

Un second exemple : on peut considérer la catégorie des ensembles Ens comme une esquisse où $(\mathcal{S}, \mathfrak{P}) = (Ens, Lim)$, la grosse esquisse projective consistant en la catégorie Ens équipée de tous ses petits cônes limites projectives. De ce fait, le recours à Ens comme lieu des supports de modèles n'a rien de nécessaire *a priori*. On peut considérer, au lieu des réalisations $R : \mathcal{S} \rightarrow Ens$, des réalisations $R : (\mathcal{S}, \mathfrak{P}) \rightarrow (\mathcal{S}', \mathfrak{P}')$, réalisations entre esquisses projectives.

6.2.2 Le local et l'algébrique

Le théorème du faisceau associé généralisé

Comme cela a été montré au chapitre 2, dans sa thèse de 1963, Lawvere introduit l'idée que le théorème qu'il démontre, selon lequel à tout préalgèbre peut être associée, par adjonction, une algèbre du même type, fait écho au théorème du faisceau associé à un préfaisceau démontré par Grothendieck. Nous avons montré que ce point pouvait mettre en lumière la possibilité d'un rapprochement entre la perspective locale (faisceau) et la perspective algébrique (Lawvere) offerte par le contexte de la théorie des catégories.

Or le contexte des esquisses montre qu'il s'agit de bien davantage qu'une simple possibilité de rapprochement. Comme le souligne en effet C. Lair ([129]), dès 1967 Charles Ehresmann démontre un théorème, dont les théorèmes de Lawvere et de Grothendieck ne sont que des cas particuliers, et c'est la théorie des esquisses qui permet la formulation et la démonstration de ce théorème :

Théorème 41 *Etant donné un morphisme d'esquisses $t : \sigma \rightarrow \sigma'$ entre deux esquisses projectives, alors si σ' est petite, le foncteur d'oubli U_t admet un adjoint à gauche.*

Ce théorème, dans le cas des théories de Lawvere, revient au théorème de construction des algèbres libres, et dans le cas des faisceaux de Grothendieck, est le théorème du faisceau associé. Généralisé au cas des esquisses mixtes, il s'agit du théorème du Diagramme Localement Libre, démontré par C. Lair et R. Guitart ([96])

Ainsi le contexte de la théorie des esquisses d'Ehresmann montre que la théorie des catégories permet plus qu'un simple rapprochement entre le local et l'algébrique : la théorie des catégories semble être située en amont de cette distinction⁴.

L'esquisse, comme milieu commun du local et de l'algébrique

Dans [95], R. Guitart met par ailleurs en évidence cette idée d'une genèse commune du local et de l'algébrique dans le contexte de la théorie des esquisses. En effet,

« *L'esquisse projective, suite aux topologies projectives de Bénabou et aux catégories marquées de Chevalley, est le milieu naturel où coexistent l'opération algébrique $x_1.x_2 = x$ et le recollement $\int s_i = s$. Ainsi sont de même nature le fait algébrique que 2 fois 3 fasse 6 et le fait géométrique qu'en collant deux segments $[0, 1]$*

4. Nous essaierons de saisir conceptuellement cette idée d'un lieu théorique antérieur à la distinction du local et de l'algébrique dans le sixième et dernier chapitre

et $[0', 1']$ par leurs extrémités – en posant $0 \equiv 0'$ et $1 \equiv 1'$ – on obtienne un cercle S^1 . » ([95], 174)

Cette première approche ouvre quelques questions : comment comprendre cette notion de « milieu naturel » ? Ou cette idée d'une « nature » commune au local et à l'algébrique ?

L'argument de R. Guitart est le suivant : de façon générale, sur le plan de l'esquisse, soit $\sigma = (S, P)$ une esquisse, où S est le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse et P un ensemble de cônes projectifs $p = (p_k : \Pi \rightarrow B_k)_{k \in K}$ dans S , R une réalisation de σ dans Ens . Soit une flèche $\omega : \Pi \rightarrow B$ dans S . On a alors

$$\begin{aligned} R(\omega) &: R(\Pi) \rightarrow R(B) \\ R(\Pi) &= \varprojlim_{k \in K} R(B_k) \\ \omega_R &= R(\omega).(\simeq^{-1}) : \varprojlim_{k \in K} R(B_k) \rightarrow R(B) \end{aligned}$$

De sorte que, à travers ω_R , les éléments x_k des $R(B_k)$, pour les k de K supposés compatibles entre eux – c'est-à-dire tels que pour toute flèche $t : k \rightarrow k'$ dans K on ait $x_{k'} = R(B_t)(x_k)$ – peuvent être composés pour former $\omega_R((x_k)_{k \in K}) = x$ dans $R(B)$.

Or cette construction diagrammatique générale peut être rapprochée de la définition proposée par Ehresmann des structures locales vue précédemment, et reformulée par R. Guitart :

« Une espèce de structure locale W est une espèce de structure telle que pour toute structure s sur un ensemble E , $s \in W(E)$, il existe une structure induite sur certaines de ses parties, ces parties formant les ouverts d'une topologie, les inductions étant transitives, et avec l'*axiome du recollement* : si $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ et si pour tout i de I on a une structure s_i sur E_i telles que $E_i \cap E_j$ soit ouvert dans E_i et E_j et que les structures induites de s_i et s_j sur $E_i \cap E_j$ soient identiques, alors il existe sur E une unique structure s , notée ${}^W \int_E ((s_i)_{i \in I}) = s$, dont les E_i soient des ouverts et induisant les s_i . » ([95], 173)

Pour Guitart, cette construction ${}^W \int_E ((s_i)_{i \in I}) = s$ constitue la version locale de la construction générale $\omega_R((x_k)_{k \in K}) = x$, c'est-à-dire la réalisation des limites des cônes projectifs. Pour ce qui est du versant algébrique,

« si $K = \{1, 2\}$, alors il n'y a pas de condition de compatibilité, et $\omega_R((x_k)_{k \in \{1, 2\}}) = x$ est noté simplement $x_1 \cdot \omega x_2 = x$ ou $x_1 \cdot x_2 = x$. Et plus généralement on trouve les structures algébriques 'partout définies' unisortes de Lawvere, et les multisortes, de Bénabou. » ([95], 174)

Il apparaît ainsi que la théorie des esquisses permet de rendre compte d'une forme d'antériorité de la théorie des catégories sur la distinction entre le

local et l'algébrique, dans la mesure où la « nature » commune de l'opération locale de recollement et de l'opération algébrique serait d'une certaine façon révélée par la construction diagrammatique qu'est la réalisation de la limite des cônes projectifs de l'esquisse mixte.

6.2.3 Syntaxe et sémantique

Mais la théorie des esquisses permet de montrer que la théorie des catégories peut également remonter en amont de la distinction entre syntaxe et sémantique.

L'esquisse des esquisses

En effet, on peut montrer que la catégorie des esquisses est esquissable par une esquisse projective, du moins si on limite la taille des esquisses par un certain cardinal λ , c'est-à-dire que les ensembles de cônes distingués et de cocônes distingués sont plus petits que λ , et de plus tous les graphes indexant doivent être λ -petits, c'est-à-dire $Fl_{\mathcal{I}}$ plus petit que λ . On appellera Esq_{λ} la catégorie des esquisses mixtes λ -petites, avec les morphismes d'esquisses correspondants.

Soit $\epsilon_{\lambda} = (\mathcal{S}_{\epsilon_{\lambda}}, \mathfrak{P}_{\epsilon_{\lambda}})$ l'esquisse projective des esquisses mixtes λ -petites pour un certain cardinal λ . On a alors l'isomorphisme suivant :

$$Mod(\epsilon_{\lambda}, Ens) \simeq Esq_{\lambda}$$

Pour la construction explicite de cette esquisse, on consultera [41].

On peut tirer de cette construction l'idée que, modulo les restrictions de cardinalité visant à éviter une variante du paradoxe de Russell, « le langage des esquisses s'auto-décrit, sans difficulté particulière » ([41], 38). Plus précisément, toute esquisse mixte λ -petite peut être vue à la fois comme la représentation diagrammatique d'un système formel *et* comme le modèle d'un système formel, c'est-à-dire la réalisation fonctorielle d'une esquisse dans *Ens*. Si en outre on se souvient que la catégorie des ensembles peut être vue elle-même comme une esquisse, on remarquera avec R. Guitart⁵ que

« On arrive ainsi à une conception purement diagrammatique des théories *et* des modèles *et* des preuves. Au point que ne sont plus nécessaires dans leurs détails ni la théorie des ensembles comme fond, ni la logique du premier ordre comme régime démonstratif. Ce sont les cônes qui remplacent les formules, et les enchaînements de factorisations dans les diagrammes sont les démonstrations. »

Un tel dépassement de la distinction syntaxe/sémantique, que nous avons déjà vu apparaître à la fin du chapitre 2, passe par la construction du *type* d'une esquisse.

5. Communication personnelle.

Le type, entre syntaxe et sémantique

C'est là le point central de l'argument de B. Halimi, qui vise à montrer que « sketches exhibit diagrams* as being a midpoint (or, as we will see, a « flipping » point) between syntax (formal theories) and semantics (functorial models) » ([99], 4).

L'aspect syntaxique des esquisses La dimension syntaxique des esquisses apparaît dans le fait que « not only axioms but formal proofs are transposed into the setting of sketches. » ([99], 6).

En s'appuyant sur l'article de L. Coppey [40], B. Halimi souligne qu'une preuve formelle devient elle-même une esquisse par un enrichissement spécifique de l'esquisse originale de la théorie. Pour éclairer ce point, L. Coppey prend l'exemple des monoïdes.

On peut en effet définir un monoïde comme un ensemble muni d'une loi binaire associative $k(x, y)$ et d'un élément distingué e , l'élément neutre. Cela permet d'engendrer une première esquisse des monoïdes S_1 . Or pour tout monoïde $\mathcal{M} = (M, \cdot)$, l'associativité sur 3 variables de \cdot entraîne l'associativité sur 4 variables, exprimée par une formule ϕ_1 . L'expression de ϕ_1 n'est pas possible dans S_1 , elle requiert l'ajout d'un sommet et de nouvelles flèches au graphe sous-jacent, soit une esquisse S'_1 , ayant les mêmes réalisations dans *Ens*. Mais ϕ_1 suppose encore l'ajout de nouvelles flèches et l'existence de produits finis, donc une esquisse S''_1 . Ainsi, comme le remarque L. Coppey :

« Finalement, on peut donc démontrer, en termes d'esquisses, que l'associativité à 4 variables se déduit de l'associativité à 3, par une progression (partant de S_1 , passant par S'_1 , puis par S''_1) vers la catégorie avec choix de produits finis, librement engendrée par l'esquisse S_1 des monoïdes. » ([40], 18)

Ainsi, la preuve de ϕ_1 , vraie dans tout monoïde, revient à la construction d'une suite d'esquisses $S_1 \rightarrow S'_1 \rightarrow S''_1$. Une preuve formelle apparaît donc dans la complétion d'une esquisse. C'est la dimension « syntaxique » des esquisses.

La dimension sémantique Pour éclairer la dimension sémantique des esquisses, on peut partir d'une seconde définition des monoïdes, comme ensembles munis d'une loi binaire associative satisfaisant une certaine formule ϕ_2 (exprimant l'existence d'un élément neutre). On peut alors construire une nouvelle esquisse S_3 . Or, comme le remarque L. Coppey :

« Nous établissons que les deux esquisses S_1 et S_3 , si elles ont évidemment les mêmes (catégories de) modèles ensemblistes, n'ont pas les mêmes (catégories de) modèles dans la catégorie des espaces vectoriels sur un (quelconque) corps commutatif K . Ainsi, leurs types ne sont pas isomorphes. » ([40], 6)

B. Halimi explique ainsi cette situation :

« So there are realizations of S_3 in $K\text{-Vect}$ which are not realizations of S_1 . The reason why is that there is no canonical choice for the complement of a linear subspace. What is left open when switching from a realization of S_1 to a realization of S_3 is precisely such a choice for the complement of Φ . » ([99], 9)

Ens et $K\text{-Vect}$ n'ont donc pas les mêmes propriétés, et cette différence peut être exprimée dans le cadre des esquisses, à travers la notion de *type*.

Pour éclairer le sens de cette notion, B. Halimi propose l'exemple suivant : il faut noter tout d'abord que toute catégorie peut être vue comme une esquisse. Par ailleurs, on l'a vu, sous certaines contraintes de cardinalité, les esquisses peuvent elles-mêmes être esquissées. Une esquisse S est alors la même chose qu'un foncteur F_S de l'esquisse des esquisses dans Ens .

Soit une esquisse-limite, c'est-à-dire une esquisse dont les cônes et les cocônes distingués sont des limites. On peut alors construire l'esquisse λ des esquisses-limite. Puisque toute esquisse-limite est une esquisse, on a un morphisme injectif de l'esquisse des esquisses, σ , dans λ , $p_l : \sigma \rightarrow \lambda$, dans la mesure où l'esquisse des esquisses-limite est un enrichissement de l'esquisse des esquisses. En effet, si S est une esquisse limite, elle est donc un modèle $F_S : \lambda \rightarrow Ens$. Alors, par composition avec p_l , on obtient un morphisme $F_S \circ p_l : \sigma \rightarrow Ens$, qui est un modèle de σ , donc une esquisse. Dès lors, pour toute esquisse limite $T : \lambda \rightarrow Ens$, $T \circ p_l$ est la même chose que T , vu comme une esquisse ordinaire, et toute esquisse S est une esquisse-limite ssi F_S se factorise par p_l . Ainsi « être une esquisse limite » apparaît comme une propriété qu'une esquisse peut avoir ou non, et c'est cette propriété que « représente » p_l . Par conséquent, pour toute esquisse S , il existe une plus petite esquisse étendant S : c'est « **le type de S relativement à la propriété p_l** », où « le p_l -type de S », et il a les mêmes modèles que S . Ainsi, comme le note B. Halimi,

« So, to sum up, it might be said that a type arises as the completion of a realization category, viewed itself as a sketch, in order to ensure a certain mathematical fact (such as the uniqueness of the complement. » ([99], 10)

On trouve dans [42] une autre description informelle, et par analogie, des types :

« Nous pouvons dire, en gros, que l'idée générale de type est celle d'esquisse suffisamment complète (tant algébriquement que géométriquement), et que les types seront donc pour le moins des catégories possédant suffisamment de limites de formes prescrites, certaines d'entre elles pouvant être distinguées. L'analogie avec le point de vue plus classique des logiciens est la suivante : une esquisse est à son type ce qu'une théorie du 1er ordre est à

la théorie complète qu'elle engendre (notons qu'on retrouve ici encore la discussion sur singulier et pluriel, et qu'il conviendrait justement de préciser, par exemple, les règles de déduction syntaxiques qui permettent de définir une telle théorie complète).

On peut encore dire que les types sont des structures libres (de types particuliers!) engendrées par des systèmes de générateurs et relations que sont justement les esquisses. » ([42], II-38)

Ayant défini la notion de type, on peut revenir à l'idée des deux dimensions, syntaxiques et sémantiques, des esquisses.

Soit un p -modèle d'une esquisse S la réalisation de S dans une catégorie quelconque ayant la propriété p , et supposons que l'on veut prouver qu'un théorème θ est vrai dans tout p -modèle de S . Il faut donc construire une esquisse $T_\theta(S)$ insérée entre S et $T_p(S)$, dans la mesure où il est clairement vrai que θ est vrai dans tout p -modèle de $T_\theta(S)$. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} S & \longrightarrow & T_\theta(S) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & T_p(S) \\ & \searrow & \downarrow & & & \swarrow & \\ & & S_p & & & & \end{array}$$

où S_p est de type p , c'est-à-dire en tant que catégorie, a la propriété p . Par conséquent, on a $S_p^{T_p(S)} \subseteq S_p^{T_\theta(S)} \subseteq S_p^S$. Or on a $S_p^S = S_p^{T_p(S)}$, puisque S_p est de type p . Donc $S_p^S = S_p^{T_\theta(S)}$, ce qui signifie que θ est vrai dans tout p -modèle de S , ce qu'il fallait démontrer. Ainsi la démonstration que θ est vrai dans tout p -modèle de S revient à insérer une flèche $\phi_\theta : S \rightarrow T_\theta(S)$ dans la flèche canonique $\eta_S : S \rightarrow T_p(S)$ et de construire un chemin fini

$$S \rightarrow \dots \rightarrow T_\theta(S) \rightarrow \dots \rightarrow T_p(S)$$

chaque flèche intermédiaire représentant une étape dans la preuve. La conclusion de B. Halimi est la suivante :

« Hence a type such as $T_p(S)$ summarizes a proof-theoretic construction starting from a given sketch S . The diagram* corresponding to this *syntactical* status of $T_p(S)$ is :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\eta_S} & T_p(S) \\ \downarrow & & \swarrow \\ \text{Set} & & \end{array}$$

where Set is supposed to be of type p (otherwise Set has to be replaced by $T_p(\text{Set})$). » ([99], 12)

Pour ce qui est de la fonction sémantique d'un type $T_p(S)$, le diagramme correspondant est :

$$\begin{array}{ccccc} S & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ A & \longrightarrow & T_p(A) & & \end{array}$$

où p est la propriété minimale identifiant les p -modèles de S et les p -modèles de S' . Ainsi par exemple, pour reprendre l'exemple de ϕ_2 :

$$\begin{array}{ccccc} S_3 & \xrightarrow{i} & S_1 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ K - Vect & \longrightarrow & Ens & & \end{array}$$

L'application inclusion i signifie que toute réalisation F de S_1 est une réalisation $F \circ i$ de S_3 , alors qu'il y a des réalisations de S_3 dans $K-Vect$ qui ne sont pas réalisations de S_1 .

Pour le versant sémantique, la conclusion de B. Halimi est donc la suivante :

« To sum up, the morphism $\eta_S : S \rightarrow T_p(S)$ may be drawn vertically (that's the semantical aspect of type) or horizontally (that's the syntactical aspect of type). Hence the following « flipping » diagram* :

SYNTAX :

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & T_p(S) \\ \downarrow & \swarrow & \\ Set & & \end{array}$$

(where p is a property needed to prove some theorem θ in any model of S);

SEMANTICS :

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & T_p(S) \end{array}$$

(where S' is an enrichment of S which p confuses with S).

You only have to turn the arrow around to go from one type to the other. This is the sense in which a sketch exhibits the status of diagrams* as being halfway between syntax (formal proofs) and semantics (structures and types of structures). More than that, a sketch-theoretic diagram* (that is, a diagram* whose vertices

are themselves sketches) may be conceived of as a diagrammatic representation of the connection between syntax and semantics, to the extent that any sketch morphism can be viewed either as a (semantical) realization, or as a syntactical (proof-theoretic) enrichment). »([99], 14)

Ainsi, la théorie des esquisses permet de voir en quoi la théorie des catégories, de même qu'elle permet de remonter en amont de la distinction entre le local et l'algébrique, se place en deçà de la distinction entre syntaxe et sémantique, plus profondément encore que les théories de Lawvere.

6.2.4 La question de l'invariant

Reste cependant ouverte la question de savoir si ce contexte permet la construction, comme le revendiquait Lawvere au chapitre 2, d'un invariant des présentations : nous avons vu en effet qu'une théorie algébrique pouvait être considérée, en un sens précis comme un invariant des présentations axiomatiques formelles.

On notera que cette question est abordée dans l'introduction de [59], mais laissée ouverte :

« To a functor p may be associated several sketches. We will not study here the problem of the equivalence of structures defined by two different sketches. Such a problem has been studied for algebras of type T over \mathcal{M} in [10], for algebras of type T over H^\bullet in [9]. We will concentrate our attention on the « smallest » sketches, for they are the most interesting ones to get structures easily handled (while the « types », which are the greatest ones, are more suitable for logical purposes). »([59], 4)

Les références [10] et [9] sont respectivement l'ouvrage de Cohn *Universal Algebra* de 1965 (on peut donc penser que Ehresmann fait ici allusion à la notion de « clone ») et la thèse de Bénabou de 1963 « Structures algébriques dans les catégories ». On trouve également cette question posée par C. Lair et L. Coppey dans [41] :

« Il est naturel de se demander pour quels autres types de structures (usuelles ou non) on a la possibilité d'exécuter de telles constructions graphiques, s'il y a plusieurs manières de procéder, ou, inversement, comment s'apercevoir que deux constructions graphiques de ce genre représentent la « même structure ». »([41], 10)

Elle se trouve abordée dans la Leçon 6 :

« Lorsqu'on parle de la définition de tel type de structures on commet à l'évidence un certain abus de langage puisqu'en général ce type de structures est susceptible de multiples définitions.

Il serait *a priori* plus correct de parler d'une définition de tel type de structures. Cependant, si l'on commet volontiers cet abus de langage, c'est qu'on veut exprimer par l'emploi du singulier (*la* définition] l'*univocité* du type de structures qui se trouve déterminé (par la définition proposée), conscient que d'autres présentations (définitions) « équivalentes » pourraient être fournies. » ([42], II-37)

On voit donc que C. Lair et L. Coppey dans [42] prennent acte du fait qu'une esquisse ne constitue pas un invariant des présentations, puisque plusieurs « définitions » différentes restent possibles pour un même type de structure. On mesure ainsi l'écart persistant entre la diversité des définitions et l'« univocité du type de structures ».

De façon générale, on se trouve confrontée à la difficulté suivante, soulignée par [40] et [25], et que l'on peut mettre en évidence dans deux exemples.

Le premier concerne la structure de monoïde, et nous l'avons déjà rencontré plus haut. On peut en effet définir un monoïde comme un ensemble muni d'une loi binaire associative et d'un élément neutre : une telle définition permet de construire l'esquisse S_1 , mais on peut également définir un monoïde comme un ensemble muni d'une loi binaire associative satisfaisant une formule affirmant l'existence d'un élément neutre, ce qui donnera une seconde esquisse S_3 . On peut alors construire un morphisme d'esquisses mixtes : $v : S_3 \rightarrow S_1$ tel que :

1. $Ens^v : Ens^{S_3} \rightarrow Ens^{S_1}$ est un isomorphisme, et Ens^{S_1} comme Ens^{S_3} sont la catégorie des monoïdes ;
2. $K - Vect^v : K - Vect^{S_3} \rightarrow K - Vect^{S_1}$ n'est pas un isomorphisme : $K - Vect^{S_1}$ et $K - Vect^{S_3}$ sont donc deux catégories différentes.

Un second exemple est celui des corps, que l'on peut définir par deux esquisses mixtes distinctes, comme le fait R. Guitart dans [94], σ et θ . On a alors un morphisme $v : \sigma \rightarrow \theta$ d'esquisses mixtes tel que :

1. $Ens^v : Ens^\theta \rightarrow Ens^\sigma$ est un isomorphisme : Ens^θ et Ens^σ sont donc la catégorie des corps ;
2. $Top^v : Top^\theta \rightarrow Top^\sigma$ n'est pas un isomorphisme. Seule Top^σ est la catégorie des corps topologiques.

Ainsi, si l'on reprend l'exemple des monoïdes, deux théories définitionnellement équivalentes, permettant de construire deux esquisses différentes, ne donnent pas systématiquement la même catégorie de modèles, comme c'est le cas avec la catégorie des ensembles. Dès lors deux attitudes seraient envisageables :

- soit définir une relation d'équivalence sur les esquisses permettant de rendre compte du fait qu'elles décrivent le même concept structurel, indépendamment de toute réalisation ;

— soit relativiser l'idée d'équivalence entre deux définitions d'une « même » structure au contexte ensembliste.

C'est cette seconde voie que propose R. Guitart⁶ :

« Les deux esquisses de corps [...] décrivent bien le même concept sous condition de viser avec elles un contexte logico-ensembliste classique, d'utiliser la logique du premier ordre pour en déterminer les réalisations ordinaires. Mais cependant en effet les modèles topologiques sont différents, à cause du fait que les "élastiques" sont flexibles dans *Top* et rigide dans *Ens*. Un peu de même, dans le cas des deux esquisses de monoides, le point décisif est que, dans *Ens*, $\neg\phi$ [...] est unique, mais c'est une propriété spéciale de *Ens*.

Et puis j'ajouterai que si deux esquisses déterminent les mêmes modèles, cela n'implique pas que les morphismes entre modèles (soit les transformations naturelles qui les déterminent) soient les mêmes. »

De telle sorte qu'il serait possible de préciser cette idée, comme le fait M. Bjerrum . Le problème est alors le suivant :

« Given two different sketches of the same structure, find out what type of models « ignore » this difference, i.e. give rise to equivalent model categories. » ([25], 25)

Cela permet d'introduire deux concepts essentiels : étant donné deux esquisses σ et θ , s'il existe une troisième esquisse η et un morphisme d'esquisse $v : \sigma \rightarrow \theta$, tel que :

$$\eta^v : \eta^\theta \rightarrow \eta^\sigma$$

$$R \mapsto R \circ v$$

est une équivalence de catégories, on dira que, via v , η **confond** σ et θ . Si non, on dira, que v , η **discrimine** entre σ et θ . M. Bjerrum précise :

« The discrimination will rather depend on the sketch η , than the morphism v , meaning that the difference between two sketches rather depend on the structural richness/poverty of the type of category we wish to model in. Said differently the discrimination takes place on a semantical level, but then again it depends on v how easy it is to determine whether η confuse or discriminate. » ([25], 25).

Cela permet ainsi de formuler un problème général : étant donné σ et θ , trouver un type $t : \epsilon_\lambda \rightarrow \tau$ tel que tout μ de type t confonde σ et θ ; trouver aussi au moins une esquisse ν qui fasse la distinction entre σ et θ .

6. Communication personnelle.

Ainsi le contexte de la théorie des esquisses semble mettre en évidence le fait qu'une équivalence entre deux définitions désignant une « même » structure, c'est-à-dire l'identité du concept derrière deux présentations distinctes, n'est pas une relation absolue, mais doit être comprise relativement au « milieu » dans lequel ce concept se trouve instancié. Si la logique du premier ordre semble passer sous silence une telle relativisation, c'est parce qu'elle est implicitement relative au contexte ensembliste, la catégorie des ensembles étant globalement le lieu de la confusion.

C'était en un sens déjà ce que soulignait Bénabou dans sa thèse :

« Notons enfin les rapports très étroits, signalés occasionnellement de ce travail, avec la « théorie des modèles ». Le rôle privilégié de la catégorie Ens tient au fait qu'elle « sépare » les structures algébriques : Deux espèces \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont équivalentes au sens de (I. 2) si, et seulement si, $Alg(\mathcal{S}, Ens)$ et $Alg(\mathcal{S}', Ens)$ sont équivalentes, l'équivalence respectant les familles sous-jacentes. » ([21], 6)

6.2.5 Esquisses, calcul et complexité

Il est par ailleurs possible de préciser la propriété d'esquissabilité au delà de la distinction entre esquisse projective et esquisse mixte, en considérant la forme des esquisses décrivant une classe de structures mathématiques. Un des aspects les plus importants de la théorie des esquisses est en effet qu'elle permet de formuler les critères d'une classification des systèmes axiomatiques que le seul examen du langage formel laisse inaperçue. Il est ainsi possible d'opérer des distinctions qui constituent alors le point de départ d'une forme de hiérarchie entre les systèmes d'axiomes (une forme de hiérarchie seulement, dans la mesure où les distinctions opérées ne forment pas un ordre total [250]).

Il semble ainsi possible de voir apparaître dans cette classification une certaine mesure de « complexité » distincte des données logiques, comme le souligne Jean-Pierre Marquis :

« Sketches are organized in a natural way. The basic idea is to follow the natural organization of limits and colimits and then additional structures that can be given on these. [...] By playing with the sizes of limits and colimits and the presence and absence of some of them, it is possible to obtain various types of sketches. [...] There is therefore a natural classification of sketches that led to an intrinsic classification of categories. Furthermore since a sketch is fundamentally a geometric notion, it is possible that some geometric measure of complexity could be devised and would reflect a different kind of complexity than the standard measures. The idea is not to replace the standard measures, but to have a (potentially) different notion at hand. » ([?], 230)

On peut par exemple distinguer les niveaux hiérarchiques suivants :

- une esquisse *triviale* consiste en un graphe seul, sans diagramme, ni cône ni cocône. Par exemple, la catégorie des ensembles et des fonctions est la catégorie des modèles de l'esquisse triviale avec un sommet et pas de flèche ;
- une esquisse *linéaire* ou *élémentaire* peut avoir des diagrammes, mais pas de cônes ni de cocônes. La catégorie des graphes réflexifs est donnée par une telle esquisse [42]. Les modèles des esquisses élémentaires sont des structures algébriques où toutes les opérations sont unaires ;
- une esquisse à *produits finis* n'a pas de cocônes et tous les cônes sont basés sur des diagrammes discrets finis. Cela correspond, en termes de pouvoir expressif, aux algèbres universelles (en général à plusieurs sortes) données par une signature finie et des équations. Les modèles incluent des structures algébriques classiques telles que les semi-groupes, les groupes, les anneaux, mais pas les corps ;
- une esquisse *finie discrète* a seulement des cônes et des cocônes discrets. Il est habituellement requis que les modèles d'une esquisse finie discrète soient dans une catégorie avec sommes disjointes finies. La catégorie des corps est la catégorie d'une esquisse finie discrète ;
- une esquisse à *limites finies* n'a pas de cocônes et tous les cônes sont basés sur des diagrammes finis. Ces esquisses correspondent, à équivalence près, aux structures essentiellement algébriques de P. Freyd. Les esquisses à limites finies peuvent esquisser toutes les structures définissables par des théories de Horn ;
- une esquisse à *somme finie* a des cônes finis et des cocônes discrets finis ;
- une esquisse *projective* a tous les cônes mais pas de cocônes ;
- une esquisse *régulière* a tous les cônes et les cocônes qui permettent de définir une flèche comme un épimorphisme dans les modèles. Généralement, les modèles doivent être dans des catégories régulières ;
- une esquisse *cohérente* a des cônes finis et des cocônes finis qui sont soit discrets soit des « spécifications epi régulières » ;
- une esquisse *géométrique* a des cônes finis et des cocônes arbitraires ;
- une esquisse *mixte* a des cônes et des cocônes quelconques.

Ainsi par exemple, passer des anneaux aux corps revient à dépasser le niveau des catégories algébriques, notamment en raison du fait que le produit de deux corps dans la catégorie des anneaux n'est pas un corps ou qu'il n'existe pas de corps libre. Du point de vue de la hiérarchie arithmétique de Kleene, cela équivaut à passer du niveau Π_1^0 au niveau Π_2^0 . Ce dépassement, du point de vue de la théorie des esquisses, revient à passer du niveau des esquisses à produits finis aux esquisses finies discrètes, et à rendre compte de ce passage d'un niveau de complexité à un niveau supérieur par l'ajout de cocônes. La complexité en termes d'esquisse semble ainsi pouvoir être considérée comme le pendant catégorique des mesures logiques « usuelles »

de complexité.

Ces différents niveaux de complexité n'empêchent pas cependant de définir une certaine notion de calcul dans les esquisses. En effet, les travaux de D. Duval et J.-C. Reynaud [54] ont montré qu'il était possible de définir une forme de calcul et d'effectivité même à partir de l'esquisse des corps, selon le tableau suivant :

Esquisses	Exemples	Processus d'évaluation
projective	/A/	Réécriture de termes
quasi-projective	Esq. des corps de caractéristique fixée	Evaluation statique
discrète	Esq. des corps	Evaluation dynamique

La compréhension informatique des esquisses suppose les définitions suivantes :

« Terms are defined as arrows in the *substitution category* of the sketch, and we prove that this definition agrees with the usual one. Expressions correspond to the intuitive notion of 'programs' valid on all the models of the sketch, and are defined as arrows in the *evaluation category* of the sketch. Terms can be considered as rather simple expressions, corresponding to simple programs without 'branches' (straight-line programs). » ([54], 187)

Ainsi, le calcul dans les modèles des esquisses peut être considéré comme un programme et prendre différentes formes :

— pour les esquisses quasi-projectives, comme celle des corps de caractéristique 0 ou p premier, il s'agira d'une « évaluation statique » :

« In practice, most structures traditionally used in computer science and in computer algebra may be specified by quasi-projective sketches. Static evaluation, together with equational term rewriting techniques, describes the 'usual' evaluation process for such structures. The (static) value of an expression is a term, which implies that a program may have branches, but the result of its evaluation cannot. » ([54], 187)

— au contraire, pour les esquisses discrètes telles que les corps en général, le calcul dans de telles structures prend la forme d'une « évaluation dynamique » :

« The value of an expression is not necessarily a term. Evaluation in this context is called dynamic evaluation. [...] More generally, dynamic evaluation deals with problems that are not sufficiently specified, so that there may be several different answers to a given question. As a consequence, during evaluation we must split the computation, so that we can consider several branches. The main difference between static and dynamic evaluation is that static evaluation works with only one sketch, while dynamic evaluation progressively transforms the given sketch. » ([54], 240)

Ainsi, dans la mesure où les esquisses permettent de dépasser le cadre algébrique auquel étaient restreintes les théories de Lawvere, ce dépassement n'implique nullement un effacement du calculatoire, mais bien plutôt un élargissement de la notion de calcul, non plus « statique » mais « dynamique ». De cette façon, il ne semble plus nécessaire de limiter l'idée selon laquelle la théorie des catégories aurait en elle-même une dimension calculatoire au cadre proprement algébrique, mais il devient au contraire possible, grâce à la notion d'esquisse, de montrer que la notion de calcul inhérente à la théorie des catégories est en réalité plus large que la conception usuelle, et que même la structure de corps, par exemple, peut être vue comme le domaine de procédures calculatoires.

Au terme de ce parcours, il apparaît que l'approche développée par Ehresmann de la notion de structure le conduit à mettre en lumière la capacité de la théorie des catégories à intégrer la définition même des concepts structurels, par le biais des représentations diagrammatiques. Cela a supposé une compréhension originale de la théorie des catégories elle-même, comme théorie des morphismes sans objets, rendant possible la thématization mathématique d'une « action » des catégories sur d'autres objets mathématiques. Ainsi, les travaux d'Ehresmann permettent de montrer en quoi la théorie des catégories met à distance certaines distinctions que l'on pourrait croire essentielles, telle que celle entre le local et l'algébrique, ou entre syntaxe et sémantique.

Chapitre 7

Un exemple d'épistémologie catégorique : la philosophie des mathématiques de Piaget

« J'ai eu peu de contacts, dans ma vie, avec les philosophies spécialistes de l'épistémologie des mathématiques ; je pense toutefois pouvoir dire que Jean Piaget occupe parmi eux une position tout à fait exceptionnelle [...].

Je ne connais guère que deux philosophes qui [...] aient eu le courage de chercher à s'initier aux mathématiques de leur temps : Albert Lautman et Jean Piaget. [...] L'ambition de Piaget, en ce qui concerne les mathématiques, est moins encyclopédique mais plus profonde : [...] cela l'a conduit à concentrer son attention sur l'armature des mathématiques de son temps, et à se dégager au moins partiellement de la hantise des questions de « fondements », conformément aux tendances actuelles des mathématiciens. »

Jean Dieudonné ([51], 1)

Ce sixième et dernier chapitre procédera de façon différente des précédents. Il ne s'agira plus ici en effet de prendre pour point de départ les concepts mathématiques mis en œuvre dans le champ de la logique catégorique, c'est-à-dire le travail des mathématiciens eux-mêmes, et d'en dégager les préconceptions épistémologiques. Bien plutôt, nous souhaiterions partir de ces éléments d'épistémologie effective mis en lumière dans les précédents chapitres, afin de montrer comment ils peuvent être articulés, sur le plan épistémologique, de façon systématique, pour constituer le cadre d'une théorie de la connaissance mathématique.

Les chapitres précédents ont en effet montré ce que devenait la question de la sensibilité au langage dans le champ de la théorie des catégories à

travers différents domaines théoriques. Ce faisant se sont dégagés les traits essentiels de l'épistémologie effective implicite dans l'usage mathématique de la théorie des catégories, qu'il va s'agir dans un premier temps de synthétiser.

Tout d'abord, la sémantique fonctorielle introduite par Lawvere a fait émerger du cœur de la logique catégorique l'objectif de caractériser les concepts structurels de façon intrinsèque, par delà la diversité et l'arbitraire des langages formels. Nous avons donc vu apparaître l'idée que les concepts structurels peuvent se donner à voir en eux-mêmes, qu'ils portent en eux-mêmes leur présentation. Ce projet s'est retrouvé dans le programme de recherche développé par Charles Ehresmann, à travers la rencontre des outils et méthodes de la géométrie différentielle et la recherche d'une théorie des espèces de structures. Il semblerait donc possible de voir à l'œuvre, dans toute approche catégorique des concepts mathématiques, l'ambition de revenir aux concepts en eux-mêmes et de développer une connaissance mathématique immédiate, qui ferait l'économie de la médiation du langage.

Une telle ambition met par ailleurs en lumière un deuxième trait saillant de l'épistémologie effective sous-jacente à l'approche catégorique des concepts structurels : le dépassement de la distinction entre le plan de la syntaxe et celui de la sémantique. En effet, dès la thèse de Lawvere en 1963, est apparue la possibilité de relativiser cette distinction : aucun objet mathématique ne semble pouvoir être considéré comme en soi syntaxique, ni comme relevant absolument du domaine sémantique. L'effacement de cette dualité s'est ainsi incarné dans des objets au statut particulier tels que le modèle générique de la théorie catégorique des modèles ou le type en théorie des esquisses. Néanmoins, l'articulation de la syntaxe et de la sémantique a conservé une pertinence, une fois pris en compte son caractère relatif : nous avons pu voir en effet que cette distinction est essentiellement de nature fonctionnelle et peut être pensée comme une forme particulière de représentation, donc relative à un point de vue et à un programme de recherche.

En outre, l'examen des applications de la sémantique fonctorielle et de la théorie des esquisses dans le domaine informatique a mis en évidence le fait que dans une approche catégorique des concepts structurels, l'accent se trouve mis sur la calcul et la procédure calculatoire bien plus que sur les objets sur lequel porte ce calcul. Cela nous a conduit à dégager des thèses épistémologiques fortes, telles que le remplacement de la notion de vérité (d'un énoncé) par celle d'effectivité (d'un calcul) ou la prise en compte des structures mathématiques non plus comme des objets de nature ensembliste mais comme des propriétés du calcul. Cela revient ainsi à mettre au premier plan ce que fait le mathématicien, plutôt que ce qu'il dit. Une telle approche opératoire des concepts mathématiques a eu pour conséquence la mise en lumière d'une forme de constructivité de l'approche catégorique, distincte des approches constructivistes traditionnelles telles que l'intuitionnisme, et héritée de son origine algébrique.

Enfin, le contexte catégorique a permis de mettre en exergue la dimension

secondaire, et non principale, de la distinction entre les concepts mathématiques de nature topologique et ceux de nature algébrique. En effet, il est apparu possible d'unifier ces deux aspects dans un même résultat catégorique, comme par exemple le théorème du diagramme localement libre, ou dans un même concept, tel que les esquisses mixtes, ou plus exactement de revenir en amont de cette distinction. Ainsi, à partir du moment où la procédure calculatoire est mise au premier plan, la distinction du local et de l'algébrique apparaît comme secondaire, comme le fruit d'une certaine perspective.

Nous souhaiterions montrer dans ce chapitre qu'il est possible d'élaborer une épistémologie qui synthétiserait les différentes thèses qui ont émergé jusqu'ici et dans le cadre de laquelle les concepts fondamentaux de la théorie des catégories joueraient un rôle essentiel. En d'autres termes il s'agirait de montrer quelle forme pourrait prendre un structuralisme catégorique qui intégrerait l'épistémologie effective à l'œuvre dans toute approche catégorique des mathématiques. Il s'agirait ainsi de reprendre, à nouveaux frais, les questions que nous posions en introduction à partir du débat entre S. Awodey et G. Hellman.

Pour ce faire, nous souhaiterions nous appuyer sur les travaux épistémologiques de Jean Piaget. Une telle référence peut, dans un premier temps, paraître inattendue dans la mesure où la postérité a essentiellement retenu de l'œuvre de Jean Piaget ses travaux fondateurs en psychologie du développement, davantage que ses recherches d'épistémologie. Elle nous semble néanmoins justifiée par deux raisons : d'une part, le fait que dans le cadre de son épistémologie génétique, sont développées des analyses qui apparaissent très proches de celles qui sont propres à l'épistémologie effective catégorique que nous avons dégagée jusqu'ici, et alors même qu'historiquement la théorie des catégories n'en était alors qu'à ses balbutiements. Nous nous efforcerons donc de mettre en lumière cette proximité conceptuelle.

D'autre part, la théorie des catégories trouve explicitement une place dans les travaux de Piaget, tant comme objet d'étude que comme outils d'analyse, conformément à la place que Piaget accordera aux méthodes formelles dans l'élaboration de son épistémologie. Ce second point nécessite cependant de préciser au préalable la façon dont la théorie des catégories s'est intégrée à l'édifice épistémologique de Piaget.

C'est à partir de 1967 que les écrits de Piaget font mention et usage de la théorie des catégories. Il est délicat de savoir quelles ont été les sources mathématiques qui ont permis à Piaget de prendre connaissance des notions catégoriques : seuls les travaux de Mac Lane et d'Eilenberg sont mentionnés dans un premier temps, puis ceux de Lawvere au milieu de années 1970, mais aucune référence précise n'est donnée. Il semble au contraire que c'est un collaborateur de Piaget, notamment dans ([195]), qui lui a permis de prendre connaissance de l'intérêt épistémologique de la théorie des catégories.

Il s'agit du mathématicien Seymour Papert¹. Nous reviendrons par la suite sur la perspective ouverte par Papert et reprise par Piaget.

Par ailleurs, il est possible de distinguer dans l'œuvre de Piaget au moins deux périodes distinctes, le tournant se situant au milieu des années 1970. Si la première période prend la forme d'une théorie épistémologique fondée sur une psychologie de l'action, la seconde tente de revenir en amont de l'action grâce à la notion de correspondance. Or la théorie des catégories semble avoir joué un rôle essentiel dans ce tournant : s'il s'agissait d'esquisser ce tournant à grands traits, on pourrait dire que Piaget est passé de la considération des catégories comme structures de morphismes à la mise en avant des foncteurs et des transformations naturelles. Dans ce travail de recherche, cependant, nous nous appuyons seulement sur la première période de l'épistémologie piagétienne, avant 1974, essentiellement pour deux raisons. D'une part la théorie développée par Piaget dans le premier moment présente une grande systématité et une architecture conceptuelle forte alors que la seconde reste à l'état d'ébauche, Piaget n'ayant pas eu le temps de la développer. D'autre part la psychologie du développement héritée de Piaget, jusqu'à aujourd'hui, s'est essentiellement construite sur le premier modèle, l'approfondissement théorique entamé par celui-ci n'ayant guère été prolongé par la suite. C'est donc sur l'articulation de la théorie des catégories et de la psychologie piagétienne de l'action que se centreront nos analyses, même si celle-ci s'est constituée avant la prise en compte par Piaget de la théorie des catégories.

L'objectif de ce chapitre est donc d'esquisser, à grands traits, les contours d'une théorie de la connaissance mathématique qui s'appuierait sur la théorie des catégories conçue comme épistémologie effective, et qui en expliciterait les conceptions essentielles en s'appuyant sur les travaux de Jean Piaget. Pour ce faire, nous procéderons en deux temps. Dans un premier temps, nous montrerons en quoi l'épistémologie de Piaget, telle qu'elle se présente à la fin de sa première période, constitue bien un structuralisme catégorique, tel que nous l'avons décrit dans notre introduction. Dans un second temps, en présentant la façon dont Piaget comprend les notions de nombre et d'espace, nous montrerons en quel sens ses analyses épistémologiques font écho à l'épistémologie implicite de la théorie des catégories² et comment il est possible de retrouver à l'intérieur de son épistémologie génétique les traits essentiels de l'épistémologie catégorique.

7.1 Un structuralisme catégorique

Nous allons donc montrer dans un premier temps en quoi l'épistémologie de Piaget constitue bien une forme de structuralisme catégorique, et par

1. On trouvera une description de la trajectoire de Seymour Papert dans ([10])

2. Les traits essentiels de l'épistémologie piagétienne, dont la présentation nous aurait éloigné de l'objet d'étude du présent travail de recherche, seront présentés en annexes.

là-même une authentique philosophie des mathématiques³. Il est cependant nécessaire, pour ce faire, de présenter au préalable l'idée que Piaget se fait de l'épistémologie, sous la forme de « l'épistémologie génétique ». Dans le cadre de celle-ci, la psychologie du développement joue, nous le verrons, un rôle central. C'est pour cette raison que nous présenterons également quelques éléments de la psychologie piagétienne du développement. Cela nous permettra, dans un second temps, de montrer en quoi son projet philosophique s'inscrit bien dans le champ du structuralisme, puis la place qu'occupe la théorie des catégories dans ce cadre.

7.1.1 Epistémologie génétique et psychologie du développement

Piaget reconnaît plusieurs méthodes possibles pour l'épistémologie :

1. les méthodes d'*analyse directe*, qui consistent à dégager par simple analyse réflexive les conditions de connaissance en jeu dans un nouveau corps de connaissance scientifique, ou dans une crise de ces connaissances ;
2. les *analyses formalisantes*, qui ajoutent à l'analyse directe des processus de connaissance « un examen des conditions de leur formalisation et de la coordination entre cette formalisation et l'expérience. » ([195], 65)
3. les épistémologies *génétiques* : au principe des recherches philosophiques de Piaget se trouve l'idée qu'une épistémologie doit rendre compte non pas seulement de la connaissance en elle-même, mais de son développement⁴.

Ces dernières se répartissent en deux types de méthodes :

- la méthode *historico-critique*, étudiant la formation d'un corps de doctrine actuel. Cette première méthode consiste à « suivre le développement des notions dont a usé une science au cours de son histoire », en faisant par exemple l'histoire de la notion de nombre⁵.

3. On pourrait également, pour s'en convaincre, s'appuyer sur la place importante qu'occupe l'œuvre de L. Brunschwig, son « Maître vénéré » ([201], 225), dans les analyses de Piaget.

4. Il s'agit ainsi de développer une épistémologie « génétique », définie comme une « théorie de la connaissance scientifique fondée sur l'analyse du développement même de cette connaissance » ([193], 7). Autrement dit la question est de savoir « comment la pensée scientifique [...] a-t-elle procédé d'un état de moindre connaissance à un état jugé supérieur ? » ([193], 12)

5. Cette première méthode présente cependant une limite : elle porte sur des « notions construites et employées par une pensée déjà constituée : celle des savants eux-mêmes considérés sous l'angle de leur filiation sociale. [...] Mais il s'agit toujours de l'action de pensées évoluées sur d'autres en évolution et non pas encore de la genèse comme telle de la connaissance. » ([193], 15-16)

— l'*épistémologie génétique* à proprement parler, qui cherche à atteindre les conditions psychologiques de formation des connaissances élémentaires et à coordonner ces résultats avec l'étude des conditions de formalisation.

De là s'impose pour lui un recours à la psychologie du développement, et à « cette embryologie de la raison qu'est l'étude de l'intelligence enfantine⁶ » ([193], 5).

De là vient la place centrale dans l'œuvre de Piaget de la psychologie expérimentale, qui a constitué la postérité essentielle de Piaget jusqu'à aujourd'hui. Il ne s'agit pas pour autant de laisser de côté le rôle du milieu social de l'enfant, et de l'histoire collective : mais l'hypothèse de Piaget sur ce point est que

« même lorsqu'il reçoit des notions déjà toutes préparées par le milieu social le jeune enfant les transforme et les assimile à ses structures mentales successives ». ([193], 17)

Il n'y aurait donc pas pour Piaget d'apprentissage possible s'il n'y avait une disponibilité de l'enfant à recevoir ses apprentissages : c'est là le principe de la célèbre théorie des stades de développement. Ainsi s'il doit donc y avoir, dans le cadre d'une épistémologie génétique, une collaboration entre les méthodes historico-critique et génétique, c'est parce que

« la nature d'une réalité vivante n'est révélée ni par ses seuls stades initiaux, ni par ses stades terminaux, mais par le processus même de ses transformations [...]. Dans le cas d'une notion ou d'un ensemble d'opérations intellectuelles, ce n'est donc pas seulement le point de départ qui importe, d'ailleurs toujours inaccessible à titre de premier départ, ni l'équilibre final, dont ne sait non plus jamais s'il est effectivement final : c'est la loi de construction, c'est-à-dire le système opératoire en sa constitution progressive ». ([193], 17)

On voit bien ici apparaître l'originalité de la philosophie des mathématiques en germe dans le projet piagétien : ce ne pourra être ni une théorie fondationnelle, ni une description des mathématiques telles qu'elles sont, mais une philosophie du devenir des mathématiques. Et c'est dans ce cadre que

6. Piaget en trouve l'exemple en mathématiques, plus précisément dans l'œuvre de Poincaré, qui eut un impact décisif sur sa réflexion :

« Poincaré cherchait la genèse de l'espace dans la coordination des mouvements du corps, dans la distinction des changements de position et des changements d'états, etc. c'est-à-dire en autant d'hypothèses qui ne peuvent être vérifiées que par l'analyse du développement mental de l'enfant, et encore à l'âge le plus tendre. Or, la méthode peut être généralisée et c'est la construction de toutes les notions essentielles ou catégories de la pensée dont on peut chercher à retracer la genèse au cours de l'évolution intellectuelle de l'individu » ([193], 17).

s'impose l'étude préliminaire de la psychologie du développement de l'intelligence, de façon expérimentale.

Eléments de psychologie piagétienne du développement

La psychologie piagétienne, de nature expérimentale, s'inscrit dans un tournant de la psychologie au début du XX^e siècle, dans les travaux de P. Janet ou J. Baldwin par exemple⁷ : le dépassement d'une psychologie de la sensation et de l'association par une psychologie de l'action et des conduites⁸

On ne trouve cependant pas chez Piaget, à notre connaissance, de réelle théorie de l'action, cette notion étant considérée comme primitive, au delà de l'idée d'une transformation par l'agent de son environnement. Une caractérisation de l'action apparaît cependant en 1974 dans *Réussir et comprendre*, où l'action est comprise comme « une connaissance (savoir-faire) autonome » ([197], 231). Piaget affirme ainsi à la fois que l'action est organisée et intelligible, et que le principe de cette organisation de l'action est à chercher non pas à l'extérieur d'elle-même, dans des connaissances dont les actions ne seraient que des applications, mais à l'intérieur d'elle-même. On comprend ainsi comment l'action peut être considérée comme « une forme de l'intelligence [...] qui prépare la pensée. »

Pour Piaget, la psychologie de l'action doit ainsi permettre de résoudre le problème principal de toute épistémologie génétique : la constitution de liaisons nécessaires, indépendantes du temps : comment l'esprit peut-il en venir à construire, dans son développement individuel, des principes logiques nécessaires ? On retrouve ici une difficulté à laquelle se trouvait déjà confronté l'empirisme de Locke par exemple. Or pour Piaget,

« c'est précisément sur ce point qu'une psychologie de l'action marque tous ses avantages sur celle de la sensation : la loi fondamentale qui paraît régir la mentalisation progressive de l'action est, en effet, celle du passage, de l'irréversibilité à la réversibilité, autrement dit de la marche vers un équilibre progressif défini par

7. On pourrait penser également aux travaux de W. James, qui n'est cependant jamais cité par Piaget.

8. En effet,

« c'est de l'action que procède la pensée en son mécanisme essentiel, qui est le système des opérations logiques et mathématiques, et c'est donc à l'analyse des actions élémentaires et de leur intériorisation ou mentalisation progressive de nous révéler le secret de la genèse de ces notions ». ([193], 21)

et de même

« L'action est une forme de l'intelligence parmi d'autres, et une forme qui prépare la pensée, puisqu'entre la perception et l'intelligence réflexive il y a l'intelligence sensori-motrice, l'intelligence intuitive ou intériorisation représentative de l'action et tout le système des opérations liées à l'intelligence opératoire concrète. » ([193], 303)

cette dernière. Tandis que les habitudes et les perceptions élémentaires sont essentiellement à sens unique, l'intelligence sensori-motrice (ou préverbale) découvre déjà les conduites de détour et de retour, qui annoncent en partie l'associativité et la réversibilité des opérations. Sur le plan des actions intériorisées en représentations intuitives, l'enfant commence à nouveau par ne pas savoir inverser les compositions imagées, au moyen desquelles il pense, les articulations progressives de l'intuition engendrant par contre, dans la suite, une réversibilité croissante qui, vers 7-8 ans, aboutit aux premières opérations logiques concrètes : celles-ci consistent, en effet, en actions de réunir, de sérier, etc. Devenues ainsi réversibles au cours d'une longue évolution. Mais cette dernière s'achèvera seulement vers 11-12 ans, lorsque les actions rendues réversibles pourront elles-mêmes être traduites sous forme de propositions, c'est-à-dire d'opérations purement symboliques. C'est alors, et alors seulement, que grâce à la réversibilité opératoire enfin généralisée, la pensée se libérera de l'irréversibilité des événements temporels. » ([193], 24)

Cette citation résume l'essentiel de la théorie de Piaget. On y découvre d'une part les différents stades de développement qui vont structurer l'ensemble de ses analyses des notions mathématiques :

1. les perceptions, les réflexes et les habitudes ;
2. l'intelligence sensori-motrice préverbale ;
3. l'intuition et la représentation mentale et imagée : les début de la pensée, d'abord irréversibles, puis progressivement réversibles ;
4. les opérations concrètes vers 7-8 ans : les actions élémentaires sont devenues des opérations réversibles, mais appuyées sur des représentations ;
5. les opérations formelles, lorsque les opérations concrètes prennent la forme de propositions, vers 11-12 ans.

D'autre part, on voit comment Piaget entend résoudre la question de la nécessité des principes logiques, à l'intérieur d'une épistémologie génétique appuyée sur une psychologie de l'action : le « nécessaire » est compris comme « indépendant du temps », et cette indépendance temporelle est acquise dans le passage de l'irréversible au réversible, autrement compris comme le passage de l'action (irréversible) à l'opération (réversible). La réversibilité caractérise ainsi les états d'équilibre, au sens où « l'équilibre de la pensée opératoire n'est point le repos, mais un système d'échanges qui se balancent, de transformations sans cesse compensées par d'autres » ([191], 60). De sorte que « la logique formelle, ou logistiquale, constitue simplement l'axiomatique des états d'équilibre de la pensée » ([191], 12).

Il reste cependant à déterminer comment s'effectue le passage d'un stade à l'autre, quel mécanisme permet ce développement psychologique.

L'épistémologie génétique comme méthode, et les autres théories de la connaissance

Mais faire le choix d'une telle méthode, n'est-ce pas accepter dès le départ une certaine philosophie de la connaissance ? L'épistémologie génétique est-elle une méthode, ou déjà une certaine théorie ?

Piaget insiste en effet sur la neutralité théorique de l'épistémologie génétique : elle ne serait qu'une voie d'analyse, et non pas une façon expérimentale de justifier une théorie philosophique *a priori*. Pour démontrer une telle neutralité philosophique de l'épistémologie génétique, Piaget propose l'argument suivant : après avoir établi une liste exhaustive des positions épistémologiques possibles, il va s'agir de montrer que chacune de ses positions est compatible avec la méthode de l'épistémologie génétique. Pour Piaget, ces positions épistémologiques possibles sont au nombre de six, et s'intègre dans un tableau à double entrée, selon qu'elles sont d'une part génétiques ou non, et d'autre part centrées sur l'objet, le sujet ou leur interaction :

	<i>Solutions génétiques</i>	<i>non- Solutions génétiques</i>
<i>Primat de l'objet</i>	Réalisme	Empirisme
<i>Primat du sujet</i>	Apriorisme	Pragmatisme ou conventionnalisme
<i>Indissociation du sujet et de l'objet</i>	Phénoménologie	Relativisme

Piaget examine donc ces différentes solutions et va montrer qu'elles pourraient être confirmées ou infirmées par l'épistémologie génétique.

7.1.2 Une épistémologie structuraliste

La première conséquence de l'application de cette méthode qu'est l'épistémologie génétique est pour Piaget l'adoption d'une perspective structuraliste. Pour Piaget en effet, la méthode qu'il développe (l'épistémologie génétique) et la psychologie sur laquelle il s'appuie (une psychologie de l'action) ne peuvent conduire qu'au structuralisme⁹

Dès *La Psychologie de l'intelligence* s'affirme la dimension structuraliste de l'épistémologie piagétienne, la structure apparaissant en effet au cœur de sa compréhension de l'action elle-même, même la plus élémentaire¹⁰. Le

9. Un telle implication nécessaire entre épistémologie génétique, psychologie de l'action et structuralisme pourrait cependant être discutée, mais cela dépasserait le cadre du présent travail de recherche.

10. « les échanges que [toute conduite] provoque avec le milieu comportent également

développement intellectuel de l'enfant revient donc à une forme d'histoire de ses structures cognitives :

« Chaque structure est à concevoir comme une forme particulière d'équilibre, plus ou moins stable en son champ restreint et devenant instable aux limites de celui-ci. Mais ces structures, échelonnées par paliers, sont à considérer comme se succédant selon une loi d'évolution telle que chacune assure un équilibre plus large et plus stable aux processus qui intervenaient déjà au sein de la précédente. » ([191], 16).

Il y a ainsi une direction à cette construction progressive des structures opératoires de l'intelligence, vers une réversibilité qui augmente sans cesse d'importance au cours du développement. Or le propre des opérations qui apparaissent vers 7-8 ans est non seulement d'être intériorisées en pensée grâce à la fonction symbolique, mais surtout d'être réversibles. Cette propriété de réversibilité introduit dans le même temps la structure opératoire, dans la mesure où il ne peut y avoir d'opération isolée, toute opération étant solidaire de l'opération en sens inverse et pouvant se composer avec les autres opérations à l'intérieur du système, de sorte que

« il y a donc structure opératoire dès qu'il y a opération et la structure d'ensemble n'est pas un produit après coup des compositions entre opérations préalables puisque l'action initialement irréversible ne devient opératoire et réversible qu'à l'intérieur d'une structure et sous l'effet de son organisation. » ([193], 17)

Cette inscription des structures au cœur même de la conduite se trouve renforcée par les apports de la théorie de la *Gestalt*¹¹, mais qu'il critique et dépasse néanmoins. Cette importance des structures, inscrite en toute opération¹², doit amener à considérer la possibilité d'une « logique des totalités, qui traduit en un schéma axiomatique ou formel le travail effectif de l'esprit » ([191], 56).

Encore est-il nécessaire de donner une définition précise à la notion de structure :

« En première approximation, une structure est un système de transformations, qui comporte des lois en tant que système (par

une forme ou une structure, qui détermine les divers circuits possibles s'établissant entre le sujet et les objets. C'est en cette structuration de la conduite que consiste son aspect cognitif. Une perception, un apprentissage sensori-moteur (habitude, etc.), un acte de compréhension, un raisonnement, etc. reviennent tous à structurer, d'une manière ou d'une autre, les rapports entre le milieu et l'organisme » ([191], 14)

11. Piaget reconnaît que « le mode d'analyse qui consiste à toujours traduire les faits en termes de « champ » total est le seul légitime » ([191], 85)

12. On notera cependant une ambiguïté dans les analyses de Piaget, qui défend à la fois l'idée que tout échange entre l'organisme et le milieu présente une structure, ce qui inclut l'action, et également que la structure apparaît seulement avec la réversibilité de l'action en opération, comme « structure opératoire ». Une analyse plus approfondie de l'œuvre de Piaget devrait permettre de trancher cette ambiguïté.

opposition aux propriétés des éléments) et qui se conserve ou s'enrichit par le jeu même de ses transformations, sans que celles-ci aboutissent en dehors de ses frontières ou fasse appel à des éléments extérieurs. En un mot, une structure comprend ainsi les trois caractères de totalité, de transformations et d'autorégulation.

En seconde approximation, mais il peut s'agir d'une phase bien ultérieure aussi bien que succédant immédiatement à la découverte de la structure, celle-ci doit pouvoir donner lieu à une formalisation. » ([196], 7)

Cette possibilité de formalisation¹³ qui accompagne selon Piaget, par définition, toute structure est le domaine propre de la connaissance mathématique. Et sur ce point Piaget accorde un rôle prépondérant aux « structures-mères » de Bourbaki. En effet dans les travaux de Bourbaki, en particulier l'article intitulé « L'architecture des mathématiques », les structures présentent elles-mêmes une hiérarchie, au sommet de laquelle se trouvent les « structures-mères » : les structures algébriques, les structures topologiques et les structures d'ordre, structures irréductibles les unes aux autres et à partir desquelles, par différenciation et combinaison, peuvent être retrouvées toutes les structures « concrètes » étudiées par les mathématiques.

La question qui se pose est dès lors de savoir quel rapport établir entre ces structures opératoires de l'intelligence et les structures-mères mises en évidence par Bourbaki. Les travaux de Piaget le conduisent à défendre la thèse suivante : « on retrouve à toutes les étapes, d'abord une tendance fondamentale à l'organisation de totalités ou de systèmes, en dehors desquels les éléments n'ont pas de signification ni même d'existence, et ensuite une répartition de ces systèmes d'ensemble selon trois sortes de propriétés qui correspondent précisément à celles des structures algébriques, des structures d'ordre et des structures topologiques » ([194], 15) mises en évidence par Bourbaki¹⁴. Cette correspondance s'établit à travers les différentes formes de la réversibilité mises en évidence par Piaget :

« La réversibilité, constituant ainsi sans doute la loi fondamentale des compositions propres à l'intelligence, se présente dès le départ (donc dès les schèmes sensori-moteurs) sous deux formes complémentaires et irréductibles : l'inversion ou négation et la réciprocité¹⁵ » ([194], 17)

13. Pour Piaget, il semble clair que toute structure opératoire est formalisable, mais ce point n'est jamais justifié.

14. Piaget précise que ces structures-mères « constituent le prolongement formalisé et non pas l'expression directe » ([194], 17) de ces structures élémentaires de l'intelligence.

15. « Lorsqu'un bébé de 10 à 12 mois, qui commence à organiser de façon systématique les déplacements dans son espace proche, a déplacé un objet de A en B, il peut annuler cette transformation par la transformation inverse en ramenant l'objet de B en A ce qui, au total, équivaut bien à un mouvement nul. Mais il peut aussi laisser l'objet en B et se déplacer lui-même de A en B, ce qui reproduira la situation initiale où l'objet était en

Piaget distingue par ailleurs un troisième niveau de réversibilité, propre à la topologie de l'espace dans lequel se déplace l'enfant, qu'il qualifie d'« infralogique »¹⁶. On distingue ainsi trois formes de réversibilité :

1. la réversibilité par inversion ou négation, correspondant aux structures algébriques ;
2. la réversibilité par réciprocity, correspondant aux structures d'ordre ;
3. les opérations « infralogiques », correspondant aux structures topologiques¹⁷.

Mais quel sens donner à cette « correspondance », à cette « analogie » ([195], 417) entre les structures-mères de Bourbaki et les types de structures opératoires de l'intelligence ?

« Les structures d'ensemble vers lesquelles s'oriente l'intelligence au cours de son développement ne correspondent ni à des structures nerveuses préformées (ou à des formes *a priori*) ni à des structures physiques empiriquement enregistrées : ce ne sont que des lois d'équilibre se présentant sous la forme de systèmes d'opérations possibles, dont certaines seulement sont actualisées en fonction des conditions ambiantes physiques et sociales. Ce sont ces possibilités dont la logique étudie par ailleurs les ensembles complets et libre à elle de leur fournir les fondements qu'elle entend : on ne saurait ainsi concevoir de point de friction entre l'analyse déductive et exhaustive des possibles logiques, d'une part, et, d'autre part, la détermination expérimentale des possibilités ou des impossibilités qui caractérisent les formes d'équilibre correspondant aux différents niveaux d'organisation de l'intelligence¹⁸. » ([194], 31)

face de son corps propre : en ce cas le mouvement de l'objet n'a point été annulé, mais simplement compensé par un déplacement réciproque du corps propre, ce qui constitue une autre transformation. » ([194], 17)

16. « Lors des débuts du dessin, l'enfant ne distingue pas les carrés, cercles, triangles et autres figures métriques, mais [...] différencie fort bien les figures ouvertes ou fermées, les situations d'extériorité ou d'intériorité par rapport à une frontière (y compris la position « sur la frontière »), les séparations et les voisinages (sans conservation de la distance), etc. Or, partant ainsi d'intuitions topologiques fondamentales, il s'oriente ensuite simultanément dans la direction des structures projectives et dans celle des structures métriques. » ([194], 26)

17. De telle sorte que

« ces faits semblent indiquer que les structures-mères des Bourbaki correspondent, sous une forme naturellement très élémentaire, sinon rudimentaire, et fort éloignée de la généralité et de la formalisation possible qu'elles revêtent sur le plan théorique, à des coordinations nécessaires au fonctionnement de toute intelligence dès les stades assez primitifs de sa formation. » ([196], 24)

18. Piaget en tire par ailleurs des conséquences concernant l'enseignement des mathématiques (la didactique des mathématiques ayant tiré de nombreux enseignements des

Pour ce qui est de la logique, la notion de structure est également omniprésente, étant donné que tout système formel « constitue une structure puisqu'il comporte les trois caractères de totalité, de transformations et d'autoréglage [...] mais ce n'est là qu'une totalité relative, car le système reste ouvert par le haut quant aux théorèmes qu'il ne démontre pas (notamment les indécidables à cause des limites de la formalisation) et ouvert par le bas, car les notions et axiomes de départ recouvrent un monde d'éléments implicites. » ([196], 27). Et ce structuralisme logique est selon Piaget plus prégnant encore lorsque l'on considère les systèmes logiques eux mêmes comme des structures (algèbre de Boole, de Heyting, etc.).

Toutefois, deux points importants doivent ici être soulignés. D'une part en effet la mise en évidence de ces structures opératoires dans le développement cognitif ne signifie nullement que ces structures constituent le point final de l'histoire des mathématiques, qui culmineraient alors avec Bourbaki. Bien au contraire si les groupes, par exemple, constituent la structure même de l'esprit, rien ne montre que l'activité du sujet s'achève sur la prise de conscience des possibilités offertes par ces totalités opératoires. En effet, la prise de conscience elle-même prolonge le cheminement de l'esprit, constituant en elle-même une construction¹⁹ : on ne trouvera donc nul part dans l'œuvre de Piaget l'idée d'un point final, d'une ultime étape qui viendrait clore le développement des mathématiques comme de l'esprit individuel : même si l'analyse génétique nous ramène sans cesse à des notions plus élémentaires et primitives, la simple prise de conscience de ces notions ouvre en retour de nouvelles voies d'exploration. Ces remarques valent également pour la théorie des catégories, qui pour Piaget ne peut être vue comme le point d'arrêt de l'analyse des connaissances logico-mathématiques ou le terme d'une trajectoire née avec les mathématiques grecques. La notion de catégorie n'est qu'une étape, à la fois dans l'histoire des mathématiques et

travaux de Piaget) :

« Rien ne prouve qu'en mettant le formalisme au départ on le retrouve à l'arrivée sous des espèces authentiques et les ravages d'un pseudo-formalisme ou formalisme demeurant verbal parce que trop précoce montrent au contraire les dangers d'une méthode ignorant les lois du développement mental.

En réalité, si l'édifice des mathématiques repose sur des « structures », qui correspondent par ailleurs aux structures de l'intelligence, c'est sur l'organisation progressive de ces structures opératoires qu'il faut baser la didactique des mathématiques. Or, psychologiquement, les opérations dérivent d'actions qui, en s'intériorisant, se coordonnent en structures. [...] La pédagogie dite active parmi les procédés d'initiation mathématique ne compromet en rien la rigueur déductive ultérieure mais la prépare au contraire en lui fournissant des bases réelles et non pas simplement verbales. » ([194], 33)

19. « On ne prend conscience d'un mécanisme intérieur qu'en le reconstruisant sous une forme nouvelle, qui le développe en l'explicitant, et tout processus réflexif se trouve ainsi, par le fait même, doublé d'un processus constructif, qui prolonge, en le reconstituant, le mécanisme interne dont il y a prise de conscience. » ([193], 285)

dans l'analyse des mécanismes de la connaissance.

D'autre part, il est important de souligner que le structuralisme pour Piaget n'est pas une position philosophique, mais une méthode :

« Au total, le structuralisme est bien une méthode et non pas une doctrine, ou, dans la mesure où il devient doctrinal, il conduit à une multiplicité de doctrines. [...] En un mot, le danger permanent qui menace le structuralisme, lorsqu'on a tendance à en faire une philosophie, est le réalisme de la structure sur lequel on débouche sitôt qu'on oublie ses attaches avec les opérations dont elle est issue. » ([196], 123)

Conséquence de la *méthode* de l'épistémologie génétique, appuyée sur la psychologie de l'action, il y aurait donc une neutralité philosophique du structuralisme, qui n'est pas pour Piaget une position philosophique, mais seulement un outil d'analyse²⁰.

7.1.3 Psychologie de l'action et théorie des catégories

La théorie des catégories et les opérations du mathématicien

Mais il reste à comprendre quelle est la place de la théorie des catégories dans l'épistémologie piagétienne, en rappelant tout d'abord que celle-ci s'est développée *avant* la rencontre de Piaget avec la théorie des catégories, à la fin des années 1960. L'édifice conceptuel de l'épistémologie génétique une fois constituée, comment la théorie des catégories a-t-elle pu s'intégrer ?

Dans la mesure où elle émerge de la pratique mathématique, Piaget va dans un premier temps replacer la théorie des catégories dans le mouvement général des mathématiques. De ce point de vue, les catégories apparaissent selon lui dans le prolongement des structures mathématiques mises en avant par Bourbaki²¹. Ainsi la naissance de la théorie des catégories se présente selon Piaget comme emblématique du processus d'abstraction²² omniprésent en mathématiques :

20. Une telle position serait cependant tout à fait discutable, comme le montre par exemple la possibilité de philosophies des mathématiques non structuralistes. On pourrait au contraire défendre l'idée que, si l'épistémologie génétique est bien une méthode, le choix d'une psychologie de l'action oriente déjà l'épistémologue vers une famille de positions philosophiques, de nature structuraliste.

21. « Toute la théorie des catégories actuelles de Mac Lane et Eilenberg est tirée de la manière dont les Bourbaki ont construit leurs structures, mais d'une manière qui était instrumentale et qui devient théorie thématifiée par abstraction réfléchissante à ce plan nouveau qu'est la théorie des catégories » ([201], 229)

On pourra mesurer ici ce qui sépare le devenir conceptuel des mathématiques tel qu'il est théorisé par Piaget et l'histoire « réelle » des mathématiques : on ne trouve en effet aucune référence, dans les travaux fondateurs de Mac Lane et Eilenberg, aux *Eléments* de Bourbaki, et inversement, les réticences du groupe Bourbaki à intégrer les outils catégoriques ont été précisément documentées par Ralf Krömer dans [126].

22. La notion d'abstraction réfléchissante sera examinée plus loin.

« C'est assez dire que, en insistant sur les fonctions, les catégories sont axées non plus sur les structures mères, mais sur les procédés mêmes de mise en relation qui ont permis de les dégager, ce qui revient à considérer la nouvelle structure comme tirée, non pas des « êtres » auxquels ont abouti les opérations précédentes, mais de ces opérations mêmes en tant que processus formateurs. » ([196], 25)

Or, ce processus de construction des catégories est rapproché par Piaget d'une distinction introduite par Seymour Papert entre « les opérations du mathématicien » et celle de « la » mathématique. » ([196], 25)²³

On voit ici s'introduire une distance entre les opérations de la mathématique et les opérations du mathématicien et S. Papert expose cette distinction dans [195]. Son analyse prend pour point de départ l'idée que le développement de la théorie des catégories met en évidence l'importance de l'algèbre dans le champ mathématique, « non pas comme une structure parmi d'autres, mais comme l'instrument mathématique par excellence, auquel on ramène l'étude de problème de toute sorte » ([195], 509). L'origine de cette situation particulière de l'algèbre dans le champ mathématique peut selon Papert trouver une explication sur deux niveaux :

- sur le plan technique, « le fait que le calcul effectif ou constructif lui est propre » ; il y aurait ainsi une dimension intrinsèquement constructive et effective à l'algèbre ;
- sur le plan épistémologique, on constate « une correspondance particulièrement étroite entre la forme algébrique et la structure des opérations réellement effectuées par le mathématicien » ([195], 509)

Papert propose donc une distinction que Piaget reprendra par la suite à de nombreuses reprises :

« L'opposition entre l'opération mathématique et l'opération du mathématicien ressort avec netteté à propos des opérations mathématiques sur une infinité d'éléments, comme par exemple, le passage d'une suite à une limite. Il est évident que l'infinité d'éléments sur lesquels porte, au moins dans l'optique de la mathématique classique, l'opération mathématique, ne figure pas comme élément distinct dans le raisonnement du mathématicien. Au contraire l'opération du mathématicien se réduit nécessairement à la combinaison d'un nombre non seulement fini mais petits d'éléments. Il ne change bien évidemment rien à ce fait que l'on donne à certains de ces éléments, et avec justifications, des noms tel qu'« ensemble infini » ou « nombres transfinis. » ([195], 509)

Il y aurait donc quelque chose d'effectif dans l'opération du mathématicien, en un sens très précis, qui échapperait à la conception mathématique

23. Cette distinction est par exemple reprise par Ralf Krömer dans [125].

générale de la notion d'opération. La source principale de cette confusion entre les deux types d'opérations serait selon Papert la persistance d'un « primat de l'être », au détriment de la prise en compte des structures : « la construction des algèbres d'ensembles ou des sous-groupes [...] dégage, au moins dans une certaine mesure, la base finitiste du raisonnement effectif et algébrique du mathématicien » ([195], 510). On voit donc ici réapparaître l'idée défendue également par Piaget d'une forme d'effectivité inhérente au calcul dans une structure, comme par exemple une catégorie. Ainsi, selon Piaget

« l'analyse de Papert montre assez comment le passage des « structures » aux « catégories » est de nature à ébranler une fois de plus ce « primat de l'être » sans cesse renaissant. Et du point de vue de l'intériorisation de ces « êtres » et de l'abstraction réfléchissante qui leur donne naissance, il est particulièrement suggestif de constater que ce rétablissement constant du primat de l'opération s'accompagne dans le cas particulier d'une tendance à substituer ce que Papert appelle l'opération « du mathématicien » aux opérations « de la mathématique », la première étant effective parce que liée à un domaine de réalisation analysé en tous ses éléments et la seconde en quelque sorte virtuelle parce que trop schématiquement généralisée²⁴. » ([195], 66)

L'apparition de la théorie des catégories dans le champ mathématique marquerait donc, selon Piaget, la mise au premier plan de l'effectivité de l'opération du mathématicien. On voit finalement ici réapparaître ce que nous avons souligné au chapitre 3 en rappelant le lien intrinsèque entre théorie des catégories et λ -calcul mise en lumière par D. Scott et la forme proprement constructive de la théorie des catégories mise en évidence par C. McLarty.

Les fonctions constituantes et la structure de catégorie

C'est donc à partir de ce rapprochement entre les opérations du mathématicien et la structure de catégorie proposée par S. Papert que Piaget va intégrer les outils et notions catégoriques à sa théorie générale de la connais-

24. Ainsi, pour Piaget :

« Papert a finalement montré comment le passage [des structures aux catégories] est caractérisé par un déplacement d'accent, d'abord centré sur les opérations « de la » mathématique en général pour se transférer ensuite sur celles « du » mathématicien comme tel en son activité effective. De même la logique combinatoire de Curry, comparée à celle des propositions, des relations, etc., marque un effort pour atteindre l'opération dans le détail même de ses démarches effectives par opposition aux mécanismes généraux. » ([195], 1238)

sance à partir de 1967. Il indique en effet, dans *Epistémologie et psychologie de la fonction* :

« Nous supposons donc qu'il existe des structures préopératoires de fonctions et il s'agit de leur trouver un modèle. Or, après avoir dégagé les grandes structures de groupes, de réseaux, etc., [...] les mathématiciens en sont venus à la recherche de systèmes plus élémentaires et plus généraux. [...] Ils ont tenté de serrer de près ce que S. Papert appelle si justement les opérations « du mathématicien » par opposition à celles « de la mathématique », ce qui revenait à souligner le rôle des actions limitées, mais effectives qui sont exécutées en n'importe quelle situation. [...] Ce qui nous intéresse, du point de vue génétique, est que certains de ces systèmes, de par leur nature élémentaire, sont susceptibles de signification triviale aussi bien que technique et peuvent par conséquent être utiles à la psychologie de l'intelligence ou à l'épistémologie génétique aussi bien qu'aux mathématiques.

Telle est la notion de « catégorie », élaborée entre autres par Mac Lane. » ([190], 17)

On voit ici quel est le rôle et la place de la théorie des catégories : elle constitue un « modèle », une formalisation du fonctionnement de l'intelligence en son stade préopératoire, et donc à plus forte raison préverbal. La théorie des catégories, en tant que « modèle » de l'action, apparaît ainsi au cœur de ce que Piaget appelait, en décrivant l'épistémologie génétique, l'« analyse formalisante ». La piste qu'explore ici Piaget est celle d'une structuration et d'une systémativité précoce de l'intelligence²⁵. Dès le niveau préopératoire apparaît ce que Piaget caractérise comme « une sorte de logique des fonctions », qu'il caractérise ainsi :

« Il y a dans ces conduites un début incontestable de logique, mais avec deux limitations essentielles : on n'y trouve pas encore de réversibilité (si l'on définit celle-ci par la possibilité d'inversion), et par conséquent pas de conservations quantitatives (un tout divisé ne garde pas la même somme, etc.). Il ne s'agit donc que d'une demi-logique (au sens propre, puisqu'il en manque la moitié, c'est-à-dire les inverses), mais qui marque néanmoins à son actif deux notions assez fondamentales. 1) Il y a d'abord celle de *fonction* ou application ordonnée (couples orientés), par exemple, si l'on tire progressivement un fil formé de deux segments à angle droit A et B, l'enfant comprend bien que le segment B augmente en fonction de la diminution de A, mais sans pour autant admettre que la longueur totale $A + B$ reste constante parce qu'il

25. Et comme le souligne Philip Davidson, « the systematic nature of children's competencies, rather than the inadequacies that appear in comparison with operational thought » [45].

ne juge des longueurs que de façon ordinale [...]. 2) Il y a ensuite la relation d'*identité* (c'est le même fil, bien qu'il ait changé de grandeur). Mais, si limitées soient-elles, ces fonctions et identités constituent déjà des structures sous la forme de « catégories très élémentaires »²⁶. » ([196], 56)

Les travaux expérimentaux menés par Piaget et ses collaborateurs dans *Epistémologie et psychologie de la fonction* les amènent à conclure que « le grand intérêt de cette logique primitive est [...] de demeurer essentiellement qualitative, avec une nette dominance de la compréhension sur l'extension, celle-ci n'étant point encore réglée, c'est-à-dire quantifiée. » ([190], 232). On voit ainsi apparaître un des apports essentiels de l'épistémologie génétique de Piaget : non seulement les concepts catégoriques permettent la formalisation de compétences intellectuelles en développement, mais en retour les spécificités de ces concepts, dans l'édifice général de la connaissance mathématique, s'en trouvent éclairées.

Dès lors, si jusqu'ici nous n'avons fait qu'esquisser la méthode épistémologique de Piaget, cela nous a permis de montrer en quoi cette épistémologie s'appuie à la fois sur une forme de structuralisme méthodologique et sur les concepts et outils de la théorie des catégories. Mais qu'en est-il des thèses philosophiques que Piaget est conduit à formuler en application de sa méthode génétique ? Une fois décrite la méthode, quels sont les résultats de son application ? En d'autres termes, quelles sont les thèses philosophiques que Piaget, du fait de sa méthode, sera amené à défendre ?

Nous souhaiterions montrer à présent que certaines thèses philosophiques importantes que Piaget va être conduit à défendre, en application de sa méthode génétique et critico-clinique, se rapprochent fortement des préconceptions épistémologiques que nous avons dégagées dans l'approche catégorique des concepts mathématiques dans les chapitres précédents. Pour ce faire,

26. Du point de vue du développement de l'intelligence, cette logique des fonctions prenant la forme de la théorie des catégories s'intègre à la genèse de la connaissance de la façon suivante :

« Cette « logique » préopératoire rend compte entre autres du primat si général, et jusqu'ici inexpliqué, des relations d'ordre entre 4 et 7 ans, et cela va de soi puisque la fonction est une dépendance ordonnée et résulte d'« applications » orientées. Et cette « logique », tout en aboutissant de façon positive à des structures formalisables, comporte, d'autre part, des lacunes et des limitations, dont l'intérêt psychologique est de faire comprendre les erreurs systématiques dues à ce primat de l'ordre : par exemple l'indifférenciation du « plus long » avec le « plus loin » ou les non-conservations, provoquées par des estimations ordinales (de niveaux, etc.), en opposition avec les évaluations extensives et métriques. En un sens psychologique très réel, cette logique préopératoire des fonctions constituantes ne représente donc, si l'on peut dire, que la première moitié de la logique opératoire, dont la réversibilité permettra de construire l'autre moitié en complétant les structures à sens unique du début. » ([190], 1)

nous avons fait le choix de rentrer plus avant dans les analyses épistémologiques de Piaget, concernant en particulier les notions de nombre et d'espace, afin de montrer comment ces différentes thèses s'articulent dans l'édifice épistémologique général de Piaget et s'inscrivent dans un dialogue avec d'autres philosophies des mathématiques. Si cela nous conduit à nous éloigner pour un temps de la théorie des catégories proprement dite, ce parcours nous permettra cependant de mettre en lumière des liens essentiels avec nos analyses des chapitres précédents.

7.2 Quelques points d'épistémologie

7.2.1 Qu'est-ce qu'un nombre ?

Pour Piaget, le problème central de la philosophie des mathématiques est la possibilité d'un accord entre une science rigoureusement déductive et l'expérience physique, tel qu'il se manifeste par exemple dans l'applicabilité de la géométrie riemannienne à la théorie de la relativité. Ce problème se pose d'autant plus que les mathématiques sont pour Piaget essentiellement constructives, au sens où :

« le monde des constructions géométriques et analytiques dépasse le monde réel [...]. De ce point de vue, le raisonnement mathématique apparaît comme une sorte de création [...]. Partant de quelques axiomes aussi peu nombreux et aussi pauvres que possibles de contenu, et de quelques définitions, le mathématicien élabore, au moyen d'opérations constructives, cet univers immense de relations que constituent les êtres dits abstraits. » ([193], 56)

Et pour rendre compte de cette capacité créatrice du raisonnement mathématiques, comme de son accord avec l'expérience, il convient de partir de la formation de l'espace et du nombre²⁷.

La nature psychologique du nombre

Piaget commence par montrer que le nombre correspond à une forme d'« expérience mentale » bien particulière : non pas une expérience mentale consistant à imaginer une réalité extérieure au sujet, mais une expérience mentale qui revient au contraire à imaginer les actions comme telles du sujet

27. Pour ce dernier, le problème est le suivant :

« La proposition « $1+1=2$ » est-elle une vérité, une convention ou un énoncé tautologique ? Ce rapport s'impose-t-il d'abord à nous en fonction d'expériences, et desquelles ? Ou est-il construit *a priori*, ou encore objet d'une intuition immédiate, et de quelles sorte ? Le nombre constitue-t-il une notion première, ou une synthèse d'opérations purement logiques ? » ([193], 57)

faisant varier les faits. En effet, que la transformation ait lieu matériellement ou « en pensée », il y a toujours une activité inhérente au sujet. Mais parmi ce second type d'expérience mentale, Piaget distingue deux formes d'imagination de l'action :

« distinguer encore entre l'imagination d'actions mal différenciées, insuffisamment coordonnées entre elles et obligées par conséquent de s'appuyer sur la réalité extérieure pour aboutir à la prévision de leur résultats (IIA) et l'imagination d'opérations proprement dites, c'est-à-dire (selon la définition que nous adopterons), d'actions devenues réversibles et suffisamment coordonnées pour donner lieu à des compositions susceptibles d'anticipations précises (IIB). » ([193], 60)

La genèse du nombre, pour Piaget, se manifeste dans le passage de IIA à IIB, expérimentalement déterminé vers la septième année de l'enfant environ²⁸. Mais comment expliquer cette évolution de IIA à IIB ? Est-ce seulement par l'habitude que se constitue une telle vérité nécessaire, comme le pensait déjà Hume ? Pour Piaget, ce passage s'explique au contraire par la transformations des actions en opérations, c'est-à-dire lorsque les actions fondamentales deviennent suffisamment coordonnées entre elles pour pouvoir être inversées,

« et c'est cette réversibilité qui entraîne le sentiment de la nécessité de la conservation des ensembles et de leurs équivalences. » ([193], 63)

Or cette réversibilité ne peut être obtenue dans la perception, dans l'imagination ou dans l'habitude, où les actions telles que réunir, séparer, ranger ou changer d'ordre, ne peuvent être inversées. Il y a donc ici un dépassement de la simple expérience mentale, et apparition d'un nouveau stade de développement intellectuel. Ce dépassement s'effectue par palier, les « stades » du développement intellectuel :

1. une action est toujours solidaire d'actions antérieures, jusqu'aux réflexes de base et aux réactions physiologiques du vivant dans son milieu. Toute action, par ailleurs, comporte deux dimensions :
 - toute action correspond d'abord à une schème d'assimilation, constitué par les actions antérieures, de la même façon qu'un jugement assimile l'objet à des concepts. C'est la part de l'action relative au

28. A cet âge en effet, l'expérience montre que l'enfant admet la conservation des quantités quelles que soient les modifications spatiales et perceptibles des ensembles considérés :

« Il fera même de cette équivalence durable et de cette conservation une sorte de vérité *a priori*, mais cet *a priori*, comme tous ceux que nous rencontrons encore, apparaît au terme et non pas au point de départ du processus génétique, et caractérise donc sa phase d'équilibre final et non point de formation. » ([193], 62)

sujet agissant ²⁹.

- toute action porte également en elle une accommodation à l'objet, lorsque le schéma de l'action est différencié par l'objet auquel il s'applique.

Ces deux pôles de l'action que sont l'assimilation et l'accommodation, sont indissociables, mais il peut exister entre ces deux tendances diverses formes d'équilibre. Au départ, cet équilibre est instable, car l'assimilation tend à la conservation, quand l'accommodation implique des modifications du sujet.

2. on a ensuite un équilibre plus large, mais imparfait encore, entre ces deux tendances, lorsque l'on passe de l'action sensori-motrice à l'action intériorisée constituée par la représentation intuitive, selon un jeu de significations et d'imitations mentales. C'est ici que Piaget se sépare de l'empirisme classique : l'expérience mentale n'est pas que réception d'une réalité extérieure (accommodation) mais également activité du sujet (assimilation).
3. vient ensuite l'opération concrète : l'équilibre est enfin atteint entre assimilation et accommodation, et les actions deviennent ainsi réversibles et coordonnées entre elles. Mais ces premières opérations restent liées à des manipulations effectives ou mentales.
4. les opérations deviennent ensuite abstraites ou formelles : elles ne portent plus sur des réalités manipulables, mais prennent la forme de jugements, qui décrivent les opérations et non plus les objets de celles-ci. Se constitue alors une logique des propositions.

Par ce processus génétique, supposant un équilibre entre accommodation (part de l'objet dans l'action) et assimilation (part du sujet), Piaget dépasse donc les conceptions strictement empiristes du nombre, faisant de celui-ci le résultat d'une abstraction à partir de la réalité extérieure. Mais soutenir une telle thèse, n'est-ce pas soutenir que le nombre serait issu d'une expérience interne ? L'objet d'expérience à partir duquel seraient tirés par abstraction les éléments du nombre serait alors le sujet lui-même. On voit ainsi apparaître l'idée que le nombre serait issu de l'intuition mnésique de l'ordre de succession de nos états de conscience, thèse d'une parenté génétique entre le temps et le nombre que l'on retrouve de Kant à Brouwer.

Cette thèse apparaît également dans l'ouvrage *Zählen und Messen* d'Hermann von Helmholtz : les états de conscience se succèdent dans le temps de

29. « L'assimilation mentale est donc l'incorporation des objets dans les schèmes de la conduite, ces schèmes n'étant autres que le canevas d'actions susceptibles d'être répétées activement. » ([191], 18), de telle sorte que « l'assimilation est, en effet, génératrice de schèmes et, par là, de structures. [...] L'assimilation est donc source de continuelles mises en relation et en correspondance, d'« applications », etc., et au plan de la représentation conceptuelle, elle aboutit à ces schèmes généraux qui sont les structures. Mais l'assimilation n'est pas une structure : elle n'est qu'un aspect fonctionnel des constructions structurales » ([196], 61)

manière irréversible, constituant d'eux-mêmes une série dont l'intuition interne est fournie par la mémoire ; il suffit alors de numéroter de façon conventionnelle les termes de cette série. Cette thèse revient donc à montrer que le nombre est ordinal avant d'être cardinal. Or Piaget s'appuie sur l'argumentation de L. Brunschvicg dans *Les étapes de la philosophie mathématique* pour montrer que dans le fini, l'ordinal et le cardinal sont indissociables et apparaissent simultanément, ce que confirment ses expériences chez l'enfant. La méthode « critico-clinique » permet également à Piaget de montrer que la mémoire n'est pas qu'un enregistrement automatique et spontanément ordonné : elle est une reconstruction active et opératoire ordonnée *a posteriori*. Par conséquent le nombre est bien le produit d'une activité du sujet, c'est-à-dire de la part assimilatrice de l'action, et d'une transformation des actions en opérations, et non le seul résultat d'une expérience intérieure.

Pour dépasser ces différentes thèses, Piaget propose de s'appuyer une fois encore sur la psychologie de l'action, qui permet de différencier l'action de l'expérience intérieure, celle-ci n'étant que la prise de conscience plus ou moins inadéquate de l'action elle-même³⁰.

L'abstraction réfléchissante

Pour faire émerger la série ordinale, il est en réalité nécessaire de distinguer deux formes d'abstraction, la seconde constituant un moteur essentiel de la psychogénèse et de l'épistémologie qu'elle implique :

1. l'abstraction à partir des qualités des objets³¹ ;
2. l'abstraction à partir de l'action³².

Exemple d'une telle *abstraction réfléchissante* : la succession pratique, dans une conduite sensori-motrice, n'est pas nécessairement consciente pour le sujet au niveau considéré. Abstraite de son contexte, la succession n'est plus vécue mais représentée, ce qui suppose la construction d'un schème appartenant à un niveau supérieur (au niveau de la pensée intuitive par exemple). Une nouvelle abstraction l'extrait de ses contextes représentatifs et en fait une opération proprement dite, pouvant par exemple être inversée. Cette forme d'abstraction n'est pas une simple généralisation, aboutissant par exemple à une classe, elle est également constructive car elle mène à l'élaboration d'une

30. « Ce n'est donc pas à l'expérience intérieure qu'il faut recourir et cela à aucun stade du développement, mais c'est à ce développement même des actions et notamment au passage graduel de l'action mentalisée aux opérations. » ([193], 70)

31. « la qualité abstraite est déjà reconnue dans l'objet, sous la même forme, avant son abstraction [...] imposée au sujet par la perception des objets eux-mêmes, et non pas d'un caractère ajouté aux objets par l'action qui porte sur elle » ([193], 72)

32. « abstraction d'un caractère mental qualifiant tel schème d'action et destinée à faire entrer ce caractère dans un schème plus complexe (et non en un simple concept descriptif de l'expérience intérieure [...] abstraction réfléchissante c'est-à-dire qui transforme la conduite même en la différenciant et par conséquent qui ajoute quelque chose à la qualité ainsi isolée par abstraction. » ([193], 72)

nouvelle action, de type supérieur à celle dont le caractère considéré a été abstrait. C'est une généralisation qui aboutit à une composition nouvelle, à un schème plus mobile et plus réversible : elle est donc « source d'actions nouvelles, dont l'aboutissement est constitué par les opérations elles-mêmes³³. » ([193], 73)

En d'autres termes, l'abstraction réfléchissante ajoute quelque chose à l'objet, elle est créatrice de nouveauté, au sens où elle nécessite l'organisation d'un plan supérieur de connaissance, où ce qui est abstrait entre structurellement en relation avec d'autres données, et modifie dans le même temps ce plan.

Qualité et quantité

Mais, si le nombre est obtenu par abstraction réfléchissante à partir de l'action, faut-il en conclure qu'il est un concept qualitatif, ou quantitatif, comme on le considère d'ordinaire ? Pour saisir la nature épistémologique du nombre, Piaget est amené à repenser la distinction entre qualité et quantité.

Selon Piaget, d'un point de vue génétique, qualité et quantité, sans être identiques, sont indissociables, solidaires et interdépendantes (on retrouve ici un point de vue somme toute assez général, indépendant du cadre génétique). Ainsi par exemple, au niveau sensori-moteur, réunir des objets semblables est une action introduisant une certaine qualification, mais la possibilité de réunir plus ou moins d'objets est une quantification de cette même action. Cette « dépendance mutuelle » entre qualité et quantité pour Piaget montre la parenté entre ces deux notions et le couple formé par la compréhension et l'extension d'un concept. Par ailleurs les rapports entre extensions peuvent prendre trois formes distinctes, « dont l'une caractérise la simple logique des classes et des relations, et les deux autres les mathématiques » ([193], 77).

Cette dernière remarque met en évidence un point essentiel de la philosophie des mathématiques de Piaget : celui-ci trace en effet une limite nette entre la logique, identifiée à une théorie des classes, et les mathématiques proprement dites. Sa position ne sera donc ni logiciste, ni réductionniste : il y a plus et autre chose dans les mathématiques qu'une théorie des classes, et c'est précisément tout l'enjeu de cette distinction entre qualité et quantité, retravaillée à travers une distinction entre trois formes de quantité :

33. Ainsi, si cette abstraction est réfléchissante c'est selon Piaget en deux sens :

1. « dans le sens d'un réfléchissement, c'est-à-dire de la projection physique d'un niveau antérieur sur un niveau supérieur. Pour abstraire les propriétés des actions propres ou des opérations propres antérieures, il faut les conceptualiser, les faire passer sur un plan supérieur. » ([201], 229)
2. « dans le sens, cette fois, mental et cognitif, en ce sens que ce qui est transféré sur le plan supérieur est, en même temps réorganisé. Etant sur un nouveau plan, cette nouveauté, tirée du passé, est mise en relation avec les autres éléments qui sont déjà sur le plan supérieur. Il y a donc réorganisation nécessaire. » ([201], 229)

1. la *quantité intensive* : « nous dirons qu'un rapport quantitatif est d'ordre intensif si l'on sait seulement que le tout est plus grand que la partie $B > A$ ou $C > B$, etc. mais sans pouvoir déterminer si l'une des parties, p. ex. A , est plus grande, plus petite ou égale par rapport à la partie complémentaire A' » ([193], 78)
2. la *quantité extensive*, quand on introduit « un rapport quantitatif nouveau entre les parties complémentaires d'un même tout [...]. C'est cette spécification des rapports d'extension entre les parties elle-mêmes qui marque le passage de la quantité intensive à la quantité extensive, c'est-à-dire de la logique des classes et des relations qualitatives à la mathématique proprement dite. » ([193], 79) Mais cette qualité extensive peut elle-même prendre deux formes : métrique (le domaine numérique et métrique) et non métrique (la géométrie « qualitative » des mathématiciens).
 - la *quantité extensive non métrique* : elle apparaît par exemple dans la quantification « presque tous » : si A contient « presque tous » les éléments de B on sait alors non seulement que $A < B$ mais également que $A > \text{non-}A$. Sur ce point, la démarche de Piaget semble originale, dans la mesure où elle ramène dans le champ de la quantité la dimension qualitative de certains champs mathématiques.
 - la *quantité numérique ou métrique*, « lorsqu'en un tout B , les parties complémentaires A et A' peuvent être réduites à une unité commune. » ([193], 80) Ainsi par exemple, dans le cas des ensembles finis, lorsque A et $\text{non-}A$ peuvent être mis en correspondance bi-univoque, on a $B = 2A$.

Dès lors on peut conclure que « en logique les qualités sont reliées par des rapports de quantité intensive tandis qu'en mathématiques ces rapports sont extensifs, soit non-métriques, soit métriques. » ([193], 80) et ces « distinctions correspondent à des paliers génétiques différents. » ([193], 81) Piaget lie donc la quantité intensive à la « logique des classes », et opère de cette façon, une « logicisation » de la quantité, à rebours des perspectives plus traditionnelles.

Ceci étant posé, il devient possible de caractériser les opérations élémentaires ayant pour objet des quantités intensives, c'est-à-dire les opérations relevant de la seule logique des classes. Ce sont des opérations de réunion et de séparation possédant les deux propriétés caractéristiques suivantes :

1. les compositions opératoires propres à la quantité intensive ne peuvent être que dichotomiques : les classes ne sont construites que par la présence ou l'absence d'une qualité donnée (« blanc » ou « non-blanc ») ;
2. les réunions de classes ne peuvent se faire que « de proche en proche ». Ainsi « en un système de classes botaniques ou zoologiques telles que $A + A' = B$ et $B + B' = C$ on ne peut réunir A et B' que sous la forme $A + B' = C - A'$, tandis que l'on peut additionner n'importe quel nombre à n'importe quel autre » ([193], 82).

Les opérations logiques, à quantifications intensives, compte tenu de ses propriétés limitantes, se composent selon des structures précises, centrales dans toute la psychologie de Piaget : les « groupements »³⁴.

Définition 83 *Un groupement est une structure vérifiant les cinq propriétés suivantes :*

1. *deux opérations de l'ensemble constituent par leur réunion une nouvelle opération de l'ensemble, « fondement de la transitivité propre aux inclusions » (p.82) ; par ex. : $(A + A' = B) + (B + B' = C) = (A + A' + B' = C)$;*
2. *chaque opération peut être inversée : si $A + A' = B$, alors $B - A' = A$ (c'est la réversibilité des opérations, s'opposant à l'irréversibilité des actions) ;*
3. *l'associativité des opérations ;*
4. *la composition d'une opération et de son inverse donne une opération identique générale ;*
5. *toute opération composée avec elle-même ou avec celles qui la comprennent laissent ces dernières inchangées : $A + A = A$ d'où $A + B = B$ (c'est la tautologie des logiciens).*

Contre le logicisme de Russell et Whitehead

Peut-on dès lors en déduire que le nombre entier peut être réduit à une théorie des classes ? Piaget prend pour cible sur ce point la théorie de Russell : deux classes, considérées en extension, engendrent une même « classe de classes », si les individus qui les composent peuvent être mis en correspondance bi-univoque, et cette classe de classes constitue un nombre cardinal, la construction de la classe de classes ne requérant que des opérations logiques. De même, un nombre ordinal est une classe de relations asymétriques « semblables ».

A cette conception du nombre, Piaget oppose la question suivante :

« lorsque Russell nous parle de « classe de classes équivalentes », l'opération de correspondance bi-univoque au moyen de laquelle il construit cette équivalence est-elle encore de nature simplement logique, c'est-à-dire, ne relève-t-elle que de la quantité intensive

34. D'un point de vue génétique, on peut alors caractériser précisément le développement de la logique en mathématiques :

« Le passage du « groupement » qui est de caractère simplement logique, à ceux des « groupes » qui relèvent de la quantification mathématique, marque donc une étape décisive dans la constitution de la quantité [...] le « groupement » constitue la première étape sur la voie qui conduit aux groupes et en particulier à celui des nombres entiers » ([193], 84).

qui intervient dans la formation des classes qualitativement définies, ou bien introduit-elle implicitement le nombre, non pas sous la forme de nombre isolé accolé à la classe considérée, mais dans la mesure où cette opération de mise en correspondance serait elle-même déjà de nature extensive et dépasserait *ipso facto* le domaine de la logique des classes qualifiées ? » ([193], 89)

Cela revient donc à se demander si la correspondance bi-univoque en tant qu'ensemble d'opérations caractérise un groupement ou un groupe. Pour répondre à ces questions Piaget distingue deux types de correspondance bi-univoque :

1. la correspondance qualifiée, logique, de caractère purement intensif, telle que les éléments se correspondent un à un en vertu de leurs qualités différencielles et non pas en tant qu'unités quelconques ; cette correspondance constitue un groupement d'opérations ;
2. la correspondance quelconque, qui n'est pas astreinte à déterminer les correspondances en fonction des ressemblances qualitatives mais telle qu'un élément quelconque de l'un des ensembles est associé à l'un des éléments également quelconque de l'autre ensemble ; c'est une opération extensive car elle élimine par abstraction les qualités propres aux éléments considérés et les transforme en unités numériques.

Par conséquent, les classes de classes ne reposant que sur la correspondance qualifiée ne sont pas des nombres : elles sont purement logiques. En utilisant la correspondance quelconque, Russell introduit au contraire l'unité mathématique dans sa réduction. Il sort donc par ce fait même selon Piaget du domaine de la logique. Cette objection valant également pour les nombres ordinaux obtenus à partir des classes de relations asymétriques.

Contre l'intuition rationnelle du nombre de Poincaré

Cela implique-t-il nécessairement, comme le soutient Poincaré, que le nombre entier repose sur une sorte d'intuition, à la fois opératoire et a priori, de la raison ? Cette idée se traduirait ainsi par la forme par excellence de raisonnement mathématique : le raisonnement par récurrence. Cela impliquerait donc une discontinuité radicale entre l'intuitif et la logique.

Or les résultats de psychologie expérimentale de Piaget semble réfuter une telle discontinuité³⁵. Il y aurait donc selon Piaget une « interdépendance » entre la logique et le numérique : « la notion de la conservation des ensembles eux-mêmes, en tant que totalités soit logiques soit numériques,

35. « toutes les notions de caractère extensif et métrique, telles que la mesure, les proportions, etc., en géométrie, et le nombre lui-même, ne se constituent sous leur forme opératoire que lorsqu'elles peuvent s'appuyer sur des « groupements » logique de caractère intensif [...] il n'existe pas d'abord un stade pré-numérique déjà caractérisé par des structures logiques, puis un stade numérique » ([193], 93)

n'apparaît nullement comme nécessaire au point de départ de la pensée intuitive et cette conservation doit donc être construite opératoirement. Or, c'est précisément dans cette construction que le « groupement » joue un rôle indispensable. » ([193], 94)

L'analyse génétique souligne donc la parenté forte entre la logique, comprise comme théorie des classes, et les mathématiques, qui ne doit pas masquer cependant leur différence de nature :

« le passage des configurations perceptives ou imagées, dépourvues de conservation, aux collections logico-arithmétiques douées de conservation nécessaire résulte de la réversibilité progressive des actions de réunir et de sérier, et aboutit simultanément aux « groupements » de l'emboîtement des classes et de la sériation des relations asymétriques, ainsi qu'au « groupe » caractérisant la suite des nombres entiers. » ([193], 94)

En conséquence de quoi on ne peut opposer radicalement la théorie des classes (la « logique ») à une intuition du nombre pur : « c'est donc au pouvoir opératoire en général de l'esprit, sous ses formes logiques comme arithmétiques, que s'attache le mystère. » ([193], 95)

En dernière analyse, la compréhension piagétienne du nombre, et de son rapport à la logique, repose sur sa théorie de la quantité (intensive ou extensive) et sur la distinction qu'il en déduit entre les groupements et les groupes. Si l'on pourrait voir une forme de circularité dans sa stratégie argumentative, tout repose finalement sur ses observations expérimentales et sa méthode « critico-clinique », qui lui permettent de justifier sa théorie de la quantité.

Qu'est-ce qu'un nombre, d'un point de vue génétique ? Le rôle des schèmes

Comment comprendre dès lors cette « interdépendance » entre les classes, les relations et les nombres ?

Il faut noter tout d'abord qu'il s'agit là de trois constructions, qui résultent d'un processus de développement intellectuel, de telle sorte que « les groupements logiques et les groupes numériques apparaissent comme la forme d'équilibre final d'un processus continu caractérisé par ses coordinations et sa réversibilité progressives » (p.96), équilibre atteint vers 7 ans environ. Ce processus prend pour point de départ les rapports perceptifs liés à l'activité motrice, intransitifs, irréversibles, non associatifs et même sans identité, puisqu'ils ne constituent même pas encore d'objets à proprement parler, mais seulement un flux irréversible de qualités et de quantités.

La première étape de la construction consiste à coordonner les actions entre elles sous forme de « schèmes », pratiques, sortes de « préconcepts sensori-moteurs, caractérisés par la possibilité de répéter la même action en

présence des mêmes objets ou de la généraliser en présence d'autres analogues » ([193], 97). La notion de schème, héritée de Kant et de Bergson, est centrale dans la psychologie de Piaget, et est ainsi présentée par Piaget :

« Nous appelons, pour notre part, « schème » d'action ou d'opération le produit de la reproduction active d'actions de tous genres, de la conduite sensori-motrice à l'opération intériorisée, et qu'il s'agisse d'actions simples (p. ex. le schème de la préhension) ou de coordinations entre actions (p. ex. le schème de la réunion ou de la sériation). Ainsi défini en fonction de l'activité du sujet, le rôle du « schème » est essentiellement d'assurer l'incorporation ou l'assimilation de nouveaux objets à l'action elle-même ; et celle-ci, par sa répétition en des conditions renouvelées et généralisées, acquiert de ce seul fait un caractère schématique. S'appliquant nécessairement à une matière donnée, le schème est en outre susceptible d'accommodation. » ([193], 252)

On pourra ainsi voir un schème non seulement comme une structure, mais aussi comme un organe réalisant des transformations matérielles et logico-mathématiques finalisées. Un exemple de schème souvent pris par Piaget, dans la classe des conduites sensori-motrices, est le schème de la succion, compris comme totalité psycho-biologique organisée qui permet à un enfant de s'alimenter physiquement au début de sa vie. Il y a dans ce schème, au delà de son incorporation biologique, aussi bien des savoir-faire que des savoirs, tant une dimension motivationnelle et affective, qu'une dimension cognitive.

Il nous semblerait possible ici d'établir un lien avec les développements mathématiques des chapitres précédents : dans la mesure en effet où le schème est présenté par Piaget comme une structure opératoire et une coordination générale d'actions, nous pourrions le rapprocher des concepts catégoriques tels que les théories algébriques de Lawvere ou les esquisses d'Ehresmann. Ainsi par exemple, il serait possible de voir le diagramme d'une esquisse comme le « modèle » d'un schème au sens de Piaget. Un tel rapprochement nécessiterait cependant d'être plus précisément mis à l'épreuve de la théorie psychogénétique de Piaget et de sa formalisation..

Quoi qu'il en soit, c'est par ces schèmes sensori-moteurs que se constituent les objets « solidifiés », et les rapports de ressemblance, de différence et de quantification³⁶. Les mêmes actions s'intériorisent ensuite en concepts intuitifs, avec la représentation mentale et imagée, et quelques années sont encore nécessaires entre ce début de mentalisation des actions et l'arrivée au niveau des opérations concrètes, une fois les actions devenues réversibles³⁷.

36. On voit ici apparaître le fait que pour Piaget il ne peut y avoir d'action absolument singulière, qui ne pourrait être répétée. Cela tient au fait que toute action porte en elle, on l'a vu, un potentiel d'accommodation et d'assimilation.

37. « la pensée intuitive qui marque le début de la représentation n'est donc pas autre chose que l'évocation par le mot et l'image des diverses actions réelles, mais sous leur

Dès lors la réunion et la séparation mentale des objets, devenues opérations réversibles et composables entre elles, engendrent de façon nécessairement interdépendante les classes, les relations asymétriques et les nombres : les groupements fondés sur la ressemblance engendrant la théorie des classes, les différences engendrant le groupement additif de la sériation des relations asymétriques. Ces groupements ne pouvant fonctionner simultanément avec les mêmes objets, sont néanmoins complémentaires (ressemblance/différence). Le nombre résulte enfin de la transformation des éléments en unités³⁸, de sorte que « le nombre n'est pas *déduit* des groupements mais *construit* par une synthèse en un sens quasi hégélien³⁹ ».

« En conclusion, le nombre ne se réduit pas aux êtres logiques, considérés en tant que groupements isolables, puisqu'il leur est complémentaire et exprime leur fusion opératoire en une seule totalité non réalisable sur le plan qualitatif. Les êtres logiques ne se réduisent pas non plus au nombre, puisqu'ils résultent de la dissociation de ses composantes cardinale (emboîtement) et ordinale (sériation), avec recours aux qualités différentielles. » ([193], 103)

Conclusion : ni empirisme, ni apriorisme

Piaget justifie sa construction du nombre par la complexité des rapports, dans l'élaboration de la connaissance, entre le sujet et l'objet. La question qui se posait, et qui justifiait selon lui le recours à la psychologie expérimentale, était en réalité double : d'une part, l'expérience est-elle nécessaire pour que s'organisent les opérations de classes, de sériations et de nombres ? D'autre part, quel est le rôle de l'objet dans cette expérience éventuelle ?

La réponse à la première question est clairement positive :

« il existe donc une phase intuitive et préopératoire de la pensée, au cours de laquelle l'expérience est nécessaire à la découverte et à la vérification des vérités arithmétiques et une phase opératoire

forme encore quasi-matérielles et par conséquent irréversible. Les opérations, ce sont au contraire les mêmes actions, mais coordonnées entre elles par la pensée. » ([193], 98)

38. « fondre en un seul tout le principe de la sériation des différences et celui de la hiérarchisation des équivalences, puisqu'alors les éléments A, A', B', etc. deviennent simultanément substituables sans restriction et sériables sans restriction, c'est-à-dire qu'ils sont transformés un unités à la fois équivalentes et distinctes [...]. Le groupe additif des nombres entier est donc le produit d'une fusion opératoire entre les groupements qualitatifs des classes et des relations asymétriques, mais par abstraction des qualités différentielles sur lesquelles sont fondés ces derniers [...] classer et sérier à la fois, c'est précisément dénombrer » ([193], 102).

39. C'est pour cette même raison, selon Piaget et comme l'avait montré selon lui L. Brunschvicg, que les nombres cardinaux et ordinaux coïncident nécessairement dans le fini.

à partir de laquelle la déduction commence à se suffire à elle-même » ([193], 132)

Mais – et c’est là le point important de la position de Piaget, qui lui permet de prendre ses distances avec l’empirisme – le fait que l’expérience soit psychologiquement indispensable à la construction du nombre n’implique pas que celui-ci soit extrait des objets. En effet, le dénombrement ne suppose qu’un objet quelconque, abstraction faite de ses qualités particulières : l’objet n’est donc qu’un « support de l’action », un « indicateur » : « Quoi qu’expérimental en sa source intuitive, le nombre est donc ajouté aux objets et non point extrait d’eux. » ([193], 133)

Sa solution n’est cependant pas non plus celle d’un apriorisme kantien traditionnel :

« Dire que le nombre dérive des opérations ou des actions exercées par le sujet sur les objets sans émaner de ceux-ci, c’est permettre de concevoir les différents types de nombres comme le résultat de coordinations progressives en évitant de se donner d’avance le nombre tout fait dans l’esprit ou dans les choses. Bien que la source des coordinations soit à chercher dans l’activité du sujet, les diverses formes de nombres ne sont pas préformées en ce dernier, mais constituent les états finaux et nécessaire d’équilibre de coordinations débutant dès l’organisation des schèmes sensori-moteurs et perceptifs [...] En un tel cas, l’adéquation du nombre au réel ne serait à expliquer [que] par le fait que les mécanismes constructifs présidant au développement de l’esprit plongent leurs racines dans l’organisation vitale et par conséquent dans la réalité physique elle-même » ([193], 135).

Piaget préfère donc caractériser sa solution comme celle d’un « a priori fonctionnel (fonctionnel et non pas structural, c’est-à-dire ne contenant aucune structure a priori⁴⁰ » ([193], 141). Cela tient au processus même d’élaboration des structures mentales, du monde physico-biologique aux opérations formelles⁴¹.

40. Cette conception piagétienne de l’a priori se retrouvait déjà dans les critiques que Piaget faisait de Poincaré :

« il n’est évidemment plus permis de considérer la structure de groupe comme a priori au double sens d’une condition préalable et d’une condition nécessaire de l’organisation spatiale des déplacements du sujet. En effet, le groupe des déplacements ne se construit, au niveau sensori-moteur, qu’au cours des quatorze ou dix-huit premiers mois [...]. Ce n’est pas dire que la notion d’a priori soit à rejeter pour autant, mais on n’en peut alors retenir que le caractère de nécessité, conçue ainsi comme graduelle, par opposition au caractère de condition préalable [...] : l’a priori de Poincaré, dans l’exemple de la structure de « groupe » comme dans celui du nombre, se réduit ainsi à la notion d’équilibre dont la nécessité s’impose progressivement. » ([195], 77)

41. « en effet, les schèmes sensori-moteurs nés de la répétition active des conduites et

7.2.2 Qu'est-ce que l'espace ?

Parler d'espace, pour Piaget, revient à parler d'une notion qui recouvre plusieurs plans : l'espace perceptif, l'espace sensori-moteur, l'espace de l'intuition imagée, l'espace construit déductivement. Or sur chacun de ces plans pris isolément, différentes approches épistémologiques sont possibles, reprenant les épistémologies possibles vues précédemment. Ainsi par exemple, pour ce qui est de l'espace perceptif et sensori-moteur, on obtient le tableau suivant :

	épistémologie non-génétique	épistémologie génétique
fondée sur l'objet	« nativisme » réaliste	Empirisme
fondée sur le sujet	Apriorisme	Conventionnalisme
non dualiste	phénoménologie de la « Forme »	Relativisme de l'action

Pour ce qui est de l'espace construit déductivement, Piaget propose la classification suivante :

	épistémologie non-génétique	épistémologie génétique
fondée sur l'objet	réalisme des Grecs/Russell	Gonseth et le schématisme
fondée sur le sujet	Hilbert	Conventionnalisme de Poincaré
non dualiste	Approches phénoménologiques	?

constituant, sur le terrain de la perception et de l'habitude motrice, les plus simples assimilations mentales du réel par le sujet, sont eux-mêmes issus d'une première abstraction à partir des cycles réflexes ou organiques, laquelle consiste à leur emprunter leur capacité de répétition et d'extension généralisatrice. Les schèmes sensori-moteurs aboutissent pour leur part à une sorte de logique de l'action, dont la cohérence particulière consiste p. ex. à ne pas accomplir, en même temps que lui, un acte contraire au but poursuivi par un autre [...]. Or la construction de cette logique sensori-motrice repose sur les coordinations précédentes par abstraction de leur pouvoir de mise en succession ou de classement pratiques [...]. La pensée intuitive emprunte ensuite aux schèmes sensori-moteurs, grâce à de nouvelles abstractions, leur pouvoir d'assimiler le réel selon le double mécanisme de la succession et du classement, mais en traduisant ceux-ci sous la forme de représentations » ([193], 141)

L'espace perceptif

Piaget critique tout à la fois le réalisme nativiste et l'empirisme en reprenant à Helmholtz l'idée que la sensation ne saurait être une copie de l'extériorité : la sensation serait bien plutôt un signe, mais de telle sorte que la chose signifiée serait assimilée à un schème d'action quelconque. Il y aurait donc, comme pour le nombre, une activité à la source de la construction de l'espace : « elle consiste en mouvements dont les coordinations, inconscientes et automatiques d'abord, puis intentionnelles, s'appuient certes sur des « signes » constitués par le donné sensible, mais de façon à incorporer les objets signifiés dans un réseau toujours plus complexe, permettant de les suivre et de les retrouver » ([193], 163). C'est ainsi précisément l'action qui va permettre de transformer, chez le nouveau-né, les divers champs perceptifs en un espace unifié :

« les tableaux visuels qui l'entourent ne constituent en rien un espace avant que les figures perçues aient été transformées en objets d'actions et qu'il se soit constitué entre ces objets un système de coordinations pratiques. » ([193], 164)

A la psychologie de la Forme, Piaget accorde l'idée que toute perception est un système de rapports, aucun élément n'étant jamais perçu à l'état isolé. Il critique cependant l'interprétation de ce fait donnée par cette théorie, et en tire ses propres conclusions. En effet, compte tenu des déformations que subissent les grandeurs dans la perception, celle-ci ne saurait satisfaire les axiomes de la structure de groupement propre aux opérations de la logique qualitative : les rapports perceptifs ne sont pas réversibles ni associatifs. La connaissance perceptive pour Piaget peut donc être considérée « foncièrement irrationnelle en ses compositions les plus élémentaires » ([193], 177). Or l'étude du développement de la perception, à différents âges, montre selon Piaget que « la perception s'engage quelque peu dans la direction de la réversibilité opératoire », à mesure que progresse la décentration et « l'activité perceptive » (analyses, comparaisons, transpositions, anticipations, etc.) définie comme « l'action des perceptions successives les unes sur les autres » ([193], 179). Or c'est précisément à travers cette activité perceptive que s'opère la structuration progressive de l'espace, cette progressivité révèle, expérimentalement, les propriétés diverses de l'espace perceptif : au niveau le plus précoce et le plus élémentaire de l'activité perceptive, où se manifeste déjà l'interaction indissociable entre le sujet et les objets, et non une pure passivité du sujet par rapport aux objets, l'espace perceptif présente en effet une structure topologique ; les progrès de la décentration munissent ensuite l'espace d'une structure projective ; avant que les rapports entre grandeurs et entre formes ne caractérisent un espace euclidien⁴². Ainsi,

42. Afin de ne pas alourdir notre propos, nous n'entrerons pas dans l'analyse détaillée de cette progression de l'espace topologique à l'espace euclidien, ni des expérimentations mises en place par Piaget pour en montrer la validité.

« on comprend alors la vraie signification de l'espace perceptif, au sujet duquel le sens commun est victime de tant d'illusions, parfois partagées par certains mathématiciens : loin d'être plus réel que l'espace intellectuel, l'espace sensible ne repose que sur des indices de la réalité et non pas sur son expression immédiate, et ces indices ne se traduisent en connaissance – même en connaissance simplement perceptive, – que par l'intermédiaire d'une activité sensori-motrice dépassant d'emblée le sensible et recourant à la motricité, c'est-à-dire s'engageant dans une direction qui est précisément celle de l'intelligence elle-même. » ([193], 184)

L'espace sensori-moteur : l'épistémologie de Poincaré

L'espace sensori-moteur, constitué par les déplacements et les manipulations du sujet, vient s'insérer entre l'espace perceptif, qu'il généralise, et l'espace représentatif. L'espace perceptif appelait en effet son dépassement, à travers par exemple la construction des constances perceptives, qui aboutissent entre autres au schème de l'objet permanent, « produit le plus authentique d'une intelligence sensori-motrice, antérieure au langage et aux représentations » ([193], 187). Or, dans la mesure où cette intelligence sensori-motrice rend possible l'unification des champs perceptifs dans un espace d'ensemble, milieu commun à tous les phénomènes perçus, il devient possible selon Piaget de considérer que l'espace est une « forme » du comportement, et non de la sensibilité.

Pour Piaget, c'est à Henri Poincaré qu'il revient d'avoir mis en évidence ce fait que ni les sens ni l'expérience ne peuvent constituer un espace sans un schème qui les oriente. Il y a en effet chez Poincaré une forme d'apriorisme⁴³ : c'est en effet à l'organisation sensori-motrice des déplacements que Poincaré fait remonter la découverte mentale de l'espace, en tant que système des changements de position⁴⁴. Toutefois, Piaget s'écarte de Poincaré sur différents points. D'une part, pour Piaget, il n'y a pas de préexistence de la structure de groupe, qui serait « au point de départ des comportements sensori-moteurs, alors qu'elle en constitue seulement le point d'arrivée et la forme d'équilibre finale⁴⁵ » ([193], 192). D'autre part, ce n'est pas par convention ou pour des questions de « commodité » que notre espace pratique est considéré comme euclidien : au contraire, pour Piaget, « les coordinations communes à toutes

43. En particulier lorsqu'il affirme, dans *La Science et l'Hypothèse*, que « le concept général de groupe préexiste dans notre esprit, au moins en puissance »

44. « Pour un être complètement immobile, il n'y aurait ni espace, ni géométrie » (*La Valeur de la science*)

45. « la structure de groupe, au lieu d'être tirée de l'expérience, par une abstraction simple à partir de l'objet, est découverte au cours des expériences, c'est-à-dire des actions exercées sur l'objet, mais par abstraction constructive à partir des coordinations mêmes de l'action. » ([193], 194)

ces actions diverses suffisent à engendrer une métrique générale [...]. L'échelle de notre action nous suggère la métrique euclidienne. »([193], 197)

L'espace représentatif : l'intuitif et le formel

L'analyse du processus de construction de l'espace représentatif, dans [193], est l'occasion pour Piaget de préciser et d'explicitier le rôle de l'intuition dans la connaissance mathématique. Il souligne ainsi tout d'abord le caractère flou et approximatif de cette notion d'« intuitif », telle que les mathématiciens l'utilisent⁴⁶. Or Piaget propose pour sa part de conserver le terme d'« intuitif » seulement pour le stade représentatif du développement intellectuel, « caractérisé par la représentation imagée et statique, apparaissant au niveau préopérateur compris entre 2 et 7 ans et subsistant jusque chez l'adulte »([193], 202).

En outre, Piaget insiste sur le fait que ce niveau « intuitif » du développement de l'intelligence n'est pas propre à l'espace : « les mêmes niveaux génétiques dits « intuitifs », compris entre l'espace sensori-moteur et l'espace axiomatique, correspondent à des formes logico-arithmétiques successives d'intuitions imagées, puis d'opérations »([193], 202). Il est ainsi possible d'envisager un sens de l'intuition dans le domaine ensembliste et mathématique, parallèle à l'intuition de l'espace représentatif⁴⁷

Il y a donc bien la place, dans la connaissance mathématique, selon Piaget, pour une forme précise d'intuition, mais celle-ci n'est qu'un « ensemble de termes de passage, un complexe indifférencié initial, dont la différenciation conduit [...] à la composition réflexive des structures formelles »([193], 205). Mais ce passage de l'intuitif au formel, de l'espace représentatif à l'espace géométrique axiomatisé ne se fait pas de façon directe, mais nécessite au contraire le passage par les paliers du développement de l'intelligence dégagés par Piaget : celui de l'intuition imagée, celui des opérations concrètes et enfin celui des opérations formelles, que nous ne décrirons pas ici en détails. Il convient cependant de s'attarder là encore sur le point de départ de ce processus : l'intuition imagée, dans la mesure où « l'espace en tant que milieu unifié, commun à tous les phénomènes, est une conquête de l'intelligence

46. « on croit dire quelque chose en opposant les notions d'intuitif et d'axiomatique, alors que cette dichotomie revient simplement à distinguer les notions d'axiomatique et de non-axiomatique, et que cette seconde notion recouvre en fait une série de réalités génétiquement distinctes et souvent même qualitativement opposées. »([193], 201)

47. « Ces opérations concrètes, véritables racines de l'espace dit « intuitif » par les mathématiciens sont isomorphes, et de développement parallèle (avec correspondance synchrone) aux opérations logico-arithmétiques [...]. En parallèle exact avec l'intuition spatiale préopératoire (niveau 1) il existe une intuition prélogique et prénumérique, avant que se constituent les opérations logico-arithmétiques. [...] celles-ci sont précédées, d'abord (nous l'avons vu) par les schèmes sensori-moteurs tenant lieu de concepts pratiques ou de quantités motrices, puis par de véritables « intuitions » préopératoires, au sens même où l'on parle de l'intuition spatiale imagée [...] Toute la pensée prélogique et prénumérique est « intuitive » sur le plan logico-arithmétique comme sur le plan spatial »([193], 203-204).

représentative » ([193], 206) :

« Qu'est-ce d'abord qu'une image mentale ? C'est une imitation intériorisée, servant de simple signifiant symbolique aux actions portant sur les objets ou à ceux-ci en tant qu'objectifs des actions [...] imaginer une action consiste à pouvoir la reproduire, non pas seulement parce que cette reproduction s'appuiera sur l'évocation imagée, mais parce que cette évocation à elle seule est déjà un début de reproduction motrice [...] l'imitation étant elle-même, en ses racines, le prolongement de l'accommodation des schèmes sensori-moteurs. [...] Cela dit, il est incontestable que l'intuition spatiale élémentaire s'appuie sur des images, comme toute pensée intuitive et préopératoire, mais il est non moins clair que ces images ne signifient rien à elles seules, sinon en se référant à des actions possibles. [...] l'image ne précède pas l'action, mais l'action réelle, une fois ébauchée, peut se prolonger en image. » ([193], 206-207)

Ce lien essentiel entre l'image mentale et l'action conduit Piaget, par ailleurs, à introduire l'idée d'une autre forme d'intuition, en particulier en discutant les analyses de Bergson. Piaget lui-même admet partager avec ce dernier deux idées fondamentales : « que l'intelligence est liée à l'action et que la connaissance authentique est une construction continue, créatrice de structures nouvelles. » ([195], 30)

Là où Piaget prend cependant ses distances avec Bergson, c'est dans sa critique de l'intelligence elle-même, qui selon Piaget manque son objet :

« nous pouvons soutenir que la critique bergsonienne subsiste intégralement et présente un intérêt décisif, tant par sa cohérence que par sa lucidité aiguë, mais qu'elle ne s'adresse point au noyau formateur de l'intelligence rationnelle et qu'elle vise essentiellement l'autre aspect de la connaissance intellectuelle, aspect inséparable du premier mais profondément distinct en ses destinées génétiques et que nous appellerons la « représentation imagée ». En un mot, Bergson a réussi pleinement une critique de l'image, mais il a manqué celle de l'opération comme telle » ([195], 30)

Ainsi la critique que Bergson mène de l'intelligence, et qui rendra nécessaire l'intervention d'une forme d'intuition, repose pour Piaget sur une méconnaissance de l'intelligence elle-même, qui pour lui s'inscrit dans le prolongement des comportements instinctifs et non pas en opposition à ceux-ci, par l'intermédiaire des actions transformées en opérations⁴⁸.

48. « il existe une logique inhérente à la coordinations des actions, sans que cette logique dépende des images correspondant aux objets sur lesquels s'exercent ces actions : si rudimentaire qu'elle soit, cette logique des coordinations d'actions comporte [...] toute une structuration qui prolonge bien davantage la morphogenèse vitale (par l'intermédiaire des coordinations nerveuses) qu'elle ne résulte du milieu matériel ambiant. » ([195], 31)

On voit ici que la confrontation avec la théorie bergsonienne de la connaissance est l'occasion pour Piaget de clarifier les deux aspects essentiels de l'intelligence – distinction inaperçue par Bergson – entre l'opérateur et le représentatif, et de mettre en évidence le caractère secondaire, voire inadéquat de la représentation intellectuelle, c'est-à-dire finalement de la pensée par rapport à l'intelligence. Cette distinction implique tout d'abord une clarification de ce qu'est une opération :

« Une opération est avant tout un acte, qui ne « représente » pas mais effectue réellement une « transformation », ceci en opposition avec les deux états, initial et final, dont la transformation modifie le premier pour construire le second. Que cette transformation soit effectuée matériellement ou symboliquement, il s'agit dans les deux cas d'une transformation authentique. Par exemple transformer un arc en une droite ou additionner deux nombres en un nouveau nombre » ([195], 31).

De cet aspect « opératoire » de la connaissance, Piaget distingue donc un aspect « figuratif », couvrant les perceptions, l'imitation, les images ou la représentation imagée en général et « qui porte sur les états par opposition aux transformations ; ou qui cherche à représenter les transformations, mais n'y parvient qu'en termes d'états et selon un symbolisme toujours inadéquat » ([195], 31). Ainsi aucun symbolisme, même mathématique, ne peut prétendre selon Piaget décrire adéquatement le travail de l'intelligence, et sur ce point Piaget retrouve d'une certaine façon Bergson, mais en le nuancant : l'image et le langage, c'est-à-dire la pensée, opèrent toujours en décalage par rapport à l'intelligence⁴⁹.

Ainsi, à l'opposition bergsonienne de l'intelligence, appuyée sur le langage, et de l'intuition, Piaget substitue une distinction entre deux formes d'intuition : l'intuition imagée ou représentative, que l'on voit apparaître dans le développement mental de l'enfant au stade préopératoire, et une intuition opératoire, sans contenu représentatif, comprise comme saisie directe de l'acte pur, de la transformation en elle-même⁵⁰. Ainsi, au symbolisme for-

49. « Il est, en effet, patent que l'opération comme telle demeure irreprésentable en tant qu'acte pur (nous appelons actes purs un système d'activités qui, tout en débutant par des applications aux objets, finissent par pouvoir s'en détacher comme c'est le cas des mathématiques « pures ») : la représentation imagée commence par n'en saisir que les résultats ou les états initiaux et finaux, pour essayer ensuite d'en atteindre le processus. Mais elle n'y réussit jamais complètement et procède précisément par cette « méthode cinématographique » si finement décrite par Bergson, étant donc entendu que cette cinématographie n'est point la méthode de l'intelligence elle-même en son noyau opératoire, mais seulement celle de la représentation imagée en son symbolisme toujours inadéquat. » ([195], 33)

50. « Il est alors évident que les opérations comme telles, nœud vital du travail intellectuel, présentent précisément l'ensemble des caractères dont Bergson voulait attribuer le privilège à une intuition « supra » ou « ultra-intellectuelle » : la capacité de construction créatrice, l'accès aux transformations par opposition aux états, la mobilité, la continuité, etc., et même une solidarité avec les mécanismes formateurs de la vie organique. » ([195],

mel nécessairement inadéquat répondrait une forme d'intuition du contenu sémantique des théories formelles. Ces analyses nous permettent ainsi de donner un sens nouveau à la notion d'intuition, que J. Kennedy opposait à la caractérisation formelle des concepts [121] : s'il y a décalage entre les systèmes formels et les concepts mathématiques, ce décalage révèle la nécessité d'une intuition que Piaget nous permet de comprendre comme intuition de l'acte pur.

Par ailleurs, cela implique chez Piaget une certaine position accordée au langage symbolique : « le résultat essentiel de l'analyse génétique des structures logico-mathématiques est précisément que leurs racines sont antérieures au langage et sont situées dans la coordination même des actions. [...] Ce sont ces actions, dont la coordinations constitue déjà une sorte de logique, qui sont au point de départ de ce que deviendront les *opérations* de la pensée. » ([195], 96). L'épistémologie génétique va donc s'attacher à « remonter de la logique linguistique (si l'on peut s'exprimer ainsi) à une logique plus profonde qui est celle des coordinations des actions⁵¹. » ([195], 96)

Ces différentes remarques de Piaget nous semblent faire clairement écho à ce que nous ont appris, dans le troisième chapitre, les applications des théories de Lawvere à l'informatique théorique, en particulier dans le cadre de la sémantique des langages de programmation, où le *faire* nous est apparu plus central que le *dire*.

En conséquence,

« il n'existe pour une structure donnée (par exemple la suite des nombres entiers ou « naturels ») qu'une seule reconstruction génétique adéquate, dans la mesure où elle atteint les lois de développement générales, donc communes à tous les individus, tandis qu'il existe de multiples reconstructions axiomatiques ou formalisations également légitimes, puisque le choix des axiomes est libre pourvu qu'ils aboutissent aux conséquences voulues. » ([195], 121)

On semble ainsi retrouver l'objectif affiché par les catégoriciens (et examiné dans le deuxième chapitre) de la mise en évidence d'un invariant des présentations, revenant à ce qui est intrinsèque au concept structurel.

32)

51. Cette place accordée au langage est liée à la méthode même de l'épistémologie génétique :

« l'unique problème psychologique intéressant l'épistémologie à propos d'une structure donnée est, non pas « que pense le sujet de cette structure en sa conscience ? » mais bien « comment le sujet a-t-il fait pour l'acquérir ? » [...] Les seules données utiles à l'épistémologie se rapportent donc à ce que peut faire le sujet et non pas à ce dont il prend conscience ou, familièrement dit, à ce qu'il « raconte ». » ([195], 119)

Ces remarques de Piaget rendent nécessaire la clarification de la notion de « signification » chez Piaget, notion qui, bien qu'essentielle, nous semble dépasser le cadre du présent travail de recherche.

L'espace axiomatisé : d'Euclide à Hilbert

Entre le niveau de l'espace de la représentation imagée, sur lequel viennent ensuite agir les opérations concrètes, et l'espace axiomatiquement formalisé de Hilbert s'intercale selon Piaget la géométrie déductive et formelle d'Euclide, palier qui se caractérise par l'élaboration des « opérations formelles ». En effet, alors que les opérations concrètes portent directement sur les objets manipulables ou sur leurs symboles représentatifs, les opérations formelles portent sur des propositions, et non plus sur des objets ; mais l'analyse génétique met en évidence une continuité entre ces deux niveaux, qui tient au fait que « les propositions entrant à titre de composantes dans le mécanisme déductif des raisonnements sont choisies en fonction de leur signification concrète, c'est-à-dire de leur contenu lui-même, rapporté à des figures réelles ou possibles. » ([193], 224)

Vers 12 ans, l'enfant selon Piaget devient capable de traduire les opérations concrètes sous la forme de propositions. Mais progressivement, ces propositions, sur lesquelles vont porter les opérations formelles, se détachent de l'action. S'élabore ainsi une logique des propositions, à partir de la « logique » des opérations concrètes⁵².

Mais comment expliquer génétiquement le passage de la géométrie d'Euclide à la géométrie formalisée de Hilbert ? Car dans son fonctionnement même, selon Piaget, le raisonnement humain n'a pas été modifié par l'avènement de la logique propositionnelle formelle. Le passage de la géométrie euclidienne, palier des opérations formelles, à la géométrie de Hilbert, serait avant tout un changement d'orientation, de direction, de la démarche formelle⁵³. Piaget souligne par ailleurs que ce mouvement réflexif de l'axiomatisation formelle n'aboutit pas à des énoncés arbitraires et « artificiels », mais se rapproche au contraire de ce qui est psychologiquement primitif⁵⁴.

52. « la logique des propositions diffère de celle des opérations concrètes par le fait qu'elle est doublement opératoire, consistant ainsi en opérations au second degré ou opérations effectuées sur d'autres opérations. En effet : 1° toute proposition est en son contenu une opération (intrapositionnelle), mais énoncée verbalement au lieu d'être exécutée en action [...] 2° les propositions qui sont ainsi déjà opératoires en leurs contenus respectifs sont ensuite combinées entre elles selon un ensemble d'opérations interpropositionnelles » ([193], 225).

53. « Remontant ainsi à la source, par analyse réflexive systématique, elle est conduite à poser ses axiomes, non plus en vertu de leur évidence intrinsèque – l'évidence étant le dernier résidu intuitif hérité des niveaux de pensée précédents – mais dans la mesure où ils peuvent servir de support à une construction déductive telle qu'aucun lien n'échappe plus à la formulation. La pensée axiomatique ne constitue donc pas, par elle-même, un nouveau système d'opérations intellectuelles : elle recueille tel quel l'héritage des opérations formelles, mais les applique dans une autre direction, orientée vers l'origine et non plus dans le sens de la seule construction. » ([193], 227)

54. « en ce qui concerne la géométrie elle-même, les axiomes d'Euclide expriment des vérités logiques ou métriques acquises au niveau seulement des opérations concrètes et sans signification générale dans les domaines antérieurs, tandis que l'axiomatique véritable des modernes atteint les racines psychologiques de l'espace, en particulier sur le terrain

Se révèle ainsi selon Piaget une convergence relative entre l'analyse axiomatique et l'analyse génétique et cette convergence met en réalité en évidence la continuité génétique qui unit les différents niveaux de la connaissance, depuis la connaissance perceptive, puis sensori-motrice, jusqu'aux opérations concrètes puis formelles, et enfin jusqu'au schéma axiomatique, chaque passage d'un niveau à l'autre étant rendu possible par le mécanisme de l'abstraction réfléchissante, processus à la fois constructif et réflexif⁵⁵.

Dès lors, la nécessité inhérente aux règles de la logique propositionnelle formelle s'enracine dans la coordinations des actions du sujet : « l'existence d'une logique nécessaire, dont il est à jamais impossible de sortir, bien que sa structuration puisse se poursuivre et donner lieu à de nouveaux problèmes, est donc liée à une réflexion sur les conditions mêmes des activités du sujet » ([193], 236).

L'espace et le nombre

Un des points saillants de l'analyse de la construction de l'espace par Piaget est le parallélisme étroit entre la construction de ce dernier et celle du nombre : « cette construction correspond pas à pas à celle des opérations logico-arithmétiques, à cette seule différence près qu'il s'agit d'opérations infra-logiques portant sur l'élaboration de l'objet lui-même » (p.145). De ce point de vue, le rapport entre le nombre et l'espace peut être vu, selon Piaget et à la suite des analyses de Beno Eckmann dans *Topologie und Algebra*, comme une complémentarité, « au sens de la microphysique, c'est-à-dire précisément [une] dualité de points de vue, eu égard à deux aspects également nécessaires de la même réalité » ([193], 144), à l'instar de la dualité ondes/corpuscules⁵⁶.

topologique. » ([193], 228)

55. « les attaches qui relient l'axiomatique à la pensée concrète ne sont pas à chercher dans leur contenu, c'est-à-dire dans une correspondance entre l'« abstrait » et la réalité extérieure actuelle [...] : c'est dans la forme même, c'est-à-dire à l'intérieur du sujet, donc dans la filiation entre les coordinations formelles axiomatisées et les coordinations dont elles procèdent génétiquement, qu'est le lien entre l'abstrait et le concret, car l'« abstrait » résulte, en ce cas d'une abstraction par rapport aux coordinations de l'action et non pas d'une abstraction par rapport à l'objet. » ([193], 233)

56. Deux points de vue sur une même « réalité », celle de l'action : voilà ce que met en évidence la psychogenèse du nombre et de l'espace :

« Au niveau perceptif, il n'y a pas plus d'espace unique que les collections discontinues [...] ne constituent des classes logiques ou des nombres. Au niveau sensori-moteur, les déplacements joints aux perceptions permettent certaines coordinations organisant un espace proche, avec conservation pratique de l'objet, mais sans espace représentatif dépassant les limites de l'action : de même les schèmes sensori-moteurs constituent l'équivalent pratique des concepts logiques, avec un début de quantification [...], mais également sans représentation. Au niveau de la pensée intuitive préopératoire, il se constitue des images spatiales statiques et une imagination relatives aux transformations possibles des objets, mais sans conservation ni réversibilité : du

Ainsi par exemple, dès l'action élémentaire, quelques cailloux consistent, du point de vue du nombre, en unités « distinctes », que les opérations arithmétiques réunissent et ordonnent à la fois ; les mêmes cailloux sont au contraire du point de vue de l'espace les éléments d'un objet unique, reliés par des rapport intérieurs à la figurent qu'ils forment (voisinage, perspective, distance, etc.). Si l'on déplace les cailloux, le nombre reste le même, mais l'objet total change de forme, et ses transformations constituent les rapports spatiaux. Apparaît ainsi « une donnée fondamentale, qui atteste à la fois l'unité de la pensée mathématique en sa double conquête de l'objet et des collections possibles d'objets, et la nature essentiellement opératoire et assimilatrice de l'espace comme du nombre. » ([193], 258)

On pourrait même aller plus loin et considérer avec Piaget une genèse conjointe du local et de l'algébrique. En effet,

« le voisinage et la continuité sont des caractères généraux de l'action, autant que l'emboîtement fondé sur les ressemblances ou la sériation des différences [...]. Ce n'est que très lentement et très progressivement que ces caractères de voisinages et de non-voisinages, c'est-à-dire les aspects spatiaux et logico-arithmétiques de l'action, se différencient l'un de l'autre : en fait, c'est à partir seulement du niveau des opérations concrètes réversibles (7-8 ans), tandis que toutes les intuitions imagées pré-opératoires portent sur des configurations en partie spatiales » ([193], 262)

Cette dernière remarque doit être relue à la lumière des développements mathématiques que nous avons examinés dans les chapitres précédents d'une part, et d'autre part en repartant du rapprochement proposé par Piaget entre la notion d'action et celle de catégorie. Ainsi, Piaget semble ici appuyer, à l'aide de la psychologie du développement, l'idée que la théorie des catégories se situerait en amont de la distinction du local et de l'algébrique, ces derniers n'étant plus que deux perspectives offertes sur une même « réalité » sous-jacente.

7.3 Conclusion

Les travaux de Piaget ont fait l'objet de nombreuses critiques, tout du moins pour leur versant de psychologie expérimentale, comme le montrent [184] et [152]. Au contraire son épistémologie génétique a fait l'objet de moins de discussions, alors même qu'elle s'inscrit très explicitement dans les

point de vue de la logique et du nombre, il apparaît également des intuitions préconceptuelles et prénumériques, mais sans conservation des ensembles ni inversion possible des configurations. [...] Au niveau des opérations formelles enfin, une logique formelle et hypothético-déductive embrasse simultanément les transformations spatiales et numériques. » ([193], 256).

débats philosophiques centraux du XX^{ème} siècle, et dans la tradition de la philosophie française des sciences.

Pour ce qui concerne notre sujet, plusieurs points importants se dégagent des analyses de Piaget. Concernant la théorie des catégories, on voit qu'elle occupe à partir de la fin des années 1960 une place importante dans l'œuvre de Piaget, tant comme objet d'étude épistémologique, que comme outil d'analyse formelle du développement psychologique. La théorie des catégories y apparaît comme la formalisation d'une « logique de l'action », d'une « logique des fonctions », à l'œuvre non seulement dans les développements psychologiques pré-opérateurs, mais finalement dans toutes les structures opératoires concrètes dégagées par l'analyse psychogénétique. Cette « demi-logique » (puisque sans réversibilité), fait ainsi apparaître sa propre notion de non-contradiction, structurale et non pas logique, mais surtout demeure pour ainsi dire « une logique sans vérité » : la théorie des catégories, en tant que formalisation de l'action en général, ne vise pas tant la vérité que l'efficacité de l'acte, la vérité d'une proposition n'étant plus que la manifestation propositionnelle de la réussite d'un acte.

Par ailleurs, ces travaux ont permis de dégager une conception précise de l'« intuition » des concepts mathématiques structurels rendue nécessaire par les limites du formalisme. Ainsi cette intuition a pris la forme d'une compréhension du contenu sémantique des théories formelles, mais sous la forme d'une *savoir-faire* : comprendre le sens d'une structure mathématique, c'est ainsi être en mesure de mettre en acte l'opération caractéristique de cette structure, dans sa signification globale.

En outre, on a vu apparaître, lorsqu'il s'est agi pour Piaget de rendre compte de la construction du concept d'espace, un rapprochement entre les procédés de construction spatiaux et numériques, et ainsi un rapprochement entre le local et l'algébrique que nous avons déjà vu à l'œuvre dans la thèse de Lawvere, la proximité entre faisceau et algèbre et les esquisses mixtes d'Ehresmann.

Enfin, Piaget a mis en lumière le fait que l'activité mathématique se développe antérieurement et indépendamment du langage : faire des mathématiques est possible avant même que ne se constitue un discours mathématique, dans la mesure où l'activité du sujet mathématicien s'enracine dans l'action elle-même, au niveau sensori-moteur, c'est-à-dire dans une forme d'intelligence pré-linguistique. Ainsi, s'il y a bien quelque chose comme une « pensée mathématique », Piaget montre qu'il s'agit davantage d'une activité intellectuelle, pré-représentative, que d'un discours, même formel.

Cependant, il est important de souligner que ces analyses restent ouvertes, et ce de plusieurs façons. En effet, comme Piaget le souligne, le travail du psychologue est tributaire de son époque, des outils formels qu'il a à sa disposition, cette relativité interdisant au scientifique d'absolutiser ses analyses. Il ne serait donc pas possible d'affirmer que la théorie des catégories serait LA théorie adéquate pour décrire les fondements du développement

cognitif. De plus, à de nombreuses reprises, Piaget insiste sur le fait que ce que l'analyse amène à considérer comme premier, élémentaire ou fondamental, ne l'est que faute de connaissance : si en fait, l'action est le fondement des analyses de Piaget, en droit il serait toujours possible de remonter plus avant, vers le biologique (le vivant dans son milieu) voire le niveau physico-chimique. Ainsi la théorie des catégories ne peut prétendre décrire le sol, le fondement de l'activité cognitive : elle n'est qu'un moment de l'analyse, le point de contact entre l'analyse psycho-génétique et les développements mathématiques d'une époque. De telle sorte qu'il ne semble pas possible de considérer que Piaget propose une vision fondationnelle de la théorie des catégories : cette théorie demeure une représentation formelle, par nature inadéquate et approximative, pour rendre compte de l'« acte pur ». Si en effet, la théorie des catégories, comme l'a montré Piaget, semble proche des schèmes sensori-moteurs dans lesquels s'enracinent les structures mathématiques, qui présentent bien une « objectivité intrinsèque » par les contraintes qu'elles font peser sur l'activité intellectuelle, et même plus proche de ce contenu conceptuel que ne le sont les théories formelles, d'où la possibilité de définir catégoriquement un invariant des présentations, il n'en reste pas moins une distance entre ces schèmes, qui sont avant tout des actions ou des coordinations d'actions et leur description catégorique. Si la théorie des catégories serait ainsi plus proche de l'activité mathématique en tant que telle, elle reste une image symbolique de cette activité.

Une difficulté demeure néanmoins, concernant la dimension constructiviste de l'épistémologie piagétienne. En effet, Piaget entend répondre aux contraintes d'effectivité et de constructivité, tout en dépassant les limitations de l'intuitionnisme, en associant la constructivité aux structures mathématiques : ainsi par exemple, il serait possible de raisonner par l'absurde dans un ensemble infini dès lors que celui-ci serait muni d'une structure, rendant possible la définition d'une notion plus fine de non-contradiction. Et par ailleurs, l'ensemble des structures mathématiques seraient intégrées à un processus constructif d'engendrement « longitudinal », comme par exemple en passant des monoïdes aux groupes. De ce point de vue, Piaget se réclame d'ailleurs de l'épistémologie de Bourbaki.

Or, les analyses catégoriques antérieures ont mis en défaut cette homogénéité des structures mathématiques : ainsi, le passage des anneaux aux corps n'est pas qu'un renforcement axiomatique, il introduit dans ce dernier type de structures de nouvelles propriétés, de telle sorte que si l'on s'appuie sur les travaux de Lawvere ou de Bénabou, les corps ne sont pas à proprement parler des structures algébriques. La théorie des catégories elle-même n'est pas algébrique, mais « essentiellement algébrique ». On voit ainsi apparaître différents degrés de structuration, de telle sorte qu'il semble difficile d'identifier, avec Piaget, constructivité et structure. Faudrait-il dès lors restreindre la constructivité à l'algébricité ? Mais dans ce cas, la théorie des catégories ne serait plus elle-même à strictement parler constructive, puisqu'elle n'est

qu'une théorie « essentiellement algébrique ». Mais si l'on fait le choix d'élargir la constructivité au delà de ce qui est strictement algébrique, comme le propose d'une certaine façon McLarty , « without assuming any precise sense of constructive mathematics » ([177],96), quel critère donner de l'effectivité ?

Une autre difficulté concerne la place à accorder à la dimension sociale et historique des mathématiques. Piaget, faisant le choix d'appuyer son épistémologie génétique sur la psychologie du développement, présuppose une forme d'individualisme méthodologique, qui le conduit à proposer une lecture de l'histoire des mathématiques en fin de compte assez caricaturale. En un sens, tout se passe comme si se rejouait ici l'opposition entre d'une part la psychologie du développement individuel de Piaget et l'interactionnisme socio-culturel proposé par Lev Vygotski. La question qui se pose alors serait de savoir s'il serait possible d'accorder une place plus importante aux dynamiques historiques et sociales dans le développement de la connaissance mathématique, sans perdre les apports de l'épistémologie génétique de Piaget. Une piste possible pour dépasser cette difficulté nous semble être proposée par les travaux d'Andrew Pickering, et l'idée d'une « engrenage des pratiques » (« the mangle of practice »). Lorsqu'il prend pour objet d'étude l'émergence du concept de quaternion dans l'œuvre d'Hamilton, Pickering cherche en effet « to understand how dialectics of resistance and accommodation can arise in conceptual practice » ([202], 147), idée qui pourrait être rapprochée de certaines notions proposées par Piaget. Pickering propose ainsi d'inscrire la connaissance mathématiques dans un réseau de déterminations non seulement formelles et internes aux mathématiques, mais également sociales, culturelles, historiques voire matérielles⁵⁷ et de développer quelque chose comme une « ontologie performative ». Il serait ainsi possible d'articuler la genèse psychologique des conditions a priori de la connaissance à ses conditions sociales et historiques, en élargissant au delà des limites de l'individu la relativisation du transcendantal proposée par Piaget.

57. « conceptual structures (scientific theories and models, mathematical formalisms) are themselves to be understood as positioned in fields of disciplinary agency, much as machines are positioned in fields of material agency. [...]. Again, though, conceptual engineering should not be thought of as proceeding independently of the engineering of the human and material. [...] Disciplines, for instance, are themselves subject to transformation in conceptual practice, and [...] conceptual and machinic elements of culture evolve together in empirical practice. Scientific culture, then, appears as itself a wild kind of machine built from radically heterogeneous parts, a supercyborg, harnessing material and disciplinary agency in material and human performances, some of which lead out into the world of representation, of facts and theories. » ([202], 145)

Chapitre 8

Conclusion

« Les méthodes trahissent des métaphysiques, elles trahissent à leur insu les conclusions qu'elles prétendent parfois ne pas connaître. »

Albert Camus, *Le mythe de Sisyphe* ([30], 26)

8.1 La question initiale

Il s'agissait avant tout dans ce travail de recherche d'examiner une question précise : ce que devient dans le contexte de la théorie des catégories la difficulté, soulevée par la théorie des modèles et accentuée par son efficacité mathématique, de la sensibilité au langage, c'est-à-dire du fait que le langage choisi détermine nécessairement les structures étudiées.

Notre hypothèse était que l'examen de cette question permettrait de dégager les traits essentiels de l'« épistémologie effective » que constitue de notre point de vue la théorie des catégories. Il ne s'agissait nullement de défendre l'idée d'une supériorité *mathématique* de la théorie des catégories sur la théorie des modèles, le questionnement retenu étant de nature *épistémologique*.

8.2 Bilan

Le chapitre 1 nous a montré d'une part les limites des définitions axiomatiques formelles des concepts structuraux, à travers les difficultés que rencontre le projet d'une réélaboration mathématique de la relation de synonymie, et d'autre part la possibilité, une fois le cadre considéré restreint à la seule logique équationnelle, c'est-à-dire au champ de l'Algèbre Universelle, de concevoir d'autres modalités de description des concepts structuraux, sous la forme non plus de théories formelles, mais de systèmes algébriques. Ces

systèmes algébriques ont mis au premier plan la possibilité de ne considérer que la dimension proprement opératoire des concepts structurels, en les détachant des objets auxquels s'appliquent ces opérations.

Le chapitre 2 a mis en évidence l'apport de la théorie des catégories à cette forme alternative (algébrique) de définition des concepts structurels, sous la forme tout d'abord des théories de Lawvere, puis de leurs développements ultérieurs. Sont ainsi apparus non seulement la possibilité de dégager des invariants des présentations linguistiques, mais également la possibilité d'associer à ces systèmes algébriques une forme de sémantique (la sémantique fonctorielle) et par là même, d'élaborer une procédure systématique permettant de retrouver ces objets définitionnels à partir de la classe des instanciations de ces concepts. En outre le contexte catégorique a ainsi rendu possible la formulation d'un projet ou d'une ambition : le projet de travailler dans l'intrinsèque des concepts, sans passer par le paramétrage arbitraire par un langage. De cette façon, il est devenu possible, dans le cadre catégorique, de réévaluer la distinction syntaxe-sémantique, comprise dès lors comme relative et interne au champ mathématique. Cependant, dans le même temps, se sont dégagées les limites de ce contexte catégorique hérité de Lawvere, à savoir la difficulté que rencontre le dépassement du niveau algébrique.

Le chapitre 3 a examiné l'usage qu'il a été fait de ces notions et outils catégoriques en théorie des automates et en informatique théorique, et plus particulièrement du point de vue de la sémantique des langages de programmation. Ce champ ouvre en effet la voie, pour l'épistémologie, à la formulation d'autres relations d'équivalence, plus fines, que celles définies entre théories formelles : les équivalences entre programmes informatiques, prenant en compte le comportement calculatoire des programmes, développant ainsi l'importance accordée à l'opérateur par l'Algèbre Universelle dans le premier chapitre. Cela nous a permis de mettre en évidence une forme de constructivisme inhérent à la théorie des catégories (capturée par l'idée de théorie « essentiellement algébrique »), expliquant les difficultés rencontrées à sortir du cadre algébrique, mais mettant l'accent sur le fait que la théorie des catégories peut être vue comme une « théorie pure des fonctions », dans le même sens que le λ -calcul. De telle sorte qu'est devenue possible la réévaluation du statut « ontologique » des structures mathématiques, qui dans ce cadre peuvent être vues désormais, non plus comme des objets, mais comme des propriétés du calcul. Enfin, et de façon corrélative, il a été possible de penser le remplacement de la notion de vérité d'un énoncé par celle de succès d'un programme : l'objet de la théorie des catégories n'est donc pas ce qui est « dit » par un énoncé, mais ce qui est « fait » par un concept.

Au chapitre 4, il s'est agi de chercher à dépasser les limites rencontrées par la sémantique fonctorielle héritée de Lawvere, en partant cette fois de la logique classique du premier ordre, mais appréhendée avec les outils de la théorie des catégories, sous la forme de la Théorie Catégorique des Modèles développée par Joyal, Reyes et Makkai. Alors même que cette voie de

recherche part de la considération de langages formels, comme la théorie des modèles usuelle, on a vu apparaître dans ce cadre des traits distinctifs de l'approche catégorique tels que d'une part la constitution d'objets définissant les concepts structurels indépendamment du langage, comme à travers différents résultats de Johnstone sur les catégories syntaxiques, ou la notion de topos classifiant ; d'autre part le projet de faire émerger une présentation syntaxique d'un concept de la classe de ses modèles, à travers le théorème de complétude conceptuelle forte ; et enfin la caractérisation de la relation entre syntaxe et sémantique comme un cas particulier de la notion de représentation, interne au champ mathématique.

Cependant, le projet de prendre en compte catégoriquement la logique du premier ordre dans sa totalité rencontre également des limites : d'une part, on retrouve dans ce cadre les relations d'équivalence rencontrées au chapitre 1, et avec elles les difficultés qu'elles soulèvent, et d'autre part il manque à ce rapprochement entre théorie des modèles et théorie des catégories le pendant catégorique de la notion de déduction, permettant l'élaboration de nouvelles connaissances mathématiques, et non seulement la définition des concepts.

C'est pour cette raison que nous avons étudié au chapitre 5 la notion d'esquisse, qui semble en effet pouvoir être comprise comme un support proprement catégorique (ou plus précisément graphique) non seulement pour l'élaboration de définitions des concepts structurels, mais également pour la construction de nouvelles connaissances mathématiques. Le cadre des esquisses nous a ainsi permis de consolider certains aperçus du chapitre 2, comme la possibilité de se placer en deçà de la distinction entre le Local et l'Algébrique, de retrouver une certaine forme d'invariant des présentations et de dépasser une conception fixe et rigide de la distinction entre syntaxe et sémantique. Il a également été possible, par là-même, de comprendre d'où viennent les difficultés rencontrées à dépasser le cadre « algébrique » initial, tout en intégrant au contexte catégorique les concepts dépassant ce cadre, grâce notamment au théorème du Diagramme Localement Libre et à une certaine mesure de complexité.

Mais il restait encore à montrer que toutes ces thèses partielles et locales peuvent se connecter en un cadre conceptuel global, et nous avons trouvé dans l'épistémologie génétique de Jean Piaget, et la philosophie des mathématiques qui en découle, les outils pour une telle intégration. Ainsi une épistémologie des mathématiques ancrée sur la théorie des catégories, conçue comme épistémologie effective, nous semble mettre au premier plan l'action, et les schèmes comme coordinations des actions, qui constituent la signification des concepts structuraux. Nous avons vu comment cette même notion fondamentale d'action détermine les considérations locales et les considérations opératoires, en se situant en amont ou en deçà de cette distinction. Dans ce contexte, nous avons vu se dessiner la possibilité d'une intelligence antérieure au langage, qui constituerait le cœur de l'activité mathématique, relativement à laquelle toute représentation symbolique, y compris le for-

malisme catégorique, se trouve en défaut. Par ailleurs, dans ce cadre, les structures mathématiques nous sont apparues, sous la forme des schèmes d'action, dans leur dimension non seulement transcendantale, mais également historique. Enfin, cette considération des structures mathématiques comme condition de la connaissance en général ont mis en lumière la connaissance du sujet mathématicien de l'objet mathématique et la nécessité de considérer comme seconde la vérité, par rapport au l'effectivité d'une action.

Ainsi, si d'un point de vue mathématique, la théorie des modèles et la théorie des catégories n'ont cessé de montrer leur pertinence et leur efficacité respective, pour l'épistémologue, il nous semble que la théorie des catégories constitue le lieu d'apparition, du cœur de la pratique mathématique, d'un cadre conceptuel ouvrant la voie à l'élaboration non seulement d'une philosophie des mathématiques, mais d'une théorie générale de la connaissance, permettant de dépasser certaines des difficultés essentielles d'une philosophie ancrée sur le langage.

Chapitre 9

Annexe 1 : Fragments de logique classique

Il va s'agir ici de définir précisément la notion de théorie, utilisée notamment au chapitre 4.

Définition 84 Une signature Σ du premier ordre est la donnée de :

1. un ensemble Σ – Sort de sortes ;
2. un ensemble Σ – Fonc de symboles de fonctions f , chacun de ces symboles étant équipé d'une liste finie de sortes sources et d'une unique sorte de sortie : on écrira $f : A_1 \dots A_n \rightarrow B$ pour indiquer que f a des sortes sources $A_1 \dots A_n$ et une sorte de sortie B . Si $n = 0$, f est appelé une constante de sorte B . L'arité de f est le nombre n de ses sortes sources ;
3. un ensemble Σ – Rel de symboles de relation R , chacun de ces symboles étant équipé d'une liste finie de sortes : on écrira $R \rightsquigarrow A_1 \dots A_n$ pour indiquer que la liste de sortes associée avec R est $A_1 \dots A_n$. L'arité de R est le nombre n de sortes qui lui sont associées.

On dira que la signature Σ est finie si elle a seulement un nombre finie de sortes de symboles de fonctions et de relations. Pour chaque sorte A de la signature Σ , on dispose d'une stock de variables de sortes A , utilisés pour dénoter des individus de type A . On peut alors définir les termes d'une signature Σ :

Définition 85 Soit Σ une signature. On définit inductivement la collection des termes sur Σ , en même temps que la spécification pour chaque terme de sa sorte (on écrit $t : A$ ou t^A pour dire que t est un terme de type A) :

1. toute variable x^A est un terme de type A ;
2. pour toute liste de termes $t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n$ et tout symbole de fonction $f : A_1 \dots A_n \rightarrow B$, $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme de sorte B .

On peut alors définir, inductivement à partir des termes, les classes F de formules, en même temps que l'ensemble $FV(\phi)$ des variables libres d'une formule ϕ de F :

1. *Relations* : $R(t_1, \dots, t_n)$ est dans F pour tout terme $t_1 : A_1, \dots, t_n : A_n$ et un symbole de relation $R \mapsto A_1 \dots A_n$; $FV(R(t_1 \dots t_n))$ est l'ensemble des variables présentes dans les t_i (pour $i = 1, \dots, n$) ;
2. *Egalité* : $s = t$ est dans F pour tout terme s et t de même sorte ; $FV(s = t)$ est l'ensemble des variables libres présentes en s et t ;
3. *Vrai* : \top est dans F : $FV(\top) = \emptyset$;
4. *Conjonction binaire* : $(\phi \wedge \psi)$ est dans F chaque fois que ϕ et ψ sont dans F : $FV(\phi \wedge \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$;
5. *Faux* : \perp est dans F : $FV(\perp) = \emptyset$;
6. *Disjonction binaire* : $(\phi \vee \psi)$ est dans F chaque fois que ϕ et ψ sont dans F : $FV(\phi \vee \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$;
7. *Implication* : $(\phi \Rightarrow \psi)$ est dans F chaque fois que ϕ et ψ sont dans F : $FV(\phi \Rightarrow \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$;
8. *Négation* : $\neg\phi$ est dans F chaque fois que ϕ est dans F ; $FV(\neg\phi) = FV(\phi)$;
9. *Quantification existentielle* : $(\exists x)\phi$ est dans F chaque fois que ϕ est dans F et x une variable libre de ϕ ; $FV((\exists x)\phi) = FV(\phi) \setminus \{x\}$;
10. *Quantification universelle* : $(\forall x)\phi$ est dans F chaque fois que ϕ est dans F et x une variable libre de ϕ ; $FV((\forall x)\phi) = FV(\phi) \setminus \{x\}$;
11. *Disjonction infinie* : $\bigvee_{i \in I} \phi_i$ est dans F chaque fois que I est un ensemble, ϕ_i est dans F pour chaque $i \in I$ et $FV(\bigvee_{i \in I} \phi_i) := \bigcup_{i \in I} FV(\phi_i)$ est fini.
12. *Conjonction infinie* : $\bigwedge_{i \in I} \phi_i$ est dans F chaque fois que I est un ensemble, ϕ_i est dans F pour chaque $i \in I$ et $FV(\bigwedge_{i \in I} \phi_i) := \bigcup_{i \in I} FV(\phi_i)$ est fini.

On définit un *contexte* comme une liste finie $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de variables distinctes. On considère le plus souvent des *formules-en-contexte*, c'est-à-dire des formules ϕ associées à un contexte \vec{x} ; on écrira alors soit $\phi(\vec{x})$ soit $\{\vec{x}.\phi\}$ pour une formule ϕ dans un contexte \vec{x} .

Définition 86 *A partir des règles de formation décrites ci-dessus, on peut définir :*

1. *l'ensemble des formules atomiques sur Σ , le plus petit ensemble clos sous les Relations et l'Egalité ;*
2. *l'ensemble des formules de Horn sur Σ , le plus petit ensemble contenant les formules atomiques et clos sous Vrai et la Conjonction binaire ;*

3. l'ensemble des formules régulières sur Σ , le plus petit ensemble contenant les formules atomiques et clos sous Vrai, la Conjonction binaire et la Quantification existentielle ;
4. l'ensemble des formules cohérentes sur Σ , le plus petit ensemble contenant les formules atomiques et clos sous Vrai, la Conjonction binaire, la Quantification existentielle, le Faux et la Disjonction binaire ;
5. l'ensemble des formules du premier ordre sur Σ , le plus petit ensemble contenant les formules atomiques et clos sous toutes les règles de formations, sauf les règles infinitaires ;
6. l'ensemble des formules géométriques sur Σ , le plus petit ensemble contenant les formules atomiques et clos sous Vrai, la Conjonction binaire, la Quantification existentielle, le Faux et la Disjonction infinie ;
7. l'ensemble des formules du premier ordre infinitaire sur Σ , le plus petit ensemble contenant les formules atomiques et clos sous toutes les règles de formations.

Définition 87 1. Par un séquent sur une signature Σ on désigne une expression de la forme $(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$, où ϕ et ψ sont des formules dans Σ dans le contexte \vec{x} ;

2. on dira qu'un séquent $(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$ est Horn (resp. régulier, cohérent,...) si les formules ϕ et ψ sont des formules de Horn (resp. régulières, cohérentes,...).

On peut alors définir précisément la notion de théorie :

Définition 88 1. Une théorie sur une signature Σ est un ensemble \mathbf{T} de séquents sur Σ , dont les éléments sont les axiomes de \mathbf{T} ;

2. on dira que \mathbf{T} est une théorie algébrique si sa signature Σ ne contient aucun symbole de relation (à part la relations d'égalité des sortes) et ses axiomes sont tous de la formes $(\top \vdash_{\vec{x}} \phi)$, où ϕ est une formule atomique de la forme $(s = t)$ et \vec{x} est sont contexte canonique ;

3. on dira que \mathbf{T} est une théorie de Horn (resp. régulière, cohérente,...) si tous les séquents dans \mathbf{T} sont de Horn (resp. réguliers, cohérents,...).

A partir de ces fragments de la logique du premier ordre, on peut définir un système de déduction, sous la forme d'un calcul des séquents, qui est la donnée de règles d'inférences de la forme

$$\frac{\Gamma}{\sigma}$$

signifiant que σ peut être déduit d'une collection de séquents Γ . On peut alors définir la notion de preuve (ou de dérivation) comme une chaîne d'inférences dont les prémices sont les axiomes du système et dont la conclusion est un séquent donné.

On a alors les règles d'inférence :

1. les règles pour la conjonction finie sont les axiomes $(\phi \vdash_{\vec{x}} \top)$, $((\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \phi)$ et $((\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \psi)$ et la règle

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi) \quad (\phi \vdash_{\vec{x}} \chi)}{(\phi \vdash_{\vec{x}} (\psi \wedge \chi))}$$

2. les règles pour la disjonction finie sont les axiomes $(\perp \vdash_{\vec{x}} \phi)$, $(\phi \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \psi))$ et $(\psi \vdash_{\vec{x}} ((\phi \vee \psi)))$ et la règle

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}} \chi) \quad (\psi \vdash_{\vec{x}} \chi)}{((\phi \vee \psi) \vdash_{\vec{x}} \chi)}$$

3. les règles pour la conjonction et la disjonction infinitaires sont les analogues infinitaires des règles pour la conjonction et la disjonction finie ;
4. les règles pour l'implication consistent en la double règle

$$\frac{(\phi \wedge \psi \vdash_{\vec{x}} \chi)}{(\psi \vdash_{\vec{x}} (\phi \Rightarrow \chi))}$$

5. la règle pour la quantification existentielle consiste en la double règle

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}, y} \psi)}{((\exists y)\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)}$$

où on suppose que y n'est pas libre dans ϕ .

6. la règle pour la quantification universelle consiste en la double règle

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}, y} \psi)}{(\phi \vdash_{\vec{x}} (\forall y)\psi)}$$

7. l'axiome de distributivité est $(\phi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash_{\vec{x}} (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))$.
8. l'axiome de Frobenius est $(\phi \wedge (\exists y)\psi \vdash_{\vec{x}} (\exists y)(\phi \wedge \psi))$; où y n'est pas une variable du contexte \vec{x} .
9. la loi du tiers-exclu est $(\top \vdash_{\vec{x}} \phi \vee \neg\phi)$.

Définition 89 *En ajoutant les règles structurales usuelles du calcul des séquents (axiome-identité, règles d'égalité, règle de substitution et coupure), on obtient les systèmes déductifs suivants :*

<i>Logique algébrique</i>	<i>pas de règle additionnelle</i>
<i>Logique de Horn</i>	<i>Conjonction finie</i>
<i>Logique régulière</i>	<i>Conjonction finie, quantification existentielle et axiome de Frobenius</i>
<i>Logique cohérente</i>	<i>Conjonction et disjonction finies, quantification existentielle, distributivité et Frobenius</i>
<i>Logique géométrique</i>	<i>Conjonction finie, disjonction infinie, quantification existentielle, distributivité infinitaire, Frobenius</i>
<i>Logique du premier ordre intuitionniste</i>	<i>toutes les règles finitaires sauf le Tiers-Exclu</i>
<i>Logique du premier ordre classique</i>	<i>toutes les règles finitaires</i>

Définition 90 *On dira qu'un séquent σ est prouvable ou dérivable dans une théorie (algébrique, régulière, cohérente,...) \mathbf{T} s'il existe une dérivation de σ relative à \mathbf{T} , dans le fragment de la logique du premier ordre qui convient.*

Chapitre 10

Annexe 2 : L'épistémologie piagétienne

Nous souhaiterions apporter enfin quelques éléments qui nous semblent représentatifs de la philosophie des mathématiques de Piaget, qui se place explicitement dans la tradition française de philosophie des sciences et dans l'héritage de L. Brunshvicg. Pour ce faire, nous présenterons dans un premier temps les analyses de Piaget concernant quelques questions centrales d'épistémologie mathématique, puis nous confronterons les thèses piagésiennes à d'autres approches philosophiques.

10.1 Eléments complémentaires

10.1.1 Au-delà des entiers naturels

La genèse psychologique du nombre permet à Piaget d'éclairer le processus à l'œuvre dans la construction des autres types de nombres, négatifs, rationnels, irrationnels, complexes et transfinis. L'analyse génétique des premiers met en effet en évidence la nature non pas perceptive mais opératoire du nombre en général, dans la mesure où « le nombre négatif apparaît comme le modèle de l'abstraction à partir de l'action et non pas de l'objet » ([193], 113). Les nombres irrationnels manifestent « l'isomorphisme des constructions numériques et des constructions spatiales » ([193], 119). Les nombres complexes, qui portent en eux-mêmes selon Piaget le problème fondamental de toute épistémologie des mathématiques, à savoir celui de l'applicabilité des mathématiques à la physique, mettent en lumière le lien fondamental entre les constructions mathématiques et le réel¹. Ce qui se révèle ainsi se-

1. « Dire que la rencontre entre le réel et les nombres imaginaires, rencontre se produisant bien après la construction de ceux-ci, est de la même nature que la convergence immédiate des nombres entiers positifs avec les réalités élémentaires, parce que toutes deux tiennent à l'accord entre la coordination d'ensemble des opérations et les transformations physiques fondamentales, c'est simplement supposer que les structures de composition ré-

lon Piaget, c'est

« cette connexion intérieure entre l'esprit et l'univers, s'établissant au travers des mécanismes les plus fondamentaux de la morphogenèse vitale, qui est sans doute seule à rendre compte des anticipations possibles de la connaissance logico-mathématique sur la connaissance physique » ([193], 255).

Pour ce qui est enfin du transfini, Piaget constate d'une part que pour l'infini actuel, il y a dissociation de l'ordinalité et de la cardinalité, et d'autre part, que les opérations arithmétiques des nombres entiers naturels ne sont plus valables dans ce cadre. Ainsi par exemple $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. De sorte que

« le grand intérêt de cette réalisation de l'infini, laquelle transcende ainsi sans cesse les opérations constructives pour atteindre une suite d'infinis actuels emboîtés les uns dans les autres, est d'aboutir en fait à un affaiblissement du caractère spécifiquement numérique de la construction et de marquer un retour partiel aux composantes logiques du nombre. » ([193], 128)

10.1.2 L'historicité des mathématiques

Compte tenu de cet enracinement profond de la connaissance mathématique dans le développement de la pensée individuelle, la question se pose nécessairement de savoir comment donner sens à l'historicité des mathématiques, et expliquer que les données les plus élémentaires de ce développement, comme la dimension topologique des premières constructions spatiales, ne soient thématiques explicitement par les mathématiciens qu'après plus de deux millénaires de pratique mathématique.

La réponse de Piaget à cette question est la suivante : « le mécanisme essentiel qui se dégage de tout examen de l'histoire des mathématiques est assurément celui de la prise de conscience graduelle des opérations » ([193], 269). Les mathématiques grecques se caractériseraient ainsi par une « conscience insuffisante du rôle des opérations » alors qu'à partir du XVII^{ème} siècle se manifesterait une « prise de conscience du mécanisme opératoire de la pensée ». La pensée mathématique grecque se caractériserait alors par « un réalisme par refus, si l'on peut dire, de reconnaître l'activité du sujet, tandis que la fécondité de la science moderne s'expliquerait alors par le dynamisme du mécanisme opératoire, devenu conscient de ses possibilités internes » ([193], 270)².

versible atteintes par les groupements et les groupes d'opérations expriment à la fois les lois les plus générales de la coordination des actions du sujet et les interactions les plus directes entre le sujet et le réel. Tant cette coordination que ces interactions, tout en se différenciant au cours de l'expérience, sont alors à concevoir comme ne dérivant pas de l'expérience extérieure, parce qu'étant seules à la rendre possible, mais comme émanant des conditions mêmes de l'organisation psycho-biologique » ([193], 125)

2. On pourrait aisément reprocher ici à Piaget sa vision caricaturale des mathématiques

Pour Piaget le réalisme est ainsi « enraciné dans le sens commun », du fait d'un mécanisme psychologique élémentaire : « la délimitation communément admise entre le sujet et l'objet est essentiellement variable d'un niveau à l'autre [du développement mental], mais encore elle dépend d'un phénomène constant, ou constamment renouvelé : la difficulté à prendre conscience des mécanismes internes de l'activité intellectuelle » ([193], 274), le réalisme étant en effet compris comme « une confusion du sujet et de l'objet³ » ([193], 275).

S'appuyant sur l'ouvrage de P. Boutroux *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Piaget distingue ensuite une deuxième période dans l'histoire des mathématiques : une période « synthétiste, caractérisée par la constitution de l'algèbre comme science théorique, par celle de la géométrie analytique et par celle du calcul infinitésimal [:] l'idéal de vérité mathématique propre à cette période consisterait [...] en une construction opératoire indéfinie et autonome » ([193], 278). Les caractéristiques essentielles de cette période de l'histoire des mathématiques apparaissent ainsi dans le développement de l'algèbre, dans les travaux de Descartes en géométrie analytique et dans le calcul infinitésimal de Leibniz et Newton⁴. Mais cette période « synthétiste » peut être elle-même analysée en ces termes :

« cette prise de conscience s'effectue par étapes, en procédant de la surface au centre : c'est tout d'abord le résultat de l'activité de l'esprit, qui est aperçu le premier, indépendamment de cette dernière, dont il est alors détaché (cf. la contemplation hellénique) ; puis ce sont les manifestations les plus simples et les plus directes de cette activité qui sont aperçues, dans ce qu'elles ont de mobile et de libre [...]. Que de telles opérations soient senties comme soumises à la « volonté » propre, c'est qu'elle demeurent encore proches de la frontière du champ opératoire, au lieu de pénétrer à son intérieur : preuve en soit qu'elles n'ont pas été d'emblée conçues comme constituant des ensembles fermés et articulés sous la forme de « groupes ». » ([193], 283)

Apparaît ainsi le moment fondateur de la troisième période, dans laquelle

antiques, dans la mesure où il trace des distinctions nettes au sein d'une réalité historique beaucoup plus complexe et nuancée. Cependant, Piaget ici ne fait pas œuvre d'historien, mais d'épistémologue, et admet comme présupposé un sens de l'histoire des mathématiques (occidentales), comme le ferait Brunschwig ou Cavaillès.

3. « le réalisme étant l'expression d'une indifférenciation entre le sujet et l'objet et la différenciation entre eux ne s'effectuant que progressivement, le sujet pensant ne se sent jamais d'emblée agir par sa pensée, lorsqu'il parvient sur un nouveau palier de l'élaboration intellectuelle, mais il commence toujours par prendre conscience des résultats de cette pensée avant d'en saisir réflexivement les mécanismes. [...] La pensée grecque n'a cessé de croire saisir ou contempler des réalités toutes faites, faute de découvrir qu'elle opérait sur elles. » ([193], 276)

4. Pour Piaget, une phrase de Lagrange semble résumer l'essentiel de cette période : « les fonctions représentent les diverses opérations qu'il faut faire sur les quantités connues pour obtenir les valeurs de celles que l'on cherche, et elles ne sont proprement que le dernier résultat de ce calcul » ([193], 280).

les mathématiques se trouveraient encore placées : la naissance chez Galois de la théorie des groupes⁵. Ainsi l'émergence des structures mathématiques explique la « résistance » qu'éprouve le mathématicien : celle-ci n'est pas le signe d'une extériorité de faits mathématiques, donnant naissance à une forme nouvelle de réalisme, comme le pensait Boutroux, pour qui « derrière la forme logique il y a autre chose. La pensée mathématique ne se borne pas à déduire et à construire » ([26], 170), mais cette « résistance » révèle plutôt pour Piaget « l'objectivité intrinsèque » des structures, où l'esprit se trouve soumis à la cohérence interne de structures opératoires, sans pour autant que celles-ci existent dans quelque Ciel des Idées⁶.

Mais comment expliquer dès lors la constitution de ses totalités opératoires, puisqu'elles ne préexistent pas, sous une forme achevée, à leur élaboration réflexive, et qu'elles sont construites sans que cette construction soit arbitraire ? En quoi consiste cette « logique de l'opération » ?

10.1.3 Le raisonnement mathématique, entre rigueur et fécondité

Pour Piaget il est évident que « les opérations créent du neuf, puisque 12 n'est pas contenu dans 7 et 5, puisque le carré de l'hypoténuse n'est pas entièrement « la même chose » que le carré des deux autres côtés » ([193], 296) Mais comment cette construction est-elle possible, tout en étant nécessaire ? La solution à ces difficultés se trouve dans l'analyse du raisonnement mathématique lui-même. Piaget associe ainsi à la notion de construction celle de fécondité, mettant en avant la part de l'objet, et à l'idée de nécessité la notion de rigueur, mettant l'accent sur l'activité du sujet. Ainsi la question de l'émergence nécessaire des totalités opératoires équivaut à celle de la conciliation de la rigueur et de la fécondité du raisonnement mathématique, c'est-à-dire finalement à l'articulation du sujet et de l'objet dans la pensée mathématique en général.

S'appuyant sur la thèse de Poincaré, selon laquelle la fécondité du raisonnement mathématique tient à l'application du raisonnement par récurrence, Piaget développe tout d'abord cette idée en soulignant que c'est dans le passage de la quantité intensive, de nature ensembliste, à la quantité extensive

5. « dans la théorie des groupes l'esprit ne construi[t] plus « à volonté », mais explore, selon la description de Galois, et se trouve en présence d'une « objectivité intrinsèque » ([193], 283)

6. « après avoir cru pouvoir construire librement l'ensemble des mathématiques au moyen de quelques opérations maniées à volonté, l'esprit [a] découvert l'existence de totalités opératoires obéissant à leurs lois propres et caractérisées par une certaine objectivité intrinsèque [...]. Il est dans la logique même de la notion d'opérations de conduire à une telle objectivité parce que les opérations sont nécessairement solidaires les unes des autres en des totalités dont l'esprit ne saurait prendre conscience directement, mais laborieusement, par tâtonnements successifs et en procédant de l'extérieur à l'intérieur, c'est-à-dire des résultats à leur source, selon la loi de toute prise de conscience. » ([193], 284)

que se révèle la dimension constructive, et non pas simplement tautologique, de la pensée mathématique. Mais il reste à expliquer génétiquement comment s'effectue ce passage, c'est-à-dire comment les concepts mathématiques acquièrent leur « objectivité intrinsèque », comment ces constructions se font de manière non pas arbitraire, mais nécessaire.

Pour assurer la nécessité de cette construction, il faut qu'elle consiste en l'application de règles nécessaires, assurant la rigueur du raisonnement mathématique. Piaget montre que ces règles sont internes au développement intellectuel, sous la forme d'un « réglage interne des opérations », et ne sont pas imposées du dehors à l'esprit :

« les définitions et les axiomes, constituent précisément un système de règles opératoires qui déterminent la manière dont les opérations vont se combiner entre elles. C'est ainsi que les axiomes de Peano [...] introduisent les notions de successeur ou de « suivant », de zéro et de l'égalité [...] : la construction est alors réglée parce que les opérations mêmes sont astreintes à une composition qui ne laisse place à aucun flottement [...] c'est parce que les opérations $+1$, -1 et 0 forment entre elles un « groupe », et sont ainsi réglées par leur propre transitivité et leur propre réversibilité, que les axiomes mis à la source de la construction sont formulées de manière à retrouver une telle structure [...].⁷

Bref, si, même sur le plan des opérations concrètes, la « construction » qui engendre le raisonnement est d'emblée réglée, c'est en vertu des lois de composition réversible qui caractérisent les opérations comme telles, et c'est ce réglage interne qui dirige le choix des propositions de départ. » ([193], 292)

Il y a donc selon Piaget, une antériorité de la structure de groupe sur les propositions formelles qui la définissent, et c'est des lois qui régissent la structure elle-même que viennent les définitions et les axiomes, compris comme règles du raisonnement mathématique. Mais il reste encore à comprendre pourquoi la structure de « groupe », propre aux mathématiques et à la quantité extensive, peut donner naissance à l'infinie diversité des constructions mathématiques, c'est-à-dire « conduire à un nombre inépuisable de compositions », quand la structure de groupement, caractérisant la nécessité des règles logiques, ne « conduit qu'à quelques compositions restreintes » ([193], 293) ? Cette faiblesse inhérente à la structure de groupement, telle qu'elle ne permet pas de rendre compte de la fécondité du raisonnement mathématique, est expliquée par Gilles-Gaston Granger par « le caractère local, ou « pas à pas », des opérations du groupement » ([87], 77). S'il est clair que la

7. Il serait nécessaire ici de nuancer quelque peu l'analyse de Piaget, ou de la détailler, pour lui donner toute sa pertinence. En effet les entiers naturels avec l'addition ne constituent pas un groupe, mais un monoïde commutatif. Il n'y a donc pas un lien direct entre les axiomes de Peano et la structure de groupe.

rigueur du raisonnement mathématique s'explique par les règles opératoires, il reste donc à expliquer sa fécondité.

Pourquoi l'énoncé « $7 + 5 = 12$ » nous apprend-il quelque chose de nouveau ? La réponse à cette question se trouve selon Piaget dans les opérations elles-mêmes qui permettent la formulation d'un tel énoncé, au premier rang desquelles l'abstraction propre aux mathématiques. Pour Piaget en effet, l'abstraction

« consiste à *ajouter*, et non pas à enlever, quelque chose à l'objet, tout en choisissant le point de vue auquel elle ajoute. C'est ainsi qu'en comptant quelques boules on leur ajoute un lien qui n'existait pas entre elles, au lieu d'extraire le nombre de leur collection [...] L'abstraction est donc une articulation, ou si l'on préfère, une structuration accordée au réel, et consistant en relations nouvelles, qui n'étaient pas encore contenues dans le donné concret. » ([193], 299)

Ainsi, dès la première étape de la constitution des « vérités » mathématiques apparaît de la nouveauté, un dépassement du donné. Et même, plus généralement, toute opération pour Piaget produit du nouveau, dans la mesure « en mathématiques (et en logique, mais à degré notablement inférieur) les opérations sont simultanément sources de nouveauté et de rigueur⁸ ». Cette dimension constructive de l'opération en général vient, selon Piaget, du fait que « toute opération suppose, en son point de départ, un lien indissociable entre le sujet et l'objet ». Cette interdépendance du sujet et de l'objet est un des principes essentiels de l'épistémologie de Piaget : une action n'est jamais celle d'un sujet sur un objet séparé et indépendant, mais toujours, pour ainsi dire, action-d'un-sujet-sur-un-objet. De même que la rigueur du raisonnement mathématique tient des propriétés du sujet, de même sa fécondité tient à la présence de l'objet dans l'action⁹. Il ne saurait donc y avoir, du point de vue génétique, un sujet absolu, opposé à un objet : Piaget propose bien plutôt une genèse du sujet corrélative à celle de l'objet, en s'appuyant fréquemment sur l'analogie avec la situation observée en mécanique quantique (on a vu plus haut apparaître une telle référence à la mécanique quantique quand il s'est agi de rapprocher la liaison entre l'espace et le nombre de la dualité onde/corpuscule). Il n'y aurait pas ainsi quelque chose comme des

8. « Du point de vue génétique, toute relation établie entre les objets résulte donc d'une activité de l'esprit consistant à différencier aussi bien qu'à identifier et, par conséquent, tout système d'opérations, en tant que « groupement » de relations, est constructif en même temps qu'il assure sa propre rigueur grâce au mode de composition qu'il constitue. » ([193], 301)

9. « Il n'existe pas, en effet, de limite statique et donnée une fois pour toutes, entre le sujet et l'objet, parce que l'esprit se construit peu à peu et qu'aux différents niveaux de cette construction la délimitation est alors à refaire [...] Si l'on veut les opposer en une formule valable pour tous les niveaux, celle-ci ne saurait que fonctionnelle et non pas structurale. » ([193], 302)

objets mathématiques absolus et déterminés, mais au contraire des objets mathématiques corrélés à un sujet mathématicien, les définissant et défini par eux. Ce n'est qu'à ce titre là que peut s'expliquer la part constructive et la richesse du raisonnement mathématique.

10.1.4 Piaget et le Cercle de Vienne

Piaget rejette ainsi clairement l'idée d'une nature analytique des énoncés mathématiques, et est donc amené à critiquer en détails la thèse défendue par le Cercle de Vienne, selon laquelle les mathématiques ne seraient que le développement syntaxique d'une tautologie. Piaget va notamment critiquer l'idée d'une séparation nette entre un système symbolique ou une syntaxe refermée sur elle-même, dans laquelle seraient représentées la logique et les mathématiques d'une part, et des « faits réels » dont les énoncés formels seraient, selon Wittgenstein dans le *Tractatus*, des images. Il met ainsi en avant « la nature essentiellement mentale du fait-signifiant, désigné par les symboles¹⁰. » Dès lors, en tant qu'instrument conceptuel, le langage ne fait pas disparaître l'opération, mais bien au contraire

« un système symbolique exact est donc doublement opératoire : il représente au moyen d'opérations symboliques un jeu, non pas de réalités toutes faites, mais d'opérations réelles. » ([193], 313)

Ainsi, ramener les mathématiques à une pure syntaxe, comme le propose le Cercle de Vienne, n'exclut en rien la fécondité et la constructivité opératoire des structures logico-mathématiques.

Plus profondément, Piaget critique toute analyse ramenant l'intelligence à sa forme supérieure qu'est la pensée verbale, et oubliant que l'action précède la pensée¹¹, de telle sorte que, pour saisir réellement la nature des mathématiques,

« rien n'est plus propre à éclairer cette perspective que la méditation sur cette sorte de langage – de langage encore, mais

10. « Il reste qu'un langage se construit et ne se découvre pas par constatation extérieure, et qu'un langage suppose des sujets psychologiques capables de parler entre eux et de se représenter quelque chose au moyen de signes ainsi élaborés. Psychologiquement, la fonction symbolique [...] explique, si l'on veut, la pensée, mais elle la suppose en retour : plus précisément elle ne l'explique qu'à la condition d'en impliquer les attributs essentiels et, si la pensée n'est qu'un langage, c'est que le langage est un instrument conceptuel. » ([193], 313)

11. « Le langage remplace en partie l'action, au point que l'introspection éprouve la plus grande difficulté à discerner par ses seuls moyens qu'il est encore un comportement véritable : la conduite verbale est une action, sans doute amenuisée et demeurant intérieure, une esquisse d'action qui risque même sans cesse de demeurer à l'état de projet, mais c'est une action tout de même, qui remplace simplement les choses par des signes et les mouvements par leur évocation, et qui opère encore, en pensée, par le moyen de ces truchements. [...] d'où l'illusion [...] des logiciens, que le schéma logistique le plus adéquat doit être essentiellement une théorie des « propositions ». » ([191], 50)

purement intellectuel, transparent et étranger aux duperies de l'image – qu'est le langage mathématique. Dans une expression quelconque, telle que $(x^2 + y = z - u)$, chaque terme désigne en définitive une action : le signe $=$ exprime la possibilité d'une substitution, le signe $+$ une réunion, le signe $-$ une séparation, le carré x^2 l'action de reproduire x fois x , et chacune des valeurs u, x, y et z l'action de reproduire un certain nombre de fois l'unité. Chacun de ces symboles se réfère donc à une action qui pourrait être réelle, mais que le langage mathématique se borne à désigner abstraitement, sous la forme d'actions intériorisées, c'est-à-dire d'opérations de la pensée. » ([191], 50)

Et cela vaut également du langage logique, étant donné que « le caractère essentiel de la pensée logique est d'être opératoire, c'est-à-dire de prolonger l'action en l'intériorisant. » ([191], 52)

Ce dépassement de la thèse du positivisme logique, d'une nature purement syntaxique et tautologique des mathématiques, s'impose d'autant plus selon Piaget que les théorèmes d'incomplétude de Gödel ont mis en évidence les limites de la formalisation héritée des métamathématiques hilbertiennes. Ces théorèmes rendent en effet nécessaire un « réajustement de la logique » et conduisent à « dépasser [...] le cadre de la logique bivalente, étant reconnue son insuffisance à absorber les mathématiques ou même à fournir, lorsque les structures logiques et mathématiques sont simplement mêlées les unes aux autres, le critère de la non-contradiction du mixte ainsi formé. » ([193], 318)

L'épistémologie des mathématiques permet de comprendre l'existence de telles limitations. Si l'on se souvient en effet de la distinction proposée par Piaget entre les quantités intensives, propres à la logique, et les quantités extensives, propres aux mathématiques, de telles limites s'éclairent en effet : « Faut-il s'étonner qu'une telle définition exclusivement intensive de la non-contradiction ne suffise plus à rendre compte de la cohérence propre aux systèmes extensifs et numériques ? ». La non-contradiction « classique » étant ainsi intimement liée selon Piaget à la structure de groupement et à la quantité intensive, elle ne saurait être adéquate à ce qui la dépasse¹²

La solution que propose ainsi Jean Piaget, s'appuyant sur les travaux de Gustave Juvet¹³, est de considérer la non-contradiction logique $p \wedge \neg p = \perp$

12. « Dans la mesure où le nombre déborde la classe intensive, dans cette même mesure ou pour les mêmes raisons le raisonnement par récurrence ne peut que demeurer irréductible aux compositions opératoires de la logique bivalente des propositions. L'extension considérable de fécondité que marque le passage du logique au mathématique tient donc à toute la différence qui sépare du simple « groupement » [...] les groupes numériques, algébriques et géométriques [...].

Or, c'est précisément cette structure fondamentale de groupe qui assure la rigueur du raisonnement mathématique » ([193], 325).

13. tels que *L'axiomatique et la théorie des groupes*, dans lequel il est montré que c'est seulement en découvrant le « groupe fondamental » sur lequel repose une théorie que l'on est certain de la cohérence interne de celle-ci.

comme « un simple cas particulier du non-contradictoire caractérisant la logique des opérations réversibles en général » ([193], 320), dans la mesure où les mathématiques « débordent le cadre intensif et relèvent par conséquent d'un critère plus délicat de non-contradiction. » ([193], 321) Il s'agirait ainsi de définir une « non-contradiction arithmétique », et après avoir montré que la non-contradiction logique exprime la réversibilité inhérente à un groupement, Piaget en conclut que :

« si la non-contradiction en général se ramène à la réversibilité en général, chaque ensemble de groupes enveloppe sa non-contradiction et comporte son critère spécial de contradiction, en référence avec l'opération identique du système. De ce point de vue, la logique des mathématiques se réduit aux structures mathématiques elles-mêmes. » ([193], 321)

En réalité, cette idée d'une non-contradiction mathématique, plus fine que la non-contradiction logique, s'enracine dans la « logique » des actions elles-mêmes, mêmes les plus élémentaires¹⁴.

10.2 Comparaison avec d'autres approches philosophiques

10.2.1 Piaget et la phénoménologie

Dans [193], c'est la voie de la phénoménologie de Husserl qui semble à Piaget s'opposer le plus clairement au projet d'une épistémologie génétique. Le point essentiel de l'opposition apparente entre phénoménologie et épistémologie génétique est le suivant :

« La première thèse essentielle de la phénoménologie est celle que Husserl a développée en ses *Logische Untersuchungen* : la vérité est d'ordre normatif et ne relève pas de la simple constatation de fait. » ([193], 29)

Cette distinction phénoménologiquement cruciale entre la norme et le fait pose à l'épistémologie génétique deux questions : celle des rapports entre la norme et le fait et celle de la genèse des normes. Piaget résout la première en

14. « Le procédé suivi par la pensée réelle consiste [...] non pas à raisonner sur des définitions seules, ce qui manque d'intérêt pour elle (la définition n'étant de ce point de vue qu'une prise de conscience rétrospective, et souvent incomplète), mais à agir et à opérer, en construisant les concepts selon les possibilités de composition de ces actions ou opérations. Un concept n'est, en effet, qu'un schème d'action ou d'opération, et c'est en exécutant les actions engendrant A et B que l'on constatera si elles sont compatibles ou non. Loin d'« appliquer un principe », les actions s'organisent selon des conditions internes de cohérence, et c'est la structure de cette organisation qui constitue le fait de pensée réelle correspondant à ce qu'on appelle, sur le plan axiomatique, le « principe de contradiction ». » ([191], 48)

introduisant la notion de « faits normatifs »¹⁵. Pour ce qui est de la seconde question, Piaget souligne que

« L'analyse des rapports entre la conscience et l'organisme nous conduira précisément à reconnaître que, dissociée de ses concomitants physiologiques, la conscience constitue tôt ou tard des systèmes d'implications dont la nécessité se distingue essentiellement des relations de causalité propres à l'explication des faits matériels. » ([193], 30)

On voit ici apparaître, esquissée, la solution que Piaget proposera à la critique en « psychologisme » et la réponse à la question de la genèse des normes : l'enracinement de la nécessité dans les relations entre l'organisme et son milieu, dont les opérations conscientes sont le développement.

Autre point de tension entre la phénoménologie et l'épistémologie génétique : l'idée phénoménologique d'une connaissance des « intentions » de la conscience, indépendantes de leur réalisation, et rendues accessibles par la « réduction » phénoménologique. Or il est possible pour Piaget de concevoir une convergence entre la phénoménologie de Husserl et l'épistémologie génétique :

« l'essentiel de bien des processus génétiques consiste en une orientation dirigée vers certains états d'équilibre : il n'est donc pas exclu au préalable que l'« intention » de Husserl puisse trouver quelques confirmations dans l'étude de ces directions génétiques ». ([193], 31)

Cette convergence passe par le rapprochement entre les « structures » husserliennes et les états d'équilibre mis en évidence par l'épistémologie génétique :

« le problème des rapports entre le possible et le réel [...] se retrouve partout où se pose un problème d'équilibre, l'équilibre impliquant la considération de l'ensemble des transformations possibles (tels les « travaux virtuels » du fameux principe mécanique) et non pas seulement des conditions réalisées. » ([193], 31)

Par sa conception dynamique de l'équilibre, résultant de l'action de transformations « virtuelles », Piaget entend ainsi se rapprocher de la notion d'intention propre à la phénoménologie.

« Devenir mental et permanence normative »

Pour Piaget, le problème central est celui du rapport entre le fait psychologique du développement et la norme logique :

15. « la norme aussi est un fait, c'est-à-dire que son caractère normatif se traduit par l'existence, expérimentalement constatable, de certains sentiments d'obligations ou d'autres états de conscience *sui generis* : implications senties comme nécessaires, etc. » ([193], 30).

« trouver une interprétation de la pensée qui ne se heurte pas à la logique comme à une donnée première et inexplicable, mais qui respecte le caractère de nécessité formelle propre à la logique axiomatique tout en conservant à l'intelligence sa nature psychologique essentiellement active et constructive. » ([191], 70)

Ce problème peut être ramené à deux questions : celle du rapport entre l'action et la pensée, et celle du rapport entre le possible et le réel. Alors en effet que la plupart des théories non-génétiques et quelques théories génétiques, telles que l'empirisme classique, conçoivent la pensée comme antérieure à l'action,

« du point de vue de l'analyse génétique, au contraire, l'action précède la pensée et celle-ci consiste en une composition toujours plus riche et cohérente des opérations qui prolongent les actions en les intériorisant. D'un tel point de vue, les normes de vérité expriment donc d'abord l'efficacité des actions, individuelles et socialisées pour traduire ensuite celles des opérations et enfin seulement la cohérence de la pensée formelle. » ([193], 34)

Mais cette question n'est que la surface d'un problème bien plus profond : celui du rapport entre le possible et le réel. Et c'est la notion d'équilibre qui joue le rôle de la jonction entre le réel et le possible, et celle de réversibilité, qui assure le passage du devenir physique ou mental à l'intemporel logique. Un système mécanique est dit en équilibre pour Piaget lorsqu'il y a une composition entre des mouvements virtuels¹⁶. Mais une telle situation d'équilibration n'est donc possible que lorsqu'il y a réversibilité croissante des actions, c'est-à-dire lorsqu'il devient possible de composer des actions inverses pour définir l'action nulle :

« La réversibilité, qui transforme les actions en opérations, présente ainsi ce caractère propre à l'intelligence et ignoré de l'action réelle, de remonter le cours du temps et de s'affranchir de celui-ci pour atteindre l'implication logique pure. » ([193], 37)

Il n'y a donc pas lieu, pour Piaget, d'opposer le génétique au logique, les normes au processus de développement, car tout processus génétique aboutit à un équilibre qui rejoint le normatif¹⁷.

16. « Parler d'équilibre c'est donc insérer le réel dans un ensemble de transformations, simplement possibles. Mais, réciproquement, ces possibilités sont elles-mêmes déterminées par les « liaisons » du système, c'est-à-dire par le réel [...]. L'action aboutira donc à constituer un état d'équilibre, c'est-à-dire qu'elle engendrera un système de relations stables, lorsque l'ensemble des opérations virtuelles se compenseront exactement. » ([193], 36)

17. La perspective ouverte par Piaget n'est pas la seule pensée possible de l'équilibre. On pourrait ainsi la distinguer de celle proposée par Hayek dans *Droits, Legislations, Libertés*, où les équilibres (les ordres spontanés) sont le produit de normes.

10.2.2 Piaget et l'épistémologie naturalisée

Le projet d'une épistémologie génétique et l'appui qu'il trouve dans la psychologie du développement met en lumière le lien entre la logique et les mathématiques d'une part, la psychologie et la biologie d'autre part. C'est en effet à ces dernières qu'il revient, dans le projet même de l'épistémologie piagétienne, dans son versant psychogénétique, de décrire les sources de la connaissance logico-mathématique. En ce sens, Piaget procède à une naturalisation de l'épistémologie des mathématiques, au sens défini par Quine :

« the recognition that it is within science itself, and not in some prior philosophy, that reality is to be identified and described » ([211], 21).

Or une telle position n'est pas sans évoquer le projet de Penelope Maddy de fonder le réalisme ensembliste dans une épistémologie naturalisée, plus exactement dans une théorie cognitive de la perception, dans [160]. En effet, si les conclusions épistémologiques qui en sont tirées divergent, Maddy et Piaget partagent une même méthode – et certains travaux de Piaget figurent d'ailleurs dans la bibliographie de Maddy. Jean Petitot résume en ces termes le projet de Maddy :

« Penelope Maddy a elle aussi développé cette idée que la question du platonisme est un problème scientifique (de sciences cognitives) et non pas philosophique. L'une de ses thèses principales est que les ensembles sont, du moins au départ, c'est-à-dire au niveau de l'amorçage concret des chaînes causales, des entités perceptibles, constituant une espèce naturelle et avec lesquelles nous pouvons entretenir une relation d'« acquaintance ». Tels qu'elle les décrit, ces ensembles concrets (naïfs et primitifs) sont des *Gestalten* perceptuelles localisées sur les agrégats d'objets qu'elles unifient et permettent de dénombrer. Il existe, selon elle, des « sets detectors » dans notre esprit et par conséquent :

« as in the case of knowledge of physical objects, it is the presence of the appropriate detector which legitimizes the gap between what is causally interacted with, and what is known about. »

Bref, ces ensembles concrets qui ne sont pas des entités séparées indépendantes sont causalement responsables de croyances perceptuelles et celles-ci peuvent par conséquent être acquises par des sujets. » ([189], 154)

Maddy prend pour point de départ l'idée défendue par Gödel d'une intuition mathématique analogue à la perception des objets physiques, et dans cette perspective, « [she] will argue below that people often perceive sets of physical objects » ([160], 170) et pour ce faire elle s'appuie sur les travaux de D. Hebb, en particulier *The Organization of Behavior : A Neurophysiological*

theory, et notamment sur la structure rétinienne des grenouilles, montrant des « bug-detectors ». De même, il serait selon elle possible de trouver dans la structure cérébrale humaine des « set-detectors », acquis au fur et à mesure de notre développement cognitif.

Ce rapprochement entre Maddy et Piaget n'est pas une proximité de thèses philosophiques, mais une proximité de méthodes (ce qui rejoint l'idée défendue par Piaget d'une neutralité philosophique de la méthode psychogénétique) : il s'agit dans les deux cas de ramener la connaissance mathématique à des données scientifiques, c'est-à-dire une réalité définie par le discours scientifique et non philosophique : une naturalisation de l'épistémologie. Ce discours scientifique est d'abord celui de la psychologie, qui elle-même est pensée comme le prolongement du rapport entre l'organisme et son milieu, dans la mesure où les équilibres qui émergent dans le champ de la connaissance ne sont qu'une forme intériorisée des équilibres entre le vivant et son milieu.

10.2.3 Piaget et l'intuitionnisme

Les mécanismes de la construction

Mais la question qui se pose est alors de savoir quel est le statut de ces structures.

Piaget ancre son structuralisme dans une perspective génétique, ce qui le conduit à élaborer une épistémologie constructiviste. Cette démarche constructiviste l'amène à se rattacher à « son Maître vénéré » Brunshvicg ([201], 225), mais aussi à Bachelard et aux néo-kantiens comme Cassirer, et à s'opposer tant à l'empirisme qu'à l'innéisme de Chomsky ou de Konrad Lorentz (et « non pas de l'apriorisme au sens de l'apriorisme transcendantal kantien » ([201], 227)). Pour Piaget, le principe fondamental du constructivisme est que :

« La connaissance n'est jamais prédéterminée ni dans les objets, parce que les objets ne se réduisent pas à des accumulations d'observables ; l'objet n'est connu qu'à travers des relations, des interprétations, par approximations successives, et nous n'atteignons jamais l'objet en lui-même, nous nous en approchons indéfiniment, mais sans jamais l'atteindre en lui-même. Et, d'autre part, la connaissance n'est pas non plus déterminée par des structures innées ou a priori du sujet »¹⁸. ([201], 225)

La critique de l'innéisme de Chomsky est conduite en opposant à l'hérédité « un autre phénomène, qui est aussi général à toutes les échelles de l'orga-

18. Cette dernière remarque semble entrer en tension avec la perspective d'une épistémologie naturalisée. Cependant, c'est par sa dimension génétique que l'épistémologie de Piaget résout cette difficulté : tout est à construire, dans l'organisation cognitive de l'esprit humain

nisme [...], c'est le mécanisme de l'auto-régulation¹⁹. » Cette discussion de l'empirisme et de l'innéisme permet à Piaget de montrer que

« les structures cognitives, quoique devenant nécessaires, quoique représentant ce caractère fondamental de l'a priori kantien qu'est la nécessité, nécessité que je mets au terme et que Kant mettait au point de départ [...] ne sont pas pour autant innées : elles ne sont pas pour autant préalables ; elles supposent nécessairement une construction²⁰ ». ([201], 229).

Un des mécanismes fondamentaux de cette construction est, nous l'avons vu, l'abstraction réfléchissante, par laquelle « il y a là nécessairement quelque chose de neuf. En fait c'est ainsi que procèdent quantité d'inventions mathématiques, qui consistent à tirer de travaux antérieurs ce qui servait simplement d'instrument pour en faire la thématization de théories nouvelles. » ([201], 229)

Constructivisme piagétien et intuitionnisme

Mais quelle relation entretiennent le structuralisme constructif de Piaget et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting ?

Sur le terrain du nombre, on a pu voir se dessiner un rapprochement entre Piaget et Brouwer, par l'intermédiaire de Poincaré²¹. Le rapprochement avec Poincaré tient au fait que les deux mathématiciens défendent selon Piaget une intuition du nombre pur, par opposition au logicisme de Russell. Or pour Piaget,

19. « N'importe quel organisme suppose un système, non pas seulement de régulation, mais d'autorégulation, d'autoorganisation [...], mécanisme commun à la vie organique ou biologique et à la connaissance ou activités cognitives. » ([201], 228)

20. Une remarque s'impose néanmoins : le structuralisme constructiviste de Piaget ne se présente jamais comme un retour à des éléments qui seraient premiers et fondamentaux :

« Certes les structures humaines ne partent pas de rien et si toute structure est le résultat d'une genèse, il faut résolument admettre, au vu des faits, qu'une genèse constitue toujours le passage d'une structure plus simple à une structure plus complexe, et cela selon une régression sans fin (dans l'état actuel de nos connaissances). Il y a donc des données de départ à assigner à la construction des structures logiques, mais elles ne sont ni premières, puisqu'elles marquent simplement le début de notre analyse faute de pouvoir remonter plus haut, ni déjà en possession de ce qui sera à la fois tiré d'elles et appuyé sur elles dans la suite de la construction. Nous désignerons ces données de départ par le terme global de « coordinations générale des actions » [...]. » ([196], 54)

21. Piaget rappelle en effet que « pour Brouwer, qui a renouvelé l'intuitionnisme de Poincaré en l'opposant au formalisme logique dans le détail des raisonnements constructifs eux-mêmes (négation du principe du tiers-exclus pour les collections infinies), le caractère essentiel d'une entité mathématique est, non pas simplement d'être exempte de contradiction (ce qui ne suffit plus, selon cet auteur, à lui assurer l'existence) mais bien de pouvoir être construite effectivement. » ([193], 92)

« Entre la réduction insuffisamment opératoire de Russell et l'intuition directe de Poincaré et de Brouwer, il peut exister un tertium. » ([193], 92)

Or ce troisième terme, élaboré à partir de ses expérimentations psychogénétiques sur l'enfant, consiste en la synthèse dans le nombre des opérations de réunion et de sériation, de sorte que « indissociable du « groupement » des classes et de celui des relations asymétriques, la suite des nombres ne saurait donc bénéficier du privilège d'une intuition première » ([193], 94)

Mais la critique que Piaget mène de l'intuitionnisme de Brouwer dépasse la question du nombre :

« Quant à faire avec Brouwer, de la construction opératoire une réalité dépassant le non-contradictoire de caractère logique, c'est oublier que, à côté du jeu formel des propositions combinées en une axiomatique, la logique vivante elle-même requiert déjà ce caractère opératoire et que la non-contradiction effective se fonde elle-même sur la réversibilité inhérente aux opérations constructrices des classes et des relations en même temps que les nombres. » ([193], 95)

Il apparaît ainsi que Piaget remet en question les limitations imposées par l'intuition de Brouwer à la logique, et entend retrouver au cœur de la « logique vivante », en raison du caractère inséparable des classes, des relations et nombres, une forme de constructivisme²².

Certes, Piaget admet avec Brouwer une différence de nature entre les mathématiques et la logique²³ et c'est ce qui a conduit Brouwer selon Piaget à affirmer que la logique dépend des mathématiques au lieu de la dominer. L'intuitionnisme néanmoins ne conteste pas la valeur universelle du principe de non-contradiction : il insiste simplement sur les difficultés de son application aux collections infinies, dans la mesure où dans ce cas, il devient difficile de donner un sens à la quantification universelle, qui n'est possible que dans le cas d'une construction bien déterminée, comme justement celle qui s'appuie sur la suite des entiers²⁴. Cela conduit donc nécessairement à

22. En effet, selon Piaget,

« Résolu à n'admettre que les êtres mathématiques effectivement construits, Brouwer a été conduit à réexaminer la valeur des raisonnements portant sur les ensembles infinis et l'utilisation des démonstrations par l'absurde. Réduisant alors la logique à une simple classification verbale des ensembles finis, il a résolument mis en doute l'emploi du tiers exclu dans l'infini, en admettant la possibilité d'un tertium : l'indémontrable, situé entre le vrai, ou effectivement construit, et l'absurde. » ([193], 319)

23. « La différence entre les mathématiques et la logique tient essentiellement, sur le plan interpropositionnel, au passage des opérations finies à celles qui sont généralisables à l'infini » ([192], 374)

24. Brouwer en tirerait ainsi la conclusion suivante :

« reconnaître l'irréductibilité des constructions opératoires de caractère mathématique par rapport aux opérations logiques bivalentes. [...] Plus précisément, sitôt qu'intervient l'infini, l'universel « tous » perd sa signification logique. De deux choses l'une, alors : ou il cesse de présenter un sens, ou bien il en acquiert un, mais exclusivement grâce à une loi de construction : seulement les opérations qui constituent celle-ci débordent en ce cas le champ des opérations logiques (intensives). » ([192], 377)

Et c'est cette seconde direction que va suivre Piaget, afin de rendre possible un constructivisme mathématique.

Il va s'agir ainsi de repartir de l'idée de Brouwer selon laquelle « la vraie logique des mathématiques serait la structure propre au nombre ou aux opérations mathématiques elles-mêmes. » ([192], 377) Cela a conduit Heyting dans un premier temps à proposer une logique formelle intuitionniste, dans laquelle par exemple on a $\vdash p \rightarrow \neg\neg p$, sans que la réciproque ne soit vraie. A partir de là, plusieurs mouvements d'idées ont émergé selon Piaget. Ainsi par exemple, Gonseth, dès 1926, refusant d'admettre avec Brouwer l'inadéquation générale de la logique classique et du tiers exclu dans le cas de l'infini mathématique, a adopté une position intermédiaire, proposant un principe du quart exclu conciliant les axiomes de Hilbert et le règle de triple absurdité de Brouwer. S'est dégagé également un second courant aboutissant à la constitution d'une logique sans négation.

Or cette dernière piste révèle des éléments importants de l'épistémologie intuitionniste, mais également du constructivisme piagétien :

« Le propre de la conception brouwérienne des mathématiques est l'exigence d'une constructibilité entière [...]. Or, par un paradoxe qui mérite l'attention, il se trouve que, contrairement à tout ce que nous avons vu jusqu'ici de l'opération, Brouwer introduit de l'irréversible en mathématiques mêmes ; de p on peut tirer $\neg\neg p$, mais de $\neg\neg p$ on ne peut plus revenir à p , c'est-à-dire que la double négation ne ramène plus à l'affirmation. [...] L'irréversibilité brouwérienne ne conduit donc pas à la notion, qui serait contradictoire, d'opérations irréversibles. Elle exprime seulement les limites de l'opération logique lorsqu'on ne peut connaître tous les termes sur lesquels elle porte, faute de construction opératoire : elle est une irréversibilité de fait et non pas de droit.

Cette sorte d'irréversibilité apparente ou provisoire, c'est-à-dire de fait et non de droit, qui caractérise l'infini non construit du

« l'opération numérique déborde la non-contradiction et la non-contradiction ne suffit pas à épuiser l'existence mathématique : celle-ci est « intuitive », selon la terminologie de Brouwer, c'est-à-dire relative à une construction opératoire effective dépassant le cadre des opérations de la logique bivalente. » ([192], 376)

brouwérisme confirme donc, en montrant ce que sont les limites de l'opérateur, la thèse de la réversibilité de l'opération. » ([192], 380-381)

Or dans une logique formelle sans négation, réduite à l'implication et à la conjonction, il reste possible d'énoncer une forme de non-contradiction, mais sans passer par l'inversion de la négation : il s'agit en effet d'introduire la notion de compatibilité, de sorte que

« La leçon de cette intéressante tentative est donc que, à vouloir se priver de la négation et de la non-contradiction, on dissocie simplement cette dernière en ses deux composantes : la complémentarité d'une part, et la réversibilité en général d'autre part, même si cette dernière demeure incomplète. » ([192], 382)

« La non-contradiction logique et la nature du raisonnement mathématique »

C'est dans la perspective structuraliste que Piaget va trouver la solution à ces difficultés.

En effet, si la portée générale du tiers exclu a pu être légitimement mise en doute par Brouwer, celle du principe de non-contradiction n'a nullement été contestée, du moins dans le même sens. L'idée centrale de Piaget est donc la suivante :

« Si toute logique a besoin d'un principe de non-contradiction, il ne s'ensuit pas qu'il soit le même pour tous les systèmes. » ([192], 385)

On retrouve ici, de façon plus précise, ce qui a déjà été énoncé dans la critique du positivisme logique dans [193]²⁵. Or cette idée d'une pluralité de formes de la non-contradiction se trouve pour Piaget confirmée par les théorèmes d'incomplétude de Gödel, sous la forme d'une « insaturation » essentielle des théories « aussi fortes » que l'arithmétique, de telle sorte que seule la solution proposée par Gentzen en 1936, montrant la nécessité d'une théorie « plus forte » (l'arithmétique transfinie) pouvait assurer cette non-contradiction. Théorèmes de Gödel et preuve de Gentzen articulent ainsi de façon intime le structuralisme et le constructivisme :

« Le premier intérêt de telles constatations est qu'elles introduisent la notion de la plus ou moins grande force ou faiblesse des structures en un domaine délimité où elles sont comparables. La hiérarchie ainsi introduite suggère alors aussitôt une idée de construction [...]. Or, cette idée de construction n'est pas une simple vue de l'esprit. Le second enseignement fondamental des

25. « Le schéma bivalent du vrai et du faux semble impropre à s'adapter à toutes les formes de la quantité extensive et que le principe $(p \wedge \neg p \equiv \perp)$ n'est peut-être que l'une des formes particulières de la non-contradiction. » ([192], 386)

découvertes de Gödel est, en effet, de l'imposer de façon très directe, puisque, pour achever une théorie dans le sens de la démonstration de sa non-contradiction, il ne suffit plus d'analyser ses présuppositions mais il devient nécessaire de construire la suivante. [...] L'idée de la structure comme système de transformations devient ainsi solidaire d'un constructivisme de la formation continue. » ([196], 30-31)

Telle est alors l'interprétation que Piaget propose de ces résultats : d'une part, « le nombre des opérations possibles de la pensée n'est pas fixé une fois pour toutes et pourrait bien s'accroître » ([196], 31), et d'autre part,

« les structures arithmétiques pourraient bien constituer des formes plus riches que les formes logiques et ces dernières ne parviendraient alors pas davantage à englober les formes supérieures à elles que la partie n'est apte à s'intégrer le tout ; en ce cas, la non-contradiction de l'arithmétique ne saurait être démontrée dans l'arithmétique, non pas parce que l'arithmétique contiendrait des propositions ni vraies ni fausses (relativement aux opérations arithmétiques elles-mêmes), mais parce que la non-contradiction logique serait d'une espèce trop peu affinée pour s'appliquer adéquatement à la non-contradiction mathématique.

[...] Si le principe $(p \wedge \neg p \equiv \perp)$ est inattaquable, il n'est pas certain qu'il épuise le non-contradictoire. Il n'exprime qu'une certaine forme de cohérence opératoire parce que la signification formelle de la négation $\neg p$, par rapport à l'affirmation p , est relative au système d'ensemble des propositions envisagées. Si l'on se place à ce point de vue de structures totales, on peut légitimement, en effet, rechercher s'il n'existe pas des degrés dans la cohérence des systèmes d'opérations et par conséquent des degrés dans la non-contradiction elle-même. » ([192], 388)

On voit ici apparaître clairement en quoi la perspective structuraliste développée par Piaget est en même temps une réponse aux limitations imposées par l'intuitionnisme à la « logique vivante », et une nouvelle analyse de la notion de contradiction : la cohérence est d'abord celle d'une structure opératoire, qui se trouve garantie par l'autorégulation et par le caractère de totalité propre à toute structure. La distinction entre non-contradiction mathématique et non-contradiction logique s'appuie sur l'analyse des deux aspects de la non-contradiction logique, mis en lumière précédemment : la complémentarité et la réversibilité :

« Deux réalités fondamentales, mais distinctes, interviennent donc dans la non-contradiction logique. L'une est générale et se trouve ainsi apte à prendre bien d'autres formes que la non-contradiction spécifiquement logique : c'est la réversibilité. De ce point de vue, est contradictoire tout produit non nul d'opérations dont l'une

est l'inverse de l'autre. La seconde réalité est par contre spéciale à la logique : les opérations qui interviennent en logique des propositions ne sont relatives qu'à un « groupement », c'est-à-dire à un système de simples complémentarités. » ([192], 389)

Il devient ainsi possible de caractériser la non-contradiction en général, par la nullité du produit d'une opération directe et de son inverse :

$$(Op)^1 \times (Op)^{-1} = 0$$

où 1 et -1 expriment les opérations directes et inverses.

Se dégagent ainsi par là même la parenté entre les inférences mathématiques et les inférences logiques : dans les deux cas, la construction est rigoureuse dans la mesure où elle est réversible : « la réversibilité constitue donc le principe rationnel fondamental » ([192], 390), réversibilité dont on a vu, à travers les apports de la psychologie du développement, comment elle est articulée par Piaget à la notion d'équilibre et d'autorégulation. D'autre part :

« par-delà les principes trop pauvres de l'identité et de la non-contradiction intensives ou bivalentes, la mathématique est sans cesse garantie contre l'incohérence, même sur les points où elle déborde le cadre logique dans lequel on voudrait l'enfermer. Mais c'est aussi pourquoi la logique elle-même, si elle veut conserver le contact avec le dynamisme réel de la pensée, doit reconnaître dans l'identique et dans le non-contradictoire par complémentarité, les premières approximations seulement d'un principe régulateur qui les dépasse et qui est la réversibilité des mécanismes opératoires en général. Seules, nous l'avons vu, les opérations portant sur un infini non construit peuvent être regardées comme étant sans retour : mais cette irréversibilité de fait marque alors les limites de la construction opératoire, par opposition à la construction rationnelle elle-même, toujours caractérisée par une réversibilité de droit. » ([192], 391).

En d'autres termes, si le structuralisme piagétien est bien un constructivisme, c'est au sens où la construction permanente de nouvelles structures, par abstraction réfléchissante et généralisation constructive, vient garantir la cohérence de totalités infinies sans cesse en attente de leur cohérence structurale. On voit ainsi apparaître la nécessité d'une « généalogie des structures qu'impose la distinction introduite par Gödel entre la plus ou moins grande « force » ou « faiblesse » des structures ainsi que « les relations indissociables entre structuralisme et constructivisme. » ([196], 13)²⁶

26. Ainsi par exemple, « la structure de groupe est par conséquent un instrument de cohérence, qui comporte sa propre logique par son réglage interne ou autorégulation. » ([196], 19)

10.2.4 Piaget et l'idée de dialectique

L'épistémologie structuraliste de Piaget, appuyée sur le constructivisme, et faisant donc intervenir de façon essentielle le mouvement constant d'élargissement des totalités ; ne peut ainsi que faire intervenir la notion de dialectique²⁷. Mais ce nécessaire caractère dialectique doit être pris chez Piaget en un sens spécifique :

« il ne s'agit pas simplement de thèse, d'antithèse et de synthèse ; en fait, il s'agit d'états d'équilibre momentanés qui sont rompus parce qu'un fait nouveau vient contredire ce que l'on croyait, ou qu'une nouvelle découverte est faite dans un édifice que l'on croyait complet. Les faits nouveaux créent des déséquilibres, ceux-ci créent des rééquilibrations, qui ne sont pas toujours nécessairement des dépassements [...]. Ces dépassements, ces rééquilibrations, ne ramènent pas à l'état initial : ils sont toujours majorants, c'est-à-dire atteignant un équilibre supérieur à ce qui était avant. Ce qui était avant devient sous-système d'un système plus large ultérieur. Ce n'est donc pas la dialectique au sens précis de Hegel, c'est quelque chose de plus large, que j'appellerai équilibration. » ([201], 226)

Mais quelle est la place du sujet, mathématicien ou non, dans ce structuralisme constructiviste et dialectique ? On a en effet souvent reproché au structuralisme d'avoir « tué l'homme », reproche que Piaget trouve par exemple dans *Les mots et les choses* de Foucault. Or, pour Piaget,

« En premier lieu, il convient de distinguer le sujet individuel, qui n'intervient point ici, et le sujet épistémique ou noyau cognitif commun à tous les sujets de même niveau. En second lieu, il faut opposer à la prise de conscience, toujours fragmentaire et souvent déformante, ce que parvient à *faire* le sujet en ses activités intellectuelles, dont il connaît le résultat et non pas le mécanisme. Mais si l'on dissocie ainsi le sujet du « moi » et du « vécu », il reste ses *opérations*, c'est-à-dire ce qu'il tire par abstraction réfléchissante des coordinations générales de ses actions » ([196], 120)

Il s'agit donc finalement pour Piaget de « restaurer l'esprit dialectique dans le double sens d'une dialectique de la structure et de la genèse et d'une dialectique du sujet et de l'objet²⁸. » ([195], 80) Cette idée d'une dialectique

27. « Sur le terrain des sciences elles-mêmes le structuralisme a toujours été solidaire d'un constructivisme auquel on ne saurait refuser le caractère dialectique avec ses signes distinctifs de développements historiques, d'opposition des contraires et de « dépassements », sans parler de l'idée de totalité commune aux tendances dialectiques autant que structuralistes. » ([196], 102)

28. Piaget voit cette dernière à l'œuvre déjà chez Brunshvicg « lorsqu'il soutient [...] qu'aucun système n'est définitif et qu'aucun fondement n'est jamais stable, chaque

historique a pour conséquence une certaine conception de l'objectivité elle-même :

« la relativité fondamentale de l'objet par rapport à ses interprétations successives n'oblige en rien à douter de son existence [...] l'objet n'est connu qu'à travers les actions du sujet qui, en le transformant, parvient à reconstituer à la fois les lois de ces transformations (comprenant son mode de production) et les invariants qu'elles comportent. L'objectivité n'est ainsi obtenue qu'au terme d'un long processus au lieu d'être donnée au départ comme le voudrait l'empirisme. [...] L'objet constitue la limite (au sens mathématique du terme) d'approximations qui ne se succèdent par fortuitement mais selon un déroulement plus ou moins orthogénétique [...] on n'est jamais certain d'en avoir atteint le terme final²⁹ » ([195], 116).

Ainsi si la position constructiviste invite à penser la connaissance comme liée à une action qui modifie l'objet, par là-même, remarque Piaget,

« le sujet n'est plus face à l'objet, – et sur un autre plan –, à le regarder tel qu'il est ou à travers des lunettes structurantes : il plonge dans l'objet par son organisme, nécessaire à l'action, et réagit sur l'objet en l'enrichissant des apports de l'action ; c'est-à-dire que sujet et objet sont désormais situés exactement sur le même plan [...]. En bref, il n'y a plus en droit de frontière entre le sujet et l'objet : le sujet se prolonge en ses outils, instruments ou appareils insérés dans l'objet, de même que sa logique et ses mathématiques traduisent les structures progressives de la coordination de ses actions, coordination dont les sources remontent jusqu'aux coordinations nerveuses et organiques. » ([195], 1244)

Ainsi pour Piaget – et sur ce point il s'appuie sur la *Critique de la Raison dialectique* de Sartre, il ne saurait y avoir de sujet en soi, pas plus que de conscience stable, permanente et identique à elle-même³⁰.

construction demeurant relative à une situation particulière et à un moment déterminé de l'histoire. Mais [...] l'acquis n'est point menacé de disparaître, mais est simplement appelé à s'intégrer en des constructions plus larges et plus compréhensives. » ([195], 115)

29. Ainsi, « un tel devenir ne consiste donc pas en une succession purement contingente, mais en un processus d'intégration et d'équilibration, donc en une dialectique réelle et rationnellement vécue » ([195], 117).

30. « Le sujet n'est pas donné non plus sous une forme permanente, car il s'élabore en fonction de instruments matériels ou intériorisés qu'il façonne pour agir sur l'objet [...]. le sujet non plus n'est pas distribué sur un seul plan, mais on retrouve en lui l'équivalent des échelles sous la forme de niveaux d'activité s'étendant entre les interactions biologiques, les interactions nerveuses, les comportements élémentaires, etc. jusqu'aux formes supérieures de la pensée abstraites. Or, chacun de ces niveaux est relatif à un certain mode d'interdépendance avec l'objet, depuis le milieu organique jusqu'à l'« objet quelconque » sur lequel portent les structures logico-mathématiques. » ([195], 1261)

On pourrait ici objecter à Piaget que la notion de structure, d'action, de schème d'action, d'abstraction réfléchissante, etc., sont des absolus – qui sont utilisés à tous les stades de développement. Cependant Piaget montre que la psychologie du développement elle-même est prise dans un mouvement dialectique : l'épistémologue appartient ainsi toujours à un certain moment de l'histoire des sciences, qu'il étudie mais également sur lequel il prend appui. Ses outils conceptuels doivent être également analysés dans le mouvement dialectique général, pour dégager ce que Piaget nomme des « vecteurs » de la connaissance humaine, objets de l'« épistémologie généralisée ».

Ainsi, il n'y aurait donc pas de sujet en soi, mais l'émergence d'un sujet mathématicien, naissant de son activité mathématique même, face aux « êtres » mathématiques. Pas de sujet antérieur aux mathématiques qu'il construit, mais un sujet qui naît comme mathématicien en acte. L'épistémologie de Piaget n'est donc en rien un idéalisme ou une philosophie du sujet : l'idée de dialectique impose au contraire une émergence conjointe du sujet mathématicien et de l'objet mathématique, à partir d'un certain niveau d'activité abstraite. Pour Emmanuel Barot, en adoptant le point de vue de cette épistémologie généralisée, on voit ainsi apparaître

« une « raison pratiquement constituante » (Sartre), la praxis mathématicienne. Celle-ci s'objective, *s'aliène*, sous forme de « raison constituée » en aboutissant à l'indépendance, à la fixation et à la codification explicites de son activité. Cette « raison constituée » est l'ensemble des *objets* maniables, des théorèmes que l'on s'approprie, dans le cadre de *textes théoriques, désobjectivés* au terme de l'activité. Ce processus est réactivé par chaque individu lors de son apprentissage personnel. » ([13], 44)

Pour ce qui est de la dialectique de la structure et de la genèse, parallèle à la précédente, Piaget l'explique ainsi :

« point de genèse sans structures, car toute genèse consiste en la transformation progressive d'une structure antérieure sous l'influence de situations nouvelles, et toute genèse aboutit à la construction d'une nouvelle structure [...]. Réciproquement, toute structure comporte la possibilité de nouvelles genèses, puisqu'il n'y a pas de structure définitive marquant l'achèvement de toute construction ; et ceci déjà du point de vue de la validité elle-même, puisque nous avons vu en quoi la perspective gödelienne impose une indéfinie ouverture vers le haut. Et toute structure résulte d'une genèse antérieure, comme en témoigne l'impossibilité d'atteindre un *a priori* véritable ou un fondement premier en un sens absolu³¹. » ([195], 131)

31. « Chaque conquête nouvelle, comme la théorie des ensembles, la topologie, l'algèbre générale, etc., conduit à des remaniements et à des refontes complètes, et non pas seulement à des additions linéaires comme on pourrait s'y attendre si l'on voulait réduire les

Le mouvement dialectique apparaît donc au cœur du devenir mathématique selon Piaget. En ce sens, Piaget offre bien une réponse dialectique à la question que dégage Emmanuel Barot : « comment une science constituée historiquement et en devenir peut-elle être le dépositaire de vérités non-historiques ? » ([12], 80) Barot distingue ainsi trois conceptions de l'épistémologie dialectique :

- « *faibles* : la dialectique est subjective, réflexive, façon com-mode, didactique d'organiser des données extérieures multiples ;
- *intermédiaires* : la pensée humaine procède dialectiquement, c'est-à-dire qu'il y a objectivité, réalité en soi de la dialectique dans nos *processus du pensée* ;
- *fortes* : la dialectique est la loi de l'être et du savoir que l'on prend de l'être. » ([12], 83)

Pour Barot, Piaget appartient au deuxième niveau, *intermédiaire* :

« la version moyenne fait de la dialectique le mode de fonctionnement propre de la pensée humaine : il y a *réalité objective et caractéristique de la dialectique subjective*, c'est-à-dire que la pensée mathématique en acte procède en soi dialectiquement. [...] Elle est celle de la pensée humaine dans son intériorité : cette pensée est déterminée par des processus de structurations, c'est-à-dire de transformations déterminées par des structures que celles-là transforment, etc. et en particulier dans la formation de la pensée mathématique : Piaget défend de façon exemplaire cette version. » ([12], 84)

Dans cette compréhension « intermédiaire » de la dialectique mathématique, Barot retrouve avec Piaget, Bachelard, Gonseth, mais surtout Cavailles et l'idée de « l'expérience mathématique » et de l'indépendance des concepts, inscrits néanmoins dans une dialectique comprise comme « *mouvement de pensée effectif* » ([12], 84), alors que Lautman défendrait une conception forte de l'épistémologie dialectique³².

Barot décrit donc ainsi la dialectique proprement mathématique :

constructions logico-mathématiques à de simples déductions généralisatrices ou au seul affinement du « langage ». » ([195], 1264)

32. Ce mouvement dialectique, de façon générale, conduit nécessairement selon Barot à un « construction dialectique de l'objectivité », qu'il trouve également à l'œuvre dans la *Critique de la raison dialectique* sartrienne :

« on peut directement relier la méthodologie néosartrienne [...] à l'effort consacré par Piaget à l'étude du développement des structures opératoires non conscientes du sujet épistémique (type de tout sujet individuel sans être une hypostase conceptuelle – transcendantale), dont d'une part la logique est censée fournir l'axiomatisation ; et d'autre part, à celle des séries d'abstraction réfléchissantes qui en sont issues. Les objets mathématiques sont dépendants de ces structures opératoires, qui sont le fruit d'une genèse elle-même investissant et supposant des structures stabilisées plus anciennes.

« dans et par ce jeu dans cette dynamique de l'objectivité construite qui advient dans son indépendance sur la base d'un recouvrement entre la preuve, le calcul qui la réalise, et l'activité effective qui effectue celui-ci, nous voyons une dialectique effective et techniquement attestée de la construction mathématique, celle de la dualité créatrice entre immanence des corrélats aux actes et transcendance de leur validité, dans le double statut transcendant (au terme d'une construction réussie) et immanent (rôle d'élément dans une construction ultérieure) des objets déjà construits, dans la temporalité de leur présentation et l'atemporalité de leur usage possible. »([12], 91)

Dans [13], Barot présente cette dialectique à l'œuvre dans la connaissance mathématique comme une « genèse du sens »([13], 33), permettant de « faire « dériver » progressivement l'existence du niveau sémantique, relativement autonome, de la pensée, à partir des mécanismes physiologiques que les sciences étudient, pour montrer ensuite que l'aboutissement de cette genèse, l'existence du sens et des idéalités mathématiques, peut être étudiée indépendamment de cette genèse »([13], 35), en entendant « par *idéalité* un *type* général d'objet transcendant ses *occurrences* particulières, et possédant une réalité non spatio-temporelle. »([13], 36)

Barot montre ainsi que, grâce à la dialectique héritée de Piaget, « les productions objectives (indépendantes de l'expérience subjective) de la pensée, symboliquement codifiées, dérivent, « émergent », d'actes cognitifs biologiquement déterminés, mais ne peuvent ni être éliminés, ni être réduits au profit de ces derniers »([13], 41)

La dialectique piagétienne permet ainsi à Barot de défendre « la thèse d'un *réalisme intentionnel*, c'est-à-dire d'une existence idéale des contenus sémantiques irréductibles au niveau neuro-physiologique³³ ».

[...]Les théories mathématiques sont donc, pour partie au moins dans cette perspective, génétiquement réellement dépendantes de structures opératoires plus élémentaires et partagées que l'on ne maîtrise pas (celles-ci sont déterminées naturellement), mais, à leur niveau d'objectivité propre, en sont formellement indépendantes quant à leur validité et leurs propriétés. »([12], 89)

33. Dans la mesure où

« les contenus sémantiques relèvent d'une genèse à partir du non-sémantique. Mais leur existence étant vécue et éprouvée au travers de l'intentionnalité de la représentation, cette existence, intersubjectivement idéale, n'est plus réductible au fonctionnement des niveaux non-sémantiques : *la réalité indépendante du niveau sémantique n'est plus récusable*. D'où le réalisme intentionnel : cette dialectique du nominalisme [...] et du réalisme intentionnels trouve certains arguments dans les travaux de Piaget »([13], 59)

Toutefois, Il n'est pas si clair que Piaget ait souscrit à cette option réaliste, dans la mesure où il insiste bien plutôt sur la dimension *a priori* des structures de la connaissance.

10.2.5 Piaget et la philosophie transcendantale

Il y a une proximité manifeste entre l'épistémologie génétique de Piaget et l'approche transcendantale kantienne. En témoigne par exemple l'idée défendue par Piaget selon laquelle « [l'intelligence] ne se borne pas, en effet, à opérer sur les objets, pour les réunir en classe, les sérier ou les dénombrer. Son action porte également sur la construction de l'objet comme tel, et [...] cette œuvre est même amorcée dès l'intelligence sensori-motrice » ([191], 68) dans la mesure où « préparée par la continuation des mouvements usuels, la conservation de l'objet est le produit de la coordination des schèmes, en quoi consiste l'intelligence sensori-motrice. [...] L'objet est donc construit par l'intelligence elle-même, dont il constitue le premier invariant » ([191], 152), ce qui n'est pas sans évoquer le travail de synthèse unificatrice de l'objet³⁴ dans la *Critique de la Raison Pure*.

On peut penser également à l'explication que donne Piaget de l'applicabilité des nombres complexes à la physique³⁵.

On voit ici en quoi les structures opératoires apparaissent comme les conditions de possibilité de la connaissance du réel en général et toute confrontation avec le réel semble conditionnée par ces structures³⁶, de telle sorte que, pour Piaget,

« il n'existe pas d'expérience pure, indépendante de tout sujet [...] mais le donné expérimental est dès le départ [...] assimilé à des structures » ([195], 585)

Ainsi Piaget considère lui-même que l'épistémologie génétique le conduit à une forme d'apriorisme :

« en rattachant les structures logico-mathématiques aux formes de la coordination générale des actions, nous faisons par cela-

34. « L'objet n'est pas autre chose que l'invariant dû à la composition réversible du groupe » de sorte que « l'objet et le groupe des déplacements sont donc indissociables, l'un constituant l'aspect statique et l'autre l'aspect dynamique de la même réalité » ([191], 153)

35. « Dire que la rencontre entre le réel et les nombres imaginaires, rencontre se produisant bien après la construction de ceux-ci, est de la même nature que la convergence immédiate des nombres entiers positifs avec les réalités élémentaires, parce que toutes deux tiennent à l'accord entre la coordination d'ensemble des opérations et les transformations physiques fondamentales, c'est simplement supposer que les structures de composition réversible atteintes par les groupements et les groupes d'opérations expriment à la fois les lois les plus générales de la coordination des actions du sujet et les interactions les plus directes entre le sujet et le réel. Tant cette coordination que ces interactions, tout en se différenciant au cours de l'expérience, sont alors à concevoir comme *ne dérivant pas de l'expérience extérieure, parce qu'étant seules à la rendre possible*, mais comme émanant des conditions mêmes de l'organisation psycho-biologique » ([191], 125)

36. « La première phase, qui est celle de l'établissement des faits, n'est déjà elle-même nullement indépendante d'une mathématisation [...]. La raison en est qu'il est impossible de constater ou d'enregistrer un fait, si élémentaire soit-il, sans un cadre de référence logico-mathématique, si élémentaire soit-il, lui aussi [...]. Dès la perception elle-même, de telles structures (géométriques ou autres) interviennent nécessairement » ([195], 583)

même appel à une sorte d'*a priori* fonctionnel qui conditionne chaque action et opération particulières. [...]

La lacune fondamentale de l'apriorisme classique est son caractère statique, dû lui-même à son exigence illusoire de transcendantalisme ou commencement absolu. Il importe donc tout à la fois de relativiser l'*a priori* et de l'assouplir sous la forme d'une construction progressive.

Le relativiser parce que les frontières entre l'expérience et ses conditions préalables ou entre la libre construction et ses cadres nécessaires sont essentiellement relatives aux sujets considérés selon les étapes de leur développement historique ou génétique. » ([195], 593)

« Relativiser l'*a priori* » : cette idée est reprise par Michel Bitbol dans [24] sous la forme d'un « arrière-plan transcendantal historicisé et relativisé » ([24], 266), enraciné dans la dynamique de l'action. Bitbol souligne en effet que,

« Comme le remarque Jean Piaget, il est dès lors « [...] impossible de savoir d'avance si [ces formes] appartiennent au sujet, à l'objet, à tous les deux ou à leur relation seule ». Les formes *a priori*, si ce sont celles de l'action, surgissent d'un processus d'interface qui ne se réduit ni à la préformation de la face sujet, ni à la préstructuration de la face objet de la connaissance, puisque ni l'une ni l'autre de ces faces ne lui préexistent entièrement » ([24], 267),

de telle sorte que

« Sans récuser le dispositif kantien des formes *a priori*, Piaget lui impose un devenir formateur au cours d'une ontogenèse sensori-motrice puis cognitive se déroulant le long de la temporalité de l'enfance, étape après étape des coordinations de l'activité d'exploration de l'environnement » ([24], 295)

Piaget résume ainsi sa compréhension de la connaissance mathématique :

« En un mot, la réalité des mathématiques est celle de leur construction, et si celle-ci est solidaire des caractères les plus généraux de l'organisation vivante [...] la dialectique interne qui anime cette construction constitue une substructure d'une résistance qui n'a rien à envier à celles du platonisme ou de l'apriorisme tout en témoignant d'un dynamisme beaucoup plus proche du cheminement effectif de ce type fondamental de connaissance. » ([195], 596)

Bibliographie

- [1] Jiri Adamek and Jiri Rosicky. *Locally presentable and accessible categories*, volume 189 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 1994.
- [2] Mahima Ranjan Adhikari. *Basic Algebraic Topology and its Applications*. Springer, 2016.
- [3] Pierre Ageron. Autour d'ehresmann : Bourbaki, cavaillès, lautman. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 46(3) :165–166, 2005.
- [4] Gisela Ahlbrandt and Martin Ziegler. Quasi finitely axiomatizable totally categorical theories. *Annals of Pure and Applied Logic*, 30(1) :63–82, 1986.
- [5] F.W. Anderson and K.R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.
- [6] Hisashi Aratake. Bi-interpretability from a categorical viewpoint (model theoretic aspects of the notion of independence and dimension). *Journal of Symbolic Logic*, 83(1) :1–12, 2018.
- [7] Steve Awodey. Structure in mathematics and logic : a categorical perspective. *Philosophia Mathematica*, 4(3) :209–237, 1996.
- [8] Steve Awodey. An answer to Hellman's question : Does category theory provide a framework for mathematical structuralism ? *Philosophia Mathematica*, 12(1) :54–64, 2004.
- [9] John C. Baez and Christian Williams. Enriched lawvere theories for operational semantics. In John Baez and Bob Coecke, editors, *Applied Category Theory 2019*, pages 106–135, 2020.
- [10] Nicolas Balacheff. Seymour papert (1928-2016). Aux sources d'une pensée innovante et engagée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2/3) :383–396, 2017.
- [11] John T. Baldwin. *Model theory and the philosophy of mathematical practice*. Cambridge University Press, 2018.
- [12] Emmanuel Barot. Comment une épistémologie dialectique des mathématiques est-elle possible ? *Pédagogie et cognition. Cahiers Alfred Binet*, 666(1) :79–93, 2001.

- [13] Emmanuel Barot. Dialectique de la nature pensante : la construction de la cognition mathématique. *Philosophia Scientiae*, 6(1) :33–72, 2002.
- [14] Michael Barr and Charles Wells. *Toposes, Triples, and Theories*, volume 278 of *Grundlehren der math. Wissenschaften*. Springer, 1983.
- [15] Michael Barr and Charles Frederick Wells. *Category theory for computer scientists*. Prentice-Hall International Series in Computer Science, 1995.
- [16] Thomas W. Barrett and Hans Halvorson. Glymour and quine on theoretical equivalence. *Journal of Philosophical Logic*, 45(5) :467–483, Octobre 2016.
- [17] Thomas William Barrett and Hans Halvorson. Morita-equivalence. *The Review of Symbolic Logic*, 9(3) :556–582, 2016.
- [18] Andrée Bastiani and Charles Ehresmann. Categories of sketched structures. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 13(2) :104–214, 1972.
- [19] Jonathan Mock Beck. *Triples, algebras and cohomology*. PhD thesis, Columbia University., 1967.
- [20] J.L. Bell. *Toposes and Local Set Theories : an Introduction*, volume 14 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, 1988.
- [21] Jean Bénabou. Structures algébriques dans les catégories. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 10(1) :1–126, 1968.
- [22] Hourya Benis-Sinaceur. Modernité mathématique : quelques invariants épistémologiques. *Revue d'histoire des sciences*, 55(1) :83–100, 2002.
- [23] Paul Bernays. Review of Ein Unbekannter Brief von Gottlob Frege über Hilberts erste Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie. *The Journal of Symbolic Logic*, 7(2) :92–93, 1942.
- [24] Michel Bitbol. *Maintenant la finitude. Peut-on penser l'absolu ?* Flammarion, 2019.
- [25] Marie Bjerrum. A sketch theoretical survey. Towards a typology of mathematical structures. *Diagrammes*, 61-62 :1–63, 2009.
- [26] P. BOUTROUX. *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes*. Nouvelle collection scientifique. F. Alcan, 1920.
- [27] Marta C Bunge. Relative functor categories and categories of algebras. *Journal of algebra*, 11(1) :64–101, 1969.
- [28] Samuel R. Buss, Alexander S. Kechris, Anand Pillay, and Richard A. Shore. The prospects for mathematical logic in the twenty-first century. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7(2) :169–196, 2001.

- [29] Jean Bénabou. Catégories algébriques et théorie de la descente. *Séminaire Albert Châtelet et Paul Dubreil*, 21(2), 1967-1968. Exposé n°14.
- [30] Albert Camus. *Le mythe de Sisyphe. Essai sur l'absurde*. Gallimard, 1942.
- [31] Olivia Caramello. *Theories, Sites, Toposes : Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'*. Oxford University Press, 2017.
- [32] Elie Cartan. La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle (conférence faite au congrès de toronto en 1924). *L'Enseignement mathématique*, 24 :1–18, 1925.
- [33] Jessica Carter. Categories for the working mathematician : Making the impossible possible. *Synthese*, 162(1) :1–13, 2008.
- [34] Jean Cavailles. *Sur la logique et la théorie de la science*. J. Vrin, 1997.
- [35] Jean Cavailles. *Oeuvres complètes de Philosophie des sciences*. Hermann, 1994.
- [36] C.C. Chang and H.J. Keisler. *Model Theory*, volume 73 of *Studies in logic and the foundations of mathematics*. North-Holland, 1973.
- [37] N. Chomsky and M. P. Schützenberger. The algebraic theory of context-free languages. In P. Braffort and D. Hirschberg, editors, *Computer programming and formal systems*, page 118. North Holland, Amsterdam, 1963.
- [38] Renaud Chorlay. *L'émergence du couple local / global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux 1851-1953*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2007.
- [39] P.M. Cohn. *Universal Algebra*. Mathematics and Its Applications. Springer, 1965.
- [40] Laurent Coppey. Esquisses et types. *Diagrammes*, 27 :1–33, 1992.
- [41] Laurent Coppey and Christian Lair. Leçons de théorie des esquisses. *Diagrammes*, 12, 1984.
- [42] Laurent Coppey and Christian Lair. Leçons de théorie des esquisses ii. *Diagrammes*, 19, 1988.
- [43] John Corcoran. On definitional equivalence and related topics. *History and Philosophy of Logic*, 1 :231–234, 1980.
- [44] A. Daigneault. Lawvere's elementary theories and polyadic and cylindric algebras. *Fundamenta Mathematicae*, 66 :307–328, 1969/1970.
- [45] Philip M. Davidson. Piaget's category-theoretic interpretation of cognitive development : a neglected contribution. *Human Development*, 31(4) :225–241, juillet-août 1988.
- [46] Karel de Bouvere. Logical synonymy. *Indagationes mathematicae*, 27 :622–629, 1965.

- [47] Karel de Bouvère. Synonymous theories. In J. Addinson et alii., editor, *The theory of models*, pages 402–406. North-Holland, 1963.
- [48] Philippe de Rouilhan. Sujet, prédicat, objet, concept chez Frege. *Histoire Epistémologie Langage*, 6(1) :91–99, 1984.
- [49] Philippe de Rouilhan. In defense of logical universalism : taking issue with Jean van Heijenoort. *Logica Universalis*, 6(3-4) :553–586, 2012.
- [50] William Demopoulos. Frege, Hilbert, and the conceptual structure of model theory. *History and Philosophy of Logic*, 15(2) :221–225, 1994.
- [51] Jean Dieudonné. L'épistémologie des mathématiques chez Jean Piaget. *Archives de Psychologie*, 50 :1–6, 1982.
- [52] Jean Dieudonné. Notice. In *Topologie algébrique et géométrie différentielles*, volume I of *Charles Ehresmann : oeuvres complètes et commentées*, pages XXI–XXII. Secrétariat de mathématiques, 1984.
- [53] Jean Dionne. Des théories élémentaires aux catégories conceptuelles. Master's thesis, Université de Montréal, 1973.
- [54] Dominique Duval and Jean-Claude Reynaud. Sketches and computation – i and ii. *Mathematical Structures in Computer Science*, 4(2) :185–271, 1994.
- [55] Peter Dybjer. Category theory and programming language semantics : an overview. In Axel Poigne David Pitt, Samson Abramsky and David Rydeheard, editors, *Category Theory and Computer Programming*, number 240 in LNCS, pages 165–181. Springer-Verlag, September 1985.
- [56] Beno Eckmann and Peter J Hilton. Group-like structures in general categories i multiplications and comultiplications. *Mathematische Annalen*, 145 :227–255, 1962.
- [57] Charles Ehresmann. Espèces de structures locales. *Séminaire de topologie et géométrie différentielle*, 3 :1–24, 1960-1962. talk :4.
- [58] Charles Ehresmann. *Catégories et structures*. Dunod, 1965.
- [59] Charles Ehresmann. Introduction to the theory of structured categories. Technical Report 10, University of Kansas, Lawrence, 1966.
- [60] Charles Ehresmann. Esquisses et types de structures algébriques. *Bul. Instit. Politech. Din Iasi*, XIV(18) :19–32, 1968.
- [61] Charles Ehresmann. *Catégories structurées et quotients*, volume III-1 of *Charles Ehresmann : oeuvres complètes et commentées*. Secrétariat de mathématiques, 1980.
- [62] Charles Ehresmann. *Esquisses et complétions*, volume IV.1 of *Charles Ehresmann : oeuvres complètes et commentées*. Secrétariat de mathématiques, 1981.
- [63] Charles Ehresmann. *Structures locales*, volume II of *Charles Ehresmann : oeuvres complètes et commentées*. Secrétariat de mathématiques, 1981.

- [64] Charles Ehresmann. *Topologie algébrique et géométrie différentielles. Parties I-1 et I-2*, volume I 1-2 of *Charles Ehresmann : oeuvres complètes et commentées*. Secrétariat de mathématiques, 1984.
- [65] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, 2015.
- [66] Samuel Eilenberg. "a glimpse back". In Stephen L. Bloom, editor, *Calvin Elgot. Selected Papers*, page xix. Springer-Verlag, 1982.
- [67] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58(2) :231–294, 1945.
- [68] Samuel Eilenberg and Jesse B. Wright. Automata in general algebras. *Information and control*, 11 :452–470, 1967.
- [69] Samuel Eilenberg and Jesse B Wright. Automata in general algebras. *Information and control*, 11(4) :452–470, 1967.
- [70] Calvin Elgot. Monadic computation and iterative algebraic theories. In *Selected papers*, pages 179–235. Springer, 1982.
- [71] Calvin C. Elgot. "on new roles for categorical algebra". *Journal of pure and applied algebra*, 19 :85–90, 1980.
- [72] Jean Piaget et Bärbel Inhelder. *La psychologie de l'enfant*. PUF, 1966.
- [73] B.H. Neumann et E.C. Wiegold. A semi-group representation of varieties of algebras. *Colloquium Mathematicum*, 14 :111–114, 1966.
- [74] M. Makkai et G. E. Reyes. *First order categorical logic*, volume 611 of *Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag, 1977.
- [75] T. Button et S. walsh. *Philosophy and Model Theory*. Oxford University Press, 2018.
- [76] Solomon Feferman. Categorical foundations and foundations of category theory. In R. E. Butts and J. Hintikka, editors, *Logic, Foundations of Mathematics, and Computability Theory*, pages 149–169. Springer, 1977.
- [77] Frédéric Ferro. Pour introduire à l'intrinsèque. *Revue de métaphysique et de morale*, 36(4) :501–509, 2002.
- [78] Ivan Fesenko. Model theory guidance in number theory ? In Z. Chatzidakis, D. Macpherson, A. Pillay, and A. Wilkie, editors, *Model Theory with Applications to Algebra and Analysis*, volume 349 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 327–334. Cambridge University Press, 2008.
- [79] Gottlob Frege. *Ecrits logiques et philosophiques*. Le Seuil, 1971. trad. et intro. de Claude Imbert.
- [80] P. Freyd. Aspects of topoi. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 7 :1–76, 1972.

- [81] Peter Freyd. Algebra valued functors in general and tensor products in particular. In *Colloquium Mathematicae*, volume 14, pages 89–106. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1966.
- [82] Peter Freyd. The theory of functors and models. In John Addison, Leon Henkin, and Alfred Tarski, editors, *Theory of Models*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, pages 107–120. North-Holland, 1966.
- [83] Peter Gabriel and Friedrich Ulmer. *Lokal prasentierbare kategorien*. Springer Berlin, 1971.
- [84] S.I. Gelfand and Y.I. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2002.
- [85] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, volume XIII of *Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg*. Hermann, Paris, 1958.
- [86] Sergey Goncharov. Shades of iteration : from elgot to kleene. arXiv, 2023.
- [87] Gilles Granger. Un problÈme d'axiomatisation en psychologie : Le « groupement » de jean piaget. *Logique et Analyse*, 8(29) :72–83, 1965.
- [88] George Grätzer. *Universal Algebra*. Mathematics and Statistics. Springer New York, 2008.
- [89] John W. Gray. Sheaves with values in a category. *National Science Foundation Report*, 1962.
- [90] Alexander Grothendieck. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébriques. II. Le théorème d'existence en théorie formelle des modules. In *Séminaire Bourbaki : années 1958/59 - 1959/60, exposés 169-204*, number 5 in Séminaire Bourbaki, pages 369–390. Société mathématique de France, 1960. talk :195.
- [91] Alexandre Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique, i. *Tohoku Math. J.*, 9(2) :119 – 221, 1957.
- [92] Alexandre Grothendieck. *Récoltes et Semailles*. TEL Gallimard, 2021.
- [93] René Guitart. On the geometry of computations. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, XXIX(4), 1986.
- [94] René Guitart. On the geometry of computations ii. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, XXVII(4), 1988.
- [95] René Guitart. Charles ehresmann, au carrefour des structures locales et algébriques. In *Charles Ehresmann : 100 ans*, volume 46 of *Cahiers de Topologie et de Géométrie Différentielle Catégoriques*, pages 172–175, 2005.
- [96] René Guitart and Christian Lair. Existence de diagrammes localement libres. *Diagrammes*, 6(4), 1981.

- [97] Carl A. Gunter. *Semantics of Programming Languages : structure and techniques*. Foundations of computing. MIT Press, 1992.
- [98] I. Németi H. Andréka, J. Madarász and G. Székely. Testing definitional equivalence of theories via automorphism groups. arXiv :2211.14232v2, 2023.
- [99] Brice Halimi. Diagrams as sketches. *Synthese*, 186(1) :387–409, 2012.
- [100] Victor Harnik. Model theory vs. categorical logic : two approaches of pretopos completion. In Bradd T. Hart, editor, *Models, Logics, and Higher-dimensional Categories : A Tribute to the Work of Mihály Makkai*, volume 43 of *CRM proceedings and lecture notes*, pages 79–106. American Mathematical Soc., 2011.
- [101] D. Haskell, A. Pillay, and C. Steinhorn. Overview. In D. Haskell, A. Pillay, and C. Steinhorn, editors, *Model Theory, Algebra and Geometry*, volume 39 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, pages 1–13. Cambridge University Press, 2000.
- [102] Alex Heller. Notice n°1239. *Mathematical reviews*, 1957.
- [103] Geoffrey Hellman. Does category theory provide a framework for mathematical structuralism ? *Philosophia Mathematica*, 11(2) :129–157, 2003.
- [104] Geoffrey Hellman. What is categorical structuralism ? In Johan van Benthem, Gerhard Heinzman, M. Rebuschi, and H. Visser, editors, *The Age of Alternative Logics : Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today*, pages 151–161. Springer, 2006.
- [105] Philip J. Higgins. Algebras with a scheme of operators. *Mathematische Nachrichten*, 27(1-2) :115–132, 1963.
- [106] Wilfried Hodges. Truth in a structure. *Proceedings of the Aristotelian Society*, 86 :135–151, 1986.
- [107] Wilfried Hodges. *Model Theory*, volume 42 of *Encyclopedia of mathematics and its application*. Cambridge University Press, 1993.
- [108] Wilfried Hodges. *A Shorter Model Theory*. Cambridge University Press, 1997.
- [109] Ehud Hrushovski. Geometrical model theory. *Documenta Mathematica*, pages 141–162, 1998.
- [110] John R. Isbell. Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras. *Rozprawy Mat.*, 36, 1964.
- [111] John R. Isbell. General functorial semantics. I. *Amer. J. Math.*, 94 :535–596, 1972.
- [112] John Rolfe Isbell. Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras. *Rozprawy Matematyczne*, 1964.

- [113] Bart Jacobs. *Categorical Logic and Type Theory*, volume 141 of *Studies in Logic and the foundations of mathematics*. Elsevier, 1998.
- [114] William James. La notion de conscience. In *Essays in radical empiricism*, pages 206–233. Longman, 1912.
- [115] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant : Volume 2*. Oxford University Press UK, Oxford, England, 2002.
- [116] Peter T. Johnstone. The development of the notion of classifying topos. talk given at the Genoa colloquium on Category Theory, September 2021.
- [117] André Joyal. Polyadic spaces and elementary theories. *Notices of the American Mathematical Society*, 18 :563, 1971.
- [118] André Joyal and Gonzalo Reyes. Forcing and generic models in categorical logic. 1978.
- [119] Orville Keane. Abstract horn theories. In F. William Lawvere, Christian Maurer, and Gavin C. Wraith, editors, *Model Theory and Topoi*, pages 15–50. Springer, 1975.
- [120] Max Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*, volume 64 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, 1982.
- [121] Juliette Kennedy. *Gödel, Tarski and the Lure of Natural Language : Logical Entanglement*. Cambridge University Press, 2021.
- [122] Anders Kock and Gonzalo E Reyes. Doctrines in categorical logic. In Jon Barwise, editor, *Handbook of mathematical logic*, volume 90 of *STUDIES IN LOGIC AND THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS*, pages 283–313. North Holland, 1977.
- [123] G. Kreisel. Mathematical significance of consistency proofs. *The Journal of Symbolic Logic*, 23 :155–182, 1958.
- [124] R. Krömer. *Tool and Object : A History and Philosophy of Category Theory*. Science Networks. Historical Studies. Birkhäuser, 2007.
- [125] Ralf Krömer. Le pragmatisme peircéen, la théorie des catégories et le programme de thiel. *Philosophia Scientiae*, 9(2) :79–96, 2005.
- [126] Ralf Krömer. La "machine de grothendieck" se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques ? bourbaki et les catégories au cours des années cinquante. *Revue d'histoire des mathématiques*, 12 :119–162, 2006.
- [127] J.D. Monk L. Henkin and A. Tarski. *Cylindric Algebras - Part I*, volume 64 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, 1971.
- [128] Christian Lair. Catégories modelables et catégories esquissables. *Diagrammes*, 6 :L1–L20, 1981.

- [129] Christian Lair. À propos de « toposes, triples and theories » de messieurs m. barr et c. wells. *Diagrammes*, 15(4) :L1–L20, 1986.
- [130] Elaine Landry. Category theory : The language of mathematics. *Philosophy of Science*, 66(3) :27, 1999.
- [131] Elaine Landry. Category theory as a framework for an in re interpretation of mathematical structuralism. In Johan van Benthem, Gerhard Heinzman, M. Rebuschi, and H. Visser, editors, *The Age of Alternative Logics : Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today*, pages 163–179. Springer, 2006.
- [132] Elaine Landry and Jean-Pierre Marquis. Categories in context : historical, foundational and philosophical. *Philosophia Mathematica*, 13(1) :1–43, 2005.
- [133] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic. A first introduction to Topos theory*. Springer, 1992.
- [134] Serge Lang. *Algèbre*. Dunod, 2004.
- [135] Daniel Lascar. Perspective historique sur les rapports entre la théorie des modèles et l'algèbre. un point de vue tendancieux. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 :237–260, 1998.
- [136] F. W. Lawvere. An elementary theory of the category of sets. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52 :1506–1511, 1964.
- [137] F William Lawvere. Functorial semantics of algebraic theories. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 50(5) :869, 1963.
- [138] F William Lawvere. Functorial semantics of elementary theories. In *Journal of symbolic logic*, volume 31, pages 294–295, 1966.
- [139] F William Lawvere. Adjointness in foundations. *Dialectica*, 23(3-4) :281–296, 1969.
- [140] F. William Lawvere. "functorial semantics of algebraic theories and some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories". *Reprints in Theory and Applications of Categories*, 5 :1–121, 2004.
- [141] W. Lawvere. Theories as categories and the completeness theorem. *Journal of Symbolic Logic*, 32 :562, 1967.
- [142] William Lawvere. Algebraic theories, algebraic categories and algebraic functors. In John Addison, Leon Henkin, and Alfred Tarski, editors, *Theory of Models*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, pages 413–418. North-Holland, 1966.
- [143] M. Lazard. Compositeurs et analyseurs. In *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres.*, volume 9, pages 1–7, 1955. exp. n°5.

- [144] Koen Lefever and Gergely Székely. On generalization of definitional equivalence to non-disjoint languages. *Journal of Philosophical Logic*, 48(4) :709–729, 2019.
- [145] Pierre Lescanne. *Etude de quelques théories des langages et généralisation du théorème de Kleene*. PhD thesis, Université de Nancy I, 1971.
- [146] F. E. J. Linton. Some aspects of equational categories. In S. Eilenberg, D. K. Harrison, S. MacLane, and H. Röhrh, editors, *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, pages 84–94. Springer, 1966.
- [147] FEJ Linton. Applied functorial semantics, ii. In *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, pages 53–74. Springer, 1969.
- [148] FEJ Linton. An outline of functorial semantics. In *Seminar on triples and categorical homology theory*, pages 7–52. Springer, 1969.
- [149] FEJ Linton. Applied functorial semantics, 1. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 86(1) :1–13, 1970.
- [150] Fred EJ Linton. Coequalizers in categories of algebras. In *Seminar on triples and categorical homology theory*, pages 75–90. Springer, 1969.
- [151] Fred EJ Linton. Relative functorial semantics : adjointness results. In *Category Theory, Homology Theory and Their Applications III*, pages 384–418. Springer, 1969.
- [152] O. Lourenço and A. Machado. In defense of piaget’s theory : A reply to 10 common criticisms. *Psychological Review*, 103(1) :143–164, 1996.
- [153] Pascal Ludwig. *Le langage*. Corpus. Flammarion, 1997.
- [154] Jacob Lurie. Categorical logic. lecture notes, Harvard, spring 2018.
- [155] C. Lüth and N. Ghani. Monads and modular term rewriting. In *Category theory and computer science*, pages 69–86. Springer, 1997.
- [156] Behrisch M., Kerkhoff S., and Power J. Category theoretic understanding of universal algebra and its dual : Monads and lawvere theories, comonads and what ? *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 286 :5–16, 2012.
- [157] Hyland M. and Power J. The category theoretic understanding of universal algebra : Lawvere theories and monads. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 172 :437–458, 2007.
- [158] Angus MacIntyre. Model completeness. In Jon Barwise, editor, *Handbook of mathematical logic*, volume 90 of *Studies in logic an the foundations of mathematics*, pages 139–180. North-Holland, 1977.
- [159] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1971.
- [160] Penelope Maddy. Perception and mathematical intuition. *The Philosophical Review*, 89(2) :163–196, April 1980.

- [161] Michael Makkai. Stone duality of first order logic. In J. Stern, editor, *Proceeding Herbrand Symposium*, pages 217–232. North-Holland, 1982.
- [162] Michael Makkai. Stone duality for first order logic. *Advances in Math.*, 65 :97–170, 1987.
- [163] Michael Makkai. Strong conceptual completeness for first-order logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 40 :167–215, 1988.
- [164] Michael Makkai. Generalized sketches as a framework for completeness theorems. part i. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 115 :49–79, 1997.
- [165] Michael Makkai and Robert Paré. *Accessible Categories : The Foundations of Categorical Model Theory*. Contemporary mathematics - American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1989.
- [166] Anatoli I. Mal'cev. The structural characterization of certain classes of algebras. In B. Franklin Wells III, editor, *The metamathematics of algebraic systems*, volume 66 of *Studies in Logic and the foundations of mathematics*, pages 56–60. North-Holland, 1971.
- [167] Anatolii Ivanovic Mal'cev and Benjamin Franklin Wells. *The meta-mathematics of algebraic systems*. North-Holland, 1971.
- [168] Ernie Manes. Monads of sets. In M. Hazewinkel, editor, *Handbook of Algebra*, volume 3, pages 67–153. Elsevier, 2003.
- [169] D. Marker. *Model Theory : An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2002.
- [170] Francisco Marmolejo. *Ultraproducts and continuous families of models*. PhD thesis, Dalhousie University, 1995.
- [171] Jean-Pierre Marquis. What is category theory ? In Giandomenico Sica, editor, *What is category theory ?*, pages 221–256. Polimetrica, 2006.
- [172] Jean-Pierre Marquis. *From a geometrical point of view*, volume 14 of *Logic, Epistemology and the Unity of Science*. Springer, 2009.
- [173] Jean-Pierre Marquis and Gonzalo Reyes. The history of categorical logic : 1963-1977. In Dov Gabbay, Akihiro Kanamori, and John Woods, editors, *Handbook of the history of logic*. Elsevier, 2011.
- [174] Dan Marshall and Brian Weatherston. Intrinsic vs. Extrinsic Properties. In Edward N. Zalta and Uri Nodelman, editors, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.
- [175] Paul Anh McEldowney. On morita-equivalence and interpretability. *The Review of Symbolic Logic*, 13(2) :388–415, June 2020.
- [176] Colin McLarty. The uses and abuses of the history of topos theory. *Brit. J. Phil. Sci.*, 41 :351–375, 1990.

- [177] Colin McLarty. Two constructivists aspects of category theory. *Philosophia Scientiae*, Cahier spécial 6 :95–114, 2006.
- [178] Toby Meadows. Beyond linguistic interpretation in theory comparison. *The Review of Symbolic Logic*, 17(3) :819–859, 2024.
- [179] J. MEZEI and J. B. WRIGHT. Algebraic automata and context-free sets. *Information and control*, 11 :3–29, 1967.
- [180] E. Moggi. Computational lambda-calculus and monads. In *4th LICS Conf. IEEE*, 1989.
- [181] E. Moggi. Notions of computation and monads. *Information and computation*, 93(1) :55–92, 1991.
- [182] Eugenio Moggi. An abstract view of programming language. Stanford Course Notes, Spring 1989.
- [183] R. Montague. *Contributions to the axiomatic foundations of set theory*. PhD thesis, Berkeley, 1956.
- [184] Jacques Montangero. Pourquoi tant de critiques à l’oeuvre de piaget ? *Intellectica*, 33 :245–253, 2001.
- [185] H.R. Nielson and F. Nielson. *Semantics with Applications : An Appetizer*. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer, 2007.
- [186] Rabin M. O. and D. Scott. Finite automata and their decision problems. *IBM. J. Res. Develop.*, 3 :114–125, 1959.
- [187] Bodo Pareigis. *Categories and functors*, volume 39 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1970.
- [188] Alexander Paseau and Fabian Pregel. Deductivism in the Philosophy of Mathematics. In Edward N. Zalta and Uri Nodelman, editors, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Fall 2023 edition, 2023.
- [189] Jean Petitot. Pour un platonisme transcendantal. In Masson, editor, *L’objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles*, pages 147–178. M. Panza and J.-M. Salanskis, 1995.
- [190] J. Piaget, J.-B. Grize, A. Szeminska, and Vinh Bang. *Épistémologie et psychologie de la fonction*, volume XXIII of *Études d’épistémologie génétique*. P.U.F., 1968.
- [191] Jean Piaget. *La psychologie de l’intelligence*. A. Colin, 1947.
- [192] Jean Piaget. *Traité de logique. Essai de logique opératoire*. Dunod, 1949.
- [193] Jean Piaget. *Introduction à l’épistémologie génétique*, volume I. La pensée mathématique. PUF, 1950.
- [194] Jean Piaget. Les structures mathématiques et les structures opératoires de l’intelligence. In *L’enseignement des mathématiques. Nouvelles perspectives*, pages 11–33. Delachaux et Niestlé, 1955.

- [195] Jean Piaget. *Logique et connaissance scientifique*. Gallimard, 1967.
- [196] Jean Piaget. *Le structuralisme*. "Que sais-je?". P.U.F, 1968.
- [197] Jean Piaget. *Réussir et comprendre*. PUF, 1974.
- [198] Jean Piaget. Structures et catégories. *Logique et analyse*, 17(67/68) :223–240, septembre-décembre 1974.
- [199] Jean Piaget. Some recent research and its link with a new theory of groupings and conservation based on commutativity. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 291 :350–358, 1977.
- [200] Jean Piaget. Correspondances and transformations. In F. B. Murray, editor, *The impact of Piagetian theory*, pages 17–27. University Park Press, 1979.
- [201] Jean Piaget. Le constructivisme épistémologique. *Bulletin de psychologie*, 51(435) :225–233, 1998.
- [202] A. Pickering. *The Mangle of Practice : Time, Agency, and Science*. University of Chicago Press, 1995.
- [203] Benjamin C. Pierce. A taste of category theory for computer scientists. In *Computer Science Department*, volume Paper 1847. Carnegie Mellon University, 1988.
- [204] Anand Pillay. Model theory. *Notices of the AMS*, 47(11) :1373–1381, 2000.
- [205] A.G. Pinus. Rational equivalence of algebras, its clone generalizations, and clone categoricity. *Siberian Mathematical Journal*, 54(3) :533–544, 2013.
- [206] Gordon D. Plotkin. The origins of structural operational semantics. *The journal of Logic and Algebraic Programming*, 60-61 :3–15, 2004.
- [207] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles. Une introduction à la logique mathématique contemporaine*. Bruno Poizat, Lyon, 1985.
- [208] Bruno Poizat. *A Course in Model Theory : An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*. Springer, 2000.
- [209] John Power. Enriched lawvere theories. *Theory and applications of categories*, 6(7) :83–93, 1999.
- [210] Alain Prouté. Introduction à la logique catégorique. Prépublication de l'Equipe de Logique Mathématique, Octobre 2010.
- [211] W. V. O. Quine. *Theories and things*. Harvard University Press, 1981.
- [212] Michael D. Resnik. *Mathematics as a science of patterns*. Oxford University Press, 1999.
- [213] Gonzalo Reyes. From sheaves to logic. In A. Daigneault, editor, *Studies in Algebraic Logic*, volume 9 of *Studies in Mathematics*, pages 143–203. Mathematical Association of America, 1974.

- [214] Gonzalo Reyes. Topos theory in montreal in the 70s :my personal involvement. *History and Philosophy of Logic*, 40(4) :389–402, 2019.
- [215] Abraham Robinson. *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland, 1963.
- [216] Julia Robinson. Definability and decision problems in arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, 14 :98–114, 1949.
- [217] Andrei Rodin. *Axiomatic Method and Category Theory*. Springer, 2014.
- [218] J.-R. Roisin. On functorializing usual first-order model theory. In *Applications of sheaves (Proc. Res. Sympos. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal., Univ. Durham, Durham, 1977)*, volume 753 of *Lecture Notes in Math.*, pages 612–622. Springer, Berlin, 1979.
- [219] Jean-Roger Roisin. *Approche catégorique en théorie des modèles*. PhD thesis, UC Louvain, 1977.
- [220] Gino Roncaglia. *Handbook of Metaphysics and Ontology*, volume I, chapter Denominatio Intrinseca/Extrinseca, pages 208–209. Philosophia Verlag, 1991.
- [221] Gian-Carlo Rota, David H. Sharp, and Robert Sokolowski. Syntax, semantics and the problem of the identity of mathematical objects. *Philosophy of science*, 55(3) :376–386, 1988.
- [222] Moritz Schlick. *Forme et contenu. Une introduction à la pensée philosophique*. Agone, 2003. Trad. D. Chapuis-Schmitz.
- [223] Dana Scott. Outline of a mathematical theory of computation. In *Proc. 4th Annual Princeton Conf. on Information Sciences and Systems*, pages 169–176, 1970.
- [224] Dana S. Scott. Relating theories of the λ -calculus. In J.R. Hindley et J.P. Seldin, editor, *To H.B. Curry : Essays on Combinatory Logics, Lambda Calculus and Formalism*, pages 403–450. Academic Press, 1980.
- [225] Dana S. Scott. Domains for denotational semantics. In M. Nielson et E. M. Schmidt, editor, *Automata, Languages and Programming*, volume 140 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 577–613. Springer, 1982.
- [226] Dana S. Scott. "foreword". In Stephen L. Bloom, editor, *Calvin Elgot. Selected Papers*, pages v–ix. Springer-Verlag, 1982.
- [227] R. A. G. Seely. Modelling computations : a 2-categorical framework. In *Proceedings of the Second Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 22–25. IEEE Computer Science Press, 1987.
- [228] Stewart Shapiro. *Philosophy of mathematics. Structure and ontology*. Oxford University Press, 1997.

- [229] Saharon Shelah. *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, volume 92 of *Studi. Logic Found. Math.* North-Holland, 1978.
- [230] Hourya Sinaceur. *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*. Mathesis. Vrin, 1991.
- [231] Hourya Sinaceur. Logique mathématique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? In *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, pages 331–346. TER, 1991.
- [232] Hourya Sinaceur. Tarski's practice : Philosophy : between formalism and pragmatism. In S. Lindström et al., editor, *Logicism, Intuitionism, and Formalism*, pages 357–396. Springer, 2009.
- [233] Theodore A. Slaman. Global properties of the turing degrees and the turing jump. In C. Chong et al., editor, *Computational Prospects of Infinity. Part I. Tutorials*, pages 83–101. World Scientific, 2008.
- [234] M. Stay and L. G. Meredith. arXiv, 2017.
- [235] Marshall Stone. The theory of representations of bookean algebras. *Transaction of the A.M.S.*, 40(1) :37–111, 1936.
- [236] Alfred Tarski. The completeness of elementary algebra and geometry. In Givant and McKenzie, editors, *Collected papers*, volume IV, pages 289–346. Birkhäuser, 1939.
- [237] Alfred Tarski. The semantic conception of truth. In Givant and McKenzie, editors, *Collected papers*, volume II, pages 661–699. Birkhäuser, 1944.
- [238] Alfred Tarski. Contribution to 'discussion'. *Revue internationale de Philosophie*, pages 16–20, 1954.
- [239] Walter Taylor. Characterizing mal'cev conditions. *Algebra Universalis*, 3 :351–397, 1973.
- [240] Walter Taylor. Equational logic. Technical report, University of Houston, 1979.
- [241] B.R. Tennison. *Sheaf Theory*. Number 20 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [242] Dimitris Tzementzis. A syntactic characterization of morita-equivalence. *The Journal of Symbolic Logic*, 82(4) :1181–1198, décembre 2017.
- [243] B.C. van Fraassen. *Scientific Representation : Paradoxes of Perspective*. OUP Oxford, 2008.
- [244] Albert Visser. Categories of theories and interpretations. In *Logic in Tehran*, volume 26 of *Lect. Notes Log.*, pages 284–341. Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2006.

- [245] Albert Visser and Harvey M. Friedman. When bi-interpretability implies synonymy. *Logic Group preprint series*, 320, 2014.
- [246] Hugo Volger. Completeness theorems for logical categories. In F. W. Lawvere, C. Maurer, and G.C. Wraith, editors, *Model Theory and Topoi*, volume 445, page 51–86. Springer, 1975.
- [247] Hugo Volger. Logical categories, semantical categories and topoi. In F. W. Lawvere, C. Maurer, and G.C. Wraith, editors, *Model Theory and Topoi*, volume 445, page 87–100. Springer, 1975.
- [248] Felscher Walter. Traditional vs functorial algebra. *Foundations of Mathematics*, mars 1998.
- [249] Evan Washington. *On the Equivalence of Logical Theories*. PhD thesis, Princeton University, 2018.
- [250] Charles Wells. Sketches : an outline with references. unpublished, 1993.
- [251] Alfred N. Whitehead. *A Treatise on Universal Algebra : With Applications*. The University Press, 1898.
- [252] Lawvere F William. What are foundations of geometry and algebra ? "Fifty years of functorial semantics", Union College Mathematics Conference 2013.
- [253] Mark Wilson. The double standard in ontology. *Philosophical Studies : An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 39(4) :409–427, 1981.
- [254] Glynn Winkel. *The formal semantics of programming languages : an introduction*. Foundations of computing. The MIT Press, 1993.
- [255] Gavin C Wraith. *Algebraic theories*. Number 22 in Aarhus Lecture Notes. Aarhus universitet, Matematisk institut, 1970.
- [256] Marek W. Zawadowski. Descent and duality. *Ann. Pure App. Logic*, 71(2) :131–188, 1995.

Table des matières

Remerciements	3
1 Introduction	5
1.1 Deux méta-théories mathématiques	5
1.1.1 Des objets communs	5
1.1.2 Des objectifs communs	6
Du côté de la théorie des modèles	7
Du côté de la théorie des catégories	10
1.2 Le langage au cœur de la théorie des modèles	14
1.2.1 La sensibilité au langage	14
1.2.2 L'efficacité mathématique de cette sensibilité au langage	15
1.2.3 Les problèmes épistémologiques induits par cette sensibilité au langage	17
1.3 La théorie des catégories à l'écart des considérations linguistiques	20
1.4 Le structuralisme catégorique en débat	24
Le structuralisme de S. Awodey	24
Les objections de G. Hellman	27
1.5 L'idée d'épistémologie effective	30
1.5.1 La théorie des modèles comme épistémologie effective	30
1.5.2 La théorie des catégories	33
1.6 Remarques	35
2 La « synonymie », entre théories et algèbres	37
2.1 Une pluralité de relations d'équivalence	39
2.1.1 L'équivalence définitionnelle	40
2.1.2 L'interprétabilité mutuelle	42
2.1.3 La biinterprétabilité	44
2.1.4 La F-Morita-équivalence	47
2.1.5 L'équivalence catégorique	51
2.2 Leur « signification philosophique »	53
2.2.1 Synonymie et structuralisme mathématique	54
2.2.2 Les limites de ces relations d'équivalence	56
2.3 L'approche de l'algèbre universelle	59

2.3.1	Les représentations algébriques	62
	Les clones de Hall	62
	Les compositeurs de Lazard	63
2.3.2	Le cas des algèbres partielles	67
3	Les théories de Lawvere	71
3.1	Introduction	71
3.2	La thèse de Lawvere	72
3.2.1	Éléments de contexte	72
	Théorie des modèles et théorie des catégories	72
	Les structures de groupes de Eckmann et Hilton	73
	Le projet de Lawvere	74
3.2.2	Les théories algébriques	76
3.2.3	Les modèles des théories : la sémantique fonctorielle	83
3.2.4	L'algèbre engendrée par une préalgèbre	85
3.2.5	Quelques résultats autour des théories algébriques de Lawvere	86
	L'interprétation relative	86
	Les algèbres libres	86
	Faire varier le « contexte »	87
	L'algèbre générique	88
3.3	L'extension du programme de Lawvere	88
3.3.1	La thèse de Bénabou	88
	Algèbres, types et espèces de structure	89
	L'unification des différentes notions d'algèbres	93
	Présentations, types et algèbres ensemblistes	95
	L'invariant et l'intrinsèque	98
3.3.2	Les travaux de Keane	101
3.4	Vers la logique classique du premier ordre	102
3.4.1	Les théories élémentaires de Lawvere	102
3.4.2	Les travaux sur les théories élémentaires	103
3.4.3	Les travaux de Volger	104
3.4.4	Les travaux de Roisin	106
3.5	Éléments d'analyse épistémologique	107
3.5.1	Théories et modèles : trois analogies mathématiques	107
	Anneaux et modules	107
	Les objets semi-simpliciaux	109
	Algèbres et faisceaux	109
3.5.2	Le Formel et le Conceptuel	112
3.5.3	Théorie et modèles, sens et dénotation	114
3.5.4	Une distinction fonctionnelle, non essentielle	118
4	Logique catégorique et informatique théorique	121
4.1	Les travaux de Samuel Eilenberg	121

4.1.1	Le théorème de Mezei et Wright	122
4.1.2	Automates et théories de Lawvere	124
	Les théories	125
	Les algèbres	125
	Les algèbres libres	126
	Les théories libres	126
	Congruences	126
	Présentation de théories	127
	Ensembles reconnaissables, automates et algèbres re- lacionnelles	127
	Les ensembles algébriques	128
4.2	Sémantique des langages de programmation	129
4.2.1	Sémantique opérationnelle et sémantique dénotationnelle	129
4.2.2	Les travaux de Calvin Elgot	132
	L'apport du contexte catégorique : une forme de construc- tivité	133
	Les théories de Lawvere dans les travaux d'Elgot	135
4.2.3	Les Théories de Lawvere comme modélisation des prop- riétés du calcul	138
	Le programme de Moggi : les « notions de computation »	139
	Monades et théories algébriques	142
	Les théories de Lawvere pour modéliser les propriétés du calcul	144
	Bilan de ces travaux	147
4.2.4	De la sémantique dénotationnelle à la sémantique opé- rationnelle	147
4.3	Remarques générales	148
5	La théorie catégorique des modèles	151
5.1	Les notions fondamentales	152
5.1.1	Une première approche de la complétude conceptuelle forte	152
5.1.2	De la théorie à la catégorie syntaxique	154
	La sémantique catégorique, généralisation de la séman- tique Tarskienne	154
	Les catégories syntaxiques	161
5.2	Le versant « syntaxique »	167
5.2.1	De la catégorie syntaxique au topos classifiant	167
	Un exemple d'espace classifiant	167
	Les topos de Grothendieck	169
	Exemples de topos classifiants	171
	<i>Le classifiant des objets, 171— Le classifiant des anneaux,</i> <i>171— Le classifiant des ordres linéaires, 172</i>	
	Le topos classifiant d'une théorie du premier ordre	173

5.2.2	La complétion de prétopos	176
	De la complétion de prétopos à l'élimination des ima- ginaires	178
5.3	Le versant « sémantique »	181
5.3.1	Ultrafiltres et ultraproducts	181
5.3.2	Les ultracatégories et la dualité de Makkai	182
	Les pré-ultracatégories	183
	Ultragraphes et ultramorphismes	183
	Les ultracatégories et le théorème de Makkai	184
5.3.3	Quelle théorie ?	186
5.3.4	Un exemple d'application	187
5.4	Complétude et représentation	187
5.4.1	La complétude conceptuelle	187
5.4.2	Différentes versions du théorème de complétude	190
5.4.3	La notion de représentation en mathématiques	193
5.4.4	Quel concept de représentation ?	196
5.4.5	La relation entre complétude et représentation	199
6	Ehresmann et les esquisses	203
6.1	La théorie des esquisses en contexte : Le local et l'intrinsèque	205
6.1.1	Du projet initial au cours de Rio	207
6.1.2	Le tournant catégorique	213
	Catégories et opérateurs	213
	Espèces de structures et groupoïdes des isomorphismes	215
	Application au cas ensembliste : le lien avec Bourbaki et la notion de type de structure	216
6.1.3	Les catégories structurées	216
6.2	Les esquisses et leurs enjeux épistémologique	222
6.2.1	Eléments de théorie des esquisses	222
	Définitions préliminaires	223
	<i>Catégories, foncteurs et transformations naturelles, 223—</i> <i>Limites projectives et inductives, limites et co-limites,</i> <i>224</i>	
	Les esquisses	225
	<i>Modèles et esquissabilité, 225— Exemples, 226</i>	
6.2.2	Le local et l'algébrique	229
	Le théorème du faisceau associé généralisé	229
	L'esquisse, comme milieu commun du local et de l'al- gébrique	229
6.2.3	Syntaxe et sémantique	231
	L'esquisse des esquisses	231
	Le type, entre syntaxe et sémantique	232
	<i>L'aspect syntaxique des esquisses, 232— La dimension</i> <i>sémantique, 232</i>	

6.2.4	La question de l'invariant	236
6.2.5	Esquisses, calcul et complexité	239
7	Un exemple d'épistémologie catégorique : la philosophie des mathématiques de Piaget	243
7.1	Un structuralisme catégorique	246
7.1.1	Epistémologie génétique et psychologie du développement	247
	Eléments de psychologie piagétienne du développement	249
	L'épistémologie génétique comme méthode, et les autres théories de la connaissance	251
7.1.2	Une épistémologie structuraliste	251
7.1.3	Psychologie de l'action et théorie des catégories	256
	La théorie des catégories et les opérations du mathématicien	256
	Les fonctions constituantes et la structure de catégorie	258
7.2	Quelques points d'épistémologie	261
7.2.1	Qu'est-ce qu'un nombre?	261
	La nature psychologique du nombre	261
	L'abstraction réfléchissante	264
	Qualité et quantité	265
	Contre le logicisme de Russell et Whitehead	267
	Contre l'intuition rationnelle du nombre de Poincaré	268
	Qu'est-ce qu'un nombre, d'un point de vue génétique? Le rôle des schèmes	269
	Conclusion : ni empirisme, ni apriorisme	271
7.2.2	Qu'est-ce que l'espace?	273
	L'espace perceptif	274
	L'espace sensori-moteur : l'épistémologie de Poincaré	275
	L'espace représentatif : l'intuitif et le formel	276
	L'espace axiomatisé : d'Euclide à Hilbert	280
	L'espace et le nombre	281
7.3	Conclusion	282
8	Conclusion	287
8.1	La question initiale	287
8.2	Bilan	287
9	Annexe 1 : Fragments de logique classique	291
10	Annexe 2 : L'épistémologie piagétienne	297
10.1	Eléments complémentaires	297
10.1.1	Au-delà des entiers naturels	297
10.1.2	L'historicité des mathématiques	298

10.1.3	Le raisonnement mathématique, entre rigueur et fé-	
	condité	300
10.1.4	Piaget et le Cercle de Vienne	303
10.2	Comparaison avec d'autres approches philosophiques	305
10.2.1	Piaget et la phénoménologie	305
	« Devenir mental et permanence normative »	306
10.2.2	Piaget et l'épistémologie naturalisée	308
10.2.3	Piaget et l'intuitionnisme	309
	Les mécanismes de la construction	309
	Constructivisme piagétien et intuitionnisme	310
	« La non-contradiction logique et la nature du raison-	
	nement mathématique »	313
10.2.4	Piaget et l'idée de dialectique	316
10.2.5	Piaget et la philosophie transcendantale	321
	Bibliographie	323