



**HAL**  
open science

# Construction d'une fontaine double à atomes froids de $^{87}\text{Rb}$ et $^{133}\text{Cs}$ ; Etude des effets dépendant du nombre d'atomes dans une fontaine

Yvan R. P. Sortais

► **To cite this version:**

Yvan R. P. Sortais. Construction d'une fontaine double à atomes froids de  $^{87}\text{Rb}$  et  $^{133}\text{Cs}$ ; Etude des effets dépendant du nombre d'atomes dans une fontaine. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2001. Français. NNT: . tel-00001065

**HAL Id: tel-00001065**

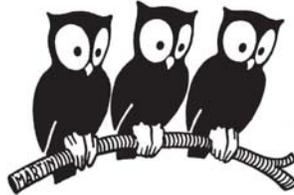
**<https://theses.hal.science/tel-00001065>**

Submitted on 30 Jan 2002

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE PRIMAIRE DU TEMPS ET  
DES FRÉQUENCES  
DU BUREAU NATIONAL DE MÉTROLOGIE  
LABORATOIRE KASTLER BROSSSEL



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI  
spécialité : Physique Quantique

présentée par  
Yvan SORTAIS

pour obtenir le grade de  
Docteur de l'Université de Paris VI

Sujet de la thèse :

CONSTRUCTION D'UNE FONTAINE DOUBLE A ATOMES  
FROIDS DE  $^{87}\text{Rb}$  ET  $^{133}\text{Cs}$ ; ÉTUDE DES EFFETS DÉPENDANT  
DU NOMBRE D'ATOMES DANS UNE FONTAINE

Soutenue le 20 décembre 2001 devant le jury composé de :

Mme	L. JULIEN	Présidente du jury
M.	A. BAUCH	Rapporteur
M.	J. VIGUÉ	Rapporteur
M.	A. CLAIRON	Directeur de thèse
M.	K. GIBBLE	Examineur
M.	C. BORDÉ	Membre invité
M.	C. SALOMON	Directeur de thèse



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>9</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Généralités sur les horloges atomiques</b>	<b>21</b>
1.1 Principe de fonctionnement et caractéristiques d'une horloge atomique . . . . .	21
1.1.1 Introduction . . . . .	21
1.1.2 Principe de l'interrogation de Ramsey . . . . .	22
1.1.3 Stabilité de fréquence d'une horloge atomique . . . . .	24
1.1.4 Exactitude d'une horloge atomique . . . . .	27
1.2 Principe de fonctionnement d'une fontaine atomique . . . . .	28
1.2.1 Manipulation des atomes : capture et lancement . . . . .	28
1.2.2 Sélection des atomes . . . . .	30
1.2.3 Interrogation de Ramsey . . . . .	30
1.2.4 Détection . . . . .	30
1.2.5 Principe de l'asservissement . . . . .	31
1.3 Une interprétation géométrique des franges de Ramsey . . . . .	32
1.3.1 Hamiltonien de couplage atome-champ . . . . .	32
1.3.2 Image du spin fictif . . . . .	36
1.3.3 Oscillation de Rabi dans la cavité . . . . .	37
1.3.4 Franges de Ramsey . . . . .	39
1.4 Effets systématiques dans une fontaine atomique . . . . .	43
1.4.1 Rappel sur les différentes causes de déplacement de la transition atomique dans une fontaine . . . . .	43
1.4.2 La fonction de sensibilité $g(t)$ ... ou comment une perturbation sur la fréquence de transition atomique se répercute sur la fréquence de l'horloge . . . . .	47
1.5 Conclusion . . . . .	57
<b>2 Quelques rappels sur les collisions froides</b>	<b>59</b>
2.1 Brefs rappels sur la théorie de la diffusion élastique . . . . .	59
2.2 Paramètres importants pour la détermination des longueurs de diffusion . . . . .	66
2.2.1 Potentiels d'interaction pour les alcalins . . . . .	66
2.2.2 Sensibilité de la longueur de diffusion au paramètre $C_6$ du potentiel de Van der Waals . . . . .	68
2.2.3 Rôle des longueurs de diffusion "triplet" et "singulet" . . . . .	69

2.3	Comment déterminer les longueurs de diffusion? . . . . .	71
2.4	Expression du déplacement de fréquence induit par les collisions entre atomes froids . . . . .	81
2.4.1	Introduction . . . . .	81
2.4.2	Principe du calcul . . . . .	82
2.4.3	Potentiel de contact . . . . .	82
2.4.4	Expression de l'hamiltonien de collision $H_{coll}$ . . . . .	82
2.4.5	Expression du déplacement de fréquence . . . . .	84
2.4.6	Élargissement de la transition atomique lié aux collisions entre atomes froids . . . . .	85
2.4.7	Remarque sur l'évolution des populations . . . . .	85
2.5	Valeurs des sections efficaces de diffusion pour le $^{87}\text{Rb}$ . . . . .	86
2.5.1	Valeurs des longueurs de diffusion pour le $^{87}\text{Rb}$ . . . . .	86
2.5.2	Prédictions théoriques pour le déplacement collisionnel du $^{87}\text{Rb}$ , par C. Williams <i>et al</i> . . . . .	87
2.5.3	Comparaison avec d'autres prédictions théoriques et conclu- sion . . . . .	88
<b>3</b>	<b>La fontaine Rb : banc d'essai pour la fontaine double</b>	<b>91</b>
3.1	Introduction . . . . .	91
3.2	Description d'ensemble de la fontaine <i>Rb</i> . . . . .	92
3.3	Description détaillée du fonctionnement de l'horloge <i>Rb</i> . . . . .	96
3.3.1	La zone d'interrogation : contrôle de l'environnement des atomes . . . . .	96
3.3.2	La cavité micro-onde . . . . .	100
3.3.3	Manipulation des atomes froids . . . . .	103
3.3.4	La détection des atomes . . . . .	108
3.3.5	Le banc optique Rb . . . . .	114
3.3.6	L'électronique de commande et le pilotage informatique . . . . .	120
3.4	Distribution et synthèse des fréquences micro-ondes au LPTF . . . . .	122
3.4.1	Les horloges à atomes froids du LPTF . . . . .	122
3.4.2	Description de la chaîne de synthèse du signal de distribution . . . . .	124
3.4.3	Description de la chaîne de synthèse <i>Rb</i> . . . . .	126
3.5	Les sources de bruit dans une fontaine . . . . .	128
3.5.1	Fonctionnement de l'asservissement . . . . .	128
3.5.2	Calcul de la stabilité de fréquence dans une horloge . . . . .	128
3.5.3	Limite de stabilité liée aux fluctuations de fréquence de l'oscillateur local . . . . .	129
3.5.4	Limite de stabilité liée au système de détection . . . . .	134
3.5.5	Bilan des sources de bruit . . . . .	141
3.5.6	Comment rejeter au moins partiellement le bruit de l'os- cillateur local? . . . . .	144
3.6	Mesures de fréquence avec la fontaine <i>Rb</i> . . . . .	148
3.6.1	Franges de Ramsey sur l'horloge <i>Rb</i> . . . . .	148
3.6.2	Bilan d'exactitude de la fontaine <i>Rb</i> . . . . .	148
3.6.3	Test de stabilité de la constante de structure fine $\alpha =$ $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ . . . . .	151
3.7	Conclusion . . . . .	153

<b>4 Déplacements de fréquence dépendant du nombre d'atomes dans les fontaines</b>	<b>155</b>
4.1 Introduction . . . . .	155
4.2 Quelle densité atomique pour le déplacement collisionnel? . . . .	158
4.2.1 Un problème géométrique . . . . .	158
4.2.2 Un problème pas seulement géométrique ... La densité moyenne effective, $\bar{n}$ . . . . .	162
4.3 Simulation Monte Carlo de l'évolution du nuage dans une fontaine	167
4.3.1 Introduction . . . . .	167
4.3.2 Les différents diaphragmes présents dans la fontaine <i>Rb</i> . . . .	168
4.3.3 Génération des distributions de probabilité . . . . .	169
4.3.4 Détermination de la distribution des positions initiales des atomes dans le nuage . . . . .	174
4.3.5 Fraction d'atomes détectés en fonction de la vitesse de lancement . . . . .	177
4.3.6 Fraction d'atomes en cavité en fonction de la vitesse de lancement . . . . .	182
4.3.7 Evolution temporelle de la densité atomique au centre du nuage . . . . .	183
4.3.8 Calcul de la densité moyenne effective . . . . .	184
4.3.9 Influence de la convolution du nuage d'atomes froids par la réponse impulsionnelle de la détection . . . . .	187
4.3.10 Influence de la taille initiale du nuage . . . . .	190
4.3.11 Variation de la densité atomique moyenne effective avec la hauteur de lancement . . . . .	191
4.3.12 Sensibilité aux paramètres dans l'horloge <i>RbCs</i> . . . . .	193
4.3.13 Conclusion . . . . .	195
4.4 Un autre effet dépendant du nombre d'atomes : le "cavity pulling"	198
4.4.1 Structure du champ dans la cavité micro-onde et calcul du volume du mode . . . . .	198
4.4.2 Relation entre le champ intra-cavité, le champ couplé, et l'aimantation atomique . . . . .	200
4.4.3 Déplacement de fréquence lié au couplage fréquence-amplitude dans la cavité . . . . .	203
4.4.4 Calcul analytique du déplacement de fréquence induit par les atomes dans la cavité, pour un nuage ponctuel . . . . .	204
4.5 Conclusion . . . . .	209
<b>5 Mesure des déplacements de fréquence dépendant du nombre d'atomes dans l'horloge Rb</b>	<b>211</b>
5.1 Introduction . . . . .	211
5.2 Comment mesurer le déplacement collisionnel du $^{87}\text{Rb}$ ? . . . .	212
5.2.1 Procédure de mesure . . . . .	212
5.2.2 Mesure de la fréquence de résonance de la cavité . . . . .	218
5.3 Détermination du nombre initial d'atomes lancés . . . . .	221
5.3.1 Méthode par fluorescence du piège magnéto-optique . . . .	221
5.3.2 Méthode par absorption à travers le nuage d'atomes froids initial . . . . .	224
5.3.3 Incertitudes sur la taille du nuage atomique et sur le nombre initial d'atomes lancés . . . . .	233

5.4	Détermination du nombre d'atomes détectés . . . . .	235
5.4.1	Calcul direct de la détectivité du système de détection . .	235
5.4.2	Comparaison des méthodes par absorption et par calibration directe de la détection . . . . .	244
5.5	Bilan d'incertitudes sur le nombre d'atomes dans la cavité au 1 <sup>er</sup> passage, et sur la densité moyenne effective . . . . .	245
5.6	Exploitation des mesures . . . . .	249
5.6.1	Procédure . . . . .	249
5.6.2	Résultats sur le "cavity pulling" : une 3 <sup>e</sup> méthode de calibration du nombre d'atomes . . . . .	250
5.6.3	Résultats sur le déplacement collisionnel du <sup>87</sup> Rb . . . . .	253
5.7	Conclusion . . . . .	258
<b>6</b>	<b>La fontaine double Rb-Cs : deux alcalins dans une même horloge !</b>	<b>263</b>
6.1	Introduction et principe de fonctionnement . . . . .	263
6.2	Quelques améliorations importantes de l'horloge double . . . . .	265
6.2.1	Contrôle de la température du rayonnement . . . . .	265
6.2.2	La cavité double d'interrogation . . . . .	267
6.2.3	Mesure et réduction des fuites micro-ondes . . . . .	281
6.3	Résultats récents obtenus dans la fontaine <i>RbCs</i> . . . . .	287
6.3.1	Stabilité de fréquence . . . . .	288
6.3.2	Exactitude . . . . .	289
6.4	Conclusion . . . . .	294
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>297</b>
<b>A</b>	<b>Hamiltonien de couplage atome-champ et spin fictif : détails de calcul</b>	<b>301</b>
A.1	Expression de l'hamiltonien de couplage atome-champ dans le référentiel tournant . . . . .	301
A.2	Image du spin fictif . . . . .	303
A.2.1	Une première approche . . . . .	303
A.2.2	Interprétation géométrique. Composantes et précession du spin fictif $\vec{S}(t)$ . . . . .	305
<b>B</b>	<b>Quelques relations utiles</b>	<b>307</b>
B.1	Matrices de Pauli . . . . .	307
B.2	Une propriété des modes propres de la cavité micro-onde . . . . .	308
B.3	Calcul de la constante de normalisation $\beta$ de la loi de probabilité $L^b(\vec{r})$ à $3D$ . . . . .	309
B.4	Coefficient de diffusion en impulsion pour un atome à deux niveaux	310
B.5	Expression complète du taux d'émission spontanée pour un nuage d'atomes froids éclairé par une source laser . . . . .	310
B.6	Conventions concernant les incertitudes et les distributions gaussiennes . . . . .	311
B.7	Conventions concernant les densités spectrales de bruit . . . . .	311
<b>C</b>	<b>Procédure d'accord relatif des deux cavités d'interrogation de la fontaine <i>RbCs</i></b>	<b>313</b>

---

<b>D Quelques valeurs numériques utiles</b>	<b>317</b>
D.1 Constantes fondamentales . . . . .	317
D.2 Atomes de rubidium 87 . . . . .	318
D.3 Atomes de césium 133 . . . . .	320
<b>E Publications</b>	<b>323</b>
E.1 High-Accuracy Measurement of the $^{87}\text{Rb}$ Ground-State Hyper- fine Splitting in an Atomic Fountain . . . . .	324
E.2 Cold Collision Frequency Shifts in a $^{87}\text{Rb}$ Fountain . . . . .	332
E.3 Cavity Frequency Pulling in Cold Atom Fountains . . . . .	337
E.4 Interrogation Oscillator Noise Rejection in the Comparison of Atomic Fountains . . . . .	342
E.5 Cold Atoms Clocks . . . . .	346



# Remerciements

J'ai effectué ce travail de thèse dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences (BNM-LPTF) du Bureau National de Métrologie, et le Laboratoire Kastler Brossel (LKB). Je remercie pour leur accueil Michel Granveaud, directeur du BNM-LPTF, ainsi que Michèle Leduc, Élisabeth Giacobino, et Franck Laloë, directeurs successifs du LKB.

La direction de ma thèse a été assurée conjointement par Christophe Salomon et André Clairon.

Christophe m'a proposé, avec son enthousiasme légendaire, de construire une fontaine double à atomes froids de rubidium et de césium permettant de tester, à un niveau d'exactitude de  $10^{-16}$  les éventuelles variations temporelles de la constante de structure fine  $\alpha$ . Depuis, j'ai appris à connaître l'alpiniste chevronné qu'est Christophe : quand un beau sommet peut être atteint, il n'y a plus une minute à perdre, il faut grimper et ne pas compter ses efforts. Je veux remercier Christophe pour avoir su m'insuffler cet enthousiasme à maintes reprises au cours de ma thèse, en particulier aux moments où il faut se donner au maximum. La rédaction d'un papier dans *Phys. Rev. Lett.* restera un exemple mémorable ...

André à été présent auprès de moi à tous les instants de ma thèse. Les mots sont trop faibles pour dire toute la joie que j'ai eue à travailler avec lui au quotidien. André m'a suivi depuis le début au LPTF. Il a partagé avec moi son expérience impressionnante, comme un père, gratuitement, et avec une disponibilité qui force le respect et l'admiration. Son sens physique très aigu et sa rigueur de métrologue m'ont profondément transformé. Je veux aussi remercier André pour les initiatives qu'il m'a laissé prendre tout au long de ma thèse, et les nombreuses occasions qu'il m'a données de pouvoir présenter nos résultats lors de congrès. Je souhaite pouvoir un jour transmettre avec le même enthousiasme et la même humilité l'expérience que j'ai acquise au contact d'André.

J'ai commencé ma thèse en même temps que Sébastien Bize. Pendant trois ans, nous avons tiré sur le même attelage. Nous avons partagé les joies et les déceptions liées à l'expérience que nous montions. Nous avons passé des nuits à nous battre avec l'horloge *Rb*, afin de mesurer un déplacement collisionnel qui était désespérément plus petit que prévu. Aguerris, après deux ans d'efforts, nous avons construit l'horloge double à atomes de Rb et de Cs, qui est la version compliquée d'une fontaine à un seul atome alcalin. Nous avons ramé dans la même galère lors de l'accord relatif, par polissage manuel, des deux cavités Rb et Cs de la fontaine double. Et enfin nous avons atteint le "sommet" tant attendu : la fontaine *RbCs* est là ; par construction elle devrait avoir une exactitude dans

la gamme des  $10^{-16}$ , et elle démontre une stabilité inégalée jusqu'à présent. Je tiens à dire ici que le succès de cette ascension n'aurait pas été possible sans la complicité qui est née de cet effort commun. Je veux remercier Sébastien pour son enthousiasme, sa rigueur, et sa persévérance infatigable, dans la bonne humeur et la simplicité. Travailler en tandem dans de telles conditions est une source d'enrichissement exceptionnelle et un réel plaisir.

Je tiens à remercier également Christophe Nicolas, qui a effectué son service militaire en travaillant sur la fontaine *Rb*, avec nous. La caractérisation du nuage d'atomes froids par absorption et par imagerie CCD n'aurait pas été possible sans sa persévérance et sa maîtrise de la programmation en langage assembleur. Bien plus, c'est le témoignage de vie de Christophe qui m'a beaucoup touché. Il en est né une amitié fraternelle durable.

Annie Gérard a été présente tout au long de la construction des deux fontaines. Son expertise en techniques de l'ultra-vide, reconnue au delà des limites du LPTF, ainsi que sa minutie et sa persévérance dans toutes les situations désespérées du montage de l'horloge, ont constitué une pièce maîtresse du succès final. J'ai beaucoup appris en travaillant avec Annie, et je la remercie sincèrement pour s'être investie sans compter aux moments importants.

Je remercie également Cipriana Mandache, qui dirige le Laboratoire de Plasma et de Fusion Nucléaire à Bucarest, pour sa participation active aux différentes étapes de construction et d'évaluation des deux fontaines. Sa rapidité d'adaptation et d'intégration dans l'équipe *RbCs*, ainsi que sa gentillesse naturelle, en disent long sur son enthousiasme à travailler dans la recherche scientifique, malgré les difficultés économiques rencontrées dans son pays, la Roumanie.

Je remercie les électroniciens du service d'électronique du LPTF, qui ont guidé mes premiers pas dans la réalisation des circuits parfois compliqués de la fontaine *Rb*. J'ai beaucoup apprécié l'amitié que m'a témoignée Michel Lours, ainsi que ses nombreux conseils éclairés sur la conception des circuits. Je me souviendrai aussi de Michel Dequin, intervenant "sur site" sur le circuit d'asservissement du champ magnétique directeur de la fontaine *Rb*. Je tiens aussi à remercier Laurent Volodimer pour la minutie avec laquelle il a réalisé tous les circuits de la fontaine, et que nous lui demandions parfois dans des délais très courts! Pascale Michel est arrivée dans ce service plus récemment : je lui toute mon amitié. Je veux enfin remercier Giorgio Santarelli, alias "W" pour les proches, ou plus simplement "Giorgio" pour tous ceux qui, dans le monde entier, le connaissent. Son expertise en hyper-fréquences et sur la réalisation de chaînes de synthèse micro-onde est une clé de la réussite des fontaines du BNM-LPTF.

Je remercie les mécaniciens de l'Observatoire de Paris qui, au sein du SERT, ont mis en oeuvre tout leur savoir-faire pour la réalisation des pièces les plus ardues : il s'agit de Jean-Pierre Aoustin et de Jacques Hammès. Merci aussi aux dessinateurs-projeteurs du SERT qui ont dessiné les plans des deux fontaines : il s'agit de Pierre Aynié et d'Armel Legrand. Je n'oublierai pas non plus Patrice Barroso qui s'est laissé envahir dans son atelier de polissage pendant la phase

---

d'accord de la cavité double.

Quand on présente les résultats du BNM-LPTF dans des conférences internationales, on oublie généralement de citer le soutien logistique, sans lequel une expérience ne peut voir le jour. Il s'agit de Pascal Blondé, notre spécialiste informatique, que je remercie pour sa disponibilité, ses compétences, et son efficacité. Il s'agit de Catherine Laurent, qui a passé l'intégralité de nos commandes de matériel, et dont j'ai apprécié la patience et la conscience professionnelle. Et plus récemment, il s'agit d'Yertha Baïdomti, toujours souriante et prête à rendre service.

Je souhaite exprimer ma gratitude à tous les thésards que j'ai côtoyés au cours de ma thèse, et avec qui j'ai pu échanger sur les joies et les difficultés de manip.

Je n'oublierai pas Albane Douillet, et les soirées passées ensemble à parler des manips, de l'avenir, et de la vie.

Je veux aussi remercier pour leur soutien et les discussions que j'ai eues avec chacun d'eux : Franck Ducos, Shougang Zhang, To Kaing, Paul-Éric Pottier, Michel Abgrall, Frédéric Allard, Ivan Maksimovic, Irène Courtillot, et Audrey Quessada. Tous, d'une manière ou d'une autre, m'ont soutenu pendant ma thèse, et en particulier pendant la rédaction de ce manuscrit.

Je ne pourrai oublier l'humour et la droiture de Philippe Laurent, ainsi que le soutien que m'a manifesté Pierre Lemonde tout au long de ma thèse. Une complicité est née de nos discussions, dont je souhaite les remercier sincèrement.

Je souhaite remercier également les autres permanents du laboratoire, avec qui j'ai discuté ou qui m'ont prêté du matériel : Ouali Acef, Jean-Jacques Zondy, Daniele Rovera, Émeric de Clercq. Merci aussi aux personnes de la Section Temps, "de l'autre côté du couloir", qui m'ont témoigné leur amitié : Raymond Tourde, Monique Prodhomme, David Valat, François Taris, Joseph Achkar, et Pierre Urrich.

Je veux remercier aussi Maguelonne Chambon, ingénieur responsable du Temps-Fréquences au Bureau National de Métrologie, pour la joie et la bonne humeur qu'elle répand naturellement lors de ses visites au LPTF, et pour l'amitié qu'elle m'a témoignée.

Je souhaite remercier aussi Yvan Castin, du LKB, pour ses explications théoriques sur les collisions entre atomes froids, ainsi que Peter Wolf, du BIPM, pour ses explications en interférométrie atomique.

Je remercie Andreas Bauch, qui dirige la Section Temps de la PTB, en Allemagne, ainsi que Jacques Vigué, qui dirige le Laboratoire Collisions Agrégats et Réactivité, à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, d'avoir accepté d'être rapporteurs dans mon jury de thèse. Je souhaite également remercier Christian J. Bordé (notre éclairage sur les franges de Ramsey *via* l'interférométrie atomique) et Kurt Gibble (notre concurrent amical sur "l'autre" fontaine *Rb* dans le monde, outre-atlantique), d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse comme examinateurs. Je remercie enfin Lucile Julien, Professeur à l'Université Paris 6, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Cela a été

une vive joie pour moi de lui présenter mon travail de thèse, elle qui a été mon professeur de Physique Atomique à l'Institut d'Optique, et qui m'a prononcé pour la première fois le mot de "franges de Ramsey".

Je remercie le Centre National de la Recherche Scientifique et le Bureau National de Métrologie, qui ont co-financé ma bourse de doctorat pendant trois ans, ainsi que l'Observatoire de Paris, qui m'a financé pendant les quelques mois qui ont été nécessaires pour finir de rédiger ma thèse.

Pour terminer, je souhaite remercier du fond du coeur ceux qui sont invisibles dans le cadre du laboratoire, mais qui m'ont soutenu de manière désintéressée pendant ma thèse, et en particulier dans les instants difficiles : ma soeur et mes parents.

”Avance en eau profonde et jetez vos filets pour attraper du poisson.”  
(Luc 5)



# Introduction

La définition de la seconde qui a été adoptée par la 13<sup>e</sup> Conférence Générale des Poids et Mesures en 1967 est basée sur l'atome de césium.

*La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la transition correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de  $^{133}\text{Cs}$ . [1]*

La réalisation de l'unité de temps du Système International est donc transposée dans le domaine des fréquences. Il s'agit alors de construire un dispositif permettant d'utiliser la transition hyperfine à 9 192 631 770 Hz de l'atome de Cs pour réaliser avec la meilleure exactitude possible la définition de la seconde.

Lorsque cette définition fut adoptée, le choix de l'atome de Cs présentait les avantages suivants, dont certains subsistent aujourd'hui :

- Son abondance naturelle et sa pureté isotopique en font un atome facile à produire et à utiliser.
- La surtension de la transition hyperfine de l'état fondamental du Cs n'est limitée que par la durée pendant laquelle on observe les atomes de Cs, et non par la durée de vie des états ; ceci est d'ailleurs une propriété générale de tous les alcalins.
- La valeur élevée de sa fréquence de transition hyperfine est favorable au facteur de qualité de la résonance atomique, et donc à la stabilité et à l'exactitude de l'horloge.
- Sa masse élevée, et sa pression de vapeur élevée à température ambiante, permettent d'obtenir des vitesses atomiques relativement faibles dans un jet thermique ( $\sim 200 \text{ m.s}^{-1}$ ). On peut alors effectuer la spectroscopie de la transition hyperfine du Cs par la méthode de Ramsey, en gardant une taille raisonnable pour la zone d'interrogation ( $\sim 1 \text{ m}$ ). Dans ces conditions, la largeur de la résonance obtenue est de l'ordre de 100 Hz, ce qui permet de pointer son sommet avec une grande résolution.

Aujourd'hui, les progrès accomplis dans la réalisation d'horloges toujours plus exactes amènent à reconsidérer avec un oeil critique les critères qui ont guidé le choix de l'atome de Cs. A la lueur de mon travail de thèse, nous verrons que le  $^{87}\text{Rb}$  est un atome particulièrement intéressant, car il permet de lever une des limites considérée aujourd'hui comme la plus sérieuse dans les horloges à atomes froids de Cs : le déplacement collisionnel.

La seconde est aujourd'hui réalisée avec une exactitude de  $\sim 10^{-15}$  [2, 3, 4]. Les horloges qui atteignent de telles performances sont des fontaines atomiques.

Comme dans les horloges à jet thermique, elles utilisent la méthode de Ramsey pour interroger les atomes, mais tirent parti de la gravité pour allonger la durée de l'interrogation. Leur développement a été rendu possible grâce aux techniques de refroidissement d'atomes [5], mises au point à la fin des années 80, et qui sont encore l'objet de développements rapides aujourd'hui.

L'une des contributions majeures au bilan d'exactitude actuel des fontaines atomiques provient des collisions entre atomes froids de Cs. Ces collisions induisent un déplacement de la fréquence d'horloge qui croît linéairement avec la densité volumique d'atomes en interaction. Or, dans le cas du Cs, le déplacement collisionnel est très élevé [6, 7, 8]. Par exemple, dans la fontaine FO1, nous avons mesuré un déplacement collisionnel de  $3 \times 10^{-14}$  pour  $4 \times 10^6$  atomes sélectionnés dans les niveaux d'horloge  $m = 0$ , en configuration de piège magnéto-optique [9]. Ce déplacement collisionnel est supérieur par deux ordres de grandeur à l'exactitude recherchée de quelques  $10^{-16}$ . Atteindre ce niveau d'exactitude supposerait, dans ces conditions, que l'on stabilise la densité d'atomes au niveau de 1%, performance non réaliste en pratique. Nous verrons en effet que connaître la densité à mieux que 20% sur le long terme requiert déjà des efforts considérables, parce que le nuage d'atomes froids évolue au cours de la phase d'interrogation, et que sa densité moyenne est très sensible aux paramètres de refroidissement.

Dans le cas du Cs, on est donc amené à diminuer la densité atomique, d'une part en diminuant le nombre d'atomes lancés dans la fontaine, et d'autre part en capturant les atomes non plus dans un piège magnéto-optique, mais dans une mélasse optique. Il s'ensuit une diminution du nombre d'atomes détectés, et donc une dégradation de la stabilité de l'horloge. Par exemple, dans la configuration de piège mentionnée ci-dessus, le nombre d'atomes détectés valait typiquement  $4 \times 10^5$ . La stabilité, alors dans le régime optimal où elle est limitée par le bruit de projection quantique, valait  $\sim 6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ . Une telle stabilité, si le déplacement collisionnel pouvait être stabilisé au niveau de 1%, permettrait d'atteindre  $2 \times 10^{-16}$  au bout de  $\tau = 9 \times 10^4$  s, soit environ 1 jour d'intégration. Cette condition n'est malheureusement pas remplie en pratique. Par ailleurs, nous verrons que diminuer le nombre d'atomes détectés ne serait-ce que d'un facteur 10 allonge aussi d'un facteur 10 le temps d'intégration nécessaire pour atteindre le même niveau de stabilité de  $2 \times 10^{-16}$ . Une contrainte non-réaliste si on veut évaluer en un temps raisonnable et au même niveau tous les autres effets systématiques du bilan d'exactitude de la fontaine.

On conçoit donc que, du fait du déplacement collisionnel élevé dans une fontaine à Cs, le compromis "exactitude/stabilité" est particulièrement difficile si on souhaite atteindre une exactitude dans la gamme de  $10^{-15}$  à  $10^{-16}$ .

Le problème du déplacement collisionnel dans les fontaines est donc particulièrement préoccupant. On verra en effet que l'exactitude potentielle des fontaines peut raisonnablement être améliorée jusqu'à  $\sim 10^{-16}$  si cette difficulté, propre à l'atome de Cs, pouvait être levée.

Plusieurs approches pour contourner ce problème ont été envisagées. Par exemple, on peut penser à diminuer la densité moyenne atomique tout en conservant le même nombre total d'atomes interrogés. Ceci peut être réalisé en étendant spatialement l'échantillon d'atomes pendant un cycle d'horloge, soit sous forme de plusieurs boules d'atomes froids [10], soit sous forme un jet continu d'atomes froids [11]. Ces méthodes, délicates à mettre en oeuvre, sont aujourd'hui en cours

de développement.

Une approche plus radicale consiste à explorer si d'autres atomes ne seraient pas plus favorables du point de vue du déplacement collisionnel. Le  $^{87}\text{Rb}$  par exemple, a été l'objet, en 1997, d'une prédiction théorique selon laquelle son déplacement collisionnel serait 15 fois plus faible que celui du Cs [12]. Fruit d'une modélisation des potentiels d'interaction inter-atomiques et d'un ajustement des paramètres avec les données d'expériences récentes de photo-association et de condensation de Bose-Einstein [13, 14, 15, 16], cette prédiction théorique a constitué la première motivation de la construction, au BNM-LPTF, d'une fontaine à atomes froids de  $^{87}\text{Rb}$ . Cette construction a débuté en 1997, peu avant le début de ma thèse.

J'ai donc été amené à construire une fontaine à atomes froids de  $^{87}\text{Rb}$ , à la caractériser, et à mesurer le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ .

La seconde motivation de ce travail provient de la possibilité, offerte par l'utilisation d'un atome alcalin différent, d'effectuer de nouveaux tests de physique fondamentale concernant la stabilité des constantes fondamentales [17, 18]. En particulier, la comparaison des fréquences de transition hyperfine d'alcalins ou pseudo-alcalins différents (H, Rb, Cs,  $\text{Hg}^+$  ...) permet de réaliser un test de laboratoire de l'éventuelle dérive de la constante de structure fine  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$  dans le temps [19] ( $e$  désigne ici la charge de l'électron, en coulombs, et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide). Une telle variation est prédite par exemple par les récentes théories des cordes, qui cherchent à développer un modèle unifiant gravitation et mécanique quantique [20, 18]. Cette dérive ne concerne d'ailleurs pas seulement la constante  $\alpha$ , mais aussi d'autres constantes fondamentales comme la masse  $m_e$  de l'électron, le rapport  $m_e/m_p$  (masse de l'électron sur masse du proton),  $\alpha_w$  et  $\alpha_s$  (constantes d'interaction faible et forte, respectivement) ... et elle est prédite aussi au voisinage de corps massifs [21, 22]. La recherche d'une telle dérive suscite aujourd'hui un intérêt particulier, car les résultats obtenus dans divers domaines de la physique sont actuellement une source d'énigmes. Le test d'Oklo, par exemple, a été analysé par plusieurs équipes, donnant des limites supérieures plus ou moins contraignantes pour la variation de  $\alpha$  intégrées sur des échelles de temps de  $\sim 1.8 \times 10^9$  années [23, 24, 25, 26, 27]. La limite la moins contraignante suggère cependant que cette dérive est extrêmement faible :  $\dot{\alpha}/\alpha = (0.8 \pm 3.0) \times 10^{-17} \text{ an}^{-1}$ . D'autres tests, basés sur des observations astronomiques de spectres de quasars lointains, semblent discerner une dérive pour le moment inconnue [28] sans être tous unanimes [29] !

Par contraste avec les tests précédents, qui sondent l'évolution de  $\alpha$  sur des échelles de temps cosmologiques, la comparaison des fréquences de transition hyperfine d'alcalins ou pseudo-alcalins différents (H, Rb, Cs,  $\text{Hg}^+$  ...) constitue un test de laboratoire reproductible, sondant l'évolution de  $\alpha$  sur des durées inférieures ou de l'ordre de l'année. De telles comparaisons peuvent même rivaliser d'exactitude avec les tests dits "cosmologiques". L'exactitude actuelle des fontaines atomiques autorise en effet des comparaisons de fréquences au niveau de quelques  $10^{-15}$ , c'est à dire un test de la variation relative de  $\alpha$  au niveau de quelques  $10^{-15}$  par an. Une variation temporelle ou spatiale de rapports de fréquences hyperfines différentes constituerait une signature de la dérive re-

cherchée, et une violation du Principe d'Équivalence d'Einstein [19]. Cet aspect, ainsi que les méthodes de comparaison et leur interprétation, sont détaillés dans la thèse de S. Bize [30].

Il est par ailleurs métrologiquement intéressant d'effectuer cette comparaison dans une seule et même horloge : les incertitudes sur certains effets systématiques peuvent alors être partiellement rejetés dans la comparaison, les paramètres dont ils dépendent (température, champ magnétique, phase du signal d'interrogation ...) étant identiques pour les deux alcalins.

La seconde partie de ma thèse a donc consisté à concevoir et à réaliser une fontaine double pouvant fonctionner simultanément avec deux atomes alcalins différents : le Rb et le Cs. L'objectif visé avec ce dispositif est d'atteindre une exactitude dans la gamme de  $1$  à  $2 \times 10^{-16}$ . Cette fontaine vient de donner ses premiers signaux, et ceux-ci sont particulièrement encourageants.

Le manuscrit de cette thèse est organisé de la façon suivante.

Le chapitre 1 rappelle le principe de fonctionnement d'une fontaine atomique, définit les grandeurs qui caractérisent ses performances (stabilité, exactitude), et donne une interprétation géométrique simple des franges de Ramsey au moyen du spin fictif. Ce chapitre permet d'introduire la fonction de sensibilité  $g(t)$ , outil indispensable pour traduire comment une perturbation de la fréquence de transition atomique se répercute sur la fréquence de l'horloge.

Le chapitre 2 justifie l'expression du déplacement de la fréquence de transition atomique sous l'effet des collisions entre atomes froids. Il rappelle brièvement les principales méthodes employées pour mesurer les longueurs de diffusion en onde "s", autrement que par les mesures de déplacement collisionnel dans les fontaines.

Le chapitre 3 décrit de manière détaillée le fonctionnement de la fontaine *Rb*, puis explique les différentes sources de bruit qui, dans une fontaine, limitent sa stabilité de fréquence. Une limitation importante provient du bruit de phase du signal micro-onde qui sonde la transition d'horloge. On est donc amené à expliquer comment ce signal est produit, et comment il est distribué aux trois fontaines actuellement en fonctionnement au BNM-LPTF : la fontaine FO1 et la fontaine PHARAO, fonctionnant toutes deux avec des atomes de Cs, et la fontaine *Rb*. On donne ensuite les résultats obtenus avec la fontaine *Rb*. En particulier, l'exactitude de la fontaine *Rb* fait l'objet d'un bilan, où on évalue les sources d'erreur liées aux différents effets systématiques.

Les comparaisons entre les fontaines *Rb* et *Cs* du BNM-LPTF se sont déroulées pendant trois campagnes en deux ans. La comparaison des trois résultats fournit un test de laboratoire de l'éventuelle variation temporelle de la constante de structure fine  $\alpha$ . La fin de ce chapitre énonce donc le résultat de ce test, sans revenir sur les arguments théoriques qui le sous-tendent. On trouvera plus de détails sur ce sujet dans la thèse de S. Bize [30].

Le chapitre 4 est consacré à la modélisation des effets dépendant du nombre d'atomes dans les fontaines. Il explique en détail comment, à l'aide d'une si-

mulation Monte Carlo, nous avons pu calculer la densité volumique d'atomes qui intervient dans l'expression du déplacement collisionnel. Cette simulation tient compte de l'évolution du nuage dans l'expérience réelle. Elle permet, entre autres, de déterminer la sensibilité de la densité atomique aux paramètres caractéristiques du nuage, lesquels sont mesurés expérimentalement.

La fin de ce chapitre est consacrée au calcul analytique d'un deuxième effet sensible au nombre d'atomes : l'entraînement de fréquence par la cavité micro-onde d'interrogation (ou "cavity pulling"). On verra que cet effet, loin d'être négligeable dans les fontaines, est même prédominant dans le cas du  $^{87}\text{Rb}$ , par rapport au déplacement collisionnel. Sa mesure est donc un passage obligé si on veut mesurer le déplacement collisionnel.

Le chapitre 5 explique en détail la méthode de mesure simultanée de l'entraînement de fréquence par la cavité et du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ . Puis, il explique comment, en utilisant plusieurs méthodes expérimentales conjointement à la simulation, nous avons calibré de façon absolue les nombres d'atomes caractéristiques dans la fontaine. Enfin il explique comment les résultats de mesure ont été exploités. Nous avons effectué les mesures dans des configurations faisant intervenir différentes combinaisons des longueurs de diffusion. Par comparaison aux prédictions théoriques, nos résultats de déplacement collisionnel fournissent donc un test de cohérence de l'ensemble des valeurs obtenues pour les longueurs de diffusion du  $^{87}\text{Rb}$ .

Le chapitre 6 est consacré à la description d'une fontaine double, destinée à fonctionner à la fois avec des atomes froids de *Cs* et de *Rb*.

Dans cette fontaine, baptisée fontaine *RbCs*, le contrôle de l'environnement des atomes dans la fontaine *RbCs* a fait l'objet de nombreuses améliorations, dans le but d'atteindre une exactitude de  $\sim 10^{-16}$ . Ces améliorations concernent tous les effets systématiques du bilan d'exactitude, et ont nécessité la mise en place de nouvelles méthodes de contrôle et de calibration des effets systématiques inédites jusqu'à présent dans le laboratoire : amélioration des états de surface des cavités micro-ondes, réduction des fuites micro-ondes, contrôle et asservissement de la température de l'expérience à mieux que 0.1 K, chargement des atomes froids par ralentissement laser de jet... Conjointement, l'arrivée au BNM-LPTF d'un oscillateur cryogénique à résonateur en saphir, dont la stabilité à court terme est parmi les meilleures au monde, a permis de s'affranchir du bruit de phase de l'oscillateur local d'interrogation et d'obtenir une stabilité record de  $3.5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  pour la partie *Cs* de la fontaine *RbCs*. Cette stabilité, qui devrait encore pouvoir être améliorée dans les semaines qui viennent, autorise une évaluation de chaque effet systématique au niveau de  $10^{-16}$  en moins de deux jours.

Enfin, l'évaluation préliminaire des effets systématiques semble indiquer un avenir prometteur pour cette horloge, troisième de sa génération au BNM-LPTF, fruit de l'expérience passée et des résultats présentés dans ce mémoire.



# Chapitre 1

## Généralités sur les horloges atomiques

### 1.1 Principe de fonctionnement et caractéristiques d'une horloge atomique

#### 1.1.1 Introduction

Le principe d'une horloge atomique est illustré sur la figure (1.1) : la fréquence  $\nu$  d'un oscillateur macroscopique est asservie sur la fréquence  $\nu_{at}$  de la transition entre deux niveaux d'énergie de l'atome. Le signal utile de l'horloge, qui participe à la réalisation de l'échelle de temps du Temps Atomique International, est le signal délivré par l'oscillateur macroscopique asservi sur la transition atomique.

Dans le cas de l'atome de césium  $^{133}\text{Cs}$ , qui a été pris pour atome de référence dans la définition de la seconde, la transition atomique est celle qui sépare les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental  $6\ ^2S_{1/2}$ , et la fréquence de transition atomique vaut  $\nu_{at} = 9\ 192\ 631\ 770\ \text{Hz}$  lorsque l'atome est non perturbé<sup>1</sup>. L'oscillateur macroscopique, quant à lui, est par exemple un oscillateur à résonateur en quartz, ou encore un oscillateur cryogénique à résonateur en saphir, refroidi à l'hélium liquide.

L'asservissement est réalisé de la manière suivante :

1. on prépare les atomes dans l'un des deux niveaux, excité ou fondamental ;
2. on les excite ensuite avec une impulsion de la radiation à la fréquence  $\nu$  (on dit qu'on "interroge" les atomes). Selon le désaccord  $\nu - \nu_{at}$ , les atomes transitent plus ou moins d'un niveau vers l'autre (c'est la "réponse" des atomes). On verra que la réponse atomique à cette excitation est maximale lorsque  $\nu = \nu_{at}$ .
3. on corrige la fréquence de l'oscillateur macroscopique (nommé "oscillateur d'interrogation") de façon à rester asservi autour de l'optimum de la réponse atomique.

---

<sup>1</sup>On peut imaginer fabriquer des horloges utilisant d'autres atomes sur des transitions micro-ondes ( $Rb, H, Mg \dots$ ) ou optiques ( $Sr, Ca, Hg^+, Yb^+ \dots$ )

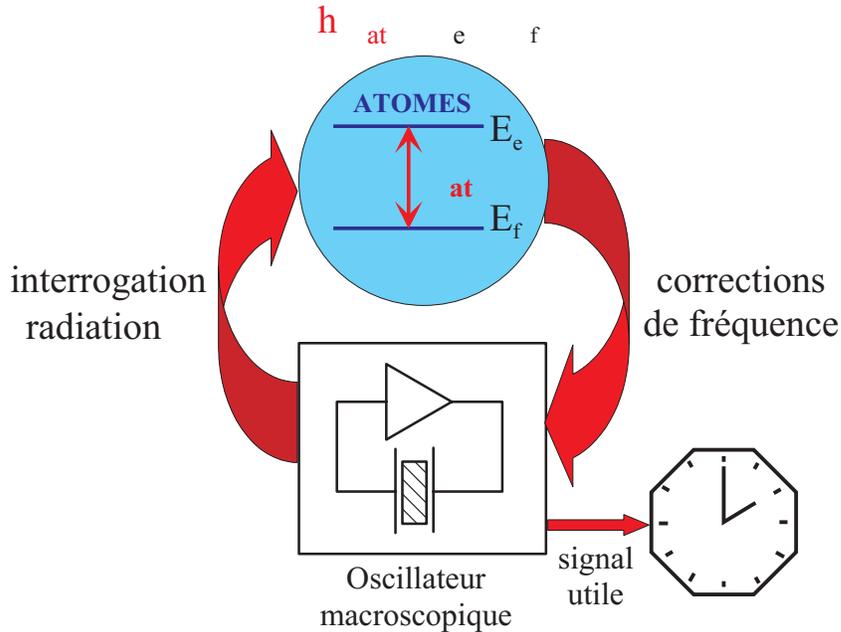


FIG. 1.1 – Principe de fonctionnement d’une horloge atomique.

### 1.1.2 Principe de l’interrogation de Ramsey

La figure (1.2) illustre la méthode utilisée pour interroger les atomes dans les horloges de grande exactitude. Cette méthode porte le nom du physicien N. Ramsey qui la proposa pour la première fois en 1950 [31].

Les atomes sont initialement préparés dans l’un des deux états hyperfins de la transition d’horloge (disons  $|f\rangle$  pour la suite du raisonnement). Ils sont ensuite interrogés par le champ micro-onde de fréquence  $\nu$ . L’interrogation de Ramsey se déroule sur un intervalle de temps de durée  $T$ , séparant deux étapes très courtes, de durée  $\tau \ll T$ . Les atomes sont effectivement couplés au champ micro-onde uniquement pendant les phases de durée  $\tau$ , tandis que pendant l’intervalle de temps  $T$ , l’atome n’est pas couplé au champ, et l’état interne de l’atome évolue librement. A l’issue de cette interrogation, et dans les conditions de fréquence et de puissance du champ interrogateur qui maximisent la probabilité de transition, les atomes ont effectué la transition vers le niveau  $|e\rangle$ . Un système de détection mesure alors dans quel état ils se trouvent. Le résultat de la mesure permet d’estimer la probabilité de transition. Elle vaut 1 dans la situation optimale.

La probabilité de transition en fonction du désaccord de la fréquence de l’oscillateur d’interrogation par rapport à la transition atomique,  $\delta = \nu - \nu_{at}$ , est représentée sur la figure (1.2). C’est un système de franges, centré en  $\delta = 0$ , dont la période vaut  $1/T$ , et qui s’atténuent lorsqu’on s’éloigne de résonance. La largeur à mi-hauteur de la frange centrale vaut  $\Delta\nu = 1/2T$ , tandis que la largeur à mi-hauteur de l’enveloppe des franges vaut  $\sim 1/\tau$ . Plus la durée  $T$  du vol libre est grande, plus la largeur de la frange centrale est petite, et plus la pente à mi-hauteur de la frange centrale est élevée. Cette pente représente la sensibilité avec laquelle les atomes discriminent la fréquence qui les interroge.

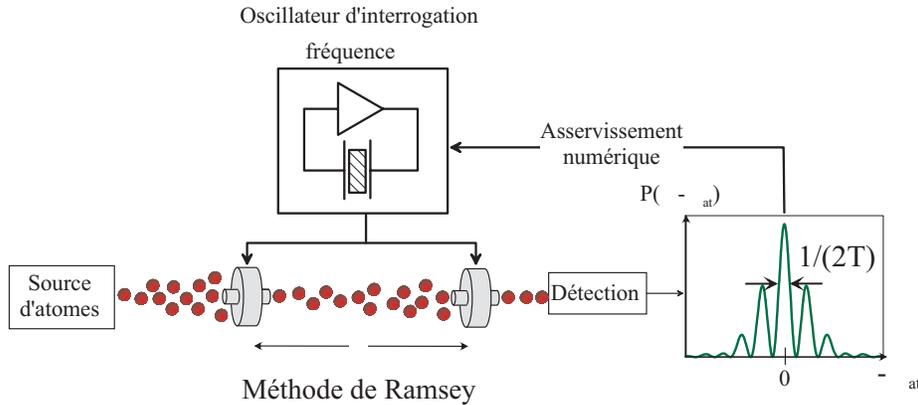


FIG. 1.2 – Principe de l’interrogation de Ramsey.

On a donc intérêt à ce qu’elle soit la plus élevée possible, c’est à dire à ce que la durée  $T$  de vol libre soit la plus élevée possible.

Par ailleurs, à pente fixée, l’horloge est d’autant plus performante que l’on sait résoudre une fraction toujours plus infime de sa fréquence. Cette fraction est inversement proportionnelle au facteur de qualité de la résonance :

$$Q_{at} = \frac{\nu_{at}}{\Delta\nu} \quad (1.1)$$

On a donc intérêt à ce que le facteur de qualité soit le plus grand possible, c’est à dire à choisir un atome dont la fréquence de transition atomique,  $\nu_{at}$ , soit la plus élevée possible.

Sur la figure (1.2), les atomes se déplacent physiquement de la source au système de détection en traversant la zone d’interrogation. C’est ce qui se passe dans les horloges à jet thermique. Les atomes sortent d’un four et se déplacent à une vitesse moyenne de  $\sim 200 \text{ m.s}^{-1}$ . Par ailleurs, les effets parasites qui déplacent la fréquence de l’horloge sont d’autant plus difficiles à maîtriser que les dimensions de l’horloge sont élevées. En pratique, la longueur de la zone d’interrogation ne dépasse pas  $\sim 1 \text{ m}$ , et la durée de la phase de vol libre est donc limitée à  $\sim 5 \text{ ms}$ . La frange centrale a donc une largeur de  $\sim 100 \text{ Hz}$ , et le facteur de qualité, pour un jet thermique de Cs, est de l’ordre de  $9.2 \times 10^7$  [32].

Une méthode pour allonger le temps de la phase de vol libre consiste, sur Terre, à lancer les atomes vers le haut. Les atomes traversent une première fois une cavité micro-onde, où ils interagissent avec le champ interrogateur, ralentissent sous l’effet de la pesanteur, rebroussement chemin, et traversent une deuxième fois la même cavité micro-onde, où ils interagissent à nouveau avec le champ interrogateur. Ils sont enfin détectés. Il s’agit donc d’une interrogation de Ramsey spatialement repliée. Une première tentative pour fabriquer un tel dispositif, appelé ”fontaine atomique”, a été effectuée par Zacharias en 1953, avec un jet thermique vertical. Mais, en raison de la déficience en atomes lents dans un jet atomique, cette expérience resta sans résultat [33].

Au début des années 1990, le développement des techniques de refroidissement d’atomes par laser rendit cette idée réalisable. La première fontaine

atomique fonctionna en 1989 avec des atomes de sodium [34]. Pour la première fois, des franges de Ramsey d'une largeur de 2 Hz furent observées en appliquant le schéma d'interrogation décrit ci-dessus. Peu après, la première fontaine à atomes froids de  $Cs$  fut réalisée à des fins métrologiques [35] selon le schéma de principe imaginé par Zacharias près de 40 ans auparavant. Ce dispositif sera détaillé plus loin. Signalons dès maintenant que dans une fontaine de 30 cm de haut, ce qui correspond à une vitesse de lancement de  $2.5 \text{ m.s}^{-1}$ , la durée du vol libre vaut 0.5 s et la frange centrale de Ramsey a une largeur à mi-hauteur de 1 Hz. Par rapport au jet thermique fonctionnant avec le même atome de  $Cs$ , ceci représente un gain automatique d'un facteur 100 sur le facteur de qualité de la résonance atomique.

Une autre méthode pour allonger la durée de la phase de vol libre est de s'affranchir de la pesanteur et de lancer les atomes très lentement dans la configuration d'interrogation à deux zones séparées de la figure (1.2). Dans l'espace, les techniques de refroidissement laser permettent de contrôler le lancement des atomes jusqu'à des vitesses de l'ordre de  $5 \text{ cm.s}^{-1}$ ; le vol libre dure alors typiquement 5 s, ce qui permet de gagner en théorie un autre facteur 10 sur le facteur de qualité atomique par rapport aux fontaines à atomes froids.

Signalons enfin que la séquence d'interrogation peut être effectuée temporellement (et non spatialement), les atomes restant fixes. C'est le cas par exemple dans les horloges à ions piégés (on trouvera plus de références sur ce sujet dans [36]).

### 1.1.3 Stabilité de fréquence d'une horloge atomique

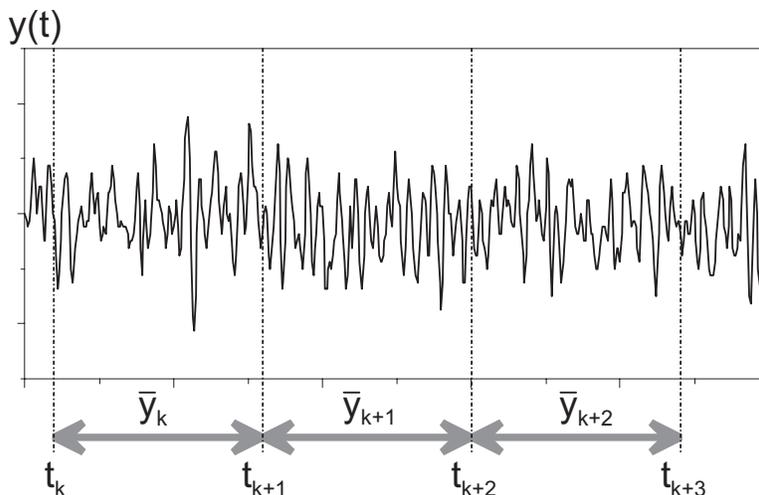


FIG. 1.3 – Calcul de la variance d'Allan d'un signal aléatoire.

La fréquence du signal utile délivré par une horloge atomique peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\nu_{horl}(t) = \nu_0(1 + \varepsilon + y(t))} \quad (1.2)$$

où  $\nu_0$  désigne la fréquence de Bohr entre les deux niveaux de la transition d'horloge de l'atome non-perturbé.  $\varepsilon$  représente le déplacement, en valeur relative, de la fréquence moyenne du signal, par rapport à  $\nu_0$ .  $y(t)$  représente les fluctuations de fréquence de ce signal, également en valeur relative. Ces fluctuations déterminent la stabilité de fréquence de l'horloge, c'est à dire sa capacité à reproduire la même fréquence moyenne au cours du temps.

La stabilité d'une horloge est souvent caractérisée par l'écart type des fluctuations de fréquences. Malheureusement, pour les fluctuations lentes de la fréquence de l'horloge, on montre que la variance vraie de ces fluctuations n'existe pas [32]. C'est le cas par exemple lorsque la densité spectrale de puissance de bruit de fréquence est du type  $S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$  avec  $\alpha \leq -1$ . Ceci pose un problème puisque c'est justement le bruit basse fréquence (i.e. sur le long terme) qui nous intéresse pour caractériser une horloge.

Afin de remédier à ce problème, D. Allan a introduit un autre type de variance [37] qui est calculée de la façon suivante. Notons  $\bar{y}_k$  les valeurs moyennes successives des fluctuations relatives de fréquence,  $y(t)$ , sur des intervalles successifs  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  de durée  $\tau$  (cf. figure (1.3)) :

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} y(t) dt \quad (1.3)$$

La variance d'Allan  $\sigma_y^2(\tau)$  est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

c'est à dire que c'est, à un facteur 2 près, la variance vraie des fluctuations des différences entre échantillons successifs  $y_k$  et  $y_{k+1}$ . Dans la suite,  $\sigma_y(\tau)$  est nommé "stabilité de fréquence de l'horloge".

La variance d'Allan est intéressante à plusieurs titres. D'abord, elle existe, mathématiquement, pour tous les types de bruit de fréquence usuellement rencontrés quand on manipule des horloges, c'est à dire pour des combinaisons linéaires du type

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=+2} h_\alpha f^\alpha$$

Ensuite, la courbe  $\sigma_y(\tau)$ , en échelle log-log, est linéaire par morceaux, et la pente de chaque morceau est caractéristique<sup>2</sup> d'une puissance  $\alpha$  (cf. figure (1.4)). On peut donc facilement déduire de la courbe  $\sigma_y(\tau)$  le type de bruit dominant sur le signal d'horloge. Par exemple, dans les fontaines atomiques, pour  $\tau \lesssim 10^5$  s, les fluctuations des  $\bar{y}_k$  ne sont pas corrélées. Il s'agit donc de bruit blanc de fréquence, qui se traduit par une décroissance en  $\tau^{-1/2}$  sur le graphe précédent. Enfin, la variance d'Allan est égale, pour du bruit blanc de fréquence, à la variance vraie de la suite  $\{\bar{y}_k\}$ . Ceci justifie aussi, et *a posteriori*, que l'on utilise

<sup>2</sup>sauf pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$ , pour lesquels les pentes sont égales et valent  $-1$ . Mais ceci est sans importance dans le cas des fontaines puisque ce sont les bruits à basse fréquence qui nous intéressent, c'est à dire pour  $\alpha \leq 0$ .

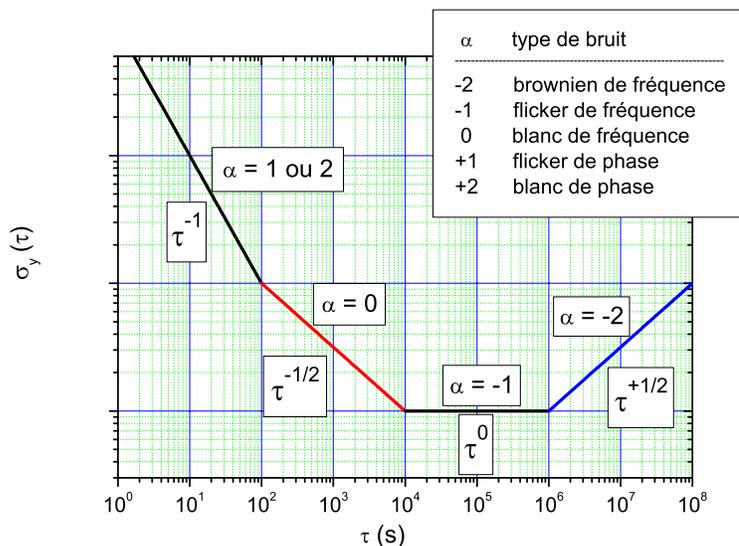


FIG. 1.4 – Variation caractéristique de l'écart type d'Allan en fonction du type de bruit.

$\sigma_y(\tau)$  comme estimateur de l'incertitude obtenue sur une mesure de fréquence de durée  $\tau$  dans les fontaines atomiques.

Les effets qui sont à l'origine des fluctuations de fréquence du signal d'horloge peuvent être classés en 3 catégories :

1. le bruit blanc de fréquence de l'oscillateur d'interrogation lui-même ;
2. le bruit blanc de probabilité de transition produit par le système de détection, et qui, *via* l'asservissement, se traduit par des fluctuations sur les signaux de correction appliqués sur la fréquence de l'oscillateur d'interrogation ;
3. le bruit blanc intrinsèque à la mesure de l'état interne des atomes à l'issue de l'interrogation de Ramsey, lié aux postulats de la mesure en mécanique quantique (principe de décomposition spectrale et réduction du paquet d'onde) [38].

Par exemple, on verra que lorsqu'on utilise un oscillateur à quartz comme oscillateur d'interrogation, la stabilité de la fontaine atomique à atomes froids de  $Cs$  du BNM-LPTF est limitée par le bruit de cet oscillateur et vaut  $\sigma_y(\tau) \simeq 10^{-13} \tau^{-1/2}$ . Une telle stabilité signifie qu'après quelques jours de mesure, l'écart type des fluctuations relatives de fréquence du signal d'horloge moyenné sur un jour ( $\tau = 86400$  s) vaut  $\sim 3.4 \times 10^{-16}$ . A l'issue de cette mesure<sup>3</sup>, on peut donc conclure qu'on a effectué une mesure de la transition d'horloge du  $^{133}Cs$  avec la

<sup>3</sup>Bien sûr, pour que l'écart type à 1 jour ait une signification, il faut effectuer la mesure pendant plusieurs jours de façon à pouvoir effectuer une étude statistique sur plusieurs échantillons de 1 jour chacun.

résolution de  $\sim 3.4 \times 10^{-16} \times 9.192 \times 10^9 = 3.1 \times 10^{-6}$  Hz.

Enfin, sur des temps très longs, la stabilité de fréquence des horloges atomiques atteint un palier ( $\sigma_y(\tau) = \text{constante}$ , bruit de scintillation de fréquence) dû à des fluctuations incontrôlées des perturbations agissant sur les atomes. Ce palier n'a pas encore été observé sur les fontaines, faute d'une horloge suffisamment stable à long terme à laquelle se référer.

#### 1.1.4 Exactitude d'une horloge atomique

Dans l'équation (1.2),  $\varepsilon$  représente le déplacement, en valeur relative, de la fréquence moyenne du signal délivré par l'horloge, par rapport à la fréquence de Bohr de la transition atomique de l'atome non perturbé,  $\nu_0$ . L'origine de ce déplacement de la fréquence de l'horloge provient des effets qui perturbent de manière déterministe le processus d'interrogation des atomes (on parle d'effets systématiques). Ce déplacement n'est pas gênant tant qu'on sait l'évaluer<sup>4</sup> précisément : on peut alors corriger la valeur mesurée,  $\nu_{horl}(t)$ , et remonter à la fréquence de l'atome non perturbé,  $\nu_0$ .

**On appelle "exactitude" l'incertitude avec laquelle on évalue  $\varepsilon$ .**

Cette incertitude, liée aux effets systématiques qui déplacent la fréquence d'horloge, porte parfois le nom "d'incertitude de type B", par opposition à l'incertitude statistique de la mesure<sup>5</sup>, qui porte le nom "d'incertitude de type A".

La qualité de la réalisation de l'unité de temps est donc déterminée par l'exactitude de l'horloge à Cs utilisée. L'exactitude actuelle des jets thermiques au Cs est voisine de  $6 \times 10^{-15}$  [39, 40, 41] celle des fontaines atomiques à atomes froids de Cs est voisine de  $\sim 10^{-15}$  [42, 43, 4].

Remarque : la stabilité d'une horloge peut, pour des raisons pratiques, limiter son exactitude. On verra en effet qu'il existe toute une liste d'effets systématiques à évaluer : on dit qu'on dresse un bilan d'exactitude. L'évaluation de ces effets est longue en général. Elle implique une modélisation des phénomènes physiques mis en jeu, ainsi que des mesures de fréquence testant ces modèles pour plusieurs valeurs de paramètres de fonctionnement de l'horloge. Pour pouvoir prétendre à une exactitude de  $10^{-15}$ , on comprend qu'il est nécessaire d'évaluer chacun des effets systématiques avec une incertitude inférieure à  $10^{-15}$ . Ceci requiert, pour chaque effet systématique, des mesures de fréquence avec une résolution égale à l'incertitude sur cet effet, ce qui prend du temps ! On a donc intérêt à avoir la meilleure stabilité possible pour l'horloge (améliorer la stabilité d'une fontaine d'un facteur 2 permet d'atteindre le même niveau de résolution en 4 fois moins de temps).

De plus, les dérives des paramètres, au cours de la mesure, peuvent induire une dérive des effets systématiques. Dans ce cas, une telle dérive se traduit par

---

<sup>4</sup>Évaluer un effet systématique, c'est :

1. estimer cet effet et
2. estimer l'incertitude que l'on a sur cet effet.

Chacun de ces deux points doit être accompagné de sa ou ses méthodes d'estimation, clairement énoncés au moment où l'on présente le bilan d'exactitude.

<sup>5</sup>L'incertitude de type A d'une mesure de durée  $\tau$  peut être estimée par l'écart type d'Allan,  $\sigma_y(\tau)$ .

une dégradation de la variance sur le long terme<sup>6</sup>, et peut donc, en dépit d'une bonne stabilité à court terme, ralentir voire empêcher l'évaluation de l'horloge au niveau d'exactitude espéré. Face à ce problème, on a deux possibilités :

- soit on rend les effets systématiques les plus petits possibles, de façon à limiter les dérives,
- soit on essaie d'évaluer ces effets systématiques avec la résolution suffisante pour pouvoir corriger leur dérive, ce qui revient à "blanchir" le bruit de fréquence de l'horloge. Ceci n'est pas toujours trivial en pratique<sup>7</sup>.

Nous verrons dans la suite que le problème du déplacement collisionnel illustre bien ces deux alternatives, la première dans le cas du  $^{87}\text{Rb}$ , la seconde dans le cas du Cs.

## 1.2 Principe de fonctionnement d'une fontaine atomique

La figure (1.5) représente schématiquement le corps d'une fontaine atomique. Il a une hauteur de  $\sim 1.5$  m et pèse environ 200 kg. La fontaine complète comporte d'autres éléments périphériques (banc optique, oscillateur d'interrogation, ordinateur ...), qui seront décrits plus en détail dans le chapitre 3.

Les fontaines atomiques du BNM-LPTF fonctionnent de manière cyclique : ce que l'on va décrire maintenant concerne un cycle de fonctionnement, qui dure typiquement 1 à 2 s.

### 1.2.1 Manipulation des atomes : capture et lancement

Le cycle de la fontaine commence par le ralentissement des atomes d'une vapeur ou d'un jet thermique à l'aide de faisceaux laser. Ces techniques maintenant bien maîtrisées ont été développées depuis la fin des années 80 [5]. Elles font intervenir des mécanismes d'interaction entre la lumière et les atomes, qu'il n'est pas question de détailler ici. Cette interaction peut se résumer de la manière suivante : sous certaines conditions de puissance, fréquence, et polarisation, il est possible, avec des faisceaux laser, d'exercer des forces de friction et/ou de piégeage telles que les atomes soient ralentis jusqu'à des vitesses typiques de  $\sim 2 \times v_{rec}$  et/ou confinés spatialement dans des puits de potentiel lumineux de largeur  $\sim \lambda/2$ . Ici,  $\lambda$  est la longueur d'onde du laser utilisé (852 nm pour le Cs), et  $v_{rec} = \hbar k/m$  est la vitesse de recul d'un atome de masse  $m$  lorsqu'il absorbe ou émet un photon d'impulsion  $\hbar k = h/\lambda$  ( $v_{rec} \simeq 3.5 \text{ mm.s}^{-1}$  pour le Cs). Ces mécanismes d'interaction font donc intervenir des niveaux d'énergie excités de l'atome (niveau  $6 \ ^2P_{3/2}$  pour le Cs), séparés des niveaux d'horloge de  $h\nu_{opt} = hc/\lambda$  (transition optique). Ils sont basés sur des cycles d'absorption et d'émission spontanée de photons, avec un taux maximal de  $\sim \Gamma/2 \simeq 18.8 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ , où  $\Gamma$  est la largeur naturelle de la transition optique considérée.

<sup>6</sup>la décroissance en  $\tau^{-1/2}$  n'est valable que pour du bruit blanc.

<sup>7</sup>Notons qu'une méthode pour évaluer un effet systématique consiste à exalter cet effet, à le mesurer, puis à extrapoler sa valeur à zéro. Ceci suppose néanmoins un minimum de connaissance sur la loi de variation de cet effet.

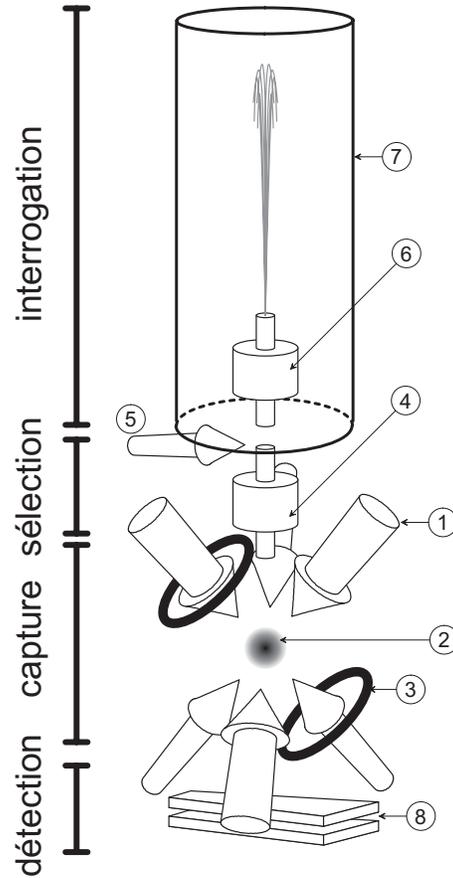


FIG. 1.5 – Principe de fonctionnement d'une fontaine atomique.

En quelques centaines de millisecondes, il est donc possible, à l'aide de 3 paires de faisceaux lasers contra-propageants ((1) sur la figure (1.5)), de ralentir et de refroidir dans les 3 directions  $\sim 2 \times 10^8$  atomes. On réalise pour cela une "mélasse optique lin $\perp$ lin" où les polarisations des faisceaux contra-propageants sont linéaires et orthogonales les unes par rapport aux autres. Le nuage d'atomes froids (2), localisé à l'intersection des 6 faisceaux lasers, a une distribution spatiale gaussienne dont l'écart type dépend du diamètre des faisceaux. Dans notre cas, l'écart type de cette distribution spatiale vaut  $\sigma_r \simeq 5$  mm, pour un "waist" de faisceaux  $w = 13$  mm. La distribution de vitesses des atomes est proche d'une gaussienne, et la vitesse quadratique moyenne, ou écart type de la distribution, vaut  $\sigma_v \sim 2v_{rec}$ . Elle correspond à une température d'agitation, dans chaque direction, donnée par  $k_B T/2 = m\sigma_v^2/2$ , c'est à dire  $T \sim 1\mu$  K (d'où le qualificatif souvent employé d'atomes froids).

A la force de friction, produite dans une mélasse optique, on peut superposer une force de rappel vers le centre des faisceaux de refroidissement (puits de potentiel attractif), en utilisant un piège magnéto-optique (polarisations  $\sigma_+ - \sigma_-$  et création d'un gradient de champ magnétique à l'aide de deux bobines en configuration anti-Helmholtz sur l'une des paires de faisceaux (3)). Dans notre

configuration d'intensité et de désaccord des faisceaux laser de refroidissement, l'utilisation d'un piège magnéto-optique permet de gagner un facteur  $\sim 6$  sur le nombre d'atomes capturés, et diminuer la taille du nuage initial ( $\sigma_r \sim 1.5$  mm).

La dernière étape de manipulation des atomes consiste à lancer le nuage d'atomes froids vers le haut à  $\sim 4$  m.s<sup>-1</sup>. Ceci est réalisé en effectuant le refroidissement non plus dans le référentiel du laboratoire, mais dans un référentiel en mouvement à 4 m.s<sup>-1</sup> vers le haut (technique de mélasse en mouvement [35]). Nous verrons cela plus en détail au chapitre 3.

### 1.2.2 Sélection des atomes

A l'issue du lancement, les atomes se trouvent dans un mélange statistique des sous-niveaux Zeeman de l'état hyperfin  $|e\rangle$  de la transition d'horloge. La deuxième étape consiste donc à sélectionner les atomes de l'état  $|m = 0\rangle$ , seuls utiles pour la transition d'horloge. Ceci peut être fait par interaction micro-onde, par exemple dans une cavité de sélection (4), et/ou optiquement (5).

A la fin de cette étape, tous les lasers sont éteints, la lumière parasite arrivant dans la zone d'interrogation pouvant induire des déplacements considérables de la fréquence de résonance atomique.

### 1.2.3 Interrogation de Ramsey

L'étape suivante est l'interrogation de Ramsey des atomes. Le nuage traverse une première fois la cavité d'interaction (6), où les atomes interagissent avec le champ oscillant à la fréquence d'interrogation  $\nu$ . Le nuage sort de la cavité, effectue un vol balistique. Son apogée est  $\gtrsim 30$  cm au-dessus de la cavité. Puis il retombe sous l'effet de la pesanteur, traverse une deuxième fois la même cavité, où les atomes interagissent à nouveau avec le champ interrogateur. La durée du vol au-dessus de la cavité micro-onde d'interaction est de l'ordre de 0.5 s. La zone d'interrogation (7) est conçue et réalisée de façon à préserver les atomes des fluctuations de l'environnement (isolation thermique, isolation magnétique, isolation électrique, isolation micro-onde ...).

Remarque : il faut noter ici l'intérêt, du point de vue de l'effet Doppler du 1<sup>er</sup> ordre, de traverser deux fois la même cavité, avec deux vitesses opposées à chaque fois. Bien que l'onde électro-magnétique intra-cavité avec laquelle interagissent les atomes soit en théorie stationnaire, il existe en pratique un résidu d'onde progressive, dans la cavité, lié aux pertes distribuées de façon inhomogène dans les parois. Il existe donc des gradients de phase dans la cavité, qui entraînent un déplacement de fréquence par effet Doppler résiduel du 1<sup>er</sup> ordre. Dans une fontaine, les vitesses opposées de passage du nuage atomique à l'aller et au retour permettent de compenser automatiquement cet effet. On verra dans la suite que cette compensation n'est pas parfaite, et est à l'origine d'un déplacement résiduel de fréquence qu'il faudra soigneusement évaluer si l'on veut atteindre une exactitude dans la gamme des  $10^{-16}$  pour les fontaines.

### 1.2.4 Détection

Les atomes finissent par retomber dans la zone de détection (8), qui sera détaillée au chapitre 3. On y mesure, par une méthode optique, les populations

$N_f$  et  $N_e$  des deux niveaux de la transition d'horloge,  $|f, m = 0\rangle$  et  $|e, m = 0\rangle$ , et on en déduit la probabilité de transition par

$$P = \frac{N_e}{N_f + N_e}$$

La figure (1.6) montre un exemple typique de franges de Ramsey, obtenues en

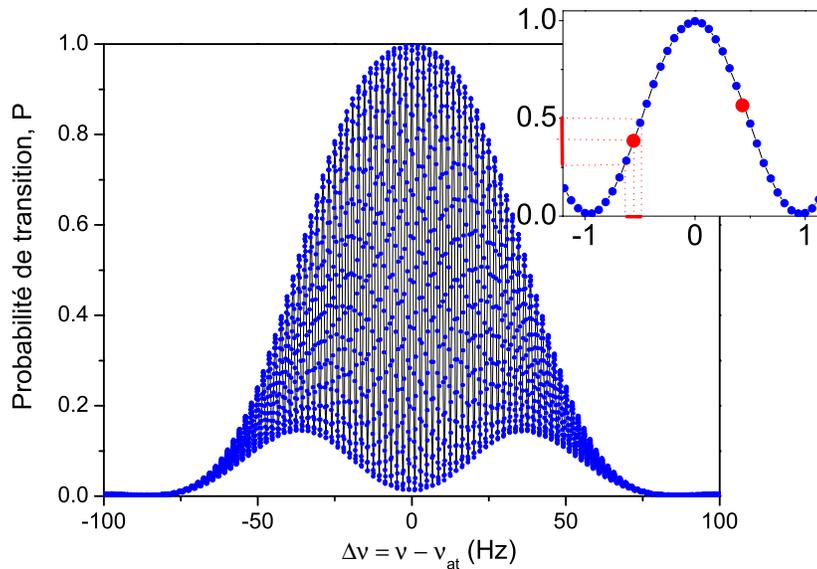


FIG. 1.6 – Franges de Ramsey obtenues avec des atomes froids de Cs sur la fontaine FO1 du BNM-LPTF. La frange centrale, représentée en encart, a une largeur de 1 Hz à mi-hauteur. On a illustré sur cette frange le principe de l'asservissement.

balayant la fréquence d'interrogation  $\nu$  sur un intervalle de 200 Hz autour de la résonance atomique. Elle illustre le principe de l'asservissement sur la frange centrale de Ramsey.

### 1.2.5 Principe de l'asservissement

On a dit précédemment qu'on cherche à asservir la fréquence de l'oscillateur d'interrogation sur le sommet de la frange centrale de Ramsey. Pratiquement, au sommet de la frange, les atomes ne discriminent pas les fluctuations de fréquence de l'oscillateur d'interrogation : l'asservissement ne fonctionnerait donc pas si on interrogeait les atomes à désaccord nul  $\delta = \nu - \nu_{at} = 0$ .

On interroge donc les atomes là où ils discriminent le mieux les fluctuations de fréquence de l'oscillateur : à mi-hauteur de la frange centrale. D'un cycle au suivant, on sonde donc alternativement, et à mi-hauteur, les deux côtés de la frange centrale. La différence entre les probabilités de transition d'un côté et de

l'autre de la frange révèle la différence entre la fréquence d'interrogation  $\nu$ , et la fréquence de la résonance atomique  $\nu_{at}$ . Les différences successives sont utilisées comme signal d'erreur pour corriger l'oscillateur d'interrogation. Lorsque l'asservissement fonctionne, le signal d'erreur est égal à zéro, aux fluctuations près, et les probabilités de part et d'autre de la frange centrale sont égales, en moyenne.

### 1.3 Une interprétation géométrique des franges de Ramsey

Le but de cette partie est de donner une interprétation simple et géométrique aux franges de Ramsey observées en sortie du système de détection, lorsqu'on balaie la fréquence de l'oscillateur d'interrogation autour de la résonance atomique.

Dans cette partie, on commence par rappeler l'expression de l'hamiltonien d'interaction entre l'atome et le champ micro-onde interrogateur.

On explique ensuite comment l'image simple du spin fictif permet de comprendre l'évolution de l'état interne de l'atome au cours d'une simple interaction avec le champ interrogateur (oscillation de Rabi).

Puis on utilise cette interprétation géométrique pour expliquer les franges observées à l'issue de l'interrogation de Ramsey.

#### 1.3.1 Hamiltonien de couplage atome-champ

##### Une fontaine atomique : traitement quantique, ou semi-classique ?

En principe, les atomes utilisés dans la fontaine doivent être décrits de manière quantique, c'est-à-dire comme des ondes de matière avec en plus une structure interne complexe (8 niveaux pour le rubidium, 16 pour le césium). L'interprétation des signaux obtenus avec une fontaine atomique, ainsi que la compréhension des différents effets systématiques qui affectent la fréquence d'horloge, peut donc être effectuée en remplaçant les fontaines atomiques dans le cadre théorique général des interféromètres atomiques [44, 45], traités comme des objets quantiques et relativistes.

Décrire complètement la réalité d'un interféromètre atomique fait appel à un arsenal mathématique relativement complexe, qui s'avère nécessaire dès lors que les effets physiques qu'il met en relief apportent une contribution non-négligeable au bilan d'exactitude de la fontaine. La fontaine constitue alors un outil de mesure adapté pour tester les signatures de ces effets, et confirmer (ou infirmer) les modèles mathématiques.

D'un point de vue théorique très général, une fontaine atomique est un objet complètement quantique et relativiste : les atomes doivent être considérés comme des ondes de matière, avec une cohérence propre. Ils interagissent simultanément avec des champs gravitationnel et électro-magnétique, et l'évolution de leur état (interne et externe) est régie par l'équation de Dirac pour les ondes de matière, dans le cadre de la Relativité Générale [46, 47].

Considérer une fontaine à atomes froids sous l'éclairage conceptuel de l'interférométrie atomique permet par exemple, plus de 50 ans après l'introduction

de la méthode de Ramsey, de ré-interpréter de manière encore plus transparente les franges obtenues en sortie de système de détection. Dans le cadre de cette ré-interprétation [48, 49, 50, 51], les franges de Ramsey résultent de l'interférence entre les paquets d'onde dans l'état fondamental et dans l'état excité. La différence

$$\Delta \vec{k}_{at} = \vec{k}_e - \vec{k}_f$$

entre les vecteurs d'onde atomiques dans les états respectivement excité et fondamental, est à l'origine d'un déphasage progressif entre les amplitudes des deux fonctions d'onde atomiques au cours de leur propagation dans l'interféromètre. Dans un interféromètre de longueur  $L$  (cf. figure (1.7)) :

$$\Delta \Phi_{at} = \Delta k_{at} \times L$$

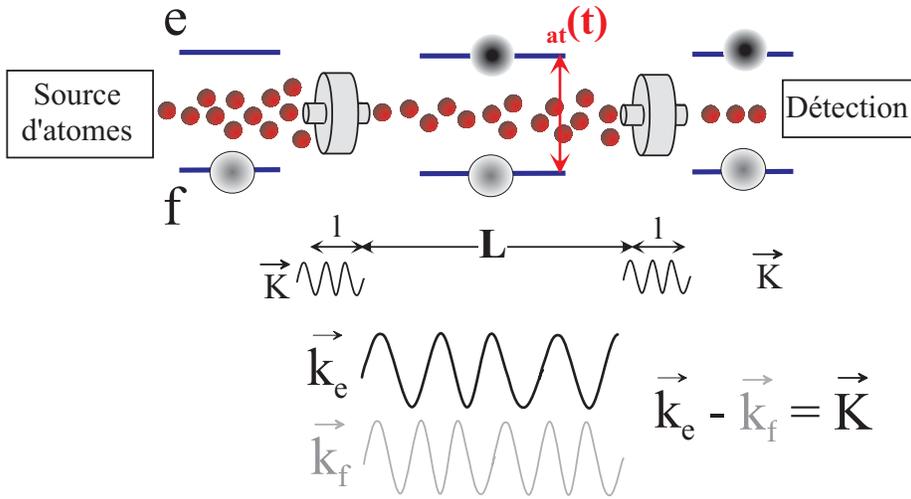


FIG. 1.7 – Principe d'une horloge atomique comme interféromètre atomique, et ré-interprétation des franges de Ramsey.  $\omega$  représente la pulsation du champ électromagnétique d'interrogation, et  $\vec{K}$  représente le vecteur d'onde absorbé par les atomes à leur traversée dans la cavité. La situation réelle est plus complexe, puisqu'il faut considérer, à l'intérieur de la cavité, la distribution spatiale des vecteurs d'onde  $\vec{K}$ , qui se couple à la distribution spatiale du paquet d'onde atomique. On a représenté ici, schématiquement, la situation standard de fonctionnement à mi-frange d'une horloge, où l'état final est une superposition cohérente des états  $|e\rangle$  et  $|f\rangle$ .

La conservation de l'énergie au cours de l'interaction de Ramsey s'écrit, à résonance par exemple :

$$\left( \frac{1}{2} m v_f^2 + E_f \right) + \hbar \omega = \left( \frac{1}{2} m v_e^2 + E_e \right) + 0 \quad (1.5)$$

où  $v_f$  et  $v_e$  représentent la vitesse de groupe des paquets d'onde atomiques avant et après l'absorption d'un photon micro-onde dans la cavité,  $m$  est la

masse atomique,  $E_f$  et  $E_e$  représentent les énergies des niveaux respectivement fondamental et excité.

La conservation de l'impulsion s'écrit par ailleurs :

$$m\vec{v}_e - m\vec{v}_f = \vec{K} \quad (1.6)$$

Les expressions (1.5) et (1.6) conduisent à l'expression suivante :

$$\vec{K} \cdot \vec{v}_f = \omega - \omega_{ef} - \frac{\hbar K^2}{2m} \quad (1.7)$$

où  $\omega_{ef} = (E_e - E_f)/\hbar$ . En supposant par exemple que  $\vec{K}$  est dirigé selon l'axe  $z$  longitudinal, le déphasage accumulé entre les deux voies de l'interféromètre s'écrit donc :

$$\Delta\Phi_{at} = \left( \omega - \omega_{ef} - \frac{\hbar K^2}{2m} \right) \times \frac{L}{v_{f,z}} \quad (1.8)$$

On trouve donc que le déphasage est proportionnel au désaccord entre la pulsation du champ micro-onde interrogateur et la pulsation de la transition atomique, à un terme près,  $-\hbar K^2/2m$ , qui est lié à l'effet de recul de l'atome sous l'effet de l'absorption du photon micro-onde. En faisant varier le désaccord  $\delta = \omega - \omega_{ef}$ , on obtient donc un interférogramme de la forme

$$P = \frac{1}{2}(1 + \cos\Delta\Phi_{at}(\delta))$$

Dans une horloge à atomes froids de Cs ( $m \simeq 2.2 \times 10^{-25}$  kg,  $\omega/2\pi \simeq 193\text{m}^{-1}$ ), on a :

$$\frac{\Delta\nu_{rec}}{\nu_{at}} = \frac{1}{2\pi\nu_{at}} \frac{\hbar K^2}{2m} \simeq 1.5 \times 10^{-16}$$

Le calcul précédent, qui ne tient pas compte de la distribution réelle des vecteurs d'onde  $\vec{K}$  dans la cavité micro-onde (onde stationnaire, profil inhomogène du champ transverse ...), donne néanmoins un bon ordre de grandeur de l'effet de recul si on modélise l'onde atomique comme une onde plane [52]. Un calcul plus proche de la réalité, utilisant des paquets d'onde gaussiens [52], montre en fait que l'effet de recul dans les fontaines est réduit de près d'un ordre de grandeur par rapport au calcul en ondes planes. Ceci est lié au fait que, les sources d'atomes froids employées jusqu'à présent dans les horloges ont une longueur de cohérence faible devant la longueur d'onde du champ électro-magnétique avec lequel ils interagissent<sup>8</sup>. Le déplacement relatif de fréquence induit par l'effet de recul est alors de l'ordre de quelques  $10^{-17}$ , près de deux ordres de grandeur inférieur à l'exactitude actuelle des fontaines à atomes froids ( $\sim 10^{-15}$ ).

Par ailleurs, nous allons voir par la suite qu'un traitement semi-classique de l'horloge, où la nature ondulatoire des atomes n'est pas prise en compte, suffit à décrire la plupart des phénomènes observés actuellement dans une fontaine. L'approximation semi-classique revient à considérer les atomes comme des particules bien localisées, auxquelles sont associées des trajectoires et des vitesses classiques, et donc un temps de transit

$$T = \frac{L}{v_{f,z}}$$

<sup>8</sup>Ce ne serait pas le cas, par exemple, dans une fontaine avec un condensat que l'on focaliserait à l'apogée classique. On montre qu'on récupérerait alors pleinement l'effet de recul.

L'approximation semi-classique permet donc de transposer dans le domaine temporel un phénomène d'interférence qui est en réalité une interférence entre paquets d'onde spatialement délocalisés. En particulier, l'expression (1.8) devient, dans le cadre semi-classique :

$$\Delta\Phi_{at} = (\omega - \omega_{ef}) \times T \tag{1.9}$$

L'effet de recul déplace donc globalement le système de franges de Ramsey, interprétées de manière semi-classique, vers le bleu, de la quantité

$$\Delta\nu_{rec} = \hbar K^2 / (2m \times 2\pi)$$

D'autres effets systématiques résultent directement d'un traitement complet de la fontaine, tel qu'on l'a évoqué précédemment. Il s'agit par exemple du déplacement gravitationnel ("redshift"), de l'effet Doppler du 2nd ordre, ainsi que d'autres effets relativistes qui couplent les ondes de matière, le champ gravitationnel, et le champ électromagnétique [47]. Et l'utilisation de ce traitement complet s'avère particulièrement nécessaire lorsqu'on utilise des sources cohérentes d'atomes froids.

L'étalement spatial des paquets d'ondes, dans les sources d'atomes froids utilisées jusqu'à présent dans les fontaines, est néanmoins de l'ordre de 34 nm (les températures atteintes à l'issue du refroidissement dans une mélasse optique, sont de l'ordre de 1  $\mu$ K, ce qui correspond à une largeur en vitesse de l'ordre de 14 mm.s<sup>-1</sup> pour le paquet d'onde gaussien minimal). A l'échelle de l'expérience ( $\sim$  1 m), les atomes sont donc très peu délocalisés.

Dans la suite de ce manuscrit, on adoptera donc le point de vue semi-classique non relativiste. Les améliorations apportées aux fontaines, dans ce travail de thèse, visent néanmoins à atteindre une exactitude dans la gamme des 10<sup>-16</sup>. On gardera donc en mémoire l'existence d'un cadre plus général, auquel il sera nécessaire de se référer pour interpréter des effets induisant des déplacements relatifs de fréquence proches de 10<sup>-16</sup>.

### Traitement semi-classique d'une fontaine

En pratique, l'état initial est un état très pur et la transition horloge est résolue spectralement des autres transitions. Il s'agit donc ici de décrire de manière simple l'interaction atome-cavité pour un atome à deux niveaux évoluant selon une trajectoire classique. Les effets nécessitant une description plus complète (effet de recul, transitions de Majorana ...) ne sont pas traités ici.

On note respectivement  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$  l'état fondamental et l'état excité de la transition d'horloge. L'hamiltonien de l'atome couplé à la cavité s'écrit :

$$H(t) = \frac{\hbar\omega_{at}}{2} (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) - \vec{M} \cdot \vec{B}(\vec{r}(t), t) \tag{1.10}$$

où

- $\vec{M}$  est l'opérateur dipolaire magnétique de l'atome :

$$\vec{M} = \mu_B (|e\rangle\langle f| + |f\rangle\langle e|) \vec{z} \tag{1.11}$$

Pour la transition d'horloge  $|f, m_F = 0\rangle \rightarrow |e, m_F = 0\rangle$ , le dipole magnétique est colinéaire à l'axe de quantification vertical  $\vec{z}$  imposé par le champ magnétique directeur.

- $\vec{B}(\vec{r}(t), t)$  est le champ magnétique oscillant à la pulsation  $\omega$ , le long de la trajectoire atomique. On considère ici le cas simple où le champ électromagnétique entretenu dans la cavité est une onde parfaitement stationnaire. On néglige donc en particulier les inhomogénéités de la phase du champ liées aux pertes par conduction dans les parois de la cavité. La composante selon  $\vec{z}$  du champ magnétique s'écrit :

$$B_z(\vec{r}, t) = B_0(\omega) \cdot H_{a,z}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(t)) \quad (1.12)$$

où  $B_0(\omega)$  est l'amplitude du champ dans la cavité.

$H_{a,z}(\vec{r})$  est la composante selon  $\vec{z}$  du mode propre de la cavité. Elle décrit le profil spatial du champ dans la cavité, est sans dimension et vaut 1 par définition à l'endroit où elle est maximale. On note  $f(t) = H_{a,z}(\vec{r}(t))$  le profil du champ le long de la trajectoire de l'atome.

On démontre (voir annexe A.1 pour le détail des calculs) que l'hamiltonien de couplage atome-champ s'exprime, **dans le référentiel tournant à la pulsation  $\omega$** , par :

$$\boxed{\tilde{H}(t) = -\frac{\hbar}{2} \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma}} \quad (1.13)$$

où  $\vec{\sigma}$  représente l'opérateur vectoriel des matrices de Pauli (cf. annexe B.1), et où :

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} \Omega_0 f(t) \cos \varphi(t) \\ \Omega_0 f(t) \sin \varphi(t) \\ \delta \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

avec

- $\Omega_0$  désigne la pulsation de Rabi, définie par :

$$\Omega_0 = \frac{\mu_B B_0(\omega)}{\hbar} \quad (1.15)$$

- $\delta$  désigne le désaccord de pulsation  $\delta = \omega - \omega_{at}$ .

On a alors  $\Omega(t) = \|\vec{\Omega}(t)\| = \sqrt{\delta^2 + \Omega_0^2 f(t)^2}$ .

### 1.3.2 Image du spin fictif

On définit le spin fictif  $\vec{S}$  comme la valeur moyenne, au sens de la mécanique quantique, de l'opérateur vectoriel  $\vec{\sigma}$  :

$$\vec{S} = \langle \tilde{\psi}(t) | \vec{\sigma} | \tilde{\psi}(t) \rangle = \langle \vec{\sigma} \rangle(t) \quad (1.16)$$

On démontre en annexe A.2 que les composantes de ce spin fictif sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x(t) &= \langle \tilde{\psi}(t) | \sigma_x | \tilde{\psi}(t) \rangle = \text{Re} \{ \mathcal{M}(\omega, t) / \mu_B \} \\ \mathcal{S}_y(t) &= \langle \tilde{\psi}(t) | \sigma_y | \tilde{\psi}(t) \rangle = -\text{Im} \{ \mathcal{M}(\omega, t) / \mu_B \} \\ \mathcal{S}_z(t) &= \langle \tilde{\psi}(t) | \sigma_z | \tilde{\psi}(t) \rangle = \rho_{ee} - \rho_{ff} \end{aligned} \quad (1.17)$$

où

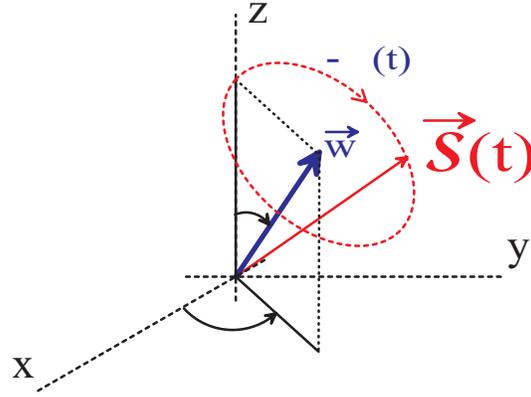


FIG. 1.8 – Précession du vecteur  $\vec{S}(t)$  à la pulsation  $-\Omega(t)$  autour de  $\vec{w} = \vec{\Omega}(t)/\Omega$ . L'angle  $\theta$  est défini dans l'annexe A.2.

- $\rho_{ee}$  et  $\rho_{ff}$  sont les populations respectives des états  $|e\rangle$  et  $|f\rangle$ .
- $\mathcal{M}(\omega, t)$  est l'amplitude complexe du moment dipolaire magnétique de l'atome.

Les composantes du spin fictif sont donc des grandeurs physiques **mesurables**, directement reliées au moment dipolaire magnétique de l'atome.

Par ailleurs on démontre en annexe A.2 que l'évolution temporelle de l'état de l'atome entre les états  $|e\rangle$  et  $|f\rangle$  s'exprime géométriquement par un mouvement de précession du spin fictif  $\vec{S}$ . Le vecteur rotation instantané de ce mouvement de précession est  $-\vec{\Omega}(t)$  où  $\vec{\Omega}(t)$  est défini par la relation (1.14). La figure (1.8) illustre cette précession.

### 1.3.3 Oscillation de Rabi dans la cavité

Comme exemple d'utilisation du spin fictif, on peut étudier l'évolution de l'atome lors de son passage dans la première zone de Ramsey. Considérons d'abord le cas où la source micro-onde est accordée sur la transition atomique :  $\delta = 0$ . Le spin fictif est représenté sur la figure (1.9). L'atome initialement sélectionné dans  $|f\rangle$  correspond à un spin fictif pointant vers  $-\vec{z}$ . Le spin fictif subit donc une rotation autour de l'axe (fixe)  $\vec{x}$ , avec une pulsation angulaire  $-\Omega_0 f(t)$ . Ainsi, à l'issue du premier passage de durée  $\tau$  à travers la cavité,  $\vec{S}$  à tourné d'un angle

$$\mathcal{P}(\tau) = - \int_0^\tau \Omega_0 f(t) dt = -\Omega_0 \tau_{eff} \quad (1.18)$$

où on a posé par définition :

$$\tau_{eff} = \int_0^\tau f(t) dt \quad (1.19)$$

Cette rotation de  $\vec{S}$  se traduit par une oscillation des populations entre les deux états de la transition d'horloge. Ces oscillations portent le nom d'oscillations de Rabi. Dans l'équation ci-dessus,  $\tau_{eff}$  est une durée effective dépendant

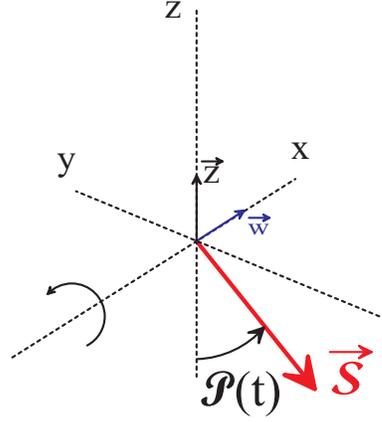


FIG. 1.9 – Evolution du spin fictif pendant les oscillations de Rabi dans la cavité.

de la vitesse de passage des atomes dans la cavité et de la géométrie du mode. La valeur de  $\Omega_0$  dépend de la puissance injectée dans la cavité. On utilise souvent l'angle  $\mathcal{P}(\tau)$  pour caractériser le champ micro-onde dans la cavité.

Traduite dans l'espace des états, cette rotation du spin fictif s'exprime aussi comme l'évolution du ket  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  sous l'effet de l'opérateur de rotation  $U(t)$ , défini par :

$$U(t) = \exp(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathcal{P}}(t)}{2}) \text{ avec } \vec{\mathcal{P}}(t) = -\int_0^t \vec{\Omega}(t')dt' \quad (1.20)$$

Ainsi, l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle}{dt} = -\frac{\hbar}{2}\vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}|\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (1.21)$$

s'intègre directement en :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = U(t)|\tilde{\psi}(0)\rangle \quad (1.22)$$

Ainsi, lorsque  $\mathcal{P}(\tau) = -\pi$ , on dit qu'on a effectué une impulsion  $\pi$  dans la cavité<sup>9</sup>. A l'issue du passage à travers la cavité, l'atome initialement dans l'état  $|f\rangle$ , se retrouve dans l'état  $|e\rangle$ .

Lorsque  $\mathcal{P}(\tau) = -\pi/2$ , situation correspondant au fonctionnement normal de l'horloge, on parle d'impulsion  $\pi/2$ . Après passage dans la cavité, l'atome se trouve dans une superposition cohérente des deux états impliqués dans la transition d'horloge. Plus précisément, on démontre que  $|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = (|f\rangle + i|e\rangle)/\sqrt{2}$ .

On peut aussi être amené à effectuer des impulsions  $3\pi/2, 5\pi/2, \dots (2p+1)\pi/2$ , afin de tester l'influence de la puissance micro-onde sur la fréquence de l'horloge. On a alors  $\mathcal{P}(\tau) = -(2p+1)\pi/2$ .

<sup>9</sup> Le signe  $-$  vient du fait qu'on tient à conserver jusqu'à la fin du calcul une notation algébrique pour l'angle de précession  $\mathcal{P}(t)$  du spin fictif. Pour une impulsion  $\pi$ , on a donc  $\Omega_0\tau_{eff} = +\pi$

### 1.3.4 Franges de Ramsey

#### Interprétation à l'aide du spin fictif; expression simple des franges de Ramsey

Dans les horloges atomiques, la transition atomique est souvent sondée selon la méthode Ramsey, composée de deux impulsions  $\pi/2$  de durée  $\tau$  séparées par une période d'évolution libre de l'atome de durée  $T \gg \tau$ . Dans le cas des fontaines, cette double interaction est réalisée en faisant passer les atomes deux fois dans la même cavité au cours de leur vol balistique. Cette méthode d'interrogation de durée totale  $T + 2\tau$  conduit à l'observation de franges d'interférences de largeur  $1/2(T + 2\tau) \sim 1$  Hz. Lorsque la fontaine fonctionne en étalon de fréquence, la frange centrale est sondée à mi-hauteur de sorte que  $\delta/2\pi \simeq 0.5$  Hz. La durée de passage dans la cavité valant par ailleurs typiquement  $\sim 30$  ms, la condition  $\Omega_0\tau_{eff} = \pi/2$  conduit à  $\Omega_0/2\pi \sim 15$  Hz. Autrement dit,  $|\delta| \ll |\Omega_0|$  et le vecteur  $\vec{\Omega}$  est quasiment colinéaire à l'axe (Ox) ( $\cos\theta \simeq 0$ ). On peut donc considérer que l'évolution du spin fictif lors des passages dans la cavité est celle décrite au § 1.3.3 précédent.

Après le premier passage dans la cavité, les atomes évoluent dans le vide ( $f(t) = 0$ ) de sorte que  $\vec{\Omega}(t) = \overrightarrow{cst\hat{e}} = \delta\hat{z}$ . L'évolution du spin fictif est alors une rotation autour de l'axe  $\hat{z}$  à la pulsation  $-\delta$ . A l'issue de cette évolution libre, de durée  $T$ , le spin a effectué une rotation d'angle  $-\delta T$ . Le second passage dans la cavité, identique au premier, réalise une rotation d'angle  $\pi/2$  autour de  $\hat{x}$ .

L'évolution du spin fictif au cours de l'interrogation de Ramsey est représentée sur la figure (1.10), pour des impulsions  $\pi/2$  dans la cavité micro-onde et pour quelques configurations de désaccord  $\delta$ .

- Le cas a) correspond au cas où la source micro-onde a la même pulsation que la transition atomique : la probabilité de transition de l'état  $|f\rangle$  à l'état  $|e\rangle$  est maximale et vaut 1, on travaille au sommet de la frange centrale de Ramsey.
- Le cas b) correspond à un pied de la frange centrale de Ramsey.
- Le cas c) correspond au cas où on travaille à mi-hauteur de la frange centrale de Ramsey.
- Le cas d) représente un cas intermédiaire où on a effectué un pulse  $\pi/2$  dans la cavité micro-onde, et où le désaccord est tel qu'on travaille quelque part sur le flanc de la frange centrale.

On voit que lorsque  $|\delta T| > \pi$ , d'autres franges apparaissent, et la probabilité de transition oscille entre 0 et 1 en fonction du désaccord avec une période  $1/T$  en fréquence.

L'état final de l'atome est essentiellement déterminé par la différence de phase accumulée au cours de l'évolution libre de durée  $T$  entre les oscillations de Bohr à la pulsation  $\omega_{at}$  de la cohérence atomique et les oscillations de la source micro-onde d'interrogation à la pulsation  $\omega$ . Pour un atome initialement dans l'état  $|f\rangle$ , la probabilité  $P$  de le trouver dans l'état final  $|e\rangle$  à l'issue de l'interrogation, c'est à dire à l'instant  $T + 2\tau$ , est :

$$P = \frac{1}{2}(1 + \cos\delta T) \tag{1.23}$$

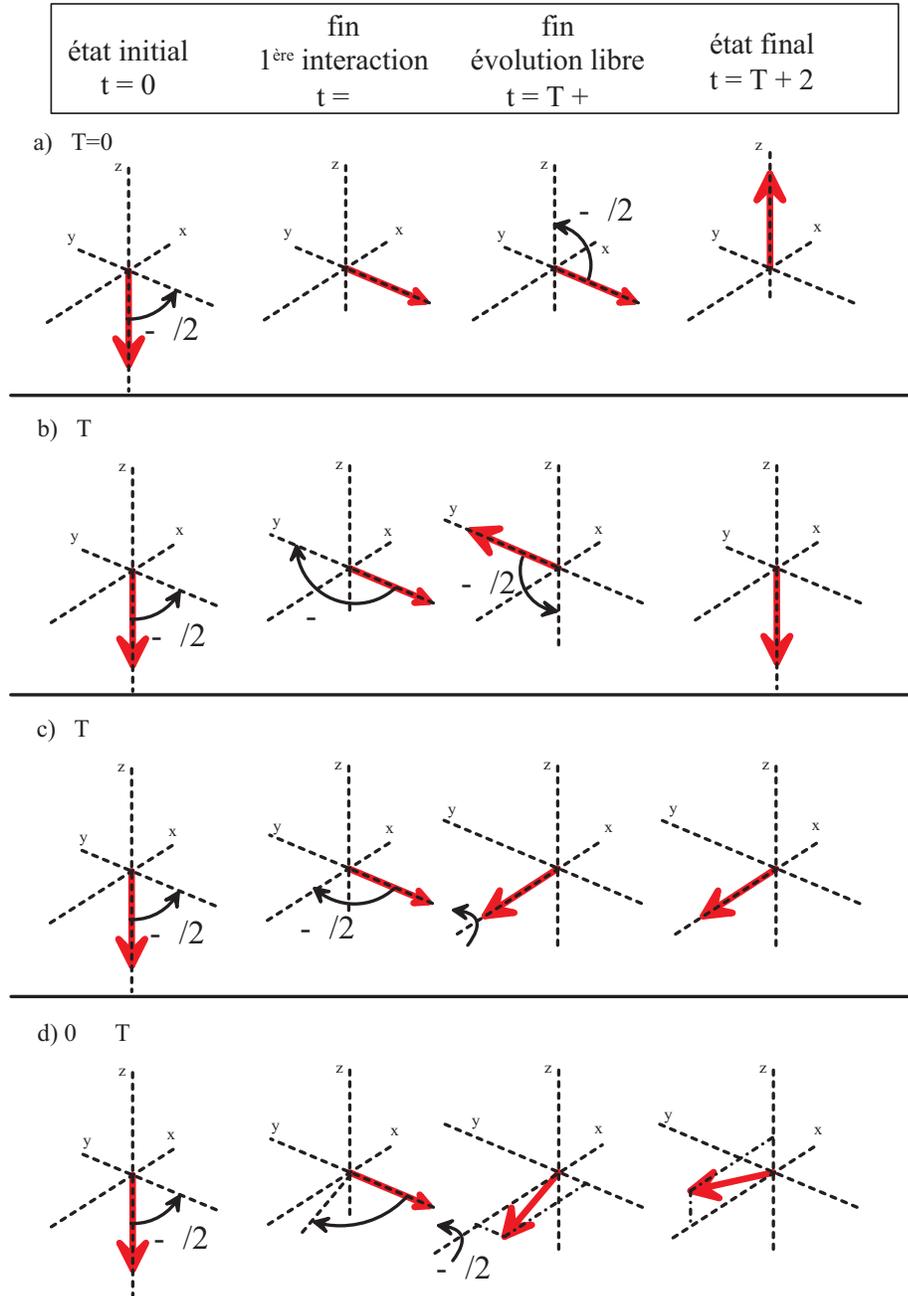


FIG. 1.10 – Evolution du spin fictif pendant l'interrogation de Ramsey.

Cette relation, qui suppose des impulsions  $\pi/2$  dans la cavité, est valable pour un désaccord  $\delta$  faible devant la pulsation de Rabi  $\Omega_0$ .

### Expression générale des franges de Ramsey

L'expression (1.23) n'est plus valable dès que  $\delta$  devient comparable ou supérieur à  $\Omega_0$ . Par exemple, à la limite  $\delta \gg \Omega_0$ , le spin fictif ne précesse plus autour de l'axe  $x$ , et la probabilité de transition devient nulle. On cherche donc à exprimer dans le cas général la probabilité  $P$ , pour un atome initialement dans l'état  $|f\rangle$ , de le trouver dans l'état  $|e\rangle$  à l'issue de l'interrogation.

En supposant que tous les atomes du nuage ont la même vitesse, et que l'amplitude du champ est constante pendant la durée de l'interaction dans la cavité ( $f(t) = 1$  pour  $0 < t < \tau$  et  $T + \tau < t < T + 2\tau$ ), on démontre que [33] :

$$P = \frac{4\Omega_0^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} \left( \cos \frac{\Omega\tau}{2} \cos \frac{1}{2}(\delta T + \varphi) - \frac{\delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \sin \frac{1}{2}(\delta T + \varphi) \right)^2 \quad (1.24)$$

où  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2}$ , et où  $\varphi$  est ici la phase du champ micro-onde dans la deuxième interaction relativement à la première interaction. Cette expression générale des franges de Ramsey s'obtient en appliquant successivement les matrices de rotation autour de  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \delta\vec{z}$  pendant  $[0, \tau]$ , puis de  $\delta\vec{z}$  pendant  $[\tau, T + \tau]$ , puis  $\vec{\Omega}$  de nouveau pendant  $[T + \tau, T + 2\tau]$ .

Pour  $\delta \ll \Omega_0$ , cette expression se simplifie selon :

$$P = \frac{1}{2} \sin^2 \Omega_0\tau (1 + \cos(\delta T + \varphi)) \quad (1.25)$$

et conduit bien, pour une impulsion  $\pi/2$  ( $\Omega_0\tau = \pi/2$ ), à l'expression (1.23).

La résolution exacte de l'équation d'évolution utilisant l'expression (1.13) de l'hamiltonien n'est possible que si l'amplitude du champ est constante pendant toute la durée de l'interaction ( $f(t) = 1$  pour  $0 < t < \tau$ ), ce qui n'est pas le cas dans les fontaines (la structure du mode de la cavité micro-onde diffère d'un crêneau). Pour décrire les franges dans les fontaines, il faut avoir recours à un calcul numérique. La figure (1.11) montre les franges de Ramsey calculées avec les paramètres de la fontaine *Rb*, en utilisant la méthode numérique de Runge-Kutta.

- Sur la figure a), le nuage est "gelé" (pas de dispersion en vitesses).
- Sur la figure b), le calcul prend en compte la dispersion des vitesses mesurées expérimentalement. Les vitesses atomiques sont distribuées selon une loi de type  $\mathcal{L}^b$ , c'est à dire que  $p(\vec{v}) = \beta / (1 + \frac{v^2}{v_c^2})^b$ , avec  $b \simeq 2$ . Comme on le verra plus tard, cette distribution est celle que l'on observe expérimentalement. La perte de contraste observée pour les désaccords de l'ordre de 25 Hz provient de la dispersion de la durée de vol libre  $T$  due à cette distribution des vitesses (à la fin du vol libre, les spins fictifs des différents atomes se sont étalés en un cône de spins fictifs). Cette dispersion des temps  $T$  est à l'origine du bruit sur la probabilité de transition. On peut remarquer que l'amplitude relative de ce bruit va en croissant lorsqu'on s'écarte progressivement de la résonance. En effet, à  $T$  donné, l'angle de précession du spin fictif autour de l'axe  $\vec{z}$ , pendant le vol libre, est proportionnel à  $\delta$ . Au cours du temps  $T$ , le cône de spins fictifs s'étale donc d'autant plus vite que le désaccord  $\delta$  est élevé.

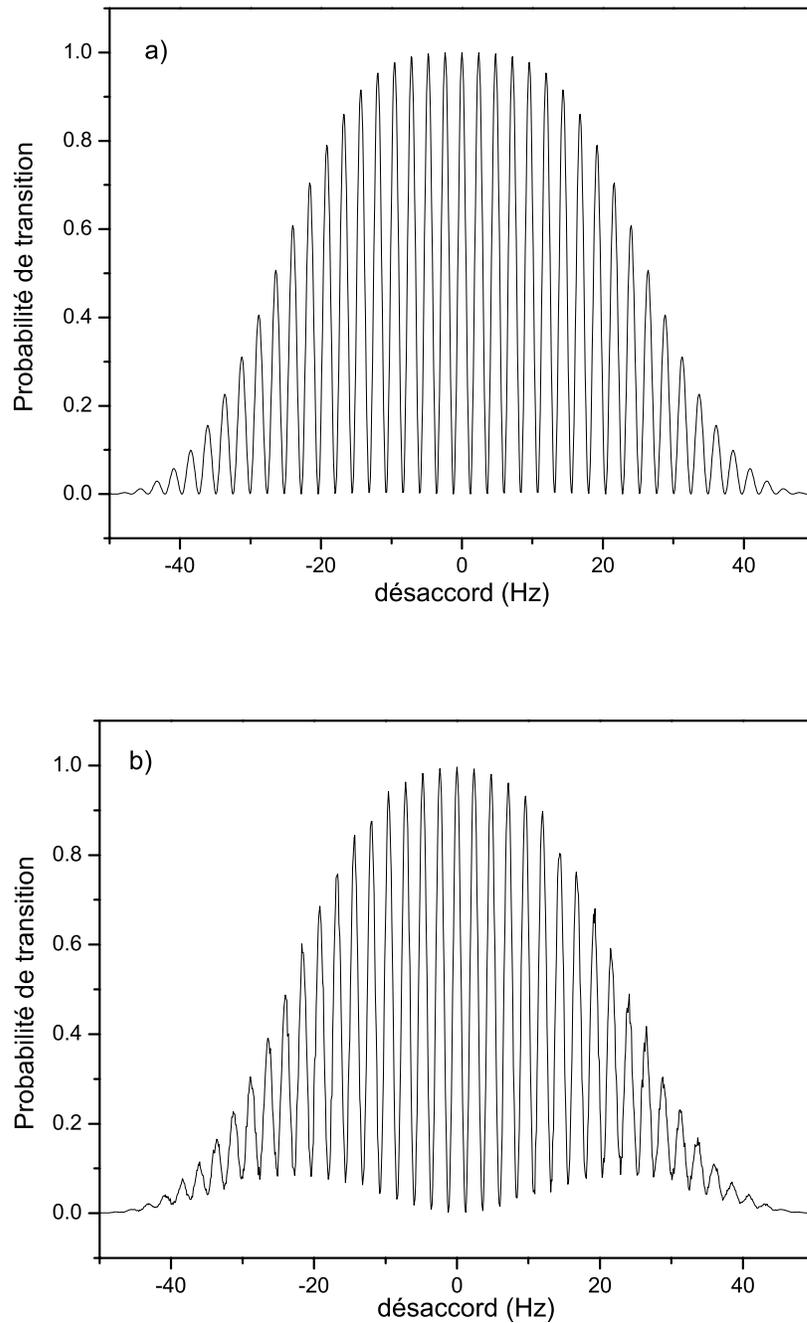


FIG. 1.11 – Franges de Ramsey de la transition d’horloge, calculées numériquement en supposant : figure a) : un nuage ponctuel et ”gelé” ; et figure b) : un nuage de distributions de positions et de vitesses réelles ; le nuage a un profil spatial gaussien à l’instant du lancement ( $\sigma_0 = 1.4 \text{ mm}$ ), et une distribution de vitesses de type  $\mathcal{L}^b$ , avec  $v_c = 20.7 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $b = 2$ . Dans les deux cas, on lance un nuage de 100 atomes à 181.4 mm au dessus de la cavité, ce qui correspond à des durées moyennes  $T = 384.6 \text{ ms}$  et  $\tau = 28.6 \text{ ms}$ . Le profil du champ dans la cavité est celui du mode TE011 (cf. expression (4.69)). La pulsation de Rabi  $\Omega_0$  est maximale au centre de la cavité et  $\Omega_0/2\pi = 14.2 \text{ Hz}$ .

## 1.4 Effets systématiques dans une fontaine atomique

### 1.4.1 Rappel sur les différentes causes de déplacement de la transition atomique dans une fontaine

La liste suivante rappelle brièvement les effets systématiques, connus aujourd'hui, qui déplacent la fréquence de transition atomique. Certains seront plus détaillés dans la suite.

**Déplacement Zeeman du 2<sup>e</sup> ordre** Déplacement de fréquence lié à l'application d'un champ magnétique dans la zone d'interrogation [32]. Ce champ, nommé champ directeur, est appliqué volontairement, de façon à lever la dégénérescence des sous-niveaux Zeeman des états hyperfins de la transition d'horloge. Il est dirigé verticalement. Le déplacement de la fréquence de la transition utile pour l'horloge,  $|f, m = 0\rangle \rightarrow |e, m = 0\rangle$ , croît comme le carré du champ magnétique directeur :

$$\Delta\nu = K_Z^{(2)} \times \|\vec{B}\|^2 = K_Z^{(2)} \times B^2 \quad (1.26)$$

Pour les faibles valeurs de  $B$ , il est donc peu sensible aux fluctuations de  $B$ , au contraire des transitions voisines  $|f, m = 1\rangle \rightarrow |e, m = 1\rangle$ ,  $|f, m = -1\rangle \rightarrow |e, m = -1\rangle \dots$  etc, qui varient linéairement avec le champ magnétique (constante  $K_Z^{(1)}$ ). On trouvera en annexe D les valeurs numériques des constantes  $K_Z^{(1)}$  et  $K_Z^{(2)}$  du  $^{87}\text{Rb}$  et du  $\text{Cs}$ .

**Effet du rayonnement du corps noir** Déplacement de fréquence lié au couplage des atomes avec le rayonnement électromagnétique du corps noir équivalent à l'environnement des atomes dans la zone d'interrogation. Le couplage avec le champ magnétique oscillant induit un déplacement Zeeman du second ordre, tandis que le couplage avec le champ électrique oscillant induit un déplacement Stark du second ordre. Pour évaluer le déplacement de fréquence total induit par le rayonnement du corps noir, il est nécessaire d'intégrer ces déplacements Zeeman et Stark du second ordre sur tout le spectre de rayonnement du corps noir, en tenant compte de la densité spectrale d'énergie de ce rayonnement. Le déplacement de fréquence total est en fait largement dominé par le déplacement Stark alternatif [53]. Il est lié à la température  $\mathcal{T}$  de l'expérience par :

$$\Delta\nu = K_{BB} \times \left(\frac{\mathcal{T}}{300}\right)^4 \times \left(1 + \varepsilon \left(\frac{\mathcal{T}}{300}\right)^2\right) \quad (1.27)$$

où  $\mathcal{T}$  est exprimé en kelvins, et où  $K_{BB}$  et  $\varepsilon$  dépendent de l'atome utilisé dans l'horloge. On s'est limité ici aux termes d'ordre 6 en  $\mathcal{T}/300$ . Les valeurs de  $K_{BB}$  et de  $\varepsilon$  ont fait l'objet de calculs détaillés [54, 53, 55, 56]. La valeur de  $K_{BB}$  a été mesurée pour la première fois en 1997 dans une horloge à jet thermique de  $\text{Cs}$  [57]. Elle est en bon accord avec la théorie et est cohérente avec les mesures de déplacement Stark induit par un champ électrique statique. Elle est connue aujourd'hui à deux pour mille dans le cas du  $\text{Cs}$  :

$$K_{BB}^{\text{Cs}} = -1.573(3) \times 10^{-4} \text{ Hz}$$

L'évaluation du terme d'ordre supérieur,  $\varepsilon$ , est en cours dans la fontaine FO1 du BNM-LPTF. Le calcul théorique donne :

$$\varepsilon^{Cs} = 1.4 \times 10^{-2}$$

et l'incertitude du calcul est estimée à quelques 10% [53].

Notons enfin que les coefficients  $K_{BB}$  et  $\varepsilon$  diffèrent d'un alcalin à l'autre. En particulier, pour le  $^{87}\text{Rb}$ , seule la valeur de  $K_{BB}^{Rb}$  est connue, actuellement, et elle repose sur les mesures d'effet Stark continu de J. R. Mowat [58], en 1972, et sur les calculs théoriques récents de V. G. Pal'chikov [56]. Elle vaut :

$$K_{BB}^{Rb} = -8.59(8) \times 10^{-5} \text{ Hz}$$

et son incertitude de 1% est limitée par la mesure de [58].

**Effet Doppler résiduel du 1<sup>er</sup> ordre** On a déjà mentionné que l'effet Doppler du 1<sup>er</sup> ordre est automatiquement compensé dans la fontaine, parce que la vitesse des atomes est opposée entre le 1<sup>er</sup> passage et le 2<sup>e</sup> passage dans la cavité micro-onde. Cette compensation n'est cependant pas parfaite du fait de la distribution non-uniforme de la phase du champ dans la cavité, et du fait que les atomes du nuage ne sont pas "gelés". A cause de la distribution des vitesses atomiques initiales, le nuage "grossit" transversalement au cours du vol balistique, et les atomes qui repassent le trou de la cavité au 2<sup>e</sup> passage ne sondent en général pas la même valeur de la phase du champ interrogateur dans la cavité à l'aller et au retour. On parle souvent d'effet de gradients de phase. Ce déplacement de fréquence est proportionnel aux gradients de phase dans la cavité, liés aux pertes dans les parois de la cavité [59].

**Déplacement collisionnel** Déplacement de fréquence lié aux interactions entre atomes froids pendant la phase d'interrogation [60, 7]. Il est proportionnel à la densité volumique moyenne d'atomes dans la zone d'interrogation. Cet effet, ainsi que le suivant, seront décrits en détail dans les chapitres suivants.

**Entraînement de fréquence par la cavité, ou "cavity pulling"** Déplacement de fréquence lié au déphasage du champ résonnant dans la cavité micro-onde, déphasage qui est induit par le passage des atomes à travers la cavité [61] (effet d'indice en régime transitoire).

**Effet des fuites micro-ondes** Déplacement de fréquence lié à l'interaction des atomes avec un champ parasite micro-onde issu de l'oscillateur d'interrogation en dehors de la cavité d'interaction. Nous reviendrons sur cet effet dans le chapitre 6.

**Effet des impuretés du spectre micro-onde** Déplacement de fréquence lié aux imperfections de la source micro-onde d'interrogation (asymétrie du spectre, modulation de phase synchrone avec le cycle d'horloge) [62].

**Déplacement de Rabi, de Ramsey, et de Majorana** Déplacements de fréquence liés au couplage entre les niveaux d'horloge  $m = 0$  et les autres sous-niveaux Zeeman. Le déplacement de Rabi est dû aux transitions  $\delta m_F = 0$

voisines de la transition d'horloge, et est induit par une dissymétrie des populations des niveaux  $m_F = \pm 1, \pm 2, \dots$

Le déplacement de Ramsey est lié au couplage entre les niveaux d'horloge et les autres sous-niveaux Zeeman, induit par la non-colinéarité du champ magnétique statique, au niveau de la cavité micro-onde, avec le champ magnétique micro-onde dans la cavité[63].

Le déplacement de Majorana est lié lui aussi au couplage entre les niveaux d'horloge et les autres sous-niveaux Zeeman, mais est lié aux inhomogénéités du champ magnétique statique tout au long de la trajectoire des atomes [64, 65]. Si les atomes voient le champ magnétique statique varier trop rapidement, ils peuvent effectuer des transitions non-adiabatiques vers les sous-niveaux Zeeman voisins. Le déplacement de fréquence est alors non-nul dès lors que les populations des niveaux voisins de  $m = 0$  sont dissymétriques.

**Effet de recul** Déplacement de fréquence lié au recul de l'atome lorsqu'il absorbe ou émet un "photon" micro-onde dans la cavité d'interaction. Pour modéliser cet effet, il faut traiter les variables externes de l'atome de manière quantique [52].

**Effets relativistes** Il s'agit de l'effet Doppler du second ordre, et du déplacement gravitationnel, communément appelé "redshift" (pour une horloge située au-dessus du géoïde, il s'agit en fait d'un décalage vers le bleu!). Ces effets traduisent la dilatation du temps  $\mathcal{T}$  dans le référentiel propre de l'atome par rapport au temps propre  $t$  du champ micro-onde, dans le référentiel de la cavité. Notons  $h(t)$  la hauteur du nuage atomique au-dessus de la cavité à l'instant  $t$ ,  $v(t)$  sa vitesse, et  $h_0$  son apogée au-dessus de la cavité. En intégrant le temps propre le long de la trajectoire des atomes, on peut calculer la phase accumulée par les atomes au cours de leur vol balistique, liée à cette dilatation du temps :

$$\omega_{at}\mathcal{T} = \omega_{at} \times \int_{-(T+2\tau)/2}^{(T+2\tau)/2} \left( 1 + \frac{gh(t)}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2(t)}{c^2} \right) dt \quad (1.28)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $c$  est la vitesse de la lumière.

Le terme en  $gh/c^2$  s'appelle déplacement gravitationnel, tandis que le terme en  $-v^2/2c^2$  s'appelle déplacement par effet Doppler du second ordre. Ces deux effets, de signe opposés, se compensent partiellement.

La phase accumulée par le champ micro-onde dans le référentiel de temps propre de la cavité s'écrit  $\omega \times (T + 2\tau)$ . La condition de résonance s'écrit donc

$$\omega_{at} \times \mathcal{T} = \omega \times (T + 2\tau)$$

et on calcule que le déplacement de fréquence induit par ces deux effets relativistes est donc :

$$\frac{\delta\omega}{\omega_{at}} = \frac{1}{3} \frac{gh_0}{c^2} \quad (1.29)$$

qui vaut  $2.2 \times 10^{-17}$  lorsqu'on lance à 60 cm au-dessus de la cavité.

Remarque : (i) on verra dans la suite qu'en toute rigueur on obtient le déplacement de fréquence en intégrant le temps propre, pondéré par la fonction

de sensibilité  $g(t)$ . Cependant, l'expression obtenue ci-dessus est une relativement bonne approximation dans la mesure où on lance suffisamment haut au-dessus de la cavité ( $\tau \ll T$ , donc  $g(t)$  vaut 1 pendant la majeure partie du vol balistique).

(ii) Dans les jets atomiques, l'effet Doppler du second ordre est beaucoup plus problématique du fait de la vitesse élevée des atomes et de la largeur de leur distribution de vitesse. Dans les fontaines atomiques, au contraire, la vitesse maximale du nuage ne dépasse  $5 \text{ m.s}^{-1}$ , et les atomes froids ont une dispersion de vitesses de l'ordre de  $\sigma_v = 10 \text{ mm.s}^{-1}$ . La vitesse et l'évolution du nuage étant très bien connus, cet effet est très faible (quelques  $10^{-17}$ ) et peut être modélisé au niveau de  $10^{-19}$ .

(iii) Lorsqu'on veut comparer les fréquences d'horloges situées à des altitudes différentes par rapport au géoïde, il faut tenir compte, en plus du déplacement gravitationnel mentionné précédemment, du déplacement gravitationnel lié aux différences d'altitude des horloges. Le géoïde est une surface équipotentielle du potentiel de gravitation terrestre, proche du niveau moyen des océans, et qui est utilisé comme référence d'altitude pour la détermination de l'échelle de temps atomique internationale (TAI). Le déplacement relatif de fréquence lié à cet effet s'exprime par :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{at}} = + \frac{gH}{c^2}$$

où  $H$  désigne la hauteur de la cavité micro-onde au-dessus du géoïde. Il vaut  $1.1 \times 10^{-16}$  par mètre au-dessus du géoïde (décalage vers le "bleu").

### 1.4.2 La fonction de sensibilité $g(t)$ ... ou comment une perturbation sur la fréquence de transition atomique se répercute sur la fréquence de l'horloge

Au cours du paragraphe 1.3, nous avons interprété les franges de Ramsey en supposant la fréquence de Bohr atomique constante tout au long de l'interrogation, et pour une source micro-onde d'interrogation parfaitement monochromatique. En pratique, la fréquence atomique n'est pas rigoureusement constante au cours de l'interrogation de Ramsey, à cause des inhomogénéités des perturbations affectant l'atome. Par exemple, le champ magnétique n'est pas parfaitement homogène dans la zone d'interrogation, et la perturbation de la fréquence atomique qui en résulte dépend de la position de l'atome dans la zone d'interrogation. De plus, le spectre de la source micro-onde présente du bruit de phase.

Le paragraphe suivant a pour but de montrer comment, au premier ordre, une perturbation infinitésimale  $d\vec{\Omega}(t)$  du vecteur rotation instantané va perturber l'état  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  de l'atome et finalement induire une variation  $\delta P$  de la probabilité de transition et un déplacement  $\delta\nu_{horl.}$  de la fréquence de l'horloge. On verra ensuite comment on peut retrouver les résultats de ce calcul perturbatif de façon géométrique, en suivant l'évolution du spin fictif  $\vec{S}$ .

#### Calcul perturbatif

Notons  $d\varphi(t)$  les fluctuations de la phase du champ exciteur. La phase absolue peut être prise arbitrairement nulle, moyennant un changement d'origine des temps. Notons aussi  $d\delta(t)/2\pi$  les fluctuations du désaccord de fréquence du champ exciteur par rapport à la transition atomique.

$$d\delta(t) = d(\omega - \omega_{at})(t)$$

Nous supposons dans la suite que les fluctuations de  $\delta$  ne sont liées qu'à des fluctuations de la fréquence de transition atomique, les éventuelles fluctuations de  $\omega$  induisant à elles seules des fluctuations de phase déjà prises en compte ( $\delta\varphi = \int \delta\omega dt$ ). Cela nous permettra de travailler directement dans le référentiel tournant à la pulsation  $\omega$ , fixe.

$$d\delta(t) = -d\omega_{at}(t)$$

De plus, on considère le cas le plus général où on prépare l'atome initialement dans l'état  $|f\rangle$ .

#### En l'absence de perturbation,

1. pendant la 1<sup>re</sup> interaction, de durée  $\tau$ , on effectue une impulsion  $(2p + 1)\pi/2$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ); par conséquent, l'opérateur d'évolution s'écrit, à la fin de

$p$ (modulo 4)	$C(p)$	$S(p)$
0	1	1
1	-1	1
2	-1	-1
3	1	-1

TAB. 1.1 – Coefficients  $C(p) = \sqrt{2} \cos(2p+1)\pi/4$  et  $S(p) = \sqrt{2} \sin(2p+1)\pi/4$ .

la 1<sup>re</sup> interaction :

$$\begin{aligned}
 U_{1^{\text{re}} \text{ interaction}}(\tau) &= \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_x \int_0^\tau (-\Omega_0 f(t) dt)\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\Omega_0 \tau_{\text{eff}}}{2}\right) + i\sigma_x \sin\left(\frac{\Omega_0 \tau_{\text{eff}}}{2}\right) \text{ avec } \Omega_0 \tau_{\text{eff}} = (2p+1)\pi/2 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C(p) + i\sigma_x S(p))
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

où les coefficients  $C(p)$  et  $S(p)$  sont définis dans le tableau (1.1).

- pendant le vol libre, on a  $\delta T = \varepsilon \frac{\pi}{2}$ , où  $\varepsilon = \pm 1$  selon le côté de la frange de Ramsey qui est interrogé. A la fin du vol libre, l'opérateur d'évolution est une rotation d'angle  $-\delta T$  :

$$\begin{aligned}
 U_{\text{vol libre}}(T) &= \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_z \int_0^T -\delta dt\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\delta T}{2}\right) + i\sigma_z \sin\left(\frac{\delta T}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\varepsilon\sigma_z)
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

- la 2<sup>e</sup> interaction est identique à la 1<sup>re</sup> interaction.

A la fin de l'interrogation de Ramsey (1<sup>re</sup> interaction + vol libre + 2<sup>e</sup> interaction), et en l'absence de perturbation, l'atome est donc dans l'état :

$$|\tilde{\psi}(T+2\tau)\rangle_{\text{non perturb.}} = U_{2^{\text{e}} \text{ interaction}}(\tau) U_{\text{vol libre}}(T) U_{1^{\text{re}} \text{ interaction}}(\tau) |f\rangle \tag{1.32}$$

qui s'écrit, après calcul :

$$\boxed{|\tilde{\psi}(T+2\tau)\rangle_{\text{non perturb.}} = \frac{-i\varepsilon}{\sqrt{2}}(|f\rangle - \varepsilon(-1)^p |e\rangle)} \tag{1.33}$$

### En présence de perturbation,

On considère d'abord le cas où **une perturbation  $d\vec{\Omega}(t)$  a lieu pendant la 2<sup>e</sup> interaction dans la cavité micro-onde** (et seulement pendant cette

interaction). Prenons l'origine des temps au début de cette interaction. L'atome, initialement préparé dans l'état  $|f\rangle$ , est alors dans l'état :

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(0)\rangle &= \frac{1}{2}(1 + i\varepsilon\sigma_z)(C(p) + i\sigma_x S(p))|f\rangle \\ &= \frac{1 - i\varepsilon}{2}(C(p)|f\rangle - \varepsilon S(p)|e\rangle) \end{aligned} \quad (1.34)$$

En présence de la perturbation  $d\vec{\Omega}$ , l'équation d'évolution dans le référentiel tournant s'écrit, pendant la 2<sup>e</sup> interaction :

$$i\hbar \frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle}{dt} = -\frac{\hbar}{2}(\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}) \cdot \vec{\sigma} |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (1.35)$$

où :

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} \Omega_0 f(t) \cos \varphi(t) \\ \Omega_0 f(t) \sin \varphi(t) \\ \delta \end{bmatrix} \text{ et } d\vec{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} -\Omega_0 f(t) \sin \varphi(t) d\varphi(t) \\ \Omega_0 f(t) \cos \varphi(t) d\varphi(t) \\ d\delta(t) \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

c'est à dire, puisque la phase absolue  $\varphi(t)$  est prise arbitrairement nulle :

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} \Omega_0 f(t) \\ 0 \\ \delta \end{bmatrix} \text{ et } d\vec{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_0 f(t) d\varphi(t) \\ d\delta(t) \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

On rappelle que l'opérateur d'évolution  $U(t)$  est un opérateur de rotation d'angle  $\mathcal{P}(t)$  :

$$U(t) = \exp\left(-i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{P}}(t)}{2}\right) \text{ avec } \vec{\mathcal{P}}(t) = -\int_0^t \vec{\Omega}(t') dt' \quad (1.38)$$

On note :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = U^\dagger(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (1.39)$$

c'est à dire que  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  est le ket déduit, dans l'espace des états, de  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  par la rotation d'angle  $-\mathcal{P}(t)$ . En l'absence de perturbation, on a donc  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = |\tilde{\psi}(0)\rangle$ .

En présence de perturbation, la transformée par  $U(t)$  de l'hamiltonien perturbatif  $-(\hbar/2)d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}$  est  $-(\hbar/2)U^\dagger(t)(d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma})U(t)$  et l'équation d'évolution de  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  s'écrit donc :

$$i\hbar \frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle}{dt} = -\frac{\hbar}{2}U^\dagger(t)(d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma})U(t)|\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (1.40)$$

qui s'intègre selon :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \exp\left[i \int_0^t dt' U^\dagger(t') \frac{d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}}{2} U(t')\right] |\tilde{\psi}(0)\rangle \quad (1.41)$$

avec  $|\tilde{\psi}(0)\rangle = |\tilde{\psi}(0)\rangle$  c'est à dire, au 1<sup>er</sup> ordre :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \left[1 + i \int_0^t dt' U^\dagger(t') \frac{d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}}{2} U(t')\right] |\tilde{\psi}(0)\rangle \quad (1.42)$$

d'où :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = |\tilde{\psi}(t)\rangle_{non\ perturb.} + |d\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (1.43)$$

avec :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle_{non\ perturb.} = U(t)|\tilde{\psi}(0)\rangle \quad (1.44)$$

et

$$|d\tilde{\psi}(t)\rangle = iA(t)|\tilde{\psi}(0)\rangle \quad (1.45)$$

où l'opérateur  $A(t)$  s'écrit :

$$A(t) = U(t) \int_0^t dt' U^\dagger(t') \frac{d\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}}{2} U(t') |\tilde{\psi}(0)\rangle \quad (1.46)$$

$iA(t)$  représente l'opérateur de perturbation de l'état de départ  $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ .

Pour calculer la probabilité de transition à l'issue de l'évolution perturbée, il suffit d'écrire :

$$P = \left| \langle e | \tilde{\psi}(\tau) \rangle \right|^2 = \left| \langle e | \tilde{\psi}(\tau)_{non\ perturb.} + d\tilde{\psi}(\tau) \rangle \right|^2 \quad (1.47)$$

d'où :

$$P = P_{non\ perturb.} + dP_2 \quad (1.48)$$

avec  $dP_2 = \langle e | d\tilde{\psi}(\tau) \rangle \langle \tilde{\psi}(\tau)_{non\ perturb.} | e \rangle + h.c.$

où l'indice 2 signifie qu'il s'agit de la variation de probabilité de transition induite par une perturbation lors de la 2<sup>e</sup> interaction.

$|\tilde{\psi}(\tau)_{non\ perturb.}\rangle$  ayant déjà été calculé (cf. (1.44)), il reste à calculer

$$|d\tilde{\psi}(\tau)\rangle = iA(\tau)|\tilde{\psi}(0)\rangle$$

Le calcul de  $A(\tau)$  conduit à :

$$A(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\tau (\mathcal{A}\sigma_y + \mathcal{B}\sigma_z) dt$$

avec

$$\mathcal{A} = \Omega_0 f(t) d\varphi(t) [C(p) \cos \mathcal{P}(t) - S(p) \sin \mathcal{P}(t)] + d\delta(t) [C(p) \sin \mathcal{P}(t) + S(p) \cos \mathcal{P}(t)] \quad (1.49)$$

et

$$\mathcal{B} = \Omega_0 f(t) d\varphi(t) [-C(p) \sin \mathcal{P}(t) - S(p) \cos \mathcal{P}(t)] + d\delta(t) [C(p) \cos \mathcal{P}(t) - S(p) \sin \mathcal{P}(t)]$$

où  $\mathcal{P}(t) = -\int_0^t \Omega_0 f(t') dt'$ .

On trouve après calculs :

$$dP_2 = -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^\tau [-\Omega_0 f(t) d\varphi(t) \sin \mathcal{P}(t) + d\delta(t) \cos \mathcal{P}(t)] dt \quad (1.50)$$

En intégrant par parties le 1<sup>er</sup> terme, on trouve finalement :

$$dP_2 = -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ d\varphi(T + \tau) + \int_{T+\tau}^{T+2\tau} \left[ \frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\delta(t) \right] \cos(-\mathcal{P}(t)) dt \right\} \quad (1.51)$$

où on a translaté l'axe du temps ( $t \rightarrow t + T + \tau$ ).

Considérons maintenant le cas où **la perturbation  $d\vec{\Omega}(t)$  a lieu pendant la 1<sup>re</sup> interaction**. L'état de départ est maintenant  $|\tilde{\psi}(0)\rangle = |f\rangle$ . On lui applique l'opérateur de perturbation  $iA(\tau)$  pendant la 1<sup>re</sup> interaction. L'expression (1.49) de  $A(\tau)$  reste valable. Il suffit d'appliquer  $U_{\text{vol libre}}(T)$ , puis  $U_{2^e \text{ interaction}}(\tau)$  dans cet ordre, pour obtenir la perturbation de l'état final, c'est à dire à la fin de l'interrogation de Ramsey :

$$|d\tilde{\psi}(T + 2\tau)\rangle = U_{2^e \text{ interaction}}(\tau) U_{\text{vol libre}}(T) iA(\tau) |f\rangle \quad (1.52)$$

c'est à dire, d'après (1.30) et (1.31) :

$$|d\tilde{\psi}(T + 2\tau)\rangle = \frac{1}{2} (C(p) + i\sigma_x S(p)) (1 + i\varepsilon\sigma_z) iA(\tau) |f\rangle \quad (1.53)$$

En utilisant la relation (1.48), on trouve ainsi l'expression de la perturbation de la probabilité de transition, due à une perturbation pendant la 1<sup>re</sup> interaction :

$$dP_1 = \frac{\varepsilon}{2} (-1)^p \int_0^\tau [\Omega_0 f(t) d\varphi(t) \cos \mathcal{P}(t) + d\delta(t) \sin \mathcal{P}(t)] dt \quad (1.54)$$

Le 1<sup>er</sup> terme s'intègre par parties et on obtient finalement :

$$dP_1 = -\frac{\varepsilon}{2} \left\{ (-1)^p \int_0^\tau \left[ \frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\delta(t) \right] \sin(-\mathcal{P}(t)) dt - d\varphi(\tau) \right\} \quad (1.55)$$

Considérons enfin le cas où **la perturbation a lieu pendant le vol libre**. La pulsation de Rabi  $\Omega_0$  étant nulle pendant le vol libre, la perturbation s'écrit  $d\vec{\Omega} = d\delta\vec{z}$ . L'état initial étant toujours  $|f\rangle$ , l'état à l'issue de la 1<sup>re</sup> interaction s'écrit  $|\tilde{\psi}(0)\rangle = U_{1^e \text{ interaction}}(\tau) |f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (C(p) + i\sigma_x S(p)) |f\rangle$ . On doit lui appliquer l'opérateur de perturbation  $iA(T)$  pour obtenir la perturbation de l'état à l'issue du vol libre. En utilisant les relations (1.31) et (1.46), le calcul conduit à :

$$A(T) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_\tau^{T+\tau} (i\varepsilon + \sigma_z) d\delta dt \quad (1.56)$$

On doit enfin appliquer l'opérateur  $U_{2^e \text{ interaction}}(\tau)$  (cf. expression (1.30)) afin d'obtenir la perturbation de l'état final  $|d\tilde{\psi}(T + 2\tau)\rangle$ . On obtient :

$$\langle e | d\tilde{\psi}(T + 2\tau)\rangle = -\frac{i\varepsilon(-1)^p}{2\sqrt{2}} \int_\tau^{T+\tau} d\delta dt \quad (1.57)$$

ce qui conduit, d'après (1.48), à l'expression de la perturbation de la probabilité de transition due à une perturbation pendant le vol libre :

$$\boxed{dP_{\text{vol libre}} = -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\tau}^{T+\tau} d\delta(t) dt} \quad (1.58)$$

Finalement, compte tenu de la linéarité aux perturbations de l'équation d'évolution (cf. (1.45)) et de la linéarité de  $dP$  en  $|\hat{d}\psi\rangle$  (cf. (1.48)), la fluctuation totale de probabilité de transition s'écrit :

$$dP = dP_1 + dP_{\text{vol libre}} + dP_2 \quad (1.59)$$

En remarquant que  $d\varphi(T+\tau) - d\varphi(\tau) = \int_{\tau}^{T+\tau} \frac{d(d\varphi(t))}{dt} dt$ , on trouve donc :

$$\begin{aligned} dP &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\tau} (-1)^p \left[ \frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\delta(t) \right] \sin(-\mathcal{P}(t)) dt \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\tau}^{T+\tau} \left[ \frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\delta(t) \right] dt \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \int_{T+\tau}^{T+2\tau} \left[ \frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\delta(t) \right] \cos(-\mathcal{P}(t)) dt \end{aligned} \quad (1.60)$$

d'où :

$$\boxed{dP = -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{T+2\tau} \left[ \frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\delta(t) \right] g(t) dt} \quad (1.61)$$

où :

$$g(t) = \begin{cases} (-1)^p \sin(-\mathcal{P}(t)) & \text{si } t \in [0, \tau], \\ +1 & \text{si } t \in [\tau, T+\tau], \\ \cos(-\mathcal{P}(t)) & \text{si } t \in [T+\tau, T+2\tau]. \end{cases} \quad (1.62)$$

$$\text{avec } \mathcal{P}(t) = -\int_0^t \Omega_0 f(t') dt' = -(2p+1) \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\tau_{eff}} \int_0^t f(t') dt' \quad (1.63)$$

L'expression (1.61) définit la fonction de sensibilité  $g(t)$  comme la réponse impulsionnelle de la probabilité de transition  $P(t)$  au désaccord  $\delta$  (à un facteur  $-\varepsilon/2$  près).

Rappelons que l'expression (1.62) de  $g(t)$  a été établie dans le cas le plus général où l'état initial est  $|f\rangle$ , pour des impulsions  $(2p+1)\pi/2$  dans la cavité ( $\mathcal{P}(\tau) = -(2p+1)\pi/2$ ), et pour une source micro-onde asservie à mi-frange ( $\delta T = \varepsilon\pi/2$ ). Notons que le calcul précédent concerne un atome unique. En pratique, la dispersion des vitesses des atomes doit être prise en compte en effectuant une moyenne sur diverses trajectoires atomiques.

La fonction de sensibilité est représentée sur la figure (1.12) pour des pulses  $\pi/2$  et  $3\pi/2$ . Avant le début et après la fin de l'interrogation la fonction de sensibilité est nulle.

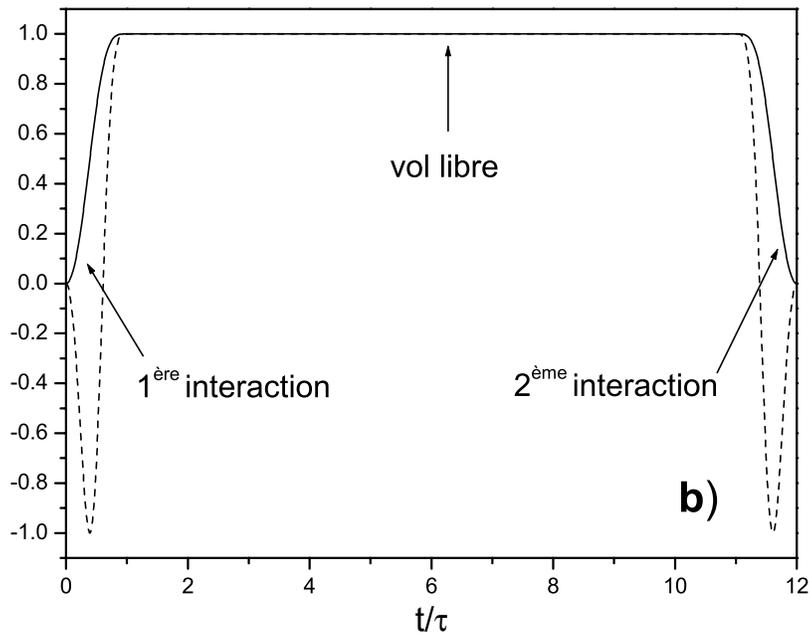
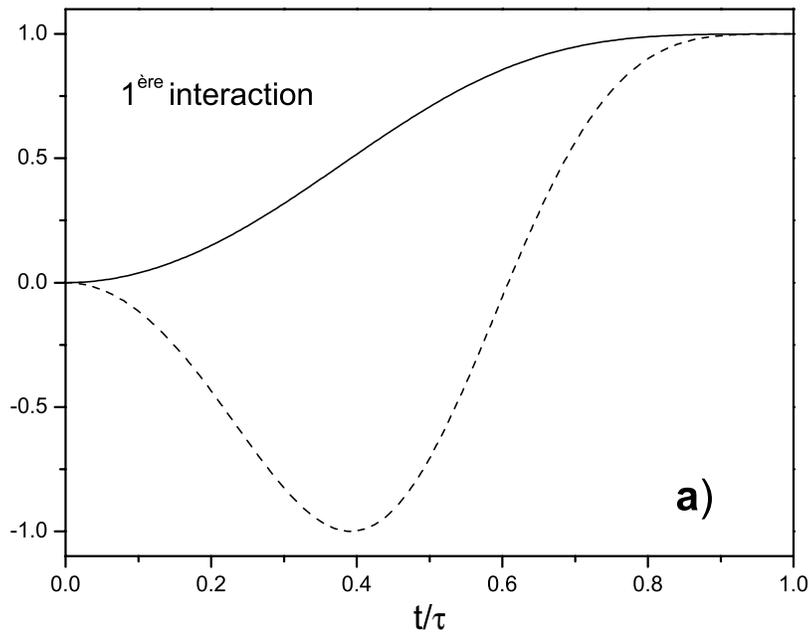


FIG. 1.12 – *Figure a)* : fonction de sensibilité pendant la première interaction, calculée de manière analytique pour des impulsions  $\pi/2$  (traits pleins) et  $3\pi/2$  (tirets). *Figure b)* : idem sur l'intervalle de temps  $[0, T + 2\tau]$ , avec  $T = 10\tau$ .

### Interprétation géométrique

L'expression (1.62) de  $g(t)$  peut être retrouvée géométriquement en suivant l'évolution du vecteur  $\vec{S}(t)$  du spin fictif. Considérons par exemple que la perturbation se réduit à un Dirac de désaccord  $d\delta(t) = \alpha\delta(t - t')$ , ayant lieu pendant la 1<sup>re</sup> interaction ( $0 \leq t' \leq \tau$ ), et supposons qu'on effectue des impulsions  $\pi/2$  pendant la 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> interaction. Pendant la 1<sup>re</sup> interaction,  $\vec{S}$  effectue une rotation d'angle  $\mathcal{P}(\tau) = -\pi/2$  autour de l'axe  $\vec{x}$ . Comme le montre la figure (1.13), l'application du Dirac de désaccord se traduit par une rotation supplémentaire d'angle  $-\alpha$ , à l'instant  $t'$ , autour de l'axe  $\vec{z}$  ( $\alpha > 0$  sur la figure). Le vecteur  $\vec{S}$  a donc acquis, à la fin de la 1<sup>re</sup> interaction, une composante  $+\alpha \sin \mathcal{P}(t')$  selon  $x$ , qui se propage à travers le vol libre (rotation d'angle  $-\varepsilon\pi/2$  autour de  $\vec{z}$ ) et la 2<sup>e</sup> interaction (rotation d'angle  $\mathcal{P}(\tau) = -\pi/2$  autour de  $\vec{x}$ ). Le vecteur  $\vec{S}$  a donc acquis une composante  $dS_z(T + 2\tau) = +\varepsilon\alpha \sin \mathcal{P}(t')$  à l'issue de la 2<sup>e</sup> interaction qui, d'après (1.17) se traduit par une variation de la probabilité de transition :

$$dP = \frac{1}{2}dS_z(T + 2\tau) = +\frac{1}{2}\varepsilon\alpha \sin \mathcal{P}(t') \quad (1.64)$$

Par identification de (1.64) avec (1.61), on retrouve que, pour des impulsions  $\pi/2$ ,  $g(t') = \sin(-\mathcal{P}(t'))$  lorsque  $0 \leq t' \leq \tau$ .

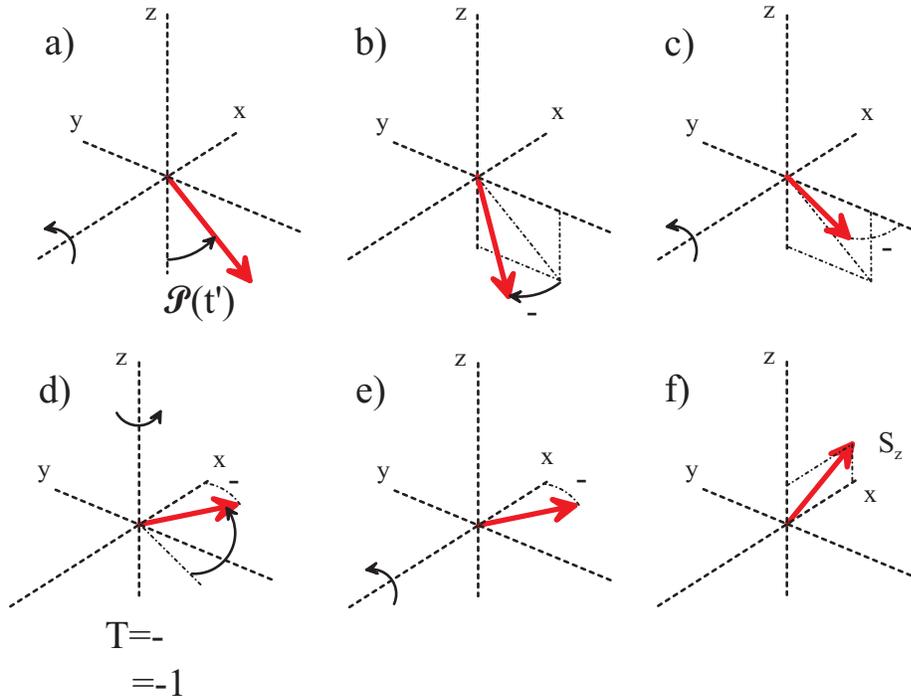


FIG. 1.13 – Détermination de la fonction de sensibilité à l'aide du spin fictif.

**Calcul du déplacement de fréquence de la fontaine**

La fréquence de l'horloge est obtenue par asservissement sur la frange centrale en effectuant une modulation carrée de fréquence  $\varepsilon \Delta\omega_m$  telle que  $\Delta\omega_m T = \pi/2$  (mi hauteur de la frange). Le résultat de l'asservissement est d'égaliser les probabilités de chaque côté de la frange centrale. Supposons qu'une perturbation  $d\vec{\Omega}$  ait déplacé la fréquence de l'horloge de  $\delta\omega_{horl.}$  (cf. fig. (1.14)). Alors :

$$P(\delta\omega_{horl.} + \Delta\omega_m) = P(\delta\omega_{horl.} - \Delta\omega_m) \quad (1.65)$$

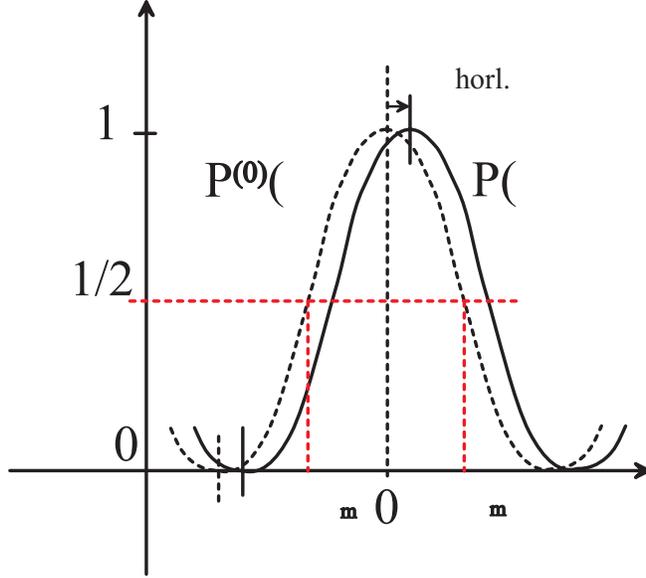


FIG. 1.14 – Asservissement sur la frange centrale déplacée de  $\delta\omega_{horl.}$

Notons  $P^{(0)}(\delta)$  la probabilité de transition de l'atome non perturbé, et  $\delta P_\varepsilon$  la variation de  $P$  induite par cette perturbation. Au 1<sup>er</sup> ordre on a :

$$\begin{aligned} P(\delta\omega_{horl.} + \Delta\omega_m) &= P^{(0)}(\Delta\omega_m + \delta\omega_{horl.}) + \delta P_+ \\ &= P^{(0)}(\Delta\omega_m) + \delta\omega_{horl.} \frac{dP^{(0)}}{d\delta} (+\Delta\omega_m) + \delta P_+ \end{aligned} \quad (1.66)$$

De même :

$$\begin{aligned} P(\delta\omega_{horl.} - \Delta\omega_m) &= P^{(0)}(-\Delta\omega_m + \delta\omega_{horl.}) + \delta P_- \\ &= P^{(0)}(-\Delta\omega_m) + \delta\omega_{horl.} \frac{dP^{(0)}}{d\delta} (-\Delta\omega_m) + \delta P_- \\ &= P^{(0)}(+\Delta\omega_m) - \delta\omega_{horl.} \frac{dP^{(0)}}{d\delta} (+\Delta\omega_m) + \delta P_- \end{aligned} \quad (1.67)$$

On obtient donc :

$$\delta\omega_{horl.} = - \frac{\delta P_+ - \delta P_-}{2 \frac{dP^{(0)}}{d\delta} (+\Delta\omega_m)} \quad (1.68)$$

D'après (1.61), on a :

$$\frac{dP^{(0)}}{d\delta}(+\Delta\omega_m) = -\frac{1}{2} \int_0^{T+2\tau} g(t)dt \quad (1.69)$$

et, en supposant que la perturbation  $d\vec{\Omega}$  ne dépend pas du côté de la frange que l'on interroge :

$$\delta P_+ - \delta P_- = - \int_0^{T+2\tau} \left[ \frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\delta(t) \right] g(t)dt \quad (1.70)$$

Finalement, pour une perturbation qui ne dépend pas du côté de la frange interrogé, le déplacement de la fréquence de l'horloge s'écrit :

$$\boxed{\delta\omega_{horl.} = -\frac{1}{T_{eff}} \int_0^{T+2\tau} \left[ \frac{d(d\varphi(t))}{dt} + d\delta(t) \right] g(t)dt} \quad (1.71)$$

avec :

$$\boxed{T_{eff} = \int_0^{T+2\tau} g(t)dt} \quad (1.72)$$

L'expression générale (1.71) tient compte simultanément des fluctuations de pulsation de la transition atomique,  $d\delta(t) = -d\omega_{at}(t)$ , et des fluctuations de phase<sup>10</sup> du champ excitateur,  $d\varphi(t)$ .

Lorsque  $d\varphi = 0$ , (1.71) s'écrit simplement :

$$\delta\omega_{horl.} = \frac{1}{T_{eff}} \int_0^{T+2\tau} d\omega_{at}(t)g(t)dt \quad (1.73)$$

Le déplacement de **fréquence** de l'horloge s'écrit donc :

$$\boxed{\delta\nu_{horl.} = \frac{1}{T_{eff}} \int_0^{T+2\tau} d\nu_{at}(t)g(t)dt} \quad (1.74)$$

qui traduit comment, de manière générale, une perturbation de la fréquence de transition atomique se convertit en déplacement de la fréquence d'horloge. Ceci est valable quelque soit cette perturbation : champ magnétique, température, collisions entre atomes froids ...

Remarque : il n'est pas évident que la perturbation  $d\vec{\Omega}$  ne dépende pas du point de la frange qui est interrogé. Le "cavity pulling", que l'on rencontrera au chapitre 4, fournit un contre-exemple flagrant. On verra que ce type de perturbation introduit un déphasage  $\Delta\phi$  pendant la 1<sup>re</sup> et la 2<sup>e</sup> interaction et que, pendant la 2<sup>e</sup> interaction, ce déphasage change de signe selon le côté de la frange interrogé! Dans ce cas, on ne peut pas appliquer directement l'expression (1.71), et il faut revenir à l'expression (1.68) et calculer  $\delta P_+ - \delta P_-$  à l'aide de l'expression (1.61).

<sup>10</sup>En particulier, si  $d\omega_{at} = 0$ , et si on interroge les atomes avec une pulsation  $\omega$  qui diffère de  $\omega_{at}$  d'une petite quantité  $d\omega$  constante, on trouve bien que la pulsation de l'horloge est déplacée de la même quantité  $d\omega = d(d\varphi)/dt$  (car  $d\varphi(t) = d\omega \times t$ ). C'est ce qui peut arriver par exemple s'il existe une erreur de trainage dans la boucle d'asservissement (signal d'erreur non-nul).

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de rappeler le principe de fonctionnement d'une horloge atomique et de définir les grandeurs qui caractérisent ses performances : stabilité de fréquence, exactitude.

Les fontaines atomiques constituent un type particulier d'horloges. Elle utilisent les techniques de refroidissement d'atomes et tirent parti de la gravité pour allonger la phase d'interrogation des atomes.

Le signal de résonance atomique obtenu en sortie de système de détection est un système de franges de Ramsey, que l'on peut interpréter simplement à l'aide de l'image du spin fictif. La frange centrale a typiquement une largeur à mi-hauteur de 1 Hz et est centrée sur la fréquence de transition atomique. Le signal de sortie de la fontaine est le signal de l'oscillateur macroscopique qui interroge les atomes. Sa fréquence est asservie sur la fréquence de transition atomique.

Plusieurs sources de bruit contribuent à détériorer la stabilité de la fontaine : bruit de l'oscillateur d'interrogation, bruit électronique du système de détection, bruit des lasers de détection, bruit de projection quantique. Ce dernier constitue aujourd'hui la limite ultime de la stabilité des fontaines atomiques ; il est lié à la nature aléatoire de la mesure quantique de l'état atomique.

Les atomes sont sujets à des perturbations qui déplacent leur fréquence de transition de façon systématique. La réalisation de l'unité de temps, la seconde, nécessite donc d'estimer ces effets systématiques avec une incertitude la plus faible possible (une exactitude la plus élevée possible). Pour chaque effet, le calcul de la correction qu'il faut appliquer à la fréquence mesurée consiste à pondérer la perturbation instantanée de la fréquence de transition atomique par la fonction de sensibilité  $g(t)$ , et à intégrer ce produit sur la durée de la phase d'interrogation. Nous verrons dans les chapitres suivants plusieurs exemples d'utilisation de la fonction de sensibilité, notamment pour le calcul du déplacement collisionnel.



## Chapitre 2

# Quelques rappels sur les collisions froides

Ce chapitre permet d'introduire brièvement les processus de collisions entre atomes froids, à l'origine d'un déplacement de fréquence dans les fontaines atomiques. Ces processus interviennent aussi dans plusieurs types d'expériences tels que la condensation de Bose-Einstein, les expériences de photo-association et les expériences de jonglage dans les fontaines.

### 2.1 Brefs rappels sur la théorie de la diffusion élastique

Nous rappelons ici les principales propriétés des collisions à basse température. Dans un milieu suffisamment dilué, on peut négliger les interactions impliquant plus de 2 corps. La diffusion élastique de deux particules de masse  $m$  se ramène à l'étude, dans le référentiel du centre de masse des deux particules, de la diffusion de la particule fictive de masse réduite  $\mu = m/2$  par le potentiel d'interaction  $U(r)$  ( $r$  désigne ici la distance qui sépare les deux particules). Les résultats de la théorie de la diffusion élastique peuvent se résumer de la façon suivante [66, 67]

#### Effet du potentiel d'interaction sur les ondes diffusées

En l'absence de potentiel  $U(r)$ , la particule fictive est libre et son état est représenté par un paquet d'ondes planes, qui peut se décomposer sur la base des ondes sphériques libres  $\varphi_{k,l,m}^{(0)}(\vec{r})$ . Les ondes sphériques libres sont les fonctions d'onde propres de l'hamiltonien  $H_0$  de la particule libre, de  $\vec{L}^2$ , et de  $L_z$ .  $\vec{L}$  désigne l'opérateur moment cinétique orbital de la particule fictive. A grande distance, chacune de ces ondes sphériques est elle-même la somme d'une onde sphérique entrante, en  $e^{-ikr}/r$ , et d'une onde sphérique sortante, en  $e^{+ikr}/r$ . On note  $k$  le module du vecteur d'onde atomique  $\vec{k}$ , qui caractérise son impulsion  $\vec{p} = \hbar\vec{k} = \mu\vec{v}$  et son énergie totale  $E = (\hbar k)^2/2\mu$ .

En présence de potentiel  $U(r)$ , la recherche des fonctions propres  $\varphi_{k,l,m}(\vec{r})$  de l'hamiltonien total,  $H$ , de  $\vec{L}^2$ , et de  $L_z$ , amène à résoudre l'équation radiale

suivante

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_{k,l}(r)}{dr^2} + \left( U(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} - E \right) u_{k,l}(r) = 0 \quad (2.1)$$

et  $u_{k,l}(0) = 0$

où  $u_{k,l}(r)/r$  désigne la partie radiale de la fonction d'onde recherchée. Tout se passe donc comme si la particule fictive était plongée dans un potentiel effectif  $U_{eff}$  défini par :

$$U_{eff}(r) = \begin{cases} U(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} & \text{si } r > 0 \\ \infty & \text{si } r < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

La résolution de l'équation (2.1) permet d'exprimer les fonctions d'onde  $\varphi_{k,l,m}(\vec{r})$ . On démontre qu'elles ne diffèrent des ondes sphériques libres que par l'introduction, sous l'effet du potentiel  $U(r)$ , d'un déphasage noté  $\delta_l(k)$  entre l'onde sphérique entrante et l'onde sphérique sortante. Le facteur de déphasage  $e^{i2\delta_l(k)}$  résume à lui seul tout l'effet du potentiel  $U(r)$  sur la particule de moment cinétique  $l$ .

### Section efficace de diffusion

La section efficace différentielle de diffusion,  $\sigma_k(\theta, \varphi)$ , définie comme le nombre de particules diffusées dans la direction  $(\theta, \varphi)$ , par unité d'angle solide  $d\Omega$ , par unité de temps, et par unité de flux surfacique de particules incidentes, s'exprime par :

$$\sigma_k(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_l (2l+1) (e^{i2\delta_l(k)} - 1) P_l(\cos\theta) \right|^2 \quad (2.3)$$

où  $P_l(\cos\theta)$  désigne le polynôme de Legendre d'ordre  $l$ .

On trouve alors pour expression de la section efficace totale de diffusion :

$$\sigma_{total}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) \quad (2.4)$$

Pour des particules bosoniques indiscernables, on doit appliquer le postulat de symétrisation aux fonctions d'onde diffusées. Ceci a pour conséquence de multiplier par un facteur 2 la section efficace totale de diffusion, qui s'écrit donc :

$$\sigma_{total}(k) = \frac{8\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) \quad (2.5)$$

### Limite des basses énergies et longueur de diffusion

A la limite des basses énergies, seules les ondes partielles de  $l = 0$  contribuent significativement à la section efficace totale de diffusion, et on peut donc considérer le processus de diffusion comme isotrope.

Plus précisément, le terme centrifuge en  $l(l+1)/r^2$  dans l'expression (2.2) empêche la particule "classique" d'énergie  $E = \hbar^2 k^2 / 2\mu$  de s'approcher de l'origine à une distance inférieure à un rayon limite, noté  $r_l$ , et tel que

$$k \times r_l = \sqrt{l(l+1)}$$

Notons  $b$  le rayon de la zone d'action du potentiel  $U(r)$ .

On montre alors que si  $k \times b \ll 1$ , alors  $r_l \gg b$  pour  $l \geq 1$ . Par conséquent, les

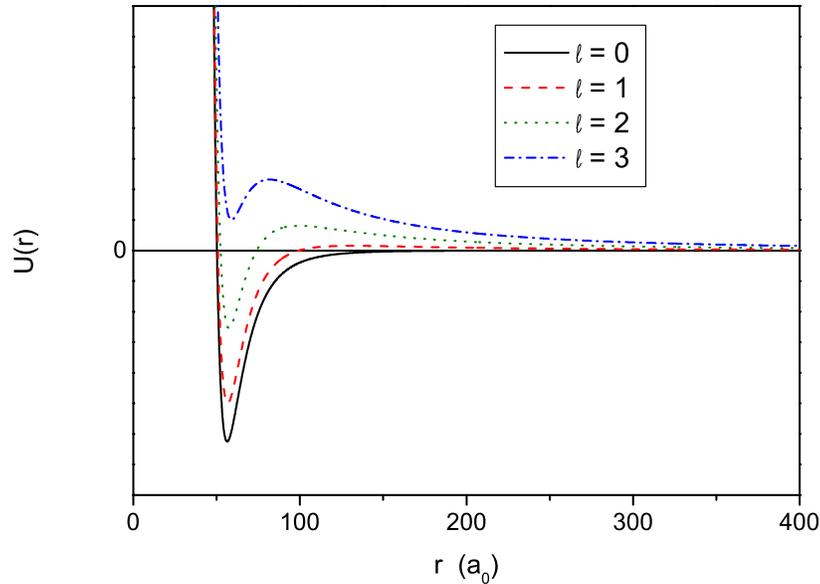


FIG. 2.1 – Illustration de l'effet du potentiel centrifuge pour plusieurs ondes partielles  $l$  de diffusion.

ondes partielles de  $l \neq 0$  sont très peu sensibles au potentiel à courte portée, et seul le déphasage en onde "s" ( $l=0$ ) contribue significativement à  $\sigma_{total}(k)$ .

En fait, on montre quantitativement que pour un potentiel décroissant plus vite que  $1/r^3$  à grande distance, seul  $\delta_0(k)/k$  tend vers une valeur non-nulle lorsque  $kb$  tend vers 0. C'est en particulier le cas pour le potentiel de Van der Waals en  $-C_6/r^6$ , qui décrit correctement les interactions à longue portée des atomes alcalins dans l'état fondamental.

Dans ces conditions, on appelle  $a$  la longueur de diffusion définie par

$$a = \lim_{k \rightarrow 0} -\frac{\tan \delta_0(k)}{k} \quad (2.6)$$

Dans le régime de diffusion en onde "s", la longueur de diffusion  $a$  permet de décrire, à elle seule, l'ensemble des interactions à deux particules. En particulier, deux potentiels d'interaction possédant la même longueur de diffusion conduisent aux mêmes propriétés pour le gaz considéré.

Ceci nous autorise donc à remplacer le potentiel réel par un pseudo-potentiel, d'expression mathématique plus simple, et qui permet d'obtenir des expressions analytiques pour les fonctions d'onde diffusées. Par exemple un potentiel de contact du type

$$U(r) = g\delta(\vec{r})$$

où  $\delta(\vec{r})$  désigne la fonction de Dirac au point  $\vec{r}$ , et où  $g$  est une constante de couplage conduisant à la même longueur de diffusion que le vrai potentiel.

On peut interpréter la longueur de diffusion  $a$  de manière géométrique, en introduisant le prolongement asymptotique  $v_k(r)$  de la fonction radiale  $u_k(r)$  près de l'origine (on ne mentionne plus l'indice  $l$ , qui vaut 0 ici). Ceci est illustré sur la figure (2.2).

La fonction  $u_k(r)$ , solution de l'équation radiale (2.1), se comporte comme  $C \sin[kr + \delta_0(k)]$  à grande distance, où  $C$  est une constante de normalisation. Son prolongement asymptotique près de l'origine s'écrit donc, pour toute valeur de  $r$ ,

$$v_k(r) = C \sin[kr + \delta_0(k)]$$

Dans ces conditions, l'abscisse du premier zéro de  $v_k(r)$ , en partant de l'origine, s'écrit

$$r_P = -\frac{\delta_0(k)}{k}$$

où le fait que P soit le point d'intersection le plus proche de 0 se traduit par le fait que  $-\pi/2 \leq \delta_0(k) \leq \pi/2$ .

A la limite  $k \rightarrow 0$ , la fonction  $v_k(r)$  tend vers une droite, et le point P tend vers le point Q, dont l'abscisse n'est autre que la longueur de diffusion  $a$ .

$$v_0(r) = C'(r - a)$$

où  $C'$  est une constante. Ceci peut être retrouvé en développant  $v_k(r)$  au premier ordre en  $kr$  :

$$v_k(r) = \sin \delta_0(k) + kr \cos \delta_0(k) \sin \delta_0(k) + o(kr)$$

ce qui conduit à l'expression (2.6) de la longueur de diffusion.

### Expression de la section efficace de diffusion aux basses énergies

L'expression (2.5) de la section efficace totale de diffusion s'écrit donc, à la limite  $kr \rightarrow 0$

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \sigma_{total}(k) = 8\pi a^2$$

Pour des énergies faibles mais non-nulles, on voit apparaître des correctifs à cette expression. Si on introduit la portée effective  $r_e$  du potentiel  $U(r)$ , définie par :

$$r_e = 2 \int_0^{+\infty} [v_0^2(r) - u_0^2(r)] dr \quad (2.7)$$

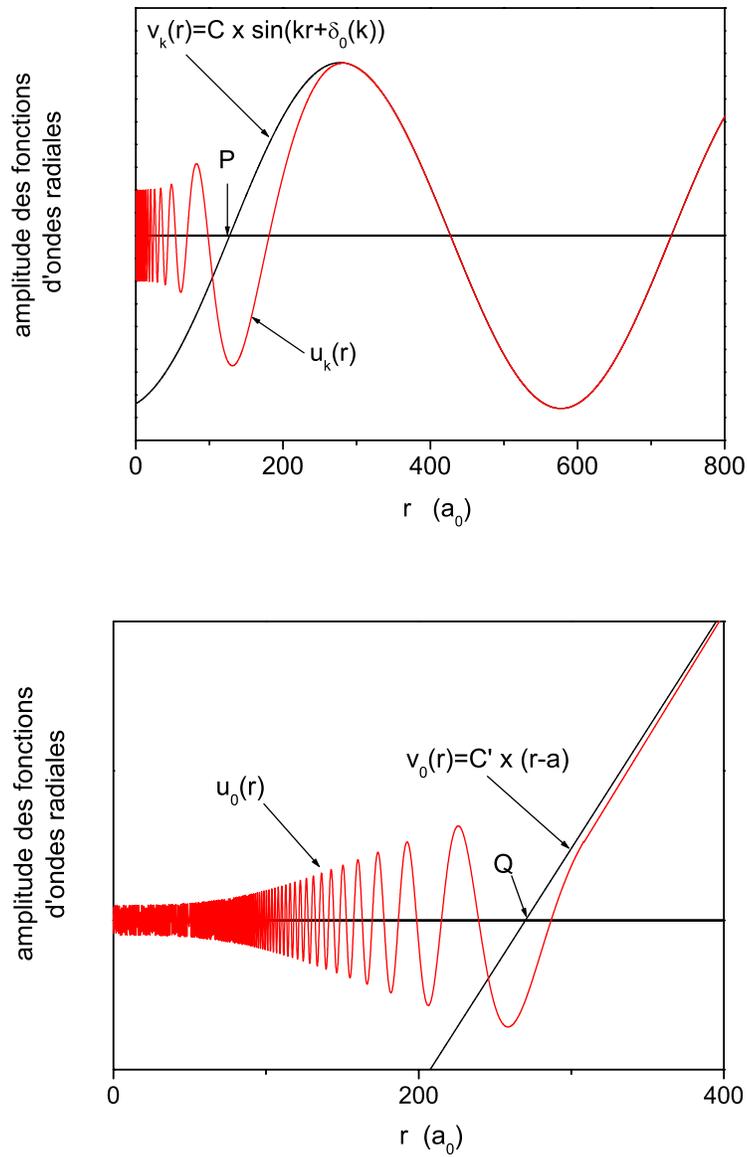


FIG. 2.2 – *Interprétation géométrique de la longueur diffusion a. La longueur de diffusion a est l'abscisse du point Q, qui est lui même la limite du point P aux basses énergies ( $k \rightarrow 0$ ).*

on montre que, lorsque le potentiel  $U(r)$  décroît plus vite que  $1/r^5$ , la section efficace totale de diffusion s'écrit [67] :

$$\sigma_{total}(k) = \frac{8\pi a^2}{(1 - \frac{1}{2}k^2 ar_e)^2 + k^2 a^2} \quad (2.8)$$

En pratique, la valeur de la portée effective  $r_e$  est, comme son nom l'indique, proche du rayon d'action du potentiel  $U(r)$ , tel qu'on l'imagine intuitivement. On montre par exemple que pour un puits de potentiel carré de rayon  $b$ , on a  $r_e = b$ .

En revanche, on verra dans la suite que la longueur de diffusion  $a$  est très sensible à la forme exacte du potentiel  $U(r)$ , et peut varier très rapidement de  $+\infty$  à  $-\infty$ .

Dans le cas  $ka \gg 1$  et  $kr_e \ll 1$ , l'expression (2.8) s'écrit simplement :

$$\sigma_{total}(k) \simeq \frac{8\pi}{k^2} \quad (2.9)$$

On est alors dans le régime dit "unitaire".

A titre d'exemple, la figure (2.3) représente les sections efficaces de diffusion élastique pour les deux isotopes du Rb, et pour les ondes "s" et "d". Ces sections efficaces ont été calculées et sont présentées dans [12]. Aux températures où nous travaillons (quelques microkelvins), les collisions entre atomes froids de  $^{87}\text{Rb}$  sont clairement en onde "s". Ce n'est pas le cas pour le  $^{85}\text{Rb}$ , dont la section efficace de diffusion, plus d'un ordre de grandeur au-dessus de celle du  $^{87}\text{Rb}$ , varie déjà rapidement à ces températures.

### Expression du potentiel de contact dans le cadre de l'approximation de Born

On peut interpréter la diffusion de l'onde atomique par le potentiel  $U(r)$  par une analogie formelle avec le principe d'Huyghens, en optique ondulatoire. Le milieu diffuseur étant étendu, l'onde totale en régime stationnaire est la superposition, en amplitudes, de l'onde incidente, et d'une infinité d'ondes provenant des sources secondaires induites dans le milieu diffuseur par l'onde incidente. En fait, chacune de ces sources secondaires est excitée non seulement par l'onde incidente, mais aussi par des sources "tertiaires", elles mêmes excitées par l'onde incidente et par des sources d'ordre supérieur ... Les ordres successifs de diffusion font intervenir les puissances successives du potentiel.

L'approximation de Born revient à ne conserver que les termes du 1<sup>er</sup> ordre en  $U$  dans l'expression de l'amplitude de l'onde totale. Cette approximation est valable dans la mesure où la profondeur caractéristique du potentiel est faible devant l'énergie cinétique de confinement de la particule dans la zone d'action du potentiel<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Ces grandeurs sont intuitives. Par exemple, pour un potentiel carré de profondeur  $U_0$  et de rayon  $b$ , l'approximation de Born revient à écrire  $U_0 \ll \hbar^2/(2\mu b^2)$ . Le second membre de l'inégalité représente effectivement l'énergie cinétique de la particule si elle orbitait en bord de puits de potentiel.

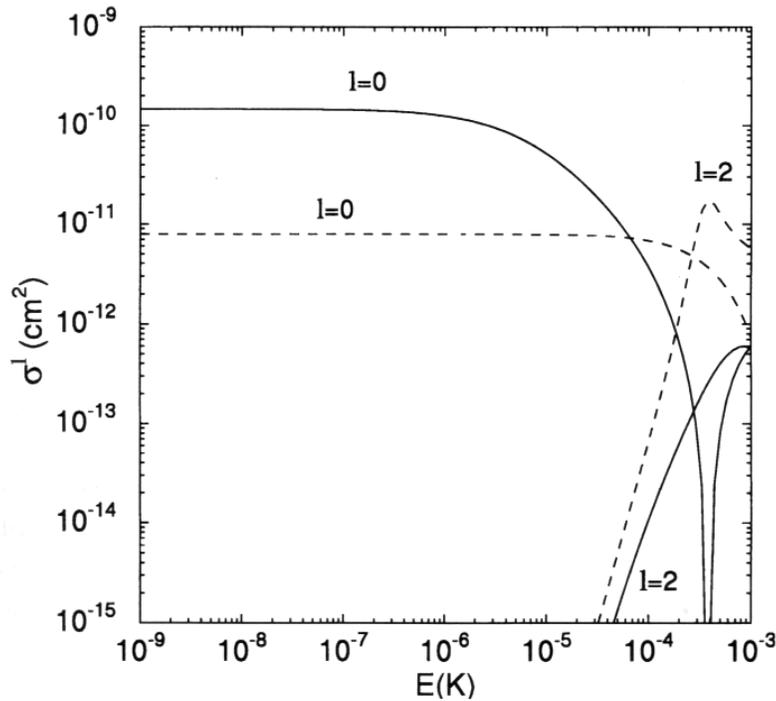


FIG. 2.3 – Sections efficaces de diffusion élastique en onde "s" et "d" pour les deux isotopes du Rb (traits pleins pour le  $^{85}\text{Rb}$ , et tirets pour le  $^{87}\text{Rb}$ ). On voit que pour les températures typiques de  $\sim 10^{-6}\text{ K}$  atteintes dans les fontaines atomiques, la section efficace du  $^{87}\text{Rb}$ , par contraste avec le  $^{85}\text{Rb}$ , est quasi-indépendante de l'énergie de collision, et est plus basse de plus d'un ordre de grandeur. Par ailleurs, la contribution des ondes d'ordre supérieur est négligeable à ces températures.

Dans le cadre de l'approximation de Born, on montre que la longueur de diffusion est reliée au potentiel  $U(r)$  de façon très simple :

$$a_{Born} = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r U(r) \quad (2.10)$$

Cette expression très importante permet de déterminer par exemple la constante de couplage  $g$  du potentiel de contact mentionné précédemment, et qui permet de décrire simplement l'ensemble des propriétés du milieu diffusant. En remplaçant  $U(r)$  par un potentiel  $g\delta(r)$  dans l'expression (2.10), on trouve :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_{Born} \quad (2.11)$$

## 2.2 Paramètres importants pour la détermination des longueurs de diffusion

Le but de ce paragraphe est d'introduire brièvement les paramètres déterminants qui entrent en ligne de compte dans la détermination théorique des longueurs de diffusion. Ces paramètres sont liés à la forme exacte du potentiel, dont nous rappelons d'abord l'expression générale, dans le cas des alcalins.

### 2.2.1 Potentiels d'interaction pour les alcalins

La structure électronique d'un alcalin de numéro atomique  $Z$  est constituée d'une part d'un nuage de  $Z - 1$  électrons, qui remplissent entièrement les premières couches électroniques par  $n$  et  $l$  croissants, et d'autre part par 1 électron périphérique, seul sur la couche la plus externe, de moment cinétique orbital  $l$ . En première approximation, les  $Z - 1$  autres électrons se comportent, pour ce dernier électron périphérique, comme un écran de charge  $-(Z - 1)$  autour du noyau de charge  $+Z$ .

Lorsqu'ils sont dans l'état fondamental, les atomes alcalins possèdent un moment cinétique orbital nul ( $l = 0$ ), un moment cinétique de spin électronique  $\vec{s}$ , avec  $s = 1/2$ , ainsi qu'un moment cinétique de spin du noyau  $\vec{i}$ . L'interaction hyperfine couple ces deux spins, qui s'ajoutent pour former un moment de spin total  $\vec{f} = \vec{s} + \vec{i}$ , avec  $f = i \pm 1/2$ .

L'hamiltonien d'interaction peut s'écrire :

$$U(r) = U_c(r) + U_{hf} + U_Z + \text{termes perturbatifs plus petits ...} \quad (2.12)$$

où  $U_c(r)$  désigne le potentiel central et s'écrit comme la somme d'un potentiel répulsif à courte portée, dit potentiel d'échange et noté  $U_{ech}$ , et d'un potentiel attractif à longue portée, dit potentiel dispersif et noté  $U_{disp}$ .

$U_{hf}$  désigne le potentiel de structure hyperfine, de la forme  $A(\vec{i}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{i}_2 \cdot \vec{s}_2)$ .  $U_Z$  désigne le potentiel d'interaction Zeeman, de la forme  $(\vec{\mu}_1^e + \vec{\mu}_1^n) \cdot \vec{B} + (\vec{\mu}_2^e + \vec{\mu}_2^n) \cdot \vec{B}$ , et couple le champ magnétique  $\vec{B}$  aux moments magnétiques électronique et nucléaire,  $\vec{\mu}_i^e$  et  $\vec{\mu}_i^n$  des deux particules.

Les autres termes, plus petits en général, décrivent par exemple l'interaction dipole-dipole entre particules, l'interaction spin-orbite du second ordre.

La figure (2.4) résume la structure des potentiels d'interaction.

A courte distance, c'est à dire pour une distance inter-atomique  $r$  suffisamment faible, les deux distributions locales des charges des deux atomes interagissent électrostatiquement : répulsion des noyaux entre eux, répulsion des nuages électroniques entre eux, attraction du nuage électronique d'un atome par le noyau de l'autre atome<sup>2</sup>. Ce terme d'interaction, nommé interaction

---

<sup>2</sup>Ce potentiel d'interaction, répulsif à courte distance, n'a pas une expression simple en général. A titre d'exemple, B. J. Verhaar *et al* utilisent, pour modéliser les potentiels moléculaires du Rb [68] la forme analytique en

$$\frac{1}{2} J [r^{7/(2\alpha-1)}] e^{-2\alpha r}$$

calculée par B.M. Smirnov et M.S. Chibisov [69].  $J$  est un facteur d'échelle,  $\alpha^2/2$  est l'énergie d'ionisation du Rb, en unités atomiques.

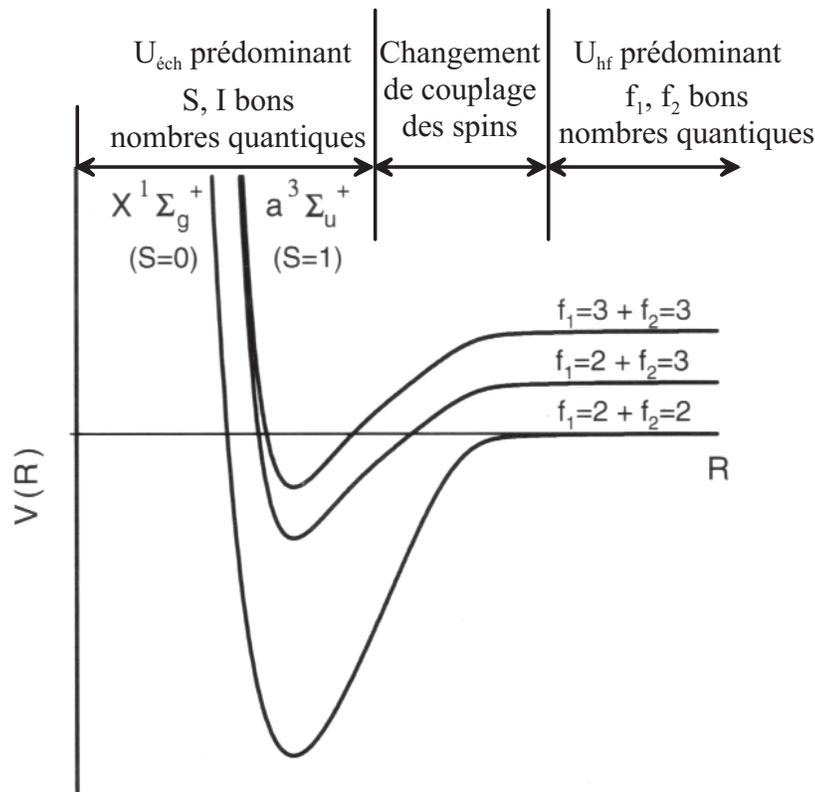


FIG. 2.4 – Illustration des potentiels d’interaction pour deux atomes alcalins dans l’état fondamental, et ayant des niveaux hyperfins  $f = 2$  et  $f = 3$ . Les échelles ne sont pas respectées. La profondeur du potentiel singulet vaut typiquement plusieurs  $1000 \text{ cm}^{-1}$ , tandis que la séparation hyperfine est plutôt de l’ordre de  $0.1 \text{ cm}^{-1}$ .

d’échange,  $U_{\text{éch}}$ , ne commute pas avec les moments cinétiques orbitaux individuels,  $\vec{l}_1$  et  $\vec{l}_2$ , mais il commute avec le moment cinétique orbital total  $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ . Il est à l’origine de la levée de dégénérescence des niveaux d’énergie de l’état fondamental. L’écart d’énergie entre ces niveaux est alors égal à l’intégrale du recouvrement des quatre fonctions d’onde atomiques suivantes, pondéré par le terme d’interaction échange : les deux fonctions d’onde atomiques individuelles, et les deux fonctions d’onde atomiques obtenues par échange des deux électrons périphériques [70], p.250, et [66], p.1413. On montre que le niveau le plus stable possède une orbitale moléculaire symétrique, tandis que le niveau le moins stable possède une orbitale moléculaire antisymétrique.

Par ailleurs, le principe d’exclusion de Pauli impose aux fonctions d’onde totales, compte tenu des spins électroniques, d’être antisymétriques par permutation. Ceci se traduit par le fait que le niveau le plus stable possède une fonction de spin total antisymétrique, de sorte que finalement  $S = 0$  (fonction d’onde totale dite ”singulet”, spins anti-parallèles).

Tandis que le niveau le moins stable possède une fonction de spin total symétrique, de sorte que finalement  $S = 1$  (fonction d’onde totale dite ”triplet”, spins

anti-parallèles).

Bien sûr, il faut tenir compte, en plus, du couplage entre spins électroniques ( $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ ) et spins nucléaires ( $\vec{I} = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$ ), qui fait apparaître des levées de dégénérescence supplémentaires. On montre que les bons nombres quantiques associés aux potentiels à courte portée sont  $S$  et  $I$ . Les potentiels moléculaires qui en résultent ont pour notations spectroscopiques  $X^1\Sigma_g^+$  (singulet) et  $a^3\Sigma_u^+$  (triplet).

A longue portée, c'est à dire lorsque le terme d'interaction électrostatique est négligeable, la dépendance radiale du potentiel d'interaction peut se développer en une série de termes de la forme  $-C_n/r^n$  ( $n \geq 6$ ), dits termes dispersifs :

$$U_{disp} = -\frac{C_6}{r^6} - \frac{C_8}{r^8} - \frac{C_{10}}{r^{10}}$$

Le potentiel d'interaction ne dépend alors plus des nombres quantiques  $S$  ou  $I$ , mais des nombres quantiques individuels  $f_1$  et  $f_2$ , qui sont de bons nombres quantiques.

On voit que  $(S, I)$  et  $(f_1, f_2)$  ne sont des couples de bons nombres quantiques que sur une portion de l'intervalle de distances inter-atomiques  $r$ , chacun dans son domaine. A courte portée, c'est le potentiel d'échange qui domine, tandis qu'à longue portée, c'est le potentiel d'interaction hyperfine qui domine. Dans la zone intermédiaire, la nature du couplage de spins change sur un intervalle de l'ordre de quelques rayons de Bohr  $a_0$ .

### 2.2.2 Sensibilité de la longueur de diffusion au paramètre $C_6$ du potentiel de Van der Waals

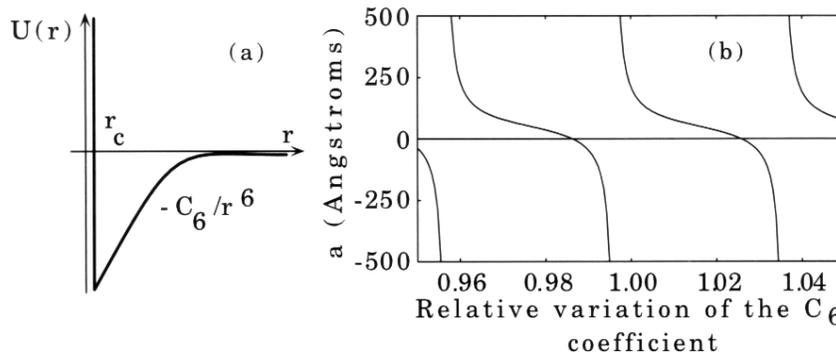


FIG. 2.5 – Variation de la longueur de diffusion  $a$  avec le paramètre  $C_6$  du potentiel de Van der Waals.

La valeur de la longueur de diffusion  $a$  dépend de la forme exacte du potentiel et en particulier des coefficients dispersifs  $C_6, C_8, C_{10} \dots$ . Par exemple, on montre que pour un potentiel de Van der Waals, tronqué à courte distance, c'est à dire

de la forme :

$$U(r) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r < r_c \\ -C_6/r^6 & \text{si } r > r_c \end{cases} \quad (2.13)$$

la longueur de diffusion s'écrit :

$$a \simeq a_{sc}(1 - \tan \Phi) \quad (2.14)$$

où

$$a_{sc} = \frac{\Gamma(3/4)}{2\sqrt{2}\Gamma(5/4)} \times a_c^{1/4}$$

et où

$$a_c = \frac{2\mu C_6}{\hbar^2} \text{ et } \Phi = \pi(v_D + \frac{1}{2})$$

$v_D$  représente le nombre quantique de dissociation. Sa partie entière est égal au nombre d'états liés dans le puits de potentiel. On montre que

$$\Phi = \frac{a_c^2}{2r_c^2} - \frac{3\pi}{8}$$

La figure (2.5) représente les variations quasi-périodiques de  $a$  avec le paramètre  $C_6$ . On voit qu'une variation de 4% seulement de  $C_6$  suffit à introduire un nouvel état lié dans le puits de potentiel, la longueur de diffusion variant alors de  $+\infty$  à  $-\infty$ .

En pratique, on peut accéder expérimentalement aux longueurs de diffusion en mesurant le nombre quantique de dissociation  $v_D$ . C'est par exemple le paramètre qui est mesuré dans les expériences de spectroscopie des états liés du fondamental [13]. On voit cependant sur l'expression (2.14) que la longueur de diffusion  $a$  varie très rapidement au voisinage de valeurs entières de  $v_D$  : elle diverge et change de signe. De ce fait, les méthodes par spectroscopie moléculaire des états liés peuvent échouer à déterminer les longueurs de diffusion avec précision, voire même leur signe.

On peut également remarquer que la longueur de diffusion  $a$  est aussi sensible à la masse atomique  $m = 2\mu$  qu'à  $C_6$ . Ceci permet en pratique de déduire les longueurs de diffusion d'un isotope lorsqu'on connaît celles d'un isotope voisin ("mass scaling" en anglais).

### 2.2.3 Rôle des longueurs de diffusion "triplet" et "singulet"

La longueur de diffusion  $a$  dépend aussi des longueurs de diffusion singulet  $a_S$  et triplet  $a_T$  que nous allons maintenant introduire.

On a dit qu'à champ magnétique  $B \simeq 0$ , seuls  $F$  et  $M_F$  sont de bons nombres quantiques sur tout l'intervalle de distance inter-nucléaire  $]0, +\infty[$  : ne sont alors autorisées que les collisions qui conservent  $F$  et  $M_F$ . En revanche, les paires d'atomes peuvent entrer en collision en étant dans des états de nombres quantiques  $i_e = \{f_1, m_{f_1}\}$  et  $j_e = \{f_2, m_{f_2}\}$ , et ressortir de la collision dans des états de nombres quantiques  $i_s = \{f_3, m_{f_3}\}$  et  $j_s = \{f_3, m_{f_3}\}$  différents, mais conservant globalement  $F$  et  $m_F$ . Pour la paire d'atomes considérée, on parle de canal d'entrée dans l'état  $|\alpha\rangle = |i_e, j_e\rangle$  et de canal de sortie dans  $|\beta\rangle = |i_s, j_s\rangle$ .

On peut alors chercher à résoudre le système d'équations couplées qui relie les fonctions d'ondes radiales entrantes et sortantes aux éléments de matrice  $U_{\alpha\beta}$  du potentiel d'interaction. Une telle approche s'appelle "méthode des collisions multi-canaux" et a fait l'objet de nombreux travaux [71, 72]. Elle permet de calculer les éléments de la matrice de diffusion  $S$ . En particulier ses éléments diagonaux,  $S_{\alpha\alpha}$ , représentent le rapport des amplitudes des fonctions d'onde radiales sortantes et entrantes dans le canal  $\alpha$  et sont reliés à la longueur de diffusion  $a_\alpha$  par

$$S_{\alpha\alpha} = e^{2i\delta_\alpha(k)}$$

où  $\delta_\alpha(k) \sim -ka_\alpha$  à la limite des basses énergies.

Remarque : le cas  $\alpha \neq \beta$  signifie que la collision est inélastique, puisqu'elle ne s'accompagne pas seulement d'un déphasage, mais aussi d'un changement d'état interne des particules pendant la collision. Dans ce cas, la longueur de diffusion  $a_\alpha$  est complexe, et sa partie imaginaire reflète le taux d'inélasticité de la collision.

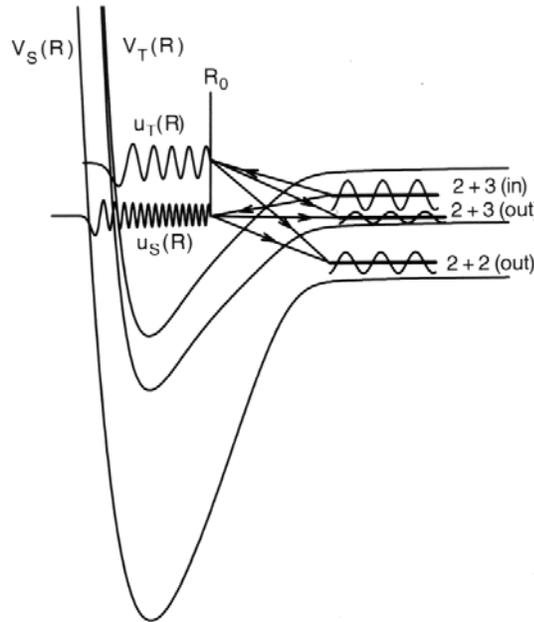


FIG. 2.6 – Illustration du mécanisme de collisions d'échange. Sous l'effet du déphasage accumulé entre les propagations des ondes triplettes et singulettes dans les puits de potentiel moléculaires, les atomes peuvent entrer en collision dans un canal d'entrée donné, et ressortir de la collision dans une superposition cohérente de canaux de sortie différents.

En particulier une telle approche permet de comprendre comment on relie les longueurs de diffusion  $a_\alpha$  aux longueurs de diffusion  $a_T$  et  $a_S$ . La longueur de diffusion  $a_T$  (respectivement  $a_S$ ) est définie comme la longueur de diffusion

que l'on obtiendrait pour des atomes qui entreraient en collision sous l'effet du pur potentiel d'interaction triplet  $U_T(r)$  (respectivement  $U_S(r)$ ). On peut alors interpréter le mécanisme de collision (élastique ou non) de la façon suivante [73] (cf. figure(2.6)). Les atomes entrent en collision par un canal  $\alpha$ , et sont accélérés par le potentiel dispersif. Les nombres quantiques  $\{f, m_f\}$  des deux atomes n'étant plus de bons nombres quantiques, le potentiel d'interaction n'est plus diagonal dans la base des états de spin d'entrée. Les états atomiques de spin se couplent alors aux états moléculaires singulet et triplet, avec les coefficients de Clebsch-Gordan adéquats. Ceux-ci se propagent séparément, se réfléchissent sur la barrière de potentiel répulsif, puis se recouplent pour donner des états atomiques. Mais les phases accumulées lors de la propagation des deux ondes singulet et triplet sont différentes, de sorte que leur recombinaison donne une superposition cohérente d'états hyperfins de sortie,  $\beta, \gamma \dots$  différente de la combinaison d'entrée.

Cette image, bien que simplificatrice, permet de se faire une idée schématique des processus pris en compte dans la méthode des multi-canaux couplés.

Dans le cas d'une collision purement élastique, le canal de sortie et le canal d'entrée sont identiques. La projection des états atomiques d'entrée sur les états moléculaires singulet et triplet, à courte portée, reste cependant valable. Le déphasage final accumulé entre les états atomiques est une fonction des phases  $\phi_S(r_0)$  et  $\phi_T(r_0)$  des fonctions d'onde radiales singulet et triplet dans les puits de potentiel moléculaires.  $r_0$ , de l'ordre de  $20a_0$ , est choisi suffisamment petit de sorte que les ondes triplet et singulet ne sont pas encore recouplées, mais suffisamment élevé de sorte que les potentiels au-delà de  $r_0$  soient décrits par un minimum de paramètres [16]. En pratique, l'interaction à courte portée se trouve donc entièrement résumée dans les deux paramètres  $\phi_S$  et  $\phi_T$  en  $r_0$ , qui contiennent la même information que les longueurs de diffusion  $a_S$  et  $a_T$ . Ces deux paramètres permettent, avec les paramètres dispersifs du potentiel à longue portée, de calculer toutes les longueurs de diffusion  $a_\alpha$  associées aux différents canaux d'entrée.

## 2.3 Comment déterminer les longueurs de diffusion ?

Le but de ce paragraphe est de passer en revue, très brièvement, les différentes méthodes utilisées expérimentalement pour accéder aux longueurs de diffusion.

### Mesure des sections efficaces de diffusion élastique.

On peut accéder directement à la longueur de diffusion en mesurant la section efficace de diffusion élastique.

Une méthode macroscopique consiste à mettre un nuage d'atomes froids hors d'équilibre thermique, et à mesurer comment, sous l'effet des collisions, ce nuage retourne à l'équilibre. Par exemple, on peut préparer les atomes dans un piège non dissipatif (piège magnétique, piège dipolaire ... ), puis déformer le nuage de sorte que l'énergie potentielle moyenne ne soit plus la même selon les trois axes principaux du potentiel harmonique [74, 75, 76, 77]. Sous l'effet des collisions entre atomes froids, le nuage relaxe alors vers la situation d'équilibre

(équi-répartition de l'énergie selon les trois axes du piège) avec un taux

$$\gamma_c = \bar{n}\bar{v}\sigma$$

où  $\bar{n}$  est la densité moyenne dans le piège,  $\bar{v} \propto \sqrt{kT/m}$  est la vitesse moyenne relative de collision entre atomes, et  $\sigma$  est la section efficace de diffusion. La densité atomique moyenne  $\bar{n}$  et la température  $T$  sont déterminées par imagerie du nuage.

La mesure de la constante de temps de relaxation permet donc de remonter directement à la longueur de diffusion  $a$  dans le piège.

Remarque : cette méthode suppose que la section efficace ne dépende pas du vecteur d'onde  $k$  des vitesses relatives entre atomes, dans le nuage. Dans le cas contraire, il faut prendre en compte la variation  $\sigma(k)$  avec  $k$  dans la simulation numérique qui permet de calculer le taux de relaxation en fonction de  $\sigma$ .

Une autre méthode consiste à mesurer l'effet des termes d'interférences entre les ondes partielles "s", "p", "d" ... qui apparaissent dans l'expression (2.3) de  $d\sigma/d\Omega$ , lorsqu'on développe la somme sur les ondes partielles "l". Ces termes d'interférences, qui dépendent de l'angle  $\theta$  de diffusion *via* les polynômes de Legendre  $P_l(\cos\theta)$ , se moyennent à zéro lorsqu'on calcule la section efficace totale de diffusion,  $\sigma_{total}(k)$ . Mais si observe uniquement dans une direction, par exemple  $\theta = 0$ , on peut mesurer l'amplitude des termes d'interférence entre ondes "s", "p", "d" ... qui font intervenir les déphasages  $\delta_0(k)$ ,  $\delta_1(k)$ ,  $\delta_2(k)$  ... Ces déphasages varient différemment avec l'énergie de collision  $E = \hbar^2 k^2/2m$  (voir note de bas de page<sup>3</sup>). Il est donc possible, en faisant varier  $E$ , de déterminer les différents termes d'interférences du développement en ondes partielles de  $d\sigma/d\Omega$ , et d'en déduire les longueurs de diffusion en onde "s", "p", "d" ...

Cette méthode a été mise en pratique dans une fontaine atomique à Cs [79, 10], en mesurant, par temps de vol, les distributions de vitesses atomiques après collision entre deux boules d'atomes froids lancées successivement, et interagissant près de l'apogée. Il est en effet possible, dans une fontaine, de faire varier finement l'énergie relative de collision entre les deux nuages d'atomes froids, en faisant varier le retard au lancement d'une boule par rapport à l'autre ( $\Delta t = 7$  à 20 ms permet de faire varier  $T = E/k_B$  de 19  $\mu\text{K}$  à 150  $\mu\text{K}$ ). Ceci a permis de mesurer les longueurs de diffusion de l'état triplet, pour des collisions dans  $|F = 4, m_F = 4\rangle + |F = 3, m_F = 3\rangle$ , et pour des ondes partielles d'ordre supérieur.

## Mesures de taux de collisions inélastiques

Il existe trois types de collisions, qui sont responsables de la perte d'atomes froids dans un piège, chacune avec un taux de pertes spécifique.

- Les collisions entre les atomes froids et les atomes chauds de la vapeur éjectent les atomes froids hors du piège avec un taux  $\Gamma$ , indépendamment

---

<sup>3</sup> De même qu'on a introduit la longueur de diffusion en onde "s", notée  $a$ , on peut introduire la longueur de diffusion en onde "p", "d" ... et de façon générale "l", que l'on notera  $a_l$  [78] et qui est définie par

$$a_l = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-\tan \delta_l(k)}{k^{2l+1}}$$

de la densité atomique :

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

où  $N$  est le nombre d'atomes dans le piège<sup>4</sup>.

- Les collisions à deux corps entre atomes froids induisent, sous l'effet du potentiel d'interaction dipolaire magnétique, un changement d'orientation des moments dipolaires magnétiques [80, 81, 82]. Dans un piège magnétique, par exemple, les moments dipolaires magnétiques sont orientés anti-parallèles au champ magnétique local. Au cours d'une collision, l'un des spins des deux atomes peut subir un renversement. Ce renversement s'accompagne pour l'un des deux atomes d'une transition vers un autre niveau hyperfin que celui dans lequel les atomes sont piégés. Cet atome est donc perdu du piège. Le taux de pertes correspondant est relié à la densité atomique locale  $n$  par un coefficient de proportionalité  $K$ , et par conséquent :

$$\frac{dN}{dt} = - \int K n^2(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

- Les collisions à trois corps : lorsque trois particules rentrent en collision, deux d'entre elles peuvent former une molécule, plus stable, et l'énergie libérée est récupérée sous forme d'énergie cinétique par la troisième, qui se trouve éjectée du piège. Le taux de pertes correspondant est à la probabilité de rencontre de deux particules par un coefficient de proportionalité  $L$ , et par conséquent :

$$\frac{dN}{dt} = - \int L n^3(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Ces pertes, peu importantes dans un gaz non-dégénéré, sont au contraire prépondérantes dans un condensat de Bose-Einstein [83].

Chacun de ces processus de collisions inélastiques se traduit par une décroissance du nombre d'atomes dans le piège avec une pente caractéristique, en échelle logarithmique, en fonction du temps [83].

La mesure des taux de collisions inélastiques par relaxation dipolaire des spins permet de déterminer les différents coefficients  $S_{\alpha\beta}$  de la matrice de diffusion  $S$ , c'est à dire les rapports, en amplitude, de la fonction d'onde radiale dans le canal de sortie  $\beta$ , et de la fonction d'onde radiale dans le canal d'entrée  $\alpha$ . On peut ainsi déterminer la partie imaginaire de la longueur de diffusion, qui est à valeur complexe du fait des collisions inélastiques.

Les taux de diffusion inélastiques ont fait l'objet d'études détaillées pour plusieurs alcalins. En particulier, pour le Cs [84, 85], il s'est avéré que les processus inélastiques à deux corps sont à l'origine de taux de pertes très élevés (deux ordres de grandeurs au-dessus des taux de pertes inélastiques du <sup>87</sup>Rb). Jusqu'à présent, ceci a empêché d'atteindre des densités dans l'espace des phases suffisantes pour obtenir la condensation de Bose-Einstein sur le Cs [86, 87]. Il faut noter que la valeur élevée de ces pertes inélastiques par interaction dipolaire magnétique est étroitement liée à la valeur élevée des longueurs de diffusion

<sup>4</sup>A proprement parler, ce type de collisions peut aussi être élastique. Le coefficient  $\Gamma$  n'est donc pas purement inélastique.

élastiques du Cs, qui sont responsables du déplacement collisionnel très élevé dans les horloges atomiques à Cs [60, 7].

Remarque : dans une fontaine, les collisions inélastiques n'induisent principalement que des pertes d'atomes. Dans la mesure où ces atomes perdus ne sont pas détectés, les collisions inélastiques n'induisent pas de déplacement de fréquence dans les horloges. La mesure du déplacement collisionnel dans une fontaine ne permet donc pas d'accéder à la partie imaginaire de la longueur de diffusion.

## Spectroscopie de photo-association

La photo-association est le processus au cours duquel deux atomes en collision dans l'état fondamental peuvent absorber un photon, et former une molécule dans un état excité. Le processus est résonant lorsque l'énergie du photon correspond à une transition optique possible entre d'une part, un niveau ro-vibrationnel de l'état moléculaire excité, et d'autre part, le niveau d'énergie des atomes en collision.

En balayant la fréquence du laser, il est donc possible de sonder les niveaux moléculaires de l'état excité. Les basses températures collisionnelles permettent d'obtenir des spectres de photo-association avec des raies bien résolues (les niveaux d'énergie ne sont que faiblement élargis par effet Doppler).

Les spectres de photo-association peuvent être obtenus en mesurant le taux de pertes d'atomes dans le piège [88]. En effet, une fois dans le niveau moléculaire excité, les atomes peuvent retomber par émission spontanée dans des états libres en acquérant une énergie cinétique qui leur permet d'échapper au puits de potentiel. Cette perte d'atomes se traduit par un "creux" dans le spectre de fluorescence du piège.

Une variante, plus sensible, consiste à photo-ioniser l'état moléculaire excité puis à détecter l'ion ainsi constitué [89].

L'amplitude de chaque raie du spectre de photo-association est donnée par le taux de transition  $\gamma_{PA}$  vers le niveau moléculaire excité.  $\gamma_{PA}$  est proportionnel à l'amplitude de la fonction d'onde radiale  $u_g(r)$ , à l'amplitude de la fonction d'onde radiale  $u_e(r)$  dans le niveau excité, ainsi qu'à l'élément de matrice dipolaire électrique  $d_{eg}(r)$  reliant les deux états, fondamental et excité :

$$\gamma_{PA} \propto \left| \int_0^{+\infty} u_e(r) d_{eg}(r) u_g(r) dr \right|^2 \quad (2.15)$$

La position des raies de photo-association permet de déterminer la forme du potentiel moléculaire dans l'état excité, et donc de calculer  $u_e(r)$  pour chacune des raies. L'élément de matrice  $d_{eg}$  est calculable à partir des structures électroniques des niveaux excités [90]. L'analyse des amplitudes relatives des raies de photo-association permet donc de déterminer précisément la fonction d'onde radiale  $u_g(r)$  dans l'état fondamental, à la fois en amplitude et en phase. Et particulièrement à longue portée ( $r \gtrsim 20a_0$ ), puisqu'alors l'amplitude de  $u_g(r)$  est maximale. Cette analyse permet de déterminer précisément la longueur de diffusion associée à  $u_g(r)$ , et de contraindre les paramètres dispersifs des potentiels à longue portée [14].

Les mesures par photo-association placent aujourd'hui des contraintes très fortes sur les paramètres  $a_T$ ,  $C_6$ , et  $v_{DT}$  (nombre quantique de dissociation de

l'état triplet) de plusieurs alcalins, et en particulier pour les deux isotopes du *Rb* [88, 13, 91, 14]. Elles contraignent donc fortement les valeurs des longueurs de diffusion qui sont calculées à partir de ces valeurs.

**Remarque :** la méthode décrite ci-dessus utilise un seul laser ("méthode de photo-association à 1 couleur"). Il existe une variante, dite "méthode de photo-association à 2 couleurs" qui utilise deux lasers. L'un, de fréquence fixe, est accordé sur une transition photo-associative entre état libre du niveau fondamental et état lié du niveau excité, tandis que l'autre, balayable, sonde les transitions entre l'état lié précédent et les états liés du fondamental. Cette méthode fournit à la fois les longueurs de diffusion singulet  $a_S$  et triplet  $a_T$ , en particulier pour les isotopes du *Rb* [16, 92, 93].

## Résonances de Feshbach

On a vu au paragraphe 2.2.2 que l'apparition d'un nouvel état lié, dans le puits de potentiel moléculaire, se traduit par une résonance de diffusion, c'est à dire par une divergence de la longueur de diffusion. Expérimentalement, il est intéressant de pouvoir faire varier la longueur de diffusion autour d'une telle divergence, à l'aide d'un paramètre extérieur ajustable. Le champ magnétique, par exemple, permet de modifier le potentiel d'interaction Zeeman et les énergies des états liés, dans le puits de potentiel moléculaire. En particulier, il est possible d'amener l'état lié de plus haute énergie juste au seuil de dissociation. On peut alors mesurer avec une grande précision la valeur du champ magnétique pour lequel on observe la résonance de diffusion. Cette résonance est observable de différentes façons : par photo-association [94], par mesure directe de l'énergie de champ moyen,  $\mathcal{E} = 4\pi\hbar^2 na/m$ , d'un condensat de Bose-Einstein [95, 96], ou encore par mesure de la section efficace de diffusion élastique [97, 98, 99], en utilisant la méthode de relaxation mentionnée au § 2.3.

La position et la largeur des résonances de Feshbach sont très sensibles aux paramètres des potentiels d'interaction. Leur détermination permet de contraindre fortement les valeurs de  $C_6$ ,  $v_{DS}$ , et  $v_{DT}$  dans le cas du *Rb*. Le pointé de la résonance permet de déterminer les états liés juste sous le seuil de dissociation avec une résolution supérieure à celle obtenue par photo-association. Ceci permet d'améliorer encore la détermination des potentiels à longue portée. En particulier, dans le cas du césium, les mesures récentes de résonances de Feshbach ont permis de contraindre de manière décisive les longueurs de diffusion  $a_S$  et  $a_T$  du *Cs* [100, 98]

## Le cas du césium et du rubidium

### Le rubidium

De nombreuses expériences ont été réalisées avec les deux isotopes du *Rb*, qui ont permis de déterminer très précisément les grandeurs caractéristiques qui interviennent dans les processus de collision :  $a_S$ ,  $a_T$ ,  $C_6$ , potentiel d'interaction spin-orbite du second ordre, ainsi que toutes les longueurs de diffusion. La grande quantité de résultats obtenus pour les deux isotopes permet aujourd'hui de contraindre fortement ces paramètres. Les résultats obtenus pour  $a_S$ ,  $a_T$ , et  $C_6$  sont donnés par ordre chronologique dans le tableau (2.1) pour le  $^{85}\text{Rb}$  et dans le tableau (2.2) pour le  $^{87}\text{Rb}$ . Les termes dispersifs  $C_8$  et  $C_{10}$ , non mentionnés, sont

calculés théoriquement dans [101]. On a noté à chaque fois la méthode employée pour déduire les paramètres en question, les dernières consistant en fait en des analyses globales de données provenant de plusieurs types d'expériences [102, 68]. Les sigles utilisés pour désigner la méthode employée sont les suivants :

- 1PA (resp. 2PA) : photo-association à 1 (resp. 2) couleurs ;  $+\sqrt{m}$  indique que la valeur a été déduite de l'autre isotope par "mass-scaling".
- Feshbach : pointé d'une ou de plusieurs résonances de Feshbach ;
- EL : mesure de sections efficaces de diffusion, soit par relaxation d'un nuage à partir d'une situation hors d'équilibre, soit par collision de deux boules d'atomes froids dans une fontaine ("juggling") ;
- Double BEC : coexistence de deux condensats dans deux états hyperfins différents, et mesure de l'évolution de la longueur de diffusion par transfert d'un condensat entre deux niveaux hyperfins [15, 103] ;
- CS : mesure de déplacement collisionnel dans une horloge atomique ;
- MS : mesure de spectroscopie des niveaux d'états liés dans le potentiel moléculaire de l'état fondamental [104, 105].

Le  $^{87}\text{Rb}$  a la particularité suivante : ses longueurs de diffusion sont toutes positives, et sont toutes très proches les unes des autres, autour de  $100a_0$  ( $a_0$  est le rayon de Bohr). Ceci résulte du fait que  $a_S$  et  $a_T$  sont elles-mêmes très proches l'une de l'autre. Les phases  $\phi_S$  et  $\phi_T$  des fonctions d'onde radiales singulet  $u_S(r)$  et triplet  $u_T(r)$  sont quasiment identiques, de sorte que, après propagation dans la région de potentiel moléculaire, ( $r \lesssim 20a_0$ ), les deux ondes  $u_S(r)$  et  $u_T(r)$  se recouplent *via* le même canal que le canal d'entrée. Les collisions sont donc quasi-parfaitement élastiques, le taux de pertes inélastiques vers les autres canaux de sortie étant très faible.

Remarques : (i) un corollaire de ce très faible taux de pertes inélastiques est la coexistence stable de deux condensats de  $^{87}\text{Rb}$ , observée expérimentalement [15, 103] pour la première fois en 1997, au JILA. Cette expérience a suscité un dynamisme particulier dans le domaine des prédictions théoriques, et a permis de contraindre fortement les paramètres des potentiels d'interaction [106, 107, 108]. (ii) un autre corollaire est le très faible déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  dans les horloges atomiques. Nous verrons en effet que ce déplacement collisionnel fait intervenir des différences entre longueurs de diffusion.

### Le césium

Les propriétés collisionnelles du  $^{133}\text{Cs}$  ont aussi été l'objet de nombreuses expériences, motivées par le fait que le césium est l'atome de référence dans la définition actuelle de la seconde, et aussi par les tentatives, jusqu'à présent sans succès, de réaliser un condensat de Bose-Einstein avec du Cs.

Par contraste avec le  $^{87}\text{Rb}$ , les longueurs de diffusion du Cs sont très différentes les unes des autres, et leurs différences sont très élevées. Ceci contribue d'une part aux taux de pertes inélastiques considérables dans les pièges d'atomes froids, ce qui empêche la condensation. Et d'autre part, le déplacement collisionnel qui en résulte est particulièrement élevé dans les horloges atomiques à Cs, ce qui représente aujourd'hui une limitation majeure à l'amélioration de leur exactitude.

Les propriétés collisionnelles du Cs ont justement été déterminées en partie

Année, réf.	$C_6$ (u.a.)	$a_T$ ( $a_0$ )	$a_S$ ( $a_0$ )	autres valeurs	méthode
1995, [13]	$C_6 = 4426$ (th. [101])	$-1000 < a_T < -60$			1PA
1996, [91]	$4450 < C_6 < 4650$	$-500 < a_T < -60$			1PA
1997, [14]	$4400 < C_6 < 4900$	$-\infty < a_T < -80$			$1PA + \sqrt{m}$
1997, [92]				$-590 < a_{2,-2} < -310$	2PA
1997, [16]	$4450 < C_6 < 4650$	$-580 < a_T < -300$	$4500 < a_S < +\infty$ ou $-\infty < a_S < -1200$		2PA
1998, [97]	$4650 < C_6 < 4750$	$-385 < a_T < -353$	$2050 < a_S < 2900$		Feshbach + 1PA
2000, [93]	$4650 < C_6 < 4750$	$-371 < a_T < -351$	$2400 < a_S < 2900$		2PA
2001, [99]	$4640 < C_6 < 4680$	$-340 < a_T < -314$	$2980 < a_S < 5150$		Feshbach + EL
2001, [68]	$4694 < C_6 < 4712$	$-391 < a_T < -385$	$2250 < a_S < 3215$		Double BEC + Feshbach + MS

TAB. 2.1 – Détermination des paramètres  $a_T$ ,  $a_S$ , et  $C_6$  du  $^{85}\text{Rb}$ , par ordre chronologique. Les valeurs de  $a_S$  et  $a_T$  sont exprimées en unités de  $a_0$  ( $a_0 = 0.529\,177\,208\,3\dots(19) \times 10^{-10}\text{ m}$ ).  $C_6$  est exprimée en unités atomiques ( $1\text{ u.a.} = 0.095\,7345 \times 10^{-24}\text{ J.nm}^6$ ).

Année, réf.	$C_6$ (u.a.)	$a_T$ ( $a_0$ )	$a_S$ ( $a_0$ )	autres valeurs	méthode
1995, [13]	$C_6 = 4426$ (th. [101])	$85 < a_T < 140$			IPA + $\sqrt{m}$
1995, [109]				$76a_0 <  a_{1,-1}  < 98a_0$	EL
1997, [14]	$4400 < C_6 < 4900$	$99 < a_T < 119$			1PA
1997, [92]	idem	$96 < a_T < 108$	$88 < a_S < 98$	$100a_0 < a_{1,-1} < 112a_0$	2PA
1997, [106]		$93 < a_T < 107$	$74 < a_S < 102$		IN + 1PA
1998, [103]				$a_{1,-1}/a_{2,1} = 1.062(12)$	Double BEC
2000, [102]		$96 < a_T < 100$	$86 < a_S < 94$		PA + Double BEC + Feshbach
2001, [68]	$4694 < C_6 < 4712$	$98.94 < a_T < 99.02$	$89.8 < a_S < 90.6$		Double BEC + Feshbach + MS + CS

TAB. 2.2 – Détermination des paramètres  $a_T$ ,  $a_S$ , et  $C_6$  du  $^{87}\text{Rb}$ , par ordre chronologique. Les valeurs de  $a_S$  et  $a_T$  sont exprimées en unités de  $a_0$  ( $a_0 = 0.529\ 177\ 208\ 3\dots(19) \times 10^{-10}\ \text{m}$ ).  $C_6$  est exprimée en unités atomiques ( $1\ \text{u.a.} = 0.095\ 7345 \times 10^{-24}\ \text{J}\cdot\text{nm}^6$ ).

par ces deux types d'expériences : mesure des taux de pertes inélastiques [84, 86, 87], et mesures de déplacement de fréquence dans les horloges [110, 7, 10]. Jusqu'à très récemment, de grandes barres d'erreur encadraient les valeurs de  $a_T$ , voire même on ne connaissait pas son signe. En 2000, une première mesure de photo-association sur le Cs a permis de déterminer plus précisément  $a_T$  et  $C_6$  [111]. Les résultats obtenus semblent cependant en désaccord, y compris en signe, avec les résultats d'une analyse détaillée, peu de temps après, de plusieurs résonances de Feshbach sur le Cs [98]. Cette dernière analyse contraint fortement les paramètres  $a_T$ ,  $a_S$  et  $C_6$ . Le tableau (2.3) résume chronologiquement les valeurs obtenues pour ces paramètres, avec les méthodes employées.

Année, réf.	$C_6$ (u.a.)	$a_T$ ( $a_0$ )	$a_S$ ( $a_0$ )	méthode
1995, [110]		$-1100 < a_T < -200$		CS
1997, [76]		$ a_T  > 260$		EL
1997, [84]		$-385 < a_T < -320$	$-225 < a_S < -191$	CS + EL + IN
1998, [85]		$ a_T  > 600$		EL + IN
1998, [10]		$a_T \simeq -400$		CS (juggling)
2000, [111]	$6440 < C_6 < 6580$	$-825 < a_T < -370$		IPA
2000, [98]	$6855 < C_6 < 6995$	$2300 < a_T < 2500$	$270 < a_S < 290$	Feshbach + IN + EL

TAB. 2.3 – Détermination des paramètres  $a_T$ ,  $a_S$ , et  $C_6$  du  $^{133}\text{Cs}$ , par ordre chronologique. Les valeurs de  $a_S$  et  $a_T$  sont exprimées en unités de  $a_0$  ( $a_0 = 0.529\ 177\ 208\ 3\dots(19) \times 10^{-10}\ \text{m}$ ).  $C_6$  est exprimée en unités atomiques ( $1\ \text{u.a.} = 0.095\ 7345 \times 10^{-24}\ \text{J.nm}^6$ ).

## 2.4 Expression du déplacement de fréquence induit par les collisions entre atomes froids

Dans les fontaines atomiques, la mesure du déplacement de fréquence induit par les collisions entre atomes froids fournit une information sur des différences entre longueurs de diffusion. Ces longueurs de diffusion décrivent les interactions entre les atomes présents dans les différents sous-niveaux Zeeman de la transition hyperfine du niveau fondamental. Nous allons maintenant expliciter la relation qui lie ce déplacement de fréquence aux longueurs de diffusion. Cette relation peut être démontrée en partant de l'équation de Boltzmann quantique pour un système homogène [112, 72, 113]. Nous donnons dans ce qui suit les grandes lignes d'une autre approche formellement plus simple, effectuée par Y. Castin, et passant par la seconde quantification.

### 2.4.1 Introduction

Le but de cette partie est d'établir la relation suivante :

$$\delta\nu_{at} = \frac{2\hbar}{m} \times \sum_j n_j (1 + \delta_{\alpha j})(1 + \delta_{\beta j}) \text{Re}\{a_{\beta j} - a_{\alpha j}\} \quad (2.16)$$

qui exprime le déplacement de fréquence  $\delta\nu$  entre les niveaux  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction des longueurs de diffusion  $a_{kj}$  et des densités volumiques  $n_j$  de population des états  $|j\rangle$ .

- $\delta_{kj}$  désigne l'indice de Kronecker.
- $\alpha$  et  $\beta$  désignent respectivement les niveaux fondamental et excité de la transition hyperfine de l'horloge. Ce sont les niveaux de  $m = 0$ ; par exemple, dans le cas du  $^{87}\text{Rb}$ , ce sont  $\alpha = |F = 3, m = 0\rangle$  et  $\beta = |F = 4, m = 0\rangle$
- $m$  désigne la masse de l'atome (par exemple, pour le  $^{87}\text{Rb}$ ,  $m = 1.44 \times 10^{-25}$  kg).

Notons  $\gamma$  les sous-niveaux Zeeman autres que  $\alpha$  et  $\beta$ . La relation précédente que l'on souhaite établir s'écrit donc :

$$\delta\nu_{at} = \frac{2\hbar}{m} \times [2n_\alpha \text{Re}\{a_{\beta\alpha} - a_{\alpha\alpha}\} + n_\gamma \text{Re}\{a_{\beta\gamma} - a_{\alpha\gamma}\} + 2n_\beta \text{Re}\{a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}\}] \quad (2.17)$$

Les calculs traitent implicitement le cas de plusieurs niveaux intermédiaires  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ , le symbole  $\sum_{i=1}^p$  étant omis dans un but de simplification.

Ces calculs nous permettront d'établir de surcroît l'expression de l'élargissement de la transition hyperfine, lié aux collisions entre atomes froids :

$$\Gamma = -\frac{4\pi\hbar}{m} \times \sum_j n_j (1 + \delta_{\alpha j})(1 + \delta_{\beta j}) \text{Im}\{a_{\beta j} + a_{\alpha j}\} \quad (2.18)$$

### 2.4.2 Principe du calcul

L'effet des collisions est d'amortir la cohérence hyperfine et de déplacer sa fréquence d'évolution selon [114], p.470-474 :

$$\frac{d\rho_{\alpha\beta}}{dt} = -(\Gamma + i\xi)\rho_{\alpha\beta} \quad (2.19)$$

où

- $-\xi$  est le déplacement algébrique  $\delta\omega_{\alpha t}$  de la pulsation de transition atomique.
- $\Gamma$  est l'amortissement de la cohérence et traduit l'élargissement de la transition atomique.

Le principe du calcul est donc d'écrire l'équation d'évolution de la cohérence sous l'action de l'hamiltonien d'interactions collisionnelles  $H_{coll}$  :

$$\frac{d\rho_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle \alpha | [H_{coll}, \rho] | \beta \rangle \quad (2.20)$$

ce qui nous conduira à  $\frac{d\rho_{\alpha\beta}}{dt} = (A + iB)\rho_{\alpha\beta}$ . Par identification, on en déduira  $\delta\omega_{\alpha t}$  et  $\Gamma$ .

Il s'agit donc d'écrire l'hamiltonien de collision,  $H_{coll}$ , puis d'exprimer le commutateur  $[H_{coll}, \rho]$ .

### 2.4.3 Potentiel de contact

L'approximation de Born à basse température revient à traiter le potentiel d'interaction  $v(\vec{r})$  comme un potentiel de contact, c'est à dire à écrire

$$v(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$$

avec  $g = \tilde{v}(\vec{0})$  [115]. Cette approximation de  $v(\vec{r})$  en potentiel de contact  $v(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$  se généralise au cas de potentiels non-réguliers trop forts pour qu'on puisse simplement remplacer  $g$  par  $\tilde{v}(\vec{0})$ .

La quantité  $g$  est alors donnée par

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a$$

où  $a$  est la longueur de diffusion du potentiel (voir par exemple [67], chapitre 4). C'est le cas des collisions pour lesquelles le terme générique  $g_{ij}$  de l'hamiltonien d'interaction ci-dessus s'écrit :

$$g_{ij} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_{ij} \quad (2.21)$$

### 2.4.4 Expression de l'hamiltonien de collision $H_{coll}$

On se place ici dans le cas d'un milieu dilué ( $n \lesssim 10^8 \text{ cm}^{-3}$ ), homogène, et constitué d'atomes froids ( $\sigma_v \simeq 2v_{rec}$ , c'est à dire  $T \simeq 1.4 \mu\text{K}$ ).

La condition de milieu homogène permet d'écrire les opérateurs en seconde quantification, sans tenir compte de l'intégrale sur les variables d'espace. Par

exemple, l'opérateur d'interaction à deux particules, qui s'écrit, en 1<sup>re</sup> quantification :

$$\sum_{i,j(i \neq j)} v(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

prend la forme suivante en seconde quantification :

$$\iint d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \Psi^+(\vec{r}) \Psi^+(\vec{r}') v(\vec{r} - \vec{r}') \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r})$$

La condition de milieu homogène permet d'intégrer très facilement sur les variables d'espace, et de manipuler des expressions où les signes  $\int$  disparaissent :

$$\Psi^+(\vec{r}) \Psi^+(\vec{r}') v(\vec{r} - \vec{r}') \Psi(\vec{r}') \Psi(\vec{r})$$

Nous ferons de plus l'hypothèse que le milieu est suffisamment dilué et froid pour pouvoir négliger l'influence des interactions inter-atomiques sur la dynamique du nuage. Sous cette condition, nous pouvons calculer l'évolution de la cohérence  $\rho_{\alpha\beta}$  entre états  $\alpha$  et  $\beta$  en ne tenant compte que du terme d'interaction dans l'hamiltonien. C'est à dire qu'on néglige les couplages qui pourraient apparaître entre les opérateurs d'énergie cinétique à 1 particule, de la forme

$$h_i = -\frac{\vec{P}_i^2}{2m}$$

et les termes d'interaction à deux particules, de la forme ci-dessus.

Nous n'écrirons pas non plus le terme d'interaction atome-champ microonde, qui est responsable de l'interrogation de Ramsey (cf. chapitre 1), mais qui ne déplace pas la fréquence de l'horloge.

Pour un potentiel de contact de la forme  $g\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ , on montre que l'hamiltonien de collision, qui est un opérateur à deux particules, admet pour forme quadratique associée, en seconde quantification :

$$\begin{aligned} H_{coll}^{quad} = & \frac{1}{2} g_{\alpha\alpha} \Psi_\alpha^+ \Psi_\alpha^+ \Psi_\alpha \Psi_\alpha + \frac{1}{2} g_{\gamma\gamma} \Psi_\gamma^+ \Psi_\gamma^+ \Psi_\gamma \Psi_\gamma + \frac{1}{2} g_{\beta\beta} \Psi_\beta^+ \Psi_\beta^+ \Psi_\beta \Psi_\beta \\ & + g_{\alpha\beta} \Psi_\alpha^+ \Psi_\beta^+ \Psi_\beta \Psi_\alpha + g_{\alpha\gamma} \Psi_\alpha^+ \Psi_\gamma^+ \Psi_\gamma \Psi_\alpha + g_{\gamma\beta} \Psi_\gamma^+ \Psi_\beta^+ \Psi_\beta \Psi_\gamma \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec la règle de contraction suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_a^+ \Psi_b^+ \Psi_b \Psi_a = & \langle \Psi_a^+ \Psi_b \rangle \Psi_b^+ \Psi_a + \langle \Psi_a^+ \Psi_a \rangle \Psi_b^+ \Psi_b \\ & + \langle \Psi_b^+ \Psi_b \rangle \Psi_a^+ \Psi_a + \langle \Psi_b^+ \Psi_a \rangle \Psi_a^+ \Psi_b \end{aligned} \quad (2.23)$$

où

$$\langle \Psi_j^+ \Psi_i \rangle = \rho_{ij}$$

On a donc en particulier

$$\Psi_i^+ \Psi_i^+ \Psi_i \Psi_i = 4 \langle \Psi_i^+ \Psi_i \rangle \Psi_i^+ \Psi_i$$

Par conséquent, en utilisant la règle de contraction précédente :

$$\begin{aligned} H_{coll}^{quad} = & 2g_{\alpha\alpha} \rho_{\alpha\alpha} \Psi_\alpha^+ \Psi_\alpha + 2g_{\gamma\gamma} \rho_{\gamma\gamma} \Psi_\gamma^+ \Psi_\gamma + 2g_{\beta\beta} \rho_{\beta\beta} \Psi_\beta^+ \Psi_\beta \\ & + g_{\alpha\beta} \rho_{\beta\alpha} \Psi_\beta^+ \Psi_\alpha + g_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\alpha} \Psi_\beta^+ \Psi_\beta + g_{\alpha\beta} \rho_{\beta\beta} \Psi_\alpha^+ \Psi_\alpha + g_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} \Psi_\alpha^+ \Psi_\beta \\ & + g_{\alpha\gamma} \rho_{\gamma\alpha} \Psi_\gamma^+ \Psi_\alpha + g_{\alpha\gamma} \rho_{\alpha\alpha} \Psi_\gamma^+ \Psi_\gamma + g_{\alpha\gamma} \rho_{\gamma\gamma} \Psi_\alpha^+ \Psi_\alpha + g_{\alpha\gamma} \rho_{\alpha\gamma} \Psi_\alpha^+ \Psi_\gamma \\ & + g_{\gamma\beta} \rho_{\beta\gamma} \Psi_\beta^+ \Psi_\gamma + g_{\gamma\beta} \rho_{\gamma\gamma} \Psi_\beta^+ \Psi_\beta + g_{\gamma\beta} \rho_{\beta\beta} \Psi_\gamma^+ \Psi_\gamma + g_{\gamma\beta} \rho_{\gamma\beta} \Psi_\gamma^+ \Psi_\beta \end{aligned} \quad (2.24)$$

L'opérateur  $H_{coll}$ , hamiltonien de collision associé à la forme quadratique précédente, s'écrit donc en 1<sup>re</sup> quantification :

$$\begin{aligned}
H_{coll} = & |\alpha\rangle\langle\alpha|[2g_{\alpha\alpha}\rho_{\alpha\alpha} + g_{\alpha\beta}\rho_{\beta\beta} + g_{\alpha\gamma}\rho_{\gamma\gamma}] \\
& + |\gamma\rangle\langle\gamma|[2g_{\gamma\gamma}\rho_{\gamma\gamma} + g_{\alpha\gamma}\rho_{\alpha\alpha} + g_{\gamma\beta}\rho_{\beta\beta}] \\
& + |\beta\rangle\langle\beta|[2g_{\beta\beta}\rho_{\beta\beta} + g_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\alpha} + g_{\gamma\beta}\rho_{\gamma\gamma}] \\
& + |\alpha\rangle\langle\beta|[g_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}] + |\beta\rangle\langle\alpha|[g_{\alpha\beta}\rho_{\beta\alpha}] \\
& + |\alpha\rangle\langle\gamma|[g_{\alpha\gamma}\rho_{\alpha\gamma}] + |\gamma\rangle\langle\alpha|[g_{\alpha\gamma}\rho_{\gamma\alpha}] \\
& + |\beta\rangle\langle\gamma|[g_{\gamma\beta}\rho_{\beta\gamma}] + |\gamma\rangle\langle\beta|[g_{\gamma\beta}\rho_{\gamma\beta}]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

### 2.4.5 Expression du déplacement de fréquence

On exprime maintenant  $\langle\alpha|[H_{coll}, \rho]|\beta\rangle = \langle\alpha|H_{coll}\rho|\beta\rangle - \langle\alpha|\rho H_{coll}|\beta\rangle$  en utilisant la relation de fermeture

$$|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\gamma\rangle\langle\gamma| + |\beta\rangle\langle\beta| = Id \tag{2.26}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|[H_{coll}, \rho]|\beta\rangle = & \langle\alpha|H_{coll}|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho|\beta\rangle + \langle\alpha|H_{coll}|\gamma\rangle\langle\gamma|\rho|\beta\rangle + \langle\alpha|H_{coll}|\beta\rangle\langle\beta|\rho|\beta\rangle \\
& - \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle\langle\alpha|H_{coll}|\beta\rangle - \langle\alpha|\rho|\gamma\rangle\langle\gamma|H_{coll}|\beta\rangle - \langle\alpha|\rho|\beta\rangle\langle\beta|H_{coll}|\beta\rangle
\end{aligned} \tag{2.27}$$

c'est à dire en utilisant l'expression (2.25) de  $H_{coll}$  :

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|[H_{coll}, \rho]|\beta\rangle = & \rho_{\alpha\beta}[2g_{\alpha\alpha}\rho_{\alpha\alpha} + g_{\alpha\beta}\rho_{\beta\beta} + g_{\alpha\gamma}\rho_{\gamma\gamma}] + \rho_{\gamma\beta}[g_{\alpha\gamma}\rho_{\alpha\gamma}] + \rho_{\beta\beta}[g_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}] \\
& - \rho_{\alpha\alpha}[g_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}] - \rho_{\alpha\gamma}[g_{\gamma\beta}\rho_{\gamma\beta}] - \rho_{\alpha\beta}[2g_{\beta\beta}\rho_{\beta\beta} + g_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\alpha} + g_{\gamma\beta}\rho_{\gamma\gamma}]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Finalement, cette expression se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d\rho_{\alpha\beta}}{dt} = & \rho_{\alpha\beta}[2\rho_{\alpha\alpha}(g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta}) + \rho_{\gamma\gamma}(g_{\alpha\gamma} - g_{\gamma\beta}) + 2\rho_{\beta\beta}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\beta})] \\
& + \rho_{\gamma\beta}\rho_{\alpha\gamma}(g_{\alpha\gamma} - g_{\gamma\beta})
\end{aligned} \tag{2.29}$$

En pratique, les cohérences entre chacun des états  $|\gamma\rangle$  et les états  $|\alpha\rangle$  ou  $|\beta\rangle$  sont très faibles dans l'horloge, de sorte que le produit  $\rho_{\gamma\beta}\rho_{\alpha\gamma}$  est, *a fortiori*, négligeable.

D'après la relation (2.19), on a donc :

$$-(\Gamma + i\xi) = \frac{1}{i\hbar}[2\rho_{\alpha\alpha}(g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta}) + \rho_{\gamma\gamma}(g_{\alpha\gamma} - g_{\gamma\beta}) + 2\rho_{\beta\beta}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\beta})] \tag{2.30}$$

Les  $\rho_{ii}$  représentent jusqu'à présent la densité volumique de population de l'état  $|i\rangle$  en ramenant le nombre total d'atomes à 1. Pour  $N$  atomes en interaction, et en remplaçant les  $g_{ij}$  par leur expression (2.21), l'expression précédente devient :

$$\xi - i\Gamma = \frac{4\pi\hbar}{m}[2n_{\alpha}(a_{\alpha\alpha} - a_{\alpha\beta}) + n_{\gamma}(a_{\alpha\gamma} - a_{\gamma\beta}) + 2n_{\beta}(a_{\alpha\beta} - a_{\beta\beta})] \tag{2.31}$$

Le déplacement de la pulsation atomique ( $\delta\omega_{at} = -\xi$ ) s'écrit donc :

$$\delta\omega_{at} = -\frac{4\pi\hbar}{m}[2n_{\alpha}Re\{a_{\alpha\alpha} - a_{\alpha\beta}\} + n_{\gamma}Re\{a_{\alpha\gamma} - a_{\gamma\beta}\} + 2n_{\beta}Re\{a_{\alpha\beta} - a_{\beta\beta}\}] \tag{2.32}$$

Sachant que  $Re\{a_{ij}\} = Re\{a_{ji}\}$ , on obtient donc l'expression du déplacement collisionnel en fréquence de la transition atomique :

$$\delta\nu_{at} = \frac{2\hbar}{m} \times [2n_\alpha Re\{a_{\beta\alpha} - a_{\alpha\alpha}\} + n_\gamma Re\{a_{\beta\gamma} - a_{\alpha\gamma}\} + 2n_\beta Re\{a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}\}] \quad (2.33)$$

ce qui établit l'expression recherchée :

$$\delta\nu_{at} = \frac{2\hbar}{m} \times \sum_j n_j (1 + \delta_{\alpha j})(1 + \delta_{\beta j}) Re\{a_{\beta j} - a_{\alpha j}\} \quad (2.34)$$

### 2.4.6 Élargissement de la transition atomique lié aux collisions entre atomes froids

La relation (2.31) fournit aussi l'expression de l'élargissement  $\Gamma$  de la transition atomique lié aux collisions entre atomes froids. En identifiant les parties imaginaires, on obtient en effet :

$$\Gamma = -\frac{4\pi\hbar}{m} [2n_\alpha Im\{a_{\alpha\alpha} - a_{\alpha\beta}\} + n_\gamma Im\{a_{\alpha\gamma} - a_{\gamma\beta}\} + 2n_\beta Im\{a_{\alpha\beta} - a_{\beta\beta}\}] \quad (2.35)$$

c'est à dire, sachant que  $Im\{a_{ij}\} = -Im\{a_{ji}\}$  :

$$\Gamma = -\frac{4\pi\hbar}{m} \times [2n_\alpha Im\{a_{\beta\alpha} + a_{\alpha\alpha}\} + n_\gamma Im\{a_{\beta\gamma} + a_{\alpha\gamma}\} + 2n_\beta Im\{a_{\beta\beta} + a_{\alpha\beta}\}] \quad (2.36)$$

d'où l'expression recherchée :

$$\Gamma = -\frac{4\pi\hbar}{m} \times \sum_j n_j (1 + \delta_{\alpha j})(1 + \delta_{\beta j}) Im\{a_{\beta j} + a_{\alpha j}\} \quad (2.37)$$

### 2.4.7 Remarque sur l'évolution des populations

L'expression (2.25) de l'hamiltonien  $H_{coll}$  permet de retrouver que, sous le seul effet des interactions entre atomes, les populations globales  $\rho_{\alpha\alpha}$  et  $\rho_{\beta\beta}$  sont constantes dans le temps (pas de pertes par processus inélastiques). On a en effet :

$$\langle\alpha|[H_{coll}, \rho]|\alpha\rangle = \langle\alpha|H_{coll}\rho|\alpha\rangle - \langle\alpha|\rho H_{coll}|\alpha\rangle \quad (2.38)$$

et, en utilisant la relation de fermeture (2.26) :

$$\begin{aligned} \langle\alpha|[H_{coll}, \rho]|\alpha\rangle &= \langle\alpha|H_{coll}|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle + \langle\alpha|H_{coll}|\gamma\rangle\langle\gamma|\rho|\alpha\rangle + \langle\alpha|H_{coll}|\beta\rangle\langle\beta|\rho|\alpha\rangle \\ &\quad - \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle\langle\alpha|H_{coll}|\alpha\rangle - \langle\alpha|\rho|\gamma\rangle\langle\gamma|H_{coll}|\alpha\rangle - \langle\alpha|\rho|\beta\rangle\langle\beta|H_{coll}|\alpha\rangle \end{aligned} \quad (2.39)$$

c'est à dire en utilisant l'expression (2.25) de  $H_{coll}$  :

$$\begin{aligned} \langle\alpha|[H_{coll}, \rho]|\alpha\rangle &= \rho_{\gamma\alpha}[g_{\alpha\gamma}\rho_{\alpha\gamma}] + \rho_{\beta\alpha}[g_{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}] \\ &\quad - \rho_{\alpha\gamma}[g_{\alpha\gamma}\rho_{\gamma\alpha}] - \rho_{\alpha\beta}[g_{\alpha\beta}\rho_{\beta\alpha}] \end{aligned} \quad (2.40)$$

$j$	a	d	e	$\beta$	$\alpha$	g	h	c
$a_{\alpha j}$	100.831	98.288	99.142	99.427	101.284	99.142	98.288	100.831
$a_{\beta j}$	98.573	94.956	98.312	94.946	99.427	98.312	94.956	98.573

TAB. 2.4 – Parties réelles des longueurs de diffusion du  $^{87}\text{Rb}$ , exprimées en unités de  $a_0$ . On rappelle que le rayon de Bohr  $a_0$  vaut  $0.529\,177\,208\,3\dots 10^{-10}\text{ m}$ . Ces valeurs ont été calculées par C. Williams et al [116] pour une énergie de collision  $E/k_B = 1\,\mu\text{K}$ . A cette température les processus inélastiques sont négligeables et les collisions s'effectuent en onde "s".

On retrouve ainsi que

$$i\hbar \frac{d\rho_{\alpha\alpha}}{dt} = 0$$

c'est à dire que  $\rho_{\alpha\alpha}(t) = \text{constante}$ . De même on trouve que  $\rho_{\beta\beta}(t) = \text{constante}$ .

## 2.5 Valeurs des sections efficaces de diffusion pour le $^{87}\text{Rb}$

Dans ce paragraphe, on donne les valeurs des différentes longueurs de diffusion en onde "s" du  $^{87}\text{Rb}$ , qui interviennent dans les déplacements de fréquence des fontaines atomiques. Ces valeurs ont été calculées par C. Williams et son équipe, au NIST; elles permettent de prédire les déplacements de fréquence d'horloge dans le  $^{87}\text{Rb}$ , et nous comparerons ces prédictions à nos résultats expérimentaux dans le chapitre 5.

### 2.5.1 Valeurs des longueurs de diffusion pour le $^{87}\text{Rb}$

Le tableau (2.4) donne les valeurs calculées des  $a_{ij}$ , en prenant  $a_S = 90.692a_0$ ,  $a_T = 99.290a_0$ , et  $C_6 = 4784.0\text{ u.a.}$  ( $1\text{ u.a.} = 0.095\,734\,5 \times 10^{-24}\text{ J.m}^6$ ). Les conventions de notation pour les différents sous-niveaux Zeeman sont représentées sur la figure (2.7).

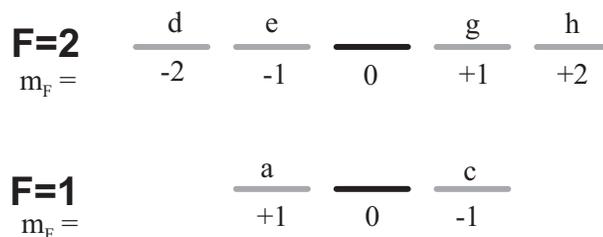


FIG. 2.7 – Conventions de notations pour les états de la transition hyperfine du  $^{87}\text{Rb}$ .

### 2.5.2 Prédictions théoriques pour le déplacement collisionnel du $^{87}\text{Rb}$ , par C. Williams

Les valeurs du tableau (2.4) permettent de calculer, à partir de la relation (2.34), le déplacement collisionnel dans les différentes configurations de fonctionnement de la fontaine :

- **Cas où les atomes sont initialement préparés dans  $|\mathbf{F} = 1, \text{ tous } \mathbf{m}_F\rangle$**

Dans ce cas, les niveaux de  $F = 1$  sont initialement équipés et, à l'issue de la 1<sup>re</sup> interaction avec le champ micro-onde dans la cavité, les populations  $\rho_{\alpha\alpha}$  et  $\rho_{\beta\beta}$  sont égales et valent  $1/6$ . L'expression (2.34) du déplacement collisionnel s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \delta\nu_{at} = -\frac{2\hbar}{m} \times n \times & \left[ \frac{1}{3}(a_{\alpha a} - a_{\beta a}) + \frac{1}{3}(a_{\alpha c} - a_{\beta c}) + 2 \times \frac{1}{6}(a_{\alpha\alpha} - a_{\beta\alpha}) \right. \\ & \left. + 2 \times \frac{1}{6}(a_{\alpha\beta} - a_{\beta\beta}) \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

On trouve alors

$$\frac{\delta\nu_{at}}{\nu_{at}} = -4.1 \times 10^{-23} \times n$$

où  $n$  désigne la densité volumique totale d'atomes, supposée homogène, et exprimée en  $\text{cm}^{-3}$ .

- **Cas où les atomes sont initialement préparés dans  $|\mathbf{F} = 2, \text{ tous } \mathbf{m}_F\rangle$**

Dans ce cas encore, les niveaux de  $F = 2$  sont initialement équipés et, à l'issue de la 1<sup>re</sup> interaction avec le champ micro-onde dans la cavité, les populations  $\rho_{\alpha\alpha}$  et  $\rho_{\beta\beta}$  sont égales et valent  $1/10$ . L'expression (2.34) du déplacement collisionnel s'écrit cette fois :

$$\begin{aligned} \delta\nu_{at} = -\frac{2\hbar}{m} \times n \times & \left[ \frac{1}{5}(a_{\alpha d} - a_{\beta d}) + \frac{1}{5}(a_{\alpha e} - a_{\beta e}) + \frac{1}{5}(a_{\alpha g} - a_{\beta g}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{5}(a_{\alpha h} - a_{\beta h}) + 2 \times \frac{1}{10}(a_{\alpha\alpha} - a_{\beta\alpha}) + 2 \times \frac{1}{10}(a_{\alpha\beta} - a_{\beta\beta}) \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

On trouve alors

$$\frac{\delta\nu_{at}}{\nu_{at}} = -3.3 \times 10^{-23} \times n$$

- **Cas où les atomes sont initialement préparés dans  $|\mathbf{F} = 1, \mathbf{m}_F = 0\rangle$**

C'est la configuration standard de l'horloge. Seul le niveau  $F = 1, m_F = 0$  est initialement peuplé et, à l'issue de la 1<sup>re</sup> interaction avec le champ micro-onde dans la cavité, les populations  $\rho_{\alpha\alpha}$  et  $\rho_{\beta\beta}$  sont égales et valent  $1/2$ . L'expression (2.34) du déplacement collisionnel s'écrit donc :

$$\delta\nu_{at} = -\frac{2\hbar}{m} \times n \times \left[ 2 \times \frac{1}{2}(a_{\alpha\alpha} - a_{\beta\alpha}) + 2 \times \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - a_{\beta\beta}) \right] \quad (2.43)$$

On trouve dans ce cas

$$\frac{\delta\nu_{at}}{\nu_{at}} = -7.2 \times 10^{-23} \times n$$

$F, m_F$	C. Williams <i>et al</i>	C. Greene <i>et al</i> [117]	B. J. Verhaar <i>et al</i> [12]
$\alpha$	-0.287	-0.12	-0.7
$\beta$	-0.693	-1.03	-0.9
a, c	-0.175	-0.17	-0.29
e, g	-0.064	-0.08	-0.11
d, h	-0.257	-0.32	-0.44

TAB. 2.5 – Contributions des différents sous-niveaux Zeeman  $F, m_F$  au déplacement de la transition atomique  $F = 1, m_F = 0 \rightarrow F = 2, m_F = 0$ . Les valeurs sont calculées pour  $E/k_B = 1 \mu\text{K}$ , une densité partielle pour chaque sous-niveau  $j$  égale à  $n_j = 10^9 \text{ cm}^{-3}$ , et sont exprimées en mHz.

### 2.5.3 Comparaison avec d'autres prédictions théoriques et conclusion

D'autres équipes ont aussi réalisé des calculs de modélisation des collisions dans le  $^{87}\text{Rb}$  : B. J. Verhaar *et al*, de l'Université de Eindhoven, ont fourni les premières prédictions théoriques pour le déplacement collisionnel dans les horloges à Rb, en 1997 [12] (cf. note de bas de page<sup>5</sup> pour le  $^{85}\text{Rb}$ ). C. Greene *et al*, au JILA, ont aussi effectué des calculs de modélisation, et nous ont aimablement fourni leurs résultats préliminaires de 1999, pour comparaison [117]. Ces deux dernières équipes ne nous ont cependant pas fourni les valeurs exactes des longueurs de diffusion. Nous n'avons eu accès qu'à des différences de longueurs de diffusion, c'est à dire à des termes du type :

$$(1 + \delta_{\alpha j})(1 + \delta_{\beta j})\text{Re}\{a_{\beta j} - a_{\alpha j}\}$$

A titre de comparaison, on a représenté dans le tableau (2.5) les valeurs des contributions de chaque sous-niveau Zeeman  $j$  au déplacement total de la transition atomique  $F = 1, m_F = 0 \rightarrow F = 2, m_F = 0$ . Ces contributions résultent de calculs effectués par les divers groupes mentionnés. Elles sont conventionnellement notées  $v\lambda_j$ , où  $v$  correspond ici à la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique [12].  $v$  vaut  $\sim 10 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$  pour  $E/k_B = 1 \mu\text{K}$ . Ces contributions ont pour expression :

$$v\lambda_j = \frac{2\hbar}{m} \times (1 + \delta_{\alpha j})(1 + \delta_{\beta j})\text{Re}\{a_{\beta j} - a_{\alpha j}\} \quad (2.44)$$

et le déplacement total de la transition atomique  $F = 1, m_F = 0 \rightarrow F = 2, m_F = 0$  s'écrit donc :

$$\delta\nu_{at} = \sum_j n_j v\lambda_j \quad (2.45)$$

Le tableau (2.6) permet de comparer les valeurs des déplacements collisionnels déduits des valeurs de  $v\lambda_j$ , dans les trois configurations de fonctionnement de la fontaine *Rb* mentionnées précédemment.

<sup>5</sup>Comme le montre la figure (2.3), les sections efficaces de diffusion du  $^{85}\text{Rb}$  sont plus élevées que celles du  $^{87}\text{Rb}$ , de plus d'un ordre de grandeur. Le déplacement collisionnel du  $^{85}\text{Rb}$  a aussi été calculé par [12], qui prédit  $-6.6 \times 10^{-21} \text{ cm}^3$ , soit un facteur 2 supérieur à celui du Cs. La fréquence de transition d'horloge du  $^{85}\text{Rb}$  est par ailleurs défavorable pour le facteur de qualité de la résonance atomique, puisqu'elle vaut 3.0357 GHz.

Configuration de préparation	C. Williams <i>et al</i>	C. Greene <i>et al</i>	B. J. Verhaar <i>et al</i> [12]
$ F = 1, m = 0\rangle$	$-7.2 \times 10^{-23}$	$-8.4 \times 10^{-23}$	$-11.7 \times 10^{-23}$
$ F = 1, \text{ tous } m_F\rangle$	$-4.1 \times 10^{-23}$	$-4.5 \times 10^{-23}$	$-6.7 \times 10^{-23}$
$ F = 2, \text{ tous } m_F\rangle$	$-3.3 \times 10^{-23}$	$-4.0 \times 10^{-23}$	$-5.6 \times 10^{-23}$

TAB. 2.6 – Déplacements de fréquence de la transition atomique  $F = 1, m_F = 0 \rightarrow F = 2, m_F = 0$  dans différentes configurations de populations initiales des sous-niveaux Zeeman. Les déplacements sont donnés en valeur relative, c'est à dire divisés par la fréquence d'horloge à 6.8 GHz du  $^{87}\text{Rb}$ , et ramenés à une densité atomique totale de  $1 \text{ cm}^{-3}$ .

Bien que, selon les modèles développés dans les différentes équipes, les contributions de chaque sous-niveau Zeeman n'aient pas les mêmes poids, relativement au déplacement de fréquence total, on remarque que le déplacement total de fréquence (somme de ces contributions) diffère peu d'une équipe à l'autre. On voit donc que la mesure du déplacement collisionnel dans une horloge ne permet pas d'accéder à toutes les propriétés collisionnelles de l'atome.

Cependant, en variant les populations relatives dans les différents sous-niveaux Zeeman, il est possible d'effectuer un test de cohérence des modèles sous-jacents. Cela permet en effet de tester les rapports entre les différentes contributions  $v\lambda_j$ , indépendamment des calibrations de nombre d'atomes. Dans une horloge à Rb, la densité totale que nous avons atteinte jusqu'à présent est de l'ordre de  $10^7 \text{ cm}^{-3}$  dans la configuration de préparation dans  $|F = 1, m = 0\rangle$ . Ceci conduit à un déplacement collisionnel très faible ( $\delta\nu_{at}/\nu_{at} \simeq 10^{-15}$ ), qu'il est difficile de mesurer avec une horloge d'exactitude proche de  $10^{-15}$ . Par conséquent, dans une horloge à Rb, ce type de test est difficile à réaliser avec précision. Dans une horloge à Cs, en revanche, le déplacement collisionnel est  $\sim 50$  fois plus élevé que dans le Rb<sup>6</sup>. Ce test peut donc être effectué avec une incertitude de quelques % sans difficultés.

---

<sup>6</sup>en se comparant aux prédictions théoriques de C. Williams *et al* pour le Rb, et en prenant le déplacement collisionnel du Cs égal à  $3 \times 10^{-21} \text{ cm}^{-3}$ , tel que nous le mesurerons au chapitre 6.



## Chapitre 3

# La fontaine Rb : banc d'essai pour la fontaine double

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la fontaine *Rb*, qui est la première fontaine que nous avons construite au cours de ma thèse [118]. Elle fonctionne avec des atomes de  $^{87}\text{Rb}$ , dont la transition d'horloge a pour fréquence  $\sim 6\,834\,682\,610.904\,33$  Hz. Sa construction a été motivée par la publication, en 1997, de prédictions théoriques sur les déplacements des niveaux de la transition hyperfine  $F = 1 \rightarrow F = 2$ , liés aux collisions entre atomes froids. Selon ces prédictions, le déplacement relatif de fréquence qui en résulte, sur la transition d'horloge, serait 15 fois plus faible que sur le  $^{133}\text{Cs}$  [12].

Comme on l'a expliqué en introduction, la fontaine FO1, fonctionnant avec du Cs [2] était alors évaluée avec une exactitude proche de  $10^{-15}$ , la contribution majeure au bilan d'exactitude provenant du déplacement collisionnel, de l'ordre de quelques  $10^{-14}$ . Aujourd'hui, le déplacement collisionnel dans les fontaines à atomes froids de Cs reste une sérieuse limitation pour l'amélioration de leur exactitude, parce qu'il est difficile de le stabiliser à mieux que 10% sur le long terme. Pourtant, les efforts pour améliorer la stabilité à court terme des fontaines ont été fructueux : l'utilisation de laser plus stables pour la détection des atomes, et l'utilisation d'un oscillateur cryogénique à résonateur en saphir ultra-stable à court terme, ont permis d'atteindre des stabilités inégalées jusqu'à présent :  $\sigma_y(\tau) = 4 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  pour  $6 \times 10^5$  atomes détectés [9]. Cette stabilité est d'ailleurs limitée par le bruit de projection quantique, limite ultime de la stabilité des fontaines, et que nous décrirons dans ce chapitre.

Dans ces conditions, un gain d'un facteur 15 sur le déplacement collisionnel confère au  $^{87}\text{Rb}$  un intérêt métrologique certain en vue d'atteindre une exactitude au niveau de  $10^{-16}$ .

La première étape de mon travail de thèse a donc consisté à construire une fontaine *Rb*, de façon à évaluer "rapidement" le déplacement collisionnel du

$^{87}\text{Rb}$  et à le comparer aux prédictions théoriques. La fontaine *Rb* bénéficie de l'expérience acquise au cours de la construction d'une part de la fontaine FO1 [119, 120, 53], et d'autre part du prototype d'horloge spatiale PHARAO [121].

La section 3.2 décrit la fontaine *Rb* dans son ensemble.

La section 3.3 détaille ensuite chaque partie de la fontaine *Rb* : le contrôle des paramètres dans la zone d'interrogation, la cavité micro-onde d'interrogation, les techniques de manipulation et de sélection des atomes froids et la séquence temporelle associée, le système de détection, le banc optique, et enfin l'électronique de commande et le pilotage informatique de la fontaine.

La section 3.4 décrit l'organisation générale des fontaines du BNM-LPTF, puis la chaîne de synthèse du signal distribué aux trois fontaines et utilisé pour les comparer entre elles, et enfin la chaîne de synthèse micro-onde de la fontaine *Rb*, permettant de générer un signal d'interrogation asservi en phase sur le signal de distribution.

La section 3.5 décrit le principe de l'asservissement de l'oscillateur d'interrogation sur la frange centrale de Ramsey, et donne l'expression générale de la stabilité de fréquence d'une horloge utilisant ce type d'asservissement. Puis on passe en revue les différentes contributions de bruit limitant la stabilité de la fontaine, en donnant à chaque fois leur origine physique et leur valeur mesurée ou estimée : bruit de fréquence du signal d'interrogation, bruit lié à l'électronique de détection, bruit provenant du laser de détection, bruit de projection quantique. On dresse ensuite le bilan des sources de bruit, et on montre les mesures de stabilité à court terme effectuées sur la fontaine *Rb* en fonction du nombre d'atomes. Enfin, cette partie se termine en expliquant comment, en synchronisant les cycles d'interrogation de la fontaine *Rb* avec la fontaine FO1, nous avons réussi à rejeter significativement le bruit du signal de distribution dans la comparaison entre fontaines.

La section 3.6 montre les franges de Ramsey obtenues typiquement sur la fontaine *Rb*, dresse le bilan d'exactitude de la fontaine *Rb*, et présente enfin les résultats des comparaisons de fréquences entre les 3 fontaines du BNM-LPTF au cours de 3 campagnes de mesures. Les résultats de ces comparaisons constituent le test de laboratoire le plus exact, à ce jour, de l'éventuelle variation temporelle de la constante de structure fine  $\alpha$ .

## 3.2 Description d'ensemble de la fontaine *Rb*

La figure (3.1) présente un schéma d'ensemble de l'horloge *Rb*. On y trouve le corps proprement dit de l'horloge (1), que l'on va décrire dans le prochain paragraphe, où évolue le nuage d'atomes froids qui vont effectuer la transition d'horloge. Les sources laser pour la manipulation et la détection des atomes froids sont situées sur un banc optique séparé (2). La lumière de ces sources laser est guidée jusqu'à l'horloge au moyen de 9 fibres optiques (3). Le corps de l'horloge est entièrement entouré de deux couches de blindages magnétiques (blindages magnétiques dits "extérieurs"), qui sont assemblés par panneaux rectangulaires sur les cotés, et par des panneaux hexagonaux sur le fond et pour les chapeaux. Ces panneaux sont percés de quelques ouvertures, permettant l'accès des faisceaux laser et la connection des fibres optiques. La cavité micro-onde, qui se trouve au coeur du corps de l'horloge, est alimentée *via* un câble co-axial

semi-rigide par une chaîne de synthèse micro-onde (4). Cette chaîne génère le signal qui va interroger les atomes au niveau de la cavité micro-onde. La fréquence de ce signal est modulable sur un faible intervalle autour de  $\sim 6.8$  GHz, et est asservie en phase sur le signal provenant d'un maser à hydrogène *via* un câble coaxial (5). Le maser à hydrogène n'est pas représenté sur la figure. La fréquence et l'amplitude du signal délivré par la chaîne de synthèse sont commandées depuis l'ordinateur (6). La séquence temporelle de manipulation, de sélection, et de détection des atomes est générée électroniquement, de manière analogique et numérique (7), et est déclenchée par l'ordinateur. Celui-ci effectue aussi l'acquisition des signaux de détection, calcule les corrections de fréquence et les applique sur la chaîne de synthèse, de sorte que la fréquence de celle-ci est asservie en permanence sur la fréquence de transition atomique.

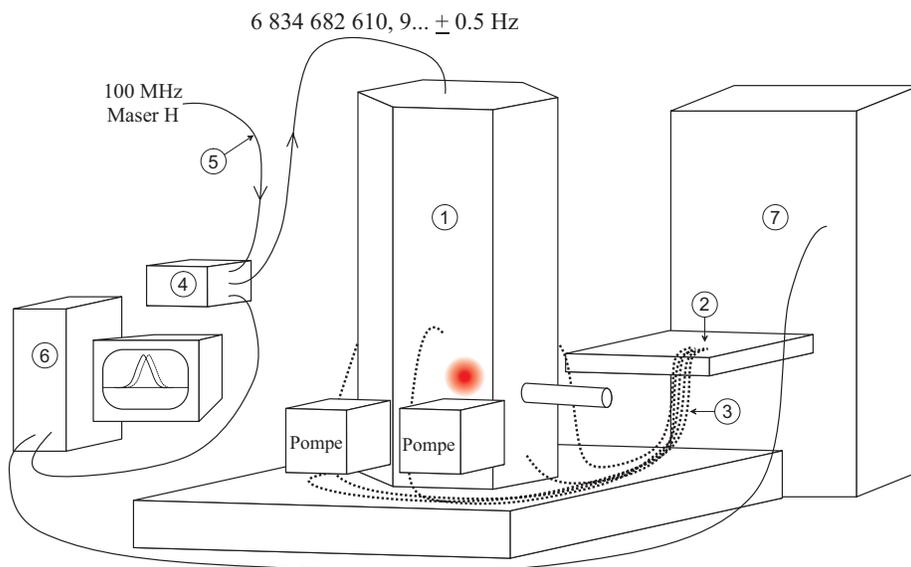


FIG. 3.1 – Schéma d'ensemble de l'horloge *Rb* en fontaine.

Les figures (3.2) et (3.3) sont des photographies du corps de la fontaine *Rb* et de sa zone de refroidissement. Pour l'occasion, on a ôté les blindages magnétiques extérieurs qui les entourent. Le corps de l'horloge pèse  $\sim 200$  kg, et repose sur un marbre de  $90 \times 90$  cm<sup>2</sup> (1), par trois points permettant de régler sa verticalité avec une incertitude  $\lesssim 2 \times 10^{-4}$  rad. Le corps de la fontaine est constitué d'un tube à vide (2) en aluminium AU4G, creux, de hauteur  $\sim 670$  mm, de diamètre  $\sim 100$  mm. Ce tube constitue la zone d'évolution libre du nuage d'atomes froids. La cavité micro-onde repose par trois points au centre de ce tube. La hauteur de vol libre des atomes au-dessus de la cavité est de  $\sim 320$  mm. Ce tube est entouré de 2 couches de blindages magnétiques cylindriques, avec leurs chapeaux.

Sous le tube à vide, on a suspendu la boule de refroidissement (3), en titane. Cette boule de refroidissement a en fait la forme d'un cube, dont la grande diagonale est verticale (géométrie dite (1, 1, 1)), et qui est tronqué par quelques plans de coupe. Cette boule est creuse; en son centre seront capturés les atomes de *Rb*. Dans les faces de ce cube, on a percé des ouvertures de diamètre 32 mm

- |                            |   |  |
|----------------------------|---|--|
| ① marbre                   | ⑥ pompe ionique                         | ⑪ câble d'alimentation micro-onde de la cavité |
| ② tube à vide              | ⑦ zone de détection                     | ⑫ sonde de champ magnétique                    |
| ③ boule de refroidissement | ⑧ ampoule de Rb                         | ⑬ fil chauffant                                |
| ④ collimateur              | ⑨ bobines de compensation longitudinale | ⑭ bobines du piège magnéto-optique             |
| ⑤ hublot d'observation     | ⑩ bobines de compensation transverse    |  |

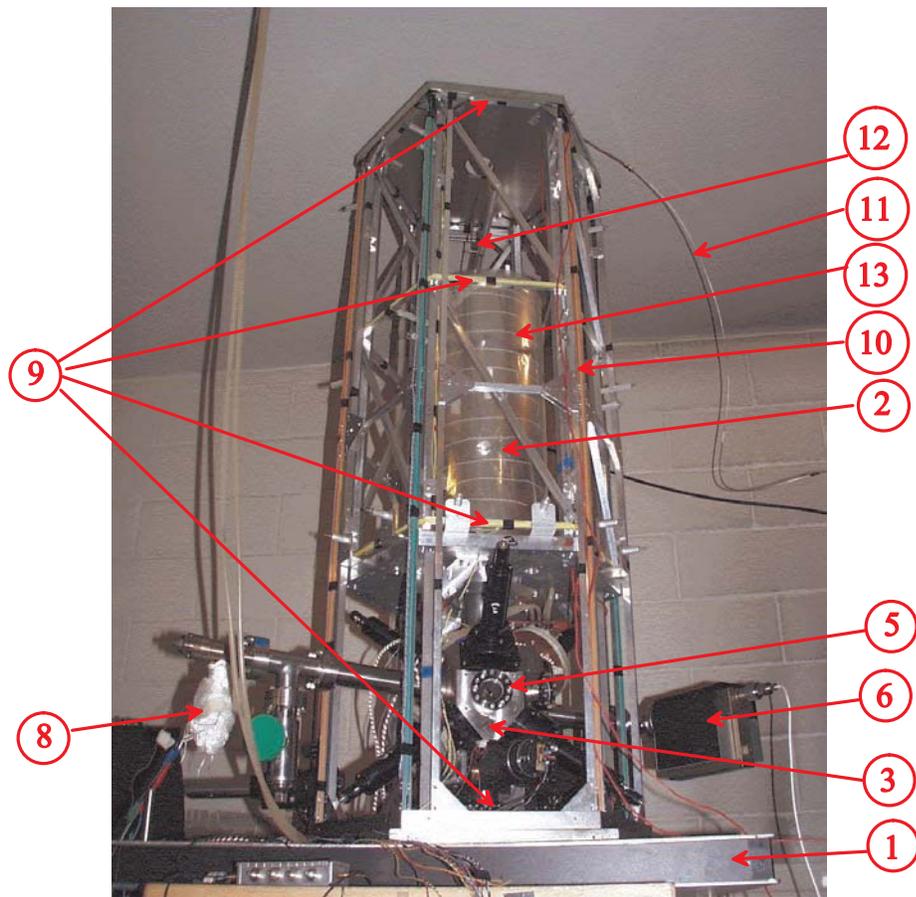


FIG. 3.2 – Photographie d'ensemble du corps de la fontaine Rb.

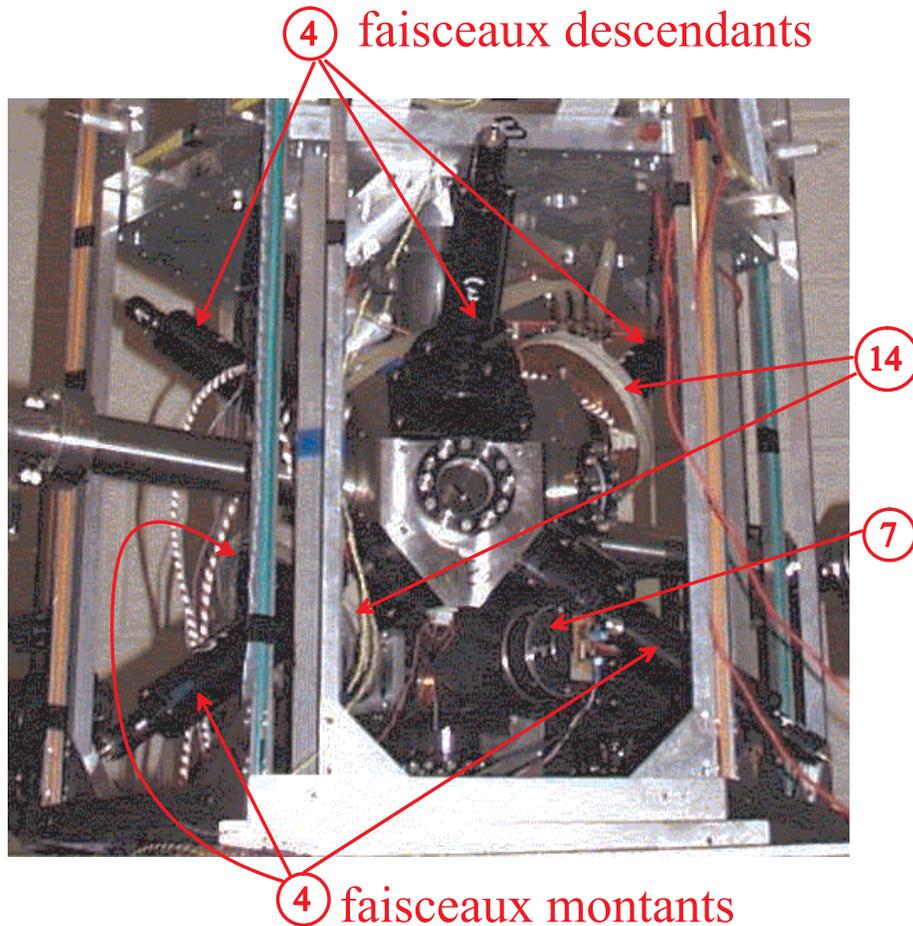


FIG. 3.3 – *Détail de la zone de refroidissement de la fontaine Rb.*

qui permettent l'accès des 6 faisceaux laser de refroidissement. Ceux-ci sont obtenus en collimatant les faisceaux laser sortant de 6 fibres optiques. Les fibres optiques ne sont pas visibles sur la photographie, car elles ont été déconnectées de leurs collimateurs. Les collimateurs (4) sont fixés rigidement sur la boule, l'alignement des faisceaux étant assuré par le parallélisme des faces du cube. Par ailleurs, ce cube a été tronqué par des plans dans lesquels ont été pratiquées des ouvertures. Ces ouvertures permettent :

1. d'observer le nuage d'atomes froids (hublot (5)),
2. de réaliser le vide à l'intérieur de l'horloge, grâce aux 2 pompes ioniques (6),
3. de libérer le passage (au-dessus et en dessous de cette boule de refroidissement) des atomes, afin d'assurer la détection et l'interrogation de Ramsey.

Les 2 pompes ioniques, d'un débit de  $25 \text{ l.s}^{-1}$  chacune, assurent un vide de l'ordre de quelques  $10^{-7} \text{ Pa}$  au niveau de la zone de capture. En temps normal, elles sont entourées de deux couches de blindage magnétique, et situées à l'extérieur des blindages principaux.

Le tube à vide (2) est séparé de la zone de capture par des diaphragmes de diamètre  $\sim 14$  mm. La pression dans le tube à vide est plus faible que dans la zone de capture, et le taux de pertes d'atomes froids par collisions avec les atomes chauds y est  $\lesssim 0.25 \text{ s}^{-1}$ .

Sous la zone de capture, se trouve la zone de détection (7) des atomes froids. Elle est séparée de la zone de capture par un tube creux de graphite de diamètre intérieur 16 mm, qui joue le rôle d'éponge à atomes chauds de Rb. Elle est par ailleurs tapissée de peinture compatible ultra-vide et fortement chargée en graphite. Grâce à cette peinture, il n'y a pas d'atomes chauds dans la zone de détection des atomes froids. La pression dans cette zone est plus faible que dans la zone de capture. La différence de pression entre la zone de capture et la zone de détection se traduit par un jet d'atomes chauds, vertical et peu divergent (demi-angle  $\sim 0.11$  rad). Ce jet est orthogonal au faisceau laser de détection. Il nous servira à calibrer sa fréquence.

Dans cette expérience préliminaire, la source d'atomes de Rb est une vapeur, chargée au niveau de la zone de capture à partir de Rb en phase métallique déposé dans une ampoule (8). Celle-ci, placée à l'extérieur des blindages principaux, est séparée de la zone capture par une vanne ultra-vide et un tube de  $\sim 60$  cm. Elle est légèrement chauffée ( $\sim 50$  °C) afin d'augmenter localement la pression de vapeur et de favoriser la migration de la vapeur vers la zone de capture.

La photographie (3.2) permet de voir aussi les bobines de compensation longitudinale (9) et transverse (10) du champ magnétique, le câble micro-onde d'alimentation de la cavité (11), l'emplacement de la sonde d'asservissement (12) du champ magnétique vertical, servant à compenser les fluctuations mentionnées précédemment, le fil chauffant utilisé lors de la mesure du "cavity pulling" (13), et les bobines du piège magnéto-optique (14). Nous rencontrerons ces éléments dans les paragraphes suivants.

### 3.3 Description détaillée du fonctionnement de l'horloge *Rb*

#### 3.3.1 La zone d'interrogation : contrôle de l'environnement des atomes

C'est dans la zone d'interrogation, située au-dessus de la cavité micro-onde, qu'un déplacement de la transition atomique se répercute de la façon la plus sensible sur la fréquence d'horloge ( $g(t) = 1$ ). En particulier, c'est à l'apogée du vol balistique, là où les atomes passent le plus de temps, que la fréquence d'horloge est la plus sensible à une perturbation de la fréquence de transition atomique.

Les deux perturbations les plus importantes, par la valeur de déplacement de fréquence qu'elles induisent, sont le déplacement Zeeman du 2<sup>e</sup> ordre et le déplacement lié au rayonnement thermique ambiant.

#### Déplacement Zeeman du 2<sup>e</sup> ordre : méthode de mesure

Concernant le déplacement Zeeman du 2<sup>e</sup> ordre, on cherche d'abord à homogénéiser le mieux possible le champ magnétique sur l'axe. En effet, le déplace-

ment de la fréquence d'horloge lié à cet effet est, d'après (1.26) et (1.74) :

$$\Delta\nu_{horl.}^Q = \frac{1}{T_{eff}} \int_0^{T+2\tau} K_Z^{(2)} \times B^2(t)g(t)dt \quad (3.1)$$

où l'exposant "Q" rappelle que le déplacement de fréquence de la transition atomique est quadratique en champ. La constante  $K_Z^{(2)}$  est donnée en annexe D. Afin de déterminer  $\Delta\nu_{horl.}^Q$ , nous devons déterminer le profil spatial du champ magnétique, que les atomes voient au cours du temps. La méthode employée consiste à utiliser les atomes eux-mêmes comme sonde de champ magnétique, en mesurant le déplacement de fréquence de la transition  $|F = 1, m_F = +1\rangle \rightarrow |F = 2, m_F = +1\rangle$ , linéaire en champ magnétique. Sur cette transition, le déplacement de fréquence de l'horloge est plus sensible au champ magnétique et à ses fluctuations; il est donné par :

$$\Delta\nu_{horl.}^L = \frac{1}{T_{eff}} \int_0^{T+2\tau} K_Z^{(1)} \times B(t)g(t)dt \quad (3.2)$$

où l'exposant "L" rappelle qu'il s'agit du déplacement linéaire de fréquence. La constante  $K_Z^{(1)}$  est donnée en annexe D. La mesure du déplacement de fréquence  $\Delta\nu_{horl.}^L$  est faite en balayant la fréquence micro-onde autour de la transition  $|F = 1, m_F = +1\rangle \rightarrow |F = 2, m_F = +1\rangle$ . On observe alors un système de franges de Ramsey dont il suffit de pointer la frange centrale, centrée sur la fréquence de transition.

En faisant varier la hauteur de lancement  $H$ , on mesure le profil de la valeur moyenne de  $B$  sur la trajectoire du nuage. Plus précisément, il s'agit en fait de la valeur du champ  $B$  pondérée par la fonction  $g(t)$  et moyennée sur la trajectoire du nuage et sur les atomes qui sont finalement détectés, les autres ne contribuant pas au signal d'horloge. Il faut cependant noter que l'essentiel de cette valeur moyenne est accumulée à l'apogée du nuage, comme le montre la figure (3.4). En prenant pour nouvelle variable la position  $z$ , et non plus la date  $t$  ( $z = gt^2/2$  en prenant l'origine à l'apogée du nuage), on peut définir la fonction de sensibilité spatiale  $G(z)$  par :

$$G(z) = \frac{g(z)}{\sqrt{2gz}} \frac{Z_{eff}}{T_{eff}} \quad \text{où} \quad Z_{eff} = \int_0^H g(z)dz \quad (3.3)$$

On a alors :

$$\Delta\nu_{horl.} = \frac{2}{Z_{eff}} \int_0^H \Delta\nu_{at}(z)G(z)dz \quad (3.4)$$

En prenant pour nouvelle origine le chapeau inférieur de la cavité (cf. figure (3.4)), on constate effectivement que  $G(z)$  diverge à l'apogée ( $z = H$ ) comme  $1/\sqrt{2g(H-z)}$ . Le profil de  $\Delta\nu_{horl.}^L$  en fonction de la hauteur de lancement reflète donc relativement bien le profil de champ magnétique, et ceci d'autant mieux que le champ magnétique  $B(z)$  est homogène.

### Ordre de grandeur

Notons  $\bar{B}$  la valeur moyenne du champ pour une hauteur de lancement donnée.

$$\bar{B} = \frac{1}{T+2\tau} \int_0^{T+2\tau} B(t)dt$$

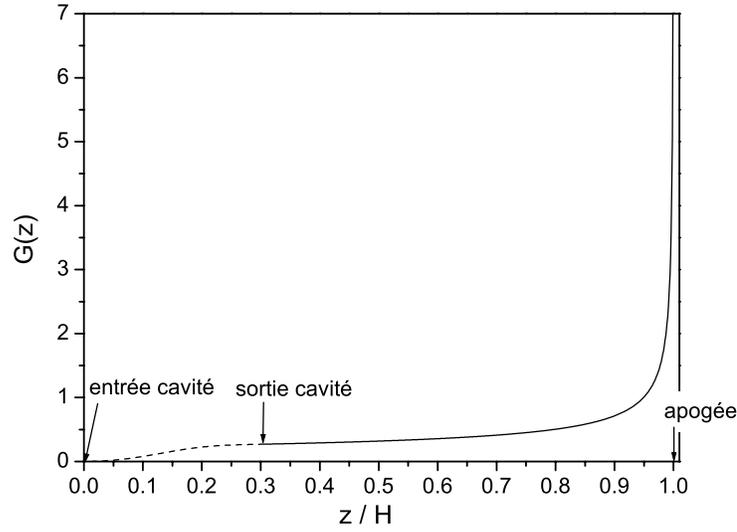


FIG. 3.4 – Fonction de sensibilité spatiale  $G(z)$ . La fonction est symétrique par rapport à l'apogée  $z = H$  de la trajectoire du nuage. On a pris  $T = 10\tau$ , et on a représenté la position de la cavité sur l'axe des abscisses. La divergence de  $G(z)$  à l'apogée n'est pas infinie en pratique, à cause du lissage par la taille finie du nuage.

Le déplacement de fréquence sur la transition  $|F = 1, m_F = 0\rangle \rightarrow |F = 2, m_F = 0\rangle$  s'écrit alors, au 1<sup>er</sup> ordre en perturbation  $\delta B$  :

$$\Delta\nu_{horl.}^Q = \frac{1}{T_{eff}} \int_0^{T+2\tau} K_Z^{(2)} \times \bar{B}^2 \left( 1 + 2 \frac{(\delta B)(t)}{\bar{B}} \right) g(t) dt \quad (3.5)$$

La perturbation de fréquence induite par les perturbations  $\delta B$  sont donc :

$$\delta(\Delta\nu_{horl.}^Q) = 2K_Z^{(2)}\bar{B} \times \frac{1}{T_{eff}} \int_0^{T+2\tau} (\delta B)(t)g(t)dt = 2 \frac{K_Z^{(2)}}{K_Z^{(1)}}\bar{B} \times \delta(\Delta\nu_{horl.}^L) \quad (3.6)$$

Dans l'horloge *Rb*, nous appliquons un champ directeur moyen de 0.5 mG. Les déplacements correspondants de fréquence valent alors, en valeur relative,  $\Delta\nu_{horl.}^Q/\nu = 2.1 \times 10^{-14}$  et  $\Delta\nu_{horl.}^L/\nu = 10^{-7}$ .

Considérons le système de franges linéaire en champ  $B$ . Supposons que l'incertitude de pointé sur le sommet de sa frange centrale soit largement inférieure à la largeur d'une frange ( $\sim 2$  Hz de pied de frange) de sorte que l'on soit capable de détecter une variation de la position de cette frange de 2 Hz pour une variation de hauteur de lancement de 1 cm. Ceci correspond à un gradient de champ de  $1.4 \mu\text{G} \cdot \text{cm}^{-1}$ , agissant essentiellement au sommet de la trajectoire du nuage, qui a alors un diamètre de l'ordre de 1 cm. Les atomes qui seront finalement détectés occupent en fait un volume plus petit, de diamètre  $\sim 6$  mm ; la

perturbation utile de champ magnétique est donc  $\sim 0.9 \mu\text{G}$ , et la perturbation induite sur le déplacement de la fréquence d'horloge est alors de  $\sim 7 \times 10^{-17}$ .

Il arrive que le système de franges linéaire en champ ne soit ni très contrasté ni très symétrique (on verra plus loin que c'est le cas pour l'horloge *Rb*). On peut alors avoir des difficultés à pointer la frange centrale. Une incertitude de 1 frange (2 Hz) se traduit dans ce cas par une incertitude de  $1.4 \mu\text{G}$  sur le champ magnétique, et donc à une incertitude de  $1.2 \times 10^{-16}$  sur le déplacement de fréquence  $\Delta\nu_{horl.}^Q$ .

### Homogénéisation du champ magnétique

Deux couches extérieures de blindages, séparées de  $\sim 2 \text{ cm}$ , atténuent d'un facteur  $\sim 100$  la composante longitudinale du champ magnétique extérieur : champ terrestre et fluctuations induites par les lignes de mètres (100 mG pic à pic). 4 bobines régulièrement espacées ((9) sur la photographie (3.2)) compensent le champ résiduel. Elles servent par ailleurs à compenser en temps réel les fluctuations résiduelles de champ liées aux mètres. Ces fluctuations sont détectées par une sonde longitudinale (12) placée sur l'axe de la fontaine, au-dessus du tube à vide. Une autre sonde située au niveau de la zone de capture y enregistre les fluctuations de champ, que l'on trouve atténuées d'un facteur  $\sim 30$  en présence d'asservissement. La réjection des fluctuations au niveau de la zone de vol est probablement meilleure. Par ailleurs, deux blindages intérieurs cylindriques, séparés de  $\sim 2 \text{ cm}$ , atténuent à nouveau d'un facteur  $\sim 100$  les fluctuations de champ longitudinal, qui atteignent ainsi un niveau sub- $\mu\text{G}$  dans la zone de vol des atomes.

On crée alors un champ magnétique directeur de  $0.5 \text{ mG}$  dirigé vers le bas à l'aide d'un solénoïde à double hélice<sup>1</sup>. Ce solénoïde est enroulé sur un tube en aluminium, dont le centrage et la verticalité sont ajustés sur toute la hauteur du tube à vide de l'horloge. La dégénérescence des raies des transitions  $\pi$  est ainsi levée, et les raies linéaires en champ, voisines de la transition d'horloge  $|F = 1, m_F = 0\rangle \rightarrow |F = 2, m_F = 0\rangle$ , sont déplacées de  $\sim 700 \text{ Hz}$  de part et d'autre.

La longueur des blindages intérieurs est ajustée de sorte que leurs chapeaux soient en contact mécanique avec le bout du solénoïde : c'est donc virtuellement un solénoïde infini que voient les atomes. Afin de compenser les effets de bord liés aux trous de passage des atomes et du câble micro-onde dans les chapeaux, deux bobines de compensation ont été enroulées aux bouts du solénoïde. De plus, à chaque entrée de blindage, on a disposé une bobine de compensation permettant d'éviter les annulations du champ magnétique, susceptibles de provoquer des transitions de Majorana. Enfin, 3 paires de bobines verticales (10), sur toute la hauteur de la fontaine et à l'intérieur des blindages extérieurs, permettent de compenser d'éventuelles composantes transverses de champ.

---

<sup>1</sup>Les deux hélices sont contrariées de sorte que la composante du champ orthogonale à l'axe vertical, générée par le courant dans l'hélice montante, soit compensée par la composante générée dans l'hélice descendante.

### Déplacement lié au rayonnement thermique ambiant

Il s'agit là encore d'homogénéiser le mieux possible la température dans la zone d'interrogation. Soit  $\mathcal{T}(t)$  la température du rayonnement équivalent au corps noir vue par les atomes à l'instant  $t$  de leur vol balistique au-dessus de la cavité. Le déplacement instantané de fréquence a pour expression :

$$\delta\nu_{at}(t) = K_{BB} \times \left(\frac{\mathcal{T}(t)}{300}\right)^4 \quad (3.7)$$

où on a négligé les termes d'ordre supérieurs en  $(\mathcal{T}/300)^6$ , et où  $\mathcal{T}$  est exprimé en kelvins. On trouvera la valeur de la constante  $K_{BB}$  en annexe D. De même que précédemment, le déplacement de la fréquence d'horloge s'écrit :

$$\Delta\nu_{horl} = \frac{1}{T_{eff}} \int_0^{T+2\tau} K_{BB} \times \left(\frac{\mathcal{T}(t)}{300}\right)^4 \times g(t) dt \quad (3.8)$$

La température de l'expérience est contrôlée à l'aide d'une résistance de platine en bon contact thermique avec les blindages intérieurs. La température de la salle est par ailleurs régulée à l'aide d'un système de climatisation, autour de 23 °C. On considère que 2.5 K est un majorant de l'amplitude des fluctuations de température de l'expérience. A 23 °C, le déplacement relatif de fréquence correspondant au rayonnement thermique est de  $-1.2 \times 10^{-14}$  et une incertitude de 2.5 K sur la température induit une incertitude de  $\sim 4 \times 10^{-16}$  sur ce déplacement de fréquence.

Ce système de contrôle et de régulation de la température était suffisant pour la réalisation d'une horloge avec une exactitude de  $10^{-15}$ . Il est nettement insuffisant pour une horloge à  $10^{-16}$ , et nous verrons comment nous avons porté plus d'attention sur ce problème sur l'horloge *RbCs*.

### 3.3.2 La cavité micro-onde

La cavité micro-onde est une cavité cylindrique à section carrée (longueur  $L = \text{diamètre } 2R$ ), réalisée en cuivre OFHC<sup>2</sup> à l'atelier de mécanique de l'Observatoire de Paris. La rugosité des surfaces intérieures est la meilleure que l'on puisse obtenir par usinage mécanique (de l'ordre de 1  $\mu\text{m}$  pic à pic).

Le mode dominant dans cette cavité est le mode TE011. On a tracé la carte du champ magnétique correspondant sur la figure (3.5) dans le plan équatorial et dans un plan méridien. Son expression est donnée au § 4.4.

Dans une cavité parfaitement cylindrique, le mode TE011 est dégénéré avec le mode TM111; leur fréquence est donnée par :

$$\nu_r = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{x_{11}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \quad (3.9)$$

où  $x_{11} \simeq 3.832$  est le 1<sup>er</sup> zéro de la fonction de Bessel d'ordre 1. Mais les deux modes sont orthogonaux. On utilise cette propriété pour lever leur dégénérescence. A cet effet, la cavité est prolongée de chaque côté par un tronçon de guide coaxial (cf. figure (3.6)), dont le mode se couple bien au mode TM111 (ils ont la même structure). Le guide co-axial modifie donc le volume du mode TM111,

<sup>2</sup>"Oxygen Free High Conductivity" ; cuivre d'une très grande pureté, non magnétique.

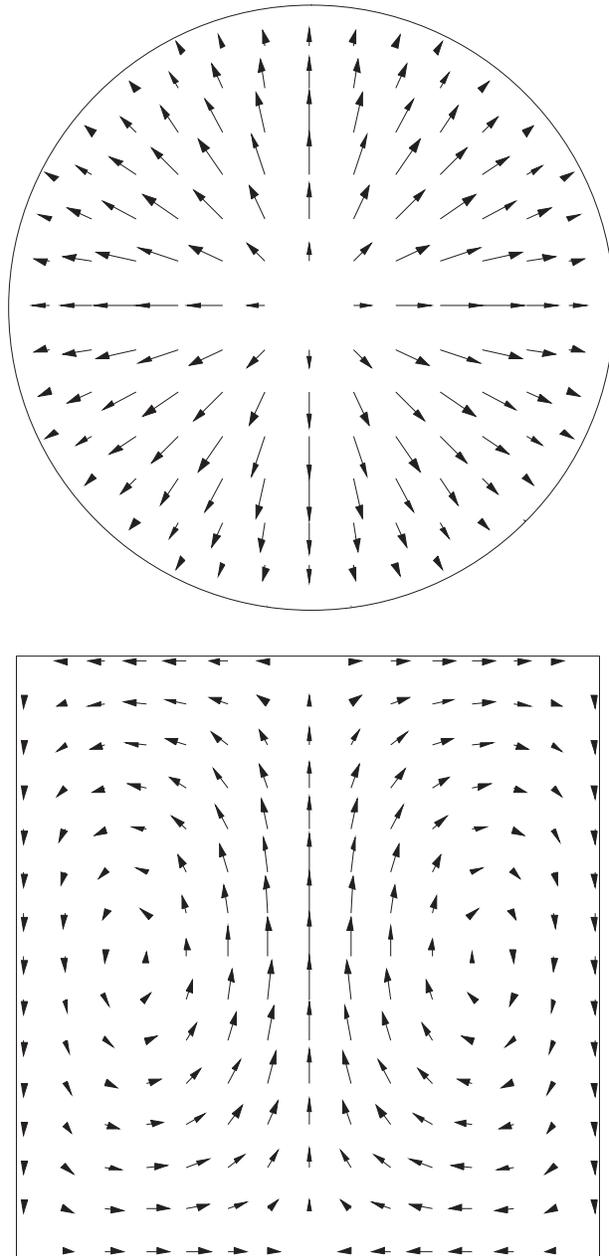


FIG. 3.5 – Cartes du champ magnétique du mode  $TE_{011}$  de la cavité micro-onde cylindrique, dans le plan du chapeau supérieur (figure du haut) et dans un plan méridien (figure du bas).

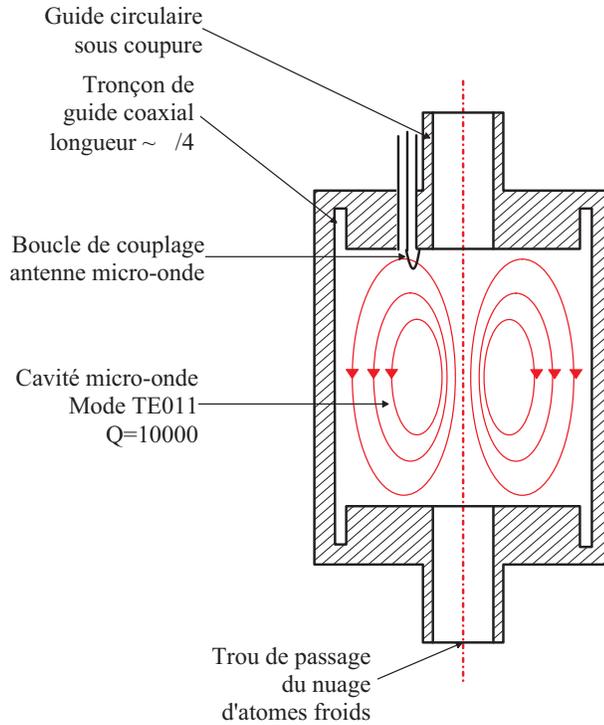


FIG. 3.6 – Coupe schématique axiale de la cavité cylindrique de la fontaine Rb.

ce qui a pour effet de déplacer sa fréquence de  $\sim 100$  MHz. De plus, ce guide co-axial modifie localement les lignes de courant, apportant ainsi des pertes supplémentaires qui ont pour effet de diminuer le facteur de qualité de ce mode à une valeur inférieure à 1000.

Au contraire, les lignes de courant du mode TE011 ne sont pas coupées par le guide co-axial : le champ électrique est nul sur les parois des chapeaux, de même que les courants. De plus, le mode ne se couple pas au mode du guide co-axial, d'une part parce qu'ils n'ont pas la même structure, et d'autre part parce la longueur du tronçon de guide est de l'ordre de  $\lambda_{guide}/4 \sim 10$  mm. Le mode du guide co-axial a donc un zéro de champ dans le plan du chapeau de la cavité (c'est donc localement un court-circuit). Le volume du mode TE011 et sa fréquence ne sont donc pas modifiées par la présence du guide co-axial et son facteur de qualité ( $Q \simeq 10000$ ) n'est pas dégradé.

L'injection du champ externe est réalisée au moyen d'un câble co-axial et d'une petite boucle de couplage. Un trou de diamètre 3.6 mm, ajusté au diamètre de la gaine du câble co-axial, est réalisé dans le chapeau supérieur, à  $\sim 20$  mm de l'axe. Il définit avec l'axe un plan méridien, perpendiculaire au plan de la boucle de couplage. La gaine du câble co-axial est soudée dans ce trou. La boucle elle-même, de diamètre  $\sim 2$  mm, est réalisée en ramenant l'âme et la soudant sur le chapeau.

Deux trous de diamètre 10 mm sont percés dans les chapeaux de la cavité, sur l'axe. Ils permettent le passage des atomes. Ces trous sont prolongés à l'extérieur de la cavité par des guides circulaires sous coupure : le rayon de 10 mm est tel

qu'aucun mode ne peut s'y propager. La longueur de ces guides est calculée pour que le mode évanescent ayant l'atténuation la plus faible soit atténué de 120 dB.

### 3.3.3 Manipulation des atomes froids

#### La zone de capture

Comme on l'a déjà mentionné, la zone de capture est localisée à l'intersection de 6 faisceaux lasers orientés suivant les axes d'un trièdre orthonormé. Les angles d'orientation de ces faisceaux par rapport à la verticale et les uns par rapport aux autres sont réalisés par usinage numérique avec une précision de  $\sim 2 \times 10^{-4}$  rad. La direction  $(1, 1, 1)$  de ce trièdre est orientée selon la verticale avec une incertitude de  $\sim 2 \times 10^{-4}$  rad au moyen d'un niveau à bulle. Ces tolérances assurent le centrage du nuage au 1<sup>er</sup> passage et au 2<sup>e</sup> passage sur l'axe de la cavité de Ramsey à une fraction de millimètre près.

Les faisceaux lasers sont issus de collimateurs réalisés à l'atelier de mécanique de l'Observatoire de Paris. Chaque collimateur est constitué d'une part d'un système permettant de connecter et de centrer une fibre optique. Chaque fibre se termine en effet par un connecteur vissable FC standard. L'embout du collimateur permet aussi d'orienter l'axe polarisant de la fibre relativement à la géométrie de la zone de capture. D'autre part, un doublet achromatique, de focale 180 mm et de position réglable dans le tube du collimateur, permet de transformer le faisceau divergent issu de la fibre en un faisceau gaussien "parallèle" de diamètre 26 mm à  $1/e^2$ . La planéité du front d'onde en sortie de collimateur est égale à une fraction de  $\lambda$ . Le collimateur a de plus été conçu pour pouvoir passer facilement de la configuration "mélasse" à la configuration piège magnéto-optique. Dans le 1<sup>er</sup> cas, les polarisations sont linéaires, les faisceaux contra-propageants ayant des polarisations perpendiculaires ("lin $\perp$ lin"). Dans le 2<sup>e</sup> cas, les polarisations sont circulaires (" $\sigma_+ - \sigma_-$ "). Une douille permet d'intercaler, entre le bout de la fibre et le doublet, soit un cube polariseur dans le 1<sup>er</sup> cas, soit une lame  $\lambda/4$  dans le 2<sup>e</sup> cas.

Sur l'une des paires de faisceaux contra-propageants, on a disposé deux bobines refroidies à l'eau, permettant de générer au niveau de la zone de capture un gradient de champ magnétique de  $\sim 2 \text{ G.cm}^{-1}$ .

#### La séquence temporelle

Ce paragraphe détaille la séquence temporelle de modulation d'intensité et de fréquence des faisceaux lasers utilisés pour manipuler les atomes froids et les lancer.

Que l'on soit en configuration "mélasse" ou piège magnéto-optique, le refroidissement et la capture des atomes nécessitent deux lasers avec des fréquences différentes. L'un, appelé "laser de refroidissement", est accordé sur la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  de la raie D2 (cf. figure (3.7)). Cette transition est utilisée parce qu'elle est cyclique : les règles de sélection sur cette transition dipolaire imposent  $\Delta F \leq 1$  ; un atome excité dans  $F' = 3$  se désexcite très rapidement vers le niveau  $F = 2$ , et uniquement vers ce niveau. Comme le laser est accordé sur la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ , la probabilité d'excitation depuis le niveau  $F = 2$  est maximale vers le niveau  $F' = 3$ , et vaut au maximum  $6 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$  (à

résonance, et à saturation  $s \gg 1$ ). Le taux d'excitation vers les raies voisines n'est cependant pas interdit : il vaut  $4.5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$  vers le niveau  $F' = 2$ , et  $1.7 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$  vers le niveau  $F' = 1$ , et les constantes de temps associées sont très courtes devant la durée de la phase de capture, de l'ordre de 850 ms. Une fois excité vers ces niveaux, l'atome peut se désexciter vers  $F = 1$ , et se trouve alors exclu du processus de refroidissement. Pour remédier à ce problème, on utilise un deuxième laser, appelé laser "repompeur", qui permet de ramener les atomes du niveau  $F = 1$  vers le cycle de refroidissement. Le laser repompeur est accordé par exemple sur la transition  $F = 1 \rightarrow F' = 2$  de la raie D2, ou encore sur la transition  $F = 1 \rightarrow F' = 2$  de la raie D1. Il excite les atomes de  $F = 1$  vers un niveau tel qu'il a ensuite une probabilité non-nulle de se désexciter vers  $F = 2$ .

Le laser de refroidissement alimente les 6 fibres optiques. La puissance laser par faisceau, en sortie de fibre, est de l'ordre de 20 mW. Le laser repompeur est superposé au faisceau du laser de refroidissement dans 2 des 3 fibres des faisceaux "descendants". Il illumine la zone de capture pendant toute la séquence de manipulation des atomes froids avec une intensité et une fréquence constantes.

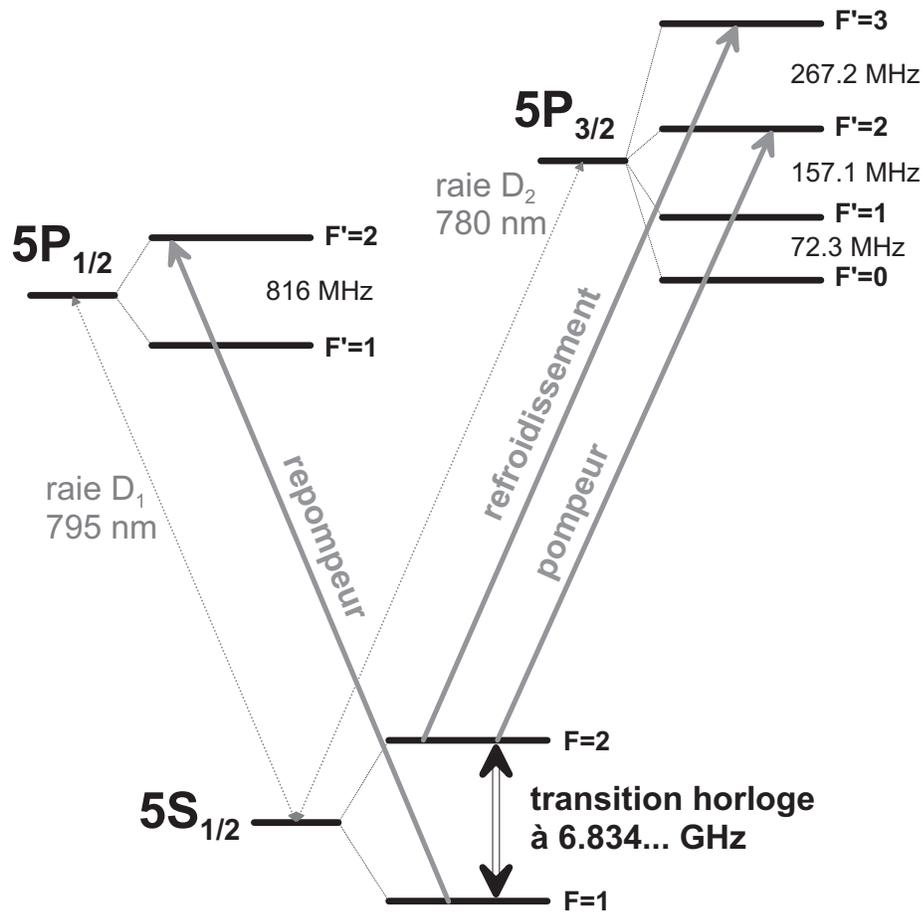


FIG. 3.7 – Niveaux d'énergie du  $^{87}\text{Rb}$  utiles pour la manipulation des atomes froids dans la fontaine.

Lorsqu'on utilise un piège magnéto-optique, la séquence temporelle de manipulation des atomes comporte 4 phases. La figure (3.8) résume ces 4 phases en indiquant les variations d'intensité et de fréquence du laser de refroidissement.

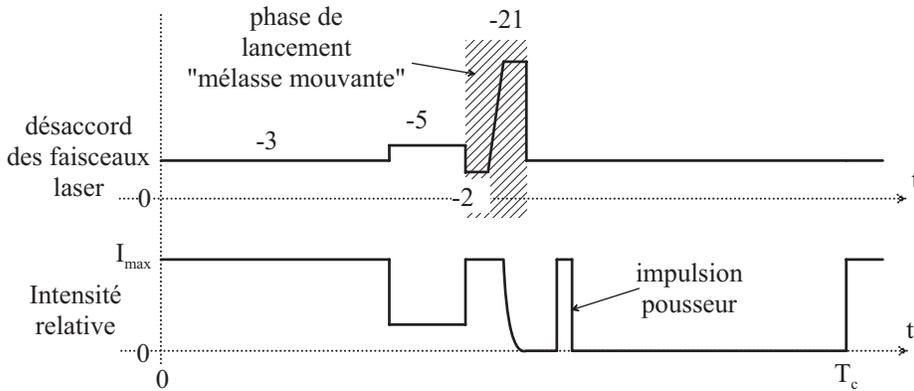


FIG. 3.8 – Séquence temporelle de manipulation des atomes au cours d'un cycle d'horloge. Pendant la phase de lancement, en plus des désaccords indiqués, les faisceaux montants sont désaccordés de  $+\delta\nu_{\text{lancement}}$ , et les faisceaux descendants de  $-\delta\nu_{\text{lancement}}$ . Le refroidissement a donc lieu dans un référentiel en mouvement vers le haut.

1. Phase " $-3\Gamma$ " de capture : la fréquence des 6 faisceaux de refroidissement est accordée à  $\sim -3\Gamma$  de la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  ( $\Gamma/2\pi = 6$  MHz est la largeur naturelle de la transition). Ce désaccord est en fait ajusté finement autour de cette valeur de sorte à optimiser le nombre d'atomes capturés dans le référentiel du laboratoire. L'intensité des faisceaux de refroidissement est maximale; elle est égale à tout ce que peut fournir le banc optique, et vaut, sur l'axe, et pour chaque faisceau, 3 à 5 fois l'intensité de saturation  $I_{\text{sat}}$ . Cette phase a une durée de 100 ms à 1000 ms (appelé "temps de chargement") selon le nombre d'atomes que l'on veut capturer. Au cours de cette phase, un courant de 10 A sous 30 V circule dans les bobines du piège magnéto-optique. Le nombre d'atomes croît au cours du temps selon une loi exponentielle, avec une constante de temps de l'ordre de 1 s. On estime cette constante de temps en observant la fluorescence émise par le nuage en formation à travers l'une des fenêtres de la boule en titane<sup>3</sup>. A la fin de cette phase, et pour un temps de chargement de  $\sim 1000$  ms, le nuage a un diamètre typique de 3 mm à  $1/\sqrt{e}$ . A la fin de cette phase, on coupe le courant dans les bobines du piège.
2. Phase  $-5\Gamma$  de mélasse optique : cette phase est nécessaire afin de permettre au champ magnétique de s'atténuer et de se stabiliser. Pour atteindre le régime stationnaire où les fluctuations ne dépassent pas quelques  $100\mu\text{G}$ , une durée de 200 ms est nécessaire. Cette constante de temps particulièrement élevée est due au fait que les blindages magnétiques, proches des bobines du piège, se comportent comme une "self" extraordinaire. Pendant cette phase, on cherche à minimiser la diffusion spatiale

<sup>3</sup>Lorsqu'on se place dans l'obscurité, la fluorescence du nuage, qui a lieu à 780 nm, est visible à l'œil nu (rouge profond, en limite de sensibilité de l'œil humain).

des atomes du nuage. Pour cela, les lasers de refroidissement sont accordés à  $\sim -5\Gamma$  et leur intensité est atténuée. L'éclairement est de l'ordre  $\sim I_{sat} = 1.65 \text{ mW.cm}^{-2}$  au centre de chaque faisceau.

3. Phase  $-2\Gamma$  de lancement : au cours de cette phase, on communique aux atomes leur vitesse initiale dans la fontaine. Pour cela, on désaccorde les 3 faisceaux du haut (faisceaux "descendants") de  $-\delta\nu$  et les 3 faisceaux du bas (faisceaux "montants") de  $+\delta\nu$ . On remarque alors que le référentiel dans lequel on retrouve une configuration de refroidissement en mélasse (6 faisceaux de même fréquence) est le référentiel ayant une vitesse verticale  $v$  correspondant au décalage Doppler

$$\delta\nu = \frac{\nu}{c} \times \frac{v\sqrt{3}}{3}$$

Par exemple, pour  $\delta\nu = 2.59 \text{ MHz}$ , le référentiel de refroidissement en mélasse a la vitesse  $v = 3.5 \text{ m.s}^{-1}$  vers le haut. Cette technique est appelée "technique de la mélasse en mouvement" [35]. L'efficacité de lancement est optimisée en ajustant le désaccord des faisceaux de refroidissement autour de  $-2\Gamma$ , dans le référentiel en mouvement (désaccord  $+\delta\nu - 2\Gamma$  pour les faisceaux descendants, et  $-\delta\nu - 2\Gamma$  pour les faisceaux montants). L'éclairement au centre des faisceaux est maximal, afin de diffuser le maximum de photons en très peu de temps. Cette phase a une durée de  $\sim 2 \text{ ms}$ .

4. Phase " $-21\Gamma$ " de refroidissement adiabatique : la phase précédente a pour corollaire d'accroître l'énergie cinétique moyenne des atomes. Pour remédier à cela, les faisceaux de refroidissement sont désaccordés progressivement, toujours dans le référentiel en mouvement, jusqu'à  $\sim -21\Gamma$ , tandis que l'éclairement au centre est atténué à  $\sim I_{sat}/2$  par faisceau. On sait en effet que les mécanismes de refroidissement à base de gradient de polarisation conduisent, à faible éclairement  $I$  et large désaccord  $\delta$ , à une température d'équilibre qui varie comme  $I/\delta$  [122]. Cette phase dure  $\sim 2 \text{ ms}$  pendant lesquelles le nuage d'atomes froids, lancé à  $3.5 \text{ m.s}^{-1}$ , se déplace dans les faisceaux de  $\sim 7 \text{ mm}$ . Finalement, la puissance des faisceaux est annulée en  $\sim 200 \mu\text{s}$  au moyen d'interrupteurs mécaniques. Le profil temporel d'atténuation finale de la puissance lumineuse correspond à la coupure progressive des faisceaux gaussiens par le bord tranchant de l'interrupteur mécanique. Le faisceau repompeur est coupé quelques millisecondes plus tard.

Cette dernière phase correspond à l'ouverture progressive (on dira "adiabatique") des pièges lumineux. Dans l'espace des phases, cela revient à réduire la dispersion en impulsions en augmentant la dispersion en positions des fonctions d'onde atomiques, localisées dans les puits de potentiel lumineux. La distribution des vitesses atomiques obtenue à la fin de la séquence temporelle est nettement non-gaussienne. Elle présente des "ailes" qui sont bien décrites par un modèle de type  $\mathcal{L}^b$ , c'est à dire du type

$$p(\vec{v}) = \frac{\beta}{\left(1 + \frac{\|\vec{v}\|^2}{v_c^2}\right)^b}$$

où  $b$  est un réel, et  $v_c$  est une vitesse. Cette distribution sera étudiée plus en détail dans le chapitre 4, et on mettra alors en évidence son importance

particulière pour un calcul correct de la densité moyenne atomique dans la fontaine. Notons cependant que les deux paramètres de la distribution de vitesses,  $b$  et  $v_c$ , sont liés à la profondeur relative des puits de potentiels lumineux, obtenus à la fin de la phase de refroidissement adiabatique, par rapport à l'énergie de recul des atomes [123]. La température effective définie à partir de la distribution gaussienne approchant au mieux la distribution de vitesses est de  $\sim 1.4\mu\text{K}$ , ce qui correspond à une vitesse rms de  $\sim 2v_{rec}$ .

### La sélection

A l'issue du lancement, les atomes du nuage se trouvent dans un mélange statistique équi-probable des sous niveaux Zeeman du niveau  $F = 2$ . Il est possible de faire fonctionner l'horloge dans cette configuration, mais seul  $1/5^{\text{e}}$  des atomes réaliseront effectivement l'interaction de Ramsey : ceux initialement dans l'état  $|F = 2, m = 0\rangle$ . Plusieurs sources d'incertitudes peuvent dégrader la stabilité de l'horloge dans cette configuration (le bruit de détection notamment) et son exactitude (transitions de Majorana, "Ramsey et Rabi pulling", etc...). Cette configuration de préparation initiale des atomes est représentée sur la figure (3.9) (configuration (1)).

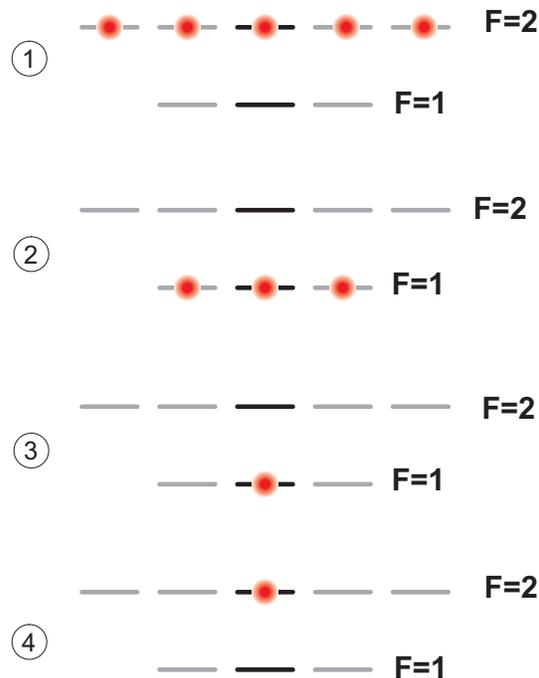


FIG. 3.9 – Diverses configurations de préparation des atomes avant le début de l'interaction de Ramsey.

Il est possible aussi de préparer les atomes dans un mélange statistique équi-probable des sous-niveaux Zeeman du niveau  $F = 1$  (configuration (2)). Pour cela, juste après la phase " $-21\Gamma$ ", on applique une impulsion lumineuse de faisceau dit "pompeur" : ce faisceau, accordé sur la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 2$ ,

joue le rôle inverse du faisceau repompeur, qui est alors éteint. Le faisceau pompeur favorise le pompage optique des atomes de  $F = 2$  vers  $F = 1$ . Une impulsion lumineuse de faisceau laser dit "pousseur", accordé sur  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ , "nettoie" physiquement les états de  $F = 2$  des atomes qui y seraient éventuellement restés, en les poussant par pression de radiation<sup>4</sup>. Pour les mêmes raisons que dans la configuration précédente, les performances de l'horloge ne sont pas optimales dans cette configuration.

La situation optimale de fonctionnement de l'horloge est celle où les atomes abordent l'interaction de Ramsey dans un état pur  $m_F = 0$ . Deux situations sont possibles : préparation dans  $|F = 1, m = 0\rangle$  (3), ou bien préparation dans  $|F = 2, m = 0\rangle$  (4).

Le cas de préparation dans  $|F = 1, m = 0\rangle$  est obtenu en partant de la configuration (1) ( $|F = 2, \text{ tous } m_F\rangle$ ), puis en transférant les atomes de  $|F = 2, m = 0\rangle$  vers  $|F = 1, m = 0\rangle$  à l'aide d'une impulsion  $\pi$  micro-onde à 6.834682... GHz. Dans l'horloge *Rb*, cette impulsion est générée à l'aide d'une petite antenne convenablement placée et orientée près d'un hublot de la boule de capture. Elle est appliquée juste après la phase  $-21\Gamma$  et dure une dizaine de millisecondes. Le faisceau pousseur décrit précédemment permet ici encore de nettoyer les sous-niveaux de  $F = 2$  des atomes non transférés. Notons que cette méthode de préparation (ou plutôt, de sélection) fait perdre 4/5<sup>e</sup> des atomes initialement refroidis.

Le cas de préparation dans  $|F = 2, m = 0\rangle$  est plus compliqué à mettre en oeuvre dans l'horloge *Rb*. Il nécessite de partir de la situation précédente (3), puis d'effectuer une impulsion  $\pi$  micro-onde. Une dernière impulsion du faisceau de repompeur permet alors de détruire la cohérence micro-onde résiduelle entre  $|F = 1, m = 0\rangle$  et  $|F = 2, m = 0\rangle$ . En pratique, nous n'avons pas réussi à obtenir un état  $|F = 2, m = 0\rangle$  avec une pureté suffisante pour réaliser des mesures pertinentes.

Les configurations de préparation (1), (2) et (3) décrites ci-dessus ont été mises en oeuvre. Elles permettent d'évaluer le déplacement de fréquence induit par les collisions entre atomes froids présents dans divers sous-niveaux Zeeman. La confrontation des résultats de mesure de fréquence dans les situations (3) et (4) permettrait d'évaluer, dans deux configurations indépendantes, le déplacement de fréquence induit par la cavité micro-onde ("cavity pulling"). Théoriquement, cet effet garde la même amplitude mais change de signe d'une configuration à l'autre.

Remarque : il en est de même de l'effet de recul, mais l'amplitude de cet effet est de toutes façons très faible par comparaison au "cavity pulling".

### 3.3.4 La détection des atomes

Lorsqu'ils pénètrent dans la zone de détection, les atomes sont dans l'état  $|\psi\rangle = C_e|e\rangle + C_f|f\rangle$ , où  $|e\rangle = |F = 2, m = 0\rangle$  et  $|f\rangle = |F = 1, m = 0\rangle$  désignent

<sup>4</sup>Le faisceau pompeur est obtenu sur le banc optique par décalage de fréquence du faisceau de refroidissement à l'aide d'un modulateur acousto-optique. Il est superposé dans 2 des 3 fibres optiques aux faisceaux de refroidissement "montants". L'impulsion de faisceau pompeur intervient alors que les atomes sont en mouvement à  $\sim 3.5 \text{ m.s}^{-1}$ . On comprend dans ces conditions qu'une fraction de l'ordre de 2% des atomes de  $F = 2$  ne voient pas le faisceau pompeur parce qu'ils sont déjà sortis de la zone d'intersection des faisceaux. Le faisceau pousseur, lui, est vertical dans l'horloge *Rb*. Il permet donc de "nettoyer" les niveaux de  $F = 2$  à tout instant ultérieur au lancement.

l'état excité et fondamental de la transition d'horloge. Ils traversent d'abord le faisceau supérieur et au cours de cette traversée, l'état  $|\psi\rangle$  est projeté dans l'un des deux états  $|e\rangle$  ou bien  $|f\rangle$ . Le faisceau supérieur permet de compter les atomes projetés dans l'état  $|e\rangle$ , par mesure de la fluorescence qu'ils émettent. Notons  $N_e$  ce nombre. Les atomes projetés dans l'état  $|f\rangle$  rencontrent ensuite le faisceau inférieur qui permet de les compter eux aussi. Notons  $N_f$  leur nombre.

Le système de détection (cf. figure (3.10)) est donc constitué de deux nappes distinctes et horizontales de lumière, d'épaisseur 8 mm, séparées de 15 mm, et de dimension transverse 14 mm. Elles sont générées par un faisceau laser collimaté, polarisé linéairement, de "waist"  $w_0 = 8.67$  mm. Un système de cubes séparateurs de polarisation, de miroirs de renvoi, et une lame quart d'onde, permet de séparer ce faisceau en deux faisceaux d'intensités égales à 5% près, de régler l'écartement et le parallélisme de ces deux faisceaux, et de leur donner une polarisation circulaire ( $\sigma_+$  dans la suite). Ces deux faisceaux sont nommés faisceaux de détection par la suite. Ils sont accordés légèrement au rouge ( $\delta_0 \sim -\Gamma/10$ ) de la transition cyclante  $|F = 2, m = +2\rangle \rightarrow |F' = 3, m' = +3\rangle$ , de sorte à maximiser le signal de fluorescence émis par les atomes lorsqu'ils traversent ces faisceaux, et ainsi minimiser les fluctuations de signal liées aux fluctuations de fréquence du laser de détection.

Une troisième nappe de lumière polarisée  $\sigma_+$  et collimatée, d'épaisseur 2 mm, et accordée sur la transition  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ , est superposée sur la partie supérieure du faisceau inférieur de détection. Ce troisième faisceau est nommé faisceau repompeur par la suite. Il permet de repomper les atomes de l'état  $|F = 1\rangle$  vers l'état  $|F = 2\rangle$  par une succession de cycles absorption-émission spontanée. Ainsi, le faisceau de détection supérieur permet de détecter les atomes se trouvant dans l'état  $|F = 2\rangle$ , tandis que les atomes de  $|F = 1\rangle$  peuvent être repompés puis détectés dans la zone inférieure {repompeur + détection}.

Dans chaque zone de détection, inférieure et supérieure, les photons de fluorescence sont collectés sur une photodiode silicium Hamamatsu *S1337 - 1010BR* de surface  $10 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$  à l'aide d'un système d'imagerie d'ouverture numérique  $\alpha = 19.2^\circ$  (cf. figure (3.11)), de grandissement transverse  $g_y = 0.71$ , et de profondeur de champ 42.3 mm. Pour la saturation sur l'axe  $s_0 = 0.5$  maximale obtenue dans notre cas, et à résonance, le taux d'émission spontanée par atome est de  $6.3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Le nuage ayant une vitesse de  $v_{det.} = -3.827 \text{ m.s}^{-1}$  au niveau de la détection (pour une vitesse de lancement standard de  $3.5 \text{ m.s}^{-1}$ ), le temps de séjour de chaque atome dans chaque fenêtre de détection est de  $\Delta t = 2.1 \text{ ms}$ . Les signaux de fluorescence en fonction du temps, ou "signaux de temps de vol", ont donc l'allure représentée sur la figure (3.12). Ils reflètent la distribution spatiale des atomes à leur traversée dans les faisceaux de détection, "légèrement" convoluée par le profil spatial de saturation des faisceaux de détection. Nous reviendrons en détail sur ce point dans les chapitres 4 et 5.

Les signaux de temps de vol sont ensuite amplifiés puis numérisés à l'aide d'une carte d'acquisition analogique/numérique enfichée sur l'ordinateur. Le calcul de l'aire d'un temps de vol permet de remonter au nombre d'atomes ayant traversé le faisceau de détection correspondant. Notons  $N_e = N_{F=2}$  le nombre d'atomes détectés dans le niveau excité, et  $N_f = N_{F=1}$  le nombre d'atomes

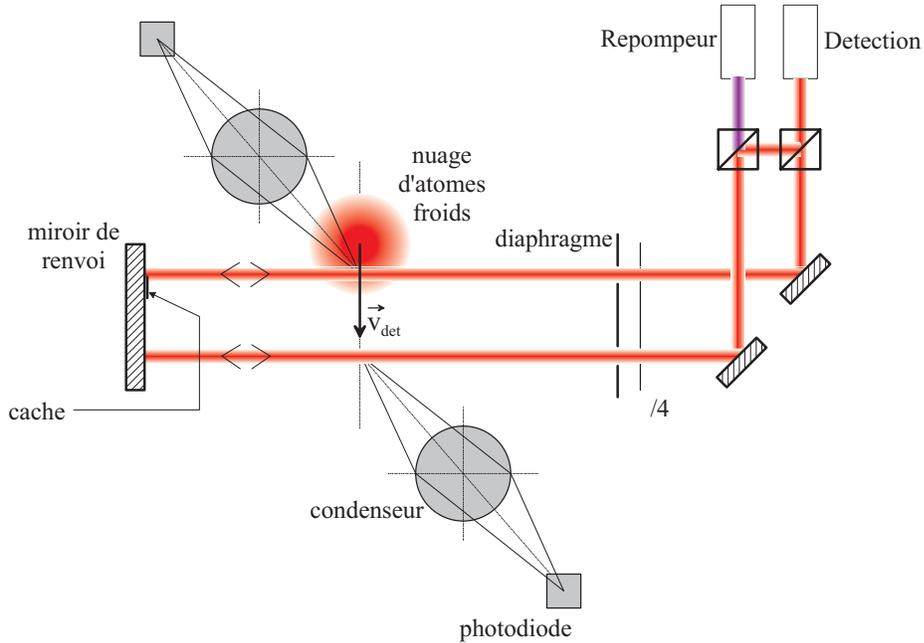


FIG. 3.10 – Schéma du système de détection de la fontaine Rb.

détectés dans le niveau fondamental. Supposons que tous les atomes aient été préparés dans l'état fondamental initialement. La probabilité de transition est alors calculée à partir des signaux de temps de vol numérisés par :

$$P_e = |C_e|^2 = \frac{N_e}{N_e + N_f} \quad (3.10)$$

Rappelons que les deux faisceaux de détection sont issus du même laser. En utilisant l'expression (3.10), on rejette donc les fluctuations d'intensité du laser de détection sur des échelles de temps plus grandes que le temps de transit du nuage entre les deux échelles de temps plus grandes que le temps de transit du nuage entre les deux faisceaux de détection ( $\sim 10$  ms). De plus, en détectant les populations des deux niveaux hyperfins, et en utilisant (3.10), on rejette également les fluctuations du nombre total d'atomes lancés. Nous reviendrons dans la suite de ce chapitre sur les diverses sources de bruit dans la détection, et leur influence sur la stabilité de fréquence de l'horloge.

Quelques raffinements doivent être apportés au système de détection tel qu'il a été décrit jusqu'à présent.

Tout d'abord, un simple calcul d'ordre de grandeur permet de voir que, si les faisceaux lasers de détection sont uniquement des ondes progressives, les atomes acquièrent très rapidement, à leur traversée, une vitesse telle que d'une part ils sortent physiquement de la zone de détection, et d'autre part, par effet Doppler, ils sortent de résonance<sup>5</sup>. Pour éviter cela, un miroir plan rétro-réfléchit les fais-

<sup>5</sup>L'atome est soumis à une accélération  $a = v_{rec} \times \Gamma / 2 \times s_0 / (1 + s_0) = 3.7 \times 10^4 \text{ m.s}^{-2}$ . En supposant qu'il reste à résonance, il se déplacerait donc de  $\Delta y = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = 8 \text{ cm}$ . En supposant au contraire qu'il reste immobile, il acquerrait une vitesse de  $77 \text{ m.s}^{-1}$ , correspondant à un désaccord Doppler de  $104\Gamma$ .

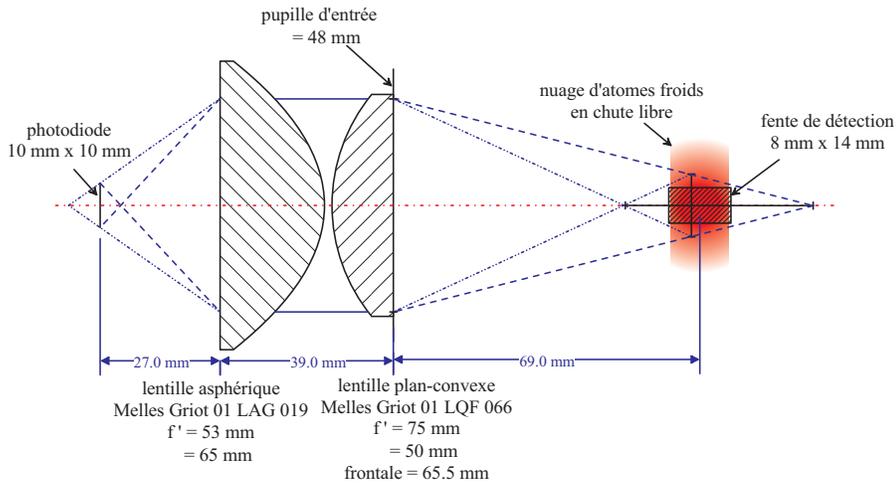


FIG. 3.11 – *Système de collection de la fluorescence émise par le nuage d'atomes froids à son passage dans la détection. On a tenu compte, sans le représenter, du décalage axial des faisceaux par le hublot d'épaisseur 4 mm qui sépare les atomes froids du système optique.*

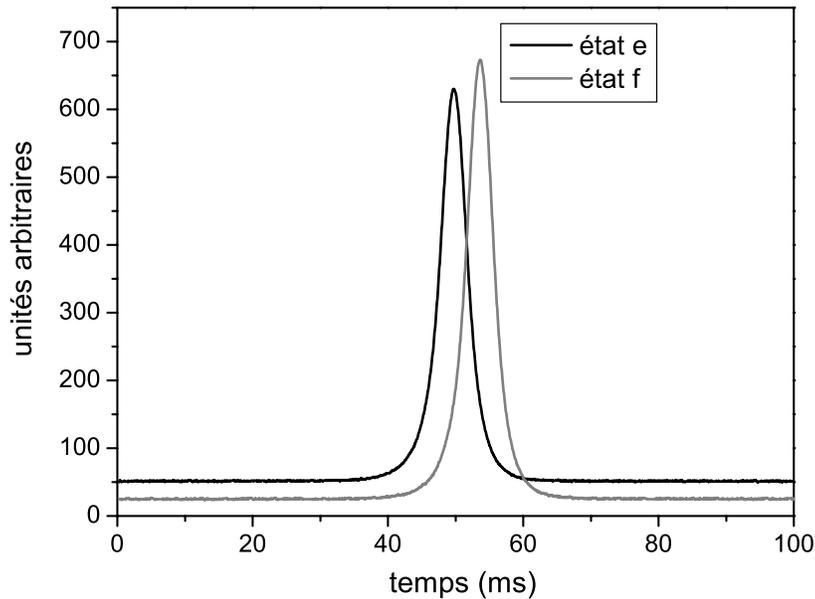


FIG. 3.12 – *Signaux de temps vol expérimentaux. Les atomes dans l'état excité  $|e\rangle$  sont d'abord détectés dans le faisceau supérieur de la détection, tandis que les atomes dans l'état fondamental  $|f\rangle$  sont détectés dans le faisceau inférieur. La différence de niveau entre les lignes de base des deux temps de vol est d'origine purement électronique. Elle ne correspond pas à une fluorescence réelle (aucune vapeur n'est détectée dans cette zone de la fontaine). Les aires de temps de vol sont calculées en prenant en compte les ligne de base respectives de chaque signal de temps de vol.*

ceux de détection et le faisceau repompeur, créant ainsi une onde stationnaire  $\sigma_+ - \sigma_+$  dans chaque zone de détection<sup>6</sup>. En moyenne, les atomes n'acquièrent donc pas de vitesse selon la direction des faisceaux (axe  $y$ ), puisqu'ils absorbent en moyenne autant de photons dans l'onde se propageant vers les  $y$  positifs (notée onde  $+$ ) que dans l'onde contra-propageante (onde  $-$ ). Les processus d'absorption-émission de photons génèrent néanmoins une marche aléatoire des atomes dans l'espace des vitesses. La variance des fluctuations de vitesse n'est pas nulle, ce qui revient à dire que les atomes sont chauffés à leur passage dans les faisceaux de détection. De plus, ce chauffage n'est pas isotrope : il est plus important dans la direction des faisceaux de détection où, en plus des processus d'absorption-émission spontanée, ont lieu des processus d'absorption-émission stimulée. Nous reviendrons à la fin de ce paragraphe sur le calcul de ce chauffage.

Un autre raffinement est lié au fait que les atomes ayant été détectés dans la zone supérieure sont susceptibles d'être à nouveau détectés dans la zone inférieure. Parce qu'ils ont été chauffés en traversant la première zone, et que ce chauffage fluctue d'un cycle à l'autre par suite des fluctuations d'intensité du laser de détection, ils créent des fluctuations sur le temps de vol de la zone inférieure, ce qui détériore la stabilité de l'horloge. Pour éviter cela, on pousse ces atomes par pression de radiation à l'issue de la première zone de détection, en ne conservant que l'une des ondes progressives qui constituaient l'onde stationnaire. A cette fin, un cache de largeur  $\sim 1$  mm a été disposé sur le miroir rétro-réfecteur.

Remarque : la dispersion des vitesses,  $\sigma_{v_z}$ , acquise par chauffage lors de la traversée d'une zone de détection affecte les durées de passage des atomes à travers la fente de détection. Si on suppose que le nuage est initialement "gelé" (distribution de vitesses infiniment fine), la dispersion des durées de passage,  $\sigma_t$ , est obtenue par dérivation de la relation

$$v_{det} \times \Delta t = e$$

où  $e$  est l'épaisseur de la fente de détection,  $v_{det}$  est la vitesse moyenne de passage du nuage d'atomes froids devant la fente de détection, et  $\Delta t$  est la durée moyenne de traversée des atomes dans la nappe lumineuse d'épaisseur  $e$ . On a donc

$$\frac{\sigma_t}{\Delta t} = \frac{\sigma_{v_z}}{v_{det}}.$$

Cette relation peut être traduite en terme de dispersion initiale de vitesses par

$$\sigma_v = \sigma_t \times \frac{v_{det}}{t_{det}} = 1.34 \text{ mm.s}^{-1}$$

où  $t_{det}$  désigne l'instant moyen de passage du nuage dans la zone détection, référencé à l'instant de lancement. La valeur obtenue est à comparer à la dispersion de vitesses effective, qui est de  $10.5 \text{ mm.s}^{-1}$ , et à la dispersion de vitesses fictive liée à l'élargissement géométrique du temps de vol par la fenêtre de détection, qui est de  $3.14 \text{ mm.s}^{-1}$  pour une distribution de vitesses gaussienne (cf. § 4.3.9).

Donnons maintenant un ordre de grandeur au chauffage du nuage atomique lors de son passage dans l'onde stationnaire  $\sigma_+ - \sigma_+$ .

<sup>6</sup>Ceci permet aussi de doubler la saturation de chaque faisceau de détection.

En supposant que l'on puisse décrire chaque onde progressive par une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{y}$ , le coefficient de diffusion en impulsion d'un atome à deux niveaux est donné par [124], p.183 :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{corr.} + \mathcal{D}_{spont.} \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{D}_{spont.}$  correspond aux fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence et s'exprime par :

$$\mathcal{D}_{spont.} = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \frac{\Gamma}{1+s} \quad (3.12)$$

et où  $\mathcal{D}_{corr.}$  traduit les fluctuations d'échanges d'impulsions avec les lasers<sup>7</sup>. Dans notre cas d'onde plane stationnaire, et à résonance :

$$\mathcal{D}_{corr.} = \frac{1}{16} \hbar^2 \Gamma s \times \left( \frac{\vec{\nabla} s}{s} \right)^2 \quad (3.13)$$

avec  $s(z) = 4s_0 \cos^2 kz$ , où  $s_0$  est le paramètre de saturation correspondant à chacune des ondes progressives constituant l'onde stationnaire (cf. annexe B.4). On a donc :

$$\mathcal{D}_{corr.} = \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \sin^2 kz \quad (3.14)$$

Faisons un bilan d'impulsion pendant un intervalle de temps  $\delta t$  donné. Notons  $N_+$  (resp.  $N_-$ ) le nombre de photons absorbés par l'atome dans l'onde + (resp. -) pendant  $\delta t$ . Sa variation  $\delta \vec{p}$  d'impulsion s'écrit :

$$\delta \vec{p} = - \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar \vec{k}_i + (N_+ - N_-) \hbar \vec{k} \quad (3.15)$$

où  $\hbar \vec{k}_i$  représente l'impulsion du  $i^{eme}$  photon de fluorescence. On a  $\overline{\delta \vec{p}} = 0$  puisque  $N_+ = N_-$  et  $\overline{\vec{k}_i} = 0$ . Projetons la relation précédente sur les axes  $x, y, z$  :

$$\delta p_x = - \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar k_{i,x} \quad (3.16)$$

$$\delta p_y = - \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar k_{i,y} + (N_+ - N_-) \hbar k \quad (3.17)$$

$$\delta p_z = - \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar k_{i,z} \quad (3.18)$$

En utilisant le fait que les photons de fluorescence et les photons du faisceau de détection ont des impulsions deux à deux décorréelées dans les trois directions  $x, y, z$ , on trouve que la variance de  $\delta \vec{p}$  s'écrit :

$$\Delta(\delta \vec{p}^2) = \hbar^2 k^2 (\overline{N_+} + \overline{N_-}) + \hbar^2 k^2 \overline{(N_+ - N_-)^2} \quad (3.19)$$

$$= 2\mathcal{D}_{spont.} \delta t + 2\mathcal{D}_{corr.} \delta t \quad (3.20)$$

<sup>7</sup> $\mathcal{D}_{corr.}$  fait intervenir l'intégrale sur le temps  $\tau$  des fonctions de corrélation à deux temps de l'opérateur force radiative  $\langle \vec{F}(\tau) \cdot \vec{F}(0) \rangle$ .

et, selon les trois axes  $x, y, z$  :

$$\Delta(\delta p_x^2) = 2 \frac{\mathcal{D}_{spont.}}{3} \delta t \quad (3.21)$$

$$\Delta(\delta p_y^2) = 2 \frac{\mathcal{D}_{spont.}}{3} \delta t + 2\mathcal{D}_{corr.} \delta t \quad (3.22)$$

$$\Delta(\delta p_z^2) = 2 \frac{\mathcal{D}_{spont.}}{3} \delta t \quad (3.23)$$

Finalement, pour  $s_0 = 0.5$  (saturation maximale en simple passage atteinte dans notre détection), on obtient pour amplitude des coefficients de diffusion  $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_z = \frac{1}{3}\mathcal{D}_{spont.} = 1.13 \times 10^{-48} \text{ m}^2.\text{s}^{-3}$  et  $\mathcal{D}_y = \frac{1}{3}\mathcal{D}_{spont.} + \mathcal{D}_{corr.} = 1.47 \times 10^{-47} \text{ m}^2.\text{s}^{-3}$  (ces coefficients sont en fait modulés spatialement selon  $z$  avec la période  $\lambda/2$ ).

Les fluctuations de vitesse acquises par un atome lorsqu'il a traversé la zone supérieure de détection ont, puisque  $\delta t = 2.1 \text{ ms}$ , pour écart type<sup>8</sup>  $\sigma_{v_x} = \sigma_{v_z} = 47.8 \text{ cm}.\text{s}^{-1}$  et  $\sigma_{v_y} = 1.7 \text{ m}.\text{s}^{-1}$ .

### 3.3.5 Le banc optique Rb

Ce paragraphe décrit la synthèse des faisceaux nécessaires à la manipulation des atomes froids et à leur détection. Cette synthèse est effectuée sur un banc optique de  $90 \times 90 \text{ cm}^2$  relié au corps de l'horloge par 9 fibres optiques mono-modes polarisantes : 6 pour la capture, 2 pour la détection, et 1 pour le faisceau pousseur. Ceci permet de découpler mécaniquement l'alignement des faisceaux sur le banc et leur alignement au niveau de l'horloge. De plus, les fibres se comportent comme de très bons filtres spatiaux, et de très bons polariseurs. Les faisceaux obtenus en sortie sont gaussiens à une très bonne approximation.

#### Les diodes laser et le MOPA

Les sources lasers utilisées sur ce banc sont des diodes lasers à semi-conducteur commerciales fonctionnant autour de 780 nm. Intentionnellement, la facette de sortie du cristal semi-conducteur n'a pas de traitement réfléchissant. Leur largeur spectrale est de l'ordre de 10 à 20 MHz. Elles délivrent une puissance lumineuse de 50 mW pour un courant injecté de  $\sim 80 \text{ mA}$ . Elles comportent un module à effet Peltier en contact avec la diode laser, qui permet de refroidir celle-ci afin d'accorder sa longueur d'onde. Une thermistance en contact thermique avec le boîtier de la diode laser permet, avec le module Peltier, d'asservir la température du semi-conducteur autour de  $10^\circ\text{C}$ , et de centrer la fonction de gain du milieu amplificateur autour de la longueur d'onde souhaitée. Le système d'asservissement en température de la puce laser fait intervenir un contrôleur proportionnel-intégrateur-dérivateur, décrit en détail dans [125]. Il est doublé d'un régulateur proportionnel qui contrôle la température de la boîte contenant le laser. La température de l'ensemble est stabilisée à 0.1 K dans l'environnement du laboratoire.

Nues, ces diodes n'ont pas un fonctionnement suffisamment stable pour la manipulation des atomes froids : leur largeur spectrale est plus élevée que  $\Gamma$ , et elles

<sup>8</sup> La présence d'une onde stationnaire dans la direction  $y$  induit en fait un effet de mélasse 1D et l'apparition d'une force de friction qui limite le chauffage dans cette direction. La vitesse *rms* atteinte en régime Doppler est de  $11.7 \text{ cm}.\text{s}^{-1}$ .

sont très sensibles au moindre retour lumineux ("feedback") lié aux réflexions parasites sur les faces des optiques.

Afin de stabiliser la diode laser et de l'affiner spectralement, on l'insère dans une

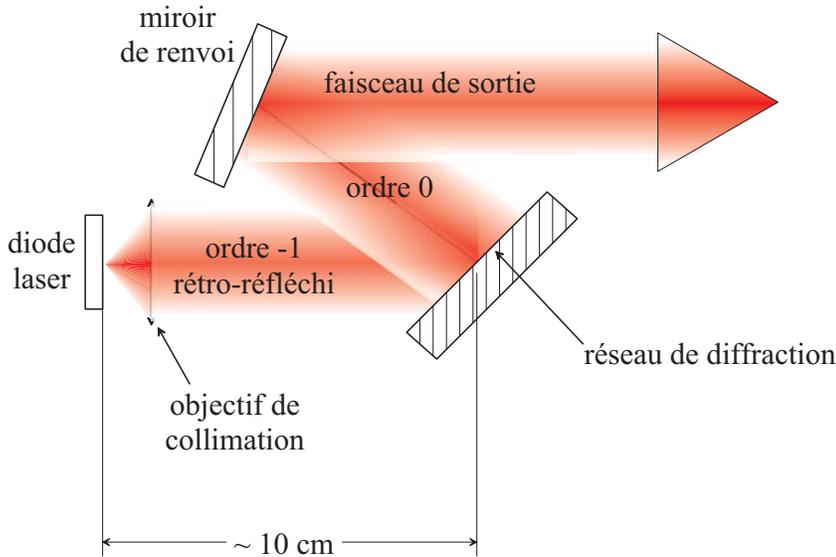


FIG. 3.13 – Schéma de principe de la diode laser en cavité étendue. L'ensemble est monté dans une boîte régulée en température. Ses dimensions sont de l'ordre de  $16 \times 12 \times 8 \text{ cm}^3$ .

cavité étendue (cf. figure (3.13)) de longueur  $\sim 10 \text{ cm}$  : le faisceau est collimaté au moyen d'un objectif de focale  $8 \text{ mm}$  et de diamètre  $8 \text{ mm}$ , et un réseau de diffraction par réflexion rétro-réfléchit l'ordre  $(-1)$  vers la diode laser. L'ordre  $(0)$ , de puissance  $\sim 25 \text{ mW}$ , constitue le faisceau de sortie de la diode en cavité étendue, qui est ensuite mis en forme à travers une paire de prismes anamorphoseurs. La cavité étendue est constituée de la facette arrière de la diode laser et du réseau de diffraction<sup>9</sup>. La largeur spectrale est ainsi abaissée autour de  $\sim 100 \text{ kHz}$ . De plus, le réseau de diffraction sélectionne un mode particulier de la diode nue en créant des pertes pour les autres modes longitudinaux. On stabilise ainsi la diode laser. Le réseau de diffraction est monté sur une cale piézo-électrique, ce qui permet l'ajustement fin de la longueur de la cavité au moyen de la tension appliquée à ses bornes. On peut ainsi ajuster finement la fréquence de la diode en cavité étendue [126].

Les diodes en cavité étendue sont asservies sur la transition voulue du Rb au moyen d'une détection synchrone du signal d'absorption saturée. Le principe de cette méthode est rappelé ici très brièvement. On module la fréquence du laser à  $100 \text{ kHz}$ , avec une profondeur de modulation de quelques  $100 \text{ kHz}$ , en modulant le courant injecté à la même fréquence. Le signal d'absorption saturée détecté est donc lui aussi modulé à  $100 \text{ kHz}$ . En multipliant ce signal, dans un mélangeur,

<sup>9</sup>En fait l'étude détaillée de ce système nécessite la prise en compte du coefficient de réflexion non-nul de la facette avant de la diode laser. Il s'agit alors d'étudier les conditions de résonance d'un système de 3 cavités couplées.

par la même modulation à 100 kHz, et en ne conservant que la composante du signal à basse fréquence, on peut extraire la dérivée du signal d'absorption non modulé. Un système intégrateur permet ensuite de générer un signal de correction correspondant à ce signal d'erreur. Le signal de correction est sommé à une modulation à 100 kHz et le résultat de la somme est appliqué sur l'entrée modulation de courant de la diode laser (on boucle ainsi la boucle d'asservissement). Le signal de correction sur le courant est à nouveau intégré, sommé à une modulation lente ( $\sim 100$  Hz), et appliqué sur la cale piézo-électrique. Ceci permet de contrôler simultanément, et avec des gains indépendants, deux paramètres agissant sur la fréquence de la diode laser : courant et longueur de la cavité étendue. On trouvera plus de détails dans la thèse de G. Santarelli [119].

Le montage précédent peut opérer de manière continue pendant plusieurs années. Il requiert quelques retouches ponctuelles du réglage en rotation du réseau de diffraction à des intervalles de l'ordre du mois. L'injection de la diode est en effet sensible à l'alignement de la cavité étendue, qui est perturbé sur le long terme par les dérives des contraintes mécaniques exercées sur le boîtier de diode laser. Dans des conditions normales, le laser peut rester asservi pendant 10 jours. Il reste sensible aux chocs sur la table optique.

On utilise sur ce banc optique un amplificateur de lumière de type "MOPA" modifié (Monolithic Oscillator Power Amplifier) qui permet d'obtenir dans les conditions optimales 500 mW de puissance lumineuse à 780 nm, partant de quelques milliwatts injectés. Cet amplificateur est obtenu à partir d'un produit commercial de la société SDL, modèle 8630 – *E*, modifié pour être adapté à nos besoins. C'est initialement un oscillateur constitué :

1. d'une puce amplificatrice à semi-conducteur en forme de cornet ("tapered amplifier"), asservie en température et injectée par un courant de l'ordre de 1.5 A,
2. d'un réseau permettant de sélectionner la longueur d'émission de l'oscillateur, dont la cavité est constituée par la facette de sortie de la puce et le réseau,
3. un système de mise en forme du faisceau de sortie, constitué de lentilles cylindriques et d'un filtre spatial.

Dans le système précédent, le réseau a été ôté (ce n'est donc plus un oscillateur), et on injecte directement la puce amplificatrice par le faisceau de sortie d'une diode en cavité étendue décrite précédemment. Le système de refroidissement à air a de plus été remplacé par un système de refroidissement à eau, qui perturbe moins le spectre de sortie de l'amplificateur. La courbe de gain de l'amplificateur est centrée autour de 780 nm au moyen de la température.

### Production des fréquences optiques pour le refroidissement

Le banc optique pour la synthèse des faisceaux optiques utiles au refroidissement est représenté sur la figure (3.14).

#### Organisation générale de la synthèse optique pour le refroidissement.

Les faisceaux de refroidissement sont obtenus en injectant l'amplificateur par la diode en cavité étendue dite "maître", puis en divisant la puissance issue de l'amplificateur en 6 faisceaux, de puissances égales à 2% près. On commence

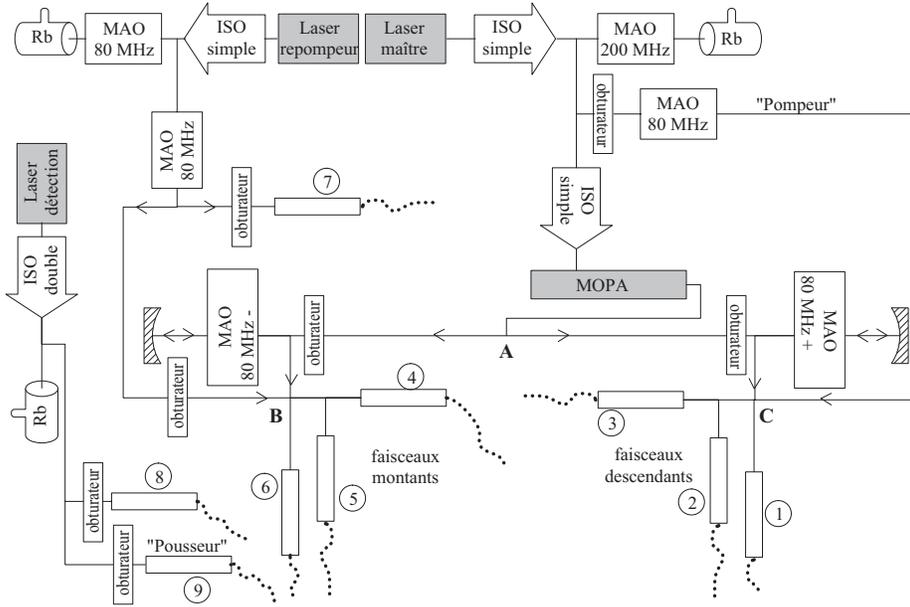


FIG. 3.14 – Schéma du banc optique de la fontaine *Rb*. Ne sont pas représentés les composants optiques usuels tels que cubes polariseurs, lames  $\lambda/4$  et  $\lambda/2$ , miroirs, lentilles ...

par diviser la puissance en deux au niveau d'un cube polariseur (A) ; chacune des voies sera ensuite divisée en 3 faisceaux, couplés dans les fibres optiques : faisceaux "descendants" d'un côté (fibres (1), (2) et (3)), "montants" de l'autre (fibres (4), (5) et (6)). Le faisceau repompeur est produit par un deuxième laser en cavité étendue, et est mélangé au niveau d'un cube polariseur (B) aux faisceaux "montants".

La génération des fréquences nécessaires aux différentes phases de manipulation et de lancement des atomes froids est obtenue de la façon suivante. Notons  $-x\Gamma$  le désaccord des faisceaux de refroidissement au cours de l'une de ces phases. Avant injection dans l'amplificateur de lumière, le faisceau maître est décalé vers le rouge de la quantité  $160\text{ MHz} + x\Gamma$ . Au cours d'un cycle,  $x$  vaut successivement 3, 5, 2 et 21 puis à nouveau 3. Le faisceau en sortie de l'amplificateur a les mêmes fréquences, et a une puissance constante dans toutes les phases. Sur chacune des deux voies de faisceaux montants et descendants, le faisceau traverse un modulateur acousto-optique en double passage alimenté par une radio-fréquence fixe à 80 MHz, et d'intensité modulable en fonction de la phase  $x\Gamma$ . Au cours de ce double passage, le faisceau est décalé en fréquence vers le bleu de  $2 \times 80 = 160$  MHz, et a donc finalement le désaccord  $-x\Gamma$  souhaité. Cette technique permet de contrôler indépendamment la modulation en fréquence et la modulation en puissance des faisceaux de refroidissement. Nous allons maintenant détailler ces deux points.

**Principe de la synthèse pour le lancement.** Le premier point concerne le double passage dans les modulateurs acousto-optiques 80 MHz. Pendant les phases  $-3\Gamma$  et  $-5\Gamma$ , les modulateurs sont alimentés sur les deux voies de fais-

ceux montants et descendants avec la même fréquence, 80 MHz, générée par un oscillateur contrôlé en tension (VCO). Les deux signaux à 80 MHz sont asservis en phase. Pendant la phase de lancement  $-2\Gamma$  et de refroidissement adiabatique  $-21\Gamma$ , ces signaux sont décalés de  $+\delta\nu/2 \sim 1.3\text{ MHz}$  pour les faisceaux descendants, et de  $-\delta\nu/2 \sim -1.3\text{ MHz}$  pour les faisceaux montants. Par mélange hyperfréquence de ces deux signaux, on extrait leur différence  $\delta\nu$  qui est asservie en phase sur un synthétiseur digital (DDS). A la fin de la phase de lancement, les deux signaux sont à nouveau asservis en phase à 80 MHz.

Notons que le double passage dans chacun des deux modulateurs décale la fréquence des faisceaux vus par les atomes de  $\pm 2 \times \delta\nu/2 = \pm\delta\nu \sim 2.6\text{ MHz}$ , ce qui est bien la condition requise pour refroidir les atomes dans un référentiel en mouvement à  $3.5\text{ m.s}^{-1}$ . Sur chacune des deux voies, le faisceau traverse une première fois le modulateur; l'ordre (0) est obstrué, et seul l'ordre (+1) est réfléchi sur un miroir sphérique de rayon de courbure 200 mm, avant de traverser une deuxième fois le modulateur. La position du modulateur acousto-optique est réglée finement en rotation afin d'optimiser l'efficacité de diffraction (80% en simple passage) dans le cristal acousto-optique ( $TeO_2$ ). La position du miroir sphérique est telle que le waist objet du faisceau laser, localisé dans le cristal, ait un waist image localisé lui aussi dans le cristal (donc proche du centre de courbure du miroir). De cette façon, lorsque la fréquence d'alimentation du modulateur est décalée de  $\pm\delta\nu/2$ , le faisceau reste géométriquement fixe. Ce point est important, puisqu'après son deuxième passage dans le modulateur, le faisceau est divisé en 3 et injecté dans les fibres optiques, et que ce couplage est critique.

Notons enfin que le double passage fournit une atténuation très efficace lorsqu'on coupe l'alimentation radio-fréquence des modulateurs, après la phase de refroidissement adiabatique. Ce point est également important, puisque quelques photons seulement suffisent pour provoquer un déplacement lumineux de la transition d'horloge. La coupure des faisceaux est donc effectuée d'une part en atténuant de 80 dB la puissance radio-fréquence d'alimentation des modulateurs, d'autre part à l'aide du double passage, et enfin à l'aide d'obturateurs mécaniques.

**Principe de l'asservissement de la diode maître pendant les différentes phases de manipulation des atomes froids.** Le deuxième point concerne le système d'asservissement de la diode maître, qui doit rester asservie pendant les différentes phases  $x\Gamma$ . La figure (3.15) représente le système d'asservissement de la diode maître à  $160 + x\Gamma$  au rouge de la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ , au niveau du banc optique. Une faible fraction du faisceau maître est extraite au niveau d'un cube polariseur, puis traverse en simple passage un modulateur acousto-optique 200 MHz, alimenté par une radio-fréquence de fréquence  $160 + x\Gamma\text{ MHz}$ . L'ordre (0) est obstrué tandis que l'ordre (+1), après collimation puis aller et retour dans une cellule de Rb, permet de détecter un signal d'absorption saturée. De cette façon, le faisceau injecté dans l'amplificateur est géométriquement fixe, tandis que sa fréquence est décalée de  $-160 - x\Gamma$  par rapport à la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . En pratique, le faisceau est focalisé dans le modulateur acousto-optique avec un waist de  $38\ \mu\text{m}$ , soit la moitié du waist optimal recommandé par le constructeur. Au total, on balaie en effet la radio-fréquence sur un intervalle de  $19\Gamma = 114\text{ MHz}$  centré autour de 230 MHz.

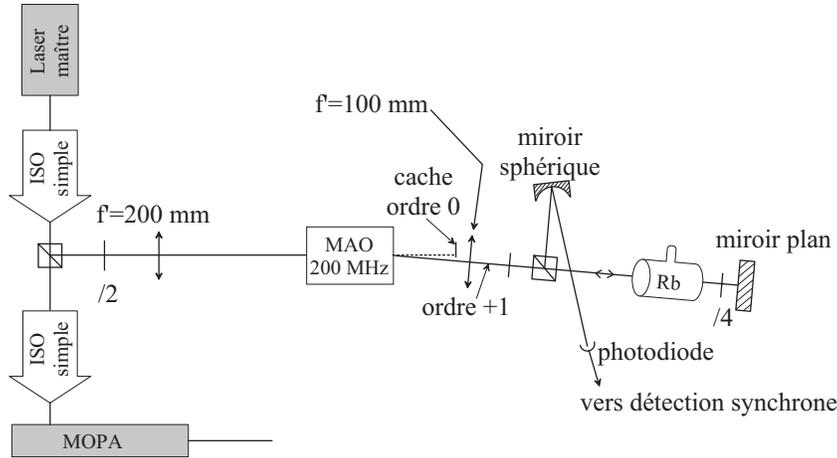


FIG. 3.15 – Schéma optique de l'asservissement de la diode maître pour le refroidissement et le lancement des atomes.

On ne cherche donc pas à optimiser l'efficacité à une fréquence donnée, mais à pouvoir balayer largement la radio-fréquence tout en ayant une efficacité suffisante aux deux bords de cet intervalle<sup>10</sup>. Notons par exemple que l'angle de Bragg, pour la phase  $-21\Gamma$ , est  $\sim 26$  mrad, et que la déviation angulaire correspondant à la plage balayée de  $19\Gamma$  est de  $\sim 10.6$  mrad, ce qui induit une translation du faisceau de  $\sim 1$  mm après la lentille de focale 100 mm.

Du point de vue électronique, quelle que soit la phase  $x\Gamma$ , le faisceau après modulateur acousto-optique reste asservi sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ , tandis que c'est le faisceau avant modulateur qui voit sa fréquence varier. L'asservissement doit donc encaisser les passages rapides d'une phase à la suivante, c'est à dire en un temps de l'ordre de 200 ns (temps de montée d'une bascule TTL, et temps de montée du modulateur acousto-optique). L'asservissement, qui répond avec une constante de temps de l'ordre de  $16 \mu\text{s}$ , ne peut pas supporter seul de tels régimes transitoires. Afin de remédier à cela, le profil de tensions correspondant aux diverses phases  $x\Gamma$  est appliqué à la fois sur le VCO commandant le modulateur acousto-optique, et sur le courant d'injection de la diode laser ainsi que sur la tension commandant la cale piézo-électrique. Avec ce système, la diode laser reste asservie quelle que soit la phase  $x\Gamma$ , pendant plus de 10 jours.

**Génération du faisceau repompeur.** Signalons enfin que le laser repompeur est asservi lui aussi 80 MHz au rouge de la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  de la raie D1, sur le même principe que ci-dessus (sa fréquence n'est toutefois pas balayée). Un deuxième modulateur acousto-optique à 80 MHz permet de ramener la fréquence du laser sur la raie  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ . L'utilisation du modulateur permet de couper très rapidement et efficacement le faisceau, tandis qu'un obturateur mécanique permet son extinction totale. Le faisceau repom-

<sup>10</sup>La bande passante radio-fréquence à  $-10$  dB est de 50 MHz, les pertes étant induites par la mauvaise adaptation d'impédance, en dehors de cette bande, de l'électrode générant l'onde acoustique dans le cristal acousto-optique.

peur est aussi injecté dans la fibre (7) et est utilisé dans la détection comme on l'a expliqué précédemment.

### Synthèse pour la préparation dans les états de $F = 1$

Comme on l'a décrit au § 3.3.3, lorsqu'on veut préparer les atomes dans les états  $|F = 1, \text{ tous } m_F\rangle$ , on a besoin d'un faisceau "pompeur" pour pomper optiquement les atomes du niveau  $F = 2$  vers le niveau  $F = 1$ .

Le faisceau pompeur agit alors que la diode maître est de nouveau asservie à  $-160 - 3\Gamma \simeq -178$  MHz de la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . Elle n'est donc, à cet instant, qu'à 89 MHz de la raie  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  nécessaire au pompage optique. Par conséquent, on génère le faisceau pompeur en dérivant une fraction du faisceau maître et en le faisant passer à travers un modulateur acousto-optique 80 MHz, alimenté en 89 MHz et dont on extrait l'ordre (-1). Le pompeur est mélangé, au niveau d'un cube polariseur (C), aux faisceaux "descendants".

### Synthèse pour la détection

Le faisceau de détection est généré par une troisième diode laser en cavité étendue accordée sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . Il est injecté dans la fibre de détection (8). Une fraction de ce faisceau est utilisée pour générer le faisceau "pousseur", utile pour "nettoyer" les niveaux de  $F = 2$  au cours de la préparation des atomes dans l'état  $|F = 1\rangle$  (cf. § 3.3.3). Le faisceau pousseur est injecté dans la fibre (9).

### 3.3.6 L'électronique de commande et le pilotage informatique

L'ensemble des fonctions nécessaires pour le fonctionnement de l'horloge pendant 1 cycle est généré par deux boîtiers d'électronique conçus par l'équipe d'électroniciens du LPTF, et réalisés au cours de cette thèse. Les différentes phases de manipulation des atomes froids, de lancement, de sélection, d'interrogation, et de détection, sont délimitées temporellement par des impulsions TTL. Ces impulsions sont générées par des bascules TI74LS123; la durée de ces impulsions et leur instant de déclenchement sont réglables au moyen de résistances variables accessibles en face avant du premier boîtier. En général, le front descendant d'une impulsion déclenche le front montant de l'impulsion suivante (durée typique de 30 ns). Ce train d'impulsions, correspondant à un cycle d'horloge, est déclenché par le front descendant d'une impulsion TTL de début de cycle, délivrée par la carte d'acquisition analogique/numérique AT-MIO16-E4 de "National Instruments", encastrée dans la face arrière de l'ordinateur de commande de l'horloge.

Ces impulsions commandent l'ouverture et la fermeture des obturateurs mécaniques disposés sur le parcours des différents faisceaux, sur le banc optique. L'extinction des faisceaux de refroidissement est contrôlée simultanément à l'aide du signal radio-fréquence sortant des VCO commandant les modulateurs acousto-optiques. A cet effet, les impulsions TTL commandent un double étage d'atténuateurs à 40 dB chacun. L'amplitude du signal radio-fréquence sortant des VCO est modulée en amont à l'aide des amplificateurs radio-fréquence à

gain variable. On peut de cette manière générer simplement des créneaux et des rampes de tension, utiles pour le refroidissement adiabatique des atomes. Le deuxième boîtier contient donc l'ensemble de l'électronique analogique utile à la commande des VCO, ainsi que l'électronique radio-fréquence nécessaire à l'asservissement en phase des deux VCO commandant les deux voies de faisceaux, montants et descendants.

Le pilotage de l'horloge est donc effectué électroniquement, chaque cycle étant déclenché par l'ordinateur. L'ordinateur sert aussi à l'acquisition et à la numérisation des signaux de temps de vol. Il enregistre les signaux de temps vol, leur largeur à mi-hauteur, et affiche les paramètres utiles à l'exploitation ultérieure de la mesure (temps de chargement, intensité des faisceaux laser de refroidissement, durée de la mesure ...). Il calcule à partir des aires de temps de vol la probabilité de transition pour le cycle passé. De ce calcul, et de celui effectué au cycle précédent sur l'autre flanc de la frange centrale de Ramsey, il déduit le signal d'erreur et le signal de correction de fréquence qu'il faut appliquer sur la chaîne de synthèse pour rester asservi symétriquement par rapport au sommet de la frange centrale. Le programme informatique, écrit en langage C à l'aide du logiciel CVI de "National Instruments", enregistre au fur et à mesure les signaux de correction de chaque cycle d'horloge. A chaque cycle d'horloge, il recalcule la moyenne des corrections effectuées depuis le début de la mesure de fréquence (il s'agit donc d'une "intégration") ainsi que la variance d'Allan des fluctuations de ces corrections de fréquence. Celle-ci est tracée en temps réel, en fonction du temps  $\tau$  sur lequel a été effectué le moyennage. On connaît donc en temps réel la stabilité de l'horloge, les corrections de fréquence et leur moyenne.

Le programme informatique permet aussi de piloter directement la durée de l'impulsion de la phase de capture, ainsi que l'atténuation des faisceaux de refroidissement pendant cette phase. Cette option est utile pour pouvoir faire varier automatiquement le nombre d'atomes lancés dans l'horloge. On verra dans le chapitre 5 que ceci est nécessaire pour effectuer une double intégration, c'est à dire deux intégrations entrelacées temporellement avec deux nombres d'atomes différents pour chacune. Enfin, le programme informatique permet de piloter directement en tension un atténuateur micro-onde disposé en sortie de la chaîne de synthèse, ce qui permet d'effectuer différents types d'impulsions Ramsey ( $\pi/2$ ,  $\pi/4$ ,  $3\pi/2$  ...). Ceci est utile pour tester les effets de déplacement de fréquence dépendant de la puissance micro-onde, tels que les fuites micro-ondes, les "impuretés" spectrales de la chaîne de synthèse, le "cavity pulling", ou l'effet de recul lié à l'absorption-émission de photons micro-ondes dans la cavité.

### 3.4 Distribution et synthèse des fréquences micro-ondes au LPTF

Le seul élément qu'il reste à décrire pour comprendre le fonctionnement de la fontaine  $Rb$  est la chaîne de synthèse de fréquence micro-onde nécessaire à l'interrogation des atomes froids. Cette description s'inscrit en fait dans le cadre plus général de la comparaison entre horloges.

#### 3.4.1 Les horloges à atomes froids du LPTF

Une horloge isolée ne sert à rien. Elle n'est utile que si on peut évaluer l'exactitude et la stabilité du signal qu'elle délivre. Cette évaluation nécessite de la comparer à une autre horloge, de préférence ayant des performances similaires. Au LPTF, la construction de la fontaine  $Rb$  vient compléter un triangle de fontaines schématisé sur la figure (3.16).

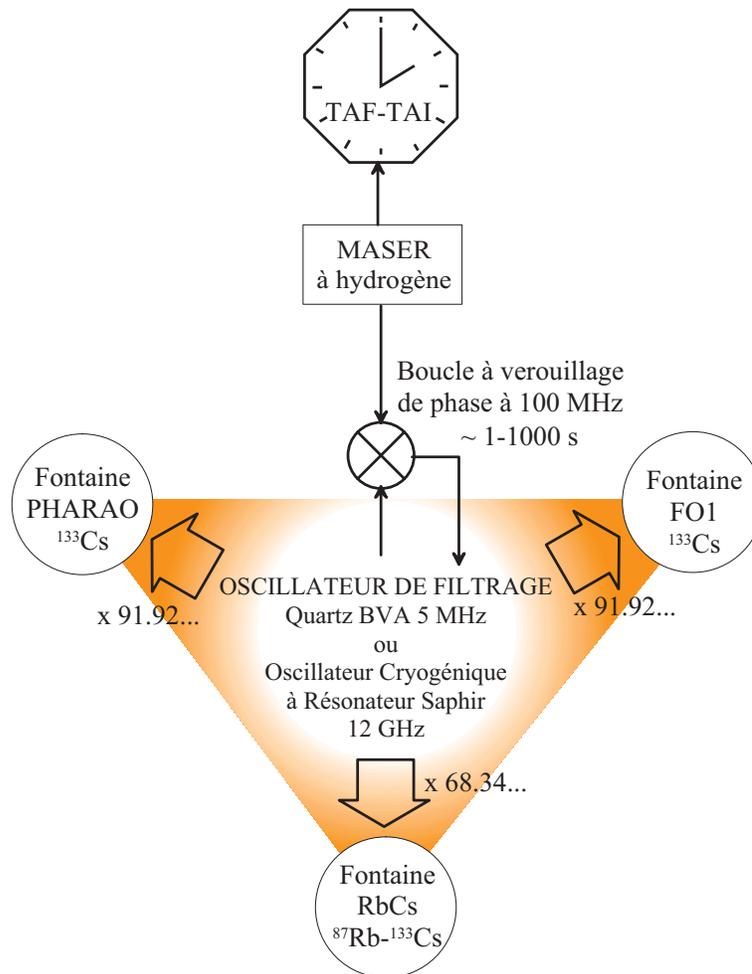


FIG. 3.16 – Organisation des fontaines atomiques au BNM-LPTF.

La fontaine FO1 à atomes froids de Cs, dont la construction a débuté en 1992, possède aujourd'hui une exactitude parmi les meilleures au monde :  $1.0 \times 10^{-15}$  [43]. Dans les conditions optimales de réglage des paramètres de temps de cycle et de nombre d'atomes, elle a une stabilité potentielle meilleure que  $5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  jusqu'à 10000 s [9]. Cette stabilité exceptionnelle jusqu'à des temps longs ne peut être mise en évidence qu'en la comparant à un signal de référence lui-même très stable. Ce signal est délivré par un maser à hydrogène<sup>11</sup> dont la stabilité de fréquence, exprimée en écart type d'Allan, décroît jusqu'à un palier de quelques  $10^{-16}$  à 1 jour (voir remarque de bas de page<sup>12</sup>). Cependant, sur les temps courts ( $\tau \lesssim 10$  s), la stabilité du maser  $\sigma_y(\tau) \simeq 2 \times 10^{-13} \tau^{-1}$  est insuffisante pour une comparaison directe avec une fontaine, pour des raisons de repliement de spectre (voir § 3.5.3). Pour remédier à ce problème, on utilise un deuxième oscillateur ayant une stabilité meilleure que le maser à hydrogène sur des temps  $\tau \lesssim 4$  s, et on asservit en phase cet oscillateur sur le maser à hydrogène avec une constante de temps  $\tau_c \simeq 4$  s. De cette façon, on obtient en sortie de ce deuxième oscillateur un signal "hybride", c'est-à-dire ayant la bonne stabilité à court terme de l'oscillateur et la stabilité à long terme du maser à hydrogène. Traduit dans le domaine des fréquences de Fourier, le raisonnement précédent signifie que grâce à l'asservissement de phase, l'oscillateur se comporte comme un filtre "passe bas" de bande passante  $\sim 0.25$  Hz : le signal "hybride" possède, au-dessus de 0.25 Hz, la très basse densité spectrale de puissance de bruit de phase de l'oscillateur, tandis que pour les fréquences de Fourier inférieures à 0.25 Hz, il recopie les performances de bruit de phase du maser à hydrogène. On appellera donc cet oscillateur "oscillateur de filtrage" dans la suite. En pratique, le signal de sortie de l'oscillateur de filtrage est un signal à 100 MHz.

L'oscillateur de filtrage utilisé fait intervenir soit un oscillateur à quartz<sup>13</sup> à 5 ou 10 MHz sélectionnés parmi les meilleurs au monde (type BVA du fabricant suisse Oscilloquartz, ou du Laboratoire de Cristallographie et de Piézo-Electricité, à Besançon), soit un oscillateur cryogénique à résonateur en saphir (O CRS) refroidi à 6 K (température proche de celle de l'hélium liquide), et résonant autour de 12 GHz. Ce dernier a été récemment installé au LPTF dans le cadre d'une collaboration avec l'Université de Western Australia. Grâce à son excellente stabilité à court terme ( $\sigma_y(\tau) \lesssim 10^{-15}$  jusqu'à 10 s), il a permis d'atteindre une stabilité court terme de  $4 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  sur l'horloge FO1, à comparer à  $\sim 1.2 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  obtenu typiquement lorsqu'on utilise un quartz, dans les mêmes conditions. Dans ce dernier cas, ce sont les performances du quartz qui limitent la stabilité, tandis que lorsqu'on utilise l'O CRS, on atteint la stabilité ultime de la fontaine (cf. § 3.5.4 sur le bruit de projection quantique). On trouvera des explications détaillées sur le fonctionnement et l'asservissement

<sup>11</sup>MASER : Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Il s'agit en soi d'une horloge atomique à part entière, basée sur la transition hyperfine de l'atome d'hydrogène, de fréquence  $\sim 1.42$  GHz. Le maser en fonctionnement au LPTF participe au calcul du temps atomique français (TAF) et du temps atomique international (TAI). Il est relié aux autres laboratoires de métrologie grâce à un lien utilisant les signaux émis par la constellation d'horloges américaines embarquées à bord de satellites en rotation autour de la Terre (Global Positioning System : GPS).

<sup>12</sup>Ce palier, correspondant à du bruit de scintillation de fréquence, est observable jusqu'à  $\sim 10$  jours, en comparant deux masers entre eux. Au-delà, la stabilité remonte en  $\tau^{+1}$ , correspondant à une dérive lente de la fréquence du maser.

<sup>13</sup>basé sur une résonance mécanique d'un cristal de quartz de facteur de qualité proche de  $10^6$ .

de l'OCRS dans la thèse de Sébastien Bize. Notons cependant que, en pratique, l'oscillateur de filtrage n'est pas constitué par un seul oscillateur du type quartz ou OCRS, mais fait intervenir d'autres oscillateurs, à 100 MHz ou 1 GHz, multipliés ou divisés et verrouillés en phase sur cet oscillateur, avec des bandes passantes bien choisies. En effet, aucun oscillateur ne possède des performances optimales de bruit de phase dans tout le domaine de fréquences de Fourier. Ce sujet fait l'objet d'un chapitre complet dans la thèse de G. Santarelli [119].

Le signal hybride à 100 MHz délivré par l'oscillateur de filtrage est distribué aussi aux autres fontaines du LPTF.

Il s'agit d'une part de la fontaine *Rb* décrite ici (transformée ultérieurement en fontaine *RbCs*), et d'autre part de l'horloge PHARAO, prototype d'horloge spatiale à atomes froids de *Cs*. Cette horloge fait l'objet de la thèse de Michel Abgrall [127]. Elle a démontré, au cours de vols paraboliques en 1997 (environnement de micro-gravité), la faisabilité du projet spatial ACES<sup>14</sup>. Depuis, elle a été transformée en fontaine de césium transportable [128].

Le signal de l'oscillateur de filtrage sert de point de départ pour la synthèse des fréquences d'interrogation des fontaines<sup>15</sup> : 9.192...GHz pour le césium, 6.834...GHz pour le rubidium. La composante de bruit de phase qu'il apporte à la stabilité de chaque fontaine peut donc être efficacement rejetée lorsqu'on effectue une comparaison directe entre fontaines, c'est à dire lorsqu'on synchronise les phases d'interrogation des atomes par le champ micro-onde dans chaque fontaine. Nous reviendrons sur ce point dans le § 3.5.6.

### 3.4.2 Description de la chaîne de synthèse du signal de distribution

Ce paragraphe décrit brièvement la synthèse du signal de distribution à 100 MHz, lorsqu'on prend le quartz BVA à 5 MHz comme maillon de départ. Pour ce paragraphe et pour le suivant, on trouvera plus de détails sur ce sujet dans la thèse de G. Santarelli [119]. Les chaînes de synthèse ont toutes été conçues et réalisées au BNM-LPTF.

Le principe de fonctionnement de la chaîne de synthèse est schématisé sur la figure (3.17). Un oscillateur à quartz (1) de type BVA à 5 MHz, multiplié par 2, est asservi en phase sur le signal du maser à 100 MHz (2). A très basse fréquence de Fourier  $f \lesssim 10^{-1}$  Hz, les performances de bruit de phase du quartz 5 MHz sont légèrement moins bonnes que celles du maser. Ce 1<sup>er</sup> asservissement est obtenu en mélangeant le signal du maser et le signal issu d'un quartz de référence à 100 MHz (3). La bande passante de cet asservissement est  $\sim 10^{-1}$  Hz. Le quartz (3) est en fait asservi en phase sur le quartz (1), par mélange de fréquences à 10 MHz, avec une bande passante de l'ordre de 100 Hz. Le résultat de ce double asservissement est un signal à 100 MHz qui recopie le bruit de phase du quartz (1) asservi sur le maser, pour des fréquences de Fourier  $f \lesssim 100$  Hz. A cette

<sup>14</sup>ACES : Atomic Clocks Ensemble in Space. Ce projet fait intervenir l'horloge PHARAO, un maser à hydrogène, et un système de transfert de temps par lien micro-onde, permettant d'émettre et de recevoir les signaux d'horloge entre la station spatiale internationale où ils seront embarqués, et les horloges distribuées sur la Terre. Il permet entre autres la comparaison d'horloges à distance et des tests plus précis de la Relativité Générale.

<sup>15</sup>Il est aussi distribué à l'horloge *Cs* utilisant un jet thermique pompé optiquement [129].

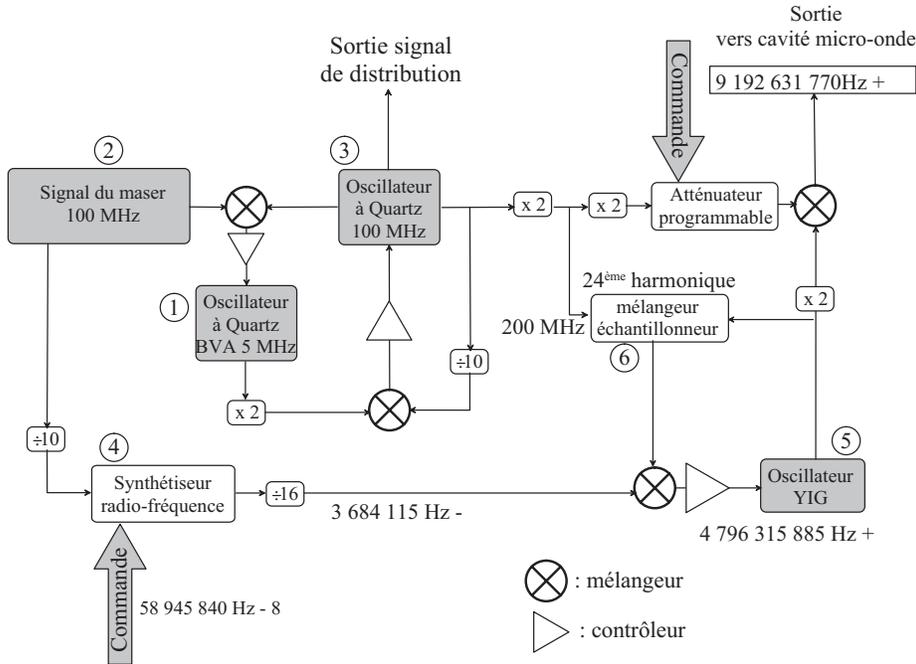


FIG. 3.17 – Schéma de principe de la chaîne de synthèse de la fontaine FO1. Au cours de cette synthèse est généré le signal à 100 MHz. Asservi sur le maser, ce signal est nommé "signal de distribution" : il est le maillon de base de la synthèse des signaux d'interrogation des 3 fontaines et du jet thermique pompé optiquement du BNM-LPTF.

étape, les performances de bruit de phase de ce signal à 100 MHz sont donc aussi bonnes que celles du maser pour  $f \lesssim 10^{-1}$  Hz et aussi bonnes que celles du quartz à 5 MHz pour  $10^{-1}$  Hz  $\lesssim f \lesssim 100$  Hz, et égales aux performances du quartz 100 MHz au delà. Ce signal "hybride" est le signal "distribué aux 3 fontaines".

La suite concerne la génération de la fréquence d'interrogation de la fontaine FO1 à  $\sim 9.2$  GHz. Présentons-là brièvement.

Un synthétiseur radio-fréquence (4) est synchronisé (par un asservissement de phase interne à l'appareil) sur le signal du maser divisé par 10. Le synthétiseur est commandé par l'ordinateur *via* un port GPIB, et délivre une fréquence modulée de  $8\delta\nu$  autour de  $\sim 58.9$  MHz.  $\delta\nu \simeq 0.5$  Hz est la demi-largeur à mi-hauteur de la frange centrale de Ramsey. Par division par 16 on obtient un signal modulé de  $\delta\nu/2$  autour de  $\sim 3.68$  MHz.

La dernière étape consiste à asservir en phase un oscillateur hyper-fréquence de type YIG<sup>16</sup> sur le signal à 100 MHz de hautes performances obtenu ci-dessus. On effectue cela de la façon suivante. Notons  $\nu_{YIG} \simeq 4.796$  GHz la fréquence issue du YIG en boucle ouverte. On multiplie le signal à 100 MHz par 2, puis on extrait le plus petit reste dans la division de  $\nu_{YIG}$  par 200 MHz. En l'occurrence,

<sup>16</sup>Yttrium Iron Garnet. Il s'agit d'un oscillateur basé sur une résonance paramagnétique d'un cristal YIG, dont la fréquence est contrôlée par application d'un champ magnétique.

cette division fait intervenir la 24<sup>e</sup> harmonique de 200 MHz, et est effectuée en sous-échantillonnant le signal du YIG par le signal à 200 MHz au moyen d'un mélangeur échantillonneur (6) ("sampling mixer"). Le reste de cette division est mélangé au signal de fréquence  $\sim 3.68$  MHz généré précédemment, et un contrôleur permet donc de corriger la phase du YIG afin de maintenir le signal d'erreur à 0, avec une bande passante de  $\sim 100$  kHz. De cette façon, pour  $f \lesssim 100$  kHz, le YIG recopie les performances de bruit de phase du signal 100 MHz issu du quartz (3) asservi, ces performances étant en fait ramenées à 4.79 GHz par les opérations de doublage et de multiplication par 24. Ceci se traduit par une multiplication de la densité spectrale de puissance de bruit de phase par un facteur (48)<sup>2</sup>. Pour les fréquences de Fourier  $f \gtrsim 100$  kHz, les performances de bruit de phase sont celles du YIG. Le signal d'interrogation est finalement obtenu en effectuant le battement entre le signal à 200 MHz multiplié par 2 et le signal du YIG multiplié par 2. Notons que les bandes latérales à  $\pm n \times 400$  MHz de la porteuse, en sortie du mélangeur, sont filtrées par la cavité micro-onde. La puissance du signal d'interrogation est contrôlée en ajustant la puissance du signal à 400 MHz au moyen d'un atténuateur programmable commandé par une tension 0 – 12 V, laquelle est délivrée par la carte d'acquisition de l'ordinateur. En procédant de cette façon, on évite la présence d'une composante puissante quasi-résonante avec les atomes, et qui serait susceptible de fuir de la boîte contenant la chaîne et de déplacer la fréquence de résonance atomique.

### 3.4.3 Description de la chaîne de synthèse *Rb*

Ce paragraphe décrit brièvement le principe de fonctionnement de la chaîne de synthèse micro-onde utilisée pour l'horloge *Rb*. Elle utilise comme maillon de base le signal de distribution à 100 MHz dont on a décrit la synthèse dans la paragraphe précédent.

La chaîne de synthèse *Rb* est schématisée sur la figure (3.18). Elle réunit les caractéristiques suivantes :

1. Elle a un faible bruit de phase, et il y a cohérence de phase entre son signal de sortie et le signal de distribution à 100 MHz issu de l'oscillateur de filtrage.
2. Sa fréquence de sortie est contrôlable par un ordinateur avec une résolution inférieure à la stabilité de fréquence à un cycle de la fontaine. De plus, elle doit pouvoir être balayée sur quelques kHz autour de la fréquence d'horloge, de façon à pouvoir exciter les transitions dépendant linéairement du champ magnétique. Ceci permet la mesure du champ magnétique, ainsi que la mesure des populations relatives des différents sous-niveaux Zeeman.
3. La puissance de sortie de la chaîne de synthèse est contrôlable, également par un ordinateur, de façon à pouvoir effectuer des impulsions  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$ ,...
4. Le rayonnement micro-onde sortant de la chaîne autrement que par le câble co-axial de sortie doit être minimisé, de façon à ne pas exciter les atomes en dehors de la phase d'interrogation de Ramsey.

Le principe de fonctionnement de la chaîne de synthèse *Rb* est plus simple que celui de la chaîne *Cs* de la fontaine FO1. Il s'agit d'asservir en phase la fréquence délivrée par un oscillateur YIG (2) sur le signal de distribution à

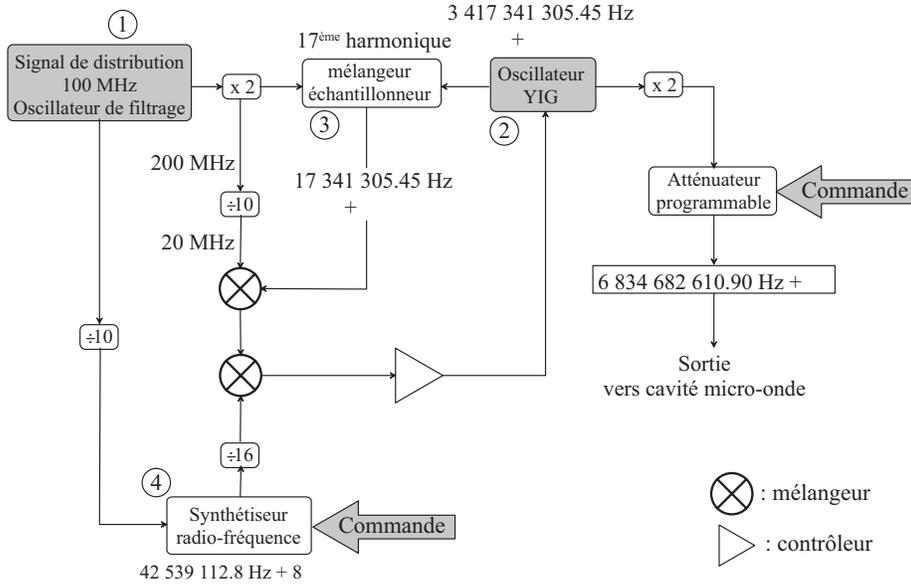


FIG. 3.18 – Schéma de principe de la chaîne de synthèse de l'horloge Rb.

100 MHz (1). Pour cela, on multiplie le signal à 100 MHz par 2, puis on extrait le plus petit reste dans la division de  $\nu_{YIG}$  par 200 MHz. Cette division fait intervenir la 17<sup>e</sup> harmonique de 200 MHz, et est encore une fois effectuée en sous-échantillonnant le signal du YIG par le signal à 200 MHz au moyen d'un mélangeur échantillonneur (3) ("sampling mixer"). Le reste de cette division est mélangé au 200 MHz divisé par 10. Le signal de battement obtenu, de fréquence  $\sim 2\,658\,694.55$  MHz est mélangé au signal délivré par un synthétiseur radio-fréquence (4) divisé par 16. Ce synthétiseur est synchronisé sur le signal de distribution divisé par 10. Il est commandé par l'ordinateur *via* un port GPIB, et délivre une fréquence modulée de  $8\delta\nu$  autour de  $\sim 42.5$  MHz.  $\delta\nu \simeq 0.5$  Hz est la demi-largeur à mi-hauteur de la frange centrale de Ramsey.

Le signal d'erreur est utilisé pour contrôler la fréquence du YIG. La bande passante de la boucle d'asservissement est de l'ordre de 100 kHz. Le résultat de cet asservissement est donc un signal à  $\sim 3.417\dots\text{GHz} \pm \delta\nu/2$ , qui recopie les performances de bruit de phase du signal de distribution pour des fréquences de Fourier  $f \lesssim 100$  kHz, et dont les performances de bruit de phase sont celles du YIG non asservi au-delà. La seconde harmonique, qui co-existe naturellement avec la porteuse en sortie du YIG, mais est moins puissante, a la même densité spectrale de puissance de bruit de phase que la porteuse (à un facteur 4 près). Sa fréquence est la fréquence d'interrogation des atomes froids, et sonde la frange centrale de Ramsey.

Le synthétiseur a une résolution inférieure au millihertz, ce qui correspond, grâce à la division par 8, à une résolution  $\lesssim 1.8 \times 10^{-14}$  en sortie de chaîne de synthèse<sup>17</sup>. Cette résolution est inférieure à la stabilité à 1 cycle de la fontaine. Le contrôle de la puissance est fait au moyen d'un atténuateur programmable

<sup>17</sup>La fréquence du synthétiseur est divisée par 16, mais la fréquence du YIG est multipliée par 2 en sortie de chaîne. La résolution du synthétiseur ramenée en sortie est donc de 1/8 mHz.

commandé par une tension 0 – 12 V délivrée par la carte d’acquisition de l’ordinateur. Les composants de la chaîne sont en bon contact thermique avec une plaque épaisse en aluminium, régulée en température à  $\pm 0.1$  K. La chaîne est à l’intérieur de blindages magnétiques en fer doux, capitonnés à l’intérieur par de l’absorbant micro-onde de façon à diminuer au maximum les fuites micro-ondes.

Notons que la cohérence de phase a été conservée tout au long de cette synthèse : le signal sortant du YIG asservi a donc une relation de phase fixe avec le signal de distribution à 100 MHz.

## 3.5 Les sources de bruit dans une fontaine

### 3.5.1 Fonctionnement de l’asservissement

Le signal de sortie de la fontaine  $Rb$  est le signal de sortie de la chaîne de synthèse micro-onde, asservi sur la fréquence de transition des atomes de  $Rb$ , c’est à dire sur le sommet de la frange centrale de Ramsey. Cet asservissement est réalisé en modulant la fréquence de la chaîne de synthèse (signal d’interrogation des atomes) de part et d’autre de la frange centrale de Ramsey. Cette modulation est une modulation en créneaux, d’amplitude  $\Delta_m$  égale à la demi-largeur de la frange de Ramsey, et de demi-période égale au temps de cycle  $T_c$  de la fontaine. Elle est générée en modulant le synthétiseur (4) de la figure (3.18) de façon externe, depuis l’ordinateur de contrôle de la fontaine. Notons  $\delta_k$  la fréquence centrale du signal d’interrogation pendant le  $k^e$  cycle, et  $\delta$  la fréquence du signal d’interrogation modulé :

$$\delta = \delta_k + (-1)^k \Delta_m \quad (3.24)$$

La différence des probabilités de transition  $P_k$  et  $P_{k-1}$  mesurées aux cycles  $k$  et  $k-1$  donne un signal d’erreur, qui est utilisé pour corriger la fréquence centrale du signal d’interrogation au cycle  $k+1$  :

$$\delta_{k+1} = \delta_k + (-1)^k G(P_k - P_{k-1}) \quad (3.25)$$

Ce processus est itératif. Cet asservissement est donc un intégrateur à temps discrets, contrôlé par l’ordinateur. Le gain de la boucle,  $G$ , est ajusté de sorte que l’asservissement soit stable ( $G < 0$ ) et fonctionne en régime critique. La constante de temps de la boucle d’asservissement est de l’ordre de 4 cycles de fontaine.

Remarque : dans le formalisme précédent,  $\delta$  et  $\delta_k$  sont en fait des désaccords de fréquence plutôt que des fréquences absolues. Ils sont référencés à une fréquence arbitraire fixe, égale en pratique à 6 834 682 610 Hz. La suite des  $\delta_k$  représente donc la suite des corrections de fréquence ajoutées à cette valeur fixe pour que le signal d’interrogation soit asservi sur la transition atomique. Cette suite de corrections est conservée en mémoire par l’ordinateur. Cela permet d’en calculer la variance d’Allan en temps réel, ainsi que la valeur moyenne, qui donne la fréquence de la transition atomique par rapport à l’oscillateur d’interrogation.

### 3.5.2 Calcul de la stabilité de fréquence dans une horloge

L’étude détaillée du comportement de la boucle d’asservissement de fréquence en régime dynamique est effectuée dans la référence [130]. Elle suppose que les

fluctuations de probabilité de transition  $\delta P_k$  et  $\delta P_{k-1}$  pour deux échantillons successifs ne sont pas corrélées. Elle suppose de plus que la suite  $\delta P_k$  de ces fluctuations a les propriétés du bruit blanc<sup>18</sup>, avec une moyenne nulle et un écart type  $\sigma_{\delta P}$ . Dans ces conditions, la stabilité des fluctuations relatives de la fréquence de l'oscillateur d'interrogation asservi sur la résonance atomique est liée à  $\sigma_{\delta P}$  par la relation suivante :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\omega_{at}} \frac{\sigma_{\delta P}}{\frac{dP}{d\delta}} \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \quad (3.26)$$

où  $dP/d\delta$  est la pente du discriminateur de fréquence que constituent les atomes, c'est à dire la pente de la frange centrale de Ramsey<sup>19</sup>. Cette pente traduit la conversion des fluctuations de probabilité en fluctuations de fréquence.  $\tau/T_c$  est égal au nombre de cycles de mesures  $N_c$  effectués pendant la durée  $\tau$ . Le dernier facteur correspond donc à la décroissance en  $1/\sqrt{N_c}$  des fluctuations de la fréquence moyenne de l'oscillateur d'interrogation asservi, décroissance caractéristique pour des fluctuations présentant un spectre de bruit blanc. En utilisant (1.23), on exprime la pente en un point quelconque de la frange centrale, pour une probabilité  $P$  :

$$\frac{dP}{d\delta} = \frac{\pi Q_{at}}{\omega_{at}} \times \sqrt{P(1-P)} \quad (3.27)$$

où  $Q_{at}$  désigne le facteur de qualité de la résonance atomique, et on en déduit une expression générale pour la stabilité de la fréquence de l'horloge :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi Q_{at}} \frac{\sigma_{\delta P}}{\sqrt{P(1-P)}} \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \quad (3.28)$$

Les paragraphes suivants vont analyser les différentes sources de fluctuations de probabilité de transition,  $\delta P$ .

### 3.5.3 Limite de stabilité liée aux fluctuations de fréquence de l'oscillateur local

La relation de récurrence (3.25) permet de déduire la correction de fréquence au cycle  $k+1$  en fonction de la correction de fréquence au cycle  $k$  et du signal d'erreur  $dP = P_k - P_{k-1}$ . La boucle d'asservissement compense les fluctuations de la fréquence de l'oscillateur d'interrogation. En fait, ce bruit n'est pas suffisamment échantillonné pour être correctement corrigé : les atomes "voient" et répondent à ce bruit de manière périodique, avec la période d'un temps de cycle  $T_c$ , pendant une fraction seulement du temps de cycle,  $(T+2\tau)/T_c$ . On sait que dans ce cas, l'information spectrale vue par les atomes à basse fréquence ne provient pas seulement des fluctuations de fréquence de l'oscillateur à basse fréquence (ces fluctuations sont d'ailleurs corrigées par l'asservissement dans sa

<sup>18</sup>Cette hypothèse est validée dans la mesure où les bruits basse fréquence en  $|f|^\alpha$  couramment attribués aux oscillateurs sont tels que  $\alpha > -3$ . Dans ces conditions, C. A. Greenhall a démontré que, par repliement de spectre, l'échantillonnage à la fréquence  $1/T_c$  du bruit de l'oscillateur d'interrogation libre introduit, sur le long terme (c'est à dire pour les fréquences de Fourier  $f \rightarrow 0$ ), une composante de bruit blanc de fréquence dans le spectre de l'oscillateur d'interrogation asservi (cf. [119], Annexe A)

<sup>19</sup>Attention !  $\delta$  est homogène à une pulsation.

bande passante, qui correspond à quelques temps cycles), mais provient aussi des fluctuations de fréquence de l'oscillateur à des fréquences de Fourier proches des multiples de la fréquence d'échantillonnage  $f_c = 1/T_c$ . Ces dernières ne sont pas corrigées par l'asservissement, puisqu'elle sortent de sa bande passante, mais les atomes les "voient" et y répondent par des fluctuations  $dP$  de probabilité de transition. Nous allons voir maintenant comment le bruit de fréquence de l'oscillateur libre, aux multiples de la fréquence d'échantillonnage  $f_c$ , dégrade la stabilité de fréquence de l'oscillateur asservi. Cet effet, modélisé par G. J. Dick dans les années 1990 [131, 132] porte le nom "d'effet Dick".

Nous avons vu au chapitre 1, comment la fluctuation de probabilité  $dP$  est reliée à la fluctuation  $d\nu$  de la fréquence de l'oscillateur d'interrogation :

$$dP = -\frac{\varepsilon}{2} \int_{(n-1)T_c}^{nT_c} d\nu(t)g(t)dt \quad (3.29)$$

où on a remplacé  $T + 2\tau$  par  $T_c$ ,  $g(t)$  étant nulle en dehors de l'intervalle d'interrogation. On peut réécrire cette relation en effectuant un changement de variable tel que  $g(t)$  soit paire, et en translatant l'axe du temps de  $nT_c$ . Notons que  $g(t)$  est périodique de période  $T_c$ .

$$dP = -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{T_c} g(\xi)d\nu(nT_c - \xi)d\xi \quad (3.30)$$

D'après (3.25), et en notant  $\varepsilon = (-1)^n$ , on a donc :

$$\delta_{n+1} = \delta_n + G' \int_0^{T_c} g(\xi)d\nu(nT_c - \xi)d\xi \quad (3.31)$$

On trouvera l'analyse spectrale détaillée de cette relation dans les références [130, 133]. Elle conduit à l'expression suivante pour la densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence, à basse fréquence, de l'oscillateur d'interrogation asservi sur la résonance atomique :

$$\lim_{f \rightarrow 0} S_y(f) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{g_n}{g_0} \right|^2 S_y^{libre}(nf_c) \quad (3.32)$$

où les coefficients  $g_n$  sont les coefficients de Fourier de la fonction  $g(t)$  périodique :

$$g_n = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} g(t)e^{-i2\pi n f_c t} dt \quad (3.33)$$

$$g_0 = \frac{T_{eff}}{T_c}$$

On peut interpréter physiquement l'expression (3.32) se de la façon suivante. Définissons la fonction de sensibilité normalisée  $g_N(t) = g(t)/T_{eff}$ , périodique de période  $T_c$ . Si la durée  $\tau$  de l'interrogation était infiniment courte devant le temps de cycle  $T_c$ ,  $g_N(t)$  serait un peigne de Dirac de pas temporel  $T_c$ . La fonction  $g(t) = T_{eff} \times g_N(t)$ , proportionnelle à un peigne de Dirac se comporterait alors comme un échantillonneur temporel du bruit de fréquence de l'oscillateur d'interrogation libre,  $S_y^{libre}(f)$ .

Traduit dans l'espace des fréquences de Fourier, cet échantillonnage équivaut à une duplication du spectre  $S_y^{libre}(f)$ , avec la fréquence  $f_c = 1/T_c$ . Comme il s'agit d'un sous-échantillonnage, il y a recouvrement des spectres, et, en  $f = 0$ , le spectre de l'oscillateur asservi s'écrit :

$$S_y(0) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} S_y^{libre}(nf_c) \times [T_{eff} \times 1]^2 \quad (3.34)$$

(car la transformée de Fourier d'un Dirac est l'identité).

En réalité, l'échantillonnage effectué par  $g(t)$  n'est pas un peigne de Dirac, mais est convolué par le profil temporel réel de  $g(t)$ . Dans l'espace de Fourier, le spectre de l'échantillonneur est donc un peigne de Dirac, de pas  $f_c$ , multiplié par la transformée de Fourier de  $T_{eff} \times g_N(t)$  :

$$G(f) = \int_0^{T_c} T_{eff} g_N(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

C'est donc un peigne de Dirac dont les pics ont pour amplitudes les coefficients de la série de Fourier de la fonction  $T_c$ -périodique  $T_{eff} g_N(t)$  :

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} T_{eff} g_N(t) e^{-i2\pi n f_c t} dt \\ G_0 &= \frac{T_{eff}}{T_c} \end{aligned} \quad (3.35)$$

L'expression (3.34) devient donc :

$$S_y(0) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |G_n|^2 S_y^{libre}(nf_c) \quad (3.36)$$

c'est à dire :

$$S_y(0) = \left( \frac{T_{eff}}{T_c} \right)^2 \times 2 \sum_{n=1}^{+\infty} S_y^{libre}(nf_c) \left| \int_0^{T_c} g_N(t) e^{-i2\pi n f_c t} dt \right|^2 \quad (3.37)$$

Or  $\tau \ll T_c$ , donc  $T_{eff}/T_c \simeq 1$ , et

$$\int_0^{T_c} g_N(t) e^{-i2\pi n f_c t} dt = \frac{g_n}{g_0}$$

On retrouve donc effectivement l'expression (3.32).

$$S_y(0) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{g_n}{g_0} \right|^2 S_y^{libre}(nf_c) \quad (3.38)$$

Les coefficients  $|g_n/g_0|^2$  traduisent donc l'efficacité de conversion en basse fréquence des fluctuations de fréquence de l'oscillateur libre, prises aux fréquences  $nf_c$  des harmoniques de la fréquence d'échantillonnage.

Comme on l'a mentionné (note de bas de page du paragraphe précédent), on peut considérer que le spectre de puissance de bruit de fréquence pour les

fréquences de Fourier  $f \rightarrow 0$  est un spectre de bruit blanc. Dans ces conditions, la densité spectrale de puissance de bruit de fréquence vaut  $S_y(0)$ , et contribue à la variance d'Allan de la façon suivante sur le long terme :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{S_y(0)}{2\tau} = \frac{1}{\tau} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{g_n}{g_0} \right|^2 S_y^{libre}(nf_c) \quad (3.39)$$

ce qui permet d'écrire  $\sigma_y(\tau)$  sous la forme :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi Q_{at}} \times \gamma_{OI} \times \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \quad (3.40)$$

où  $Q_{at}$  est le facteur de qualité de la résonance atomique, et où  $\gamma_{OI}$  est une grandeur indépendante du nombre d'atomes détectés,  $N_{det}$ .

On trouvera dans la thèse de S. Bize [30] le calcul des efficacités de conversion  $|g_n/g_0|^2$  en fonction du numéro  $n$  de l'harmonique, et pour différents types d'impulsions :  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$ ,  $5\pi/2$  ... Physiquement, plus la puissance de l'impulsion est élevée, plus le profil de  $g(t)$  varie rapidement au début et à la fin de l'interrogation (cf. figure (1.12)), donc plus le poids des harmoniques élevées intervenant dans le développement précédent est élevé. Dans ces conditions, et pour du bruit en  $f^1$  et  $f^2$  ( $S_y^{libre}(f) = h_1 f + h_2 f^2$ ), on comprend qu'augmenter la puissance de l'impulsion dégrade la stabilité de l'horloge.

Application numérique : la figure (3.19) représente la densité spectrale de puissance de bruit de phase de l'excellent quartz BVA à 5 MHz qui intervient dans la génération du signal de distribution à 100 MHz mentionné précédemment. Cette densité spectrale a été mesurée par battement à 10 MHz avec un autre oscillateur, dont on connaît la densité spectrale.

La densité spectrale du quartz BVA est bien modélisée par l'expression suivante :

$$S_\phi(f) = \frac{1.06 \times 10^{-12}}{f^3} - \frac{4.26 \times 10^{-13}}{f^2} + \frac{2.13 \times 10^{-13}}{f} + 1.94 \times 10^{-15} \quad (3.41)$$

ce qui correspond à une densité spectrale de puissance des fluctuations relatives de fréquence :

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \frac{f^2}{(10 \text{ MHz})^2} S_\phi(f) = S_{-1} f^{-1} + S_0 f^0 + S_{+1} f + S_{+2} f^2 \\ S_{-1} &= 1.06 \times 10^{-26} \\ S_0 &= -4.26 \times 10^{-27} \text{ Hz}^{-1} \\ S_{+1} &= 2.13 \times 10^{-27} \text{ Hz}^{-2} \\ S_{+2} &= 1.94 \times 10^{-29} \text{ Hz}^{-3} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Le calcul numérique des coefficients de Fourier  $g_n$  pour des impulsions réelles  $\pi/2$  dans la cavité micro-onde (profil de champ sinusoïdal) permet de déterminer la stabilité correspondante des fluctuations de la fréquence d'horloge (expression (3.39)) :

$$\sigma_y(\tau) = 1.2 \times 10^{-13} \tau^{-1/2} \quad (3.43)$$

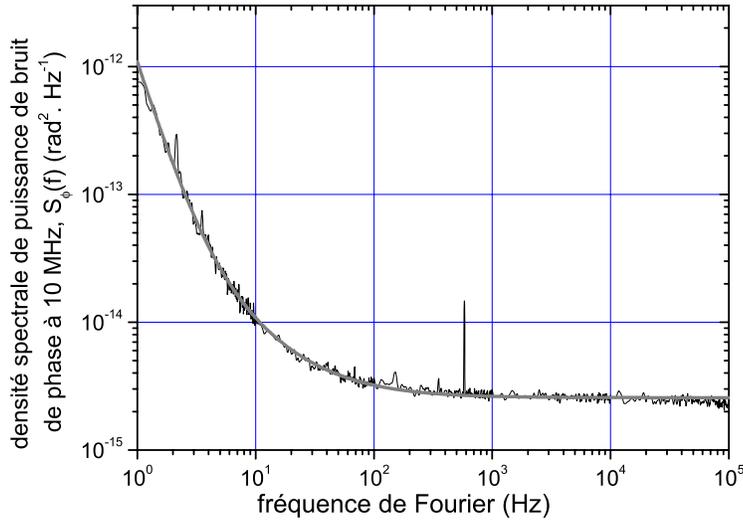


FIG. 3.19 – Densité spectrale de puissance de bruit de phase,  $S_\phi(f)$ , du quartz BVA à 5 MHz utilisé dans la génération du signal de distribution des 3 fontaines du BNM-LPTF. C'est le très bas bruit de fréquence en  $1/f$  (bruit de phase en  $1/f^3$ ) de ce quartz qui fait sa valeur comme signal de référence pour la mesure de la stabilité des fontaines.

dans laquelle la contribution du bruit de fréquence en  $1/f$  est essentiellement dominante<sup>20</sup> (on a pris  $T_c = 1.5$  s,  $T_{\text{vol libre}} = 384$  ms, et  $\tau_{\text{cav}} = 28.6$  ms, temps de passage des atomes dans la cavité).

Le raisonnement ci-dessus suppose implicitement que le signal qui interroge les atomes de *Rb* a la densité spectrale de bruit de phase du quartz BVA à 5 MHz. Ceci s'avère vrai en pratique. En effet, la chaîne de synthèse du signal de distribution à 100 MHz est très similaire dans son principe à la chaîne de synthèse *Rb* décrite précédemment. Elle fait intervenir un oscillateur à 100 MHz asservi sur le quartz BVA, avec une bande passante passante de  $\sim 100$  Hz. Le bruit de phase de la chaîne de synthèse du signal de distribution recopie donc le bruit de phase du quartz BVA jusqu'à  $\sim 100$  Hz et est meilleur au-delà. La chaîne de synthèse *Rb* recopie quant à elle le bruit de phase du signal de distribution dans une bande ajustable de l'ordre de 100 – 1000 Hz. Au delà, les performances de bruit de phase sont celles du quartz 100 MHz de la chaîne *Rb* et du YIG.

Par conséquent, en théorie, le bruit de phase du signal d'interrogation est inférieur au bruit de phase du quartz BVA 5 MHz, ce qui signifie que la valeur de  $1.2 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  trouvée précédemment est une borne supérieure pour la contribution du bruit de phase du signal d'interrogation à la stabilité de la fontaine *Rb* (cf. note de bas de page<sup>21</sup>).

<sup>20</sup>Les contributions à la variance d'Allan à 1 s sont successivement, à partir du bruit en  $1/f$  et par puissance croissante de  $f$  :  $1.518 \times 10^{-26}$ ,  $-5.387 \times 10^{-27}$ ,  $4.176 \times 10^{-27}$ , et  $2.23 \times 10^{-28}$ .

### 3.5.4 Limite de stabilité liée au système de détection

La seconde cause de limitation de la stabilité des fontaines provient du bruit de la mesure de la probabilité de transition. Ce bruit est généré au niveau du système de détection décrit précédemment. Trois sources de bruit participent au bruit de détection, chacune apportant sa contribution aux fluctuations de probabilité de transition : le bruit des photodiodes et de l'électronique, le bruit du laser de détection, et le bruit de projection quantique. On trouvera dans la thèse d'É. Simon [53] et de S. Bize [30] les démonstrations détaillées conduisant aux expressions analytiques de ces trois contributions. Nous rappelons ici ces expressions en insistant sur leur signification physique.

Pour cela, remontons la chaîne de mesure, depuis l'ordinateur qui calcule la probabilité de transition à l'aide des aires de temps de vol, jusqu'aux atomes qui traversent les faisceaux de détection.

#### Bruit des photodiodes et de l'électronique

La première source de bruit rencontrée provient des fluctuations de tension issue de la chaîne de conversion "fluorescence→tension". Ce bruit de tension provient du bruit de conversion "photon-électrons" de la photodiode de détection, du pré-amplificateur "courant-tension", et de l'amplificateur de tension (cf. figure (5.20)). Rappelons que les populations des deux niveaux d'horloge sont mesurées indépendamment dans deux zones de détection séparées de 15 mm, et les signaux de fluorescence correspondants sont convertis dans deux chaînes de conversion "fluorescence→tension" indépendantes. Les fluctuations de tension des deux chaînes de conversion ne sont donc pas corrélées et s'ajoutent quadratiquement.

Pour chacune des voies de détection, le bruit de tension est converti en bruit d'aire de temps de vol. Notre méthode de calcul de l'aire  $A_i$  de temps de vol correspond à un filtrage linéaire de la tension  $V_i(t)$  par un filtre de réponse impulsionnelle  $h(t)$  ( $i$  désigne l'état excité,  $e$ , ou bien fondamental,  $f$ , dans lequel on détecte les atomes). Cette fonction est représentée sur la figure (3.20), avec le carré du module de sa transformée de Fourier,  $H(f)$ . On a :

$$A_i = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)V_i(t)dt \quad (3.44)$$

Le filtrage des fluctuations de tension se traduit alors sur les fluctuations d'aire par :

$$\sigma_{\delta A_i}^2 = \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 S_V(f)df \quad (3.45)$$

---

<sup>21</sup>Il faut noter cependant que si les constantes de temps des diverses boucles d'asservissements ne sont pas soigneusement ajustées, il est possible au contraire de dégrader la stabilité de la fontaine et de dépasser cette valeur de  $1,2 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$ . Par exemple, selon la bande passante de l'asservissement du quartz 100 MHz sur le signal de distribution (asservissement avec intégrateur du second ordre), on peut observer une "bosse" de bruit sur le spectre du signal asservi, en bord de bande passante. L'optimisation des constantes de temps des divers asservissements mis en oeuvre dans les chaînes de synthèse est une opération longue. Elle ne peut être réellement faite qu'en mesurant la stabilité de la fontaine, véritable réponse des atomes au spectre d'interrogation. De plus cette optimisation n'est valable que pour un rapport cyclique  $T/T_c$  donné et une configuration donnée de la puissance de l'impulsion micro-onde ( $\pi/2, 3\pi/2 \dots$ ).

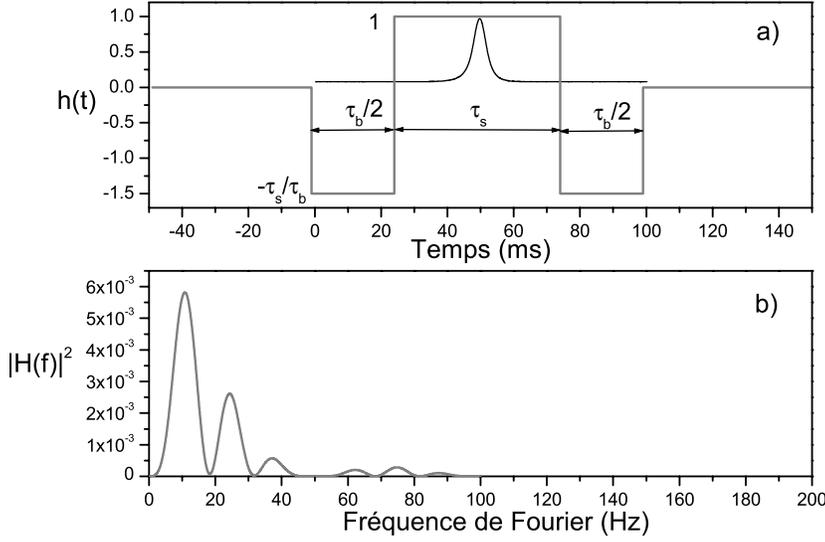


FIG. 3.20 – *Figure a)* : en gris, filtre temporel  $h(t)$  du système de détection, utilisé pour le calcul de l'aire de temps de vol. On a représenté en noir un exemple de temps de vol. L'aire sous la courbe du temps de vol est calculée en retranchant la ligne de base du temps de vol ( $t \in [0, \tau_b] \cup [\tau_s + \tau_b, \tau_s + 2\tau_b]$ ). Ceci revient à multiplier le temps de vol par  $h(t)$  puis à intégrer sur le temps. *Figure b)* : carré du module de la transformée de Fourier de  $h(t)$ ,  $H(f)$ .  $|H(f)|^2$  représente le filtre des fluctuations de tensions. La prise en compte de la ligne de base dans le calcul de l'aire permet de soustraire les fluctuations lentes (comportement en  $f^4$  de  $|H(f)|^2$  aux basses fréquences).

où  $\sigma_{\delta A_i}$  est l'écart type des fluctuations d'aire du temps de vol "i", et où  $S_V(f)$  est la densité spectrale de puissance de bruit de tension. Ces fluctuations d'aire sont équivalentes à des fluctuations  $\delta N_{det}$  du nombre d'atomes détectés sur la voie  $i$ . Les fluctuations d'aire se traduisent en fluctuations de la probabilité de transition  $P$ . Sachant que  $P$  est calculée de la façon suivante :

$$P = \frac{A_e}{A_e + A_f} \quad (3.46)$$

on trouve :

$$\delta P = \frac{A_f \delta A_e - A_e \delta A_f}{(A_e + A_f)^2} \quad (3.47)$$

c'est à dire, en supposant  $A_e = A_f$  (cf. note<sup>22</sup>) :

$$\delta P = \frac{1}{2} \times \frac{\delta A_e - \delta A_f}{A_e + A_f} \quad (3.48)$$

<sup>22</sup>Cette situation est obtenue en travaillant par exemple à mi-hauteur de la frange centrale de Ramsey et en effectuant des impulsions  $\pi/2$ . Mais on est aussi dans cette situation si on travaille au sommet de la frange centrale de Ramsey, et qu'on effectue des impulsions  $\pi/4$ .

L'écart type de ces fluctuations s'écrit :

$$\sigma_{\delta P} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sigma_{\delta A_e}}{A_e + A_f} \quad (3.49)$$

puisque les fluctuations d'aires sur les deux voies ne sont pas corrélées. A un coefficient  $\mathcal{D}$  de conversion près<sup>23</sup>, dénominateur et numérateur représentent respectivement le nombre total d'atomes détectés,  $N_{det}$ , et l'écart type des fluctuations équivalentes de nombre d'atomes "par voie",  $\sigma_{\delta N_{det}}$ .

$$\sigma_{\delta P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sigma_{\delta N_{det}}}{N_{det}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{N_{det}} \times \frac{1}{\mathcal{D}} \left( \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 S_V(f) df \right)^{1/2} \quad (3.50)$$

Finalement, revenons à l'expression (3.28). La contribution du bruit des photodiodes et de l'électronique d'amplification à l'écart type d'Allan des fluctuations de fréquence de la fontaine s'écrit :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi Q_{at}} \times \frac{\sqrt{2} \sigma_{\delta N_{det}}}{N_{det}} \times \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \quad (3.51)$$

Application numérique : dans la bande passante du filtre  $H(f)$  ( $\sim 50$  Hz), le spectre des fluctuations de tension est bien approché par du bruit blanc, de densité spectrale  $S_V(f) = 2.3 \times 10^{-12} \text{ V}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ . Le calcul numérique de l'intégrale de  $|H(f)|^2$  (cf. (3.45)) conduit alors à  $\sigma_{\delta A_i} = 4.1 \times 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s}$ , ce qui correspond à un écart type des fluctuations de nombre d'atomes  $\sigma_{\delta N_{det}} \simeq 234$  atomes par voie, et à une stabilité  $\sigma_y(\tau) = 2.45 \times 10^{-8} \times 1/N_{det} \times 1/\sqrt{\tau}$  (on a pris  $T_c = 1.5 \text{ s}$ ,  $T_{vol \text{ libre}} = 384 \text{ ms}$ ). Pour le nombre d'atomes typiquement détectés pendant la campagne de mesures du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ ,  $N_{det} \simeq 6 \times 10^6$ ; dans ces conditions, la contribution du bruit électronique à la stabilité de la fontaine vaut :

$$\sigma_y(\tau) = 4.1 \times 10^{-15} \times \tau^{-1/2}$$

### Bruit provenant du laser de détection

En amont de la chaîne de conversion "fluorescence→tension", une autre source de bruit provient des fluctuations relatives de fréquence et de puissance du laser de détection. Ces fluctuations, de densités spectrales respectives  $S_y(f)$  et  $S_{\delta I/I}$ , induisent des fluctuations relatives du taux d'émission spontanée, de densité spectrale  $S_{\delta \gamma}(f)$ . Ces fluctuations du taux d'émission spontanée induisent des fluctuations d'aire de temps de vol, proportionnelles au nombre d'atomes présents dans les faisceaux de détection. Notons  $f(t)$  le nombre d'atomes présents dans le faisceau supérieur de détection, à l'instant  $t$ , rapporté à l'aire totale du temps de vol correspondant,  $A_e$ . A l'instant  $t+\Delta t$ , ces atomes traversent le faisceau inférieur de détection, induisant des fluctuations de l'aire de temps de vol  $A_f$ . Ces fluctuations s'écrivent, dans chaque faisceau

<sup>23</sup>Ce coefficient sera calculé en détail dans le chapitre 5. On le nomme "défectivité", par voie, du système de détection. C'est l'aire élémentaire de temps de vol, exprimée ici en V.s, pour 1 atome détecté. Elle vaut  $\mathcal{D} \simeq 1.4 \times 10^{-2} / (8192 \times 10^3)$  (la carte numérique analogique convertit un créneau de 10V pendant 1s en 12 bits, avec une fréquence d'échantillonnage de 20 kHz).

de détection :

$$\begin{aligned}\delta A_e &= A_e \times \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\gamma(t) f(t) dt \\ \delta A_f &= A_f \times \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\gamma(t) f(t - \Delta t) dt\end{aligned}\quad (3.52)$$

et induisent des fluctuations de la probabilité de transition qui, d'après (3.48), s'écrivent, en se plaçant encore dans le cas où  $A_e = A_f$  :

$$\delta P = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\gamma(t) [f(t) - f(t - \Delta t)] dt \quad (3.53)$$

Les fluctuations de fréquence et de puissance du laser de détection sont donc converties en fluctuations de la probabilité de transition par une opération de filtrage linéaire, de réponse impulsionnelle  $h(t) = 1/4 \times (f(t) - f(t - \Delta t))$ . La figure (3.21) représente cette fonction de filtrage, ainsi que le carré du module de sa fonction de transfert, pour des valeurs typiques de temps de vol :  $\Delta t = 3.9$  ms et un profil de temps de vol gaussien avec une largeur de 2.2 ms à  $1/\sqrt{e}$ .

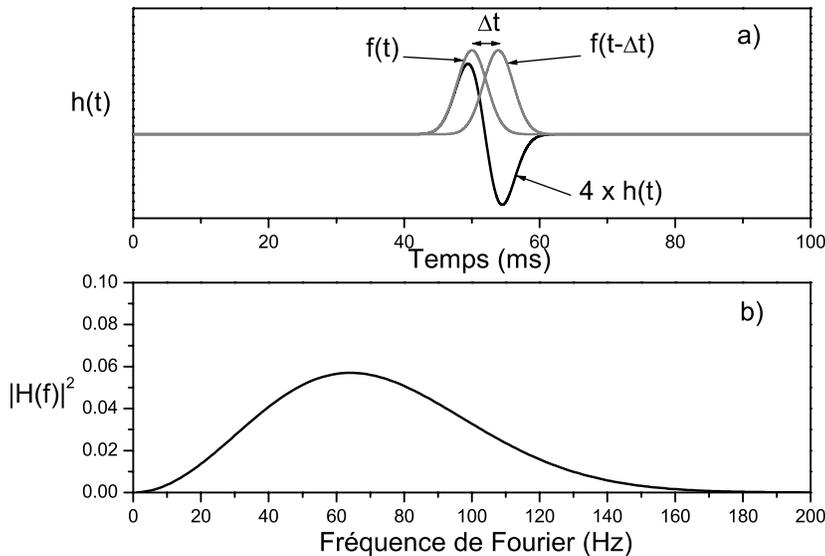


FIG. 3.21 – *Figure a)* : en gris, profils temporels de la fluorescence dans chaque zone de détection. Les deux temps de vol sont séparés de  $\Delta t$ , temps de transit du nuage du faisceau supérieur au faisceau inférieur. On a représenté en noir la fonction différence, égale à  $4 \times h(t)$ , qui filtre les fluctuations relatives de taux d'émission spontanée. *Figure b)* : carré du module de la transformée de Fourier  $H(f)$  de  $h(t)$ .

L'expression (3.53) se traduit en écart des fluctuations de probabilité de tran-

sition de la manière suivante :

$$\sigma_{\delta P}^2 = \int_0^{+\infty} S_{\delta\gamma}(f) |H(f)|^2 df \quad (3.54)$$

Deux contributions participent aux fluctuations du taux d'émission spontanée : les fluctuations du désaccord  $\delta$  de fréquence du laser, et les fluctuations de l'intensité  $I$  du faisceau laser. L'expression du taux d'émission spontanée  $\gamma(t)$  permet de relier les spectres de ces trois grandeurs :

$$\gamma(t) = \frac{\Gamma}{2} \frac{s(t)}{1 + s(t)} \quad (3.55)$$

où  $s(t)$  est la saturation du faisceau de détection et est donnée par :

$$s(t) = \frac{I(t)/I_S}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (3.56)$$

Afin de donner un ordre de grandeur, on se place dans le cas le pire, c'est à dire pour une faible saturation ( $s(t) \ll 1$ ) et pour le désaccord qui maximise la sensibilité de la saturation aux fluctuations de fréquences ( $\delta = \Gamma/2$ ). De plus, l'absence de corrélations entre les fluctuations de puissance et de fréquence entraîne que les deux contributions s'ajoutent quadratiquement. Dans ces conditions, la dérivation de l'expression précédente donne :

$$S_{\delta\gamma}(f) = \left( \frac{2\omega_{laser}}{\Gamma} \right)^2 S_y(f) + S_{\delta I/I}(f) \quad (3.57)$$

et la limitation correspondante sur la stabilité de fréquence de la fontaine s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_y(\tau) &= \frac{2}{\pi Q_{at}} \times \left( \int_0^{+\infty} S_{\delta\gamma}(f) |H(f)|^2 df \right)^{1/2} \times \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \\ &= \frac{1}{\pi Q_{at}} \times \gamma_{laser} \times \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

où on a introduit la grandeur  $\gamma_{laser}$  qui est indépendante du nombre d'atomes détectés,  $N_{det}$ .

En pratique, la stabilité de fréquence à court terme du laser de détection, monté en cavité étendue et asservi sur une cellule d'absorption saturée, est typiquement  $\sigma_y(\tau) = 4 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  jusqu'à 1 s [119]. Cette stabilité à court terme correspond à un bruit blanc de densité spectrale  $S_y(f) = 2\tau \times \sigma_y^2(\tau) = 3.2 \times 10^{-25}$  pour  $f < 1$  Hz. Le calcul numérique de l'intégrale du filtre  $|H(f)|^2$  permet d'en déduire  $\sigma_{\delta P} = 1.5 \times 10^{-4}$ . La limitation correspondante de la stabilité de la fontaine est  $\sigma_y(\tau) = 2.3 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ .

Nous n'avons pas mesuré la densité spectrale  $S_{\delta I/I}$  des fluctuations relatives de puissance de la diode laser de détection du banc *Rb*, dont la puissance n'était par ailleurs pas asservie. Par-contre, nous avons mesuré cette densité spectrale pour une diode montée en cavité étendue utilisant un principe légèrement différent de celui employé sur le banc optique *Rb*. Sur ce montage,

l'élément sélectif en fréquence est un étalon Fabry-Perot en transmission, tandis qu'un "oeil de chat" constitue la deuxième face de la cavité étendue, assure l'injection de la diode laser et permet l'éjection du faisceau de sortie. On trouvera plus de détails dans la thèse de S. Bize [30] sur ce montage. On montre que ce type de montage est moins sensible aux vibrations acoustiques et aux désalignements progressifs de la cavité étendue. Il équipe le nouveau banc optique *Cs* de l'horloge *RbCs*. De plus, sa puissance est asservie au moyen d'une boucle faisant intervenir un modulateur acousto-optique. Cet asservissement améliore la stabilité des fluctuations relatives de puissance d'un facteur  $\sim 30$ .

Pour donner un ordre de grandeur de la densité spectrale  $S_{\delta I/I}$  dans le cas qui nous préoccupe maintenant, sur le banc *Rb*, on prend la densité spectrale mesurée pour le nouveau type de montage sans asservissement de puissance. On mesure dans ce cas

$$S_{\delta I/I}(f) \simeq \frac{10^{-7}}{f}$$

Le calcul numérique du filtrage de cette densité spectrale par la fonction  $|H(f)|^2$  conduit alors à  $\sigma_{\delta P} = 8.8 \times 10^{-5}$ , qui limite la stabilité à  $\sigma_y(\tau) = 1.3 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ .

Les deux contributions évoquées dans ce paragraphe s'ajoutent quadratiquement pour donner  $\sigma_{\delta P} = 1.8 \times 10^{-4}$ , qui limite la stabilité à

$$\sigma_y(\tau) = 2.6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$$

Insistons encore sur le fait que l'estimation de la contribution des fluctuations de fréquence du laser de détection est une estimation pessimiste, puisqu'on a supposé les atomes non-saturés et qu'on s'est placé à un désaccord qui maximise la sensibilité aux fluctuations de fréquence. En revanche l'estimation de la contribution des fluctuations de puissance du laser est certainement optimiste, à cause d'une isolation insuffisante du laser de détection relativement aux retours lumineux (observation d'une modulation parasite sur le signal d'asservissement lié à réflexions parasites sur les faces des optiques, malgré l'utilisation d'un isolateur à double étage).

Nous verrons par la suite que la mesure des fluctuations de probabilité de transition  $\sigma_{\delta P}$ , à très grand nombre d'atomes détectés  $N_{det}$ , permet d'accéder indirectement à la contribution réelle du bruit du laser de détection. Nous mesurerons  $\sigma_{\delta P} = 6.5 \times 10^{-4}$ , ce qui limite la stabilité à

$$\sigma_y(\tau) = 10^{-13} \tau^{-1/2}$$

### Bruit de projection quantique

Remontons encore la chaîne de mesure de la probabilité de transition. En amont du processus d'absorption-émission spontanée de photons par les atomes dans les faisceaux de détection, **c'est le fait même de mesurer dans quel état se trouve l'atome** qui induit des fluctuations sur la probabilité de transition. Comme on l'a déjà mentionné au § 3.3.4, chaque atome est dans l'état  $|\psi\rangle = C_e|e\rangle + C_f|f\rangle$  lorsqu'il pénètre dans la zone de détection;  $|e\rangle$  et  $|f\rangle$  désignent respectivement l'état excité et l'état fondamental de la transition d'horloge. Dans le faisceau de détection supérieur, le couplage de l'atome avec

le champ lumineux du faisceau de détection projette l'état atomique sur  $|e\rangle$  ou bien sur  $|f\rangle$ . Le système de lentilles asphériques de la zone supérieure permet de collecter la fluorescence des atomes projetés dans l'état  $|e\rangle$ . La zone inférieure de détection, identique à la zone supérieure, ne sert qu'à compter les atomes qui ont été projetés sur l'état  $|f\rangle$  dans la zone supérieure.

Autrement dit, **le processus de mesure est une expérience binômiale de projection sur  $|e\rangle$  ou bien sur  $|f\rangle$ , qui se déroule entièrement dans la zone supérieure de détection, et qui traite en fait tous les atomes du nuage en même temps au lieu de les traiter les uns après les autres.**

Si  $P = P_e$  est la probabilité moyenne de trouver l'atome dans l'état excité à l'issue de cette expérience binômiale,  $1 - P = P_f$  est la probabilité moyenne de trouver l'atome dans l'état fondamental, et la distribution des mesures de probabilité,  $p(P)$ , a pour écart type  $\sqrt{P(1-P)}$ . L'expérience étant répétée pour les  $N_{det}$  atomes du nuage, l'écart type des mesures de probabilité vaut :

$$\sigma_{\delta P} = \frac{\sqrt{P(1-P)}}{\sqrt{N_{det}}} \quad (3.59)$$

On nomme le bruit lié à ces fluctuations "bruit de projection quantique" [134]. La limitation correspondante sur la stabilité de la fontaine s'écrit, d'après (3.28) :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi Q_{at}} \times \frac{1}{\sqrt{N_{det}}} \times \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \quad (3.60)$$

On remarquera que cette relation a été établie sans faire d'hypothèse sur la probabilité  $P$ . Elle est donc valable quelque soit la profondeur de la modulation de part et d'autre de la frange centrale de Ramsey.

Pour le nombre typique d'atomes détectés pendant la campagne de mesure du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ ,  $N_{det} = 6 \times 10^6$ , la contribution du bruit de projection quantique à la stabilité de la fontaine est

$$\sigma_y(\tau) \simeq 3 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$$

Contrairement aux autres sources de bruit, le bruit de projection quantique constitue une limite fondamentale à la stabilité des fontaines, parce qu'il est intrinsèque à la mesure même de la probabilité de transition. Pour abaisser cette limite, une première façon est d'augmenter le nombre d'atomes détectés; ceci finira néanmoins par poser des problèmes pour le bilan d'exactitude de la fontaine, à cause de l'incertitude sur la détermination des nombres d'atomes, et de l'incertitude qu'elle induit sur la correction du déplacement collisionnel. Une autre façon est d'imaginer un moyen de corrélérer les états internes des atomes détectés du nuage. Dans ce cas, le processus de mesure ne concernerait plus  $N_{det}$  processus indépendants de projection sur l'état excité ou fondamental, mais  $N_{det}$  processus corrélés, du moins partiellement. Ce domaine fascinant de la recherche fait intervenir les techniques de "spin squeezing" [135] et est l'une des voies d'avenir possible pour l'amélioration des performances des fontaines. Ces méthodes sont lourdes à mettre en pratique et n'autorisent pour le moment pas un degré de corrélation suffisant pour apporter une amélioration notable de la stabilité dans les fontaines.

Contribution à la stabilité	$\sigma_y(\tau) \times \sqrt{\tau}$	Dépendance en $N_{det}$
Bruit de projection quantique	$3 \times 10^{-14}$	$N_{det}^{-1/2}$
Bruit de grenaille des photons	$< 2 \times 10^{-15}$	$N_{det}^{-1/2}$
Bruit d'électronique	$4.1 \times 10^{-15}$	$N_{det}^{-1}$
Bruit du laser de détection	$1 \times 10^{-13}$ (*)	$N_{det}^0$
Bruit de fréquence de l'oscillateur d'interrogation	$1.2 \times 10^{-13}$	$N_{det}^0$
<b>somme quadratique</b>	<b><math>1.6 \times 10^{-13}</math></b>	

TAB. 3.1 – *Bilan des différentes contributions à la stabilité de la fontaine Rb, pour  $6 \times 10^6$  atomes détectés, un temps de cycle de 1.5 s, une largeur totale de 1.3 Hz pour la frange centrale de Ramsey, et en utilisant le quartz BVA 5 MHz à la base de la synthèse du signal d'interrogation. (\*) La contribution du bruit du laser de détection est ici déduite du palier horizontal clairement identifiable sur la figure (3.23). Elle est effectivement supérieure à la valeur estimée précédemment.*

Remarque : il existe aussi une source de bruit liée à la statistique des temps d'arrivée des photons sur la photodiode. Ce bruit est blanc et induit aussi des fluctuations de la probabilité de transition

$$\sigma_{\delta P} = \frac{\sqrt{P(1-P)}}{\sqrt{n_{ph} N_{det}}} \quad (3.61)$$

où  $n_{ph}$ , de l'ordre de 300, est le nombre de photons diffusés et détectés par atome traversant la zone de détection. La contribution de ce bruit à la stabilité de la fontaine est donc d'un facteur  $\sim 17$  inférieur à celle du bruit de projection quantique.

### 3.5.5 Bilan des sources de bruit

Les sources de bruit rencontrées précédemment contribuent de façon non corrélée à la limitation de stabilité de la fontaine Rb. La stabilité de la fontaine, déduite des équations (3.60), (3.61), (3.51), (3.58) et (3.39), s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_y(\tau) &= \frac{1}{\pi Q_{at}} \times 2\sigma_{\delta P} \times \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \\ &= \frac{1}{\pi Q_{at}} \times \left[ \frac{1}{N_{det}} + \frac{1}{n_{ph} N_{det}} + \frac{2\sigma_{\delta N_{det}}^2}{N_{det}^2} + \gamma_{laser}^2 + \gamma_{OI}^2 \right]^{1/2} \times \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Les termes dans les crochets correspondent successivement au bruit de projection quantique, au bruit de grenaille des photons, au bruit généré dans l'électronique de détection, au bruit de puissance et de fréquence du laser de détection, et au bruit de fréquence de l'oscillateur d'interrogation. Ces deux derniers termes sont largement dominants lorsqu'on utilise un oscillateur à quartz au départ de la chaîne de synthèse du signal d'interrogation, et qu'on utilise le laser de détection dans les conditions décrites précédemment.

Le tableau (3.1) récapitule les diverses contributions à la stabilité de la fontaine *Rb*, lorsqu'on détecte un grand nombre d'atomes ( $N_{det} = 6 \times 10^6$ ). Expérimentalement, la valeur obtenue pour la stabilité de la fontaine *Rb* est  $\sigma_y(\tau) = 1.5 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  dans les mêmes conditions. Ce résultat est en bon accord avec la somme quadratique des différentes sources de bruit (cf. figure (3.22)).

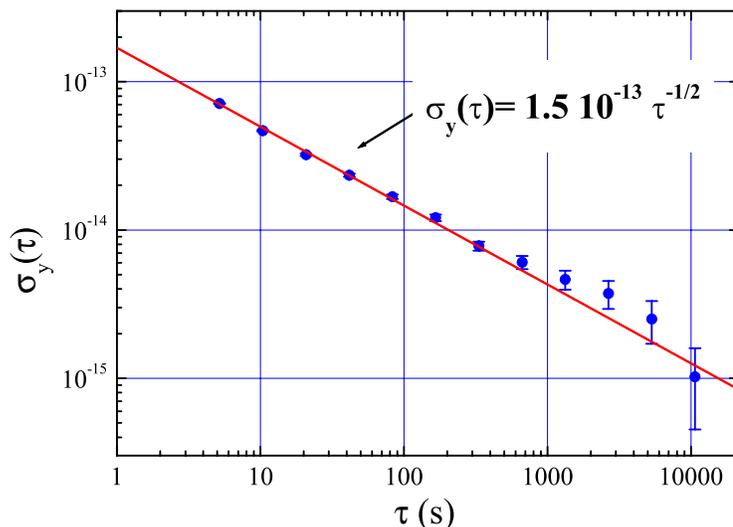


FIG. 3.22 – Écart type d'Allan des fluctuations relatives de fréquence de la fontaine *Rb*, en fonction du temps d'intégration,  $\tau$ . Le signal d'interrogation est généré à partir de l'oscillateur à quartz BVA 5 MHz mentionné plus haut. Le temps de cycle est de  $T_c = 1.5$  s, le temps de vol au-dessus de la cavité est de  $T = 384$  ms, et le temps de séjour des atomes dans la cavité est, à chaque passage, de  $\tau_{cav} = 28.6$  ms.

La figure (3.23) montre les résultats de mesure des fluctuations de probabilité de transition,  $\sigma_{\delta P}$ , en fonction du nombre d'atomes détectés,  $N_{det}$ . Ces mesures ont été effectuées en accordant la source d'interrogation sur le sommet de la frange centrale de Ramsey ( $\delta \times T = 0$ ) et en diminuant la puissance injectée dans la cavité micro-onde de façon à effectuer des impulsions  $\pi/4$ . La probabilité de transition vaut alors  $P = 1/2$ , et les expressions données précédemment pour  $\sigma_{\delta P}$  sont donc valables. Par-contre, cette méthode permet de ne plus être sensible aux fluctuations de fréquence de l'oscillateur d'interrogation : au sommet de la frange centrale de Ramsey, la probabilité de transition dépend quadratiquement de la fréquence de l'oscillateur d'interrogation.

Les contributions des autres sources de bruit ne sont donc plus masquées, et elles apparaissent clairement sur la figure (3.23), chacune avec sa signature propre en  $N_{det}$ . Chaque point expérimental résulte d'une mesure de l'écart type à 1 cycle des fluctuations de probabilité de transition, moyennées sur  $\sim 256$  cycles de fontaine (pour chaque mesure, la stabilité des fluctuations  $\delta P$  décroît en

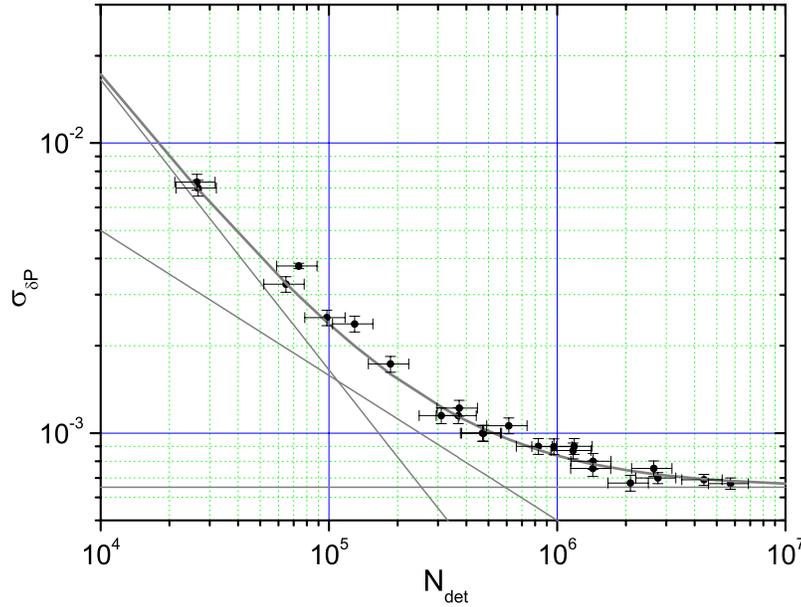


FIG. 3.23 – Mesures de l'écart type des fluctuations de probabilité de transition,  $\sigma_{\delta P}$ , en fonction du nombre d'atomes détectés,  $N_{\text{det}}$ , sur l'horloge Rb. L'oscillateur d'interrogation est accordé au sommet de la frange centrale de Ramsey, et on effectue des impulsions  $\pi/4$  dans la cavité micro-onde. La courbe en gris résulte de la somme quadratique des contributions des différentes sources de bruit : bruit de l'électronique de la détection, bruit de projection quantique, bruit du laser de détection (droites en trait fin). Elle est en bon accord avec les points expérimentaux.

$\tau^{-1/2}$ ). La barre d'erreur horizontale correspond à une incertitude de 20% sur le nombre d'atomes détectés, liée à la méthode de calibration du système de détection. Les droites grises en trait fin représentent les contributions du bruit de l'électronique, du bruit de projection quantique (valeurs données dans le tableau (3.1)) et du bruit du laser de détection. En ce qui concerne ce dernier bruit, il apparaît que le palier horizontal qui lui correspond, clairement identifiable à  $\sim 6.5 \times 10^{-4}$  sur la figure (3.23), est plus élevé que la valeur  $1.8 \times 10^{-4}$  estimée précédemment. Cette valeur était donc effectivement optimiste, si aucun autre bruit ne contribue sérieusement à ce palier horizontal. Dans ce cas, la mesure de ce palier constitue une mesure indirecte de la stabilité du laser de détection, fluctuations de puissance et de fréquence. Elles induisent une limitation sur la stabilité de la fontaine au niveau de  $10^{-13}\tau^{-1/2}$ .

La courbe grise en trait épais représente la somme quadratique des contributions citées dans le tableau (3.1), lesquelles sont représentées par les droites grises. Elle est en bon accord avec les points expérimentaux.

Cette mesure amène deux conclusions :

1. Si on trouve un moyen de s'affranchir du bruit de l'oscillateur d'interroga-

tion, la stabilité de la fontaine de la fontaine *Rb* n'est pas loin au-dessus de la limite liée au bruit de projection quantique : pour  $N_{det} = 3 \times 10^5$ , la stabilité mesurée de la fontaine n'est que d'un facteur 1.3 au-dessus de la stabilité limitée par le bruit de projection quantique. Le bruit de projection quantique contribue pour 53% dans la variance, le palier horizontal pour 28%, et le bruit de l'électronique pour 19%. Dans l'horloge *RbCs*, on verra que le palier horizontal est au niveau de  $\sigma_{\delta P} = 1.5 \times 10^{-5}$ , grâce au montage amélioré de la cavité étendue du laser de détection. Pour le même nombre d'atomes, et si on s'affranchit du bruit de l'oscillateur d'interrogation, la stabilité est alors limitée par le bruit de projection quantique.

2. Cette méthode confirme la détermination du nombre d'atomes détectés par calibration directe du système de détection. C'est une mesure **totale-ment indépendante** du nombre d'atomes, qui vient s'ajouter aux autres méthodes de détermination du nombre d'atomes dans la fontaine, qui seront discutées en détail dans les deux chapitres suivants.

Lorsqu'on utilise un oscillateur à quartz comme oscillateur de filtrage, la stabilité des fontaines est largement limitée par les fluctuations de l'oscillateur d'interrogation à  $\sim 1.5 \times 10^{-13} \times \tau^{-1/2}$ , dominées par le bruit de phase en  $1/f$ . Pour améliorer cette valeur, on doit utiliser un oscillateur de filtrage ayant une meilleure stabilité à court terme, comme un oscillateur cryogénique à résonateur en saphir. Toutefois, le schéma de distribution "en étoile" du signal de l'oscillateur de filtrage aux 3 fontaines permet en théorie de rejeter le bruit de cet oscillateur, parce que ses fluctuations de fréquence contribuent de manière corrélée aux signaux d'interrogation générés au niveau de chacune des 3 chaînes de synthèse. Le paragraphe suivant montre les résultats d'une telle expérience, où on observe la réjection partielle des fluctuations de l'oscillateur de filtrage.

### 3.5.6 Comment rejeter au moins partiellement le bruit de l'oscillateur local ?

Il est possible de rejeter, dans la comparaison directe de deux fontaines, le bruit de fréquence lié à l'oscillateur de filtrage. A titre de démonstration, nous avons effectué l'expérience suivante [136].

Nous avons remplacé l'excellent quartz BVA à 5 MHz par un quartz ayant une densité spectrale de bruit de phase largement supérieure, avec une forte composante de bruit de phase en  $1/f$ . En particulier, le bruit de fréquence du signal distribué aux fontaines a une densité spectrale largement supérieure à la densité spectrale apportée par les chaînes de synthèse de chaque fontaine. Dans ces conditions l'effet de ce quartz "bruyant" est de dégrader, par effet Dick, la stabilité relative de fréquence de chaque fontaine, de  $\sim 1.5 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  à  $\sim 2.4 \times 10^{-12} \tau^{-1/2}$ .

Les géométries de la fontaine *Rb* et de la fontaine FO1 étant légèrement différentes, nous avons ensuite adapté les vitesses de lancement des nuages d'atomes froids de sorte que le temps de vol au-dessus de la cavité micro-onde soit identique dans les deux cas. Puis nous avons progressivement décalé l'instant de lancement du nuage d'atomes de Cs, dans l'horloge FO1, de sorte à passer le point où les deux nuages d'atomes froids, chacun dans son horloge

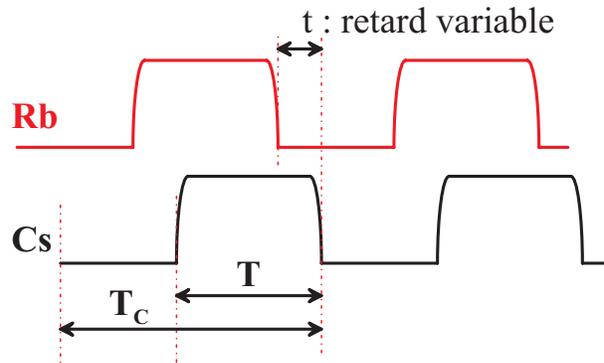


FIG. 3.24 – Synchronisation progressive des fonctions de sensibilité des deux fontaines.

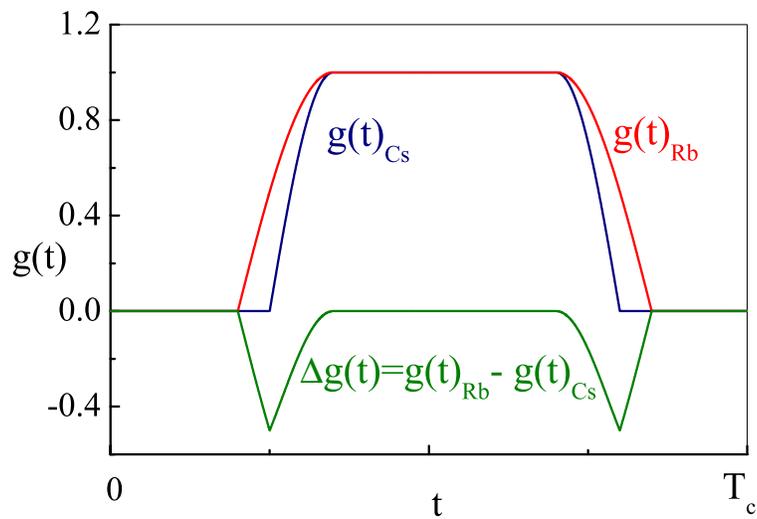


FIG. 3.25 – Recouvrement temporel des fonctions de sensibilité des fontaines Rb et FO1. On a pris ici un modèle simple pour les fonctions de sensibilité, correspondant à un profil spatial carré de champ micro-onde dans les cavités.

respective, entrent et sortent de la cavité micro-onde au même instant (cf. figure (3.24)). De cette façon, les deux nuages d'atomes échantillonnent le bruit de fréquence de l'oscillateur de filtrage pendant le même intervalle de temps, et la pente de la frange centrale de Ramsey, à mi-hauteur, est identique dans les deux cas. Dans cette situation, la variance de la différence des fluctuations relatives de fréquence des deux horloges fait intervenir les coefficients de Fourier de la différence des fonctions de sensibilité,  $\Delta g(t) = g(t)_{Rb} - g(t)_{Cs}$  (cf. expression (3.32)). On a donc intérêt à assurer le meilleur recouvrement entre ces deux fonctions de sensibilité si on veut minimiser la stabilité relative d'une fontaine par rapport à l'autre. En pratique, le recouvrement des deux fonctions de sensibilité ne peut cependant pas être parfait (cf. figure (3.25)), parce que les temps de passage des nuages dans les cavités ne sont pas identiques dans les deux cas (les cavités *Rb* et *Cs* n'ont pas la même taille).

Pour chaque valeur du décalage  $\Delta t$  entre les deux fonctions de sensibilités, nous avons effectué une intégration de  $\sim 10^4$  s, puis calculé l'écart type d'Allan de la différence relative des fluctuations de fréquence, notée

$$\sigma_{Diff}(\tau) = \sigma_{yRb-yCs}(\tau)$$

et la somme quadratique des variances, notée

$$\sigma_{Somme}(\tau) = \sqrt{\sigma_{yRb}^2 + \sigma_{yCs}^2}$$

La figure (3.26) représente le rapport  $\sigma_{Somme}/\sigma_{Diff}$  à 1 s (ce rapport ne dépend en fait pas de  $\tau$  pour  $\tau \lesssim 1000$  s), c'est à dire le taux de réjection des fluctuations obtenu par rapport au cas où on compare deux horloges indépendantes, utilisant deux oscillateurs de filtrage identiques mais non corrélés.

Lorsque le recouvrement des fonctions de sensibilité est maximal ( $\Delta t = 0$  ms), le taux de réjection est maximal. La courbe expérimentale est en relativement bon accord<sup>24</sup> avec la courbe théorique, calculée pour la densité spectrale de bruit de fréquence mesurée de cet oscillateur de filtrage, et pour le modèle simple de fonctions de sensibilité de la figure (3.25). On voit que la synchronisation des deux phases d'interrogation des atomes est très pointue (de l'ordre de quelques millisecondes), ce qui révèle la présence des harmoniques élevées du bruit de l'oscillateur libre dans le processus de recouvrement de spectres. On voit en effet que la différence  $\Delta g(t)$  présente des variations rapides avec le temps, ce qui signifie un taux de conversion élevé du bruit haute fréquence par les harmoniques élevées de la série de Fourier de  $\Delta g(t)$ .

Enfin, la figure (3.27) représente les stabilités mesurées pour la meilleure synchronisation des phases d'interrogation des deux horloges. La stabilité de la différence des fluctuations relatives de fréquence est  $2 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$ , proche de la valeur atteinte par comparaison d'une fontaine avec l'oscillateur de filtrage utilisant l'excellent quartz BVA à 5 MHz, et d'un facteur 16 meilleure que la stabilité relative des deux fontaines alimentées de façon décorrélée par le même oscillateur de filtrage.

---

<sup>24</sup> Pour améliorer cet accord, il faudrait raffiner le modèle de bruit de l'oscillateur de filtrage et prendre la fonction de sensibilité réelle, telle qu'on la mesurerait par la méthode décrite dans [137].

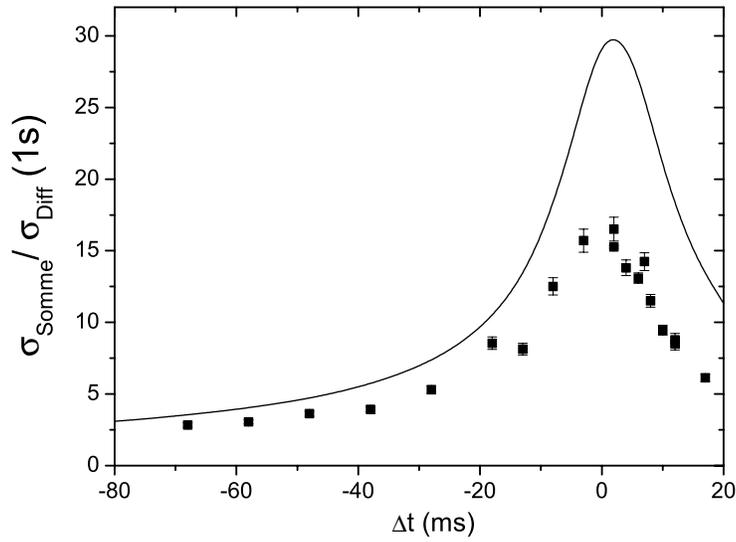


FIG. 3.26 – Taux de réjection des fluctuations de la différence relative de fréquence, en fonction du décalage temporel des fonctions de sensibilité des fontaines Rb et F01. Les points expérimentaux sont à comparer à la courbe en trait plein, calculée à partir de la densité spectrale mesurée de la puissance de bruit de fréquence de l'oscillateur de filtrage, et d'un modèle simple de fonction de sensibilité (profil spatial carré pour l'amplitude micro-onde dans les cavités).

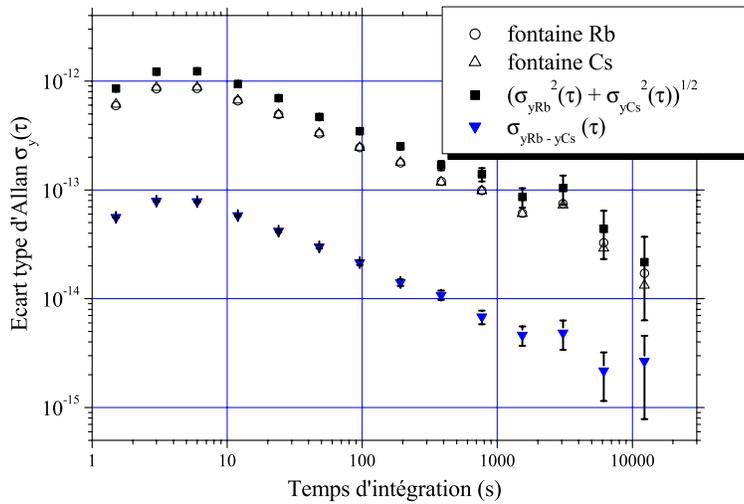


FIG. 3.27 – Écart type d'Allan des fluctuations relatives de fréquence de chaque fontaine, Rb (ronds creux), et F01 (triangles creux), par comparaison au signal de l'oscillateur de filtrage distribué à toutes les fontaines. En synchronisant les phases d'interrogation des atomes, on obtient une amélioration d'un facteur 12 sur la stabilité des fluctuations de la différence des fréquences relatives (triangles pleins), et d'un facteur 16 par rapport à la stabilité relative de deux fontaines ayant deux oscillateurs de filtrage identiques mais indépendants (carrés pleins).

## 3.6 Mesures de fréquence avec la fontaine *Rb*

### 3.6.1 Franges de Ramsey sur l'horloge *Rb*

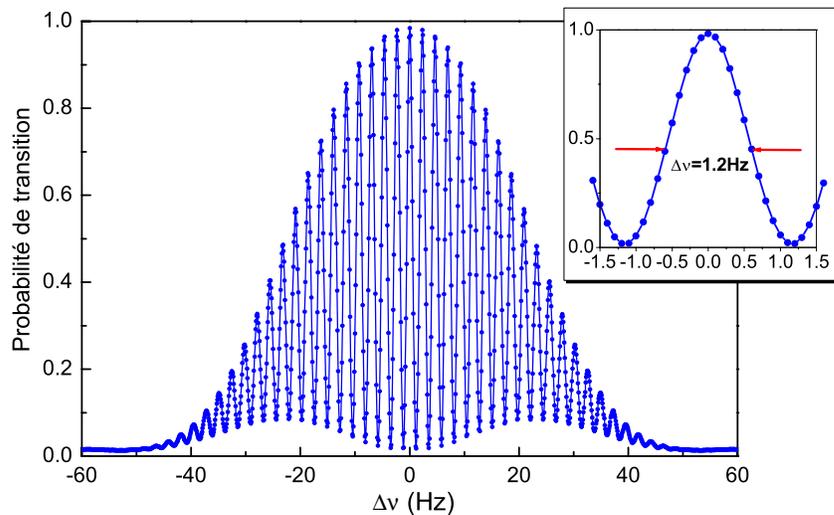


FIG. 3.28 – *Franges de Ramsey obtenues avec des atomes de Rb. En insert, la frange centrale de largeur totale 1.2 Hz, qui correspond à une vitesse de lancement de  $2.65 \text{ m.s}^{-1}$ .*

La figure (3.28) représente les franges de Ramsey de la transition d'horloge  $|F = 1, m = 0\rangle \rightarrow |F = 2, m = 0\rangle$  du  $^{87}\text{Rb}$ , mesurées sur la fontaine *Rb* du BNM-LPTF. Les atomes sont initialement préparés dans l'état  $|F = 1, m = 0\rangle$ , puis lancés à  $2.65 \text{ m.s}^{-1}$ . La frange centrale a une largeur totale à mi-hauteur de 1.2 Hz ce qui correspond à un facteur de qualité atomique de  $\sim 5.7 \times 10^9$ . Aucun moyennage n'a été effectué pour obtenir cette courbe (1 cycle de fontaine donne 1 point). Le rapport signal sur bruit à un cycle d'horloge, mesuré au sommet de la frange centrale, est  $\sim 1500$ , limité par le bruit du laser de détection. Le nombre d'atomes détectés est  $\sim 10^7$ , pour  $\sim 10^8$  atomes lancés dans  $|F = 1, m = 0\rangle$ .

### 3.6.2 Bilan d'exactitude de la fontaine *Rb*

Le tableau (3.2) dresse le bilan d'exactitude de l'horloge *Rb*, c'est à dire l'ensemble des effets physiques qui perturbent la fréquence de l'horloge, les déplacements de fréquence qui s'ensuivent, et les incertitudes sur la connaissance de ces déplacements. On discute brièvement les méthodes employées pour évaluer ces effets.

**Effet Zeeman du second ordre** On a déjà mentionné cet effet au § 3.3.1. Le champ directeur appliqué est de 0.5 mG et est mesuré par spectroscopie de la transition  $|F = 2, m = 1\rangle \rightarrow |F = 1, m = 1\rangle$ . L'incertitude de  $0.7 \times 10^{-15}$  du tableau correspond à une incertitude de  $8.5 \mu\text{G}$  sur le champ magnétique,

effet physique	déplacement relatif de fréquence ( $\times 10^{15}$ )	incertitude relative ( $\times 10^{15}$ )
Zeeman du second ordre	+20.6	0.7
rayonnement du corps noir	-12.6	0.5
"cavity pulling"	-1.0	0.2
Doppler du premier ordre	0	0.4
spectre et fuites micro-ondes	0	1.5
déplacement collisionnel	0	0*
Majorana, Ramsey et Rabi	0	< 0.1
effet de recul	0	0.2
collisions avec le gaz résiduel	0	< 0.1
Doppler du second ordre	0	< 0.008
<b>somme quadratique</b>		<b>1.8</b>
<b>exactitude fontaine Cs</b>		<b>1.1</b>
déplacement gravitationnel	+6.7	0.5

TAB. 3.2 – Bilan d'exactitude de la fontaine *Rb*. Le tableau répertorie les effets connus, les déplacements de fréquence qu'ils induisent par rapport à la fréquence de transition hyperfine de l'atome de  $^{87}\text{Rb}$  non perturbé, et les incertitudes sur ces déplacements de fréquence. \* : l'incertitude sur le déplacement collisionnel est en fait indiscernable de l'incertitude sur le "cavity pulling", puisqu'il s'agit d'une incertitude sur la mesure conjointe de ces deux effets. On ne la compte qu'une fois.

soit 12 Hz sur le pointé de la frange centrale du système de franges de la transition précédente, linéaire en champ. Cette incertitude est liée à la déformation particulièrement importante de ce système de franges, elle-même due aux inhomogénéités et aux fluctuations de champ magnétique induites par des courants thermo-électriques parasites, circulant autour de la zone d'interrogation. Ces perturbations nous ont obligé à contrôler en permanence la valeur du champ magnétique, avant et après chaque mesure de fréquence.

**Effet du rayonnement du corps noir** Cet effet a été mesuré de manière détaillée dans le cas du *Cs* [57, 138]. En ce qui concerne le  $^{87}\text{Rb}$ , il est possible de relier la constante  $K_{BB}^{Rb}$  à la constante  $K_{BB}^{Cs}$  grâce aux travaux de J. R. Mowat [58]. Pour l'environnement à 23 °C de la zone d'interrogation, le déplacement relatif de fréquence induit par le rayonnement du corps noir équivalent est de  $-12.6 \times 10^{-15}$ . L'incertitude associée, dans le tableau, correspond à une incertitude de 2.5 K pic à pic de la température de la salle d'expérience sur un an.

**Entraînement de fréquence par la cavité ("cavity pulling") et déplacement collisionnel** L'effet de "cavity pulling" sera discuté en détail dans le chapitre 4. Sa mesure sera discutée dans le chapitre 5. Il est lié au désaccord de la cavité micro-onde par rapport à la transition atomique, et est proportionnel au nombre d'atomes dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage,  $N_{cav}$ . La présence des courants thermo-électriques mentionnés précédemment nous a obligés à travailler à température ambiante (23 °C). A cette température, le désaccord de la cavité était de +1 MHz, ce qui induit un déplacement relatif de fréquence de  $-1 \times 10^{-15}$

( $N_{cav} \simeq 1.3 \times 10^7$ ). Notre méthode de mesure rend la mesure du "cavity pulling" simultanée de la mesure du déplacement collisionnel. De plus, on verra que la dépendance de ces deux effets avec le nombre d'atomes détectés n'est pas une relation simple. Cependant, le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  est très faible (malgré nos efforts, nous ne l'avons pas résolu de 0!) par rapport au "cavity pulling". La mise à résonance atomique de la cavité micro-onde permet donc de mesurer la fréquence de la fontaine en l'absence de perturbation dépendant notablement du nombre d'atomes, et d'en déduire le déplacement de fréquence induit par le "cavity pulling" à température ambiante, pour une aire de temps de vol donnée. La petitesse du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  permet donc de mesurer le déplacement de fréquence en fonction de l'aire de temps de vol, sans passer par une détermination absolue du nombre d'atomes.

L'incertitude associée dans le tableau ne tient pas compte de l'incertitude de calibration absolue du nombre d'atomes (13%). Elle tient compte de l'incertitude de reproductibilité de la détection (19%), et de l'incertitude statistique sur les mesures des déplacements de fréquence dépendant du nombre d'atomes (12%). Comme cette incertitude entâche la mesure conjointe des deux effets dépendant du nombre d'atomes, on a décidé de la mentionner une seule fois, sur la ligne du "cavity pulling".

**Effet Doppler du 1<sup>er</sup> ordre** Nous n'avons pas évalué cet effet dans l'horloge *Rb*. Nous lui affectons donc une valeur nulle et, prudemment, nous lui affectons une incertitude correspondant au cas le pire : l'incertitude du tableau est déduite du calcul numérique des gradients de phase dans la cavité, en supposant une dégradation d'un facteur 2 de la conductivité du cuivre par rapport à la conductivité maximale, et en considérant le déphasage induit sur des atomes dont les trajectoires explorent les plus grandes différences de phase du champ micro-onde (trajectoires hors d'axe). On trouvera plus de détails sur le calcul des gradients de phase et leur utilisation dans les thèses de P. Lemonde [121] et de M. Abgrall [127].

**Imperfections du spectre et fuites micro-ondes** Cet effet a été estimé en effectuant des mesures de fréquence pour différentes valeurs de la puissance micro-onde injectée (impulsions  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$ ,  $5\pi/2$ ). Le déplacement de fréquence mesuré reste inférieur à  $5 \times 10^{-15}$  à  $3\pi/2$ , et inférieur à  $10^{-14}$  à  $5\pi/2$ . Ces mesures ne révèlent pas de dépendance simple avec la puissance micro-onde : la position de tous les objets dans la salle d'expérience peut influencer la puissance et la phase du champ de fuite micro-onde sur la trajectoire des atomes. En considérant que les effets mesurés sont proportionnels à la pulsation de Rabi de l'impulsion micro-onde, on déduit que le déplacement de fréquence correspondant est inférieur à  $1.5 \times 10^{-15}$  pour des impulsions  $\pi/2$ . C'est la contribution principale au bilan d'exactitude. Un soin particulier a été apporté pour diminuer cet effet dans l'horloge *RbCs*. On a aussi effectué des mesures de fréquences pour diverses valeurs de rapport cyclique (temps de la phase d'interrogation/temps de cycle) pour tester une éventuelle perturbation de la phase de la source d'interrogation synchrone avec le cycle de la fontaine.

**Effet de recul** L'ordre de grandeur de l'effet de recul est donné par l'énergie cinétique de l'atome acquise lorsqu'il absorbe ou émet un photon micro-onde dans la cavité d'interaction. Cette énergie cinétique vaut  $(\hbar k)^2/2m$  ou  $k$  est le

module des vecteurs d'onde du champ micro-onde dans la cavité ( $k = 2\pi \times \nu_{at}/c$ ). L'application numérique donne  $\Delta\nu/\nu_{at} = 1.7 \times 10^{-16}$  pour le  $^{87}\text{Rb}$ . Des calculs sont en cours [52] qui semblent montrer que cet effet est nettement plus petit dans la configuration usuelle des fontaines. Nous conserverons prudemment une incertitude de  $2 \times 10^{-16}$  sur cet effet, qui n'a pas été mesuré.

Les autres effets sont négligeables au niveau de  $10^{-15}$ , et les incertitudes correspondantes dans le tableau sont des estimations du déplacement maximal de fréquence dû à ces effets. Le bilan des incertitudes donne une exactitude de  $1.8 \times 10^{-15}$ .

**Le déplacement gravitationnel**, dont on doit tenir compte lors de la comparaison entre horloges situées à différentes altitudes au-dessus du géoïde, est connu avec une incertitude relative de  $5 \times 10^{-16}$  lié à une incertitude de 5 m sur l'altitude absolue de la fontaine *Rb* par rapport au géoïde. L'incertitude sur le déplacement gravitationnel n'est pas prise en compte dans l'exactitude de la fontaine. On ne la prend en compte que dans la comparaison de fréquences entre horloges situées à des altitudes différentes. Lors de telles comparaisons, l'incertitude apportée par cet effet est d'ailleurs négligeable au niveau de  $10^{-16}$ , car l'incertitude sur la position relative des horloges est estimée avec une incertitude inférieure à 10 cm.

### 3.6.3 Test de stabilité de la constante de structure fine

$$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$$

Les bilans d'exactitude des fontaines *Cs* du BNM-LPTF sont semblables à celui que l'on vient de présenter. Ils conduisent à une exactitude de  $1.1 \times 10^{-15}$ . En deux ans, les trois fontaines ont été comparées entre elles 3 fois. Chaque campagne de comparaisons a consisté en des mesures quasi-quotidiennes, quoique non-synchronisées, des fréquences des 3 fontaines, et a duré environ 1 à 2 mois. Le signal de distribution à 100 MHz était généré à partir du quartz BVA 5 MHz mentionné précédemment. Au cours de chaque campagne de mesure, on a alterné des mesures dans les configurations optimales des fontaines (rapport cyclique optimisant la stabilité, impulsions  $\pi/2$ ), et des mesures d'évaluations des effets systématiques, où les réglages des paramètres sont différents. De plus, pour les fontaines *Cs*, chaque mesure est différentielle en nombre d'atomes (cf. chapitre 5), ce qui permet de déterminer le déplacement collisionnel du *Cs* en temps réel, et de le corriger.

On trouvera dans la thèse de S. Bize [30] les explications détaillées concernant l'exploitation des données brutes d'expérience. Le tableau (3.3) récapitule les valeurs mesurées de la fréquence du  $^{87}\text{Rb}$  par comparaison aux mesures de fréquence effectuées avec les fontaines *Cs*.

Pour les deux dernières campagnes de mesures, en mai 1999 et mai 2000, l'incertitude sur la comparaison entre les deux fréquences hyperfines du  $^{87}\text{Rb}$  et du  $^{133}\text{Cs}$  est de  $2.7 \times 10^{-15}$ . Elle résulte de la somme quadratique

1. de l'exactitude de la fontaine  $^{87}\text{Rb}$  ( $1.8 \times 10^{-15}$ ), de l'exactitude des fontaines *Cs* ( $1.1 \times 10^{-15}$ ), et de l'incertitude sur le déplacement gravitationnel de la fontaine *Rb* par rapport aux fontaines *Cs* ( $\leq 10^{-17}$ ) : ces

Campagne de mesures	$\nu_{87\text{Rb}}$ (Hz)
mars 1998	6 834 682 610.904 29(9)
mai 1999	6 834 682 610.904 343(17)
mai 2000	6 834 682 610.904 326(18)

TAB. 3.3 – Mesures absolues de la fréquence de la transition hyperfine  $5S_{1/2}, F = 1 \rightarrow 5S_{1/2}, F = 2$  de l'état fondamental du  $^{87}\text{Rb}$ . Ces mesures ont été effectuées sur l'horloge Rb du BNM-LPTF, au cours de 3 campagnes de mesures d'un mois chacune environ. La mesure de mars 1998 constitue la première mesure de transition hyperfine du niveau fondamental du  $^{87}\text{Rb}$ , effectuée avec une fontaine atomique [118]. Elle apporte une amélioration d'un facteur  $\sim 10^4$  par rapport aux déterminations antérieures de la fréquence de cette transition, utilisant des techniques différentes [139, 140, 141].

incertitudes sont dites "de type B",

- de l'incertitude statistique des différences des mesures de fréquence entre la fontaine Rb et chaque fontaine Cs. Cette incertitude est dite "de type A", et vaut  $1.4 \times 10^{-15}$ .

La somme quadratique des incertitudes de type A et de type B donne une incertitude totale de  $2.6 \times 10^{-15}$  sur la comparaison des deux fréquences hyperfines du  $^{87}\text{Rb}$  et du  $^{133}\text{Cs}$ .

La mesure de mars 1998 a une incertitude plus grande, de  $1.3 \times 10^{-14}$ ; la fontaine Rb était en cours montage final, et son exactitude n'était que préliminaire.

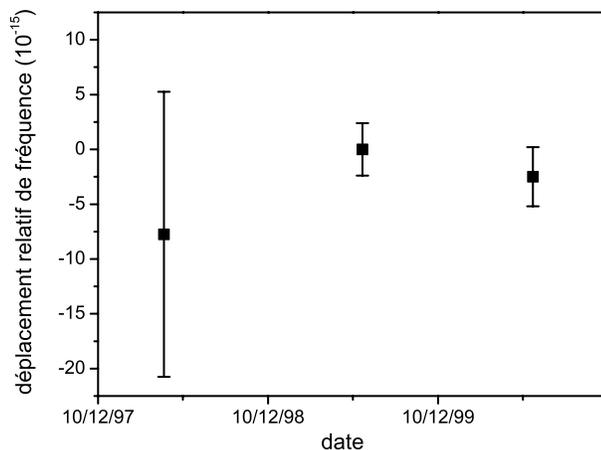


FIG. 3.29 – Résultats des 3 campagnes de mesures de la fréquence hyperfine du  $^{87}\text{Rb}$  effectuées au LPTF sur une durée de 2 ans. On a représenté les variations de fréquence relative autour de la valeur obtenue en mai 1999.

La figure (3.29) représente les résultats de ces 3 campagnes de mesure, exprimés de façon différente : on a représenté les variations de la fréquence  $\nu_{\text{Rb}}$ ,

en valeur relative, par rapport à la valeur obtenue en mai 1999. La moyenne pondérée de ces 3 points est une détermination à  $1.8 \times 10^{-15}$  près de la fréquence absolue de la transition hyperfine du  $^{87}\text{Rb}$

$$\nu_{Rb} = 6\,834\,682\,610.904\,335(12) \text{ Hz} \quad (3.63)$$

La meilleure approximation linéaire pondérée de ces 3 points donne :

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\nu_{Rb}}{\nu_{Cs}} \right) = (-1.4 \pm 3.3) \times 10^{-15} \text{ an}^{-1} \quad (3.64)$$

Ce résultat peut être interprété comme un test de la reproductibilité des mesures de fréquence avec les 3 fontaines du BNM-LPTF et de leur système de comparaison. Il peut aussi être interprété, dans le cadre théorique développé dans [19], comme une limite sur une éventuelle variation de la constante de structure fine  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$  avec le temps<sup>25</sup> :

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = (3.1 \pm 7.3) \times 10^{-15} \text{ an}^{-1} \quad (3.65)$$

L'incertitude obtenue,  $\sim 5$  fois plus petite que les précédents tests de laboratoire [19], place ce test au rang du test le plus précis effectué aujourd'hui en laboratoire de la variation de la constante de structure fine avec le temps.

L'incertitude de ce test est essentiellement limitée par les deux dernières campagnes de comparaison, d'exactitude  $2.7 \times 10^{-15}$  et séparées de 1 an. D'autres comparaisons avec la même exactitude, voire meilleure, doivent permettre d'améliorer ce test d'un facteur  $\gtrsim 3$  à une échéance de 3 ans. De plus, la fontaine  $RbCs$  qui sera décrite au chapitre 6 doit à terme permettre de diminuer les incertitudes liées aux fluctuations de certains effets systématiques dépendant de paramètres communs aux deux atomes. C'est par exemple le cas du champ magnétique directeur ou de la température du corps noir équivalent, pour lesquels la réjection des fluctuations doit être de  $\sim 55.9\%$  pour l'effet Zeeman du 2<sup>e</sup> ordre, et de  $\sim 73.9\%$  pour l'effet du rayonnement du corps noir. Enfin, avec l'horloge double, on doit pouvoir rejeter efficacement le bruit de l'oscillateur d'interrogation grâce à la synchronisation, plus aisée dans une même fontaine, des deux phases d'interrogation des deux atomes  $Rb$  et  $Cs$ .

## 3.7 Conclusion

Ce chapitre permet de comprendre de manière détaillée le fonctionnement de la fontaine  $Rb$ . Nous avons dressé un bilan des sources de bruit affectant la stabilité de la fontaine. Chacune de ces sources de bruit a été mesurée. Leur somme quadratique conduit à une stabilité

$$\sigma_y(\tau) = 1.5 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$$

pour  $6 \times 10^6$  atomes détectés, un temps de cycle de 1.5 s, et une largeur totale de 1.3 Hz pour la frange centrale de Ramsey. Les sources de bruit prédominantes sont le bruit de phase du signal d'interrogation, généré à partir d'un oscillateur

<sup>25</sup> $e$  désigne la charge de l'électron, égale à  $1.602... \times 10^{-19}$  C.

à quartz, et le bruit du laser utilisé pour la détection des atomes froids. De plus, la mesure des fluctuations de probabilité de transition en fonction du nombre d'atomes détectés a été effectuée, en s'affranchissant du bruit du signal d'interrogation. Elle est en bon accord avec les différentes sources de bruit mesurées par ailleurs. Elle constitue ainsi une méthode indépendante de détermination du nombre d'atomes détectés.

La fréquence de la transition d'horloge de  $^{87}\text{Rb}$  a été mesurée par comparaison aux 2 fontaines  $Cs$  du BNM-LPTF. Elle vaut :

$$\nu_{^{87}\text{Rb}} = 6\,834\,682\,610.904\,335(12) \text{ Hz}$$

L'exactitude de la fontaine  $Rb$  a été évaluée. Elle vaut

$$\delta\varepsilon = 1.8 \times 10^{-15}$$

Les contributions les plus importantes au bilan d'exactitude proviennent des fuites micro-ondes, de l'effet Zeeman du 2<sup>e</sup> ordre, du rayonnement du corps noir, et de l'effet Doppler résiduel du 1<sup>er</sup> ordre (gradients de phase dans la cavité micro-onde). Ces effets seront diminués significativement dans la version ultérieure de cette fontaine, la fontaine  $RbCs$  (voir chapitre 6).

La fontaine  $Rb$  a été comparée aux deux fontaines  $Cs$  du BNM-LPTF, de deux manières différentes :

- d'une part en synchronisant leurs phases d'interrogation : ceci a permis de démontrer expérimentalement qu'il est possible de rejeter efficacement le bruit du signal qui est distribué aux 3 fontaines et utilisé dans la comparaison.
- d'autre part, au cours de trois campagnes de mesures quotidiennes, chacune pendant  $\sim 2$  mois : les mesures, bien qu'imparfaitement synchronisées, permettent de comparer les fréquences hyperfines de  $^{87}\text{Rb}$  et de  $^{133}\text{Cs}$  avec une exactitude de  $2.7 \times 10^{-15}$ . Un ajustement linéaire pondéré des résultats obtenus pour les fréquences de  $Cs$  et de  $Rb$  au cours des trois campagnes donne :

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\nu_{Rb}}{\nu_{Cs}} \right) = (-1.4 \pm 3.3) \times 10^{-15} \text{ an}^{-1}$$

Il peut être interprété comme un test de la variation temporelle de la constante de structure fine  $\alpha$  :

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = (3.1 \pm 7.3) \times 10^{-15} \text{ an}^{-1}$$

C'est actuellement le test de laboratoire le plus exact des éventuelles fluctuations de la "constante"  $\alpha$ .

## Chapitre 4

# Déplacements de fréquence dépendant du nombre d'atomes dans les fontaines

### 4.1 Introduction

L'expression du déplacement collisionnel que nous avons obtenue au chapitre 2 a été obtenue en faisant l'hypothèse que la densité atomique  $n$  ne dépend pas des variables d'espace et de temps. Autrement dit, cette expression est valable pour un milieu homogène. Dans le cas d'un milieu inhomogène, qui évolue dans le temps, elle n'est valable que localement, en un point  $(\vec{r}, t)$  de l'espace et du temps. C'est en particulier le cas dans une fontaine atomique, où l'expression du déplacement de la fréquence de l'horloge s'obtient par moyennage, sur les trajectoires atomiques, des déplacements collisionnels instantanés. Dans ce chapitre, nous allons expliquer en détail la démarche qui permet de calculer le déplacement collisionnel dans une fontaine à l'aide des longueurs de diffusion introduites dans le chapitre 2. Ceci nous permettra, dans le chapitre 5, de comparer nos résultats de mesure aux prédictions théoriques des longueurs de diffusion.

L'expression que nous avons obtenue au chapitre 2 fait intervenir les longueurs de diffusion en onde "s" entre les états diffusés, ainsi que les populations  $\rho_\gamma$  de ces états ( $\sum_\gamma \rho_\gamma = 1$ ), et la densité volumique d'atomes, notée  $n$  et supposée constante localement :

$$\delta\nu = \frac{2\hbar}{m} \times n \times \sum_\gamma \rho_\gamma (1 + \delta_{\beta,\gamma})(1 + \delta_{\alpha,\gamma}) \text{Re}\{a_{\beta,\gamma} - a_{\alpha,\gamma}\} \quad (4.1)$$

Dans cette expression,  $a_{i,j}$  désigne la longueur de diffusion en onde "s" entre l'état "i" et l'état "j". Les  $a_{i,j}$  sont des grandeurs complexes. On ne considérera cependant que leurs parties réelles dans toute la suite du manuscrit, car seul nous intéresse le déplacement de fréquence induit par les collisions entre atomes froids. Afin de simplifier les notations, cette partie réelle sera elle aussi notée

$a_{i,j}$ . On écrira donc l'expression (4.1) sous la forme :

$$\delta\nu = \frac{2\hbar}{m} \times n \times \sum_{\gamma} \rho_{\gamma}(1 + \delta_{\beta,\gamma})(1 + \delta_{\alpha,\gamma})(a_{\beta,\gamma} - a_{\alpha,\gamma}) \quad (4.2)$$

L'indice  $\gamma$  désigne un état Zeeman  $|F, m_F\rangle$ , où F caractérise les niveaux de la transition hyperfine de l'horloge. Les indices  $\alpha$  et  $\beta$  désignent plus particulièrement les états  $|F, m_F = 0\rangle$  de la transition d'horloge, d'énergie hyperfine inférieure et supérieure respectivement. Par exemple, dans le cas du  $^{87}\text{Rb}$ ,  $\alpha = |1, 0\rangle$  et  $\beta = |2, 0\rangle$ , et  $\gamma \in \{|1, m_F = 0, \pm 1\rangle, |2, m_F = 0, \pm 1, \pm 2\rangle\}$ .

Dans le cas d'une fontaine atomique, la densité atomique  $n$  est une grandeur qui évolue dans le temps et dans l'espace : les atomes sont initialement refroidis à une température<sup>1</sup> de l'ordre de  $1.4\ \mu\text{K}$ , ce qui correspond à une vitesse moyenne quadratique d'expansion du nuage  $\sigma_v = 2v_{rec} = 11.8\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$  ( $v_{rec}$  désigne la vitesse de recul de l'atome). L'expansion du nuage au cours du vol balistique s'accompagne d'une chute de la densité atomique locale,  $n(\vec{r}, t)$ , avec le temps  $t$  ( $\vec{r}$  désigne la position par rapport au centre du nuage). La figure (4.1) montre l'évolution de la densité atomique au centre du nuage au cours du temps,  $n(\vec{0}, t)$ , en supposant que le nuage a un profil spatial gaussien pour  $t = 0$ , de taille caractéristique  $\sigma_0 = 1\ \text{mm}$ , et une distribution de vitesses gaussienne, de vitesse moyenne quadratique  $\sigma_v = 11.8\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ . Entre  $t_1 = 150\ \text{ms}$  et  $t_2 = 560\ \text{ms}$  (instants aller et retour de passage des atomes à travers la cavité dans la fontaine *Rb*),  $n(\vec{0}, t)$  a chuté d'un facteur  $\simeq 30$ .

De plus, les populations  $\rho_{\gamma}$  évoluent dans le temps, sous l'effet de l'interaction avec le champ micro-onde dans la cavité.

L'expression (4.2) du déplacement de la fréquence de transition dépend donc en fait du temps  $t$  et de la position  $\vec{r}(t)$  :  $\delta\nu_{at}(\vec{r}(t), t)$ .

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, le déplacement de la fréquence de l'horloge  $\delta\nu_{horl}$  se calcule en pondérant  $\delta\nu_{at}(\vec{r}(t), t)$  par la fonction de sensibilité  $g(t)$ , et en intégrant sur la durée de la phase d'interrogation. De plus, seule contribue à  $\delta\nu_{horl}$  la perturbation  $\delta\nu_{at}(\vec{r}(t), t)$  apportée par les atomes qui sont effectivement détectés.

On voit donc que la densité  $n$  qui permet de relier directement les longueurs de diffusion  $a_{i,j}$  au déplacement de fréquence de l'horloge  $\delta\nu_{horl}$  n'est pas une grandeur simple à calculer *a priori*.

La section 4.2.1 traite le cas simple d'une distribution de vitesses gaussienne, et suppose que l'extension spatiale initiale du nuage est très petite devant l'expansion balistique du nuage au-dessus de la cavité; une expression analytique peut alors être obtenue pour la densité moyenne géométrique,  $n_G$ . Expérimentalement, il s'avère que ces hypothèses ne sont pas vérifiées. Un calcul numérique est alors nécessaire. Le calcul analytique dans les conditions précédentes permet cependant de comprendre les lignes directrices du calcul numérique, et de tester celui-ci dans un cas simple.

La section 4.2.2 prend en compte la non uniformité de la fonction de sensibilité  $g(t)$  dans le calcul du déplacement de la fréquence d'horloge  $\delta\nu_{horl}$  induit

<sup>1</sup> Dans ce chapitre, les chiffres donnés concernent le  $^{87}\text{Rb}$  sauf mention contraire.

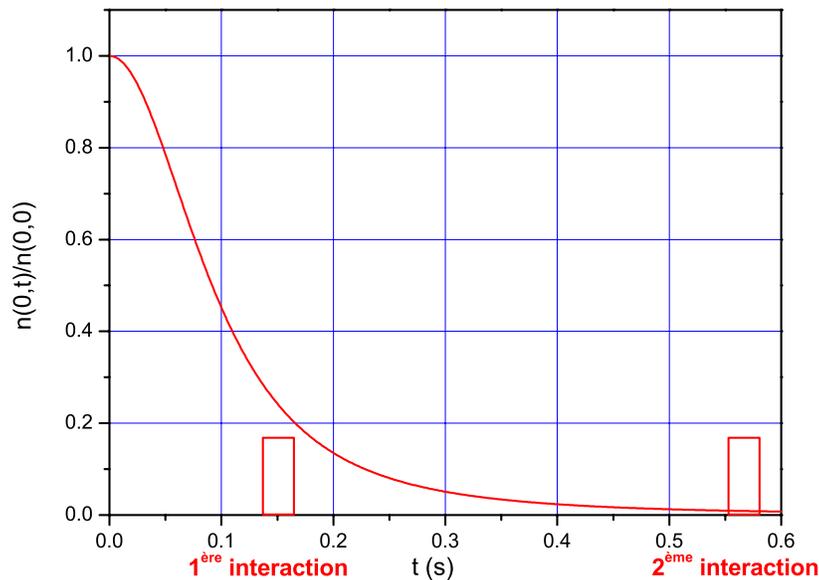


FIG. 4.1 – Evolution temporelle de la densité atomique au centre du nuage, normalisée à  $t = 0$ . On a représenté les impulsions micro-ondes d’interrogation en  $t_1 \simeq 150$  ms et  $t_2 \simeq 560$  ms. Entre ces deux instants, la densité au centre du nuage a chuté d’un facteur  $\sim 30$ .

par les collisions entre atomes froids. La variable  $n$  de l’expression (4.2) n’est donc pas seulement une densité moyenne au sens géométrique : c’est une densité moyenne géométrique pondérée par  $g(t)$ . On l’appellera densité moyenne effective, et on la notera  $\bar{n}$ .

La section 4.3 décrit le fonctionnement du programme de simulation de l’évolution du nuage atomique dans une fontaine, et montre l’influence, dans la fontaine *Rb*, de quelques paramètres sur la fraction d’atomes détectés, sur le nombre d’atomes présents dans la cavité micro-onde aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> passages, et sur la densité atomique moyenne effective. La simulation numérique a aussi été effectuée pour la configuration de l’horloge double *RbCs*, qui sera décrite au chapitre 6. Les résultats donnés pour cette nouvelle géométrie pourront être utilisés, à l’avenir, comme points de repère pour l’exploitation de mesures de déplacement collisionnel sur le Cs et sur le Rb dans la fontaine *RbCs*.

Enfin, en marge de ces problèmes de calcul de densité atomique moyenne, la section 4.4 présente un autre effet dépendant du nombre d’atomes dans les fontaines : l’entraînement de fréquence par la cavité, ou ”cavity pulling”. On expliquera l’origine de cet effet, et on trouvera une expression analytique du déplacement de fréquence qu’il induit dans une fontaine. Cet effet est très important puisqu’on verra au chapitre 5 que, des deux effets dépendant du nombre d’atomes, ce deuxième effet est en fait celui qui domine dans le cas du  $^{87}\text{Rb}$ . La mesure du ”cavity pulling” est donc un passage obligé si on veut mesurer le

déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ .

## 4.2 Quelle densité atomique pour le déplacement collisionnel ?

### 4.2.1 Un problème géométrique

#### Cas d'une distribution de vitesses gaussienne

On suppose dans ce paragraphe que la distribution des vitesses des atomes est une gaussienne, de demi-largeur  $\sigma_v$  à  $1/\sqrt{e}$ . On suppose aussi que la distribution des positions initiales des atomes, à l'instant du lancement, est une gaussienne de demi-largeur  $\sigma_0$  à  $1/\sqrt{e}$ . La densité atomique, en un point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ , est la convolution de ces deux distributions : c'est une gaussienne de demi-largeur  $\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_v^2 t^2}$ . On a donc :

$$n(\vec{r}, t) = \frac{N_i}{(\sigma(t)\sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2(t)}\right) \quad (4.3)$$

où  $r = \|\vec{r}\|$  et où  $N_i$  désigne le nombre total initial d'atomes.

Considérons un atome, de position  $\vec{r}_0$  à l'instant  $t = 0$ , et de vitesse  $\vec{v}$ . Sa position à l'instant  $t$  dans le référentiel barycentrique du nuage est :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \quad (4.4)$$

Ses coordonnées cylindriques dans ce référentiel sont  $(\rho(t), z(t), \theta(t))$ .

Selon les valeurs de  $\vec{r}_0$  et  $\vec{v}$ , trois cas sont envisageables pour cet atome :

- (i) l'atome ne franchit pas l'entrée de la cavité micro-onde au 1<sup>er</sup> passage : il n'intervient donc pas dans le déplacement collisionnel.
- (ii) l'atome franchit l'entrée de la cavité micro-onde au 1<sup>er</sup> passage, mais n'est pas détecté, parce qu'il rencontre un obstacle sur sa trajectoire. Il entre donc en collision pendant une partie de sa trajectoire au-dessus de la cavité, avec d'autres atomes qui, comme lui, ont franchi l'entrée de la cavité au 1<sup>er</sup> passage. Il participe donc au déplacement de l'énergie de champ moyen des atomes qui sont en interaction avec lui et, de ce fait, participe au déplacement de la fréquence de l'horloge bien qu'il ne soit pas détecté.
- (iii) l'atome est détecté, après avoir effectué son vol balistique au-dessus de la cavité. Il participe donc au déplacement de l'énergie de champ moyen des atomes qui sont en interaction avec lui sur toute ou partie de sa trajectoire, et contribue au déplacement de fréquence de l'horloge.

En pratique, les diaphragmes rencontrés par le nuage d'atomes froids sont calculés de sorte que tout atome qui sort de la cavité au 2<sup>e</sup> passage est détecté. On note  $t_1$  et  $t_2$  les instants de passage du centre du nuage au niveau du trou inférieur de la cavité micro-onde,  $R$  le rayon de ce trou.

Pour calculer la densité atomique moyenne géométrique,  $n_G$ , on commence par calculer la densité moyenne vue par un atome se trouvant dans le cas (iii) le

long de sa trajectoire  $\mathcal{T}$ , entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . On la note  $n(\mathcal{T})$ .

$$n(\mathcal{T}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} n(\vec{r}(t), t) dt \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{N_i}{(\sigma(t)\sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{r^2(t)}{2\sigma^2(t)}\right) dt \quad (4.6)$$

L'intégrale ne s'intègre facilement que dans le cas où  $r_0 \ll \sigma_v t_1$  et  $\sigma_0 \ll \sigma_v t_1$ , ce qui revient à dire que la taille initiale du nuage est très petite devant son expansion balistique à l'instant du 1<sup>er</sup> passage dans la cavité (et, *a fortiori*, à tout instant ultérieur). Dans ce cas, on obtient :

$$n(\mathcal{T}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{N_i}{(\sigma_v \sqrt{2\pi})^3} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) dt \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right) \frac{N_i}{(\sigma_v \sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) \quad (4.8)$$

On obtient  $n_G$  en intégrant  $n(\mathcal{T})$  sur toutes les trajectoires  $\mathcal{T}$ . La distribution spatiale  $p(\mathcal{T})$  des trajectoires  $\mathcal{T}$  est égale à la densité volumique d'atomes repassant le trou de la cavité à l'instant  $t_2$ , normalisée.

$$p(\mathcal{T}) = \frac{n(\vec{r}(t_2), t_2)}{\int_0^R \int_{-\infty}^{+\infty} n(\vec{r}(t_2), t_2) 2\pi \rho d\rho dz} \quad (4.9)$$

On obtient donc  $n_G$  :

$$n_G = \int_0^R \int_{-\infty}^{+\infty} n(\mathcal{T}) \times p(\mathcal{T}) 2\pi \rho d\rho dz \quad (4.10)$$

$$= \int_0^R \int_{-\infty}^{+\infty} n(\mathcal{T}) \times \frac{n(\vec{r}(t_2), t_2)}{\int_0^R \int_{-\infty}^{+\infty} n(\vec{r}(t_2), t_2) 2\pi \rho d\rho dz} 2\pi \rho d\rho dz \quad (4.11)$$

L'intégrale au dénominateur s'écrit :

$$\int_0^R \int_{-\infty}^{+\infty} n(\vec{r}(t_2), t_2) 2\pi \rho d\rho dz = N_i \left(1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2(t_2)}\right)\right) \quad (4.12)$$

tandis que le numérateur s'écrit, à la limite  $r_0 \ll \sigma_v t_2$  et  $\sigma_0 \ll \sigma_v t_2$  :

$$\frac{1}{2} \frac{t_2^3}{t_2 - t_1} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right) \int_0^R \int_{-\infty}^{+\infty} n^2(\vec{r}(t_2), t_2) 2\pi \rho d\rho dz \quad (4.13)$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{2} \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right) \frac{N_i^2}{(\sigma_v \sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{R^2}{\sigma_v^2 t_2^2}\right)\right) \quad (4.14)$$

Les expressions (4.12) et (4.14) donnent finalement :

$$n_G = \frac{1}{2} \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2}\right) \frac{N_i}{(\sigma_v \sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{R^2}{\sigma_v^2 t_2^2}\right)\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_v^2 t_2^2}\right)\right)} \quad (4.15)$$

Remarque : on rencontre souvent la formule approchée suivante pour la densité moyenne géométrique :

$$n_G = \frac{N_i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2} \quad (4.16)$$

qui se déduit de l'expression (4.15) en supposant, en plus des hypothèses précédentes, que  $t_1 \ll t_2$  et que  $\sigma_v t_2 \gg R$ . On a posé  $\sigma_1 = \sigma_v t_1$  et  $\sigma_2 = \sigma_v t_2$ . On verra par la suite combien cette formule simple est erronée, du fait des hypothèses successives qui permettent de l'obtenir : nuage ponctuel initialement, distribution de vitesses gaussienne,  $t_1 \ll t_2$ , et  $\sigma_v t_2 \gg R$ .

### Cas d'une distribution de vitesses " double gaussienne "

On verra dans le paragraphe suivant que la distribution des vitesses n'est pas une gaussienne. Pour modéliser les " ailes " de la distribution, on peut être tenté de considérer une distribution en forme de somme de deux gaussiennes de demi-largeurs à  $1/\sqrt{e}$  différentes,  $\sigma_{v1}$  et  $\sigma_{v2}$ . Le problème peut être ramené au lancé simultané de  $N_{i1}$  atomes dans l'une des distributions, et  $N_{i2}$  dans l'autre distribution. Le calcul de la densité moyenne géométrique  $n_G$  peut alors être mené de la même manière que précédemment, de façon analytique. Il apparaît des termes croisés entre les deux distributions, liés au fait que la moyenne sur les trajectoires  $\mathcal{T}$  fait intervenir le carré de la somme des distributions de vitesses (cf. expression (4.13)). Toujours en supposant  $r_0 \ll \sigma_v t_1$  et  $\sigma_0 \ll \sigma_v t_1$ , on obtient :

$$n_G = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} \quad (4.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = \frac{1}{2} \frac{1}{t_2 - t_1} \left( \frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right) \times & \left[ \frac{N_{i1}^2}{(\sigma_{v1} \sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - \exp(-\frac{R^2}{\sigma_{v1}^2 t_2^2})) \right. \\ & + \frac{N_{i2}^2}{(\sigma_{v2} \sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - \exp(-\frac{R^2}{\sigma_{v2}^2 t_2^2})) \\ & \left. + \frac{2N_{i1}N_{i2}}{(\sqrt{\sigma_{v1}^2 + \sigma_{v2}^2} \sqrt{2\pi})^3} (1 - \exp(-\frac{R^2}{2t_2^2} (\frac{1}{\sigma_{v1}^2} + \frac{1}{\sigma_{v2}^2}))) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

et :

$$\mathcal{D} = N_{i1} (1 - \exp(-\frac{R^2}{2\sigma_{v1}^2 t_2^2})) + N_{i2} (1 - \exp(-\frac{R^2}{2\sigma_{v2}^2 t_2^2})) \quad (4.19)$$

### Cas réel

La modélisation de la distribution de vitesses ne doit cependant pas être guidée par la possibilité ou non d'effectuer un calcul analytique. S'il s'agit de décrire correctement les " ailes " de la distribution, une fonction de probabilité du type :

$$p(\vec{v}) = \frac{\beta}{(1 + \frac{v^2}{v_0^2})^b} \quad (4.20)$$

convient aussi bien, comme le montre la figure (4.2), et elle est caractérisée par 2 paramètres seulement,  $b$  et  $v_c$ , au contraire d'une double gaussienne, qui en compte 4 (deux amplitudes, et deux largeurs caractéristiques). On note  $\mathcal{L}^b$  ce type de distributions.  $v_c$  et  $b$  sont réels, et  $\beta$  est une constante de normalisation de la distribution, dépendant de  $v_c$  et  $b$ , telle que :

$$\int \int \int p(\vec{v}) d^3 \vec{v} = 1 \quad (4.21)$$

La figure (4.2) a été obtenue à partir d'un signal de temps de vol expérimental dans la fontaine  $Rb$ , pour des atomes préparés dans l'état  $|F = 1, m_F = 0\rangle$ . Les temps d'arrivée des atomes dans la zone de détection ont été convertis en vitesses relativement au centre du nuage. On voit qu'une distribution gaussienne

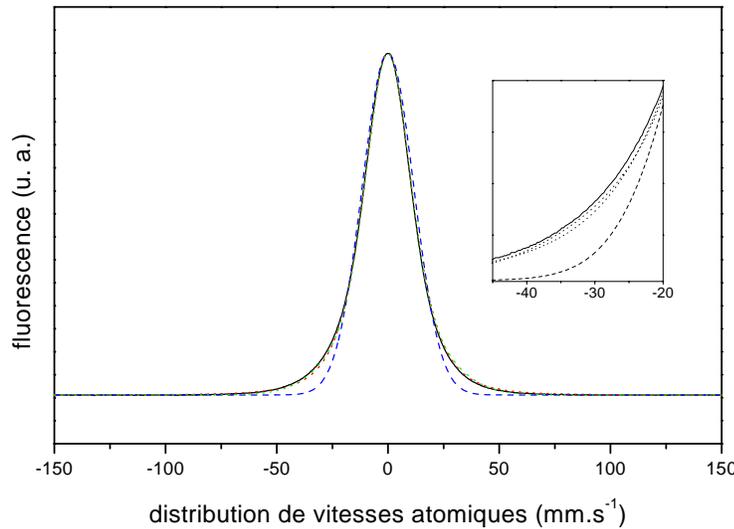


FIG. 4.2 – *Distribution de vitesses des atomes dans le référentiel en mouvement du nuage. La distribution de vitesses expérimentale (trait plein) est mal représentée par un modèle gaussien (tirets). Un modèle du type "double gaussienne" ou  $\mathcal{L}^b$  (pointillés) décrit mieux les ailes (on ne distingue quasiment pas la différence entre ces deux types de fits).*

ne modélise pas bien la distribution de vitesses, au contraire de distributions de type "double gaussienne" ou  $\mathcal{L}^b$ . Par ailleurs, on préférera dans la suite la distribution de type  $\mathcal{L}^b$  à la "double gaussienne", d'une part parce qu'une distribution de type  $\mathcal{L}^b$  est attendue, du point de vue théorique, dès qu'on effectue une ouverture adiabatique de piège [123]; d'autre part parce que la multiplication des paramètres ajustables n'a pas de sens physique; et enfin parce que, expérimentalement, une distribution de type  $\mathcal{L}^b$  décrit correctement la distribution de vitesses 3D (cf. § 4.3.5).

Pour une distribution de vitesses de type  $\mathcal{L}^b$ , le calcul de  $n_G$  ne peut pas être conduit de façon analytique comme dans le cas des gaussiennes, car la distribution n'est pas factorisable en fonctions de  $\rho$  ou  $z$  seulement (cf. expression (4.12)). On doit avoir recours à un calcul numérique (§ 4.3).

### 4.2.2 Un problème pas seulement géométrique ... La densité moyenne effective, $\bar{n}$

Les collisions entre atomes froids perturbent la fréquence de transition atomique. C'est ce qu'exprime la formule (4.2). Cette perturbation  $\delta\nu_{at}$  est différente d'un atome à l'autre : elle dépend de sa position  $\vec{r}(t)$  sur sa trajectoire  $\mathcal{T}$ , car c'est une combinaison linéaire des densités atomiques locales dans chaque sous-niveau Zeeman  $|\gamma\rangle$ ,  $n_\gamma(\vec{r}(t), t) = n(\vec{r}(t)) \times \rho_\gamma(t)$  :

$$\delta\nu_{at}(\vec{r}(t), t) = \frac{2\hbar}{m} \times n(\vec{r}(t)) \times \sum_{\gamma} \rho_\gamma(t) (1 + \delta_{\beta,\gamma})(1 + \delta_{\alpha,\gamma})(a_{\beta,\gamma} - a_{\alpha,\gamma}) \quad (4.22)$$

Cette perturbation, intégrée le long de chaque trajectoire  $\mathcal{T}$  qui repasse le trou de la cavité au 2<sup>e</sup> passage, puis moyennée sur l'ensemble de ces trajectoires  $\mathcal{T}$ , entraîne un déplacement de fréquence de l'horloge qui est donné par l'expression (1.74) :

$$\delta\nu_{horl.} = + \frac{1}{T_{eff}} \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \left( p(\mathcal{T}) \int_0^{T+2\tau} \delta\nu_{at}(\vec{r}(t), t) g(t) dt \right) 2\pi\rho d\rho dz \quad (4.23)$$

où  $p(\mathcal{T})$  est la distribution spatiale des trajectoires  $\mathcal{T}$  et est donnée par (4.9). On note :

$$g_N(t) = \frac{T + 2\tau}{T_{eff}} g(t) \quad (4.24)$$

la fonction de sensibilité *normalisée* ( $\frac{1}{T+2\tau} \int_0^{T+2\tau} g_N(t) dt = 1$ ), de sorte que (4.23) se réécrit :

$$\boxed{\delta\nu_{horl.} = \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \left( p(\mathcal{T}) \times \frac{1}{T + 2\tau} \int_0^{T+2\tau} \delta\nu_{at}(\vec{r}(t), t) g_N(t) dt \right) 2\pi\rho d\rho dz} \quad (4.25)$$

Remarque : revenons sur l'expression "moyenner sur l'ensemble des trajectoires  $\mathcal{T}$ ". La distribution spatiale de trajectoires est bien sûr liée à la distribution spatiale du nuage à l'instant où celui-ci traverse le dernier diaphragme, comme l'exprime l'expression (4.9). Il faut cependant prendre garde qu'en dehors de ce diaphragme, qui introduit une coupure nette dans le nuage (donc dans la sélection des vitesses transverses), il peut exister aussi des diaphragmes ayant un profil de transmission plus "mou". Dans notre cas, le profil d'intensité du faisceau de détection n'est pas uniforme et joue ce rôle de diaphragme à profil de transmission variable. Pour une saturation de faisceau  $s \gg 1$ , le profil de ce diaphragme est uniforme ( $\frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \rightarrow \frac{\Gamma}{2}$ ), mais la saturation sur l'axe et à résonance est en pratique limitée à  $s_0 = 0.93$ . Lorsqu'on tient compte de la modulation à 100 kHz d'amplitude  $m = 0.33\Gamma$  et du profil gaussien du faisceau de détection ("waist"  $w_0 = 8.67$  mm), le profil transverse de taux d'émission spontanée, normalisé sur l'axe, est représenté sur la figure (4.3), dans les deux directions transverses.

Cette transmission variable module la densité de trajectoires  $\mathcal{T}$  qui traversent la zone de détection, de sorte que la distribution spatiale de trajectoires qui

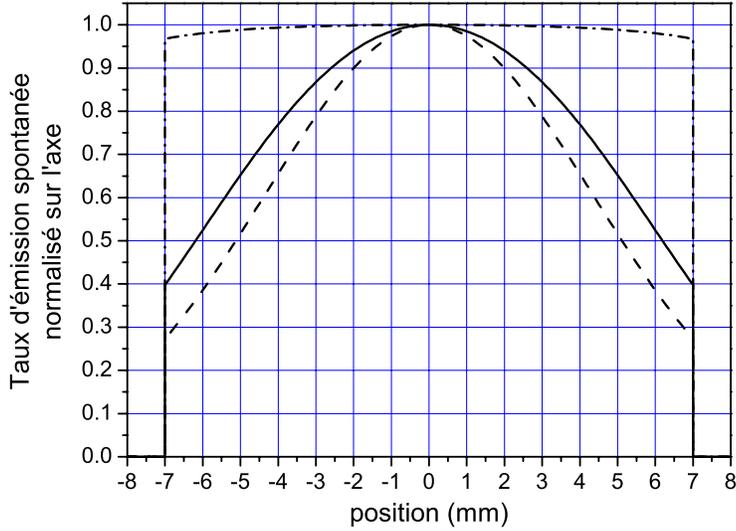


FIG. 4.3 – Taux d'émission spontanée normalisé au centre du faisceau de détection, en fonction de l'abscisse  $x$ . Les coupures nettes à  $\pm 7$  mm correspondent au bord du faisceau dans cette direction. Le profil est le même dans la direction verticale,  $z$ , mais les coupures sont à  $\pm 4$  mm dans cette direction. On a tracé les profils pour trois valeurs de saturation sur l'axe :  $s_0 = 0.93$  (trait plein),  $s_0 = 0.01$  (tirets) et  $s_0 = 100$  (tiret point tiret). Le cas expérimental correspond à  $s_0 = 0.93$ . On a pris en compte ce profil de saturation dans la simulation Monte-Carlo.

intervient *effectivement* dans le déplacement de la fréquence d'horloge est :

$$p(\mathcal{T}) = \frac{n(\vec{r}(t_{det.}), t_{det.}) \Gamma_{eff}(\rho \cos \theta)}{\int_0^{R_{det.}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n(\vec{r}(t_{det.}), t_{det.}) \Gamma_{eff}(\rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta dz} \quad (4.26)$$

où  $t_{det.}$  est l'instant moyen de passage du nuage dans le faisceau de détection,  $R_{det.}$  désigne le rayon du trou de la cavité rapporté dans la zone de détection ( $R_{det.} = R \times t_{det.}/t_2$ ), et  $\Gamma_{eff}(x = \rho \cos \theta)$  est le taux d'émission spontanée, tenant compte du désaccord  $\delta_0$  et de la modulation d'amplitude  $m$  du laser de détection, de la saturation sur l'axe  $s_0$ , et du profil gaussien du faisceau (conventions d'axes de la figure (5.21)). On ne tient pas compte ici du profil gaussien du faisceau de détection dans la direction verticale,  $z$ , qui agit de la même façon sur tous les atomes du nuage (le profil d'intensité, parce qu'il est gaussien, est factorisable selon  $x$  et  $z$  :  $\exp(-2(x^2 + z^2)/w_0^2) = \exp(-2x^2/w_0^2) \times \exp(-2z^2/w_0^2)$ ).

$$\Gamma_{eff}(x) = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s(x, p)}{1 + s(x, p)} dp$$

avec

$$s(x, p) = \frac{s_0 \exp\left(-\frac{2x^2}{w_0^2}\right)}{1 + 4 \frac{(\delta_0 + m \sin p)^2}{\Gamma^2}}$$

### Cas où seuls $\alpha$ et $\beta$ sont peuplés

C'est le cas de fonctionnement standard de l'horloge. Les atomes sont usuellement préparés dans l'état  $\alpha$  et transitent vers l'état  $\beta$  sous l'effet des impulsions  $\pi/2$  dans la cavité. A l'instant  $t$ , les populations sont :

$$\begin{aligned} \rho_\beta(t) &= P(t) \\ \text{et } \rho_\alpha(t) &= 1 - P(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

D'après (1.17), la composante selon  $z$  du spin fictif s'écrit  $\mathcal{S}_z(t) = \rho_\beta(t) - \rho_\alpha(t)$ , d'où  $P(t) = (1 + \mathcal{S}_z(t))/2$ . Or  $\mathcal{S}_z(t) = -\cos\mathcal{P}(t)$  (cf. figure (1.9)), donc :

$$P(t) = |\langle e | \tilde{\psi}(t) \rangle|^2 = \begin{cases} 1/2 \times (1 - \cos\mathcal{P}(t)) & \text{si } t \in [0, \tau], \\ 1/2 & \text{si } t \in [\tau, T + \tau], \\ 1/2 & \text{si } t \in [T + \tau, T + 2\tau]. \end{cases} \quad (4.28)$$

L'équation (4.22) s'écrit :

$$\delta\nu_{at}(\vec{r}(t), t) = \frac{2\hbar}{m} \times n(\vec{r}(t)) \times 2 [P(t)(a_{\beta,\beta} - a_{\alpha,\beta}) + (1 - P(t))(a_{\beta,\alpha} - a_{\alpha,\alpha})] \quad (4.29)$$

et le déplacement de fréquence de l'horloge (4.25) s'exprime de façon condensée :

$$\boxed{\delta\nu_{horl.} = \frac{2\hbar}{m} (\bar{n}_\beta \times 2(a_{\beta,\beta} - a_{\alpha,\beta}) + \bar{n}_\alpha \times 2(a_{\beta,\alpha} - a_{\alpha,\alpha}))} \quad (4.30)$$

avec :

$$\bar{n}_\beta = \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \left( p(\mathcal{T}) \times \frac{1}{T + 2\tau} \int_0^{T+2\tau} n(\vec{r}(t)) \times P(t) \times g_N(t) dt \right) 2\pi\rho d\rho dz \quad (4.31)$$

et

$$\bar{n}_\alpha = \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \left( p(\mathcal{T}) \times \frac{1}{T + 2\tau} \int_0^{T+2\tau} n(\vec{r}(t)) \times (1 - P(t)) \times g_N(t) dt \right) 2\pi\rho d\rho dz \quad (4.32)$$

Le but de la simulation numérique décrite ci-après (§ 4.3) est de calculer les quantités  $\bar{n}_\beta$  et  $\bar{n}_\alpha$  pour différents types de distributions de positions et de vitesses. On verra au § 4.3.8 que les populations  $\bar{n}_\beta$  et  $\bar{n}_\alpha$  sont inégales du fait du transfert de populations au cours de l'interaction micro-onde dans la cavité<sup>2</sup>. Le rapport  $\bar{n}_\beta/\bar{n}_\alpha$  vaut en moyenne  $\sim 0.8$  dans les conditions typiques de fonctionnement de la fontaine (impulsions  $\pi/2$  dans la cavité).

Expérimentalement, il serait possible de faire varier notablement  $\bar{n}_\beta/\bar{n}_\alpha$  en travaillant à des puissances micro-ondes différentes de  $\pi/2$ , ou en faisant varier la hauteur de lancement. Ceci entraîne cependant une dégradation de la stabilité de l'horloge.

<sup>2</sup>Le rapport  $\bar{n}_\beta/\bar{n}_\alpha$  tend vers 1 lorsque  $\tau \ll T$ .

Aussi, en pratique, nous n'avons fait varier que le nombre global d'atomes dans la fontaine, par changement soit du temps de chargement du PMO, soit de l'intensité des faisceaux de refroidissement.

Le rapport  $\bar{n}_\beta/\bar{n}_\alpha$  fluctue donc très peu autour d'une valeur moyenne de  $\sim 0.8$ , les fluctuations résiduelles provenant des fluctuations des paramètres de distributions de positions et de vitesses au cours du temps. Par conséquent, un ajustement du type

$$\delta\nu_{horl.} = \frac{2\hbar}{m} (B\bar{n}_\beta + A\bar{n}_\alpha)$$

avec  $A$  et  $B$  paramètres libres, ne permet pas de contraindre  $A$  et  $B$ , et donc de déterminer  $a_{\beta,\beta} - a_{\alpha,\beta}$  et  $a_{\beta,\alpha} - a_{\alpha,\alpha}$  avec exactitude. On note donc  $\bar{n} = \bar{n}_\alpha + \bar{n}_\beta$  la densité moyenne effective totale, et on ajuste les données expérimentales ( $\bar{n}, \delta\nu_{horl.}$ ) par une loi du type

$$\boxed{\delta\nu_{horl.} = K_{collisions}^{1,0} \bar{n}} \quad (4.33)$$

où l'indice  $(1,0)$  signifie qu'à l'issue de la préparation, les atomes sont dans l'état  $|F = 1, m_F = 0\rangle$ . La comparaison de (4.33) et de (4.30) donne :

$$K_{collisions}^{1,0} = \frac{2\hbar}{m} \frac{1}{1 + \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}_\alpha}} \left[ \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}_\alpha} 2(a_{\beta,\beta} - a_{\alpha,\beta}) + 2(a_{\beta,\alpha} - a_{\alpha,\alpha}) \right] \quad (4.34)$$

que l'on peut réécrire en utilisant les variables usuelles en physique des collisions [12] :

$$v\lambda_\gamma = \frac{2\hbar}{m} (1 + \delta_{\alpha,\gamma})(1 + \delta_{\beta,\gamma})(a_{\beta,\gamma} - a_{\alpha,\gamma}) \quad (4.35)$$

où  $v$  est la vitesse relative de collision entre deux atomes, et  $\lambda_\gamma$  porte le nom conventionnel de "déplacement de section efficace" sur la transition d'horloge  $\alpha \rightarrow \beta$  et pour un atome dans l'état  $\gamma$  (cf. [12]). L'expression (4.34) se réécrit de manière condensée :

$$K_{collisions}^{1,0} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}_\alpha}} \left[ \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}_\alpha} (v\lambda_\beta) + (v\lambda_\alpha) \right] \quad (4.36)$$

Remarque : Dans le cas réel,  $n_\beta/n_\alpha \simeq 0.8$ , et dans ce cas :

$$K_{collisions}^{1,0} = \frac{1}{1.8} [0.8(v\lambda_\beta) + (v\lambda_\alpha)] \quad (4.37)$$

tandis que si on suppose  $n_\beta = n_\alpha$ , on trouve :

$$K_{collisions}^{1,0} = \frac{1}{2} [(v\lambda_\beta) + (v\lambda_\alpha)] \quad (4.38)$$

Pour des prédictions théoriques telles que  $(v\lambda_\beta/v\lambda_\alpha) \gg 1$ , on sur-estimerait donc  $K_{collisions}^{1,0}$  d'un facteur 1.125 en supposant  $\bar{n}_\beta = \bar{n}_\alpha$  dans (4.36).

Inversement, pour  $(v\lambda_\beta/v\lambda_\alpha) \ll 1$  on sous-estimerait  $K_{collisions}^{1,0}$  d'un facteur 0.9 en supposant  $\bar{n}_\beta = \bar{n}_\alpha$ . Ces deux cas sont bien sûr extrêmes, mais l'effet de  $\bar{n}_\beta/\bar{n}_\alpha$  sur l'estimation de  $K_{collisions}^{1,0}$  peut s'avérer non-négligeable, d'autant que  $v\lambda_\beta/v\lambda_\alpha$  peut prendre des valeurs très différentes d'une publication à l'autre [12, 8].

### Cas où les sous-niveaux Zeeman $|F, m_F\rangle$ sont équipèulés

C'est le cas lorsqu'on lance les atomes à l'issue du refroidissement et piégeage; nous avons alors vérifié par spectroscopie micro-onde que les atomes sont équipèpartis dans les niveaux  $|F = 2, m_F\rangle$  à mieux que 1%. C'est aussi le cas lorsque, après refroidissement et piégeage, on pompe optiquement tous les atomes dans les niveaux  $|F = 1, m_F\rangle$ , avant de les lancer. Seuls les atomes présents initialement dans  $|\alpha\rangle$  ou  $|\beta\rangle$  transitent vers l'autre état de la transition d'horloge, les populations des autres états restant constantes. On a donc :

$$\begin{aligned}\rho_\beta(t) &= \frac{1}{2F+1}P(t) \\ \rho_\alpha(t) &= \frac{1}{2F+1}(1-P(t)) \\ \text{et } \rho_\gamma &= \frac{1}{2F+1} \text{ pour } \gamma \neq \alpha, \beta\end{aligned}\quad (4.39)$$

où  $P(t)$  est donné par (4.28). Le déplacement d'horloge (4.30) s'écrit :

$$\boxed{\delta\nu_{horl.} = \frac{2\hbar}{m} \left( \bar{n}_\beta \times 2(a_{\beta,\beta} - a_{\alpha,\beta}) + \bar{n}_\alpha \times 2(a_{\beta,\alpha} - a_{\alpha,\alpha}) + \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} \bar{n}_\gamma (a_{\beta,\gamma} - a_{\alpha,\gamma}) \right)}$$

(4.40)

avec :

$$\bar{n}_\beta = \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \left( p(\mathcal{T}) \times \frac{1}{T+2\tau} \int_0^{T+2\tau} n(\vec{r}(t)) \times \frac{P(t)}{2F+1} \times g_N(t) dt \right) 2\pi\rho d\rho dz$$

(4.41)

$$\bar{n}_\alpha = \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \left( p(\mathcal{T}) \times \frac{1}{T+2\tau} \int_0^{T+2\tau} n(\vec{r}(t)) \times \frac{(1-P(t))}{2F+1} \times g_N(t) dt \right) 2\pi\rho d\rho dz$$

(4.42)

et :

$$\bar{n}_\gamma = \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \left( p(\mathcal{T}) \times \frac{1}{T+2\tau} \int_0^{T+2\tau} n(\vec{r}(t)) \times \frac{1}{2F+1} \times g_N(t) dt \right) 2\pi\rho d\rho dz$$

(4.43)

Notons  $\bar{n} = \bar{n}_\alpha + \bar{n}_\beta + \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} \bar{n}_\gamma$  la densité moyenne effective totale. On a :

$$\bar{n} = \int_0^R \int_{-\infty}^{\infty} \left( p(\mathcal{T}) \times \frac{1}{T+2\tau} \int_0^{T+2\tau} n(\vec{r}(t)) \times g_N(t) dt \right) 2\pi\rho d\rho dz$$

(4.44)

et le déplacement de fréquence de l'horloge s'écrit :

$$\boxed{\delta\nu_{horl.} = K_{collisions}^{F, m_F} \bar{n}}$$

(4.45)

avec, en utilisant les notations condensées (4.35) :

$$K_{collisions}^{F,m_F} = \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}}(v\lambda_\beta) + \frac{\bar{n}_\alpha}{\bar{n}}(v\lambda_\alpha) + \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} \frac{\bar{n}_\gamma}{\bar{n}}(v\lambda_\gamma) \quad (4.46)$$

Des relations (4.39), on déduit :

$$\begin{aligned} \rho_\beta + \rho_\alpha &= \frac{\bar{n}_\alpha + \bar{n}_\beta}{\bar{n}} = \frac{1}{2F+1} \\ \rho_\gamma &= \frac{\bar{n}_\gamma}{\bar{n}} = \frac{1}{2F+1} \end{aligned} \quad (4.47)$$

(4.46) s'écrit donc :

$$K_{collisions}^{F,m_F} = \frac{1}{2F+1} \left[ \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}_\alpha + \bar{n}_\beta}(v\lambda_\beta) + \frac{\bar{n}_\alpha}{\bar{n}_\alpha + \bar{n}_\beta}(v\lambda_\alpha) + \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} (v\lambda_\gamma) \right] \quad (4.48)$$

c'est à dire :

$$K_{collisions}^{F,m_F} = \frac{1}{2F+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}_\alpha}\right)} \left[ \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}_\alpha}(v\lambda_\beta) + (v\lambda_\alpha) + \left(1 + \frac{\bar{n}_\beta}{\bar{n}_\alpha}\right) \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} (v\lambda_\gamma) \right] \quad (4.49)$$

Cette expression s'avère nécessaire dès lors que  $\bar{n}_\beta/\bar{n}_\alpha$  diffère notablement de 1. Par exemple, elle permet d'évaluer correctement le déplacement collisionnel dans le cas où on effectue des impulsions  $\pi/4$  dans la cavité micro-onde ( $\bar{n}_\beta/\bar{n}_\alpha \simeq 3$ ).

## 4.3 Simulation Monte Carlo de l'évolution du nuage dans une fontaine

### 4.3.1 Introduction

Afin d'évaluer les densités moyennes effectives de chacun des sous-niveaux Zeeman qui entrent en jeu dans le déplacement collisionnel, nous avons réalisé une simulation Monte Carlo de l'évolution du nuage dans la fontaine *Rb*, en insérant dans le modèle les paramètres physiques de l'expérience : hauteurs de la cavité, de la détection et des différents diaphragmes présents dans la fontaine, diamètres de ces diaphragmes et vitesse de lancement du nuage d'atomes froids. Cette partie commence par un schéma qui résume ces paramètres.

Ensuite on explique comment on génère, dans la simulation, les nombres aléatoires ayant pour loi de probabilité les distributions de vitesses et de positions initiales mesurées expérimentalement.

Puis on décrit le dispositif expérimental permettant d'accéder à la distribution des positions initiales des atomes, à l'instant du lancement du nuage.

Il s'agit ensuite de générer la distribution des vitesses des atomes. La méthode classique de détermination de cette distribution par temps de vol s'avère insuffisante, car plusieurs types de lois de probabilité décrivent plus ou moins bien le temps de vol. Mais ces différentes lois de probabilité donnent des résultats nettement différents lors du calcul de la densité moyenne effective. On montre

que la mesure de la fraction d'atomes détectés en fonction de la hauteur de lancement est une méthode expérimentale permettant de discriminer entre ces distributions de vitesses.

La simulation permet de calculer, pour différents types de distributions de vitesses et de positions initiales, la fraction d'atomes traversant la cavité aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> passages en fonction de la vitesse de lancement, et l'évolution temporelle de la densité atomique au centre du nuage. Elle permet aussi de voir l'influence de la convolution du nuage d'atomes froids par la réponse impulsionnelle de la détection sur la mesure de la densité. Elle permet enfin d'accéder à la densité moyenne effective, grandeur non mesurable directement, et de calculer la sensibilité de cette densité avec la hauteur de lancement. Cette information est importante si l'on veut maximiser le déplacement collisionnel afin de le mesurer rapidement, ou si, partant de la mesure du déplacement collisionnel à une certaine hauteur de lancement, on veut l'estimer pour d'autres hauteurs.

Pour chacune des grandeurs calculées, on donne l'incertitude liée aux incertitudes expérimentales ultimes que l'on est en droit d'attendre lors de mesures soigneuses. Historiquement, la modélisation correcte du calcul de la densité moyenne effective s'est déroulée en plusieurs étapes pendant et après les mesures de déplacement collisionnel. Certaines incertitudes expérimentales auraient *a posteriori* pu être améliorées, et dégradent l'incertitude finale sur la densité. Dans le chapitre 5, le tableau récapitulatif des incertitudes sur la densité distinguera entre l'incertitude expérimentale que l'on a effectivement obtenue, et l'incertitude que l'on peut raisonnablement espérer dans le futur, par exemple sur l'horloge *RbCs*, en automatisant les mesures.

### 4.3.2 Les différents diaphragmes présents dans la fontaine *Rb*

La simulation Monte-Carlo prend en compte la troncation du nuage d'atomes froids par les différents diaphragmes présents dans la fontaine *Rb* (cf. figure (4.4)). Les diamètres de ces diaphragmes sont calculés de sorte que c'est le trou de la cavité micro-onde, de diamètre 10 mm, qui est le plus sélectif en vitesses transverses lorsque l'apogée du vol parabolique est dans la cavité d'interaction ou au-dessus. Pour une vitesse de lancement  $2.1 \text{ m.s}^{-1} < v_l < 2.8 \text{ m.s}^{-1}$ , c'est le trou inférieur de la cavité de sélection qui diaphragme le plus. Pour une vitesse de lancement inférieure à  $2.1 \text{ m.s}^{-1}$ , voire négative (ce qui signifie qu'on lance le nuage vers le bas), c'est le trou inférieur du tube de graphite qui diaphragme le plus. A la limite  $v_l \rightarrow -\infty$ , le nuage n'est plus tronqué, et la fraction d'atomes détectés tend vers 1.

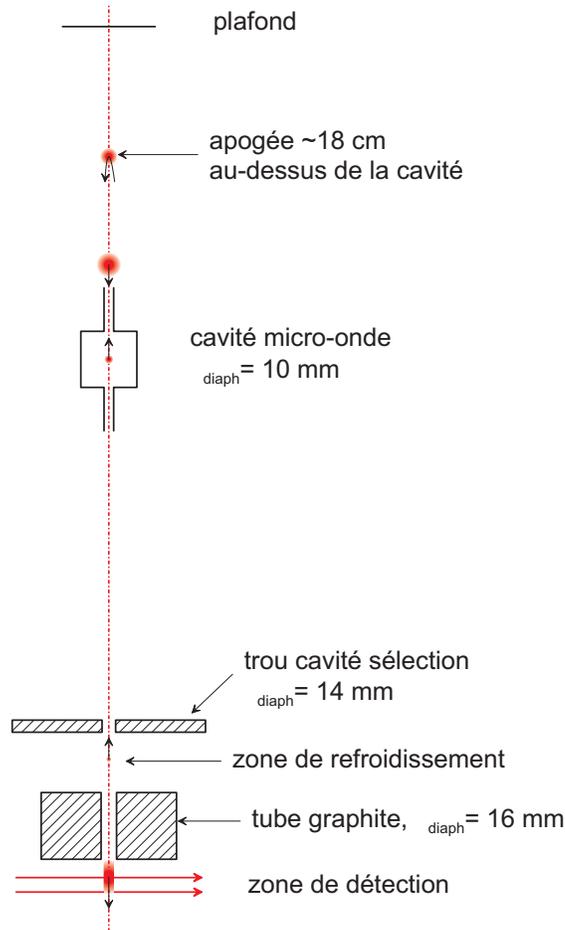


FIG. 4.4 – Les différents diaphragmes dans la fontaine Rb, et évolution du nuage d'atomes froids. Les proportions sont respectées.

### 4.3.3 Génération des distributions de probabilité

#### Génération d'une distribution de probabilité gaussienne.

Soient deux variables aléatoires  $x_1$  et  $x_2$  de distribution uniforme sur  $[0, 1]$ . Alors les variables aléatoires  $y_1$  et  $y_2$  qui s'en déduisent par les formules

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \cos 2\pi x_2 \\ y_2 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \sin 2\pi x_2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

ont une distribution normale, c'est-à-dire que  $p(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{y_i^2}{2}$ . Pour générer l'une de ces deux variables, par exemple  $y_1$ , il suffit de tirer uniformément un point de coordonnées  $(v_1, v_2)$  dans le disque de rayon 1 (cf. fig. (4.5)), par exemple à l'aide de la routine *ran1* donnée dans [142], p. 280. Alors  $x_1$  et  $x_2$

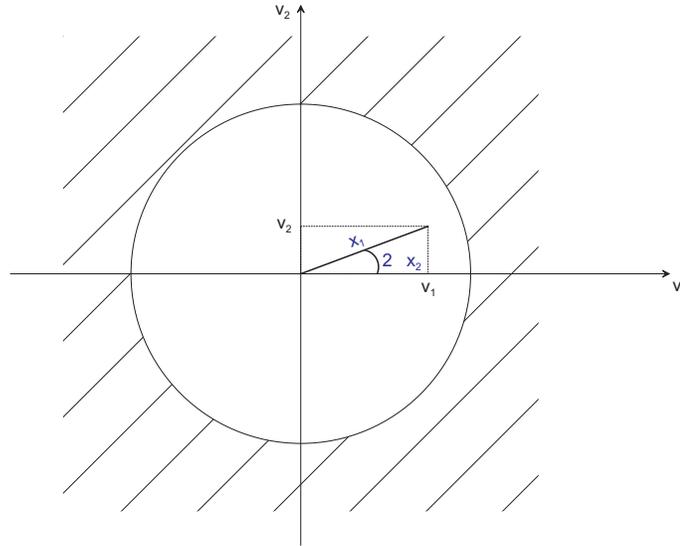


FIG. 4.5 – Génération des nombres aléatoires de distribution uniforme  $x_1$  et  $x_2$ .

définis par

$$x_1 = R = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad (4.51)$$

$$\text{et} \quad (4.52)$$

$$\begin{cases} \cos 2\pi x_2 = v_1 / \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ \sin 2\pi x_2 = v_2 / \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \end{cases} \quad (4.53)$$

sont distribués uniformément dans  $[0, 1]$ , et il suffit de calculer :

$$y_1 = v_1 \frac{\sqrt{-2 \ln R}}{R} \quad (4.54)$$

pour obtenir la distribution gaussienne voulue.

### Génération d'une distribution de probabilité lorentzienne

On cherche à générer la variable aléatoire  $x \in ]-\infty, \infty[$  de distribution

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Cette fonction a pour primitive  $(1/\pi) \arctan x$  qui est inversible en posant  $x = \tan \theta$  avec  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Il suffit donc de générer  $\theta$ , variable aléatoire uniforme sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , pour que  $x$  ait la distribution de probabilité voulue.

### Génération d'une distribution de type $\mathcal{L}^b$ à 1D

On cherche à générer la variable aléatoire  $x \in ]-\infty, \infty[$  de distribution

$$p(x) = \frac{\beta}{(1+x^2)^b} \text{ avec } b > 1$$

où  $\beta$  est tel que  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ . Pour cela, on utilise une méthode de réjection, dont le principe est illustré sur la figure (4.6). On commence par majorer la distribution  $p(x)$  que l'on veut générer par une fonction  $g(x)$  dont on sait inverser la primitive analytiquement. Par exemple :

$$\forall x \in ] - \infty, \infty[, p(x) < \frac{\beta}{1 + x^2} \text{ pour } b > 1 \quad (4.55)$$

Il suffit, comme dans le paragraphe précédent, de poser  $x = \tan \theta$  et de générer la variable aléatoire  $\theta$  uniformément sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , pour obtenir la variable aléatoire  $x$  distribuée selon la loi de probabilité  $g(x)$ .

Supposons qu'on sache tirer aléatoirement un point dans le plan  $(x, y)$  avec une probabilité uniforme sous la courbe de  $g(x)$ . Si ce point est sous la courbe de  $p(x)$ , on le garde. Sinon, on le rejette et on procède au tirage suivant. Les points retenus sont finalement distribués uniformément sous la courbe de  $p(x)$  et leurs abscisses  $x$  sont distribuées selon la loi de probabilité  $p(x)$ .

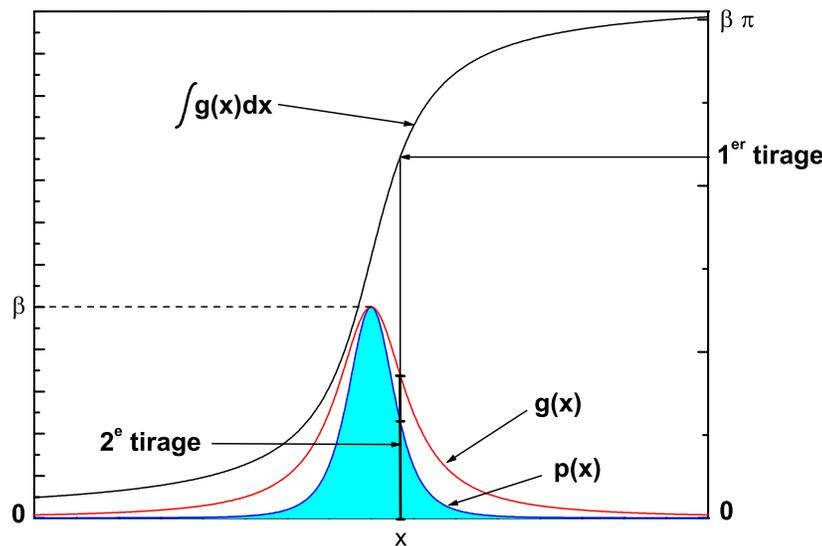


FIG. 4.6 – Principe de la méthode de réjection.

Remarque : la fraction d'atomes rejetés (donc la fraction de temps de tirage perdu pour l'expérimentateur) dépend du rapport des aires sous les courbes  $p(x)$  et  $g(x)$ . Par conséquent, on a intérêt à majorer la fonction  $p(x)$  au plus près.

Pour générer la distribution de probabilité  $p(x)$ , la procédure est donc la suivante. On commence par tirer  $x$  dans  $]-\infty, +\infty[$ , de distribution lorentzienne, puis on calcule  $e = p(x)/g(x)$ . On tire ensuite un nombre aléatoire  $v_3$  de distribution uniforme dans  $[0, 1]$ , et on compare  $v_3$  et  $e$ . Si  $v_3 < e$ , on garde  $x$ . Sinon, on le rejette et on recommence la procédure.

### Génération d'une distribution de type $\mathcal{L}^b$ à 3D en coordonnées sphériques.

Dans une fontaine atomique, après ouverture adiabatique, la distribution de vitesses, supposée isotrope<sup>3</sup>, est bien décrite par une distribution de type  $\mathcal{L}^b$  [123], c'est à dire

$$\mathcal{L}^b(\vec{v}) = p(v) = \frac{\beta}{\left(1 + \frac{v^2}{v_c^2}\right)^b}$$

où  $v = \|\vec{v}\|$  est la vitesse radiale d'un atome dans le référentiel du centre du nuage,  $v_c$  est la vitesse caractéristique de la dispersion en vitesses radiales, de l'ordre de  $18 \text{ mm.s}^{-1}$  pour le  $^{87}\text{Rb}$ ,  $b$  est de l'ordre de 2.0, et  $\beta$  est telle que

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty p(v)v^2 dv = 1$$

et est calculée en annexe B.3. Une telle distribution de vitesses est attendue dans un modèle simple de refroidissement Sysiphe 1D [123]. De plus, cette distribution est physiquement tronquée pour des valeurs de vitesse radiale supérieures ou de l'ordre de la vitesse de refroidissement Doppler,  $\sqrt{\hbar\Gamma/2M} \simeq 8v_c$ . Pour générer la distribution de vitesses  $\vec{v}$ , il suffit de générer le triplet  $(v, \theta, \varphi)$  tel que  $\varphi$  soit distribué uniformément dans  $[0, 2\pi]$  (symétrie cylindrique de la fontaine autour de son axe) et  $(v, \theta)$  aient pour loi de probabilité conjointe

$$g(v, \theta) = 2\pi\beta v_c^2 \frac{\frac{v^2}{v_c^2} \sin\theta}{\left(1 + \frac{v^2}{v_c^2}\right)^b}$$

Pour cela, on utilise encore la méthode de réjection décrite ci-dessus. Pour  $b \geq 2$ , on peut majorer  $g(v, \theta)$  de la façon suivante, pour tout  $v \in ]-\infty, \infty[$  :

$$g(v, \theta) \leq 2\pi\beta v_c^2 \times \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{v_c}\right)^2} \quad (4.56)$$

En revanche, pour  $b < 2$ , l'inégalité ci-dessus n'est pas vérifiée en général, et on doit rechercher graphiquement une fonction majorante. Par exemple, on peut appliquer à la fonction majorante ci-dessus deux rapports d'affinité adéquats selon  $x$  et  $y$ , de sorte que la majoration recherchée soit vérifiée sur au moins un intervalle de la forme  $[0, 8v_c]$ . La figure (4.7) montre un tel exemple de majoration dans le cas  $b = 1.8$ , pour lequel les rapports d'affinité sont respectivement 3 selon  $x$  et 0.4 selon  $y$  :

$$g(v, \theta) \leq 2\pi\beta v_c^2 \times \frac{0.4}{1 + \left(\frac{v}{3v_c}\right)^2} \quad (4.57)$$

<sup>3</sup> Il a été démontré expérimentalement [122] que la "température" de la mélasse ne dépend que de l'intensité totale des faisceaux de refroidissement, et non de l'intensité particulière dans chaque direction, dans une certaine limite. Ceci suggère que la distribution des vitesses est isotrope à l'issue du lancement. De plus, nous verrons que l'évolution de la fraction d'atomes détectés avec la vitesse de lancement confirme cette hypothèse d'isotropie.

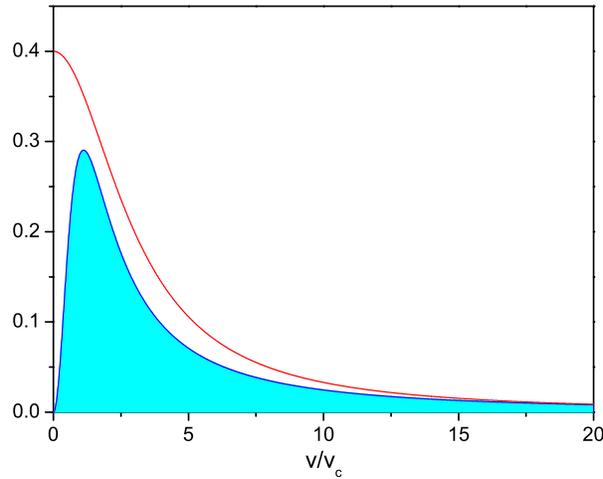


FIG. 4.7 – Exemple de majoration pour la génération de la distribution de vitesses de type  $\mathcal{L}^b$  à 3D. Ici, on a représenté la fonction  $g(v, \theta = \frac{\pi}{2})$  pour  $b = 1.8$  (courbe frontière de l'aire grisée), ainsi que la fonction majorante utilisée pour la méthode de réjection. Le rapport des aires sous les deux courbes, pour  $v < 8v_c$ , est de 0.65, ce qui rend la réjection efficace.

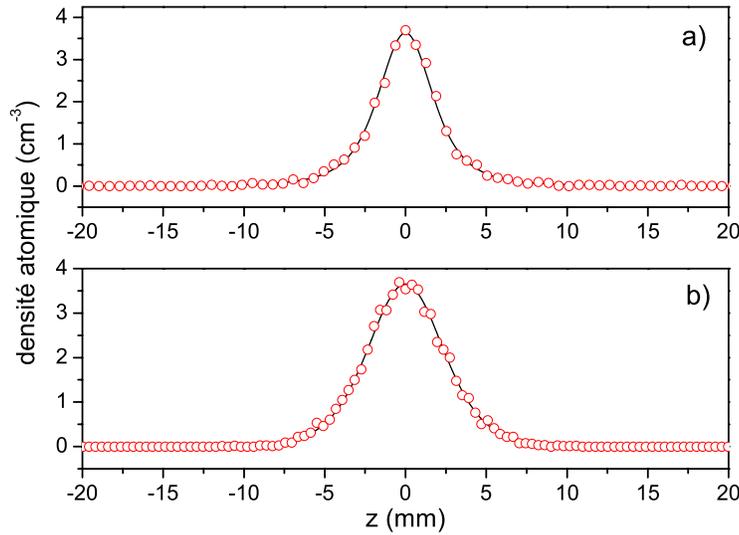


FIG. 4.8 – *Figure a)* : profil de densité atomique le long de la direction de l'axe  $z$ , hors de l'axe ( $x = y = 0.62$  mm), 171.5 ms après le lancement du nuage, et 35.6 ms après qu'il ait pénétré dans la 1<sup>re</sup> cavité. La cellule élémentaire du maillage a pour dimensions  $0.62$  mm  $\times$   $0.62$  mm  $\times$   $0.63$  mm et le pas élémentaire de temps est de 0.9 ms, ce qui correspond à 38 clichés du nuage pendant sa traversée dans la cavité. Le nuage est ponctuel au départ, et a une distribution de vitesses de type  $\mathcal{L}^b$ , avec  $v_c = 18$  mm.s<sup>-1</sup> et  $b = 1.8$ . La courbe en trait plein représente le profil théorique, et les ronds représentent les points issus du tirage aléatoire. *Figure b)* : idem pour une distribution de vitesses "double gaussienne", et une distribution de positions initiales gaussienne ( $\sigma_0 = 1.38$  mm). Le profil est effectué pour  $x = y = 0.38$  mm (pas de la maille élémentaire).

qui est vrai sur un intervalle de l'ordre de  $[0, 20v_c]$ . Cette majoration nous suffit en pratique, puisqu'on ne cherche pas à générer des vitesses supérieures à la vitesse de coupure  $\sim 8v_c$ .

**Remarque :** il est important de produire  $v$  et  $\theta$  simultanément, car  $g(v, \theta)$  est une loi de probabilité conjointe. On commettrait une erreur en générant d'abord  $v$  selon la loi

$$2\pi\beta v_c^2 \frac{\frac{v^2}{v_c^2}}{\left(1 + \frac{v^2}{v_c^2}\right)^b}$$

puis en générant  $\theta$  distribué uniformément dans  $[0, \pi]$ .

### Vérification de la génération des nombres aléatoires

A titre d'exemple, la figure (4.8) montre le profil du nuage d'atomes froids, effectué le long de la direction  $z$  et hors de l'axe, à un instant  $t = 171.5$  ms après le lancement du nuage. Les cas représentés correspondent à des situations où le profil peut être exprimé analytiquement : distribution de vitesses de type  $\mathcal{L}^b$  et nuage ponctuel initialement, ou distribution de vitesses "double gaussienne" et nuage distribué selon une gaussienne initialement.

#### 4.3.4 Détermination de la distribution des positions initiales des atomes dans le nuage

La distribution de positions initiales est déterminée en imageant le nuage d'atomes froids sur une caméra CCD. Le dispositif de mesure est représenté sur la figure (4.9). La zone sensible de la caméra est de  $8.8 \text{ mm} \times 6.6 \text{ mm}$ , chaque pixel ayant pour dimensions  $11 \mu\text{m} \times 17 \mu\text{m}$ . Le grandissement transverse de la lentille d'imagerie est de 0.39. L'acquisition de l'image est déclenchée de manière synchrone avec le cycle d'horloge. La photo est prise quelques dizaines de microsecondes avant la phase de lancement. Le nuage est encore immobile par rapport au référentiel du laboratoire. L'incertitude de mesure dans chaque direction, horizontale et verticale, est de 4%, principalement due à une incertitude de l'ordre de 1 mm sur la position de la lentille d'imagerie par rapport à la surface photosensible de la caméra. Indépendamment, on doit tenir compte d'une incertitude de 3% liée à la profondeur de champ de la caméra CCD, qui provient de la taille finie des pixels. La figure (4.10) montre deux images du nuage prises pour

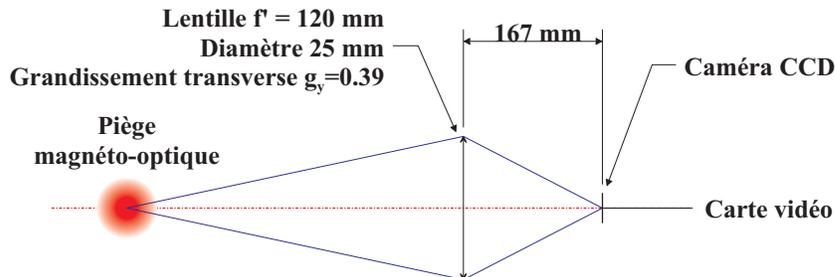


FIG. 4.9 – Dispositif de mesure de la distribution initiale de positions.

deux intensités de faisceaux de refroidissement différentes. Ces configurations correspondent typiquement aux cas "haute densité" et "basse densité" des mesures de déplacement collisionnel. On observe un allongement du nuage dans la direction verticale. La figure (4.10) montre les profils obtenus dans les deux directions, verticale et horizontale. Ils sont assez bien représentés par une gaussienne avec, à haute densité,  $\sigma_r^V = 1.5$  mm verticalement, et  $\sigma_r^H = 1.3$  mm horizontalement. L'ellipticité du nuage, définie par  $(\sigma_r^V - \sigma_r^H)/(2\sigma_r^{moyen})$ , vaut typiquement  $6 \times 10^{-2}$ . On prendra dans la suite de la simulation une distribution spatiale gaussienne isotrope, de  $\sigma_r = \sigma_r^{moyen}$ , et on prendra pour incertitude sur  $\sigma_r$  la somme quadratique de l'incertitude de mesure et de l'ellipticité. Cette incertitude vaut  $\delta\sigma_r \simeq 0.1$  mm.

Remarque : on peut se demander si l'image prise à la caméra CCD juste avant le lancement reflète bien la distribution de positions juste après le lancement. Pour cela, on peut effectuer un calcul d'ordre de grandeur pour un lancement par pure pression de radiation. Il suffit d'estimer la diffusion spatiale induite par l'absorption des photons nécessaires pour accélérer les atomes de  $0 \text{ m.s}^{-1}$  à la vitesse finale typique de  $v_l = 3.5 \text{ m.s}^{-1}$ . Pour le Rb, le nombre de photons qu'il faut absorber est, en ordre de grandeur,  $N_{ph} = \sqrt{3}v_l/v_{rec} \simeq 10^3$  photons, où  $v_{rec} = \hbar k/m$  est la vitesse de recul des atomes. Le temps qu'il faut pour les absorber est  $\tau_{lancement} = N_{ph} \times \tau_{ph}$ , où  $\tau_{ph}$  est le temps moyen s'écoulant entre deux émissions spontanées successives. Le coefficient de diffusion en impulsion est [124] :

$$\mathcal{D}_{spont} = \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma}{2} \frac{s}{2(1+s)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2} \frac{1}{\tau_{ph}} \quad (4.58)$$

La variance de la variation d'impulsion,  $\Delta(\delta\vec{p}^2)$ , pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , s'écrit, par définition de  $\mathcal{D}_{spont}$  :

$$\Delta(\delta\vec{p}^2) = 2\mathcal{D}_{spont}\Delta t \quad (4.59)$$

Les fluctuations de vitesse pendant cet intervalle de temps ont donc pour écart type :

$$\sigma_v = \frac{\sqrt{2\mathcal{D}\Delta t}}{m} \quad (4.60)$$

et le grossissement du nuage sous l'effet des fluctuations est donc :

$$\Delta\sigma_r = \int_0^{\tau_{lancement}} \sigma_v d(\Delta t) = \frac{2}{3}\tau_{lancement}^{3/2} \times \frac{\sqrt{2\mathcal{D}}}{m} = \frac{2}{3}N_{ph}^{3/2} \times v_{rec}\tau_{ph} \quad (4.61)$$

Pour une puissance de 12 mW par faisceau de refroidissement, et un désaccord  $\delta = -2\Gamma$  pendant la phase de lancement, la saturation par faisceau est  $s = 0.16$ , et  $\tau_{ph} = 108$  ns. On en déduit  $\Delta\sigma_r \sim 14 \mu\text{m}$ , qui est négligeable devant la taille initiale du nuage. Le coefficient de diffusion en impulsion liée à la redistribution cohérente de photons d'un faisceau de refroidissement dans l'autre,  $\mathcal{D}_{corr}$ , est au maximum  $4 \times (1+s) \sim 8$  fois plus important (cf. [124] et annexe B.4). En tenant compte de ces deux phénomènes, le grossissement du nuage serait donc au maximum  $\Delta\sigma_r \simeq 9 \times 14 \simeq 130 \mu\text{m}$ , ce qui est encore largement négligeable devant la taille du nuage. Le calcul précédent est très simpliste, il ne tient compte ni des forces de friction, ni de la diffusion multiple. Les mesures par

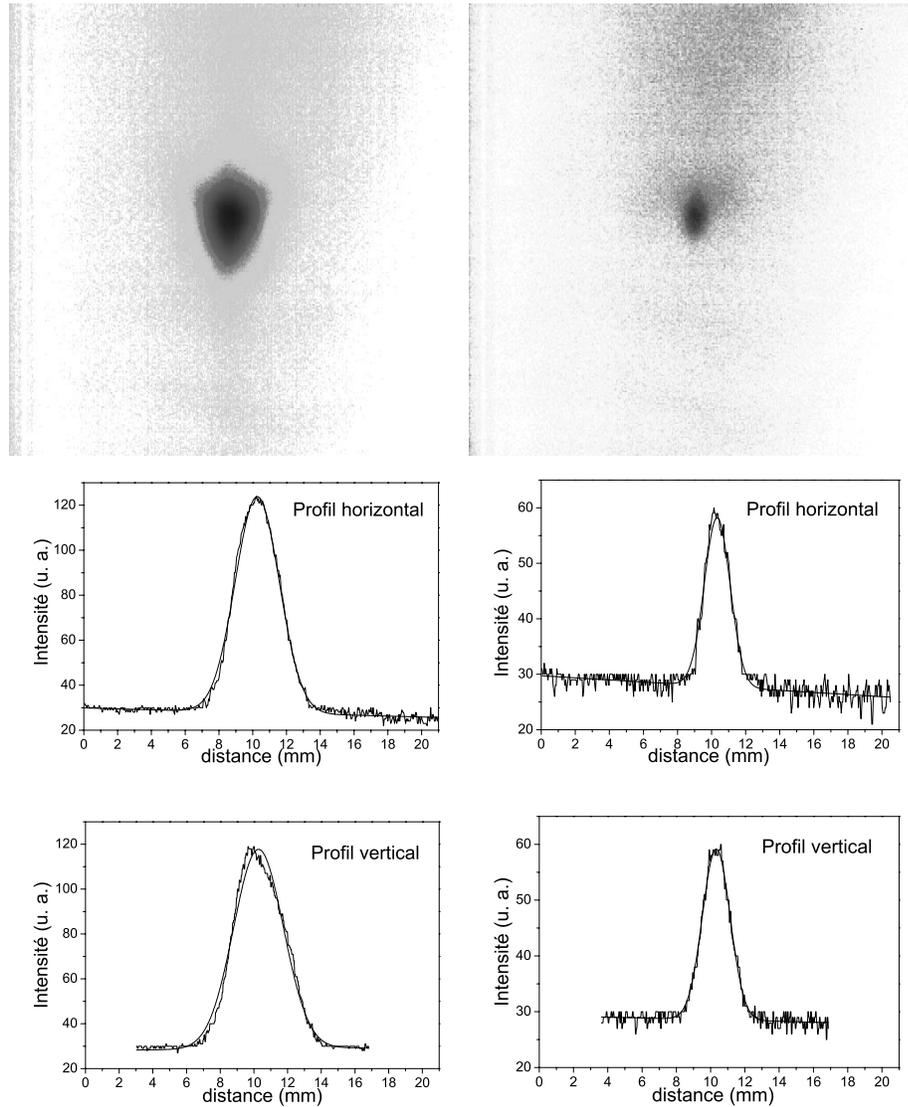


FIG. 4.10 – Images du nuage d’atomes froids en configuration MOT, prises avec une caméra CCD. A gauche, la puissance des faisceaux de refroidissement vaut 12 mW. Les profils passant par le centre du nuage, approximés par des gaussiennes (superposés à un fond linéaire), donnent une taille caractéristique de nuage  $\sigma_H = 1.3$  mm horizontalement, et  $\sigma_V = 1.5$  mm verticalement (figures en dessous). A droite, image du nuage d’atomes froids pour une puissance laser plus faible (2.5 mW). Les paramètres sont alors  $\sigma_H = 0.7$  mm et  $\sigma_V = 0.8$  mm. Le nombre d’atomes est passé de  $3 \times 10^8$  à  $5 \times 10^7$  entre les deux situations.

absorption, décrites dans le chapitre 5, permettent cependant de déterminer la taille du nuage après la phase  $2\Gamma$ , de confirmer l'hypothèse "distribution de positions initiales gaussienne", et de confirmer que la variation de taille du nuage pendant cette phase est inférieure à 0.1 mm.

### 4.3.5 Fraction d'atomes détectés en fonction de la vitesse de lancement

La simulation numérique permet de calculer la fraction d'atomes détectés en fonction de la vitesse de lancement. Les résultats de la simulation numérique sont présentés sur la figure (4.11), avec les résultats expérimentaux pour comparaison. En abscisses on trouve la vitesse de lancement  $v_l$  du nuage d'atomes froids. En ordonnées, on a représenté la fraction d'atomes détectés, normalisée à la fraction détectée lorsqu'on lance à  $3.5 \text{ m.s}^{-1}$  vers le bas<sup>4</sup>, et tenant compte de l'inhomogénéité du profil transverse de saturation. On note cette grandeur  $F_{pond.}^{norm.}$  dans la suite, l'exposant *norm.* permettant de la distinguer de la fraction détectée pondérée par le profil transverse de saturation, notée simplement  $F_{pond.}$ . La simulation numérique indique par ailleurs que pour  $v_l = -3.5 \text{ m.s}^{-1}$ , et pour les trois types de distributions, 100% des atomes lancés traversent la fenêtre de détection. Par-contre,  $F_{pond.}$  vaut 95% pour la distribution de vitesses gaussienne, 94.6% pour la "double gaussienne", et 93.3% pour la distribution de type  $\mathcal{L}^b$ . Même lorsqu'on lance rapidement le nuage vers le bas, les ailes de la distribution de vitesses jouent un rôle sur le signal détecté, par leur convolution avec l'inhomogénéité du faisceau de détection.

Expérimentalement, on mesure  $F_{pond.}(v_l)$  en notant l'aire du temps de vol en fonction de la vitesse de lancement. Le faisceau de détection est atténué (saturation  $s_0 = 0.46$  sur l'axe) et fortement désaccordé de résonance ( $\delta = -3.8\Gamma$ ) pour que l'amplificateur de tension de la détection ne soit pas saturé dans la situation  $v_l = 0 \text{ m.s}^{-1}$ . Pour une vitesse de lancement  $v_1$  donnée, l'aire de temps de vol est donnée par

$$\mathcal{A}(v_1) = N_{det.}(v_1) \times \mathcal{D}(v_1) \quad (4.62)$$

où  $N_{det.}$  est le nombre d'atomes traversant la zone de détection, et  $\mathcal{D}$  est la détectivité du système de détection (cf. §5.4.1). On obtient donc la fraction d'atomes géométriquement détectés normalisée à  $v_2 = -3.5 \text{ m.s}^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \frac{N_{det.}(v_1)}{N_{det.}(v_2)} &= \frac{\mathcal{A}(v_1)}{\mathcal{A}(v_2)} \times \frac{\mathcal{D}(v_2)}{\mathcal{D}(v_1)} \\ &= \frac{v_1 \mathcal{A}(v_1)}{v_2 \mathcal{A}(v_2)} \times \frac{v_2 \mathcal{D}(v_2)}{v_1 \mathcal{D}(v_1)} \end{aligned} \quad (4.63)$$

On a représenté, sur la figure (4.11), le rapport  $F_{pond.}^{norm.}(v_1) = v_1 \mathcal{A}(v_1)/v_2 \mathcal{A}(v_2)$  qui, pour une fenêtre de détection infiniment fine et un profil transverse de saturation uniforme, représente la fraction d'atomes géométriquement détectés, normalisée à  $v_{det.} = v_2$  (le facteur  $v_2 \mathcal{D}(v_2)/v_1 \mathcal{D}(v_1)$  vaut 1 dans ce cas).

Numériquement, la fraction d'atomes détectés est calculée en lançant  $\sim 10^5$  atomes dans une fontaine virtuelle qui tient compte des diaphragmes de

<sup>4</sup>on n'a pas dépassé cette valeur de  $v_l$  expérimentalement.

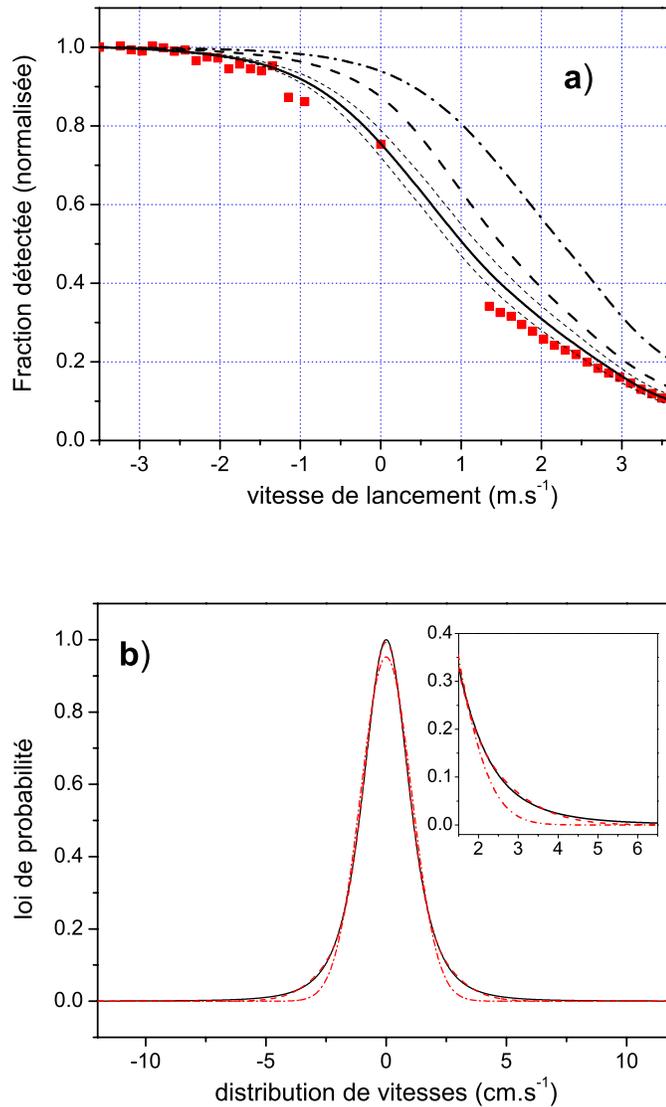


FIG. 4.11 – *Figure a)* : fraction d'atomes détectés, normalisée à  $v_l = -3.5 \text{ m.s}^{-1}$ , et pondérée par le profil transverse de saturation du faisceau de détection ( $F_{\text{pond}}^{\text{norm.}}$ ). Les points expérimentaux (carrés pleins) sont bien représentés lorsque la distribution de vitesses est une distribution de type  $\mathcal{L}^b$  (traits pleins). Ici,  $b = 2.1$ ,  $v_c = 18 \text{ mm.s}^{-1}$ . En tirets fins, de part et d'autre de cette courbe en traits pleins, on a représenté les cas  $b = 1.9$  et  $b = 2.3$  ( $v_c$  étant calculée de sorte à conserver la même largeur à mi-hauteur pour le temps de vol, cf. figure (4.12)), qui correspondent à notre limite de sensibilité pour le réglage de la symétrie du temps de vol. En tirets épais, on a pris pour distribution de vitesses la "double gaussienne" qui minimise le  $\chi^2$  par comparaison avec la distribution de type  $\mathcal{L}^b$  précédente (ses paramètres sont  $A = 0.28$ ,  $v_A = 17.23 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $B = 0.71$ ,  $v_B = 8.10 \text{ mm.s}^{-1}$ ). En tiret-point-tiret, idem avec une simple gaussienne ( $A = 0.95$ ,  $\sigma_v = 10.6 \text{ mm.s}^{-1}$ ). Les distributions de vitesses correspondantes sont représentées sur la *figure b)*. La distribution de positions initiales a un écart type  $\sigma_0 = 1.4 \text{ mm}$ .

distribution de vitesses	fraction détectée pondérée, $F_{pond.}$	fraction détectée géométrique
$\mathcal{L}^b$	(11.5%) <b>10.6%</b> (9.1%)	(13.3%) <b>12.2%</b> (10.5%)
"double gaussienne"	14.5%	16.7%
simple gaussienne	22.4%	25.8%

TAB. 4.1 – Influence, dans la fontaine Rb, du type de distribution sur la fraction détectée pondérée par le profil de saturation de la détection, et influence du profil de saturation sur le signal détecté. Les paramètres des distributions de vitesses sont ceux de la figure (4.11). Les valeurs entre parenthèses correspondent à  $b = 2.3$  (à gauche) et  $b = 1.9$  (à droite), pour une largeur à mi-hauteur constante. Le nuage est lancé à  $+3.5\text{m.s}^{-1}$  vers le haut, et la distribution de positions initiale, gaussienne, a pour écart type  $\sigma_0 = 1.38\text{mm}$ .

la figure (4.4), et en comptant le nombre d'atomes qui atteignent la zone de détection. Chaque atome détecté est pondéré par son taux d'émission spontanée propre, lequel dépend de la position de l'atome dans le faisceau de détection (le profil spatial de saturation n'est pas uniforme selon  $x$ ). Cette pondération revient à tenir compte de l'inhomogénéité du profil transverse de saturation, et de la convolution par la fenêtre de largeur finie. Elle revient donc à corriger la fraction géométriquement détectée par le facteur  $v_1\mathcal{D}(v_1)/v_2\mathcal{D}(v_2)$ .

La figure (4.11) montre qu'il est possible, dans notre horloge, de rejeter avec certitude la gaussienne et la "double gaussienne" comme distributions de vitesses. Seule une distribution de type  $\mathcal{L}^b$  permet de représenter correctement les points de mesure. Bien sûr, cette distribution de vitesses peut être décrite par la somme de deux gaussiennes (figure (4.11.b)). Mais on voit que le résultat numérique obtenu avec cette distribution "double gaussienne" ne représente pas bien les résultats de mesure. On voit ainsi qu'on peut commettre une erreur non négligeable (précisément, un facteur 1.4) lorsque, à partir d'un signal de temps de vol (information 1D), on extrapole la distribution de vitesses à 3D en utilisant simplement un argument d'isotropie. La mesure de la fraction d'atomes détectés,  $F_{pond.}^{norm.}$ , lève l'ambiguïté sur le modèle de distribution de vitesses, parce qu'elle fournit une information à 2D qui permet de révéler le caractère *non factorisable* de la distribution de type  $\mathcal{L}^b$ . Pour la même raison, la densité atomique moyenne, qui fournit une information à 3D, est notablement différente selon le modèle de distribution de vitesses (cf. §4.3.7).

Le tableau (4.1) donne, pour la vitesse de lancement standard  $v_l = +3.5\text{m.s}^{-1}$ , la fraction d'atomes détectés géométriquement, ainsi que la fraction d'atomes détectés tenant compte du profil transverse de saturation du faisceau de détection,  $F_{pond.}$ . Le faisceau de détection a une saturation sur l'axe  $s_0 = 0.93$ , est quasi résonnant ( $\delta = -0.1\Gamma$ ) et est modulé à 100 kHz avec une amplitude  $m = 0.33\Gamma$  (configuration standard des mesures de déplacement collisionnel). Notons aussi l'influence du type de distribution de vitesses sur  $F_{pond.}$ , ainsi que l'influence du profil de saturation du faisceau de détection.

Enfin, le modèle de distribution de vitesses étant déterminé ( $\mathcal{L}^b$ ), quelle est la sensibilité de la méthode décrite ci-dessus aux paramètres  $b$  et  $v_c$ ? La réponse

à cette question fournit l'incertitude ultime que l'on estime être capable d'atteindre si on procède périodiquement à la mesure de la distribution de vitesses par la méthode précédente. Les courbes en pointillés fins de la figure (4.11) ont été calculées pour  $b = 1.9$  et  $b = 2.3$ , c'est à dire pour des valeurs de  $b$  inférieure (respectivement supérieure) de 10% à la valeur 2.1 (trait plein). Dans ces deux cas,  $v_c$  a été adaptée de sorte que la largeur à mi-hauteur de la distribution de vitesses soit identique<sup>5</sup>. **L'incertitude ultime que l'on peut espérer avoir sur la fraction d'atomes détectés est  $\sim 11\%$  liée à cette incertitude de 10% sur  $b$ .**

L'incertitude de 10% sur  $b$  est l'incertitude ultime que l'on peut espérer avoir sur  $b$  en effectuant le type de mesure décrit précédemment. Cette affirmation est basée sur les remarques suivantes :

1. Il est licite de suspecter les points de mesure effectués pour  $|v_l| < 2.0 \text{ m.s}^{-1}$  de donner des valeurs trop basses : le battement entre les deux VCO contrôlant les fréquences des faisceaux montants et descendants du piège magnéto-optique donne lieu à des bandes latérales qui ne sont pas complètement filtrées par le système d'asservissement de fréquence sur le synthétiseur ("DDS"). Ces bandes latérales perturbent le lancement en créant un système de vitesses multiples. Le temps de vol s'élargit, et prend même l'allure d'un temps de vol "avec bandes latérales" lorsque  $|v_l| < 1.0 \text{ m.s}^{-1}$ . On n'a pas représenté ces points de mesure sur la figure (4.11.a). Ces "bandes latérales" du temps de vol sont d'autant plus éloignées du pic central de temps de vol, et d'autant plus atténuées, que  $|v_l|$  est élevée. Pour  $1.0 \text{ m.s}^{-1} < |v_l| < 2.0 \text{ m.s}^{-1}$ , elles constituent autant d'atomes qui ne sont pas détectés, soit parce qu'ils échappent à la fenêtre temporelle de détection, soit parce qu'ils perturbent la ligne de base du temps de vol.
2. Au contraire, le point de mesure pour  $v_l = 0 \text{ m.s}^{-1}$  est particulièrement fiable : dans cette configuration, on n'asservit pas le battement de fréquence entre les deux VCO du piège magnéto-optique sur le synthétiseur ("DDS"). On effectue simplement l'asservissement de phase du VCO "esclave" sur le VCO "maître". Il n'existe donc pas de bande latérale venant perturber le lancement. Aussi, on peut considérer que le point de mesure effectué à  $v_l = 0 \text{ m.s}^{-1}$  est connu à 5% près. Cette incertitude relative est celle obtenue pour  $b = 1.9$  et  $b = 2.3$ .
3. Les deux courbes en pointillés fins représentent "correctement" les points de mesure pour  $|v_l| > 2.0 \text{ m.s}^{-1}$ . Par exemple, pour  $v_l = 3.5 \text{ m.s}^{-1}$ , le rapport des valeurs rendues par les courbes en pointillés fins, relativement à la valeur expérimentale, est de 1.10 pour  $b = 2.3$  (courbe supérieure) et de 1.16 pour  $b = 1.9$  (courbe inférieure). L'incertitude sur le point de mesure est quant à elle bien inférieure à ces valeurs.
4. Enfin, les distributions de vitesses obtenues pour ces trois couples de paramètres ( $b, v_c$ ) sont représentées sur la figure (4.12). L'écart relatif entre une courbe en pointillés et la courbe en trait plein est de 20% pour  $v \simeq 4 \text{ cm.s}^{-1}$ . Cet écart relatif correspond typiquement à l'asymétrie résiduelle de nos signaux de temps de vol, c'est à dire à notre sensibilité de réglage de l'équilibrage des faisceaux de refroidissement montants et descendants.

---

<sup>5</sup>Ce paramètre a été systématiquement enregistré au cours des mesures de déplacement collisionnel.

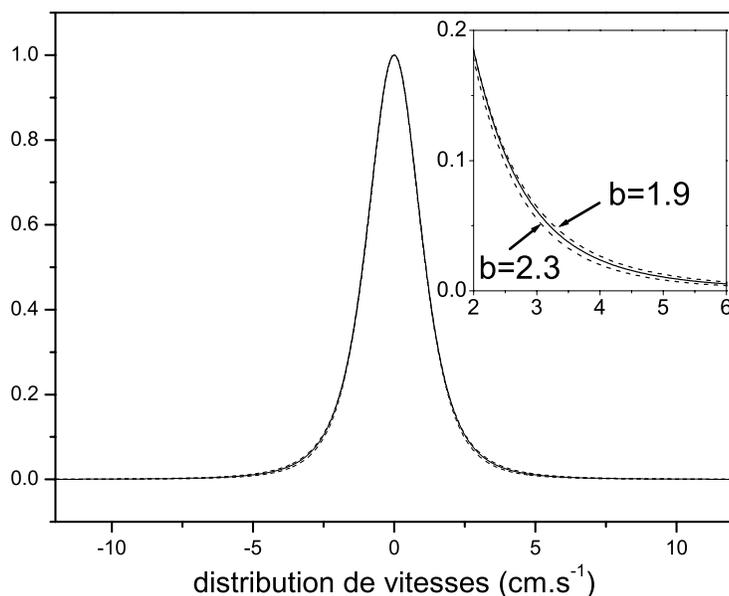


FIG. 4.12 – Distributions de vitesses de type  $\mathcal{L}^b$  pour différentes valeurs de  $b$  et  $v_c$ . En trait plein,  $b = 2.1$ , et  $v_c = 18 \text{ mm.s}^{-1}$ . En pointillés, ( $b = 2.3, v_c = 19 \text{ mm.s}^{-1}$ ) et ( $b = 1.9, v_c = 17 \text{ mm.s}^{-1}$ ).  $v_c$  est calculé de sorte que les distributions de vitesses ont même largeur à mi-hauteur.

Remarques : (i) Insistons encore sur le fait que la méthode précédente est très sensible aux paramètres de la distribution de vitesses, et ceci d'autant plus que la vitesse de lancement est élevée. Visuellement, sur la figure (4.11.a), les courbes obtenues pour  $b = 2.1 \pm 10\%$  se resserrent pour  $v_l$  élevé, mais l'écart relatif croît, et c'est bien cela qui importe.

(ii) La détermination de la distribution de vitesses à partir de cette méthode repose sur l'hypothèse que la distribution de vitesses ne varie pas avec la vitesse de lancement. Pour s'en assurer, il suffit d'enregistrer les signaux de temps de vol pour diverses vitesses de lancement, de déconvoluer chacun d'eux par le profil de saturation de la détection, et d'en déduire les paramètres de la distribution de vitesses. Cette dernière opération n'est pas simple pour les vitesses  $v_l < 0$ , puisqu'on ne peut plus négliger la taille initiale du nuage. Au moment de ces mesures, effectuées manuellement, nous n'avons pas effectué cette vérification assez lourde. Sur l'horloge  $Rb - Cs$ , l'automatisation de la prise de données, de la variation de la vitesse de lancement, et de la déconvolution par le profil de saturation de la détection, rend ces opérations plus aisées. En ce qui concerne les mesures passées, un certain nombre d'arguments permettent de valider l'hypothèse ci-dessus. Les paramètres  $b$  et  $v_c$  déduits des points expérimentaux de la figure (4.11.a) sont en bon accord avec les valeurs déduites d'un signal de temps de vol pris à  $3.5 \text{ m.s}^{-1}$ . De plus, il est raisonnable de penser que la dis-

distribution de vitesses	fraction d'atomes présents en cavité au 1 <sup>er</sup> passage	fraction d'atomes présents en cavité au 2 <sup>e</sup> passage
$\mathcal{L}^b$	(70.4%) <b>66%</b> (61.2%)	(15.3%) <b>13.8%</b> (12.0%)
"double gaussienne"	85%	19.1%
simple gaussienne	95.7%	29.6%

TAB. 4.2 – Influence, dans la fontaine Rb, du type de distribution de vitesses sur la fraction d'atomes présents en cavité aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> passages. Les paramètres des distributions de vitesses sont ceux de la figure (4.11). Les valeurs entre parenthèses correspondent à  $b = 2.3$  (à gauche) et  $b = 1.9$  (à droite), pour une largeur à mi-hauteur constante. Le nuage est lancé à  $+3.5 \text{ m.s}^{-1}$  vers le haut, et la distribution de positions initiales, gaussienne, a pour écart type  $\sigma_0 = 1.4 \text{ mm}$ .

tribution de vitesses est identique pour  $v_l = +3.5 \text{ m.s}^{-1}$  et  $v_l = -3.5 \text{ m.s}^{-1}$ . Dans ces conditions, la distribution de vitesses "double gaussienne" qui décrit correctement le temps de vol à  $3.5 \text{ m.s}^{-1}$  donnerait une valeur de  $F_{pond}^{norm}$  1.4 fois supérieure à celle effectivement obtenue, ce qui serait largement détectable.

(iii) Le calcul analytique de la fraction géométrique d'atomes détectés est possible, pour un nuage de distribution de positions initiale gaussienne ( $\sigma_0$ ), dans le cas d'une distribution de vitesses gaussienne (resp. "double gaussienne"). Il suffit de remplacer  $(\sigma_{vi}^2 t_2^2)$  par  $(\sigma_0^2 + \sigma_{vi}^2 t_2^2)$  dans les expressions (4.12) (resp. (4.19)). Le calcul analytique est aussi possible dans le cas d'une distribution de type  $\mathcal{L}^b$ , mais pour un nuage supposé ponctuel initialement. On montre, en s'aidant de (B.20), que la fraction géométrique d'atomes détectés vaut :

$$F(R) = \pi \sqrt{\pi} r_c^3 \beta \frac{\Gamma(b-3/2)}{\Gamma(b-1)} \left[ 1 - \left( \frac{r_c}{\sqrt{r_c^2 + R^2}} \right)^{2b-3} \right] \quad (4.64)$$

Ces expressions analytiques sont l'un des tests de bon fonctionnement de la simulation numérique.

### 4.3.6 Fraction d'atomes en cavité en fonction de la vitesse de lancement

La figure (4.13) montre les résultats de la simulation numérique de la fraction d'atomes présents dans la cavité micro-onde au premier passage, pour les trois types de distributions de vitesses précédentes. Les paramètres des distributions de vitesses sont ceux de la figure (4.11). Le tableau (4.2) permet de comparer les valeurs obtenues lorsqu'on lance le nuage dans la configuration standard ( $v_l = 3.5 \text{ m.s}^{-1}$ ). Notons qu'on commet une erreur d'un facteur 1.45 sur la fraction en cavité au 1<sup>er</sup> passage, en considérant la distribution de vitesses gaussienne au lieu de  $\mathcal{L}^b$ . Une telle erreur se répercuterait directement sur l'évaluation du "cavity pulling" (cf. §4.4), puisque c'est essentiellement le nombre d'atomes au 1<sup>er</sup> passage dans la cavité qui détermine l'amplitude de cet effet.

Enfin, l'incertitude sur la fraction d'atomes traversant la cavité est de l'ordre de 7% au 1<sup>er</sup> passage, et de 12% au 2<sup>e</sup> passage, liée à l'incertitude de 10% sur le paramètre  $b$  de la distribution de vitesses.

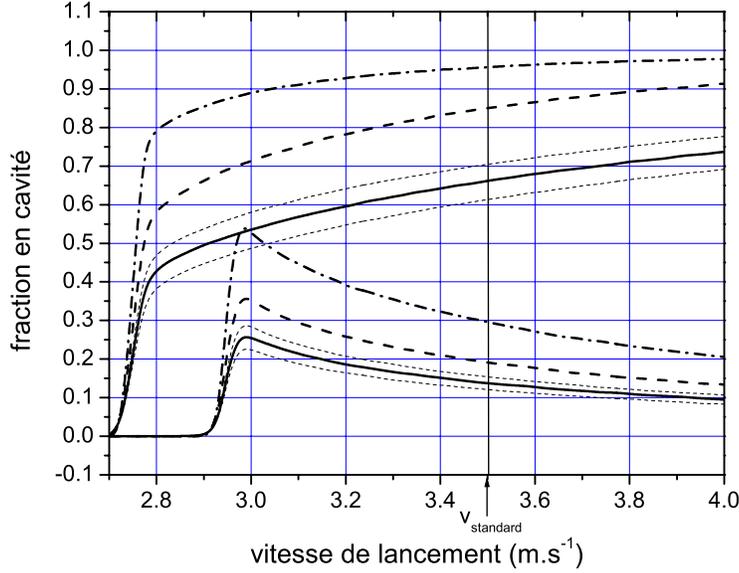


FIG. 4.13 – Fraction d’atomes entrant dans la cavité de la fontaine Rb aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> passages, pour différentes distributions de vitesses :  $\mathcal{L}^b$  (trait plein), "double gaussienne" (tirets), et simple gaussienne (tiret point tiret). En pointillés fins, ( $b = 2.3, v_c = 19 \text{ mm.s}^{-1}$ ) au-dessus et ( $b = 1.9, v_c = 17 \text{ mm.s}^{-1}$ ) en dessous. Dans ces deux cas,  $v_c$  est calculé de sorte que les distributions de vitesses ont même largeur à mi-hauteur. Pour les vitesses de lancement inférieures à  $2.7 \text{ m.s}^{-1}$ , le nuage n’atteint pas la cavité. Pour les vitesses  $2.7 \text{ m.s}^{-1} < v_l < 2.9 \text{ m.s}^{-1}$ , le nuage pénètre dans la cavité mais ne franchit pas le chapeau supérieur de la cavité.

#### 4.3.7 Evolution temporelle de la densité atomique au centre du nuage

La figure (4.14) montre l’évolution de la densité atomique au centre du nuage au cours de son vol parabolique au-dessus de la cavité micro-onde. La distribution de vitesses est de type  $\mathcal{L}^b$ . Lorsque le nuage est supposé ponctuel initialement, le calcul numérique est en bon accord avec l’expression analytique (4.65) prise en  $r = 0$

$$p(r, t) = \frac{\beta}{1 + \frac{r^2}{v_c^2 t^2}} \quad (4.65)$$

avec  $\beta \propto 1/t^3$  donné en (B.21). La simulation numérique génère donc correctement la distribution de vitesses  $\mathcal{L}^b$ . On a aussi représenté sur la figure (4.14) l’évolution de la densité atomique au centre du nuage pour un nuage initialement non ponctuel. On voit l’importance qu’il y a de tenir compte de la distribution spatiale initiale du nuage dans le calcul de la densité atomique moyenne effective. On obtient des courbes de forme identique pour les deux autres types de

distributions de vitesses, mais la densité est bien sûr plus élevée lorsqu'on passe d'une distribution de type  $\mathcal{L}^b$  à une "double gaussienne" puis à une "simple gaussienne". La figure (4.15) montre les résultats de la simulation numérique pour les trois types de distributions de vitesses, et pour un nuage gaussien initialement, de  $\sigma_0 = 1.4$  mm.

### 4.3.8 Calcul de la densité moyenne effective

Afin de déterminer la densité moyenne effective, on procède de la façon suivante :

1. On commence par déplier la fontaine et on la remplace par une horloge "linéaire" du type horloge spatiale PHARAO. Les cotes axiales des divers diaphragmes de cette horloge dépliée sont calculées de sorte qu'en lançant le nuage à la même vitesse  $v_l > 0$  que dans la fontaine, ces diaphragmes soient atteints aux mêmes instants que dans la fontaine. Les atomes traversent donc successivement deux cavités micro-ondes 1 et 2. Le volume cylindrique délimité par les plans d'entrée de la cavité 1 et de sortie de la cavité 2, et de diamètre égal au diamètre des trous de la cavité micro-onde (10 mm), est maillé dans les trois dimensions  $x$ ,  $y$ , et  $z$ , et le pas du maillage est calculé de sorte que le nuage d'atomes froids soit bien échantillonné. En pratique, le nombre minimal d'échantillons, dans chaque direction  $x$ ,  $y$ , ou  $z$ , est de 10 points, pour un nuage initialement gaussien de  $\sigma_0 = 1.4$  mm. Par ailleurs le temps est lui aussi discrétisé, de sorte que l'intervalle de temps passé par l'atome dans la cavité 1 soit divisé au moins en 10 (on veut échantillonner correctement la fonction  $g(t)$ ). On a par ailleurs fait varier le pas d'échantillonnage et vérifié que les valeurs obtenues ne variaient pas de plus que 1%.
2. On lance le nuage d'atomes froids, avec sa distribution de positions initiales et de vitesses réelles, dans cette fontaine dépliée, et à chaque instant  $t_i$  on compte le nombre d'atomes présents dans chaque cellule  $\mathcal{M}_{lmn}$  du maillage. Cela revient à prendre une suite de clichés de l'évolution du nuage dans le maillage  $\mathcal{M}$ . Le nombre d'atomes lancés est de l'ordre de  $\sim 10^5$  pour un temps de calcul de  $\sim 5$  minutes.
3. On lance ensuite le même nuage (mêmes distributions de vitesses et de positions initiales) dans la fontaine dépliée. Ce nuage est constitué d'atomes tests, qui vont sonder le maillage  $\mathcal{M}(t_i)$ . Supposons pour le raisonnement que tous les atomes sont initialement dans l'état  $|f\rangle$ . Pour chaque atome test qui parvient dans la zone de détection, on compte le nombre d'atomes qu'il rencontre sur son passage en traversant les cellules  $\mathcal{M}_{lmn}(t_i)$  des clichés précédents. La population de chaque cellule  $\mathcal{M}_{lmn}(t_i)$  est pondérée par la fonction de sensibilité normalisée,  $g_N(t_i)$ , et par la probabilité  $P_e(t_i)$  des atomes de cette cellule d'avoir transité de l'état  $|f\rangle$  vers l'état  $|e\rangle$ . Notons  $\mathcal{P}_{lmn}^f(t_i)$  (resp.  $\mathcal{P}_{lmn}^e(t_i)$ ) la population de l'état  $|f\rangle$  (resp.  $|e\rangle$ ) dans la cellule  $\mathcal{M}_{lmn}(t_i)$ , pondérée par  $g(t_i)$ . La somme des populations  $\mathcal{P}_{lmn}^f(t_i)$  (resp.  $\mathcal{P}_{lmn}^e(t_i)$ ) rencontrées par l'atome test, divisée par l'intervalle de temps qui sépare son entrée de sa sortie dans le maillage  $\mathcal{M}$ , donne la densité moyenne dans l'état  $|f\rangle$  (resp.  $|e\rangle$ ) vue par cet atome au cours de sa trajectoire au-dessus de la cavité. Cette densité moyenne doit être pondérée par le taux d'émission spontanée de l'atome test lorsqu'il tra-

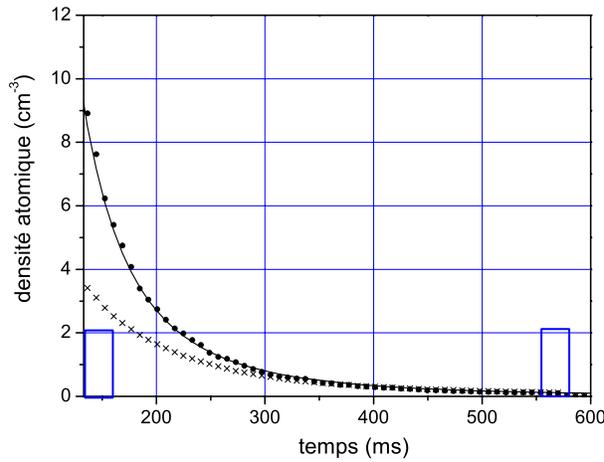


FIG. 4.14 – Evolution temporelle de la densité atomique au centre du nuage d'atomes froids, pour 1 atome lancé, à partir de l'instant d'entrée du nuage dans la cavité micro-onde ( $t \sim 136$  ms), dans la configuration standard de lancement, et pour la distribution de vitesse  $\mathcal{L}^b$  de la figure (4.11). Les deux créneaux représentent les deux impulsions micro-ondes lors des passages dans la cavité. Théorie (trait plein) et simulation (carrés pleins) sont en accord dans le cas où le nuage est ponctuel à l'instant du lancement. La simulation montre par ailleurs l'influence de la distribution de positions initiale, gaussienne ( $\sigma_0 = 1.4$  mm) sur la densité atomique au centre (croix). Cette influence est surtout importante au 1<sup>er</sup> passage dans la cavité.

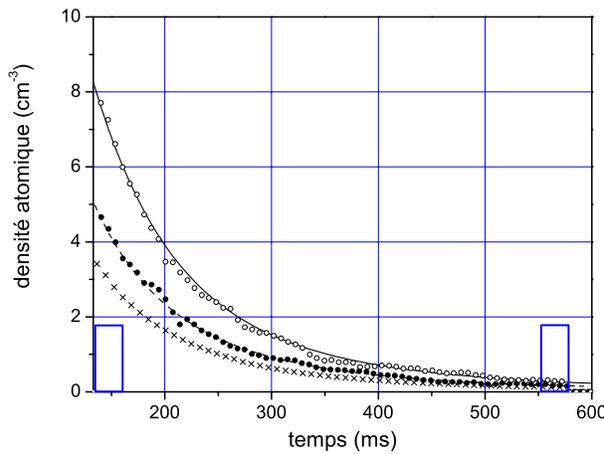


FIG. 4.15 – Evolution temporelle de la densité atomique au centre du nuage d'atomes froids, pour 1 atome lancé, de distribution de positions initiale gaussienne ( $\sigma_0 = 1.4$  mm). Les résultats de la simulation numérique sont présentés pour les distributions "simple gaussienne" (cercles), "double gaussienne" (cercles pleins), et  $\mathcal{L}^b$  (croix) de la figure (4.11). Le calcul théorique a aussi été représenté pour la "double gaussienne" (tirets) et la "simple gaussienne" (trait plein), dans le cas d'un nuage non ponctuel. On a effectué ce calcul en supposant le nuage ponctuel initialement, et on a remplacé "à la main" les termes du type  $\sigma_{v_i} t_j$  par  $\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_{v_i}^2 t_j^2}$  dans les expressions (4.15) et (4.17), ce qui constitue une bonne approximation.

distribution de vitesses	$\bar{n}_\alpha$ ( $\bar{n}_{\alpha,G}$ )	$\bar{n}_\beta$ ( $\bar{n}_{\beta,G}$ )	$\bar{n}$ ( $\bar{n}_G$ )
$\mathcal{L}^b$	<b>0.21</b> (0.24)	<b>0.18</b> (0.18)	<b>0.39</b> (0.41)
"double gaussienne"	<b>0.29</b> (0.34)	<b>0.26</b> (0.26)	<b>0.55</b> (0.59)
simple gaussienne	<b>0.51</b> (0.59)	<b>0.46</b> (0.44)	<b>0.97</b> (1.03)
formule "simplifiée"			(1.76)

TAB. 4.3 – Influence, dans la fontaine *Rb*, du type de distribution de vitesses sur la densité atomique moyenne effective (valeurs en **gras**) et sur la densité moyenne géométrique (valeurs entre parenthèses). Les valeurs sont ramenées à 1 atome lancé, préparé dans l'état  $|\alpha\rangle$ , et sont exprimées en  $\text{cm}^{-3}$ . Les paramètres des distributions de vitesses sont ceux de la figure (4.11). Le nuage est lancé à  $+3.5 \text{ m.s}^{-1}$  vers le haut, et la distribution de positions initiales, gaussienne, a pour écart type  $\sigma = 1.4 \text{ mm}$ .

verse la zone de détection (cf. figure (4.3)). A la fin de cette étape du calcul, on a recensé toutes les densités moyennes effectives rencontrées, dans chaque niveau  $|f\rangle$  ou  $|e\rangle$ , par tous les atomes tests qui traversent la zone de détection.

4. On obtient enfin la densité moyenne effective dans chaque niveau en divisant la somme des densités calculée précédemment par le nombre d'atomes tests ayant traversé la zone de détection, chacun d'eux étant pondéré par son taux d'émission spontanée propre (c'est l'opération de normalisation de l'expression (4.26)).

Les résultats de la simulation numérique, pour l'horloge *Rb*, sont présentés dans le tableau (4.3) pour une vitesse de lancement  $v_l = 3.5 \text{ m.s}^{-1}$ , et pour les trois types de distributions de vitesses de la figure (4.11). Le nuage a une distribution de positions initiale gaussienne, d'écart type  $\sigma_0 = 1.4 \text{ mm}$ . Les atomes sont préparés initialement dans l'état  $|\alpha\rangle = |F = 1, m = 0\rangle$ . Les valeurs des densités sont ramenées à 1 atome lancé. Pour comparaison, on a calculé aussi les densités moyennes géométriques dans chaque état,  $n_{\alpha,G}$  et  $n_{\beta,G}$ , ainsi que la densité moyenne géométrique totale,  $n_G = n_{\alpha,G} + n_{\beta,G}$  (valeurs entre parenthèses). Ces valeurs sont calculées en prenant  $g_N(t) = 1$  pendant toute la durée de l'interaction (cf. expression (4.30)). La densité géométrique dans l'état de départ,  $|\alpha\rangle$ , est plus élevée que dans l'état  $|\beta\rangle$ , du fait de la différence de populations moyennes entre les deux états pendant la première interaction. On a aussi calculé la densité moyenne totale "simplifiée", obtenue en utilisant la formule approchée (4.16). On voit qu'on commet une erreur d'un facteur 4.7 sur la densité moyenne effective en appliquant la formule approchée (4.16). Si on applique l'expression analytique complète (4.15) valable pour une distribution de vitesses gaussienne, dans laquelle on a remplacé "à la main" les termes du type  $\sigma_{v_i} t_j$  par  $\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_{v_i}^2 t_j^2}$  afin de tenir compte de la taille initiale du nuage, on obtient pour valeur de densité moyenne géométrique  $1.06 \text{ cm}^{-3}$  qui est en accord avec le résultat numérique à quelques %. Pourtant, on commet encore une erreur d'un facteur 2.8, liée au mauvais choix de la distribution de vitesses. Enfin, on surestime d'un facteur 1.5 la densité moyenne effective en prenant une distribution de vitesses "double gaussienne" au lieu de  $\mathcal{L}^b$ , ce qui, soulignons-le une dernière fois, n'est pas discernable au vu d'un signal de temps de vol.

distribution de vitesses $\mathcal{L}^b$	$\bar{n}_\alpha$	$\bar{n}_\beta$	$\bar{n}$
$b$ (2.3) <b>2.1</b> (1.9) $v_c$ (19) <b>18</b> (17) mm.s <sup>-1</sup>	(0.23) <b>0.21</b> (0.17)	(0.20) <b>0.18</b> (0.15)	(0.43) <b>0.39</b> (0.33)
$b$ (1.92) <b>1.75</b> (1.6) $v_c$ (16.9) <b>16</b> (15.1) mm.s <sup>-1</sup>	(0.18) <b>0.16</b> (0.13)	(0.16) <b>0.14</b> (0.12)	(0.35) <b>0.30</b> (0.25)

TAB. 4.4 – Sensibilité de la densité moyenne effective avec les paramètres  $b$  et  $v_c$  de la distribution de vitesses. Les valeurs entre parenthèses correspondent respectivement à  $b/1.1$  (à droite) et à  $b \times 1.1$  (à gauche). Les valeurs correspondantes de  $v_c$  ont été calculées de sorte que la largeur à mi-hauteur de la distribution de vitesses soit constante. Le nuage est lancé à  $+3.5 \text{ m.s}^{-1}$  vers le haut, et la distribution de positions initiales, gaussienne, a pour écart type  $\sigma = 1.4 \text{ mm}$ . Les valeurs sont ramenées à 1 atome lancé, préparé dans l'état  $|\alpha\rangle$ , et sont exprimées en  $\text{cm}^{-3}$ .

Notons par ailleurs l'influence de la pondération par  $g_N(t)$ , qui atténue la densité totale,  $\bar{n}$ , d'un facteur  $\sim 1.06$  par rapport au calcul purement géométrique. **L'influence de  $g(t)$  est en fait quasi-négligeable sur  $\bar{n}_{\beta, \mathbf{G}}$ , tandis qu'elle atténue d'un facteur  $\sim 1.14$  la densité moyenne  $\bar{n}_{\alpha, \mathbf{G}}$ .** Ceci se comprend clairement en observant l'influence de  $g(t)$  sur la probabilité de transition dans chaque état (cf. figure (4.16)). Au début de l'interaction atome/champ micro-onde dans la cavité, les collisions entre atomes froids ont peu d'influence sur la fréquence de l'horloge parce que la phase de l'oscillation de Rabi est encore proche de zéro.

Enfin, le tableau (4.4) montre la sensibilité de la densité moyenne effective aux paramètres  $b$  et  $v_c$  de la distribution de vitesses  $\mathcal{L}^b$ . On voit que  **$\bar{n}$  varie en valeur relative de  $\sim 15\%$  lorsque  $\mathbf{b}$  varie de  $10\%$**  autour de  $2.1$ ,  $v_c = 18 \text{ mm.s}^{-1}$ . On a vérifié que cette incertitude de  $15\%$  reste valable autour de  $b = 1.75$ ,  $v_c = 16 \text{ mm.s}^{-1}$ , qui reflète plus les paramètres de distribution de vitesses pendant la campagne de mesure du déplacement collisionnel (2<sup>e</sup> ligne du tableau (4.4)).

### 4.3.9 Influence de la convolution du nuage d'atomes froids par la réponse impulsionnelle de la détection

Les calculs précédents ont montré l'influence des paramètres et du type de distribution de vitesses, ainsi que de la taille initiale du nuage, sur les diverses grandeurs observables dans l'horloge : fraction d'atomes passant dans la cavité, fraction d'atomes détectés, densité atomique moyenne effective (et par conséquent, déplacement collisionnel).

Au cours des mesures de déplacement collisionnel, la distribution de vitesses n'a pas été systématiquement mesurée, pour chaque intégration, par la méthode décrite au paragraphe §4.3.5 car cette procédure n'était pas automatisée à cette époque.

En revanche, les signaux de temps de vol au début et à la fin de chaque intégration ont été enregistrés, permettant ainsi un suivi systématique de l'évolu-

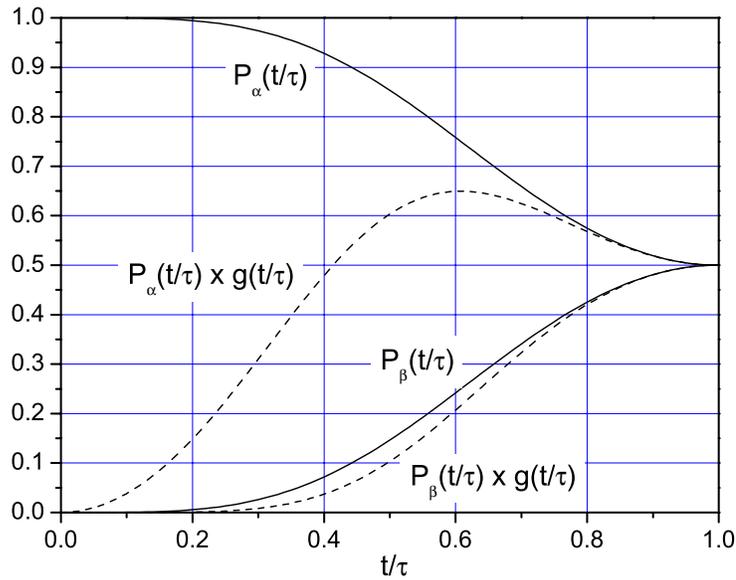


FIG. 4.16 – Traits pleins : populations  $P_\beta$  et  $P_\alpha$  des deux niveaux d'horloge, en fonction du temps  $t$  rapporté à la durée de passage de l'atome dans la cavité,  $\tau$ . On effectue une impulsion  $\pi/2$  dans la cavité, et le profil longitudinal de champ dans la cavité est celui d'un mode TE011. Les atomes sont initialement préparés dans l'état  $\alpha$ . Tirets : produits des populations précédentes par la fonction de sensibilité,  $g(t)$ . Ce sont ces produits qui comptent pour le calcul du déplacement de la fréquence d'horloge lié aux collisions entre atomes froids.

tion des paramètres de la distribution de vitesses,  $b$  et  $v_c$ , à la fois pendant l'intégration et entre deux intégrations successives. Le signal de temps de vol est en effet l'image quasi-rigoureuse de la distribution de vitesses dans la mesure où la distribution de positions initiales, caractérisée par  $\sigma_0$ , est négligeable devant l'explosion du nuage pendant son vol parabolique (configuration de piège magnéto-optique).

La figure (4.17) montre un échantillon des mesures des paramètres  $b$  et  $v_c$  pendant la période de mesure du déplacement collisionnel, c'est à dire entre le 02/11/1999 et le 17/01/2000 (l'horloge  $Rb$  a franchi la nuit du 31/12/1999 au 01/01/2000 avec succès!).

En fait, les paramètres représentés sur cette figure sont obtenus par ajustement non-linéaire des signaux de temps de vol. Ils ne représentent donc pas exactement les paramètres de la distribution de vitesses, parce que le signal de temps de vol résulte de la convolution de la distribution de positions par le faisceau de détection, pendant la durée où le nuage traverse celui-ci. Cette convolution introduit un élargissement de la distribution de vitesses, qui est calculable numériquement. La figure (4.18) montre le résultat de ce calcul dans les conditions typiques de fonctionnement de notre système de détection. Le profil

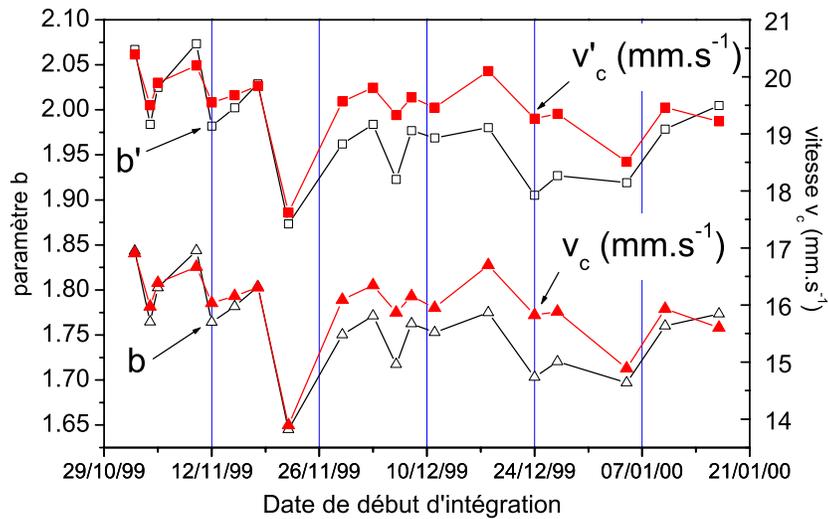


FIG. 4.17 – Historique des paramètres de distribution de vitesses pendant la période de mesure du "cavity pulling". Les paramètres  $b'$  (carrés creux) et  $v'_c$  (carrés pleins) ont été obtenus par ajustements non-linéaires des signaux de temps de vol. Les paramètres  $b$  (triangles creux) et  $v_c$  (triangles pleins) sont obtenus par déconvolution numérique des signaux de temps de vol. Cette déconvolution est importante pour le calcul correct de la densité atomique moyenne effective.

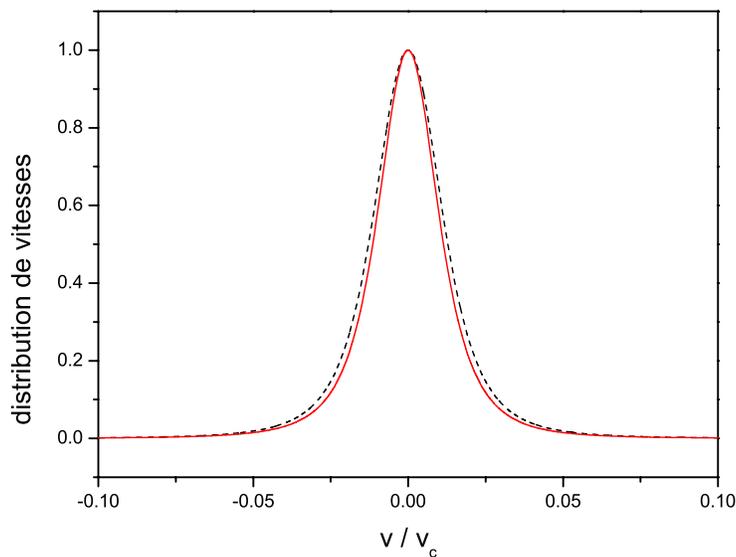


FIG. 4.18 – Signal de temps de vol (tirets) du 02/11/1999, et distribution de vitesses (trait plein) déduite de celui-ci par déconvolution par la réponse impulsionnelle de la fenêtre de détection. Les paramètres correspondants sont respectivement ( $b' = 2.07, v'_c = 20.3 \text{ mm.s}^{-1}$ ) et ( $b = 1.84, v_c = 16.9 \text{ mm.s}^{-1}$ ).

Fraction en cavité 1 <sup>er</sup> passage	Fraction en cavité 2 <sup>e</sup> passage	Fraction détectée pondérée	Densité moyenne effective
1.03	1.1	1.12	1.14
1.0	1.06	1.07	1.07

TAB. 4.5 – *Facteur de correction à appliquer lorsqu'on injecte les paramètres  $b'$  et  $v'_c$  directement dans la simulation numérique, au lieu de  $b$  et  $v_c$ . Les paramètres sont ceux du 22/11/1999, (1<sup>re</sup> ligne,  $b = 1.64$ ,  $v_c = 13.89 \text{ mm.s}^{-1}$ ) et du 02/11/1999 (2<sup>e</sup> ligne,  $b = 1.84$ ,  $v_c = 16.9 \text{ mm.s}^{-1}$ ).*

de saturation du faisceau est celui illustré sur la figure (4.3), pour  $s_0 = 0.93$ . La courbe en tirets montre le signal de temps de vol de l'intégration du 02/11/1999 (paramètres  $(b', v'_c)$ ), et la courbe en trait plein représente la distribution de vitesses, obtenue après déconvolution numérique du temps de vol par la réponse impulsionnelle de la détection (paramètres  $(b, v_c)$ ). L'opération de convolution transforme  $(b = 1.84, v_c = 16.9 \text{ mm.s}^{-1})$  en  $(b' = 2.07, v'_c = 20.3 \text{ mm.s}^{-1})$ .

On remarque aussi une nette corrélation entre les coefficients  $b$  et  $v_c$ . Rappelons que, pour  $v_c$  donné, la largeur à mi-hauteur de la distribution est une fonction décroissante de  $b$ . Autrement dit, à largeur à mi-hauteur constante, l'algorithme de calcul de meilleure approximation de la distribution de vitesses ajuste  $v_c$  dans le même sens que  $b$ . Les fluctuations de  $b$  et  $v_c$  sont donc liées d'une part à des fluctuations réelles de la largeur à mi-hauteur de la distribution de vitesses, et d'autre part, pour une largeur à mi-hauteur donnée, aux quantités relatives d'atomes présents dans les "ailes" de la partie centrale du temps de vol.

L'incertitude rendue par l'algorithme sur  $b$  et  $v_c$  est inférieure à 1%, même lorsque l'asymétrie résiduelle du signal de temps de vol est de l'ordre de 20% (cf. figure (4.12)). Il est donc prudent de considérer que  $b$  et  $v_c$  sont déterminés à 10% près, même si cette incertitude semble surestimée face au pic à pic des mesures de la figure (4.17).

Quelle est l'influence de cette convolution sur les grandeurs observables mentionnées précédemment ? Le tableau (4.5) répond à cette question en donnant les facteurs de correction qu'il faut appliquer aux valeurs erronées calculées en injectant dans la simulation numérique les paramètres  $b'$  et  $v'_c$ . On a présenté dans le tableau les deux cas extrêmes parmi la série de points de la figure (4.17). On voit qu'**on sous-estime typiquement de 10% la fraction d'atomes détectés et la densité en omettant de déconvoluer le signal de temps de vol.**

#### 4.3.10 Influence de la taille initiale du nuage

La figure (4.19) montre l'évolution de la taille caractéristique initiale du nuage, en configuration de piège magnéto-optique, pendant toute la durée des mesures du déplacement collisionnel. On distingue clairement deux périodes, avant et après octobre 1999, entre lesquelles  $\sigma_0$  a chuté à cause d'un désalignement progressif des faisceaux du banc optique et une chute de puissance de la puissance lumineuse délivrée par le MOPA (cf. §3.3.5). Le tableau (4.6) donne, pour une distribution de vitesses de type  $\mathcal{L}^b$  donnée, l'influence de  $\sigma_0$  sur les grandeurs

$\sigma_0$ (mm)	(1.4) <b>1.5</b> (1.6)	(1.65) <b>1.75</b> (1.85)	6.5
Fraction en cavité 1 <sup>er</sup> passage	(66.0) <b>65.1</b> (64.3)	(64.0) <b>62.9</b> (61.8)	23.2
Fraction en cavité 2 <sup>e</sup> passage	(14.0) <b>13.8</b> (13.6)	(13.6) <b>13.5</b> (13.3)	0.5
Fraction détectée géométrique	(12.2) <b>12.0</b> (11.9)	(11.9) <b>11.8</b> (11.6)	0.5
Fraction détectée pondérée	(10.6) <b>10.4</b> (10.4)	(10.3) <b>10.2</b> (10.1)	0.4
Densité atomique moyenne (cm <sup>-3</sup> )	(0.38) <b>0.37</b> (0.34)	(0.33) <b>0.31</b> (0.31)	0.06

TAB. 4.6 – Influence de la taille caractéristique du nuage,  $\sigma_0$ , sur diverses grandeurs, dans l'horloge Rb. Les fractions sont exprimées en %, et la densité moyenne effective est ramenée à 1 atome lancé. Les deux premières colonnes correspondent au cas d'un piège magnéto-optique tandis que la dernière colonne correspond au cas d'une mélasse.

décrites précédemment. **L'incertitude sur la mesure de  $\sigma_0$  est de 0.1 mm**, et est principalement liée à l'ellipticité du nuage (cf. §5.3.3). **Elle induit une incertitude de 3 à 7% sur la densité atomique moyenne effective, et de 1 à 2% sur la fraction passant dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage. Son influence est négligeable sur les autres grandeurs.** Par ailleurs, on obtiendrait une densité  $\sim 6$  fois plus faible en travaillant en configuration "mélasse".

#### 4.3.11 Variation de la densité atomique moyenne effective avec la hauteur de lancement

Le calcul de la variation de la densité moyenne effective en fonction de la vitesse de lancement est une information importante dans une fontaine atomique. Lors de l'évaluation des effets systématiques dans une fontaine, il est généralement souhaitable de tester leur variation avec la hauteur de lancement. Cela permet par exemple de localiser une impureté magnétique, une fuite micro-onde ou un gradient de phase localisés. Dans le cas du Cs, où le déplacement collisionnel est élevé ( $\Delta\nu \simeq -2 \times 10^{-21} \bar{n}$  avec  $\bar{n}$  en cm<sup>-3</sup>) et masque d'autres effets systématiques intéressants, la mesure du déplacement collisionnel avec une exactitude de  $10^{-16}$  est une opération longue (cf. Thèse de M. Abgrall [127]). Il est alors utile, à partir d'une mesure à une hauteur donnée, de pouvoir extrapoler le déplacement collisionnel à plusieurs hauteurs différentes. Dans le cas du <sup>87</sup>Rb, on verra que le déplacement collisionnel est  $\sim 100$  fois plus faible que celui du Cs. L'incertitude sur la mesure du déplacement collisionnel n'est alors pas préoccupante pour le bilan d'exactitude, mais c'est la mesure elle-même qui est difficile si on veut résoudre ce déplacement collisionnel de 0. On a donc intérêt à se placer dans une situation où l'effet est maximal.

On sait en effet qu'il existe une hauteur de lancement qui maximise la densité moyenne. Si on ne lance pas assez vite le nuage, celui-ci explose pendant l'intervalle de temps qui sépare le lancement de l'entrée dans la cavité. Le nuage est

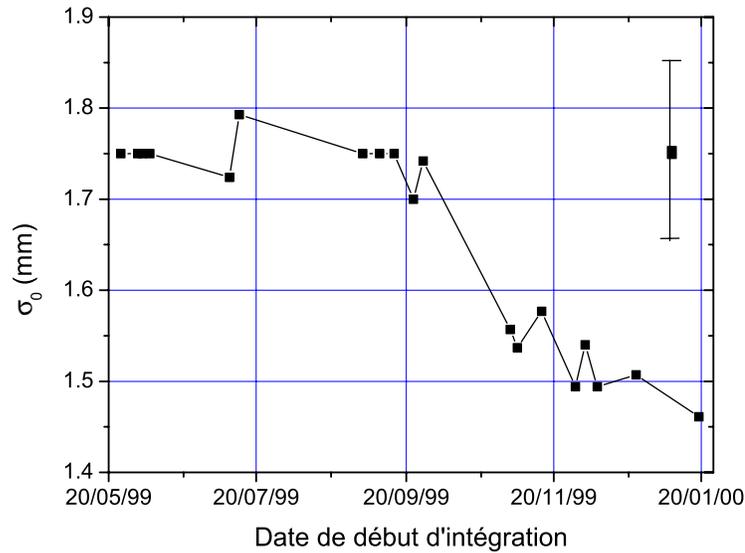


FIG. 4.19 – *Historique des mesures de la taille caractéristique initiale du nuage, pendant la période de mesure du déplacement collisionnel. La distribution de positions initiale est une gaussienne d'écart type  $\sigma_0$ . On a tenu compte de l'évolution de  $\sigma_0$  dans le traitement des mesures de déplacement collisionnel.*

fortement tronqué par le cut-off de la cavité, et la densité moyenne est faible. Au contraire, si on lance le nuage avec une vitesse  $v_l$  trop élevée, la densité moyenne tend vers 0 comme  $1/v_l$ , parce que la quasi totalité de la densité a été accumulée pendant les instants qui suivent l'entrée et le 1<sup>er</sup> passage dans la cavité micro-onde, et la durée de l'interaction de Ramsey, qui croît comme  $2v_l/g$ , moyenne cette densité à 0. La figure (4.20) montre la variation de la densité atomique moyenne, dans la fontaine *Rb*, en fonction de la vitesse de lancement.

On s'aperçoit en fait que dans l'horloge *Rb*, la densité atomique moyenne effective ne varie pas de plus de 2% sur la gamme de vitesses de lancement autorisées<sup>6</sup>. Par ailleurs, on retrouve le facteur d'atténuation dû à la fonction de sensibilité. Pour les basses vitesses de lancement, on ne peut plus négliger l'influence de l'accélération de la pesanteur sur la fonction de sensibilité. Le calcul numérique rigoureux tient compte alors du facteur de correction apporté par le ralentissement du nuage dans la cavité micro-onde (cf. figure (4.21)). On voit que l'effet de cette correction sur la densité moyenne effective est au maximum de l'ordre de 1%, et est négligeable dans la configuration standard ( $v_l = 3.5 \text{ m.s}^{-1}$ ).

<sup>6</sup>On a vérifié que pour des vitesses supérieures à  $4 \text{ m.s}^{-1}$ , la densité moyenne tend effectivement vers 0. En fait, la position du maximum de densité est très sensible à la taille initiale du nuage. Pour un nuage ponctuel initialement, on trouve d'ailleurs qu'au contraire la densité moyenne tend vers  $+\infty$  lorsque  $v_l \rightarrow +\infty$ . Comme le montre la formule (4.15), ceci s'explique par le fait que dans ce cas, bien que la durée de l'interaction varie comme  $2v_l/g$ , la densité accumulée pendant les instants qui suivent l'entrée et le 1<sup>er</sup> passage dans la cavité micro-onde croît comme  $1/t_1^2 \sim (v_l/h_{cav})^2$ , où  $h_{cav}$  est la hauteur de la cavité au-dessus de la zone de lancement.

### 4.3.12 Sensibilité aux paramètres dans l'horloge $RbCs$

Le programme de simulation numérique a été adapté à la configuration de l'horloge  $RbCs$ , et donne des résultats directement utilisables pour de futures mesures de déplacement collisionnel. A titre d'exemple, les paragraphes suivants montrent les variations des grandeurs caractéristiques (densité, fraction détectée ... ) sur le Cs et sur le Rb en fonction de la taille initiale du nuage, pour une distribution de vitesses donnée de type  $\mathcal{L}^b$ , et pour diverses vitesses de lancement.

La figure (4.22) montre le résultat du calcul de la densité atomique effective, sur le Cs, pour une distribution de vitesses donnée, de type  $\mathcal{L}^b$  ( $b = 2.1$ ,  $v_c = 10.7 \text{ mm.s}^{-1}$ , en fonction de la vitesse de lancement, et pour différentes tailles de nuage. On a fait varier la taille caractéristique  $\sigma_0$  de 1 mm (configuration PMO) à 7.5 mm (configuration mélasse), le "waist" des faisceaux de refroidissement correspondant à  $\sigma_0 = 6.5 \text{ mm}$ . La largeur de la distribution de vitesse,  $10.7 \text{ mm.s}^{-1}$  est homothétique de la valeur prise jusqu'à présent sur le Rb,  $18 \text{ mm.s}^{-1}$ , dans le rapport des vitesses de recul (cf. Annexe (D.2) et (D.3)). La vitesse de lancement varie dans un intervalle correspondant d'une part au sommet du "cut-off" de la cavité  $Cs$ , et d'autre part au plafond de l'horloge. On a rapporté cette densité moyenne effective à 1 atome lancé (figure *a*). Ces courbes donnent alors, à un facteur numérique près, le déplacement collisionnel en fonction de la vitesse de lancement.

En pratique, le nombre d'atomes traversant la zone de détection est plus directement mesurable : il suffit de connaître la détectivité du système de détection et l'aire de temps de vol. De plus, il est directement relié au bruit de détection quantique, donc à la stabilité ultime de l'horloge. Les abaques de la densité moyenne effective rapportée à 1 atome traversant la zone de détection sont donc plus directement exploitables (figure *b*).

La figure (4.23) montre l'évolution de la densité moyenne effective, pour le Cs, en fonction de la taille caractéristique du nuage, pour la vitesse de lancement "standard" de  $4.3 \text{ m.s}^{-1}$ . Pour cette vitesse, l'apogée de la trajectoire du nuage se trouve dans une zone où l'homogénéité du champ magnétique n'est pas encore dégradée par les effets de bord de solénoïde. On voit que le déplacement collisionnel chute d'un facteur  $\sim 10$  lorsqu'on passe de la configuration PMO à la configuration "mélasse".

La figure (4.24) montre la variation de la densité atomique moyenne effective pour le Cs et pour le Rb, en fonction de la vitesse de lancement, dans la configuration "mélasse" ( $\sigma_0 = 6.5 \text{ mm}$ ). Les distributions de vitesses ont pour paramètres  $b = 2.1$ ,  $v_c^{Rb} = 18 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $v_c^{Cs} = 10,7 \text{ mm.s}^{-1}$ .

La figure (4.25) montre la variation de la fraction d'atomes détectés pondérée par le profil de saturation de la détection, ainsi que la fraction d'atomes passant à travers la cavité aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> passages. Les paramètres des distributions de vitesses et position initiale sont les mêmes que précédemment.

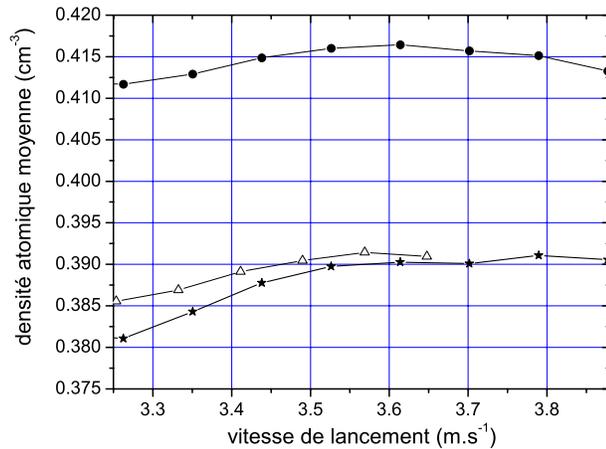


FIG. 4.20 – Calcul numérique de la variation de la densité atomique moyenne géométrique (ronds) et effective (étoiles) en fonction de la vitesse de lancement, dans la fontaine Rb. Les valeurs de densité sont exprimées en  $\text{cm}^{-3}$  et rapportées à 1 atome lancé. Pour les basses vitesses de lancement, on a calculé la densité moyenne effective en tenant compte d'un facteur de correction sur la fonction de sensibilité, lié à l'accélération de la pesanteur (triangles). En pratique le chapeau supérieur de la cavité micro-onde correspond à  $v_l = 3.0 \text{ m.s}^{-1}$ , et le plafond de la fontaine à  $v_l = 3.9 \text{ m.s}^{-1}$ . Les mesures de déplacement collisionnel ont été effectuées pour  $v_l = 3.5 \text{ m.s}^{-1}$ . La distribution de vitesses est de type  $\mathcal{L}^b$  ( $v_c = 18 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $b = 2.1$ ) et la distribution de positions initiales est gaussienne, d'écart type  $1.4 \text{ mm}$ . A un facteur d'échelle près, les courbes obtenues pour les autres distributions de vitesses de la figure (4.11) ont la même allure.

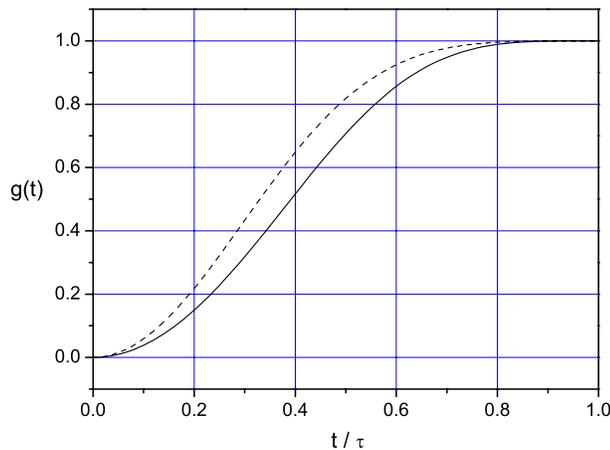


FIG. 4.21 – Evolution temporelle de la fonction de sensibilité  $g(t)$ , pour une impulsion  $\pi/2$ , dans la cavité micro-onde, au 1<sup>er</sup> passage. Lorsque l'accélération de la pesanteur peut être négligée dans le calcul de  $g(t)$ , on obtient la courbe en traits pleins. Le déplacement de l'atome dans la cavité est alors une fonction quasi linéaire du temps. La courbe en tirets représente la fonction de sensibilité calculée numériquement lorsqu'on lance à  $3.0 \text{ m.s}^{-1}$ . Le nuage a alors son apogée au niveau du chapeau supérieur de la cavité micro-onde.

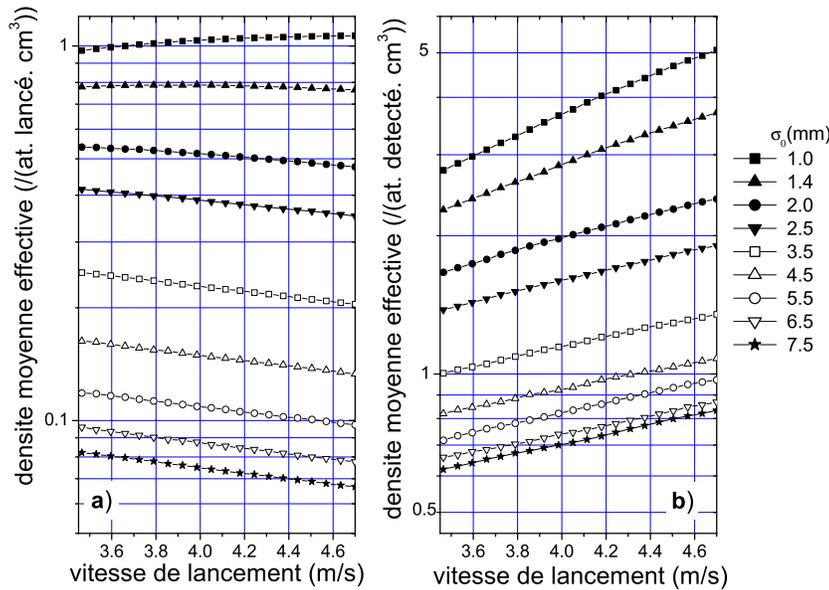


FIG. 4.22 – Horloge  $RbCs$  : abaques de la densité moyenne effective en fonction de la vitesse de lancement, pour le  $Cs$ , et pour différentes tailles caractéristiques de nuage ( $\sigma_0$ ). La distribution de vitesses est de type  $\mathcal{L}^b$ , avec  $b = 2.1$  et  $v_c = 10.7 \text{ mm.s}^{-1}$ . Les densités sont rapportées à 1 atome lancé (figure a)) ou bien à 1 atome traversant la zone de détection (figure b)).

### 4.3.13 Conclusion

La simulation Monte Carlo de l'évolution du nuage atomique dans une fontaine nous a permis de calculer combien les diverses grandeurs utiles à la mesure des déplacements de fréquence dépendant du nombre d'atomes sont sensibles aux paramètres de distribution de vitesses et de positions atomiques. Elle permet de calculer les fraction d'atomes aux divers instants caractéristiques d'un cycle de fontaine (1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> passages dans la cavité d'interrogation, faisceau de détection) ainsi que la densité moyenne effective,  $\bar{n}$ , pour les distributions de vitesses et de position mesurées expérimentalement. Elle permet d'exploiter la mesure de la fraction d'atomes détectés en fonction de la hauteur de lancement, qui fournit ainsi une méthode très sensible au caractère non gaussien de la distribution des vitesses atomiques.

De plus, la simulation Monte Carlo effectuée ici tient compte de la pondération de la densité atomique, à tout instant, par la fonction de sensibilité  $g(t)$ , et tient compte des différentes sources de troncation rencontrées par le nuage dans l'expérience réelle : diaphragmes divers, profil de saturation non-uniforme du faisceau de détection. Elle tient compte de l'évolution des populations dans chaque niveau d'horloge, au cours des deux interactions micro-ondes dans la cavité, et ceci pour le profil réel de champ micro-onde du mode TE011 vu par les atomes.

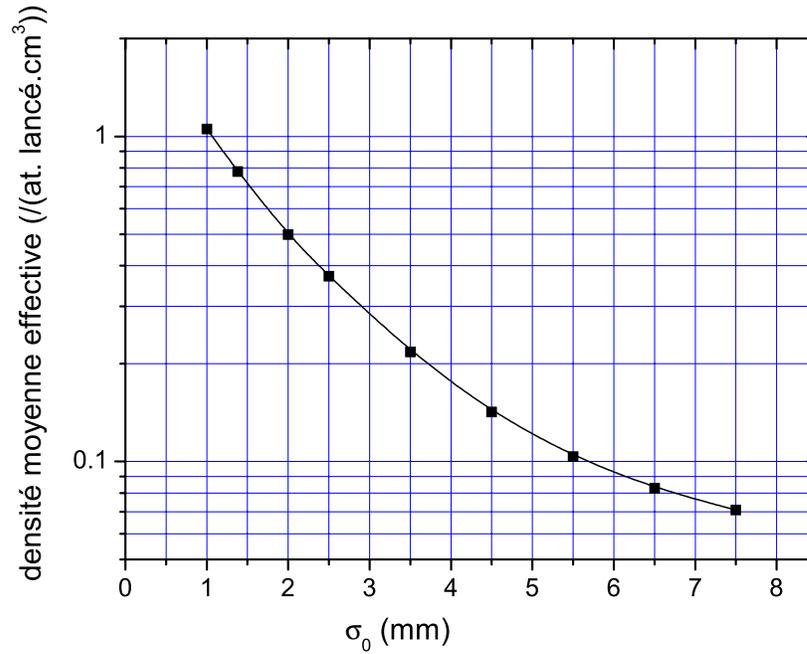


FIG. 4.23 – *Horloge RbCs* : variation de la densité moyenne effective en fonction de la taille caractéristique du nuage, pour le Cs, et pour une vitesse de lancement de  $4.3 \text{ m.s}^{-1}$ . La distribution de vitesses est de type  $\mathcal{L}^b$ , avec  $b = 2.1$  et  $v_c = 10.7 \text{ mm.s}^{-1}$ . La densité est rapportée à 1 atome lancé.

Enfin, la simulation peut être adaptée à la géométrie particulière de toute fontaine. Par exemple à la géométrie de la fontaine *RbCs*, pour laquelle elle fournit des abaques qui seront utiles lorsqu'on effectuera des mesures absolues de déplacement collisionnel dans cette fontaine.

Cette simulation fournit donc les outils nécessaires à la mesure absolue des effets dépendant du nombre d'atomes dans une fontaine : déplacement collisionnel, mais aussi "cavity pulling", auquel la fin de ce chapitre est consacré. Nous utiliserons les résultats de cette simulation dans le chapitre 5, pour déterminer le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ .

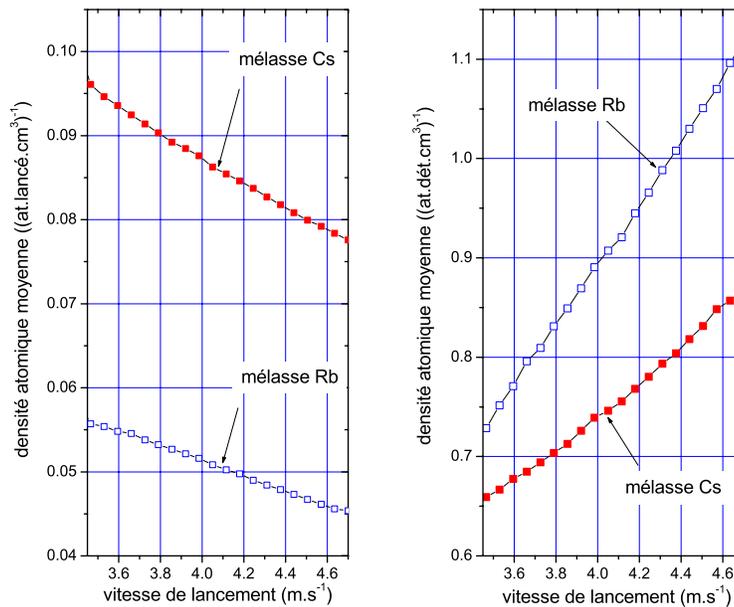


FIG. 4.24 – Horloge RbCs : variation de la densité moyenne effective en fonction de la vitesse de lancement, pour le Cs (carrés pleins) et le Rb (carrés creux). La distribution de vitesses est de type  $\mathcal{L}^b$ , avec  $b = 2.1$  et  $v_c^{Cs} = 10.7 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $v_c^{Rb} = 18 \text{ mm.s}^{-1}$ . La densité est rapportée à 1 atome lancé (figure de gauche) ou bien à un atome passant dans la zone détection (figure de droite). Noter l'inversion des courbes Rb et Cs entre les deux graphes. Du fait de sa vitesse de recul plus élevée, la densité moyenne effective est réellement plus basse pour le Rb, et on détecte moins d'atomes de Rb que d'atomes de Cs. La densité moyenne rapportée au nombre d'atomes détectés et donc plus élevée pour le Rb que pour le Cs.

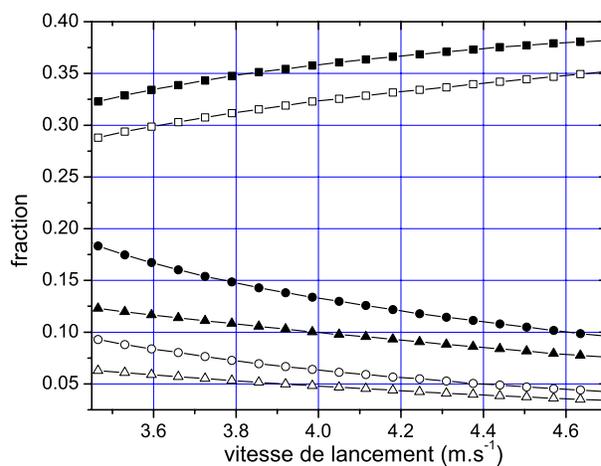


FIG. 4.25 – Horloge RbCs : variation de la fraction détectée pondérée par le profil de saturation de la détection (triangles pleins pour le Cs, triangles creux pour le Rb), ainsi que la fraction d'atomes passant à travers la cavité aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> passages (points respectivement carrés et ronds, pleins pour le Cs, creux pour le Rb) en fonction de la vitesse de lancement. La distribution de vitesses est de type  $\mathcal{L}^b$ , avec  $b = 2.1$  et  $v_c^{Cs} = 10.7 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $v_c^{Rb} = 18 \text{ mm.s}^{-1}$ .

## 4.4 Un autre effet dépendant du nombre d'atomes : le "cavity pulling"

Il existe un autre effet dépendant du nombre d'atomes, dans les fontaines : l'entraînement de fréquence par la cavité micro-onde. Cet effet, bien connu dans le domaine des masers, porte le nom de "cavity pulling" en anglais [32].

Dans une horloge à jet thermique, il est lié au fait que lorsque la résonance de la cavité micro-onde d'interrogation est désaccordée de la résonance atomique ( $\nu_{cav} \neq \nu_{at}$ ), la modulation de fréquence de part et d'autre de la résonance atomique induit une modulation asymétrique de l'amplitude du champ micro-onde intra-cavité, ce qui induit un déplacement de fréquence de l'horloge. Si on se place dans le cas le pire, où la cavité est désaccordée de la moitié de sa résonance (pente maximale de sa réponse en amplitude) et où on interroge les atomes en effectuant des impulsions  $\pi/4$  (sensibilité maximale de la fréquence d'horloge à une modulation d'amplitude du champ), on trouve que le "cavity pulling" vaut  $10^{-13}$  en valeur relative dans un jet thermique *Cs* tel que celui du BNM-LPTF [41] (facteur de qualité en charge  $Q_c = 1800$  pour la cavité micro-onde, et frange de Ramsey de largeur 100 Hz). Par comparaison, toujours dans le cas le pire, le "cavity pulling" vaut  $5.4 \times 10^{-17}$  dans la fontaine *Rb*. Cette amélioration provient du fait que dans une fontaine la modulation d'amplitude est beaucoup plus faible que dans un jet, parce que la frange de Ramsey est  $\sim 100$  fois moins large, et que le "cavity pulling" varie comme cette largeur au carré (la modulation d'amplitude varie comme la profondeur de modulation, et elle est convertie en déplacement de fréquence via la pente à mi-hauteur de la frange de Ramsey, inversement proportionnelle à sa largeur). Le "cavity pulling" au sens que l'on vient de décrire est donc négligeable en regard de l'exactitude actuelle des fontaines, de l'ordre de  $10^{-15}$ .

En revanche, il existe dans les fontaines un effet qui est lié au déphasage du champ micro-onde induit par le passage, transitoire, des atomes à travers la cavité micro-onde. Le champ micro-onde à l'intérieur de la cavité est en effet la somme du champ micro-onde injecté, et du champ rayonné par les dipôles magnétiques excités par ce champ. Comme tout déphasage ayant lieu pendant la phase d'interrogation, ce déphasage se traduit par un déplacement de la fréquence de l'horloge *via* la fonction de sensibilité  $g(t)$ . Nous allons voir que cet effet est proportionnel au nombre d'atomes présents dans la cavité et qu'il atteint des valeurs de l'ordre de  $10^{-14}$  pour des impulsions  $\pi/2$  et lorsque la cavité est désaccordée de la moitié de sa résonance. Ce n'est donc pas un effet négligeable et nous allons en donner un calcul complet et détaillé [61].

### 4.4.1 Structure du champ dans la cavité micro-onde et calcul du volume du mode

Le champ électromagnétique dans la cavité micro-onde s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \{ E(\omega) e^{-i\omega t} \} \vec{E}_a(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \{ H(\omega) e^{-i\omega t} \} \vec{H}_a(\vec{r})\end{aligned}\tag{4.66}$$

Ceci suppose que seul un mode, spectralement bien séparé des autres modes possibles, est résonant dans la cavité à la pulsation  $\omega$ .  $E(\omega)$  et  $H(\omega)$  représentent

les amplitudes complexes du champ au centre de la cavité, et dépendent de la puissance injectée. Elles dépendent de la puissance injectée de l'extérieur par la chaîne de synthèse micro-onde, via un câble coaxial et l'antenne de couplage. La structure spatiale de ce mode est décrite par  $\vec{E}_a(\vec{r})$  et  $\vec{H}_a(\vec{r})$ , que l'on définit comme des grandeurs réelles sans dimension, et normalisées de sorte que  $\|\vec{H}_a\| = 1$  au centre de la cavité, pris pour origine des coordonnées ( $r = 0, z = 0$ ).

On définit le volume du mode de la cavité par :

$$V_{mode} = \int_{\mathcal{V}} \|\vec{H}_a(\vec{r})\|^2 d^3\vec{r} \quad (4.67)$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume de la cavité. On a aussi, d'après l'égalité (B.16) :

$$V_{mode} = \int_{\mathcal{V}} \|\vec{E}_a(\vec{r})\|^2 d^3\vec{r} \quad (4.68)$$

Avec les conventions précédentes, le mode TE011 de la cavité cylindrique de l'horloge  $Rb$  s'écrit, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = \begin{bmatrix} E_{a,r} = 0 \\ E_{a,\theta} = \frac{R}{k} \times \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\pi z/L) J_1(kr/R) \\ E_{a,z} = 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\vec{H}_a(\vec{r}) = \begin{bmatrix} H_{a,r} = \frac{\pi R}{kL} \sin(\pi z/L) J_1(kr/R) \\ H_{a,\theta} = 0 \\ H_{a,z} = \cos(\pi z/L) J_0(kr/R) \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

où  $k = 3.83170597\dots$  est le 1<sup>er</sup> zéro de  $J_1(x)$ ,  $R$  et  $L$  sont respectivement le rayon et la longueur de la cavité, et  $\lambda$  est la longueur d'onde dans l'espace libre, correspondant à la fréquence de résonance de la cavité. A résonance,  $R$ ,  $L$ , et  $\lambda$  sont reliés par la relation :

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{k}{R}\right)^2 \quad (4.70)$$

Le volume du mode TE011 s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{mode} &= \int_{\mathcal{V}} \|\vec{E}_a(\vec{r})\|^2 d\mathcal{V} \\ &= 2\pi \times \left(\frac{R}{k}\right)^2 \times \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \int_0^L \cos^2(\pi z/L) dz \times \int_0^R r J_1^2(kr/R) dr \quad (4.71) \\ &= \pi L R^2 \left(\frac{R}{k}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \times \int_0^1 x J_1^2(kx) dx \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_1^2(kx) dx &= \frac{1}{2} J_2^2(k) \quad (\text{d'après [143], relation (6.521.1)}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{k} J_1(k) - J_0(k)\right)^2 \quad (\text{relation de récurrence entre } J_0, J_1 \text{ et } J_2) \\ &= \frac{1}{2} J_0^2(k) \end{aligned} \quad (4.72)$$

d'où :

$$V_{mode} = \pi LR^2 \left( 1 + \left( \frac{\pi R}{kL} \right)^2 \right) \times \frac{1}{2} J_0^2(k) \quad (4.73)$$

Application numérique : pour la cavité  $Rb$ ,  $R = 29$  mm et  $L = 58$  mm,  $J_0(k) = -0.40275939\dots$

On trouve  $V_{mode} = 14.52$  cm<sup>3</sup>.

L'amplitude du champ magnétique au centre de la cavité dépend du type d'impulsion que l'on souhaite effectuer. Lorsqu'on peut négliger la variation de vitesse des atomes dans la cavité, liée à l'accélération de la pesanteur, et si on suppose le nuage ponctuel, tous les atomes voient le même champ magnétique sur l'axe, oscillant à la pulsation  $\omega$  et d'amplitude

$$B(z(t)) = B_0(\omega) \sin(\pi t/\tau)$$

où  $t = 0$  à l'entrée de la cavité. Pour réaliser une impulsion  $n\pi/2$  ( $n \in 2\mathbb{N} + 1$ ), on doit donc avoir :

$$\int_0^\tau \Omega(t) dt = n \frac{\pi}{2} \quad (4.74)$$

c'est à dire :

$$\int_0^\tau \frac{\mu_b}{\hbar} B_0 \sin(\pi t/\tau) dt = n \frac{\pi}{2} \quad (4.75)$$

Pour  $\tau = 28.6$  ms et  $n = 1$ , on trouve  $B_0 = 9.8 \times 10^{-10}$  T, qui correspond à une fréquence de Rabi  $\Omega_0/2\pi = 13.7$  Hz.

L'énergie électromagnétique contenue dans le mode de la cavité est :

$$\mathcal{E}_{mode} = \frac{B_0^2(\omega)}{2\mu_0} \times V_{mode} \quad (4.76)$$

Pour un pulse  $\pi/2$ , elle vaut  $5.5 \times 10^{-18}$  J.

#### 4.4.2 Relation entre le champ intra-cavité, le champ couplé, et l'aimantation atomique

##### Equation en régime stationnaire

On trouve dans la référence[32] la démonstration détaillée de la relation qui, en régime stationnaire, lie le champ magnétique à l'intérieur de la cavité,  $H(\omega)$ , au champ magnétique micro-onde injecté de l'extérieur (via une antenne par exemple), noté  $H_e(\omega)$ , et à l'aimantation  $m(\vec{r}, \omega)$  du milieu atomique qui remplit la cavité. On donne ci-dessous les explications physiques permettant de comprendre cette relation. Celle-ci s'écrit :

$$\left( \omega_c^2 - \omega^2 - i \frac{\omega \omega_c}{Q_c} \right) H(\omega) = - \frac{\omega_c^2}{Q_c} H_e(\omega) + \frac{\omega^2}{V_{mode}} \int_{\mathcal{V}} \vec{m}(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{H}_a(\vec{r}) d^3 \vec{r} \quad (4.77)$$

où  $\omega_c$  représente la fréquence de résonance de la cavité, et  $Q_c$  est le facteur de qualité en charge du mode.  $Q_c$  exprime la dissipation d'énergie du mode dans la

cavité par conduction dans les parois de la cavité (pertes par "effet de peau") et par couplage vers l'extérieur (la condition d'adaptation d'impédance de la ligne coaxiale n'est jamais parfaite!).

Le membre de gauche de cette équation décrit le comportement, dans le domaine des fréquences, du mode libre, c'est à dire en l'absence de milieu atomique et de source extérieure de champ. En utilisant les notations de (4.66), on peut écrire, dans le domaine temporel :

$$\frac{\partial^2 H(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{\omega_c}{Q_c} \frac{\partial H(\vec{r}, t)}{\partial t} + \omega_c^2 H(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.78)$$

Les racines du trinôme de cette équation différentielle sont

$$-\frac{\omega_c}{2Q_c} \pm i\omega_c \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_c^2}}$$

Le champ du mode libre s'écrit donc, puisque  $4Q_c^2 \gg 1$  :

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}, 0) \exp\left(-\frac{\omega_c t}{2Q_c}\right) \cos(\omega_c t) \quad (4.79)$$

Le champ du mode libre oscille donc à la fréquence  $\omega_c$  et son amplitude s'atténue avec la constante de temps  $2Q_c/\omega_c$ . L'énergie du mode libre, égale à

$$\mu_o H(\omega, t) H^\dagger(\omega, t) / 2$$

évolue donc selon :

$$\mathcal{E}_{\text{mode libre}}(t) = \mathcal{E}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) \quad (4.80)$$

où  $\tau_c = Q_c/\omega_c$ . Pour un facteur de qualité en charge  $Q_c = 10000$ ,  $\tau_c$  vaut  $0.23 \mu s$  dans la cavité  $Rb$ .

Dans le membre de droite, le 1<sup>er</sup> terme représente le couplage de la source extérieure vers la cavité. Le 2<sup>e</sup> terme représente le couplage entre le champ dans la cavité et les dipôles magnétiques atomiques responsables de l'aimantation  $\vec{m}(\vec{r}, \omega) = M(\omega) \vec{m}(\vec{r})$  où  $\vec{m}(\vec{r})$  décrit la distribution volumique des dipôles atomiques. C'est une grandeur inversement proportionnelle à un volume, et son intégrale sur le volume  $\mathcal{V}$  de la cavité vaut  $N_{cav}$ , nombre d'atomes présents dans la cavité. Une hypothèse sous-jacente, dans l'expression (4.77), est que les distributions spatiales du mode propre de la cavité,  $\vec{H}_a(\vec{r})$  et  $\vec{E}_a(\vec{r})$ , ne sont pas modifiées par la présence du milieu atomique. Cette hypothèse est justifiée dans la mesure où le milieu atomique est peu dense<sup>7</sup>. En l'absence d'atomes dans la

<sup>7</sup> **Attention!** Avec ces conventions, on ne peut pas écrire  $B(\omega)/\mu_0 = H(\omega) + M(\omega)$ . En effet, la relation de constitution du champ s'écrit :

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega)/\mu_0 = \vec{H}(\vec{r}, \omega) + \vec{m}(\vec{r}, \omega) \quad (4.81)$$

qui s'écrit :

$$B(\omega) \vec{H}_a(\vec{r})/\mu_0 = H(\omega) \vec{H}_a(\vec{r}) + M(\omega) \vec{m}(\vec{r}) \quad (4.82)$$

Par conséquent, en prenant le produit scalaire par  $\vec{H}_a(\vec{r})$  et en intégrant sur le volume de la cavité, on obtient :

$$B(\omega)/\mu_0 = H(\omega) + \frac{M(\omega)}{V_{mode}} \int_{\mathcal{V}} \vec{m}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_a(\vec{r}) d^3 \vec{r} \quad (4.83)$$

cavité,  $\vec{m}(\vec{r}) = \vec{0}$ , et le champ dans la cavité,  $B(\omega) = \mu_0 H(\omega)$ , entretenu par le champ externe  $B_e(\omega) = \mu_0 H_e(\omega)$ , s'écrit :

$$B(\omega) = B^{(0)}(\omega) = -\frac{\omega_c^2/Q_c}{\left(\omega_c^2 - \omega^2 - i\frac{\omega\omega_c}{Q_c}\right)} B_e(\omega) \quad (4.84)$$

Si le champ injecté  $B_e(\omega)$  est indépendant de  $\omega$ , le champ résultant dans la cavité, en l'absence d'atomes, est un champ résonnant à la pulsation  $\omega_c$ , et, à résonance,  $B^{(0)}(\omega_c) = -iB_e(\omega_c)$ . La figure (4.26) représente les parties réelle et imaginaire, ainsi que le module de  $B^{(0)}(\omega)$ . On montre que  $|B^{(0)}(\omega)/B_e(\omega)|$  est une fonction quasi-lorentzienne du désaccord à la résonance de la cavité. Sa dérivée est maximale pour  $\omega - \omega_c = \pm\omega_c/2Q_c$  et vaut  $\pm Q_c/\omega_c$ .

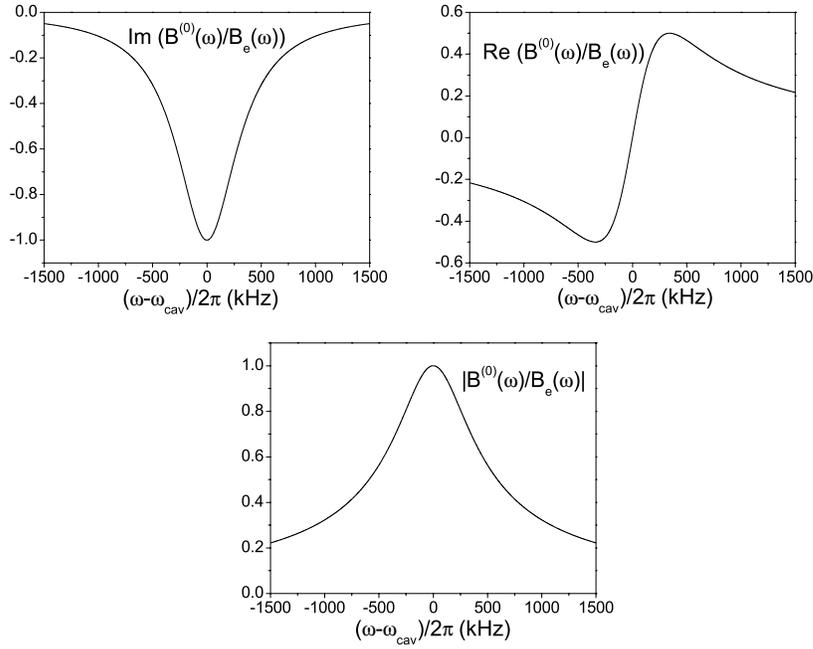


FIG. 4.26 – Parties réelle, imaginaire, et module du champ dans la cavité,  $B^{(0)}(\omega)$ , normalisé au champ injecté de l'extérieur,  $B_e(\omega)$ , et en l'absence d'atomes.

En présence d'atomes dans la cavité, le champ magnétique  $B(\omega)$  s'écrit, d'après (4.77) et (4.83) :

$$B(\omega) = B^{(0)}(\omega) + \mu_0 \frac{M(\omega)}{V_{\text{mode}}} \int_{\mathcal{V}} \vec{m}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_a(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{\mu_0 \omega^2 M(\omega)}{V_{\text{mode}} \left(\omega_c^2 - \omega^2 - i\frac{\omega\omega_c}{Q_c}\right)} \int_{\mathcal{V}} \vec{m}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_a(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (4.85)$$

On fait une légère approximation en négligeant le 2<sup>e</sup> terme de cette expression devant le 3<sup>e</sup> terme, qui, au voisinage de la résonance, est prépondérant ( $Q_c \gg 1$ ). Finalement, le champ dans la cavité, en présence d'atomes, s'écrit :

$$B(\omega) = B^{(0)}(\omega) \left( 1 + \frac{\mu_0 \omega^2 M(\omega)}{B^{(0)}(\omega) V_{mode} \left( \omega_c^2 - \omega^2 - i \frac{\omega \omega_c}{Q_c} \right)} \int_{\mathcal{V}} \vec{m}(\vec{r}) \cdot \vec{H}_a(\vec{r}) d^3 \vec{r} \right) \quad (4.86)$$

### Equation en régime transitoire

L'expression précédente du champ magnétique intra-cavité a été établie en régime stationnaire, c'est à dire pour une aimantation  $\vec{m}(\vec{r}, \omega)$  indépendante du temps. Dans la fontaine, le nuage d'atomes froids traverse la cavité en  $\tau \sim 30$  ms, créant une perturbation non stationnaire du champ dans la cavité. L'aimantation dépend du temps pour deux raisons. D'une part parce que chaque atome, de position  $\vec{r}(t)$ , se couple au mode  $\vec{H}_a(\vec{r}(t))$  lors de son passage dans la cavité, et que ce mode n'est pas uniforme dans la cavité. Et d'autre part parce que, à cause de ce couplage, l'atome change d'état hyperfin au fur et à mesure qu'il traverse la cavité : l'aimantation, liée au spin fictif par les relations (4.95), effectue une précession de Larmor autour du vecteur pulsation de Rabi. Par ailleurs, on a vu que le champ dans la cavité évolue typiquement avec une constante de temps  $\tau_c \sim 0.2 \mu s$ , très courte devant  $\tau$ . Par conséquent on peut considérer que le mode du champ dans la cavité s'adapte adiabatiquement à la perturbation liée aux atomes. Il suffit donc de remplacer  $\vec{m}(\vec{r}, \omega)$  par  $\vec{m}(\vec{r}(t), \omega, t)$  dans l'expression (4.86) :

$$B(\omega, t) = B^{(0)}(\omega) \left( 1 + \frac{\mu_0 \omega^2 M(\omega, t)}{B^{(0)}(\omega) V_{mode} \left( \omega_c^2 - \omega^2 - i \frac{\omega \omega_c}{Q_c} \right)} \int_{\mathcal{V}} \vec{m}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{H}_a(\vec{r}(t)) d^3 \vec{r} \right) \quad (4.87)$$

### 4.4.3 Déplacement de fréquence lié au couplage fréquence-amplitude dans la cavité

Supposons pour le moment que le 2<sup>e</sup> terme de (4.87) soit négligeable, par exemple parce que très peu d'atomes traversent la cavité. Le champ magnétique dans la cavité a alors pour amplitude  $|B^{(0)}(\omega_{at} + \delta)|$  d'un côté de la résonance atomique et  $|B^{(0)}(\omega_{at} - \delta)|$  de l'autre côté. Ces deux valeurs sont en général différentes, sauf si la fréquence de résonance de la cavité,  $\omega_c$ , coïncide parfaitement avec la fréquence atomique  $\omega_{at}$  (cf. figure (4.26)). En d'autres termes, la modulation de fréquence imposée par la source micro-onde d'interrogation induit une modulation de l'amplitude du champ intra-cavité vu par les atomes. Nous retrouvons là l'effet communément appelé "cavity pulling" mentionné en introduction.

La valeur maximale de la modulation d'amplitude est obtenue pour le maximum de la pente de  $|B^{(0)}(\omega)|$ , c'est à dire pour  $\omega_{at} - \omega_c = -\omega_c/2Q_c$ , et vaut :

$$\frac{|B^{(0)}(\omega_{at} + \delta)| - |B^{(0)}(\omega_{at} - \delta)|}{|B^{(0)}(\omega_{at})|} = + \frac{Q_c}{\omega_c} \times 2\delta \quad (4.88)$$

Pour une modulation  $\delta = 2\pi \times 0.5 \text{ Hz}$  et  $Q_c = 10000$ , on trouve une modulation d'amplitude pic à pic de  $14.6 \times 10^{-7}$  en valeur relative et sur la fontaine *Rb*. Ceci est obtenu lorsqu'on effectue des impulsions  $\pi/4$ , qui rendent maximale la sensibilité à une telle modulation. Estimons la modulation pic à pic résultante sur la probabilité de transition. En dérivant (1.25) par rapport à la pulsation de Rabi  $\Omega_0$ , on a en effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \Omega_0} &= \frac{\tau}{2} \sin(2\Omega_0\tau)(1 + \cos(\delta T)) \\ &= \frac{\tau}{2} \end{aligned} \quad (4.89)$$

puisque  $\Omega_0\tau = \pi/4$  et  $\delta T = \pi/2$ , d'où :

$$\Delta P = \frac{\Delta \Omega_0}{\Omega_0} \times \frac{\Omega_0\tau}{2} = \frac{\Delta \Omega_0}{\Omega_0} \times \pi/4 \quad (4.90)$$

soit, d'après (4.88) :

$$\Delta P = \delta P_+ - \delta P_- = +\frac{\pi}{8} \times \frac{Q_c}{\omega_c} \times 2\delta \quad (4.91)$$

En utilisant la relation (1.68), on en déduit le déplacement correspondant de la fréquence d'horloge :

$$\delta \nu_{horl.} = +\frac{1}{2\pi} \delta^2 \frac{Q_c}{\omega_c} \quad (4.92)$$

On trouve un déplacement relatif de fréquence de  $5.4 \times 10^{-17}$  pour la fontaine *Rb*. Cette valeur est petite par comparaison à l'exactitude actuelle des fontaines atomiques, qui est de  $\sim 10^{-15}$ , et c'est une valeur pessimiste car elle est valable pour des impulsions  $\pi/4$ . Pour des impulsions rigoureusement  $\pi/2$ , la probabilité de transition varie au second ordre avec l'amplitude du champ magnétique, et  $\delta P_+ - \delta P_-$  vaut idéalement 0 pour un nuage ponctuel. En pratique, le déplacement de fréquence est beaucoup plus petit que pour des impulsions  $\pi/4$ . De plus, si la cavité est accordée à seulement  $1/10^6$  de sa demi-largeur ( $|\omega_c - \omega_a t| < 0.1 \times \omega_c / 2Q_c$ ), la modulation d'amplitude du champ intra-cavité est divisée par un facteur 5.

Le déplacement relatif de fréquence de l'horloge induit par le couplage fréquence-amplitude dans la cavité est donc en pratique inférieur à  $10^{-17}$ , c'est à dire négligeable devant l'exactitude actuelle des fontaines atomiques.

#### 4.4.4 Calcul analytique du déplacement de fréquence induit par les atomes dans la cavité, pour un nuage ponctuel

Considérons maintenant le 2<sup>e</sup> terme de l'expression (4.87). Il est possible de donner une expression analytique du champ dans la cavité, en présence d'atomes, moyennant l'hypothèse simplificatrice suivante : l'extension spatiale du nuage est supposée très faible devant l'échelle de variation spatiale du mode propre de la cavité,  $\vec{H}_a(\vec{r})$ , de sorte que tous les atomes du nuage ont la même aimantation.

En d'autres termes, cela revient à considérer que  $\vec{m}(\vec{r}(t)) = N_{cav}\delta(\vec{r}(t))\vec{z}$ . Par conséquent, le terme de couplage dans (4.87) s'écrit :

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{m}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{H}_a(\vec{r}(t)) d^3\vec{r} = N_{cav}H_{a,z}(\vec{r}(t)) = N_{cav}f(t) \quad (4.93)$$

et le champ magnétique dans la cavité s'écrit :

$$B(\omega, t) = B^{(0)}(\omega) \left( 1 + \frac{\mu_0}{B^{(0)}(\omega)V_{mode}} \times \frac{N_{cav}\omega^2 M(\omega, t)f(t)}{\left(\omega_c^2 - \omega^2 - i\frac{\omega\omega_c}{Q_c}\right)} \right) \quad (4.94)$$

L'amplitude complexe  $M(\omega, t)$  du dipôle magnétique s'obtient en intégrant l'équation d'évolution du spin fictif, (A.31). Cette équation a été établie de manière perturbative. Les équations (4.95) qui s'en déduisent permettent de calculer le dipôle magnétique à l'ordre 0,  $M^{(0)}(\omega, t)$ , sous l'effet du champ non perturbé  $B^{(0)}(\omega, t)$ .

**Pendant la 1<sup>re</sup> interaction**, les composantes du spin fictif s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x(t) &= 0 = Re \left\{ \mathcal{M}^{(0)}(\omega, t) / \mu_B \right\} \\ \mathcal{S}_y(t) &= \sin \mathcal{P}(t) = -Im \left\{ \mathcal{M}^{(0)}(\omega, t) / \mu_B \right\} \\ \mathcal{S}_z(t) &= -\cos \mathcal{P}(t) = \rho_{ee} - \rho_{ff} \end{aligned} \quad (4.95)$$

et donc :

$$M^{(0)}(\omega, t) = -i\mu_B \sin \mathcal{P}(t) \quad (4.96)$$

D'où l'expression du champ dans la cavité à l'ordre 1 en perturbation :

$$B^{(1)}(\omega, t) = B^{(0)}(\omega) (1 + \Delta A(t) - i\Delta\phi(t)) \quad (4.97)$$

En prenant pour origine des phases la phase du champ non perturbé,  $B^{(0)}(\omega)$ ,  $\Delta A(t)$  représente la perturbation d'amplitude du champ, en valeur relative, liée à la présence des atomes. On calcule qu'elle vaut au maximum  $4.7 \times 10^{-36}$  pour  $N_{cav} = 10^8$  et  $Q_c = 10000$ , et elle a donc un effet négligeable sur le déphasage du champ.  $\Delta\phi(t)$  représente donc le déphasage<sup>8</sup>, par les atomes, du champ non perturbé  $B^{(0)}(\omega)$ . On a, d'après l'expression (4.94) :

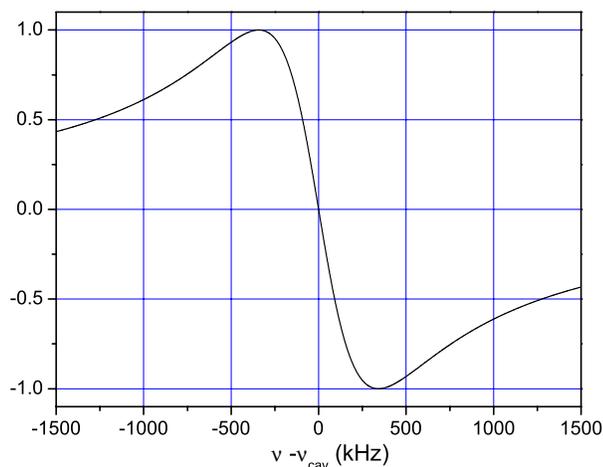
$$\frac{\Delta\phi(\omega, t)}{2\pi} = K\tau_{eff}\mathcal{D}(\omega) \frac{f(t) \sin \mathcal{P}(t)}{n} \quad (4.98)$$

où  $n = 2p + 1$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) caractérise le type d'impulsion faite dans la cavité :  $\mathcal{P}(\tau) = -\Omega_0\tau_{eff} = -\mu_B B^{(0)}(\omega)\tau_{eff}/\hbar = -n\pi/2$ .  $\mathcal{D}(\omega)$  désigne la fonction suivante :

$$\mathcal{D}(\omega) = \frac{2}{Q_c} \frac{\omega^2(\omega_c^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_c^2)^2 + \frac{\omega^2\omega_c^2}{Q_c^2}} \quad (4.99)$$

$\mathcal{D}(\omega)$  est une fonction dispersive, de maximum 1 pour  $\omega_c - \omega = \omega_c/2Q_c$ . Elle est représentée sur la figure (4.27). Sa dérivée en  $\omega = \omega_c$  vaut  $-4Q_c/\omega_c$ . En

<sup>8</sup>Le signe du déphasage est bien conforme à la convention prise depuis le début pour les amplitudes complexes :  $B(t) = Re\{B(\omega)e^{-i(\omega t + \varphi)}\}$ . Un déphasage  $\Delta\phi$  s'introduit donc avec un signe "-". D'où l'expression (4.97).

FIG. 4.27 – Fonction  $\mathcal{D}(\omega)$ .

pratique,  $\omega = \omega_{at} \pm \delta$ , et la modulation de fréquence  $\delta/2\pi \sim 0.5\text{Hz}$  est très petite devant  $\omega_{at}/2\pi$ . On peut donc remplacer  $\omega$  par  $\omega_{at}$  dans  $\mathcal{D}(\omega)$ .

La constante  $K$  vaut :

$$K = \frac{\mu_0 \mu_B^2 N_{cav} Q_c}{2\pi^2 \hbar V_{mode}} \quad (4.100)$$

**Pendant la 2<sup>e</sup> interaction**, les composantes du spin fictif changent de signe selon que  $\varepsilon$  vaut  $+1$  ou  $-1$ . Il suffit pour s'en convaincre de regarder la figure (4.28). A l'issue du vol libre, les composantes du spin fictif sont nulles selon  $y$  et  $z$ , et opposées selon  $x$ . Le calcul de ces composantes à partir de la relation  $\vec{S}(t) = \langle \tilde{\psi}(t) | \vec{\sigma} | \tilde{\psi}(t) \rangle$  donne d'ailleurs

$$S_y = S_z = 0 \text{ et } S_x = -\varepsilon(-1)^p \quad (4.101)$$

On en déduit que l'amplitude complexe du dipôle magnétique change de signe selon le côté de la frange qui est interrogé. Par exemple, au début de la 2<sup>e</sup> interaction :

$$\mathcal{M}^{(0)}(\omega, T + \tau) = -\mu_B \varepsilon (-1)^p \quad (4.102)$$

Par conséquent, le déphasage  $\Delta\phi$  est opposé de part et d'autre de la frange centrale, et  $\delta P_+ = \delta P_-$ . La contribution au déplacement de fréquence de l'horloge due au "cavity pulling" pendant la 2<sup>e</sup> interaction est donc rigoureusement nulle en théorie. De plus, le nombre d'atomes traversant la cavité au 2<sup>e</sup> passage est environ 5 fois plus faible que le nombre d'atomes au 1<sup>er</sup> passage, ce qui diminue d'autant la contribution de la 2<sup>e</sup> interaction, même lorsqu'on n'effectue pas rigoureusement des impulsions  $(2p+1)\pi/2$  dans la cavité.

On calcule donc le déplacement de fréquence de l'horloge **en ne prenant en compte que le déphasage induit par les atomes pendant la 1<sup>re</sup> interaction**. D'après l'expression (1.71) du déplacement de la fréquence d'horloge en

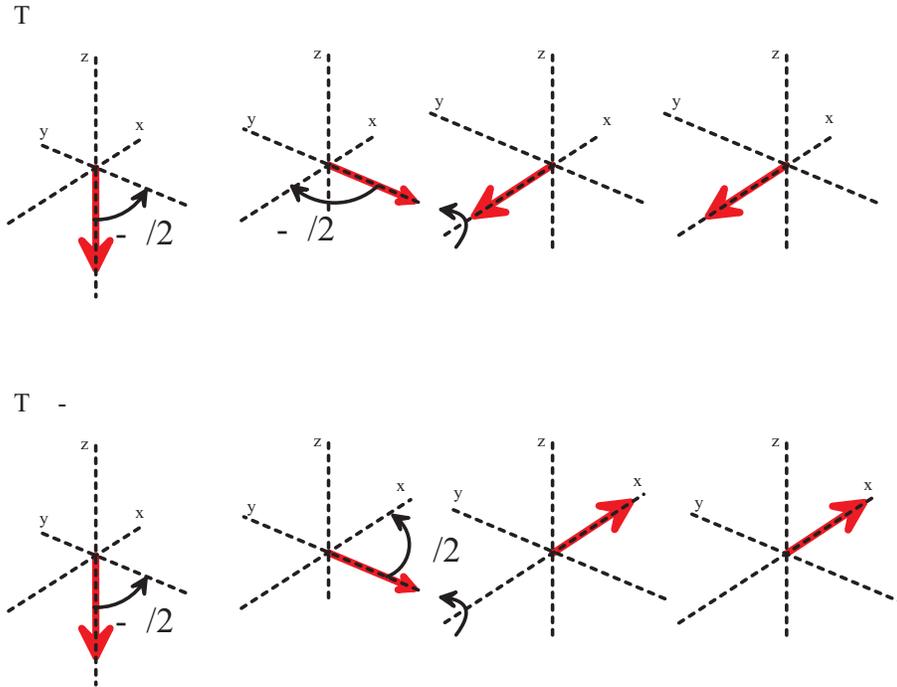


FIG. 4.28 – Evolution du spin fictif de part et d'autre de la frange de Ramsey. On effectue des impulsions  $\pi/2$  pendant la 1<sup>re</sup> et la 2<sup>e</sup> interaction.

fonction d'une perturbation de phase  $\Delta\phi(t)$ , on a donc :

$$\delta\nu_{horl.} = -\frac{1}{2\pi T_{eff}} \int_0^\tau \frac{d\Delta\phi(t)}{dt} g(t) dt \quad (4.103)$$

Rappelons l'expression (1.62) de  $g(t)$  pendant la 1<sup>re</sup> interaction :

$$g(t) = (-1)^p \sin(-\mathcal{P}(t))$$

Après intégration par parties, on trouve pour expression générale du "cavity pulling" :

$$\delta\nu_{horl.} = K \frac{\tau_{eff}}{T_{eff}} \mathcal{D}(\omega) \times (-1)^p \frac{\pi}{4\tau_{eff}} \int_0^\tau f^2(t) \sin(2\mathcal{P}(t)) dt \quad (4.104)$$

Application numérique : pour l'horloge *Rb*, qui a une cavité de facteur de qualité en charge  $Q_c = 10000$ , et pour  $N_{cav} = 10^8$  atomes traversant la cavité au 1<sup>er</sup> passage, le coefficient  $K$  vaut  $3.578 \times 10^{-3}$  Hz, c'est à dire qu'il correspond à un déplacement de fréquence de  $5.2 \times 10^{-13}$  en valeur relative. L'utilisation de la méthode de Ramsey permet de réduire l'effet dans le rapport  $\tau_{eff}/T_{eff} \simeq 1/23$  pour des impulsions  $\pi/2$  (ce rapport dépend du type d'impulsions effectuées dans la cavité, il vaut  $\sim 1/21$  pour des impulsions  $3\pi/2$ ). Enfin, le dernier facteur du second membre de (4.104), qui change de signe quand  $p$  croît de 1, est sans dimension et vaut  $-0.445$  pour des impulsions  $\pi/2$  ( $p = 0$ ) et  $+0.074$

pour des impulsions  $3\pi/2$  ( $p = 1$ ). Ces valeurs ont été obtenues en prenant pour profil de champ magnétique dans la cavité  $f(t) = \sin(\pi t/\tau)$ , qui constitue une bonne approximation tant qu'on peut négliger la variation de vitesse des atomes dans la cavité liée à l'accélération de la pesanteur, c'est à dire pour des vitesses de lancement suffisamment élevées. On trouve finalement que le déplacement relatif de fréquence est pour amplitude maximale  $1.014 \times 10^{-14}$  pour des impulsions  $\pi/2$ , et  $1.83 \times 10^{-15}$  pour des impulsions  $3\pi/2$ . Cet optimum est atteint pour  $\nu_{at} - \nu_{cav} = \pm \nu_{cav}/2Q_c$ . Il est proportionnel à  $Q_c$  et  $N_{cav}$ . L'allure de la courbe du déplacement de fréquence en fonction du désaccord  $\nu_{at} - \nu_{cav}$  est celle de la courbe  $\mathcal{D}(\omega)$  (cf. figure (4.27)). On a représenté sur la figure (4.29) le déplacement de fréquence donné par l'expression (4.104) en fonction de  $\nu_{cav} - \nu_{at}$ , c'est à dire en fonction du désaccord de la cavité micro-onde relativement à la résonance atomique. Ces courbes seront directement comparées aux résultats expérimentaux dans le chapitre 5.

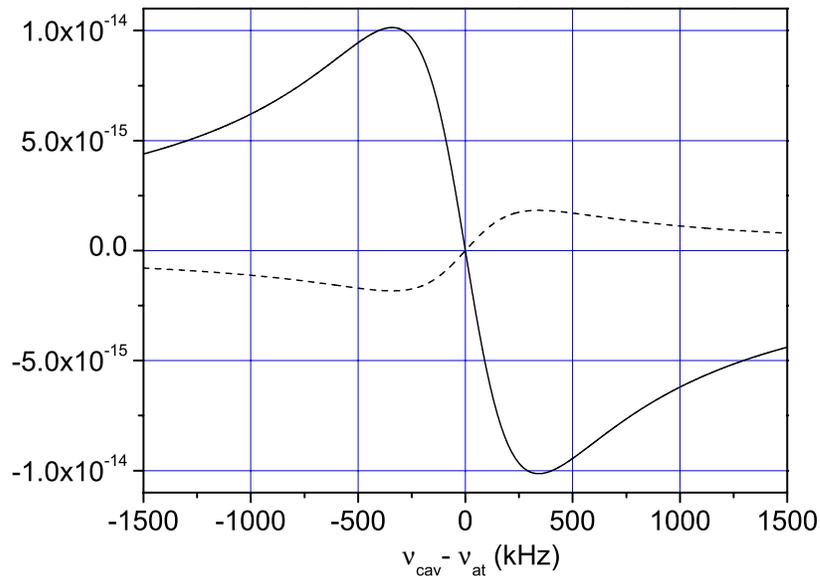


FIG. 4.29 – Déplacement de fréquence de l'horloge dû à l'entraînement de fréquence de la résonance atomique par la cavité ("cavity pulling"), en fonction du désaccord de la cavité micro-onde relativement à la résonance atomique,  $\nu_{cav} - \nu_{at}$ , et pour  $10^8$  atomes traversant la cavité au 1<sup>er</sup> passage. Le facteur de qualité en charge de la cavité vaut  $Q_c = 10000$ , et le nuage passe  $\tau = 28.6$  ms dans la cavité et  $T = 384$  ms au-dessus de la cavité ( $v_l = 3.5$  m.s<sup>-1</sup>). Les courbes sont calculées à l'aide l'expression (4.104), c'est à dire pour un nuage petit devant les variations spatiales du champ dans la cavité. On a effectué le calcul pour des impulsions  $\pi/2$  dans la cavité (traits pleins), et pour des impulsions  $3\pi/2$  (tirets). Le profil de champ est pris sinusoidal conformément au mode TE011 sur l'axe. Les atomes sont préparés initialement dans l'état  $|f\rangle$ .

Remarque (1) : Le calcul précédent a été effectué pour des atomes préparés initialement dans l'état  $|f\rangle$ , qui absorbent l'énergie injectée de l'extérieur. On trouve que, pour des impulsions  $\pi/2$ , lorsque  $\nu_{cav} > \nu_{at}$ ,  $\delta\nu_{horl.} < 0$ ; et inversement, lorsque  $\nu_{cav} < \nu_{at}$ ,  $\delta\nu_{horl.} > 0$ . Tout se passe comme si la cavité, lorsqu'elle est désaccordée, "repoussait" la résonance atomique dans le sens opposé au désaccord de la cavité (on pourrait dire qu'il s'agit de "cavity pushing"). Pour des atomes initialement préparés dans l'état  $|e\rangle$ , l'effet est contraire : tout se passe comme si la cavité "tirait" à elle la résonance atomique. D'où l'appellation "cavity pulling", introduite par les physiciens dans la théorie du maser [32]. Dans un maser, en effet, les atomes d'hydrogène sont initialement préparés dans l'état excité, et, dans la cavité, ils se désexcitent vers l'état fondamental. Cette fois, la fréquence d'horloge est la fréquence de la radiation émise (et non plus absorbée) par les atomes vers l'extérieur.

Remarque (2) : un calcul numérique du "cavity pulling" a été effectué et est expliqué en détail dans la thèse de S. Bize [30]. Ce calcul numérique permet de calculer le déplacement de fréquence de l'horloge lorsque le nuage d'atomes froids traversant la cavité ne peut plus être supposé petit devant l'échelle des variations spatiales du champ intra-cavité (le champ est atténué de 20% à 6 mm de l'axe). Il faut alors calculer le déplacement de fréquence pour chaque trajectoire atomique, en tenant compte de la distribution de positions initiales et de la distribution de vitesses. Les résultats de ce calcul numérique sont en accord au % avec le calcul analytique (expression (4.104)) dans le cas d'un piège magnéto-optique. Le calcul analytique est donc valable pour le traitement de nos données expérimentales, présentées au chapitre 5.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit en détail le calcul numérique des nombres d'atomes utiles à l'exploitation des données expérimentales qui seront présentées au chapitre 5. Ce calcul est complet dans le sens qu'il est fidèle à la réalité de l'évolution du nuage atomique dans la fontaine : il prend pour paramètres d'entrée ceux de la géométrie de l'expérience, et ceux, mesurés, des distributions de vitesses et de positions atomiques. Il rend pour paramètres de sortie le nombre d'atomes détectés, le nombre d'atomes traversant la cavité d'interrogation, et la densité moyenne effective dans chaque niveau d'horloge. Il tient compte aussi de la fonction de sensibilité et de l'interaction entre les atomes et le champ micro-onde dans la cavité. Ce calcul constitue donc l'outil nécessaire pour l'interprétation des mesures de déplacement collisionnel dans une fontaine.

Nous avons ensuite expliqué de façon détaillée un autre effet dépendant du nombre d'atomes dans les fontaines : le "cavity pulling". Nous en avons donné une expression analytique dans le cas où l'expansion spatiale du nuage d'atomes est très petite devant les échelles de variation du champ dans la cavité. Cette expression est en particulier valable lorsque les atomes sont capturés dans un piège magnéto-optique. Elle est donc valable pour l'exploitation des mesures effectuées sur la fontaine *Rb*.

Nous verrons au chapitre 5 que la prise en compte simultanée de ces deux effets est nécessaire pour interpréter les déplacements de fréquence observés en fonction du nombre d'atomes.



## Chapitre 5

# Mesure des déplacements de fréquence dépendant du nombre d'atomes dans l'horloge Rb

### 5.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats de mesure des déplacements de fréquence dépendant du nombre d'atomes, dans l'horloge Rb : le "cavity pulling" et le déplacement collisionnel. De ces deux effets, le "cavity pulling" est en fait largement prédominant. Ces deux effets, qui déplacent simultanément la fréquence de l'horloge, n'ont cependant pas la même signature : contrairement au déplacement collisionnel, le "cavity pulling" varie de manière dispersive en fonction du désaccord de la cavité micro-onde relativement à la résonance atomique. Cette signature peut donc être utilisée pour discriminer les deux effets, tout en les mesurant de manière simultanée.

La section 5.2 explique comment la mesure de ces deux effets a été effectuée. Cette mesure est basée sur la détermination simultanée des deux effets, en utilisant une mesure différentielle en nombre d'atomes, et en faisant varier le désaccord de la cavité micro-onde relativement à la résonance atomique. Cette méthode permet de vérifier complètement la théorie du "cavity pulling".

La section 5.3 explique comment nous avons déterminé le nombre d'atomes initialement capturés dans le piège magnéto-optique, puis lancés dans l'horloge. Deux méthodes ont été mises en oeuvre. L'une, élémentaire, est basée sur la mesure de la fluorescence des atomes dans le piège. On verra qu'elle fournit une information précieuse sur la variation relative du nombre d'atomes capturés, de jour en jour, mais qu'elle ne permet pas une détermination absolue du nombre d'atomes, car elle se heurte à l'ignorance du coefficient de couplage atome-lumière. Elle a été utilisée systématiquement au cours de toutes nos mesures de fréquences.

L'autre, plus lourde à mettre en place, est basée sur l'absorption partielle, par les atomes, d'un faisceau laser de paramètres connus. Nous avons utilisé

cette méthode bien connue afin de déterminer simultanément le nombre absolu d'atomes et la dimension caractéristique du nuage.

La section 5.4 décrit la méthode par absorption, qui a été mise en place après la fin des mesures de "cavity pulling" et de déplacement collisionnel. Lorsqu'elle est combinée au modèle de distribution de vitesses et à la simulation Monte Carlo décrite dans le chapitre précédent, elle permet de déterminer le nombre d'atomes détectés. Connaissant l'aire de temps de vol associé, elle permet donc de caractériser la réponse du système de détection à un atome (c'est la détectivité du système de détection). La détectivité est une grandeur clé du problème, puisque c'est elle qui nous permettra de relier les aires de temps de vol, enregistrées systématiquement au cours des mesures de fréquence, au nombre d'atomes traversant la zone de détection, puis au nombre d'atomes initial et à la densité atomique moyenne effective *via* les paramètres de distribution de positions et de vitesses. La section 5.4 explique donc comment nous avons déterminé la détectivité, d'une part à partir de la méthode d'absorption (méthode dite "indirecte"), et d'autre part par calibration géométrique et photométrique du système de détection (méthode "directe"). Ces deux méthodes, indépendantes, donnent le même résultat à leurs incertitudes près, qui seront détaillées.

La section 5.5 dresse le bilan des incertitudes sur le nombre d'atomes en cavité au 1<sup>er</sup> passage et sur la densité moyenne effective. Ce bilan permet de déterminer les incertitudes ultimes que l'on est en droit d'attendre de mesures systématiques de tous les paramètres, et d'une exploitation de données consécutive à la prise de données. C'est donc ce qu'on peut espérer dans le futur, lors de mesures de déplacement collisionnel dans l'horloge *RbCs* par exemple. La réalité est bien sûr différente, et le bilan d'incertitudes tient compte aussi des incertitudes supplémentaires liées aux extrapolations faites *a posteriori* à partir de calibrations reliant les différentes méthodes de détermination des paramètres (nombre d'atomes, taille du nuage, distribution de vitesses ...).

Enfin, la section 5.6 présente les résultats expérimentaux sur le "cavity pulling" et sur le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  dans différentes configurations de préparation des atomes.

## 5.2 Comment mesurer le déplacement collisionnel du $^{87}\text{Rb}$ ?

### 5.2.1 Procédure de mesure

Le but de ce paragraphe est d'expliquer la procédure de mesure du déplacement collisionnel. Il faut tout d'abord noter qu'on cherche ici à effectuer une mesure absolue du déplacement collisionnel, c'est à dire du coefficient  $K_{collisions}$  introduit dans le chapitre 4, qui lie déplacement de fréquence et densité atomique moyenne effective. La mesure absolue de  $K_{collisions}$  n'est pas nécessaire lorsqu'on veut évaluer l'exactitude d'une fontaine, dès lors qu'on est capable d'extrapoler simplement le déplacement de fréquence à nombre d'atomes nul. C'est par exemple le cas lorsque la relation entre le nombre d'atomes détectés et la densité moyenne effective est une relation linéaire : on peut alors se contenter de mesurer le déplacement de fréquence en fonction du nombre d'atomes détectés.

### Méthodes de variation du nombre d'atomes dans la fontaine.

Plusieurs méthodes permettent de faire varier le nombre d'atomes dans la fontaine. On peut faire varier le temps de chargement du piège magnéto-optique ou de la mélasse ; on peut aussi faire varier l'intensité des faisceaux de refroidissement. Ce sont ces deux méthodes que nous avons principalement employées. Elles ont pour inconvénient de modifier simultanément les paramètres de la distribution de vitesses, et la taille du nuage atomique. Par conséquent, il n'existe pas de relation simple entre la densité atomique moyenne effective et le nombre d'atomes détectés. Parce qu'elles modifient le nombre d'atomes pendant la phase de refroidissement, ces méthodes s'appliquent néanmoins à toutes les configurations de préparation :  $|F = 2, \text{ tous } m_F\rangle$ ,  $|F = 1, \text{ tous } m_F\rangle$ , et  $|F = 1, m_F = 0\rangle$ . Une autre méthode consiste à capturer un nombre d'atomes constant, mais à sélectionner ensuite avec un taux variable les atomes qui vont traverser la cavité et participer au signal d'horloge (cette méthode sera appelée "méthode  $\pi \rightarrow \pi/n$ " dans la suite). Cette sélection est effectuée en appliquant une impulsion micro-onde de puissance ajustable, égale ou inférieure à  $\pi$ , qui transfère une partie des atomes de  $|F = 2, m = 0\rangle$  vers  $|F = 1, m = 0\rangle$ . Les atomes restant dans les sous-niveaux de  $|F = 2\rangle$  sont ensuite poussés par pression de radiation au moyen d'un faisceau "pousseur" accordé sur la transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . Cette méthode permet donc d'ajuster le nombre d'atomes présents dans le niveau  $|F = 1, m = 0\rangle$ , sans modifier ni la distribution de vitesses, ni la distribution de positions du nuage à l'issue du lancement. Cette méthode n'est applicable que dans le cas de préparation des atomes dans  $|F = 1, m = 0\rangle$  (fonctionnement standard de l'horloge). On verra plus loin pourquoi, même dans ce cas, nous ne l'avons pas utilisée pour la mesure du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ .

### Une mesure différentielle

La mesure du déplacement collisionnel a été effectuée de manière différentielle, c'est à dire qu'au lieu de mesurer un déplacement de fréquence  $\Delta\nu$  en fonction d'une densité moyenne effective  $\bar{n}$ , on a mesuré une variation  $\delta(\Delta\nu) = \Delta\nu_1 - \Delta\nu_2$  de déplacement de fréquence en fonction d'une variation  $\delta\bar{n} = \bar{n}_1 - \bar{n}_2$  de densité moyenne effective entre deux régimes "1" et "2". Cette méthode s'impose dès lors qu'on veut mesurer l'effet d'une variation de la densité atomique sur le déplacement de fréquence de l'horloge, et uniquement cet effet, tandis qu'interviennent d'autres perturbations, variables sur des échelles de temps inférieures ou de l'ordre de la durée d'une mesure de déplacement collisionnel, et ne faisant pas intervenir le nombre d'atomes dans la fontaine. Elle permet alors de rejeter ces autres perturbations, qui sont communes aux deux régimes "1" et "2". Ce fut particulièrement le cas à certains moments de notre campagne de mesure, parce que le signal délivré par le maser H et utilisé comme référence de fréquence présentait une dérive de fréquence de l'ordre de  $10^{-15}$  par jour accompagnée de sauts intempestifs de fréquence de l'ordre de  $10^{-14}$ . Nous allons voir dans la suite que le maser n'était pas la seule cause de perturbation des mesures de fréquences.

Chaque mesure différentielle a donc consisté en une double intégration, où nous avons mesuré le déplacement de fréquence alternativement à haute et basse densité. La densité variait d'un facteur  $\sim 3.5$  entre les deux régimes, et le nombre

d'atomes dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage d'un facteur  $\sim 5.5$ . La période d'alternance d'un régime à l'autre était de 400 cycles d'horloge (200 cycles dans chaque régime) soit en moyenne 10 minutes. Cette période est courte devant l'échelle de temps des variations de fréquence du maser, et longue devant la constante de temps de la boucle d'asservissement ( $\sim 10$  cycles  $\simeq 15$  s).

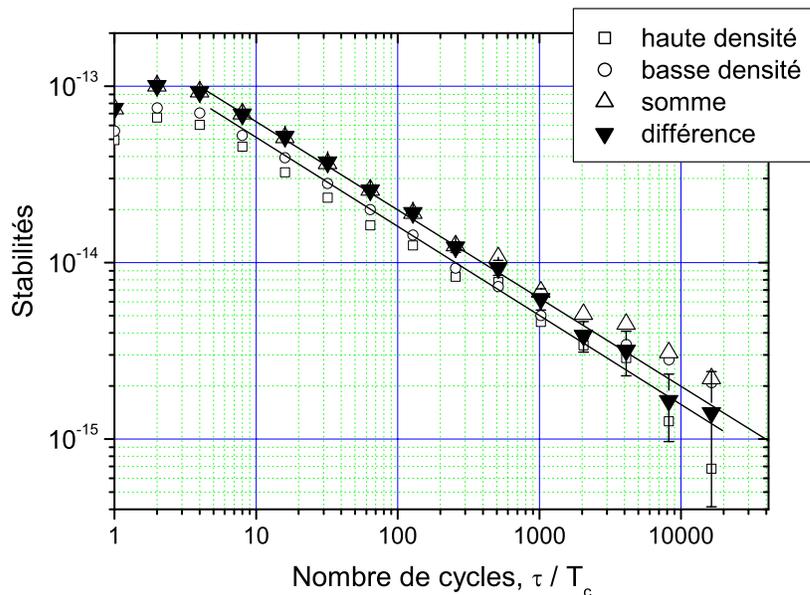


FIG. 5.1 – Courbes de stabilité de fréquence de l'horloge Rb par rapport au maser à hydrogène, obtenues typiquement lors des mesures de déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ . Les carrés et ronds creux sont obtenus en calculant la variance d'Allan des fluctuations de fréquence pour chaque régime d'intégration (haute densité et basse densité respectivement). Les stabilités décroissent comme  $1/\sqrt{N}$  pour  $N \geq 8$ , où  $N = \tau/T_c$  est le nombre de cycles d'horloge sur lequel on a moyenné pour obtenir le point correspondant de stabilité. Pour  $N \leq 8$ , les fluctuations de fréquence sont filtrées par la boucle d'asservissement, qui se comporte comme un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre, avec une constante de temps de l'ordre de 5 cycles. Pour  $N \geq 2000$ , les fluctuations lentes des perturbations extérieures perturbent la variance d'Allan dans les deux régimes. Ces fluctuations lentes sont en grande partie rejetées en calculant la variance des différences des corrections de fréquence (triangles pleins), au contraire de la variance de leurs sommes (triangles creux).

Pour les mesures différentielles avec sélection initiale dans le niveau  $|F = 1, m = 0\rangle$ , la stabilité typique obtenue en régime de haute densité par variation de la puissance des faisceaux de refroidissement est  $1.8 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$ , et  $2.2 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  en régime de basse densité. Les intégrations ont été poursuivies jusqu'à atteindre une résolution différentielle de l'ordre de  $10^{-15}$  (c'est à dire une résolution de l'ordre de  $6.4 \times 10^{-16}$  et  $7.8 \times 10^{-16}$  dans chaque régime si on

omet la dérive du maser). Ce niveau de stabilité est atteint au bout de  $\sim 4$  jours d'intégration, le temps de cycle étant de 1.85s, et le temps de chargement du piège de 850 ms. La figure (5.1) montre un exemple de variances d'Allan obtenues lors de l'intégration double du 03/12/99 au 06/12/99. On a aussi tracé sur ce graphe la variance d'Allan des fluctuations des différences (respectivement des sommes) des corrections de fréquence, c'est à dire  $\sigma_{y_{HD}-y_{BD}}(\tau)$  (respectivement  $\sigma_{y_{HD}+y_{BD}}(\tau)$ ), où  $y_{HD}$  et  $y_{BD}$  désignent respectivement les corrections relatives de fréquence à haute densité et à basse densité<sup>1</sup>. Au contraire de la variance des fluctuations de la somme, la variance des fluctuations de la différence décroît généralement en  $\tau^{-1/2}$  jusqu'au nombre total de cycles d'horloge effectués pendant l'intégration. En calculant la différence des corrections de fréquence, on rejette en effet le bruit et les dérives qui sont communs aux deux régimes sur des temps supérieurs à la période d'alternance. Il subsiste éventuellement les bruits qui ne sont pas communs, comme les dérives de nombre d'atomes dans chaque régime<sup>2</sup>.

Pour les mesures différentielles avec préparation dans  $|F = 2, \text{ tous } m_F\rangle$  et  $|F = 1, \text{ tous } m_F\rangle$ , les stabilités dans chaque régime sont dégradées d'un facteur  $\sim 1.5$  par rapport au cas précédent, et les intégrations doubles ont duré 4 jours en moyenne. Les incertitudes sur les mesures différentielles sont donc typiquement de  $1.5 \times 10^{-15}$ .

### Une mesure simultanée du déplacement collisionnel et du "cavity pulling"

La mesure différentielle décrite précédemment ne donne malheureusement pas directement le déplacement collisionnel recherché. En effet, nous avons vu au chapitre 4 que le "cavity pulling" dépend aussi du nombre d'atomes dans l'horloge. Plus précisément, il croît linéairement avec le nombre d'atomes  $N_{cav}$  passant dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage, tandis que le déplacement collisionnel croît linéairement avec la densité moyenne effective,  $\bar{n}$ . Le cavity pulling n'est donc pas "une perturbation commune aux deux régimes "1" et "2", qui s'élimine dans la méthode différentielle". Nous avons vu de plus que le "cavity pulling" varie selon une loi dispersive en fonction du désaccord  $\delta$  de la cavité micro-onde relativement à la résonance atomique, et qu'il s'annule lorsque la cavité est accordée sur la résonance atomique. Ceci constitue une signature du "cavity pulling".

Malheureusement, dans notre cas, à température ambiante, la cavité était désaccordée à +1 MHz de la résonance atomique (on verra au paragraphe 5.2.2 comment nous avons effectué la mesure de la résonance de la cavité). Afin de déterminer le déplacement collisionnel, il est donc nécessaire de soustraire du déplacement de fréquence la contribution du "cavity pulling". On pourrait aussi chercher à accorder la cavité sur la résonance atomique, en la chauffant de  $\sim 9^\circ\text{C}$ , et mesurer le déplacement de fréquence résiduel, égal au déplacement collisionnel. On verra que dans le cas du  $^{87}\text{Rb}$ , le "cavity pulling" induit un déplacement de fréquence bien plus élevé que les collisions entre atomes froids,

<sup>1</sup>Pour pouvoir effectuer ces sommes et ces différences, on est bien sûr amené à resynchroniser les séquences de mesure dans chaque régime.

<sup>2</sup>Ces dérives, au maximum de  $\sim 10\%$  entre le début et la fin de l'intégration, n'entraînent pas de perturbation visible sur chaque variance d'Allan, parce que le déplacement collisionnel est  $\sim 6$  fois plus faible que la résolution de fréquence de chaque mesure!

sauf dans un intervalle de désaccord de cavité très petit autour de la résonance atomique : un désaccord de cavité de  $\sim -5$  kHz suffit pour compenser le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}^3$ . Et on verra que cette valeur de désaccord est inférieure à notre incertitude de pointé de la résonance de la cavité.

Nous avons par conséquent décidé d'effectuer une vérification complète de la prédiction théorique du "cavity pulling", simultanément à la mesure de déplacement collisionnel, en cherchant la signature dispersive du "cavity pulling" en fonction de  $\delta$ . Le paragraphe 5.6 expliquera comment les deux effets seront séparés dans l'exploitation des mesures.

Par variation de la température de la cavité, nous avons désaccordé progressivement la cavité, depuis son désaccord à température ambiante (+1 MHz), jusqu'à  $-390$  kHz (soit  $\sim 13^\circ\text{C}$  au-dessus de la température ambiante). Après chaque pas de variation de la température, nous avons attendu 1 à 2 jours que la température se stabilise. Cette constante de temps particulièrement longue est liée au fait que l'expérience ne permettait pas de chauffer uniquement la cavité. Nous avons donc dû chauffer l'ensemble de la partie supérieure de la fontaine, à l'aide de fils chauffants enroulés autour du 2<sup>e</sup> blindage magnétique! C'est donc l'ensemble {2<sup>e</sup> blindage, 1<sup>er</sup> blindage, solénoïde du champ directeur, tube à vide en aluminium} qu'il a fallu chauffer afin de chauffer la cavité, qui est au coeur de cet ensemble. Il faut ajouter à cela le fait que chacune des pièces de cet ensemble avait été, à dessein, isolée thermiquement de ses voisines lors de la construction de la fontaine, que les surfaces des pièces étaient en moyenne distantes de  $\sim 2$  cm les unes des autres, et que le  $\mu$ -métal des blindages est un mauvais conducteur de la chaleur. C'est donc essentiellement par diffusion lente de la chaleur des couches extérieures vers les couches intérieures que la cavité pouvait s'échauffer. Aussi, nous avons limité au mieux les pertes par convection et les pertes par diffusion vers l'extérieur en enveloppant le 2<sup>e</sup> blindage d'isolant thermique. Pour échauffer la cavité de  $\sim 13^\circ\text{C}$ , c'est en fait de  $\sim 40^\circ\text{C}$  au-dessus de la température ambiante qu'il fallait échauffer l'ensemble de l'expérience!

Après chaque pas de variation de la température, et après thermalisation, nous avons effectué une mesure de la résonance de la cavité (cf. § 5.2.2). Puis nous avons effectué une intégration double, par alternance de régimes à haute densité et à basse densité. Lorsque, au bout de  $\sim 4$  jours, la résolution de la mesure différentielle atteint  $\sim 10^{-15}$ , l'intégration fut arrêtée, et la résonance de la cavité à nouveau mesurée, afin de tester une éventuelle dérive résiduelle de la température pendant l'intégration. Un certain nombre de paramètres de l'expérience furent systématiquement enregistrés, au début comme à la fin de l'expérience : largeur à mi-hauteur et aires des signaux de temps de vol, fluorescence du piège magnéto-optique à la fin de la phase de capture, puissance et désaccord du faisceau de détection, ainsi que les paramètres de capture des atomes. D'autres paramètres ne furent pas enregistrés systématiquement dès le début de la campagne de mesures : le traitement des données a été fait simultanément voire après les mesures, et nous avons dû interpoler *a posteriori* certains paramètres en considérant les valeurs qu'ils avaient lors de mesures immédiatement antérieures et ultérieures. Nous verrons plus loin que ces incer-

---

<sup>3</sup>pour  $3.5 \times 10^7$  atomes en cavité au 1<sup>er</sup> passage et une densité moyenne effective de  $1.5 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$ .

titudes expérimentales ont pour conséquence d'augmenter l'incertitude sur la densité moyenne effective.

Après avoir effectué une série de mesures par température croissante, nous avons effectué des mesures par température décroissante, en revenant progressivement à température ambiante. Et enfin nous avons chauffé à nouveau la cavité de  $\sim 7^\circ\text{C}$  et effectué une dernière mesure pour le désaccord correspondant, afin de tester la reproductibilité de la mesure, le chauffage de la cavité étant une perturbation majeure de l'expérience.

### De l'intérêt supplémentaire de la méthode différentielle ...

De ce qui précède, il découle que le déplacement de fréquence induit par le rayonnement du corps noir a varié notablement pendant toute la campagne de mesures simultanées du "cavity pulling" et du déplacement collisionnel :  $\Delta T = 13^\circ\text{C}$  au niveau de la cavité correspond à un déplacement relatif de fréquence de  $-2.2 \times 10^{-15}$  à partir de la température ambiante ( $23^\circ\text{C}$ ), et ce sous condition que l'ensemble de la zone d'interaction soit homogène en température. La méthode différentielle permet donc de rejeter cette perturbation, qui est commune aux deux régimes haute densité et basse densité.

Un problème expérimental supplémentaire a aussi pu être résolu grâce à cette méthode. On a expliqué qu'il a été nécessaire de faire varier la température de l'ensemble de la zone d'interaction d'une quantité allant jusqu'à  $40^\circ\text{C}$  afin d'échauffer la cavité de  $13^\circ\text{C}$ . Ceci a posé un problème en ce qui concerne l'homogénéité du champ magnétique dans la zone d'interaction. En effet, la cavité n'était pas isolée électriquement du tube à vide, et le câble co-axial d'alimentation de la cavité micro-onde touchait par sa gaine conductrice le tube à vide en plusieurs points. Sous l'effet des gradients de température importants, les différents matériaux en contact (cuivre pour la cavité et le câble co-axial, aluminium pour le tube à vide, titane pour les brides supérieures) se sont alors comportés comme des thermo-couples. Les courants thermo-électriques induits ont perturbé le champ magnétique directeur et le contraste des franges de Ramsey de la raie  $(1, 1)$ , linéaire en champ directeur, fut altéré. Là encore, la méthode différentielle a permis de rejeter cette perturbation, qui est commune aux deux régimes haute densité et basse densité<sup>4</sup>.

### Où la méthode de variation du nombre d'atomes dite " $\pi \rightarrow \pi/n$ " peut être dangereuse ...

Revenons sur la méthode de variation du nombre d'atomes par variation de la puissance de l'impulsion de sélection (méthode dite " $\pi \rightarrow \pi/n$ "). Cette méthode peut présenter le danger suivant : si le faisceau "pousseur" ne pousse pas parfaitement les atomes présents dans  $|F = 2\rangle$ , il subsiste une fraction d'atomes dans  $|F = 2, m = 0\rangle$ , et ces atomes ont une relation de phase déterminée avec

<sup>4</sup>En toute rigueur, l'effet de l'inhomogénéité du champ magnétique sur la fréquence n'est pas complètement différentiel, car il y a une corrélation entre le nombre d'atomes et l'extension spatiale du nuage. Le couplage moyen des atomes au champ magnétique diffère donc d'un régime à l'autre. Cette contribution non-différentielle est en pratique négligeable parce que les échelles de variation spatiale du champ magnétique, sur le trajet des atomes, sont grandes par comparaison à la taille du nuage.

les atomes de  $|F = 1, m = 0\rangle$ . Il existe donc, avant le début de l'interaction Ramsey, une cohérence résiduelle entre les atomes dans l'état  $|F = 1, m = 0\rangle$  et ceux dans l'état  $|F = 2, m = 0\rangle$ . En terme de spin fictif, ceci se traduit par un angle (faible) du spin fictif avec l'axe  $z$ , à l'instant initial (cf. figure (1.10c)). Prenons cet angle égal à  $\alpha = 10^{-5}$  rad par exemple. Au pire (c'est à dire si le spin fictif est dans le plan  $(x, z)$ ), cette cohérence se propage pendant l'interaction de Ramsey et se traduit à la fin par un déplacement de fréquence égal à  $2\alpha/(2\pi T_{eff}) \simeq 8 \times 10^{-16}$  (cf. expression (1.68)). Ce déplacement de fréquence est de l'ordre de la résolution de nos mesures de fréquence, et on verra qu'il est environ 8 fois plus important que le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  pour les densités typiques atteintes dans notre horloge. De plus, cet effet serait indétectable du point de vue des mesures de populations résiduelles dans  $|F = 2, m = 0\rangle$  : le taux de population résiduelle est en effet  $1 - \cos \alpha \simeq \alpha^2/2 \sim 5 \times 10^{-11}$ , c'est à dire largement inférieur au seuil détectable de  $\sim 10^{-3}$ . Cet effet n'est par ailleurs pas rejeté par la méthode différentielle, puisque la méthode de sélection fait varier simultanément la cohérence et le nombre d'atomes. Il est donc particulièrement gênant dans le cas de la mesure du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ , qui est lui aussi très faible. Elle est par-contre préconisée dans le cas de la mesure du déplacement collisionnel du Cs, qui est un effet important de l'ordre de  $10^{-14}$  pour  $3 \times 10^7$  atomes lancés.

Dans l'horloge double *RbCs*, la sélection se fait à l'aide d'une cavité annexe. La mise en évidence de l'effet de cette cohérence résiduelle peut alors être effectuée indépendamment, en faisant varier la phase relative du champ dans la cavité de sélection et du champ dans la cavité de Ramsey. Cette modification de la phase de l'impulsion de sélection revient à faire varier l'orientation de la cohérence résiduelle dans le plan  $(x, y)$  de la figure (1.10c) à l'instant initial.

## 5.2.2 Mesure de la fréquence de résonance de la cavité

### Principe de la mesure

En régime de fonctionnement standard, les atomes sont excités par un champ oscillant  $B_0(\omega) \cos(\omega_0 t + \varphi)$  à la pulsation  $\omega$  voisine de la pulsation de résonance atomique,  $\omega_{at}$ . Afin de déterminer la résonance de la cavité, nous avons utilisé la méthode introduite par K. Gibble et C. Fertig sur leur fontaine [144]. Cette méthode consiste à injecter dans la cavité micro-onde, en plus du champ à la pulsation  $\omega$ , une bande latérale, de pulsation  $\omega'$ . La pulsation de cette bande latérale a été volontairement désaccordée de la résonance atomique de sorte que son désaccord soit grand devant la pulsation de Rabi du champ à la pulsation  $\omega$  :  $|\omega' - \omega_{at}| \gg \Omega_0$ . De plus, l'amplitude du champ de cette bande latérale a été choisie de sorte que la pulsation de Rabi correspondante,  $\Omega'$ , soit elle aussi très petite devant ce désaccord :  $|\omega' - \omega_{at}| \gg \Omega'$ . Cette bande latérale n'induit donc pas de transitions entre les états hyperfins. En pratique,  $\Omega_0/2\pi \simeq 14$  Hz,  $\Omega'/2\pi = \Omega_e/2\pi \times \mathcal{R}(\omega') \lesssim 14$  kHz, et  $|\omega' - \omega_{at}|/2\pi \gtrsim 300$  kHz.  $\Omega_e$  représente la pulsation de Rabi injectée en entrée de cavité micro-onde, et  $\mathcal{R}(\omega')$  la réponse en amplitude de la cavité, à la pulsation injectée.  $\mathcal{R}(\omega') = |\Omega'(\omega')/\Omega_e|$  est représentée sur la figure (4.26). C'est quasiment une lorentzienne d'amplitude 1. Dans ces conditions, la frange centrale de Ramsey est déplacée de la quantité

suivante :

$$\frac{\delta\nu_{\text{horl.}}}{\nu_{\text{at}}} = -\frac{\tau}{T} \frac{\Omega'^2}{\omega_{\text{at}}(\omega' - \omega_{\text{at}})} \quad (5.1)$$

L'expression de ce déplacement de fréquence a été démontrée par N. F. Ramsey en 1955 (cf. ([145])). Le cas particulier  $\omega' = -\omega \simeq -\omega_{\text{at}}$  et  $\Omega' = \Omega_0$  donne le déplacement dit de Bloch-Siegert, induit par la pulsation  $-\omega$  du champ  $B_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$ . L'effet de cette composante a en effet été négligée au § 1.3.1 lorsqu'on a effectué l'approximation de l'onde tournante. Dans notre cas, ce déplacement vaut  $\sim 1.5 \times 10^{-19}$  en valeur relative et est donc effectivement négligeable.

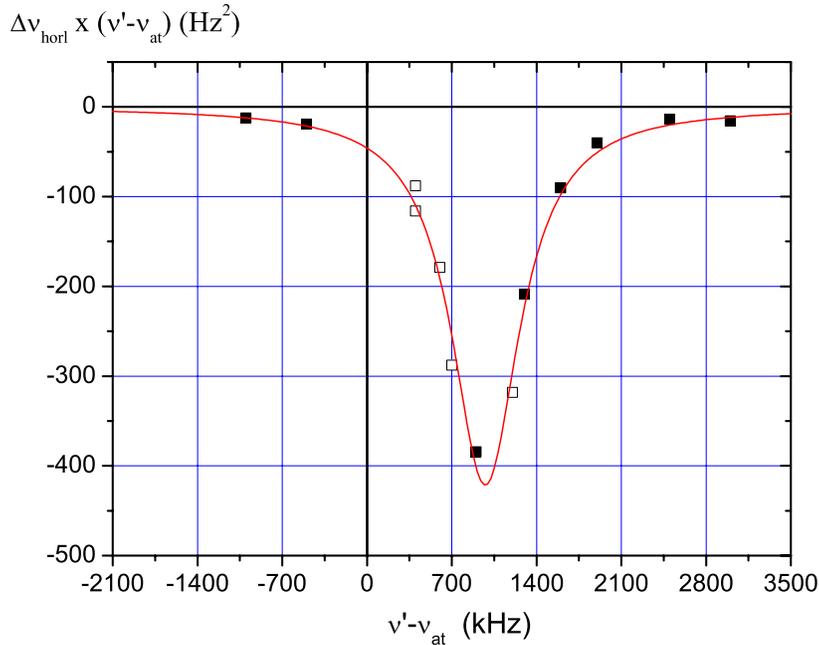


FIG. 5.2 – Mesure de la fréquence de résonance de la cavité Rb le 04/01/2000, à température ambiante. La fréquence de résonance de la cavité est alors à  $+977 \pm 11$  kHz de la résonance atomique, et le facteur de qualité  $Q_c$  est mesuré égal à  $9997 \pm 580$ . La courbe en trait plein représente la meilleure approximation non linéaire des points expérimentaux. Les carrés creux correspondent à une puissance de bande latérale injectée 10 fois plus faible que pour les carrés pleins, afin de respecter la condition  $|\omega' - \omega_{\text{at}}| \gg \Omega'$ . En abscisses,  $\nu' - \nu_{\text{at}}$  représente le désaccord de la bande latérale injectée par rapport à la résonance atomique.

Le déplacement de fréquence induit par la pulsation additionnelle  $\omega'$  vaut par-contre  $-5 \times 10^{-15}$  lorsque  $(\omega' - \omega_{\text{at}})/2\pi$  ne vaut plus que +400 kHz et que  $\Omega' = \Omega_0$ . Elle vaut  $-5 \times 10^{-13}$  lorsque  $\Omega' = 10\Omega_0$ , c'est à dire que la puissance injectée dans la bande latérale est 20 dB supérieure à la puissance de

la porteuse. Supposons que la cavité soit désaccordée elle aussi de +400 kHz par rapport à la résonance atomique ( $\mathcal{R}(\omega') = 1$ ), et que la stabilité de la fontaine soit de  $1.5 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$ . Pour obtenir 4 points de mesure à la résolution de  $10^{-14}$  (2% de l'effet), il suffit d'intégrer pendant une durée de seulement 900 s. Il faudra attendre un peu plus longtemps ou injecter plus de puissance sur la bande latérale si la cavité n'est pas désaccordée de 400 kHz, car alors  $\mathcal{R}(\omega') < 1$ . L'expression (5.1) se réécrit en effet :

$$\frac{\delta\nu_{horl.}}{\nu_{at}} = -\frac{\tau}{T} \frac{\Omega_e^2}{\omega_{at}(\omega' - \omega_{at})} \times \mathcal{R}^2(\omega') \quad (5.2)$$

Il suffit donc d'effectuer plusieurs mesures du déplacement de fréquence ci-dessus, pour différentes valeurs de  $\omega'$ , pour obtenir une courbe de  $\mathcal{R}^2(\omega') \propto \delta\nu_{horl.} \times (\omega' - \omega_{at})$ .

La figure (5.2) montre un exemple d'une telle mesure effectuée à température ambiante. On a représenté en ordonnées le produit  $\delta\nu_{horl.} \times (\omega' - \omega_{at})$ , qui est négatif, conformément à l'expression (5.1). La meilleure approximation lorentzienne des points expérimentaux donne pour paramètres  $Q_c \sim 10000$  et, à température ambiante,  $\nu_{cav} - \nu_{at} \simeq 1$  MHz. La fréquence de résonance est déterminée avec une incertitude de 10 kHz.

La figure (5.3) représente le schéma de la chaîne de mesure de la fréquence de résonance de la cavité. Les deux champs oscillants à  $\omega$  et  $\omega'$  sont superposés à travers un coupleur directionnel, et sont injectés dans la cavité. Les masses et les âmes des câbles coaxiaux en amont (côté chaînes de synthèses) et en aval (côté cavité) sont découplées afin de supprimer tout courant DC de fuite provenant de la chaîne synthèse. Le couplage micro-onde dans la cavité  $Rb$  est en effet constitué d'une boucle de couplage, et le courant DC (et fluctuant lentement) passant à travers cette boucle génère un champ magnétique qui perturbe les atomes.

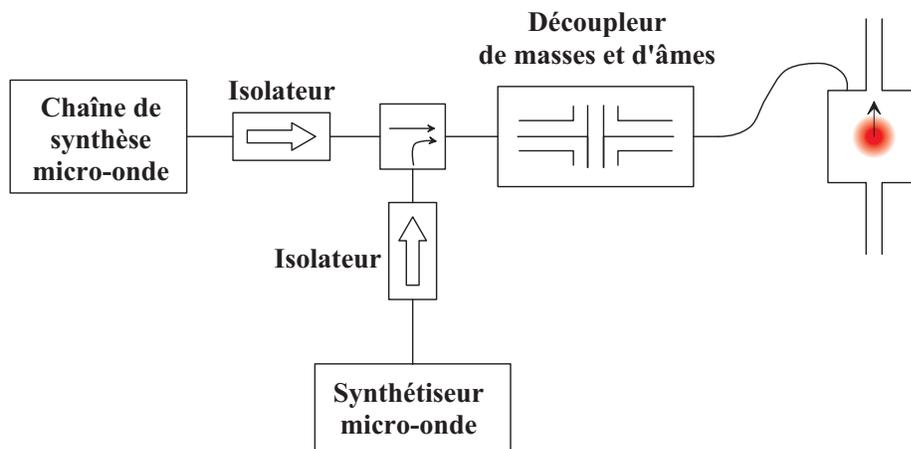


FIG. 5.3 – Chaîne de mesure de la fréquence de résonance de la cavité micro-onde.

### Recherche d'une éventuelle asymétrie de la courbe de résonance

Nous avons mentionné précédemment que l'incertitude sur le pointé du sommet de la résonance de la cavité est de 10 kHz. Cette incertitude est l'incertitude statistique rendue par l'algorithme de meilleure approximation lorentzienne de la dizaine de points expérimentaux constituant la mesure de la résonance de la cavité effectuée le 04/01/2000. Chaque mesure de la résonance de la cavité, effectuée par exemple pendant la période de mesure du "cavity pulling", comporte aussi, en moyenne, une dizaine de points de mesure répartis dans les "flancs" et dans les "ailes" de la résonance.

On verra plus loin que l'existence d'un biais sur cette mesure affecte la détermination du déplacement collisionnel. Un tel biais peut par exemple avoir pour origine la présence d'un autre mode de la cavité, non loin du mode résonant. Notons néanmoins que dans notre cas, le couplage du champ externe est fait à l'aide d'une boucle de couplage, et qu'on peut donc *a priori* rejeter l'existence d'un tel mode<sup>5</sup>. On peut toutefois imaginer un biais apporté par la présence d'un taux d'onde stationnaire non-nul dans le câble co-axial d'alimentation de la cavité, ce qui se traduirait par une pente non-nulle ajoutée à la réponse lorentzienne.

Afin de tester une telle éventualité, nous avons reporté tous les points de mesure des différentes déterminations de la résonance de la cavité sur un seul graphe. Ceci a été fait en recentrant chaque résonance autour de 0 Hz et en normalisant son amplitude à 1. Le facteur de qualité de la cavité  $Q$  est, lui, un paramètre invariant au cours du temps, et il est connu à mieux que 1%, par moyennage de toutes les valeurs de  $Q$  trouvées pour chaque mesure de résonance. Au total, ce sont donc plus de 200 points qui contribuent à la recherche d'une éventuelle asymétrie de la courbe de résonance. La figure (5.4) montre ces points et le résultat de la meilleure approximation lorentzienne centrée de ces points. Elle montre aussi les résidus obtenus par soustraction de cette lorentzienne. La meilleure approximation linéaire de ces résidus donne une pente telle que le sommet de la résonance est décentré de  $\sim -118 \pm 100$  Hz. On voit que même à  $3\sigma$  (droites en trait fins sur la figure (5.4b)), le décentrage du sommet de la résonance ne dépasse pas 500 Hz.

## 5.3 Détermination du nombre initial d'atomes lancés

### 5.3.1 Méthode par fluorescence du piège magnéto-optique

On peut se faire rapidement une idée du nombre d'atomes présents dans le piège magnéto-optique en mesurant le flux lumineux émis par fluorescence, à la fin de la phase de capture. Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure (5.5). Sous l'application des faisceaux de refroidissement, les atomes absorbent et réémettent de manière spontanée des photons de fluorescence sur

---

<sup>5</sup>Ceci ne sera pas le cas pour la cavité de l'horloge double *RbCs*, qui est couplée au champ externe au moyen de deux cavités latérales, elles-mêmes sous-couplées à l'extérieur. Le mode de la cavité principale est alors notablement perturbé par la présence des deux modes des cavités latérales.

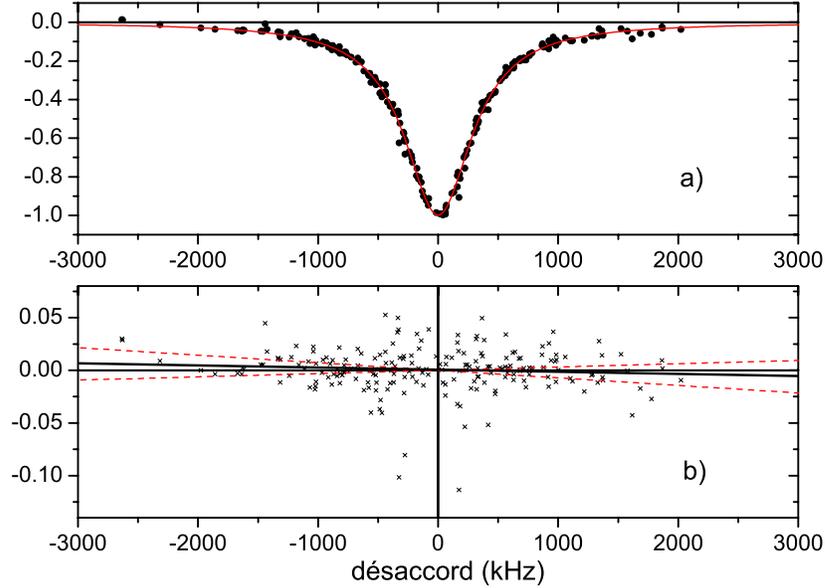


FIG. 5.4 – Test d’une éventuelle asymétrie de la résonance de la cavité. Tous les points de mesure des déterminations de résonance de cavité ont été reportés sur la figure a), après recentrage et normalisation en amplitude. Les résidus obtenus par meilleure approximation lorentzienne centrée sont reportés sur la figure b). La droite en trait plein épais représente la pente de la meilleure approximation linéaire de ces résidus. Elle correspond à un décentrage du sommet de la résonance de  $\sim -118 \pm 100$  Hz. En traits fins, les deux pentes obtenues à  $3\sigma$ . Le décentrage correspondant du sommet de la résonance est au maximum de 500 Hz. Un décentrage de 10 kHz est donc complètement exclus.

la transition cyclante  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ . Le taux d’émission spontanée est lié au désaccord optimal  $\delta \simeq -2.6\Gamma$  des faisceaux de refroidissement pendant la phase de capture, et est donné par :

$$\frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad (5.3)$$

où  $s$  est la saturation vue par chaque atome au centre des faisceaux de refroidissement :

$$s = s_0 \times \frac{1}{1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2}} \quad (5.4)$$

et où  $s_0 = 6 \times I/I_s$ .  $I_s$  désigne l’intensité de saturation,  $I$  l’intensité sur l’axe de chaque faisceau.  $I$  est liée à la puissance totale disponible dans le faisceau,  $P$ , et au "waist" du faisceau,  $w_0 = 13$  mm, par  $I = 2P/(\pi w_0^2)$ .  $\Gamma$  est la largeur naturelle de la transition. Le flux lumineux émis par atome est donné par :

$$F = h\nu \times \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \times C \quad (5.5)$$

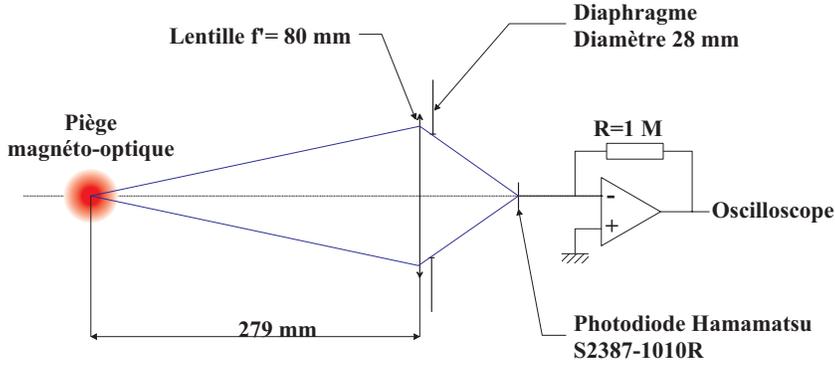


FIG. 5.5 – Dispositif de mesure du nombre d'atomes initial par fluorescence.

où  $\mathcal{C}$  est un coefficient sans dimension caractérisant la force moyenne de couplage atome-champ lumineux sur la transition considérée. Une fraction de ce flux lumineux est récoltée sur une photodiode au moyen d'une lentille, vue depuis le nuage d'atomes froids sous l'angle solide  $\Omega = 4\pi \times 6.3 \times 10^{-4}$  sr (on suppose ici que le rayonnement est isotrope). La photodiode a un rendement  $\eta = 0.485$  A/W, et le courant qu'elle génère est amplifié et converti en tension à travers une résistance  $R = 1$  M $\Omega$ . Le signal de fluorescence détecté est donc finalement :

$$V = N_{at} \times \eta R \frac{\Omega}{4\pi} h\nu \times \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \times \mathcal{C} \quad (5.6)$$

La détermination absolue du nombre d'atomes  $N_{at}$  *via* le signal de fluorescence est tributaire en fait de la connaissance du coefficient  $\mathcal{C}$ . Ce coefficient est lié aux coefficients de Clebsch-Gordan sur la transition  $|F = 2 \rightarrow F' = 3$ , à la polarisation de la lumière, au désaccord des faisceaux de refroidissement, aux phases relatives des différents faisceaux à l'endroit où l'atome est localisé, et à la profondeur des puits de potentiel lumineux. Le calcul du coefficient  $\mathcal{C}$  n'est donc pas simple. Il nécessite une modélisation complètement quantique des mécanismes de refroidissement laser, qui sort du cadre de ce travail.

Expérimentalement, on peut toutefois faire les constatations suivantes :

1. En supposant que  $\mathcal{C} = 1$  pour  $\delta = -2.7\Gamma$ , la mesure du nombre d'atomes par la formule (5.6) est en accord à 10% avec le nombre d'atomes déduit de l'aire de temps de vol et de la fraction d'atomes détectés, déterminée à l'aide de la modélisation Monte Carlo. Dit autrement, la confrontation de ces deux méthodes donne  $\mathcal{C} = 1.0 \pm 0.1$ , comme le montre la figure (5.6). Notons que  $\mathcal{C}$  vaut au maximum 1 par définition. Ce cas correspond à un couplage maximal des atomes avec la lumière, et les atomes sont localisés au fond des puits de potentiel. Dans notre cas, à défaut de savoir si on se trouve dans ce régime, il est au moins satisfaisant de trouver que  $\mathcal{C}$  n'est pas plus grand que 1.
2. Le calcul théorique de  $\mathcal{C}$  a été effectué par Y. Castin dans le cas d'un désaccord  $\delta = -5\Gamma$ , des polarisations  $\sigma_+ - \sigma_-$ , et des phases de  $\pi/3$  entre chaque paire de faisceaux de refroidissement. Dans ce cas on trouve  $\mathcal{C} \simeq 1$ . Afin de se rapprocher de ce cas, on a effectué la mesure du signal

de fluorescence pendant la phase de mélasse, où le désaccord valait  $\delta \simeq -6\Gamma$ . On trouve alors un signal de fluorescence qui, pour le même nombre d'atomes, est inférieur au signal de fluorescence effectué à  $\delta = -2.7\Gamma$  dans le rapport  $s/(1+s)$ , à mieux que 10%. Cette mesure tend donc à montrer que  $\mathcal{C} \simeq 1$  même pendant la phase de capture où  $\delta = -2.7\Gamma$ .

3. Le signal de fluorescence est une fonction quasi-linéaire du nombre d'atomes piégés, du moins dans notre gamme de travail ( $N_{at} < 5 \times 10^8$ ). Ceci a été vérifié en faisant varier le temps de chargement du piège magnéto-optique. Par conséquent, le signal de fluorescence est une information précieuse sur les fluctuations relatives du nombre d'atomes initial, liées à des fluctuations de puissance et de désaccord des faisceaux de refroidissement.

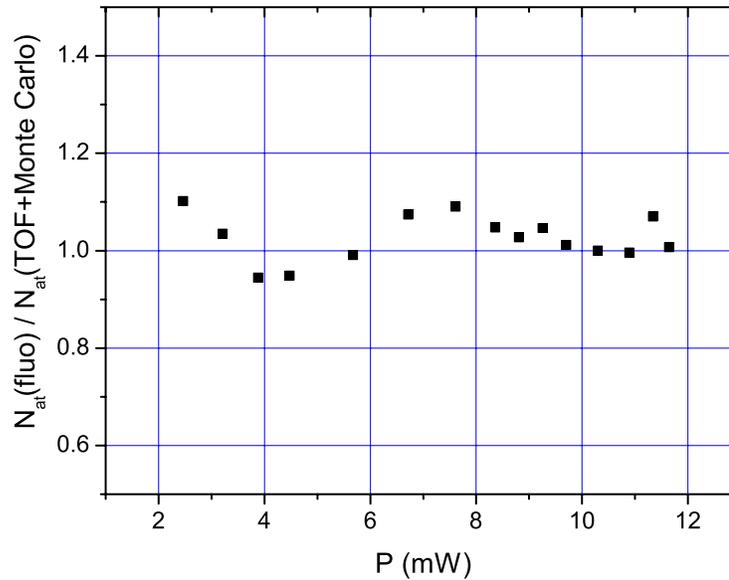


FIG. 5.6 – Rapport du nombre d'atomes initial déterminé par fluorescence, en prenant  $\mathcal{C} = 1$ , sur le nombre d'atomes initial déterminé à l'aide de l'aire de temps de vol et de la modélisation Monte Carlo. En abscisses, on a fait varier la puissance  $P$  des faisceaux laser de refroidissement.

### 5.3.2 Méthode par absorption à travers le nuage d'atomes froids initial

Afin de connaître avec plus de certitude le nombre d'atomes présents dans le nuage juste après le lancement, nous avons utilisé une méthode d'absorption à travers la zone de capture. Cette méthode nous a permis de déterminer aussi la forme de la distribution spatiale et ses paramètres caractéristiques. Les paragraphes suivants décrivent en détail le montage expérimental, le principe de la mesure et les précautions à prendre afin de rester dans un régime linéaire

d'absorption. Les mesures effectuées sont ensuite comparées à une simulation numérique de type Monte Carlo ainsi qu'aux profils d'imagerie par caméra CCD présentés au chapitre 4. Cette comparaison permet de confirmer le type de distribution spatiale retenu dans ce chapitre pour la modélisation de l'évolution du nuage dans l'horloge, et de donner une seconde mesure, indépendante, du nombre d'atomes initial. On donne ensuite un bilan des incertitudes sur la détermination du nombre d'atomes lancés par cette méthode.

### Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure (5.7). Un faisceau laser collimaté, asservi sur la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  puis désaccordé vers le rouge d'une quantité  $\delta$ , éclaire la zone de capture. Il est centré sur le nuage d'atomes froids, et est allumé pendant 100 ms dès la fin de la phase de lancement. Pour cette expérience, le désaccord relatif des faisceaux montants et descendants est nul, de sorte que le nuage tombe sous l'effet de la gravité, dès l'extinction des faisceaux. De plus, le nuage d'atomes froids est dans un "bain" d'atomes en phase de capture, dont la dimension est comparable à celle des faisceaux de refroidissement, et qui constitue un fond peu dense d'atomes, mais qui absorbe lui aussi une partie du faisceau incident. Après avoir traversé la zone de capture, le faisceau est tronqué par un diaphragme de rayon  $R$ , et le flux transmis est focalisé sur une photodiode. Celle-ci détecte donc un éclaircissement, atténué par la présence des atomes, et intégré sur la surface du diaphragme.

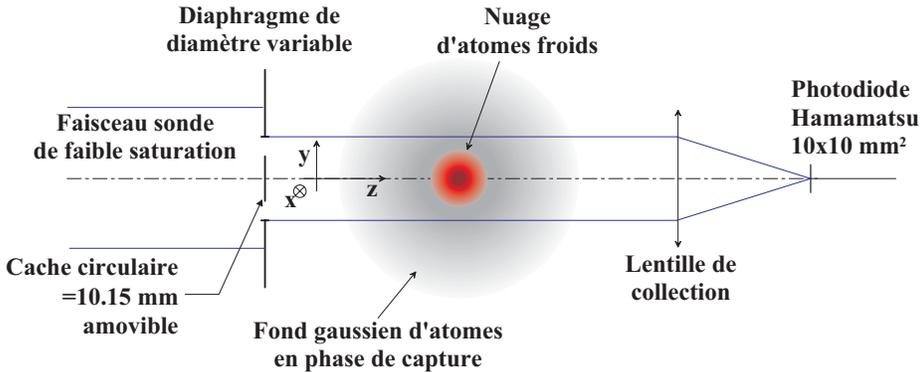


FIG. 5.7 – Dispositif de mesure du nombre d'atomes initial et de leur distribution spatiale, par la méthode d'absorption.

### Expression du signal d'absorption en fonction du nombre d'atomes

Notons  $I(x, y, z)$  l'éclaircissement dans un plan  $(x, y)$  perpendiculaire à la direction de propagation du faisceau sonde, à la cote  $z$  (cf. figure (5.7)), et  $E(x, y, z)$  son profil, avec  $E(0, 0, 0) = 1$  (c'est à dire au centre du faisceau et avant traversée du nuage).

$$I(x, y, z) = I_0 \times E(x, y, z) \quad (5.7)$$

La puissance diffusée par un atome situé en  $(x, y, z)$  est proportionnelle à l'éclairement en ce point, et s'écrit :

$$P_{diff} = \sigma(x, y, z) \times I(x, y, z) \quad (5.8)$$

où  $\sigma(x, y, z)$  est la section efficace de diffusion d'un atome. Elle dépend du désaccord  $\delta$  du faisceau sonde et de l'éclairement en  $(x, y, z)$  par :

$$\sigma(x, y, z) = \sigma_0 \times \frac{1}{1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2} + \frac{I(x, y, z)}{I_{sat}}} \quad (5.9)$$

où  $\Gamma$  est la largeur naturelle de la transition sondée, et  $I_{sat}$  est l'intensité de saturation<sup>6</sup>. En pratique, on est amené à choisir  $I_0/I_{sat} \ll 1$  afin de limiter les effets de pompage optique. La section efficace de diffusion ne dépend donc pas en pratique de la position  $(x, y, z)$ .

$\sigma_0$  est la section efficace de diffusion à résonance et à faible éclairement. Elle dépend du couplage des atomes avec la lumière. Ce couplage dépend des populations atomiques de chacun des sous-niveaux Zeeman, de la polarisation du faisceau sonde, et de la direction du champ magnétique local. Sous l'effet du faisceau sonde et du champ magnétique, les populations des différents sous-niveaux Zeeman évoluent au cours du temps (phénomène de pompage optique). La section efficace est alors une fonction évoluant dans le temps, ce qui se traduit par un régime transitoire sur le signal d'absorption et rend son interprétation difficile. Afin de limiter cet effet, on diminue l'éclairement du faisceau sonde jusqu'à un niveau de l'ordre de  $7 \times 10^{-5} \times I_{sat}$ . Le désaccord étant supérieur ou égal à  $3\Gamma$ , le taux d'émission spontanée par atome est de l'ordre de  $\Gamma/2 \times s \simeq 1/28 \text{ ms}^{-1}$ . Chaque atome a donc absorbé au plus 1 photon pendant les premières 30 ms du signal d'absorption, utiles à la mesure du nombre d'atomes. On a par ailleurs vérifié, par spectroscopie micro-onde, qu'à l'issue du refroidissement laser les sous-niveaux Zeeman de  $F = 2$  sont équilibreés à  $\sim 1\%$  environ. Dans ces conditions, on a vérifié que le couplage atome-lumière ne dépend pas de la polarisation du faisceau sonde. Le coefficient de couplage atome-lumière est alors donné par la moyenne des carrés des coefficients de Clebsch-Gordan sur la transition  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  :  $C = 7/15 \simeq 0.4667$ . On a alors :

$$\sigma_0 = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \times C \quad (5.10)$$

où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde du laser d'absorption. On a  $\sigma_0 = 1.35 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ . Avec les hypothèses précédentes, on peut déterminer l'évolution de l'éclairement avec  $z$  en écrivant que la variation infinitésimale d'éclairement entre  $z$  et  $z + dz$  est égale à l'éclairement qui a été absorbé puis diffusé par les atomes dans la tranche d'épaisseur  $dz$  :

$$I(x, y, z + dz, t) - I(x, y, z, t) = -\sigma N_{at} p_r(x, y, z, t) I(x, y, z, t) \quad (5.11)$$

<sup>6</sup> Le désaccord  $\delta$  s'écrit en fait  $\delta_0 + m \sin(2\pi f_m t)$ , où  $\delta_0$  est le désaccord moyen du faisceau sonde,  $f_m$  est la fréquence de modulation du laser sonde, de l'ordre de 100 kHz, et  $m$  est l'amplitude de modulation ( $m \simeq 0.3\Gamma$ ). Pour simplifier les notations,  $\sigma$  désigne donc en fait la valeur moyenne temporelle de la section efficace de diffusion. Près de résonance, la modulation du laser devient prédominante devant  $\delta_0$ .

où  $p_r(x, y, z, t)$  désigne la loi de probabilité de distribution spatiale des atomes, telle que :

$$\int \int \int_{espace} p(x, y, z, t) dx dy dz = 1 \quad (5.12)$$

Cette distribution spatiale dépend du temps parce que les atomes ont une distribution de vitesses (de type  $\mathcal{L}^b$ ) et que le nuage tombe sous l'effet de la gravité. L'expression (5.11) s'intègre en :

$$E(x, y, z, t) = E(x, y, 0) \times \exp \left[ - \int_0^z \sigma N_{at} p_r(x, y, z', t) dz' \right] \quad (5.13)$$

et la puissance détectée à travers le diaphragme de surface  $S$  est :

$$P(t) = P_S \times \frac{1}{S_{eff}} \times \int \int_S E(x, y, 0) \exp \left[ - \sigma N_{at} \int p_r(x, y, z', t) dz' \right] dx dy \quad (5.14)$$

où  $P_S$  désigne la puissance transmise par la diaphragme en l'absence d'atomes, et où  $S_{eff}$  désigne la surface effective, c'est à dire tenant compte du profil non homogène du faisceau sonde :

$$S_{eff} = \int \int_S E(x, y, 0) dx dy \quad (5.15)$$

Le signal d'absorption est la variation relative de puissance détectée, avec et sans atomes :

$$\frac{\Delta P}{P_S} = \frac{P - P_S}{P_S} = \frac{1}{S_{eff}} \int \int_S E(x, y, 0) \exp \left[ - \sigma N_{at} \int p_r(x, y, z', t) dz' \right] dx dy - 1 \quad (5.16)$$

Pour un nuage de profil gaussien :

$$p_r(x, y, z, t) = \frac{1}{(\sigma_r \sqrt{2\pi})^3} \exp \left( - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma_r^2} \right) \quad (5.17)$$

d'écart type  $\sigma_r = 1.4$  mm, avec  $N_{at} = 3 \times 10^8$  atomes, l'épaisseur optique (terme entre crochets) sur l'axe du faisceau sonde vaut  $3.3/(1 + 4\delta^2/\Gamma^2)$ . Dans cette configuration il faut donc se désaccorder de résonance pour pouvoir linéariser l'exponentielle. La linéarisabilité sur l'axe implique d'ailleurs la linéarisabilité en tout point du diaphragme, condition nécessaire pour que le signal d'absorption soit proportionnel au nombre d'atomes. Lorsqu'on est dans ce régime, on a :

$$\frac{\Delta P}{P_S} = - \frac{\sigma N_{at}}{S_{eff}} \int \int_S E(x, y, 0) \times \int p_r(x, y, z', t) dz' dx dy \quad (5.18)$$

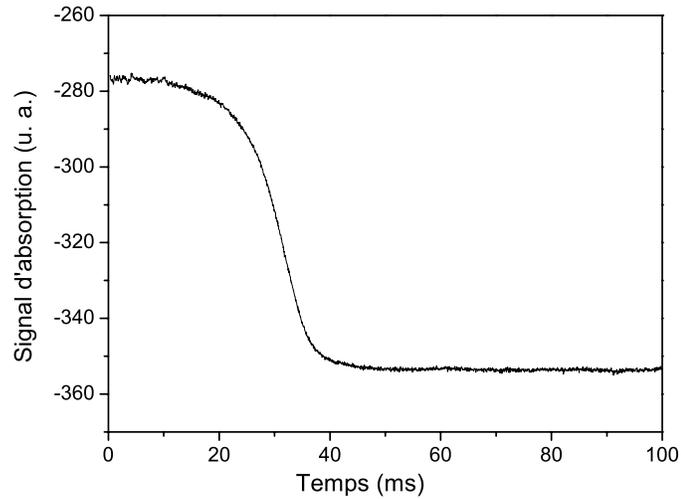


FIG. 5.8 – Exemple de signal d'absorption en fonction du temps, dans le régime linéaire en nombre d'atomes. La ligne de base, pour  $t \gtrsim 50$  ms, donne la puissance transmise sans atomes, et la marche de signal, entre  $t = 0$  ms et  $t = 50$  ms donne la puissance absorbée par les atomes. A l'instant  $t = 0$  ms, les faisceaux de refroidissement sont complètement éteints, et le nuage tombe sous l'effet de la pesanteur.

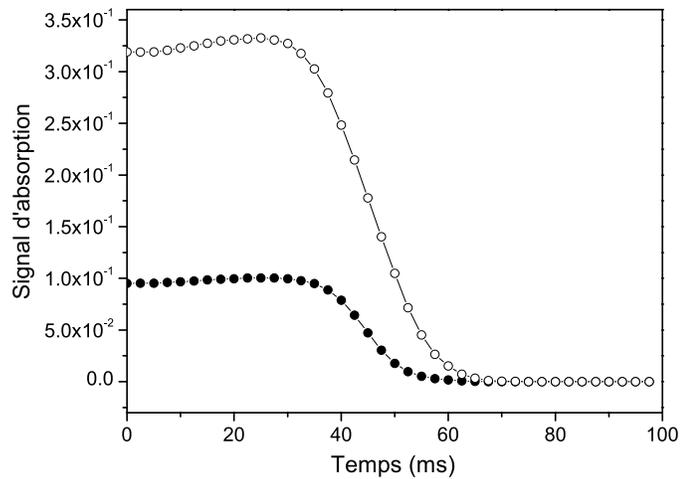


FIG. 5.9 – Exemple de signal d'absorption en fonction du temps, dans le régime non-linéaire en nombre d'atomes. Le diaphragme a pour diamètre 20 mm. On a  $2.9 \times 10^9$  atomes dans une distribution gaussienne de  $\sigma_r = 1.4$  mm, superposés à un fond large et gaussien de  $6 \times 10^8$  atomes en phase de capture. Le désaccord du faisceau sonde est de  $-1.5\Gamma$  (ronds pleins) ou à résonance (ronds creux).

La figure (5.8) montre un signal typique d'absorption en fonction du temps, dans un régime où on peut linéariser l'exponentielle. L'éclairement sur l'axe valait alors  $I_0 \simeq 7 \times 10^{-5} \times I_{sat}$  et le désaccord  $\delta = -3\Gamma$ .

La figure (5.9) montre un signal d'absorption obtenu à l'aide d'une simulation numérique décrite plus loin dans le cas où on travaille trop près de résonance avec trop d'atomes : pour  $t \leq 30$  ms, on est dans un régime non-linéaire, car l'épaisseur optique est trop grande au centre du nuage. Le signal d'absorption commence donc par croître quadratiquement au lieu de décroître.

### Dépendance en désaccord et en nombre d'atomes

Ce paragraphe permet de voir plus précisément l'impact du désaccord et du nombre d'atomes sur le calcul du nombre d'atomes, dans le cas d'une distribution spatiale gaussienne  $\sigma_r = 1.4$  mm, et pour un diaphragme de diamètre 24 mm, correspondant à l'ouverture maximale de notre faisceau sonde. L'éclairement est pour le moment supposé homogène sur la surface du diaphragme, et l'éclairement sur l'axe est très faible devant  $I_{sat}$ . Le signal d'absorption est calculé sans linéarisation. Les figures (5.10) et (5.11) représentent l'erreur que l'on commettrait sur le nombre d'atomes si on le calculait à partir de ce signal d'absorption en croyant être dans le régime linéaire.

On voit que pour  $N_{at} = 3 \times 10^8$  atomes, on ne sous-estime  $N_{at}$  que de  $\sim 2\%$  en se désaccordant de  $3\Gamma$ , alors qu'on sous-estime  $N_{at}$  d'un facteur  $1/0.6 \simeq 1.67$  en se plaçant à résonance. A désaccord fixe, cette erreur croît avec le nombre d'atomes, et à nombre d'atomes trop élevé, le signal d'absorption n'est plus sensible au nombre d'atomes parce que le nuage se comporte comme un cache opaque.

### Détermination du nombre d'atomes et de la distribution spatiale : exploitation des mesures en régime linéaire, simulation Monte Carlo et confrontation avec la méthode par imagerie CCD

On voit sur l'expression (5.18) que le nombre d'atomes déterminé à partir du signal d'absorption est lié au profil de distribution spatiale. Aussi, ces deux paramètres,  $N_{at}$  et  $p_r(x, y, z, t)$  doivent ils être déterminés simultanément. Afin d'être sensible à la distribution spatiale, nous avons mesuré l'amplitude du signal d'absorption pour plusieurs tailles de diaphragmes, dans le régime linéaire, et nous avons comparé les résultats de mesure à ceux d'une simulation numérique Monte Carlo. Le principe de la simulation est le même que celui décrit précédemment (cf. § 4.3), mais il est simplifié dans la mesure où les atomes ne sont pas lancés dans la fontaine virtuelle. La simulation permet de tenir compte de la non-homogénéité du faisceau sonde, de son désaccord et de son éclairement au centre,  $I_0$ , et de la distribution de vitesses réelle des atomes, mesurée conjointement aux mesures d'absorption. Le profil transverse d'éclairement du faisceau sonde a été mesuré en l'absence d'atomes en faisant varier le diamètre du diaphragme (cf. figure (5.12)). La simulation numérique permet de calculer le signal d'absorption et son évolution temporelle pour différents types de distributions spatiales. Les résultats expérimentaux du signal d'absorption en fonction du diamètre du diaphragme sont rapportés sur la figure (5.13) et on a représenté sur la même figure les résultats obtenus pour les mêmes valeurs de diamètre par la simulation numérique. Chaque point de mesure est entaché d'une incertitude

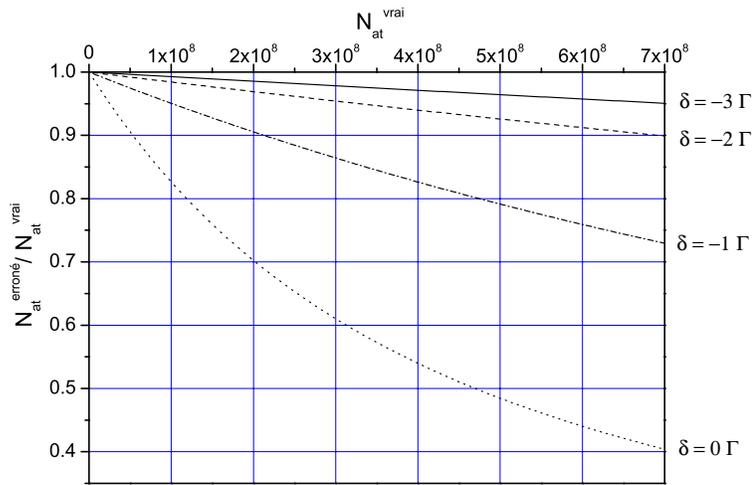


FIG. 5.10 – Calcul de l'erreur commise sur le nombre d'atomes  $N_{at}$  présents dans le nuage, en fonction de  $N_{at}$ , et pour différents désaccords du faisceau sonde. On a calculé cette erreur en déterminant le signal d'absorption effectivement détecté avec  $N_{at}$  atomes dans le nuage, à l'instant  $t = 0$  ms, et en calculant le nombre d'atomes qu'on obtiendrait à partir de ce signal si on était dans le régime linéaire. La distribution spatiale est une gaussienne avec  $\sigma_r = 1.4$  mm. Le diaphragme a un diamètre de 24 mm.

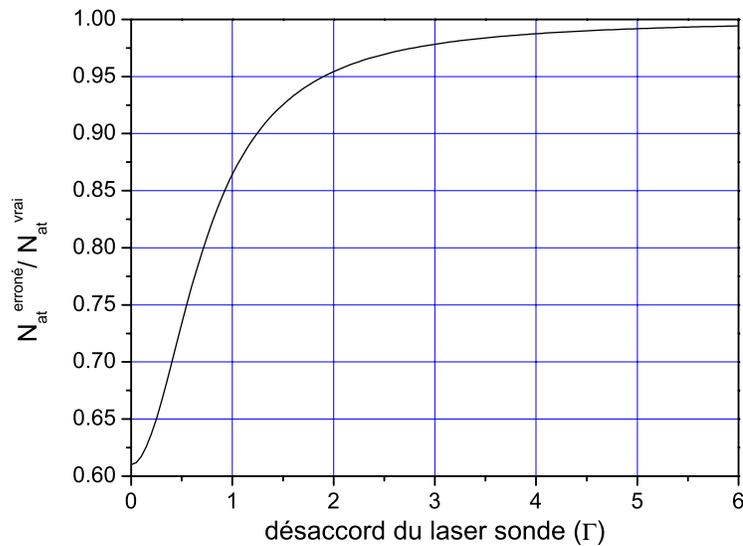


FIG. 5.11 – Calcul de l'erreur commise sur le nombre d'atomes  $N_{at}$  présents dans le nuage, en fonction du désaccord du faisceau sonde. On a pris  $N_{at} = 3 \times 10^8$ . Les autres paramètres sont ceux de la figure (5.10).

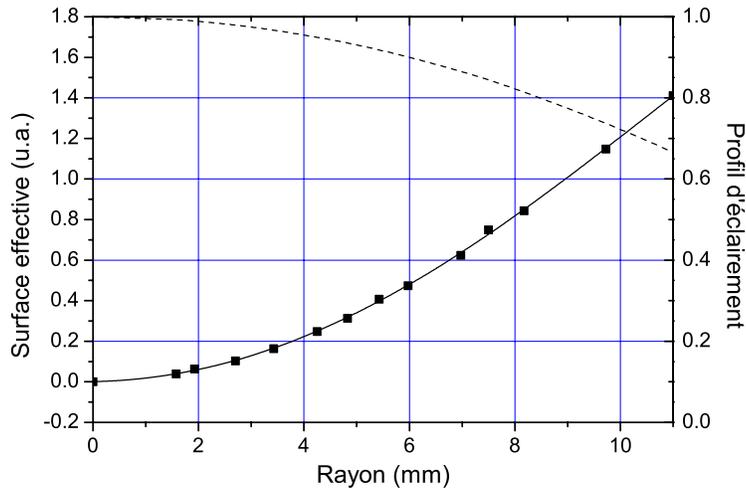


FIG. 5.12 – Mesures de puissance du faisceau d'absorption à travers un diaphragme de diamètre variable, en l'absence d'atomes. En abscisses, le rayon  $R$  du diaphragme. En ordonnées, les mesures de puissance, en unités arbitraires. A un facteur près, c'est la surface effective,  $S_{eff}(R)$ . De la dérivée de cette courbe expérimentale on déduit le profil d'éclairement du faisceau sonde (tirets).

relative de l'ordre de 1% qui résulte du bruit de la chaîne de détection, d'amplification, et de numérisation du signal. Les fluctuations de la ligne de base du signal d'absorption sont rejetées par enregistrement simultané du signal d'absorption et d'une partie du faisceau sonde incident. Les paramètres de la distribution de positions et le nombre d'atomes sont laissés comme paramètres libres, et on cherche à ajuster les résultats de la simulation aux résultats expérimentaux par la méthode des moindres carrés pondérés par la barre d'erreur expérimentale.

On a retenu deux types de distributions de positions à l'issue de cette comparaison.

D'une part, une distribution de type  $\mathcal{L}^a(r) = 1/(1+r^2/r_c^2)^a$ , avec  $N_{at} = 3.5 \times 10^8$  atomes,  $r_c = 2$  mm et  $a = 2.5$ .

D'autre part, une distribution constituée de la superposition de deux distributions gaussiennes :

- l'une étant constituée par un pic d'atomes froids ( $N_{at} = 2.9 \times 10^8$ ), d'écart type  $\sigma_r = 1.4$  mm ;
- l'autre étant constituée par un fond large d'atomes en phase de capture ( $N_{at} = 6 \times 10^7$ ), d'écart type  $\sigma = 6.5$  mm égal à la moitié du waist des faisceaux de refroidissement.

Ces deux types de distributions donnent des résultats équivalents en terme d'ajustement des moindres carrés sur les points expérimentaux. Dans le deuxième cas, seuls les atomes du pic central sont effectivement lancés dans l'horloge et participent au "cavity pulling" et au déplacement collisionnel. Les fractions d'atomes passant dans la cavité et la densité moyenne effective par atome

lancé ont été calculées dans chaque cas. Les résultats en terme de nombre total d'atomes présents dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage, et en terme de densité moyenne effective totale sont comparables à quelques %. Les paramètres de ces distributions de position, ainsi que le nombre d'atomes, sont déterminés avec une incertitude très faible de l'ordre de quelques %. L'intervalle de confiance de ces paramètres, déterminé par la condition  $\chi^2 - \chi_{min}^2 = 3.53$  est en effet très restreint.

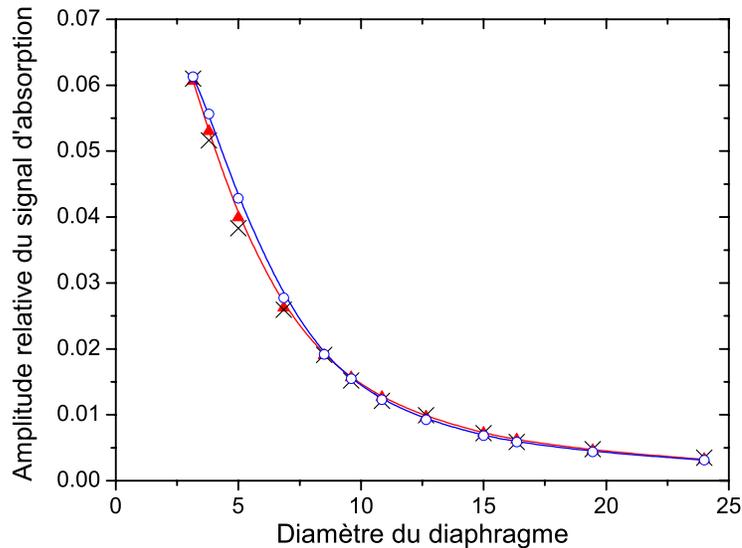


FIG. 5.13 – Récapitulatif des mesures d'absorption en fonction du diamètre du diaphragme. Les points expérimentaux (croix) sont comparés aux résultats de la simulation Monte Carlo pour une distribution spatiale de type  $\mathcal{L}^a$  (triangles) avec  $a = 2.5$ ,  $r_c = 2$  mm et  $N_{at} = 3.5 \times 10^8$  atomes ; et pour une distribution spatiale gaussienne avec  $\sigma_r = 1.4$  mm,  $N_{at} = 2.9 \times 10^8$  atomes superposée à un fond large et gaussien contenant  $6 \times 10^7$  atomes.

Afin de discriminer entre les deux types de distributions spatiales, nous avons testé le nombre d'atomes présents dans les ailes de la distribution, à l'exclusion des atomes présents près du centre. Nous avons disposé un cache opaque de diamètre 10.15 mm au centre du faisceau d'absorption, et nous avons effectué la mesure par absorption avec les mêmes paramètres de désaccord et de saturation que précédemment. Le signal d'absorption correspond alors, à l'instant  $t = 0$  ms, au flux absorbé par les atomes vus à travers une couronne de diamètre intérieur 10.15 mm et de diamètre extérieur 24 mm. Quelques dizaines de millisecondes plus tard, on observe, à travers cette couronne, le pic central d'atomes froids, qui a évolué sous l'effet de la gravité. Le signal observé est reproduit sur la figure (5.14). L'amplitude du signal d'absorption à l'instant  $t = 0$  ms est déterminée avec une incertitude relative de 5%. La simulation numérique permet de reproduire cette expérience pour les deux types de distributions évoquées précédemment. Elle conduit quasiment aux mêmes résultats pour les deux dis-

tributions, et ces résultats se comparent au résultat expérimental à mieux que 1%. La figure (5.15) représente les résultats de la simulation numérique pour cette deuxième expérience, pour les deux types de distributions spatiales. Cette deuxième expérience ne permet donc pas de discriminer entre les deux types de distributions.

Enfin, quel serait le profil obtenu sur la caméra CCD si la distribution spatiale était effectivement de type  $\mathcal{L}^a$ ? On obtient ce profil par intégration de la distribution spatiale selon la direction d'observation de la CCD. Ce profil serait donc de type  $\mathcal{L}^{a-1/2}$ . La meilleure approximation gaussienne de ce type de profil donne alors  $\sigma_r = 1.2$  mm qui n'est pas incompatible avec le profil effectué à la caméra CCD. On trouve en effet, par la caméra CCD, que  $\sigma_r = 1.4 \pm 0.1$  mm, et il faut garder en mémoire que le nuage présente une ellipticité verticale assez marquée, et que les profils CCD n'ont pas pu être effectués dans la direction perpendiculaire au faisceau d'absorption.

L'indétermination sur le type de distribution spatiale reste donc entière. Qu'on le décrive par une loi de type  $\mathcal{L}^a$  ou par une gaussienne superposée à un fond large et gaussien, il est cependant acquis qu'environ  $1/6^e$  des atomes se trouve à l'extérieur d'une sphère de diamètre 10.15 mm. Ces atomes ne passeront pas l'entrée de la cavité et ne contribueront pas au "cavity pulling" et au déplacement collisionnel. Dans les deux cas, ces deux effets sont inchangés. Dans la suite, lorsqu'on traitera les données expérimentales afin de déterminer ces effets, on utilisera donc uniquement le pic central et gaussien comme distribution de positions initiales.

### 5.3.3 Incertitudes sur la taille du nuage atomique et sur le nombre initial d'atomes lancés

L'incertitude sur le nombre d'atomes lancés, par la méthode d'absorption, résulte des incertitudes rapportées dans le tableau (5.1). Elle est liée en grande partie à l'incertitude sur le désaccord du faisceau sonde. On mesure celui-ci en enregistrant simultanément la raie d'absorption de ce laser à travers un jet collimaté d'atomes perpendiculaire au faisceau laser, et le signal d'erreur de l'asservissement de ce laser. On en déduit la position du point d'asservissement avec une incertitude de 640 kHz, soit  $\sim 0.1\Gamma$ . Cette incertitude induit une incertitude relative sur la section efficace de diffusion et donc sur le nombre d'atomes, de  $7 \times 10^{-2}$  (à  $-3\Gamma$ ).

L'incertitude sur le coefficient de couplage atome-lumière,  $\mathcal{C}$ , est de  $2 \times 10^{-2}$  : elle a été mesurée d'une part en s'assurant que les sous-niveaux Zeeman de  $|F = 2\rangle$  étaient effectivement équipés à l'issue du refroidissement, par spectroscopie micro-onde; et d'autre part en changeant la polarisation du faisceau sonde et en notant les fluctuations du signal d'absorption, afin de tester l'influence du faisceau sonde sur les populations de ces niveaux.

L'incertitude liée au profil d'éclairement est de l'ordre de 3% : elle a été évaluée en comparant les signaux d'absorption simulés avec un profil d'éclairement gaussien et avec un profil plat.

L'incertitude liée aux paramètres de la distribution spatiale du nuage est de l'ordre de  $2 \times 10^{-2}$ , et est déduite de l'intervalle de confiance de l'ajustement par les moindres carrés pondérés décrit précédemment.

L'incertitude de lecture du signal d'absorption est de l'ordre de 2.7% : elle est évaluée en prenant le pic à pic des fluctuations du signal.

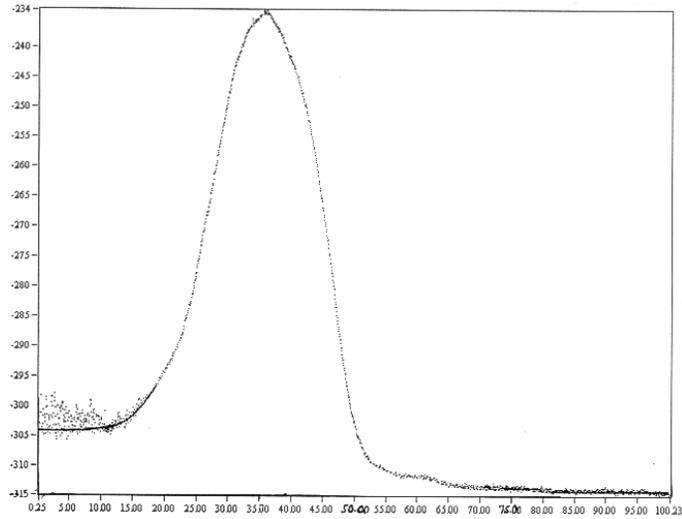


FIG. 5.14 – Signal d'absorption expérimental à travers une couronne de diamètre intérieur 10.15 mm et de diamètre extérieur 24 mm. En abscisses, le temps, en millisecondes. Le bruit excédentaire pour  $t \leq 10$  ms est dû aux vibrations causées par la fermeture d'un interrupteur mécanique, qui coupe les faisceaux de refroidissement. On a vérifié que sans ces vibrations, la courbe s'extrapole comme indiqué sur le graphe. Le signal d'absorption, quasi constant pour  $t \leq 10$  ms, vaut  $4 \times 10^{-4}$ . Le rapport du pic ( $t \simeq 40$  ms) à cette valeur vaut 7.8.

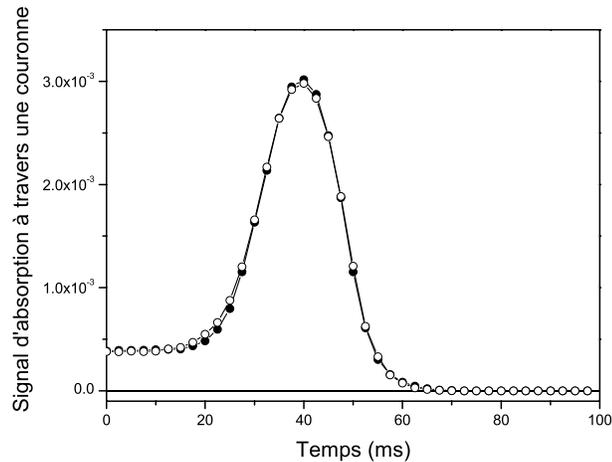


FIG. 5.15 – Signal d'absorption simulé à travers une couronne de diamètre intérieur 10.15 mm et de diamètre extérieur 24 mm. La distribution spatiale est de type  $\mathcal{L}^a$  (ronds creux) ou de type gaussienne avec fond large (ronds pleins). Les paramètres sont ceux qui optimisent l'expérience d'absorption à l'intérieur d'un diaphragme de diamètre variable. Pour les deux types de distributions de position, le signal d'absorption vaut  $\sim 3.85 \times 10^{-4}$ . Le rapport du signal au maximum ( $t \simeq 40$  ms) et du signal à  $t = 0$  ms est lui aussi significatif du rapport des nombres d'atomes près du centre et dans les ailes. Il coïncide à quelques % avec la mesure expérimentale.

Contribution	Méthode d'évaluation	Incertitude (%)
Désaccord du laser sonde	jet thermique	7
Coefficient de Clebsch-Gordan	polarisation du faisceau sonde et spectroscopie micro-onde	2
Profil d'éclairement	simulation numérique avec profil uniforme	3
Paramètres de la distribution spatiale	ajustement par les moindres carrés	2
Lecture des signaux	pic à pic fluctuations	2.7
$\delta N_{at}$	<b>somme quadratique</b>	<b>8.5</b>

TAB. 5.1 – Bilan d'incertitudes sur la détermination du nombre initial d'atomes lancés, par la méthode d'absorption.

Finalement, le nombre d'atomes  $N_{at}$  lancé est déterminé avec une incertitude relative de 8.5% par la méthode d'absorption.

La taille caractéristique de la partie centrale du nuage gaussien,  $\sigma_r$ , est déterminée avec une incertitude relative de l'ordre de 1% par la méthode d'ajustement par les moindres carrés pondérés. Mais c'est l'anisotropie du nuage qui apporte la plus grande incertitude. On a vu que la méthode par imagerie CCD permet d'observer une ellipticité verticale de l'ordre de 0.1 mm, qui représente  $\sim 8\%$  la valeur de  $\sigma_r^{moyen}$ . On prendra cette valeur de 8% pour incertitude relative sur la taille initiale du nuage. C'est cette valeur qui a été prise dans le chapitre 4 pour calculer l'incertitude sur les grandeurs telles que la densité moyenne ou la fraction d'atomes en cavité.

## 5.4 Détermination du nombre d'atomes détectés

### 5.4.1 Calcul direct de la détectivité du système de détection

Les paragraphes suivants ont pour but de calculer la détectivité du système de détection, c'est à dire l'aire de temps de vol par atome passant dans la fenêtre de détection.

#### Efficacité de collection

Sur la figure 3.11, le demi-angle d'ouverture du système de collection est  $\alpha = 19.2^\circ$ . En supposant que le rayonnement de fluorescence émis par la source d'atomes froids est isotrope, l'efficacité de collection est simplement donnée par la fraction d'angle solide sous lequel la source voit la pupille d'entrée

$$\frac{\Omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\alpha 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) = 2.77 \times 10^{-2}$$

En pratique, plusieurs facteurs de correction viennent dégrader cette efficacité théorique.

D'abord, la transmission des optiques de collection et du hublot de séparation air/vide ne vaut pas 1. Les lentilles sont traitées anti-reflet large bande (traitement Melles Griot HEBBAR /077) et le coefficient de réflexion résiduel à incidence normale vaut au maximum 1%. Les hublots de la détection sont traités

anti-reflet double couche centré à 852 nm, et le coefficient de réflexion résiduel par face est au maximum de 2% à 780 nm.

Ensuite, l'efficacité de collection varie de 3% lorsqu'on déplace la source sur l'axe du système de collection sur un intervalle de 1 cm centré sur la pré-image de la photodiode par les deux lentilles. La figure (5.16) montre les mesures d'efficacité de collection effectuées sur le système de collection (sans le hublot), en prenant pour source un carré de papier diffusant (papier calque) de 1 cm×1 cm, éclairé par un faisceau de diode laser collimatée à 780 nm.  $x$  représente le déplacement relatif de la source et du système de collection.

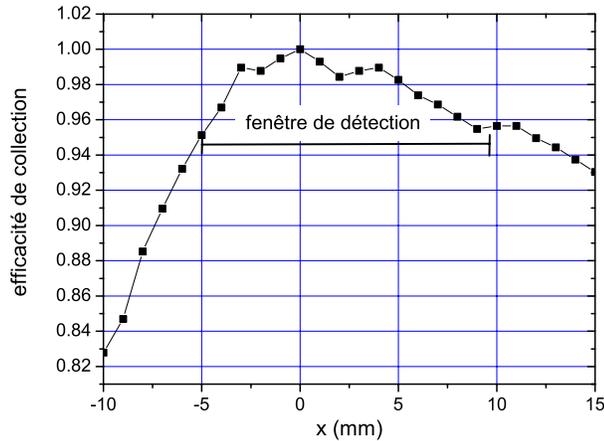


FIG. 5.16 – Mesure de l'efficacité de collection du système de détection, en fonction du déplacement relatif longitudinal de la source et du système de collection.

En comparant les flux lumineux détectés avec et sans lentilles, le montage précédent a permis de mesurer une efficacité de collection de  $2.33 \times 10^{-2}$ . Ceci suppose que le papier diffusant utilisé comme source se comporte comme une source isotrope. En réalité, son indicatrice d'intensité est plus proche de celle d'une source lambertienne, c'est à dire de la forme  $L \times \cos \theta$ . Il faut donc diviser le résultat précédent par le facteur de correction

$$\frac{\pi \sin^2 \alpha}{2\pi(1 - \cos \alpha)} = 0.97$$

En tenant compte de la transmission des lentilles, on trouve une efficacité de collection sans hublots en accord à 10% avec l'efficacité théorique calculée ci-dessus.

Finalement, en tenant compte de la transmission du hublot et des lentilles, de l'indicatrice d'intensité lambertienne du calque de calibration, et de la variation de l'efficacité de collection avec la profondeur de champ, l'efficacité de collection vaut  $\eta = 2.31 \times 10^{-2}$  avec une incertitude estimée à 10%.

### Facteur de correction d'émission dipolaire

Le rayonnement émis par les atomes froids n'est pas isotrope. La section efficace différentielle de diffusion, qui caractérise le nombre de photons émis par unité de temps dans un angle solide unité, dans la direction  $(\theta, \varphi)$  et pour un éclairement incident de  $1 \text{ photon.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ , est donnée par [146], p.270 :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(\vec{k}_L, \vec{\varepsilon}_L \rightarrow \vec{k}_d, \vec{\varepsilon}_d) = N_{at} \times \frac{9c^2}{16\omega_{at}^2} \frac{\Gamma^2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} |\vec{\varepsilon}_L^\dagger \cdot \vec{\varepsilon}_d|^2 \quad (5.19)$$

où  $\vec{k}_L$  et  $\vec{k}_d$  sont les vecteurs d'onde des photons incidents et diffusés,  $\vec{\varepsilon}_L$  et  $\vec{\varepsilon}_d$  sont leurs vecteurs de polarisation,  $\delta = \omega_L - \omega_A$  est le désaccord à résonance du faisceau de détection incident, et  $N_{at}$  est le nombre d'atomes présents dans la détection. Cette expression suppose qu'on néglige les effets de diffusion multiple, qu'il n'y a pas de cohérence entre les ondes diffusées par les différents atomes du nuage, et que la densité est suffisamment faible pour négliger la nature de la statistique (bosonique ou fermionique) des atomes (toutes conditions largement vérifiées dans notre cas). En écrivant que le vecteur de la polarisation  $\sigma_+$  du laser

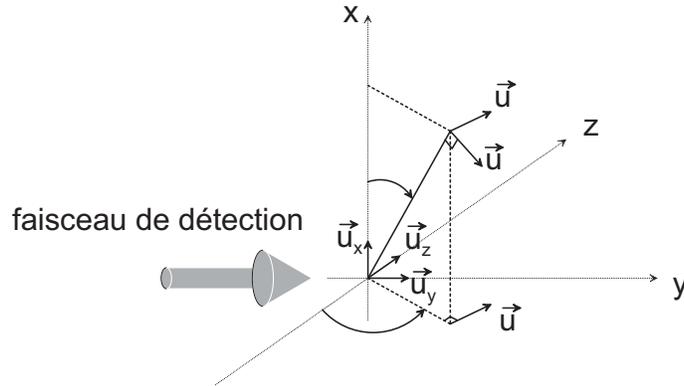


FIG. 5.17 – Définition des vecteurs unitaires et angles  $\varphi$  et  $\theta$  pour le calcul de la section efficace de diffusion dans la détection.

de détection est  $\vec{\varepsilon}_L = (\vec{u}_x + i\vec{u}_z)/\sqrt{2}$ , et en sommant sur les deux polarisations orthogonales détectées,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  (cf. figure 5.17), la section efficace différentielle de diffusion s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) &= C \times \left( |\vec{\varepsilon}_L^\dagger \cdot \vec{u}_\theta|^2 + |\vec{\varepsilon}_L^\dagger \cdot \vec{u}_\varphi|^2 \right) \\ &= C \times \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (5.20)$$

La section efficace totale de diffusion s'exprime en intégrant cette expression sur les angles solides élémentaires :

$$\sigma_\alpha = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5.21)$$

On définit l'indicatrice d'intensité<sup>7</sup>  $f(\theta)$  (intégrée sur les angles  $\varphi$ ) par :

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_\pi} = \int_0^\theta f(\theta') \sin \theta' d\theta' \quad (5.22)$$

La relation (5.20) précédente fournit l'expression de  $d\sigma/d\Omega$  dans le cas du rayonnement dipolaire. Le calcul conduit dans ce cas à l'expression suivante pour l'indicatrice d'intensité :

$$f(\theta) = \frac{3}{16}(3 - \cos^2 \theta) \quad (5.23)$$

Dans le cas des rayonnements isotrope ou lambertien, on trouve :

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dans le cas isotrope} \\ |\cos \theta| & \text{dans le cas lambertien} \end{cases} \quad (5.24)$$

La figure (5.18) montre les indicatrices d'intensité pour les trois cas de rayonnements dipolaire, isotrope, lambertien. Dans le cas dipolaire, l'indicatrice d'intensité dépend en fait de  $\theta$  et  $\varphi$ . En particulier, dans le plan vertical (plan  $(xOz)$ ), l'indicatrice présente des lobes "en trèfle", alors que dans le plan horizontal, elle prend l'allure d'un "haricot" allongé dans la direction du faisceau de détection. L'indicatrice présentée ici, issue de l'intégration sur les angles  $\varphi$ , représente donc un profil moyen d'indicatrice d'intensité, en fonction de l'angle  $\theta$ .

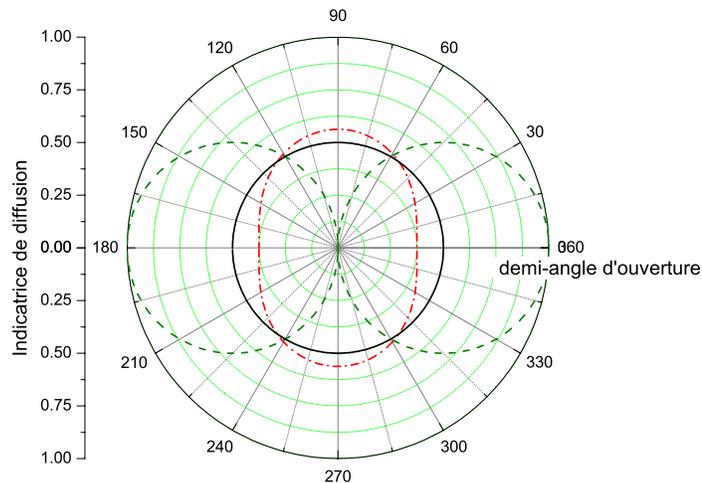


FIG. 5.18 – Indicatrice d'intensité pour les trois cas de rayonnements dipolaire (tiret point tiret), isotrope (trait plein) et lambertien (tirets).

La figure (5.19) montre le facteur de correction  $C_{dipolaire}$  qu'il faut appliquer pour calculer l'efficacité de collection de la fluorescence en tenant compte du

<sup>7</sup>L'intensité est ici entendue au sens photométrique : c'est le flux émis par unité d'angle solide, en  $\text{W}\cdot\text{srad}^{-1}$

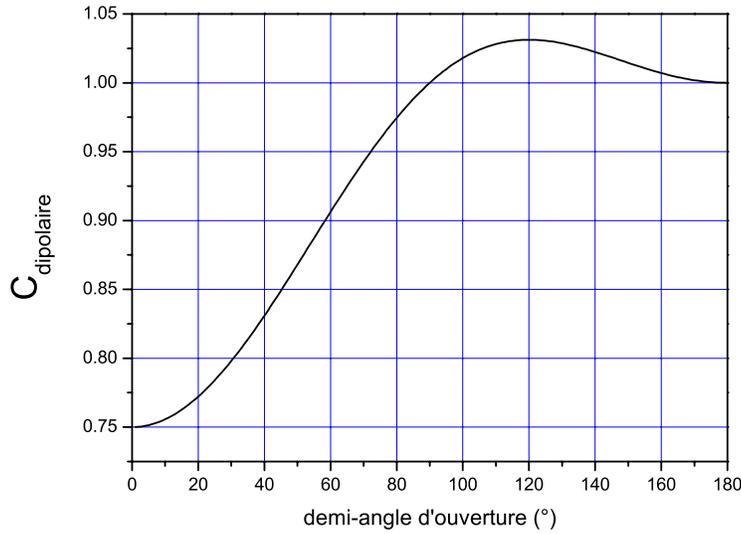


FIG. 5.19 – *Facteur de correction dû à l'émission dipolaire, relativement à un rayonnement isotrope.*

caractère dipolaire du rayonnement des atomes relativement à un rayonnement isotrope. Ce facteur de correction est donné par :

$$C_{dipolaire} = \frac{\int_0^\alpha f_{dipolaire}(\theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\alpha f_{isotrope}(\alpha) \sin \theta d\theta} \quad (5.25)$$

et vaut :

$$C_{dipolaire} = \frac{1 - \frac{3}{8}(3 \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha)}{1 - \cos \alpha} \quad (5.26)$$

dans notre cas,  $\alpha = 19.18^\circ$  donne  $C_{dipolaire} = 0.77$ .

### Chaîne de mesure de l'aire de temps de vol

La chaîne de mesure est schématisée sur la figure (5.20). Le signal est collecté sur la photodiode Hamamatsu de rendement  $\varepsilon = 0.51 \text{ A/W}$ , converti en tension dans un pré-ampli de gain  $10^8 \text{ V/A}$  et de bande passante  $1.6 \text{ kHz}$ , multiplié par un facteur de gain variable  $0.657 \times G$  ( $G$  variable entre 1 et 100), puis digitalisé et échantillonné par le PC de contrôle de l'horloge. La carte AT-MIO16-E4 numérise un signal analogique d'amplitude  $10\text{V}$  sur 12 bits, et l'échantillonne temporellement à la fréquence de  $20\text{kHz}$ . Un signal carré de  $1\text{V}$  durant  $1\text{s}$  correspond donc à une aire  $\mathcal{A}_0 = 8192 \times 10^3$ .

Un facteur supplémentaire, lié à la présence du masque générant l'onde progressive dans la zone de détection supérieure (cf. figure (3.10)), atténue l'aire de temps de vol de  $0.83$  par rapport à ce qu'elle serait sans ce masque. Ce facteur n'est pas présent dans la zone inférieure de la détection, où les atomes sont très

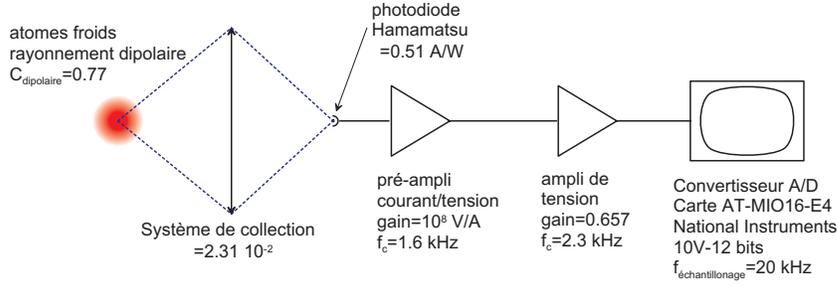


FIG. 5.20 – Chaîne de mesure des temps de vol.

rapidement repompés avant d'être détectés. Les deux zones ayant la même largeur, ceci oblige à diminuer la puissance du faisceau de détection dans la zone inférieure afin de rééquilibrer les détectivités dans les deux zones. Les aires de temps se trouvent alors atténuées d'un facteur  $C_{pousseur} = (1 + 0.83)/2 = 0.91$ . Techniquement, cet équilibrage n'a pas pu être réalisé à mieux que 5% dans notre cas, et a fluctué dans le temps. Dans la suite, on procédera donc comme si les détectivités des deux voies étaient égales, en considérant que  $C_{pousseur}$  est connu à 5% près.

Finalement, l'aire de temps de vol se calcule par

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} \times N_{det.}$$

où  $N_{det.}$  est le nombre d'atomes détectés et  $\mathcal{D}$  est la détectivité dans chaque voie :

$$\mathcal{D} = \eta \times C_{dipolaire} \times \varepsilon \times 10^8 \times 0.657G \times \mathcal{A}_0 \times C_{pousseur} \times \mathcal{R} \quad (5.27)$$

où  $\mathcal{R}$  est un facteur traduisant l'inhomogénéité du faisceau de détection : un atome passant au centre du faisceau de détection émet plus de photons qu'un atome passant au bord du faisceau.  $\mathcal{R}$  est la réponse impulsionnelle de la fenêtre de détection, c'est à dire le nombre de photons effectivement émis pour 1 atome passant à travers la fenêtre de détection, ayant  $p(x, y, z, t)$  pour distribution spatiale de positions.

$\mathcal{R}$  s'écrit, en utilisant les coordonnées cylindriques (conventions sur la figure (5.21)) :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{t=-\infty}^{\infty} dt \int_{r=0}^{r=R_{det.}} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{-e/2}^{e/2} dz \Gamma_{eff}(x) p(x, y, z - v_{det.}(t - t_{det.}), t_{det.}) \quad (5.28)$$

avec  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  et où :

- $e$  est la largeur de la fenêtre de détection.
- $\mathcal{F}$  est la fraction géométrique d'atomes détectés. Le facteur  $\mathcal{F}$  normalise la réponse impulsionnelle à 1 atome passant dans la zone de détection.
- $p(x, y, z, t_{det.})$  désigne la distribution de position des atomes au point  $(x, y, z)$  repéré par rapport au centre du nuage, à l'instant de passage  $t_{det.}$  du centre du nuage au centre du faisceau de détection considéré.
- $v_{det.}$  désigne la vitesse moyenne de passage du nuage dans la zone de détection<sup>8</sup>.

- $R_{det}$ . désigne le rayon du diaphragme le plus sélectif en vitesses transverses, rapporté dans la zone de détection<sup>9</sup>.  $2R_{det}$ . représente donc la taille transverse du nuage lorsqu'il est détecté.
- $\Gamma_{eff}(x, z)$  est le taux d'émission spontanée, donné par

$$\Gamma_{eff}(x, z) = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s(x, z, \varphi)}{1 + s(x, z, \varphi)} d\varphi$$

où  $\Gamma$  est la largeur naturelle de la transition de fluorescence, et où  $s(x, z, \varphi)$  est la saturation du faisceau de détection au point considéré. En notant  $s_0$  la saturation au centre du faisceau,  $w_0$  le "waist" du faisceau de détection,  $\delta_0$  le désaccord moyen du laser de détection par rapport à la résonance,  $m$  son amplitude de modulation de fréquence à  $f = 100$  kHz, et  $\varphi = 2\pi ft$  sa phase,  $s(x, z, \varphi)$  s'écrit<sup>10</sup> :

$$s(x, z, \varphi) = \frac{s_0 \exp -\frac{2(x^2+z^2)}{w_0^2}}{1 + 4 \frac{(\delta_0 + m \sin \varphi)^2}{\Gamma^2}} \quad (5.29)$$

On peut exprimer  $\mathcal{R}$  en fonction de  $Z = v_{det}.(t - t_{det.})$ , cote du centre du nuage par rapport au centre du faisceau de détection. La réponse de la fenêtre de détection apparaît alors comme la convolution spatiale du nuage par la réponse "impulsionnelle" de la fenêtre de détection.

$$\mathcal{R} = \frac{1}{v_{det.}} \times \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{Z=-\infty}^{\infty} dZ \int_{r=0}^{R_{det.}} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-e/2}^{e/2} dz \Gamma_{eff}(x, z) p(x, y, z - Z, t_{det.}) \quad (5.30)$$

Sous cette forme, la détectivité est inversement proportionnelle à  $v_{det.}$  (l'aire de temps de vol est d'autant plus faible que le nuage traverse vite la fenêtre de détection).

La fraction d'atomes passant dans la zone détection, pour 1 atome lancé,  $\mathcal{F}$ , s'écrit :

$$\mathcal{F} = \int_{r=0}^{R_{det.}} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{Z=-\infty}^{\infty} dZ p(x, y, Z, t_{det.}) \quad (5.31)$$

Le calcul de la détectivité a été effectué avec le logiciel Mathematica, pour une modulation  $m = 0.33$ , un désaccord à résonance  $\delta_0 = -0.1\Gamma$ , une saturation sur l'axe  $s_0 = 0.93$ , et une distribution de vitesses de type  $\mathcal{L}^b$  (avec  $b = 1.81$  et  $v_c = 16.7 \text{ mm.s}^{-1}$ ). On trouve une fraction d'atomes détectés de  $9.7 \times 10^{-2}$  et une détectivité

$$\mathcal{D} = 1.4 \times 10^{-2}$$

Ce calcul, qui suppose le nuage initialement ponctuel (hypothèse raisonnable dans le cas d'un PMO) est peu affecté lorsqu'on travaille en configuration

<sup>8</sup> on peut négliger ici la variation de vitesse du nuage pendant sa chute à travers la fenêtre de détection, liée à l'accélération de la pesanteur

<sup>9</sup> Dans la configuration standard de lancement à  $3.5 \text{ m.s}^{-1}$ , le diaphragme le plus sélectif est le trou du cut-off inférieur de la cavité d'interaction

<sup>10</sup> On a négligé ici la largeur spectrale du laser de détection, qui vaut  $\sim \Gamma/60 = 100$  kHz. L'expression complète du taux d'émission spontanée tenant compte de la largeur du laser est donnée en annexe B.5

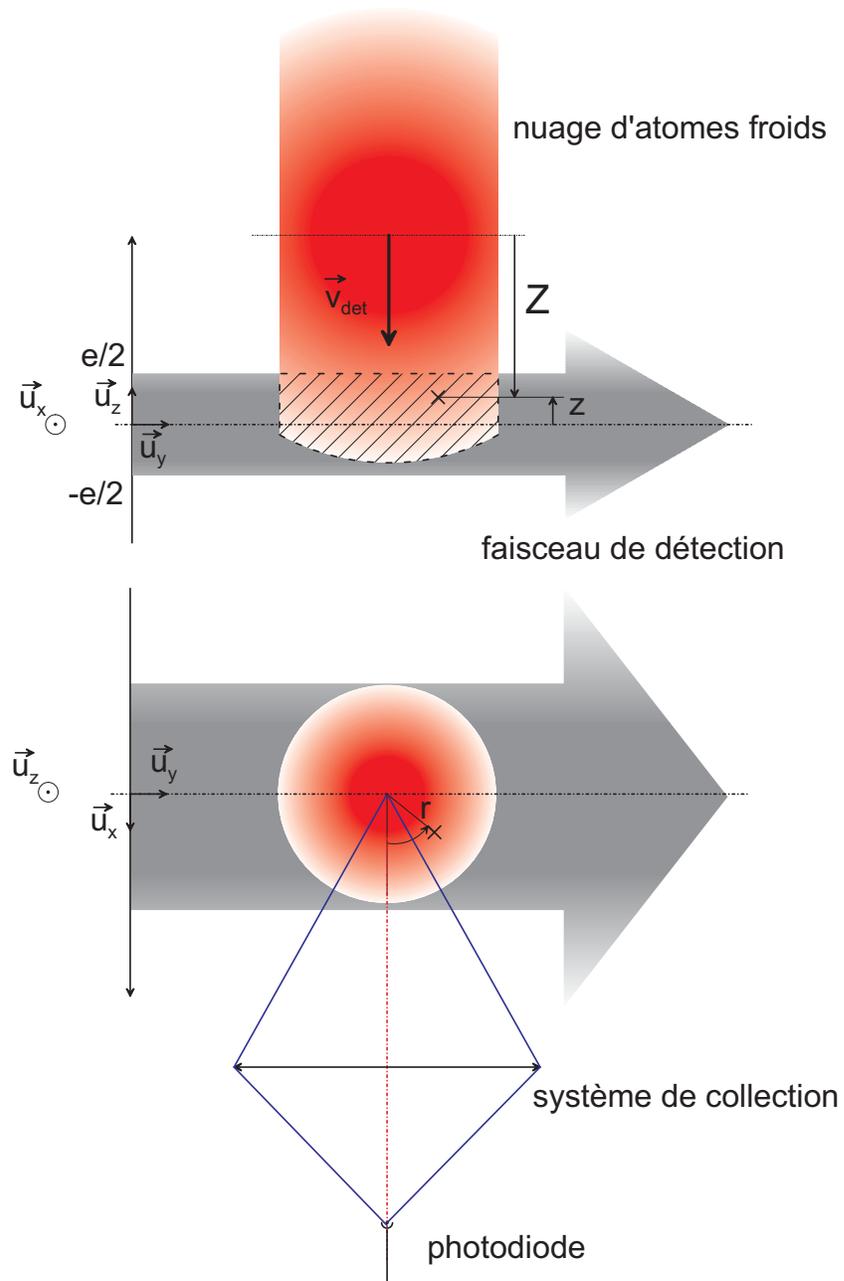


FIG. 5.21 – Conventions de notations dans la zone de détection.

Contribution	Méthode d'évaluation	Incertitude de calibration (%)	Incertitude de reproductibilité (%)
Efficacité de collection	jet thermique mesures	10	–
Efficacité de photodiode	–	< 5	–
Efficacité d'amplification	documentation	< 1	–
Puissance du laser de détection	mesure et documentation	< 3	1
Désaccord du laser de détection	jet thermique	–	13
Modulation du laser de détection	mesures	–	6
Distribution de vitesses	simulation	–	< 2
Efficacité du cache "pousseur"	mesure	5	–
<b>Bilan</b>	<b>somme quadratique</b>	<b>13</b>	<b>15</b>
			<b>Total : 20</b>

TAB. 5.2 – *Bilan d'incertitudes sur la détermination du nombre d'atomes détectés par la méthode de calibration directe du système de détection.*

de mélasse. Les paramètres ci-dessus sont typiques pour toutes nos mesures de déplacement collisionnel et de "cavity pulling". Les fluctuations des paramètres de la distribution de vitesses induisent des fluctuations de la détectivité inférieures à 2%. Ceci se comprend en notant encore une fois que le facteur  $\mathcal{F}$  dans l'expression (5.28) normalise la réponse de la détection à 1 atome passant dans la zone de détection.

#### **Incertitude sur le nombre d'atomes détectés liée à la calibration directe du système de détection**

Le tableau (5.2) dresse le bilan des incertitudes sur l'évaluation du nombre d'atomes détectés en utilisant la calibration du système de détection décrite ci-dessus. On distingue deux sources d'incertitudes : les incertitudes de calibration, et les incertitudes de reproductibilité. Les premières sont liées à une calibration faite une fois pour toutes lors du montage de l'expérience, ou à une donnée dans la documentation accompagnant un composant. Les secondes sont liées aux fluctuations non contrôlées des paramètres de l'expérience ou aux incertitudes sur les paramètres des distributions de positions et de vitesses.

L'incertitude de calibration provient essentiellement de l'incertitude sur l'efficacité de collection ( $\sim 10\%$ ), de l'incertitude sur l'effet du masque générant l'onde progressive dans la zone de détection supérieure ( $\sim 5\%$ ), et de l'incertitude sur l'efficacité de conversion de la photodiode ( $\lesssim 5\%$ ).

L'incertitude de reproductibilité est dominée par l'incertitude de  $4.5 \times 10^{-2}\Gamma$  sur le désaccord du laser de détection (qui induit une incertitude de 13% sur les aires de temps de vol), et par l'incertitude de  $0.33\Gamma$  sur l'amplitude de modu-

lation du laser de détection (qui induit une incertitude de 6% sur les aires de temps de vol).

L'incertitude totale sur la détectivité déterminée par cette méthode est estimée à 20%.

### 5.4.2 Comparaison des méthodes par absorption et par calibration directe de la détection

Dans le paragraphe précédent, on a expliqué comment on peut calculer la détectivité de notre système de détection à partir de la mesure d'aires de temps de vol d'une part, et des caractéristiques géométriques et photométriques de la zone de détection.

Par ailleurs, dans le § 5.3, on a décrit comment il est possible de déterminer le nombre d'atomes initial  $N_i$  et la taille du nuage d'atomes froids à l'instant de son lancement dans la fontaine.

Afin de comparer les deux résultats, nous avons déterminé la distribution des vitesses (cf. chapitre 4). A l'issue du lancement, les atomes sont préparés dans le niveau d'horloge  $|F = 1, m = 0\rangle$ , en sélectionnant uniquement les atomes présents dans ce niveau, et en poussant les autres (cf. chapitre 3). Nous avons donc aussi mesuré le taux de sélection. La mesure du nombre initial d'atomes lancés ( $2.9 \times 10^8$ ), de la taille initiale du nuage (1.4 mm), du taux de sélection dans le niveau  $|F = 1, m = 0\rangle$  ( $\sim 19\%$ ), et des paramètres de distribution de vitesses ( $b = 1.81$ ,  $v_c = 16.7 \text{ mm.s}^{-1}$ ), constitue un ensemble de paramètres que l'on peut injecter dans la simulation afin de calculer le nombre d'atomes qui finalement traversent la zone de détection. La connaissance des aires de temps de vol nous a permis alors d'en déduire la détectivité du système de détection :

$$\mathcal{D} = 1.4 \times 10^{-2}$$

Ceci constitue une 2<sup>e</sup> méthode, indirecte, de calibration de la détection.

Cette deuxième méthode vient donc confirmer le résultat obtenu par la méthode directe de calibration du système de détection. Par ailleurs, elle apporte aussi une confirmation supplémentaire à la détermination globale du nombre d'atomes dans la fontaine : la méthode par absorption est complètement découplée de la détermination de la distribution de vitesses, et la simulation Monte Carlo lie les résultats de ces deux méthodes pour trouver le nombre d'atomes détectés. Il est donc satisfaisant de voir que le résultat obtenu coïncide avec la détermination que l'on peut faire directement d'après les caractéristiques du système de détection, détermination qui est indépendante de l'évolution du nuage avant l'instant de détection.

La méthode par absorption a été mise en place une fois. L'incertitude sur la détectivité obtenue par cette méthode est donc une incertitude de calibration. On l'estime à 16%. Elle provient des incertitudes à chacune des étapes précédentes : incertitude sur  $N_i$  (8.5%), incertitude sur la fraction d'atomes détectés (11%) liée aux incertitudes sur les paramètres de la distribution de vitesses, incertitude sur le taux de sélection (5%), et incertitude sur l'équilibrage des deux voies de détection (5%). Ces incertitudes sont listées dans le tableau (5.3).

Contribution	Méthode d'évaluation	Incertitude de calibration (%)
Nombre d'atomes initial	méthode d'absorption	8.5
Distribution de vitesses	simulation	11
Distribution de positions	simulation	< 1
Taux de sélection dans $ F = 1, m = 0\rangle$	mesure	5
Equilibrage des voies de détection	mesure	5
<b>Bilan</b>	<b>somme quadratique</b>	<b>16</b>

TAB. 5.3 – *Bilan d'incertitudes sur la détermination du nombre d'atomes détectés par la méthode de calibration directe du système de détection.*

## 5.5 Bilan d'incertitudes sur le nombre d'atomes dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage, et sur la densité moyenne effective

Ce paragraphe fait le bilan des incertitudes sur la détermination du nombre d'atomes dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage et sur la densité moyenne effective. Comme nous l'avons déjà mentionné, toutes les mesures de déplacement collisionnel et de "cavity pulling" n'ont pas toujours été accompagnées de la liste complète de tous les paramètres de l'expérience.

En fait, l'importance de chacun de ces paramètres s'est avérée au fil des jours. De plus, la prise des données n'était pas automatisée. Les paramètres manquants ont toutefois pu être extrapolés à partir de ceux qui avaient été systématiquement notés, et en utilisant des calibrations effectuées *a posteriori*.

Les points de mesure initiaux ont ainsi pu être exploités.

C'est notamment le cas de la taille initiale du nuage, dont l'acquisition ne fut systématique que pendant la campagne de mesure du "cavity pulling". Nous avons alors effectué *a posteriori* une calibration de la taille verticale et horizontale du nuage en fonction du temps de chargement et de la puissance des faisceaux de refroidissement. Ces paramètres ayant été systématiquement enregistrés, cette calibration a permis d'extrapoler la taille du nuage pour chaque mesure différentielle. La mesure de la fluorescence du piège a été dans ce cas d'une grande utilité, car elle sert de variable intermédiaire afin de contrôler à la fois le nombre d'atomes piégés et la puissance des faisceaux de refroidissement.

De même, on a vu que la largeur à mi-hauteur du signal de temps de vol ne suffit pas pour déterminer les paramètres de la distribution de vitesses. Les signaux de temps de vol n'ont été enregistrés entièrement qu'à partir du moment où nous avons pris conscience de l'importance des "ailes" de la distribution de vitesses pour la détermination de la densité moyenne effective. Les mesures antérieures à cette date n'ont pas été éliminées pour autant : les signaux de temps de vol enregistrés complètement servirent à calibrer *a posteriori* les pa-

ramètres de la distribution de vitesses en fonction de la largeur à mi-hauteur.

De même encore, la déconvolution du temps de vol par la réponse du système de détection fut prise en compte, mais de façon plus approximative que si le temps de vol avait été complètement enregistré au moment de la mesure.

Ces extrapolations *a posteriori* ont pour conséquence d'augmenter l'incertitude sur la densité moyenne effective par rapport à ce qu'on pourrait attendre d'une prise de données systématique et d'une exploitation de ces données telle que décrite dans le chapitre 4.

Les tableaux (5.4) et (5.5) dressent le bilan général des incertitudes sur le nombre d'atomes dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage, noté  $N_{cav}$  et sur la densité moyenne effective,  $\bar{n}$ . Ces grandeurs sont déterminées de la façon suivante : l'aire de temps de vol permet de remonter au nombre d'atomes traversant la zone de détection, *via* la détectivité. Puis on détermine la distribution de vitesses correspondant au signal de temps de vol. Ceci nécessite de le déconvoluer par la réponse de la détection (déconvolution numérique). On détermine indépendamment les paramètres de la distribution de positions initiales, par imagerie CCD. Enfin, on injecte toutes les données obtenues dans le programme de simulation, qui fournit  $N_{cav}$  et  $\bar{n}$ .

Les incertitudes sur  $N_{cav}$  et sur  $\bar{n}$  sont de deux types.

1. Une incertitude de calibration, qui provient de l'incertitude sur la calibration initiale de la détectivité du système de détection.  
En fait, le "cavity pulling" permet de recalibrer  $N_{cav}$  indépendamment. Or, l'incertitude de cette recalibration (ou renormalisation) est inférieure à celle de la détectivité.  
Par ailleurs, cette incertitude obtenue par "cavity pulling" fait intervenir beaucoup moins de paramètres que celle relative à la détectivité (c'est même une mesure directe de  $N_{cav}$ ).  
C'est donc l'incertitude obtenue par "cavity pulling" qui sera finalement retenue pour incertitude de calibration du nombre d'atomes dans la cavité.
2. Un second type d'incertitude est liée à la reproductibilité des paramètres de la détection, des paramètres de distribution de vitesses ( $b$  et  $v_c$ ) et de positions ( $\sigma_r$ ), et de la déconvolution du signal de temps de vol.

On estime l'incertitude relative sur le paramètre  $b$  égale à  $(\delta b)/b = 20\%$ , le paramètre  $v_c$  étant déterminé à partir de la connaissance de  $b$  et de la largeur à mi-hauteur de la distribution de vitesses. Rappelons qu'on avait pris 10% pour incertitude ultime sur  $b$  dans le chapitre 4, et que cette incertitude était liée à l'asymétrie résiduelle du temps de vol lorsque les faisceaux de refroidissement montants et descendants sont équilibrés au mieux. En pratique, l'élargissement de 10% à 20% de  $(\delta b)/b$  est dû au dérèglement progressif de cet équilibrage. Il induit une incertitude de 30% sur la densité moyenne effective, et c'est de loin l'effet dominant du bilan d'incertitude. On a donc intérêt à enregistrer le temps de vol et à vérifier l'équilibrage des faisceaux systématiquement.

On estime l'incertitude sur  $\sigma_r$  de l'ordre de  $\delta\sigma_r = 0.12$  mm. Ce n'est pas beaucoup plus que l'incertitude de 0.1 mm prise dans le chapitre 4. Les calibrations *a posteriori* de la taille initiale du nuage en fonction du temps de chargement et de la puissance des faisceaux de refroidissement permettent d'effectuer

Contribution	Méthode d'évaluation	Incrtitude de calibration (%)	Incrtitude de reproductibilité (%)
calibration de la détectivité	absorption	16	–
Puissance du laser de détection	mesure	–	< 1
Désaccord du laser de détection	jet thermique	–	13
Modulation du laser de détection	mesures	–	6
$\delta b/b = 20\%$	simulation	–	14
$\delta\sigma_r = 0.12$ mm	mesure	–	2.4
Déconvolution	simulation	–	3
<b>Bilan</b>	<b>somme quadratique</b>	<b>16</b>	<b>20</b>
Recalibration	"cavity pulling"	<b>11</b>	<b>Total : 23</b>

TAB. 5.4 – Bilan d'incertitudes sur la détermination du nombre  $N_{cav}$  d'atomes en cavité au 1<sup>er</sup> passage.

Contribution	Méthode d'évaluation	Incrtitude de calibration (%)	Incrtitude de reproductibilité (%)
calibration de la détectivité	absorption	15.6	< 2
Puissance du laser de détection	mesure	–	< 1
Désaccord du laser de détection	jet thermique	–	13 (5)
Modulation du laser de détection	mesures	–	6 (0)
$\delta b/b = 20\%$ (10%)	simulation	–	30 (15)
$\delta\sigma_r = 0.12$ mm (0.05 mm)	mesure	–	7 (3.5)
Déconvolution	simulation	–	14 (< 1)
<b>Bilan</b>	<b>somme quadratique</b>	<b>15.6</b>	<b>37 (16.5)</b>
Recalibration	"cavity pulling"	<b>11</b>	<b>Total : 40</b>

TAB. 5.5 – Bilan d'incertitudes sur la détermination de la densité moyenne effective  $\bar{n}$ . Les chiffres entre parenthèses sont les chiffres que l'on peut espérer dans le futur, avec un laser de détection non-modulé,  $(\delta b)/b = 10\%$ , une imagerie CCD automatisée, et une déconvolution systématique. L'incertitude de reproductibilité que l'on peut espérer est alors de 16.5%.

une correction avec une incertitude négligeable devant l'incertitude de mesure de la taille du nuage.

Finalement, bien que la déconvolution ait été prise en compte approximativement, on prend pour incertitude liée à la déconvolution l'erreur maximale que l'on commettrait si on n'avait pas déconvolué du tout. Cette incertitude est de l'ordre de 14% sur la densité moyenne effective.

Le bilan des tableaux (5.4) et (5.5) est donc une incertitude de reproductibilité de l'ordre de 20%, par atome lancé, sur  $N_{cav}$ , et de 37%, par atome lancé, sur  $\bar{n}$ . On verra que l'incertitude de recalibration du nombre d'atomes par le "cavity pulling" est de 11%, ce qui donne une incertitude finale, par atome lancé, de 23% sur  $N_{cav}$  et de  $\sim 40\%$  sur  $\bar{n}$ .

## 5.6 Exploitation des mesures

### 5.6.1 Procédure

Afin de déterminer le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  en fonction de la densité moyenne effective, nous avons suivi la procédure suivante :

1. Nous commençons par calculer  $\Delta N_{cav} = N_{HD} - N_{BD}$ ,  $\Delta \bar{n} = \bar{n}_{HD} - \bar{n}_{BD}$ , et  $\Delta \nu = (\delta \nu_{HD} - \delta \nu_{BD})$ . Ce sont respectivement les différences entre régime à haute densité ( $HD$ ) et basse densité ( $BD$ ) des nombres d'atomes traversant la cavité au 1<sup>er</sup> passage,  $N_{cav}$ , des densités moyennes effectives,  $\bar{n}$ , et des déplacements de fréquence atomique,  $\delta \nu$ .
2. Nous extrapolons ensuite linéairement les mesures différentielles de fréquence  $\Delta \nu$  effectuées avec l'état initial  $|F = 1, m = 0\rangle$  à un nombre d'atomes différentiel  $\Delta N_{cav}^e$  donné, égal aux incertitudes près à la valeur moyenne obtenue expérimentalement :  $3.5 \times 10^7$ . Les densités moyennes effectives différentielles,  $\Delta \bar{n}$  sont extrapolées dans le même rapport. A l'issue de cette extrapolation, elles diffèrent encore d'un point de mesure à l'autre, à cause des fluctuations des paramètres de la distribution de vitesses. Sur les 13 points de mesures enregistrés, leur valeur moyenne est  $1.3 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$  et leur écart type statistique est  $1 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$ . Notons  $\Delta \bar{n}_e$  la densité moyenne effective différentielle extrapolée pour  $\Delta N_{cav}^e = 3.5 \times 10^7$ .
3. Nous traçons ensuite la courbe du déplacement relatif de fréquence,  $\Delta \nu / \nu_{at}$ , en fonction du désaccord de fréquence de la cavité micro-onde relativement à la résonance atomique,  $\delta = \nu_{cav} - \nu_{at}$ . Nous cherchons le meilleur ajustement de cette courbe, sous la forme suivante :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = A \left( \mathcal{P}ulling(\delta) \times \Delta N_{cav}^e + K_{collisions}^{1,0} \times \Delta \bar{n}_e \right) \quad (5.32)$$

- La fonction  $\mathcal{P}ulling(\delta)$  est la fonction dispersive caractéristique du "cavity pulling", calculée analytiquement au chapitre 4 (expression (4.104)), pour 1 atome traversant la cavité au 1<sup>er</sup> passage. Elle est représentée sur la figure (4.29), où elle a été multipliée par  $N_{cav} = 10^8$ . Le facteur de qualité de la cavité, qui intervient dans son expression, est celui déterminé au § 5.2.2.
- $K_{collisions}^{1,0}$  et  $A$  sont les deux paramètres libres de cet ajustement linéaire.  $K_{collisions}^{1,0}$  désigne le coefficient du déplacement collisionnel introduit au chapitre 4 (expression (4.33)).  $A$  désigne un facteur de correction à apporter sur le nombre global d'atomes présents dans l'horloge (c'est à dire sur le nombre d'atomes lancés).  $A = 1$  signifie que la mesure du nombre d'atomes dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage est en accord avec le nombre d'atomes déterminé par les deux méthodes décrites précédemment (cf. § 5.4).

La mesure du "cavity pulling" fournit donc une méthode indépendante de détermination du nombre d'atomes présents dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage. Cette méthode vient compléter les deux autres méthodes de détermination du nombre d'atomes dans la fontaine. C'est une mesure directe du nombre d'atomes présents dans la cavité, indépendamment de la connaissance de la distribution des vitesses atomiques. Nous verrons qu'elle est en accord avec

les deux autres méthodes et que l'incertitude sur le coefficient  $A$  rendue par l'algorithme de meilleure approximation est inférieure à l'incertitude liée à ces autres méthodes. Par conséquent, nous utiliserons cette valeur de  $A$  comme facteur de renormalisation du nombre d'atomes<sup>11</sup>. Cette renormalisation a aussi pour avantage de "gommer" au moins partiellement les incertitudes.

4. Chacun des points de mesure différentielle de déplacement de fréquence est ensuite corrigé du "cavity pulling" en tenant compte du facteur de renormalisation  $A$  et du désaccord de la cavité micro-onde propre à chaque mesure. Le résidu obtenu est le déplacement de fréquence induit par les collisions entre atomes froids.
5. Pour chaque point de mesure, on renormalise aussi la densité moyenne effective,  $\Delta\bar{n}$ , en utilisant le facteur  $A$ . Il ne reste plus qu'à tracer le déplacement collisionnel en fonction de la densité!

### 5.6.2 Résultats sur le "cavity pulling" : une 3<sup>e</sup> méthode de calibration du nombre d'atomes

Les résultats sont présentés sur la figure (5.22), avec la courbe issue de l'algorithme de meilleure approximation utilisant l'expression (5.32). Le résultat est

$$A = 1.13 \pm 0.13$$

et

$$K_{collisions}^{0,1} = (-8 \pm 22) \times 10^{-24} \text{ cm}^3$$

L'algorithme utilisé est linéaire, c'est à dire qu'on a en fait laissé  $A$  et  $A \times K_{collisions}^{0,1}$  comme paramètres libres, et qu'on en a déduit  $K_{collisions}^{0,1}$ . Les barres d'erreur sur chaque point expérimental sont de 10 kHz en abscisse, et de l'ordre de  $10^{-15}$  en ordonnée. Cette dernière valeur est en fait calculée précisément pour chaque point de mesure de la manière suivante : les mesures des deux régimes, à haute et basse densité, sont resynchronisées, épurées des "accidents" de parcours qui donnent lieu à des "glitches" de fréquence en dehors de l'intervalle  $[-3\sigma, +3\sigma]$  ( $\sigma$  à 1 s), et comparées. On calcule ensuite la variance d'Allan des fluctuations de la différence des corrections de fréquence entre les deux régimes. La barre d'erreur affectée à chaque mesure différentielle de déplacement de fréquence est obtenue en prenant la valeur de la variance d'Allan des fluctuations des différences obtenue à la fin de l'intégration.

Ces résultats appellent plusieurs commentaires :

1. La valeur  $A$  obtenue tend à indiquer que l'on a sous-estimé de 13% le nombre d'atomes présents dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage par les méthodes précédentes. Rappelons que ces méthodes étaient liées à la détermination de la distribution des vitesses, des positions initiales, du nombre d'atomes initial, et à la détectivité du système de détection. Cette nouvelle méthode est compatible avec les deux autres méthodes mentionnées dans ce chapitre. L'incertitude relative qu'elle permet d'obtenir,  $(\delta A/A) \sim 11\%$ , est inférieure à l'incertitude obtenue par les autres méthodes.

---

<sup>11</sup>C'est la raison pour laquelle nous avons présenté les résultats de la simulation Monte Carlo sur la densité moyenne effective en les rapportant au nombres d'atomes présents dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage

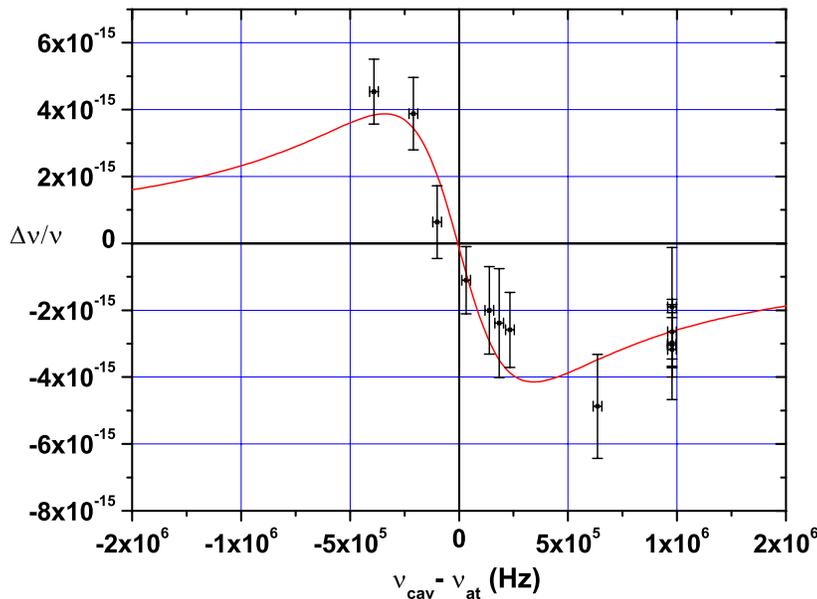


FIG. 5.22 – Mesures du déplacement relatif de fréquence de l’horloge Rb en fonction du désaccord de la cavité micro-onde relativement à la résonance atomique, pour  $\Delta N_{cav}^e = 3.5 \times 10^7$  atomes en cavité au 1<sup>er</sup> passage. Les mesures sont représentées avec leur barres d’erreur en fréquence, verticales, et les barres d’erreur sur le désaccord, horizontales. La courbe en trait plein est issue de la meilleure approximation des points expérimentaux en utilisant l’expression (5.32). Les barres d’erreur verticales ne tiennent compte que de l’incertitude statistique de mesure de fréquence.

2. L’algorithme de meilleure approximation linéaire rend 0.86 pour paramètre de vraisemblance du modèle. Ce paramètre (usuellement noté ...  $Q$  !) est calculé à partir du  $\chi^2$  des points expérimentaux<sup>12</sup>, de leurs barres d’erreur, et du meilleur couple de paramètres  $(A, K_{collisions}^{1,0})$ . Il suppose que chaque point de mesure est distribué *normalement* (hypothèse de bruit blanc), et que par conséquent la loi de probabilité de  $\chi^2$  est effectivement la distribution dite ”du  $\chi^2$ ” pour  $13 - 2 = 11$  degrés de liberté [142]. Sous cette hypothèse, le paramètre de vraisemblance  $Q$  représente la probabilité  $Q\left(\frac{11}{2}, \frac{\chi^2}{2}\right)$  pour que le paramètre  $\chi^2$  soit supérieur à la valeur effective-

<sup>12</sup>Rappelons que la quantité  $\chi^2$  représente l’estimateur de la vraisemblance des paramètres du modèle. Il est défini par

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - y(x_i; a_1 \dots a_M)}{\sigma_i} \right)^2$$

où les couples  $(x_i, y_i)$  désignent les  $N$  points de mesure, avec leurs barres d’erreur sur  $y_i$ , notées  $\sigma_i$ ,  $y$  désigne la fonction prise pour modèle de ces points, et les  $a_i$  désignent les  $M$  paramètres libres et ajustables du modèle.

biais de fréquence	$A \pm \sigma_A$	$K_{collisions}^{1,0} \pm \sigma_K$
-20 kHz	$1.11 \pm 0.12$	$(-16 \pm 23) \times 10^{-24}$
-10 kHz	$1.12 \pm 0.12$	$(-12 \pm 22) \times 10^{-24}$
0 kHz	$1.13 \pm 0.13$	$(-8.1 \pm 22) \times 10^{-24}$
+10 kHz	$1.14 \pm 0.13$	$(-4.2 \pm 22) \times 10^{-24}$
+20 kHz	$1.15 \pm 0.13$	$(-0.4 \pm 22) \times 10^{-24}$

TAB. 5.6 – Influence potentielle d’un biais des mesures de fréquence de la résonance de la cavité sur les paramètres de renormalisation du nombre d’atomes,  $A$ , et sur le déplacement collisionnel,  $K_{collisions}^{1,0}$ , rendus par l’algorithme de meilleure approximation des mesures de déplacement de fréquence en fonction du désaccord de la cavité micro-onde.

ment obtenue avec le couple optimal  $(A, K_{collisions}^{1,0})$ <sup>13</sup>. Le paramètre de vraisemblance  $Q$  n’est donc pas une preuve en soi de l’hypothèse ”bruit blanc”, puisqu’elle le suppose, mais c’est une indication que les points expérimentaux sont correctement représentés par un modèle du type (5.32) ou non ; de plus, c’est une indication sur la plausibilité des barres d’erreur : une valeur de  $Q \ll 1$  révèle soit que le modèle est faux et peut être statistiquement rejeté, soit que les barres d’erreur ont été sous-estimées, soit que les points ne sont ”vraiment” pas distribués *normalement* (voir [142] p.659 sur ce sujet). En l’occurrence, la valeur 0.86 fournie par l’algorithme indique que le modèle représente correctement la réalité de l’expérience ; sa valeur, qui n’est pas ”très éloignée” de 1, semble même indiquer que nous avons été plutôt pessimistes sur les barres d’erreur.

- le déplacement collisionnel sur la transition d’horloge  $|F = 1, m = 0\rangle \leftrightarrow |F = 2, m = 0\rangle$  est compatible avec une valeur nulle. Bien qu’on ait déjà exclu un biais global de 10 kHz des mesures de la fréquence de la résonance de la cavité, on peut se demander quelle serait son impact sur la valeur obtenue pour  $K_{collisions}^{1,0}$ . La pente de la courbe dispersive du ”cavity pulling” est en effet maximale près de résonance ( $-2.35 \times 10^{-17}$  kHz<sup>-1</sup> pour  $3.5 \times 10^7$  atomes dans la cavité). Un raisonnement simpliste, qui utiliserait la valeur de cette pente pour en déduire la sensibilité de  $K_{collisions}^{1,0}$  à un biais, serait erroné, parce qu’il reviendrait à supposer que tous les points de mesure ont été effectués dans l’intervalle autour de la résonance atomique, là où la fonction de dispersion est linéarisable. Ce n’est pas le cas, et les 8 mesures effectuées en dehors de cet intervalle contraignent l’algorithme de meilleure approximation en ordonnées. Aussi, les résultats rendus par l’algorithme en supposant un biais de -20 kHz, -10 kHz, +10 kHz et +20 kHz sont présentés dans le tableau (5.6). On voit que dans tous les cas la valeur énoncée pour résultat du déplacement collisionnel sur la transition d’horloge du <sup>87</sup>Rb reste à l’intérieur des barres d’erreur statistiques rendues par l’algorithme, et n’est pas résolue de 0.

<sup>13</sup>La loi de probabilité  $Q(a, x)$  est liée à la fonction Gamma (cf. annexe (B.22)) par la relation

$$Q(a, x) = \frac{\Gamma(a, x)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$$

La fonction  $Q(a, x)$  vaut 1 pour  $x = 0$ , et tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

### 5.6.3 Résultats sur le déplacement collisionnel du $^{87}\text{Rb}$

#### Cas où on a sélectionné les atomes dans $|F = 1, m = 0\rangle$ : déplacement collisionnel sur la transition d'horloge.

Le paragraphe précédent a déjà donné le résultat sur le déplacement collisionnel dans le cas où seules des collisions entre atomes initialement sélectionnés dans l'état  $|F = 1, m = 0\rangle$  ont lieu. La figure (5.23) présente les mêmes résultats différemment. On a tracé le déplacement de fréquence différentiel,  $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ , en fonction de la densité moyenne effective,  $\bar{n}$ . Chaque point de mesure de cette figure a été obtenu en retranchant la contribution du "cavity pulling" de chacune des 13 mesures différentielles de fréquence. Cette contribution est obtenue en tenant compte du paramètre de renormalisation  $A$  rendu par l'algorithme de meilleure approximation (cf. § précédent) et du nombre d'atomes  $\Delta N_{cav}$  spécifique à chaque mesure. La densité moyenne effective associée à chaque point a été corrigée du même facteur  $A$ . Elle est entachée d'une barre d'erreur de 40% (cf. tableau (5.5)). La barre d'erreur verticale résulte de l'incertitude statistique de mesure différentielle de fréquence, et de l'incertitude apportée par le coefficient de renormalisation  $A$ . Cette dernière n'augmente la barre d'erreur que de quelques %.

Comme on l'a déjà mentionné, les mesures présentées sur la figure (5.22) se sont déroulées sur plusieurs mois, et on a fait varier le désaccord de la cavité en changeant sa température de 23 °C (température ambiante) à 35 °C, ce qui représente une perturbation notable de l'expérience. Afin de tester l'existence de corrélations entre les mesures de fréquence, les variations de température, et le sens de ces variations temporelles, on a reporté sur la figure (5.23) des numéros de 1 à 13 représentant l'ordre chronologique des mesures. Ces numéros ont aussi été reportés sur la figure (5.24). Ils permettent de voir qu'il n'y a pas d'effets systématiques notables liés au sens de variation de la température de l'expérience, et à un éventuel dérèglement de l'expérience au cours du temps.

Enfin, pour comparaison, on a représenté sur un même graphe le résultat de nos mesures et ceux obtenus par K. Gibble et C. Fertig quasi-simultanément sur leur fontaine  $^{87}\text{Rb}$  [147], ainsi que les récentes prédictions théoriques de C. Williams et al [116]. En tenant compte de l'incertitude de 40% sur la densité moyenne effective, notre résultat s'énonce de la manière suivante :

$$K_{collisions}^{1,0} = -8(22) \begin{matrix} (+28 \\ -34 \end{matrix} \times 10^{-24} \text{ cm}^3 \quad (5.33)$$

La 1<sup>re</sup> valeur entre parenthèses représente l'incertitude à  $1\sigma$  sur le déplacement collisionnel issue du traitement statistique des données de fréquence (cf. § précédent). Ceci définit un premier domaine d'acceptance statistique lié aux incertitudes sur les mesures de fréquence (droites en tirets sur la figure (5.23)). Les valeurs dans les 2<sup>es</sup> parenthèses représentent les bornes maximales et minimales à  $1\sigma$  obtenues en appliquant de surcroît un facteur d'échelle 1/1.4 sur l'axe des densités (40% d'incertitude sur  $\bar{n}$ ). Ceci élargit le domaine d'acceptance précédent, et le résultat obtenu est représenté par les droites en traits fins sur la figure (5.25).

Le même traitement est appliqué à la valeur obtenue par K. Gibble et C. Fertig, qui ont une incertitude de 60% sur la détermination de la densité atomique moyenne effective. Leur résultat s'énonce de la même façon :

$$K_{collisions}^{1,0,Gibble} = -55(12) \begin{matrix} (-52 \\ +28 \end{matrix} \times 10^{-24} \text{ cm}^3 \quad (5.34)$$

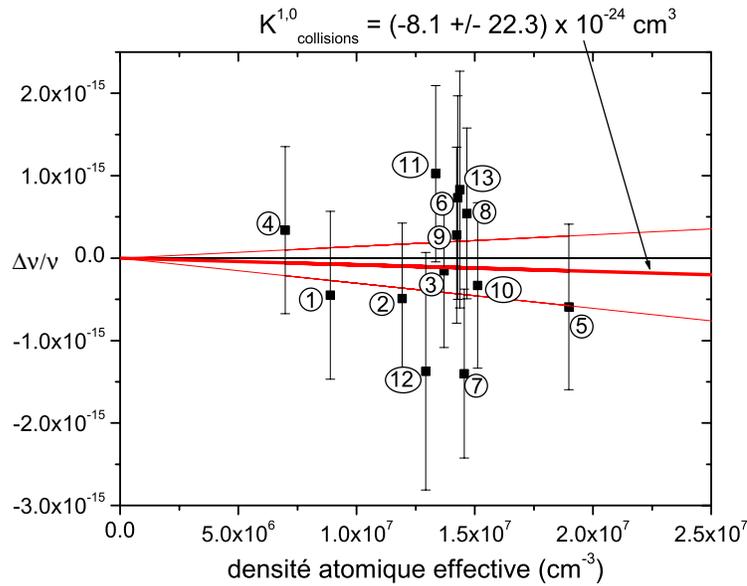


FIG. 5.23 – Mesures différentielles du déplacement de fréquence de l’horloge Rb en fonction de la densité atomique moyenne effective. Les barres d’erreur verticales résultent de la somme quadratique de l’incertitude statistique sur la mesure différentielle de fréquence et de l’incertitude sur le coefficient de renormalisation du nombre d’atomes  $A$ . La droite en trait plein représente le résultat obtenu par l’algorithme de meilleure approximation. Le domaine d’acceptance statistique à  $1\sigma$  obtenu par l’algorithme se trouve entre les droites en tirets. Les points de mesure sont numérotés chronologiquement, et sont reportés aussi sur la figure (5.24) afin de tester d’éventuelles corrélations entre les mesures de fréquence et les variations de la température de la cavité, associées à un dérèglement progressif de l’expérience.

et est représenté par la droite en pointillés épais et les droites en pointillés fins. Pour comparaison, la prédiction théorique de C. Williams est :

$$K_{collisions}^{1,0, \text{théorique}} = -71.7 \times 10^{-24} \text{ cm}^3 \quad (5.35)$$

et est représentée par une droite en tirets.

Le déplacement collisionnel du Cs est également représenté sur la figure (5.25). Il est de l’ordre de  $-3 \times 10^{-21} \text{ cm}^3$  c’est à dire clairement plus élevé, et il se mesure aussi plus rapidement !

### Cas où on a sélectionné les atomes dans $|F = 2, \text{ tous } m_F\rangle$ .

Nous avons aussi effectué les mesures du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  dans la configuration où les sous-niveaux Zeeman  $|F = 2, m = 0, \pm 1, \pm 2\rangle$  sont initialement équipés (cf. § 3.3.3). Dans ce cas, les mesures ont toutes été effectuées à température ambiante. On est amené à soustraire le ”cavity pulling”

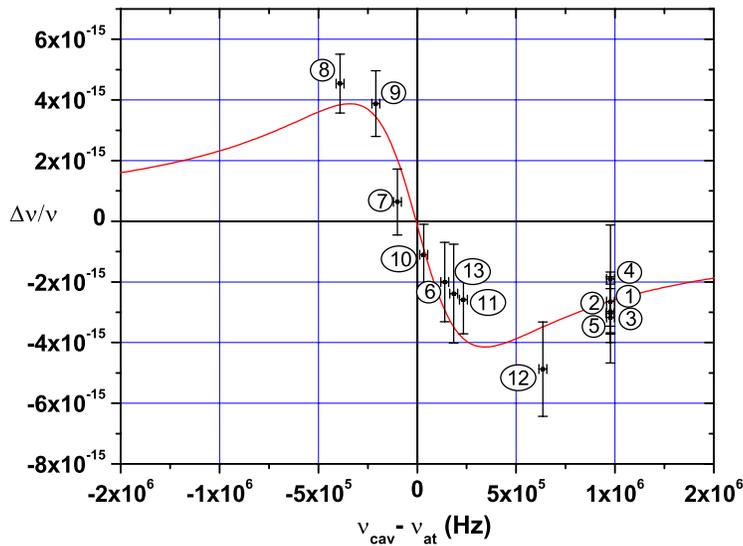


FIG. 5.24 – Mêmes mesures que sur la figure (5.22), mais numérotées par ordre chronologique.

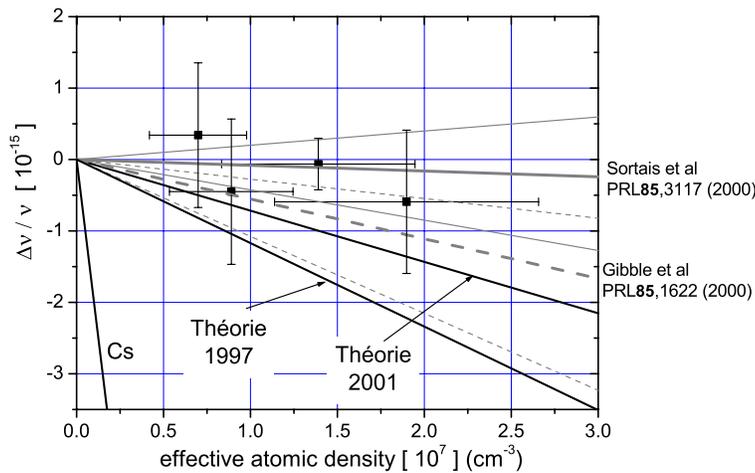


FIG. 5.25 – Comparaison des mesures de la figure (5.23) (traits pleins gris) avec les résultats expérimentaux de K. Gibble et C. Fertig (tirets gris). On a aussi représenté, pour comparaison, la prédiction théorique de C. Williams et al (théorie 2001 [116]), celle de B. Verhaar et al (théorie 1997 [12]), ainsi que le déplacement collisionnel du Cs. Les domaines d'acceptance autour des valeurs moyennes obtenues tiennent compte du facteur d'incertitude sur la détermination de la densité moyenne effective. Pour raison de clarté, les 10 points représentés sur la figure (5.23) ayant une densité proche de  $1.4 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$  ont été moyennés et représentés par un seul point, avec une barre d'erreur en conséquence.

qui, dans ce cas, n'est induit que par  $\sim 1/5^e$  des atomes, ceux dans l'état  $|F = 2, m = 0\rangle$ . De plus, le "cavity pulling" a le signe opposé du cas précédemment rencontré, conformément à la remarque (1) du § 4.4.4. Le déplacement collisionnel en fonction de la densité moyenne effective est représenté sur la figure (5.26) après soustraction du "cavity pulling". Les barres d'erreur ont été calculées de la même façon que dans le § précédent, et les droites en trait plein fin bornent le domaine d'acceptance à  $1\sigma$  en tenant compte de l'incertitude statistique de la mesure différentielle de fréquence, de l'incertitude sur le coefficient de renormalisation, et de l'incertitude sur la détermination de la densité moyenne effective. Notre résultat s'écrit :

$$K_{collisions}^{-2, \text{ tous } m_F} = -56(12) \begin{pmatrix} -39 \\ +24 \end{pmatrix} \times 10^{-24} \text{ cm}^3 \quad (5.36)$$

et est en accord à  $1\sigma$  avec la prédiction théorique de C. Williams, qui s'écrit :

$$K_{collisions}^{-2, \text{ tous } m_F, \text{ théorique}} = -33.2 \times 10^{-24} \text{ cm}^3 \quad (5.37)$$

### Cas où on a sélectionné les atomes dans $|F = 1, \text{ tous } m_F\rangle$ .

On a enfin effectué les mesures de déplacement collisionnel dans la configuration où les niveaux  $|F = 1, m = 0, \pm 1\rangle$  sont initialement équipés. Les mesures ont été effectuées à température ambiante. Le "cavity pulling", induit uniquement par  $\sim 1/3$  des atomes, ceux dans l'état  $|F = 1, m = 0\rangle$  a le même signe que dans le § 5.6.2. Le déplacement collisionnel en fonction de la densité moyenne effective est représenté sur la figure (5.27) après soustraction du "cavity pulling", avec les mêmes conventions que sur la figure (5.26). Notre résultat s'écrit :

$$K_{collisions}^{-1, \text{ tous } m_F} = -68(19) \begin{pmatrix} -54 \\ +33 \end{pmatrix} \times 10^{-24} \text{ cm}^3 \quad (5.38)$$

et est en accord à  $1\sigma$  avec la prédiction théorique de C. Williams, qui s'écrit :

$$K_{collisions}^{-1, \text{ tous } m_F, \text{ théorique}} = -40.9 \times 10^{-24} \text{ cm}^3 \quad (5.39)$$

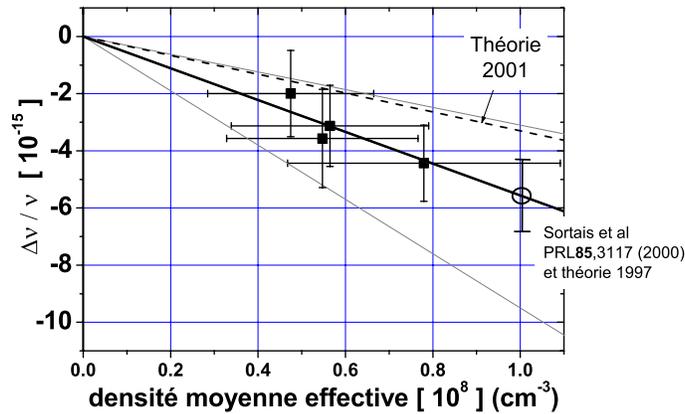


FIG. 5.26 – Mesure différentielle du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  par préparation des atomes dans les niveaux  $|F = 2, \text{ tous } m_F\rangle$ . L'algorithme de meilleure approximation linéaire, tenant compte des barres d'erreur verticales, donne le résultat tracé en trait plein épais. Le symbole rond à  $\bar{n} = 10^8 \text{ cm}^{-3}$  représente la barre d'erreur liée à l'incertitude statistique de mesure différentielle de fréquence, et à l'incertitude de renormalisation du nombre d'atomes. Les traits pleins fins bornent le domaine d'acceptance à  $1\sigma$  tenant compte en plus de l'incertitude de 40% sur la détermination de la densité moyenne effective. La prédiction théorique de C. Williams et al est représentée en tirets.

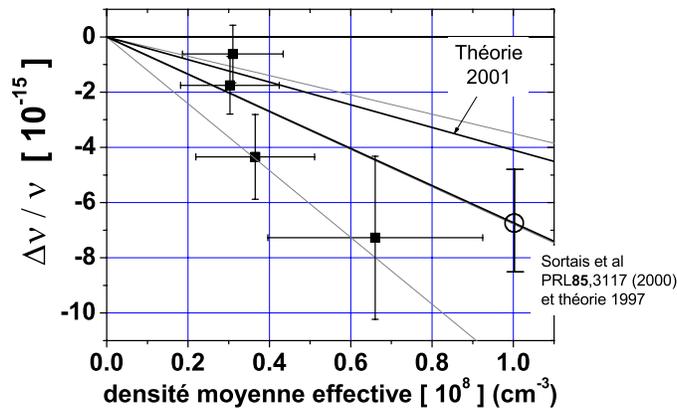


FIG. 5.27 – Mesure différentielle du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  par préparation des atomes dans les niveaux  $|F = 1, \text{ tous } m_F\rangle$ . L'algorithme de meilleure approximation linéaire, tenant compte des barres d'erreur verticales, donne le résultat tracé en trait plein épais. Le symbole rond à  $\bar{n} = 10^8 \text{ cm}^{-3}$  représente la barre d'erreur liée à l'incertitude statistique de mesure différentielle de fréquence, et à l'incertitude de renormalisation du nombre d'atomes. Les traits pleins fins bornent le domaine d'acceptance à  $1\sigma$  tenant compte en plus de l'incertitude de 40% sur la détermination de la densité moyenne effective. La prédiction théorique de C. Williams et al est représentée en tirets.

## 5.7 Conclusion

Ce chapitre a présenté les résultats des mesures de déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ , ainsi que les méthodes employées pour obtenir ces résultats.

Le déplacement collisionnel a été mesuré de manière simultanée avec le "cavity pulling". La méthode employée est une méthode différentielle en nombre d'atomes, qui permet de rejeter les fluctuations ne dépendant pas du nombre d'atomes (dérive du maser à hydrogène, température, champ magnétique ...). Par variation de la température de la cavité, elle a permis de tester complètement le modèle analytique du "cavity pulling" développé au chapitre 4.

La mesure absolue du déplacement collisionnel requiert de déterminer de manière absolue le nombre d'atomes dans la fontaine.

Le premier volet de ce problème concerne la détermination des paramètres géométriques du nuage : distribution de positions initiales, et distribution de vitesses des atomes. Il a été traité au chapitre 4 et est lié à la modélisation de l'évolution du nuage dans la fontaine.

Le deuxième volet de ce problème concerne la détermination absolue du nombre d'atomes dans la fontaine. Pour cela, 4 méthodes indépendantes ont été utilisées, qui donnent des résultats concordants à leurs barres d'erreurs près :

- Par absorption d'un faisceau laser à travers le piège magnéto-optique, le nombre initial d'atomes lancés a pu être déterminé avec une incertitude de type B de  $\sim 9\%$ . Cette méthode permet de confirmer les mesures de la taille initiale du nuage effectuées par imagerie CCD.
- Par calibration de la détectivité de notre système de détection, le nombre d'atomes détectés a été déterminé avec une incertitude de type A de  $\sim 15\%$ , et de type B de  $\sim 13\%$ . Cette calibration a été effectuée par calibration ou modélisation de chaque maillon de la chaîne de détection.
- Par "cavity pulling", le nombre d'atomes présents dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage,  $N_{cav}$ , a été déterminé avec une incertitude de type A de 11%. L'amplitude de la signature dispersive du cavity pulling dépend en effet de deux paramètres expérimentaux seulement :  $N_{cav}$  et  $Q_c$  (facteur de qualité en charge de la cavité micro-onde). Ce dernier est par ailleurs mesuré indépendamment à mieux que 1%.
- Par mesure du bruit sur la probabilité de transition,  $\sigma_{\delta P}$ , le nombre d'atomes détectés a été déterminé à mieux que 20%. Cette méthode a été décrite au chapitre 3.

Ces 4 méthodes sondent le nombre d'atomes dans la fontaine à des instants différents de l'évolution du nuage. La simulation Monte Carlo, qui prend en compte les paramètres d'évolution du nuage, permet de les relier les unes aux autres. Elle permet de vérifier que l'on a une compréhension cohérente de tous les paramètres et de leur incidence sur l'évolution du nuage.

Le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  a été mesuré dans trois configurations, faisant intervenir soit les seuls niveaux d'horloge ( $m = 0$ ), soit en présence de populations dans les autres sous-niveaux Zeeman. Les résultats sont résumés dans le tableau (5.7).

Dans la configuration de préparation dans  $|F = 1, m = 0\rangle$ , qui correspond au fonctionnement standard d'une fontaine, nous trouvons que le déplacement

Configuration de préparation initiale	$K_{coll}^{experimental}$ (cm <sup>3</sup> )	$K_{coll}^{theorique}$ (cm <sup>3</sup> ) [116]	$K_{coll}^{theorique}$ (cm <sup>3</sup> ) en 1997 [12] → en 2002 [68]
$ F = 1, m = 0\rangle$	$-8(22) \begin{pmatrix} +28 \\ -35 \end{pmatrix} \times 10^{-24}$	$-71.7 \times 10^{-24}$	$-117.1 \times 10^{-24} \rightarrow -72.5 \times 10^{-24}$
$ F = 1, \text{ tous } m_F\rangle$	$-68(19) \begin{pmatrix} +33 \\ -54 \end{pmatrix} \times 10^{-24}$	$-40.9 \times 10^{-24}$	$-67.3 \times 10^{-24} \rightarrow -41.5 \times 10^{-24}$
$ F = 2, \text{ tous } m_F\rangle$	$-56(12) \begin{pmatrix} +24 \\ -30 \end{pmatrix} \times 10^{-24}$	$-33.2 \times 10^{-24}$	$-55.6 \times 10^{-24} \rightarrow -32.8 \times 10^{-24}$

TAB. 5.7 – Comparaison de nos résultats de déplacement collisionnel [148] avec les récentes prédictions théoriques de C. Williams et al [116] et de B. Verhaar et al [12, 68].

collisionnel est compatible avec une valeur nulle. Le traitement de l'ensemble de nos mesures de fréquences fournit pourtant une incertitude statistique de  $3.3 \times 10^{-16}$  en valeur relative.

En tenant compte de l'incertitude de 40% sur la détermination absolue de la densité moyenne effective, le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  vaut au maximum  $-43 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$  à  $1\sigma$ . Cette valeur est inférieure d'un facteur 70 au déplacement collisionnel du Cs, qui a été récemment mesuré au BNM-LPTF (cf. chapitre 6), et qui est de l'ordre de  $-3 \times 10^{-21} \text{ cm}^3$ .

Le rapport des déplacements collisionnels mesurés, entre le Cs et le  $^{87}\text{Rb}$ , est donc encore plus élevé que celui prédit en 1997 [12].

Ceci tient d'une part au fait que le travail de modélisation de l'évolution du nuage a permis de calibrer plus correctement la densité moyenne effective, à la fois pour le Cs et pour le Rb. Il en résulte que le déplacement collisionnel du Cs est plus élevé que celui mesuré avant le début de ce travail, d'un facteur  $\sim 1.5$ . Nous verrons d'ailleurs au chapitre 6 que selon des prédictions théoriques récentes sur le Cs [116], le déplacement collisionnel du Cs serait encore plus élevé que celui actuellement mesuré, d'un facteur  $\sim 1.7$ .

Et d'autre part, les prédictions théoriques sur le  $^{87}\text{Rb}$  ont évolué dans le sens d'une diminution du déplacement collisionnel, d'un facteur  $\sim 1.6$  par rapport à 1997 [12, 116, 68].

Il reste que les prédictions théoriques sur le  $^{87}\text{Rb}$  sont encore supérieures d'un facteur 1.7 par rapport au maximum acceptable, à  $1\sigma$ , pour nos mesures de déplacement collisionnel. Nos résultats sont par ailleurs en accord avec la théorie à  $2\sigma$ .

Pour les deux autres configurations, nos résultats expérimentaux sont en bon accord avec les prédictions de 1997 [12]. Depuis, ces prédictions ont été abaissées d'un facteur  $\sim 1.6$ . Elles sont actuellement en accord à  $1\sigma$  avec nos résultats expérimentaux. Ces deux dernières configurations constituent un test de cohérence des prédictions théoriques des longueurs de diffusion. Nos résultats apportent de ce fait une information complémentaire au travail de modélisation des potentiels moléculaires du  $^{87}\text{Rb}$ .

Enfin, il faut noter que du fait de son déplacement collisionnel particulièrement faible, le  $^{87}\text{Rb}$  est un atome plus favorable que le Cs pour la réalisation de fontaines de grande exactitude. Comme on l'a mentionné en introduction de cette thèse, il permet de relâcher le compromis stabilité/exactitude, difficile dans le cas du Cs. Par exemple, pour une densité moyenne effective  $\bar{n} = 1.5 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$ , le déplacement collisionnel est de  $6.5 \times 10^{-16}$ , c'est à dire plus faible que l'exactitude actuelle de  $10^{-15}$  des fontaines à Cs. On peut donc, avec le  $^{87}\text{Rb}$  atteindre une exactitude équivalente à celle des fontaines actuelles, sans même avoir besoin de mesurer le déplacement collisionnel.

De plus, dans ces conditions, le nombre d'atomes détectés est typiquement de  $6 \times 10^6$ . Le bruit de projection quantique limite alors la stabilité de la fontaine à  $3 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ , qui permet d'atteindre  $10^{-15}$  en 15 minutes. Dans les mêmes conditions, le déplacement collisionnel du Cs vaut  $4.5 \times 10^{-14}$ . Les dérives des nombres d'atomes, non maîtrisables au niveau de 2%, entraînent alors une dérive de la stabilité, qui ne décroît donc en général pas en  $\tau^{-1/2}$  jusqu'à  $10^{-15}$ . Nous verrons dans le chapitre 6 comment contourner cette difficulté, particulièrement

ardue dans le cas du Cs, si on veut améliorer l'exactitude des fontaines à Cs dans la gamme des  $10^{-16}$ .

L'exactitude actuelle des fontaines Cs étant de  $10^{-15}$ , il est donc permis de penser que l'utilisation du  $^{87}\text{Rb}$  permettra d'atteindre une exactitude de 1 à  $2 \times 10^{-16}$  dans les fontaines atomiques, sous réserve que d'autres effets ne limitent à leur tour l'évaluation à ce niveau (gradient de phase, fuites micro-ondes ...).



## Chapitre 6

# La fontaine double Rb-Cs : deux alcalins dans une même horloge !

### 6.1 Introduction et principe de fonctionnement

Ce chapitre est dédié à la fontaine *RbCs*. Comme on l'a déjà mentionné à la fin du chapitre 3, faire fonctionner deux horloges avec deux alcalins différents dans le même appareil est métrologiquement justifié. En effet, il est possible de rejeter, dans la comparaison de leurs fréquences de transition respectives, certaines incertitudes de type B dépendant de paramètres communs aux deux atomes (du moins partiellement) : fluctuations de la température du rayonnement, fluctuations du champ magnétique, fluctuations de phase de l'oscillateur d'interrogation. De plus, la synchronisation des cycles d'interrogation doit être plus aisée lorsque les nuages d'atomes froids effectuent leurs vols balistiques dans le même appareil (même géométrie, mêmes commandes informatisées) que lorsqu'il s'agit de deux appareils différents. A terme, l'horloge *RbCs* doit donc permettre d'améliorer sensiblement le test de variation temporelle de la constante de structure fine  $\alpha$ . De plus, nous avons porté une attention constante à tous les détails de réalisation de cette horloge, tirant bénéfice de l'expérience acquise avec les horloges précédentes.

Il est hors de question de passer ici en revue toutes les améliorations apportées. Je n'en développerai que deux, sur lesquelles j'ai passé près de 6 mois, pendant ma dernière année de thèse, et qui constituent deux points clé pour une évaluation de la fontaine *RbCs* au niveau de  $10^{-16}$  : d'une part, l'accord des deux cavités micro-ondes d'interrogation, l'une relativement à l'autre; et d'autre part, la mesure et la réduction des fuites micro-ondes dans la fontaine *RbCs* (nous avons vu que les fuites micro-ondes avaient un effet prédominant dans le bilan d'exactitude de la fontaine *Rb*). Le contrôle de la température du rayonnement, ainsi que le contrôle du champ magnétique, ont aussi fait l'objet d'une attention particulière, et sont développés en détail dans la thèse de S. Bize [30]. Ils ne sont ici que mentionnés, pour mémoire.

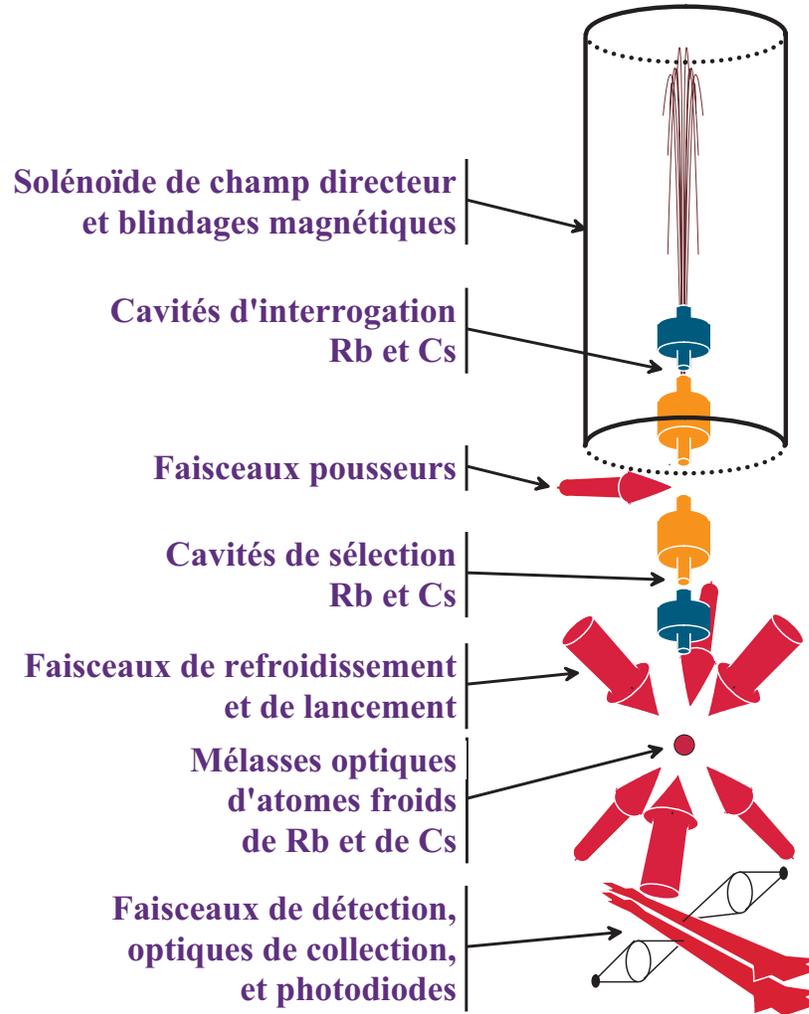


FIG. 6.1 – Schéma de principe de la fontaine double.

Après la fin des mesures de déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$ , nous avons entrepris la transformation de l'horloge *Rb* afin d'en faire une horloge double. Certaines parties de la fontaine *Rb* ont été récupérées : la boule de refroidissement, avec le système de détection, les blindages magnétiques externes, les collimateurs de refroidissement, la chaîne de synthèse *Rb*, le banc optique *Rb* ... D'autres parties ont été ajoutées ou profondément améliorées :

1. Le tube à vide est différent : il permet de lancer les atomes froids à  $\sim 60\text{cm}$  au-dessus de la cavité d'interrogation (au lieu de  $30\text{cm}$  dans la fontaine *Rb*). Il permet aussi d'accueillir les deux cavités d'interrogation des atomes de *Rb* et de *Cs*. Il permet de connecter deux pompes ioniques supplémentaires au sommet de la fontaine, et ainsi d'assurer un bon vide dans la zone d'interrogation<sup>1</sup>. On a corrélativement modifié le solénoïde du

champ magnétique directeur, ainsi que les blindages internes, cylindriques, qui entourent le tube à vide. Actuellement, la zone d'interrogation est entourée de 3 couches de blindages internes, et deux couches de blindages externes entourent, en plus, l'ensemble du corps de l'horloge.

2. La cavité simple de l'horloge *Rb* a été remplacée par deux cavités, l'une pour interroger le *Rb*, l'autre pour le *Cs* (cf. figure (6.1)).
3. Un deuxième banc optique a été monté pour pouvoir manipuler et détecter les atomes froids de *Cs*. Ce deuxième banc met en oeuvre des techniques légèrement différentes et un certain nombre d'améliorations par rapport au banc *Rb*. Il est détaillé dans la thèse de S. Bize [30]. Notamment, le montage en cavité étendue du laser de détection est différent ; sa fréquence est plus stable, et sa puissance est asservie.
4. On a mis en place deux cavités de sélection, pour le *Rb* et pour le *Cs*.
5. Deux jets thermiques au *Rb* et au *Cs* ont été construits. Ils sont ralentis par un laser dont on balaie la fréquence ("laser chirping" en anglais). Par comparaison à la méthode précédente, qui consistait à charger la mélasse à partir d'une vapeur, cette méthode permet de charger plus d'atomes dans la mélasse.
6. Une deuxième chaîne de synthèse a été réalisée par le laboratoire d'électronique du BNM-LPTF, afin d'interroger les atomes de *Cs* à 9.2 GHz.

Sans compter toutes les améliorations effectuées au niveau du programme informatique pour automatiser les mesures de température, de profil de champ magnétique sur l'axe de la fontaine ...

À l'issue de cette thèse, il reste quelques points à réaliser, notamment le système optique permettant de mélanger les faisceaux laser issus des deux bancs optiques, à 852 nm et à 780 nm, afin de manipuler simultanément les deux alcalins au niveau de la zone de capture et de la zone de détection.

## 6.2 Quelques améliorations importantes de l'horloge double

### 6.2.1 Contrôle de la température du rayonnement

Un soin particulier a été porté au contrôle de la température dans la zone d'interrogation de la fontaine *RbCs*. Rappelons que le déplacement de la fréquence de transition atomique induit par le rayonnement équivalent au corps noir est

$$\Delta\nu_{at} = K_{BB} \left( \frac{\mathcal{T}}{300} \right)^4 \times \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{\mathcal{T}}{300} \right)^2 \right)$$

où la température  $\mathcal{T}$  s'exprime en kelvins, et où on n'a négligé les termes d'ordre supérieur en  $\mathcal{T}^8$  ... Le tableau (6.1) résume les valeurs obtenues pour le déplacement relatif de fréquence à  $\mathcal{T} = 300$  K, ainsi que la sensibilité de ce déplacement à une variation de la température.

Notons que si on cherche à évaluer l'incertitude totale sur le déplacement relatif de fréquence lié au rayonnement du corps noir, il faut tenir compte, d'une

<sup>1</sup>On évite ainsi les éventuels problèmes liés aux collisions entre atomes froids et atomes chauds pendant le vol balistique ...

part, de l'incertitude liée à la température (sensibilité en température de l'effet), mais aussi des incertitudes sur les constantes  $K_{BB}$  et  $\varepsilon$ , cette dernière n'étant pas connue dans le cas du Rb. Ces incertitudes ne sont pas négligeables au niveau de  $10^{-16}$ , comme on le voit dans le tableau (6.1).

Notons aussi que pour le test de  $\dot{\alpha}/\alpha$ , garantir la stabilité de la température entre deux comparaisons de fréquence est la seule chose importante. Les fluctuations de température étant corrélées pour les deux alcalins, dans la fontaine double, on voit d'après le tableau (6.1) que 74% des fluctuations sont rejetées dans une telle comparaison. La sensibilité relative en température du rapport des fréquences hyperfines du Rb et du Cs n'est plus que de  $6 \times 10^{-17} \text{ K}^{-1}$ , ce qui relâche la contrainte sur la stabilité de température au niveau de 1 K pour une comparaison au niveau de  $10^{-16}$ .

Alcalin	déplacement relatif de fréquence	sensibilité relative en température	incertitude liée à $K_{BB}$	incertitude liée à $\varepsilon$
Rb	$-1.26 \times 10^{-14}$	$-1.7 \times 10^{-16} \text{ K}^{-1}$	$1.3 \times 10^{-16}$	?
Cs	$-1.71 \times 10^{-14}$	$-2.3 \times 10^{-16} \text{ K}^{-1}$	$3.2 \times 10^{-17}$	$2.4 \times 10^{-17}$

TAB. 6.1 – *Effet du rayonnement du corps du noir, à 300 K, sur la fréquence de transition atomique entre niveaux d'horloge du Rb et du Cs. L'incertitude relative sur  $K_{BB}$  est de  $2 \times 10^{-3}$  pour le Cs [53], et  $10^{-2}$  pour le Rb [58]. L'incertitude sur  $\varepsilon$  est de 10% sur le Cs [53], et  $\varepsilon$  est inconnu actuellement pour le Rb.*

Le but ultime étant d'atteindre un exactitude de  $10^{-16}$  pour la fontaine  $RbCs$ , nous avons cherché à contrôler l'effet du rayonnement du corps noir à mieux que  $10^{-16}$ . Ceci a été effectué de la manière suivante :

1. La mesure de la température est réalisée au moyen de 3 résistances de platine  $100\Omega$  en contact thermique avec le tube à vide ((1) sur la figure (6.2)) en 3 points répartis sur sa longueur. Ces résistances, très sensibles à la température ( $\sim 0.38 \Omega \cdot \text{K}^{-1}$ ), sont mesurées très précisément (méthode à 4 fils) avec une incertitude de type B de  $\pm 14 \text{ m}\Omega$  et une incertitude de type A de  $\pm 5 \text{ m}\Omega$ . Elles permettent donc une mesure des variations de température avec une sensibilité de  $\pm 13 \text{ mK}$ . La mesure absolue de la température est quant à elle assurée à mieux que 0.2 K (spécification du fabricant). De plus, afin de mesurer les gradients résiduels de température dans la zone d'interrogation, nous avons effectué une calibration relative des 3 résistances au niveau de  $\pm 7 \text{ m}\Omega$  (soit une incertitude de  $\pm 19 \text{ mK}$  sur un gradient de température).
2. Le contrôle de la température est effectué en deux temps. Un premier système de chauffage (dit "chauffage principal") consiste à faire circuler un courant continu dans un double fil torsadé très résistif en Arcap (matériau non magnétique) enroulé autour d'une enveloppe en aluminium (2) d'épaisseur 2 mm. Ce système permet de chauffer la zone d'interrogation jusqu'à une température légèrement inférieure à la température de consigne  $\mathcal{T}_0$  que l'on cherche à atteindre<sup>2</sup> ( $\mathcal{T}_0 \sim 299 \text{ K}$ ). On voit sur la figure (6.2) que cette enveloppe en aluminium est séparée de la zone d'interrogation, entre autres, par une couche de blindage magnétique (3). Ce

<sup>2</sup>La température de consigne  $\mathcal{T}_0$  est supérieure de  $\sim 4 \text{ K}$  à la température de la salle d'expérience, qui est régulée à  $\pm 0.5 \text{ K}$ .

système de chauffage peut donc fonctionner en permanence sans perturber les atomes.

Un deuxième système de chauffage (dit "chauffage d'appoint") permet d'apporter la quantité de chaleur nécessaire pour asservir la température à la température  $T_0$ . Il est constitué lui aussi de double fil d'Arcap torsadé, enroulé à même le tube à vide (1). Afin de minimiser la conductivité thermique avec l'extérieur, il est entouré d'une couche d'isolant thermique (*mylar*). En revanche, ce chauffage d'appoint est susceptible de perturber les atomes. Il ne fonctionne donc que de façon intermittente, en dehors de la phase d'interrogation, et le courant qui circule dans le fil d'Arcap est modulé à 100 kHz. L'énergie de chauffage requise pour asservir la température est ajustée en ajustant la durée pendant laquelle circule le courant.

3. L'homogénéisation de la température est d'abord assurée par le fait que le tube à vide est constitué d'un seul bloc (creux) en aluminium AU4G (bon conducteur thermique). Ensuite, les connections des fils de chauffage et la densité surfacique de fil chauffant ont été calculées de façon à homogénéiser la quantité de chaleur dissipée. Enfin, le système de chauffage principal est lui aussi isolé thermiquement de l'extérieur par une couche de polystyrène d'épaisseur 4 mm.
4. Notons que, afin d'éviter la présence de courants thermo-électriques entre le tube à vide (aluminium) et les cavités d'interrogation (cuivre), nous avons isolé électriquement, et de ce fait thermiquement, les cavités par rapport au tube. Ceci peut s'avérer gênant pour l'homogénéisation de la température, d'autant que les câbles coaxiaux qui alimentent les cavités constituent un excellent pont thermique entre les cavités et l'extérieur de la fontaine. Afin de remédier à ce problème, nous avons rajouté un chauffage d'appoint supplémentaire au niveau des passages coaxiaux vers l'extérieur. De plus, afin d'éviter les courants thermo-électriques au niveau de ces passages (câbles en cuivre, passages en titane), nous avons lié électriquement les gaines des différents câbles coaxiaux à l'aide de fils de cuivre.
5. Notons enfin que les cavités d'interrogation constituent un thermomètre, puisque les valeurs de leurs fréquences de résonance dépendent de la température. Nous verrons plus loin que nous avons effectué une calibration de ces fréquences de résonance en fonction de la température.

## 6.2.2 La cavité double d'interrogation

### Description de la cavité double

La figure (6.2) représente un plan de coupe des cavités d'interrogation pour le Rb (cavité inférieure (4)) et pour le Cs (cavité supérieure (5)), mises en place au coeur du tube à vide de la fontaine *RbCs*.

La conception de ces cavités a été guidée par le souci, d'une part, de réduire leur encombrement, afin de maximiser la hauteur de vol libre au-dessus des cavités, et d'autre part, d'homogénéiser le mieux possible le rayonnement thermique vu par les atomes au cours de leur vol balistique. Ceci a conduit à réaliser les deux cavités dans le même matériau (cuivre OFHC) et à rendre ces deux cavités solidaires mécaniquement : le chapeau supérieur de la cavité *Rb* et le chapeau inférieur de la cavité *Cs* constituent les deux faces parallèles d'une seule

et même pièce de cuivre, et sont séparés par un guide sous coupure commun. Une fois les corps de cavité et les chapeaux assemblés, tout se passe comme si on avait usiné les deux cavités dans un seul bloc de cuivre, très bon conducteur thermique. On parlera donc dans la suite de "cavité double" pour désigner l'ensemble de ces deux cavités, qui sont par construction à la même température  $\mathcal{T}$ . Elle est insérée au coeur du tube à vide, et grâce aux précautions d'isolation et d'homogénéisation thermique décrites précédemment, elle se trouve à la même température que celui-ci. Les atomes voient donc un rayonnement thermique homogène tout au long de leur trajectoire, à des fluctuations de l'ordre de 0.1 K près qui peuvent être contrôlées.

La cavité double a été réalisée à l'atelier de mécanique de l'Observatoire. C'est une pièce de mécanique difficile à réaliser, comme on le comprendra dans la suite; certaines cotes requièrent des tolérances de 0.01 mm, ce qui demande un usinage particulièrement soigné dans un matériau aussi mou que le cuivre OFHC. Les surfaces intérieures des cavités doivent par ailleurs présenter une rugosité la plus faible possible, afin de minimiser les pertes dans les parois et les gradients de phase du champ micro-onde qui y sont liés.

Chacune des deux cavités, cylindrique (rayon  $R \simeq$  hauteur  $H$ ) fonctionne sur le mode TE011 déjà décrit au § 4.4.1. La cavité inférieure est résonante à  $\sim 6.834\ 68$  GHz, tandis que la cavité supérieure est résonante à  $\sim 9.192\ 63$  GHz (cf. note<sup>3</sup>). Si on excepte les dimensions des trous de passage (6) des atomes (12 mm dans les deux cas), les deux cavités sont homothétiques l'une de l'autre dans le rapport de leurs longueurs d'onde guidées. Chacune d'elles possède, comme décrit au § 3.3.2, un tronçon de guide coaxial permettant de filtrer le mode TM111.

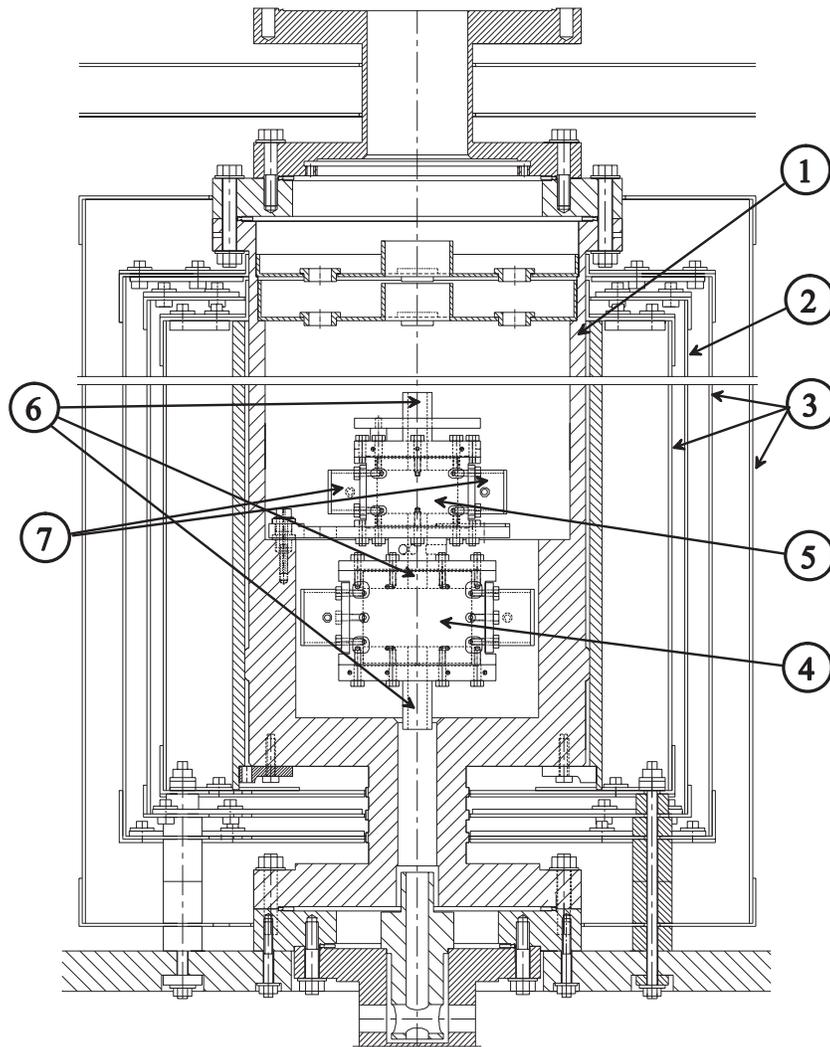
La méthode de couplage des champs micro-ondes d'interrogation aux cavités est différente de celle rencontrée dans la fontaine *Rb* (cf. § 3.3.2). Le raisonnement qui suit concerne uniquement la cavité *Cs*; il est le même pour la cavité *Rb*.

Le champ micro-onde d'interrogation est couplé à la cavité micro-onde de la manière suivante.

1. Il s'agit d'un couplage symétrique : on injecte le champ dans la cavité au moyen de deux petits iris diamétralement opposés pratiqués à mi-hauteur du corps de cavité (cf. figure (6.3)). De cette façon, on peut symétriser les puissances et les phases relatives des champs injectés de chaque côté, afin de minimiser le gradient de phase transverse vu par les atomes lorsqu'ils traversent la cavité. On peut aussi, si on souhaite mesurer le déplacement de la fréquence d'horloge induit par le gradient de phase transverse maximal, injecter du champ seulement d'un côté, et en chargeant sur  $50\ \Omega$  l'autre côté.
2. Le champ micro-onde d'interrogation n'est pas couplé à la cavité cylindrique directement *via* les iris, mais *via* deux cavités rectangulaires

---

<sup>3</sup>Cet ordre est délibéré : la stabilité de fréquence d'une fontaine simple est inversement proportionnelle au facteur de qualité  $Q_{at} = \nu_{at}/\Delta\nu$  de la résonance atomique. A largeur de frange de Ramsey  $\Delta\nu$  donnée, le *Rb* est donc défavorisé par rapport au *Cs*, puisque sa fréquence de transition atomique,  $\nu_{at}$ , est plus faible. On cherche à compenser cela, du moins partiellement, en augmentant la durée  $T = 1/(2\Delta\nu)$  de la phase d'interrogation des atomes de *Rb* par rapport au *Cs*. C'est la raison pour laquelle la cavité *Rb* est en dessous de la cavité *Cs*.



- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| ① tube à vide  | ④ cavité Rb                   |
| ② enveloppe en aluminium pour le "chauffage principal" | ⑤ cavité Cs                   |
| ③ blindages magnétiques                                | ⑥ trous de passage des atomes |
|  | ⑦ cavités latérales Cs        |

FIG. 6.2 – Plan de la zone d'interrogation de la fontaine RbCs, avec la cavité double mise en place.

latérales (7). Le champ micro-onde d'interrogation est injecté dans ces cavités latérales au moyen d'antennes linéaires, lesquelles sont correctement orientées pour que le champ résonnant dans ces cavités latérales (mode TE101) se couple *via* les iris au mode TE011 de la cavité cylindrique. Les longueurs de ces cavités latérales sont ajustées de sorte que leurs fréquences de résonance soient égales à la fréquence de résonance de la cavité cylindrique; elles valent  $\lambda_g/2$ , où  $\lambda_g$  est la longueur d'onde guidée du mode TE101. De cette façon, les positions des iris correspondent à des noeuds du champ résonnant dans les cavités latérales. Le champ résonnant dans chaque cavité latérale se couple donc faiblement au champ résonnant dans la cavité cylindrique. Le facteur de qualité de la cavité cylindrique chute néanmoins de  $\sim 27000$  (valeur proche du facteur de qualité intrinsèque théorique<sup>4</sup>) à  $\sim 7000$  lorsqu'on la couple symétriquement aux cavités latérales; les cavités latérales ont, elles, un facteur de qualité inférieur à 1000.

3. Les câbles coaxiaux qui guident le champ micro-onde d'interrogation jusqu'aux cavités latérales ont une longueur de  $\sim 1.2$  m. Ils sont connectés au niveau de la zone supérieure de la fontaine, et à l'extérieur des blindages magnétiques extérieurs, *via* des passages (SMA vide)-(SMA air).

L'ajustement des longueurs des antennes de couplage a été réalisée de manière à ce que la cavité double munie de ses cavités latérales soit adaptée à l'impédance  $50\Omega$  des câbles coaxiaux de couplage. Dans cette situation, les fréquences de résonance des cavités d'interrogation sont insensibles aux connections et à la longueur des câbles micro-ondes extérieurs à la fontaine (pourvu qu'ils soient adaptés  $50\Omega$ ). De plus, l'adaptation  $50\Omega$  est la configuration qui minimise la réflexion, par la cavité double, du champ micro-onde injecté; elle minimise donc aussi la puissance à injecter pour réaliser une impulsion  $\pi/2$ , et donc les fuites micro-ondes potentielles dans la salle d'expérience.

Les différentes pièces constituant la cavité double sont assemblées par soudure à l'étain (antennes, court-circuits) et par écrasement de joints en indium (cavités latérales sur cavité cylindrique, chapeaux de cavités sur corps de cavités).

Enfin, les faces planes intérieures des cavités d'interrogation ont été polies optiquement<sup>5</sup>. La rugosité obtenue pour ces miroirs en cuivre a été mesurée et vaut  $\sim 10$  nm pic à pic. Ce polissage a pour but de minimiser les pertes par conduction dans les parois : on calcule en effet que dans une cavité cylindrique pour laquelle rayon=longueur, et pour le mode TE011, la somme des pertes dans les deux chapeaux est deux fois supérieure aux pertes dans les parois latérales<sup>6</sup>. Nous avons noté une augmentation du facteur de qualité d'un facteur 1.5 à 2 par comparaison des mesures de facteur de qualité avant et après polissage des chapeaux. Cette augmentation est possiblement liée à la fois au polissage et aux techniques de nettoyage chimique mises au point entre temps.

<sup>4</sup>On calcule que pour une cavité telle que rayon=longueur, et un cuivre de conductivité  $\sigma = 5.8 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ , le facteur de qualité intrinsèque lié aux pertes dans les parois est de 26600 à 9.2 GHz et de 31000 à 6.8 GHz ([149], p.45). Ces valeurs sont approximatives dans la mesure où la conductivité dépend de la fréquence et de la température, varie d'un type de cuivre à l'autre, et est sensible à l'état d'oxydation du cuivre en surface.

<sup>5</sup>Les surfaces latérales, cylindriques, n'ont pas été polies pour des raisons techniques.

<sup>6</sup>Calcul prenant en compte la distribution de courant surfacique pour le mode TE011.

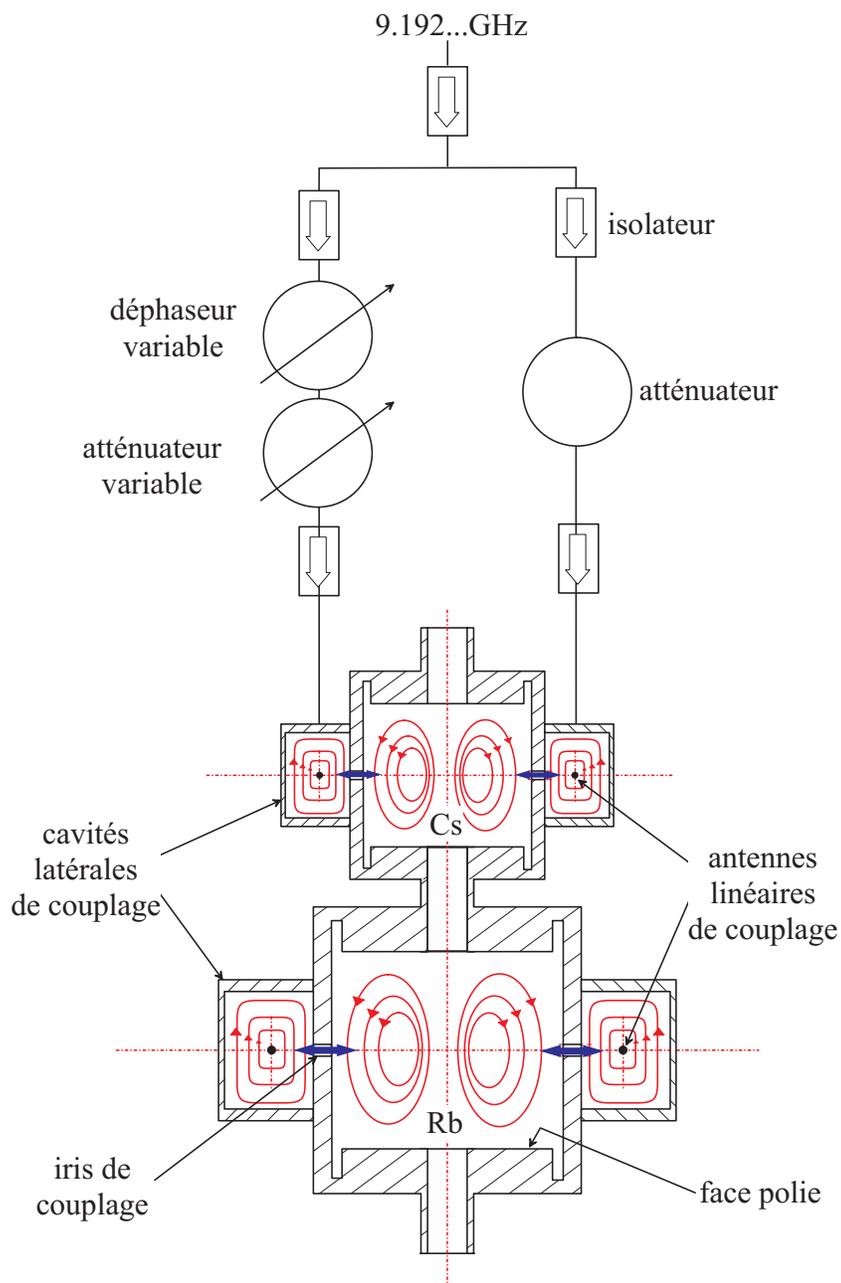


FIG. 6.3 – Schéma de principe de la cavité double de la fontaine  $RbCs$ , avec le système d'équilibrage des puissances et des phases. On n'a représenté que le système d'équilibrage de la cavité  $Cs$ . Celui pour la cavité  $Rb$  est équivalent.

Ce polissage a de plus l'avantage d'améliorer considérablement l'état de surface près des trous de passage des atomes : on a par exemple observé qu'une fois polis, les chapeaux des cavités s'oxydaient beaucoup moins vite à l'air qu'avant d'être polis. De plus, ceci nous a obligés à mettre en place une procédure de nettoyage chimique des surfaces particulièrement soignée, qui améliore encore la conductivité des surfaces, et révèle la moindre poussière ou trace d'eau (cf. annexe pour la procédure de nettoyage chimique). Même si leurs effets n'ont pas encore été mesurés, tous ces éléments vont dans le sens d'une amélioration de l'homogénéité de phase dans les cavités d'interaction, particulièrement au voisinage du passage des atomes.

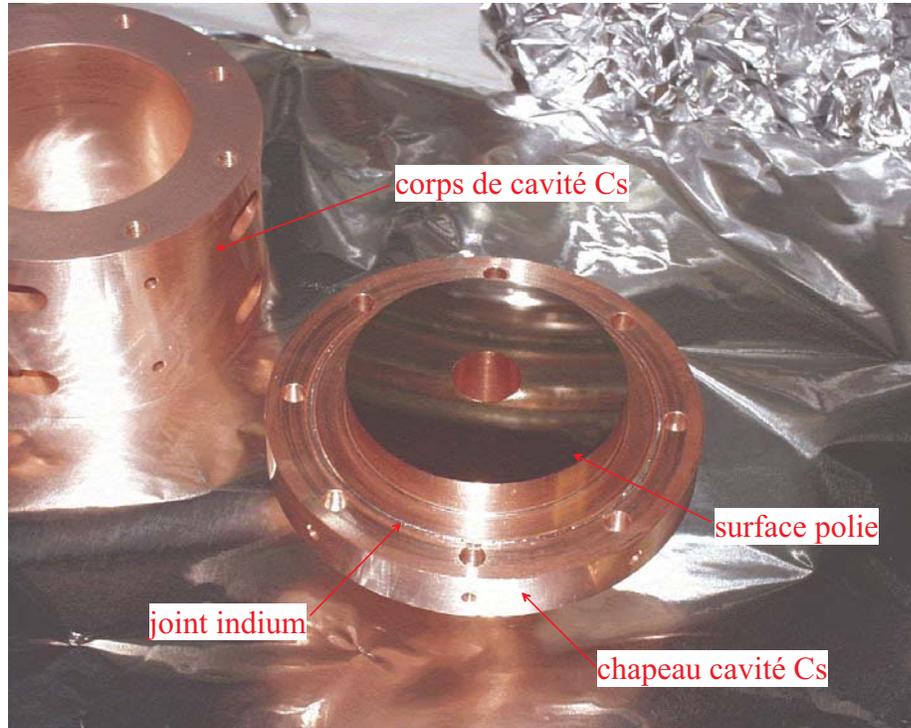


FIG. 6.4 – Photographie du chapeau supérieur Cs de la cavité double de la fontaine RbCs du BNM-LPTF.

La figure (6.4) est une photographie de l'un des deux chapeaux Cs de la cavité double. On peut y voir notamment l'état de surface poli optiquement (on voit très clairement l'image par réflexion, dans le miroir ainsi obtenu, d'un objet placé au-dessus du chapeau), ainsi que l'un des joints à l'indium, utilisés lors de l'assemblage des chapeaux sur le corps de cavité.

La figure (6.5) est une photographie de la cavité double, en cours de réglage final avant sa mise en place dans la fontaine. On peut y voir les différents éléments mentionnés précédemment : les cavités d'interaction, les guides latéraux de couplage, les câbles coaxiaux. La cavité double est ici réglée en température sur un support temporaire en aluminium. La procédure d'accord relatif des deux cavités se déroule sous vide, comme nous allons le voir dans la suite. L'ensemble du dispositif visible sur la photographie est donc, au cours de cette

procédure d'accord, inséré dans une enceinte à vide temporaire, avant d'insérer définitivement la cavité double au coeur de la fontaine.

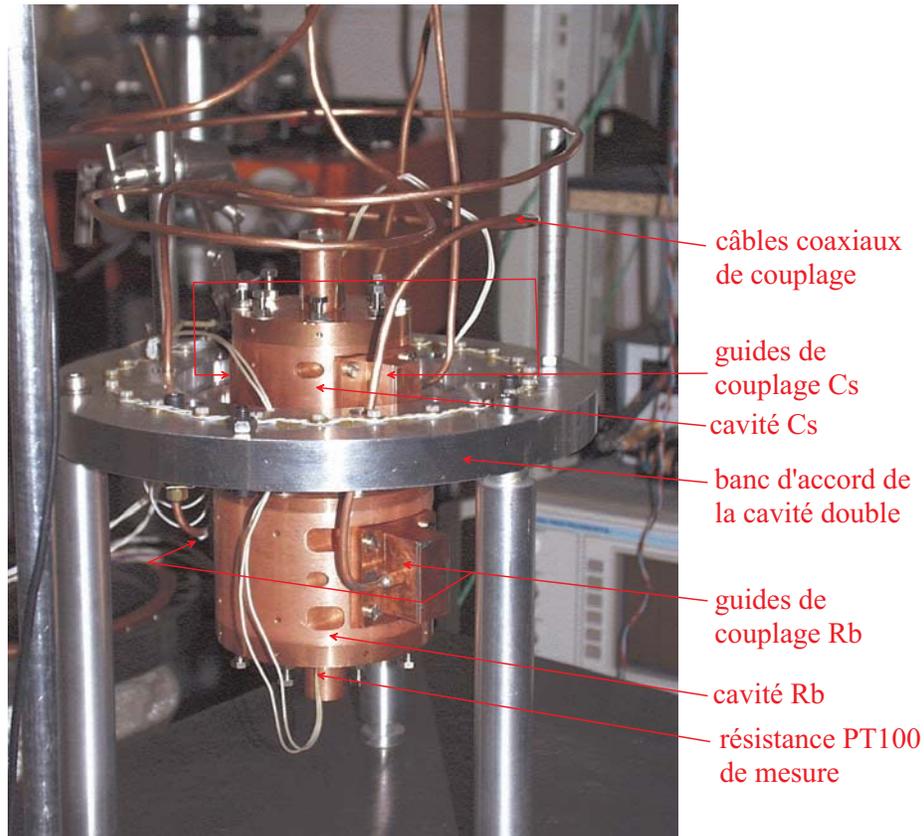


FIG. 6.5 – Photographie du dispositif d'accord de la cavité double de la fontaine  $RbCs$  du BNM-LPTF.

### Position du problème de l'accord relatif des deux cavités d'interrogation

Nous avons vu au chapitre 5 qu'il est important que les cavités micro-ondes d'interrogation soient accordées sur la résonance atomique, car on souhaite minimiser le "cavity pulling". Ce paragraphe explique comment nous avons résolu le problème ardu de l'accord simultané des deux cavités d'interrogation de la fontaine  $RbCs$ .

La fréquence de résonance d'une cavité micro-onde cylindrique est une fonction de deux variables indépendantes : son rayon  $R$  et sa hauteur  $L$ . Pour le mode  $TE_{011}$ , sous vide, elle est donnée par :

$$\nu^{cav} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{x'_{01}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \quad (6.1)$$

En général, pour accorder une cavité micro-onde sur la résonance atomique, on procède en deux étapes.

1. On s'approche de la résonance par retouches successives de la hauteur<sup>7</sup> de la cavité,  $L$ . La résolution d'usinage, au mieux de 0.01 mm sur du cuivre OFHC, permet de s'approcher par valeurs supérieures de la résonance atomique jusqu'à  $\sim +1.2$  MHz dans le cas d'une cavité  $Cs$  (cf. tableau (6.2) pour les applications numériques). Ceci constitue un premier réglage grossier.
2. On ajuste ensuite la fréquence de la cavité sur la résonance atomique en jouant sur sa température. Ceci correspond à un réglage fin (sensibilité de  $-157$  kHz.K<sup>-1</sup> pour le Cs), qui nécessite en général de chauffer la cavité de  $\sim 7^\circ\text{C}$  par rapport à la température du réglage grossier. On peut considérer qu'il s'agit d'un réglage fin de la longueur de la cavité, puisque par dilatation le rapport  $L/R$  reste inchangé.

$$\frac{\Delta\nu^{cav}}{\nu^{cav}} = -\frac{\Delta L}{L} = -\alpha \times \Delta\mathcal{T}$$

où  $\alpha \simeq 1.7 \times 10^{-5}$  désigne le coefficient de dilatation du cuivre OFHC (valeur mesurée).

Alcalin	$L$ (mm)	$R$ (mm)	$V_{mode}$ (cm <sup>-3</sup> )	$\partial\nu^{cav}/\partial\mathcal{T}$	$\partial\nu^{cav}/\partial L$
Cs	26.8	25	6.76	$-157$ kHz.K <sup>-1</sup>	$-125$ Hz.nm <sup>-1</sup>
Rb	36	33.6	16.42	$-114$ kHz.K <sup>-1</sup>	$-68$ Hz.nm <sup>-1</sup>

TAB. 6.2 – Quelques valeurs associées aux cavités d'interrogation  $Cs$  et  $Rb$  de la fontaine  $RbCs$ . Les sensibilités des fréquences de résonance à la température  $\mathcal{T}$  et à la longueur  $L$  sont calculées à partir de (6.1). Elles sont en accord à  $\sim 7\%$  des valeurs mesurées expérimentalement.

Dans la fontaine double  $RbCs$ , les deux cavités d'interrogation ont même température, par construction. L'accord fin par la température ne permet donc pas de les accorder indépendamment, chacune sur la résonance atomique correspondante. Il ne reste donc comme paramètres ajustables que les hauteurs des cavités pour les accorder à résonance. Plus précisément, le problème se résume de la façon suivante.

Notons  $\nu_{Cs}^{cav}$  et  $\nu_{Rb}^{cav}$  les fréquences de résonance des cavités  $Cs$  et  $Rb$ ,  $L_{Cs}$  et  $L_{Rb}$  leurs hauteurs, et  $\nu_{Cs}$  et  $\nu_{Rb}$  les fréquences des transitions atomiques  $Cs$  et  $Rb$ . Le système :

$$\begin{cases} \nu_{Cs}^{cav}(L_{Cs}) = \nu_{Cs} \\ \nu_{Rb}^{cav}(L_{Rb}) = \nu_{Rb} \end{cases} \quad (6.2)$$

admet, à une température  $\mathcal{T}_0$  donnée, une unique solution en  $L_{Cs}$  et  $L_{Rb}$  et, pour cette solution,  $\mathcal{T}_0$  est la seule température pour laquelle ce système soit vérifié (car  $\partial\nu^{cav}/\partial\mathcal{T}$  est différent pour le  $Rb$  et pour le  $Cs$ ).

<sup>7</sup> Retoucher le diamètre d'une cavité cylindrique est plus difficile mécaniquement.

En supposant que l'une des équations ci-dessus soit vérifiée pour une température  $\mathcal{T}_0$  donnée, il s'agit donc de trouver une méthode d'usinage "suffisamment" fine pour réussir à accorder la seconde cavité à la même température. Il reste à savoir quel désaccord résiduel  $\Delta\nu_{cav} = \nu_i^{cav} - \nu_i$  on peut tolérer pour cette seconde cavité. La suite de ce paragraphe répond à cette question, d'abord en analysant les difficultés expérimentales, puis de manière quantitative, ce qui permettra d'en déduire les contraintes d'usinage.

**Quel désaccord résiduel peut-on tolérer pour les cavités micro-ondes ?  
Ou comment corriger le déplacement collisionnel du Cs à  $10^{-16}$  près ?**

Le désaccord maximal tolérable,  $\Delta\nu_{cav}$ , est lié au "cavity pulling" résiduel que l'on souhaite ne pas dépasser. Il est donc lié au nombre d'atomes  $N_{cav}$  passant dans la cavité au 1<sup>er</sup> passage et, de façon plus générale, au nombre d'atomes lancés dans la fontaine. De ce point de vue, le  $^{133}\text{Cs}$  et le  $^{87}\text{Rb}$  ne sont pas équivalents, et on est ramené une fois de plus au problème de la mesure simultanée du déplacement collisionnel et du "cavity pulling".

**Dans le cas du Cs, le déplacement collisionnel, très élevé, requiert d'être évalué en permanence si l'on souhaite pouvoir le corriger à  $\sim 10^{-16}$  près.** En effet, si on veut mesurer le déplacement collisionnel dans un temps raisonnable ( $\tau \sim 1$  jour), il est nécessaire de lancer un maximum d'atomes afin d'optimiser la stabilité à court terme; le déplacement collisionnel vaut dans ce cas quelques  $10^{-14}$ . Or nous avons vu au chapitre 5 combien la détermination absolue de la densité moyenne effective est sensible aux paramètres de distribution de vitesses et de positions initiales des atomes du nuage : les incertitudes du modèle dépassent largement 1%. Même avec une stabilité atteignant  $10^{-16}$  en fin d'intégration, il est donc impossible de corriger le déplacement collisionnel a posteriori en s'appuyant sur la simulation Monte Carlo. De plus, il est impossible de stabiliser les paramètres de distribution de vitesses et de positions au niveau de 1% sur des temps  $\tau \gtrsim 200$  s, ce qui signifie qu'en pratique la courbe de stabilité ne descendra pas jusqu'à  $10^{-16}$ , mais remontera bien avant à cause des dérives de ces paramètres.

La seule solution qui subsiste est donc la suivante, où on va supposer, pour ne pas obscurcir le raisonnement, que le "cavity pulling" est nul. Elle consiste à

1. mesurer la fréquence à haute densité,  $\nu_{HD}$ , et enregistrer les aires des signaux de temps de vol correspondants :  $A_{HD}$ ,
2. mesurer la fréquence à basse densité,  $\nu_{BD}$ , et enregistrer les aires des signaux de temps de vol correspondants :  $A_{BD}$  ;
3. ceci permet de calibrer le déplacement de fréquence en fonction de l'aire détectée :

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta A} = \frac{\nu_{HD} - \nu_{BD}}{A_{HD} - A_{BD}}$$

et de corriger les deux mesures de fréquence. On obtient ainsi la valeur de la fréquence de transition non perturbée par le déplacement collisionnel.

Ceci n'est en fait valable que si la relation qui lie aire détectée  $A$  et densité moyenne effective  $\bar{n}$  est linéaire, c'est à dire que le coefficient  $K = A/\bar{n}$  est le même à haute densité et à basse densité :

$$K_{HD} = K_{BD}$$

Dans ce cas, on a en effet, en notant  $\eta = \Delta\nu/\Delta\bar{n}$  le coefficient du déplacement collisionnel :

$$\Delta\nu = \frac{\eta}{K_{HD}} \times \Delta A$$

et l'extrapolation à aire détectée nulle permet de corriger effectivement du déplacement collisionnel.

En revanche, si  $K_{HD} \neq K_{BD}$ , on a :

$$\Delta\nu = \eta\Delta\bar{n} = \frac{\eta}{K_{HD}} \times \Delta A - \eta\bar{n}_{BD} \times \frac{K_{HD} - K_{BD}}{K_{HD}}$$

et on voit que l'extrapolation à aire nulle conduit à commettre une erreur sur la correction du déplacement collisionnel<sup>8</sup>.

De plus, même si la relation {aire-densité moyenne effective} est linéaire, le coefficient  $K$  fluctue dans le temps sur des échelles de temps caractéristiques de  $\sim 200$  s, à cause des variations temporelles des paramètres de la détection, et des paramètres des distributions de vitesses et de positions des atomes. Il est par conséquent nécessaire d'évaluer le coefficient  $K$  sur des temps plus courts, et ceci au niveau requis pour pouvoir corriger le déplacement collisionnel au niveau de  $10^{-16}$ . Le calcul correct de la correction moyenne appliquée à l'issue de  $N_{cycles}$  cycles d'intégration consiste alors à calculer :

$$\overline{\Delta\nu} = \frac{1}{N_{cycles}} \sum_{i=0}^{N_{cycles}} K_i \times \Delta A_i$$

et non pas

$$\overline{\Delta\nu} = \overline{K} \times \overline{\Delta A}$$

qui est bien sûr incorrecte, puisque  $K$  varie au cours du temps.

Par conséquent, les deux mesures à haute et basse densité doivent être réalisées par alternance avec une période  $\lesssim 200$  s (100 s à haute densité, suivi de 100 s à basse densité...), et les corrections de déplacement collisionnel, différentes d'un cycle d'alternance au suivant, doivent être calculées à l'issue de chaque cycle d'alternance<sup>9</sup>. En procédant de cette façon, l'écart type d'Allan des fluctuations de fréquence corrigées **successivement** des déplacements collisionnels décroît effectivement en  $\tau^{-1/2}$  jusqu'à  $\sqrt{2} \times 10^{-16}$ , bien que l'écart type d'Allan des fluctuations de fréquence **traitées dans leur ensemble** ne décroisse pas jusqu'à  $10^{-16}$ .

Ceci constitue d'ailleurs un test très sensible pour savoir si les corrections de déplacements ont été correctement calculées ou non. Une erreur de 5% sur la linéarité {aire-densité moyenne effective} entraîne une dérive de 5% sur la stabilité des fluctuations de fréquence, qui se voit très rapidement lorsqu'on a

<sup>8</sup> Remarquons qu'à ce jour nous n'avons pas encore trouvé de méthode réalisant la condition de linéarité entre aire détectée et densité moyenne effective avec une incertitude suffisamment faible pour être négligeable au niveau de  $10^{-16}$ . Pour qu'elle soit valable, une telle méthode doit permettre de faire varier le nombre d'atomes interrogés sans modifier ni leur distribution de vitesses, ni leur distribution de positions. Nous verrons que la meilleure méthode actuellement utilisée, qui consiste à faire varier la puissance de l'impulsion de sélection, n'assure cette linéarité qu'à quelques %, ce qui est insuffisant pour corriger le déplacement collisionnel au niveau de  $10^{-16}$ .

<sup>9</sup> Bien sûr, l'incertitude sur chaque correction, au bout de 200 s, est élevée (c'est la stabilité différentielle à  $\tau = 200$  s), mais elle décroît comme la racine carrée du nombre de cycles d'alternance, c'est à dire qu'elle vaut  $\sim 1.4 \times 10^{-16}$  à la fin de l'intégration différentielle.

une stabilité de  $3 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ , limitée par le bruit de projection quantique.

Le raisonnement précédent suppose que le "cavity pulling" est nul ou très petit devant le déplacement collisionnel. On a bien sûr intérêt à être dans ce cas. Dans le cas contraire, le problème est inextricable, puisqu'on mesure le déplacement de fréquence induit simultanément par le "cavity pulling" et par le déplacement collisionnel. On est alors incapable de corriger correctement ce déplacement de fréquence puisque les relations {aire-densité moyenne effective} et {aire-nombre d'atomes en cavité}, à supposer qu'elles soient linéaires, sont de toute façon différentes.

Donnons maintenant quelques chiffres réalistes. Nous nous placerons dans la configuration où les nuages de *Rb* et de *Cs* sont lancés à la même vitesse de  $4.3 \text{ m.s}^{-1}$ , et où le temps de cycle est le même dans les deux cas :  $T_c = 1.3 \text{ s}$ . Le tableau (6.3) donne alors les valeurs calculées des temps réels et effectifs utiles au problème, pour des impulsions  $\pi/2$  dans les deux cavités d'interrogation, et pour des profils de champ micro-onde sinusoïdaux sur l'axe (mode TE011).

Alcalin	$\tau_{cav}$ (ms)	$T$ (ms)	$\tau_{eff}$ (ms)	$T_{eff}$ (ms)
Cs	9.9	577	6.3	589
Rb	11.5	628	7.3	642

TAB. 6.3 – Quelques temps caractéristiques utiles dans l'horloge *RbCs*.  $\tau_{cav}$  représente la durée réelle de séjour des atomes, à chaque passage, dans leur cavité d'interrogation respective,  $T$  est le temps de vol au-dessus de la cavité,  $\tau_{eff}$  la durée effective de chaque passage à travers la cavité, tenant compte du profil du champ (cf. relation (1.19)), et  $T_{eff}$  la durée effective de l'interrogation de Ramsey (cf. relation (1.72)).

Nous supposons de plus que les deux cavités d'interrogation ont un facteur de qualité  $Q_c = 7000$ , qui est à peu près la valeur obtenue dans les deux cas après la procédure d'accord. Dans ces conditions, l'expression (4.104) du "cavity pulling" permet de calculer la sensibilité du "cavity pulling" au désaccord de la cavité micro-onde, autour du désaccord nul :

$$\frac{\partial(\Delta\nu_{Pulling})}{\partial(\Delta\nu_{cav})} = K_i \times \frac{\tau_{eff}}{T_{eff}} \times \frac{d\mathcal{D}}{d(\Delta\nu_{cav})} \times (-0.445) \quad (6.3)$$

où  $K_i$  est donné par l'expression (4.100) et pour l'alcalin "i", et où le 3<sup>e</sup> facteur du second membre est la pente à désaccord nul de la courbe de dispersion unité (cf. figure (4.27)). Elle vaut  $-4Q_c/\nu_{cav}$ . À partir des valeurs données dans les tableaux précédents, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta\nu_{Pulling}/\nu)}{\partial(\Delta\nu_{cav})}(Cs) &= -8.4 \times 10^{-29} \text{ Hz}^{-1} \cdot \text{atome}^{-1} \text{ pour le Cs} \\ \frac{\partial(\Delta\nu_{Pulling}/\nu)}{\partial(\Delta\nu_{cav})}(Rb) &= -6.7 \times 10^{-29} \text{ Hz}^{-1} \cdot \text{atome}^{-1} \text{ pour le Rb} \end{aligned} \quad (6.4)$$

où on a ramené cette sensibilité à  $N_{cav} = 1$  atome traversant la cavité.

Par ailleurs, la figure (6.6) montre la stabilité attendue à 1 s pour le *Cs* dans la fontaine *RbCs*. Cette stabilité est déduite des trois contributions principales

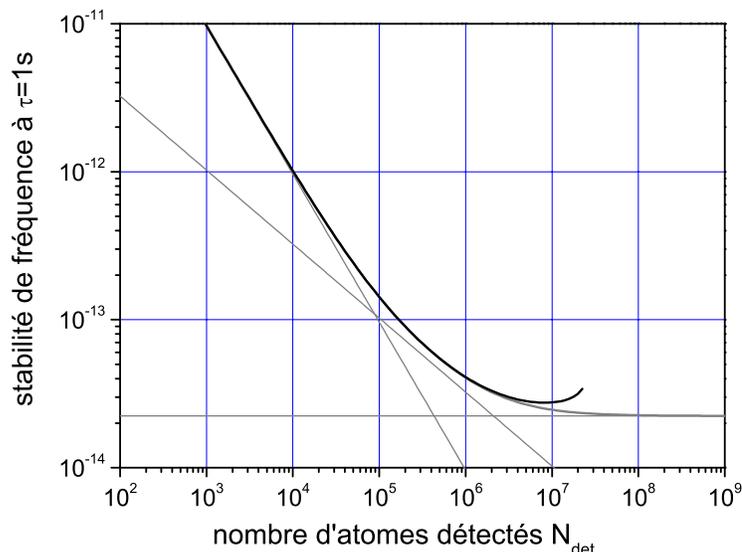


FIG. 6.6 – Estimation de la stabilité de fréquence à une seconde, sur le Cs et dans la fontaine RbCs, en fonction du nombre d'atomes détectés  $N_{det}$ . Les droites en gris sont les contributions de bruit de l'électronique de détection, de projection quantique, et de fréquence de l'oscillateur d'interrogation. La courbe en gris foncé représente la somme quadratique de ces contributions, en supposant qu'on détecte autant d'atomes qu'on le souhaite tout en gardant un temps de cycle proche de 1 s. La courbe en noir illustre la dégradation de la stabilité à très haut nombre d'atomes, liée au fait qu'il est nécessaire d'allonger le temps de chargement pour accroître le nombre d'atomes détectés, ce qui accroît aussi le temps de cycle  $T_c$  et dégrade la stabilité à 1 s comme  $\sqrt{T_c}$ .

de bruit : bruit des photodiodes et de l'électronique de détection, bruit de projection quantique, et bruit du signal micro-onde d'interrogation<sup>10</sup>. On voit que pour  $5 \times 10^6 \leq N_{det} \leq 10^7$ , la stabilité est optimale et vaut  $\sigma_y(\tau) \simeq 3 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ .

Pour le Rb, dans la fontaine RbCs, on attend le même type de courbe, à un facteur près lié au rapport des temps de vol au-dessus des cavités,  $T_{Cs}/T_{Rb}$  (les deux cavités micro-ondes ne sont pas à la même hauteur). On trouve alors que la stabilité optimale vaut, pour le Rb,  $\sigma_y(\tau) \simeq 2.7 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  pour  $5 \times 10^6 \leq N_{det} \leq 10^7$ .

<sup>10</sup> La très bonne stabilité de  $3 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  obtenue pour  $N_{det} \geq 10^7$  atomes est liée d'une part à l'utilisation, cette fois, de l'Oscillateur Cryogénique à Résonateur en Saphir comme oscillateur de filtrage, à la place du quartz BVA 5 MHz utilisé précédemment dans la fontaine Rb; et d'autre part à l'amélioration de la stabilité du laser de détection. Cette valeur est largement dominée par le bruit de phase produit dans les chaînes de synthèse, qui contribue pour  $2.5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ , le laser de détection ne contribuant que pour  $2.5 \times 10^{-15} \tau^{-1/2}$ . On estime actuellement qu'on peut abaisser d'environ 15 dB le bruit de phase en  $1/f$  en sortie de chaîne de synthèse, en utilisant des mélangeurs échantillonneurs Watkins-Johnson, moins bruyants. Ceci améliorerait la stabilité d'un facteur 5 à 6, et abaisserait le palier précédent à  $\sim 4.4 \times 10^{-15} \tau^{-1/2}$ .

Ces stabilités à court terme sont compatibles avec une correction du déplacement collisionnel au niveau de  $1.4 \times 10^{-16}$  après environ 2 jours d'intégration différentielle. Le tableau (6.4) donne les valeurs, dans les deux régimes de haute et basse densité, et pour les deux alcalins, les nombres d'atomes caractéristiques et le déplacement collisionnel associé. Pour les deux alcalins on prend  $N_{det} = 5 \times 10^6$  à basse densité, et  $N_{det} = 10^7$  à haute densité, et on suppose la linéarité entre  $N_{det}$ ,  $N_{cav}$ , et  $\bar{n}$ . Toutes les quantités sont donc divisées par 2 du régime haute densité au régime basse densité.

<b>Alcalin</b>	$N_{det}^{HD}$ ( $N_{det}^{BD}$ )	$N_{cav}^{HD}$ ( $N_{cav}^{BD}$ )	$\bar{n}_{HD}$ ( $\bar{n}_{BD}$ ) ( $\text{cm}^{-3}$ )	$(\Delta\nu/\nu)_{collisions}$
Cs	$10^7$ ( $5 \times 10^6$ )	$4 \times 10^7$ ( $2 \times 10^7$ )	$1.6 \times 10^7$ ( $0.8 \times 10^7$ )	$-2.4 \times 10^{-14}$
Rb	$10^7$ ( $5 \times 10^6$ )	$8.7 \times 10^7$ ( $4.4 \times 10^7$ )	$2 \times 10^7$ ( $10^7$ )	$-3 \times 10^{-16}$

TAB. 6.4 – Nombres d'atomes caractéristiques, en régime de haute densité atomique, dans la fontaine RbCs, pour une vitesse de lancement de  $4.3 \text{ m.s}^{-1}$  (les valeurs entre parenthèses représentent les valeurs à basse densité). Ces valeurs sont calculées en utilisant la simulation Monte Carlo décrite au chapitre 4. Les distributions de vitesses sont de type  $\mathcal{L}^b$ , avec  $b = 2.1$ ,  $v_c^{Cs} = 10.7 \text{ mm.s}^{-1}$ , et  $v_c^{Rb} = 18 \text{ mm.s}^{-1}$ . La taille caractéristique du nuage est, pour les deux alcalins, et dans les deux régimes à haute et basse densité,  $\sigma_0 = 3.5 \text{ mm.s}^{-1}$  (taille mesurée expérimentalement en configuration de mélasse chargée par jets thermiques ralentis par faisceau laser).  $N_{det}$ ,  $N_{cav}$ , et  $\bar{n}$  représentent le nombre d'atomes détectés, le nombre d'atomes dans la cavité d'interrogation au 1<sup>er</sup> passage, et la densité moyenne effective.  $(\Delta\nu/\nu)_{collisions}$  représente la différence de déplacement collisionnel entre les deux régimes de haute et de basse densité. Dans ce cas précis, c'est aussi la valeur du déplacement collisionnel à basse densité ( $\bar{n}_{BD} = 0.5 \times \bar{n}_{HD}$ ). On a pris pour valeur des coefficients de déplacement collisionnel  $-3 \times 10^{-21}$  ( $\text{atome}^{-1}.\text{cm}^3$ ) pour le Cs (valeur récemment mesurée dans la fontaine RbCs, cf. fin de ce chapitre), et  $-3 \times 10^{-23}$  ( $\text{atome}^{-1}.\text{cm}^3$ ) pour le Rb (valeur maximale à  $1\sigma$  mesurée au chapitre 4).

A partir de l'expression (6.4) et du tableau (6.4), on peut tirer les conclusions suivantes.

**Si on accorde la cavité Rb à résonance par ajustement de la température**, alors, pour le Rb, il ne subsiste que le déplacement collisionnel comme effet dépendant du nombre d'atomes. Il vaut  $-3 \times 10^{-16}$  en valeur relative, et peut être corrigé à  $1.4 \times 10^{-16}$  près au bout de 3 jours d'intégration différentielle. Il subsiste une petite incertitude sur le "cavity pulling", nul en valeur moyenne, qui est liée aux fluctuations de température de la cavité, estimées à  $\pm 0.1 \text{ K}$  pour le moment (cette valeur sera prochainement vérifiée expérimentalement, mais a tout lieu d'être confirmée vues les précautions mentionnées au § 6.2.1). Ces fluctuations induisent une incertitude de  $3.3 \times 10^{-17}$  sur le "cavity pulling".

Pour le Cs, il reste qu'il faut mesurer le déplacement collisionnel tel qu'on l'a décrit précédemment. On peut alors corriger ce déplacement, qui vaut  $2.4 \times 10^{-14}$ , avec une incertitude de  $1.4 \times 10^{-16}$  au bout de 2 jours d'intégration différentielle. Ceci requiert néanmoins que la linéarité {aire-densité moyenne

effective} soit assurée au niveau de

$$\frac{K_{HD} - K_{BD}}{K_{HD}} = \frac{1.4 \times 10^{-16}}{2.4 \times 10^{-14}} = 6 \times 10^{-3}$$

si on veut que la correction ne soit pas faussée de plus que l'écart type statistique de la mesure. Ceci n'est pas trivial, et il reste à trouver la méthode qui garantisse une telle linéarité. Dans ces conditions, on voit qu'il ne faut pas compliquer encore plus le problème par une intrication avec le "cavity pulling". Un "cavity pulling" sur le Cs de  $\sim 10^{-16}$  est donc un maximum, et d'après (6.4), cela impose un désaccord maximal de la cavité Cs de  $\Delta\nu_{\text{cav}}^{\text{Cs}} = 59$  kHz par rapport à la résonance atomique du Cs. Traduit en terme d'ajustement mécanique sur la longueur de la cavité, cela correspond à  $\Delta L_{\text{Cs}} = 513$  nm. Il subsiste de toute façon un résidu de "cavity pulling" pour le Cs au niveau de  $2.6 \times 10^{-17}$  liée à une incertitude de 0.1 K sur la température.

**Inversement, si on accorde la cavité Cs à résonance par ajustement de la température**, le "cavity pulling" est nul en moyenne, avec une incertitude de  $2.6 \times 10^{-17}$  liée à l'incertitude de 0.1 K sur les fluctuations de température. Il reste le déplacement collisionnel du Cs à corriger, avec les mêmes contraintes de linéarité {aire-densité moyenne effective} que ci-dessus.

Le déplacement collisionnel du Rb ne pose, lui, pas plus de problème que ci-dessus, mais si on veut le corriger avec une incertitude de  $1.4 \times 10^{-16}$ , il faut limiter le "cavity pulling" du Rb à  $10^{-16}$  au maximum, ce qui se traduit par un désaccord maximal  $\Delta\nu_{\text{cav}}^{\text{Rb}} = 34$  kHz, correspondant à un ajustement mécanique de la longueur de la cavité Rb de  $\Delta L_{\text{Rb}} = 533$  nm. Il subsiste une incertitude sur le "cavity pulling" du Rb de  $3.3 \times 10^{-17}$  lié à l'incertitude de 0.1 K sur la température.

Remarque : notons ici l'avantage prépondérant du Rb sur le Cs. Si on considère que le déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  est 100 fois plus petit que celui du Cs, cela signifie qu'il est possible de le corriger au niveau de  $1.4 \times 10^{-14}$  en relâchant la contrainte sur la linéarité haute/basse densité d'un facteur 100. Dans le cas précédent, cela signifie qu'il suffit d'assurer la linéarité à  $1.4 \times 10^{-16} / 3 \times 10^{-16} = 47\%$  près, ce qui est largement réalisable. Cela signifie en effet, d'après les résultats de la simulation du chapitre 4, qu'on ne prend aucune précaution concernant la mesure des distributions de vitesses.

### Méthode d'accord de la cavité double

La conclusion du paragraphe précédent est que si on souhaite ne pas être gêné par le "cavity pulling" au niveau de  $10^{-16}$ , il est nécessaire de maîtriser l'usinage des longueurs de cavité à mieux que 500 nm. Un usinage traditionnel au tour ne permet pas d'atteindre une telle résolution. Le matériau utilisé est par ailleurs très mou (cuivre OFHC recuit), et la cavité double est une pièce complexe : elle a nécessité plus de 6 mois d'efforts en atelier de mécanique et il est impossible de la reprendre au tour sans compromettre le parallélisme des faces des cavités. Afin de converger le plus rapidement possible vers le réglage final, nous cherchons par ailleurs à ajuster les longueurs relatives des deux cavités de manière progressive et déterministe : nous visons donc une résolution d'usinage de  $\sim 50$  nm. Il faut noter qu'un usinage avec une telle résolution n'a de sens que si la mesure de fréquence est accompagnée d'une mesure de la température

qui permet de discerner une variation de longueur de cavité par usinage, d'une variation de longueur de cavité par dilatation du cuivre. De ce point de vue, le tableau (6.2) permet de voir qu'une variation de 0.1 K de la température est équivalente à une variation de longueur de cavité de 125 nm pour le  $Cs$ , et 167 nm pour le  $Rb$ .

La température  $T_0$  d'accord simultané des deux cavités n'est par ailleurs pas prédéterminée : la seule contrainte que nous ayons est qu'elle soit supérieure de  $\sim 5$  K à la température ambiante dans la salle, afin de pouvoir asservir la température de la zone d'interrogation.

La méthode d'usinage mise en oeuvre utilise les techniques de polissage optique que nous avons déjà utilisées pour polir les faces intérieures des chapeaux de cavité. Ces techniques utilisent en effet des abrasifs de plus en plus fins lorsqu'on passe progressivement des étapes d'ébauchage (gamme de grains en SiC décroissant de  $\sim 600 \mu\text{m}$  à  $\sim 100 \mu\text{m}$ ) à celles de doucissage (gamme de grains en SiC décroissant de  $\sim 30 \mu\text{m}$  à  $\sim 7 \mu\text{m}$ ) et enfin à celles de polissage (grains en diamant sur support aqueux de  $2 \mu\text{m}$ , puis grains en diamant sur support huileux de  $0.25 \mu\text{m}$ ). Et on sait que ces techniques permettent d'atteindre, en optique, des déformations de surface inférieures à  $\lambda_{optique}/10$ . La difficulté principale provient, dans notre cas, du fait que nous ne travaillons pas du verre, mais du cuivre OFHC recuit, c'est à dire un métal très pur et très mou, et dont la dureté de surface change rapidement avec l'oxydation à l'air, ce qui rend la procédure plus complexe.

La procédure d'accord est expliquée en détail dans l'annexe C. La figure (6.7) montre la mesure des fréquences de résonance des deux cavités  $Rb$  et  $Cs$ , sous vide, en fonction de la température, mesurée et contrôlée comme décrit précédemment. C'est la preuve expérimentale du succès de cette longue procédure d'accord simultané des deux cavités de la fontaine  $RbCs$ . La figure (6.8) montre les deux résonances  $Rb$  et  $Cs$ , avec leur facteurs de qualité respectifs de 7600 et 6600. En abscisse, les fréquences ont été divisées par  $\nu_{Rb}$  pour la résonance  $Rb$ , et par  $\nu_{Cs}$  pour la résonance  $Cs$ .

Nous avons ensuite descendu la cavité double en place dans la fontaine  $RbCs$ . Elle est orientée de façon à pouvoir mesurer ultérieurement les éventuels gradients de phase transverses : les cavités latérales sont sur un axe perpendiculaire à l'axe de propagation des faisceaux de détection. Une fois la cavité en place dans la fontaine  $RbCs$ , on a mesuré que les fréquences de résonance des deux cavités coïncidaient avec les fréquences atomiques à mieux que 10 kHz près, à la température de  $25.97^\circ\text{C}=299.12$  K.

### 6.2.3 Mesure et réduction des fuites micro-ondes

#### Introduction

La présence d'un champ micro-onde parasite en dehors de la cavité d'interrogation produit un déplacement de la fréquence de l'horloge [150] dont l'évaluation *in situ* est problématique. En effet, la géométrie de ce champ parasite est mal caractérisée; de plus il possède en général une composante propagative et il est cohérent avec le champ intra-cavité, avec une relation de phase qui peut fluctuer

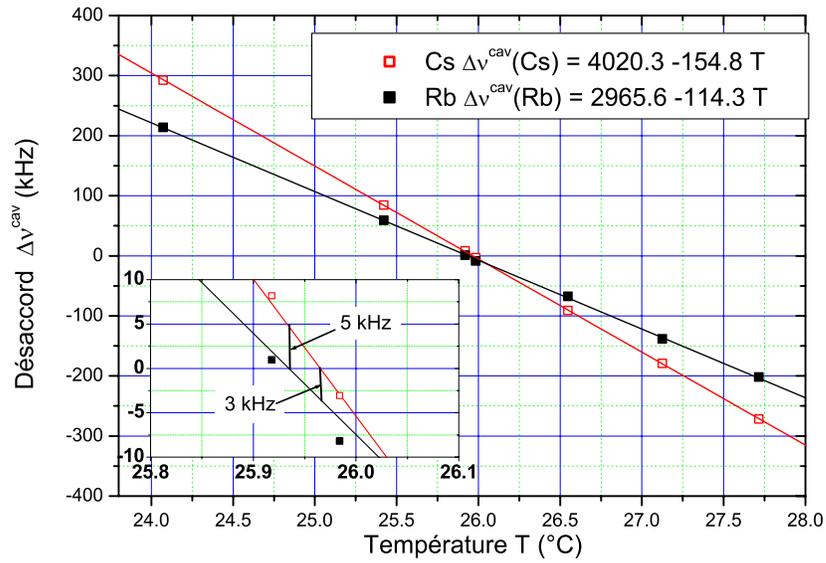


FIG. 6.7 – Calibration de la fréquence de résonance des cavités Rb et Cs de la fontaine RbCs en fonction de la température. Cette calibration a été effectuée sous vide, juste avant de mettre en place la cavité double dans la fontaine RbCs.

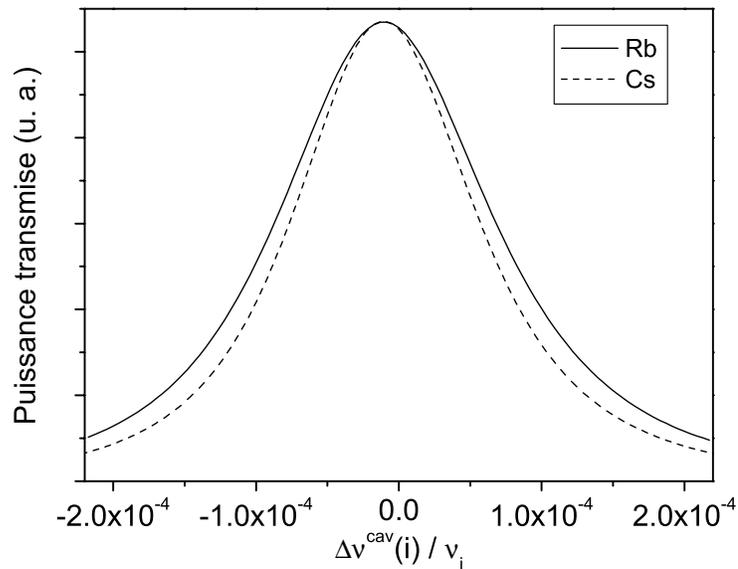


FIG. 6.8 – Résonances des cavités Cs et Rb accordées, juste avant la mise en place de la cavité double dans l'horloge RbCs. Les abscisses sont ramenées aux fréquences de transition atomiques respectives,  $\nu_{Cs}$  et  $\nu_{Rb}$ . Les facteurs de qualité en charge respectifs sont 6600 pour le Cs et 7600 pour le Rb.

dans le temps selon la position de tous les objets modifiant la propagation du champ en espace libre.

Plus précisément, le couplage qu'il induit n'aurait pas d'incidence sur la fréquence de l'horloge s'il avait lieu de façon symétrique sur les mêmes atomes à la montée et à la retombée du nuage dans la fontaine. Mais on sait que ce n'est pas le cas en pratique, puisque d'une part le nuage "grossit" au cours de son vol balistique (cet effet se couple aux gradients de champ de fuites), et d'autre part la zone de détection est située en dessous de la zone de capture dans les fontaines FO1 et *RbCs* (asymétrie du vol balistique par rapport à l'apogée). De plus, on a vu que la contribution des fuites micro-ondes au bilan d'exactitude de la fontaine *Rb* était prédominante.

En pratique, il a été montré que dans une horloge à jet thermique *Cs*, l'effet d'une fuite micro-onde est d'induire une cohérence qui déplace la fréquence de l'horloge d'environ  $10^{-13}$  même lorsque le champ correspondant est  $10^6$  fois plus faible que le champ intra-cavité [150, 151, 152]. On montre alors que, lorsque la perturbation liée au champ parasite interagit avec les atomes en dehors de la phase d'interrogation, et qu'on la modélise par une onde progressive de même pulsation que le champ d'interrogation, de vecteur d'onde  $\pm k = \pm 2\pi\nu_{at}/c$  co-ou contra-propageant avec le jet d'atomes interagissant sur une longueur  $l_p$ , le déplacement de la fréquence d'horloge prend l'expression suivante :

$$\delta\nu_{horl} = \mp \frac{\chi}{kv\tau^2} \times \frac{b\tau}{\frac{T}{\tau} + \frac{2}{b\tau}} \times \sin^2\left(\frac{kl_p}{2}\right) \quad (6.5)$$

où on a repris les notations usuelles des références mentionnées ci-dessus :  $b$  désigne la pulsation de Rabi dans la cavité d'interrogation (on prendra  $b\tau = \pi/2$ ),  $\chi$  désigne le rapport entre la pulsation de Rabi de la fuite micro-onde,  $b_p$ , et la pulsation de Rabi intra-cavité,  $b$ ;  $v$  désigne la vitesse des atomes, et  $T$  le temps de vol des atomes entre les deux interactions micro-ondes.  $kv$  représente le décalage Doppler vu par les atomes. L'expression ci-dessus suppose que le le décalage Doppler est grand devant le désaccord du champ d'interrogation par rapport à la fréquence de résonance atomique ( $\omega - \omega_{at} \ll kv$ ) et devant la pulsation de Rabi du champ de fuite ( $b_p \ll kv$ ). Dans une horloge à jet thermique, on a  $v \simeq 200 \text{ m.s}^{-1}$ , et  $\tau \simeq 50 \mu\text{s}$ , et on a intérêt à prendre  $\chi$  le plus petit possible ( $\chi \leq 10^{-6}$ ).

Ces deux conditions sont aussi vérifiées dans une fontaine, où on a plutôt  $v \simeq 4 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\tau \sim 25 \text{ ms}$ , les autres grandeurs de l'expression (6.5) étant quasi identiques dans un jet et dans une fontaine. En appliquant le même modèle de fuite micro-onde que précédemment, on voit que l'effet des fuites micro-ondes est un facteur

$$\frac{(v\tau^2)_{fontaine}}{(v\tau^2)_{jet}} \simeq 6600$$

plus faible dans une fontaine que dans un jet. Autrement dit, pour le même facteur  $\chi = 10^{-6}$  que dans un jet, le déplacement de la fréquence de l'horloge sous l'effet des fuites micro-ondes est de l'ordre de  $10^{-13}/6600 \sim 1.5 \times 10^{-17}$  dans une fontaine.

Il reste qu'il faut garantir  $\chi = 10^{-6}$ , c'est à dire que la puissance rayonnée par les fuites micro-ondes soit  $-120 \text{ dB}$  inférieure à la puissance intracavité. Les paragraphes suivants vont expliquer comment nous avons procédé pour détecter, mesurer, et réduire les fuites micro-ondes à ce niveau.

### Méthode de mesure

La détection du champ de fuite est faite à l'aide d'une antenne linéaire  $\lambda/4$  obtenue en dénudant l'extrémité d'un câble co-axial semi-rigide. Le principe de la détection est illustré sur la figure (6.9). Une chaîne de synthèse, constituée d'un synthétiseur radio-fréquence, d'une diode SRD<sup>11</sup>, et d'un filtre YIG, alimente la cavité micro-onde dont on veut tester les fuites. Une partie du signal est prélevée et mélangée au signal détecté par l'antenne micro-onde de détection. En balayant la fréquence de la source micro-onde sur l'intervalle de transmission du filtre YIG, et en prenant soin d'augmenter au maximum le déphasage entre les deux voies de cet interféromètre (6 m de câble co-axial côté antenne), l'amplitude du signal sinusoïdal détecté en sortie du mélangeur est proportionnel à l'amplitude du champ détecté par l'antenne. Ce signal provient des différentes sources de rayonnement du banc de test, mais la résonance très étroite de la cavité donne une signature qui permet de la distinguer de ces signaux parasites. Son amplitude est proportionnelle au champ de fuite micro-onde rayonné par la cavité.

Pour effectuer la mesure des fuites micro-ondes, on doit d'abord calibrer la sensibilité de l'antenne au champ micro-onde. On utilise pour cela le dispositif représenté sur la figure (6.10). L'antenne est placée devant un cornet micro-onde qui se termine par un tronçon de guide rectangulaire TE01. Une antenne permet de coupler un champ micro-onde de puissance  $P_e$  connue. Le mode, guidé, s'épand quasi adiabatiquement dans le cornet, et rayonne ensuite dans l'espace libre. On détecte en sortie d'antenne une puissance  $P_s$ , égale au produit de la section efficace de l'antenne,  $\sigma$ , et du vecteur de Poynting rayonné par le cornet à l'endroit où se situe l'antenne, noté  $\Pi_0$  :

$$P_s = \sigma \times \Pi_0 \quad (6.6)$$

Par ailleurs, la puissance injectée dans le guide rectangulaire est liée à  $\Pi_0$  par :

$$P_e = \int \int_{\Sigma} \Pi_0 f(x, y) d\Sigma \quad (6.7)$$

où  $f(x, y)$  représente le profil normalisé du vecteur de Poynting émis en chaque point de la surface de sortie  $\Sigma$  du cornet micro-onde. On a donc :

$$P_e = \Pi_0 \times S_{eff} \quad (6.8)$$

où  $S_{eff}$  est la surface effective du cornet tournée vers l'espace libre.

$$S_{eff} = \int \int_{\Sigma} f(x, y) d\Sigma \quad (6.9)$$

Nous avons mesuré la surface effective du cornet en balayant la position de l'antenne dans le plan de la surface  $\Sigma$ , et en intégrant numériquement le profil  $f(x, y)$  obtenu. Nous avons trouvé que ce profil est peu différent du profil en "sinus carré" que nous attendons pour un mode TE01 ayant subi une expansion adiabatique, et nous en avons déduit la section efficace de l'antenne :

$$\sigma = \frac{P_s}{P_e} \times S_{eff} \quad (6.10)$$

<sup>11</sup>SRD : Step Recovery Diode; élément non-linéaire générant toutes les harmoniques de la fréquence du signal d'entrée.

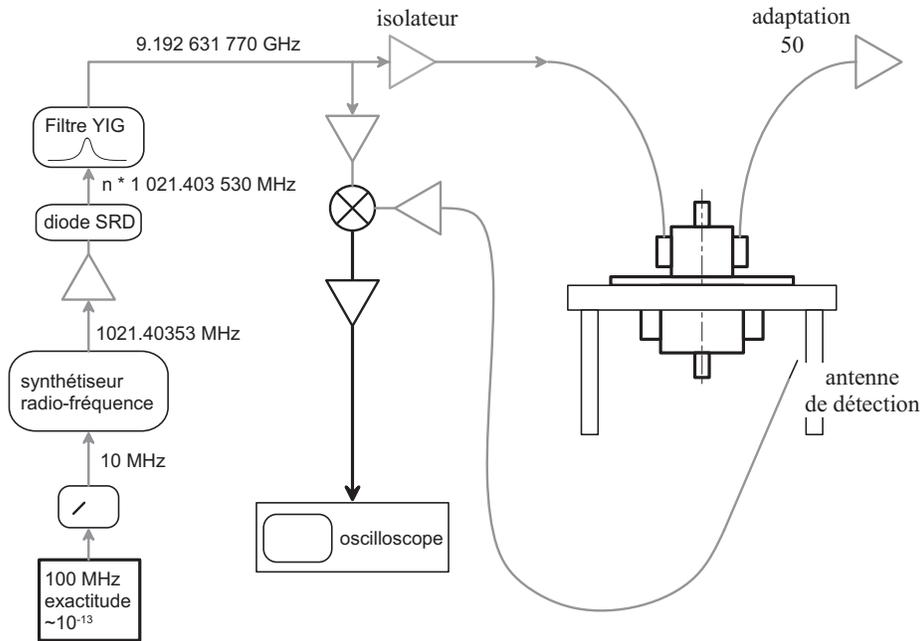


FIG. 6.9 – Banc de mesure des fuites micro-ondes de la cavité double RbCs.

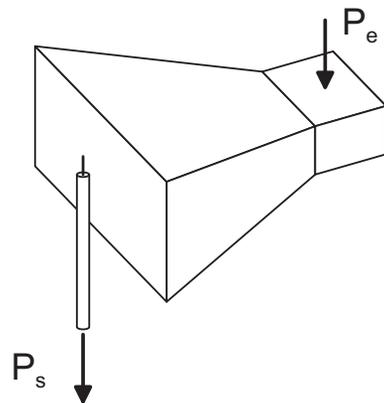


FIG. 6.10 – Calibration de l'antenne servant à la détection des fuites micro-ondes.

Nous avons mesuré  $\sigma = (7)^2 \text{ mm}^2$  pour l'antenne  $Cs$  et  $\sigma = (7.3)^2 \text{ mm}^2$  pour l'antenne  $Rb$ .

On en déduit la calibration entre la puissance mesurée dans l'antenne,  $P_s$ , et le champ magnétique à l'endroit où elle se trouve,  $B$  :

$$P_s = \sigma \times \Pi_0 = \sigma \times \frac{cB^2}{2\mu_0} \quad (6.11)$$

Il reste à traduire la puissance mesurée dans l'antenne en tension mesurée en sortie du mélangeur. Nous avons vérifié la linéarité champ-tension du système homodyne décrit précédemment, et nous en avons déduit la sensibilité de notre système de détection :  $\simeq 3.5 \times 10^{-12} \text{ T.mV}^{-1}$  pour l'antenne  $Cs$  et  $1.5 \times 10^{-11} \text{ T.mV}^{-1}$  pour l'antenne  $Rb$ . Notre résolution de lecture de la tension à l'oscilloscope était par ailleurs de 1 mV.

### Résultats des mesures, suppressions des fuites, et conclusion

Dans la nouvelle fontaine, et pour le Cs, on calcule que la puissance qu'il faut injecter dans la cavité micro-onde pour effectuer une impulsion  $\pi/2$  vaut  $\sim -65 \text{ dBm}$  lorsqu'on lance le nuage jusqu'en haut de la zone d'interrogation ( $Q_c^{Cs} = 6600$ ). En comptant les pertes en ligne de  $\sim 5 \text{ dBm}$ , on doit donc injecter  $-60 \text{ dBm}$  dans le câble co-axial. La source micro-onde de notre banc de test permet d'injecter  $+7 \text{ dBm}$  dans le câble co-axial, soit un champ intra-cavité  $\sim 4000$  fois plus élevé que nécessaire, et valant  $\sim 10^{-5} \text{ T}$ . Avec la résolution mentionnée précédemment, on peut donc résoudre les fuites micro-ondes au niveau de  $\sim 3 \times 10^{-7}$  en champ, soit  $-130 \text{ dB}$  en puissance (on trouve une valeur du même ordre de grandeur pour le Rb).

Les premières mesures ont révélé d'importantes fuites, sur la cavité double, au niveau des contacts entre les cavités latérales et les corps de cavité, malgré les joints en indium. Nous avons alors colmaté ces contacts avec de l'indium écrasé, depuis l'extérieur. Ceci a eu pour effet de réduire significativement les fuites micro-ondes. A l'issue de cette opération, aucune fuite micro-onde n'était détectable avec la résolution de  $\sim -130 \text{ dB}$  du système de mesure. Nous avons par ailleurs utilisé le même système pour tester les fuites micro-ondes au-niveau des connecteurs (SMA air-SMA vide) permettant le passage des câbles co-axiaux de l'air vers l'intérieur du tube à vide. On a ainsi pu sélectionner des connecteurs ne fuyant pas au niveau de résolution ci-dessus.

Enfin, après la mise en place de la cavité double dans la fontaine  $RbCs$ , on a vérifié l'absence de fuites au niveau de  $-130 \text{ dB}$ . On s'attend donc à ce que le déplacement de fréquence lié aux fuites micro-ondes soit inférieur à  $\sim 10^{-17}$  dans la fontaine  $RbCs$ .

Remarque : cela ne comprend pas les fuites micro-ondes émises directement par la chaîne de synthèse micro-onde. Mais comme on l'a décrit au § 3.4.2, le signal d'interrogation est le résultat du mélange d'une porteuse puissante, mais non résonante à la fréquence atomique, avec un signal à 400 MHz d'amplitude variable. Ce système permet donc de générer le signal d'interrogation en limitant les fuites micro-ondes dans la pièce.

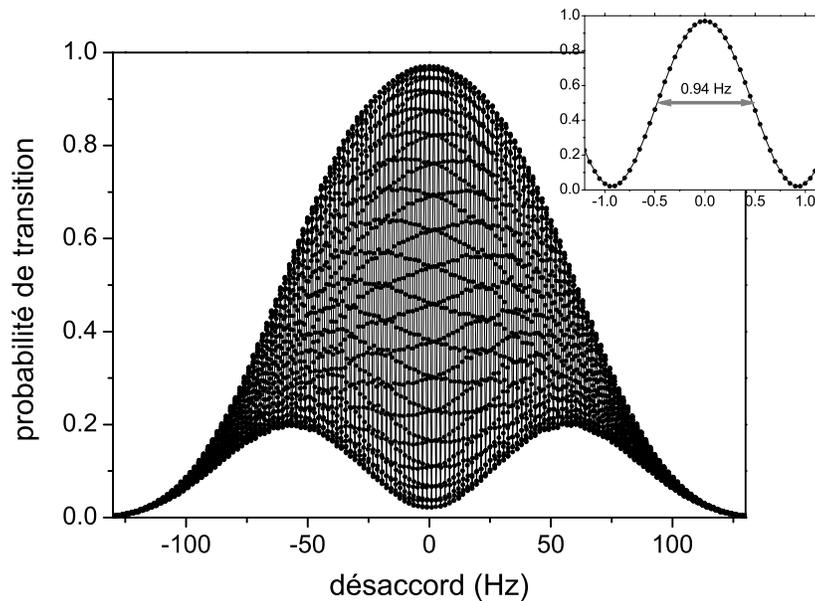


FIG. 6.11 – *Franges de Ramsey obtenues avec des atomes de césium dans la fontaine RbCs. On détecte  $6 \times 10^6$  atomes, et la frange centrale a pour largeur totale à mi-hauteur 0.94 Hz.*

### 6.3 Résultats récents obtenus dans la fontaine *RbCs*

Cette dernière partie est consacrée aux tout derniers résultats obtenus avec la partie *Cs* de la fontaine *RbCs*. Le banc optique *Rb* est en cours de réalignement, et le programme informatique permettant de piloter simultanément les deux parties *Rb* et *Cs* est en cours de mise au point. Depuis le montage de la fontaine *RbCs*, les efforts ont portés sur l'optimisation de la stabilité de fréquence de la fontaine par comparaison au signal de distribution à 100 MHz, lequel est maintenant généré en utilisant un oscillateur cryogénique à résonateur en saphir. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce type d'oscillateur présente une stabilité de fréquence de quelques  $10^{-16}$  de 1 s à 100 s lorsqu'il est utilisé dans des conditions optimales [153]. Cette excellente stabilité en fait actuellement l'oscillateur le plus stable sur le court terme. C'est donc l'outil privilégié pour atteindre la stabilité ultime des fontaines, c'est à dire  $\lesssim 5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ , et c'est un pré-requis pour évaluer l'exactitude d'une fontaine au niveau de  $10^{-16}$ . Cet oscillateur a été réalisé dans l'équipe d'A. Luiten, à l'Université de Western Australia, et est actuellement au BNM-LPTF, dans le cadre d'une collaboration avec cette équipe.

On commence par montrer les résultats obtenus en terme de stabilité de fréquence, puis on évalue rapidement quelques effets systématiques, en particulier ceux qui ont fait l'objet des améliorations mentionnées précédemment.

### 6.3.1 Stabilité de fréquence

La figure (6.11) montre les franges de Ramsey obtenues sur la transition d'horloge  $|F = 3, m = 0\rangle \rightarrow |F = 4, m = 0\rangle$  du  $Cs$ , dans l'horloge  $RbCs$ . Les atomes sont initialement sélectionnés dans l'état  $|F = 3, m = 0\rangle$ , et on détecte  $6 \times 10^6$  atomes. La frange centrale a une largeur totale de 0.94 Hz à mi-hauteur, correspondant à un facteur de qualité de la résonance atomique  $Q_{at} = 9.82 \times 10^9$ .

La figure (6.12) représente la stabilité de fréquence de la fontaine  $RbCs$  obtenue dans diverses conditions en réalisant l'asservissement de la fréquence micro-onde d'interrogation sur la frange centrale de la figure précédente.

Les ronds représentent la stabilité mesurée en utilisant un oscillateur d'interrogation basé sur un oscillateur à quartz à 5 MHz asservi en phase sur un maser à hydrogène (figure (3.16)). La stabilité obtenue vaut  $1.1 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$ .

Les triangles représentent la stabilité de fréquence obtenue en utilisant l'OCRS asservi en phase sur le maser à hydrogène avec une constante de temps de l'ordre de 10 s. Entre  $\tau = 20$  s et  $\tau = 700$  s, on observe une stabilité de  $9 \times 10^{-14} \tau^{-0.57}$ . Cette loi de variation en  $\tau^{-0.57}$  est proche de la spécification du constructeur du maser à hydrogène. La stabilité de fréquence atteint  $1.8 \times 10^{-15}$  à 1000 s.

Finalement, les carrés représentent la stabilité de fréquence obtenue avec l'OCRS libre. La stabilité mesurée entre 5 et 10 s vaut  $3.5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ . Au delà de 10 s, on observe des fluctuations lentes de la fréquence de l'OCRS. L'amplitude de ces fluctuations est anormalement élevée du fait d'une détérioration des conditions de fonctionnement de l'OCRS, dues à son transport depuis l'Australie. Lors de comparaisons entre les fontaines atomiques de la figure (3.16), les fluctuations lentes peuvent être rejetées, ce qui signifie que la stabilité à court terme de  $3.5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  représente bien la stabilité de la fontaine  $RbCs$  lors d'une telle comparaison. C'est la meilleure stabilité à court terme obtenue à ce jour avec un étalon atomique de fréquence fonctionnant dans le domaine micro-onde.

La stabilité à court terme de  $3.5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  obtenue pour un temps de cycle  $T_c = 1.275$  ms est proche de la valeur optimale de la figure (6.6). Pour estimer les diverses contributions aux fluctuations de la probabilité de transition  $\sigma_{\delta P}$ , on a effectué une mesure de ces fluctuations en s'affranchissant du bruit de la source d'interrogation. Pour cela, on a interrogé les atomes à résonance en effectuant des impulsions  $\pi/4$  dans la cavité (cf. § 3.5.5). Les mesures donnent typiquement  $\sigma_{\delta P} \lesssim 3.5 \times 10^{-4}$  pour un nombre d'atomes détectés de  $N_{det} \sim 6 \times 10^6$ , qui contribuent à la stabilité de la fontaine par  $\sigma_y(\tau) = 2.6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ .

Par ailleurs, la contribution du bruit de puissance et de fréquence du laser de détection amélioré est  $\sigma_{\delta P} = 4.2 \times 10^{-5}$ , celle du bruit de projection quantique est  $\sigma_{\delta P} = 2 \times 10^{-4}$ , et celle de l'électronique de détection est  $\sigma_{\delta P} = 2.7 \times 10^{-5}$ . La somme quadratique de ces contributions est largement dominée par le bruit de projection quantique, et, d'après la mesure ci-dessus, on trouve donc un excédent de bruit dont l'origine est pour le moment inconnue.

Enfin, la contribution du bruit du signal d'interrogation, dans la configuration standard de fonctionnement (asservissement à mi-frange, impulsions  $\pi/2$ ), contribue à la stabilité de la quantité  $\sigma_y(\tau) = 2.5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$ . Contrairement au cas rencontré au chapitre 3, cette contribution provient essentiellement du bruit des chaînes de synthèse, et non plus de l'oscillateur utilisé comme maillon

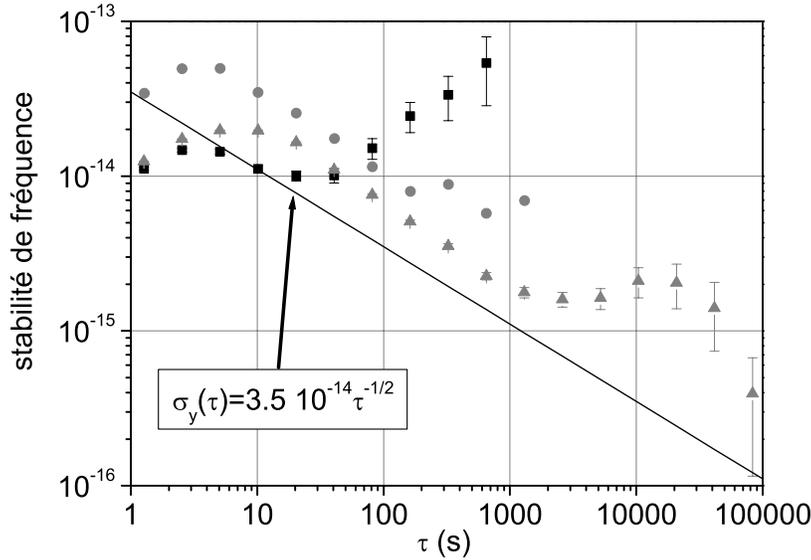


FIG. 6.12 – *Stabilité de fréquence en fonction du temps d'intégration  $\tau$ . Ronds : oscillateur d'interrogation constitué d'un oscillateur à quartz asservi en phase sur un maser à hydrogène. Triangles : oscillateur d'interrogation constitué de l'OCRS asservi en phase sur le maser à hydrogène avec une constante de temps de  $\sim 10$  s. Carrés : stabilité de la fontaine *RbCs* par comparaison à l'OCRS libre.*

de base de la synthèse (OCRS, et non plus oscillateur à quartz 5 MHz) [30].

La somme quadratique des deux contributions à la stabilité (mesures à  $\pi/4$ , et bruit du signal d'interrogation) conduit à une stabilité de  $3.6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  pour la fontaine, valeur qui est très proche de la valeur obtenue expérimentalement, et que l'on espère encore améliorer afin d'atteindre la limite liée au bruit de projection quantique, qui vaut  $1.5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  dans les mêmes conditions.

### 6.3.2 Exactitude

#### Effet Zeeman du 2nd ordre

La figure (6.13) montre les franges obtenues en sondant la transition  $|F = 3, m = 1\rangle \rightarrow |F = 4, m = 1\rangle$ , linéaire en champ magnétique. En pointant le sommet de la frange centrale de ce spectre, on mesure le champ magnétique près de l'apogée de la trajectoire atomique (cf. § 3.3.1). Le bon contraste et la régularité de ces franges indique la bonne homogénéité du champ magnétique. En effectuant ce type de spectre pour différentes hauteurs de lancement, on peut déterminer le profil du champ magnétique directeur sur l'axe de la zone d'interrogation, avec une résolution de  $\sim 0.1$  Hz (soit  $\sim 140$  nG sur le champ magnétique). Cette résolution est limitée par les fluctuations résiduelles de champ magnétique. On peut alors agir sur les diverses bobines de compensation pour améliorer l'ho-

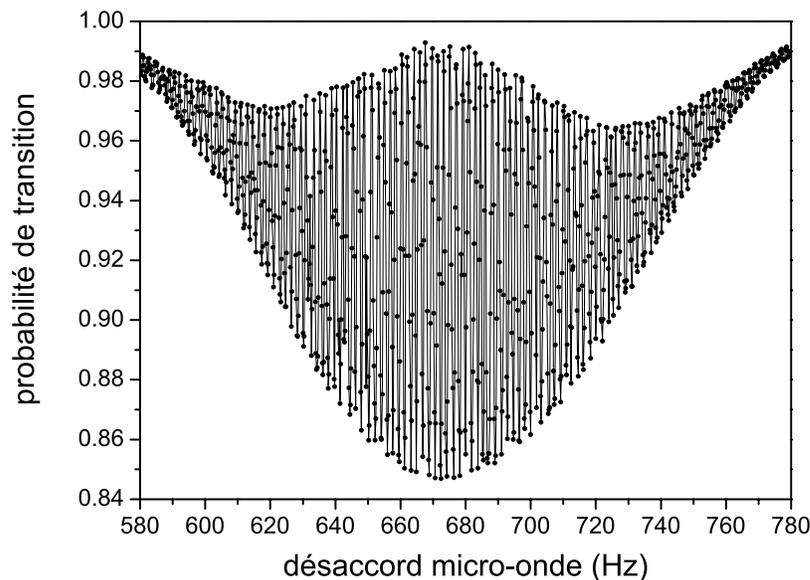


FIG. 6.13 – *Franges de Ramsey obtenues avec les atomes de Cs sur la transition  $|F = 3, m = 1\rangle \rightarrow |F = 4, m = 1\rangle$  dépendant linéairement du champ magnétique.*

mogénéité du champ. Cette opération n'a pas encore été faite, faute de temps.

On a par-contre vérifié la stabilité du champ magnétique en asservissant la fréquence de la source micro-onde sur une des franges de la figure (6.13) et en mesurant les fluctuations de sa fréquence sur une durée de 1 jour environ. La variance des fluctuations de fréquence mesurée est de 0.2 Hz, ce qui correspond à une stabilité du champ magnétique de 300 nG. Pour un champ magnétique directeur de 2 mG, l'incertitude correspondante sur le déplacement Zeeman d'ordre 2 de la transition horloge est de  $5.6 \times 10^{-17}$  en valeur relative.

### Rayonnement du corps noir

La mise en service définitive de l'asservissement de la température de la zone d'interrogation et l'ajustement fin du système de chauffage permettant d'obtenir une bonne homogénéité de température n'ont pas encore été faits pour l'instant. Les mesures préliminaires de la stabilité de température obtenue en l'absence de l'asservissement n'ont pas été faites dans des conditions optimales du fait d'un dysfonctionnement du système de climatisation de la pièce où est montée la fontaine *RbCs*. Ces mesures montrent toutefois une homogénéité et une stabilité de la température de l'ordre de 1 K sur des durées de plusieurs jours. En attendant la mise en marche de l'asservissement et du contrôle automatique de la température, un contrôle manuel et journalier de la température permet donc de limiter l'incertitude sur la température à 1 K. Ceci correspond à une incertitude de  $1.3 \times 10^{-2}$  relativement à l'effet du rayonnement du corps noir,

soit  $2.3 \times 10^{-16}$  sur la correction du déplacement de fréquence correspondant, ce qui est largement suffisant pour effectuer un bilan d'exactitude préliminaire au niveau de  $10^{-15}$ .

### Déplacement collisionnel du *Cs*

En utilisant une méthode différentielle semblable à celle utilisée pour mesurer les effets dépendant du nombre d'atomes dans la fontaine *Rb*, on a pu estimer le déplacement collisionnel dans la partie césium de la fontaine *RbCs*. Les mesures différentielles sont effectuées en utilisant l'OCRS asservi sur le maser à hydrogène, en alternant toutes les 250 s environ des mesures à haute densité et à basse densité. La stabilité sur la différence de fréquence entre haute densité et basse densité est de  $1.2 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$ . La valeur mesurée du déplacement collisionnel est de  $5.5 \times 10^{-14}$  pour un nombre d'atomes détectés  $N_{det} \simeq 10^7$ . D'après une estimation préliminaire de la densité effective, ceci correspond à  $K_{col}^{Cs} = (-2.8 \begin{smallmatrix} +0.9 \\ -1.4 \end{smallmatrix}) 10^{-21} \text{ cm}^3$  en attribuant une incertitude de 50% à la détermination absolue de la densité moyenne effective. Des mesures complémentaires sont nécessaires pour déterminer améliorer la détermination de la densité atomique et l'incertitude de cette mesure.

En particulier, on a fait varier le nombre d'atomes en changeant la puissance de l'impulsion micro-onde dans la cavité de sélection. Cette méthode a l'avantage de ne modifier ni la distribution de positions initiales du nuage, ni la distribution des vitesses atomiques. On peut donc penser au premier abord que c'est la méthode idéale pour garantir la linéarité {aire détectée-densité atomique moyenne} et mesurer ainsi le déplacement collisionnel en temps réel tel qu'on l'a décrit au § 6.2.2.

Il s'avère en fait que cette méthode ne permet pas de garantir la linéarité voulue parce que, en configuration de mélasse, le nuage n'est pas ponctuel ( $\sigma_r = 3.6 \text{ mm}$  dans la cavité de sélection au 1<sup>er</sup> passage) et que le champ micro-onde de sélection au bord du nuage est plus faible (de 20%) qu'au centre. La probabilité de transition a par ailleurs pour expression, à l'issue de l'interaction de Rabi correspondante :

$$P(r) = \sin^2 \frac{\Omega(r)\tau}{2} \quad (6.12)$$

où  $r$  désigne la position par rapport à l'axe de la cavité,  $\Omega(r)$  la pulsation de Rabi en ce point. Pour un mode TE011, et une impulsion  $n\pi$  ( $n \in \mathbb{R}$ ) au centre, on a donc :

$$P(r) = \sin^2 \left( \frac{n\pi}{2} J_0 \left( k \frac{r}{R} \right) \right) \quad (6.13)$$

où  $k$  est le 1<sup>er</sup> zéro de  $J_1(x)$  et  $R$  est le rayon de la cavité micro-onde. Par exemple, si on effectue une impulsion  $\pi$  au centre à haute densité, et une impulsion  $\sim 0.3\pi$  au centre à basse densité (qui garantit  $P(0) = 0.2$ ), la non-uniformité du couplage sur la taille du nuage est différente à haute densité et à basse densité, et elle est caractérisée par le rapport

$$\frac{P_{BD}(r)/P_{BD}(0)}{P_{HD}(r)/P_{HD}(0)} \quad (6.14)$$

qui vaut  $\sim 0.7$  pour  $r = 6$  mm (rayon du trou de passage des atomes dans la cavité de sélection). Par conséquent, on voit que cette méthode revient à altérer la distribution de positions du nuage juste avant le début de la phase d'interrogation. Elle ne conserve donc pas la linéarité {aire détectée-densité atomique moyenne}. La simulation Monte Carlo, prenant en compte le profil transverse du couplage des atomes avec le champ magnétique de sélection, permet de calculer cette non-linéarité, en tenant en compte de l'effet de moyennage sur tous les atomes du nuage. Dans les conditions ci-dessus<sup>12</sup>, la non-linéarité {aire détectée-densité atomique moyenne} entre les deux régimes de haute et basse densité est égale à

$$\frac{K_{HD} - K_{BD}}{K_{HD}} = 0.13$$

On voit que l'effet de l'atténuation, non-différentielle, du profil spatial du nuage par la sélection, est loin d'être négligeable. Cette non-linéarité s'atténue lorsque le nuage est plus petit (les atomes, plus proches de l'axe, explorent moins la non-uniformité du champ magnétique de sélection), mais vaut encore 2.6% pour  $\sigma_0 = 1.4$  mm (soit  $\sigma_r = 1.7$  mm dans la cavité de sélection), qui correspondrait à une configuration de piège magnéto-optique.

En particulier, cette méthode de sélection ne garantit pas le niveau de linéarité de  $6 \times 10^{-3}$  requis au § 6.2.2. Dans les conditions où ce prérequis avait été calculé (impulsion de sélection  $\pi$  à haute densité, et  $0.5\pi$  à basse densité), et pour une mélasse de  $\sigma_0 = 3.5$  mm initialement, la non-linéarité est égale à 0.10, c'est à dire un facteur 16 au-dessus du niveau requis.

La figure (6.14) permet de situer notre point de mesure du déplacement collisionnel du  $Cs$  par rapport aux courbes du déplacement collisionnel en fonction de l'énergie moyenne de collision, courbes qui ont été calculées dans l'équipe de C. Williams [8].

Plusieurs courbes apparaissent sur cette figure : elles correspondent aux différentes configurations de préparation des atomes. Pour la configuration où seuls les niveaux  $m = 0$  sont peuplés, les auteurs ont calculé d'une part le déplacement collisionnel dans le cas où les atomes ont tous la même énergie thermique de collisions (distribution monocinétique), exprimée en unités de  $E/k_B$  (courbe en trait plein), et d'autre part en supposant que la distribution des énergies de collisions est une distribution de Maxwell-Boltzmann (distribution de vitesses gaussienne; courbe en pointillés fins). Dans ce dernier cas, l'abscisse de chaque point de la courbe correspond à l'énergie moyenne de collision de cette distribution. De plus, cette distribution est supposée constante dans le temps, c'est à dire que le calcul ne tient pas compte de l'expansion du nuage. Cette expansion a pour conséquence la décroissance de l'énergie moyenne de collision du nuage atomique au cours du temps. En utilisant un argument de conservation de l'énergie on montre que cette décroissance s'effectue selon :

$$E(t) = \frac{E(0)}{1 + \frac{t^2}{t_0^2}} \quad (6.15)$$

<sup>12</sup> mélasse de taille initiale  $\sigma_0 = 3.5$  mm (soit  $\sigma_r = 3.6$  mm dans la cavité de sélection), une impulsion de sélection  $\pi$  à haute densité, et  $0.3\pi$  à basse densité et sur l'axe de la cavité de sélection.

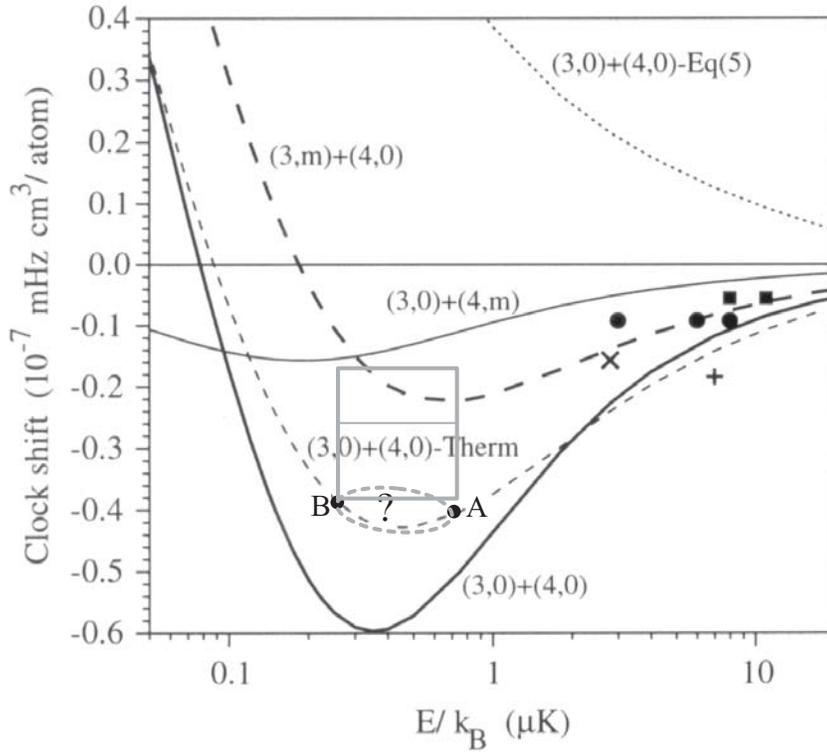


FIG. 6.14 – Coefficient  $K_{col}^{Cs}$  du déplacement collisionnel du Cs en fonction de l'énergie moyenne de collisions du nuage (graphe tiré de [8]). Nous avons reporté sur ce graphe le domaine d'acceptance (rectangle gris) pour notre point de mesure en configuration mélasse (le trait horizontal en travers du rectangle indique la valeur moyenne mesurée pour le déplacement collisionnel). Il est en accord à  $1\sigma$  avec le domaine d'acceptance donné par le calcul (ellipse en pointillés gris).

où  $E(0)$  désigne l'énergie moyenne de collision à l'instant du lancement (c'est à dire la température de la mélasse) et où  $t_0 = \sigma_0/\sigma_v$  désigne le rapport entre la taille caractéristique du nuage à l'instant initial sur l'écart type de la distribution de vitesses [79].

Le point que nous avons reporté sur le graphe de la figure (6.14) correspond à notre point de mesure, avec une barre d'erreur verticale de  $\pm 50\%$  liée essentiellement à l'incertitude sur la densité moyenne effective.

Son abscisse reste indéterminée pour le moment. Pour être comparée avec pertinence aux courbes théoriques, elle doit être calculée en intégrant l'énergie moyenne de collision donnée par l'expression (6.15) sur toute la durée du vol dans et au-dessus de la cavité micro-onde d'interrogation, et en pondérant cette énergie, à tout instant, par la densité atomique locale. Ce calcul sera effectué dans les semaines qui viennent. Pour les paramètres caractéristiques de notre expérience ( $\sigma_0 = 3.5 \text{ mm}$  et  $\sigma_v = 7 \text{ mm.s}^{-1}$ ), et en lançant à  $4.3 \text{ m.s}^{-1}$ , l'énergie moyenne de collision est  $E/k_B(0) = 0.79 \mu\text{K}$  initialement,  $0.73 \mu\text{K}$  au

lier passage dans la cavité (abscisse du point A)),  $0.45 \mu\text{K}$  à l'apogée, et  $0.25 \mu\text{K}$  au 2<sup>e</sup> passage (abscisse du point B). Par conséquent, l'abscisse de notre point de mesure se trouve quelque part entre les abscisses des points A et B.

Remarquons qu'au cours de la phase d'interrogation, le coefficient  $K_{col}^{Cs}$  évolue avec l'énergie moyenne de collision du nuage, en suivant la courbe en pointillés fins du point A au point B. Le coefficient  $K_{col}^{Cs}$  mesuré est donc la moyenne, sur le temps de vol, du coefficient  $K_{col}^{Cs}(t)$  qui évolue avec l'énergie moyenne de collision, donc avec le temps. Cette moyenne est pondérée par la densité atomique, qui évolue elle aussi avec le temps. Le coefficient moyen théorique est donc situé quelque part dans la surface cerclée en pointillés gris, sachant qu'il est plus proche de A que de B, car l'essentiel du déplacement collisionnel est accumulé au début de la phase d'interrogation, là où la densité atomique est la plus élevée.

On voit que le domaine d'acceptance pour notre point de mesure est en accord à  $1\sigma$  avec le calcul. Par ailleurs, les températures obtenues en pratique sont comprises entre  $0.3 \mu\text{K}$  et  $1 \mu\text{K}$ , c'est à dire dans un intervalle où le déplacement collisionnel dépend peu de l'énergie de collision. Par conséquent, d'autres mesures dans les autres configurations de préparation ( $|F = 3$ , tous  $m_F$ ) et ( $|F = 4$ , tous  $m_F$ ) permettraient d'affiner notre test de la théorie, en s'affranchissant des calibrations de densité atomique. Les rapports des déplacements de fréquence obtenus dans ces différentes configurations constituent en effet une signature de la cohérence des prédictions théoriques.

## 6.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de décrire le principe de fonctionnement de l'horloge double  $RbCs$ , ainsi que quelques améliorations importantes qui ont été apportées par rapport à la fontaine  $Rb$  qui en était la version préliminaire.

Notamment, la température devrait à terme pouvoir être stabilisée et homogénéisée au niveau de  $0.1 \text{ K}$ . L'incertitude correspondante sur le déplacement du corps noir sera alors de  $1.7 \times 10^{-17}$  pour le  $Rb$  et  $2.3 \times 10^{-17}$  pour le  $Cs$ . Il faut cependant noter qu'au niveau de  $10^{-16}$  les incertitudes sur la connaissance des constantes  $K_{BB}$  et  $\varepsilon$  ne sont plus négligeables devant les incertitudes expérimentales liées à la température, et que  $\varepsilon$  n'est pas connue dans le cas du  $Rb$ .

Les deux cavités  $Rb$  et  $Cs$  ont fait l'objet d'un accord fin qui garantit que le "cavity pulling" sera négligeable au niveau de  $10^{-16}$ , dans une configuration où on charge un maximum d'atomes dans la mélasse. Seule cette situation permet d'obtenir une stabilité telle qu'on puisse corriger le déplacement collisionnel du  $Cs$  au niveau de  $10^{-16}$  à l'issue d'une intégration de durée raisonnable de 2 jours. Pour le  $Rb$ , le déplacement collisionnel ne pose pas de problème, mais là aussi, on ne souhaite pas mesurer les deux effets, intriqués dans la fontaine, de "cavity pulling" et de déplacement collisionnel. On cherche donc à minimiser le "cavity pulling".

Nous avons par ailleurs discuté de l'éventuelle méthode permettant d'aboutir à une correction du déplacement collisionnel du  $Cs$  au niveau de  $10^{-16}$ . Pour atteindre une exactitude de  $10^{-16}$  dans une fontaine à  $Cs$ , il faut mesurer en

permanence le déplacement collisionnel, afin de pouvoir le corriger au niveau requis. Ceci ne peut être fait qu'en utilisant un maximum d'atomes, afin de minimiser la stabilité sur le court terme et atteindre le niveau requis en un minimum de temps. Il en découle que, pour le Cs, la seule contrainte qui subsiste est celle sur la linéarité {aire détectée-densité moyenne effective}, qui doit être assurée à un niveau de l'ordre de 1% entre les régimes haute et basse densité. Nous n'avons actuellement pas trouvé la méthode qui garantisse ce niveau de linéarité.

En revanche, cette contrainte est relâchée dans le cas du  $^{87}\text{Rb}$ , du fait de la petitesse du déplacement collisionnel. Ceci permet de le corriger au niveau de  $10^{-16}$  sans difficultés.

Le résultat de l'accord relatif des deux cavités est concluant : les deux fréquences de résonance sont à moins de 10 kHz l'une de l'autre lorsqu'on les accorde sur leurs résonances atomiques respectives. Le pari technique qu'il constituait a donc été tenu.

Les fuites micro-ondes ont été réduites à  $-130\text{dB}$  du champ intra-cavité. On estime d'après les calculs effectués sur les horloges à jet thermique que ce niveau d'isolation garantit l'absence de déplacement de fréquence lié aux fuites micro-ondes au niveau de  $10^{-17}$ . Il reste à mesurer l'effet des fuites résiduelles pouvant s'échapper directement de la chaîne de synthèse micro-onde.

Les résultats récemment obtenus avec la partie Cs de la fontaine *RbCs* sont encourageants. L'excellente stabilité à court terme de  $3.5 \times 10^{-14}\tau^{-1/2}$  de la fontaine *RbCs* a été obtenue par comparaison avec un oscillateur cryogénique à résonateur en saphir laissé libre. La stabilité observée sur le long terme lorsqu'on asservit l'OCRS sur le maser à hydrogène, est de  $7 \times 10^{-14}\tau^{-1/2}$ , c'est à dire proche de la stabilité du maser. Ceci prouve que dorénavant le maser ne doit plus être utilisé comme référence sur le long terme si on veut observer une stabilité limitée par le bruit de la fontaine. Seul l'OCRS, asservi sur le court terme sur une autre fontaine de stabilité équivalente, peut servir de référence pour des mesures sur le long terme limitées par la stabilité et l'exactitude des fontaines.

Enfin, une nouvelle mesure du déplacement collisionnel du Cs a été effectuée dans la fontaine double, qui réconcilie l'expérience avec la théorie. Nos résultats sont en accord à  $1\sigma$  avec les récents calculs de l'équipe de C. Williams [8], un facteur 30 au-dessus des premières prédictions théoriques pour le Cs, en 1992 [154]. Nous espérons pouvoir améliorer les tests de la théorie dans les mois qui viennent, notamment en effectuant des mesures dans différentes configurations de populations des autres sous-niveaux Zeeman.



# Conclusion

L'utilisation du  $^{87}\text{Rb}$  ouvre une série de perspectives intéressantes, aussi bien du point de vue de l'amélioration des performances des fontaines atomiques, que pour la réalisation de tests de physique fondamentale de haute résolution, et de façon plus générale, pour la réalisation d'interféromètres utilisant des nombres élevés d'atomes froids.

Tout d'abord, ce travail a démontré l'intérêt du  $^{87}\text{Rb}$  pour l'amélioration de l'exactitude des horloges atomiques. Nos espoirs initiaux, fondés sur les prédictions théoriques de 1997 [12], ont été largement dépassés, puisqu'il s'avère que la valeur absolue du déplacement collisionnel est près de 100 fois plus faible que dans une horloge à Cs. Sérieusement limitée par le déplacement collisionnel, dans le cas du Cs, au niveau de  $10^{-15}$ , l'exactitude actuelle des fontaines atomiques semble pouvoir être améliorée au niveau de  $10^{-16}$  par l'utilisation du  $^{87}\text{Rb}$ . Elle doit du moins permettre d'étudier, dans la gamme des  $10^{-16}$ , des effets systématiques jusqu'à présent masqués par le déplacement collisionnel. L'utilisation du  $^{87}\text{Rb}$  permet en effet de relâcher le compromis stabilité/exactitude, difficile dans le cas du Cs. Dans une fontaine  $^{87}\text{Rb}$ , on peut lancer par exemple 10 fois plus d'atomes que dans une fontaine Cs, tout en ayant un déplacement collisionnel 10 fois plus faible et une stabilité à court terme  $\sqrt{10}$  fois meilleure. Ceci permet de gagner un facteur 10 sur le temps d'intégration, ce qui permet de corriger le déplacement collisionnel au niveau de  $10^{-16}$  sans les difficultés liées aux dérives de nombre d'atomes et aux incertitudes de modèle de l'évolution du nuage d'atomes froids. Au contraire, dans le cas du Cs, pour atteindre ce niveau d'exactitude, il faudrait pouvoir garantir la linéarité entre nombre d'atomes détectés et densité moyenne atomique à mieux que 1%. Ce problème, d'ordre technique, reste aujourd'hui non résolu.

La mesure du déplacement collisionnel du  $^{87}\text{Rb}$  a permis de caractériser complètement, et pour la première fois dans les fontaines atomiques, un autre effet dépendant du nombre d'atomes : l'entraînement de fréquence par la cavité. Dans le cas du Rb, il masque le déplacement collisionnel. Dans le cas du Cs, le déplacement collisionnel est prédominant. Dans les deux cas, cet effet doit être traité à pied d'égalité avec le déplacement collisionnel, car les déplacements de fréquences qu'ils induisent sont fondamentalement corrélés : tous deux dépendent globalement du nombre d'atomes dans la fontaine. Cette corrélation n'est cependant pas totale, dans la mesure où l'un (l'entraînement de fréquence par la cavité) est linéaire en nombre d'atomes dans la cavité micro-onde, tandis que l'autre (le déplacement collisionnel) est linéaire en densité atomique moyenne effective.

Cette intrication rend la correction simultanée de ces deux effets difficile au

niveau de  $10^{-16}$ , de sorte qu'on a intérêt à minimiser l'entraînement de fréquence par la cavité, en accordant celle-ci le mieux possible sur la résonance atomique.

Avec la fontaine à  $^{87}\text{Rb}$  que nous avons construite, le traitement simultané de ces deux effets nous a permis de mesurer le coefficient qui relie déplacement collisionnel et densité atomique moyenne effective.

Ceci nous a permis d'une part de comparer nos résultats à ceux des prédictions théoriques, pour diverses populations des sous-niveaux Zeeman des états hyperfins du niveau fondamental. Lorsque d'autres sous-niveaux Zeeman que les niveaux  $m = 0$  sont peuplés, nos résultats sont en accord à  $1\sigma$  avec les prédictions théoriques récentes. Lorsque seuls les niveaux  $m = 0$  sont peuplés, nos résultats sont inférieurs aux prédictions théoriques, de  $2\sigma$ , et sont compatibles avec une valeur nulle de déplacement collisionnel.

D'autre part nous avons développé une simulation numérique de l'évolution du nuage dans la fontaine, permettant de calculer les nombres d'atomes à tout instant du vol balistique. Cette simulation, qui peut être adaptée à n'importe quelle géométrie de fontaine, permet de confronter les différentes méthodes de détermination des nombres d'atomes dans la fontaine, lesquelles sondent le nombre d'atomes à différents instants de l'évolution du nuage. Elle permet en outre d'accéder à la densité moyenne effective, grandeur non observable dans une fontaine, ce qui détermine le déplacement collisionnel. Enfin, cette simulation pourra dans le futur être utilisée pour calculer l'énergie moyenne de collision entre atomes froids, au cours du vol balistique. En particulier pour le Cs, des calculs récents [8] prédisent une dépendance du déplacement collisionnel avec l'énergie de collision. Il est donc important de tenir compte de cette dépendance énergétique dans notre exploitation de mesures de fréquences, si on veut pouvoir comparer de façon pertinente nos résultats expérimentaux à ceux de la théorie.

L'utilisation du  $^{87}\text{Rb}$  ouvre donc une série de perspectives intéressantes, non seulement dans les fontaines atomiques à Rb proprement dites, mais aussi dans les fontaines Cs, puisqu'elle permet de revisiter les méthodes qui permettront de franchir le palier d'exactitude actuel de  $10^{-15}$ .

De façon plus générale, la comparaison, à l'aide d'horloges atomiques, des fréquences hyperfines de deux alcalins différents dans l'état fondamental, fournit un test de laboratoire de la théorie de la relativité générale. La grande exactitude des fontaines atomiques permet actuellement d'atteindre un niveau de résolution qui rivalise avec des tests d'ordre cosmologique. Par exemple, la comparaison, au cours de trois campagnes pendant ce travail de 3 ans, d'une part de la fontaine à Rb, et d'autre part des deux autres fontaines à Cs du BNM-LPTF, a permis d'effectuer un test de la dérive temporelle de la constante de structure fine  $\alpha$  au niveau de  $7 \times 10^{-15}$  par an. Nous trouvons une dérive de  $\alpha$  compatible avec zéro, pour  $\alpha$  à notre époque. Ce résultat est actuellement le test le plus précis, en laboratoire, de la variation de  $\alpha$ . Il serait intéressant, à l'avenir, d'effectuer ce type de comparaisons plus fréquemment, de façon à constituer une base de données de comparaisons d'horloges qui permettrait de déceler d'éventuelles fluctuations périodiques de  $\alpha$ . Les mêmes théories qui prédisent une dérive de  $\alpha$  dans le temps prédisent en effet aussi une variation de  $\alpha$  au voisinage de corps massifs. On peut donc supposer qu'une variation du potentiel gravitationnel avec une période solaire, voire lunaire, serait observable sur les variations de  $\alpha$ . En ce qui concerne le test effectué à ce jour sur la dérive de  $\alpha$ , il est raisonnable d'espérer améliorer ce test d'un facteur 30 dans les trois ans à venir. D'une part

en effectuant des comparaisons répétées de fréquences entre fontaines *Rb* et *Cs*. D'autre part, en améliorant l'exactitude des fontaines atomiques dans la gamme des  $10^{-16}$ . Et enfin en effectuant ces comparaisons directement dans la même fontaine.

A ce titre, et sous réserve qu'on réussisse effectivement à corriger le déplacement collisionnel du *Cs* au niveau de  $10^{-16}$ , la fontaine double que nous avons construite pendant ce travail de thèse devrait permettre d'effectuer un test de  $\dot{\alpha}/\alpha$  au niveau de  $1$  à  $2 \times 10^{-16}$ .

En effet, de nombreuses améliorations techniques ont été apportées, et on estime actuellement que les effets systématiques autres que ceux liés aux gradients de phase dans la cavité pourront être corrigés à mieux que  $10^{-16}$ . Il faut cependant noter qu'en pratique seule la stabilité à long terme des effets systématiques importe pour le test de  $\dot{\alpha}/\alpha$ . La présence de gradients de phase pourrait donc éventuellement gêner l'obtention d'une exactitude au niveau de  $10^{-16}$ , sans pour autant gêner un test de  $\dot{\alpha}/\alpha$  à ce niveau.

De plus, dans cette horloge double, certaines fluctuations des effets systématiques pourront être rejetées au moins partiellement, du fait de l'utilisation d'un appareil unique pour interroger les alcalins différents : fluctuations de champ magnétique, de la température, fluctuations de phase de l'oscillateur d'interrogation.

Enfin, les résultats préliminaires obtenus à ce jour sont prometteurs. Par comparaison avec un oscillateur cryogénique à résonateur en saphir, nous avons obtenu une stabilité record de  $3.5 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  sur le court terme, avec la partie *Cs* de la fontaine double. Cette stabilité est 2 fois meilleure que la stabilité obtenue par comparaison avec un maser à hydrogène, sur toute la gamme de temps d'intégration, et révèle la stabilité réelle de la fontaine et sa capacité à atteindre  $10^{-16}$  en moins de deux jours d'intégration. La partie *Rb*, en cours de réglage, devrait donner les mêmes résultats dans les semaines qui viennent.

L'utilisation simultanée du *Cs* et du *Rb* dans les fontaines devrait donc permettre d'améliorer sensiblement les tests d'invariance locale dans les prochains mois, et d'explorer la gamme des  $10^{-16}$ , jusqu'à présent inexplorée par les étalons atomiques. Il faut noter que ce type de test n'est pas réservé au *Rb* et au *Cs*. Le nombre d'horloges utilisant aujourd'hui d'autres alcalins ou quasi-alcalins (*H*,  $\text{Hg}^+$ ,  $\text{Yb}^+$ ) est en rapide progression, et des comparaisons croisées entre horloges d'alcalins différents fournirait une signature de la variation de  $\alpha$ , car la sensibilité de  $\dot{\alpha}/\alpha$  au numéro atomique  $Z$  est une fonction non-linéaire. Les horloges optiques, faisant intervenir des atomes non-alcalins comme le *Sr*, le *Ca*, le *Mg*, ou des ions comme le  $\text{Hg}^+$  ou l' $\text{Yb}^+$ , ouvrent encore le domaine des comparaisons possibles, en utilisant les techniques récentes de peignes de fréquence. Ces comparaisons seront facilitées par la mise en orbite de l'horloge spatiale PHARAO, au sein du projet ACES. Cette horloge, avec le lien micro-onde Terre-Espace qui l'accompagne, devrait permettre dans quelques années d'effectuer des comparaisons de fréquence entre horloges disséminées sur Terre. Elle permettra d'explorer la gamme des  $10^{-16}$ , pour des tests fondamentaux faisant intervenir des horloges de nature possiblement différente.

Enfin, du fait de son faible déplacement collisionnel, l'utilisation du  $^{87}\text{Rb}$  ouvre des perspectives intéressantes dans d'autres domaines de la physique. Parmi les domaines particulièrement dynamiques de la recherche, aujourd'hui, on peut songer aux gaz dégénérés, et aux avantages que leur utilisation apporte-

raient dans le domaine des horloges atomiques. En particulier, la possibilité de réaliser un condensat de Bose-Einstein de  $^{87}\text{Rb}$  dans un piège optique [155], lève l'une des barrières rencontrées jusqu'à présent à l'utilisation de condensats dans une horloge : les champs magnétiques élevés et pulsés. Combinée à l'ouverture adiabatique du piège et à un lancement qui conserverait la cohérence du condensat, l'idée d'une horloge continue et spatiale à condensat de Rb est séduisante, puisque pour de longs temps d'interaction, elle permettrait de gagner sur le nombre d'atomes détectés sans pour autant avoir des densités trop élevées, avec un atome dont le déplacement collisionnel est particulièrement favorable ... On peut donc imaginer, à long terme, de gagner en stabilité et en exactitude par l'utilisation de condensats de  $^{87}\text{Rb}$  dans les horloges spatiales.

Plus largement, le déplacement collisionnel, en tant que perturbation de la phase de la cohérence atomique, est gênant dans tout appareil qui sonde l'état d'interférence entre paquets d'onde atomiques. Par exemple, dans les senseurs inertiels à atomes froids, tels que gyromètres, gravimètres ou gradiomètres, la mesure du déphasage accumulé par les paquets d'onde entre les deux bras de l'interféromètre est perturbée par les collisions entre atomes froids, qui induisent un déphasage supplémentaire. L'évolution du nuage atomique est donc un point qu'il faudra veiller à soigneusement modéliser dans les interféromètres, par exemple en utilisant les calculs développés dans ce travail. Par ailleurs, le  $^{87}\text{Rb}$ , par son faible déplacement collisionnel, est là encore un atome particulièrement avantageux. Mais ceci est une autre histoire ...

## Annexe A

# Hamiltonien de couplage atome-champ et spin fictif : détails de calcul

### A.1 Expression de l'hamiltonien de couplage atome-champ dans le référentiel tournant

Dans le référentiel fixe du laboratoire, l'hamiltonien de couplage s'écrit :

$$H(t) = \frac{\hbar\omega_{at}}{2}(|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) - \vec{M} \cdot \vec{B}(\vec{r}(t), t) \quad (\text{A.1})$$

En utilisant les expressions :

- de l'opérateur dipolaire magnétique de l'atome,  $\vec{M}$  :

$$\vec{M} = \mu_B(|e\rangle\langle f| + |f\rangle\langle e|)\vec{z} \quad (\text{A.2})$$

- du champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}(t), t)$  oscillant à la pulsation  $\omega$  :

$$B_z(\vec{r}, t) = B_0(\omega) \cdot H_{a,z}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(t)) \quad (\text{A.3})$$

où  $B_0(\omega)$  est l'amplitude du champ dans la cavité,  $H_{a,z}(\vec{r})$  est la composante selon  $\vec{z}$  du mode propre de la cavité. On note  $f(t) = H_{a,z}(\vec{r}(t))$  le profil du champ le long de la trajectoire de l'atome.

- de la pulsation de Rabi  $\Omega_0$  définie par :

$$\hbar\Omega_0 = \mu_B B_0(\omega) \quad (\text{A.4})$$

cet hamiltonien se réécrit :

$$H(t) = \frac{\hbar\omega_{at}}{2}(|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) - \hbar\Omega_0 f(t) \cos(\omega t + \varphi(t))(|e\rangle\langle f| + |f\rangle\langle e|) \quad (\text{A.5})$$

c'est à dire, en utilisant les opérateurs de Pauli (cf. annexe B.1) :

$$H(t) = \frac{\hbar\omega_{at}}{2}\sigma_z - \hbar\Omega_0 f(t) \cos(\omega t + \varphi(t))\sigma_x \quad (\text{A.6})$$

Les relations de passage dans le référentiel tournant à la pulsation  $\omega$  s'écrivent :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = R(t)|\psi(t)\rangle \quad (\text{A.7})$$

où :

$$R(t) = \exp\left(i\frac{\omega t}{2}\sigma_z\right) = \cos\frac{\omega t}{2}I + i\sin\frac{\omega t}{2}\sigma_z = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega t}{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Dans ce référentiel tournant :

$$i\hbar\frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle}{dt} = RHR^\dagger|\tilde{\psi}(t)\rangle - i\hbar R\frac{dR^\dagger}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (\text{A.9})$$

• Le premier terme du second membre de (A.9) s'écrit :

$$RHR^\dagger(t) = \frac{\hbar\omega_{at}}{2}R\sigma_zR^\dagger - \hbar\Omega_0f(t)\cos(\omega t + \varphi(t))R\sigma_xR^\dagger \quad (\text{A.10})$$

c'est à dire, puisque

$$R\sigma_zR^\dagger = \sigma_z \text{ et } R\sigma_xR^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$RHR^\dagger(t) = \frac{\hbar\omega_{at}}{2}\sigma_z - \hbar\Omega_0f(t)\cos(\omega t + \varphi(t)) \times \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

• Le deuxième terme du second membre de (A.9) s'écrit :

$$-i\hbar R\frac{dR^\dagger}{dt} = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z \quad (\text{A.13})$$

L'équation d'évolution s'écrit donc, dans le référentiel tournant :

$$i\hbar\frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle}{dt} = \tilde{H}(t)|\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (\text{A.14})$$

avec :

$$\tilde{H}(t) = -\frac{\hbar}{2}(\omega - \omega_{at})\sigma_z - \hbar\Omega_0f(t)\cos(\omega t + \varphi(t)) \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Dans cette expression, le terme de couplage possède

• une composante résonante avec la transition horloge, qui est :

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{-i\varphi(t)} \\ e^{i\varphi(t)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

• une composante anti-résonante, qui est :

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{i(2\omega t + \varphi(t))} \\ e^{-i(2\omega t + \varphi(t))} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Le temps d'interaction entre l'atome et la cavité ( $\sim 30$  ms) étant beaucoup plus long que la période d'oscillation de la fréquence horloge ( $1/(9.2 \text{ GHz}) \sim 100$  ps), les termes anti-résonants n'ont pas d'effet important sur la dynamique de l'atome. Ils produisent un déplacement de la fréquence de résonance atomique de type "déplacement lumineux", connu sous le nom de déplacement de Bloch-Siegert (de l'ordre de  $1.5 \times 10^{-19}$  dans les fontaines atomiques).

Dans la suite de ce calcul, on fait l'approximation dite de l'onde tournante c'est-à-dire qu'on néglige les termes anti-résonants. En posant  $\delta = \omega - \omega_{at}$ , l'hamiltonien s'écrit :

$$\tilde{H}(t) = -\frac{\hbar}{2}\delta\sigma_z - \frac{\hbar}{2}\Omega_0 f(t) \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\varphi(t)} \\ e^{i\varphi(t)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

c'est à dire :

$$\tilde{H}(t) = -\frac{\hbar}{2}\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma} \quad (\text{A.19})$$

avec

$$\vec{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} \Omega_0 f(t) \cos \varphi(t) \\ \Omega_0 f(t) \sin \varphi(t) \\ \delta \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

et

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

où  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  sont les matrices de Pauli relatives à la base  $(|e\rangle, |f\rangle)$ .

## A.2 Image du spin fictif

### A.2.1 Une première approche

Plaçons-nous dans l'espace fictif à 3D où les axes de coordonnées (Ox), (Oy), (Oz) sont respectivement dirigés par  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  et définissent un repère orthonormé direct. Dans cet espace, le vecteur rotation instantané  $\vec{\Omega}$  est défini par (A.20), et on définit l'angle  $\theta$  par :

$$\cos \theta = \frac{\delta}{\Omega} \text{ et } \sin \theta = \frac{\Omega_0 f(t)}{\Omega} \quad (\text{A.22})$$

avec par conséquent  $0 \leq \theta \leq \pi$ . On a ainsi :

$$\vec{\Omega} = \Omega \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Le vecteur unitaire  $\vec{w} = \vec{\Omega}/\Omega$  peut donc alors être caractérisé, en coordonnées sphériques, par les angles  $\theta$  et  $\varphi$  (cf. figure (A.1)).

L'hamiltonien (A.19) s'écrit donc aussi :

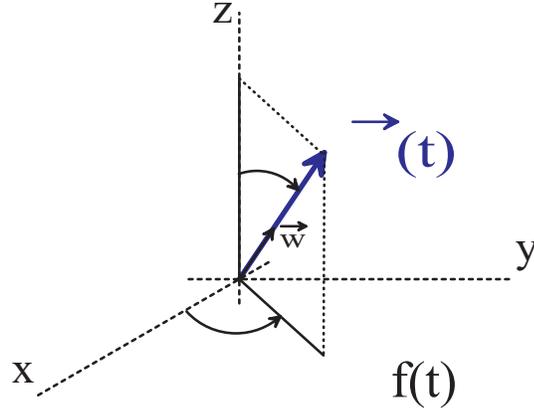


FIG. A.1 – Définition des angles  $\theta$  et  $\varphi$  du vecteur rotation instantané  $\vec{\Omega}(t)$ .

$$\tilde{H}(t) = -\frac{\hbar}{2}\Omega(t)(\vec{\sigma} \cdot \vec{w}) = -\frac{\hbar}{2}\Omega(t) \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$\tilde{H}(t)$  représente donc, dans la base  $(|e\rangle, |f\rangle)$ , l'hamiltonien d'un spin  $\frac{1}{2}$  fictif placé dans le champ  $\vec{\Omega}(t)$  (voir [38], pages 402-403 et 423-428 pour de plus amples détails). La direction  $\vec{w}$  est la direction suivant laquelle la composante du spin est  $+\hbar/2$  avec certitude.

$\tilde{H}(t)$  a pour valeurs propres  $E_+$  et  $E_-$  avec :

$$E_{\pm} = \mp \frac{\hbar}{2}\Omega(t) = \mp \frac{\hbar}{2} \frac{\delta}{\cos \theta} \quad (\text{A.25})$$

et pour vecteurs propres associés :

$$\begin{cases} |+\rangle_{\vec{w}} = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |e\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |f\rangle \\ |-\rangle_{\vec{w}} = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |e\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |f\rangle \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

L'atome est dans l'état  $|e\rangle$  à l'instant  $t = 0$ . Son expression dans la base  $(|+\rangle_{\vec{w}}, |-\rangle_{\vec{w}})$  des états propres de  $\tilde{H}(t)$  est :

$$|\tilde{\psi}(0)\rangle = |e\rangle = e^{i\varphi/2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle_{\vec{w}} - \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle_{\vec{w}} \right] \quad (\text{A.27})$$

A l'instant  $t$ , l'atome est donc dans l'état :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i\varphi/2} \times \quad (\text{A.28})$$

$$\left[ \cos \frac{\theta}{2} \exp \left( -i \int_0^t -\Omega(t') dt' / 2 \right) |+\rangle_{\vec{w}} - \sin \frac{\theta}{2} \exp \left( -i \int_0^t \Omega(t') dt' / 2 \right) |-\rangle_{\vec{w}} \right] \quad (\text{A.29})$$

qui exprime que le spin de l'atome précesse autour de  $\vec{w}$  à la pulsation  $-\Omega(t)$ .

### A.2.2 Interprétation géométrique. Composantes et précession du spin fictif $\vec{S}(t)$

#### Précession du spin fictif

$\vec{S}$  a été définie comme la valeur moyenne  $\langle \vec{\sigma} \rangle$  de l'opérateur vectoriel  $\vec{\sigma}$ . Or

$$\frac{d\langle \vec{\sigma} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{\sigma}, \tilde{H}(t)] \rangle = \frac{i}{2} \langle [\vec{\sigma}, \vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\sigma}] \rangle \quad (\text{A.30})$$

D'après la relation  $[\vec{\sigma}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}] = 2i\vec{\Omega} \times \vec{\sigma}$  établie en annexe B.1, on a donc :

$$\boxed{\frac{d\vec{S}(t)}{dt} = -\vec{\Omega}(t) \times \vec{S}(t)} \quad (\text{A.31})$$

Le spin fictif effectue donc un mouvement de précession de vecteur rotation instantané  $-\vec{\Omega}(t)$  (cf. fig. (1.8)).

#### Composantes du spin fictif

Le moment dipolaire magnétique de l'atome s'écrit :

$$\vec{M} = M_z \vec{z} \text{ avec } M_z = \mu_B (|e\rangle\langle f| + |f\rangle\langle e|) \quad (\text{A.32})$$

dans le référentiel tournant, on a :

$$\tilde{M}_z(t) = R(t)M_z(t)R^\dagger(t) = \mu_B (e^{-i\omega t}|f\rangle\langle e| + e^{i\omega t}|e\rangle\langle f|) \quad (\text{A.33})$$

La valeur moyenne de l'opérateur vectoriel  $\vec{M}$  est donc :  $\vec{\mathcal{M}}(t) = \mathcal{M}(t)\vec{z}$  avec :

$$\mathcal{M}(t) = \langle \tilde{\psi}(t) | \tilde{M}_z(t) | \tilde{\psi}(t) \rangle \quad (\text{A.34})$$

c'est à dire, en notant  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = c_1(t)|e\rangle + c_2(t)|f\rangle$ ,

$$\mathcal{M}(t) = \mu_B \begin{bmatrix} c_1^\dagger & c_2^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mu_B (c_1^\dagger c_2 e^{i\omega t} + c_1 c_2^\dagger e^{-i\omega t}) \quad (\text{A.35})$$

$\mathcal{M}(t)$  est donc la partie réelle du complexe

$$2c_1 c_2^\dagger e^{-i\omega t} = 2\mu_B \langle \tilde{\psi}(t) | f \rangle \langle e | \tilde{\psi}(t) \rangle e^{-i\omega t}$$

L'amplitude complexe de  $\mathcal{M}(t)$  est donc :

$$\mathcal{M}(\omega, t) = 2\mu_B \langle \tilde{\psi}(t) | f \rangle \langle e | \tilde{\psi}(t) \rangle \quad (\text{A.36})$$

Rappelons que  $|f\rangle\langle e| = (\sigma_x - i\sigma_y)/2$  et que par conséquent :

$$\mathcal{M}(\omega, t) = \mu_B \langle \tilde{\psi}(t) | \sigma_x | \tilde{\psi}(t) \rangle - i\mu_B \langle \tilde{\psi}(t) | \sigma_y | \tilde{\psi}(t) \rangle \quad (\text{A.37})$$

Par ailleurs,  $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|$ . Les composantes du spin fictif  $\vec{S}(t)$  sont donc reliées à  $\mathcal{M}(t)$  par :

$$\boxed{\begin{aligned} S_x(t) &= \langle \tilde{\psi}(t) | \sigma_x | \tilde{\psi}(t) \rangle = \text{Re} \{ \mathcal{M}(\omega, t) / \mu_B \} \\ S_y(t) &= \langle \tilde{\psi}(t) | \sigma_y | \tilde{\psi}(t) \rangle = -\text{Im} \{ \mathcal{M}(\omega, t) / \mu_B \} \\ S_z(t) &= \langle \tilde{\psi}(t) | \sigma_z | \tilde{\psi}(t) \rangle = \rho_{ee} - \rho_{ff} \end{aligned}} \quad (\text{A.38})$$

**Conclusion**

- La composante selon  $x$  du spin fictif est proportionnelle à la composante du moment magnétique oscillant en phase avec le champ exciteur.
- La composante selon  $y$  du spin fictif est proportionnelle à la composante du moment magnétique oscillant en quadrature avec le champ exciteur.
- La composante selon  $z$  du spin fictif est égale à la différence des populations des états  $|e\rangle$  et  $|f\rangle$ .

## Annexe B

# Quelques relations utiles

### B.1 Matrices de Pauli

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}, \text{ avec } \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Les matrices de Pauli définies par (B.1) ont les propriétés suivantes :

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I \quad (\text{B.2})$$

où  $I$  est la matrice unité  $2 \times 2$ .

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z \quad (\text{B.3})$$

ainsi que toutes les équations qui s'en déduisent par permutation circulaire de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On en déduit immédiatement :

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad (\text{B.4})$$

et toutes les égalités obtenues par permutation circulaire. On peut écrire toutes les égalités (B.4) sous forme condensée :

$$\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma} \quad (\text{B.5})$$

Une égalité utile pour interpréter l'évolution d'un spin fictif dans un champ  $\vec{\Omega}$ , où  $\vec{\Omega}$  est un vecteur ou un opérateur vectoriel dont les composantes commutent avec celles de  $\vec{\sigma}$  :

$$[\vec{\sigma}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}] = 2i\vec{\Omega} \times \vec{\sigma} \quad (\text{B.6})$$

En effet,

$$\begin{aligned}
[\vec{\sigma}, \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}] &= \vec{\sigma} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) \vec{\sigma} \\
&= \vec{\sigma} (\Omega_x \sigma_x + \Omega_y \sigma_y + \Omega_z \sigma_z) - (\Omega_x \sigma_x + \Omega_y \sigma_y + \Omega_z \sigma_z) \vec{\sigma} \\
&= \begin{bmatrix} \Omega_y [\sigma_x, \sigma_y] + \Omega_z [\sigma_x, \sigma_z] \\ \Omega_x [\sigma_y, \sigma_x] + \Omega_z [\sigma_y, \sigma_z] \\ \Omega_x [\sigma_z, \sigma_x] + \Omega_y [\sigma_z, \sigma_y] \end{bmatrix} \\
&= 2i\vec{\Omega} \times \vec{\sigma}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

en utilisant (B.4) et ses permutations.

## B.2 Une propriété des modes propres de la cavité micro-onde

Les équations de Maxwell s'écrivent, dans le domaine fréquentiel, et en l'absence de charges ( $\sigma = 0$ ) et de courants ( $\vec{J} = \vec{0}$ ), et dans le vide :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= i\omega \vec{B} \\
\vec{\nabla} \times \vec{H} &= -i\omega \vec{D} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0
\end{aligned} \tag{B.8}$$

avec  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  et  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ .  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont les notations simplifiées des amplitudes complexes des champs électriques et magnétiques,  $\vec{E}(\omega, \vec{r})$  et  $\vec{H}(\omega, \vec{r})$ , qui s'écrivent en fonction des modes propres de la cavité :

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\omega, \vec{r}) &= E(\omega) \vec{E}_a(\vec{r}) \\
\vec{H}(\omega, \vec{r}) &= H(\omega) \vec{H}_a(\vec{r})
\end{aligned} \tag{B.9}$$

En injectant ces expressions dans (B.8), on trouve que les modes propres de la cavité sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E}_a + k_a^2 \vec{E}_a &= 0 \\
\vec{\nabla}^2 \vec{H}_a + k_a^2 \vec{H}_a &= 0
\end{aligned} \tag{B.10}$$

où  $k_a = 2\pi/\lambda = \omega/c$ . Les modes propres solutions de (B.10) vérifient :

$$\begin{aligned}
k_a \vec{E}_a &= \vec{\nabla} \times \vec{H}_a \\
k_a \vec{H}_a &= \vec{\nabla} \times \vec{E}_a
\end{aligned} \tag{B.11}$$

et de plus :

$$E(\omega) = i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H(\omega) \tag{B.12}$$

De (B.11), on déduit :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_a \times \vec{H}_a) &= \vec{H}_a \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_a) - \vec{E}_a \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_a) \\
&= k_a (\|\vec{H}_a\|^2 - \|\vec{E}_a\|^2)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

d'où :

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_a \times \vec{H}_a) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} k_a (\|\vec{H}_a\|^2 - \|\vec{E}_a\|^2) d\mathcal{V} \quad (\text{B.14})$$

Le membre de gauche de cette égalité s'écrit aussi :

$$\oint_{\Sigma} \vec{n} \cdot (\vec{E}_a \times \vec{H}_a) d\Sigma \quad (\text{B.15})$$

où  $\vec{n}$  dirige localement la normale à la surface  $\Sigma$  qui englobe  $\mathcal{V}$ . Le trièdre  $(\vec{n}, \vec{E}_a, \vec{H}_a)$  étant orthogonal, ce membre est nul donc on a :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \|\vec{H}_a\|^2 d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \|\vec{E}_a\|^2 d\mathcal{V}} \quad (\text{B.16})$$

d'où, d'après (B.12) :

$$\boxed{\mu_0 \int_{\mathcal{V}} \|\vec{H}(\omega, \vec{r})\|^2 d\mathcal{V} = \varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \|\vec{E}(\omega, \vec{r})\|^2 d\mathcal{V}} \quad (\text{B.17})$$

qui traduit l'égalité des énergies électriques et magnétiques stockées dans la cavité.

### B.3 Calcul de la constante de normalisation $\beta$ de la loi de probabilité $L^b(\vec{r})$ à 3D

On cherche à calculer la constante de normalisation  $\beta$  de la loi de probabilité :

$$p(\vec{r}) = \frac{\beta}{\left(1 + \frac{r^2}{r_c^2}\right)^b} \quad (\text{B.18})$$

avec

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 p(\vec{r}) dr = 1 \quad (\text{B.19})$$

Sachant que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)^b} dx = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(b-1/2)}{\Gamma(b)} \quad (\text{B.20})$$

on obtient immédiatement :

$$\beta^{-1} = 4\pi r_c^3 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{\Gamma(b-3/2)}{\Gamma(b-1)} - \frac{\Gamma(b-1/2)}{\Gamma(b)} \right) \quad (\text{B.21})$$

Rappel :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \text{ avec } z > 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z! \text{ avec } z > 0 \quad (\text{B.23})$$

$$\Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{B.24})$$

## B.4 Coefficient de diffusion en impulsion pour un atome à deux niveaux

Le coefficient de diffusion en impulsion,  $\mathcal{D}$ , donne l'échauffement de l'atome sous l'effet des fluctuations des forces radiatives. Si  $\Delta\vec{p}^2$  désigne la variance de l'impulsion atomique, on a [124] :

$$\frac{d(\Delta\vec{p}^2)}{dt} = 2\mathcal{D} \quad (\text{B.25})$$

avec :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{corr.} + \mathcal{D}_{spont.} \quad (\text{B.26})$$

où

$$\mathcal{D}_{corr.} = d_1 \left( \frac{\vec{\nabla}s}{s} \right)^2 + d_2 \left( \vec{\nabla}\varphi \right)^2 + d_3 \frac{\vec{\nabla}s}{s} \cdot \vec{\nabla}\varphi \quad (\text{B.27})$$

$$\text{et } \mathcal{D}_{spont.} = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad (\text{B.28})$$

$s$  est le paramètre de saturation,  $\varphi$  la phase de l'onde laser. Les coefficients  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  s'expriment en fonction des gradients d'intensité ( $\vec{\nabla}s$ ) et de phase ( $\vec{\nabla}\varphi$ ) de l'onde laser.

$$d_1 = \frac{1}{16} \hbar^2 \Gamma \frac{s}{(1+s)^3} \left( 1 + \frac{3\Gamma^2 - \delta^2}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} s + 3s^2 + \frac{\Gamma^2 + 4\delta^2}{\Gamma^2} s^2 \right) \quad (\text{B.29})$$

$$d_2 = \frac{1}{4} \hbar^2 \Gamma \frac{s}{(1+s)^3} \left( 1 - \frac{\Gamma^2 - 3\delta^2}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} s + s^2 \right) \quad (\text{B.30})$$

$$d_3 = \frac{1}{2} \hbar^2 \delta \frac{s^2}{(1+s)^3} \left( \frac{\Gamma^2}{4} + s \right) \quad (\text{B.31})$$

## B.5 Expression complète du taux d'émission spontanée pour un nuage d'atomes froids éclairé par une source laser

Lorsqu'on éclaire le nuage d'atomes froids par un laser dont le profil spatial de saturation est  $s_0(x, z)$ , désaccordé de résonance de  $\delta_0$ , modulé avec une amplitude  $m$ , et de largeur spectrale  $\gamma$ , le taux d'émission spontanée par les atomes, sur la transition de largeur naturelle  $\Gamma$ , s'écrit [156] :

$$\mathcal{T} = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s(x, z, t)}{1 + s(x, z, t)} dt \quad (\text{B.32})$$

avec :

$$s(x, z, t) = s_0(x, z) \left( \frac{\Gamma}{\Gamma + \gamma} \right) \frac{1}{1 + 4 \frac{(\delta_0 + m \sin t)^2}{(\Gamma + \gamma)^2}} \quad (\text{B.33})$$

## B.6 Conventions concernant les incertitudes et les distributions gaussiennes

### Incertitudes et distributions gaussiennes

On utilise pour les incertitudes la convention usuelle qui suppose une distribution gaussienne des mesures  $x$  autour de leur valeur moyenne  $\langle x \rangle$  :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (\text{B.34})$$

Pour caractériser l'incertitude d'une mesure, on utilise l'écart type de la distribution :

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{1/2} = \sigma_x \quad (\text{B.35})$$

et on note  $x = \langle x \rangle \pm \sigma_x$ . La probabilité de trouver une mesure entre  $\langle x \rangle - \sigma_x$  et  $\langle x \rangle + \sigma_x$  vaut 0.683. La probabilité de trouver une mesure entre  $\langle x \rangle - 2\sigma_x$  et  $\langle x \rangle + 2\sigma_x$  vaut 0.954. La probabilité de trouver une mesure entre  $\langle x \rangle - 3\sigma_x$  et  $\langle x \rangle + 3\sigma_x$  vaut 0.997.

Pour la plupart des distributions gaussiennes utilisées dans la thèse, on utilise les conventions de l'équation (B.34) ci-dessus.

### Faisceaux lasers gaussiens

Pour les faisceaux lasers gaussiens, on utilise une convention différente. On écrit l'éclairement du faisceau sous la forme :

$$E(x, y) = \frac{2P}{\pi w^2} \times \exp\left(-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2}\right), \quad (\text{B.36})$$

$P$  désignant la puissance totale du faisceau et  $w$ , son *waist*.

## B.7 Conventions concernant les densités spectrales de bruit

### Cas général

Pour décrire le spectre des fluctuations d'une grandeur  $x(t)$ , on utilise dans toute la thèse, la densité spectrale mono-latérale  $S_{\delta x}(f)$ . Lorsque la grandeur  $x(t)$  est filtrée par un filtre linéaire de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , on obtient une grandeur  $y(t)$  vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' h(t-t')x(t') \\ S_{\delta y}(f) &= |H(f)|^2 S_{\delta x}(f) \\ \text{avec : } H(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-2i\pi ft} dt. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

La variance des fluctuations de  $y(t)$  est donnée par :

$$\sigma_{\delta y}^2 = \int_0^{+\infty} S_{\delta y}(f) df = \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 S_{\delta x}(f) df. \quad (\text{B.38})$$

### Cas des fluctuations d'un signal sinusoïdal

On caractérise souvent les fluctuations d'un signal sinusoïdal de la forme :

$$s(t) = Ae^{-i(2\pi\nu_0 t + \phi(t))} \quad (\text{B.39})$$

avec :  $|\phi(t)| \ll 1$

à l'aide de la densité spectrale des fluctuations de phase  $S_\phi(f)$ . On utilise également la densité spectrale des fluctuations relative de fréquence  $S_y(f)$ , c'est-à-dire la densité spectrale de la grandeur :

$$y(t) = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi\nu_0}. \quad (\text{B.40})$$

Entre ces deux densités spectrales, on a la relation suivante :

$$S_y(f) = \frac{f^2}{\nu_0^2} S_\phi(f). \quad (\text{B.41})$$

La densité spectrale des fluctuations de phase  $S_\phi(f)$  s'exprime en  $\text{rad}^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ . La densité spectrale des fluctuations relatives de fréquence  $S_y(f)$  s'exprime en  $\text{Hz}^{-1}$ . Pour du bruit blanc de fréquence, la fonction  $S_y(f)$  est constante et la variance d'Allan (équation (1.4)) du signal sinusoïdal vaut :

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{S_y}{2\tau} \quad (\text{B.42})$$

On montre également [157, 156] que pour du bruit blanc de fréquence, la densité spectrale de puissance du signal sinusoïdal (B.39) est une lorentzienne de pleine largeur à mi-hauteur  $\Delta\nu_s = \pi\nu_0^2 S_y$  :

$$S_s(\nu) \propto \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_s} \right)^2} \quad (\text{B.43})$$

## Annexe C

# Procédure d'accord relatif des deux cavités d'interrogation de la fontaine *RbCs*

La procédure d'accord relatif des deux cavités micro-ondes d'interrogation de la fontaine *RbCs* est ici décrite en détail. Elle a été effectuée entre le début de novembre 2000 et le 9 avril 2001, date à laquelle la cavité double a été descendue dans la fontaine.

### 1<sup>re</sup> étape

Les cotes initiales des cavités sont telles que, sous vide, leurs fréquences de résonance sont désaccordées des fréquences de transition atomique de respectivement  $\sim -18$  MHz pour le *Cs* et  $\sim -7$  MHz pour le *Rb*. Cela signifie qu'elles sont trop longues de  $\sim 145$   $\mu\text{m}$  pour le *Cs*, et  $\sim 100$   $\mu\text{m}$  pour le *Rb*. Par ébauchage au grain de 300  $\mu\text{m}$ , on raccourcit le corps de cavité *Cs* de  $\sim 70$   $\mu\text{m}$ , de manière symétrique par rapport à l'iris de couplage, de façon à réduire le désaccord de la cavité *Cs*, sous vide à  $-9$  MHz. Il reste alors  $\sim 74$   $\mu\text{m}$  à ôter sur le corps *Cs*. Jusqu'à maintenant, il suffisait d'effectuer les mesures de fréquence à l'air : nous avons mesuré un déplacement de  $+2.6$  MHz de la résonance *Cs* lorsqu'on passe de l'air au vide, et de  $+2$  MHz pour la résonance *Rb*, et nous pouvions jusqu'à ce point corriger les mesures à l'air afin d'enduire le désaccord sous vide. Ces déplacements sont cependant approximatifs : ils varient de  $\sim \pm 100$  kHz avec la pression atmosphérique, avec le degré d'hygrométrie de l'air ... A partir de ce point, les mesures sont donc effectuées sous vide primaire, dans une enceinte en inox spécialement aménagée à cet effet.

## 2<sup>e</sup> étape

La deuxième étape consiste à utiliser une partie des  $70\ \mu\text{m}$  ou  $100\ \mu\text{m}$  restants pour calibrer l'effet du polissage des surfaces d'appui des corps de cavité : nous avons calibré la quantité de matière ôtée en fonction du temps passé à doucir les surfaces, et en fonction de la taille des grains utilisés et des mouvements relatifs du polissoir et du corps de cavité. Pour effectuer cette calibration, on utilise un comparateur avec une résolution de  $100\ \text{nm}$  et après chaque "passe" de doucissage (quelques minutes) on mesure la cote de la surface doucie par comparaison à une cale de référence solidaire du corps de cavité et un peu plus courte (de  $\sim 0.5\ \text{mm}$ ), taillée dans le même morceau de cuivre OFHC (voir figure (??)). De cette façon, on peut effectuer la mesure de la quantité ôtée en temps réel sans avoir besoin d'effectuer des corrections liées aux fluctuations de température ( $\lesssim 1\ ^\circ\text{C}$  lorsque l'expérimentateur, à  $37\ ^\circ\text{C}$ , prend la précaution de toucher le moins possible le corps de cavité et met des gants isolants). En effet, les fluctuations de température affectent à la fois la cale de référence et la pièce usinée. Il s'agit donc d'une mesure différentielle de la longueur du corps de cavité, qui permet de s'affranchir des fluctuations de température : une fluctuation de  $1\ ^\circ\text{C}$  se traduit par une fluctuation de  $8.5\ \text{nm}$  sur la différence de  $0.5\ \text{mm}$  entre la cale et le corps de cavité, ce qui est négligeable devant la résolution recherchée. Les taux d'érosion trouvés sont, pour l'abrasif le plus fin utilisé (grain en SiC de  $9\ \mu\text{m}$ ) de  $\sim 100\ \text{nm}\cdot\text{min}^{-1}$ . Ceci permet d'une part d'atteindre raisonnablement la résolution de  $50\ \text{nm}$  recherchée (les dernières "passes" font  $\sim 30\ \text{s}$ ), et d'autre part, cela garantit un état de surface très bon pour les surfaces d'appui des corps de cavité, à la fois par sa rugosité très faible et par sa planéité. Ce dernier point est très important car il permet de réduire la sensibilité de la fréquence au serrage des chapeaux.

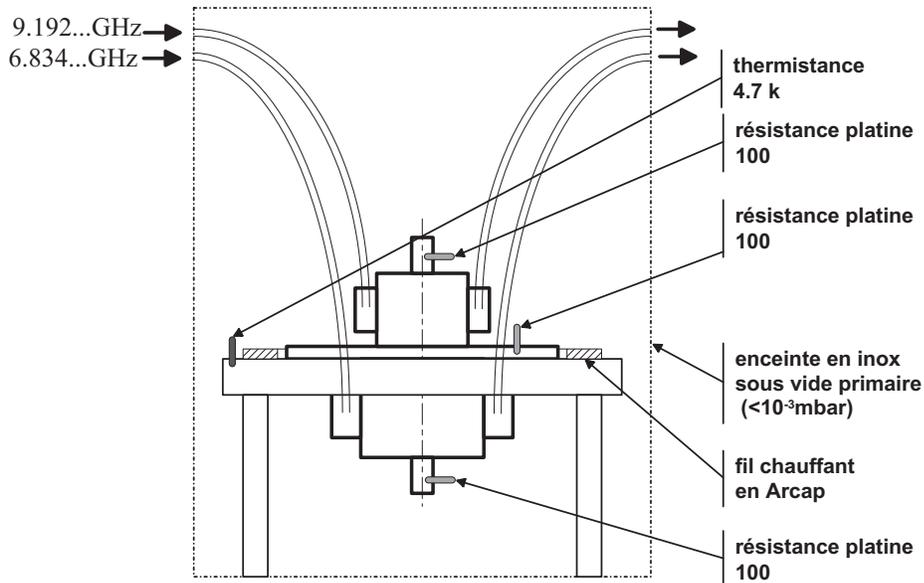


FIG. C.1 – Schéma de l'enceinte à vide utilisée pour l'accord de la cavité double.

Après quelques "passes" de doucissage, nous mesurons la fréquence des ca-

vités sous vide primaire, dans une enceinte à vide en inox spécialement aménagée pour l'occasion : des passages électriques permettent de mesurer la température de la cavité en trois points (au milieu de la cavité double, et au niveau des guides sous-coupeure des chapeaux ; cf. figure (C.1)), à l'aide de résistances platine 100  $\Omega$  ; des connecteurs micro-onde permettent de mesurer les résonances des cavités par transmission, en présence des isolateurs micro-ondes définitifs, connectés sous vide. Un système de chauffage permet d'asservir la température de la cavité double : c'est un support en aluminium, muni d'un fil chauffant en Arcap, et en bon contact thermique avec la cavité double. Ce support en aluminium est lui-même en bon contact thermique avec l'enceinte à vide, qui est refroidie à l'eau. Ce système, qui permet d'effectuer toutes les mesures nécessaires à l'accord relatif des deux cavités, est cependant relativement lourd à manipuler : après chaque opération d'usinage des corps de cavité, il faut nettoyer chimiquement les pièces usinées, assembler la cavité double<sup>1</sup>, la monter sur le support en aluminium thermostaté, reconnecter les câbles micro-ondes de couplage du champ micro-onde, avec les isolateurs et les circulateurs adéquats, réaliser un vide primaire, et enfin attendre que la température de la cavité se stabilise. Au delà du temps de réponse de l'asservissement de température ( $\sim 1$  h), les résistances indiquent la même température à mieux que  $\pm 25$  mK. Au bout de  $\sim 2$  h de thermalisation, les fréquences des cavités sont stables au niveau de  $\pm 300$  Hz après 100 s d'intégration, ce qui indique une stabilité de température de  $\lesssim \pm 3$  mK.

Remarque : le paramètre qui compte pendant tout l'ajustement est la différence des désaccords relatifs des cavités micro-ondes, car il est indépendant de la température<sup>2</sup>. La figure (C.2) montre un échantillon des signaux obtenus.

### 3<sup>e</sup> étape

La troisième étape consiste, alors que les cavités sont à  $\sim 1$  MHz de leur fréquence finale, à monter les cavités latérales sur les corps de cavité d'interrogation par écrasement de joint indium, et à régler de manière définitive les cavités latérales de couplage, à l'air. En jouant sur la longueur du guide et sur la longueur de l'antenne du câble co-axial dans le guide, on fait coïncider la fréquence de résonance des cavités latérales avec celle de la cavité centrale et on réalise l'adaptation d'impédance 50  $\Omega$  des cavités couplées (moins de 1% de puissance réfléchi). Ce réglage doit être fait avant l'accord final de la cavité, car le couplage aux guides déplace légèrement la fréquence de résonance de la cavité. Un fois l'adaptation d'impédance réalisée, les cavités d'interrogation ont un facteur de qualité en charge  $Q_c \simeq 7600$  pour le *Rb* et  $Q_c \simeq 6600$  pour le *Cs*, et les pertes en transmission sont de  $\sim 6$  dB, liées aux pertes dans les 3 m de câbles co-axiaux et aux pertes dans les parois des cavités. La largeur de la résonance des guides latéraux est de  $\sim 100$  MHz et il reste encore  $\sim 1$  MHz à

<sup>1</sup>sans ses joints en indium, cette étape est réservée pour la fin.

<sup>2</sup>Notons  $\mathcal{T}_0$  la température pour laquelle la cavité *Cs* est à résonance :  $\nu_{Cs}^{cav}(\mathcal{T}_0) = \nu_{Cs}$ , et  $\mathcal{T}'_0$  la température pour laquelle la cavité *Rb* est à résonance :  $\nu_{Rb}^{cav}(\mathcal{T}'_0) = \nu_{Cs}$ . La condition que l'on cherche à réaliser est  $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}'_0$ , et on a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}'_0 \iff \forall \mathcal{T}, \frac{\nu_{Cs}^{cav}(\mathcal{T}) - \nu_{Cs}}{\nu_{Cs}} = \frac{\nu_{Rb}^{cav}(\mathcal{T}) - \nu_{Rb}}{\nu_{Rb}}$$

qui exprime l'accord relatif des deux cavités à toute température.

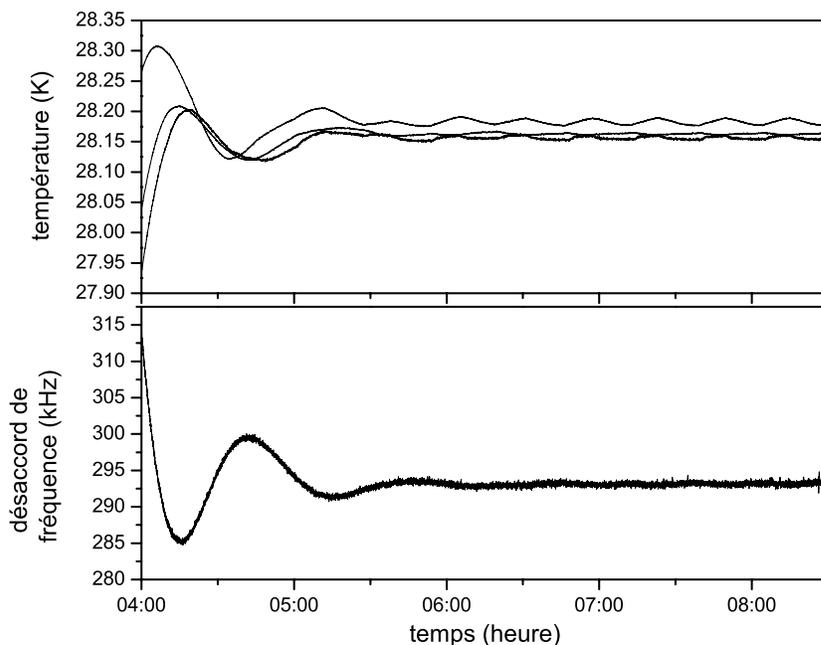


FIG. C.2 – Échantillons des signaux obtenus pendant la procédure d'accord de la cavité double. Les courbes sur la figure a) montrent les températures mesurées par les trois résistances en platine  $100\Omega$  de contrôle, placée au deux extrémités et au milieu de la cavité double. La courbe de la figure b) montre la mesure simultanée du désaccord de la résonance de la cavité  $C_s$  par rapport à la résonance atomique.

rattraper pour réaliser l'accord final. Ce dernier réglage ne modifie quasiment pas l'adaptation d'impédance.

#### 4<sup>e</sup> étape et fin

On termine enfin l'accord fin par un doucissage ultime avec l'émeri le plus fin, pendant 30 s. La cavité subit un nettoyage chimique ultime, et est assemblée dans des conditions de propreté ultra-vide. Les joints indium, moulés de sorte à ne pas induire de sur-épaisseur entre les chapeaux et les corps de cavité, sont écrasés. Ils ne déplacent pas les fréquences de résonance.

## Annexe D

# Quelques valeurs numériques utiles

### D.1 Constantes fondamentales

quantité	symbole	valeur
magnéton de Bohr	$\mu_B$	$9.274\,008\,99(37) \times 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$
vitesse de la lumière	$c$	$299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$ (exact)
perméabilité du vide	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N.A}^{-2}$ (exact)
constante de Planck réduite	$\hbar$	$1.054\,571\,596(82) \times 10^{-34} \text{ J.s}$
constante de Boltzmann	$k_B$	$1.380\,650\,3(24) \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
charge élémentaire	$e$	$1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19} \text{ C}$

TAB. D.1 – *Quelques constantes fondamentales tirées du CODATA 1998.*

## D.2 Atomes de rubidium 87

quantité	valeur
numéro atomique $Z$	37
masse atomique	$1.443 \times 10^{-25}$ kg
fréquence hyperfine	6 834 682 610.904 335(12) Hz
longueur d'onde, raie D2	780 nm
fréquence optique, raie D2	$3.84 \times 10^{14}$ Hz
longueur d'onde, raie D1	794 nm
largeur de raie D2	$\Gamma/2\pi \simeq 5.9$ MHz
intensité de saturation, raie D2	$I_{sat} \simeq 1.65$ mW.cm <sup>-2</sup>
vitesse de recul	$v_{rec} \simeq 5.89$ mm.s <sup>-1</sup>
déplacement du corps noir $\Delta\nu = K_{BB}(T/300 \text{ K})^4$	$K_{BB} = -8.6(2) \times 10^{-5}$ Hz
déplacement Zeeman d'ordre 2 $\Delta\nu = K_Z^{(2)} B^2$	$K_Z^{(2)} = 575.14 \times 10^8$ Hz.T <sup>-2</sup>
déplacement Zeeman d'ordre 1 de la transition $ m_F = 1\rangle \rightarrow  m_F = 1\rangle$ $\Delta\nu = K_Z^{(1)} B$	$K_Z^{(1)} = 14.0194$ Hz.nT <sup>-1</sup>

TAB. D.2 – Quelques données sur l'atome de <sup>87</sup>Rb.

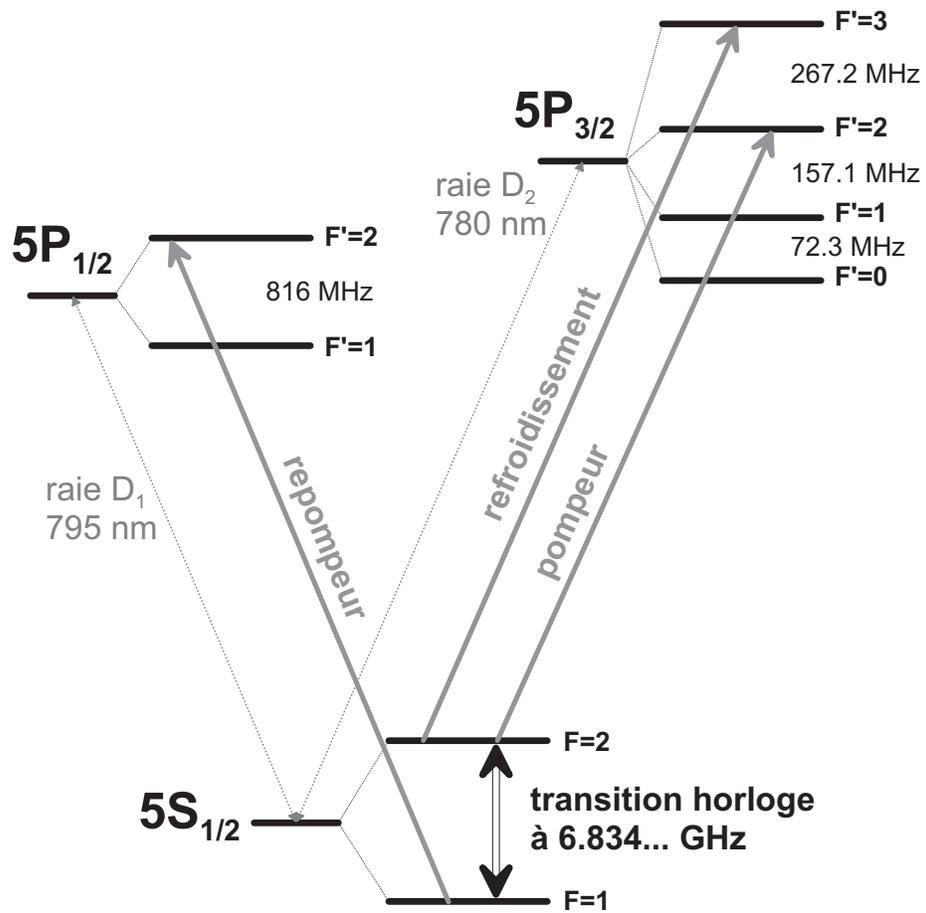


FIG. D.1 – Niveaux d'énergie du  $^{87}\text{Rb}$  utiles pour la manipulation des atomes froids dans la fontaine.

### D.3 Atomes de césium 133

quantité	valeur
numéro atomique $Z$	55
masse atomique	$2.207 \times 10^{-25}$ kg
fréquence hyperfine	9 192 631 770 Hz (exact)
longueur d'onde, raie D2	852 nm
fréquence optique, raie D2	$3.52 \times 10^{14}$ Hz
longueur d'onde, raie D1	895 nm
largeur de raie D2	$\Gamma/2\pi \simeq 5.3$ MHz
intensité de saturation, raie D2	$I_{sat} \simeq 1.09$ mW.cm <sup>-2</sup>
vitesse de recul	$v_{rec} \simeq 3.52$ mm.s <sup>-1</sup>
déplacement du corps noir $\Delta\nu = K_{BB}(T/300 \text{ K})^4$	$K_{BB} = -1.573(3) \times 10^{-4}$ Hz
déplacement Zeeman d'ordre 2 $\Delta\nu = K_Z^{(2)} B^2$	$K_Z^{(2)} = 427.45 \times 10^8$ Hz.T <sup>-2</sup>
déplacement Zeeman d'ordre 1 de la transition $ m_F = 1\rangle \rightarrow  m_F = 1\rangle$ $\Delta\nu = K_Z^{(1)} B$	$K_Z^{(1)} = 70.084$ Hz.nT <sup>-1</sup>

TAB. D.3 – Quelques données sur l'atome de <sup>133</sup>Cs.

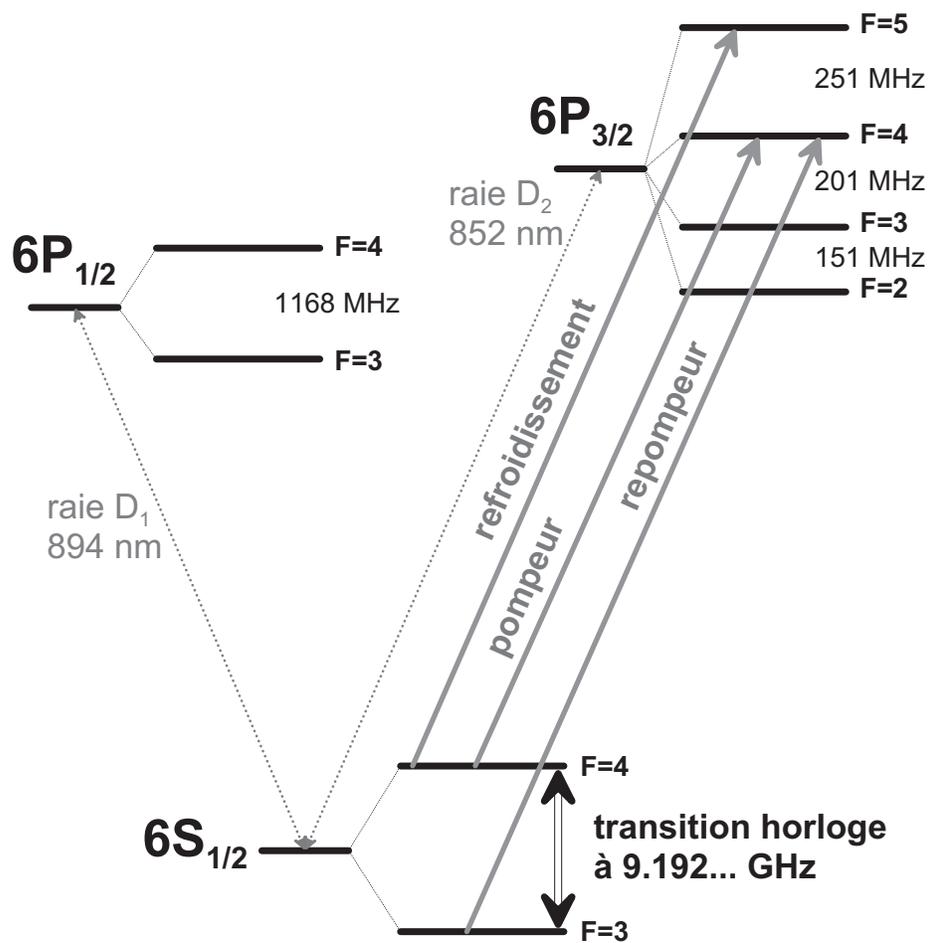


FIG. D.2 – Niveaux d'énergie du  $^{133}\text{Cs}$  utiles pour la manipulation des atomes froids dans la fontaine.



**Annexe E**

**Publications**

**E.1 High-Accuracy Measurement of the  $^{87}\text{Rb}$  Ground-State Hyperfine Splitting in an Atomic Fountain**

## High-accuracy measurement of the $^{87}\text{Rb}$ ground-state hyperfine splitting in an atomic fountain

S. BIZE<sup>1</sup>, Y. SORTAIS<sup>1</sup>, M. S. SANTOS<sup>2(\*)</sup>, C. MANDACHE<sup>3(\*\*)</sup>  
A. CLAIRON<sup>1</sup> and C. SALOMON<sup>4(\*\*\*)</sup>

<sup>1</sup> *BNM-LPTF, Observatoire de Paris - 61 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France(\*\*)*

<sup>2</sup> *Instituto de Física de São Carlos-USP, Departamento de Física e Ciência dos Materiais P.O. Box 369, Av. Dr. Carlos Botelho, 1465, São Carlos, SP, 13560-970, Brazil*

<sup>3</sup> *Institutul National de Fizica Laserilor, Plasmei si Radiatiei P.O. Box-MG36, Bucuresti, Magurele, Romania*

<sup>4</sup> *Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure 24 rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France*

(received 4 November 1998; accepted in final form 21 December 1998)

PACS. 06.30Ft – Time and frequency.

PACS. 32.80Pj – Optical cooling of atoms; trapping.

PACS. 32.10Fn – Fine and hyperfine structure.

**Abstract.** – We describe the operation of a laser-cooled rubidium  $^{87}\text{Rb}$  frequency standard. We present a new measurement of the  $^{87}\text{Rb}$  hyperfine frequency with a  $1.3 \times 10^{-14}$  relative accuracy, by comparison with a Cs fountain primary standard. The measured  $^{87}\text{Rb}$  ground-state hyperfine splitting is  $\nu_{87\text{Rb}} = 6\,834\,682\,610.90429(9)$  Hz. This value differs from previously published values (see ESSEN L., HOPE E. G. and SUTCLIFFE D., *Nature*, **189** (1961) 298; PENSELIN S., MORAN T., COHEN W. and WINKLER G., *Phys. Rev.*, **127** (1962) 524; ARDITI M. and CEREZ P., *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **IM-21** (1972) 391) by about 2-3 Hz and is  $10^4$  times more accurate. Because of the low collisional shift in  $^{87}\text{Rb}$ , future improvements may lead to a stability of  $1 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  and a relative accuracy in the  $10^{-17}$  range.

The benefits of laser-cooling techniques for trapped ion and neutral atom frequency standards are now fully demonstrated [1, 2]. The current accuracy of the mercury ion standard of ref. [2] is  $3.4 \times 10^{-15}$ . The accuracy of the LPTF cold-cesium fountain FO1 is presently  $2 \times 10^{-15}$ , the best value reported so far among all frequency standards [3]. Using a cryogenic Sapphire microwave resonator [4] as a local oscillator for the fountain, a short-term stability of  $4 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  has been measured [5]. This stability is only limited by the atomic quantum projection noise, inversely proportional to the square root of the number of detected atoms [5, 6]. At this stage, the most severe limitation of cold cesium standards is the collisional

---

(\*) E-mail: monica@if.sc.usp.br

(\*\*) E-mail: cipriana@alpha1.infim.ro

(\*\*\*) E-mail: salomon@physique.ens.fr

(\*\*) E-mail: lptf@obsprm.fr

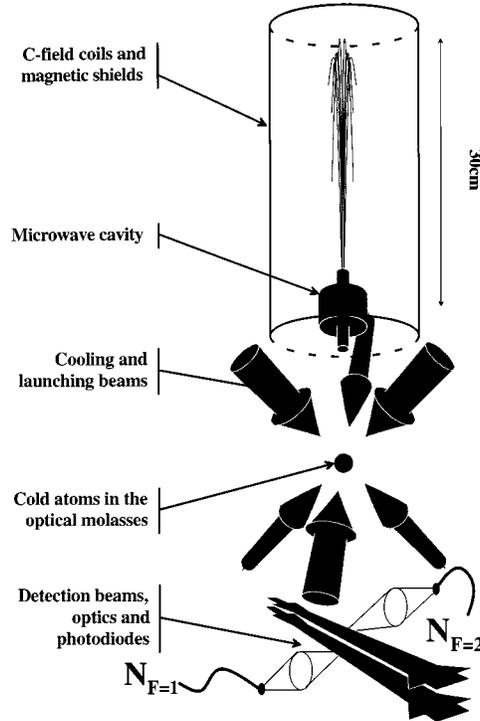


Fig. 1. – The rubidium fountain. The microwave cavity is 38 cm above the optical molasses and the detection zones 12 cm below the molasses. The atomic populations  $N_{F=1}$  (and  $N_{F=2}$ ) in  $F = 1$  (respectively  $F = 2$ ) are measured by light induced fluorescence.

shift [7,8]. This shift is proportional to the atomic density and hence to the number of atoms contributing to the signal. In order to obtain a relative frequency stability well below  $10^{-16}$ , it will be necessary to stabilize the atomic density at the percent level over days, a delicate task. To reduce this collisional shift, alternate atomic species have been proposed *i.e.*  $^{135}\text{Cs}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{85}\text{Rb}$ ,  $^{87}\text{Rb}$  [9]. Among these atoms, the 6.8 GHz hyperfine transition in  $^{87}\text{Rb}$  is expected to have a collisional shift about 15 times smaller [10], or even less [11] than  $^{133}\text{Cs}$  at equal density. Therefore, using Rb instead of Cs in a fountain standard may lead to an order of magnitude improvement in frequency stability together with an excellent accuracy. In addition, comparing the hyperfine energies of various alkali atoms over an extended period of time ( $\sim$  year) may constitute a stringent test of a possible drift of the fine-structure constant  $\alpha$  [12]. In this paper we describe the operation of a laser-cooled  $^{87}\text{Rb}$  frequency standard and the first frequency comparison between two cold-atom fountains with an accuracy of  $1.3 \times 10^{-14}$ .

The principle of our  $^{87}\text{Rb}$  fountain is based on the existing BNM-LPTF Cs fountain described in [1]. A schematic view of the apparatus is shown in fig. 1. About  $10^8$  rubidium atoms are caught in  $\text{Lin} \perp \text{Lin}$  optical molasses from a vapor cell at room temperature, at a pressure of  $\sim 10^{-8}$  Torr in one second. The molasses cloud has a Gaussian shape with a  $1/\sqrt{e}$  diameter of  $\simeq 11$  mm as measured by a CCD camera. Using the moving molasses technique [13], they are launched upwards in the (1,1,1) direction with respect to the cooling beams. The launch velocity is 3-4 m/s. The atoms, all in the  $5S^{1/2}F = 2$  state, pass through a cylindrical microwave resonator operating in the  $\text{TE}_{011}$  mode. The cavity is made of copper and has a quality factor of  $\simeq 15000$ . The microwave frequency is generated from an ultra-stable

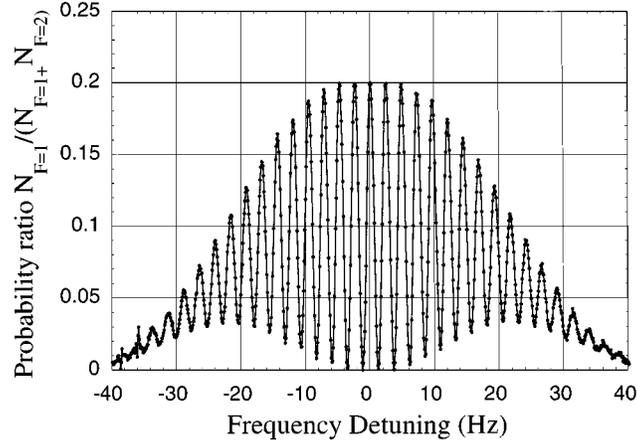


Fig. 2. – Ramsey fringes of the rubidium fountain.  $N_{F=1}$  and  $N_{F=2}$  are the number of detected atoms in the  $F = 1$  and  $F = 2$  hyperfine levels. The transition probability  $N_{F=1}/(N_{F=1} + N_{F=2})$  is plotted as a function of microwave frequency detuning. In the absence of selection of the  $F = 2, m_F = 0$  Zeeman sublevel before the Ramsey interactions, the transition probability reaches only 0.2 at resonance. One point per cycle of duration 1.2 second.

quartz oscillator and tuned to the  $^{87}\text{Rb}$  ground-state hyperfine transition near 6.8 GHz. The microwave power is adjusted so that atoms undergo  $\pi/2$  pulses between the two hyperfine levels on the way up and on the way down during their parabolic flight. This is the well-known Ramsey method. The atoms reach apogee 0.3 m above the cavity, corresponding to a 0.5 s interaction time. After the Ramsey interactions, populations of both hyperfine levels are measured by the fluorescence induced by two probe beams located 12 and 13.5 cm below the molasses region and collected onto two low-noise photodiodes. When crossing the upper (respectively lower) detection beam, atoms in the  $F = 2$  level (respectively  $F = 1$ ) emit a pulse of fluorescence light whose area is proportional to the number  $N_{F=2}$  (respectively  $N_{F=1}$ ) of cold atoms in  $F = 2$  (respectively  $F = 1$ ). The atomic temperature is also deduced from the width of the time of flight peak. After launch, the temperature is  $5 \mu\text{K}$ , corresponding to a velocity  $v_{\text{rms}} = 3.5v_{\text{rec}}$ . From the measured populations as a function of microwave detuning, an error signal is produced to lock the microwave frequency to the atomic resonance.

Magnetic-field fluctuations are reduced by two mumetal shields surrounding the Ramsey interaction zone and actively compensated by external coils (not represented in fig. 1). Residual fluctuations are a few  $10^{-10}$  T. A solenoid produces a homogeneous vertical field of about  $10^{-7}$  T. All light beams are produced on a separate 90 cm  $\times$  90 cm optical bench. A 50 mW external cavity laser diode (SDL 5402) is locked 160 MHz to the red of  $5^2S_{1/2}F = 2 \rightarrow 5^2P_{3/2}F = 3$  transition, using an acousto-optic modulator (AOM). Light from this laser is injected into a 500 mW amplifier (SDL TC30) to provide power for the six cooling beams (diameter  $2w = 18$  mm, power 10 mW per beam). In order to launch the atoms, the frequency of the three up-going beams is tuned a few MHz above the frequency of the three down-going beams using AOMs. Repumping light on  $5^2S_{1/2}F = 1 \rightarrow 5^2P_{3/2}F = 2$  transition and light for the detection on  $5^2S_{1/2}F = 2 \rightarrow 5^2P_{3/2}F = 3$  transition are produced by two additional external cavity laser diodes. Light is guided from the optical bench to the vacuum chamber by polarizing optical fibers and collimators mechanically prealigned with a few  $10^{-4}$  rad accuracy. This ensures a good reliability of the setup.

The Ramsey resonance as a function of the microwave frequency is plotted in fig. 2. Ramsey fringes have a width of 1.2 Hz FWHM and the signal-to-noise ratio is about 150/1 per fountain

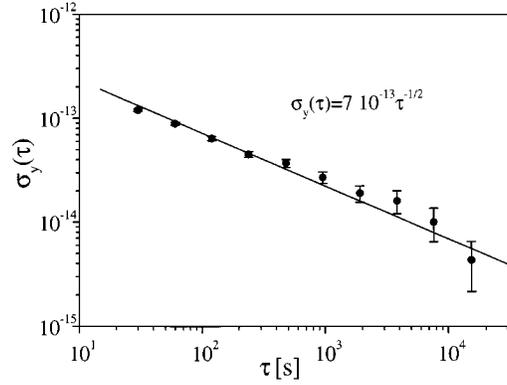


Fig. 3. – Allan standard deviation,  $\sigma_y(\tau)$ , of the rubidium fountain against H-Maser.  $\tau$  is the averaging time.

cycle (1.2 s). When locking the microwave oscillator to the central fringe, we measure the Allan standard deviation of the frequency fluctuations using an H-maser as a reference (fig. 3). The short-term relative frequency stability is  $7 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$ , where  $\tau$  is the integration time in seconds. Around  $1\text{-}2 \times 10^4\text{s}$ , the stability reaches  $5\text{-}7 \times 10^{-15}$ .

In order to measure the rubidium ground-state hyperfine frequency against the cesium primary standard, we first determine the absolute frequency of the reference H-maser by comparison with the LPTF's Cs fountain. This comparison being made with a resolution better than  $1 \times 10^{-15}$ , the H-maser frequency is known with the cesium fountain  $2 \times 10^{-15}$  absolute accuracy. Second, we correct the measured frequency to take into account different systematic shifts listed in table I.

First, the magnetic field induces a quadratic Zeeman shift of  $575.14 \times 10^8 \text{ Hz T}^{-2}$ . We checked the dependence of the clock frequency with applied magnetic field from 15 nT to 180 nT. The magnetic field is measured by the first-order Zeeman effect of the  $5^2S_{1/2}F = 1 m_F = 1 \rightarrow 5^2S_{1/2}F = 2 m_F = 1$  transitions. Above 50 nT, the clock frequency shift scales as  $B^2$  as expected for a  $m_F = 0 \rightarrow m_F = 0$  transition. Below 50 nT, the effect of the residual

TABLE I. – Frequency corrections and related uncertainties for an interaction time of 326 ms, a set-up temperature  $T = 300 \text{ K}$ , a magnetic field  $B = 1.3 \times 10^{-7} \text{ T}$  and average atomic density  $n = 5 \times 10^7 \text{ at cm}^{-3}$ . Corrections below  $10^{-6} \text{ Hz}$ , such as second order Doppler effect, light shifts,... have been neglected.

Effect	Frequency shift ( $10^{-5} \text{ Hz}$ )	Uncertainty ( $10^{-5} \text{ Hz}$ )
Magnetic Field	97	1.5
Black Body	-8.6	0.5
Microwave leakage	0.8	8.5
Cesium fountain	-	1.4
Statistics	-	1.3
Collisions <sup>(a)</sup>	-2	2
Total uncertainty	-	9

(a) The collisional shift is calculated from the theoretical value given in [10].

magnetic-field inhomogeneities begin to induce a departure from the quadratic dependence. The observed shift could be due to Majorana transitions induced by  $B$ -field rotation near the entrance hole of the magnetic shields [14] or to Ramsey pulling due to misalignment between the bias field and the microwave field in the cavity [15].

Second, the black-body radiation at room temperature ( $T = 300$  K) shifts the hyperfine frequency by [16]

$$\Delta\nu = K_{^{87}\text{Rb}} \left( \frac{T}{300} \right)^4. \quad (1)$$

In order to estimate the  $K_{^{87}\text{Rb}}$  coefficient, we use our recent Cs measurement of  $K_{^{133}\text{Cs}}$ ,  $K_{^{133}\text{Cs}} = -1.573 \times 10^{-4}$  Hz which has an accuracy of 0.2% [3]. Since the ratio  $K_{^{87}\text{Rb}}/K_{^{133}\text{Cs}}$  has been measured independently in ref. [17] with 1% accuracy using the static Stark effect, we get:  $K_{^{87}\text{Rb}} = -8.6 \times 10^{-5}$  Hz. We have neglected the  $(T/300)^6$  term in eq. (1), of the order of 1%. We therefore assign a 2% uncertainty to this determination of  $K_{^{87}\text{Rb}}$ . Due to  $\pm 2$  K temperature fluctuations, a 3% uncertainty adds to the previous one.

We next searched for a systematic frequency shift arising from microwave leakage or phase gradient inside the microwave resonator. These effects would induce a frequency shift proportional to  $T_f^{-1}$ , where  $T_f$  is the flight duration above the microwave cavity. By changing the launch height, we find a shift  $2.4(28) \times 10^{-6}$  Hz/ $T_f$  consistent with 0. We extrapolate the  $^{87}\text{Rb}$  frequency for an infinite flight duration and the corresponding uncertainty is  $8.5 \times 10^{-5}$  Hz. This represents the largest uncertainty in table I. Changing the microwave power in order to induce  $3\pi/2$  pulses instead of  $\pi/2$  pulses produced no noticeable frequency shift within  $6 \times 10^{-5}$  Hz, for  $B_{\text{bias}} = 50$  nT. This indicates that there is no measurable microwave leakage. It confirms also that no spurious effect can be detected for magnetic fields greater than 50 nT. Finally, our measurement of the  $^{87}\text{Rb}$  ground-state hyperfine frequency is 6 834 682 610.90429 (9) Hz. This result is in agreement with the value 6 834 682 608 (7) Hz of Bender *et al.* [18], but differs significantly from other atomic beam measurements compiled in ref. [19], 6 834 682 614 (1) Hz by Essen *et al.* [20], 6 834 682 614 (3) Hz by Penselin *et al.* [21], and 6 834 682 612.8 (5) Hz by Arditi and Cerez [22]. Our measurement is between  $10^4$  and  $10^5$  times more accurate than these values, a clear demonstration of the usefulness of cold atom fountains in frequency metrology.

Another interesting feature of our  $^{87}\text{Rb}$  fountain deals with the cold collision frequency shift. When changing the atomic density from  $1 \times 10^7$  at  $\text{cm}^{-3}$  to  $5 \times 10^7$  at  $\text{cm}^{-3}$ , no shift was detected at the  $7 \times 10^{-15}$  level. For comparison, at  $n = 5 \times 10^7$  at  $\text{cm}^{-3}$  and equal populations in  $F = 4$  Zeeman substates, our Cs fountain exhibits a relative frequency shift of  $5 \times 10^{-14}$ . This result indicates that the  $^{87}\text{Rb}$  collisional shift is at least a factor 7 below that of Cs at equal density, which is consistent with the theoretical prediction of ref. [10] (factor 15) and with [11]. If we apply the small correction due to collisions to our  $^{87}\text{Rb}$  frequency measurement, even though the evaluation of this term only relies upon theoretical calculations, we find the  $^{87}\text{Rb}$  ground-state frequency to be 6 834 682 610.90431(9) Hz.

Finally, it is instructive to compare the figure of merit of Cs and Rb fountain clocks. Assume that the short-term stability expressed as the usual Allan standard deviation,  $\sigma_y(\tau)$ , is solely limited by the atomic quantum projection noise:

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi Q \sqrt{N_d}} \sqrt{\frac{T_c}{\tau}}, \quad (2)$$

where  $\tau$  is the integration time,  $T_c$  the cycle duration,  $Q$  the atomic resonance quality factor and  $N_d$  the number of detected atoms per cycle. Obviously, the higher the number of detected atoms the better the stability. On the other hand, the collisional shift of the clock transition is

proportional to the atomic density and hence to the atom number. Fluctuations of this shift will set a limit to the long-term stability and accuracy of the fountain. This density is difficult to control over a long period of time and keeping this density constant at the 2% level is a reasonable assumption. Thus, for a given alkali atom, there will be a trade-off between short- and long-term stability performances. Assume further that Rb and Cs clocks operate with equal atomic resonance quality factors  $Q$ , so that systematic effects other than the collisional shift are similar. This means that the interrogation time is larger for Rb than for Cs by a factor  $\nu_{\text{Cs}}/\nu_{\text{Rb}}$ . If we scale the holes of the cavity to the transition wavelengths and match the size of the molasses cloud to the hole diameter, and if we aim at the same short-term stability for the two atoms, it is easy to show that the average density in the fountain is about the same for Cs and Rb. All other systematic effects being on the same order of magnitude for both atoms, and controllable within the  $10^{-17}$  range, the accuracy and stability floor will be ultimately imposed by the atomic density fluctuations, and therefore will simply scale as the collisional shift. For instance, with the present Cs fountain stability of  $\sigma(\tau) = 4 \times 10^{-14}\tau^{-1/2}$ , the fractional collisional shift is  $\simeq -2 \times 10^{-14}$ . The long-term stability reaches a floor of  $6 \times 10^{-16}$ , probably due to the H-maser used as a comparison oscillator. If this floor were entirely due to density fluctuations, for  $^{87}\text{Rb}$  a stability floor below  $4 \times 10^{-17}$  would be expected, if indeed the collisional shift is 15 times lower than for  $^{133}\text{Cs}$ . Alternatively, launching more atoms should make it possible to produce the excellent short-term stability  $\sigma_y(\tau) = 1 \times 10^{-14}\tau^{-1/2}$ . This obviously requires an ultra-stable interrogation oscillator for the fountain such as the cryogenic microwave oscillator used in [5].

The achievement of high-precision Rb clocks also opens the way for several new experiments. As shown in ref. [12], a search for a possible drift of the fine-structure constant can be done by comparison of the hyperfine energies of alkali atoms with different  $Z$  numbers. Interest in such a test has been renewed by recent developments of string theory that predict a possible drift of the fine-structure constant  $\alpha$  with time [23]. We estimate that using Rb and Cs fountains,  $\dot{\alpha}/\alpha$  can be tested at a level of  $10^{-16}$  per year, which would represent a 100-fold improvement compared to the present best laboratory tests [12].

In summary, we have operated a  $^{87}\text{Rb}$  fountain. The present short stability of this Rb clock is  $7 \times 10^{-13}\tau^{-1/2}$ , a factor five above that of our Cs fountain using a similar quartz oscillator. Ongoing improvements of stray-light rejection and magnetic-field fluctuations in the detection zone will soon reduce this difference between Rb and Cs frequency standards. Given its small collisional shift,  $^{87}\text{Rb}$  seems to be able to surpass the  $^{133}\text{Cs}$  primary frequency standard and reach the  $10^{-17}$  accuracy range.

\*\*\*

This work was supported by BNM and CNRS. MS acknowledges the support of CAPES-Brazil and CM the support of BNM-LPTF. We are grateful to G. SANTARELLI, M. LOURS, M. DEQUIN, P. AYNIÉ, A. H. GÉRARD and L. VOLODIMER for useful contributions. BNM-LPTF is Unité Associée au CNRS (URA 1125). Laboratoire Kastler Brossel is Unité Associée au CNRS (URA 18) et à l'Université Paris 6.

## REFERENCES

- [1] CLAIRON A., LAURENT P., SANTARELLI G., GHEZALI S., LEA S. N. and BAHOURA M., *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **44** (1995) 128. CLAIRON A., GHEZALI S., SANTARELLI G., LAURENT P., LEA S. N., BAHOURA M., SIMON E., WEYERS S. and SZYMANIEC K., *Proceedings of the 5th Symposium on Frequency Standards and Metrology*, edited by J. BERGQUIST (World Scientific) 1995, p. 49.

- [2] BERKELAND D. J., MILLER J. D., BERGQUIST J. C., ITANO W. M. and WINELAND D. J., *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 2089.
- [3] SIMON E., LAURENT P. and CLAIRON A., *Phys. Rev. A*, **57** (1998) 436.
- [4] LUITEN A., MANN A., COSTA M., and BLAIR D., *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **44** (1995) 132.
- [5] MANN A., SANTARELLI G., CHANG S., LUITEN A., LAURENT P., SALOMON C., BLAIR D. and CLAIRON A., *Proceedings of the 52th IEEE Frequency Control Symposium*, (1998) 13; SANTARELLI G., MANN A., CHANG S., LUITEN A., LAURENT P., SALOMON C. and CLAIRON A., submitted to *Phys. Rev. Lett.* (1998).
- [6] ITANO W. M., BERGQUIST J. C., BOLLINGER J. J., GILLIGAN J. M., HEINZEN D. J., MOORE F. L., RAIZEN M. G. and WINELAND D. J., *Phys. Rev. A*, **47** (1993) 3554.
- [7] GIBBLE K. and CHU S., *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 1771.
- [8] GHEZALI S., LAURENT P., LEA S. N. and CLAIRON A., *Europhys. Lett.*, **36** (1996) 25.
- [9] GIBBLE K. and VERHAAR B. J., *Phys. Rev. A*, **52** (1995) 3370.
- [10] KOKKELMANS S. J., VERHAAR B. J., GIBBLE K. and HEINZEN D. J., *Phys. Rev. A*, **56** (1997) R4389.
- [11] FERTIG C., LEGERE R., SÜPTITZ W. and GIBBLE K., *Proceedings of the 52th IEEE Frequency Control Symposium*, (1998) 18.
- [12] PRESTAGE J. D., TJOELKER R. and MALEKI L., *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1995) 3511.
- [13] CLAIRON A., SALOMON C., GUELLATI S. and PHILLIPS W.D., *Europhys. Lett.*, **16** (1991) 165.
- [14] BAUCH A. and SCHRÖDER R., *Ann. Phys. (Leipzig)*, **2** (1993) 421.
- [15] CUTLER L. S., FLORY C. A. and GIFFARD R. P., *J. Appl. Phys.*, **69** (1991) 2780.
- [16] ITANO W. M., LEWIS L. L. and WINELAND D. J., *Phys. Rev. A*, **25** (1982) 1233.
- [17] MOWAT J. R., *Phys. Rev. A*, **5** (1972) 1059.
- [18] BENDER P. L. and BEATY E. C., *Phys. Rev. Lett.*, **1** (1958) 311.
- [19] ARIMONDO E., INGUSCIO M. and VIOLINO P., *Rev. Mod. Phys.*, **49** (1977) 35.
- [20] ESSEN L., HOPE E. G. and SUTCLIFFE D., *Nature*, **189** (1961) 298.
- [21] PENSELIN S., MORAN T., COHEN W. and WINKLER G., *Phys. Rev.*, **127** (1962) 524.
- [22] ARDITI M. and CERREZ P., *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, **IM-21** (1972) 391.
- [23] DAMOUR T. and POLYAKOV A. M., *Nucl. Phys. B*, **423** (1994) 532.

## **E.2 Cold Collision Frequency Shifts in a $^{87}\text{Rb}$ Fountain**

## Cold Collision Frequency Shifts in a $^{87}\text{Rb}$ Atomic Fountain

Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, and A. Clairon

*BNM-LPTF, Observatoire de Paris, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France*

C. Salomon

*Laboratoire Kastler Brossel, ENS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France*

C. Williams

*National Institute of Standards and Technology, 100 Bureau Drive, Gaithersburg, Maryland 20899-8423*

(Received 26 May 2000)

We present measurements of cavity frequency pulling and collisional frequency shifts in a  $^{87}\text{Rb}$  fountain with a frequency resolution of  $3 \times 10^{-16}$ . Agreement with theory is found for the cavity pulling and the measured collisional shifts. The clock shift is found at least 50 times smaller than in  $^{133}\text{Cs}$ .

PACS numbers: 32.80.Pj, 06.30.Ft, 34.20.Cf

In the last 10 years, our understanding of the physics of collisions between ultracold atoms has improved considerably [1]. Data from photoassociation spectroscopy [2], frequency shifts in atomic clocks [3,4], Bose-Einstein condensation [5,6], and Feshbach resonances [7] are now strongly constraining the interatomic potentials. Collisions play a crucial role in high precision clocks using laser cooled atoms. The current accuracy of Cs clocks, on which the SI second is based, now reaches  $1.1 \times 10^{-15}$ , using a fountain geometry [8]. Since interactions between cold atoms represent a major part in the inaccuracy budget, Cs fountains operate at low atomic density, hence with a small number of atoms, typically less than  $10^6$ . Even with detection at the fundamental quantum projection noise, this sets a limit to the frequency stability [9]. In 1997, Kokkelmans *et al.* predicted that the collisional frequency shift for  $^{87}\text{Rb}$  was 15 times smaller than for  $^{133}\text{Cs}$  [10]. Rubidium fountains could then operate with larger atom numbers and represent an attractive alternative to Cs frequency standards. In this Letter, we show that another effect which depends linearly on the atom number must be considered, namely the cavity pulling frequency shift, well known in hydrogen masers [11]. Our treatment of the frequency shift measurements takes into account both collisional shift and cavity pulling simultaneously. By tuning the cavity around the Rb resonance frequency, we display the characteristic dispersive line shape of the cavity pulling effect and find good agreement with theory with a relative frequency resolution of  $3 \times 10^{-16}$ . A quantitative model of the pulling effect allows us to make a precise determination of the number of atoms crossing the cavity. After subtraction of its contribution, we measure collisional frequency shifts in marginal agreement with the predictions of Ref. [10] and reasonable agreement with the more recent predictions of [12].

In a fountain standard, the atoms interact twice with a microwave field (Ramsey method), inducing transitions between two internal states  $|\alpha\rangle$  and  $|\beta\rangle$ . The collisional frequency shift is due to the interaction between atoms inside the atomic cloud during the interrogation period.

At very low temperatures, only *s*-wave scattering occurs and the collision physics is described using a single parameter, the scattering length  $a$ . For a nondegenerate gas of  $N$  atoms in state  $\alpha$ , the total mean-field energy shift is equal to  $(4\pi\hbar^2/m)a\bar{n}_\alpha N$ , where  $\bar{n}_\alpha$  is the average atomic density in state  $|\alpha\rangle$ . In the fountain, when all the population is transferred from  $|\alpha\rangle$  to  $|\beta\rangle$ , the collisional frequency shift is given by  $2\pi\Delta\nu = (4\pi\hbar/m)(a_{\beta\beta} - a_{\alpha\alpha})\bar{n}$ , where  $a_{\alpha\alpha}$  ( $a_{\beta\beta}$ ) is the scattering length for two atoms colliding in the internal state  $|\alpha\rangle$  ( $|\beta\rangle$ ). We will also consider more general cases where states other than  $\alpha$  and  $\beta$  are populated. The mean-field shift is then given by [10]

$$\Delta\nu = -\frac{2\hbar}{m} \times \sum_j n_j (1 + \delta_{\alpha,j})(1 + \delta_{\beta,j})(a_{\alpha,j} - a_{\beta,j}). \quad (1)$$

The  $j$  index refers to the atomic Zeeman substate  $|F, m_F\rangle$ .  $\alpha = |1, 0\rangle$  and  $\beta = |2, 0\rangle$  are the lower and higher clock levels. The Kronecker symbol  $\delta_{ij}$  accounts for quantum statistics. In a fountain, the partial densities  $n_j$  are space and time dependent, and the measured frequency shifts appear as an average over these variables.

The second effect which depends on atom number is the cavity frequency pulling [11]. In our fountain, the atomic transition is probed by a 6.8 GHz microwave field in a  $TE_{011}$  copper resonator with a quality factor  $Q \approx 10^4$ . The pulling effect is due to the interference inside the microwave resonator between the field radiated by the input coupler and the field radiated by the atomic magnetic dipoles when the atoms pass through the cavity. This interference induces a time dependent phase shift between the field inside the resonator and the signal delivered by the oscillator. It produces a clock shift that exhibits a dispersive dependence as a function of the cavity detuning with respect to the atomic resonance ( $\Delta\nu_{\text{cav}} = \nu_{\text{cav}} - \nu_{\text{at}}$ ). The width of this dispersion curve is proportional to  $1/Q$ . The amplitude is proportional both to  $Q$  and to the number of atoms crossing the cavity. When the atoms enter the

cavity in the upper state (lower state) and deposit (extract) energy in the cavity, the clock frequency is *pulled* towards (*pushed* away from) the cavity resonance frequency.

Our laser cooled  $^{87}\text{Rb}$  fountain has been described in a previous paper [13]. First, in 1 s, up to  $7 \times 10^8$  atoms are captured in a magneto-optical trap (MOT) with 6 laser beams of power 20 mW, diameter 3 cm, and tuned to the  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  transition at 780 nm. A 200 ms molasses phase at  $\delta = -5\Gamma$  ( $\Gamma = 2\pi \times 6$  MHz) allows for the MOT magnetic field decay. The atoms are then launched upwards at  $\sim 3.5 \text{ m s}^{-1}$  in 2 ms and cooled down to an effective temperature of  $\sim 1.2 \mu\text{K}$ . After launch, atoms can be selected in a specific Zeeman substate by means of microwave and laser pulses. Atoms interact twice with a 6.8 GHz microwave field synthesized from a high stability quartz oscillator weakly locked to the output signal of an H maser. The two  $\pi/2$  Ramsey interactions are separated by  $\sim 400$  ms. The number of atoms  $N_{F=1}$  ( $N_{F=2}$ ) in both hyperfine levels are then measured by time of flight fluorescence (TOF) induced by a pair of laser beams located below the MOT. From the transition probabilities  $N_{F=2}/(N_{F=1} + N_{F=2})$  measured on both sides of the central Ramsey fringe, we compute an error signal to lock the microwave interrogation frequency to the atomic transition using a digital servo loop.

Our measurement approach uses a differential method. Every 200 fountain cycles ( $\sim 350$  s), we change the trapping light intensity so that the number of atoms in the fountain alternates between two values  $N_{\text{high}}$  and  $N_{\text{low}} \approx N_{\text{high}}/4$ . We measure the frequency difference between the two situations. This method efficiently rejects slow frequency fluctuations which are not related to atom number or density, in particular the H-maser drift. In the differential method the frequency resolution is  $\sim 3 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  where  $\tau$  is the averaging time in seconds. At 350 s the maser stability is  $\sim 2.7 \times 10^{-15}$ , at least 4 times better than the fountain stability. The relative frequency resolution on effects which depend on atom number reaches  $\sim 1 \times 10^{-15}$  per day.

After launch, atoms are spread among the various  $m_F$  substates of the  $F = 2$  manifold. Data have been taken in three cases. (i) Normal clock operation: atoms in the  $|2, 0\rangle$  substate are transferred to  $|1, 0\rangle$  using a microwave  $\pi$  pulse. Atoms remaining in  $|2, m_F \neq 0\rangle$  are pushed away by radiation pressure. Only three scattering lengths  $a_{\alpha\alpha}$ ,  $a_{\alpha\beta}$ , and  $a_{\beta\beta}$  in Eq. (1) are involved. (ii) No selection: all Zeeman sublevels in  $F = 2$  are equally populated to within 2%–3%. The frequency shift of the  $|2, 0\rangle \rightarrow |1, 0\rangle$  transition is measured in the presence of  $|2, m_F \neq 0\rangle$  populations. (iii) Atoms are pumped in  $F = 1$  by a laser pulse tuned to the  $F = 2 \rightarrow F' = 2$  optical transition. Atoms remaining in the  $F = 2$  state ( $\leq 2\%$ ) are pushed away by radiation pressure. The launched atoms are equally spread among the  $F = 1$  substates to within 1%. The frequency shift of the  $|1, 0\rangle \rightarrow |2, 0\rangle$

transition is measured in the presence of  $|1, m_F \neq 0\rangle$  populations.

In order to compare the frequency measurements with cavity pulling and collisional shift predictions, great care has been taken to measure precisely both the number of atoms entering the microwave resonator and the average atomic density during the Ramsey interrogation. The initial atom number is determined by two methods: first, an absorption method performed at the end of the cooling process with an uncertainty of  $\sim 20\%$ ; second, a detailed analysis of the TOF signals and detection efficiency, which requires a precise knowledge of the initial spatial and velocity distributions. The spatial distribution is obtained by imaging the fluorescence of the cloud onto a CCD camera in the molasses phase 500  $\mu\text{s}$  before launch, and by measuring the absorption signal for various apertures of the probe beam. We find a Gaussian distribution with  $\sigma = 1.4$  mm for  $N_{\text{high}} = 4 \times 10^8$  atoms, and  $\sigma = 0.85$  mm for  $N_{\text{low}} = 8 \times 10^7$  atoms. The velocity distribution is deduced from the time of flight signals in the detection zone. They clearly exhibit a non-Gaussian shape (Fig. 1a) that we model by a 3D isotropic distribution  $(1 + |\vec{v} - \vec{v}_0|^2/v_0^2)^{-b}$  law,  $v_0$  and  $b$  being the free parameters of the fit. This analytical distribution is theoretically predicted by [14] and exhibits large wings as expected near the threshold of operation of the optical molasses. Operating in this regime is necessary in our experiment in order to obtain the lowest temperature and thus the highest atomic densities. In cases (i) and (ii), we find  $v_0 \sim 18 \text{ mm s}^{-1}$ , whereas  $v_0 \sim 23 \text{ mm s}^{-1}$  in case (iii) because of optical pumping. In all three cases, we find  $b \sim 2$ . These values are monitored during data acquisition. A numerical simulation provides the time dependent atomic density and number in the fountain. The calculated fraction of atoms passing in the detection zone is compared with the TOF measurements for various launch velocities in Fig. 1b. This constitutes a test of the 3D velocity distribution. We also deduce the number of atoms entering the microwave cavity and in the detection zone, and good agreement is found (20%) with the calibrated detection.

Partial densities  $n_j$  in Eq. (1) are time dependent for two reasons. First, the atomic cloud expands during the Ramsey interrogation: the peak atomic density typically varies by a factor of  $\sim 30$  during the Ramsey interrogation. Second, the atomic populations of the  $|1, 0\rangle$  and  $|2, 0\rangle$  levels change during the two microwave interactions. We take into account in our simulation the nonuniform sensitivity of the clock frequency to a time dependent perturbation of the atomic frequency [15]. We calculate the time averaged partial densities  $\langle n_j \rangle_t$  that each detected atom encounters during its ballistic flight. Then, we average over the initial spatial and velocity distributions to determine the *effective* partial densities  $\bar{n}_j = \langle n_j \rangle_{t, \vec{r}, \vec{v}}$ , used in Eq. (1) for comparison with theory. The total effective atomic density is

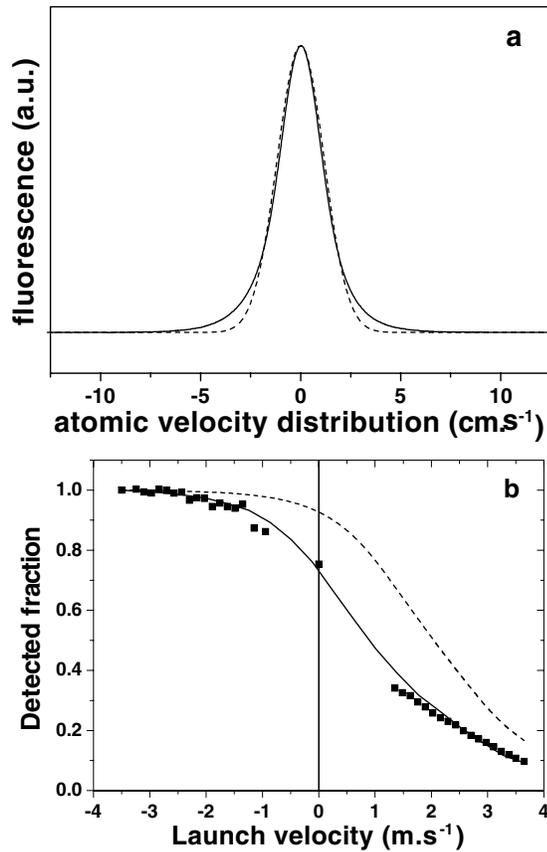


FIG. 1. (a) Velocity distribution of the atoms in the moving frame. The fit with a square of a Lorentzian (see text) cannot be distinguished from the data (solid line). The Gaussian fit (dotted line) is clearly not adequate. (b) Fraction of detected atoms as a function of the launch velocity (squares). Solid line: numerical simulation. Dotted line: Gaussian velocity distribution.

$\bar{n} = \sum_j \bar{n}_j$ . Typically, in case (i) with  $N_{\text{high}} = 4.3 \times 10^7$ ,  $\bar{n} = 1.5 \times 10^7 \text{ cm}^3$ .

Figure 2 shows the differential measurement of the clock frequency shift as a function of the cavity detuning

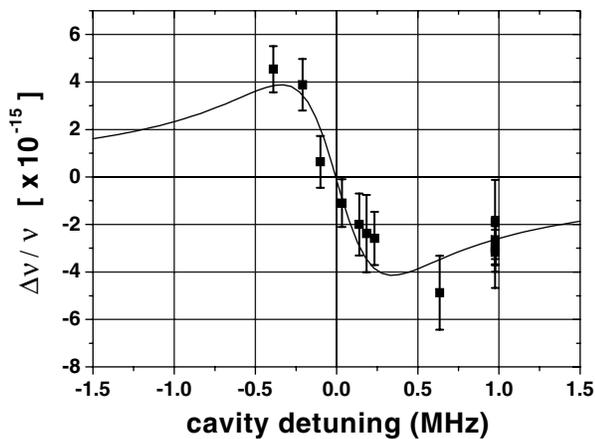


FIG. 2. Relative frequency shift vs cavity detuning for  $\Delta N = 3.5 \times 10^7$  in case (i). Solid line: fit from Eq. (2).

$\Delta\nu_{\text{cav}}$  with respect to the atomic resonance, for atoms initially selected in  $|1,0\rangle$ , with  $N_{\text{high}} \approx 4.3 \times 10^7$  entering the microwave cavity and  $N_{\text{low}} \approx 0.8 \times 10^7$ . The simulation shows that this modulates the effective density by a factor of  $\sim 3.3$ . The frequency and quality factor of the cavity are measured with an uncertainty of 20 kHz and 4%, respectively, and the cavity is tuned by temperature [16]. The solid line is a least squares fit of the data using the following function:

$$\delta\nu/\nu = A[f(\Delta\nu_{\text{cav}})\Delta N + B\Delta\bar{n}], \quad (2)$$

where  $A$  and  $B$  are the free parameters of the fit, and  $\Delta N = N_{\text{high}} - N_{\text{low}}$  [17].  $f(\Delta\nu_{\text{cav}})$  is the calculated dispersive line shape of the cavity pulling effect for a single atom in the cavity.  $A$  is a common scale factor on the atom number and is expected to be 1. We find  $A = 1.26(14)$  and  $B = -7.2(20.0) \times 10^{-24} \text{ cm}^3$ . Thus, the number of atoms determined by the cavity pulling effect has an uncertainty of 11% and agrees with the measurements described above, within the combined error bars. This more precise determination of  $N$  is now used for the evaluation of the collisional shift.  $B$ , the collisional shift coefficient, is surprisingly consistent with zero even with a frequency standard deviation of  $3 \times 10^{-16}$  given by the fit. Thus in case (i), at a density of  $1.5 \times 10^7$ ,  $^{87}\text{Rb}$  exhibits no detectable shift [Fig. 3(i)], whereas  $^{133}\text{Cs}$  would exhibit a shift of  $3 \times 10^{-14}$ .

Figure 3 summarizes the collisional shifts measurements versus the effective density  $\bar{n}$  [18]. By contrast to case (i), data recorded in cases (ii) and (iii) show a clear dependence with the density after subtracting the cavity pulling effect. The measured value in case (ii)  $-50(10) \begin{pmatrix} +22 \\ -34 \end{pmatrix} \times 10^{-24} \text{ cm}^3$  is in reasonable agreement with  $-56 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$  (Ref. [10]) and  $-33 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$  (Ref. [12]). The first set of parentheses refers to the frequency statistical uncertainty (1 standard deviation); the second set refers to the linear combination of frequency uncertainty and density calibration uncertainty. From variations of the parameters in the simulation and experimental calibrations, we deduce a 35% type  $B$  uncertainty on our density. Adding quadratically the 11% statistical uncertainty on atom number, we get a 40% combined uncertainty on the density. This corresponds to a scale factor of 1.4 and 1/1.4 on the density axis of Fig. 3, defining the acceptance domain of the measurements (dotted lines). In case (iii), the agreement is similar. We find  $-60(16) \begin{pmatrix} +29 \\ -46 \end{pmatrix} \times 10^{-24} \text{ cm}^3$  to be compared to  $-68 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$  (Ref. [10]) and  $-41 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$  (Ref. [12]). Finally, our data in case (i),  $-7.2(20.0) \begin{pmatrix} +25 \\ -31 \end{pmatrix} \times 10^{-24}$ , show a disagreement at  $\sim 3\sigma$  with the theory of Ref. [10] and seem to favor the more recent theory of Ref. [12].

In summary, the smallness of the  $^{87}\text{Rb}$  clock transition collisional shift makes this atom very attractive for high accuracy microwave frequency standards. When

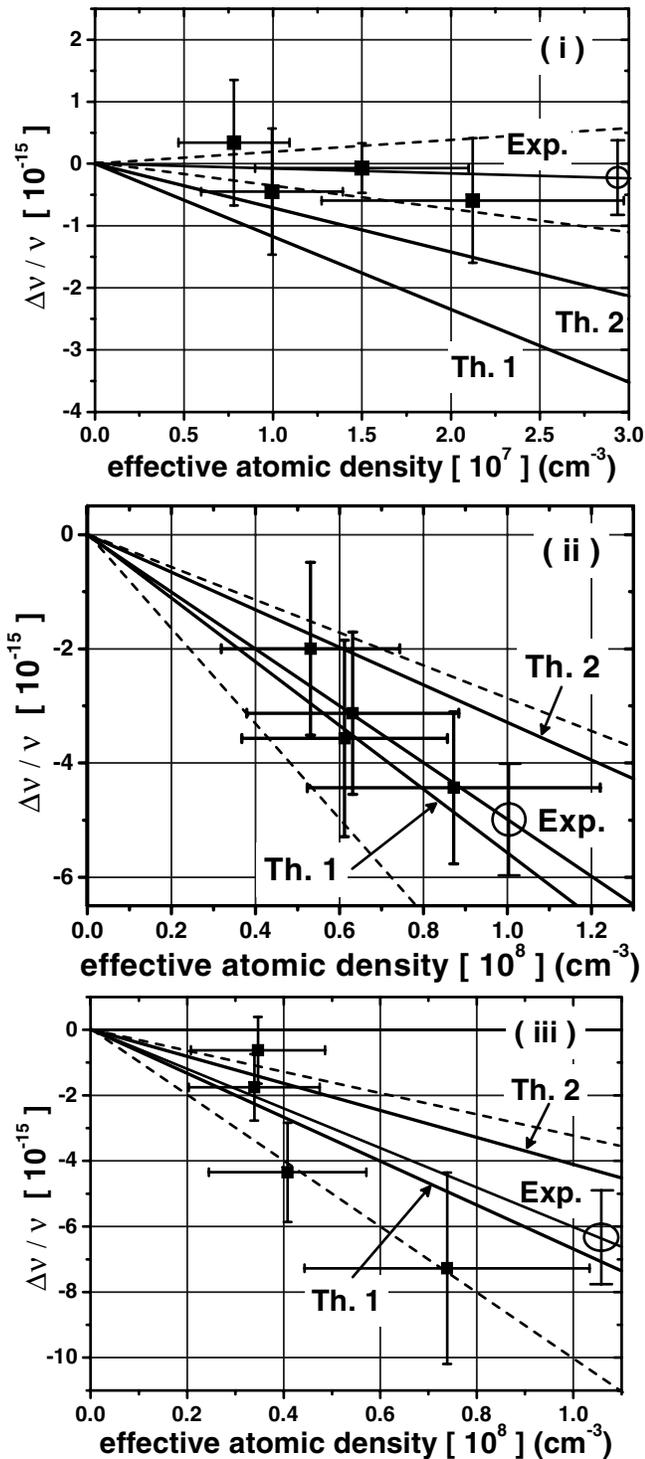


FIG. 3. Relative frequency shift of the  $|1,0\rangle \rightarrow |2,0\rangle$  transition vs effective density in cases (i), (ii), and (iii) (atoms initially selected in states  $|1,0\rangle$ ,  $|2, m_F = 0, \pm 1, \pm 2\rangle$  equally populated and  $|1, m_F = 0, \pm 1\rangle$  equally populated, respectively), and comparison with theories of Ref. [10] (Th.1) and Ref. [12] (Th.2). Open circles: linear fits to the experimental data with corresponding statistical frequency uncertainty at the given density. Horizontal error bars represent the 40% density uncertainty. Dotted lines: experiment with combined frequency and density uncertainties.

detecting  $\sim 2 \times 10^7$  atoms and with a suitable interrogation oscillator, the quantum limited stability should reach  $\sim 1 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  down to  $3 \times 10^{-17}$  at one day.

We acknowledge fruitful discussions with Y. Castin, C. Cohen-Tannoudji, J. Dalibard, G. Shlyapnikov, P. Laurent, P. Lemonde, G. Santarelli, C. Mandache, and the ENS cold atom group. This work was supported in part by BNM and CNRS. BNM-LPTF and Laboratoire Kastler Brossel are Unités Associées au CNRS, UMR 8630, and UMR 8552.

*Note added.*—After completing this work we learned that related work was performed by C. Fertig and K. Gibble where a nonzero shift in case (i) was measured [19]. Their value of  $-0.38(8)$  mHz at  $1.0(6) \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$  is consistent with our measurements.

- [1] *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi,” Course 140 (IOS Press, Washington, DC, 1999).
- [2] H.M.J.M. Boesten, C.C. Tsai, B.J. Verhaar, and D.J. Heinzen, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5194 (1996).
- [3] K. Gibble and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1771 (1993).
- [4] S. Ghezali, P. Laurent, S.N. Lea, and A. Clairon, *Europhys. Lett.* **36**, 25 (1996).
- [5] D. Stamper-Kurn *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2194 (1998).
- [6] M.R. Matthews *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 243 (1998).
- [7] V. Vuletić, A. Kerman, C. Chin, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1406 (1999).
- [8] P. Laurent *et al.*, in *Proceedings of the International Conference on Laser Spectroscopy* (World Scientific, London, 1999), p. 41.
- [9] G. Santarelli *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4619 (1999).
- [10] S.J.J.M.F. Kokkelmans, B. Verhaar, K. Gibble, and D. Heinzen, *Phys. Rev. A* **56**, R4389 (1997).
- [11] J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards* (Adam Hilger, Philadelphia, 1989).
- [12] C. Williams *et al.* (private communication).
- [13] S. Bize *et al.*, *Europhys. Lett.* **45**, 558 (1999).
- [14] Y. Castin, J. Dalibard, and C. Cohen-Tannoudji, *Light Induced Kinetic Effects on Atoms, Ions and Molecules* (ETS Editrice, Pisa, 1991), p. 5.
- [15] P. Lemonde *et al.*, in *Proceedings of Frequency Control Symposium* (IEEE, Piscataway, NJ, 1998) p. 110.
- [16] C. Fertig and K. Gibble, *IEEE. Trans. Instrum. Meas.* **48**, 520 (1999).
- [17] In Fig. 2 we have rescaled the data to a fixed  $\Delta N = 3.5 \times 10^7$ . During the 6 month data acquisition,  $\Delta N$  typically fluctuated by 20%,  $v_0$  by 7%, and  $b$  by 6%.
- [18] To clarify Fig. 3(i), we represent, in place of individual measurements, the weighted average of 10 of them performed at very similar densities [ $1.5(2) \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$ ].
- [19] C. Fertig and K. Gibble, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1622 (2000).

### **E.3 Cavity Frequency Pulling in Cold Atom Fountains**

# Cavity Frequency Pulling in Cold Atom Fountains

S. Bize, Y. Sortais, C. Mandache, André Clairon, and C. Salomon

**Abstract**—We present an analytical model and a numerical calculation of the cavity frequency pulling effect in cold atom fountains. We report the first measurement of this effect in a  $^{87}\text{Rb}$  fountain. We find a quantitative agreement with theory.

**Index Terms**—Atomic fountains, cavity frequency pulling.

## I. INTRODUCTION

IN THE cold atom fountain geometry, microwave frequency standards now currently reach accuracies of the order of  $10^{-15}$  [1], [2]. As shown in [3], when the microwave frequency is derived from a very low phase noise sapphire cryogenic oscillator, short-term stabilities as low as  $4 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  ( $1.4 \times 10^{-16}$  at 1 day) can be obtained. Here, the stability is limited by the quantum projection noise which means that the fountain has to operate with a high number of detected atoms. This obviously raises the question of atom number dependent systematic effects in atomic fountains. The two main atom number dependent effects in cold atom fountains are the collisional frequency shift due to interaction between atoms [4], [5] and the cavity frequency pulling. In this paper, we present a calculation and report the first measurement of the atom number dependent cavity pulling in a  $^{87}\text{Rb}$  cold atom fountain. In  $^{87}\text{Rb}$ , the cavity pulling is the dominant atom number effect, due to the smallness of the collisional frequency shift [6].

## II. BASIC EQUATIONS

In atomic fountains, the atomic transition is probed by a microwave field sustained by a resonator with a typical quality factor of  $\sim 10\,000$ . As in hydrogen masers [7], the cavity frequency pulling effect is due to the interference inside the microwave resonator between the field radiated by the input coupler and the field radiated by the atomic magnetic dipoles, when the atoms pass through the cavity. This interference induces a time dependent phase shift between the field inside the resonator and the signal delivered by the interrogation oscillator and thus a shift of the clock frequency.

Equation (1) gives the general expression for the magnetic field amplitude  $B(\omega)$  inside the cavity mode of interest [7]

$$\left( \omega_c^2 - \omega^2 - \frac{i\omega\omega_c}{Q} \right) B(\omega)$$

$$= -\frac{\omega_c^2}{Q} B_{\text{coupling}}(\omega) + \mu_0 \frac{\omega^2}{V_{\text{mode}}} \iiint dr^3 \vec{m}(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{H}_c(\vec{r}). \quad (1)$$

In this formula,  $\omega_c/2\pi$  is the cavity eigenmode resonance frequency,  $\vec{H}_c(\vec{r})$  represents the spatial dependence of the eigenmode, normalized such that  $|\vec{H}_c| = 1$  at the center of the cavity, the volume of the mode and the magnetic field being defined as

$$V_{\text{mode}} = \iiint dr^3 |\vec{H}_c(\vec{r})|^2 \quad \text{and} \quad \vec{B}(\vec{r}, \omega) = B(\omega) \vec{H}_c(\vec{r}).$$

$Q$  is the mode quality factor. The first term of the right-hand side in (1) represents the coupling from a microwave guide into the cavity. The second source term is due to the atomic cloud oscillating magnetic dipoles with a spatial distribution  $\vec{m}(\vec{r}, \omega)$ . Equation (1) assumes a stationary state of the microwave field. In atomic fountains, the damping time of the field  $\tau_c = Q/\omega_c \sim 0.2 \mu\text{s}$  is much shorter than the time it takes for the atoms to cross the resonator ( $\sim 30$  ms). The field thus responds quasi-instantaneously to the perturbation due to the atomic cloud and (1) can be rewritten as

$$B(\omega, t) = B^{(0)}(\omega) \times \left[ 1 + \frac{\mu_0 \omega^2}{V_{\text{mode}} B^{(0)}(\omega)} \times \frac{\iiint dr^3 \vec{m}(\vec{r}, \omega, t) \cdot \vec{H}_c(\vec{r})}{(\omega_c^2 - \omega^2 - i\omega\omega_c/Q)} \right] \quad (2)$$

where  $B^{(0)}(\omega)$  is the field amplitude in the absence of the atomic cloud. Here, variable  $t$  refers to the slow evolution of  $B(\omega, t)$  and  $\vec{m}(\vec{r}, \omega, t)$  due to the cloud motion.

The atomic internal state evolution is given by the Schrödinger equation with the time dependent Hamiltonian

$$H(t) = \frac{\hbar\omega_{\text{at}}}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) - \vec{M} \cdot \vec{B}(\vec{r}(t), t) \quad (3)$$

where  $|g\rangle$  and  $|e\rangle$  are the ground and the excited clock states, respectively, and  $\hbar\omega_{\text{at}}$  is the atomic transition energy.  $\vec{M}$  is the atomic magnetic dipole operator

$$\vec{M} = \mu_B (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) \vec{z}.$$

For the  $m_F = 0 \rightarrow m_F = 0$  transition under interest, the magnetic dipole is collinear with the vertical quantization axis  $\vec{z}$  imposed by the bias C-field. In (3),  $\vec{B}(\vec{r}(t), t)$  is the oscillating

Manuscript received May 14, 2000; revised November 10, 2000.

S. Bize, Y. Sortais, and A. Clairon are with Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences, 75014 Paris, France (e-mail: sebastien.bize@obspm.fr).

C. Mandache is with Institutul National de Fizica Laserilor, Plasmei si Radiatiei, Bucuresti, Magurele, Romania.

C. Salomon is with Laboratoire Kastler-Brossel, F-75231 Paris Cedex 05, France.

Publisher Item Identifier S 0018-9456(01)02596-7.

microwave magnetic field encountered along the atomic trajectory  $\vec{r}(t)$ . In the representation that suppresses the microwave field oscillation at  $\omega$ , and after we make the rotating wave approximation, the Hamiltonian can be written as

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t) = & -\frac{\hbar\delta}{2}(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \\ & -\frac{\hbar}{2}(\Omega(t)|e\rangle\langle g| + \Omega^*(t)|g\rangle\langle e|)H_{cz}(\vec{r}(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

In this equation,  $H_{cz} = \vec{H}_c \cdot \vec{z}$  is the component of the field eigenmode along the C-field axis.  $\delta = \omega - \omega_{\text{at}}$  is the detuning between the microwave source and the atomic transition.  $\Omega(t)$  is the so-called Rabi pulsation at the center of the cavity

$$\hbar\Omega(t) = \mu_B B(\omega, t). \quad (5)$$

The complex amplitude of the atomic magnetic dipole along  $\vec{z}$  is given by

$$M(\omega, t) = 2\mu_B \langle \tilde{\Psi}(t) | g \rangle \langle e | \tilde{\Psi}(t) \rangle \quad (6)$$

where  $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$  is the atomic state. Given the values of  $M(\omega, t)$  for each atomic trajectory, it is in principle possible to calculate the magnetic dipole distribution  $\vec{m}(\vec{r}, \omega, t)$  entering in (2) to obtain a set of self-consistent equations.

### III. ANALYTICAL EXPRESSION AND NUMERICAL CALCULATION

In this section, we derive an analytical expression under the assumption that the atomic cloud is small compared to the wavelength of the microwave field. In such a case, at a given time, all the atoms have the same internal state and the spatial integral in (2) can be simplified to obtain the following equation:

$$\begin{aligned} B^{(1)}(\omega, t) = & B^{(0)}(\omega) \\ & \times \left[ 1 + \frac{\mu_0 \omega^2}{V_{\text{mode}} B^{(0)}(\omega)} \frac{N_{\text{at}} M^{(0)}(\omega, t) H_{cz}(\vec{r}(t))}{(\omega_c^2 - \omega^2 - i\omega\omega_c/Q)} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

where  $N_{\text{at}}$  is the number of atoms crossing the resonator and  $M^{(0)}(\omega, t)$  the dipole amplitude calculated along the central trajectory  $\vec{r}(t)$ .  $M^{(0)}(\omega, t)$  can be estimated using the fictitious spin  $\vec{S}(t)$  that we define as

$$\vec{S}(t) = \langle \tilde{\Psi}(t) | \vec{\sigma} | \tilde{\Psi}(t) \rangle$$

$\vec{\sigma}$  being the vector of Pauli matrices. It can be shown that

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \text{Re}\{M(\omega, t)/\mu_B\} \\ S_y(t) &= -\text{Im}\{M(\omega, t)/\mu_B\} \\ S_z(t) &= 2P_e(t) - 1 \end{aligned} \quad (8)$$

where  $P_e(t) = \langle \tilde{\Psi}(t) | e \rangle \langle e | \tilde{\Psi}(t) \rangle$  is the probability for the atom to be in state  $|e\rangle$ . The Heisenberg equation for  $\vec{\sigma}$  is

$$\frac{d\langle \vec{\sigma} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{\sigma}, \tilde{H}(t)] \rangle.$$

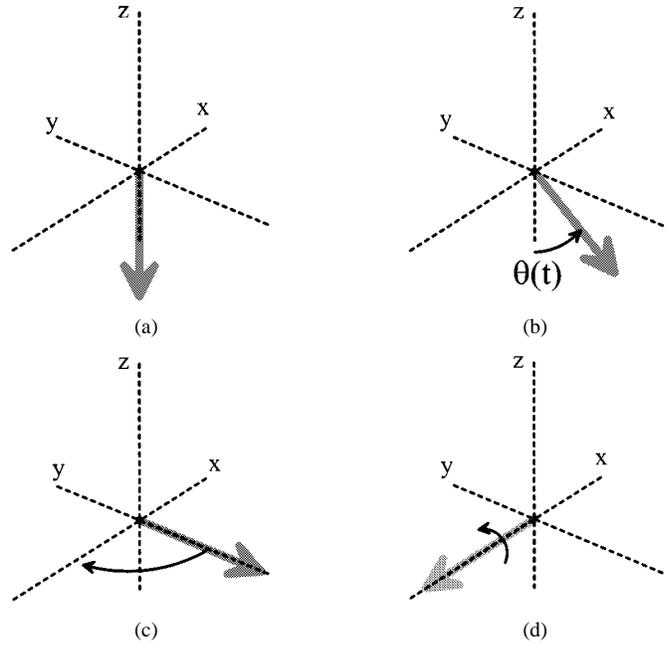


Fig. 1. Evolution of the fictitious spin during the Ramsey interrogation when  $\pi/2$  pulses are applied in the Ramsey zones and  $\delta T = -\pi/2$  (red side of the central fringe at half maximum). (a) Initial position when starting from  $|g\rangle$ . (b) During the first Ramsey interaction. (c) During the free flight. (d) During the second interaction.

At zero order, it can be written in terms of the fictitious spin components in the following way:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -[\delta\vec{z} + \Omega_0 f(t)\vec{x}] \times \vec{S} \quad (9)$$

where we set  $f(t) = H_{cz}(\vec{r}(t))$  and  $\hbar\Omega_0 = \mu_B B^{(0)}(\omega)$ . The evolution of  $\vec{S}$  can be seen in a three-dimensional imaginary space as a rotation with angular pulsation  $-[\delta\vec{z} + \Omega_0 f(t)\vec{x}]$ . In cold atom fountains, the atomic transition is probed using the Ramsey interrogation scheme, consisting of two short interactions of duration  $\tau$  producing a so-called  $\pi/2$  pulse, separated by a free evolution of duration  $T$ . Assuming that atoms are initially in  $|g\rangle$ , the evolution of  $\vec{S}$  goes as follows. During the first Ramsey interaction, the Rabi pulsation  $\Omega_0$  ( $\sim 15$ - $30$  Hz in a fountain) is much larger than the detuning  $\delta$  ( $\sim 0.5$  Hz at half the central fringe) so that we can neglect the  $\vec{z}$  component of the rotation. We thus have, for  $0 < t < \tau$  (see Fig. 1)

$$\begin{aligned} S_x(t) &= 0 \\ S_y(t) &= -\sin[\theta(t)] \\ S_z(t) &= -\cos[\theta(t)] \\ \theta(t) &= \Omega_0 \int_0^t dt' f(t'). \end{aligned} \quad (10)$$

During the free evolution ( $\tau < t < \tau + T$ ),  $f(t) = 0$  so that  $\vec{S}$  rotates around  $\vec{z}$  at pulsation  $-\delta$ . At half the central Ramsey fringe,  $\delta T = \pm\pi/2$  (on Fig. 1, we choose  $\delta T = -\pi/2$ ). The second Ramsey interaction is identical to the first one and induces again a rotation around  $\vec{x}$  (see Fig. 1). From (7), (8), and (10), we can calculate the field at first order

$$B^{(1)}(\omega, t) = B^{(0)}(\omega)[1 + \Delta A(t) - i\Delta\phi(t)]. \quad (11)$$

$\Delta A(t)$  represents a perturbation of the field amplitude. It has a negligible effect on the clock frequency.  $\Delta\phi(t)$  is the time dependent phase perturbation given by

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\phi(t)}{2\pi} &= K\tau_{\text{eff}} \left[ \frac{2(\omega^2/Q)(\omega^2 - \omega_c^2)}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + (\omega\omega_c/Q)^2} \right] \\ &\times \left[ \frac{f(t) \sin[\theta(t)]}{n} \right] \\ \tau_{\text{eff}} &= \int_0^\tau dt' f(t'). \end{aligned} \quad (12)$$

In this equation,  $n$  is defined by the condition that  $\theta(\tau) = n\pi/2$ . Coefficient  $K$  is equal to

$$K = \frac{\mu_0 \mu_B^2 N_{\text{at}} Q}{2\pi^2 \hbar V_{\text{mode}}}. \quad (13)$$

The second factor in (12) is a dispersive function ranging from  $-1$  to  $+1$ . The width of this function is equal to the linewidth of the cavity resonance:  $\omega_c/Q$ . Note that since this linewidth ( $\sim 500$  kHz) is much larger than the atomic resonance width ( $\sim 40$  Hz), we can replace  $\omega = \omega_{\text{at}} + \delta$  with  $\omega_{\text{at}}$  and the phase shift in the first Ramsey zone is almost independent of the detuning. The third factor represents the dependence of  $\Delta\phi(t)$  with time. A similar calculation can be done to find the time dependent phase shift during the second Ramsey interaction. However, when the Ramsey pulse is an odd number times  $\pi/2$  ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) and the central Ramsey fringe is probed at half maximum (normal operation of the fountain), the time dependent phase shift occurring during the second interaction has a vanishing contribution to the clock frequency shift. For simplicity, we will assume that these conditions are met and will only calculate the contribution of the first Ramsey zone. In order to do so, we use the sensitivity function as prescribed in [8]. The clock frequency shift is given by

$$\begin{aligned} 2\pi\Delta\nu &= \frac{-1}{T_{\text{eff}}} \int_0^{T+2\tau} g(t) \frac{d\Delta\phi(t)}{dt} dt \\ T_{\text{eff}} &= \int_0^{T+2\tau} g(t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Here,  $g(t)$  is the sensitivity function defined as the response of the transition probability to a frequency Dirac in the microwave source

$$\delta P = \frac{1}{2} \int g(t) \delta\omega(t) dt. \quad (15)$$

The sensitivity function can be estimated for  $n\pi/2$  ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) pulses and at half the central fringe using the fictitious spin picture. Suppose that at time  $t'$  with  $0 < t' < \tau$ , we apply a frequency Dirac  $\delta\omega(t) = \alpha\delta(t - t')$  in microwave field. This will cause a rotation of  $\vec{S}$  around  $\vec{z}$  with angle  $\alpha$  to occur at time  $t'$ , introducing a component  $\delta S_x = \alpha \sin[\theta(t')]$  as can be seen in Fig. 2. This perturbation propagates through the free flight and the second Ramsey pulse, and results in a change in the transition probability

$$\delta P = \delta P_e(T + 2\tau) = \frac{1}{2} \delta S_z(T + 2\tau) = \frac{1}{2} \alpha \sin[\theta(t')].$$

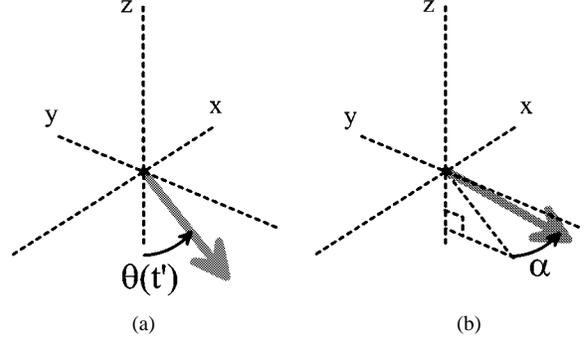


Fig. 2. Calculation of the sensitivity function in the fictitious spin picture. (a) Fictitious during the first Ramsey interaction at time  $t'$  before applying a frequency Dirac  $\delta\omega(t) = \alpha\delta(t - t')$ . (b) Fictitious spin at time  $t'$  after the perturbation.

Replacing  $\delta\omega(t) = \alpha\delta(t - t')$  in (15), we have:  $\delta P = 1/2\alpha g(t')$ . We thus find, for  $0 < t < \tau$

$$g(t) = \sin[\theta(t)]. \quad (16)$$

Finally, after some simple algebra, we find that the clock frequency shift is given by

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= K \frac{\tau_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}}} \left[ \frac{2(\omega_{\text{at}}^2/Q)(\omega_{\text{at}}^2 - \omega_c^2)}{(\omega_c^2 - \omega_{\text{at}}^2)^2 + (\omega_{\text{at}}\omega_c/Q)^2} \right] \\ &\times \frac{\pi}{4\tau_{\text{eff}}} \int_0^\tau f^2(t) \sin[2\theta(t)] dt \\ &\text{with } \theta(t) = n \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} \int_0^t f(t') dt'. \end{aligned} \quad (17)$$

Note that the effective interrogation time  $T_{\text{eff}}$  is positive for  $n = 1, 5, \dots$  and negative for  $n = 3, 7, \dots$  with the definition of the sensitivity function  $g(t)$  of (14)–(16). The last factor in (17) is a numerical dimensionless factor. For a TE<sub>011</sub> cylindrical mode ( $f(t) \simeq \sin(\pi t/\tau)$ ), this factor is equal to 0.445 and 0.074 for  $n = 1$  and 3. Finally, the sign of the effect changes when changing the initial state from  $|g\rangle$  to  $|e\rangle$ . In order to test the influence of the atomic cloud spatial and velocity distributions, we have performed a numerical calculation, that also includes the perturbation of the microwave field during the second Ramsey interaction. The atomic cloud is modeled by randomly choosing atomic trajectories according to the typical spatial and velocity distributions in the experiment [6]. The internal state evolution at zeroth and first order is calculated for each trajectory. Fig. 3 shows the results of this calculation compared with the predictions of (17). The analytical expression (17) is a good approximation of the cavity pulling effect for  $n = 1$ .

#### IV. EXPERIMENT

The  $^{87}\text{Rb}$  fountain experimental setup has already been described in [2], [6]. The number of launched atoms is periodically changed every  $\sim 350$  s between a high value ( $\sim 8 \times 10^7$  atoms in  $|F = 1, m_F = 0\rangle$ ) and a low value ( $\sim 2 \times 10^7$  atoms). This duration being shorter than the typical time scale of the fluctuations of the clock environment, fluctuations of systematic effects that are not related to the atom number are rejected: magnetic field and room temperature fluctuations, drifts of the frequency of the hydrogen maser signal from which the interrogation microwave

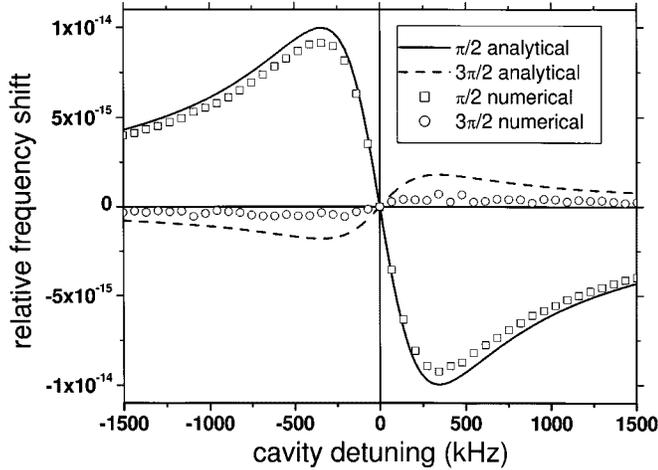


Fig. 3. Relative clock frequency shift as a function of the cavity detuning  $\omega_c - \omega_{at}$ . We choose the parameter values that are currently used in our  $^{87}\text{Rb}$  fountain:  $T = 390$  ms,  $\tau = 28$  ms which gives, for  $n = 1$ ,  $T_{\text{eff}} = 456$  ms, and  $\tau_{\text{eff}} = 18$  ms. The cavity mode is a  $\text{TE}_{011}$  cylindrical mode with a quality factor  $Q = 10\,000$  and a volume  $V_{\text{mode}} = 14.5$  cm $^3$ . The number of atoms crossing the microwave resonator at first passage is  $N_{\text{at}} = 10^8$ .

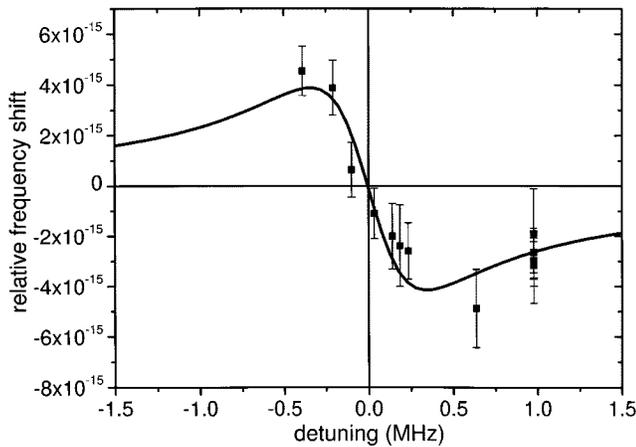


Fig. 4. Measured relative frequency shift as a function of the cavity detuning  $\Delta\nu_{\text{cav}}$ .

frequency is synthesized. Doing this, it is possible to operate the clock for  $\sim 4$  days, the duration that is required to obtain a differential frequency resolution of  $(0.7 - 1.5) \times 10^{-15}$ . In order to obtain a high number of atoms, a long loading duration is necessary which degrades the stability to  $\sim 3.5 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$ . The atom number is changed without perturbing the clock environment by varying the laser intensities during the loading of the magneto-optical trap while keeping the loading duration constant. The number of atoms crossing the resonator during the first passage  $N_{\text{at}}$  and the averaged atomic density  $\bar{n}$  during the interrogation are carefully determined from a Monte-Carlo simulation of the cloud evolution based on the measured initial spatial and velocity distributions. This model of the cloud evolution is described in detail in ref. [6].  $N_{\text{at}}$  is known within 30%. The microwave resonator is tuned by changing its temperature. The resonance frequency and the quality factor are measured as described in [9], with an uncertainty of 20 kHz and 4%, respectively.

Fig. 4 shows the measured frequency shift as a function of the cavity detuning  $\Delta\nu_{\text{cav}} = \omega_c - \omega_{\text{at}}$ , for  $N_{\text{at}} = 3 \times 10^7$ . The plain line on this plot represents a least squares fit of the data points using the following theoretical model:  $\delta\nu/\nu = A[K_{\text{col}}\bar{n} + N_{\text{at}}F(\Delta\nu_{\text{cav}})]$ . The first term where  $K_{\text{col}}$  is a free parameter, accounts for the collisional frequency shift.  $F(\Delta\nu_{\text{cav}})$  is the frequency shift per atom crossing the resonator deduced from the numerical calculation. A good approximation for  $F(\Delta\nu_{\text{cav}})$  is given by (17) divided by  $N_{\text{at}}$  (see Fig. 3). The free parameter  $A$  is thus expected to be 1. We find  $K_{\text{col}} = 7(20) \times 10^{-24}$  cm $^{-3}$ , at least a factor 100 smaller than for Cs. We find  $A = 1.26(14)$  well within the 30% error bar on  $N_{\text{at}}$ . This corresponds to a frequency resolution given by the fit of  $3 \times 10^{-16}$ .

## V. CONCLUSIONS

We have calculated and measured the cavity frequency pulling effect in a  $^{87}\text{Rb}$  fountain. We find quantitative agreement between experiment and theory. When the fountain is operated with a large number of detected atoms ( $\sim 8 \times 10^7$ ), the effect can be  $\sim 4 \times 10^{-15}$ . The effect cannot be strongly reduced by lowering the resonator quality factor. The quality factor indeed must be high enough to prevent important phase gradients [10]. Instead, the effect can be reduced well below the  $10^{-16}$  level by tuning the cavity resonance frequency onto the atomic frequency within 1 kHz. This corresponds to a control of the resonator temperature within 0.01K. A recent and similar work has been reported in [11].

## REFERENCES

- [1] P. Laurent, P. Lemonde, G. Santarelli, M. Abgrall, J. Kitching, Y. Sortais, S. Bize, M. Santos, C. Nicolas, S. Zhang, G. Schehr, A. Clairon, A. Mann, A. Luiten, S. Chang, and C. Salomon, "Cold atom clocks on earth and in space," in *Proc. 14th Int. Conf. Laser Spectroscopy*, Innsbruck, Austria, 1999.
- [2] S. Bize, Y. Sortais, M. S. Santos, C. Mandache, A. Clairon, and C. Salomon, "High-accuracy measurement of the  $^{87}\text{Rb}$  ground-state hyperfine splitting in an atomic fountain," *Europhys. Lett.*, vol. 45, no. 5, p. 558, 1999.
- [3] G. Santarelli, P. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A. G. Mann, S. Chang, A. N. Luiten, and C. Salomon, "Quantum projection noise in an atomic fountain: A high stability cesium frequency standard," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, no. 23, p. 4619, June 1999.
- [4] K. Gibble and S. Chu, "A laser cooled Cs frequency standard and a measurement of the frequency shift due to ultra-cold collisions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, p. 177, 1993.
- [5] S. Ghezali, P. Laurent, S. N. Lea, and A. Clairon, "An experimental study of the spin-exchange frequency shift in a laser cooled cesium fountain standard," *Europhys. Lett.*, vol. 36, no. 1, p. 25, 1996.
- [6] Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, A. Clairon, C. Salomon, and C. Williams, "Cold collision frequency shifts in a  $^{87}\text{Rb}$  fountain," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 3117, 2000.
- [7] J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*. New York: Adam Hilger, 1989.
- [8] P. Lemonde, G. Santarelli, P. Laurent, F. P. Dos Pereira, A. Clairon, and C. Salomon, "The sensitivity function: A new tool for the evaluation of frequency shifts in atomic spectroscopy," in *Proc. IEEE Int. Freq. Control Symp.*, Pasadena, CA, May 1998, pp. 110-115.
- [9] K. Fertig and K. Gibble, "Laser-cooled  $^{87}\text{Rb}$  clock," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 48, pp. 520-523, 1999.
- [10] R. Schröder and U. Hübner, "The microwave cavity in the PTB caesium fountain clock," in *Proc. 114th Eur. Freq. and Time Forum*, Torino, Italy, 2000.
- [11] C. Fertig and K. Gibble, "Measurement and cancellation of the cold collision frequency shift in a  $^{87}\text{Rb}$  fountain clock," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 1622-1625, 2000.

## **E.4 Interrogation Oscillator Noise Rejection in the Comparison of Atomic Fountains**

# Correspondence

## Interrogation Oscillator Noise Rejection in the Comparison of Atomic Fountains

Sebastien Bize, Yvan Sortais, Pierre Lemonde, Shougang Zhang, Philippe Laurent, Giorgio Santarelli, Christophe Salomon, and Andre Clairon

**Abstract**—The frequency stability of an atomic fountain clock can be limited by the phase noise of the interrogation oscillator via the “Dick effect.” In this paper we demonstrate the rejection of the phase fluctuations of the interrogation oscillator by the synchronization of atomic fountains. A reduction by a factor of 16 in the Allan standard deviation of the relative frequency difference between two fountains has been obtained.

### I. INTRODUCTION

THE DEVELOPMENT OF new passive frequency standards using trapped ions or cold atoms has produced devices with a potential fractional frequency stability in the range of  $10^{-14}\tau^{-1/2}$  [1]–[5]. In these new types of standards, the atomic interrogation process and the control of the interrogation oscillator are periodic, with period  $T_c$ .

In the late 1980s, it was shown that the Fourier components of the oscillator frequency noise, close to multiples of  $1/T_c$ , are down-converted, leading to a degradation of the frequency stability [6], [7].

This work motivated new thoughts on this subject, and several recent papers have reported a more complete description of this phenomenon, called the “Dick effect” [8], [9].

If limited by interrogation noise, the Allan variance of the atomic frequency standard is related to the frequency noise of the interrogation oscillator in the following way:

$$\sigma_{y \text{ lim}}^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{g_m^c}{g_0^2} + \frac{g_m^s}{g_0^2} \right) S_y^{IO}(m/T_c) \quad (1)$$

where  $S_y^{IO}(m/T_c)$  is the one-sided power spectral density of the relative frequency fluctuations of the interrogation oscillator at Fourier frequencies  $m/T_c$ , and the parameters  $g_0$ ,  $g_m^s$ , and  $g_m^c$  are defined by:

$$\begin{pmatrix} g_m^s \\ g_m^c \end{pmatrix} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} g(\xi) \begin{pmatrix} \sin 2\pi m\xi/T_c \\ \cos 2\pi m\xi/T_c \end{pmatrix} d\xi, g_0 = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} g(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Manuscript received July 6, 1999; accepted January 12, 2000. This work forms a part of the program of scientific developments of the Bureau National de Métrologie (BNM).

S. Bize, Y. Sortais, P. Lemonde, S. Zhang, Ph. Laurent, G. Santarelli, and A. Clairon are with BNM-LPTF, Observatoire de Paris, 75014 Paris, France (e-mail: sebastien.bize@obspm.fr).

C. Salomon is with LKB-ENS, 75231 Paris, France.

Here  $g(\xi)$  is the sensitivity function. It links the frequency fluctuations of the interrogating field  $\delta\omega(t)$  during the Ramsey interrogation of duration  $T$ , to the fluctuations of the atomic transition probability  $\delta P$ :

$$\delta P = \frac{1}{2} \int_T g(t) \delta\omega(t) dt \quad (3)$$

The feedback loop converts these probability fluctuations into noise in the frequency standard.

Using the most recent 5 MHz BVA quartz oscillators, we recently lowered our previous short-term stability of  $2 \cdot 10^{-13}\tau^{-1/2}$  down to  $1.1 \cdot 10^{-13}\tau^{-1/2}$ , the best stability obtained with an atomic fountain.

To overcome this limitation, a lower noise interrogation oscillator can be used. For example, with a cryogenic sapphire oscillator, the BNM-LPTF atomic fountain FO1 achieved a frequency stability of  $4.5 \cdot 10^{-14}\tau^{-1/2}$  [5].

Alternatively, one can synchronize the operation cycle of a pair of identical frequency standards, interrogating the atoms at the same time with the same oscillator. The frequency fluctuations due to interrogation oscillator are then correlated, and the comparison between the two standards can be made free of this effect. This idea was independently proposed by L. Maleki and co-workers (personal communication).

In this paper we present the first experimental realization of this scheme. Two atomic fountains have been synchronized to reject the noise of the common interrogation oscillator. Three independent fountains at the BNM-LPTF have been compared in this way: the primary Cs standard FO1, a Rb fountain [8] and a transportable Cs fountain [9].

### II. EXPERIMENTAL SET-UP

To implement the rejection technique (Fig. 1), we distributed a single interrogation oscillator signal to all of the atomic fountains with a 100 MHz low noise link of 200 m length. A synchronization pulse was generated at the beginning of each cycle by FO1, which triggers the cycle sequence of the other fountains. The stability of the synchronization is better than 1 ms.

In order to demonstrate the noise rejection, we used a noisy quartz oscillator with an Allan standard deviation of about  $5 \cdot 10^{-12}$  at 1 second. The “Dick effect” results in an Allan deviation of  $2.4 \cdot 10^{-12}\tau^{-1/2}$ , almost two orders of magnitude higher than other limitations to the frequency stability of each fountain.

### III. RESULTS

Fig. 2 shows the quadratic sum of the Allan deviation of the Rb and FO1 fountains compared against a H-maser that would result from the unsynchronized comparison. Also plotted is the Allan deviation of the relative frequency difference between the fountains. We observed an improvement of the frequency comparison by a factor of 16. The stability in the comparison is

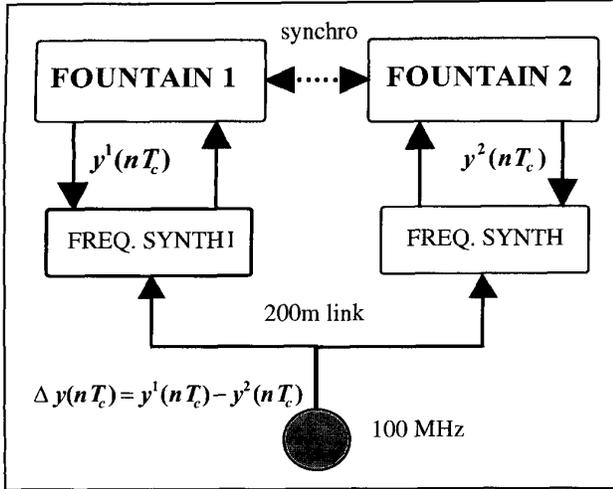


Fig. 1. Schematic of the link connecting the interrogation oscillator to the two fountains.

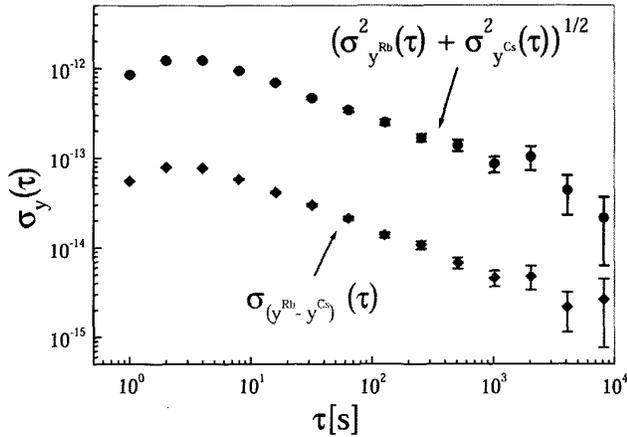


Fig. 2. Dots: quadratic sum of the Allan deviation of the Rb and Cs fountains. Diamonds: Allan deviation of the frequency difference between the fountains.

$2 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$ , close to the value obtained with the best quartz oscillators. In the comparison between the Rb fountain and the transportable Cs fountain, a preliminary factor of 10 improvement was obtained.

When a delay between the two interrogation cycles was applied, the sensitivity functions of the two fountains were not perfectly matched (Fig. 3). The relative frequency fluctuations of both standards were then partially decorrelated. Fig. 4 shows the noise rejection plotted against the delay between the operation cycles of the two fountains. The rejection is defined here as the quadratic sum of the Allan deviation of each fountain divided by the Allan deviation of the frequency difference.

The continuous line is a numerical simulation of the rejection using the measured phase noise spectral density of the interrogation oscillator and a simple model of the sensitivity functions of the two fountains. This model assumes that the atoms are subjected to square microwave pulses of length equal to the actual time spent in the interrogation cavity. We observed a good qualitative agreement between experiment and theory. A

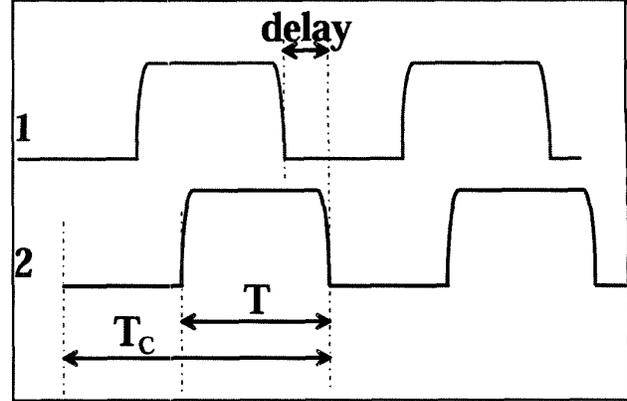


Fig. 3. Sensitivity functions of two fountains.  $T_c$ : cycle duration,  $T$ : interrogating duration.

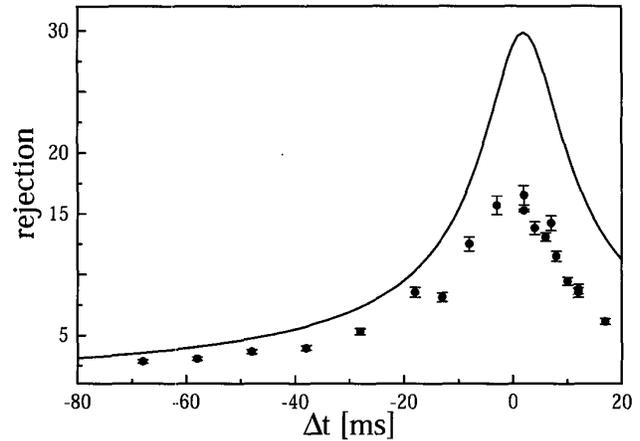


Fig. 4. Rejection versus the delay between the operation cycles (dots). The solid line is a numerical simulation using the noise measurements of the interrogation oscillator.

more refined model requires a very precise knowledge of the oscillator noise spectrum and of the actual sensitivity functions, the latter can be precisely measured using previously developed techniques [11]. This graph also shows that, because the optimum operation point is quite sharp, a few milliseconds synchronization is needed for a significant rejection of the interrogation oscillator noise. This indicates that high order harmonics of the noise are involved in the rejection process.

Note that the rejection of the interrogation oscillator does not result in a more stable clock; the output of each individual fountain is still affected by the interrogation oscillator frequency noise.

#### IV. CONCLUSIONS

We have presented preliminary results of interrogation oscillator noise rejection by synchronizing two atomic fountains. By performing the synchronization with a  $10^{-13}$  stability quartz oscillator, it seems possible to reach the quantum projection noise limit in the comparison between the fountains. With three

synchronized fountains, the frequency stability of each clock could be determined with a three corner hat measurement. This opens the way to a frequency stability of a few  $10^{-14}\tau^{-1/2}$  in the comparison between fountains, a prerequisite for an accuracy evaluation approaching  $10^{-16}$ .

## ACKNOWLEDGMENT

We thank M. Dequin and M. Lours for help with the experiment.

## REFERENCES

- [1] A. Clairon, S. Ghezali, G. Santarelli, Ph. Laurent, M. Bahoura, S. N. Lea, E. Simon, K. Sczymaniec, and S. Weyers, "Preliminary accuracy evaluation of a cesium fountain frequency standard," in *Proc. 5th Symposium on Frequency Standard and Metrology*, J. C. Berquist, Ed. Cleveland, OH: World, 1996, pp. 49–59.
- [2] D. J. Berkeley, J. D. Miller, J. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland, "Laser cooled mercury ion frequency standard," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 2898–2092, 1998.
- [3] R. L. Tjolkner, J. D. Prestage, and L. Maleki, in *Proc. 5th Symposium on Frequency Standard and Metrology*, J. C. Berquist, Ed. Cleveland, OH: World, 1996, p. 33.
- [4] P. Fisk, M. J. Sellars, M. A. Lawn, and C. Coles, in *Proc. 5th Symposium on Frequency Standard and Metrology*, J. C. Berquist, Ed. Cleveland, OH: World, 1996, p. 27.
- [5] G. Santarelli, Ph. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A. G. Mann, S. Chang, A. N. Luiten, and C. Salomon, "Quantum projection noise in an atomic fountain: A high stability cesium frequency standard," *Phys. Rev. Lett.*, pp. 4619–4622, 1999.
- [6] G. J. Dick, "Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards," *Proc. Precise Time and Time Interval*, pp. 133–147, 1987.
- [7] G. J. Dick, J. D. Prestage, C. A. Greenhall, and L. Maleki, "Local oscillator induced degradation of medium-term stability in passive atomic frequency standards," in *Proc. 22nd Precise Time and Time Interval (PTTI)*, pp. 487–508, 1990.
- [8] Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, G. Santarelli, C. Salomon, and A. Clairon, "An evaluation of the collisional frequency shift in a  $^{87}\text{Rb}$  cold atom fountain," in *Proc., FCS-EFTF Joint Meeting*, 1999.
- [9] Ph. Laurent, P. Lemonde, M. Abgrall, G. Santarelli, F. Pereira Dos Santos, A. Clairon, P. Petit, and M. Aubourg, "Interrogation of cold atoms in a primary frequency standard," in *Proc., FCS-EFTF Joint Meeting*, 1999.
- [10] G. Santarelli, C. Audoin, A. Makdissi, Ph. Laurent, G. J. Dick, and A. Clairon, "Frequency stability degradation of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator," *IEEE Trans Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, vol. 45, p. 887, 1998.
- [11] C. Audoin, G. Santarelli, A. Makdissi, and A. Clairon, "Properties of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator," *IEEE Trans Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, vol. 45, p. 877, 1998.
- [12] C. A. Greenhall, "Derivation of the long-term degradation of a pulsed atomic frequency standard from a control-loop model," *IEEE Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, vol. 45, p. 895, 1998.
- [13] P. Lemonde, G. Santarelli, Ph. Laurent, F. Pereira Dos Santos, A. Clairon, and C. Salomon, "The sensitivity function: A new tool for the evaluation of frequency shifts in an atomic frequency standard," *Proc. FCS*, 1998.

## E.5 Cold Atoms Clocks

# Cold Atom Clocks

Y. Sortais<sup>\*1</sup>, S. Bize<sup>1</sup>, M. Abgrall<sup>1</sup>, S. Zhang<sup>1</sup>, C. Nicolas<sup>1</sup>, C. Mandache<sup>1</sup>, P. Lemonde<sup>1</sup>, P. Laurent<sup>1</sup>, G. Santarelli<sup>1</sup>, N. Dimarcq<sup>2</sup>, P. Petit<sup>2</sup>, A. Clairon<sup>1</sup>, A. Mann<sup>3</sup>, A. Luiten<sup>3</sup>, S. Chang<sup>3</sup> and C. Salomon<sup>†</sup>

<sup>1</sup>BNM-LPTF, Observatoire de Paris, 61 Av. de l'Observatoire, 75014, Paris, France

<sup>2</sup>Laboratoire de l'Horloge Atomique, bat. 221, Université Paris sud, 91405, Orsay, France

<sup>3</sup>Physics Department, University of Western Australia, Nedlands, 6907 WA, Australia

Received September 18, 2000; accepted December 7, 2000

PACS Ref: 06.30.Ft, 32.80.Pj, 34.20.Cf

## Abstract

This paper reviews recent progress on microwave clocks using laser cooled neutral atoms. With an ultra-stable cryogenic sapphire oscillator as interrogation oscillator, a cesium fountain operates at the quantum projection noise limit. With  $6 \cdot 10^5$  detected atoms, the relative frequency stability  $\delta\nu/\nu$  is  $4 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$  where  $\tau$  is the integration time in seconds. This stability is comparable to that of hydrogen masers. At  $\tau = 2 \cdot 10^4$  s, the measured stability reaches  $6 \cdot 10^{-16}$ . Equally important is the accuracy of the frequency standard since  $^{133}\text{Cs}$  is the primary reference for the definition of the time unit, the second. The accuracy of our cesium fountain FOI is presently  $1 \cdot 10^{-15}$ , currently the best reported value.

A  $^{87}\text{Rb}$  fountain has also been constructed and the  $^{87}\text{Rb}$  ground-state hyperfine energy has been compared to the Cs primary standard with a relative accuracy of  $2.5 \cdot 10^{-15}$ . Comparing the hyperfine energies of atoms with different atomic numbers  $Z$ , one can search for possible variations of the fine structure constant  $\alpha = e^2/\hbar c$  with time. Measurements of the ratio  $\nu(^{87}\text{Rb})/\nu(^{133}\text{Cs})$  spread over an interval of 24 months indicate no change at a level of  $3.110^{-15}/\text{year}$ , placing a new upper limit for  $1/\alpha(d\alpha/dt)$ . The second attractive feature of  $^{87}\text{Rb}$  fountains is the smallness of the frequency shift induced by the mean field interaction between atoms. This shift is found to be at least  $\sim 50$  times below that of cesium.

Finally, the interest of the microgravity of space for cold atom experiments is outlined. A space mission, ACES, carrying ultra-stable clocks, is presented. ACES has been selected by the European Space Agency to fly on the International Space Station in 2004.

## 1. Introduction

Since 1967, the SI unit of time, the second, is based on a quantum oscillator using the ground-state hyperfine transition in atomic  $^{133}\text{Cs}$ . By definition, the frequency of this transition is 9 192 631 770 Hz. The best realization of the second is currently achieved by laser cooled  $^{133}\text{Cs}$  atomic fountains which combine both high stability and high accuracy. The evolution of the relative accuracy of  $^{133}\text{Cs}$  primary frequency standards with time is shown in Fig. 1. Since the 1960s, it has improved on average by a factor of 10 every 10 years, reaching currently  $10^{-15}$  in cold atom fountains. For comparison the microwave trapped ion frequency standard based on  $\text{Hg}^+$  [2] and the recent optical measurements of the 1s–2s transition in atomic hydrogen [3] and of the 657 nm transition in calcium [4] are also shown in Fig. 1.

In passive atomic clocks, the relative frequency stability  $\sigma_y(\tau)$  is given by the Allan variance of the frequency fluctuations of a macroscopic oscillator (a quartz crystal, or a sapphire cryogenic oscillator), slaved to the resonance of a sample of microscopic oscillators (Cs atoms in a primary

\*e-mail: yvan.sortais@obspm.fr

†Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231, Paris, France.

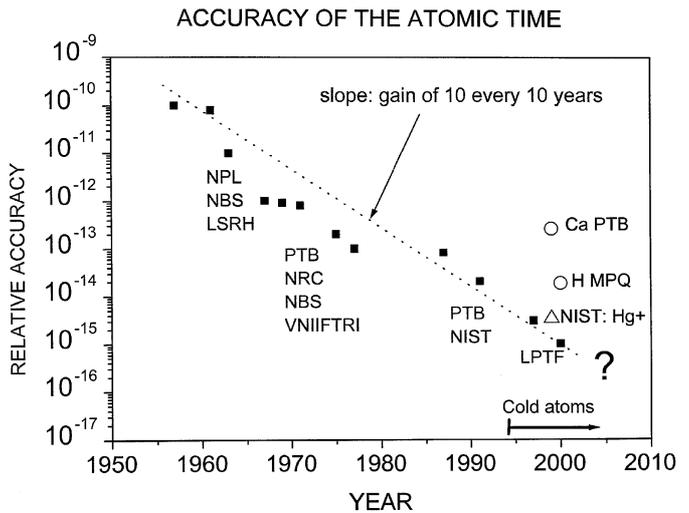


Fig. 1. Accuracy of cesium atomic clocks over the last 40 years (black squares). Open triangle:  $\text{Hg}^+$  ion at 40 GHz [2]. Open circles: H [3] and Ca [4] optical lines.

standard). Here,  $\tau$  is the measurement time. This Allan variance is always measured using the beat note between two independent oscillators. The accuracy of an atomic clock depends on various parameters such as the temperature of the experiment, the surrounding magnetic field, or the collisions between the atoms.

Cold atom clocks use the method of separated oscillatory fields introduced by Ramsey in 1950, but adapted to a vertical geometry [5, 6]. The atoms are first prepared in one of the two levels  $|g\rangle$  and  $|e\rangle$  of the clock transition, and then launched upwards. On the way up, they pass through a resonant microwave cavity. The microwave frequency is generated from the macroscopic oscillator and tuned to the clock transition. The atoms interact with the microwave field sustained inside the cavity, and undergo a first  $\pi/2$  pulse. On the way down, they pass through the same cavity, where they undergo after a time  $T$  a second  $\pi/2$  pulse. The longer  $T$ , the narrower the Ramsey resonance, and the higher the frequency resolution. After the Ramsey interactions, the populations  $N_g$  and  $N_e$  of both clock levels are measured. From the transition probability signal,  $N_e/(N_g + N_e)$ , as a function of the microwave detuning, an error signal is computed to lock the macroscopic oscillator to the atomic transition. In Fig. 2, the Ramsey resonance as a function of the microwave frequency

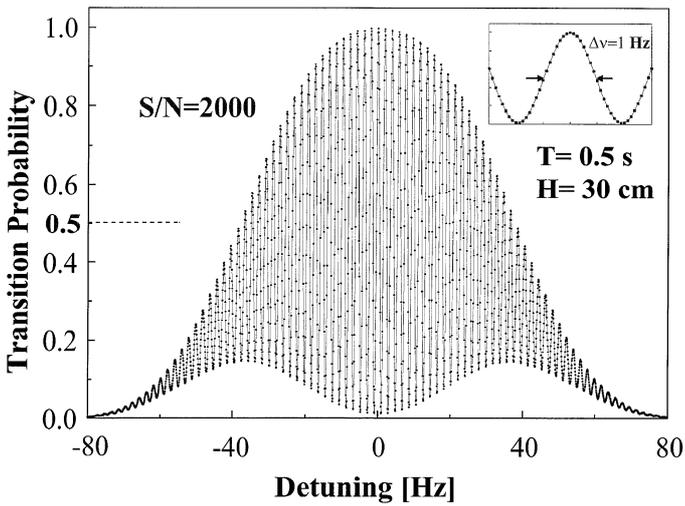


Fig. 2. Ramsey fringes of the BNM-LPTF Cs fountain FO1. The fringe width is 1 Hz and signal to noise ratio is 2000 per cycle of 1.1 s.

is shown for the BNM-LPTF Cs fountain FO1. The atoms are cooled down to  $0.8 \mu\text{K}$  and launched upwards at  $\sim 4 \text{ m/s}$ . They reach apogee  $\sim 30 \text{ cm}$  above the microwave cavity, corresponding to  $T \sim 0.5 \text{ s}$ . Ramsey fringes have a width  $\Delta\nu = 1 \text{ Hz}$  FWHM. Each point is one cycle of duration 1.1 s, and the signal to noise ratio is 2000 for  $8 \cdot 10^5$  detected atoms.

In this paper, we discuss the present performance and limits of  $^{133}\text{Cs}$  and  $^{87}\text{Rb}$  fountains. We have recently shown that Cs fountains can be operated with a frequency stability limited by the quantum projection noise [7]. The accuracy of BNM-LPTF CS fountains has been improved up to  $1.0 \cdot 10^{-15}$ . Going much beyond seems a hard task, because of the large frequency shift induced by cold collisions. In contrast,  $^{87}\text{Rb}$  fountains exhibit a collisional shift  $\sim 50$  times smaller than in  $^{133}\text{Cs}$  [8, 9].  $^{87}\text{Rb}$  fountains are thus interesting candidates for future atomic clocks with better performance. We present the measurement of the collisional shift in our  $^{87}\text{Rb}$  fountain and we give a new limit for the variation of the fine structure constant  $\alpha = e^2/\hbar c$  with time. Finally, micro-gravity environment is capable of providing even longer interaction times than in Earth fountains [10, 11].

## 2. Cs Fountains

Until recently, the frequency stability of atomic fountains was limited by the phase noise of the quartz oscillator used for the atom interrogation. With state-of-the-art quartz oscillators, this limit is above  $10^{-13} \tau^{-1/2}$  [12]. With such a stability, a  $10^{-16}$  accuracy goal is challenging since a single measurement with this resolution implies an averaging time of more than one week. By using an ultra-stable cryogenic sapphire oscillator (SCO) developed by the University of Western Australia [13], we have been able to overcome this limitation and to reach the quantum projection noise limit [7, 14, 15].

Before being detected, the atomic internal state is a linear superposition of the two states  $|e\rangle$  and  $|g\rangle$  of the clock transition:  $|\psi\rangle = \alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$ , with  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . The measurement process projects atoms in state  $|e\rangle$  or  $|g\rangle$ .

The probability of finding an atom in  $|e\rangle$  is  $|\beta|^2 = \langle\psi|P_e|\psi\rangle = p$ , with  $P_e$  the projection operator onto state  $|e\rangle$ . The measurement exhibits quantum fluctuations of standard deviation  $\sigma = (\langle\psi|P_e^2|\psi\rangle - (\langle\psi|P_e|\psi\rangle)^2)^{1/2} = \sqrt{p(1-p)}$ . For a set of  $N_{\text{at}}$  uncorrelated atoms,  $\sigma$  scales as  $N_{\text{at}}^{-1/2}$ . Itano *et al.* [15] named this effect *quantum projection noise* and have observed it both in the case of repeated measurements on a single particle prepared successively under identical conditions, and in the case of an ensemble average with a number  $N_{\text{at}}$  of identical trapped particles, up to  $N_{\text{at}} = 380$ .

The SCO possesses a mode which is only 1.3 MHz away from the Cs hyperfine splitting frequency  $\nu_0$ . Oscillating on this mode, its frequency stability is below  $10^{-14}$  from 0.1 to 10 s. The excess noise is then negligible compared to the projection noise in our atomic fountain for  $N_{\text{at}} \leq 10^6$ . The Allan standard deviation of the relative frequency fluctuations  $y(t)$  of an atomic fountain can be expressed as:

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{\pi Q_{\text{at}}} \sqrt{\frac{T_c}{\tau}} \left( \frac{1}{N_{\text{at}}} + \frac{1}{N_{\text{at}} n_{\text{ph}}} + \frac{2\sigma_{\delta N}^2}{N_{\text{at}}^2} + \gamma \right)^{1/2}. \quad (1)$$

In (1)  $\tau$  is the measurement time in seconds,  $T_c$  is the fountain cycle duration ( $\sim 1 \text{ s}$ ) and  $\tau > T_c$ .  $Q_{\text{at}} = \nu_0/\Delta\nu$  is the atomic quality factor. The first term in parentheses is the atomic projection noise  $\propto N_{\text{at}}^{-1/2}$ . The second term is due to the photon shot-noise of the detection fluorescence pulses and is less than 1% of the projection noise. The third term represents the effect of the noise of the detection system.  $\sigma_{\delta N}$ , the uncorrelated rms fluctuations of the atom number per detection channel, is about 85 atoms per fountain cycle. This noise contribution becomes less than the projection noise when  $N_{\text{at}} > 2 \cdot 10^4$ .  $\gamma$  is the contribution of the frequency noise of the interrogation oscillator [12, 16]. With the SCO, this contribution is at most  $10^{-14} \tau^{-1/2}$  and can be neglected. As an example, for  $N_{\text{at}} \sim 6 \cdot 10^5$  detected atoms,  $\Delta\nu = 0.8 \text{ Hz}$ ,  $Q_{\text{at}} = 1.1510^{10}$  and  $T_c = 1.1 \text{ s}$ , the expected frequency stability is  $\sigma_y(\tau) = 4 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$ .

To observe the quantum projection noise, we vary the number of atoms in the fountain and measure the frequency stability  $\sigma_y(\tau)$  by comparison with the free running sapphire oscillator which is used as a very stable reference up to 10–20 s. A plot of the normalized Allan standard deviation as a function of atom number is presented in Fig. 3. Since we explored several values of  $Q_{\text{at}}$  and of the cycle duration  $T_c$ , we plot the quantity  $\sigma_y(\tau)\pi Q_{\text{at}}\sqrt{\tau/T_c}$  for  $\tau = 4 \text{ s}$ . This quantity should simply be equal to  $N_{\text{at}}^{-1/2}$  (when the detection noise is negligible). At low atom numbers, the  $1/N_{\text{at}}$  slope indicates that the stability is limited by the noise of the detection system (third term in Eq. 1). For  $N_{\text{at}} > 4 \cdot 10^4$ , the experimental points are in good agreement with the relation  $y = aN_{\text{at}}^{-1/2}$  with  $a = 0.91(0.1)$ , close to the expected value of 1 (Fig. 3).

With the largest number of detected atoms,  $N_{\text{at}} = 6 \cdot 10^5$ , the stability is  $4 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$  for  $Q_{\text{at}} = 1.15 \cdot 10^{10}$ ,  $T_c = 1.1 \text{ s}$ . This is a significant improvement over the fountain operation with a quartz oscillator. It is comparable to the best short-term stability achieved with microwave ion clocks using uncooled  $^{199}\text{Hg}^+$  and  $^{171}\text{Yb}^+$  samples [17, 18]. In a second experiment, we have locked the SCO to the fountain signal for  $N_{\text{at}} = 5 \cdot 10^5$  and compared it to a

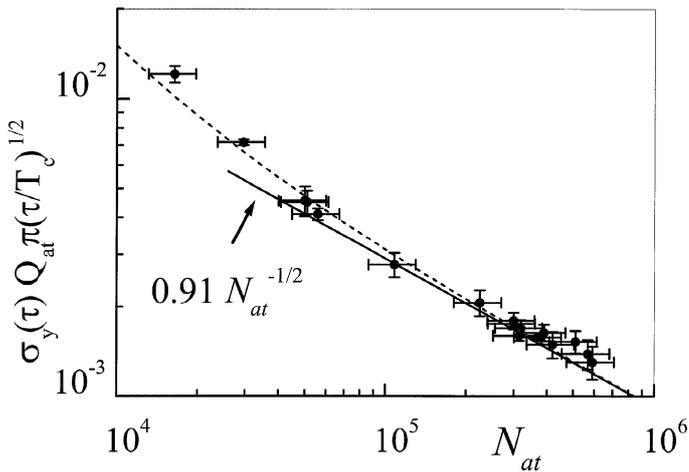


Fig. 3. Normalized frequency fluctuations as a function of the number of detected atoms  $N_{at}$ . The expected quantum projection noise law is  $y = N_{at}^{-1/2}$ . The thick line  $y = 0.91(0.1)N_{at}^{-1/2}$  is a least square fit to the experimental points for  $N_{at} > 4 \cdot 10^4$ . The dashed line is the quadratic sum of the detection noise and quantum projection noise.

hydrogen maser. The Allan standard deviation of this frequency comparison is  $7 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$  and reaches  $6 \cdot 10^{-16}$  at  $\tau \sim 2 \cdot 10^4$  s, a value close to the flicker floor of the H-maser.

Table I presents the current accuracy budget of the Cs fountain FO1. The accuracy evaluation was performed by amplifying the systematic effects when possible as described in [19] and with a resolution for each measurement of  $10^{-15}$ . This fountain has the best accuracy ever reported for frequency standards. This accuracy is currently a factor of three better than the trapped  $\text{Hg}^+$  ion frequency standard operating at 40 GHz [2].

In the near future, direct comparison of our Cs fountains should lead to a stability on the order of  $\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 10^{-14} \tau^{-1/2}$ , reaching  $2 \cdot 10^{-16}$  for  $\tau \simeq 1$  day. However under these conditions, the collisional frequency shift of the Cs clock transition is on the order of  $-5 \cdot 10^{-15}$ . Reaching the  $10^{-16}$  level of accuracy requires

Table I. Present accuracy budget of the  $^{133}\text{Cs}$  fountain FO1. The device operates with a stability of  $1.5 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$ , and a number of detected atoms of  $10^5$ . The MOT is disabled and atoms are captured in optical molasses. The temperature is 0.8  $\mu\text{K}$ . The gravitational redshift is not intrinsic to the clock and is not included in the table.

Effect	Correction [ $10^{-15}$ ]	Uncertainty [ $10^{-15}$ ]
2nd order Zeeman shift	-133	$\leq 0.1$
Blackbody radiation	+17.6	$\leq 0.3$
Microwave spectrum	0	0.2
First Order Doppler	0	$\leq 0.5$
Microwave leaks	0	0.2
Pulling by other lines	0	0.4
Second order Doppler and gravitation	0	$\ll 0.1$
Microwave photon	-0.3	0.3
Cold collisions + Cavity Pulling (Molasses)	1	$\leq 0.5$
Background gas collisions	0	$\leq 0.5$
Total $1\sigma$ uncertainty		$1.0 \cdot 10^{-15}$

a stability of the average atomic density and an extrapolation to zero density at the 2% level, a delicate task.

### 3. $^{87}\text{Rb}$ : an interesting alkali

In 1997, Kokkelmans *et al.* predicted that the collisional frequency shift for  $^{87}\text{Rb}$  was 15 times smaller than for  $^{133}\text{Cs}$  [20]. Rubidium fountains could then operate with larger atom numbers, with a better short term stability and better accuracy.  $^{87}\text{Rb}$  fountains appear thus as an attractive alternative to Cs frequency standards. Our  $^{87}\text{Rb}$  fountain has already been described in detail in ref. [21]. In this section, we present measurements of the two main atom number dependent effects in a  $^{87}\text{Rb}$  fountain, the collisional frequency shift and the cavity pulling effect.

As explained above, in a fountain the atoms interact twice with a microwave field (Ramsey method), inducing transitions between the two internal states  $|g\rangle$  and  $|e\rangle$ . The collisional frequency shift is due to the interaction between atoms inside the atomic cloud during the Ramsey interaction. At very low temperatures, only s-wave scattering occurs and the collision between two atoms in internal states  $|i\rangle$  and  $|j\rangle$  is described using the scattering length  $a_{i,j}$ . Here,  $|i\rangle$  and  $|j\rangle$  refer to any atomic Zeeman substate  $|F, m_F\rangle$ , while  $|g\rangle$  and  $|e\rangle$  are notations for the clock levels only. In the case of  $^{87}\text{Rb}$ , the lower and higher clock levels are  $|g\rangle = |1, 0\rangle$ , and  $|e\rangle = |2, 0\rangle$ . In the general case where states other than  $|g\rangle$  and  $|e\rangle$  are populated, the clock frequency shift is related to the partial densities  $n_j$  of states  $|j\rangle$  by the following expression [20]:

$$\Delta\nu = -\frac{2\hbar}{m} \times \sum_j n_j (1 + \delta_{g,j})(1 + \delta_{e,j})(a_{g,j} - a_{e,j}) \quad (2)$$

where the Kronecker symbol  $\delta_{i,j}$  accounts for quantum statistics. In a fountain, the partial densities  $n_j$  are space- and time-dependent and the measured frequency shifts appear as an average over these variables.

The second effect which depends on atom number is the cavity frequency pulling [22]. In our fountain, the atomic transition is probed by a 6.8 GHz microwave field in a  $TE_{011}$  copper resonator with a quality factor  $Q \simeq 10^4$ . The pulling effect is due to the interference inside the microwave resonator between the field radiated by the input coupler and the field radiated by the atomic magnetic dipoles when the atoms pass through the cavity. This interference induces a time dependent phase shift between the field inside the resonator and the signal delivered by the oscillator. It produces a clock shift that exhibits a dispersive dependence as a function of the cavity detuning with respect to the atomic resonance ( $\Delta\nu_{\text{cav}} = \nu_{\text{cav}} - \nu_{\text{at}}$ ). The amplitude of this dispersion curve is proportional to  $Q$  and to the number of atoms  $N_{\text{cav}}$  crossing the cavity. The width is proportional to  $1/Q$ . When the atoms enter the cavity in the upper state (resp. lower state) and deposit (resp. extract) energy in the cavity, the clock frequency is pulled towards (resp. pushed away from) the cavity resonance frequency.

Our treatment of the frequency shift measurements takes into account both collisional frequency shift and cavity pulling simultaneously. By tuning the cavity around the Rb resonance frequency, we display the characteristic dispersive lineshape of the cavity pulling effect and find good

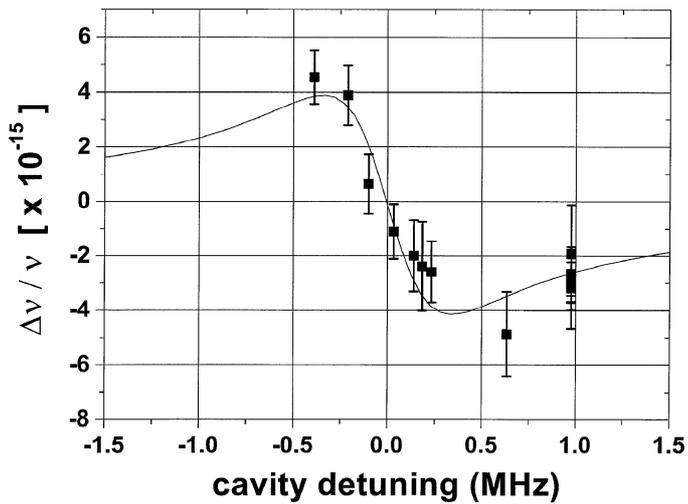


Fig. 4. Relative frequency shift vs cavity detuning for  $\Delta N = 3.5 \times 10^7$  in case (i). Solid line: fit from Eq. (3).

agreement with theory (Fig. 4). A quantitative model of the pulling effect allows us to make a precise determination of the number of atoms crossing the cavity,  $N_{\text{cav}}$ . The measurements of the velocity distribution and of the initial size of the atomic cloud, combined with a Monte-Carlo simulation and the measurement of  $N_{\text{cav}}$ , give the average atomic density during the Ramsey interrogation ( $\bar{n}$ ). After subtraction of the pulling contribution, we thus deduce the collisional frequency shift. In order to test the Monte-Carlo simulation, other methods have been used to measure the number of atoms in the fountain (experimental details are given in ref. [9]). These methods agree with the value deduced from the cavity pulling within 20%.

Our measurement approach uses a differential method. Every 200 fountain cycles ( $\sim 350$  s), we change the trapping light intensity so that the number of atoms in the fountain alternates between two values  $N_{\text{high}}$  and  $N_{\text{low}} \simeq N_{\text{high}}/4$ . We measure the frequency difference between the two situations. This method efficiently rejects slow frequency fluctuations which are not related to atom number or density, in particular the H-maser drift. In the differential method the frequency resolution is  $\sim 3 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$  where  $\tau$  is the averaging time in seconds. At 350 s the maser stability is  $\sim 2.7 \cdot 10^{-15}$ , at least 4 times better than the fountain stability. The relative frequency resolution on effects which depend on atom number reaches  $\sim 1 \cdot 10^{-15}$  per day.

After launch, atoms are spread among the various  $m_F$  substates of the  $F = 2$  manifold. Data have been taken in three cases. (i) normal clock operation : atoms in the  $|2, 0\rangle$  substate are transferred to  $|1, 0\rangle$  using a microwave  $\pi$  pulse. Atoms remaining in  $|2, m_F \neq 0\rangle$  are pushed away by radiation pressure. Only three scattering lengths  $a_{gg}$ ,  $a_{ge}$  and  $a_{ee}$  in Eq. (2) are involved. (ii) no selection: all Zeeman sublevels in  $F = 2$  are equally populated to within 2–3%. The frequency shift of the  $|2, 0\rangle \rightarrow |1, 0\rangle$  transition is measured in the presence of  $|2, m_F \neq 0\rangle$  populations. (iii) Atoms are pumped in  $F = 1$  by a laser pulse tuned to the  $F = 2 \rightarrow F' = 2$  optical transition. Atoms remaining in  $F = 2$  state ( $\leq 2\%$ ) are pushed away by radiation pressure. The launched atoms are equally spread among the  $F = 1$  substates to within 1%. The frequency shift of the

$|1, 0\rangle \rightarrow |2, 0\rangle$  transition is measured in the presence of  $|1, m_F \neq 0\rangle$  populations.

Figure 4 shows the differential measurement of the clock frequency shift as a function of the cavity detuning  $\Delta v_{\text{cav}}$  with respect to the atomic resonance, for atoms initially selected in  $|1, 0\rangle$ , with  $N_{\text{high}} \simeq 4.3 \cdot 10^7$  entering the microwave cavity and  $N_{\text{low}} \simeq 0.8 \cdot 10^7$ . The simulation shows that this modulates the effective density by a factor  $\sim 3.3$ , because both velocity distribution and initial size of the atomic cloud depend on the regime of operation of the fountain (high or low number of atoms). The frequency and quality factor of the cavity are measured with an uncertainty of 20 kHz and 4% respectively and the cavity is tuned by temperature [23]. The solid line is a least square fit of the data using the following function:

$$\delta v/v = f(\Delta v_{\text{cav}})\Delta N + B\Delta\bar{n} \quad (3)$$

where  $B$  is the free parameter of the fit, and  $\Delta N = N_{\text{high}} - N_{\text{low}}$  [24].  $f(\Delta v_{\text{cav}})$  is the calculated dispersive line shape of the cavity pulling effect for a single atom in the cavity.  $\bar{n}$  is the effective atomic density and is related to the partial densities  $n_j$  in Eq. (2) by  $\bar{n} = \sum_j \bar{n}_j$ , where  $\bar{n}_j$  are the partial densities  $n_j(t)$ , averaged over time, over the initial spatial distribution and over the velocity distribution.

We find  $B = -7.2(20.0) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$ .  $B$ , the collisional shift coefficient, is surprisingly consistent with zero even with a frequency standard deviation of  $3 \cdot 10^{-16}$  given by the fit. Thus in case (i), at a density of  $1.5 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$ ,  $^{87}\text{Rb}$  exhibits no detectable shift (Fig. 5(i)) whereas  $^{133}\text{Cs}$  would exhibit a shift of  $3 \cdot 10^{-14}$ . Our upper value for the  $^{87}\text{Rb}$  collisional shift is consistent with the recent measurement of C. Fertig and K. Gibble giving  $-0.38(8)\text{mHz}$  for a density of  $1.0(6) \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$  [8].

Figure 5 summarizes the collisional shifts measurements versus the effective density  $\bar{n}$  in the three cases (i), (ii) and (iii) [25]. By contrast to case (i), data recorded in case (ii) and (iii) show a clear dependence with the density after subtracting the cavity pulling effect.

The measured value in case (ii)  $-50(10)_{(-34)}^{(+22)} \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$  is in reasonable agreement with the theoretical predictions  $-56 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$  [20] and  $-33 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$  [26]. The first parenthesis refers to the frequency statistical uncertainty (1 standard deviation); the second to the linear combination of frequency uncertainty and density calibration uncertainty. From variations of the parameters in the simulation and experimental calibrations, we deduce a 35% type B uncertainty on our density. Adding quadratically the 11% statistical uncertainty on atom number, we get a 40% combined uncertainty on the density. This corresponds to a scale factor of 1.4 and 1/1.4 on the density axis of Fig. 5, defining the acceptance domain of the measurements (dotted lines). In case (iii), the agreement with theory is similar. We find  $-60(16)_{(-46)}^{(+29)} \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$  to be compared to  $-68 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$  (ref. [20]) and  $-41 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$  (ref. [26]). Finally, our data in case (i),  $-7.2(20.0)_{(-31)}^{(+25)} \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3$  show a disagreement at  $\sim 3\sigma$  with theory of ref. [20] and seem to favor the more recent theory of ref. [26].

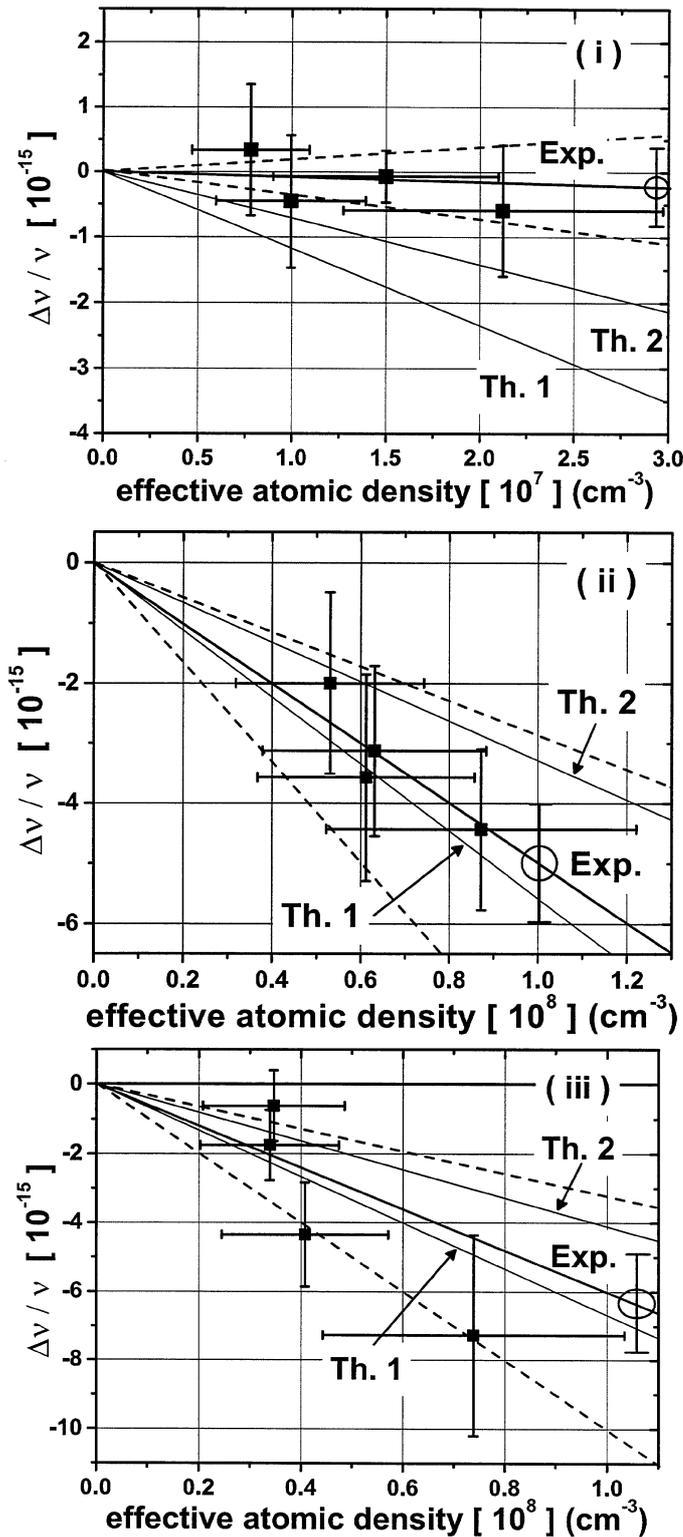


Fig. 5. Frequency shift of the  $|1, 0\rangle \rightarrow |2, 0\rangle$  transition vs effective density in cases (i), (ii), and (iii), and comparison with theories of ref. [20] (Th. 1) and ref. [26] (Th. 2). Open circles: linear fits to the experimental data with statistical frequency uncertainty at the given density. Horizontal error bars represent the 40% density uncertainty. Dotted lines: experiment with combined frequency and density uncertainties.

#### 4. A new limit for the variation of $\alpha$ with time

##### 4.1. Present tests

Comparing the hyperfine energies of different alkali or alkali-like species provides an interesting test of the Local Position Invariance, which is one of the statements of the

Einstein Equivalence Principle (EEP). “*In local freely falling frames, the outcome of any non-gravitational test experiment is independent of where and when it is performed*”. Experimental tests of the EEP thus aim at determining the relative rate of change of non-gravitational fundamental constants, such as the fine structure constant  $\alpha = e^2/\hbar c$ , either with time or with the gravitational potential. A variation of  $\alpha$  would violate the EEP, and give support to recent many-dimensional cosmologies (Kaluza-Klein models, superstring theories) that attempt to unify gravity and other fundamental forces ([27–29]). Two types of tests of the stability of  $\alpha$  are being performed : at the cosmological and at the laboratory scale. An example of cosmological measurement is the Oklo test. This test analyses the isotope ratios  $^{149}\text{Sm}/^{147}\text{Sm}$  in the natural uranium fission reaction that took place around  $1.8 \cdot 10^9$  years ago (corresponding to a redshift  $z \approx 0.1$ ) at the present day site of the Oklo mine in Gabon, West Africa. Recent analysis of the Oklo data [30] has shown that:

$$-0.9 \cdot 10^{-7} \leq (\alpha_{\text{Oklo}} - \alpha_{\text{now}})/\alpha_{\text{now}} \leq 1.2 \cdot 10^{-7} \quad (4)$$

so that, integrating over  $1.8 \cdot 10^9$  years, one obtains:

$$|\dot{\alpha}/\alpha| \leq 5 \cdot 10^{-17} \text{ yr}^{-1} \quad (5)$$

In a similar way, astrophysical methods make it possible to estimate  $\alpha$  at earlier evolutionary phases of the Universe and determine  $|\dot{\alpha}/\alpha|$  as a function of redshift  $z$  (i.e. cosmological time), by making spectroscopic observations of gas clouds against background quasars. Extensive analysis has been carried out by various groups, measuring the relativistic fine-structure splitting of alkali-type resonance doublets. This method is based on the fact that the separation between lines within one multiplet is proportional to  $\alpha^2$ . Measuring the doublet separation in an absorption system and comparing with laboratory values, one can estimate the difference between  $\alpha$  at the epoch  $z$  and the present value. D. A. Varshalovich *et al.* [31] focused on the analysis of 3 different Si IV doublets absorption spectra with a redshift  $z \approx 3$ , paying special attention to the non-linearities in the dispersion curves of the echelle spectrograph used for the observations. Their analysis leads to an upper bound, at the  $2\sigma$  level:

$$|\Delta\alpha/\alpha| \leq 1.6 \cdot 10^{-4} \quad (6)$$

and, averaged over  $10^{10}$  years,

$$|\dot{\alpha}/\alpha| \leq 1.6 \cdot 10^{-14} \text{ yr}^{-1} \quad (7)$$

J. K. Webb *et al.* [32, 33] recently analysed Mg II and Fe II doublets absorption spectra emitted by 25 quasars, thus spanning a wide range of epochs ( $0.6 < z < 1.6$ ). Their measurements display a clear departure from zero at the  $3\sigma$  level, when considering the sample as a whole:

$$|\Delta\alpha/\alpha| = (-1.09 \pm 0.36) \cdot 10^{-5} \quad (8)$$

However, the  $0.6 < z < 1.0$  points alone show no significant trend:

$$|\Delta\alpha/\alpha| = (-0.17 \pm 0.39) \cdot 10^{-5} \quad (9)$$

These results make the issue of the fine structure constant temporal variation particularly acute.

As noted in [34, 35], laboratory measurements based on clock comparisons contrast with cosmological measurements, because they are repeatable and span over monthly to yearly durations ( $z \ll 1$ ). They thus provide complementary information to the cosmological determinations. These clock comparisons involve ultrastable oscillators of different compositions such as superconducting cavities vs H-maser or Cs hyperfine structure transition (case (i)) [34], or atomic clocks with different species (case (ii)): Mg fine structure transition vs Cs hyperfine transition [36], Hg<sup>+</sup> ion frequency standard vs H-maser [35]. In case (i), tests rely on the fact that the cavity frequency is proportional to  $\alpha$  while the H-maser or Cs clock transition is proportional to  $\alpha^2$  (at first order). In case (ii), the method is based on the increasing importance of Casimir relativistic contribution to the hyperfine energy splitting as atomic number  $Z$  increases in the group I alkali elements and alkali-like ions [35, 37]. A temporal variation of the ratio of the hyperfine energies of different alkali would thus provide a signature of the temporal variation of  $\alpha$ . Prestage *et al.* [35] derived an upper bound for  $|\dot{\alpha}/\alpha|$  from the comparison of Hg<sup>+</sup> vs H-maser:

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\nu_{\text{Hg}^+}}{\nu_{\text{H}}} \right) = +2.2 \cdot |\dot{\alpha}/\alpha| \quad (10)$$

and:

$$|\dot{\alpha}/\alpha| \leq 3.7 \cdot 10^{-14} \text{ yr}^{-1} \quad (11)$$

#### 4.2. Comparisons between <sup>87</sup>Rb and <sup>133</sup>Cs fountains

With our two Cs fountains and one Rb fountain in operation, we can compare Cs and Rb hyperfine frequencies in time, and search for a possible temporal variation of  $\alpha$ . Since 1998, three campaigns of measurements of the <sup>87</sup>Rb absolute frequency have been performed with reference to the Cs fountain. During each campaign, several parameters such as the launch height of the atomic cloud in the fountain, the microwave power, and the magnetic field have been

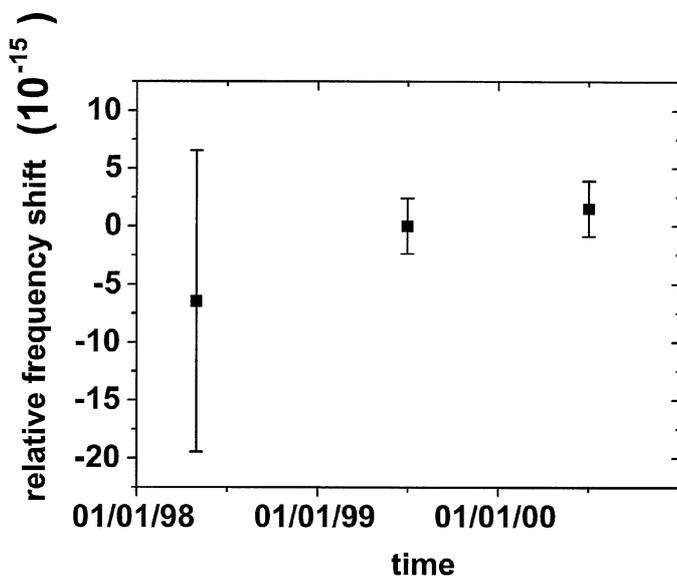


Fig. 6. Measured <sup>87</sup>Rb frequencies referenced to the <sup>133</sup>Cs fountain FO1. The measurement in April 1999 is 6834682610.904333 Hz. The errors bars represent the combined inaccuracies of <sup>87</sup>Rb and <sup>133</sup>Cs fountains.

varied. The accuracy budget of the Rb fountain was thus re-evaluated each time. Each frequency measurement was corrected for systematic shifts. The obtained values were then binned, giving one frequency data point for each campaign. In Fig. 6, we have plotted the relative frequency shift  $(\frac{\Delta\nu}{\nu})_{\text{Rb}}$ , where  $(\Delta\nu)_{\text{Rb}} = (\nu(t) - \nu(t_0))$ , versus time. Here,  $\nu(t)$  accounts for the frequency measurement at time  $t$ .  $t_0$  corresponds arbitrarily to our second campaign (April 1999). A linear fit to the data points over two years leads to:

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\nu_{\text{Rb}}}{\nu_{\text{Cs}}} \right) = (1.9 \pm 3.1) \cdot 10^{-15} \text{ yr}^{-1}. \quad (12)$$

The  $3.1 \cdot 10^{-15}$  uncertainty is the quadratic sum of the accuracy of the Rb fountain ( $1.4 \cdot 10^{-15}$ ), the accuracy of the Cs fountain ( $1.1 \cdot 10^{-15}$ ), and of the statistical noise in the frequency comparison ( $2.5 \cdot 10^{-15}$ ). This uncertainty of  $3.1 \cdot 10^{-15}$  represents a 20-fold improvement in the accuracy of long term clock frequency comparisons over previous work [35].

In the interpretation of these results, we first assume, as in [35], that there is no time dependence of the <sup>133</sup>Cs and <sup>87</sup>Rb nuclear magnetic moments. Then, all possible drift of the hyperfine energy ratio  $\nu_{\text{Rb}}/\nu_{\text{Cs}}$  can be attributed to the Casimir relativistic correction  $F_{\text{rel}}(\alpha Z)$ . Under this assumption, we obtain:

$$|\dot{\alpha}/\alpha| = (4.2 \pm 6.9) \cdot 10^{-15} \text{ yr}^{-1} \quad (13)$$

an improvement by a factor 5 over the previous H-maser-Hg<sup>+</sup> comparison [35]. Conversely, as pointed out by S. Karshenboim [37], our measurements can also set an upper limit to the time variation of the proton magnetic moment  $g_p$ , if we now assume no time variation of  $\alpha$ . This test is then 4 times more sensitive than the test over  $\alpha$ , and we find:

$$\left| \frac{\dot{g}_p}{g_p} \right| = (9.5 \pm 16) \cdot 10^{-16} \text{ yr}^{-1}. \quad (14)$$

Of course any combination of these two extreme assumptions is possible and more tests with different alkali and alkali-like atoms will severely constrain these limits in the future.

#### 5. ACES: atomic clock ensemble in space

ACES is a space mission which has been selected by the European Space Agency (ESA) to fly on the international space station (ISS) in 2004 [38]. ACES consists of two clocks, a cold atom clock (PHARAO) and a hydrogen maser (SHM, Neuchâtel Observatory), together with microwave and optical links for time and frequency transfer to ground users. These equipments will fit on a nadir oriented express pallet of dimensions 863 · 1168 · 1240 mm. The total mass will not exceed 225 kg and the electric power 500 Watts (Fig. 7).

Because micro-gravity allows long interaction times between the atoms and the microwave field and because the atomic velocity is smaller than in earth fountains and constant, we expect an excellent accuracy for a cold atom space clock [10, 11, 39]. The specified frequency stability of PHARAO for ACES is better than  $1 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$ . Averaged over one day, this stability should be  $3 \cdot 10^{-16}$ . Its projected accuracy is  $1 \cdot 10^{-16}$ .



Fig. 7. Mock-up of the ACES platform.

Scientific objectives of ACES also include measurement of the gravitational red-shift with a 25-fold improvement over the Gravity Probe A mission of Vessot *et al.* [40], a better test of the isotropy of speed of light and a search for a possible drift of the fine structure constant  $\alpha$ . Finally, with the time transfer equipments, ACES will allow synchronization of time scales of distant ground laboratories with 30 ps accuracy and frequency comparisons with  $10^{-16}$  accuracy. Similar space clock projects are also under development in the USA, PARCS [41] and RACE [42].

## 6. Prospects

Microwave frequency standards using fountains are now in their maturity; a frequency stability of  $6 \cdot 10^{-16}$  has been measured and the present accuracy is  $1 \cdot 10^{-15}$ . Operating permanently with an SCO as interrogation oscillator, the fountain frequency stability should enter into the low  $10^{-16}$  range in the reasonable averaging time of one day. The two dominant terms in the present accuracy budget are the blackbody radiation shift and the collisional shift. The latter prevents the use of large number of atoms, unless more complicated techniques such as juggling or cw fountains are used. Calculations show that the cavity phase shift is negligible at the  $10^{-15}$  level, but it must be carefully evaluated when asking for a one order of magnitude gain. Rb fountains, because of the strongly reduced collisional shift are likely to push the accuracy further, i.e. in the  $10^{-17}$  range. Fountains now operate at the fundamental quantum limit for uncorrelated particles. An attractive line of research is to apply the recently proposed spin squeezing techniques to improve the frequency stability beyond the projection noise limit proportional to  $1/\sqrt{N_{\text{at}}}$  [43–45]. A factor of  $1/\sqrt{N_{\text{at}}}$  can ultimately be gained.

With their relative simplicity, fountain devices compete favorably with laser cooled trapped ion frequency standards. However, practically unlimited interaction times can be achieved with trapped charged particles. This is an advantage for increasing the quality factor. On the other hand, ions interact much more by Coulomb repulsion than neutrals and traps with a single ion (or a small number) must be used [2]. This is then made at the expense of signal to noise

ratio hence of short term stability, even if quantum limited detection is implemented using the quantum jump method.

Microwave cold atom standards ultimately will be limited by the quality factor of the atomic line. Very narrow transitions in the optical domain offer attractive possibilities for fountains with neutrals [46]. A prominent example is the  $1s - 2s$  transition of hydrogen [47–49], measured recently with a frequency resolution of  $1.8 \cdot 10^{-14}$  by comparison with the PHARAO transportable fountain [3]. Alkali-earth atoms are good candidates since they have already been laser cooled and possess forbidden transitions in the visible domain. Progress with laser cooled Ca, Mg and Sr using intercombination lines has been spectacular [4, 50–53]. All these frequency standards, with ions or neutrals, require ultra-stable laser sources to interrogate these narrow lines and a recent breakthrough has been made by the NIST Boulder group measuring sub-Hertz laser linewidth in the visible range [54]. In addition, the recent progress on frequency combs using femtosecond lasers opens new possibilities for comparing microwave and optical frequency standards at  $10^{-16}$  or below [49, 55, 56].

These atomic frequency standards can already be compared at  $1 \cdot 10^{-15}$  using the transportable PHARAO device. Frequency comparisons of distant clocks using satellite time transfer, GPS-phase or two way techniques, are presently at the level of  $\sim 3 \cdot 10^{-15}$  for an averaging time of  $2 \cdot 10^4$  s [57] and  $\sim 2 \cdot 10^{-15}$  for one day [58]. Global comparisons between fountains will improve the quality of the TAI (Temps Atomique International). In fine, these high performance frequency standards will allow new tests in fundamental physics as well as new applications in navigation, positioning and geodesy.

## Acknowledgments

We acknowledge fruitful discussions with Y. Castin, C. Cohen-Tannoudji, J. Dalibard, G. Shlyapnikov and the ENS group. We are thankful to A. Gérard, M. Lours, M. Dequin, L. Volodimer, P. Petit and to the SERT for technical support. Work supported in part by BNM, CNES, and CNRS. BNM-LPTF and Laboratoire Kastler Brossel are Unités Associées au CNRS, UMR 8630 and UMR 8552.

## References

- Galluzzi, P., this volume
- Berkeland, D., Miller, J., Bergquist, J., Itano, W. and Wineland, D., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2089 (1998).
- Niering, M. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5496 (2000).
- Riehle, F. *et al.*, *IEEE Trans. Inst. Meas.* **48**, 608 (1999).
- Kasevich, M., Riis, E., Chu, S. and de Voe, R., *Phys. Rev. Lett.* **63**, 612 (1989).
- Clairon, A., Salomon, C., Guellati, S. and Phillips, W., *Europhys. Lett.* **16**, 165 (1991).
- Santarelli, G. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82(23)**, 4619 (1999).
- Fertig, C. and Gibble, K., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1622 (2000).
- Sortais, Y. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* in press, scheduled 09 oct. 2000.
- Clairon, A. *et al.*, in Proc. 6th European Frequency and Time Forum, ESA: **SP-340**, pp. 27–33 (1992).
- Lounis, B., Reichel, J. and Salomon, C., *C.R. Acad. Sci. (Paris)*, **316(2)**, 739 (1993).
- Santarelli, G. *et al.*, *IEEE Trans. Ultr. Ferr. Freq. Contr.*, **45**, 887 (1998).
- Luiten, A., Mann, A., Costa, M. and Blair, D., *IEEE Trans. Instr. Meas.*, **44**, 132 (1995).
- Wineland, D., Itano, W., Bergquist, J. and Walls, F., in Proc. 35th Ann. Freq. Contr. Symp. (1981).

15. Itano, W. *et al.*, Phys. Rev. A. **47**, 3554 (1993).
16. Dick, G., in Proc. of Precise Time and Time Interval, pp. 133–147, Redondo Beach (1987).
17. Tjolkner, R., Prestage, J. and Maleki, L., in J. Bergquist ed., Proc. of 5th Symp. on Freq. Stand. and Metr. (World Scientific, Singapore 1996).
18. Fisk, P., Sellars, M., Lawn, M. and Coles, C., *ibid.*
19. Clairon, A. *et al.*, IEEE Trans. Instr. Meas. **44**, 128 (1995).
20. Kokkelmans, B., Verhaar, B., Gibble, K. and Heinzen, D., Phys. Rev. A. **56**, R4389 (1997).
21. Bize, S. *et al.*, Europhys. Lett. **45**, 558 (1999).
22. Vanier, J. and Audoin, C., “The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards”, (Bristol and Philadelphia: Adam Hilger, 1989).
23. Fertig, C. and Gibble, K., IEEE Trans. Instrum. Meas. **48**, 520 (1999).
24. In Fig. (1) we have rescaled the data to a fixed  $\Delta N = 3.5 \cdot 10^7$ . During the 6 month data acquisition,  $\Delta N$  typically fluctuated by 20%.
25. To clarify Fig. (5i), we represent, in place of individual measurements, the weighted average of 10 of them performed at very similar densities ( $1.5(2) \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$ ).
26. Williams, C. *et al.*, private communication.
27. Damour, T. and Polyakov, A., Nucl. Phys. **B423**, 532 (1994).
28. Wu, Y. and Wang, Z., Phys. Rev. Lett. **57**, 1978 (1986).
29. Marciano, W., Phys. Rev. Lett. **52**, 489 (1984).
30. Damour, T. and Dyson, F., Nucl. Phys. **B480**, 37 (1996).
31. Varshalovich, D., Panchuk, V. and Ivanchik, A., Astron. Lett. **22**, 6 (1996).
32. Webb, J., Flambaum, V., Churchill, C., Drinkwater, M. and Barrow, J., Phys. Rev. Lett. **82(5)**, 884 (1999).
33. Flambaum, V. *et al.*, this volume.
34. Turneaure, J., Will, C., Farrel, B., Mattison, E. and Vessot, R., Phys. Rev. D, **27**, 1705 (1983).
35. Prestage, J., Tjoelker, R. and Maleki, L., Phys. Rev. Lett., **74**, 3511 (1995).
36. Godone, A., Novero, C., Tavella, P. and Rahimullah, K., Phys. Rev. Lett. **71**, 2364 (1993).
37. Karshenboim, S., this volume and submitted to Can. J. Physics.
38. Salomon, C. and Veillet, C., in Proc. on “Space Station Utilisation”, ESA Symposium, **SP-385**, 295 (1996).
39. Laurent, P. *et al.*, Euro. Phys. J. D, **3**, 201 (1998).
40. Vessot, R. *et al.*, Phys. Rev. Lett., **45**, 2081 (1980)
41. Robinson, H. *et al.*, in Proc. IEEE Int. Freq. Contr. Symp., pp. 37–40 (1998)
42. Gibble, K., *ibid.*, pp. 41–45.
43. Wineland, D., Bollinger, J., Itano, W., Moore, F. and Heinzen, D., Phys. Rev. A **46**, 6797 (1992).
44. Kuzmich A., Mølmer K., and Polzik E., Phys. Rev. Lett. **79**, 4782 (1997).
45. Sorensen, J., Hald, J., and Polzik, E., Phys. Rev. Lett. **80**, 3487 (1998).
46. Hall, J. and Zhu, M., J. Opt. Soc. A. B, **6**, 2194 (1989).
47. Beausoleil, G. and Hansch, T., Phys. Rev. A, **33**, 1661 (1986).
48. Udem, T. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2646 (1997).
49. Udem, T. *et al.*, in Proc. Opt. Freq. Synth. and Metr. Symp., (Springer Verlag 2000).
50. Hollberg, L. *et al.*, *ibid.*
51. Ruschewitz, F. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3173 (1998).
52. Vogel, K., Dinneen T., Gallagher A. and Hall J., IEEE Trans. Instr. Meas. **48**, 618 (1999).
53. Katori, H., Ido, T., Isoya, Y. and Kuwata-Gonokami, M., Phys. Rev. Lett. **82**, 1116 (1999).
54. Young, B., Cruz, F., Itano, W. and Bergquist, J., Phys. Rev. Lett. **82**, 3799 (1999).
55. Diddams, S. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 5102 (2000).
56. Luiten, A. *et al.*, in Proc. Opt. Freq. Synth. Metr. Symp., Springer-Verlag (2000).
57. Petit, G., Thomas, C., Jiang, Z., Urich, P. and Taris, F., IEEE Trans. Ultr. Ferr. Freq. Contr. **46**, 941 (1999).
58. Larson, K. and Levine, J., in Proc. IEEE Int. Contr. Symp., p. 292 (1998).

# Bibliographie

- [1] 13<sup>e</sup> Conférence Générale des Poids et Mesures 1967-1968 "Résolution 1 ; CR, 103", et *Metrologia*, vol. 4, p. 43, 1968.
- [2] P. Laurent, P. Lemonde, G. Santarelli, M. Abgrall, J. Kitching, Y. Sortais, S. Bize, M. Santos, C. Nicolas, S. Zhang, G. Schehr, A. Clairon, A. Mann, A. Luiten, S. Chang, and C. Salomon, "Cold atom clocks on earth and in space," in *Proc. 14<sup>th</sup> Int. Conf. on Laser Spectroscopy*, (Innsbruck, Austria), 1999.
- [3] P. Lemonde, P. Laurent, G. Santarelli, M. Abgrall, Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, S. Zhang, A. Clairon, N. Dimarcq, P. Petit, A. Mann, A. Luiten, S. Chang, and C. Salomon, "Cold atom clocks on earth and in space," in *Topics in Applied Physics*, *Frequency measurement and control : advanced techniques and future trends*, (pages 131-152, Springer), 2001.
- [4] S. Bize, Y. Sortais, M. Angrall, S. Zhang, D. Calonico, C. Mandache, P. Lemonde, P. Laurent, G. Santarelli, C. Salomon, and A. Clairon, "Rb and Cs fountains : recent results," in *Proc. of 6<sup>th</sup> Symposium on Frequency Standards and Metrology*, (St Andrews, Scotland), 9-14 september 2001.
- [5] C. Cohen-Tannoudji, S. Chu, and W. Phillips, "Nobel lectures," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 70, pp. 685–741, 1998.
- [6] K. Gibble and S. Chu, "Future slow-atom frequency standards," *Metrologia*, vol. 29, p. 201, 1992.
- [7] S. Ghezali, P. Laurent, S. Lea, and A. Clairon, "An experimental study of the spin-exchange frequency shift in a laser cooled cesium fountain standard," *Europhys. Lett.*, vol. 36, no. 1, p. 25, 1996.
- [8] P. J. Leo, P. S. Julienne, F. H. Mies, and C. J. Williams, "Collisional frequency shifts in <sup>133</sup>Cs fountain clocks," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 86, no. 17, p. 3743, 2001.
- [9] G. Santarelli, P. Laurent, P. Lemonde, A. Clairon, A. G. Mann, S. Chang, A. N. Luiten, and C. Salomon, "Quantum projection noise in an atomic fountain : A high stability cesium frequency standard," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, p. 4619, june 1999.
- [10] R. Legere and K. Gibble, "Quantum scattering in a juggling atomic fountain," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, p. 5780, 1998.
- [11] P. Berthoud, A. Fretel, A. Joyet, G. Duddle, and P. Thomann, "Toward a primary frequency standard based on a continuous fountain of laser cooled cesium atoms," *IEEE Trans. on Instr. and Meas.*, vol. 48, p. 516, 1999.

- [12] S. Kokkelmans, B. Verhaar, K. Gibble, and D. Heinzen, "Predictions for laser cooled Rb clocks," *Phys. Rev. A.*, vol. 56, p. R4389, 1997.
- [13] J. R. Gardner, R. A. Cline, J. D. Miller, D. J. Heinzen, H. M. J. M. Boesten, and B. J. Verhaar, "Collisions of doubly-polarized, ultracold  $^{85}\text{Rb}$  atoms," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, p. 3764, 1995.
- [14] H. M. J. M. Boesten, C. C. Tsai, J. R. Gardner, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar, "Observation of a shape resonance in the collision of two cold  $^{87}\text{Rb}$  atoms," *Phys. Rev. A.*, vol. 55, p. 636, 1997.
- [15] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, "Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, p. 586, 1997.
- [16] C. C. Tsai, R. S. Freeland, J. M. Vogels, H. M. J. M. Boesten, B. J. Verhaar, and D. J. Heinzen, "Two-color photoassociation spectroscopy of ground state  $\text{Rb}_2$ ," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 1245, 1997.
- [17] T. Damour, "Gravitation and experiment," in *Proc. of the LVII<sup>th</sup> Les Houches Summer School, July 1992*, edited by B. Julia and J. Zinn-Justin, North-Holland, (Amsterdam), 1993.
- [18] T. Damour and A. Polyakov, "The string dilaton and a least coupling principle," *Nucl. Phys.*, vol. B423, p. 532, 1994.
- [19] J. Prestage, R. Tjoelker, and L. Maleki, "Atomic clocks and variations of the fine structure constant," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, p. 3511, 1995.
- [20] Y. Wu and Z. Wang, "Time variation of Newton's gravitational constant in superstring theories," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, p. 1978, 1986.
- [21] F. Dyson, *The fundamental constants and their time variation*, in "Aspects of quantum theory", p. 213-236. Cambridge : Cambridge University Press, A. Salam and E. P. Wigner ed., 1972.
- [22] F. Dyson, *Current Trends in the Theory of Fields*. New York : J. Lannutti and P. Williams, american institute of physics ed., 1978.
- [23] A. I. Shlyakhter, "Direct test for the constancy of fundamental nuclear constants," *Nature*, vol. 264, p. 340, 1976.
- [24] A. I. Shlyakhter, "Direct test for the constancy of fundamental nuclear constants using the Oklo natural reactor," in *Preprint n°260*, (Leningrad Nuclear Physics Institute, Leningrad), 1997.
- [25] A. I. Shlyakhter, "Direct test of the time-independence of fundamental nuclear constants using the Oklo natural reactor," *ATOMKIRreport*, vol. A/1, 1983.
- [26] T. Damour and F. Dyson, "The Oklo bound on the time variation of the fine-structure constant revisited," *Nucl. Phys.*, vol. B480, p. 37, 1996.
- [27] Y. F. *et al* *Nucl. Phys.*, vol. B573, p. 377, 2000.
- [28] J. Webb, M. Murphy, V. Flambaum, V. Dzuba, J. Barrow, C. Churchill, J. Prochaska, and M. Drinkwater, "Further evidence for cosmological evolution of the fine structure constant," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, no. 9, p. 091301, 2001.
- [29] D. A. Varshalovich, V. E. Panchuk, and A. V. Ivanchik, "Absorption systems in the spectra of the quasars HS 1946+76, S5 0014+81, and S4 0636+68 : New bounds on cosmological change in the fine-structure constant," *Astr. Lett.*, vol. 22, p. 6, 1996.

- [30] S. Bize, “Tests fondamentaux à l’aide d’horloges à atomes froids de rubidium et de césium”, *Thèse de doctorat de l’université Paris VI*, 2001.
- [31] N. Ramsey, “A molecular beam resonance method with separated oscillating fields,” *Phys. Rev.*, vol. 78, p. 695, 1950.
- [32] J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*. Adam Hilger, 1989.
- [33] N. F. Ramsey, *Molecular beams*. Oxford-Clarendon Press, 1956.
- [34] M. Kasevich, E. Riis, S. Chu, and R. de Voe, “RF spectroscopy in an atomic fountain,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 63, p. 612, 1989.
- [35] A. Clairon, C. Salomon, S. Guellati, and W. Phillips, “Ramsey resonance in a Zacharias fountain,” *Europhys. Lett.*, vol. 16, p. 165, 1991.
- [36] A. L. *et. al.*, *Frequency Measurement and control; advanced techniques and future trends*. Springer, 2000.
- [37] D. Allan *Proc. IEEE*, vol. 54, p. 221, 1966.
- [38] C. Cohen-Tannoudi, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique Quantique*, vol. 1. Hermann, 1992.
- [39] W. Lee, J. Shirley, J. Lowe, and R. Drullinger, “The accuracy evaluation of NIST-7,” *IEEE Trans. on Inst. and Meas.*, vol. 44, p. 120, 1995.
- [40] A. Bauch, B. Fischer, T. Heindorff, and R. Schröder, “Performance of the PTB reconstructed primary clock Cs1 and an estimate of its current uncertainty,” *Metrologia*, vol. 35, 1998.
- [41] A. Makdissi and E. de Clercq, “Evaluation of the accuracy of the optically pumped caesium beam primary frequency standard of BNM-LPTF,” *to appear in Metrologia*.
- [42] S. Weyers, U. Hübner, B. Fischer, R. Schröder, C. Tamm, and A. Bauch, “Investigation of contributions to the stability and uncertainty of the PTB atomic caesium fountain CSF1,” in *Proc. of 14<sup>th</sup> European Frequency and Time Forum*, (Torino, Italy), 2000.
- [43] Y. Sortais, S. Bize, M. Abgrall, S. Zhang, C. Nicolas, C. Mandache, P. Lemonde, P. Laurent, G. Santarelli, N. Dimarcq, P. Petit, A. Clairon, A. Mann, A. Luiten, S. Chang, and C. Salomon, “Cold atoms clocks,” *Physica Scripta*, vol. T95, pp. 50–57, 2001.
- [44] *Atom Interferometry*. P. Berman ed, Academic Press, 1997.
- [45] C. J. Bordé, “Quantum theory of clocks and of gravitational sensors using atom interferometry,” in *Laser Spectroscopy*, R. Blatt, J. Eschner, D. Leibfried and F. Schmidt-Kaler eds, *World Scientific*, pp. 160–169, 1999.
- [46] C. J. Bordé, “Theoretical tools for atom optics and interferometry,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 2, no. Série IV, pp. 509–530, 2001.
- [47] C. J. Bordé, J. C. Houard, and A. Karasiewicz, “Relativistic phase shifts for dirac particles interacting with weak gravitational fields in matter-wave interferometers,” in *Gyros, Clocks and Interferometers : testing relativistic gravity in space*, C. Lämmerzahl, C.W.F. Everitt, F.W. Hehl eds, *Springer Verlag*, pp. 403–438, 2001.
- [48] U. Sterr, K. Sengstock, W. Ertmer, F. Riehle, and J. Helmcke, “Atom interferometry based in separated light fields,” in [44].

- [49] C. J. Bordé, N. Courtier, F. du Burck, A. N. Goncharov, and M. Gorlicki, "Molecular interferometry experiments," *Phys. Lett. A*, vol. 188, pp. 187–197, 1994.
- [50] U. Sterr, K. Sengstock, J. H. Müller, D. Bettermann, and W. Ertmer, "The magnesium ramsey interferometer : applications and prospects," *Appl. Phys. B*, vol. 54, p. 341, 1992.
- [51] J. Ishikawa, F. Riehle, J. Helmcke, and C. J. Bordé, "Strong field effects incoherent saturation spectroscopy of atomic beams," *Phys. Rev. A.*, vol. 49, pp. 4794–4825, 1994.
- [52] P. Wolf, S. Bize, A. Clairon, A. Landragin, P. Laurent, P. Lemonde, and C. J. Bordé, "Recoil effects in microwave atomic frequency standards : preliminary results.," in *Proc. 2001 IEEE Int. Freq. Contr. Symposium*, (Seattle), 2001.
- [53] E. Simon, "Vers une stabilité et une exactitude de  $10^{-16}$  pour les horloges atomiques : le rayonnement de corps noir, la détection optique", *Thèse de doctorat de l'université Paris XI*, 1997.
- [54] W. M. Itano, L. L. Lewis, and D. J. Wineland, "Shift of the  $^2S_{1/2}$  hyperfine splittings due to blackbody radiation," *Phys. Rev. A.*, vol. 25, p. 1233, 1982.
- [55] Y.S.Domnin and V.G.Pal'chikov, "Higher-order stark effect and blackbody radiation shift in Cs," in *Proc. of 14<sup>th</sup> European Frequency and Time Forum*, (Torino, Italy), pp. 475–479, 2000.
- [56] Y.S.Domnin, V.G.Pal'chikov, and A. Novoselov, "Interactions blackbody radiation with Cs and Rb atoms : applications to atomic frequency standards," in *Proc. of 15<sup>th</sup> European Frequency and Time Forum*, (Neuchâtel, Switzerland), pp. 108–110, 2001.
- [57] A. Bauch and R. Schröder, "Experimental verification of the shift of the cesium hyperfine transition frequency due to blackbody radiation," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, p. 622, 1997.
- [58] J. R. Mowat, "Stark effect in alkali-metal ground-state hyperfine structure," *Phys. Rev. A*, vol. 5, p. 1059, 1972.
- [59] A. Khursheed, G. Vecchi, and A. D. Marchi, "Spatial variations of field polarization and phase in microwave cavities : application to the cesium fountain cavity," *IEEE Trans. on Ultr. Ferr. Freq. Contr.*, Mars 1996.
- [60] K. Gibble and S. Chu, "A laser cooled Cs frequency standard and a measurement of the frequency shift due to ultra-cold collisions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, p. 177, 1993.
- [61] S. Bize, Y. Sortais, C. Mandache, A. Clairon, and C. Salomon, "Cavity frequency pulling in cold atom fountains," *IEEE Trans. on Inst. and Meas.*, vol. 50, p. 503, 2001.
- [62] C. Audoin, Lacey, and L. S. Cutler, "Frequency offset due to spurious line in cesium beam standards," *IEEE Trans. on Inst. and Meas.*, vol. IM27, p. 325, 1978.
- [63] L. Cutler, C. Flory, R. Giffard, and A. de Marchi, "Frequency pulling by hyperfine  $\sigma$ -transitions in cesium beam atomic frequency standards," *J. Appl. Phys.*, vol. 69, p. 2780, 1991.

- [64] E. Majorana, "Atomi orientati in campo magnetico variabile," *Nuovo Cimento*, vol. 9, p. 43, 1932.
- [65] A. Bauch and R. Schröder, "Frequency shifts in a cesium atomic clock due to Majorana transitions," *Ann. Physik*, vol. 2, p. 421, 1993.
- [66] C. Cohen-Tannoudi, B. Diu, and F. Laloë, *Mécanique Quantique*, vol. 2. Hermann, 1992.
- [67] C. Cohen-Tannoudji, "Cours de physique atomique et moléculaire du Collège de France", 1998-1999.
- [68] E. van Kempen, S. Kokkelmans, D. Heinzen, and B. Verhaar, "Interisotope determination of ultracold rubidium interactions from three high-precision experiments," *submitted in Phys. Rev. Lett.*, 2001.
- [69] B. Smirnov and M. Chibisov *Sov. Phys. JETP*, vol. 21, p. 624, 1965.
- [70] P. Barchewitz, *Spectroscopie atomique et moléculaire*, vol. 2. Masson, 1971.
- [71] F. Mies *Phys. Rev. A*, vol. 7, p. 942, 1973.
- [72] H. Stoof, J. Koelman, and B. Verhaar, "Spin-exchange and dipole relaxation rates in atomic hydrogen : rigorous and simplified calculations," *Phys. Rev. B*, vol. 38, p. 4688, 1988.
- [73] A. Dalgarno and M. Rudge *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, vol. 286, p. 519, 1965.
- [74] C. Monroe, E. Cornell, C. Sackett, C. Myatt, and C. Wieman, "Measurement of Cs-Cs elastic scattering at  $T = 30 \mu K$ ," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, p. 414, 1993.
- [75] K. Davies, M. Mewes, M. Joffe, M. Andrews, and W. Ketterle, "Evaporative cooling of sodium atoms," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, p. 5202, 1995.
- [76] M. Arndt, M. Ben Dahan, D. Guéry-Odelin, M. Reynolds, and J. Dalibard, "Observation of a zero energy resonance in Cs-Cs collisions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 625, 1997.
- [77] W. Petrich, M. Anderson, J. Ensher, and E. Cornell, "Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, p. 3352, 1995.
- [78] J. Taylor, *Scattering theory*. New York : Wiley, 1972.
- [79] K. Gibble, S. Chang, and R. Legere, "Direct observation of s-wave atomic collisions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, p. 2666, 1995.
- [80] H. M. J. M. Boesten, A. Moerdijk, and B. J. Verhaar, "Dipolar decay in two recent Bose-Einstein condensation experiments," *Phys. Rev. A*, vol. 54, p. R29, 1996.
- [81] A. Moerdijk and B. J. Verhaar, "Collisional two- and three-body decay rates of dilute quantum gases at ultralow temperatures," *Phys. Rev. A*, vol. 53, p. R19, 1996.
- [82] F. Mies, C. Williams, P. Julienne, and M. Krauss, "Estimating bounds on collisional relaxation rates of spin-polarized  $^{87}\text{Rb}$  at ultracold temperatures," *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.*, vol. 101, p. 521, 1996.

- [83] E. Burt, R. Ghrist, C. Myatt, M. Holland, E. Cornell, and C. Wieman, "Coherence, correlations, and collisions : What one learns about Bose-Einstein condensates from their decay," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 337, 1997.
- [84] S. Kokkelmans, B. Verhaar, and K. Gibble, "Prospects for Bose-Einstein condensation in cesium," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, p. 951, 1998.
- [85] P. Leo, E. Tiesinga, P. Julienne, D. Walter, S. Kasebeck, and T. Walker, "Elastic and inelastic collisions of cold spin-polarized  $^{133}\text{Cs}$  atoms," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, p. 1389, 1998.
- [86] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, G. Ferrari, and J. Dalibard, "Giant spin relaxation of an ultracold cesium gas," *Europhys. Lett.*, vol. 44, p. 25, 1998.
- [87] D. Guéry-Odelin, J. Söding, P. Desbiolles, and J. Dalibard, "Is Bose-Einstein condensation of atomic cesium possible?," *Europhys. Lett.*, vol. 44, p. 25, 1998.
- [88] J. D. Miller, R. A. Cline, and D. J. Heinzen, "Photoassociation spectrum of ultracold Rb atoms," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, p. 2204, 1993.
- [89] P. D. Lett, K. Helmerson, W. D. Phillips, L. P. Ratliff, S. L. Rolston, and M. E. Wagshul, "Spectroscopy of  $\text{Na}_2$  by photoassociation of laser-cooled Na," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, p. 2200, 1993.
- [90] P. Julienne and J. Vigué, "Cold collisions of ground- and excited-state alkali-metal atoms," *Phys. Rev. A.*, vol. 44, p. 4464, 1991.
- [91] H. M. J. M. Boesten, C. C. Tsai, B. J. Verhaar, and D. J. Heinzen, "Observation of a shape resonance in cold-atom scattering by pulsed photoassociation," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, p. 5194, december 1996.
- [92] J. Vogels, C. Tsai, R. Freeland, S. Kokkelmans, B. Verhaar, and D. Heinzen, "Prediction of Feshbach resonances in collisions of ultracold rubidium atoms," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, p. R1067, 1997.
- [93] J. M. Vogels, R. S. Freeland, C. C. Tsai, B. J. Verhaar, and D. J. Heinzen, "Coupled singlet-triplet analysis of two-color cold-atom photoassociation spectra," *Phys. Rev. A*, vol. 61, p. 043407, 2000.
- [94] P. Courteille, R. Freeland, D. Heinzen, F. vanAbeelen, and B. Verhaar, "Observation of a Feshbach resonance in cold atom scattering," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, p. 69, 1998.
- [95] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle *Nature*, vol. 392, p. 151, 1998.
- [96] F. D'Amico, S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, "Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases," *Rev. Mod. Phys.* 1, vol. 71, p. 463, 1999.
- [97] J. Roberts, N. Claussen, J. J. Burke, C. Greene, E. Cornell, and C. Wieman, "Resonant magnetic field control of elastic scattering in cold  $^{85}\text{Rb}$ ," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, p. 5109, 1998.
- [98] P. J. Leo, C. J. Williams, and P. S. Julienne, "Collision properties of ultracold  $^{133}\text{Cs}$  atoms," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 2721, 2000.
- [99] J. Roberts, J. J. Burke, N. Claussen, S. Cornish, E. Donley, and C. Wieman, "Improved characterization of elastic scattering near a Feshbach resonance in  $^{85}\text{Rb}$ ," *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 024702, 2001.

- [100] C. Chin, V. Vuletic, A. J. Kerman, and S. Chu, "High resolution Feshbach spectroscopy of cesium," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 2717, 2000.
- [101] M. Marinescu, H. R. Sadeghpour, and A. Dalgarno, "Dispersion coefficients for alkali-metal dimers," *Phys. Rev. A*, vol. 49, p. 982, 1994.
- [102] S. D. Gensemer, P. L. Gould, P. J. Leo, E. Tiesinga, and C. J. Williams, "Ultracold  $^{87}\text{Rb}$  ground-state hyperfine-changing collisions in the presence and absence of laser light," *Phys. Rev. A*, vol. 62, p. 030702, 2000.
- [103] M. R. Matthews, D. S. Hall, D. S. Jin, J. R. Ensher, C. E. Wieman, E. A. Cornell, F. Dalfovo, C. Minniti, and S. Stringari, "Dynamical response of a Bose-Einstein condensate to a discontinuous change in internal state," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, p. 243, July 1998.
- [104] J. Seto, R. L. Roy, J. Vergés, and C. Amiot *J. Chem. Phys.*, vol. 113, p. 3067, 2000.
- [105] R. W. *et al Science*, vol. 287, p. 1016, 2000.
- [106] J. J. Burke, J. Bohn, B. Esry, and C. Greene, "Impact of the  $^{87}\text{Rb}$  singlet scattering length on suppressing inelastic collisions," *Phys. Rev. A*, vol. 55, p. R2511, 1997.
- [107] P. S. Julienne, F. H. Mies, E. Tiesinga, and C. J. Williams, "Collisional stability of double Bose condensates," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, p. 1880, 1997.
- [108] S. J. J. M. F. Kokkelmans, H. M. J. M. Boesten, , and B. J. Verhaar, "Role of collisions in creation of overlapping Bose condensates," *Phys. Rev. A*, vol. 55, p. R1589, 1997.
- [109] N. R. Newbury, C. J. Myatt, and C. E. Wieman, "s-wave elastic collisions between cold ground-state  $^{87}\text{Rb}$  atoms," *Phys. Rev. A*, vol. 51, p. R2680, 1995.
- [110] B. Verhaar, K. Gibble, and S. Chu, "Cold collision properties derived from frequency shifts in a cesium fountain," *Phys. Rev. A*, vol. 48, p. R3429, 1993.
- [111] C. Drag, B. L. Tolra, B. T. Jampens, D. Comparat, M. Allegrini, A. Crubellier, and P. Pillet, "Photoassociative spectroscopy as a self-sufficient tool for the determination of the Cs triplet scattering length," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 1408, 2000.
- [112] B. Verhaar, J. Koelman, H. Stoof, O. Luiten, and S. Crampton, "Hyperfine contribution to spin-exchange frequency shift in the hydrogen maser," *Phys. Rev. A*, vol. 35, p. 3825, May 1987.
- [113] J. Koelman, S. Crampton, H. Stoof, O. Luiten, and B. Verhaar, "Spin-exchange frequency shifts in cryogenic and room-temperature hydrogen masers," *Phys. Rev. A*, vol. 38, p. 3535, 1988.
- [114] J. D.-R. C. Cohen-Tannoudi and G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*. Éditions du CNRS, 1996.
- [115] J. Dalibard, "Cours de DEA de physique quantique de l'Université Paris VI", 2001.
- [116] C. Williams, "entretien privé." Adresse : National Institute of Standards and Technology, 100 Bureau Drive, Gaithersburg, Maryland 20899-8423, USA.

- [117] C. Greene, “entretien privé.” Adresse : JILA and Department of Physics, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0440 USA.
- [118] S. Bize, Y. Sortais, M. Santos, C. Mandache, A. Clairon, and C. Salomon, “High-accuracy measurement of the  $^{87}\text{Rb}$  ground-state hyperfine splitting in an atomic fountain,” *Europhys. Lett.*, vol. 45, no. 5, p. 558, 1999.
- [119] G. Santarelli, “Contribution à la Réalisation d’une Fontaine atomique”, *Thèse de doctorat de l’université Paris VI*, 1996.
- [120] S. Ghezali, “Première évaluation de l’exactitude d’une fontaine d’atomes froids de césium à  $2 \times 10^{-15}$  et perspectives.”, *Thèse de doctorat de l’université Paris VI*, 1997.
- [121] P. Lemonde, “PHARAO : étude d’une horloge spatiale utilisant des atomes refroidis par laser ; réalisation d’un prototype.”, *Thèse de doctorat de l’université Paris VI*, 1997.
- [122] C. Salomon, J. Dalibard, W. Phillips, A. Clairon, and S. Guellati, “Laser cooling of cesium atoms below  $3 \mu\text{K}$ ,” *Europhys. Lett.*, vol. 12, p. 683, 1990.
- [123] Y. Castin, J. Dalibard, and C. Cohen-Tannoudji, *The limits of Sisyphus cooling*. ETS Editrice, Pisa, 1991. dans ‘Light Induced kinetic effects on atoms, ions and molecules’, dirigé par L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo et F. Strumia.
- [124] J. Dalibard, “Le rôle des fluctuations dans la dynamique d’un atome couplé au champ électromagnétique”, *Thèse de doctorat de l’Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)*, 1986.
- [125] G. D. Rovera, A. D. Marchi, and G. Santarelli, “A simple temperature controller for laser diodes,” in *Proc. of 5<sup>th</sup> European Frequency and Time Forum*, (Besançon, France), p. 456, 1991.
- [126] Y. Sortais, “Étude de diodes laser montées en cavité étendue; application au refroidissement d’atomes pour les horloges atomiques”, *Rapport de stage de fin d’étude de l’Ecole Supérieure d’Optique et de DEA d’Optique et Photonique de l’université Paris XI*, 1997.
- [127] M. Abgrall, “Évaluation de l’exactitude de la fontaine atomique PHARAO ; participation à l’étude de l’horloge spatiale PHARAO”, *Thèse de doctorat de l’université Paris VI*, 2002.
- [128] M. Niering, R. Holzwarth, J. Reichert, P. Pokasov, T. Udem, M. Weitz, T. W. Hänsch, P. Lemonde, G. Santarelli, M. Abgrall, P. Laurent, C. Salomon, and A. Clairon, “Measurement of the hydrogen 1S-2S transition frequency by phase coherent comparison with a microwave cesium fountain clock,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, p. 5496, 2000.
- [129] A. Makdissi, “Traitement de signal appliqué aux étalons primaires de fréquence : amélioration de leur exactitude et de leur stabilité”, *Thèse de doctorat de l’université Paris XI Orsay*, 1999.
- [130] C. Audoin, G. Santarelli, A. Makdissi, and A. Clairon, “Properties of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator,” *IEEE Trans. on Ultr., Ferr. and Freq. Contr.*, vol. 45, p. 877, 1998.
- [131] G. Dick, “Local oscillator induced instabilities in trapped ion frequency standards,” in *Proc. of 19th Precise Time and Time Interval*, (Redondo Beach), pp. 133–147, 1987.

- [132] G. Dick, J. D. Prestage, C. A. Greenhall, and L. Maleki, "Local oscillator induced degradation of medium-term stability in passive atomic frequency standards," in *Proc. of 22nd Precise Time and Time Interval*, pp. 487–508, 1990.
- [133] C. A. Greenhall, "Derivation of the long-term degradation of a pulsed atomic frequency standard from a control-loop model," *IEEE Trans. on Ultr., Ferr. and Freq. Contr.*, vol. 45, p. 895, 1998.
- [134] W. Itano, J. Bergquist, J. Bollinger, J. Gilligan, D. Heinzen, F. Moore, M. Raizen, and D. Wineland, "Quantum projection noise : Population fluctuations in two-level systems," *Phys. Rev. A.*, vol. 47, p. 3554, 1993.
- [135] D. Wineland, J. Bollinger, W. Itano, and D. Heinzen, "Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy," *Phys. Rev. A*, vol. 50, p. 67, 1994.
- [136] S. Bize, Y. Sortais, P. Lemonde, S. Zhang, P. Laurent, G. Santarelli, C. Salomon, and A. Clairon, "Interrogation oscillator noise rejection in the comparison of atomic fountains," *IEEE Trans. Ultr. Ferr. Freq. Contr.*, vol. 47, no. 5, p. 1253, 2000.
- [137] P. Lemonde, G. Santarelli, P. Laurent, F. P. D. Santos, A. Clairon, and C. Salomon, "The sensitivity function : a new tool for the evaluation of frequency shifts in atomic spectroscopy," in *Proc. of Frequency Control Symposium*, (Pasadena), 1998.
- [138] E. Simon, P. Laurent, and A. Clairon, "Measurement of the Stark shift of the Cs hyperfine splitting in an atomic fountain," *Phys. Rev. A.*, vol. 57, p. 436, 1998.
- [139] L. Essen, E. G. Hope, and D. Sutcliffe, "Hyperfine splitting of rubidium-87," *Nature*, vol. 189, p. 298, 1961.
- [140] S. Penselin, T. Moran, V. W. Cohen, and G. Winkler, "Hyperfine structure of the electronic ground states of  $^{85}\text{Rb}$  and  $^{87}\text{Rb}$ ," *Phys. Rev.*, vol. 127, p. 524, 1962.
- [141] M. Arditi and P. C erez, "Hyperfine structure separation of the ground state of  $^{87}\text{Rb}$  measured with an optically pumped atomic beam," *IEEE Trans. Instr. Meas.*, vol. IM-21, p. 391, 1972.
- [142] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> ed., 1992.
- [143] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. New York : Academic Press, 4<sup>th</sup> ed., 1965.
- [144] C. Fertig and K. Gibble, "Laser-cooled  $^{87}\text{Rb}$  clock," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 48, pp. 520–523, 1999.
- [145] N. Ramsey, "Resonance transitions induced by perturbations at two or more different frequencies," *Phys. Rev.*, vol. 100, p. 1191, 1955.
- [146] O. Morice, "Atomes refroidis par laser : du refroidissement sub-recul   la recherche d'effets quantiques collectifs", *Th ese de doctorat de l'Universit  Pierre et Marie Curie (Paris VI)*, 1995.
- [147] C. Fertig and K. Gibble, "Measurement and cancellation of the cold collision frequency shift in an  $^{87}\text{Rb}$  fountain clock," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 1622, 2000.

- [148] Y. Sortais, S. Bize, C. Nicolas, A. Clairon, C. Salomon, and C. Williams, "Cold collision frequency shifts in a  $^{87}\text{Rb}$  fountain," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 3117, 2000.
- [149] D. Kajfez and P. Guillon, *Dielectric Resonators*. 610 Washington Street, Dedham, MA 02026, USA : Artech House, 1986.
- [150] A. B. *et al*, "Majorana-Übergänge in Caesium-Atomstrahl-Frequenznormalen," *PTB-Bericht*, pp. 20–21, Februar 1986.
- [151] B. Boussert, G. Theobald, E. D. Clercq, and P. Cérez, "Study of frequency shifts in an atomic cesium clock due to microwave leakage of its ramsey cavity," *IEEE Trans. on Ultr., Ferr. and Freq. Contr.*, vol. 45, pp. 728–738, 1998.
- [152] K. Dorenwendt and A. Bauch, "Spurious microwave fields in caesium atomic beam frequency standards : symmetry considerations and model calculations," in *Proc. of 1999 Joint Meeting of the European Frequency and Time Forum and the IEEE International Frequency Control Symposium*, (Besançon, France), p. 57, 1999.
- [153] A. G. Mann, C. Sheng, and A. N. Luiten, "Cryogenic sapphire oscillator with exceptionally high frequency stability," *IEEE Trans. on Inst. and Meas.*, vol. 50, p. 519, 2001.
- [154] E. Tiesinga, B. Verhaar, H. Stoof, and D. van Bragt, "Spin exchange frequency shift in a cesium atomic fountain," *Phys. Rev. A*, vol. 45, p. R2671, 1992.
- [155] M. D. Barrett, J. A. Sauer, and M. S. Chapman, "All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 010404, 2001.
- [156] M. Bahoura, "Influence du bruit de phase d'une diode laser sur les performances ultimes de son asservissement en fréquence sur une résonance optique", *Thèse de doctorat de l'Université Paris XI*, 1998.
- [157] D. Halford, "Infrared microwave frequency synthesis design : some relevant conceptual noise aspects," in *Frequency standards metrology seminar*, (Laval, Quebec), 1971.

## Résumé

La définition de la seconde est basée sur l'atome de césium. A ce jour, les meilleures horloges sont des fontaines à atomes froids de césium. Elles réalisent la seconde avec une exactitude de  $10^{-15}$ . Leur stabilité, limitée de manière ultime par le bruit de projection quantique, vaut typiquement  $6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  pour  $4 \times 10^5$  atomes détectés, et atteint  $6 \times 10^{-16}$  en 3 heures d'intégration. Dans ces conditions, les interactions entre atomes froids déplacent la fréquence de l'horloge d'environ  $3 \times 10^{-14}$ . Ce déplacement est techniquement difficile à corriger au niveau de quelques  $10^{-16}$ . Ce travail de thèse montre que l'utilisation du  $^{87}\text{Rb}$  est une alternative intéressante au Cs, puisque son déplacement collisionnel est près de 100 fois plus petit. Dans un premier temps, nous caractérisons les performances de la fontaine à  $^{87}\text{Rb}$  construite pendant ce travail de thèse. Puis, nous modélisons les effets dépendant du nombre d'atomes dans les fontaines : le déplacement collisionnel et l'entraînement de fréquence par la cavité micro-onde. Ces deux effets sont mesurés simultanément par une méthode différentielle. La modélisation de l'évolution du nuage atomique dans la fontaine permet de confronter nos mesures avec les prédictions théoriques sur les longueurs de diffusion en onde "s". Par ailleurs, la comparaison des fréquences hyperfines du Rb et du Cs dans des fontaines indépendantes nous a permis de réaliser un test de la dérive de la constante de structure fine  $\alpha$  au niveau de  $7 \times 10^{-15} \text{.an}^{-1}$ . Afin d'améliorer ce test, nous avons construit une fontaine pouvant fonctionner simultanément au Rb et au Cs. Les améliorations techniques apportées sur cette horloge, conjointement à une nouvelle procédure de mesure du déplacement collisionnel du Cs, devraient permettre d'explorer la gamme d'exactitude des  $10^{-16}$  pour ces deux alcalins.

## Mots clefs

Métrologie temps-fréquence, fontaines atomiques, refroidissement laser, collisions froides, rubidium, césium, constante de structure fine

## Abstract

The definition of the second is based on the cesium atom. To date the best clocks are cold cesium atom fountains. They realize the second with an accuracy of  $10^{-15}$ . Their stability, ultimately limited by quantum projection noise, is typically  $6 \times 10^{-14} \tau^{-1/2}$  for  $4 \times 10^5$  detected atoms, and reaches  $6 \times 10^{-16}$  after 3 hours of integration. In these conditions the interactions between cold atoms shift the clock frequency by about  $3 \times 10^{-14}$ . Technically it is difficult to correct this shift at the  $10^{-16}$  level. This PhD report shows that  $^{87}\text{Rb}$  is an interesting alternative to Cs, since its collisional shift is nearly 100 times lower. Firstly we characterize the performance of the  $^{87}\text{Rb}$  fountain that we have constructed during this thesis. Then we model the atom number dependent effects in fountains : the collisional shift and the frequency pulling by the microwave cavity. Both effects are measured simultaneously using a differential method. Modeling the atomic cloud evolution in the fountain allows us to compare our measurements with the theoretical predictions for the s-wave scattering lengths. Comparing the hyperfine frequencies of Rb and Cs in independent fountains allows us to test the drift of the fine structure constant  $\alpha$  at the level of  $7 \times 10^{-15} \text{ year}^{-1}$ . In order to improve this test we have constructed a dual fountain that can operate with both Rb and Cs. The technical improvements made to this fountain, together with a new procedure for measuring the collisional shift of Cs, should allow us to explore the  $10^{-16}$  range of accuracy for both alkalis.

## Key words

Time and frequency metrology, atomic fountains, laser cooling, cold atom collisions, rubidium, cesium, fine structure constant