



Étude de la stabilité de systèmes dynamiques quantiques

Olivier Bourget

► To cite this version:

Olivier Bourget. Étude de la stabilité de systèmes dynamiques quantiques. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2002. Français. NNT : . tel-00002171

HAL Id: tel-00002171

<https://theses.hal.science/tel-00002171>

Submitted on 18 Dec 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Table des matières

Introduction	viii
1 Généralités	1
1.1 Critère principal	1
1.2 Interprétation géométrique	2
1.3 Une caractérisation dynamique de la composante absolument continue . . .	5
1.4 Opérateurs de permutation	7
1.5 Opérateurs unitaires multi-diagonaux	8
1.6 Quelques mots sur l'hamiltonien de Floquet	10
1.7 Remarques	11
2 Opérateurs frappés	13
2.1 An explicitly solvable model	14
2.2 Additional assumptions and results	16
2.3 Proof of Theorem 2.2.3	20
2.3.1 Preliminaries	20
2.3.2 A flavour of analytic number theory	21
2.3.3 Technicalities	22
2.4 Proofs of Theorems 2.2.4 and 2.2.5	27
2.4.1 Complementary tools	27
2.4.2 Proof of Theorem 2.2.5	29
2.4.3 Proof of Theorem 2.2.4	29
3 Sur un modèle de conduction électronique unidimensionnel	31
3.1 Construction de l'opérateur de monodromie	32
3.2 Quelques lemmes utiles	35
3.3 Les cas simples	36
3.3.1 Absence de transitions entre bandes	36
3.3.2 Absence de réflexion en bords de bandes	37
3.4 Etudes des fonctions propres généralisées	37
3.4.1 Principe général	37
3.4.2 Introduction du formalisme des matrices de transfert	38
3.5 Perspectives d'études	40
4 Exemples de constructions fondées sur des systèmes ergodiques	43
4.1 Hypothèses et résultats principaux	43
4.2 Préliminaires	44
4.2.1 Transformations et systèmes dynamiques ergodiques	44

4.2.2	Un jumelage fructueux	46
4.2.3	Questions de mesurabilité	48
4.3	Preuve du théorème 4.1.1	49
4.3.1	Constructions de systèmes dynamiques ergodiques linéaires	49
4.3.2	Théorème multiplicatif ergodique	53
4.3.3	Exposant de Lyapunov et preuve du théorème 4.1.1	55
4.4	Positivité de l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1,[1]\lambda}$	57
4.5	Positivité de l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1,[3]\lambda}$	60
4.6	Preuve du théorème 4.1.2	61
4.7	Remarques complémentaires	61
4.7.1	Quelques mots sur l'invariance du support spectral	61
4.7.2	En suivant Gordon	62
5	Cas périodique	63
5.1	Hypothèses et résultats principaux	63
5.2	Quelques mots sur la théorie de Bloch	64
5.3	Preuve du théorème 5.1.1	65
5.3.1	Cas où la périodicité est 1	65
5.3.2	Cas où la périodicité est supérieure à 2	66
5.3.3	Remarques	68
5.4	Preuve du théorème 5.1.2	69
5.4.1	Absence de composante singulière continue	70
5.4.2	Intervention des matrices de transfert	73
A	Fonctions propres généralisées et spectre d'un opérateur unitaire	81
A.1	Préliminaires	81
A.2	Construction de Berezanskii	83
A.3	Preuve du théorème A.0.1	87
B	Sur une classe d'opérateurs unitaires à spectre singulier	89
C	Sur les perturbations d'opérateurs unitaires	93
C.1	Perturbations d'un opérateur unitaire	93
C.2	Supports de mesure : matériel préparatoire	94
C.3	Application aux opérateurs frappés	98

A la mémoire de Mamie,

Remerciements

Je souhaite remercier Alain Joye et Joachim Asch de m'avoir accompagné, suivi mais aussi guidé tout au long de ces années de doctorat. Leur gentillesse, leur patience et leur esprit critique ont énormément contribué à créer un climat de travail chaleureux, sain et stimulant à la fois. La confiance qu'ils m'ont accordée depuis mon DEA m'a permis de transformer un vœu cher en réalité.

Monique Combescure et Stephan DeBièvre ont accepté d'être les rapporteurs d'un manuscrit perfectible à bien des égards. Les délais impartis ne leur ont d'ailleurs pas facilité la tâche. Je leur suis reconnaissant pour leur lecture méticuleuse et leurs conseils, donnés parfois avec humour, qui m'ont aidé à mettre en valeur mon propre travail.

J'ai également appris avec plaisir que Pierre Duclos et Yves Colin de Verdière avaient accepté de faire parti du jury de cette soutenance. Je leur suis redevable de nombreuses discussions enrichissantes et agréables.

La vie est parfois faite de ces petits riens qui vous empoisonnent l'existence. J'ai toujours trouvé à l'Institut Fourier une âme prête à écouter et m'aider. Je pense en particulier à Arlette, Elisabeth, Corinne et Françoise, aux membres de l'équipe de Physique Mathématique de l'Institut Fourier, à Janick, Christiane et Bruno, à Christophe pour son soutien inconditionnel, mais aussi aux locataires et aux visiteurs présents et passés du bureau 209. Je suis tout particulièrement redevable à Vidian, Yan, Vincent, Christophe, San et Nicolas de m'avoir épaulé à diverses reprises, parfois jusqu'au dernier moment dans le long et fastidieux processus de correction du manuscrit.

Mes remerciements s'adressent également aux membres du Centre de Physique Théorique à Marseille et de l'équipe PHYMAT de l'Université de Toulon pour m'avoir accueilli à plusieurs reprises durant cette thèse, m'avoir fait partager leurs connaissances et leur goût pour la physique mathématique.

Ce travail s'inscrit dans la continuité de problématiques auxquelles s'est intéressé James Howland. Le développement d'une partie de ce travail doit beaucoup aux discussions stimulantes que nous avons pu avoir lors de mon séjour à l'Université de la Virginie, à Charlottesville et lors de sa venue en France. Avec gentillesse et générosité, Hope et James Howland m'ont fait découvrir un petit morceau des Etats-Unis bien éloigné de certains clichés véhiculés à l'heure actuelle.

Ce travail est d'une certaine façon le fruit de la patience, de la confiance et de l'amour que m'ont porté mes proches. Il sera la marque de ma reconnaissance envers eux tous.

Introduction

L'étude du comportement temporel des systèmes dynamiques quantiques est en plein essor depuis les années 80. La question, motivée par quelques expériences physiques frappantes ([BGK], [YA], [Bar], [BS], ...) est encore largement ouverte. L'analyse et les moyens utilisés pour résoudre les problèmes posés empruntent autant à la physique des solides, la physique moléculaire qu'aux mathématiques. Du point de vue mathématique, il n'existe pas encore de cadre unifié.

Formellement, la dynamique d'un système quantique est décrite par la solution de l'équation de Schrödinger attachée à une famille d'opérateurs auto-adjoints $(H(t))_{t \in \mathbb{R}}$ définis sur un sous-espace dense $\mathcal{D}$ d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ et donnée par : pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$,

$$i\partial_t \psi(t, s) = H(t)\psi(t, s) \quad , \quad \psi(s, s) \in \mathcal{D} \quad .$$

L'espace $\mathcal{H}$ est aussi appelé espace des états du système quantique et la famille $(H(t))_{t \in \mathbb{R}}$ l'hamiltonien du système. La conservation de la norme hilbertienne de la solution au cours du temps est une particularité de ces systèmes : $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \|\psi(t, s)\| = \|\psi(s, s)\|$.

Il existe essentiellement deux manières d'envisager l'étude du comportement d'un système quantique au cours du temps et de définir ses éventuelles propriétés de stabilité.

La première approche consiste à formuler le problème en terme de localisation dynamique. Ayant convenablement choisi un opérateur auto-adjoint A défini sur $\mathcal{H}$ et représentant une observable du système physique sous-jacent (l'énergie, la position ou le moment du système par exemple), ce système placé dans un état initial $\psi(0, 0)$ est considéré comme stable si la quantité :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \langle A(t) \rangle_\psi \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}} |\langle \psi(t, 0) | A \psi(t, 0) \rangle|$$

est finie. Et lorsque cette propriété de stabilité est vérifiée pour toute condition initiale $\psi(0, 0)$, le système est dit A -dynamiquement stable. Dans le cas contraire, différents degrés d'instabilité peuvent être discriminés selon la vitesse de divergence de la quantité $\langle A(t) \rangle_\psi$. La plupart des travaux menés sur le sujet ont été développés dans le cas stationnaire, i.e. lorsque l'hamiltonien $(H(t))$ est en fait indépendant du temps [G], [GM], [GS-B], [BCM], [Com], [BGT], [BJ], [dRJLS2], [KL], [L], [Tc2], C'est un point de vue qui s'interprète bien du point de vue physique. Néanmoins, la pertinence de ce critère de stabilité dépend de manière cruciale du choix de l'observable A .

La deuxième approche consiste à étudier le comportement de l'orbite suivie par la solution de l'équation de Schrödinger $\{\psi(t, 0) ; t \in \mathbb{R}\}$ au sein de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Il peut s'agir de propriétés d'ergodicité du système qui seront traduites par la fonction

d'autocorrélation quantique [Co4], mais aussi de propriétés de précompacité de la trajectoire. Cette dernière reflète la faculté du système à revenir régulièrement au voisinage d'un ensemble fini d'états de références [EV]. Les états à trajectoire précompacte sont appelés états bornés. A contrario, on appelle états propagatifs ceux dont la trajectoire ne s'égaré auprès d'aucun espace de dimension fini. Dans le cas des systèmes stationnaires, les théorèmes RAGE ([Rue1], [AG], [Enβ]) permettent d'identifier l'espace des états bornés au sous-espace engendré par les vecteurs propres éventuels de l'hamiltonien et l'espace des états propagatifs au sous-espace associé à la composante continue du spectre de l'hamiltonien. Ce type d'approche s'applique également à diverses classes de systèmes quantiques qui dépendent du temps. C'est le cas lorsque cette dépendance s'effectue par le biais de certains processus ergodiques continus ou discrets [Pi], [Tc1], [JL], [Co4], [dO]. Elle donne lieu à des théorèmes de type RAGE lorsque la dépendance suit un processus aléatoire Markovien [Pi], ou lorsqu'elle est régulière mais apériodique [JL]. Une analyse semblable peut être conduite lorsque le système est fonction du temps de manière périodique. Ainsi, lorsque la solution de l'équation de Schrödinger peut être décrite à l'aide d'une famille d'opérateurs unitaires à deux paramètres $(U(t,s))_{(t,s) \in \mathbb{R}^2}$, un théorème de type RAGE peut être établi, dans lequel l'opérateur de Floquet $U(T,0)$ (ou opérateur de monodromie) endosse le rôle de l'hamiltonien du cas stationnaire [EV].

Dans la plupart des modèles considérés où la dépendance en temps est périodique, l'hamiltonien prend la forme suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad H(t) = H_0 + V(t) \quad , \quad (0.3)$$

où H_0 est un opérateur auto-adjoint, borné inférieurement de domaine $\mathcal{D}$ dense dans $\mathcal{H}$ et $(V(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille périodique d'opérateurs symétriques (relativement) bornés (par rapport à H_0). Un système décrit par cet hamiltonien sera dit spectralement stable si pour un opérateur H_0 à spectre purement ponctuel, l'opérateur de Floquet du système périodique est aussi à spectre purement ponctuel [DBF].

Ces deux points de vue sur l'étude de la dynamique d'un système quantique ne sont bien entendu pas équivalents. Si A est une observable convenablement choisie, un système stable au sens de la localisation dynamique le sera au sens spectral [EV], ... La réciproque est fausse en général. Il est par exemple possible de construire un hamiltonien stationnaire à spectre purement ponctuel ayant une solution qui ne soit pas localisée dynamiquement [dRJLS2].

Nous envisagerons ici l'étude du comportement asymptotique de systèmes dynamiques quantiques périodiques en temps du point de vue de la stabilité spectrale. Deux systèmes seront étudiés.

A l'exception de quelques modèles particuliers ([Ho3], [Hu], [EV], ...), deux grandes classes de systèmes quantiques dépendant périodiquement du temps ont été analysés du point de vue de la stabilité spectrale. Les premiers sont typiquement définis par un hamiltonien de la forme (0.3) où le potentiel $V(\cdot)$ dépend du temps de manière régulière et H_0 est à spectre ponctuel de multiplicité finie avec des écarts croissants entre ses valeurs propres consécutives. La régularité justifie pleinement l'existence d'un propagateur décrivant la dynamique ([RS] théorème X.70, [Kr]). La structure de l'opérateur de monodromie est en revanche rarement connue. Il existe malgré tout un biais pour contourner ce manque d'informations. La régularité de l'hamiltonien de départ permet de construire un nouvel opérateur auto-adjoint $i\partial_t + H(\cdot)$ défini sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$.

Les propriétés spectrales de cet opérateur, appelé hamiltonien de Floquet ou opérateur de quasi-énergie, sont équivalentes du point de vue de la dynamique du système, à celles de l'opérateur de monodromie [Ya], [Ho1]. En gros, deux méthodes générales d'analyse ont été développées actuellement. Les algorithmes KAM montrent l'occurrence de spectres purement ponctuels pour des ensembles de fréquences de mesure de Lebesgue strictement positive, mais dans un cadre perturbatif [Bel],[Co1],[DS], [ADE], [DSV], [GY] Les algorithmes adiabatiques se libèrent de ces contraintes perturbatives mais permettent seulement de démontrer l'absence de composantes absolument continues dans le spectre de l'opérateur de monodromie [N], [Jo] ou de l'hamiltonien de Floquet [Ho2]. La présence d'états instables n'est pas exclue.

Les systèmes frappés périodiques ont quant à eux l'avantage d'être définis directement par leur évolution. L'opérateur de monodromie est explicite. Un formalisme propre à chaque modèle peut ainsi être mis en place [GC], [Co2], [DBF], [Kar] Lorsque le système frappé est défini par une perturbation périodique de rang un, un schéma de résolution explicite du modèle a pu être mis en place [Co2] sur le modèle du traitement des perturbations de rang un dans le cas auto-adjoint [SW].

Le travail que nous allons présenter propose quelques techniques complétant ce panorama.

En guise d'introduction, le chapitre 1 explicite dans quelle mesure le comportement asymptotique de la solution de l'équation de Schrödinger d'un système quantique dépendant du temps de manière périodique peut se lire sur la décomposition de l'espace de Hilbert en sous-espaces associés aux composantes continues et ponctuelle du spectre de l'opérateur de Floquet $U(T,0)$. Quelques modèles simples seront décrits à titre illustratif.

Le chapitre 2 est consacré à l'analyse spectrale de l'opérateur de monodromie de systèmes périodiquement frappés par une perturbation de rang un. Ce travail s'inscrit dans la lignée des travaux de M. Combescure sur le sujet et les complète dans une certaine mesure. La description de l'opérateur de monodromie :

$$V_{\kappa T} = e^{iH_0 T} e^{i\kappa T|\phi\rangle\langle\phi|} ,$$

fait apparaître quatre acteurs : un vecteur ϕ de l'espace de Hilbert, un opérateur auto-adjoint H_0 , une constante de couplage κ et la période du système T . Un critère explicite énoncé par Combescure permet de mener l'analyse spectrale de ce type d'opérateurs lorsque H_0 est à spectre purement ponctuel. Si le vecteur ϕ est relativement confiné par rapport aux vecteurs propres de cet opérateur, le spectre de $V_{\kappa T}$ est ponctuel pour presque toute valeur de κ (Théorème 2.2.1 ou [Co2]). En revanche, un exemple construit par Combescure laissait déjà entendre qu'un défaut de confinement du vecteur ϕ pouvait faire apparaître du spectre singulier continu dans des situations non-résonantes (Théorème 2.2.2 ou [Co2]). Nous montrons d'abord que pour toute une classe d'hamiltoniens libres à spectre simple dont les valeurs propres sont données par un polynôme, le spectre de l'opérateur $V_{\kappa T}$ est en fait purement singulier continu (Théorèmes 2.2.3 et 2.2.4). Une partie de ce résultat fait d'ailleurs l'objet d'une publication [Bour]. En systématisant le schéma de la démonstration, nous montrons ensuite que si le vecteur cyclique ϕ présente un défaut de confinement et si les valeurs propres de H_0 croissent suffisamment vite, le spectre de $V_{\kappa T}$ est purement singulier continu pour toute période T appartenant à un ensemble de mesure de Lebesgue pleine (Théorème 2.2.5 et Corollaire 2.2.2). Ce résultat suggère l'existence de transitions spectrales au sein de la famille d'opérateurs $(V_{\kappa T})$.

Nous nous intéressons dans un deuxième temps à un modèle décrivant la dynamique d'un électron dans un anneau unidimensionnel traversé par un flux magnétique variant au cours du temps [AN], [ABDN], [BB], [Ao] ... Une transformation de jauge permet de ramener la description de la dynamique de ce type de système à celle d'un système périodique en temps. L'opérateur de Floquet de ce nouveau système n'est pas connu. Néanmoins, sur la base de considérations physiques exposées dans [BB], il est possible de construire un opérateur unitaire qui en soit une approximation. Cet opérateur unitaire s'écrit comme le produit de deux opérateurs unitaires bien identifiés :

$$U_{\mathbb{N}^*} = U_{o,\mathbb{N}^*} \cdot U_{e,\mathbb{N}^*} \quad .$$

Les opérateurs $U_{e,\mathbb{N}^*}$ et $U_{o,\mathbb{N}^*}$ s'écrivent comme la somme directe de matrices carrées unitaires de taille 2. L'analyse de la dynamique engendrée par cette approximation n'ayant fait l'objet que de simulations numériques [BB], un formalisme rigoureux de résolution a dû être mis en place. C'est l'objet du chapitre 3. La construction de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ s'articule autour d'un nombre réduit de quatre paramètres : une suite de couples de coefficients de réflexion et de transition $(r_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, trois suites de phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Sa structure permet de construire un formalisme de matrices de transfert, inspiré par les techniques de résolution spectrale associées aux matrices de Jacobi. Nous prouverons d'abord que le choix d'une des suites de phases n'a aucune influence sur la nature du spectre de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ (Lemme 3.2.1). Deux situations plus particulières dans lesquelles les suites de coefficients de réflexion et de transition sont constantes et non nulles, motivées par certains travaux numériques [BB] seront ensuite examinées. Elles démontreront au passage l'influence que peut avoir le choix des phases sur le spectre de l'opérateur de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$. Pour un choix de phases sous-tendu par certains processus ergodiques, aléatoires ou déterministes, le spectre de l'opérateur de monodromie est presque sûrement singulier (Théorème 4.1.2). Ce résultat fait l'objet du chapitre 4. Une version du théorème d'Ishii et Pastur adaptée à notre modèle sera pour cela démontrée (Proposition 4.3.1). Lorsqu'en revanche, les phases sont périodiques, comme au chapitre 5, la théorie de Bloch permet de démontrer que le spectre de l'opérateur de monodromie se restreint à une composante absolument continue et un nombre fini de valeurs propres simples (Théorème 5.1.2). Ces résultats obtenus en collaboration avec James Howland et Alain Joye sont en cours de publication [BHJ].

Les annexes regroupent des développements spécifiques utilisés au cours de l'exposé.

Notations

Les notations relatives à la théorie spectrale des opérateurs sur les espaces de Hilbert sont empruntées à [RS].

Les notations suivantes auront cours dans l'ensemble du manuscrit :

$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert séparable
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	Espaces des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers strictement positifs
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{T}$	$= \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}(\mathbb{T})$	Ensemble des boréliens de $\mathbb{T}$
ν	mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ ou mesure de Haar uniforme sur $\mathbb{T}$
$\mathbb{E}$	Espérance d'une variable aléatoire
$\mathbb{S}$	Cercle unité

Chapitre 1

Généralités

Ce chapitre explicite dans quelle mesure le comportement asymptotique de la solution de l'équation de Schrödinger d'un système quantique dépendant du temps de manière périodique peut se lire sur la décomposition de l'espace de Hilbert en sous-espaces associés aux composantes continues et ponctuelle du spectre de l'opérateur de Floquet $U(T,0)$. Plusieurs caractérisations sont proposées. L'une d'entre elles concerne les états appartenant au sous-espace associé à la composante absolument continue du spectre de l'opérateur de monodromie. L'ensemble sera illustré par quelques exemples.

Nous supposons dans ce chapitre que les solutions de l'équation de Schrödinger peuvent être données par une famille d'opérateurs unitaires dépendant de deux paramètres, notée $(U(t,s))_{(t,s) \in \mathbb{R}^2}$. Nous adopterons les définitions suivantes :

Définition 1.0.1 *Un propagateur U est une famille fortement continue d'opérateurs unitaires dépendant de deux paramètres $(U(t,s))_{(t,s) \in \mathbb{R}^2}$ telle que pour tout $(r,s,t) \in \mathbb{R}^3$,*

$$U(t,r) = U(t,s)U(s,r).$$

Définition 1.0.2 *Un propagateur périodique de période T est une famille d'opérateurs unitaires dépendant de deux paramètres $(U(t,s))_{(t,s) \in \mathbb{R}^2}$ telle que pour tout $(r,s,t) \in \mathbb{R}^3$,*

$$\begin{aligned} U(t,r) &= U(t,s)U(s,r) \\ U(t,s) &= U(t' + s,s) [U(T + s,s)]^n \quad \text{si } t = nT + t', t' \in [0,T[, \end{aligned}$$

et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les applications

$$\begin{aligned} [0,T[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ (t',s) &\longmapsto U(t' + s,s) [U(T + s,s)]^n \end{aligned}$$

soient fortement continues.

1.1 Critère principal

Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ borné de vecteurs de $\mathcal{H}$ est précompact si et seulement si pour tout ϵ strictement positif, il existe un nombre fini de boules de rayons ϵ recouvrant $\mathcal{E}$. La caractérisation suivante est équivalente : $\mathcal{E}$ borné est précompact si et seulement si pour tout ϵ strictement positif, il existe une projection orthogonale C sur un sous-espace vectoriel de dimension finie telle que :

$$\forall \psi \in \mathcal{E}, \|\psi - C\psi\| < \epsilon.$$

Dans un espace de Banach, la notion de précompacité coïncide avec la notion de compacité relative ([Dieu], théorème 3.17.5). $\mathcal{E}$ est alors précompact si son adhérence est compacte.

Définition 1.1.1 Soient U un propagateur ou un propagateur périodique et $\mathcal{P}_+$ l'ensemble des vecteurs ψ appartenant à $\mathcal{H}$ tels que la trajectoire $\{U(t,0)\psi, t \geq 0\}$ soit précompacte. De la même façon, on définira $\mathcal{P}_-$ comme l'ensemble des vecteurs ψ tels que la trajectoire $\{U(t,0)\psi, t \leq 0\}$ soit précompacte. La notation $\mathcal{P}_\pm$ est employée pour désigner indifféremment ces deux ensembles.

Autrement dit, une trajectoire précompacte reste toujours confinée à proximité d'un sous-espace de dimension fini. Les espaces $\mathcal{P}_\pm$ sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$. Ceci étant dit, le théorème suivant permet de reformuler la notion de précompacité de la trajectoire des solutions en termes de propriétés spectrales de l'opérateur de Floquet $U(T,0)$ associé à l'équation d'évolution dans le cas périodique.

Théorème 1.1.1 Si U est un propagateur périodique de période T , alors

$$\mathcal{P}_\pm = \mathcal{H}_{pp}(U(T,0)) . \quad (1.2)$$

La preuve de ce théorème demande un travail assez conséquent [EV] qui sera seulement évoqué ici. L'inclusion $\mathcal{H}_{pp}(U(T,0)) \subset \mathcal{P}_\pm$ est fondée sur le fait que tout vecteur propre de $U(T,0)$ est à trajectoire compacte. L'inclusion réciproque se démontre en utilisant l'orthogonalité des sous-espaces $\mathcal{P}_\pm$ et $\mathcal{H}_c(U(T,0))$.

Si l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est de dimension finie, toutes les trajectoires engendrées par un propagateur (périodique ou non) sont compactes. Le théorème 1.1.1 est alors trivial.

Une réinterprétation de cette notion de précompacité, inspirée par les théorèmes RAGE ([CFKS] paragraphe 5.4) est présenté au paragraphe suivant. La présentation reprend celle donnée par [EV]. Les concepts d'états géométriquement liés et propagatifs sont introduits.

1.2 Interprétation géométrique

Définition 1.2.1 Soient U un propagateur ou un propagateur périodique, $\psi \in \mathcal{H}$, et $P = (P_r)_{r \geq 0}$ une famille d'opérateurs auto-adjoints telle que $\|P_r\| \leq 1$, pour tout $r \geq 0$ et :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_r = I$$

pour la topologie forte. On dira que ψ est géométriquement lié à la famille d'opérateurs P en $+\infty$ si :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \|(I - P_r)U(t,0)\psi\| = 0 \quad (1.4)$$

On pose alors $\mathcal{M}_+^b(P)$ l'ensemble des vecteurs vérifiant la propriété (1.4). On définit de la même manière l'espace $\mathcal{M}_-^b(P)$ comme l'espace des vecteurs ψ tels que :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{t \leq 0} \|(I - P_r)U(t,0)\psi\| = 0 \quad (1.5)$$

Lorsque le propagateur U est périodique de période T , la caractérisation suivante des états liés est équivalente. Un état ψ appartient à $\mathcal{M}_+^b(P)$ si et seulement si :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(I - P_r)U^n(T,0)\psi\| = 0 ,$$

et appartient à $\mathcal{M}_-^b(P)$ si et seulement si :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(I - P_r)U^{-n}(T,0)\psi\| = 0 .$$

Les espaces $\mathcal{M}_\pm^b(P)$ sont fermés et de manière naturelle : $\mathcal{P}_\pm \subseteq \mathcal{M}_\pm^b(P)$. La notation $\mathcal{M}_\pm^b(P)$ désigne ces états géométriquement liés lorsqu'il n'y aura pas lieu de les distinguer.

Remarque : Etant donné un opérateur auto-adjoint A , la famille de projecteurs spectraux associée $(P([-r,r]))_{r \geq 0}$ (également notée $(P(|A| \leq r))_{r \geq 0}$) peut tenir le rôle de la famille $(P_r)_{r \geq 0}$. Dans ce cas précis, un état géométriquement lié à la famille P se décomposera essentiellement sur des sous-espaces propres associés à de faibles “valeurs” de l’observable A .

Définition 1.2.2 Si U désigne un propagateur ou un propagateur périodique et si P est la famille définie précédemment, on dit que P est relativement compacte par rapport au propagateur U en $\pm\infty$ si :

$$\forall r \geq 0, \forall \psi \in \mathcal{H}, \quad \{P_r U(t,0)\psi, t \leq 0\}$$

est précompact. Il suffit en fait, de vérifier cette propriété sur un ensemble total de vecteurs ψ pour montrer la propriété de relative compacité de P par rapport à U .

Bien entendu, si P est une famille d’opérateurs compacts (de rang fini par exemple), P est relativement compacte par rapport à tout propagateur U en $\pm\infty$.

Théorème 1.2.1 Si on suppose que la famille P est relativement compacte par rapport à U en $\pm\infty$ alors

$$\mathcal{M}_\pm^b(P) = \mathcal{P}_\pm. \quad (1.8)$$

Preuve : L’inclusion $\mathcal{P}_\pm \subseteq \mathcal{M}_\pm^b(P)$ a déjà été mentionnée. Réciproquement, étant donné un vecteur ψ appartenant à $\mathcal{M}_\pm^b(P)$, l’ensemble $\{U(t,0)\psi, t \leq 0\}$ est pour tout $r \geq 0$ recouvert par le sous-espace $\{P_r U(t,0)\psi, t \leq 0\} + \{(I - P_r)U(t,0)\psi, t \leq 0\}$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $r_0 \geq 0$,

$$\forall r \geq r_0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \|(I - P_r)U(t,0)\psi\| < \epsilon . \quad (1.9)$$

Fixons alors $r \geq r_0$; comme $\{P_r U(t,0)\psi, t \leq 0\}$ est par hypothèse précompact pour tout réel positif r , il existe une projection orthogonale C sur un espace de dimension finie telle que : pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|P_r U(t,0)\psi - C P_r U(t,0)\psi\| < \epsilon .$$

Il vient alors : $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\|U(t,0)\psi - C U(t,0)\psi\| < 2\epsilon .$$

L’ensemble $\{U(t,0)\psi, t \leq 0\}$ est donc précompact, ce qui démontre l’inclusion réciproque. $\square$

A contrario, la trajectoire de l’état peut échapper à toute tentative de confinement et tendre à explorer toutes les “régions” de l’espace $\mathcal{H}$. L’état sera alors dit propagatif :

Définition 1.2.3 Soient U un propagateur ou un propagateur périodique et $\psi \in \mathcal{H}$. ψ est un état propagatif par rapport à la famille P si pour tout $r \geq 0$:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|P_r U(t,0)\psi\| dt = 0.$$

On note alors $\mathcal{M}_+^f(P)$ le sous-espace des vecteurs ψ vérifiant cette propriété. De même, on définira $\mathcal{M}_-^f(P)$ le sous-espace des vecteurs ψ tels que, pour tout $r \geq 0$:

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|P_r U(t,0)\psi\| dt = 0.$$

Si U est un propagateur périodique de période T , la caractérisation suivante des états propagatifs est équivalente. Un état ψ appartient à $\mathcal{M}_+^f(P)$ si et seulement si : $\forall r \geq 0$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|P_r U^n(T,0)\psi\| = 0 .$$

De même, $\psi \in \mathcal{M}_-^f(P)$, si et seulement si : $\forall r \geq 0$,

$$\lim_{N \rightarrow -\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|P_r U^n(T,0)\psi\| = 0 .$$

$\mathcal{M}_\pm^f(P)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, orthogonal à $\mathcal{M}_\pm^b(P)$. Sous certaines conditions, ces caractérisations des états du système coïncident avec la décomposition de $\mathcal{H}$ en sous-espaces spectraux de l'opérateur de monodromie $U(T,0)$. Le résultat suivant est la pierre angulaire de tout l'exposé :

Théorème 1.2.2 *Si U est un propagateur périodique de période T et P une famille relativement compacte par rapport à U en $\pm\infty$, alors :*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\pm^f(P) &= \mathcal{H}_c(U(T,0)), & \mathcal{M}_\pm^b(P) &= \mathcal{H}_{pp}(U(T,0)), \\ \text{et} \quad \mathcal{H} &= \mathcal{M}_\pm^f(P) \oplus \mathcal{M}_\pm^b(P). \end{aligned}$$

Preuve : Par les théorèmes 1.1.1 et 1.2.1, on sait déjà que :

$$\mathcal{M}_\pm^b(P) = \mathcal{P}_\pm = \mathcal{H}_{pp}(U(T,0))$$

Sachant par ailleurs que :

$$\mathcal{H}_{pp}(U(T,0)) \oplus \mathcal{H}_c(U(T,0)) = \mathcal{H}$$

et que $\mathcal{M}_\pm^f(P)$ est orthogonal à $\mathcal{M}_\pm^b(P)$, il suffit de montrer que $\mathcal{H}_c(U(T,0)) \subset \mathcal{M}_\pm^f(P)$. Pour cela, soit $\psi \in \mathcal{H}_c(U(T,0))$; pour $\epsilon > 0$ et $r \geq 0$, il existe une projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie Q telle que : $\forall t \gtrless 0$,

$$\|P_r U(t,0)\psi - Q P_r U(t,0)\psi\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Par conséquent, $\forall \tau \neq 0$,

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|P_r U(t,0)\psi\| dt \leq \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|Q P_r U(t,0)\psi\| dt + \frac{\epsilon}{2} .$$

Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.5 de [EV] à l'opérateur compact $Q P_r$; on obtient ainsi : $\exists \tau_0 \in \mathbb{R}, \forall \tau \in \mathbb{R}$,

$$|\tau| \geq |\tau_0|, \quad \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \|P_r U(t,0)\psi\| dt < \epsilon .$$

Donc, $\psi \in \mathcal{M}_{\pm}^f(P)$, ce qui démontre l'égalité recherchée. $\square$

Remarque : Si A est un opérateur auto-adjoint à spectre purement discret, alors la famille P définie par $(P(|A| \leq r))_{r \geq 0}$ vérifie les conditions du théorème précédent.

Une discrimination supplémentaire peut être introduite au sein des systèmes propagatifs. Celle-ci s'appuie sur la décomposition de $\mathcal{H}_c(U(T,0))$ en composantes liées aux spectres singulier continu et absolument continu :

$$\mathcal{H}_c(U(T,0)) = \mathcal{H}_{sc}(U(T,0)) \oplus \mathcal{H}_{ac}(U(T,0)) .$$

Une description de la dynamique des états appartenant à $\mathcal{H}_{ac}(U(T,0))$ est proposée dans la section suivante.

1.3 Une caractérisation dynamique de la composante absolument continue

La dynamique associée aux vecteurs appartenant au sous-espace associé à la composante absolument continue de l'opérateur de monodromie peut être caractérisée par le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Soit U un opérateur unitaire agissant sur $\mathcal{H}$. Alors,*

$$\mathcal{H}_{ac}(U) = \overline{\left\{ \phi \in \mathcal{H}; \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle \phi | U^n \phi \rangle|^2 < +\infty \right\}} .$$

Ce théorème est à rapprocher naturellement d'un résultat démontré dans le cas indépendant du temps et que nous rappelons ci-après ([AS], [RS] IV) :

Théorème 1.3.2 *Soit H un opérateur auto-adjoint agissant sur $\mathcal{H}$. Alors,*

$$\mathcal{H}_{ac}(H) = \mathcal{H}_{ac}(e^{-itH}) = \overline{\left\{ \phi \in \mathcal{H}; \int_{\mathbb{R}} |\langle \phi | e^{-itH} \phi \rangle|^2 dt < +\infty \right\}} .$$

Une preuve indépendante et plus directe est donnée ici. Soit $(E(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ la famille spectrale associée à l'opérateur unitaire U [Wei]. Si ϕ est un état de $\mathcal{H}_{ac}(U)$, la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure $\langle \phi, E(\cdot) \phi \rangle$ par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée ν sur $\mathbb{T}$ sera notée f_ϕ . Par construction, la fonction f_ϕ est positive presque partout et sommable. Soit $(\mathcal{E}_p)$ la famille de sous-espaces définie par : $\forall p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$,

$$\mathcal{E}_p = \{f \in L^p(\mathbb{T}, \nu) : \exists \phi \in \mathcal{H}_{ac}(U), f = f_\phi \quad \nu - pp\} \subset L^p(\mathbb{T}, \nu) .$$

Lemme 1.3.1 *L'application suivante :*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ac}(U) &\longrightarrow \mathcal{E}_1 \\ \phi &\longmapsto f_\phi , \end{aligned} \tag{1.23}$$

est une surjection continue. En outre, $\forall \phi \in \mathcal{H}_{ac}(U)$, et pour toute base orthonormée de $\mathcal{H}_{ac}(U)$ notée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\|\phi\|^2 = \|f_\phi\|_1 \tag{1.24}$$

$$\|f_\phi\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n | \phi \rangle|^2 \|f_{e_n}\|_1 . \tag{1.25}$$

Preuve : L'application (1.23) est surjective par construction. La justification de la relation (1.24) est immédiate :

$$\|\phi\|^2 = |\langle \phi | E(\mathbb{T}) \phi \rangle| = \int_{\mathbb{T}} f_{\phi}(x) d\nu(x) = \int_{\mathbb{T}} |f_{\phi}(x)| d\nu(x) = \|f_{\phi}\|_1 ,$$

l'avant dernière égalité faisant usage de la positivité de la fonction f_{ϕ} . La relation (1.25) se déduit de la constatation suivante : pour tout choix de vecteurs orthogonaux ϕ et ψ appartenant à $\mathcal{H}_{ac}(U)$,

$$\|f_{\phi+\alpha\psi}\|_1 = \|\phi + \alpha\psi\|^2 = \|\phi\|^2 + |\alpha|^2 \|\psi\|^2 = \|f_{\phi}\|_1 + |\alpha|^2 \|f_{\psi}\|_1 .$$

Ceci permet de montrer la continuité de l'application (1.23). □

Preuve du théorème 1.3.1 : Supposons que ϕ soit tel que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle \phi | U^n \phi \rangle|^2 < +\infty .$$

Il existe une fonction f appartenant à $L^2(\mathbb{T}, \nu)$ telle que :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \phi | U^n \phi \rangle e^{-inx} \quad \nu\text{-pp et} \quad \|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle \phi | U^n \phi \rangle|^2 .$$

Par le calcul fonctionnel, cette fonction f s'identifie presque partout à $f_{\phi} : \forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(n) = \langle \phi | U^n \phi \rangle = \int_{\mathbb{T}} e^{inx} f_{\phi}(x) d\nu(x) = \hat{f}_{\phi}(n) .$$

Or, $L^2(\mathbb{T}, \nu) \subset L^1(\mathbb{T}, \nu)$ car ν est une mesure finie. Autrement dit $f_{\phi} \in L^1(\mathbb{T}, \nu)$, i.e. $\phi \in \mathcal{H}_{ac}(U)$. L'espace $\mathcal{H}_{ac}(U)$ étant fermé pour la norme hilbertienne, on a même :

$$\overline{\{\phi \in \mathcal{H}; \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle \phi | U^n \phi \rangle|^2 < +\infty\}} \subset \mathcal{H}_{ac}(U) .$$

Soit maintenant $\phi \in \mathcal{H}_{ac}(U)$. Par construction, $f_{\phi} \in L^1(\mathbb{T}, \nu)$. Soit $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ la famille de boréliens définie par :

$$\begin{aligned} \Delta_{\infty} &= \{x \in \mathbb{T}; f_{\phi}(x) < 0 \quad \text{ou} \quad f_{\phi}(x) = \infty\} \\ \Delta_k &= \{x \in \mathbb{T}; k \leq f_{\phi}(x) < k+1\} . \end{aligned}$$

La construction de la fonction f_{ϕ} entraîne automatiquement $\nu(\Delta_{\infty}) = 0$. Par ailleurs, la disjonction des ensembles (Δ_k) entraîne l'orthogonalité de la famille (ϕ_k) définie par : $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\phi_k = E(\Delta_k)\phi$. Finalement,

$$\phi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \phi_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \psi_N \quad \text{où} \quad \psi_N = \sum_{k=0}^N \phi_k .$$

Par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}$: $f_{\psi_N} \in \mathcal{E}_{\infty} \subset \mathcal{E}_2$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f_{\psi_N}\|_2^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_{\psi_N}(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_N | U^n \psi_N \rangle|^2 \\ \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \|\phi - \sum_{k=0}^N \phi_k\|^2 &= 0 . \end{aligned}$$

L'inclusion réciproque est démontrée, ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Ce processus de classement des états quantiques pourrait encore être poursuivi. Ainsi, la distinction entre les états transients et récurrents d'un système stationnaire ($\mathcal{H}_{tac}$, $\mathcal{H}_{rac}$, [AS]) peut aisément se généraliser. Aucun usage n'en sera fait dans cet exposé. Les exemples présentés dans la suite illustrent la diversité des comportements dynamiques de systèmes quantiques très simples.

Exemple : L'oscillateur harmonique unidimensionnel [EV], [HLS].

Si l'opérateur auto-adjoint H_0 défini sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$ par :

$$H_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2}$$

est perturbé par un potentiel type de la forme $xf(t)$ relativement borné à H_0 où f est une fonction continue bornée T-périodique, le propagateur associé est explicitement calculable. Si de plus, pour tout réel t , f est définie par : $f(t) = \sin \omega t$, deux cas peuvent alors se produire :

1. $\omega \neq \omega_0$: l'opérateur de monodromie $U(T, 0)$ est à spectre purement ponctuel et toutes les trajectoires sont précompactes
2. $\omega = \omega_0$: le spectre est absolument continu.

1.4 Opérateurs de permutation

Définition 1.4.1 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Un opérateur unitaire U sur $\mathcal{H}$ est appelé opérateur de permutation s'il existe une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une permutation sur les entiers naturels τ tels que : $\forall m \in \mathbb{N}, Ue_m = e_{\tau(m)}$. La base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera appelée base de permutation de U .

L'évolution d'un état initial de la base e_m sera traduite par l'orbite $\{\tau^n(m); n \in \mathbb{Z}\}$. En particulier, si partant d'un état initial e_m de la base de permutation, l'orbite revient au moins une fois à l'état de départ alors elle y revient périodiquement et le nombre d'états visités par le système est fini. Inversement, l'état peut ne jamais revenir à l'état de départ. C'est ce que résume la proposition 1.4.1 :

Proposition 1.4.1 Soient U un opérateur de permutation sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de permutation associée. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{pp}(U) &= \overline{\text{Vect}\{e_m; \#\mathcal{O}rb(e_m) < +\infty\}} \\ \mathcal{H}_{ac}(U) &= \overline{\text{Vect}\{e_m; \#\mathcal{O}rb(e_m) = +\infty\}} \\ \mathcal{H}(U) &= \mathcal{H}_{ac}(U) \oplus \mathcal{H}_{pp}(U) \end{aligned}$$

où $\forall \phi \in \mathcal{H}, \mathcal{O}rb(\phi) = \{U^m \phi; m \in \mathbb{Z}\}$. Le spectre de U ne comporte pas de composante singulière continue.

Etant donnés m et k deux entiers naturels fixés et τ une permutation définie sur $\mathbb{N}$, si $\#\{n \in \mathbb{N}; k = \tau^n(m)\} > 1$ alors $\#\{\tau^n(m); n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Avec cette remarque, la preuve de la proposition 1.4.1 devient une formalité.

Preuve : Soit P la famille de projecteurs orthogonaux de rang fini définie par : $\forall r \in \mathbb{N}$,

$$P_r = \sum_{p \leq r} |e_p\rangle\langle e_p|$$

où $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de permutation de U . Fixons un indice m . Si $\#\{k \in \mathbb{N}; \langle e_k | U^n e_m \rangle \neq 0, n \in \mathbb{N}\} < +\infty$, alors : $\exists k(m) \in \mathbb{N}, \forall |k| \geq k(m), \langle e_k | U^n e_m \rangle = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall |k| \geq k(m), \|(I - P_r)U^n e_m\| = 0$.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_n \|(I - P_r)U^n e_m\| = 0$$

ce qui signifie que : $e_m \in \mathcal{H}_{pp}(U)$ compte tenu du théorème 1.2.2. Supposons maintenant que : $\#\{k \in \mathbb{N}; \langle e_k | U^n e_m \rangle \neq 0, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$. En vertu de la remarque précédente, pour toute valeur entière de k fixée, $\#\{\tau^n(m); n \in \mathbb{N}\} \leq 1$, et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle e_k | U^n e_m \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{k, \tau^n(m)} < +\infty .$$

Par conséquent, $\forall r \in \mathbb{N}, \|P_r U^n e_m\| < +\infty$. En vertu du théorème 1.3.1, $e_m \in \mathcal{H}_{ac}(U)$. Ces deux configurations forment une partition des cas possibles. $\square$

1.5 Opérateurs unitaires multi-diagonaux

Définition 1.5.1 Soit $\mathbb{L}$ un sous-ensemble infini de $\mathbb{Z}$ (typiquement $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$). Un opérateur borné U agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ séparable, est multi-diagonal sur $\mathbb{L}$ s'il existe une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{L}}$ telle que : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall (j, k) \in \mathbb{L} \times \mathbb{L}, |j - k| > p$

$$U_{jk} \equiv \langle e_j | U e_k \rangle = 0 . \quad (1.37)$$

Un tel opérateur sera dit également $(2p + 1)$ -diagonal.

La relation (1.37) définit l'expression matricielle de l'opérateur U dans cette base. Il est toujours possible d'établir une correspondance unitaire entre l'espace $\mathcal{H}$ muni de sa base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{L}}$ et $l^2(\mathbb{L})$ muni de sa base canonique. Pour simplifier, il suffit d'étudier le spectre de l'opérateur défini par la même relation matricielle (1.37) exprimée dans la base canonique de $l^2(\mathbb{L})$. L'opérateur U et sa représentation matricielle sur la base $(e_n)_{n \in \mathbb{L}}$ seront confondus. Pour un tel opérateur et pour tout vecteur v appartenant à $\mathbb{C}^{\mathbb{L}}$, l'écriture suivante à un sens :

$$(Uv)_k = \sum_{j \in \mathbb{L}} U_{kj} v_j = \sum_{j \in [k-p, k+p] \cap \mathbb{L}} U_{kj} v_j .$$

Proposition 1.5.1 Si U est un opérateur unitaire tri-diagonal sur la base canonique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $l^2(\mathbb{N})$, alors la matrice de U dans cette base est diagonale par blocs carrés de taille 1 ou 2.

Si l'opérateur U vérifie les hypothèses de la proposition 1.5.1, alors : $\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} \langle U e_k | U e_j \rangle &= \sum_{l \in \mathbb{N}, |k-l| \leq 1, |l-j| \leq 1} \overline{U_{lk}} U_{lj} = \delta_{kj} \\ \langle U^t e_k | U^t e_j \rangle &= \sum_{l \in \mathbb{N}, |k-l| \leq 1, |l-j| \leq 1} \overline{U_{kl}} U_{jl} = \delta_{kj} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Preuve : L'opérateur unitaire U aura la propriété $\mathcal{P}_j$ si la situation suivante survient : $U_{j,j+1} = U_{j+1,j} = 0$. Si $\mathcal{P}_j$ est vérifiée alors l'opérateur U est subdivisé en deux blocs matriciels. Il suffit de montrer par récurrence sur n ($n \in \mathbb{N}$) que : ou bien $\mathcal{P}_n$ est vérifiée ou bien $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est.

à l'ordre 0 : si la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée, en vertu des équations (1.39), $|U_{00}| = 1$. Dans le cas contraire, l'application de ces mêmes relations pour $k = 2$ et $j = 0$ entraîne : $U_{12} = U_{21} = 0$. Autrement dit, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Supposons la récurrence établie à l'ordre n . Montrons la à l'ordre $n + 1$. Si $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée, il n'y a plus rien à faire. Dans le cas contraire, par hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$ est nécessairement vraie. Il suffit alors de poser les relations (1.39) pour $k = n$ et $j = n + 2$ pour obtenir : $U_{n+1,n+2} = U_{n+2,n+1} = 0$. La propriété $\mathcal{P}_{n+2}$ est alors vraie. Le théorème est ainsi démontré. $\square$

Corollaire 1.5.1 *Le spectre d'un opérateur U unitaire tri-diagonal sur $\mathbb{N}$ est purement ponctuel.*

Les opérateurs unitaires de translations d'ordre p à droite V_p et à gauche V_{-p} sur la base canonique $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$ seront définis par : $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$V_p e_n = e_{n+p} \text{ , } V_{-p} e_n = e_{n-p} \text{ .}$$

Si l'opérateur unitaire U défini sur la base canonique de $l^2(\mathbb{Z})$ est tri-diagonal, les équations (1.39) se réécrivent alors : $\forall (k,j) \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned} \langle U e_k | U e_j \rangle &= \sum_{l \in \mathbb{Z}, |k-l| \leq 1, |l-j| \leq 1} \overline{U_{lk}} U_{lj} = \delta_{kj} \\ \langle U^t e_k | U^t e_j \rangle &= \sum_{l \in \mathbb{Z}, |k-l| \leq 1, |l-j| \leq 1} \overline{U_{kl}} U_{jl} = \delta_{kj} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Si pour un entier i , $U_{i,i+1} \neq 0$, nécessairement $U_{i,i-1} = U_{i+2,i+1} = 0$. Ceci résulte de l'application des équations (1.41) pour des valeurs $(j,k) = (i-1, i+1)$ et $(j,k) = (i, i+2)$ respectivement. Cette propriété sera notée $\mathcal{Q}_i$. De la même façon, si $U_{i+1,i} \neq 0$, alors l'utilisation des équations (1.41) pour des valeurs respectives $(j,k) = (i, i+2)$ et $(j,k) = (i-1, i+1)$ entraîne $U_{i-1,i} = U_{i+1,i+2} = 0$. Cette autre propriété sera notée $\mathcal{R}_i$.

Proposition 1.5.2 *Si U est un opérateur unitaire tri-diagonal sur la base canonique de $l^2(\mathbb{Z})$, la matrice de U dans cette base est soit :*

- une matrice diagonale par blocs matriciels de taille 1 ou 2
- le produit d'une matrice unitaire diagonale par un opérateur de translation V_{+1} ou V_{-1} .

Preuve : S'il existe un entier i_0 pour lequel les propriétés $\mathcal{Q}_{i_0}$ et $\mathcal{R}_{i_0}$ soient vraies alors : $U_{i_0,i_0-1} = U_{i_0-1,i_0} = 0$. Par conséquent, $U = P_{i_0} U P_{i_0} \oplus (I - P_{i_0}) U (I - P_{i_0})$ où P_{i_0} est le projecteur sur $\overline{\text{Ran}\{e_k; k \geq i_0\}}$. Les opérateurs $P_{i_0} U P_{i_0}$ et $(I - P_{i_0}) U (I - P_{i_0})$ sont unitaires sur $P_{i_0} l^2(\mathbb{Z})$ et $(I - P_{i_0}) l^2(\mathbb{Z})$ respectivement. Comme les espaces $P_{i_0} l^2(\mathbb{Z})$ et $(I - P_{i_0}) l^2(\mathbb{Z})$ peuvent être mis en correspondance unitaire avec $l^2(\mathbb{N})$, en appliquant la proposition 1.5.1, il est clair que l'opérateur U entre dans la première catégorie donné en

énoncé.

S'il existe un entier i_0 pour lequel les propriétés $\mathcal{Q}_{i_0}$ et $\mathcal{R}_{i_0}$ soient simultanément niées alors : $U_{i_0, i_0+1} = U_{i_0+1, i_0} = 0$. L'opérateur U est réduit en deux blocs, $U = P_{i_0+1} U P_{i_0+1} \oplus (I - P_{i_0+1}) U (I - P_{i_0+1})$ et le raisonnement développé précédemment s'applique encore une fois.

Il reste à envisager la situation où pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, une et une seule condition $\mathcal{Q}_i$ ou $\mathcal{R}_i$ soit vérifiée : $\forall i \in \mathbb{Z}$, $(\neg \mathcal{Q}_i \text{ et } \mathcal{R}_i)$ ou $(\mathcal{Q}_i \text{ et } \neg \mathcal{R}_i)$.

Sans restriction, supposons que la condition $\mathcal{Q}_0$ soit vérifiée (et $\mathcal{R}_0$ ne le soit pas). On a alors : $U_{0,-1} = U_{1,0} = U_{2,1} = 0$. Autrement dit, $\mathcal{Q}_{-1}$ et $\mathcal{Q}_1$ sont vérifiées ce qui implique que les conditions $\mathcal{R}_{-1}$ et $\mathcal{R}_1$ ne le sont pas. On démontre alors par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $U_{n+1,n} = 0$ et $(\mathcal{Q}_n \text{ et } \neg \mathcal{R}_n)$.

En appliquant alors les relations (1.41) à tous les indices $(j,k) = (n, n+1)$ où $n \in \mathbb{Z}$, on montre que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $U_{nn} = 0$.

En réutilisant enfin ces mêmes équations (1.41) pour des indices $(j,k) = (n,n)$ où $n \in \mathbb{Z}$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|U_{n,n+1}| = 1$.

L'opérateur unitaire U s'écrit donc comme produit d'une matrice unitaire diagonale et de V_{+1} .

De la même façon, si la condition $\mathcal{R}_0$ est vérifiée (et $\mathcal{Q}_0$ ne l'est pas) on montre que l'opérateur U s'écrit comme produit d'une matrice unitaire diagonale et de V_{-1} . $\square$

Corollaire 1.5.2 *Le spectre d'un opérateur U unitaire tri-diagonal sur $\mathbb{Z}$, est soit purement ponctuel, soit purement absolument continu.*

Preuve : En vertu du lemme 1.5.2, deux situations se présentent :

- si l'opérateur U s'écrit dans la base canonique comme une matrice diagonale par blocs de taille 1 ou 2, alors son spectre est ponctuel.
- si l'opérateur s'écrit comme produit d'une matrice diagonale et de V_{+1} (resp. V_{-1}) alors : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle e_k | U^n e_k \rangle|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle e_k | V_{\pm 1}^n e_k \rangle|^2 = 1 < +\infty$$

Avec l'aide du théorème 1.3.1, il est facile d'en déduire que le spectre de U est absolument continu. $\square$

1.6 Quelques mots sur l'hamiltonien de Floquet

L'hamiltonien de Floquet (ou opérateur de quasi-énergie) permet d'étudier la dynamique de systèmes quantiques gouvernés par une famille d'opérateurs dépendant de manière périodique et suffisamment régulière du temps [Ho1], [Ya]. Du point de vue de la dynamique du système, l'hamiltonien de Floquet et l'opérateur de monodromie apportent la même information. L'équivalence des points de vue est ici présentée formellement.

Soit $H(\cdot)$ une famille d'opérateurs auto-adjoints, T -périodique, fortement continûment différentiable de domaine constant $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{K}$ l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathcal{H})$ muni du produit scalaire défini de la manière suivante : $\forall(\psi, \phi) \in \mathcal{K}^2$

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{K}} = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \psi(t), \phi(t) \rangle_{\mathcal{H}} dt$$

Définissons sur le sous-espace $C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathcal{D})$ l'hamiltonien de Floquet K par :

$$K = -i\partial_{t,\mathcal{K}} + H_{\mathcal{K}}(t).$$

où les opérateurs $\partial_{t,\mathcal{K}}$ et $H_{\mathcal{K}}(t)$ sont définis de la manière suivante : $\forall \psi \in \mathcal{K}, \forall t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$,

$$(-i\partial_{t,\mathcal{K}}\psi)(t) = -i\partial_t\psi(t) \text{ et } (H(\cdot)\psi)(t) = H(t)\psi(t) .$$

Dans la suite, les notations seront rendues plus concises. K est densément défini et symétrique sur $C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathcal{D})$ et admet une unique extension auto-adjointe sur $\mathcal{K}$, encore notée K . L'opérateur d'évolution $U_{\mathcal{K}}$ sur $\mathcal{K}$ associé et défini par : $\forall \psi \in \mathcal{K}, \forall \tau \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$,

$$(U_{\mathcal{K}}\psi)(\tau) = U(t, t - \tau)\psi(t - \tau) .$$

En particulier, $C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathcal{D})$ est un coeur pour K .

Les espaces $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}; \mathcal{H})$ et $L^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}$ peuvent être mis en correspondance unitaire. A l'appui (au moins formel) du calcul suivant : $\forall \psi \in \mathcal{K}, \forall t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (e^{-iTK}\psi)(t) &= U(t, t - T)\psi(t - T) \\ &= U(t, T)U(T, 0)U(0, t - T)\psi(t - T) \\ &= U(T, t)^{-1}U(T, 0)U(T, t)\psi(t) \end{aligned}$$

l'extension de l'opérateur de monodromie $I \otimes U(T, 0)$ est unitairement équivalente à l'opérateur d'évolution e^{-iTK} . Par conséquent, les spectres respectifs de la quasi-énergie K et de l'opérateur de monodromie $U(T, 0)$ sont de même nature. Les démonstrations originales de ce résultat résident dans [Ya] et [Ho1].

De nombreuses études sur la dynamique de systèmes quantiques périodiques s'appuient directement sur cet outil [Bel], [DS], [BG], ... (algorithmes KAM), [Ho2], [Ho3] ... (algorithme adiabatique). Les systèmes frappés, étudiés au chapitre suivant, ne dépendent pas du temps de manière suffisamment régulière pour se prêter à une analyse par l'hamiltonien de Floquet.

1.7 Remarques

La suite de l'exposé traitera de la dynamique de deux modèles particuliers. Ces études sont en cours de publications [Bour], [BHJ].

Les opérateurs de monodromie intervenant dans ces deux modèles s'écrivent comme le produit de deux opérateurs unitaires qui ne commutent pas *a priori*. Il sera aisé de constater que leurs natures spectrales individuelles n'augurent rien quant au spectre du produit. Néanmoins, la nature spectrale de ce dernier est indépendante de l'ordre dans lequel le produit est effectué. En effet, si U et V sont deux opérateurs unitaires agissant sur

l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, les opérateurs UV et VU sont unitairement équivalents : $UV = V^*(VU)V = U(VU)U^*$. Les différentes composantes du spectre des opérateurs UV et VU sont égales et les sous-espaces spectraux de chacun d'eux peuvent être mis en correspondance unitaire (par l'intermédiaire de U^* ou de V) :

$$\mathcal{H}_{pp}(UV) \longrightarrow \mathcal{H}_{pp}(VU)$$

$$\mathcal{H}_{sc}(UV) \longrightarrow \mathcal{H}_{sc}(VU)$$

$$\mathcal{H}_{ac}(UV) \longrightarrow \mathcal{H}_{ac}(VU)$$

Chapitre 2

Opérateurs frappés

L'étude dynamique des systèmes frappés a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Ces modèles sont explicitement décrits par leur opérateur d'évolution. Partant d'un état initial donné, le système suit une évolution libre. Néanmoins, des coups ponctuels lui sont plus ou moins régulièrement assénés, introduisant des discontinuités dans cette évolution. L'évolution libre est gouvernée par un hamiltonien H_0 indépendant du temps. Les coups résultent de l'action ponctuelle d'une famille d'opérateurs $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à des instants $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ prédéfinis. L'orbite globale suivie par un état initial à temps nul ψ est formellement décrite comme la réunion des arcs orbitaux suivants :

$$\mathcal{U}_i = \left\{ e^{-iH_0(t-t_i)} e^{-iA_i} e^{-iH_0(t_i-t_{i-1})} \dots e^{-iA_1} e^{-iH_0 t_0} e^{-iA_0} \psi; t \in [t_i, t_{i+1}[\right\} .$$

La description de l'évolution de ce système se simplifie grandement lorsque les coups donnés restent identiques et surviennent périodiquement aux instants nT , pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La trajectoire à temps positif se décrit alors comme la réunion des arcs :

$$\left\{ e^{-iH_0 t} (e^{-iH_0 T} e^{-iA})^n \psi; t \in [0, T[\right\} .$$

Bien que quelques études aient été proposées pour des suites $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ modulées [Co4] [dO], les principaux travaux ont été menés pour des perturbations périodiques [DBF], [GC], [Kar] ... Si l'opérateur A est auto-adjoint et de rang 1, un schéma de résolution très explicite peut être mis en place [Co2]. Celui-ci a été décrit sur le modèle du traitement des perturbations de rang 1 d'opérateurs auto-adjoints [SW]. La nature du spectre de l'opérateur de monodromie $e^{-iA} e^{-iH_0 T}$ rendra compte de la dynamique du système frappé sous-jacent.

Ce chapitre complète les résultats déjà obtenus sur ce sujet [Co2] et sur lesquels nous reviendrons. Une réponse presque complète a pu être donnée à une conjecture formulée dans ([Co2] remarque C). La généralisation de la méthode employée permettra ensuite de classer le spectre de l'opérateur de monodromie en fonction de divers paramètres du modèle, comme cela a été fait pour les rotateurs pulsés [Bel].

2.1 An explicitly solvable model

Let us consider a discrete time independent quantum system periodically perturbed by a rank one kick. Its evolution is described by the following Floquet operator:

$$V_{\kappa T} = e^{-iH_0 T} e^{-iT\kappa|\phi\rangle\langle\phi|} = e^{-iH_0 T} (1 + \mu|\phi\rangle\langle\phi|) \quad \text{with } \mu = e^{-i\kappa T} - 1, \quad (\kappa, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

acting on a separable Hilbert space $\mathcal{H}$, where H_0 is a self-adjoint operator on $\mathcal{H}$ and ϕ a vector of $\mathcal{H}$. The real numbers κ and T are respectively the coupling constant and the period of the system. Formally, the unitary operator $V_{\kappa T}$ can be considered as the Schrödinger evolution associated to the following time dependent Hamiltonian [Co2]:

$$H(t) = H_0 + \kappa|\phi\rangle\langle\phi| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) .$$

Fix the values of the coupling constant κ and the period T . According to chapter 1, the spectral analysis of the Floquet operator $V_{\kappa T}$ will give an insight in the asymptotics of the evolution of the corresponding kicked system. Fortunately, for rank one kicked systems, we are able to relate its spectral properties to the evolution operator of the unperturbed system. Namely, the spectrum of $V_{\kappa T}$ will be completely described in terms of the spectrum of $e^{-iH_0 T}$.

The spectral analysis of $V_{\kappa T}$ is trivial for $\kappa \in \mathcal{Z}$ where $\mathcal{Z}$ denote the following set:

$$\mathcal{Z} = \{\kappa \in \mathbb{R}; \kappa T \in 2\pi\mathbb{Z}\} .$$

Indeed, $\forall \kappa \in \mathcal{Z}$, $V_{\kappa T} = e^{iH_0 T}$. For each value of $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$, let $E_{\kappa T}$ be the spectral family associated with the unitary operator $V_{\kappa T}$. Define the cyclic subspace generated by the vector ϕ by:

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\text{Span}\{e^{inH_0 T}\phi; n \in \mathbb{Z}\}} ,$$

and let P_0 be the orthogonal projection on $\mathcal{H}_0$. As a consequence of Lemma C.1.1 (Appendix C), for all value of $\kappa \in \mathbb{R}$, $V_{\kappa T}$ is reduced by the subspace $\mathcal{H}_0$ and its orthogonal complement $\mathcal{H}_0^\perp$. Therefore, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} V_{\kappa T} &= P_0 V_{\kappa T} P_0 + (I - P_0) V_{\kappa T} (I - P_0) \\ \text{and } V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0} &\equiv P_0 V_{\kappa T} P_0 \\ V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp} &\equiv (I - P_0) V_{\kappa T} (I - P_0) \end{aligned}$$

may be seen as unitary operators on $\mathcal{H}_0$ and $\mathcal{H}_0^\perp$ respectively. For any value of $\kappa \in \mathbb{R}$, the corresponding spectral families are also reduced by both subspaces [Kato]. As a consequence, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sigma(V_{\kappa T}) &= \sigma(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp}) \cup \sigma(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}) \\ \mathcal{H}_j(V_{\kappa T}) &= \mathcal{H}_j(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}) \oplus \mathcal{H}_j(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp}) \end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}) &= \mathcal{H}_j(V_{\kappa T}) \cap \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{H}_j(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp}) &= \mathcal{H}_j(V_{\kappa T}) \cap \mathcal{H}_0^\perp \end{aligned}$$

and j is intended to denote either the eigenspaces or the continuous (resp. singular continuous, absolutely continuous) spectral subspaces of the associated operators. Moreover, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0} &= P_0 e^{iH_0 T} e^{i\kappa T|\phi\rangle\langle\phi|} P_0 = P_0 e^{iH_0 T} P_0 e^{i\kappa T|\phi\rangle\langle\phi|} P_0 \\ &= (P_0 e^{iH_0 T} P_0) \left(P_0 e^{i\kappa T|\phi\rangle\langle\phi|} P_0 \right) \\ &= e_{|\mathcal{H}_0}^{iH_0 T} e_{|\mathcal{H}_0}^{i\kappa T|\phi\rangle\langle\phi|} . \end{aligned} \quad (2.4)$$

A similar computation can be performed on the orthogonal subspace. However, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$,

$$(I - P_0) e^{i\kappa T|\phi\rangle\langle\phi|} (I - P_0) = (I - P_0) (1 + (e^{i\kappa T} - 1)|\phi\rangle\langle\phi|) (I - P_0) = (I - P_0) . \quad (2.5)$$

So, $V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp} = e_{|\mathcal{H}_0^\perp}^{iH_0 T}$ and $E_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp} = E_{0,|\mathcal{H}_0^\perp}$. It is easy to deduce from (2.5) the fact that for all value of κ the restriction of the unitary operators $V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp}$ and $e_{|\mathcal{H}_0^\perp}^{iH_0 T}$ share the same spectral subspaces and have the same spectrum. Namely, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_{ac}(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp}) = \sigma_{ac}(e_{|\mathcal{H}_0^\perp}^{iH_0 T}), \quad \sigma_{sc}(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp}) = \sigma_{sc}(e_{|\mathcal{H}_0^\perp}^{iH_0 T}), \quad \sigma_{pp}(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0^\perp}) = \sigma_{pp}(e_{|\mathcal{H}_0^\perp}^{iH_0 T}) .$$

The spectral resolution is trivial on $\mathcal{H}_0^\perp$. The analysis of the restrictions on $\mathcal{H}_0$ follows a method developed for rank one perturbations of self-adjoint operators [SW], [S2] and performed for rank one perturbations of unitary operator [Co2]. Let $(\mu_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{R}}$ be the family of positive Borel measures defined on $\mathbb{T}$ by: $\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$,

$$\mu_{\kappa T}(\Delta) = \langle \phi | E_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}(\Delta) \phi \rangle .$$

By definition, up to the restriction to the subspace $\mathcal{H}_0$, ϕ is cyclic with respect to $H_0|_{\mathcal{H}_0}$. Therefore, for any value κ , the measure $\mu_{\kappa T}$ will describe the spectrum of the unitary operators $V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}$ by the means of the limiting behaviour of:

$$F_{\kappa T}(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_{\kappa T}(\theta)}{e^{i\theta} - z} = \langle \phi | (V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0} - z)^{-1} \phi \rangle , \quad |z| \neq 1,$$

when $|z|$ tends to 1.

Theorem 2.1.1 *Let $T > 0$ and $B(x)$ be the real quantity defined by: $\forall x \in \mathbb{T}$,*

$$B(x)^{-1} = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu_0(\theta)}{\sin^2\left(\frac{x-\theta}{2}\right)}$$

Then, fix a value of κ in $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$,

– the absolutely continuous spectrum of $V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}$ is supported by the set:

$$L_{\kappa T} = \{x \in \mathbb{T}; \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - x)} d\mu_{\kappa T}(\theta) < +\infty\}$$

– the singular continuous spectrum of $V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}$ is supported by:

$$S_{\kappa T} = \{x \in \mathbb{T}; \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} e^{i(x \pm i\epsilon)} F_0(e^{i(x \pm i\epsilon)}) = -\frac{1 + \mu}{\mu}, \quad B(x)^{-1} = +\infty\} ,$$

– and the set of eigenvalues of $V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}$ is:

$$P_{\kappa T} = \{x \in \mathbb{T}; \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} e^{i(x \pm i\epsilon)} F_0(e^{i(x \pm i\epsilon)}) = -\frac{1+\mu}{\mu}, B(x)^{-1} < +\infty\}$$

The sets defined above are mutually disjoint.

Proof: By the cyclicity of the vector ϕ with respect to the self-adjoint operator H_0 on the restricted subspace $\mathcal{H}_0$, it is enough to prove that the set $L_{\kappa T}$ (resp. $S_{\kappa T}$, $P_{\kappa T}$) supports the absolutely continuous part (resp. singular continuous part, atoms) of the measure $\mu_{\kappa T}$. This is proved in Proposition C.3.1 in Appendix C. $\square$

Remark: For any value κ_1 and κ_2 , the difference between $V_{\kappa_1 T}$ and $V_{\kappa_2 T}$ is trace class as the following formulas show:

$$\begin{aligned} V_{\kappa_1 T} - V_{\kappa_2 T} &= (e^{i\kappa_1 T} - e^{i\kappa_2 T}) e^{iH_0 T} |\phi\rangle\langle\phi| \\ V_{\kappa_1 T}|_{\mathcal{H}_0} - V_{\kappa_2 T}|_{\mathcal{H}_0} &= (e^{i\kappa_1 T} - e^{i\kappa_2 T}) e^{iH_0 T}|_{\mathcal{H}_0} |\phi\rangle\langle\phi| \end{aligned}$$

As a consequence of the Birman-Krein theorem [BK] and the above discussion: $\forall \kappa \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sigma_{ac}(V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}) &= \sigma_{ac}(e^{iH_0 T}|_{\mathcal{H}_0}) \\ \sigma_{ac}(V_{\kappa T}) &= \sigma_{ac}(e^{iH_0 T}) , \end{aligned} \tag{2.13}$$

and there exists a unitary mapping between the corresponding spectral subspaces. It means also that the support $L_{\kappa T}$ for the absolutely continuous spectrum is defined up to a set of Lebesgue measure 0 [S2].

The description of the spectrum of the family of unitary operators $(V_{\kappa T})$ is now complete. The determination of the spectral measure $V_{\kappa T}|_{\mathcal{H}_0}$ is the non trivial part of the analysis. Therefore, up to a restriction to the cyclic subspace $\mathcal{H}_0$, there will be no loss of generality in assuming that $\mathcal{H}_0$ is the complete Hilbert space $\mathcal{H}$. In other words, it means that the vector ϕ is cyclic with respect to H_0 .

2.2 Additional assumptions and results

In order to understand the spectral properties of $V_{\kappa T}$, some information on the vector ϕ and the operator $e^{-iH_0 T}$ is necessary. Following [Co2], we will assume that:

H₁: H_0 is bounded from below, with discrete spectrum of multiplicity one. Its eigenvalues are denoted by $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ and let $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ be an orthonormal basis of corresponding eigenvectors.

H₂: The vector ϕ is cyclic for H_0 .

In [Co2], Combes established two types of spectral results. First, the spectrum generically remains pure point in the following case:

Theorem 2.2.1 *Let $T > 0$. Under the hypotheses **H₁**, **H₂**, assume that $(\langle \phi_m | \phi \rangle)_{m \in \mathbb{N}^*} \in l^1(\mathbb{N}^*)$. Then, the spectrum of $V_{\kappa T}$ is pure point for almost every κ with respect to the Lebesgue measure.*

Secondly, in the case of the harmonic oscillator with frequency ω_0 , Combescure exhibits examples where the spectrum of $V_{\kappa T}$ may be singular continuous for some Diophantine ω_0 . We recall first the definition of a Diophantine number:

Définition 2.2.1 *A real number ω is Diophantine of order σ ($\sigma \geq 2$) if: $\exists c > 0$,*

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\sigma}$$

for all $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^$ which are relatively prime.*

The set of all Diophantine numbers is of full Lebesgue measure (see [Ha] for example).

The equidistance of the simple eigenvalues of the harmonic oscillator make transitions towards higher energy levels of the system relatively easy. This may explain the appearance of the singular continuous subspace for such critical values of ω_0 . Combescure proved:

Theorem 2.2.2 *Let $T > 0$ and H_0 be the Hamiltonian of the harmonic oscillator with frequency ω_0 and assume $\omega_0 T/2\pi$ is Diophantine. If the vector ϕ is cyclic with respect to H_0 and if there exists $c > 0$, such that for all $m \in \mathbb{N}^*$,*

$$|\langle \phi_m | \phi \rangle| \geq cm^{-\gamma} \quad , \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1$$

then, the spectrum of $V_{\kappa T}$ is purely singular continuous for any κ in $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$.

Combescure conjectured that Theorem 2.2.2 could be generalized to unperturbed Hamiltonians H_0 with eigenvalues λ_m of the form:

$$\lambda_m = \sum_{j=0}^d p_j m^j \quad , \quad p_d \neq 0$$

provided there exists some $j \in \{1, \dots, d\}$ such that $p_j T/2\pi$ is Diophantine. We prove it is true if the gaps between the eigenvalues increase polynomially with some irrational coefficients. Our first result is the following:

Theorem 2.2.3 *Let $T > 0$. Assume the operator $V_{\kappa T}$ obeys the hypotheses **H₁** and **H₂** and the eigenvalues of H_0 are given by: $\forall m \in \mathbb{N}^*$,*

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^d p_k m^k \quad , \quad p_d \neq 0$$

where $d \geq 3$. Suppose there exists an integer r in $\{1, \dots, d\}$ such that $p_r T/2\pi$ is irrational and $rd > 3$. If the vector ϕ is cyclic with respect to H_0 , and $\exists c > 0, \forall m \in \mathbb{N}^$,*

$$|\langle \phi_m | \phi \rangle| \geq cm^{-\frac{1+\epsilon}{2}} \quad \text{where} \quad \epsilon \in]0, \rho[\quad , \quad \rho = \frac{1}{8d^2(\ln d + 1.5 \ln \ln d + 4.2)}$$

then the spectrum of the unitary operator $V_{\kappa T}$ is purely singular continuous for any κ in $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$.

If $d = 3$, Theorem 2.2.3 applies as soon as one of the coefficients $p_2 T/2\pi$ or $p_3 T/2\pi$ is irrational. If $d \geq 4$, this condition is relaxed. It is enough to have an irrational number $p_r T/2\pi$ with $r \geq 1$. As $\epsilon < \rho$, notice that the greater d is the smaller ρ and ϵ are.

Even though it looks artificial, the conditions on the degree of the polynomial are imposed by the technical machinery of analytic number theory used hereafter. This result is about to be published [Bour]. When the paper was accepted, there was still no result for the case of polynomial of degree $d = 2$. The gap is now partially bridged with Theorem 2.2.4.

Following the terminology of [Ko], an irrational number is said to be of finite type η (or of type $I\eta$) if the denominators $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ of the sequence of rationals given by its continued fraction expansion are such that: $\forall i \in \mathbb{N}, q_{i+1} = q_i^{\eta_i}$ and

$$\limsup_{i \rightarrow +\infty} \eta_i = \eta < +\infty .$$

A number of type $I\eta$ is Diophantine [KN].

Theorem 2.2.4 *Let $T > 0$ and $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$. Assume $V_{\kappa T}$ obeys the hypotheses $\mathbf{H}_1$ and $\mathbf{H}_2$ where the eigenvalues of the Hamiltonian H_0 are given by: $\forall m \in \mathbb{N}^*$,*

$$\lambda_m = \theta m^2 ,$$

with θT of type $I\eta$ ($\eta > 1$). If $\exists \epsilon > 0, \exists c > 0, \forall m \in \mathbb{N}^$,*

$$|\langle \phi_m | \phi \rangle| \geq c \max \left((\sqrt{m})^{-(1+\frac{1}{1+\eta})+\epsilon}, m^{-\frac{7}{10}+\epsilon} \right) ,$$

then $V_{\kappa T}$ is purely singular continuous.

The following corollary is an adaptation of Theorem 2.2.4 to the case of the one dimensional kicked rotator:

Corollary 2.2.1 *Let $T > 0$ and $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$. Assume the Hamiltonian H_0 is defined by:*

$$H_0 = -\partial_\theta^2 \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{S}^1)$$

and T is of type $I\eta$ ($\eta > 1$). If the vector ϕ is cyclic with respect to H_0 and $\exists \epsilon > 0, \exists c > 0, \forall m \in \mathbb{N}^$,*

$$|\langle \phi_m | \phi \rangle| \geq c \max \left((\sqrt{m})^{-(1+\frac{1}{1+\eta})+\epsilon}, m^{-\frac{7}{10}+\epsilon} \right) ,$$

then $V_{\kappa T}$ is purely singular continuous.

The proof of Corollary 2.2.1 is almost identical to the proof of Theorem 2.2.4 since the eigenvalues of $-\partial_\theta^2$ on $L^2(\mathbb{S}^1)$ are given by the sequence $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ except their multiplicity is 2.

As we have already mentioned, the hypotheses on the Diophantine nature of some coefficients in Theorem 2.2.2 are relaxed in Theorem 2.2.3. In order to get this improvement, the scheme of proof given in [Co2] has been overhauled. Nonetheless, the irrationality condition is crucial to prove there is some singular continuous spectrum and this cannot be removed. We recall what occurs in the resonant case:

Proposition 2.2.1 *Let $T > 0$. Under the hypothesis $\mathbf{H}_1$, assume the eigenvalues of the Hamiltonian H_0 are defined by the following: $\forall m \in \mathbb{N}^*$,*

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^d p_k m^k , \quad p_d \neq 0 \tag{2.22}$$

where $d > 1$ and all the coefficients $p_k T / 2\pi$ are rational, except possibly $p_0 T / 2\pi$. Then, for all value of $\kappa \in \mathbb{R}$, the operator $V_{\kappa T}$ is pure point.

That proposition is an application of the Weyl theorem [RS] about the invariance of the essential spectrum of e^{-iH_0T} and $V_{\kappa T}$. For any value of κ , the essential spectrum of $V_{\kappa T}$ is included in the finite set $\{e^{-ip_0T}e^{-i2\pi\frac{l}{Q}}; l \in \{0, \dots, Q-1\}\}$ where Q is the greatest common divisor of the rationals $(\frac{T}{2\pi}p_k)_{k \in \{1, \dots, d\}}$. This argument has already been used in [EV], [ADE].

When dealing with physical systems, the eigenvalues of the Hamiltonian H_0 are rather estimated than given explicitly. In such cases, Theorems 2.2.3 and 2.2.4 are helpless. However, we can prove that the occurrence of purely singular continuous spectrum may be quite frequent if the sequence of eigenvalues is increasing. Let us denote by $\mathbf{H}_a(\gamma)$ and $\mathbf{H}_b(\gamma)$ the following hypotheses on the eigenvalues $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ of the Hamiltonian H_0 :

- $\mathbf{H}_a(\gamma)$ there exist $\gamma \in]0, 1[$ and two positive constants c_1 and c_2 such that: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq c_2 n^\gamma$, $\lambda_{n+k} - \lambda_n \geq c_1$,
- $\mathbf{H}_b(\gamma)$ there exist $\gamma > 2$ and two positive constants c_1 and c_2 such that: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq c_2 n(\ln(n+1))^{-\gamma}$, $\lambda_{n+k} - \lambda_n \geq c_1$.

Theorem 2.2.5 *Let $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Assume the unitary operator $V_{\kappa T}$ obeys the hypotheses $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$. If there exist $\gamma \in]0, 1[$, $\epsilon > 0$ and $c > 0$ such that the eigenvalues $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfy the hypothesis $\mathbf{H}_a(\gamma)$ and: $\forall m \in \mathbb{N}^*$,*

$$|\langle \phi_m, \phi \rangle| \geq c \frac{(\ln(m+1))^{\frac{5}{4}+\epsilon}}{m^{\frac{3-\gamma}{4}}} ,$$

then $V_{\kappa T}$ is purely singular continuous for any period T in a set of complete Lebesgue measure. The same conclusion holds if there exist $\gamma > 5$, $\epsilon \in]0, \gamma - 5[$ and $c > 0$ such that the eigenvalues satisfy the hypothesis $\mathbf{H}_b(\gamma)$ and: $\forall m \in \mathbb{N}^$,*

$$|\langle \phi_m, \phi \rangle| \geq \frac{c}{\sqrt{m}(\ln(m+1))^{\frac{\gamma-2}{6}-\epsilon}} .$$

Assume H_0 is a discrete Hamiltonian which obeys $\mathbf{H}_1$, whose eigenvalues $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are simple and such that: $\exists c > 0$, $\gamma \in]0, 1[$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq cn^{-\gamma}$. Then, we easily check that: $\exists c' > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq n^\gamma$,

$$\lambda_{n+k} - \lambda_n \geq c' .$$

Examples of such Hamiltonians are given by the following family of self-adjoint operators,

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + V(x) \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{R}) \quad \text{with} \quad V(x) \sim \beta|x|^p ,$$

$\beta > 0$ and $p > 0$. Indeed, using the Bohr-Sommerfeld conditions, we know that the eigenvalues of these operators are simple and such that:

$$\lambda_n \sim cn^{\frac{2p}{p+2}} , \quad c > 0 .$$

One dimensional anharmonic oscillators (see [Ho3] for example) are typical examples of such Hamiltonians. Therefore, we get the following result:

Corollary 2.2.2 *Let $\kappa \in \mathbb{R}^*$, $p > 0$, $\beta > 0$ and H_0 be the Hamiltonian defined by:*

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + V(x) \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{R}) \quad \text{with} \quad V(x) \sim \beta|x|^p .$$

If the vector ϕ is cyclic with respect to H_0 and if there exist $c > 0$, $\epsilon > 0$ such that for all $m \in \mathbb{N}^*$,

$$|\langle \phi_m, \phi \rangle| \geq c \frac{(\ln(m+1))^{\frac{5}{4}+\epsilon}}{m^{\frac{3-\gamma}{4}}} \quad \text{with} \quad \gamma = \frac{p-2}{p+2}$$

then, the spectrum of $V_{\kappa T}$ is purely singular continuous for any period T in a set of complete Lebesgue measure.

Theorem 2.2.5 may be interpreted in another way. Assume the Hamiltonian H_0 is discrete, bounded from below and there exist three positive constants $\gamma \in]0,1[$, c_1 and c_2 such that the multiplicity of the n -th eigenvalue λ_n is bounded by $\max(1, [c_2 n^\gamma] - 1)$ and for all $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq c_1$. If the vector ϕ is cyclic with respect to H_0 and there exist $c > 0$, $\epsilon > 0$ such that for all $m \in \mathbb{N}^*$,

$$|\langle \phi_m, \phi \rangle| \geq c \frac{(\ln(m+1))^{\frac{5}{4}+\epsilon}}{m^{\frac{3-\gamma}{4}}},$$

then, the spectrum of $V_{\kappa T}$ is again purely singular continuous for any period T in a set of complete Lebesgue measure.

Remark: The *almost everywhere* in Theorem 2.2.5 is essential. Proposition 2.2.1 has already illustrated this point. Let us turn out to another pleasant example. Assume the hypotheses $\mathbf{H}_1$ and $\mathbf{H}_2$ are checked in our model and the eigenvalues of H_0 are given by: $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_m T = e.m!$. Writing $\{x\}$ to denote the fractional part of the real number x , the sequence $(\{\lambda_m T\})_{m \in \mathbb{N}^*}$ is convergent and the essential spectrum of $e^{iH_0 T}$ is therefore reduced to a single point. It follows from the Weyl theorem [RS], that the spectrum of $V_{\kappa T}$ is pure point.

We may also wonder if the hypotheses of Theorem 2.2.5 on the growth rate of the sequence $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ may be improved. If the growth rate is weak enough, the spectrum of $V_{\kappa T}$ remains pure point for all value of $\kappa \in \mathbb{R}$:

Proposition 2.2.2 *Let $\kappa \in \mathbb{R}$ and $T > 0$. Assume the unitary operator $V_{\kappa T}$ obeys the hypotheses $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ and there exists an integral number N such that the sequence of eigenvalues $(\lambda_m)_{m \geq N}$ is strictly increasing with the following condition: $\exists C \geq 0$, $\forall m \geq N$,*

$$\lambda_{m+1} - \lambda_m \leq C m^{-1} (\ln m)^b,$$

with $b < -1$. Then, $\sigma_c(V_{\kappa T}) = \emptyset$.

The hypotheses ensure the convergence of the sequence $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$. Let us denote the limit by λ . The essential spectrum of $e^{iH_0 T}$ is reduced to a single point: $\{e^{i\lambda T}\}$. For any value of κ , the difference $V_{\kappa T} - e^{iH_0 T}$ is compact. By the Weyl theorem [RS], the conclusion follows.

In the following sections, we prove Theorem 2.2.3, Theorem 2.2.4 and Theorem 2.2.5.

2.3 Proof of Theorem 2.2.3

2.3.1 Preliminaries

For any real number a , $\{a\}$ and $[a]$ denote respectively its fractional and integral part: $a = [a] + \{a\}$. The fractional part of a real belongs to the unit interval $[0,1[$.

The spectrum of $V_{\kappa T}$ is the image of the spectrum of $e^{ip_0 T} V_{\kappa T}$ by a rotation of the unit circle of angle $-p_0 T$. Both spectra are of the same nature. Therefore, without loss of generality, we may assume in the following that $p_0 = 0$. Moreover, as a consequence of the relation (2.13) and the fact that $e^{-iH_0 T}$ is pure point, $\sigma_{ac}(V_{\kappa T}) = \emptyset$ for all values of κ . The spectrum of $V_{\kappa T}$ is purely singular. It remains to see that the spectrum of $V_{\kappa T}$ does not contain any eigenvalue in order to prove the theorem. In [Co2], Combescure applies the Simon-Wolff method [SW] to prove the following criterion:

Lemma 2.3.1 *Assume the vector ϕ is cyclic with respect to H_0 , the complex number e^{ix} belongs to the point spectrum of $V_{\kappa T}$ iff:*

$$B(x)^{-1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|\langle \phi_m | \phi \rangle|^2}{\sin^2\left(\frac{x - \theta_m}{2}\right)} < +\infty \quad \text{and} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} |\langle \phi_m | \phi \rangle|^2 \cot\left(\frac{x - \theta_m}{2}\right) = \cot\left(\frac{\kappa T}{2}\right)$$

where θ_m is defined by: $\theta_m = 2\pi\{\frac{\lambda_m T}{2\pi}\}, m \in \mathbb{N}^*$.

Remark: The second condition of Lemma 2.3.1 is equivalent to the condition:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{i(x \pm i\epsilon)} F_0(e^{i(x \pm i\epsilon)}) = -\frac{1 + \mu}{\mu} ,$$

of Theorem 2.1.1.

The sequence $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ lying in $[0, 2\pi[$, the convergence (or divergence) of $B(x)^{-1}$ is the result of a competition between the decay rate of the numerator and the distribution of the sequence $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ which governs the denominator. We will prove that the hypotheses are sufficient to ensure the divergence of the serie $B(x)^{-1}$ for any value of x in $[0, 2\pi[$. With this purpose in mind, some useful tools are introduced in the next section.

2.3.2 A flavour of analytic number theory

The notion of discrepancy introduced hereafter aims at comparing the distribution of the fractional parts of a sequence of real numbers with a uniform distribution measure.

Definition 2.3.1 *Consider a sequence $(x_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ of real numbers. The discrepancy of the sequence $(x_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ is defined by:*

$$D_N = \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \left| \frac{A([a, b[; N; (x_m))}{N} - (b - a) \right|$$

with $A([a, b[; N; (x_m)) = \#\{1 \leq m \leq N; \{x_m\} \in [a, b[\}$.

If $\lim_{N \rightarrow +\infty} D_N = 0$ the sequence is said to be uniformly distributed mod(1).

Despite this abstract definition, a practical way to estimate the value of the discrepancy of a sequence is given by Theorem 2.3.1:

Theorem 2.3.1 (Erdős - Turán) *For any finite sequence $(x_m)_{1 \leq m \leq N}$ of real numbers and any positive integer n , we have:*

$$D_N \leq \frac{6}{n+1} + \frac{4}{\pi} \left(\sum_{h=1}^n \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{n+1} \right) \left| \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{2\pi i h x_m} \right| \right) .$$

This result is proved in [KN] for example. Now, the problem is shifted to an asymptotic analysis of the exponential sum. Fortunately, this can be done for a sequence $(x_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ defined by a polynomial:

Definition 2.3.2 *Let d, N be positive integral numbers. Define the quantity ν by: $\nu = d^{-1}$. For each value of N , divide the points of the d -dimensional space $\mathbb{R}^d$ in two disjoint classes $\mathcal{C}_1(N)$ and $\mathcal{C}_2(N)$ by the following procedure : a point $(a_1, \dots, a_d)$ of $\mathbb{R}^d$ belongs to $\mathcal{C}_1(N)$ if there exists a d -uple of rational irreducible fractions $(\frac{s_1}{q_1}, \dots, \frac{s_d}{q_d})$ with positive denominators whose least common multiple Q does not exceed N^ν such that :*

$$\forall r \in \{1, \dots, d\}, \quad |a_r - \frac{s_r}{q_r}| \leq N^{-r+\nu} .$$

A point of $\mathbb{R}^d$ which is not in $\mathcal{C}_1(N)$ belongs to $\mathcal{C}_2(N)$.

Remark : Fix any compact d -dimensional box in $\mathbb{R}^d$. The volume of the points which belong to $\mathcal{C}_1(N)$ in this box tends to 0 as N tends to infinity [V].

Theorem 2.3.2 (Vinogradov) *Let d, N be positive integral numbers and A be the polynomial: $A(x) = \sum_{k=1}^d a_k x^k$ where $a_d, \dots, a_1$ are real numbers, a_d non zero and $d \geq 3$. Then defining,*

$$\rho = \frac{1}{8d^2(\ln d + 1.5 \ln \ln d + 4.2)} ,$$

there exists some positive constants C_d and ϵ_0 depending on A such that:

$$\forall h \leq N^{2\rho} , \quad \left| \sum_{m=1}^N e^{2i\pi h A(m)} \right| \leq C_d N^{1-\rho} \quad \text{if } (a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{C}_2(N) .$$

For a proof, see [V], chapter IV, Theorem 3.

The fundamentals are now stated. The analytic machinery can be turned on, to prove the last part of the theorem.

2.3.3 Technicalities

In the sequel, the values of the real numbers x and κ are fixed respectively in $[0, 2\pi[$ and $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$.

It is now time to give the right inputs to the machinery, with the following notations: $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$\theta_m = 2\pi \left\{ \frac{\lambda_m T}{2\pi} \right\} = 2\pi \{P_{H_0, T}(m)\}$$

where $P_{H_0, T}$ is the polynomial defined by:

$$P_{H_0, T}(x) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=1}^d p_k x^k ,$$

$x \in \mathbb{R}$. The polynomial $P_{H_0, T}$ will play the role of the polynomial A . Since the coefficient $p_r T / 2\pi$ is irrational, this sequence is uniformly distributed mod(1) (e.g. [KN]).

The two following steps aim at giving an estimate of the discrepancy of the sequence $(P_{H_0,T}(m))_{m \in \mathbb{N}^*}$.

Lemma 2.3.2 *Let $(a_1, \dots, a_d)$ be a d -uple of $\mathbb{R}^d$ with rational coefficients. There exists an integer N_0 such that: $\forall N \geq N_0, (a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{C}_1(N)$.*

Suppose now, there exists an r in $\{1, \dots, d\}$ such that $rd > 3$ and a_r is irrational: then, there exists a subsequence $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^}$ such that:*

$$(a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{C}_2(N_k) \text{ with } \lim_{k \rightarrow +\infty} N_k = +\infty .$$

Proof: The first part of the lemma relies on the following remark: the rational coefficients $(a_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$ can be written as irreducible fractions $(\frac{s_i}{q_i})_{i \in \{1, \dots, d\}}$ with positive denominators whose least common multiple Q is fixed. Q is necessarily smaller than N^ν for N large enough. Now assume there exists $r \in \{1, \dots, d\}$ such that $rd > 3$ and a_r is an irrational number. We prove the second part of the lemma *ad absurdum*. Suppose that for each value of N large enough $(a_1, \dots, a_d)$ belongs to $\mathcal{C}_1(N)$, i.e. there exists a d -uple of irreducible fractions with positive denominators $(\frac{s_{1,N}}{q_{1,N}}, \dots, \frac{s_{d,N}}{q_{d,N}})$ with a least common multiple Q_N such that:

$$\begin{cases} q_{r,N} \leq Q_N \leq N^\nu \\ |a_r - \frac{s_{r,N}}{q_{r,N}}| \leq N^{-r+\nu} \end{cases} \quad (2.31)$$

The first condition of 2.31 implies: $q_{r,N}^{-2} \geq N^{-2\nu} \geq N^{-r+\nu}$. The condition $rd > 3$ (i.e. $r > 3\nu$) ensures that for N large enough,

$$N^{-r+\nu} < \frac{N^{-2\nu}}{2}.$$

Therefore, by the second inequality of (2.31):

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}^*, \forall N \geq N_0, |a_r - \frac{s_{r,N}}{q_{r,N}}| < \frac{1}{2q_{r,N}^2} . \quad (2.32)$$

Therefore, the sequence $(\frac{s_{r,N}}{q_{r,N}})_{N \geq N_0}$ is a subsequence of the sequence of irreducible rational fractions obtained by the continued fractions expansion of a_r (Theorem 19, [Kh]). The sequence $(q_{r,N})_{N \geq N_0}$ is necessarily increasing. Since a_r is irrational,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} q_{r,N} = +\infty .$$

It is therefore possible to extract a subsequence $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in such a way that: $\forall k \in \mathbb{N}, q_{N_{k+1}} = \inf\{N > N_k; q_{N_k} < q_{N_{k+1}}\}$. It means that each term of the subsequence $(\frac{p_{r,N_k}}{q_{r,N_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ is a convergent different from the previous ones. It follows from Theorem 13 [Kh] that: $\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in [N_k, N_{k+1} - 1]$,

$$\frac{1}{2q_{N_{k+1}}^2} < \left| a_r - \frac{p_N}{q_N} \right| \leq N^{-r+\nu}$$

In particular, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2q_{N_{k+1}}^2} < (N_{k+1} - 1)^{\nu-r} . \quad (2.35)$$

By hypothesis, $\forall k \in \mathbb{N}$, $q_{N_{k+1}} \leq N_{k+1}^\nu$ i.e. $q_{N_{k+1}}^2 \leq N_{k+1}^{2\nu}$. Therefore, multiplying this inequality with inequality (2.35) entails: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} \leq N_{k+1}^{-r+3\nu} (1 - N_{k+1}^{-1})^{-r+\nu} .$$

The contradiction follows from the fact that $r > 3\nu > \nu$ by taking the limit:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N_k = +\infty .$$

□

Lemma 2.3.3 *If there exists an integer r in $\{1, \dots, d\}$ such that $rd > 3$ and the coefficient $\frac{T}{2\pi}p_r$ is irrational, we can extract a subsequence $(N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ such that: $\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$,*

$$D_{N_k} \leq \frac{C}{N_k^\beta}$$

with $0 < \beta < \rho$.

Proof: If $\frac{T}{2\pi}p_r$ is irrational and $r > 3\nu$, then by Lemma 2.3.2 and Theorem 2.3.2, we get:
 $\exists C_{1,d} > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall h \leq N_k^{2\rho}$,

$$\left| \sum_{m=1}^{N_k} e^{2i\pi h P_{H_0, T}(m)} \right| \leq C_{1,d} N_k^{1-\rho} .$$

Combining this result with Theorem 2.3.1, it follows that: $\exists C_{2,d} > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \leq N_k^{2\rho}$,

$$D_{N_k} \leq C_{2,d} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{N_k^\rho} \sum_{h=1}^n \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{n+1} \right) \right) .$$

Then using some integral estimates on the last term: $\forall n \leq N_k^{2\rho}$,

$$\sum_{h=1}^n \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 + \sum_{h=2}^n \frac{1}{h} - \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \leq \sum_{h=2}^n \int_{h-1}^h \frac{dx}{x} + \frac{1}{n+1} = \ln n + \frac{1}{n+1} .$$

Combining these two inequalities, choosing n equal to $[N_k^{2\rho}]$ and β in $] \epsilon, \rho[$ where ϵ is defined in Theorem 2.2.3, the following inequality holds: $\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$D_{N_k} \leq C_{2,d} \left(\frac{1}{N_k^{2\rho}} + \frac{2\rho \ln N_k}{N_k^\rho} + \frac{1}{N_k^{3\rho}} \right) \leq C \frac{1}{N_k^\beta} .$$

□

Such an estimate allows us to compute roughly the number of real numbers θ_m which are close in a sense to x . It is the aim of the next lemma. The notion of nearness used in the following to compute these numbers θ_m is defined with respect to the family of intervals:

$$J_l(x) = \left[\frac{x}{2\pi}, \frac{x}{2\pi} + l^{-\epsilon} (\ln l)^{\frac{-1}{2}} \right[, \quad l > 1$$

and the estimate of the number of real numbers θ_m close to x will be given by the cardinality of the following sets :

$$S_{1,N}(x) = \{1 \leq m \leq N; \frac{\theta_m}{2\pi} \in J_m(x)\},$$

$$S_{2,N}(x) = \{1 \leq m \leq N; \frac{\theta_m}{2\pi} \in J_N(x)\}.$$

Notice that in any case, $S_{2,N}(x) \subset S_{1,N}(x)$.

Lemma 2.3.4 *Given $x \in [0, 2\pi[$, $\exists K_x > 0, \forall k \geq K_x$,*

$$\#S_{1,N_k}(x) \geq [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}].$$

Proof: Since $x/2\pi \in [0, 1[$, $\exists N_x > 0, \forall N \geq N_x, J_N(x) \subset [0, 1]$. By definition, pour tout $N \geq N_x$,

$$\left| \frac{\#S_{2,N}(x)}{N} - N^{-\epsilon}(\ln N)^{-\frac{1}{2}} \right| \leq D_N$$

In particular, $N^{1-\epsilon}(\ln N)^{-\frac{1}{2}} - ND_N \leq \#S_{2,N}(x)$, for such an integer N . Therefore, for any integral number k such that: $N_k \geq N_x$,

$$N_k^{1-\epsilon}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}} - CN_k^{1-\beta} \leq \#S_{2,N_k}(x) \leq \#S_{1,N_k}(x).$$

As $\epsilon < \beta, \exists K_x > 0, \forall k \geq K_x$,

$$[\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] \leq \frac{N_k^{1-\epsilon}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}}{2} \leq \#S_{1,N_k}(x).$$

which implies the lemma. $\square$

Gathering all the previous lemmas, we are now able to bound $B(x)^{-1}$ from below and prove the final step of our theorem. Due to Lemma 2.3.3, this estimate will be uniform in the parameter x .

Lemma 2.3.5 *For all $x \in [0, 2\pi[$, $B(x)^{-1} = +\infty$.*

Proof: We recall the real number x is fixed in $[0, 2\pi[$. Using its definition, $B(x)^{-1}$ admits the following lower bound for all positive integers k :

$$B(x)^{-1} \geq 4 \sum_{m \in S_{1,N_k}(x)} \frac{|\langle \phi_m | \phi \rangle|^2}{(x - \theta_m)^2}.$$

But, for all $m \in S_{1,N_k}(x)$ such that $|x - \theta_m| \leq 2\pi m^{-\epsilon}(\ln m)^{-\frac{1}{2}}$ and $|\langle \phi_m | \phi \rangle| \geq cm^{-\frac{1+\epsilon}{2}}$. It implies, for all k :

$$B(x)^{-1} \geq \frac{4c^2}{(2\pi)^2} \sum_{m \in S_{1,N_k}(x)} \frac{\ln m}{m^{1-\epsilon}}.$$

In order to give an estimate of the lower bound, asymptotically in k , notice that by Lemma 2.3.4, the set $S_{1,N_k}(x)$ contains at least $[\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}]$ indices for all k greater

than K_x . Now we may bound this serie of positive terms from below by the sum of the $[\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}]$ smallest terms of the series:

$$\sum_{m=1}^{N_k} \frac{\ln m}{m^{1-\epsilon}}.$$

Notice that the positive valued function f_ϵ defined by: $\forall x \in [1, +\infty[$,

$$f_\epsilon(x) = \frac{\ln x}{x^{1-\epsilon}}, \quad 0 < \epsilon < 1,$$

is strictly increasing on the interval $[1, e^{\frac{1}{1-\epsilon}}]$ and strictly decreasing on $[e^{\frac{1}{1-\epsilon}}, +\infty[$. Moreover, $f_\epsilon(1) = 0$ and $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\epsilon(x) = 0$. Therefore, as

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] = +\infty$$

there exists $K_{f_\epsilon} \in \mathbb{N}^*$ such that for all $k \geq K_{f_\epsilon}$ and for all $m \geq N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1$:

$$f_\epsilon(m) \leq f_\epsilon(N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1) < \min \left\{ f_\epsilon(l); l \in \{2, \dots, N_k - [\frac{1}{2}N_k^{1-\epsilon}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}]\} \right\}.$$

The shift $+1$ in the indices takes into account the fact that $f_\epsilon(1)$ also belongs to the set of the $[\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}]$ smallest terms. Therefore, for all integer k greater than $\max(K_x, K_{f_\epsilon})$, the following holds:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in S_{1, N_k}(x)} \frac{\ln m}{m^{1-\epsilon}} &\geq \sum_{m=N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1}^{N_k} \frac{\ln m}{m^{1-\epsilon}} \\ &\geq \int_{N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1}^{N_k + 1} \frac{\ln x}{x^{1-\epsilon}} dx \\ &\geq (N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1)^\epsilon \int_{N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1}^{N_k + 1} \frac{\ln x}{x} dx \\ &= (N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1)^\epsilon \times \\ &\quad \left(\frac{1}{2}(\ln(N_k + 1))^2 - \frac{1}{2}(\ln(N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1))^2 \right). \end{aligned}$$

It remains to precise the asymptotics of each term when k tends to infinity:

$$\begin{aligned} (N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1)^\epsilon &\sim N_k^\epsilon, \\ (\ln(N_k + 1))^2 &= (\ln N_k)^2 + \frac{2 \ln N_k}{N_k} + o(\frac{\ln N_k}{N_k}), \\ (\ln(N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1))^2 &= (\ln N_k)^2 - \frac{(\ln N_k)^{\frac{1}{2}}}{N_k^\epsilon} + o(\sqrt{\ln N_k} N_k^\epsilon). \end{aligned}$$

Gathering these informations, the asymptotics of the lower bound is given by:

$$(N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1)^\epsilon \int_{N_k - [\frac{N_k^{1-\epsilon}}{2}(\ln N_k)^{-\frac{1}{2}}] + 1}^{N_k + 1} \frac{\ln x}{x} dx \sim \sqrt{\ln N_k}.$$

which implies:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{m \in S_{1, N_k}(x)} \frac{\ln m}{m^{1-\epsilon}} = +\infty.$$

Necessarily, $B(x)^{-1} = +\infty$. □

We deduce from Lemmas 2.3.5 and 2.3.1, that $\sigma_{pp}(V_{\kappa T}) = \emptyset$. So, the spectrum of $V_{\kappa T}$ is purely singular continuous.

2.4 Proofs of Theorems 2.2.4 and 2.2.5

A similar strategy allows us to prove Theorems 2.2.4 and 2.2.5. However, in these cases, the estimates on the discrepancies (D_N) involved in the computations are known for each value of the integral number N . The proofs are therefore considerably shortened.

2.4.1 Complementary tools

Lemma 2.4.1 is the cornerstone of the proof of Theorems 2.2.4 and 2.2.5:

Lemma 2.4.1 *Let $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ be a uniformly distributed mod(1) sequence of $[0, 2\pi[$. The discrepancy of the family $(\theta_m)_{m \in \{1, \dots, N\}}$, $N \in \mathbb{N}^*$ is denoted by D_N . For any sequence of complex number $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ such that:*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m}|a_m|}{\sqrt{D_m}} = +\infty ,$$

we get: $\forall x \in [0, 2\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|^2}{\sin^2(\frac{x - \theta_n}{2})} = +\infty .$$

Lemma 2.4.1 implies:

Corollary 2.4.1 *Let $T > 0$ and $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$. Under the hypotheses **H**₁ and **H**₂, assume that the sequence $(\lambda_m T)_{m \in \mathbb{N}^*}$ is uniformly distributed mod(1), with a discrepancies sequence denoted by $(D_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$. For any vector $\phi \in \mathcal{H}$ such that:*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{m}|\langle \phi_m | \phi \rangle|}{\sqrt{D_m}} = +\infty ,$$

the spectrum of $V_{\kappa T}$ is purely singular continuous.

Lemma 2.4.1 and Corollary 2.4.1 relate clearly the occurrence of a singular continuous component in the spectrum of $V_{\kappa T}$ to the asymptotics of (D_n) and $(|\langle \phi_n | \phi \rangle|^2)$. Systems which do not enter the scope of Theorem 2.2.3 may be analyzed. However, some cases will

still be out of range. Indeed, Theorem 2.4.1 [KN] gives a technical limit to Lemma 2.4.1:

Theorem 2.4.1 *Let $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ be an arbitrary sequence of real numbers. $\exists C > 0$,*

$$D_N \geq C \frac{\ln N}{N} .$$

It means therefore that the nature of the spectrum of $V_{\kappa T}$ is still an open question if the eigenvalues $(\lambda_m T)_{m \in \mathbb{N}^*}$ are uniformly distributed mod(1) and ϕ is such that $(|\langle \phi_n | \phi \rangle|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ belongs to $l^2(\mathbb{N}^*) \setminus l^1(\mathbb{N}^*)$ and $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\langle \phi_n | \phi \rangle| \leq \frac{\sqrt{\ln n}}{n} .$$

Proof of Lemma 2.4.1: Let us recall first that the uniform distribution of the sequence $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ implies:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} D_N = 0 .$$

Define the following sets: $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned} S_{1,N}(x) &= \{m \leq N; \theta_m \in [x, x + 2D_m[\} , \\ S_{2,N}(x) &= \{m \leq N; \theta_m \in [x, x + 2D_N[\} . \end{aligned}$$

Therefore, using the definition of the discrepancy of a sequence 2.3.1, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$ND_N = 2ND_N - ND_N \leq \#S_{2,N}(x) \leq \#S_{1,N}(x) .$$

A consequence of this inequality and Theorem 2.4.1 is:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} ND_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \#S_{1,N}(x) = +\infty .$$

On the other hand: $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \frac{|a_m|^2}{\sin^2\left(\frac{x-\theta_m}{2}\right)} &\geq 4 \sum_{m=1}^N \frac{|a_m|^2}{(x-\theta_m)^2} \\ &\geq 4 \sum_{m \in S_{1,N}(x)} \frac{|a_m|^2}{(x-\theta_m)^2} \\ &\geq \sum_{m \in S_{1,N}(x)} \frac{|a_m|^2}{D_m^2} . \end{aligned}$$

If there exists $C > 0$ such that for all $N \in \mathbb{N}^*$ and for all $n \in S_{1,N}(x)$, $|a_n| \geq CD_n$, the terms of the last series may be bounded from below by C^2 . Therefore, for all $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{m \in S_{1,N}(x)} \frac{|a_m|^2}{D_m^2} \geq C^2 \#S_{1,N}(x) .$$

The conclusion follows in taking the limit of the lower bound when N tends to infinity. However, there may exist a subsequence $\left(\frac{|a_{m_k}|}{D_{m_k}}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ which tends to zero. Up to an extraction, we can assume this sequence is decreasing. The last $[ND_N]$ terms of the series can be bounded from below by the last one: $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{m \in S_{1, N_k}(x)} \frac{|a_m|^2}{D_m^2} \geq [N_k D_{N_k}] \frac{|a_{N_k}|^2}{D_{N_k}^2} ,$$

and the conclusion follows from the hypotheses. $\square$

The proof of Corollary 2.4.1 is immediate since it is enough to apply Lemma 2.4.1 to the sequences $(a_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ and $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ defined by: $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$a_m = |\langle \phi_m | \phi \rangle| , \quad \theta_m = 2\pi \left\{ \frac{\lambda_m T}{2\pi} \right\} .$$

The conclusion follows from Lemma 2.3.1.

2.4.2 Proof of Theorem 2.2.5

The proof of Theorem 2.2.5 is a consequence of Corollary 2.4.1 and the following metric theorem:

Theorem 2.4.2 *Let $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ be a non decreasing sequence of real numbers which satisfy the hypothesis $\mathbf{H}_a(\gamma)$ for a value of $\gamma \in]0, 1[$. If $D_{N,T}$ denotes the discrepancy of the sequence $(\lambda_m T)_{1 \leq m \leq N}$ and ϵ is a fixed positive constant, then for almost every T :*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N^{\frac{1-a}{2}} D_{N,T}}{(\ln(N+1))^{\frac{5}{2}+\epsilon}} = 0 .$$

If $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}^}$ is a non decreasing sequence of real numbers which satisfy the hypothesis $\mathbf{H}_b(\gamma)$ for a value of $\gamma > 2$ and if ϵ is a fixed positive constant, then for almost every T :*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} D_{N,T} (\ln(N+1))^{\frac{a-2}{3}-\epsilon} = 0 .$$

See [Bak] p.288. and pp.290-291 for a proof.

Remark: This result is an improvement of a theorem of Erdős and Koksma [EK].

2.4.3 Proof of Theorem 2.2.4

Theorem 2.2.4 is a consequence of Corollary 2.4.1 and Theorem 2.4.3:

Theorem 2.4.3 *For any θ of type I_η ($\eta > 1$), the discrepancy of the sequence $(\theta n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is such that: $\forall \epsilon > 0$,*

$$D_N = O(N^{-\frac{1}{1+\eta}+\epsilon} + N^{-\frac{2}{3}} \sqrt{\ln N})$$

See [Ko] or [Beh].

Chapitre 3

Sur un modèle de conduction électronique unidimensionnel

La situation que nous allons considérer maintenant est motivée par une étude physique et numérique d'un modèle de conduction électronique unidimensionnel [BB].

Un électron astreint à circuler sur un anneau unidimensionnel de longueur L traversé par un flux magnétique croissant linéairement avec le temps est soumis à un champ électrique induit constant. La dynamique d'un tel système est gouvernée par un hamiltonien de la forme suivante :

$$H(t) = (-i\partial_x - Ft)^2 + V(x) \quad (3.1)$$

sur $L^2(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$. Le potentiel V est intrinsèque à l'anneau et périodique de période L , F est l'intensité du champ électrique induit. Cet hamiltonien ne dépend pas du temps de manière périodique. Néanmoins, en effectuant une transformation de jauge de la forme e^{-iFxt} [AN], l'étude du système décrit par l'hamiltonien (3.1) se ramène à l'étude d'un nouveau système défini par l'hamiltonien :

$$H_p(t) = -\partial_x^2 + Fx + V(x) \quad , \quad (3.2)$$

sur un domaine $\mathcal{D}_t$ de fonctions $\phi \in L^2(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ défini par des conditions de bord de type Floquet qui pour un potentiel V régulier s'écrivent formellement à l'instant t :

$$\begin{aligned} e^{iFLt}\phi'(L) - \phi'(0) &= 0 \\ e^{iFLt}\phi(L) - \phi(0) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

La famille d'hamiltoniens $(H_p(t))$ dépend donc du temps de manière périodique avec pour période : $T = 2\pi/FL$. L'arsenal classique d'étude des systèmes quantiques périodiques peut alors être mis en oeuvre pour analyser ce modèle. L'hamiltonien de Floquet associé à la famille $(H_p(t))$ est unitairement équivalent à l'hamiltonien Stark :

$$-\partial_x^2 + Fx + V(x) \quad ,$$

défini sur $L^2(\mathbb{R})$ [AN], [ADE]. Le lecteur pourra se reporter à [ADE], [ABDN] pour une adaptation de ces résultats au cas de potentiels singuliers de type δ' . La dynamique électronique associée à certaines classes de potentiels V a ainsi pu être abordée par ce

procédé (voir [ADE] et [ABDN] pour une revue sur le sujet).

La connaissance de l'opérateur de Floquet du système décrit par l'hamiltonien (3.2) est un autre tremplin pour étudier la dynamique du modèle de conduction initial (3.1). Cet opérateur n'est cependant pas connu explicitement. Néanmoins, sur la base de considérations physiques, il est possible d'en construire une approximation explicite dans un régime adiabatique, sous la forme d'un autre opérateur unitaire [BB]. Cette construction sera détaillée au prochain paragraphe. La dynamique engendrée par cet opérateur a jusqu'ici essentiellement été étudiée par le biais de simulations numériques (voir [BB] pour une revue). Celles-ci suggèrent l'existence de régimes différents suivant la régularité du potentiel V [Ao]. Nous nous proposons d'examiner le spectre de l'opérateur unitaire utilisé comme approximation dans quelques-unes des situations étudiées par ces auteurs [BB]. Cette étude permettra d'ouvrir le champ des études spectrales d'opérateurs unitaires à la méthode des matrices de transfert.

En revanche, l'interprétation de ces résultats sur la dynamique du modèle de conduction électronique initial est encore prématurée et reste sujette à caution. Elle dépend de la validité de l'approximation initiale de l'opérateur de Floquet, qui du point de vue mathématique n'a pas encore été vérifiée.

L'essentiel de l'analyse proposée par la suite (chapitres 3-5) fait l'objet d'une publication [BHJ].

3.1 Construction de l'opérateur de monodromie

Le principe de la construction de l'opérateur de monodromie utilisé par [BB] va maintenant être présenté. Le lecteur pourra se reporter à l'article [BB] pour plus de détails.

En présence de champ magnétique, le spectre instantané de la famille d'hamiltoniens $(H_p(t))$ se présente comme un ensemble discret de niveaux d'énergie qui dépend continûment et périodiquement du temps. Les valeurs propres décrivent ainsi des bandes d'énergie. L'écart entre deux bandes consécutives ("gap") et la largeur de ces bandes traduisent le degré de régularité du potentiel¹. En l'absence de champ induit, l'électron se contente de rester sur son niveau d'énergie initial. La présence du champ induit couple en principe les niveaux d'énergie entre eux permettant ainsi à l'électron de changer de niveau. En se plaçant dans un régime adiabatique, les auteurs considèrent que les seuls changements de niveaux possibles s'effectuent par transitions Zener aux instants où les niveaux sont au plus près² (figure 3.1).

1. Dans cet ordre d'idée, une expression pour la largeur $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des bandes indexées par n et les écarts $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ entre deux bandes consécutives d'indices n et $n+1$ est donnée par [BB] (pp 2858-3859) :

$$w_n = cn \quad , \quad c > 0$$

$$\Delta_n = \frac{1}{L} \left| \int_{-L}^0 V(x) e^{-2i\pi n \frac{x}{L}} dx \right| .$$

2. La probabilité de transition entre les niveaux d'indice n et $n+1$ est donnée par [BB] (p 3859) comme :

$$t_n = \exp \left(-c \frac{\Delta_n^2}{w_n} \right) \sim \exp \left(-c \frac{\Delta_n^2}{n} \right) \quad , \quad c > 0 .$$

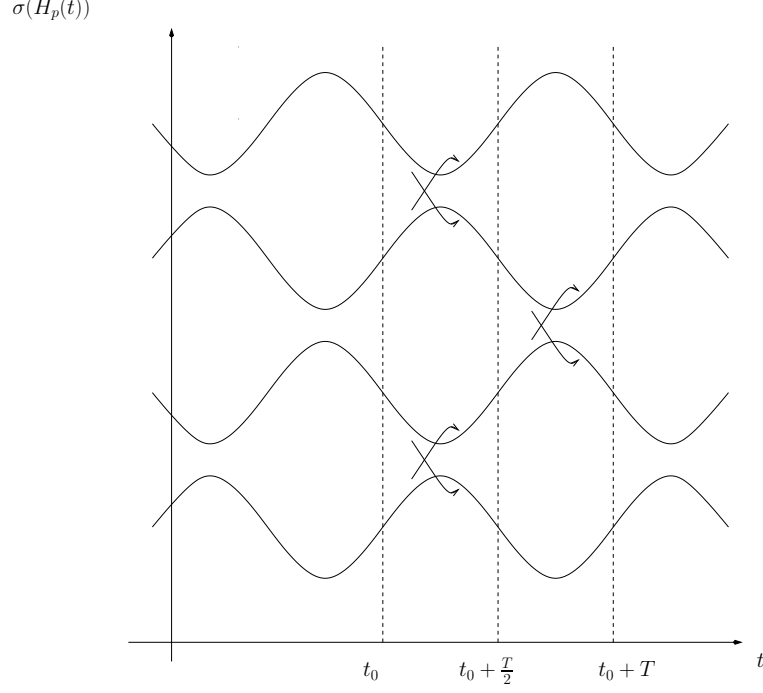


FIG. 3.1 – Evolution du spectre instantané de l'hamiltonien $H_p(t)$ au cours du temps.

Partant d'un niveau donné, ces transitions s'effectuent avec le niveau adjacent supérieur sur une demi-période, et le niveau adjacent inférieur sur l'autre demi-période. Elles sont décrites par des matrices unitaires de diffusion de taille 2 et notées $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la forme (3.5). L'évolution du système est ainsi décrit sur chaque demi-période par un opérateur unitaire construit comme la somme directe de telles matrices sur une base instantanée, orthonormée de vecteurs propres de $H_p(t_0)$. L'évolution complète sur une période T est alors donnée par le produit de ces deux opérateurs unitaires (équations (3.7)). C'est un opérateur unitaire penta-diagonal sur la base instantanée de vecteurs propres de l'hamiltonien $H_p(t_0)$. Compte tenu de l'hypothèse adiabatique, cette approximation n'est en principe valable que pour des champs F relativement faibles.

L'espace de Hilbert séparable considéré dans ce nouveau modèle est identifié par équivalence unitaire à $l^2(\mathbb{N}^*)$. Les espaces $l^2(\mathbb{N}^*)$ et $l^2(\mathbb{Z})$ sont munis de leur base canonique respective $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. L'espace $l^2(\mathbb{Z})$ est lui-même identifié à $l^2(-\mathbb{N}) \oplus l^2(\mathbb{N}^*)$. De manière générale, pour tout intervalle réel I le projecteur orthogonal P_I sera défini par :

$$P_I = \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap I} |\phi_k\rangle \langle \phi_k| .$$

Toute matrice unitaire appartenant à $GL_2(\mathbb{C})$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$S = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} re^{-i\nu} & ite^{i\gamma} \\ ite^{-i\gamma} & re^{i\nu} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où les phases ν, γ et θ appartiennent au tore $\mathbb{T}$. Les coefficients r, t appelés coefficients de réflexion et de transmission appartiennent à l'intervalle unité $[0, 1]$ et vérifient la relation:

$r^2 + t^2 = 1$. Etant données, $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ trois suites de $\mathbb{T}^\mathbb{Z}$ et $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (r_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ deux suites de $[0,1]^\mathbb{Z}$ vérifiant : $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$r_k^2 + t_k^2 = 1 \quad , \quad (3.6)$$

on peut construire une suite de matrices de diffusion $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sur le modèle de l'équation (3.5). L'opérateur de monodromie modélisé, noté ici $U_{\mathbb{N}^*}$ se construit sur $l^2(\mathbb{N}^*)$ comme le produit de deux opérateurs unitaires $U_{e, \mathbb{N}^*}, U_{o, \mathbb{N}^*}$ diagonaux par blocs et définis par :

$$\begin{aligned} U_{e, \mathbb{N}^*} &= e^{-i\theta_0} P_{\{1\}} + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} P_{[2k, 2k+1]} S_{2k} P_{[2k, 2k+1]} \\ U_{o, \mathbb{N}^*} &= \sum_{k \in \mathbb{N}} P_{[2k+1, 2k+2]} S_{2k+1} P_{[2k+1, 2k+2]} \\ \text{et } U_{\mathbb{N}^*} &= U_{o, \mathbb{N}^*} U_{e, \mathbb{N}^*} \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'opérateur $U_{e, \mathbb{N}^*}$ décrit les transitions susceptibles de survenir entre les niveaux d'énergie au cours de la première demi-période, l'opérateur $U_{o, \mathbb{N}^*}$ celles susceptibles de survenir au cours de la deuxième demi-période. L'action du produit sur les vecteurs de la base canonique se résume à : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} U_{\mathbb{N}^*} \phi_{2k} &= ir_{2k} t_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k-1})} e^{-i(v_{2k} - \gamma_{2k-1})} \phi_{2k-1} \\ &+ r_{2k} r_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k-1})} e^{-i(v_{2k} - v_{2k-1})} \phi_{2k} \\ &+ ir_{2k+1} t_{2k} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k+1})} e^{-i(\gamma_{2k} + v_{2k+1})} \phi_{2k+1} \\ &- t_{2k} t_{2k+1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k+1})} e^{-i(\gamma_{2k} + \gamma_{2k+1})} \phi_{2k+2} \\ U_{\mathbb{N}^*} \phi_{2k+1} &= -t_{2k} t_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k-1})} e^{i(\gamma_{2k} + \gamma_{2k-1})} \phi_{2k-1} \\ &+ it_{2k} r_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k-1})} e^{i(\gamma_{2k} + v_{2k-1})} \phi_{2k} \\ &+ r_{2k} r_{2k+1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k+1})} e^{i(v_{2k} - v_{2k+1})} \phi_{2k+1} \\ &+ ir_{2k} t_{2k+1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k+1})} e^{i(v_{2k} - \gamma_{2k+1})} \phi_{2k+2} . \end{aligned} \quad (3.8)$$

et

$$U_{\mathbb{N}^*} \phi_1 = e^{-i(\theta_0 + \theta_1)} (r_1 e^{-iv_1} \phi_1 + it_1 e^{-i\gamma_1} \phi_2) . \quad (3.9)$$

L'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ est penta-diagonal. De manière semblable, il est possible de construire un opérateur unitaire $U_{\mathbb{Z}}$ sur $l^2(\mathbb{Z})$ défini par :

$$\begin{aligned} U_{\mathbb{Z}} &= U_{o, \mathbb{Z}} U_{e, \mathbb{Z}} \\ \text{où } U_{e, \mathbb{Z}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{[2k, 2k+1]} S_{2k} P_{[2k, 2k+1]} \\ \text{et } U_{o, \mathbb{Z}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{[2k+1, 2k+2]} S_{2k+1} P_{[2k+1, 2k+2]} . \end{aligned} \quad (3.10)$$

L'image des vecteurs de la base canonique par cet opérateur obéit aux relations (3.8) pour tout entier k de $\mathbb{Z}$.

L'objectif central de l'étude qui va suivre est de déterminer la nature spectrale de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ pour différents choix de suites (θ_k) , (γ_k) , (v_k) , (r_k) et (t_k) obéissant aux conditions (3.6). Certains cas se résolvent simplement, d'autres font appel à des techniques plus évoluées, utilisées pour étudier les matrices de Jacobi. Ils sont le plus souvent obtenus par déduction des résultats obtenus pour $U_{\mathbb{Z}}$. L'intermédiaire de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ n'est pas toujours obligatoire techniquement mais permet de simplifier la preuve de certains résultats.

3.2 Quelques lemmes utiles

Lemme 3.2.1 *L'ensemble $\mathbb{L}$ désignera $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{Z}$. Soit $U_{\mathbb{L}}$ (resp. $U'_{\mathbb{L}}$) l'opérateur unitaire construit sur le modèle des relations (3.7) à l'aide des suites (γ_k) , (θ_k) , (v_k) , (r_k) et (t_k) (resp. (γ'_k) , (θ'_k) , (v'_k) , (r'_k) et (t'_k)). Les opérateurs $U_{\mathbb{L}}$ et $U'_{\mathbb{L}}$ sont unitairement équivalents.*

Autrement dit, le choix de la suite de phases (γ_k) n'a aucune influence sur la nature spectrale des opérateurs unitaires $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U_{\mathbb{Z}}$. La preuve sera effectuée dans le cas où $\mathbb{L} = \mathbb{N}^*$. La démonstration du cas $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$ est semblable [BHJ].

Preuve : Soit $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de $\mathbb{T}^{\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{k-1} (\gamma'_j - \gamma_j) + \eta_1$$

où η_1 prend une valeur fixé quelconque dans $\mathbb{T}$. On a : $\eta_{k+1} - \eta_k = \gamma'_k - \gamma_k$. Soit V l'opérateur unitaire défini sur la base canonique par : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$V\phi_k = e^{i\eta_k} \phi_k .$$

En utilisant les équations (3.8) et (3.9), un calcul permet d'identifier les opérateurs $V^*U_{\mathbb{N}^*}V$ et $U'_{\mathbb{N}^*}$ sur la base canonique et par extension sur l'ensemble de l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N}^*)$. $\square$

Lemme 3.2.2 *Soit $U_{\mathbb{N}^*}$ (resp. $U'_{\mathbb{N}^*}$) l'opérateur unitaire construit sur le modèle des relations (3.7) à l'aide des suites (γ_k) , (θ_k) , (v_k) , (r_k) et (t_k) (resp. (γ'_k) , (θ'_k) , (v'_k) , (r'_k) et (t'_k)). Si*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} |t_k - t'_k| = 0 \quad , \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta'_k}| = 0 \\ \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |e^{i(v_k - v_{k-1})} - e^{i(v'_k - v'_{k-1})}| = 0 \quad , \end{aligned}$$

alors $\sigma_{ess}(U_{\mathbb{N}^*}) = \sigma_{ess}(U'_{\mathbb{N}^*})$. Si par ailleurs, il existe $\epsilon > 1/2$ pour lequel,

$$\begin{aligned} \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \delta_j j^{2\epsilon} < \infty \quad \text{où} \\ \delta_j = \max_{l \in \{j-2, j-1, j, j+1\}} \left\{ |r_l - r'_l|, |t_l - t'_l|, |e^{i\theta_l} - e^{i\theta'_l}|, |e^{i(v_l - v_{l-1})} - e^{i(v'_l - v'_{l-1})}| \right\} \quad , \end{aligned}$$

alors les sous-espaces spectraux associés aux composantes absolument continues des opérateurs $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U'_{\mathbb{N}^*}$ peuvent être mis en correspondance unitaire. En outre, $\sigma_{ac}(U_{\mathbb{N}^*}) = \sigma_{ac}(U'_{\mathbb{N}^*})$.

Preuve : Compte tenu du lemme 3.2.1, le choix des phases (γ_k) et (γ'_k) ne modifie pas la nature spectrale des opérateurs $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U'_{\mathbb{N}^*}$. Par commodité, elles seront fixées dans la preuve de la manière suivante : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\gamma_k = (-1)^{k+1} v_k \quad \text{et} \quad \gamma'_k = (-1)^{k+1} v'_k .$$

On notera $K = U_{\mathbb{N}^*} - U'_{\mathbb{N}^*}$ et $K_N = P_{[1, 2N+1]} K P_{[1, 2N+1]}$ pour $N > 1$. Les éléments de matrices des opérateurs K et K_N susceptibles d'être non nuls dans la base canonique vérifient : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $K_{jk} = \langle \phi_j | K \phi_k \rangle \leq 5\delta_k$ et

$$(K - K_N)_{jk} = \langle \phi_j | K - K_N \phi_k \rangle \leq 5\delta_k .$$

En ne tenant compte que des éléments de matrices non nuls de l'opérateur $K - K_N$ exprimé dans la base canonique, la norme de l'opérateur $K - K_N$ est majorée par une estimation Schur-Holmgren ([Kato], p. 143) :

$$\begin{aligned} \|K - K_N\| &\leq \sqrt{\max_{j \geq 2N+1} \sum_{k=j-2}^{j+2} |(K - K_N)_{jk}|} \sqrt{\max_{k \geq 2N} \sum_{j=k-2}^{k+2} |(K - K_N)_{jk}|} \\ &\leq 20 \sqrt{\max_{j \geq 2N+1} \delta_j} \sqrt{\max_{k \geq 2N} \delta_k} \leq 20 \max_{k \geq 2N} \delta_k . \end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses, la suite d'opérateurs de rang fini $(K_N)_{N \geq 1}$ converge donc en norme vers K . L'opérateur K est donc compact. L'égalité des composantes essentielles des spectres des opérateurs $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U'_{\mathbb{N}^*}$ n'est plus qu'une conséquence du théorème de Weyl [RS]. La justification de la deuxième partie du lemme reprend une argumentation devenue classique [Ho2]. Soient $\epsilon > 1/2$ et Λ l'opérateur diagonal défini dans la base canonique par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Lambda \phi_k = k^\epsilon \phi_k$. L'opérateur Λ^{-1} est Hilbert-Schmidt. L'opérateur $\Lambda^{-1}(\Lambda K \Lambda) \Lambda^{-1}$ sera donc à trace si $\Lambda K \Lambda$ est borné. Or, $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, (\Lambda K \Lambda)_{jk} = (jk)^\epsilon K_{jk}$. En ne tenant compte que des coefficients matriciels non-nuls de $\Lambda K \Lambda$, la condition de Schur permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \|\Lambda K \Lambda\| &\leq \sqrt{\max_{j \in \mathbb{N}^*} \sum_{k=j-2}^{j+2} |(\Lambda K \Lambda)_{jk}|} \sqrt{\max_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{j=k-2}^{k+2} |(\Lambda K \Lambda)_{jk}|} \\ &\leq C_\epsilon \max_{j \in \mathbb{N}^*} j^{2\epsilon} \delta_j < +\infty , \end{aligned}$$

où C_ϵ est une constante positive. L'opérateur $\Lambda K \Lambda$ est donc borné. La conclusion du théorème est alors une conséquence du théorème de Birman-Krein [BK]. $\square$

Si sous les hypothèses du lemme précédent, une sous-suite de (t'_n) est nulle, cela signifie qu'une sous-suite de (t_n) tend vers 0. La caractérisation du spectre est alors plus précise :

Proposition 3.2.1 *Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = 0$, alors $\sigma_{ac}(U_{\mathbb{N}^*}) = \emptyset$.*

C'est un cas particulier du théorème B.0.1 démontré dans l'annexe B. Ce résultat ne répond que partiellement à la conjecture de [Ao], qui suppose que dans une telle configuration, le spectre de l'opérateur U est purement ponctuel.

3.3 Les cas simples

Pour certains choix de suites (r_k) et (t_k) , la nature du spectre de l'opérateur de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$ est parfaitement identifiée.

3.3.1 Absence de transitions entre bandes

Si la suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ possède une sous-suite nulle, alors le spectre de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ est purement ponctuel : $\sigma_c(U_{\mathbb{N}^*}) = \emptyset$. En effet, s'il existe un entier k pour lequel le coefficient de transmission t_k soit nul, l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ est réduit par les projecteurs $P_{[1, k]}$ et $I - P_{[1, k]}$.

Pour constater cela, il suffit d'utiliser la structure penta-diagonale de l'opérateur et de réécrire les équations (3.8) lorsqu'un coefficient de transmission (t_{2k} par exemple) est nul :

$$\begin{aligned}
U_{\mathbb{N}^*} \phi_l &= P_{[1,2k]} U_{\mathbb{N}^*} \phi_l \quad \text{si } l \leq 2k - 2 \\
U_{\mathbb{N}^*} \phi_{2k} &= it_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k-1})} e^{-i(v_{2k} - \gamma_{2k-1})} \phi_{2k-1} \\
&+ r_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k-1})} e^{-i(v_{2k} - v_{2k-1})} \phi_{2k} \\
U_{\mathbb{N}^*} \phi_{2k+1} &= r_{2k+1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k+1})} e^{i(v_{2k} - v_{2k+1})} \phi_{2k+1} \\
&+ t_{2k+1} e^{-i(\theta_{2k} + \theta_{2k+1})} e^{i(v_{2k} - \gamma_{2k+1})} \phi_{2k+2} \\
U_{\mathbb{N}^*} \phi_l &= P_{[2k+1, +\infty]} U_{\mathbb{N}^*} \phi_l \quad \text{si } l \geq 2k + 2 .
\end{aligned}$$

Si une sous-suite de coefficients de transmission est nulle, l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ est diagonal par blocs de taille finie dans la base canonique, donc diagonalisable.

3.3.2 Absence de réflexion en bords de bandes

Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t_k = 1$, alors le spectre de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ est purement absolument continu : $\sigma_{pp}(U_{\mathbb{N}^*}) = \sigma_{sc}(U_{\mathbb{N}^*}) = \emptyset$. L'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ se présente comme un cas particulier de la proposition 1.4.1 présentée au chapitre 1.

Ces résultats restent vrais pour des opérateurs $U_{\mathbb{Z}}$ construits selon les mêmes hypothèses [BHJ].

Les opérateurs $U_{\mathbb{N}^*}$ n'entrant dans aucune de ces deux catégories peuvent être analysés par le biais du formalisme des matrices de transfert, que le paragraphe suivant s'attache à présenter.

3.4 Etudes des fonctions propres généralisées

Désormais, les opérateurs $U_{\mathbb{Z}}$ et $U_{\mathbb{N}^*}$ vérifieront l'hypothèse $\mathbf{H}_0$ suivante :

$\mathbf{H}_0$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ($k \in \mathbb{Z}$), $t_k > 0$ ($r_k < 1$). Il existe en outre une sous-suite de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (et de $(t_n)_{n \in -\mathbb{N}}$) prenant ses valeurs dans $]0, 1[$.

3.4.1 Principe général

Comme pour les matrices de Jacobi, l'analyse spectrale d'opérateurs unitaires multi-diagonaux peut s'appuyer sur l'étude des vecteurs propres généralisés. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormée $(\phi_k)_{k \in \mathbb{L}}$, $p \in \mathbb{N}$ et U un opérateur borné $(2p + 1)$ -diagonal dans cette base (ϕ_k) . Une solution généralisée de l'équation aux valeurs propres : $U\psi = e^{i\lambda}\psi$, $\psi \in \mathcal{H}$ pour $e^{i\lambda}$ fixé, est une suite formelle $(\psi_j)_{j \in \mathbb{L}}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{L}$, $\psi_k = \langle \phi_k | \psi \rangle$, et

$$\sum_{j \in \mathbb{L}, |j-l| \leq p} \langle \phi_l | U \phi_j \rangle \psi_j = e^{i\lambda} \langle \phi_l | \psi \rangle ,$$

équation qui se réécrit en identifiant U et sa représentation matricielle sur (ϕ_k) :

$$\sum_{j \in \mathbb{L}, |j-l| \leq p} U_{lj} \psi_j = e^{i\lambda} \psi_l . \tag{3.15}$$

Le comportement asymptotique des coefficients (ψ_k) est directement lié à l'appartenance de la valeur propre généralisé $e^{i\lambda}$ à l'ensemble résolvant $\rho(U)$ de l'opérateur U en question ou à certaines composantes du spectre de ce même opérateur. En particulier, si la suite (ψ_k) est de carré sommable, $e^{i\lambda}$ est une valeur propre de U et ψ est un vecteur propre associé.

3.4.2 Introduction du formalisme des matrices de transfert

Les suites (θ_k) , (γ_k) , (v_k) , (r_k) et (t_k) étant fixées, la recherche d'une solution généralisée ψ à l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ nous conduit à réécrire l'équation (3.15) pour toutes les valeurs de l'entier $l \in \mathbb{N}^*$. On obtient d'abord les conditions de bord vérifiées par la solution généralisée :

$$\begin{aligned} ir_2 t_1 e^{-i((\theta_1+\theta_2))} e^{-i(v_2-\gamma_1)} \psi_2 - t_2 t_1 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} e^{i(\gamma_1+\gamma_2)} \psi_3 &= \left[e^{i\lambda} - r_1 e^{-iv_1} e^{-i(\theta_0+\theta_1)} \right] \psi_1 \\ \left[r_1 r_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} e^{-i(v_2-v_1)} - e^{i\lambda} \right] \psi_2 + it_2 r_1 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} e^{i(\gamma_2+v_1)} \psi_3 &= -it_1 e^{-i(\theta_0+\theta_1)} e^{-i\gamma_1} \psi_1 . \end{aligned} \quad (3.16)$$

En outre, pour tout entier $k > 1$, la condition (3.15) se traduit par :

$$\begin{aligned} ir_{2k-1} t_{2k-2} e^{-i(\theta_{2k-2}+\theta_{2k-1})} e^{-i(\gamma_{2k-2}+v_{2k-1})} \psi_{2k-2} + \\ r_{2k-2} r_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k-2}+\theta_{2k-1})} e^{i(v_{2k-2}-v_{2k-1})} \psi_{2k-1} - e^{i\lambda} \psi_{2k-1} \\ = t_{2k} t_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})} e^{i(\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1})} \psi_{2k+1} \\ - ir_{2k} t_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})} e^{-i(v_{2k}-\gamma_{2k-1})} \psi_{2k} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ir_{2k-2} t_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k-2}+\theta_{2k-1})} e^{i(v_{2k-2}-\gamma_{2k-1})} \psi_{2k-1} - \\ t_{2k-2} t_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k-2}+\theta_{2k-1})} e^{-i(\gamma_{2k-2}+\gamma_{2k-1})} \psi_{2k-2} = \\ e^{i\lambda} \psi_{2k} - r_{2k} r_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})} e^{-i(v_{2k}-v_{2k-1})} \psi_{2k} \\ - it_{2k} r_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})} e^{i(\gamma_{2k}+v_{2k-1})} \psi_{2k+1} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

La réécriture des deux dernières équations sous forme matricielle permet de lier les coefficients (ψ_k) entre eux par l'intermédiaire de matrices appelées matrices de transfert. En effet, le déterminant de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} ir_{2k} t_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})} e^{-i(v_{2k}-\gamma_{2k-1})} & -t_{2k} t_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})} e^{i(\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1})} \\ r_{2k} r_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})} e^{-i(v_{2k}-v_{2k-1})} - e^{i\lambda} & it_{2k} r_{2k-1} e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})} e^{i(\gamma_{2k}+v_{2k-1})} \end{pmatrix}$$

valant $-t_{2k}t_{2k-1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})}e^{i(\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1})}e^{-i\lambda}$, cette dernière peut être inversée en vertu de l'hypothèse $\mathbf{H}_0$. L'équation (3.17) se réécrit : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \psi_{2k} \\ \psi_{2k+1} \end{pmatrix} &= T_{k,\lambda} \begin{pmatrix} \psi_{2k-2} \\ \psi_{2k-1} \end{pmatrix} \\
(T_{k,\lambda})_{11} &= -\frac{t_{2k-2}}{t_{2k-1}} e^{-i(\lambda+\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2}+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2})} \\
(T_{k,\lambda})_{22} &= -\frac{1}{t_{2k}t_{2k-1}} e^{i(\lambda-\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1}+\theta_{2k-1}+\theta_{2k})} \\
&\quad - \frac{r_{2k}r_{2k-2}}{t_{2k}t_{2k-1}} e^{-i(\lambda-\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1}+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2}+\nu_{2k}-\nu_{2k-2})} \\
&\quad + \frac{r_{2k-1}e^{-i(\gamma_{2k}+\gamma_{2k-1})}}{t_{2k}t_{2k-1}} \left(r_{2k-2}e^{i(\theta_{2k}-\theta_{2k-2}+\nu_{2k-2}-\nu_{2k-1})} + r_{2k}e^{-i(\nu_{2k}-\nu_{2k-1})} \right) \\
(T_{k,\lambda})_{12} &= i\frac{r_{2k-2}}{t_{2k-1}} e^{-i(\lambda-\nu_{2k-2}+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2}+\gamma_{2k-1})} \\
&\quad - i\frac{r_{2k-1}}{t_{2k-1}} e^{i(\nu_{2k-1}-\gamma_{2k-1})} \\
(T_{k,\lambda})_{21} &= i\frac{t_{2k-2}r_{2k-1}}{t_{2k-1}t_{2k}} e^{-i(\theta_{2k-2}-\theta_{2k}+\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k}+\gamma_{2k-2}+\nu_{2k-1})} \\
&\quad - i\frac{r_{2k}t_{2k-2}}{t_{2k}t_{2k-1}} e^{-i(\lambda+\nu_{2k}+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2}+\gamma_{2k}+\gamma_{2k-2}+\gamma_{2k-1})} .
\end{aligned} \tag{3.19}$$

La suite de matrices $(T_{k,\lambda})$ associée à la valeur propre généralisée $e^{i\lambda}$ est appelée suite de matrices de transfert de $U_{\mathbb{N}^*}$. L'étude du comportement asymptotique des coefficients (ψ_k) est directement reliée au comportement asymptotique des produits de matrices de transfert. Dans notre cas de figure, $\forall k > 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{T}$, $T_{k,\lambda} \in GL_2(\mathbb{C})$,

$$\det T_{k,\lambda} = e^{-i(\theta_{2k-2}-\theta_{2k}+\gamma_{2k}+2\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2})} \frac{t_{2k-2}}{t_{2k}} . \tag{3.20}$$

Ce formalisme permet donc de reconstruire la suite formelle $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, solution généralisée de l'équation aux valeurs propres pour $U_{\mathbb{N}^*}$. Etant donnée une condition initiale (ψ_2, ψ_3) satisfaisant à la condition de bord (3.16), les autres coefficients se calculent à l'aide de la relation : $\forall k > 1$,

$$\begin{pmatrix} \psi_{2k} \\ \psi_{2k+1} \end{pmatrix} = T_{k,\lambda} T_{k-1,\lambda} \dots T_{2,\lambda} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} . \tag{3.21}$$

Dans ce cas de figure, la multiplicité d'une éventuelle véritable valeur propre de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ est au maximum 1.

Remarque : Ce formalisme s'applique également à la recherche d'une solution généralisée de l'équation aux valeurs propres associée à $U_{\mathbb{Z}}$:

$$U_{\mathbb{Z}}\psi = e^{i\lambda}\psi , \quad \psi \in \mathcal{H} .$$

Dans ce cas, la donnée de la condition initiale (ψ_0, ψ_1) suffit à construire une solution

généralisée par la relation suivante : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{2k} \\ \psi_{2k+1} \end{pmatrix} &= T_{k,\lambda} T_{k-1,\lambda} \dots T_{1,\lambda} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \psi_{-2k-2} \\ \psi_{-2k-1} \end{pmatrix} &= T_{-k+1,\lambda}^{-1} \dots T_{0,\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} &= T_{1,\lambda} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

La multiplicité d'une éventuelle valeur propre de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est au maximum 2.

3.5 Perspectives d'études

Le comportement dynamique du système physique décrit par notre opérateur de monodromie semble essentiellement déterminé par le comportement asymptotique des divers paramètres (r_k) , (t_k) , (θ_k) , ... (lemme 3.2.2). Afin d'étudier le rôle des phases sur la dynamique du système, les valeurs des coefficients de réflexion et de transition seront désormais fixées et non nulles. Compte tenu du lemme 3.2.1, la nature du spectre de l'opérateur de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$ ainsi que de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ ne repose donc plus que sur le choix des phases (θ_n) et (v_n) . Selon [BB], l'observation de la dynamique du paquet d'onde à grand temps suggère l'existence de deux régimes. Pour un choix de phases aléatoires³, le spectre de l'opérateur de monodromie serait purement ponctuel. Si en revanche, elles sont périodiques, ce spectre deviendrait absolument continu.

Nous donnerons une version rigoureuse et plus précise à ces énoncés. Nous montrerons ainsi au chapitre 4, que le spectre d'un opérateur de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$ bâti à partir de phases construites à l'aide de certains processus ergodiques est presque sûrement singulier (théorème 4.1.2). En revanche, nous prouverons au chapitre 5 qu'un opérateur de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$ construit à partir de phases périodiques possède du spectre absolument continu et éventuellement un nombre fini de valeurs propres simples isolées (théorème 5.1.2).

Les opérateurs unitaires $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U_{\mathbb{Z}}$ sont désormais définis à partir de suites de coefficients de réflexion et de transition (r_k) et (t_k) constantes, non nulles qui seront notées : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $r_k = r$, $t_k = t$ où :

$$r^2 + t^2 = 1 \text{ et } (r, t) \in]0, 1[^2 .$$

Les opérateurs $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U_{\mathbb{Z}}$ vérifient donc l'hypothèse **H₀**. Le formalisme des matrices de transfert pourra pleinement jouer son rôle dans les chapitres suivants.

Bien que le choix de la suite (γ_k) n'ait aucune influence du point de vue spectral, un choix particulier fixera un représentant pour chaque famille d'opérateurs de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U_{\mathbb{Z}}$ au cours des démonstrations qui suivront. La suite (γ_n) sera ainsi définie par:

3. Dans les simulations numériques présentées par [BB], ces phases sont en réalité construites de manière à être uniformément distribuées modulo 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n = -\pi \tau n^2$ et

$$v_n = \frac{\pi}{2} \tau n \quad \text{où} \quad \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\gamma_k = (-1)^{k+1}v_k$. La forme des matrices de transfert associées aux représentants des opérateurs $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U_{\mathbb{Z}}$ se simplifie : $\forall \lambda \in \mathbb{T}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (T_{k,\lambda})_{11} &= -e^{-i(\lambda+\eta_{2k-1})} \\ (T_{k,\lambda})_{22} &= -\frac{1}{t^2}e^{i(\lambda+\eta_{2k})} + \frac{r^2}{t^2} \left(e^{i(\eta_{2k}-\eta_{2k-1})} + 1 - e^{-i(\eta_{2k}+\lambda)} \right) \\ (T_{k,\lambda})_{12} &= i\frac{r}{t} \left(e^{-i(\lambda+\eta_{2k-1})} - 1 \right) \\ (T_{k,\lambda})_{21} &= i\frac{r}{t} \left(e^{i(\eta_{2k}-\eta_{2k-1})} - e^{-i(\lambda+\eta_{2k-1})} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{où } \eta_k = \theta_k + \theta_{k-1} + v_k - v_{k-1} . \quad (3.26)$$

En outre, $\det T_{k,\lambda} = -e^{i(\eta_{2k}-\eta_{2k-1})}$. Le déterminant est de module 1, indépendant de la valeur propre $e^{i\lambda}$ considérée.

Les situations explorées au cours des chapitres suivants seront toujours exposées selon le même schéma. Afin de déterminer les propriétés de l'opérateur de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$, un opérateur unitaire adéquat $U_{\mathbb{Z}}$ sera *a priori* donné. Les propriétés spectrales de ce dernier seront déterminées et permettront d'obtenir certaines informations sur le spectre de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$. Le chapitre 4 traitera de phases construites à partir de processus ergodiques. Le chapitre 5 considèrera des choix de phases périodiques. Il sera également fait mention d'un opérateur unitaire de comparaison U_0 défini par :

$$U_0 = U_{\mathbb{Z}} + F \quad (3.27)$$

où l'opérateur de rang fini F est défini sur la base canonique par : $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$,

$$\begin{aligned} F\phi_k &= 0 \\ F\phi_0 &= e^{-i(\theta_0+\theta_{-1})}e^{iv_{-1}}(1-re^{-iv_0})(it\phi_{-1}+r\phi_0) - e^{-i(\theta_0+\theta_{-1})}e^{i(v_0-v_1)}(itr\phi_1-t^2\phi_2) \\ F\phi_1 &= e^{-i(\theta_0+\theta_{-1})}e^{i(v_{-1}-v_0)}(-t^2\phi_{-1}-itr\phi_0) + e^{-i(\theta_0+\theta_{-1})}e^{-iv_1}(1-re^{iv_0})(r\phi_1+it\phi_2) . \end{aligned}$$

Autrement dit, l'opérateur U_0 se découpe en deux blocs supplémentaires,

$$U_0 = P_{-\mathbb{N}}U_0P_{-\mathbb{N}} \oplus P_{\mathbb{N}^*}U_0P_{\mathbb{N}^*}$$

qui reflètent l'identification entre $l^2(\mathbb{Z})$ et $l^2(\mathbb{N}^*) \oplus l^2(-\mathbb{N})$. En particulier, $\sigma(P_{\mathbb{N}^*}U_0P_{\mathbb{N}^*}) \subset \sigma(U_0)$.

Chapitre 4

Exemples de constructions fondées sur des systèmes ergodiques

Lorsque les suites de coefficients de réflexion et de transition sont constantes, non nulles et que les phases sont choisies aléatoirement, les expériences numériques montrent que les composantes des paquets d'ondes s'étalent peu sous l'action de l'opérateur de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$, ce qui suggère la nature ponctuelle du spectre de cet opérateur [BB]. Nous examinons plus précisément au cours de ce chapitre ce qu'il en est.

4.1 Hypothèses et résultats principaux

Tout au long de ce chapitre, les opérateurs $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U_{\mathbb{Z}}$ considérés sont construits à partir de suites de coefficients de réflexion et de transition constantes non nulles et de phases (θ_k) et (v_k) vérifiant l'une des trois hypothèses suivantes $\mathbf{H}_1(\mathbb{L})$, $\mathbf{H}_2(\mathbb{L})$, $\mathbf{H}_3(\mathbb{L})$ où $\mathbb{L}$ désigne soit $\mathbb{N}$ soit $\mathbb{Z}$.

$\mathbf{H}_1(\mathbb{L})$: les phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{L}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{L}}$ sont des variables aléatoires, indépendantes et distribuées selon la loi uniforme ν sur le tore $\mathbb{T}$. Elles seront définies sur l'espace probabilisé :

$$(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)_{\mathbb{L}} = \left((\mathbb{T} \times \mathbb{T})^{\mathbb{L}}, (\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T}))^{\otimes \mathbb{L}}, (\nu \otimes \nu)^{\otimes \mathbb{L}} \right) .$$

$\mathbf{H}_2(\mathbb{L})$: les phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{L}}$ sont des variables aléatoires, indépendantes, distribuées selon la loi uniforme ν sur le tore $\mathbb{T}$. Elles seront définies sur l'espace probabilisé :

$$(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)_{\mathbb{L}} = \left(\mathbb{T}^{\mathbb{L}}, \mathcal{B}(\mathbb{T})^{\otimes \mathbb{L}}, \nu^{\otimes \mathbb{L}} \right) .$$

Les phases $(v_k)_{k \in \mathbb{L}}$ sont quant à elles définies par : $\forall k \in \mathbb{L}, v_k = 2k\pi\alpha + v$, où $(\alpha, v) \in \mathbb{R}^2$.

$\mathbf{H}_3(\mathbb{L})$: les phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{L}}$ sont quasi-périodiques, définies par : $\forall k \in \mathbb{L}, \theta_k = 2k\pi\beta + \theta$ ($\theta \in \mathbb{T}$, β irrationnel) sur l'espace :

$$(\Omega_3, \mathcal{F}_3, P_3)_{\mathbb{L}} = (\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \nu) .$$

Par ailleurs, les phases $(v_k)_{k \in \mathbb{L}}$ sont définies par : $\forall k \in \mathbb{L}, v_k = 2k\pi\alpha + v$ où $(\alpha, v) \in \mathbb{R}^2$.

Les coefficients de réflexion et de transition seront notés r et t respectivement : $r^2 + t^2 = 1$.

Nous étudions dans un premier temps la nature spectrale de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ en reprenant la stratégie développée par Ishii et Pastur pour les matrices de Jacobi [Ish], [Pas], [CL], [CFKS]. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 4.1.1 *Soit $j \in \{1,2,3\}$. Si l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est construit avec des suites de coefficients de réflexion et de transition constantes, non nulles et vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_j(\mathbb{Z})$, alors*

$$P_j(\{\omega \in \Omega_j; \sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}(\omega)) \neq \emptyset\}) = 0 \ .$$

La démonstration de ce résultat repose sur l'existence presque sûre d'un exposant de Lyapunov strictement positif relatif à la suite de matrices de transfert associée à l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$. Ce résultat s'étend ensuite sans difficulté aux opérateurs $U_{\mathbb{N}^*}$.

Théorème 4.1.2 *Soit $j \in \{1,2,3\}$. Si l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ est construit à partir de suites de coefficients de réflexion et de transition constantes, non nulles et vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_j(\mathbb{N})$, alors*

$$P_j(\{\omega \in \Omega_j; \sigma_{ac}(U_{\mathbb{N}^*}(\omega)) \neq \emptyset\}) = 0 \ .$$

Des résultats semblables ont été obtenus pour des opérateurs unitaires à structure triangulaire supérieure [GT]. En outre, des travaux récents semblent montrer que l'étude du spectre de ces opérateurs pourrait entretenir certains liens avec notre étude (voir [CMV]).

Les analyses spectrales développées sous chaque hypothèse $\mathbf{H}_1(\mathbb{L})$, $\mathbf{H}_2(\mathbb{L})$ et $\mathbf{H}_3(\mathbb{L})$ seront conduites en parallèle.

4.2 Préliminaires

Les outils introduits au cours des paragraphes suivants sont utilisés pour la démonstration des théorèmes 4.1.1 et 4.1.2.

4.2.1 Transformations et systèmes dynamiques ergodiques

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et S une transformation inversible de Ω dans lui-même. La mesure de probabilité P est S -stationnaire si : $\forall A \in \mathcal{F}, P(S^{-1}(A)) = P(A)$. Un ensemble mesurable est S -invariant si : $S^{-1}(A) = A$. Une mesure de probabilité S -stationnaire est S -ergodique si tout ensemble S -invariant a pour probabilité 0 ou 1. On dit aussi que la transformation S est ergodique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'ergodicité de la transformation S est relative à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et se caractérise également de la manière suivante [Wa], corollaire 1.14.2 :

Proposition 4.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé muni d'une transformation S qui préserve la mesure P . La transformation S est dite ergodique si et seulement si pour tout $(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} P(S^{-i}(A) \cap B) = P(A)P(B) \ .$$

Les transformations S faiblement mélangeantes forment une classe particulière de transformations ergodiques :

Définition 4.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé muni d'une transformation S qui préserve la mesure P . La transformation S est dite faiblement mélangeante si et seulement si pour tout $(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |P(S^{-i}(A \cap B) - P(A)P(B)| = 0 \ .$$

Ces caractérisations sont toujours vraies si les ensembles A et B sont pris au sein de certains sous-ensembles engendrant $\mathcal{F}$ ([Wa], théorème 1.17).

L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est muni d'une transformation inversible S préservant la mesure P et on considère X un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie muni de sa tribu borélienne. L'espace des applications linéaires sur X est noté $\mathcal{L}(X)$. Un système dynamique mesurable linéaire et discret sur $(\Omega, \mathcal{F}, P, S)$ est une famille d'applications mesurables $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$ telle que pour tout $(n, \omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega$, les applications $M_n(\omega) : X \rightarrow X$ vérifient : $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \forall \omega \in \Omega$,

$$M_{n+m}(\omega) = M_n(S^m \omega) \cdot M_m(\omega) \quad \text{et} \quad M_0(\omega) = id_X .$$

Ce système sera dit ergodique si la mesure de probabilité P sous-jacente est S -ergodique.

Exemple : Un système dynamique linéaire discret peut se construire de la manière suivante ([Arn] paragraphe 2.2.1). L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est muni d'une transformation inversible S . Etant donnée une application T , $\mathcal{F}$ -mesurable : $T : \Omega \rightarrow GL_d(\mathbb{R})$ où d est un entier strictement positif, la famille d'applications mesurables sur Ω et à valeurs dans $GL_d(\mathbb{R})$, $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, définie par : $\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} M_k(\omega) &= T(S^{k-1}\omega) \dots T(S\omega)T(\omega) , \\ M_{-k}(\omega) &= T(S^{-k}\omega) \dots T(S^{-1}\omega) , \\ M_0(\omega) &= I_d , \end{aligned} \tag{4.8}$$

est un système dynamique mesurable linéaire discret engendré par T .

Les théorèmes multiplicatifs (ergodiques) permettent d'étudier de tels systèmes dynamiques [Arn], [Rue2], [BL].

Théorème 4.2.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé muni d'une transformation inversible ergodique S et $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un système dynamique linéaire, ergodique, discret sur $(\Omega, \mathcal{F}, P, S)$ engendré par l'application mesurable $T : \Omega \rightarrow GL_d(\mathbb{R})$. Si,*

- $\log^+ \|T(\cdot)\| \equiv \sup(0, \log \|T(\cdot)\|) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- $\log^- \|T(\cdot)\| \equiv \sup(0, \log \|T^{-1}(\cdot)\|) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

et si la suite de matrices $(M_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie par le jeu d'équations (4.8), alors il existe un ensemble Ω_0 invariant sous la transformation S , de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$:

- *la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n^*(\omega)M_n(\omega))^{\frac{1}{2n}} = \Lambda(\omega)$ existe,*
- *la matrice $\Lambda(\omega)$ admet p valeurs propres distinctes : $e^{\gamma_1} > e^{\gamma_2} > \dots > e^{\gamma_p} > 0$ indépendantes de ω et de multiplicités respectives $d_1, d_2, \dots, d_p$ constantes associées à p sous-espaces propres $\mathcal{E}_1(\omega), \dots, \mathcal{E}_p(\omega)$,*
- *la filtration de $\mathbb{R}^d$, $\{0\} \subset \mathcal{V}_p(\omega) \subset \dots \subset \mathcal{V}_2(\omega) \subset \mathcal{V}_1(\omega) = \mathbb{R}^d$, construite de la manière suivante:*

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \mathcal{V}_i(\omega) = \mathcal{E}_p(\omega) \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_i(\omega) ,$$

se caractérise par : $u \in \mathcal{V}_i(\omega) \setminus \mathcal{V}_{i+1}(\omega)$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|M_n(\omega)u\| = \gamma_i .$$

Cet énoncé est la réécriture du théorème 3.4.1 [Arn] utilisant l'ergodicité de la transformation S . Les limites $(\gamma_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ sont appelées les exposants de Lyapunov du système dynamique. Le théorème multiplicatif ergodique (MET) permet de contrôler la décomposition des solutions propres généralisées des opérateurs $U_{\mathbb{Z}}$ et $U_{\mathbb{N}^*}$ sur la base canonique par l'intermédiaire du produit des matrices de transfert. Néanmoins, il n'est ici énoncé que pour des matrices à coefficients réels¹, ce qui n'est pas le cas des matrices définies par les équations (3.25). La section 4.1.2 qui suit donne un procédé assez général pour surmonter cet obstacle.

4.2.2 Un jumelage fructueux

L'étude d'une famille de matrices à coefficients complexes de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ peut se ramener à quelques adaptations près à l'étude d'une famille de matrices à coefficients réels de $\mathcal{M}_{2d}(\mathbb{R})$. Le procédé suivi ici est relativement standard ([MT] paragraphe 5.5). Dans la suite, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignera indifféremment le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^{2d}$ ou hermitien sur $\mathbb{C}^d$. La topologie sur ces espaces sera celle des normes $\|\cdot\|$ associées à ces produits scalaires. La sous-algèbre $\mathcal{A}_{2d}(\mathbb{R})$ est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{A}_{2d}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11,1}I_2 + a_{11,2}J_2 & \dots & a_{1d,1}I_2 + a_{1d,2}J_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1,1}I_2 + a_{d1,2}J_2 & \dots & a_{dd,1}I_2 + a_{dd,2}J_2 \end{pmatrix} ; a_{ij,k} \in \mathbb{R} \right\} ,$$

où

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Les algèbres $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_{2d}(\mathbb{R})$ sont munies des normes induites respectivement par celles de $\mathbb{C}^d$ et $\mathbb{R}^{2d}$. La sous-algèbre $\mathcal{A}_{2d}(\mathbb{R})$ est munie de la topologie induite. L'adjoint de A est noté A^* . A tout vecteur de $\mathbb{C}^d$, on associe un vecteur de $\mathbb{R}^{2d}$ par le biais de l'application $\widehat{\cdot}$ définie par :

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} : \mathbb{C}^d &\rightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ u &\mapsto \widehat{u} \end{aligned}$$

où

$$\widehat{u} = \begin{pmatrix} \Re(x_1) \\ -\Im(x_1) \\ \vdots \\ \Re(x_d) \\ -\Im(x_d) \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} .$$

Un calcul élémentaire permet de dégager les propriétés suivantes : $\forall u, v \in \mathbb{C}^d, \forall \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \widehat{u+v} &= \widehat{u} + \widehat{v} , \\ \widehat{\alpha u} &= \Re(\alpha)\widehat{u} + \Im(\alpha)i\widehat{u} . \end{aligned}$$

1. Le théorème MET s'énonce de manière semblable pour des suites de matrices à coefficients complexes indexées sur $\mathbb{N}$ (voir [Arn] remarque 3.4.10 (ii)).

Cette application en induit une autre application notée $\widetilde{\cdot}$ entre les espaces de matrices correspondants :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{A}_{2d}(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \widetilde{A} \end{array}$$

où

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Re(a_{11})I_2 + \Im(a_{11})J_2 & \dots & \Re(a_{1d})I_2 + \Im(a_{1d})J_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \Re(a_{d1})I_2 + \Im(a_{d1})J_2 & \dots & \Re(a_{dd})I_2 + \Im(a_{dd})J_2 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}.$$

D'une part : $\forall u \in \mathbb{C}^d, \forall T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \widehat{T}u = \widetilde{T}\widehat{u}$. D'autre part : $\forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{\widetilde{A + B}} = \widetilde{A} + \widetilde{B} \quad , \quad \widetilde{\widetilde{A \cdot B}} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{B} \quad , \quad \widetilde{(\alpha A)} = \alpha \widetilde{A} \quad , \quad \widetilde{A^*} = \widetilde{A}^*.$$

Enfin, si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est inversible, $\widetilde{A}$ l'est et : $\widetilde{(\widetilde{A^{-1}})} = \widetilde{A}^{-1}$. Les applications définies ci-dessus ne sont pas des morphismes d'algèbres $\mathbb{C}$ -linéaires au sens usuel.

Lemme 4.2.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Si les valeurs propres de la matrice A sont $\gamma_1, \dots, \gamma_d$, alors les valeurs propres de $\widetilde{A}$ sont $\gamma_1, \gamma_1^*, \dots, \gamma_d$ et γ_d^* . En particulier, si A est hermitienne et $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ sont ses valeurs propres, alors $\widetilde{A}$ est symétrique réelle et ses valeurs propres $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ sont de multiplicité 2.*

Preuve : La matrice A peut être mise sous forme triangulaire : il existe une matrice inversible P telle que : $A = P^{-1}BP$ où :

$$B = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_d \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\widetilde{A}$ est semblable à une matrice triangulaire par blocs :

$$\widetilde{A} = \widetilde{P}^{-1} \begin{pmatrix} \Re(\gamma_1)I_2 + \Im(\gamma_1)J_2 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \Re(\gamma_d)I_2 + \Im(\gamma_d)J_2 \end{pmatrix} \widetilde{P}.$$

où $\widetilde{P}$ est toujours inversible. Le polynôme caractéristique de $\widetilde{A}$ est par conséquent :

$$\begin{aligned} \det(\widetilde{A} - X) &= \prod_{i=1}^d \det(\Re(\gamma_i)I_2 + \Im(\gamma_i)J_2 - X) \\ &= \prod_{i=1}^d ((\Re(\gamma_i) - X)^2 + \Im(\gamma_i)^2) = \prod_{i=1}^d (\gamma_i - X)(\gamma_i^* - X), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 4.2.2 *L'application $\widehat{\cdot}$ est une isométrie de $\mathbb{C}^d$ sur $\mathbb{R}^{2d}$: $\forall u \in \mathbb{C}^d, \|\widehat{u}\| = \|u\|$. L'application $\widetilde{\cdot}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{A}_{2d}(\mathbb{R})$. De plus, si $\|\cdot\|$ symbolise la norme spectrale d'une matrice à coefficients réels ou complexes, $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}), \|\widetilde{A}\| = \sqrt{2} \cdot \|A\|$.*

Preuve : La première assertion est immédiate. La seconde s'appuie sur l'équivalence des normes en dimension finie, le lemme 4.2.1 et la définition de la norme spectrale :

$$\|A\| = \sqrt{\|A^*A\|} = \sqrt{\sum_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|^2} .$$

La continuité de $\tilde{\cdot}$ et de son application réciproque en sont un corollaire. $\square$

L'application $\hat{\cdot}$ ne transporte pas le produit scalaire mais préserve la norme. En effet, un calcul rapide montre que pour tout $u \in \mathbb{C}^d$, $\langle \hat{u} | \hat{u} \rangle = 0$. D'autre part, pour tout $u, v \in \mathbb{C}^d$, pour tout $T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \langle \hat{u} | \tilde{T} \hat{v} \rangle &= \langle \hat{u} | \tilde{T} \hat{v} \rangle = \Re(\langle u | Tv \rangle) , \\ \langle i\hat{u} | \tilde{T} \hat{v} \rangle &= -\langle \hat{u} | \tilde{T} i\hat{v} \rangle = \Im(\langle u | Tv \rangle) . \end{aligned}$$

Ainsi, si u et v sont des vecteurs orthogonaux de $\mathbb{C}^d$, alors $\hat{u}$ et $\hat{v}$ sont des vecteurs orthogonaux : $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \Re(\langle u, v \rangle) = 0$.

Ces divers résultats nous amènent au résultat suivant :

Proposition 4.2.3 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. Pour toute matrice hermitienne $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $\widehat{f(A)} = f(\tilde{A})$.*

Preuve : C'est vrai pour tout f polynôme à coefficients réels, compte tenu des propositions précédentes. Le spectre de la matrice A étant fini, toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles coïncide avec un polynôme sur le spectre de A . La conclusion est alors immédiate. $\square$

4.2.3 Questions de mesurabilité

La tribu d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est la plus petite σ -algèbre pour laquelle pour tout vecteur g de $\mathcal{H}$ fixé, la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

soit mesurable. C'est aussi la tribu borélienne de $\mathcal{H}$. En particulier, une fonction f à valeurs dans $\mathcal{H}$ et définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ -mesurable si et seulement si toutes les fonctions

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto \langle f(\omega), g \rangle \end{aligned}$$

sont mesurables. Une famille d'opérateurs bornés,

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \omega &\longmapsto T(\omega) \end{aligned}$$

est $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ -mesurable (ou faiblement mesurable) si et seulement si pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto \langle f, T(\omega)g \rangle \end{aligned}$$

est mesurable. Cela revient à dire que l'application $T(\cdot)g$ est $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ -mesurable pour tout $g \in \mathcal{H}$. En conséquence, un certain nombre de résultats peuvent être établis :

Proposition 4.2.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Si pour tout $\omega \in \Omega$, $U(\omega)$ est un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$ et que $(E(A, \omega))_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ est sa résolution de l'identité, alors l'application $U(\cdot)$ est mesurable si et seulement si l'application $E(A, \cdot)$ est mesurable pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$.*

Proposition 4.2.5 *Si la résolution de l'identité $(E(A, \cdot))_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ est mesurable, et si pour tout $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$, $E_{pp}(A, \omega)$, $E_{sc}(A, \omega)$, $E_{ac}(A, \omega)$ sont les composantes de sa décomposition de Lebesgue, alors pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$, $E_{pp}(A, \cdot)$, $E_{sc}(A, \cdot)$, $E_{ac}(A, \cdot)$ sont mesurables.*

Le lecteur pourra se reporter à [CL] définition V.1.7 et proposition V.1.7 pour une preuve de ces résultats.

4.3 Preuve du théorème 4.1.1

En vertu du lemme 3.2.1, il suffira d'analyser le spectre du représentant des opérateurs $U_{\mathbb{Z}}$ pour lequel : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_k = (-1)^{k+1} v_k ,$$

pour mener à bien l'étude spectrale d'opérateurs $U_{\mathbb{Z}}$ vérifiant l'une des hypothèses $\mathbf{H}_1(\mathbb{Z})$, $\mathbf{H}_2(\mathbb{Z})$ ou $\mathbf{H}_3(\mathbb{Z})$. Dans chaque cas, cette analyse peut être fondée sur la construction de processus ergodiques que nous allons présenter.

4.3.1 Constructions de systèmes dynamiques ergodiques linéaires

Cas $\mathbf{H}_1(\mathbb{Z})$ Lorsque les phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifient les hypothèses $\mathbf{H}_1(\mathbb{Z})$, le représentant de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est une fonction faiblement mesurable de la variable aléatoire $(\theta_k, v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$. Cette application sera notée $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_1}$. La fonction caractéristique d'un N-uplet de variables aléatoires $(X_1, \dots, X_N)$ à valeurs dans $\mathbb{T}$ est définie par : $\forall u \in \mathbb{Z}^N$,

$$\phi_{X_1, \dots, X_N}(u_1, \dots, u_N) = \mathbb{E}(e^{-i(\sum_{j=1}^N u_j X_j)}) .$$

Si par exemple X est une variable aléatoire à valeurs sur $\mathbb{T}$ distribuée selon la loi uniforme, $\forall u \in \mathbb{Z}$,

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{-iuX}) = \delta_{u,0} . \quad (4.12)$$

Deux variables aléatoires réelles X, Y ont même fonction caractéristique si et seulement si elles ont même loi. Il est également possible de formuler l'indépendance d'une suite de variables aléatoires en termes de fonctions caractéristiques ([Boul], proposition 5.12) : une suite de variables aléatoires à valeurs réelles $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est indépendante si et seulement si pour tout choix d'indices $(i_1, \dots, i_N)$ et pour tout $(u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{Z}^N$,

$$\phi_{X_{i_1}, \dots, X_{i_N}}(u_1, \dots, u_N) = \prod_{j=1}^N \phi_{X_{i_j}}(u_j) .$$

Lemme 4.3.1 *Si les suites $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifient les hypothèses $\mathbf{H}_1(\mathbb{Z})$, alors les variables aléatoires $(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définies par (3.26) sont aussi indépendantes et distribuées selon la loi uniforme.*

Preuve : La fonction caractéristique des phases (θ_k) et (v_k) est donnée par (4.12). Pour tout choix d'indices $k_1, \dots, k_N$ deux à deux distincts et pour tout $(u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{Z}^N$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \dots, \eta_{k_N}}(u_1, u_2, \dots, u_N) &= \mathbb{E}(e^{-i(u_1 \eta_{k_1} + u_2 \eta_{k_2} + \dots + u_N \eta_{k_N})}) \\ &= \mathbb{E}(e^{-i(u_1 \theta_{k_1} + u_1 \theta_{k_1-1} + \dots + u_N \theta_{k_N} + u_N \theta_{k_N-1})}) \times \\ &\quad \mathbb{E}(e^{-i(u_1 v_{k_1} - u_1 v_{k_1-1} + \dots + u_N v_{k_N} - u_N v_{k_N-1})})\end{aligned}$$

où l'indépendance relative des variables (θ_k) et (v_k) est utilisée pour factoriser les fonctions caractéristiques. Les indices (k_j) sont supposés ordonnés. L'indépendance des variables permet de factoriser $\mathbb{E}(e^{-i(u_j \theta_{k_j})})$ (ou bien $\mathbb{E}(e^{-i(u_j v_{k_j})})$) dès que : $|k_j - k_{j\pm 1}| > 1$. Ce facteur est égal à $\delta_{u_j, 0} \delta_{u_{j-1}, 0}$. Nous dirons qu'un tel k_j est isolé. Il reste à calculer des quantités de la forme :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(e^{-i(u_{j+1} \theta_{k_{j+1}} + u_{j+1} \theta_{k_{j+1}-1} + \dots + u_{j+m-1} \theta_{k_{j+m-1}} + u_{j+m-1} \theta_{k_{j+m-1}-1})}) \\ \text{et} \quad &\mathbb{E}(e^{-i(u_{j+1} v_{k_{j+1}} - u_{j+1} v_{k_{j+1}-1} + \dots + u_{j+m-1} v_{k_{j+m-1}} - u_{j+m-1} v_{k_{j+m-1}-1})})\end{aligned} \quad (4.14)$$

où pour tout $l \in \{1, \dots, m-1\}$, $k_{j+l} \pm 1 = k_{j+l\pm 1}$, entre deux indices isolés consécutifs u_j et u_{j+m} . Compte tenu de l'indépendance des variables aléatoires considérées, la première de ces deux quantités se factorisera comme suit :

$$\mathbb{E}(e^{-i(u_{j+1} \theta_{k_j})}) \mathbb{E}(e^{-i(u_{j+1} + u_{j+2}) \theta_{k_{j+1}}}) \dots \mathbb{E}(e^{-i(u_{j+m-2} + u_{j+m-1}) \theta_{k_{j+m-2}}}) \mathbb{E}(e^{-i(u_{j+m-1} \theta_{k_{j+m-1}})})$$

et sera égale à 0 sauf si :

$$\begin{cases} u_{j+1} = 0 \\ u_{j+1} + u_{j+2} = 0 \\ \dots \\ u_{j+m-1} + u_{j+m-2} = 0 \\ u_{j+m-1} = 0 \end{cases}$$

On obtient alors : $\forall l \in \{1, \dots, m-1\}$, $u_{j+l} = 0$. Dans ce cas, tous les facteurs de la forme (4.14) valent 1. Les facteurs bâtis autour des variables aléatoires (v_k) mènent aux mêmes conclusions. En regroupant les contributions apportées par chaque facteur, on obtient :

$$\Phi_{\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \dots, \eta_{k_N}}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \prod_{l=1}^N \delta_{u_l, 0} = \prod_{l=1}^N \Phi_{\eta_{k_l}}(u_l) .$$

En vertu du critère d'indépendance rappelé précédemment, ceci revient à dire que les variables aléatoires $(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur $\mathbb{T}$. $\square$

Autrement dit, la mesure image de P_1 par l'application mesurable :

$$\begin{aligned}(\Omega_1, \mathcal{F}_1) &\longrightarrow (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \\ (\theta_k, v_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto (\eta_{2k-1}, \eta_{2k})_{k \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

est P_1 elle-même. Par abus de notation, le représentant de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ considéré comme fonction mesurable de la variable aléatoire $(\eta_{2k-1}, \eta_{2k})_{k \in \mathbb{Z}}$ définie sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ sera encore noté $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_1}$.

L'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ est naturellement muni d'une transformation inversible S_1 préservant la mesure et définie par : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (S_1 \omega)_k &= \omega_{k+1} \\ &= (\eta_{2k+1}, \eta_{2k+2}) = ((S_+ \eta)_{2k-1}, (S_+ \eta)_{2k}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

où S_+ est une simple translation agissant sur l'espace probabilisé $(\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{T})^{\otimes \mathbb{Z}}, \nu^{\otimes \mathbb{Z}})$: $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(S_+ \eta)_k = \eta_{k+1}$. Autrement dit, $S_1 = S_+ \times S_+$ [Wa]. La transformation S_+ étant faiblement mélangeante ([Wa], théorème 1.26), la transformation S_1 est ergodique relativement à l'espace $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ ([Wa], théorème 1.24).

La suite de matrices de transfert $(T_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{Z}}$ définie lors de la recherche de solutions propres généralisées pour la famille d'opérateurs $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_1}$ par les relations (3.25) peut être redéfinie à l'aide de la transformation S_1 et du générateur $T_{[1]\lambda}$ d'un système linéaire ergodique discret sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ par : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$T_{k,\lambda}(S_1 \omega) = T_{k+1,\lambda}(\omega) = T_{[1]\lambda}(S_1^k \omega) \quad (4.18)$$

où

$$\begin{aligned} (T_{[1]\lambda})_{11}(\omega) &= -e^{-i(\lambda+\eta_1)} \\ (T_{[1]\lambda})_{22}(\omega) &= -\frac{1}{t^2} e^{i(\lambda+\eta_2)} + \frac{r^2}{t^2} (e^{i(\eta_2-\eta_1)} + 1 - e^{-i(\eta_2+\lambda)}) \\ (T_{[1]\lambda})_{12}(\omega) &= i \frac{r}{t} (e^{-i(\lambda+\eta_1)} - 1) \\ (T_{[1]\lambda})_{21}(\omega) &= i \frac{r}{t} (e^{i(\eta_2-\eta_1)} - e^{-i(\lambda+\eta_1)}) , \end{aligned}$$

et λ est fixé dans $\mathbb{T}$.

Remarque : Compte tenu du Lemme 4.3.1, la suite de matrices de transfert définie par les relations (4.18) peut également être perçue comme la réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $GL_2(\mathbb{C})$. Le choix de phases (θ_k) indépendantes et uniformément distribuées est une condition nécessaire et suffisante à l'indépendance de la suite des matrices de transfert [BHJ].

Cas $\mathbf{H}_2(\mathbb{Z})$ Lorsque l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ vérifie les hypothèses $\mathbf{H}_2(\mathbb{Z})$, seules les phases aléatoires $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ interviennent dans la construction des processus ergodiques. Le représentant de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est une fonction faiblement mesurable de la variable aléatoire $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$. Cette application sera également notée $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_2}$. Néanmoins, le représentant de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ et ses matrices de transfert ne dépendent des phases $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ que par le biais des variables aléatoires $(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définies par l'équation (3.26). Une preuve semblable à celle du lemme 4.3.1 permet de justifier l'indépendance de ces phases :

Lemme 4.3.2 *Si les suites $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifient les hypothèses $\mathbf{H}_2(\mathbb{Z})$, les variables aléatoires $(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définies par : $\forall k \in \mathbb{Z}$,*

$$\eta_k = \theta_{k+1} + \theta_k + v_{k+1} - v_k = \theta_{k+1} + \theta_k + 2\pi\alpha ,$$

sont aussi indépendantes et distribuées selon la loi uniforme.

Par conséquent, la mesure image de P_2 par l'application mesurable :

$$\begin{aligned} (\Omega_2, \mathcal{F}_2) &\longrightarrow (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \\ (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\mapsto ((\eta_{2k-1}, \eta_{2k}))_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est à nouveau la probabilité P_1 . Le représentant de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ n'étant fonction que de la suite $(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est également une application mesurable définie sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ également notée $(U(\omega))_{\omega \in \Omega_1}$. L'espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ est muni de la transformation inversible ergodique S_1 , définie au paragraphe précédent par (4.17).

La suite de matrices de transfert $(T_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{Z}}$ définie lors de la recherche de solutions propres généralisées pour la famille d'opérateurs $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_1}$ par les relations (3.25) se redéfinit également à l'aide de la transformation S_1 et du générateur $T_{[1]\lambda}$ d'un système linéaire ergodique discret sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ par les équations (4.18).

Remarque : Compte tenu du Lemme 4.3.2, la suite de matrices de transfert définie par les relations (3.25) peut également être perçue comme la réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $GL_2(\mathbb{C})$.

Cas $\mathbf{H}_3(\mathbb{Z})$ L'analyse spectrale d'un opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ vérifiant les hypothèses $\mathbf{H}_3(\mathbb{Z})$ s'appuie également sur la construction d'un processus ergodique par le biais des phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Le représentant de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ et ses matrices de transfert ne dépendent des phases $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ que par le biais des phases $(\eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définies par (3.26) : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\eta_k = \theta_{k+1} + \theta_k + v_{k+1} - v_k = 4k\pi\beta + 2\pi(\beta + \alpha) + 2\theta \ .$$

On posera : $\omega = 2\theta$. Le représentant de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est donc une fonction faiblement mesurable de la variable ω , définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_3, \mathcal{F}_3, P_3)$. L'application $U_{\mathbb{Z}}$ sera aussi notée $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_3}$.

Un calcul plus précis montre que les matrices de transfert du représentant de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$, $(T_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{Z}}$ ne dépendent en fait que d'une suite $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ engendrée par l'action d'un flot S_3 sur l'espace probabilisé $(\Omega_3, \mathcal{F}_3, P_3) = (\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \nu)$ défini par :

$$\begin{aligned} S_3 : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ \omega &\mapsto 8\pi\beta + \omega \end{aligned} \ .$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = S_3^k \omega$ où $\omega = 2\theta$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les phases η_k se réécrivent :

$$\eta_k = \omega + 4\pi\beta k + 2\pi(\beta + \alpha) \ .$$

L'expression (3.25) devient alors : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (T_{k,\lambda})_{11} &= -e^{-i(\lambda + 8k\pi\beta + \omega + 2\pi(\alpha - \beta))} \\ (T_{k,\lambda})_{22} &= -\frac{1}{t^2} e^{i(\lambda + 8k\pi\beta + \omega + 2\pi(\beta + \alpha))} + \frac{r^2}{t^2} \left(e^{4i\pi\beta} + 1 - e^{-i(8k\pi\beta + 2\pi(\beta + \alpha) + \omega)} \right) \\ (T_{k,\lambda})_{12} &= i \frac{r}{t} \left(e^{-i(\lambda + \omega + 2\pi(\alpha - \beta) + 8k\pi\beta)} - 1 \right) \\ (T_{k,\lambda})_{21} &= i \frac{r}{t} \left(e^{i4\pi\beta} - e^{-i(\lambda + \omega + 2\pi(\alpha - \beta) + 8k\pi\beta)} \right) \ . \end{aligned}$$

Comme β est irrationnel, le flot S_3 est une transformation ergodique inversible de l'espace probabilisé $(\Omega_3, \mathcal{F}_3, P_3)$ ([Wa], théorème 1.8).

La suite de matrices de transfert $(T_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{Z}}$ permettant de reconstituer les coefficients des solutions propres généralisées de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ se redéfinit à l'aide du flot S_3 et du générateur $T_{[3]\lambda}$ d'un système dynamique linéaire ergodique discret et défini sur $(\Omega_3, \mathcal{F}_3, P_3)$ par : $\forall \omega \in \Omega_3, \forall k \in \mathbb{Z}$,

$$T_{k,\lambda}(S_3\omega) = T_{k+1,\lambda}(\omega) = T_{[3]\lambda}(S_3^k\omega) , \quad (4.21)$$

où

$$\begin{aligned} (T_{[3]\lambda}(\omega))_{11} &= -e^{-i(\lambda+\omega+2\pi(\alpha-\beta))} \\ (T_{[3]\lambda}(\omega))_{22} &= \frac{r^2}{t^2}(e^{4i\pi\beta} + 1 - e^{-i(\lambda+\omega+2\pi(\beta+\alpha))}) - \frac{1}{t^2}e^{i(\lambda+\omega+2\pi(\beta+\alpha))} \\ (T_{[3]\lambda}(\omega))_{21} &= \frac{ir}{t}(e^{4i\pi\beta} - e^{-i(\lambda+\omega-6\beta\pi+2\pi(\alpha-\beta))}) \\ (T_{[3]\lambda}(\omega))_{12} &= \frac{ir}{t}(e^{-i(\lambda+\omega+2\pi(\alpha-\beta))} - 1) , \end{aligned}$$

et λ est fixé dans $\mathbb{T}$.

4.3.2 Théorème multiplicatif ergodique

Le théorème 4.2.1 peut être adapté à l'étude des suites de matrices de transfert $(T_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{Z}}$ engendrées par $T_{[1]\lambda}$ ou $T_{[3]\lambda}$. Il donnera un moyen de contrôler la (dé)croissance des coefficients des solutions propres généralisées de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ sur la base canonique de $l^2(\mathbb{Z})$.

Remarque préliminaire : Qu'il s'agisse de considérer les familles d'opérateurs $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_1}$ ou $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_3}$, l'énoncé et la preuve du corollaire 4.3.1 et de la proposition 4.3.1 sont identiques. Dans la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S , T_λ et $\gamma_{1,\lambda}$ pourront être traduits par $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, S_1 , $T_{[1]\lambda}$ et $\gamma_{1,[1]\lambda}$ ou par $(\Omega_3, \mathcal{F}_3, P_3)$, S_3 , $T_{[3]\lambda}$ et $\gamma_{1,[3]\lambda}$.

Corollaire 4.3.1 *Soit $\lambda \in \mathbb{T}$ fixé. L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est muni de la transformation inversible S . Le système dynamique linéaire ergodique discret considéré sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P, S)$, engendré par l'application mesurable T_λ sera défini par : $\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} M_{k,\lambda}(\omega) &= T_\lambda(S^{k-1}\omega) \dots T_\lambda(S\omega)T_\lambda(\omega) , \\ M_{-k,\lambda}(\omega) &= T_\lambda(S^{-k}\omega) \dots T_\lambda(S^{-1}\omega) , \\ M_{0,\lambda}(\omega) &= I_2 . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Alors, il existe un ensemble invariant sous S , Ω_λ de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_\lambda$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_{n,\lambda}(\omega)^* M_{n,\lambda}(\omega))^{1/2n} = \Lambda_\lambda(\omega). \quad (4.23)$$

où $\Lambda_\lambda(\omega)$ est une matrice possédant au plus deux valeurs propres distinctes :

$$e^{\gamma_{1,\lambda}} \geq e^{\gamma_{2,\lambda}} \equiv e^{-\gamma_{1,\lambda}} > 0, \quad (4.24)$$

associées à deux sous-espaces propres, $\mathcal{E}_{1,\lambda}(\omega)$, $\mathcal{E}_{2,\lambda}(\omega)$. Si $\gamma_{1,\lambda} > 0$, il existe une filtration de $\mathbb{C}^2$,

$$\{0\} \subset \mathcal{V}_\lambda(\omega) \subset \mathbb{C}^2,$$

où $\mathcal{V}_\lambda(\omega) = \mathcal{E}_{2,\lambda}(\omega)$, $\mathbb{C}^2 = \mathcal{E}_{2,\lambda}(\omega) \oplus \mathcal{E}_{1,\lambda}(\omega)$, pour laquelle :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{V}_\lambda(\omega) & \text{ ssi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|M_{n,\lambda}(\omega)u\| = \gamma_{2,\lambda} = -\gamma_{1,\lambda} < 0 \\ u \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{V}_\lambda(\omega) & \text{ ssi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|M_{n,\lambda}(\omega)u\| = \gamma_{1,\lambda} > 0 . \end{aligned}$$

Les exposants de Lyapunov $\gamma_{1,\lambda}$ et $\gamma_{2,\lambda}$ sont indépendants de ω .

Preuve : Soit $\lambda \in \mathbb{T}$ fixé. Le système linéaire ergodique discret sur $(\Omega, \mathcal{F}, P, S)$ à valeurs dans $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par T_λ en induit un autre engendré par $\tilde{T}_\lambda$ à valeurs dans $GL_4(\mathbb{R})$. Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème 4.2.1 s'appliquent à ce nouveau système dynamique linéaire discret. Toute les normes matricielles étant équivalentes sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il suffit de considérer l'élément de matrice de module maximum, pour démontrer les inégalités suivantes : $\exists C_{r,t} \in]0, +\infty[$, $\forall \omega \in \Omega$,

$$C_{r,t}^{-1} \leq \|\tilde{T}_\lambda(\omega)\| \leq C_{r,t} .$$

Comme $\forall \omega \in \Omega$, $|\det \tilde{T}_\lambda(\omega)| = 1$, cet encadrement est également vrai pour la norme de $(\tilde{T}_\lambda(\omega))^{-1}$. Ainsi,

$$\left(\ln^+ \|\tilde{T}_\lambda(\cdot)\| + \ln^+ \|\tilde{T}_\lambda(\cdot)^{-1}\| \right) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) .$$

L'application du théorème 4.2.1 au système linéaire ergodique discret engendré par $\tilde{T}_\lambda$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P, S)$ entraîne l'existence d'un ensemble invariant sous S , Ω_λ de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_\lambda$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\tilde{M}_{n,\lambda}(\omega)^* \tilde{M}_{n,\lambda}(\omega))^{1/2n} = \Lambda'_\lambda(\omega) ,$$

où $\forall \omega \in \Omega_\lambda$, $\Lambda'_\lambda(\omega) \in GL_4(\mathbb{R})$. La matrice $\Lambda'_\lambda(\omega)$ admet au plus quatre valeurs propres : $e^{\gamma_{1,\lambda}} \geq e^{\gamma_{2,\lambda}} \geq e^{\gamma_{3,\lambda}} \geq e^{\gamma_{4,\lambda}}$ de multiplicités respectives $d_{1,\lambda}, \dots, d_{4,\lambda}$ associées aux sous-espaces propres $\mathcal{E}'_{1,\lambda}(\omega), \dots, \mathcal{E}'_{4,\lambda}(\omega)$. La matrice $\Lambda'_\lambda(\omega)$ est positive comme limite d'une suite de matrices positives. Ses valeurs propres sont strictement positives. L'application $\tilde{\cdot}$ étant bicontinue, nécessairement, $\forall \omega \in \Omega_\lambda$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_{n,\lambda}(\omega)^* M_{n,\lambda}(\omega))^{1/2n} = \Lambda_\lambda(\omega) \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}_\lambda(\omega) = \Lambda'_\lambda(\omega) .$$

En vertu du lemme 4.2.1, elles sont nécessairement de multiplicité 2. Autrement dit, $\Lambda'_\lambda(\omega)$ admet au plus deux valeurs propres distinctes : $e^{\gamma_{1,\lambda}} \geq e^{\gamma_{2,\lambda}} > 0$ de multiplicité 2 et associées aux sous-espaces propres $\mathcal{E}'_{1,\lambda}(\omega), \mathcal{E}'_{2,\lambda}(\omega)$. En vertu du théorème 4.2.1, il existe une filtration de $\mathbb{R}^4$, $\{0\} \subset \mathcal{V}'_\lambda(\omega) \subset \mathbb{R}^4$, où $\mathcal{V}'_\lambda(\omega) = \mathcal{E}'_{2,\lambda}(\omega)$, telle que : $u \in \mathcal{V}'_\lambda(\omega) \setminus \{0\}$ ssi

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{M}_{n,\lambda}(\omega)u\| = \gamma_{2,\lambda} , \tag{4.28}$$

et $u \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{V}'_\lambda(\omega)$ ssi

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|\tilde{M}_{n,\lambda}(\omega)u\| = \gamma_{1,\lambda} .$$

Soit $v_0 \in \mathcal{V}'_\lambda(\omega) \setminus \{0\}$ et u_0 tel que $v_0 = \widehat{u_0}$. Tout vecteur de $\mathbb{C}^2$ se décompose sous la forme $u = \alpha u_0 + u_0^\perp$ où $u_0^\perp$ est une composante orthogonale à u_0 . Par conséquent, $\widehat{u} = \Re(\alpha)\widehat{u_0} + \Im(\alpha)\widehat{i u_0} + \widehat{u_0^\perp}$. Comme pour tout entier n ,

$$\|M_{n,\lambda}(\omega)u\| = \|\widetilde{M}_{n,\lambda}(\omega)\widehat{u}\| ,$$

il est clair que :

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|M_{n,\lambda}(\omega)u\| = \gamma_{2,\lambda} ,$$

si et seulement si $u_0^\perp = 0$. Autrement dit, en posant $\mathcal{V}_\lambda(\omega) = \mathbb{C}u_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|M_{n,\lambda}(\omega)u\| = \gamma_{2,\lambda} \quad \text{si et seulement si} \quad u \in \mathcal{V}_\lambda(\omega) \setminus \{0\} .$$

D'autre part, si $u \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{V}_\lambda(\omega)$,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|M_{n,\lambda}(\omega)u\| = \gamma_{1,\lambda} .$$

Les matrices engendrées par T_λ ayant un déterminant de module égal à 1, on obtient par continuité du déterminant $\det \Lambda_\lambda = e^{\gamma_{1,\lambda}} e^{\gamma_{2,\lambda}} = 1$. Donc $\gamma_{1,\lambda} = -\gamma_{2,\lambda}$. $\square$

Le comportement des coefficients des solutions propres généralisées dépend donc de la nullité ou de la stricte positivité du premier exposant de Lyapunov.

4.3.3 Exposant de Lyapunov et preuve du théorème 4.1.1

La suite de la preuve du théorème 4.1.1 transpose un résultat d'Ishii et Pastur sur l'absence de spectre absolument continu pour certaines familles de matrices de Jacobi [Ish], [Pas] à notre contexte. C'est l'objet de la proposition 4.3.1.

La démonstration de ce résultat pour les matrices de Jacobi s'appuie de manière cruciale sur une caractérisation du spectre de ces matrices en fonction du comportement des coefficients des solutions propres généralisées (voir [S1] par exemple). Nous montrons donc dans un travail préliminaire qu'un résultat du même type existe pour certaines familles d'opérateurs unitaires multi-diagonaux :

Théorème 4.3.1 *Soient $p \in \mathbb{N}$ et U un opérateur unitaire $(2p+1)$ -diagonal agissant sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Alors,*

$$\sigma(U) = \overline{\{e^{i\lambda} \in \mathbb{S} : U\phi = e^{i\lambda}\phi \text{ admet une solution polynômialement bornée}\}}^{ess} .$$

La preuve de ce résultat qui est assez longue, est exposée en détail en Annexe A.

Cela nous permet d'établir maintenant la proposition 4.3.1. La preuve est une adaptation de [CFKS] théorème 9.13 à nos familles d'opérateurs unitaires :

Proposition 4.3.1 *L'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{T}; \gamma_{1,\lambda} = 0\}$ contient P -presque sûrement le support de la famille spectrale $(E_{\omega,ac}(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ associée à la famille mesurable d'opérateurs $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:*

$$\sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}(\omega)) \subset \overline{\{e^{i\lambda} \in \mathbb{S}; \gamma_{1,\lambda} = 0\}}^{ess} \quad P - pp.$$

Par conséquent, si l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{T}; \gamma_{1,\lambda} = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle,

$$P(\{\omega \in \Omega; \sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}(\omega)) \neq \emptyset\}) = 0 .$$

Preuve : Définissons pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\Lambda_{0,\omega} \equiv \{\lambda \in \mathbb{T}; \gamma_{1,\lambda}(\omega) \text{ existe, } \gamma_{1,\lambda}(\omega) = 0\}$$

$$\Lambda_{\infty,\omega} \equiv \{\lambda \in \mathbb{T}; \gamma_{1,\lambda}(\omega) \text{ n'existe pas}\}$$

$$\Lambda_\omega = \Lambda_{0,\omega} \cup \Lambda_{\infty,\omega}$$

$$\text{et } S_\omega = \{e^{i\lambda} \in \mathbb{S}; U_\omega \phi = e^{i\lambda} \phi \text{ a une solution polynômialement bornée}\}.$$

En vertu du théorème A.0.1 (ou théorème 4.3.1), $E_\omega(\mathbb{T} \setminus S_\omega) = 0$. A fortiori, $E_{\omega,ac}(\mathbb{T} \setminus S_\omega) = 0$. Si $\lambda \in S_\omega \cap (\mathbb{T} \setminus \Lambda_\omega)$, les seules solutions polynômialement bornées de l'équation aux valeurs propres sont exponentiellement décroissantes (corollaire 4.3.1). Ce sont donc des vecteurs propres. L'ensemble $\mathbb{T} \setminus \Lambda_\omega$ est donc dénombrable. Par conséquent : $\nu(S_\omega \cap (\mathbb{T} \setminus \Lambda_\omega)) = 0$ et donc $E_{\omega,ac}(S_\omega \cap (\mathbb{T} \setminus \Lambda_\omega)) = 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned} E_{\omega,ac}(\mathbb{T}) &= E_{\omega,ac}(\mathbb{T} \setminus S_\omega) + E_{\omega,ac}(S_\omega) \\ &= E_{\omega,ac}(\mathbb{T} \setminus S_\omega) + E_{\omega,ac}(S_\omega \cap (\mathbb{T} \setminus \Lambda_\omega)) + E_{\omega,ac}(S_\omega \cap \Lambda_\omega) \\ &= E_{\omega,ac}(S_\omega \cap \Lambda_\omega) = E_{\omega,ac}(S_\omega \cap \Lambda_{0,\omega}) + E_{\omega,ac}(S_\omega \cap \Lambda_{\infty,\omega}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

En vertu du corollaire 4.3.1, pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $P({}^c\Omega_\lambda) = 0$ où

$${}^c\Omega_\lambda = \{\omega \in \Omega; \gamma_{1,\lambda}(\omega) \text{ n'existe pas}\}.$$

En utilisant alors le théorème de Fubini, on obtient :

$$0 = \int_{\mathbb{T}} P({}^c\Omega_\lambda) d\nu(\lambda) \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\{(\omega,\lambda) \in \mathbb{T} \times \Omega; \gamma_{1,\lambda}(\omega) \text{ n'existe pas}\}} dP(\omega) d\nu(\lambda) \\ &= \int_{\{(\lambda,\omega) \in \Omega \times \mathbb{T}; \gamma_{1,\lambda}(\omega) \text{ n'existe pas}\}} d\nu(\lambda) dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \nu(\Lambda_{\infty,\omega}) dP(\omega). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Par conséquent, $\nu(\Lambda_{\infty,\omega}) = 0$, P -pp. Ainsi,

$$E_{\omega,ac}(\mathbb{T}) = E_{\omega,ac}(S_\omega \cap \Lambda_{0,\omega}), \quad P - \text{pp}.$$

La preuve de la première partie de la proposition est alors immédiate.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, on notera :

$$\Omega_{0,\lambda} = \{\omega \in \Omega; \gamma_{1,\lambda}(\omega) \text{ existe et } \gamma_{1,\lambda}(\omega) = 0\}.$$

Si l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1,\lambda}$ est strictement positif pour un ensemble de valeurs de λ de mesure de Lebesgue pleine, nécessairement $P(\Omega_{0,\lambda}) = 0$ pour ν -presque tout λ . En réutilisant le théorème de Fubini, il vient

$$0 = \int_{\mathbb{T}} P(\Omega_{0,\lambda}) d\nu(\lambda) \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\{(\omega,\lambda) \in \mathbb{T} \times \Omega; \gamma_{1,\lambda}(\omega) = 0\}} dP(\omega) d\nu(\lambda) \\ &= \int_{\{(\lambda,\omega) \in \Omega \times \mathbb{T}; \gamma_{1,\lambda}(\omega) = 0\}} d\nu(\lambda) dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \nu(\Lambda_{0,\omega}) dP(\omega). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Donc, $\nu(\Lambda_{0,\omega}) = 0$, P -pp. L'équation (4.3.3) se réécrit alors :

$$E_{\omega,ac}(\mathbb{T}) = 0 \quad , \quad P - pp \quad .$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

Les propriétés des mesures images permettent de reformuler la proposition 4.3.1 sur les espaces probabilisés adaptés à la modélisation initiale des opérateurs $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$, $j \in \{1,2,3\}$. Pour cela et jusqu'à la fin du chapitre, la fonction χ sera définie sur l'ensemble $\{1,2,3\}$ par : $\chi(1) = \chi(2) = 1$ et $\chi(3) = 3$.

Corollaire 4.3.2 *Soit $j \in \{1,2,3\}$ fixé. L'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{T}; \gamma_{1, [\chi(j)]\lambda} = 0\}$ contient P_j -presque sûrement le support essentiel de la famille spectrale $(E_{\omega,ac}(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ associée à la famille mesurables d'opérateurs $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j)$:*

$$\sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}(\omega)) \subset \overline{\{e^{i\lambda} \in \mathbb{S}; \gamma_{1, [\chi(j)]\lambda} = 0\}}^{ess} \quad P_j - pp.$$

Par conséquent, si l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{T}; \gamma_{1, [\chi(j)]\lambda} = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, $\sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}(\omega)) = \emptyset$, P_j -pp.

La démonstration du théorème 4.1.1 sera donc achevée avec la preuve de la stricte positivité des premiers exposants de Lyapunov $\gamma_{1, [1]\lambda}$ et $\gamma_{1, [3]\lambda}$. Ces résultats sont démontrés aux paragraphes 4.3 et 4.4 respectivement.

4.4 Positivité de l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1, [1]\lambda}$

Ce paragraphe à caractère plus technique est consacré à la démonstration de la stricte positivité de l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1, [1]\lambda}$ associé au système dynamique engendré par $T_{[1]\lambda}$. Celle-ci se démontre à l'aide du théorème de Fürstenberg ([BL] théorème III.6.1). L'indépendance des termes de la suite de matrices de transfert est cruciale ici. La distribution uniforme et l'indépendance des termes de la suite $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont pour cela nécessaires.

Définition 4.4.1 *Soit d un entier strictement positif et S un sous-ensemble de $GL_d(\mathbb{R})$. S est dit irréductible s'il n'existe pas de sous-espaces stricts $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $M \in S$, $M(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$. Ce même ensemble sera dit fortement irréductible s'il n'existe pas de famille finie de sous-espaces stricts de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_N$ tels que : $\forall M \in S, M(\mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_N) = \mathcal{V}_1 \cup \dots \cup \mathcal{V}_N$.*

La forte irréductibilité d'un ensemble de matrices inversibles entraîne son irréductibilité, mais la réciproque est fausse en général. La réciproque est vraie dans le cas particulier suivant :

Lemme 4.4.1 *Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\mathcal{S}$ un sous ensemble connexe de $GL_d(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}$ est fortement irréductible si et seulement si $\mathcal{S}$ est irréductible.*

La preuve de ce lemme fait l'objet de l'exercice IV.2.9 dans [BL]

Théorème 4.4.1 (Fürstenberg) *Si ν est une mesure de probabilité sur $\{M \in GL_d(\mathbb{R}); |\det M| = 1\}$ telle que :*

- $\int \log \|M\| d\nu(M) < +\infty$
- le groupe engendré par le support de la mesure ν , $\mathcal{G}_\nu$ soit fortement irréductible et non compact

alors le premier exposant de Lyapunov associé à toute suite de matrice i.i.d. de loi ν est strictement positif : $\gamma_1 > 0$.

Les hypothèses de ce théorème sont formulées pour des suites de matrices indépendantes à coefficients réels. Or, les suites de matrices de transfert considérées $(T_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{Z}}$ sont inversibles à coefficients complexes. L'objectif étant d'appliquer le théorème 4.4.1 aux matrices de transfert engendrées par $T_{[1]\lambda}$, le procédé de jumelage développé au paragraphe 4.2.2 va être réutilisé.

Soit $\lambda \in \mathbb{T}$ fixé. L'espace considéré ici, $SL_4(\mathbb{R})$, est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(SL_4(\mathbb{R}))$ et de la mesure de probabilité $\tilde{P}_\lambda$, image de P_1 par l'application $\tilde{T}_{[1]\lambda}$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{[1]\lambda} : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) &\longrightarrow (SL_4(\mathbb{R}), \mathcal{B}(SL_4(\mathbb{R}))) \\ \omega &\longmapsto \tilde{T}_{[1]\lambda}(\omega) . \end{aligned}$$

La mesure uniforme sur $\mathbb{T}$, ν , est invariante par translation de valeur λ . La mesure P_1 est donc invariante sous l'action de la transformation :

$$\begin{aligned} (\Omega_1, \mathcal{F}_1) &\longrightarrow (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \\ (\eta_{2k-1}, \eta_{2k})_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto (\eta_{2k-1} - \lambda, \eta_{2k} - \lambda)_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et la mesure image $\tilde{P}_\lambda$ ainsi que le plus petit groupe engendré par son support $\mathcal{G}_\lambda$ sont donc indépendants de λ . Ils seront notés $\tilde{P}$ et $\mathcal{G}$.

Nous allons maintenant vérifier si la suite de matrices de transfert engendrées par $\tilde{T}_{[1]\lambda}$ et l'espace probabilisé $(SL_4(\mathbb{R}), \mathcal{B}(SL_4(\mathbb{R})), \tilde{P})$ vérifient les hypothèses du théorème 4.4.1.

Proposition 4.4.1 *Le groupe $\mathcal{G}$ n'est pas compact.*

Preuve : La matrice $\tilde{T}_{[1]\lambda}(\pi - \lambda, \pi - \lambda)$ appartient au support de la mesure $\tilde{P}$. Comme $r < 1$, $\tilde{T}_{[1]\lambda}(\pi - \lambda, \pi - \lambda)$ admet pour valeurs propres :

$$\frac{(r-1)^2}{t^2} \quad \text{et} \quad \frac{(r+1)^2}{t^2} .$$

Le module de la dernière est strictement supérieur à 1. Comme pour tout entier n , $\tilde{T}_{[1]\lambda}(\pi - \lambda, \pi - \lambda)^n \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ ne peut être borné. $\square$

Proposition 4.4.2 *Le groupe $\mathcal{G}$ est fortement irréductible.*

Preuve : Pour prouver qu'un ensemble est fortement irréductible, il suffit de trouver un sous-ensemble connexe non-vidé qui soit irréductible en vertu du lemme 4.4.1. Les applications :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &\longrightarrow GL_4(\mathbb{R}) & \text{et} & \quad \mathbb{T} \longrightarrow GL_4(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \tilde{T}_{[1]\lambda}(x - \lambda, x - \lambda) & & \quad x \longmapsto \tilde{T}_{[1]\lambda}(x - \lambda, -x + \lambda) \end{aligned}$$

étant analytiques, l'ensemble $\mathcal{T}_+ \times \mathcal{T}_-$ défini par :

$$\mathcal{T}_+ \times \mathcal{T}_- = \{\tilde{T}_{[1]\lambda}(x - \lambda, x - \lambda); x \in \mathbb{T}\} \times \{\tilde{T}_{[1]\lambda}(x - \lambda, -x + \lambda); x \in \mathbb{T}\}$$

est connexe et indépendant du choix de λ . Nous allons montrer qu'il n'existe pas de sous-espaces stricts de $\mathbb{R}^4$ invariants sous l'action de cet ensemble de matrices. Les éléments de $\mathcal{T}_+$ sont décrits par : $\forall x \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{[1]\lambda}(x - \lambda, x - \lambda) &= M_0 + \sin x M_1 + \cos x M_2 \\ M_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{r}{t} \\ 0 & 0 & \frac{r}{t} & 0 \\ 0 & \frac{r}{t} & 2\frac{r^2}{t^2} & 0 \\ -\frac{r}{t} & 0 & 0 & 2\frac{r^2}{t^2} \end{pmatrix}, \\ M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{r}{t} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{r}{t} \\ -\frac{r}{t} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{r}{t} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_2 &= -(M_0 + I_4) .\end{aligned}\tag{4.41}$$

Si $\mathcal{E}$ est un sous-espace strict invariant sous $\mathcal{T}_+$, il est nécessairement invariant sous l'action de matrices $(M_j)_{j \in \{0,1,2\}}$. Les éléments de $\mathcal{T}_-$ sont décrits par : $\forall x \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{[1]\lambda}(x - \lambda, -x + \lambda) &= N_0 + \sin x N_1 + \cos x N_2 + \sin(2x)N_3 + \cos(2x)N_4 \text{ où} \\ N_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{r}{t} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{r}{t} \\ -\frac{r}{t} & 0 & 0 & \frac{r^2+1}{t^2} \\ 0 & -\frac{r}{t} & -\frac{r^2+1}{t^2} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et N_2, N_3, N_4 appartiennent à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Tout espace strict $\mathcal{E}$ invariant sous $\mathcal{T}_-$ le sera pour N_1 . Les matrices M_0, M_1, N_1 sont à coefficients réels et (anti)symétriques. Si le sous-espace strict $\mathcal{E}$ est laissé invariant par ces dernières, $\mathcal{E}^\perp$ le sera aussi. Ces matrices seront donc simultanément réduites par la décomposition de l'espace : $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp = \mathbb{R}^4$. Ces sous-espaces sont nécessairement engendrés par les sous-espaces propres de ces matrices. Considérons une base de vecteurs propres (u_1, u_2, u_3, u_4) de M_0 :

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ -(r+1) \end{pmatrix} & u_2 &= \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ (1-r) \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_3 &= \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ (1-r) \end{pmatrix} & u_4 &= \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 \\ -(r+1) \\ t \\ 0 \end{pmatrix} .\end{aligned}\tag{4.42}$$

D'une part,

$$M_0 u_1 = \frac{r(r+1)}{t^2} u_1 \quad M_0 u_2 = \frac{r(r+1)}{t^2} u_2 \quad M_0 u_3 = \frac{r(r-1)}{t^2} u_3 \quad M_0 u_4 = \frac{r(r-1)}{t^2} u_4 .$$

D'autre part, en utilisant l'identité $r^2 + t^2 = 1$,

$$M_1 u_1 = \frac{1}{t} u_4 \quad M_1 u_2 = \frac{1}{t} u_3 \quad M_1 u_3 = -\frac{1}{t} u_2 \quad M_1 u_4 = -\frac{1}{t} u_1 ,$$

et

$$N_1 u_1 = -\frac{1+r}{t(1-r)} u_2 \quad N_1 u_2 = \frac{1}{t} u_1 \quad N_1 u_3 = \frac{1-r}{t(1+r)} u_2 \quad N_1 u_4 = -\frac{1}{t} u_3 .$$

Ces calculs montrent directement qu'aucun sous-espace unidimensionnel $\mathcal{E} = \langle u_j \rangle$ (ou $\mathcal{E}^\perp = \langle u_j \rangle^\perp$) ne peut rester stable sous l'action des trois matrices M_0, M_1, N_0 . De même, aucun sous-espace bi-dimensionnel $\mathcal{E} = \langle u_j, u_k \rangle$ ne reste stable. L'ensemble $\mathcal{T}_+ \times \mathcal{T}_-$ est irréductible et connexe donc fortement irréductible. Le groupe $\mathcal{G}$ le contenant l'est également a fortiori. $\square$

Lors de la démonstration du corollaire 4.3.1 nous avons montré que : $\exists C_{r,t} > 0, \forall \omega \in \Omega_1$,

$$C_{r,t}^{-1} \leq \|\tilde{T}_{[1]\lambda}\| \leq C_{r,t} .$$

La mesure $\tilde{P}$ étant finie, nécessairement,

$$\int \|\tilde{T}_{[1]\lambda}(\omega)\| d\tilde{P}(\omega) < +\infty .$$

En vertu des propositions 4.4.1 et 4.4.2, le groupe $\mathcal{G}$ est fortement irréductible et n'est pas compact. Par conséquent, il suffit d'appliquer le théorème de Fürstenberg à la suite de matrices engendrées par $\tilde{T}_{[1]\lambda}$ pour montrer que l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1,[1]\lambda}$ est strictement positif.

4.5 Positivité de l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1,[3]\lambda}$

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la stricte positivité de l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1,[3]\lambda}$ associé au système dynamique engendré par $T_{[3]\lambda}$. Le principe de la démonstration de ce résultat n'est pas nouveau [He]. Il utilise l'ergodicité de la suite $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Soit $(T_{k,\lambda}(z))_{k \in \mathbb{Z}}$ la famille de matrices définie pour $z \in \mathbb{C}^*$ par :

$$\begin{aligned} T_{k,\lambda}(z) &= z^{-1} T_{k,\lambda,-2} + T_{k,\lambda,0} + z T_{k,\lambda,2} \text{ avec} \\ T_{k,\lambda,2} &= e^{-i(\lambda+2\pi\alpha)} e^{-i8k\pi\beta} \begin{pmatrix} -e^{2i\pi\beta} & \frac{ir}{t} e^{2i\pi\beta} \\ -\frac{ir}{t} e^{2i\pi\beta} & -\frac{r^2}{t^2} e^{-2i\pi\beta} \end{pmatrix} \\ T_{k,\lambda,0} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ir}{t} \\ \frac{ir}{t} e^{4i\pi\beta} & \frac{r^2}{t^2} (e^{4i\pi\beta} + 1) \end{pmatrix} \\ T_{k,\lambda,-2} &= e^{i(\lambda+2\pi\alpha)} e^{i8k\pi\beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^2} e^{2i\pi\beta} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Pour $z = e^{-i\pi\omega}$, l'expression $T_{k,\lambda}(z)$ coïncide avec celle de la matrice de transfert $T_{k,\lambda}(\omega)$ définie par les relations (4.21).

Proposition 4.5.1 *Si β est irrationnel, alors l'exposant de Lyapunov $\gamma_{1,[3]\lambda}$ associé au système dynamique linéaire discret engendré par $T_{[3]\lambda}$ est tel que :*

$$\gamma_{1,[3]\lambda} \geq \ln\left(\frac{1}{t^2}\right) > 0 .$$

Preuve : Posons $R_k(z) = zT_k(z)$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. Les matrices ainsi définies sont analytiques sur $\mathbb{C}$. D'autre part : $\forall z \in \mathbb{S}, \forall k \in \mathbb{N}, \|R_k(z)\| = \|T_k(z)\|$. Par conséquent, la fonction $\|\ln \prod_{k=1}^N R_k(\cdot)\|$ est sous-harmonique ([Katz] III.3.2) :

$$\int_{\mathbb{T}} \ln \left\| \prod_{k=1}^N R_k(e^{i\theta}) \right\| d\nu(\theta) \geq \ln \left\| \prod_{k=1}^N R_k(0) \right\| = N \ln \frac{1}{t^2} . \quad (4.46)$$

Le flot S_3 est ergodique. En vertu du théorème ergodique sous-additif [King],

$$\begin{aligned} \gamma_{1,[3]\lambda} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln \left\| \prod_{k=1}^N T_k(e^{i\theta}) \right\| = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}} \ln \left\| \prod_{k=1}^N T_k(e^{i\theta}) \right\| d\nu(\theta) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}} \ln \left\| \prod_{k=1}^N R_k(e^{i\theta}) \right\| d\nu(\theta) . \end{aligned} \quad (4.47)$$

La proposition se déduit des relations (4.46) et (4.47). $\square$

4.6 Preuve du théorème 4.1.2

Preuve : Soit $j \in \{1,2,3\}$. Considérons les représentants de deux familles d'opérateurs unitaires $(U_{\mathbb{N}^*}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ et $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ construits autour des mêmes suites constantes et non-nulles de coefficients de réflexion et de transition r et t et vérifiant l'hypothèse **H_j**. A toute réalisation de la famille d'opérateurs aléatoires $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ est associé un nouvel opérateur unitaire $U_0(\omega)$ défini par la relation (3.27). La famille correspondante $(U_0(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ est encore faiblement mesurable. D'autre part, toute réalisation de l'opérateur unitaire $P_{\mathbb{N}^*} U_0(\omega) P_{\mathbb{N}^*}$ coïncide avec une réalisation de la famille $(U_{\mathbb{N}^*}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$, elle aussi faiblement mesurable. Pour chacune de ces réalisations, $\sigma_{ac}(U_{\mathbb{N}^*}(\omega)) \subset \sigma_{ac}(U_0(\omega)) = \sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}(\omega))$, la dernière égalité étant le fruit du théorème de Birman-Krein [BK]. La conclusion est dès lors immédiate compte tenu du théorème 4.1.1. $\square$

4.7 Remarques complémentaires

4.7.1 Quelques mots sur l'invariance du support spectral

A l'image de certains travaux sur les matrices de Jacobi, il paraît légitime de se demander si, l'entier j étant fixé dans $\{1,2,3\}$, les supports des composantes absolument continue, singulière continue et ponctuelle de la mesure spectrale des opérateurs étudiés $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ sont invariants pour un ensemble de réalisations de mesure P_j totale.

Comme pour les matrices de Jacobi ([CFKS] chapitre 9), l'ergodicité de la transformation $S_{\chi(j)}$ associée aux espaces probabilisés $(\Omega_{\chi(j)}, \mathcal{F}_{\chi(j)}, P_{\chi(j)})$ où $j \in \{1,2,3\}$, la faible mesurabilité des familles de projecteurs spectraux associés aux représentants de la famille d'opérateurs $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ et enfin l'unitarité des opérateurs $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ définis par : $\forall u \in l^2(\mathbb{Z}), \forall k \in \mathbb{Z}$,

$$(V_i u)_k = u_{(S_+^{-i} k)} ,$$

permettent de démontrer la proposition 4.7.1 :

Proposition 4.7.1 *Soit $j \in \{1,2,3\}$. Il existe des sous-ensembles $\Sigma_{ac,j}$, $\Sigma_{sc,j}$, $\Sigma_{pp,j}$ du cercle unité $\mathbb{S}$ tels que :*

$$\begin{aligned}\sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}(\omega)) &= \Sigma_{ac,j} \setminus P_j - \text{pp} \\ \sigma_{sc}(U_{\mathbb{Z}}(\omega)) &= \Sigma_{sc,j} \setminus P_j - \text{pp} \\ \overline{\sigma_{pp}(U_{\mathbb{Z}}(\omega))} &= \Sigma_{pp,j} \setminus P_j - \text{pp} ,\end{aligned}$$

où la famille d'opérateurs unitaires $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ est définie et faiblement mesurable sur $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j)$.

Il n'existe à l'heure actuelle pas de résultat analogue pour les familles d'opérateurs $(U_{\mathbb{N}^*}(\omega))_{\omega \in \Omega_j}$ à l'exception du théorème 4.1.2. Je n'ai pas encore pu déterminer s'il existait des ensembles invariants supportant les composantes singulières du spectre de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ pour presque toute réalisation de celui-ci.

4.7.2 En suivant Gordon ...

Les théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 ne fournissent qu'une information partielle sur la nature du spectre des familles d'opérateurs $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))$ et $(U_{\mathbb{N}^*}(\omega))$. Une information plus précise peut être fournie pour la famille $(U_{\mathbb{Z}}(\omega))_{\omega \in \Omega_3}$ lorsque le coefficient β est liouvillien :

Théorème 4.7.1 *Si l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est construit à partir de suites de coefficients de réflexion et de transition constantes non nulles et vérifie l'hypothèse $\mathbf{H}_3(\mathbb{Z})$ avec β liouvillien, alors le spectre de $U_{\mathbb{Z}}$ est purement singulier continu pour presque toute valeur de θ .*

Ce résultat est démontré dans [BHJ]. Il reprend une argumentation avancée par Gordon pour certaines familles de matrices de Jacobi.

Chapitre 5

Cas périodique

Lorsque les suites de coefficients de réflexion et de transition sont constantes, non nulles et que les phases sont périodiques, les expériences numériques suggèrent que le spectre de l'opérateur $U_{\mathbb{N}^*}$ est absolument continu [BB]. Nous allons préciser au cours de ce chapitre dans quelle mesure cette idée est justifiée.

5.1 Hypothèses et résultats principaux

Nous allons supposer à partir de maintenant que les opérateurs unitaires $U_{\mathbb{N}^*}$ et $U_{\mathbb{Z}}$ sont construits à partir de suites de coefficients de réflexion et de transition (r_k) , (t_k) , constantes, respectivement fixées aux valeurs non nulles r et t ($r^2 + t^2 = 1$). Nous supposons en outre que les phases (θ_k) , (v_k) vérifient l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,M}$ pour un entier $M \in \mathbb{N}^*$:

$\mathbf{H}_{4,M}$: Il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et deux suites $(\Theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(\Pi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ périodiques, de même période N tels que: $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\Pi_{k+N} = \Pi_k \quad , \quad \Theta_{k+N} = \Theta_k$$

et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \geq M$ ou $k \leq 0$,

$$\theta_k = \Theta_k \quad , \quad v_k = ak + \Pi_k \quad .$$

Nous démontrons d'abord à l'aide de la théorie de Bloch le résultat suivant :

Théorème 5.1.1 *Le spectre d'un opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ défini par des coefficients de réflexion et de transition constants r et t , non nuls et des phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,1}$ est absolument continu: $\sigma_{sc}(U_{\mathbb{Z}}) = \sigma_{pp}(U_{\mathbb{Z}}) = \emptyset$.*

L'utilisation du théorème 5.1.1 et du formalisme des matrices de transfert permettra alors d'expliciter la nature spectrale de l'opérateur de monodromie $U_{\mathbb{N}^*}$ bâti autour des mêmes coefficients de réflexion et de transition et vérifiant une hypothèse de la forme $\mathbf{H}_{4,M}$, $M \in \mathbb{N}^*$:

Théorème 5.1.2 *Supposons que l'opérateur unitaire $U'_{\mathbb{N}^*}$ soit construit à partir de coefficients de réflexion et de transition constants r et t , non nuls et de phases $(\theta'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(v'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$*

vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,M}$. Alors

$$\begin{aligned}\sigma_{sc}(U'_{\mathbb{N}^*}) &= \emptyset \\ \sigma_{ac}(U'_{\mathbb{N}^*}) &= \sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}) = \sigma(U_{\mathbb{Z}}) \\ \frac{\sigma_{ac}(U'_{\mathbb{N}^*})}{\sigma_{pp}(U'_{\mathbb{N}^*})} &\subset \mathbb{S} \setminus \sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}) .\end{aligned}\tag{5.1}$$

où l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est construit avec les mêmes coefficients r, t ainsi qu'avec des phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,1}$ et telles que : $\forall k \leq 0, \forall k \geq M, \theta'_k = \theta_k, v'_k = v_k$.

Les valeurs propres de l'opérateur $U'_{\mathbb{N}^*}$ sont par ailleurs simples et en nombre fini.

5.2 Quelques mots sur la théorie de Bloch

Ce paragraphe introduit la notion d'intégrale directe d'opérateurs et ses principales propriétés. Des exposés plus approfondis pourront être consultés dans [Dix] paragraphes II.1 et II.2 et [RS] chapitre XIII paragraphe 16.

Si ν est la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore $\mathbb{T}$ et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T}, \nu; \mathcal{H})$ est l'espace des applications ν -mesurables ϕ définies sur $\mathbb{T}$, à valeurs dans $\mathcal{H}$ et de carré intégrable :

$$\int_{\mathbb{T}} \|\phi(x)\|^2 d\nu(x) < +\infty .$$

Cet espace est aussi identifié à l'espace $L^2(\mathbb{T}, \nu) \otimes \mathcal{H}$. Une famille d'opérateurs bornés $(T(x))_{x \in \mathbb{T}}$ (définie aux ensembles ν -négligeables près) agissant sur $\mathcal{H}$ est ν -mesurable si pour toute application ν -mesurable ϕ à valeurs dans $\mathcal{H}$, l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &\rightarrow \mathcal{H} \\ x &\mapsto T(x)\phi(x) ,\end{aligned}$$

est ν -mesurable. Autrement dit, la famille est ν -mesurable si et seulement si pour tout $(\phi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, l'application $\langle \phi | T(\cdot) \psi \rangle$ est ν -mesurable. L'application $\|T(\cdot)\|$ est alors ν -mesurable, et la famille $(T(x))_{x \in \mathbb{T}}$ essentiellement bornée.

Un opérateur T borné, agissant sur $L^2(\mathbb{T}, \nu; \mathcal{H})$ est dit décomposable s'il existe une fonction T de $L^\infty(\mathbb{T}, \nu; \mathcal{H})$ telle que pour toute application ν -mesurable

$$\phi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$$

et pour ν -presque tout $x \in \mathbb{T}$, $(T\phi)(x) = T(x)\phi(x)$. Un tel opérateur T est aussi appelé intégrale directe de la famille $(T(x))_{x \in \mathbb{T}}$ et est parfois noté :

$$T = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} T(x) d\nu(x) \quad \text{et} \quad \|T\| = \|T(\cdot)\|_{\infty} .$$

Cette construction admet en outre quelques propriétés naturelles. Ainsi, si T_1 et T_2 sont des opérateurs décomposables, $T_1 + T_2$, $T_1 \cdot T_2$, λT_1 et T_1^* le sont également et,

$$\begin{aligned}T_1 + T_2 &= \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} (T_1(x) + T_2(x)) d\nu(x) , \quad T_1 \cdot T_2 = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} T_1(x) \cdot T_2(x) d\nu(x) , \\ \lambda T_1 &= \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \lambda T_1(x) d\nu(x) , \quad T_1^* = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} T_1(x)^* d\nu(x) .\end{aligned}$$

Un opérateur décomposable T est unitaire si et seulement si la famille $(T(x))_{x \in \mathbb{T}}$ associée est une famille d'opérateurs unitaires ν -presque partout.

Ce formalisme se prolonge naturellement vers la théorie de Bloch ([RS], théorème XIII.86). Il est possible de relier le spectre d'un opérateur décomposable T à la nature spectrale des opérateurs $(T(x))_{x \in \mathbb{T}}$. En voici une version unitaire que nous utiliserons dans la suite :

Théorème 5.2.1 *Soient $(U(x))_{x \in \mathbb{T}}$ une famille ν -mesurable d'opérateurs unitaires agissant sur $\mathbb{C}^N$ et :*

$$U = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} U(x) d\nu(x) .$$

Supposons qu'il existe deux familles de fonctions $(\psi_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$ et $(\lambda_n)_{n \in \{1, \dots, N\}}$, définies et analytiques sur le tore $\mathbb{T}$ privé d'un nombre fini de points, la première à valeurs dans $\mathbb{C}^N$, la seconde à valeurs dans $\mathbb{S}$ telles que :

- aucune fonction λ_n n'est constante,
- $U(x)\psi_n(x) = \lambda_n(x)\psi_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ et tout $n \in \{1, \dots, N\}$,
- pour tout $x \in \mathbb{T}$, la famille $(\psi_n(x))_{n \in \{1, \dots, N\}}$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}^N$.

Alors, le spectre de U est absolument continu.

Ce résultat se déduit directement du théorème XIII.86 [RS] énoncé pour des opérateurs décomposables auto-adjoints.

5.3 Preuve du théorème 5.1.1

La preuve de ce résultat distingue le cas où la période est 1 (phases constantes) du cas où elle est supérieure ou égale à 2. Compte tenu du lemme 3.2.1, il suffit de prouver le résultat pour le représentant de la famille $U_{\mathbb{Z}}$ pour lequel : $\forall k \in \mathbb{Z}, \gamma_k = (-1)^{k+1}v_k$.

5.3.1 Cas où la périodicité est 1

Dans ce cas, le spectre du représentant des opérateurs $U_{\mathbb{Z}}$ est explicitement calculable. L'hypothèse $\mathbf{H}_{4,1}$ se réécrit : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\theta_k = \theta \text{ et } v_k = ak + v .$$

où θ, α et a sont des nombres réels fixés.

Preuve : L'écriture de l'image des vecteurs de la base canonique $(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ se simplifie. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} U_{\mathbb{Z}}\phi_{2k} &= e^{-i(a+2\theta)} (irt\phi_{2k-1} + r^2\phi_{2k} + irt\phi_{2k+1} - t^2\phi_{2k+2}) \\ U_{\mathbb{Z}}\phi_{2k+1} &= e^{-i(a+2\theta)} (-t^2\phi_{2k-1} + itr\phi_{2k} + r^2\phi_{2k+1} + irt\phi_{2k+2}) . \end{aligned}$$

Or, les espaces $l^2(\mathbb{Z})$ et $L^2(\mathbb{T}, \nu)$ sont mis en correspondance unitaire par le biais de l'opérateur unitaire W :

$$\begin{aligned} W : l^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ \phi_k &\mapsto e^{ik} . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Pour tout vecteur ϕ appartenant à $l^2(\mathbb{Z})$ tel que :

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty, \\ (W\phi)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.\end{aligned}$$

L'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est identifié à son équivalent unitaire $WU_{\mathbb{Z}}W^*$. Notons P_o et P_e les projecteurs orthogonaux associés à la décomposition : $L^2(\mathbb{T}, \nu) = L_o^2(\mathbb{T}, \nu) \oplus L_e^2(\mathbb{T}, \nu)$ où :

$$L_o^2(\mathbb{T}, \nu) = \overline{\text{Vect} \{(e^{(2k+1)i})_{k \in \mathbb{Z}}\}}, \quad L_e^2(\mathbb{T}, \nu) = \overline{\text{Vect} \{(e^{2ki})_{k \in \mathbb{Z}}\}}.$$

Les équations (5.4) se réécrivent alors : $\forall x \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}(U_{\mathbb{Z}}P_e\phi)(x) &= e^{-i(a+2\theta)} \left((r^2 - t^2 e^{2ix})(P_e\phi)(x) + 2itr \cos x (P_o\phi)(x) \right), \\ (U_{\mathbb{Z}}P_o\phi)(x) &= e^{-i(a+2\theta)} \left((r^2 - t^2 e^{-2ix})(P_o\phi)(x) + 2itr \cos x (P_e\phi)(x) \right).\end{aligned}$$

Considéré sur $L^2(\mathbb{T}, \nu)$, l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication à valeurs matricielles V où :

$$V = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} V(e^{ix}) d\nu(x)$$

et la famille $V(e^{i\cdot})$ de matrices unitaires est analytique sur $\mathbb{T}$ et définie par : $\forall x \in \mathbb{T}$,

$$V(e^{ix}) = e^{-i(a+2\theta)} \begin{pmatrix} r^2 - t^2 e^{2ix} & 2itr \cos(x) \\ 2itr \cos(x) & r^2 - t^2 e^{-2ix} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $V(e^{ix})$ sont conjuguées et non constantes :

$$\lambda_{\pm}(x) = e^{-i(a+2\theta)} \left(r^2 - t^2 \cos(2x) \pm i\sqrt{1 - (r^2 - t^2 \cos(2x))^2} \right).$$

Le résultat découle alors du théorème 5.2.1. □

5.3.2 Cas où la périodicité est supérieure à 2

La période N intervenant dans les hypothèses du théorème 5.1.1 est maintenant supposée supérieure à 2. La stratégie reste similaire. Le spectre ne sera cependant pas toujours déterminé explicitement.

Preuve : L'introduction des suites N -périodiques $(\nu_k^{\pm})_{k \in \mathbb{Z}}$ définies par : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\nu_k^+ &= \theta_{2k} + \theta_{2k+1} - (\Pi_{2k} - \Pi_{2k+1}) \\ \nu_k^- &= \theta_{2k} + \theta_{2k-1} + (\Pi_{2k} - \Pi_{2k-1}),\end{aligned}$$

permet de simplifier l'écriture de l'image des vecteurs de la base canonique. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}U_{\mathbb{Z}}\phi_{2k} &= e^{-ia} \left(irte^{-i\nu_k^-} \phi_{2k-1} + r^2 e^{-i\nu_k^-} \phi_{2k} + irte^{-i\nu_k^+} \phi_{2k+1} - t^2 e^{-i\nu_k^+} \phi_{2k+2} \right), \\ U_{\mathbb{Z}}\phi_{2k+1} &= e^{-ia} \left(-t^2 e^{-i\nu_k^-} \phi_{2k-1} + itre^{-i\nu_k^-} \phi_{2k} + r^2 e^{-i\nu_k^+} \phi_{2k+1} + irte^{-i\nu_k^+} \phi_{2k+2} \right).\end{aligned}$$

Les espaces $l^2(\mathbb{Z})$ et $L^2(\mathbb{T}, \nu)$ sont mis en correspondance unitaire par l'opérateur W défini en (5.4). Les opérateurs $U_{\mathbb{Z}}$ et $WU_{\mathbb{Z}}W^*$ sont donc identifiés. La décomposition de l'espace $L^2(\mathbb{T}, \nu)$ est affinée :

$$L^2(\mathbb{T}, \nu) = \left[\bigoplus_{q=0}^{N-1} L_{2q}^2(\mathbb{T}, \nu) \right] \bigoplus \left[\bigoplus_{q=0}^{N-1} L_{2q+1}^2(\mathbb{T}, \nu) \right] , \quad (5.9)$$

où pour tout $q \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$L_{2q}^2(\mathbb{T}, \nu) = \overline{\text{Vect} \{ (e^{(2Nk+2q)i})_{k \in \mathbb{Z}} \}}$$

et

$$L_{2q+1}^2(\mathbb{T}, \nu) = \overline{\text{Vect} \{ (e^{(2Nk+2q+1)i})_{k \in \mathbb{Z}} \}}.$$

Les projections orthogonales respectives sur ces sous-espaces supplémentaires seront notées P_{2q} , P_{2q+1} . Le calcul permet d'obtenir à nouveau un formalisme d'opérateurs de multiplication : pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{T}, \nu)$, pour tout $q \in \{0, \dots, N-1\}$ et pour ν -presque tout $x \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} (P_{2q-1}U_{\mathbb{Z}}P_{2q}\phi)(x) &= irte^{-i(a+\nu_q^-)}e^{ix}(P_{2q-1}\phi)(x) \\ (P_{2q}U_{\mathbb{Z}}P_{2q}\phi)(x) &= r^2e^{-i(a+\nu_q^-)}(P_{2q}\phi)(x) \\ (P_{2q+1}U_{\mathbb{Z}}P_{2q}\phi)(x) &= itre^{-i(a+\nu_q^+)}e^{-ix}(P_{2q+1}\phi)(x) \\ (P_{2q+2}U_{\mathbb{Z}}P_{2q}\phi)(x) &= -t^2e^{-i(a+\nu_q^+)}e^{-2ix}(P_{2q+2}\phi)(x) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_{2q-1}U_{\mathbb{Z}}P_{2q+1}\phi)(x) &= -t^2e^{-i(a+\nu_q^-)}e^{2ix}(P_{2q-1}\phi)(x) \\ (P_{2q}U_{\mathbb{Z}}P_{2q+1}\phi)(x) &= -t^2e^{-i(a+\nu_q^-)}e^{ix}(P_{2q}\phi)(x) \\ (P_{2q+1}U_{\mathbb{Z}}P_{2q+1}\phi)(x) &= r^2e^{-i(a+\nu_q^+)}(P_{2q+1}\phi)(x) \\ (P_{2q+2}U_{\mathbb{Z}}P_{2q+1}\phi)(x) &= itre^{-i(a+\nu_q^+)}(P_{2q+2}\phi)(x) . \end{aligned}$$

L'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ s'identifie unitairement à l'opérateur de multiplication à valeurs matricielles V_N où :

$$V_N = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} V_N(e^{ix}) d\nu(x) .$$

La famille de matrices unitaires $V_N(e^{i\cdot})$ est définie par : $\forall x \in \mathbb{T}$,

$$V_N(e^{ix}) = e^{-ia} \sum_{k=-2}^2 e^{ikx} T_k$$

où les matrices constantes $(T_k)_{k \in \{-2, \dots, 2\}}$ s'écrivent à l'aide des blocs matriciels carrés $D_{\pm}$, W_u et W_l de taille N de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_2 &= -t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_u \end{pmatrix} & T_1 &= irt \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ W_u & 0 \end{pmatrix} \\ T_0 &= r^2 \begin{pmatrix} D_- & 0 \\ 0 & D_+ \end{pmatrix} \\ T_{-1} &= irt \begin{pmatrix} 0 & W_l \\ D_+ & 0 \end{pmatrix} & T_{-2} &= -t^2 \begin{pmatrix} W_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$D_{\pm} = \begin{pmatrix} e^{-i\nu_0^{\pm}} & 0 & & & \\ 0 & e^{-i\nu_1^{\pm}} & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & 0 & e^{-i\nu_{N-1}^{\pm}} \end{pmatrix}$$

$$W_u = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\nu_1^{-}} & & & \\ & 0 & e^{-i\nu_2^{-}} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & e^{-i\nu_{N-1}^{-}} \\ e^{-i\nu_0^{-}} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$W_l = \begin{pmatrix} 0 & & & & e^{-i\nu_{N-1}^{+}} \\ e^{-i\nu_0^{+}} & 0 & & & \\ & e^{-i\nu_1^{+}} & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & e^{-i\nu_{N-2}^{+}} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $V_N(e^{ix})$ est unitaire pour tout $x \in \mathbb{T}$ et l'application $V_N(\cdot)$ est analytique au voisinage du cercle unité $\mathbb{S}$. En vertu des résultats classiques sur la perturbation analytique des matrices [Kato] paragraphes II.1.4 et II.1.8, $V_N(e^{ix})$ reste diagonalisable avec des familles de projecteurs analytiques au voisinage de $\mathbb{T}$ privé d'un ensemble fini de points tandis que les parties nilpotentes des blocs de Jordan sont identiquement nulles. En vertu du théorème 5.2.1, il suffit de montrer que les valeurs propres des matrices $V_N(e^{ix})$ ne sont pas constantes sur un ouvert non vide de $\mathbb{T}$. Or, si c'était le cas, cette valeur propre serait une valeur propre infiniment dégénérée de $U_{\mathbb{Z}}$. Ceci entre en contradiction avec la remarque qui suit l'équation (3.21). $\square$

5.3.3 Remarques

La réécriture comme opérateur de multiplication de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est généralisable à tout opérateur borné multi-diagonal dont les coefficients sont périodiques le long de la diagonale. C'est ce que résume la proposition suivante :

Proposition 5.3.1 *Soient T un opérateur borné sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ et $p \in \mathbb{N}$. Si T est $(2p+1)$ -diagonal dans une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et si les coefficients de la matrice représentative de l'opérateur T dans cette base vérifient : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall j \in \{-p, \dots, 0, \dots, p\}, \forall k \in \mathbb{Z}$,*

$$T_{k,k+j} = T_{k+N,k+N+j},$$

alors T est unitairement équivalent à l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{T}, \nu; \mathbb{C}^N)$ par :

$$\int_{\mathbb{T}}^{\oplus} T(e^{ix}) d\nu(x)$$

où la famille de matrices carrées analytiques de taille Np , $(T(e^{ix}))_{x \in \mathbb{T}}$ est définie par :
 $\forall x \in \mathbb{T}, \forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2,$

$$(T(e^{ix}))_{\bar{j}, \bar{k}} = T_{jk} e^{i(j-k)x}$$

et $\bar{k}$ est le représentant dans $\{1, \dots, Np\}$ de la classe de k modulo (Np) .

Il est par ailleurs possible d'avoir un aperçu du spectre des opérateurs $U_{\mathbb{Z}}$ construits à partir de phases vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,1}$ lorsque la période est supérieure à 2 et lorsque les coefficients de réflexion et de transition sont constants mais proches de 0 ou 1.

En effet, si $r = 1$ (i.e. $t = 0$), l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est diagonal dans la base canonique. Compte tenu de la périodicité des phases mises en jeu, le spectre de cet opérateur se réduit à un nombre fini de valeurs propres isolées de multiplicité infinie :

$$\sigma(U_{\mathbb{Z}}) = \{e^{-i(a+\theta_{2q}+\theta_{2q\pm 1}-\Pi_{2q}+\Pi_{2q\pm 1})} : q \in \{0, \dots, N-1\}\} .$$

Les résultats standards sur la perturbation des opérateurs linéaires [Kato] combinés au théorème 5.1.1 permettent d'obtenir la structure du spectre de l'opérateur lorsque les coefficients de transition t sont suffisamment faibles. Le spectre est alors constitué de petites portions disjointes de spectre absolument continu centrées autour des points : $e^{-i(a+\theta_{2q}+\theta_{2q\pm 1}-\Pi_{2q}+\Pi_{2q\pm 1})}$, $q \in \{0, \dots, N-1\}$. La répartition des bandes dépend donc fortement des valeurs prises par les termes des suites $(\theta_k)_{k \in \{1, \dots, 2N\}}$ et $(\Pi_k)_{k \in \{1, \dots, 2N\}}$.

D'un autre côté, si $t = 1$ (i.e. $r = 0$), l'opérateur de multiplication V_N est défini par : $\forall x \in \mathbb{T}$,

$$V_N(e^{ix}) = -e^{-ia} \begin{pmatrix} W_l e^{-2ix} & 0 \\ 0 & W_u e^{2ix} \end{pmatrix} ,$$

avec

$$\begin{aligned} \det(V_N(e^{ix}) - X) &= ((-1)^N e^{-i2xN} e^{-iNa} e^{i\nu} - X^N) \cdot ((-1)^N e^{i2xN} e^{-iNa} e^{i\nu} - X^N) \\ \text{où } \nu &= \sum_{k=0}^{N-1} (\theta_{2k} + \theta_{2k-1} - \Pi_{2k} + \Pi_{2k-1}) . \end{aligned}$$

Le spectre de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ se décrit alors comme la superposition de deux ensembles de bandes $(\mathcal{B}_{k,+})_{k \in \{1, \dots, N\}}$ et $(\mathcal{B}_{k,-})_{k \in \{1, \dots, N\}}$ se recouvrant, parcourant deux fois le cercle unité, soit dans le sens trigonométrique soit dans le sens horaire et définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{k,-} &= \left\{ e^{-i2x} e^{i(\pi-a)} e^{i(\frac{\nu}{N} + \frac{2k\pi}{N})}; x \in \mathbb{T} \right\} \\ \mathcal{B}_{k,+} &= \left\{ e^{i2x} e^{i(\pi-a)} e^{i(\frac{\nu}{N} + \frac{2k\pi}{N})}; x \in \mathbb{T} \right\} \end{aligned}$$

Ces bandes se définissent à partir de points régulièrement espacés. La répartition ne dépend plus des valeurs prises individuellement par chaque phase mais seulement d'une combinaison linéaire de celles-ci.

5.4 Preuve du théorème 5.1.2

L'objectif est d'établir maintenant la nature spectrale d'un opérateur de monodromie $U'_{\mathbb{N}^*}$ construit avec des coefficients de réflexion et de transition constants, r et t , non nuls et des phases $(\theta'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(v'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,M}$ où l'entier M est fixé. Nous ferons pour cela référence aux propriétés spectrales d'un opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ construit à partir des mêmes coefficients r , t et de phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,1}$ coïncidant asymptotiquement avec les phases $(\theta'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(v'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$: $\forall k \leq 0, \forall k \geq M$,

$$\theta'_k = \theta_k \quad \text{et} \quad v'_k = v_k .$$

Nous introduirons également un nouvel opérateur unitaire sur $l^2(\mathbb{Z})$ U'_0 , défini de la manière suivante: $U'_0 = U_0 + F_2$, où l'opérateur unitaire U_0 est défini par (3.27) et l'opérateur F_2 par: $F_2 = U'_{\mathbb{N}^*} - P_{\mathbb{N}^*}U_0P_{\mathbb{N}^*}$. Par construction, F_2 est de rang fini $M + 2$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} U'_{\mathbb{N}^*} &= P_{\mathbb{N}^*}U'_0P_{\mathbb{N}^*} \\ \text{et} \quad U'_0 &= U_0 + F_2 = U_{\mathbb{Z}} + F_1 + F_2 = U_{\mathbb{Z}} + F \\ \text{où} \quad F &= F_1 + F_2 \quad . \end{aligned}$$

L'opérateur F est de rang fini.

Le reste du chapitre est consacré à la démonstration du théorème 5.1.2. La preuve fait l'objet des propositions 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4.

5.4.1 Absence de composante singulière continue

Proposition 5.4.1 *Un opérateur unitaire $U'_{\mathbb{N}^*}$ construit avec des coefficients de réflexion et de transition constants r et t non nuls et des phases $(\theta'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(v'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,M}$ n'a pas de spectre singulier continu :*

$$\sigma_{sc}(U'_{\mathbb{N}^*}) = \emptyset \quad .$$

Notations : Soit $\zeta = re^{i\theta}$ où $0 < r < 1$ et $\theta \in \mathbb{T}$. Si U est un opérateur unitaire agissant sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ et $(E(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ sa famille spectrale associée, nous écrirons: $\forall(\phi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, $\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} R(U, \zeta) &= U(U - \zeta)^{-1} = (1 - \zeta U^*)^{-1} \\ 2\pi\delta_r(U, \theta) &= R(U, \zeta) - R(U, \zeta') \quad \text{où} \quad \zeta' = \frac{1}{\bar{\zeta}} = \frac{1}{r}e^{i\theta} \quad , \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $(\phi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \langle \phi | \delta_r(U, \theta) \psi \rangle = \frac{d}{d\theta} \langle \phi | E_{ac}(\theta) \psi \rangle \quad , \quad \nu - \text{pp} \quad , \quad (5.18)$$

où E_{ac} représente la composante absolument continue de la famille spectrale E [KK].

Preuve : Soit $U_{\mathbb{Z}}$ l'opérateur unitaire construit à partir des coefficients de réflexion et de transition qui définissent $U'_{\mathbb{N}^*}$ et de phases $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,1}$ telles que: $\forall k \leq 0$, $\forall k \geq M$, $\theta'_k = \theta_k$, $v'_k = v_k$. L'opérateur F étant de rang fini, en vertu du théorème de Weyl, l'opérateur U'_0 et par là même $U'_{\mathbb{N}^*}$, ne peuvent avoir que du spectre discret dans $\rho(U_{\mathbb{Z}}) \cap \mathbb{S}$. Il reste à examiner l'occurrence de spectre singulier continu pour $U'_{\mathbb{N}^*}$ au sein de l'ensemble $\sigma(U_{\mathbb{Z}})$. L'espace cyclique engendré par $\text{Ran} F^*$ sera noté $\mathcal{H}_{F^*}$. Les mesures spectrales des opérateurs unitaires U'_0 et $U_{\mathbb{Z}}$ opérant sur les vecteurs appartenant à $\mathcal{H}_{F^*}^\perp$ coïncident (lemme C.1.1). Autrement dit,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{sc}(U'_0) \cap \mathcal{H}_{F^*}^\perp &= \emptyset \\ \text{et} \quad \mathcal{H}_{sc}(U'_{\mathbb{N}^*}) \cap \mathcal{H}_{F^*}^\perp &= \emptyset \quad . \end{aligned}$$

Pour montrer l'absence de composante singulière continue au sein du spectre de l'opérateur U'_0 (et donc au sein du spectre de $U'_{\mathbb{N}^*}$), il suffit de montrer que la restriction $U'_0|_{\mathcal{H}_{F^*}}$ n'a

pas de composante singulière continue dans l'ensemble $\sigma(U_{\mathbb{Z}})$. L'espace $\mathcal{H}_{F^*}$ réduisant simultanément les opérateurs U'_0 et $U_{\mathbb{Z}}$ (lemme C.1.1), on a : $\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}} &= R(U_{\mathbb{Z}}|_{\mathcal{H}_{F^*}}, \zeta) \\ R(U'_0, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}} &= R(U'_0|_{\mathcal{H}_{F^*}}, \zeta) . \end{aligned}$$

Ainsi, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \cup \{0\}$, $\zeta = re^{i\theta}$,

$$(1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}})^* \delta_r(U'_0, \theta) (1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}}) = \delta_r(U_{\mathbb{Z}}, \theta)$$

et $\forall (\phi, \psi) \in \mathcal{H}_{F^*} \times \mathcal{H}_{F^*}$,

$$\begin{aligned} \langle (1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}|_{\mathcal{H}_{F^*}}, \zeta)) \phi | \delta_r(U'_0|_{\mathcal{H}_{F^*}}, \theta) (1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}|_{\mathcal{H}_{F^*}}, \zeta)) \psi \rangle &= \\ \langle (1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}}) \phi | \delta_r(U'_0, \theta)|_{\mathcal{H}_{F^*}} (1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}}) \psi \rangle &= \langle \phi | \delta_r(U_{\mathbb{Z}}|_{\mathcal{H}_{F^*}}, \theta) \psi \rangle \\ &= \langle \phi | \delta_r(U_{\mathbb{Z}}, \theta)|_{\mathcal{H}_{F^*}} \psi \rangle . \end{aligned}$$

Soit P le projecteur orthogonal sur $\text{Ran } F^* = \text{Vect}\{\phi_k; 0 \leq k \leq M+2\}$. Le sous-espace $\text{Ran } P$ est stable sous l'action de l'opérateur $1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}} : \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S} \cup \{0\}$,

$$(1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}}) P = P (1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}}) P .$$

Soit ϕ un vecteur de $\text{Ran } P$. Si,

$$\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{S}; \det(1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta))|_{\text{Ran } P \rightarrow \text{Ran } P} = 0\} , \quad (5.20)$$

il est possible de définir une famille analytique de vecteurs $(\psi(\zeta))_{\zeta \in \mathbb{S} \setminus \mathcal{Z}}$ vérifiant : $\forall \zeta \in \mathbb{S} \setminus \mathcal{Z}$,

$$\begin{cases} \psi(\zeta) \in \text{Ran } P \\ (1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}}) P \psi(\zeta) = P (1 - \zeta F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta)|_{\mathcal{H}_{F^*}}) P \psi(\zeta) = \phi \end{cases}$$

L'objectif du calcul qui va suivre est de déterminer la structure de l'ensemble $\mathcal{Z}$. Par construction,

$$F = \sum_{(j,k) \in \{0, \dots, M+2\}^2} c_{jk} |\phi_j\rangle \langle \phi_k| . \quad (5.21)$$

Compte tenu de l'équivalence unitaire (5.4) établie par l'opérateur W entre $l^2(\mathbb{Z})$ et $L^2(\mathbb{T}, \nu)$, l'opérateur F est unitairement équivalent à :

$$W F W^* = \sum_{(j,k) \in \{0, \dots, M+2\}^2} c_{jk} P_{jk} \quad \text{où} \quad P_{jk} = W |\phi_j\rangle \langle \phi_k| W^* = |W \phi_j\rangle \langle W \phi_k| = |e^{ij\cdot}\rangle \langle e^{ik\cdot}| .$$

Considérons la matrice carrée de taille $M+3$ dont les coefficients d'indices (n, m) appartenant à $\{0, \dots, M+2\}^2$ sont donnés par : $\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$,

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | P F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta) P \phi_m \rangle &= \langle \phi_n | F^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta) \phi_m \rangle \\ &= \sum_{j \in \{0, \dots, M+2\}} \overline{c_{jn}} \langle \phi_j | U_{\mathbb{Z}} (U_{\mathbb{Z}} - \zeta)^{-1} \phi_m \rangle \\ &= \sum_{j \in \{0, \dots, M+2\}} \overline{c_{jn}} \langle e^{ij\cdot} | W U_{\mathbb{Z}} (U_{\mathbb{Z}} - \zeta)^{-1} W^* e^{im\cdot} \rangle . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Or, en vertu du théorème 5.1.1, $WU_{\mathbb{Z}}W^*$ s'écrit comme opérateur de multiplication :

$$WU_{\mathbb{Z}}W^* = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} V_N(e^{ix}) d\nu(x) .$$

où V_N est une famille d'opérateurs unitaires se prolongeant analytiquement au voisinage du cercle unité $\mathbb{S}$ et dont les valeurs propres $(\lambda_l)_{l \in \{1, \dots, 2N\}}$ ne sont pas constantes. Selon [Kato], il existe une famille d'opérateurs unitaires V et des familles de projecteurs orthogonaux $(P_l)_{l \in \{1, \dots, 2N\}}$ associés à chaque valeur propre, analytiques sur $\mathbb{S}$ privé d'un nombre fini de points tels que : $\forall x \in \mathbb{T}$,

$$V_N(e^{ix}) = \sum_{l=1}^{2N} \lambda_l(e^{ix}) V(e^{ix})^{-1} P_l(e^{ix}) V(e^{ix})$$

Il s'ensuit : $\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$,

$$\begin{aligned} WU_{\mathbb{Z}}(U_{\mathbb{Z}} - \zeta)^{-1}W^* &= \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} V(e^{ix})^{-1} \left(\sum_{l=1}^{2N} \lambda_l(e^{ix}) P_l(e^{ix}) \right) V(e^{ix}) d\nu(x) \\ &= \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} V(e^{ix})^{-1} d\nu(x) \left(\sum_{l=1}^{2N} \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \lambda_l(e^{ix}) P_l(e^{ix}) d\nu(x) \right) \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} V(e^{ix}) d\nu(x) \\ &= V^* \left(\sum_{l=1}^{2N} \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \lambda_l(e^{ix}) P_l(e^{ix}) d\nu(x) \right) V \quad \text{où} \quad V = \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} V(e^{ix}) d\nu(x) \end{aligned}$$

L'équation (5.23) se réécrit alors de la manière suivante : $\forall (n, m) \in \{0, \dots, M+2\}^2$,

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | PF^* R(U_{\mathbb{Z}}, \zeta) P \phi_m \rangle &= \sum_{l=1}^{2N} \sum_{j \in \{0, \dots, M+2\}} \overline{c_{jn}} \langle e^{ij \cdot} | V^* \int_{\mathbb{T}}^{\oplus} \frac{\lambda_l(e^{ix}) P_l(e^{ix})}{\lambda_l(e^{ix}) - \zeta} d\nu(x) V e^{im \cdot} \rangle \\ &= \sum_{0 \leq j \leq M+2} \sum_{l=1}^{2N} \overline{c_{jn}} \int_{\mathbb{T}} \langle V(e^{ix}) e^{ijx}, \frac{P_l(e^{ix}) \lambda_l(e^{ix})}{\lambda_l(e^{ix}) - \zeta} V(e^{ix}) e^{imx} \rangle_{\mathbb{C}} d\nu(x) . \end{aligned} \tag{5.26}$$

La quantité (5.26) est une somme finie de termes de la forme :

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{f_{l,n,m}(e^{ix})}{\lambda_l(e^{ix}) - \zeta} d\nu(x) ,$$

où $f_{l,n,m}$ est analytique dans une couronne contenant $\mathbb{S}$ privé d'un nombre fini de points et dont la largeur est indépendante des indices l, n, m . Cette intégrale se prolonge analytiquement lorsque $|\zeta|$ tend vers 1 en tout point $e^{i\theta}$ pour lequel $e^{i\theta} = \lambda_l(e^{ix_{\theta}})$ et $\lambda'_l(e^{ix_{\theta}}) \neq 0$. Soit en effet $l \in \{1, \dots, 2N\}$ fixé et posons $\zeta = re^{i\theta}$ et $e^{i\theta} = \lambda_l(e^{ix_{\theta}})$ en supposant que $\lambda'_l(e^{ix_{\theta}}) \neq 0$. La fonction λ_l étant analytique au voisinage du point $e^{ix_{\theta}}$, elle applique bijectivement un voisinage $N_{\theta} \subset \mathbb{C}$ de $e^{ix_{\theta}}$ sur M_{θ} dont l'intérieur contient $e^{i\theta}$. Soit $D_{\theta} \subset M_{\theta}$ une déformation régulière du cercle unité vers l'extérieur du disque unité qui ne passe pas par $e^{i\theta}$. L'image réciproque $\lambda_l^{-1}(D_{\theta}) \subset N_{\theta}$ reconnectée à ses extrémités à $\mathbb{S}$ est un chemin régulier C_{θ} le long duquel :

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{f_{l,n,m}(e^{ix})}{\lambda_l(e^{ix}) - \zeta} d\nu(x) = \int_{C_{\theta}} \frac{f_{l,n,m}(z)}{\lambda_l(z) - \zeta} dz .$$

La dernière intégrale étant analytique en ζ sur un voisinage $M'_\theta \subset M_\theta$ contenant $e^{i\theta}$, la matrice dont les coefficients sont décrits par (5.26) se prolonge analytiquement pour ζ appartenant à $\mathbb{S}$ en dehors d'un ensemble fini de points noté $\mathcal{A}$. Le déterminant défini en (5.20) possède un nombre fini de zéros sur tout arc de cercle fermé strictement compris entre deux points de $\mathcal{A}$. Néanmoins, ces zéros peuvent s'accumuler autour des points de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{Z}$ est donc dénombrable.

Pour au voisinage de n'importe quel point $e^{i\theta}$ de $\mathbb{S} \setminus \mathcal{Z}$, $\mathcal{V}(e^{i\theta})$, on a : $\forall \zeta \in \mathcal{V}(e^{i\theta})$

$$\psi(\zeta) = \sum_{0 \leq k \leq M+2} d_k(\zeta) \phi_k$$

où les fonctions $d_k(\zeta)$ sont analytiques sur $\mathcal{V}(e^{i\theta})$. Ainsi, pour un vecteur fixé ϕ de $\text{Ran } P$, $\forall \theta \in \mathbb{S} \setminus \mathcal{Z}$,

$$\langle \phi | \delta_r(U'_0, \theta) \phi \rangle = \sum_{k,j \in \{0, \dots, M+2\}} \overline{d_j(\zeta)} d_k(\zeta) \langle \phi_j | \delta_r(U_\mathbb{Z}, \theta) \phi_k \rangle . \quad (5.30)$$

En passant à la limite pour chaque terme de la somme ci-dessus, on obtient :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \langle \phi_j | \delta_r(U_\mathbb{Z}, \theta) \phi_k \rangle = \frac{d}{d\theta} \langle \phi_j | E_{ac, \mathbb{Z}}(\theta) \phi_k \rangle \quad , \quad \theta - \text{pp} ,$$

pour tous les entiers j et k appartenant à $\{0, \dots, M+2\}$. L'ensemble des points pour lesquels cette limite n'est pas définie constitue un support, noté $\mathcal{S}_{jk}$ de la composante singulière de la mesure $\langle \phi_j | E_\mathbb{Z}(\cdot) \phi_k \rangle$ (Annexe C, corollaire C.2.1). Autrement dit, il est possible de passer à la limite dans l'expression (5.30) : $\forall \theta \in \mathbb{S} \setminus \mathcal{Z}$,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} \langle \phi_j | \delta_r(U'_0, \theta) \phi_k \rangle &= \sum_{k,j \in \{0, \dots, M+2\}} \overline{d_j(\zeta)} d_k(\zeta) \frac{d}{d\theta} \langle \phi_j | E_{ac, \mathbb{Z}}(\theta) \phi_k \rangle \\ &= \langle \phi | E_{ac, 0}(\theta) \phi \rangle \in L^1(\mathbb{T}) \quad , \quad \theta - \text{pp} . \end{aligned}$$

Le support de la composante singulière de la mesure $\langle \phi | E_0(\cdot) \phi \rangle$ est contenu dans l'ensemble

$$\bigcup_{j,k \in \{0, \dots, M+2\}} \mathcal{S}_{jk} \cup \mathcal{Z}.$$

Le spectre de l'opérateur $U_\mathbb{Z}$ étant absolument continu, les supports $\mathcal{S}_{jk}$ sont vides. La composante singulière de la mesure $\langle \phi | E_0(\cdot) \phi \rangle$ n'est donc portée que par l'ensemble dénombrable $\mathcal{Z}$. Un ensemble dénombrable de points ne pouvant être le support d'une mesure continue, la composante singulière continue de la mesure $\langle \phi | E_0(\cdot) \phi \rangle$ est nulle. Cela signifie en particulier que : $\sigma(U'_0|_{\mathcal{H}_{F^*}}) = \emptyset$ et donc $\sigma_{sc}(U'_0) = \emptyset$. Le projecteur $P_{\mathbb{N}^*}$ réduisant U'_0 , la même conclusion vaut pour $\sigma_{sc}(U_{\mathbb{N}^*})$. $\square$

Remarque : La preuve de la proposition 5.4.1 s'adapte à toute perturbation de rang fini F .

5.4.2 Intervention des matrices de transfert

L'objectif est maintenant d'examiner les propriétés des éventuelles valeurs propres de l'opérateur $U'_{\mathbb{N}^*}$ et de délimiter la composante absolument continue $\sigma_{ac}(U'_{\mathbb{N}^*})$. Le formalisme des matrices de transfert et le lemme 5.4.1 permettent de mener à bien cette tâche.

Lemme 5.4.1 Soit $M \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que : $|\det M| = 1$. Ses valeurs propres seront notées m_+ et m_- ($|m_+| \geq |m_-|$). Etant donné un vecteur u_0 de $\mathbb{C}^2$ de norme 1, deux situations s'excluant mutuellement peuvent se présenter :

- ou bien $|m_+| = |m_-| = 1$ et la suite $(\|M^j u_0\|)_{j \in \mathbb{Z}}$ est bornée inférieurement par une constante strictement positive et croît au mieux linéairement,
- ou bien $|m_+| > |m_-| = |m_+|^{-1}$ et la matrice M est diagonalisable. Le comportement asymptotique en j de la quantité $\|M^j u_0\|$ a une croissance ou une décroissance exponentielle.

Preuve : L'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ est muni de sa base canonique (e_+, e_-) . Soit $u_0 \in \mathbb{C}^2$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $u_0 = \lambda e_+ + \mu e_-$.

Si les valeurs propres de la matrice M sont de modules distincts, M est diagonalisable et les sous-espaces propres associés sont dirigés par des vecteurs notés u_+ et u_- . Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u_+, u_-) , alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$M^n = P^{-1} \begin{pmatrix} m_+^n & 0 \\ 0 & m_-^n \end{pmatrix} P .$$

et $M^n u_0 = \lambda m_+^n u_+ + \mu m_-^n u_- = \lambda m_+^n P e_+ + \mu m_-^n P e_-$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\left| |m_+|^n \|\lambda u_+\| - |m_-|^n \|\mu u_-\| \right| \leq \|M^n u_0\| \leq |m_+|^n \|\lambda u_+\| + |m_-|^n \|\mu u_-\| . \quad (5.33)$$

Par hypothèse, $|\det M| = |m_+| |m_-| = 1$. Nécessairement, $|m_+| > 1$ et $|m_-| < 1$. La quantité $\|M^n u_0\|$ est nécessairement exponentiellement croissante ou décroissante lorsque n tend vers $\pm\infty$.

En revanche, si les deux valeurs propres sont de même module, alors $|m_+| = |m_-| = 1$. Si la matrice M est diagonalisable, on montre alors en reprenant les calculs précédents qu'il existe deux constantes strictement positives c et C telles que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c \leq \|M^n u_0\| \leq C$.

Si la matrice M n'est pas diagonalisable, les deux valeurs propres sont égales à m avec $|m| = 1$, et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$P^{-1} M P = P \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix} P^{-1} .$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$P^{-1} M^n P = P \begin{pmatrix} m^n & n m^{n-1} \\ 0 & m^n \end{pmatrix} P^{-1} .$$

et $M^n u_0 = m^{n-1} (\lambda m + \mu n) P e_+ + \mu m^n P e_-$. On obtient alors les inégalités suivantes $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\left| |\lambda m + \mu n| \|P e_+\| - \|\mu P e_-\| \right| \leq \|M^n u_0\| \leq (|\lambda| + n|\mu|) \|P e_+\| + \|\mu P e_-\| .$$

Si $\mu = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\|M^n u_0\| = \|u_0\| = 1$. Sinon, $\|M^n u_0\|$ est bornée inférieurement et croît au mieux linéairement en $|n|$ lorsque n tend vers $\pm\infty$. $\square$

Notations : Soit $\lambda \in \mathbb{T}$ fixé. La suite de matrices de transfert $(T'_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{N}^*}$ associée à l'opérateur de monodromie $U'_{\mathbb{N}^*}$ est périodique de période N à partir du rang M . De

même, la suite de matrices de transfert $(T_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{Z}}$ associée à l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est également N -périodique et par construction coïncide asymptotiquement avec la suite $(T'_{k,\lambda})_{k \in \mathbb{N}^*}$: $\forall k \geq M+1$, $T'_{k,\lambda} = T_{k,\lambda}$. Soit $n \in \{M+1, \dots, N+M\}$ et

$$R_{N,n,\lambda} = T_{n+N,\lambda} T_{n+N-1,\lambda} \cdots T_{n+1,\lambda} = T'_{n+N,\lambda} T'_{n+N-1,\lambda} \cdots T'_{n+1,\lambda} .$$

Compte tenu de la relation (3.20), $\forall n \in \{M+1, \dots, N+M\}$, $\det R_{N,n,\lambda}$ est de module 1 et indépendant de λ . D'autre part, pour toute valeur fixée de $\lambda \in \mathbb{T}$, les matrices $(R_{N,n,\lambda})$ ont mêmes valeurs propres $E_{\lambda+}$ et $E_{\lambda-}$. Vue la définition de la famille des matrices de transfert (équation (3.25)), les matrices $(R_{N,n,\lambda})_{n \in \{M+1, \dots, M+N\}}$ sont des polynômes en $e^{+i\lambda}$ et $e^{-i\lambda}$. Les applications

$$\begin{aligned} R_{N,n,\cdot} : \mathbb{T} &\rightarrow GL_4(\mathbb{R}) \\ \lambda &\mapsto R_{N,n,\lambda} , \end{aligned}$$

sont donc analytiques. Par conséquent, les valeurs propres $E_{\lambda+}$ et $E_{\lambda-}$ sont donc analytiques sur $\mathbb{T} \setminus X_N$ où X_N est l'ensemble des points de croisement de ces valeurs ([Kato] paragraphe II.1.8) :

$$X_N = \{\lambda \in \mathbb{T}; E_{\lambda+} = E_{\lambda-}\} .$$

Les projecteurs propres des matrices $(R_{N,n,\lambda})$ sont également analytiques sur $\mathbb{T} \setminus X_N$ ([Kato] paragraphe II.1.8). L'ensemble X_N est fini ([Kato], paragraphe II.1.1)

Partant de là, la présentation des solutions formelles de l'équation aux valeurs propres associée à $U'_{\mathbb{N}^*}$ se réécrit de manière plus simple. Soit ψ' une solution propre généralisée de l'équation : $U'_{\mathbb{N}^*} \psi' = e^{i\lambda} \psi'$ et $(u'_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$u'_k = \begin{pmatrix} \psi'_{2k} \\ \psi'_{2k+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 . \quad (5.39)$$

La connaissance des matrices $(R_{N,n,\lambda})$ et du vecteur u'_1 suffit à construire une solution généralisée de l'équation aux valeurs propres. Ainsi, pour tout $l \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$u'_l = T'_{l,\lambda} \cdots T'_{2,\lambda} u'_1 .$$

En particulier, $\forall n \in \{M+1, \dots, M+N\}$, $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$u'_{jN+n} = (R'_{N,n,\lambda})^j u'_n = (R'_{N,n,\lambda})^j T'_{n,\lambda} T'_{n-1,\lambda} \cdots T'_{2,\lambda} u'_1 . \quad (5.41)$$

Néanmoins, pour que ψ' soit une solution propre généralisée, le vecteur u'_1 doit satisfaire une condition particulière donnée par les équations (3.16) : $\det(T'_{*,\lambda} u'_1; v_\lambda) = 0$, où :

$$\begin{aligned} T'_{*,\lambda} &= e^{-i(\theta'_1 + \theta'_2 + v'_2 - v'_1)} \begin{pmatrix} irt & -t^2 \\ r^2 & itr \end{pmatrix} - e^{i\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ v_\lambda &= e^{i\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{-i(\theta'_0 + \theta'_1 + v'_1)} \begin{pmatrix} r \\ it \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (5.42)$$

La présentation des solutions généralisées de l'équation aux valeurs propres associée à $U_{\mathbb{Z}}$ se réécrit également plus simplement. Soit ψ une solution propre généralisée de l'équation : $U_{\mathbb{Z}} \psi = e^{i\lambda} \psi$. La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in (\mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}}$ est définie par : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$u_k = \begin{pmatrix} \psi_{2k} \\ \psi_{2k+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 .$$

La connaissance des matrices $(R_{N,n,\lambda})$ et du vecteur u_1 suffit à construire une solution généralisée de l'équation aux valeurs propres. Ainsi, pour tout $n \in \{M+1, \dots, M+N\}$, $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} u_l &= T_{l,\lambda} \dots T_{2,\lambda} u_1 & \text{si } l > 1 \\ u_l &= T_{l,\lambda}^{-1} \dots T_{0,\lambda}^{-1} u_1 & \text{si } l < 1 \end{aligned} \quad (5.44)$$

et $u_{jN+n} = R_{N,n,\lambda}^j u_n$.

Proposition 5.4.2 *Lorsque l'opérateur de monodromie $U'_{\mathbb{N}^*}$ est construit avec des coefficients de réflexion et de transition constants r et t non nuls et des phases (θ'_k) , (v'_k) vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,\mathbf{M}}$,*

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(U'_{\mathbb{N}^*}) &\subset \rho(U_{\mathbb{Z}}) \\ \sigma(U'_{\mathbb{N}^*}) \setminus \sigma_{pp}(U'_{\mathbb{N}^*}) &\subset \sigma(U_{\mathbb{Z}}) , \end{aligned}$$

où l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ est construit avec les mêmes coefficients r et t et des phases (θ_k) , (v_k) vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,1}$ telles que : $\forall k \leq 0$, $\forall k \geq M$, $\theta'_k = \theta_k$, $v'_k = v_k$.

Preuve : Soient $e^{i\lambda}$ une valeur propre de $U'_{\mathbb{N}^*}$ et $\psi' \in l^2(\mathbb{N}^*)$ un vecteur propre associé. Si $(u'_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est définie par l'équation (5.39), alors :

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} \|u'_j\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\psi'_j|^2 < +\infty ,$$

ce qui entraîne : $\forall n \in \{M+1, \dots, M+N\}$,

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \|u'_{jN+n}\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \|R_{N,n,\lambda}^j u'_n\|^2 < +\infty .$$

Comme ψ' est un vecteur propre de $U'_{\mathbb{N}^*}$, compte tenu des conclusions du lemme 5.4.1, le terme général de la série précédente est exponentiellement décroissant en j . Cela entraîne également que les valeurs propres $E_{\lambda+}$ et $E_{\lambda-}$ des matrices $(R_{N,n,\lambda})_{n \in \{M+1, \dots, M+N\}}$ sont de modules distincts. La valeur de λ étant toujours fixée, il est possible de construire une solution généralisée de l'équation aux valeurs propres pour $U_{\mathbb{Z}}$ en s'appuyant sur la définition des matrices $(R_{N,n,\lambda})_{n \in \{M+1, \dots, M+N\}}$ et sur les équations (5.44) pour tout choix de vecteur u_1 de $\mathbb{C}^2$. Les valeurs propres des matrices $(R_{N,n,\lambda})_{n \in \{M+1, \dots, M+N\}}$ étant de modules distincts, en vertu du lemme 5.4.1, toute solution propre généralisée ψ de $U_{\mathbb{Z}}$, associée à la valeur propre $e^{i\lambda}$ admettra une sous-suite de coefficients croissant exponentiellement en $\pm\infty$. D'après le théorème A.0.1 énoncé en Annexe A, nécessairement $e^{i\lambda} \in \rho(U_{\mathbb{Z}})$ et $\sigma_{pp}(U'_{\mathbb{N}^*}) \subset \rho(U_{\mathbb{Z}})$.

On a également démontré au passage que tout vecteur propre ψ' de l'opérateur $U'_{\mathbb{N}^*}$ a des coefficients exponentiellement décroissants dans la base canonique de $l^2(\mathbb{N}^*)$. Ainsi, si $e^{i\lambda} \in \sigma(U'_{\mathbb{N}^*}) \setminus \sigma_{pp}(U'_{\mathbb{N}^*})$, les valeurs propres des matrices $(R_{N,n,\lambda})_{n \in \{M+1, \dots, M+N\}}$ sont nécessairement de même module. En vertu du lemme 5.4.1 et des équations (5.44), toute solution propre généralisée ψ de $U_{\mathbb{Z}}$ associée à la valeur propre $e^{i\lambda}$ a donc des coefficients croissant au mieux linéairement dans la base canonique de $l^2(\mathbb{Z})$. D'après le théorème A.0.1, ceci permet d'affirmer que $e^{i\lambda} \in \sigma(U_{\mathbb{Z}})$ et $\sigma(U'_{\mathbb{N}^*}) \setminus \sigma_{pp}(U'_{\mathbb{N}^*}) \subset \sigma(U_{\mathbb{Z}})$. $\square$

Si ψ' est un vecteur propre associé à la valeur propre $e^{i\lambda}$ de l'opérateur $U'_{\mathbb{N}^*}$, ses coefficients satisfont naturellement la condition au bord (5.42) et décroissent exponentiellement dans la base canonique de $l^2(\mathbb{N}^*)$. Autrement dit, $e^{i\lambda}$ est valeur propre de $U'_{\mathbb{N}^*}$ si et seulement si les valeurs propres des matrices $(R_{N,n,\lambda})_{n \in \{M+1, \dots, M+N\}}$ sont de modules distincts ($|E_{\lambda-}| < |E_{\lambda+}|$) et : $\forall n \in \{M+1, \dots, M+N\}$,

$$\begin{cases} T'_{n,\lambda} \dots T'_{2,\lambda} u'_1 \in \text{Ker}(R_{N,n,\lambda} - E_{\lambda-}) \\ \det(v_\lambda; T'_{*,\lambda} u'_1) = 0 \end{cases} ,$$

soit encore $\forall n \in \{M+1, \dots, M+N\}$,

$$\det(v_\lambda; T'_{*,\lambda} (T'_{2,\lambda})^{-1} \dots (T'_{n,\lambda})^{-1} u_{\lambda,n,-}) = 0 = \det(T'_{n,\lambda} \dots T'_{2,\lambda} (T'_{*,\lambda})^{-1} v_\lambda; u_{\lambda,n,-}) \quad (5.47)$$

où $u_{\lambda,n,-}$ est un vecteur propre de la matrice $R_{N,n,\lambda}$ dirigeant le sous-espace propre associé à la valeur propre $E_{\lambda-}$.

Les applications $R_{N,n,\cdot}$ étant analytiques sur $\mathbb{T}$ pour tout $n \in \{M+1, \dots, M+N\}$, les familles de vecteurs $(u_{\lambda,n,-})_{\lambda \in \mathbb{T}}$ peuvent être choisies analytiques sur $\mathbb{T} \setminus X_N$ (voir [Kato]). Par commodité, nous poserons : $\forall \lambda \in \mathbb{T}$, $\forall n \in \{M+1, \dots, M+N\}$,

$$v_{n,\lambda} \equiv T'_{n,\lambda} \dots T'_{2,\lambda} (T'_{*,\lambda})^{-1} v_\lambda .$$

Les applications $\lambda \mapsto \det(u_{\lambda,n,-}; v_{n,\lambda})$ sont analytiques sur $\mathbb{T} \setminus X_N$. Nous allons montrer maintenant qu'au voisinage de chaque point de croisement λ_0 de X_N , il existe une valeur de $n \in \{M+1, \dots, M+N\}$ pour laquelle les vecteurs propres et valeurs propres de $R_{N,n,\lambda}$ se développent en puissance de $\sqrt{\lambda - \lambda_0}$. L'application correspondante $\lambda \mapsto \det(u_{\lambda,n,-}; v_{n,\lambda})$ se développe également en puissance demi-entière au voisinage de ce point de croisement. La clé de ce résultat s'appuie sur le lemme 5.4.2 :

Lemme 5.4.2 *Soit $(M_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{T}}$ une famille de matrices inversibles définie par :*

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} ,$$

où les fonctions c, d sont analytiques mais non-constantes en λ . Si le déterminant d_M de cette famille de matrices (M_λ) est indépendant de λ et non nul, alors au voisinage d'un point de croisement λ_0 , les valeurs propres et les vecteurs propres de cette famille se développent comme une série en puissance de $\sqrt{\lambda - \lambda_0}$.

Preuve : Les valeurs propres de la famille de matrices (M_λ) s'écrivent :

$$E_{\lambda,j} = \frac{a_\lambda + d_\lambda}{2} + (-1)^j \sqrt{\frac{(a_\lambda + d_\lambda)^2}{4} - d_M} \text{ pour } j \in \{0,1\} . \quad (5.49)$$

Dire que λ_0 est un point de croisement de ces deux valeurs propres revient à écrire : $(a_{\lambda_0} + d_{\lambda_0})^2 - 4d_M = 0$. La quantité $(a_\lambda + d_\lambda)^2 - 4d_M$ étant analytique en λ et s'annulant en λ_0 , au voisinage de λ_0 ,

$$(a_\lambda + d_\lambda)^2 - 4d_M = \sum_{k=1}^{+\infty} t_n (\lambda - \lambda_0)^n . \quad (5.50)$$

Les fonctions c et d n'étant pas constantes, il existe nécessairement un entier strictement positif n pour lequel $t_n \neq 0$. La combinaison de cette équation avec l'expression des valeurs propres (5.49) fournit le développement escompté des valeurs propres au voisinage du point de croisement λ_0 . Si l'une des fonctions analytiques b_λ où c_λ n'est pas constante, il existe un voisinage de λ_0 , $\mathcal{V}(\lambda_0)$ telles que : $\forall \lambda \in \mathcal{V}(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$, $b_\lambda \neq 0$ (resp. $c_\lambda \neq 0$). Il suffit alors de prendre comme vecteur propre associé à $E_{\lambda,j}$,

$$\left(\frac{a_\lambda - d_\lambda}{2} + (-1)^j \sqrt{\frac{(a_\lambda + d_\lambda)^2}{4} - d_M} \right)_{c_\lambda} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{a_\lambda - d_\lambda}{2} + (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{(a_\lambda + d_\lambda)^2}{4} - d_M} \right)_{b_\lambda}.$$

L'intégration du développement (5.50) au sein de l'expression des vecteurs propres leur donne un développement en puissances de $\sqrt{\lambda - \lambda_0}$ sur un voisinage de λ_0 . $\square$

Le lemme 5.4.2 s'applique en particulier à la famille de matrices $(R_{N,n,\cdot})_{n \in \{M+1, \dots, M+N\}}$.

Proposition 5.4.3 *Le spectre ponctuel d'un opérateur de monodromie $U'_{\mathbb{N}^*}$ construit avec des coefficients de réflexion et de transition constants r et t non nuls et des phases (θ'_k) , (v'_k) vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,M}$ ne comporte qu'un nombre fini de valeurs propres simples.*

Preuve : Soit $e^{i\lambda} \in \mathbb{S}$ fixé. S'il existe un vecteur propre ψ' de l'opérateur $U'_{\mathbb{N}^*}$ pour la valeur propre $e^{i\lambda}$, alors

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|u'_j\| = 0.$$

Ceci ne survient que si les conditions (5.47) sont satisfaites. La valeur propre $e^{i\lambda}$ est nécessairement simple. Montrons qu'il n'y en a qu'un nombre fini. Soit $e^{i\lambda}$ une valeur propre de l'opérateur $U'_{\mathbb{N}^*}$. Les valeurs propres correspondantes des matrices $R_{N,n,\lambda}$ sont de modules distincts : $|E_{\lambda,+}| \neq |E_{\lambda,-}|$ et $e^{i\lambda} \in \mathbb{T} \setminus X_N$. Le module des valeurs propres restant continu au voisinage de λ , il existe une boule ouverte de centre λ et de rayon $\epsilon > 0$, $\mathcal{B}(\lambda, \epsilon)$ à l'intérieur de laquelle, pour toute valeur de μ : $|E_{\mu,+}| \neq |E_{\mu,-}|$. Par ailleurs, les applications

$$\lambda \mapsto \det(u_{\lambda,n,-}; v_{n,\lambda})$$

étant analytiques et non identiquement nulles sur $\mathbb{T} \setminus X_N$, elles n'admettent donc qu'un nombre fini de zéros sur $\overline{\mathcal{B}(\lambda, \epsilon')}$, quel que soit $\epsilon' \in]0, \epsilon[$ (conséquence du lemme des zéros isolés). Par conséquent, $e^{i\lambda}$ est nécessairement une valeur propre isolée. Les seuls points d'accumulation éventuels de $\sigma_{pp}(U'_{\mathbb{N}^*})$ appartiennent à $X_N \cup \{\lambda \in \mathbb{T} : |E_{\lambda,+}| \neq |E_{\lambda,-}|, |E_{\lambda,+}| = |E_{\lambda,-}|\}$.

Soit $\lambda_0 \in X_N$. En vertu du lemme 5.4.2, les fonctions

$$\lambda \mapsto \det(u_{\lambda,n,-}; v_{n,\lambda})$$

se développent en puissance demi-entière sur un voisinage de λ_0 , $\mathcal{V}(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$. Compte tenu des conditions (5.47) nécessaires à l'existence des valeurs propres, il ne peut y avoir de valeurs propres sur ce voisinage.

Soit $\lambda_0 \in \{\lambda \in \mathbb{T} : |E_{\lambda,+}| \neq |E_{\lambda,-}|, |E_{\lambda,+}| = |E_{\lambda,-}|\}$. Les fonctions

$$\lambda \mapsto \det(u_{\lambda,n,-}; v_{n,\lambda})$$

étant analytiques et non identiquement nulles au voisinage de ce point, il ne peut exister de valeurs propres sur ce voisinage en vertu des conditions (5.47). Le spectre ponctuel ne possède donc pas de points d'accumulation. Inclus dans l'ensemble compact $\mathbb{S}$, il n'est donc constitué que d'un nombre fini d'éléments. $\square$

Proposition 5.4.4 *La composante absolument continue du spectre de l'opérateur de monodromie $U'_{\mathbb{N}^*}$ construit avec des coefficients de réflexion et de transition constants r, t non nuls et des phases $(\theta'_k), (v'_k)$ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,\mathbf{M}}$ coïncide avec la composante absolument continue du spectre de l'opérateur $U_{\mathbb{Z}}$ construit avec les mêmes coefficients r, t et des phases $(\theta_k), (v_k)$ vérifiant l'hypothèse $\mathbf{H}_{4,1}$ telles que : $\forall k \leq 0, \forall k \geq M, \theta'_k = \theta_k, v'_k = v_k$.*

Preuve : Comme l'opérateur $U_{\mathbb{Z}} - U'_0$ est de rang fini, le théorème de Birman-Krein permet d'affirmer que : $\sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}) = \sigma_{ac}(U'_0)$. Mais comme le projecteur $P_{\mathbb{N}^*}$ réduit U'_0 , on a : $\sigma_{ac}(U'_{\mathbb{N}^*}) \subset \sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}})$.

Les propositions 5.4.2 et 5.4.1 établissent que $\sigma(U'_{\mathbb{N}^*})$ est constitué de la réunion disjointe de $\sigma_{ac}(U'_{\mathbb{N}^*})$ et $\sigma_{pp}(U'_{\mathbb{N}^*})$. Compte tenu de la proposition 5.4.2, nécessairement, $\sigma_{ac}(U_{\mathbb{Z}}) = \sigma(U_{\mathbb{Z}}) \subset \sigma_{ac}(U'_{\mathbb{N}^*})$. Ceci fournit l'inclusion réciproque et conclut la preuve de la proposition. $\square$

La collection des propositions 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4 permet de reconstituer le théorème 5.1.2.

Annexe A

Fonctions propres généralisées et spectre d'un opérateur unitaire

L'objectif de ce paragraphe est de caractériser le spectre d'un opérateur unitaire U , multi-diagonal sur une base orthonormée d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, en terme de croissance des coefficients dans cette base des solutions généralisées de l'équation aux valeurs propres :

$$U\psi = e^{i\lambda}\psi, \quad \lambda \in \mathbb{T}.$$

Le résultat principal est le suivant :

Théorème A.0.1 *Si $\mathbb{L}$ désigne $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{Z}$, si $p \in \mathbb{N}$ et si U est un opérateur unitaire $(2p+1)$ -diagonal sur $\mathbb{L}$, agissant sur $\mathcal{H}$, alors,*

$$\sigma(U) = \overline{\{e^{i\lambda} \in \mathbb{S} : U\phi = e^{i\lambda}\phi \text{ admet une solution polynômialement bornée}\}}^{ess}$$

Un résultat similaire existe pour certaines familles d'opérateurs auto-adjoints [S1]. La preuve du théorème A.0.1 est ici effectuée pour $\mathbb{L} = \mathbb{N}^*$ (pour le cas $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$, voir [BHJ]).

A.1 Préliminaires

La base orthonormée sur laquelle l'opérateur U est $(2p+1)$ -diagonal ($p \in \mathbb{N}$) est notée $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La projection orthogonale sur l'espace :

$$\overline{\text{Vect } \{\phi_k; k \in \mathbb{N}^* \cap I\}}$$

sera notée P_I . On notera $Q_I = I - P_I$. En particulier, pour tous entiers naturels n, m ,

$$P_{[n,m]} = \sum_{n \leq j \leq m} |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

Si U est un opérateur unitaire $(2p+1)$ -diagonal dans la base $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, on dispose des relations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} P_{[n,m]}U &= P_{[n,m]}UP_{[n-p,m+p]} \\ UP_{[n,m]} &= P_{[n-p,m+p]}UP_{[n,m]}. \end{aligned}$$

Lemme A.1.1 *Soient U un opérateur normal agissant sur $\mathcal{H}$, $(2p+1)$ -diagonal ($p \in \mathbb{N}$) sur une base orthonormée $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{H}$, z un point de l'ensemble résolvant de U et ϕ une solution propre généralisée de l'équation : $U\phi = z\phi$. Alors la suite $(\langle\phi_k|\phi\rangle)_{k \in \mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite à croissance exponentielle.*

En remarquant que : $(U - z)P_I\phi = -(U - z)Q_I\phi$, pour tout intervalle I borné, et que l'opérateur U est $(2p+1)$ -diagonal, on peut réécrire toute équation de la forme : $(U - z)\phi = 0$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(U - z)P_I\phi &= P_I(U - z)P_I\phi + Q_I(U - z)P_I\phi \\ &= -P_I(U - z)Q_I\phi + Q_I(U - z)P_I\phi \\ &= -P_IUQ_I\phi + Q_IUP_I\phi .\end{aligned}\tag{A.5}$$

Preuve : L'opérateur U est normal. Pour tout point z de son ensemble résolvant, l'opérateur $(U - z)^{-1}$ est aussi normal. Ainsi, $\|(U - z)^{-1}\| = r_\sigma((U - z)^{-1})$, où r_σ est le rayon spectral de l'opérateur en question. Or, $r_\sigma((U - z)^{-1}) = \text{dist}(z, \sigma(U))^{-1}$ ([Kato] (III 6.16 p.177)) et : $\forall \psi \in \mathcal{H}$,

$$\|\psi\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(U))} \|(U - z)\psi\| .\tag{A.6}$$

Comme $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(U)$, on a $\phi \notin \mathcal{H}$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{[p, n-p]}\phi\|^2 = +\infty .\tag{A.7}$$

Soit n un entier $n > 3p$. En utilisant le fait que $P_{[p, n]}\phi \in l^2(\mathbb{N}^*)$ et l'équation (A.6)

$$\|P_{[p, n]}\phi\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(U))} \|(U - z)P_{[p, n]}\phi\| .\tag{A.8}$$

D'après la remarque (A.7), pour tout ϵ appartenant à l'intervalle $]0, \|U\|^{-2} \text{dist}(z, \sigma(U))^2[$, il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$,

$$\|P_{[p, n-p]}\phi\|^2 \geq \epsilon^{-1} \|P_{[0, 2p]}\phi\|^2 .\tag{A.9}$$

En appliquant alors l'équation (A.5), on obtient pour tout $n \geq \max(n_\epsilon, 3p)$,

$$\begin{aligned}P_{[p, n]}UQ_{[p, n]} &= P_{[p, n]}UP_{[0, p+n]}Q_{[p, n]} \\ &= P_{[p, n]}U(P_{[0, p-1]} + P_{[n+1, p+n]}) \text{ et} \\ Q_{[p, n]}UP_{[p, n]} &= Q_{[p, n]}U(P_{[p, 2p]} + P_{[2p+1, n-p]} + P_{[n-p+1, n]}) .\end{aligned}$$

En remarquant que,

$$Q_{[p, n]}UP_{[2p+1, n-p]} = Q_{[p, n]}P_{[p+1, n]}UP_{[2p+1, n-p]} = 0 ,$$

la dernière équation se réécrit :

$$Q_{[p, n]}UP_{[p, n]} = Q_{[p, n]}U(P_{[p, 2p]} + P_{[n-p+1, n]}) .$$

En utilisant le fait que pour deux intervalles I et J disjoints, les images respectives des projecteurs P_I et P_J sont orthogonales, le théorème de Pythagore permet d'écrire,

$$\begin{aligned}\|(U - z)P_{[p, n]}\phi\|^2 &= \|P_{[p, n]}UQ_{[p, n]}\phi\|^2 + \|Q_{[p, n]}UP_{[p, n]}\phi\|^2 \\ &= \|P_{[p, n]}U(P_{[0, p-1]} + P_{[n+1, p+n]})\phi\|^2 + \|Q_{[p, n]}U(P_{[p, 2p]} + P_{[n-p+1, n]})\phi\|^2 \\ &\leq \|U\|^2 (\|P_{[0, p-1]}\phi\|^2 + \|P_{[n+1, p+n]}\phi\|^2 + \|P_{[p, 2p]}\phi\|^2 + \|P_{[n-p+1, n]}\phi\|^2) \\ &= \|U\|^2 (\|P_{[0, 2p]}\phi\|^2 + \|P_{[n, n+p]}\phi\|^2 - \|P_{[p, n-p]}\phi\|^2) \\ &= \|U\|^2 (\|P_{[0, 2p]}\phi\|^2 + \|P_{[p, n+p]}\phi\|^2 - \|P_{[p, n-p]}\phi\|^2) .\end{aligned}\tag{A.12}$$

En combinant les inéquations (A.9) et (A.8) pour tout $n > \max(n_\epsilon, 3p)$, on obtient l'inégalité suivante,

$$\begin{aligned} \|P_{[p,n-p]}\phi\|^2 &\leq \|P_{[p,n]}\phi\|^2 \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(U))^2} \|(U - z)\phi\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(U))^2} \|U\|^2 (\epsilon \|P_{[p,n-p]}\phi\|^2 + \|P_{[p,n+p]}\phi\|^2 - \|P_{[p,n-p]}\phi\|^2) , \end{aligned}$$

qui entraîne,

$$\|P_{[p,n+p]}\phi\|^2 \geq \left(\frac{\text{dist}(z, \sigma(U))^2}{\|U\|^2} + 1 - \epsilon \right) \|P_{[p,n-p]}\phi\|^2 .$$

Comme $\epsilon < \text{dist}(z, \sigma(U))^2 \|U\|^{-2}$, on montre par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, n \geq \max(n_\epsilon, 3p)$,

$$\|P_{[p,n+2pk]}\phi\| \geq \left(\frac{\text{dist}(z, \sigma(U))^2}{\|U\|^2} + 1 - \epsilon \right)^{\frac{k}{2}} \|P_{[p,n]}\phi\| ,$$

ce qui prouve le lemme. $\square$

A.2 Construction de Berezanskii

Etant donné un opérateur unitaire U agissant sur un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormée $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, on peut construire pour tout élément du spectre $\sigma(U)$ une solution généralisée de l'équation aux valeurs propres, dont les coefficients croissent au plus polynômialement. Cette construction reprend une argumentation développée pour certaines familles d'opérateurs auto-adjoints [S1].

Définition A.2.1 *Deux mesures boréliennes sur $\mathbb{T}$ sont équivalentes si elles sont mutuellement absolument continues. Une classe de mesure est une classe d'équivalence pour cette relation.*

Soient U un opérateur unitaire, $(E(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ sa famille de projecteurs spectraux et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de termes réels strictement positifs telle que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n < +\infty .$$

La mesure μ définie par : $\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$,

$$\mu(\Delta) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \langle e_n | E(\Delta) e_n \rangle ,$$

est telle que : $\mu(\Delta) = 0$ si et seulement si $E(\Delta) = 0$. La classe de mesure de μ est indépendante du choix de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et de la base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mais reste associée à U . La classe de mesure de μ sera ainsi appelée classe de mesure spectrale de U . Toute mesure appartenant à cette classe sera une mesure spectrale de U .

Théorème A.2.1 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable fixé et $(A(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ une famille d'opérateurs positifs à trace telle que pour tout borélien Δ s'écrivant :*

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n ,$$

où $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de boréliens deux à deux disjoints, on ait :

$$A(\Delta) = s\text{-}\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N A(\Delta_n) .$$

Alors, il existe une mesure borélienne ν sur le tore $\mathbb{T}$ et une fonction mesurable A à valeurs parmi les opérateurs positifs à trace telle que :

- $\forall \phi \in \mathcal{H}, \langle \phi | A(\Delta) \phi \rangle = \int_{\Delta} \langle \phi | A(\lambda) \phi \rangle d\nu(\lambda)$
- $\text{Tr}(A(\lambda)) = 1, \nu\text{-pp.}$

Ces deux conditions fixent la fonction A .

La preuve est à peu de chose près celle du théorème C.5.1 [S1]. En travaillant sur le tore $\mathbb{T}$, les problèmes de bornes disparaissent.

Soit $\mathcal{H}_\delta((e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) = \{\phi \in \mathcal{H}; \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^\delta |\langle e_n | \phi \rangle|^2 < +\infty\}$. Par commodité, on notera pour tout $\phi \in \mathcal{H}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\phi_n \equiv \langle e_n | \phi \rangle . \quad (\text{A.19})$$

Proposition A.2.1 Soient U un opérateur unitaire défini sur $\mathcal{H}$ et $\delta > 1$. Alors, il existe une mesure spectrale ν et pour ν -presque tout λ une fonction $F_{\cdot, \cdot}(\lambda)$ définie sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ telle que:

- $F_{n,m}$ soit mesurable en $\lambda, \lambda \in \mathbb{T}$
- $\sum_{n,m} (n \cdot m)^{-\delta} |F_{n,m}(\lambda)|^2 \leq 1, \nu\text{-pp}$
- $\exists C > 0, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, |F_{n,m}(\lambda)| \leq C n^{-\frac{\delta}{2}} m^{-\frac{\delta}{2}}$
- Pour toute fonction borélienne bornée g sur le cercle unité $\mathbb{S}$, et pour tous vecteurs ϕ, ψ appartenant à $\mathcal{H}$,

$$\langle \phi | g(U) \psi \rangle = \int_{\mathbb{T}} g(\lambda) \left(\sum_{n,m} F_{n,m}(\lambda) \overline{\phi_n} \psi_m \right) d\nu(\lambda).$$

- Pour tout entier m fixé, $(U - e^{i\lambda})F_{\cdot, m}(\lambda) = 0$, au sens où :

$$F_{\cdot, m}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} F_{n,m}(\lambda) e_n .$$

Preuve : La famille des projecteurs spectraux de U est notée $(E(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$. Soit x l'opérateur auto-adjoint, diagonal sur la base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et défini par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x e_n = n e_n$. Pour tout borélien Δ de $\mathbb{T}$, l'opérateur $E(\Delta) x^{-\delta}$ est Hilbert-Schmidt car :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |\langle e_n | E(\Delta) x^{-\delta} e_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-2\delta} |\langle e_n | E(\Delta) e_n \rangle|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-2\delta} < +\infty .$$

Cette estimation est en fait indépendante de la base choisie. Les membres de la famille d'opérateurs $(A(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$, définis par : $\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$,

$$A(\Delta) = x^{-\frac{\delta}{2}} E(\Delta) x^{-\frac{\delta}{2}} ,$$

sont des opérateurs positifs et à trace :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \langle e_n | A(\Delta) e_n \rangle \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-\delta} \langle e_n | E(\Delta) e_n \rangle < +\infty .$$

Par définition, la famille spectrale $(E(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ vérifie pour toute famille dénombrable de boréliens $(\Delta_i)_{i \in I}$ deux à deux disjoints : $E(\cup_{i \in I} \Delta_i) = s\text{-}\lim \sum_{i \in I} E(\Delta_i)$. Les opérateurs $x^{-\delta}$ étant bornés sur $\mathcal{H}$, on a également $A(\cup_{i \in I} \Delta_i) = s\text{-}\lim \sum_{i \in I} A(\Delta_i)$. De plus, la mesure borélienne positive $A(\cdot)$ prend ses valeurs parmi les opérateurs à trace. Le théorème A.2.1 s'applique donc à notre situation. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on définit v -pp une fonction $F_{n,m}$ par :

$$F_{n,m}(\lambda) = \langle e_n | x^{\frac{\delta}{2}} a(\lambda) x^{\frac{\delta}{2}} e_m \rangle = (nm)^{\frac{\delta}{2}} \langle e_n | a(\lambda) e_m \rangle = (nm)^{\frac{\delta}{2}} a_{n,m}(\lambda) .$$

Par construction, les fonctions $a_{n,m}$ (donc $F_{n,m}$) sont mesurables. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} |F_{n,m}(\lambda)|^2 (n.m)^{-\delta} &= \sum_{n,m} |a_{n,m}(\lambda)|^2 = \sum_n \|a(\lambda) e_n\|^2 \\ &= \|a(\lambda)\|_2^2 \leq \|a(\lambda)\|_1^2 = \text{Tr}(a(\lambda))^2 = 1 \quad v\text{-pp} . \end{aligned}$$

Ce résultat entraîne directement le troisième point de la proposition. Soient Δ un ensemble borélien de $\mathbb{S}$, χ_Δ sa fonction caractéristique, et ϕ, ψ deux vecteurs appartenant à $\mathcal{H}_\delta((e_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta(e^{i\lambda}) \sum_{n,m} \overline{\phi_n} \psi_m F_{n,m}(\lambda) dv(\lambda) &= \sum_{n,m} \overline{\phi_n} \psi_m \int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta(\lambda) F_{n,m}(\lambda) dv(\lambda) \\ &= \sum_{n,m} \overline{\phi_n} \psi_m \int_{\Delta} F_{n,m}(\lambda) dv(\lambda) \\ &= \sum_{n,m} \overline{\phi_n} \psi_m \langle e_n | E(\Delta) e_m \rangle \\ &= \sum_{n,m} \overline{\phi_n} \psi_m \langle e_n | \left(\int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta(e^{i\lambda}) d\lambda \right) e_m \rangle \\ &= \langle \phi | \chi_\Delta(U) \psi \rangle . \end{aligned}$$

Ce résultat s'étend par linéarité au cas des fonctions étagées, puis au cas des fonctions mesurables bornées sur $\mathbb{S}$. Pour toute fonction g mesurable bornée sur le cercle unité $\mathbb{S}$ on obtient : $\forall (\phi, \psi) \in \mathcal{H}_\delta((e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) \times \mathcal{H}_\delta((e_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$,

$$\int_{\mathbb{T}} g(e^{i\lambda}) \sum_{n,m} \overline{\phi_n} \psi_m F_{n,m}(\lambda) dv(\lambda) = \langle \phi | g(U) \psi \rangle .$$

En appliquant ce résultat au cas où $g = id_{\mathbb{S}}$ et en prenant $\psi = e_m$,

$$\begin{aligned} \langle \phi | U e_m \rangle &= \int_{\mathbb{T}} e^{i\lambda} \left(\sum_n F_{n,m}(\lambda) \overline{\phi_n} \right) dv(\lambda) , \\ &= \int_{\mathbb{T}} \langle \phi | e^{i\lambda} F_{.,m}(\lambda) \rangle dv(\lambda) . \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \langle \phi | U F_{.,m}(\lambda) \rangle dv(\lambda) &= \sum_k \int_{\mathbb{T}} \overline{\phi_k} (U F_{.,m}(\lambda))_k dv(\lambda) \\
&= \sum_k \int_{\mathbb{T}} \overline{\phi_k} \sum_j U_{kj} F_{j,m}(\lambda) dv(\lambda) \\
&= \sum_{k,j} U_{kj} \overline{\phi_k} \int_{\mathbb{T}} F_{j,m}(\lambda) dv(\lambda) \\
&= \sum_{k,j} U_{kj} \overline{\phi_k} (jm)^{\delta} \int_{\mathbb{T}} a_{j,m}(\lambda) dv(\lambda) \\
&= \sum_{k,j} U_{kj} \overline{\phi_k} (jm)^{\delta} A(\mathbb{T})_{j,m} \\
&= \sum_{k,j} U_{kj} \overline{\phi_k} E(\mathbb{T})_{j,m} = \sum_{k,j} U_{kj} \overline{\phi_k} \delta_{j,m} \\
&= \langle \phi | U e_m \rangle .
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall \phi \in \mathcal{H}_{\delta}((e_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$,

$$\int_{\mathbb{T}} \langle \phi | U F_{.,m}(\lambda) \rangle dv(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} \langle \phi | e^{i\lambda} F_{.,m}(\lambda) \rangle dv$$

soit $\langle \phi | U F_{.,m}(\lambda) \rangle = \langle \phi | e^{i\lambda} F_{.,m}(\lambda) \rangle$, v -pp. □

Théorème A.2.2 Soient U un opérateur unitaire défini sur $\mathcal{H}$ et $\delta > 1$. Il existe une mesure spectrale (borélienne) v et une famille d'ensembles mesurables disjoints $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont la réunion supporte v tels que pour $\lambda \in \Delta_n$, il existe n vecteurs de $\mathcal{H}$, $\phi_1(\lambda), \dots, \phi_n(\lambda)$ vérifiant :

- $\forall j \in \{1, \dots, n\}, (U - e^{i\lambda})\phi_j(\lambda) = 0$, v -pp
- $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, |(\phi_j(\lambda))_n| \leq C n^{\delta}$
- Pour tout λ fixé, la famille $(\phi_j(\lambda))_{j \in \{1, \dots, n\}}$ est linéairement indépendante.

Preuve : Soit $N(\lambda)$ le rang de l'opérateur Hilbert-Schmidt $a(\lambda)$ (c'est une fonction mesurable de λ). Pour tout λ , il existe une famille linéairement indépendante, orthogonale [Kato] $(f_j(\lambda))_{j \in \{1, \dots, N(\lambda)\}}$ telle que v -pp :

$$\begin{aligned}
a(\lambda) &= \sum_{j=1}^{N(\lambda)} |f_j(\lambda)\rangle \langle f_j(\lambda)| \\
\sum_{j=1}^{N(\lambda)} \|f_j(\lambda)\|^2 &= \sum_{m,j} \frac{1}{\|f_m(\lambda)\|^2} \langle f_m(\lambda) | f_j(\lambda) \rangle \langle f_j(\lambda) | f_m(\lambda) \rangle = \sum_{m=1}^{N(\lambda)} \left\langle \frac{f_m(\lambda)}{\|f_m(\lambda)\|} \middle| a(\lambda) \frac{f_m(\lambda)}{\|f_m(\lambda)\|} \right\rangle \\
&= \text{Tr}(a(\lambda)) = 1 .
\end{aligned}$$

En cas de dégénérescence du spectre, le choix des vecteurs (f_j) peut toujours être effectué de manière à ce qu'ils soient mesurables [S1]. Il suffit de poser maintenant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{T}, \Delta_n = \{\lambda \in \mathbb{T}; N(\lambda) = n\}$ et

$$\phi_n(\lambda) = n^{\frac{\delta}{2}} f_n(\lambda) .$$

Les ensembles Δ_n sont disjoints par construction. Pour toute valeur fixée de λ , les vecteurs $\phi_j(\lambda)$ sont linéairement indépendants. En effet, $\forall (\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, N(\lambda)\}}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N(\lambda)} \alpha_i \phi_j(\lambda) = 0 &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \alpha_i (\phi_i(\lambda))_k = 0 \\
&\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \alpha_i k^\delta (f_i(\lambda))_k = 0 = \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \alpha_i (f_i(\lambda))_k \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \alpha_i f_i(\lambda) = 0 \\
&\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, N(\lambda)\}, \alpha_j = 0 .
\end{aligned}$$

Les conditions de croissance des composantes des vecteurs $\phi_j(\lambda)$ découlent de leur définition et de la proposition A.2.1. Par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_j(\lambda)\|^2 (\phi_j(\lambda))_k = \sum_m m^{-\delta} F_{k,m}(\lambda) (\phi_j(\lambda))_m$$

Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, \dots, N(\lambda)\}$,

$$\begin{aligned}
\langle e_n | U \phi_j(\lambda) \rangle &= \sum_k U_{nk} (\phi_j(\lambda))_k = \frac{1}{\|f_j(\lambda)\|^2} \sum_{k,m} U_{nk} m^{-\delta} F_{k,m}(\lambda) (\phi_j(\lambda))_m \\
&= \frac{1}{\|f_j(\lambda)\|^2} \sum_m m^{-\delta} (\phi_j(\lambda))_m \langle e_n | U F_{.,m}(\lambda) \rangle , \tag{A.25}
\end{aligned}$$

et la proposition A.2.1 entre en jeu. Le membre de droite de l'égalité (A.25) est égal à :

$$\frac{1}{\|f_j(\lambda)\|^2} \sum_m m^{-\delta} (\phi_j(\lambda))_m e^{i\lambda} \langle e_n | F_{.,m}(\lambda) \rangle = \langle e_n | e^{i\lambda} \phi_j(\lambda) \rangle .$$

Ainsi, $\forall \phi \in \mathcal{H}$, $\langle \phi | U \phi_j(\lambda) \rangle = \langle \phi | e^{i\lambda} \phi_j(\lambda) \rangle$ *v*-pp, ce qui achève la preuve. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème A.0.1.

A.3 Preuve du théorème A.0.1

Soient U un opérateur unitaire $(2p+1)$ -diagonal sur $\mathbb{N}^*$ ($p \in \mathbb{N}$) agissant sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P} = \{e^{i\lambda} \in \mathbb{S}; U\phi = e^{i\lambda}\phi \text{ admet une solution polynômialement bornée}\}$. Si $e^{i\lambda} \in \sigma(U)$ alors pour tout $\epsilon > 0$, $E([\lambda - \epsilon; \lambda + \epsilon]) > 0$ et donc $v([\lambda - \epsilon; \lambda + \epsilon]) > 0$. Autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \Delta_n$. En vertu du théorème A.2.2, il existe des solutions généralisées polynômialement bornées $(\phi_j(\lambda))_{j \in \{1, \dots, n\}}$ à l'équation aux valeurs propres. Ainsi, $\mathcal{P} \subset \sigma(U)$. L'inclusion réciproque découle du lemme A.1.1 et du fait que le spectre est un ensemble fermé. $\square$

Remarque : Nous avons démontré également au passage que : $E_U(\mathbb{T} \setminus \mathcal{P}) = 0$.

Annexe B

Sur une classe d'opérateurs unitaires à spectre singulier

L'étude spectrale d'opérateurs unitaires tri-diagonaux présentée au chapitre 1 s'appuie sur le calcul explicite de la structure de la matrice représentative dans une base adaptée. La conclusion est simple (corollaires 1.5.1 et 1.5.2). L'analyse devient plus complexe pour les familles d'opérateurs unitaires penta-diagonaux présentées aux cours des chapitres 3-5. Certaines propriétés spectrales des opérateurs multi-diagonaux sont néanmoins indépendantes de la largeur de la bande :

Proposition B.0.1 *Si l'opérateur unitaire U est $(2p + 1)$ -diagonal sur une base orthonormée $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ ($p \in \mathbb{N}$), et s'il existe une sous-suite $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|P_{[j_k, j_k+p]} U P_{[j_k-p, j_k]}\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|P_{[j_k-p, j_k]} U P_{[j_k, j_k+p]}\| = 0 ,$$

où $P_{[n, m]}$ (n, m entiers positifs) est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}\{\phi_k; k \in \{n, \dots, m\}\}$, alors, $\sigma_{ac}(U) = \emptyset$.

Preuve : Pour tout entiers naturels n, m la décomposition polaire de l'opérateur $P_{[n, m]} U P_{[n, m]}$, sera notée : $P_{[n, m]} U P_{[n, m]} = V_{[n, m]} R_{[n, m]}$ avec

$$\begin{aligned} R_{[n, m]} &= P_{[n, m]} R_{[n, m]} P_{[n, m]} \\ V_{[n, m]} &= P_{[n, m]} V_{[n, m]} P_{[n, m]} \end{aligned}$$

où $R_{[n, m]}$ est un opérateur positif (ici $\|R_{[n, m]}\| \leq 1$) et $V_{[n, m]}$ est unitaire sur $\text{Ran } P_{[n, m]}$. Soit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite extraite de la suite $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$n_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad n_{k+1} > n_k + p .$$

L'opérateur U peut se réécrire alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[n_k, n_{k+1}]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} + \sum_{k=2}^{+\infty} P_{[n_{k-1}, n_k]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} + \sum_{k=2}^{+\infty} P_{[n_k, n_{k+1}]} U P_{[n_{k-1}, n_k]} \\ &= V + \sum_{k=1}^{+\infty} V_{[n_k, n_{k+1}]} (R_{[n_k, n_{k+1}]} - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P_{[n_{k-1}, n_k]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{+\infty} P_{[n_k, n_{k+1}]} U P_{[n_{k-1}, n_k]} , \end{aligned}$$

où l'opérateur unitaire V est défini par :

$$V = \sum_{j=1}^{+\infty} V_{[n_k, n_{k+1}]} \quad .$$

Compte tenu du choix de la suite extraite et de la structure multi-diagonale de l'opérateur U , l'approximation se réécrit même :

$$U - V = \sum_{k=1}^{+\infty} V_{[n_k, n_{k+1}]} (R_{[n_k, n_{k+1}]} - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P_{[n_k-p, n_k]} U P_{[n_k, n_k+p]} + P_{[n_k, n_k+p]} U P_{[n_k-p, n_k]} \quad . \quad (\text{B.3})$$

Il reste à montrer que $U - V$ est à trace pour un choix convenable de la suite (n_k) . Remarquons d'abord pour cela que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\|P_{[n_k-p, n_k]} U P_{[n_k, n_k+p]}\|_1 \leq p \|P_{[n_k-p, n_k]} U P_{[n_k, n_k+p]}\| < +\infty$$

et

$$\|P_{[n_k, n_k+p]} U P_{[n_k-p, n_k]}\|_1 \leq p \|P_{[n_k, n_k+p]} U P_{[n_k-p, n_k]}\| < +\infty \quad . \quad (\text{B.5})$$

Pour les opérateurs $P_{[n_k, n_{k+1}]}(1 - R_{[n_k, n_{k+1}]})P_{[n_k, n_{k+1}]}$, auto-adjoints sur $\text{Ran } P_{[n_k, n_{k+1}]}$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|(1 - R_{[n_k, n_{k+1}]}) V_{[n_k, n_{k+1}]}\|_1 = \|1 - R_{[n_k, n_{k+1}]}\|_1 \quad , \quad (\text{B.6})$$

écriture dans laquelle les opérateurs en question sont vus comme matrices sur le sous-espace hermitien $P_{[n_k, n_{k+1}]} \mathcal{H}$. Or, $\forall \phi \in \text{Ran } P_{[n_k+p, n_{k+1}-p]}$,

$$\begin{aligned} \|R_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\| &= \|V_{[n_k, n_{k+1}]} R_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\| = \|P_{[n_k, n_{k+1}]} U_{[n_k, n_{k+1}]} P_{[n_k, n_{k+1}]} P_{[n_k+p, n_{k+1}-p]} \phi\| \\ &= \|U_{[n_k, n_{k+1}]} P_{[n_k, n_{k+1}]} P_{[n_k+p, n_{k+1}-p]} \phi\| \quad , \end{aligned}$$

en utilisant la structure multi-diagonale de l'opérateur U . Il reste donc,

$$\|R_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\| = \|U_{[n_k, n_{k+1}]} P_{[n_k+p, n_{k+1}-p]} \phi\| = \|P_{[n_k+p, n_{k+1}-p]} \phi\| = \|\phi\| \quad .$$

En utilisant l'identité de polarisation et la positivité de l'opérateur $R_{[n_k, n_{k+1}]}$, cette relation permet de montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$(R_{[n_k, n_{k+1}]})|_{\text{Ran } P_{[n_k+p, n_{k+1}-p]}} = I \quad .$$

Ainsi, le spectre $\sigma(R_{[n_k, n_{k+1}]})$ comporte au moins $n_{k+1} - n_k - 2p$ valeurs propres égales à 1. Par conséquent, la quantité (B.6) comporte au plus $2p$ termes non-nuls. Or pour tout $r \in \sigma(R_{[n_k, n_{k+1}]})$, il existe $\phi \in \text{Ran } P_{[n_k, n_{k+1}]}$ de norme 1 pour lequel $R_{[n_k, n_{k+1}]} \phi = r \phi$. Le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \|U \phi\|^2 &= 1 = \|U P_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\|^2 \\ &= \|P_{[n_k, n_{k+1}]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\|^2 + \|P_{[n_k-p, n_k]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\|^2 \\ &\quad + \|P_{[n_{k+1}, n_{k+1}+p]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\|^2 \\ &= r^2 + \|P_{[n_k-p, n_k]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\|^2 + \|P_{[n_{k+1}, n_{k+1}+p]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\|^2 \end{aligned}$$

permet d'obtenir une estimation des $2p$ termes non nuls de la somme (B.6) :

$$1 - r^2 \leq \|P_{[n_k-p, n_k]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\|^2 + \|P_{[n_{k+1}, n_{k+1}+p]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \phi\|^2 \quad .$$

En rassemblant tous ces résultats, on majore la quantité (B.6) par :

$$\begin{aligned}
\| (1 - R_{[n_k, n_{k+1}]}) V_{[n_k, n_{k+1}]} \|_1 &= \sum_{r \in \sigma(R_{[n_k, n_{k+1}]})} (1 - r_\lambda) \leq \frac{1}{2} \sum_{r \in \sigma(R_{[n_k, n_{k+1}]})} (1 - r^2) \\
&\leq p \|P_{[n_k - p, n_k]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \|^2 + p \|P_{[n_{k+1}, n_{k+1} + p]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \|^2 \\
&\leq p \|P_{[n_k - p, n_k]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \| + p \|P_{[n_{k+1}, n_{k+1} + p]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \| \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

Le cumul des estimations (B.3), (B.5), (B.10) permet d'écrire :

$$\|U - V\|_1 \leq 2p \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (\|P_{[n_k - p, n_k]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \| + \|P_{[n_{k+1}, n_{k+1} + p]} U P_{[n_k, n_{k+1}]} \|) \quad .$$

En extrayant convenablement la suite (n_k) , on peut construire un opérateur unitaire V de manière à ce que le second membre de l'inégalité précédente soit fini. Comme l'opérateur V est à spectre purement ponctuel et comme $\|U - V\|_1 < +\infty$, on en déduit par le théorème de Birman Krein [BK] que $\sigma_{ac}(U) = \emptyset$. $\square$

Annexe C

Sur les perturbations d'opérateurs unitaires

Ce chapitre regroupe quelques résultats sur les perturbations d'opérateurs unitaires. La proposition C.3.1 y est démontrée.

C.1 Perturbations d'un opérateur unitaire

Lemme C.1.1 *Soient U_1 et U_2 deux opérateurs unitaires agissant sur un même espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Soient $D = U_2 - U_1$ et $(\phi_j)_{j \in I}$ un ensemble complet de vecteurs normés engendrant le sous-espace $\text{Ran } D^*$. Si $i \in \{1, 2\}$, les espaces $\mathcal{H}_i = \overline{\text{Vect}\{U_i^n \phi_j; n \in \mathbb{Z}, j \in I\}}$ et $\mathcal{H}_i^\perp$ réduisent simultanément U_1 et U_2 . De plus,*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_1^\perp &= \mathcal{H}_2^\perp.\end{aligned}$$

Preuve : Soit P le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}_1$. Par construction, $U_1 \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$, ce qui entraîne $U_1^{-1} \mathcal{H}_1^\perp \subset \mathcal{H}_1^\perp$. De la même manière, $U_1^{-1} \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$ et $U_1 \mathcal{H}_1^\perp \subset \mathcal{H}_1^\perp$. Par conséquent :

$$PU_1 = U_1P = PU_1P \text{ et } (I - P)U_1 = U_1(I - P) = (I - P)U_1(I - P).$$

Il suffit de démontrer le même résultat avec U_2 en lieu et place de U_1 pour prouver la première partie du lemme. En remarquant que $\text{Ran } D^* \subset \mathcal{H}_1$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^\perp &\subset (\text{Ran } D^*)^\perp \subset \text{Ker } D \\ D(I - P) &= 0 \text{ et } D^* = PD^* \\ U_2(I - P) &= U_1(I - P) + D(I - P) = U_1(I - P) = (I - P)U_1 = (I - P)U_1(I - P) \\ U_2 \mathcal{H}_1^\perp &\subset \mathcal{H}_1^\perp.\end{aligned}\tag{C.2}$$

La restriction de l'opérateur U_2 au sous-espace $\mathcal{H}_1^\perp$ a donc un sens et coïncide avec la restriction de l'opérateur U_1 qui est elle-même unitaire. La restriction de l'opérateur U_2 est donc unitaire : nécessairement $U_2 \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$, ce qui achève la première partie de la démonstration. Bien entendu, l'échange des rôles des opérateurs U_1 et U_2 nous conduit à reformuler le même énoncé avec $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_2^\perp$ en lieu et place de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_1^\perp$.

Soit $\psi \in \mathcal{H}_1^\perp$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_2^n &= U_1^n - \sum_{k=0}^{n-1} U_1^k (U_1 - U_2) U_2^{n-1-k} = U_1^n - \sum_{k=0}^{n-1} U_1^{k+1} (U_2^* - U_1^*) U_2^{n-k} \\ &= U_1^n + \sum_{k=0}^{n-1} U_1^{k+1} D^* U_2^{n-k} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

En particulier, $\forall \phi \in \text{Ran } D^*$, $\langle \psi, U_1^n \phi \rangle = 0$. Comme $\text{Ran } D^* \subset \mathcal{H}_1$ et que $\mathcal{H}_1$ est stable sous l'action de U_1 , on a pour tout $\chi \in \mathcal{H}$: $\langle \psi, D^* \chi \rangle = 0$. L'équation (C.3) amène directement à la conclusion suivante: $\forall \phi \in \text{Ran } D^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\langle \psi, U_2^n \phi \rangle = \langle \psi, U_1^n \phi \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle \psi, U_1^k (D^* U_2^{n-1-k} \phi) \rangle = 0$$

Sur le même modèle, on démontre que: $\forall \phi \in \text{Ran } D^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle \psi, U_2^{-n} \phi \rangle = 0$, en remarquant que:

$$\begin{aligned} U_2^{-n} &= U_1^{-n} + \sum_{k=0}^{n-1} U_1^{-k} (U_2^{-1} - U_1^{-1}) U_2^{-n+1+k} = U_1^{-n} + \sum_{k=0}^{n-1} U_1^{-k} (U_2^* - U_1^*) U_2^{-n+1+k} \\ &= U_1^{-n} + \sum_{k=0}^{n-1} U_1^{-k} D^* U_2^{-n+1+k} . \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Ainsi, $\forall \phi \in \text{Ran } D^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\langle \psi, U_2^n \phi \rangle = 0$. Par conséquent, $\psi \in \mathcal{H}_2^\perp$ et $\mathcal{H}_1^\perp \subset \mathcal{H}_2^\perp$. Une inversion des rôles des opérateurs unitaires U_1 et U_2 permet de montrer l'inclusion réciproque. L'identification est ainsi démontrée:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^\perp &= \mathcal{H}_1^\perp \\ \mathcal{H}_2 &= \mathcal{H}_1 . \end{aligned}$$

□

Remarque: Au chapitre 2, la famille d'opérateurs de monodromie $(V_{\kappa T})_{(\kappa, T) \in \mathbb{R}^2}$ est définie par:

$$\begin{aligned} V_{\kappa T} &= e^{iH_0 T} + (e^{i\kappa T} - 1) |e^{iH_0 T} \phi\rangle \langle \phi| , \\ D^* &= (e^{-i\kappa T} - 1) |\phi\rangle \langle e^{iH_0 T} \phi| \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Si ϕ est cyclique par rapport à H_0 , ϕ est aussi cyclique par rapport à $V_{\kappa T}$ pour toutes valeurs de κ et de T . Autrement dit, si

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \overline{\text{Vect}\{e^{inH_0 T} \phi; n \in \mathbb{Z}\}} \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 = \overline{\text{Vect}\{V_{\kappa T}^n \phi; n \in \mathbb{Z}\}} \end{aligned}$$

C.2 Supports de mesure: matériel préparatoire

Dans ce paragraphe, on identifie les espaces fonctionnels définis sur $\mathbb{T}$ aux espaces de fonctions périodiques de période 2π définis sur $\mathbb{R}$. La mesure borélienne finie positive μ est

définie sur $\mathbb{T}$ et la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ est notée ν . Un ensemble borélien S est un support de la mesure μ si $\mu(\mathbb{T} \setminus S) = 0$. Ce support est défini à un ensemble de mesure nulle près. En vertu du théorème de décomposition de Lebesgue ([Rud] théorème 6.9), il existe une unique paire de mesures positives μ_s, μ_{ac} telle que :

- $\mu = \mu_s + \mu_{ac}$
- la composante μ_{ac} soit absolument continue par rapport à ν
- la composante μ_s et la mesure ν soient mutuellement singulières.

Par conséquent, μ_s et μ_{ac} sont mutuellement singulières. Le théorème de Radon-Nikodym ([Rud] théorème 6.9) permet en outre d'affirmer que : $\exists h \in L^1(\mathbb{T}, \nu), \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{T}),$

$$\mu_{ac}(E) = \int_E h d\nu .$$

La fonction h est la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure μ_{ac} par rapport à ν . Diverses notions de différentiation peuvent être associées à une mesure borélienne positive μ sur $\mathbb{T}$. Nous reprendrons à notre compte l'exposé effectué à ce sujet dans [Rud].

L'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{T}$ est noté $\mathcal{I}(\mathbb{T})$. La longueur d'un intervalle I de $\mathbb{T}$ est notée $l(I)$.

Définition C.2.1 Soit μ une mesure borélienne à valeur réelle définie sur $\mathbb{T}$. On pose :

$$\begin{aligned} \overline{D}\mu(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \overline{\Delta}_r(x) \\ \underline{D}\mu(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \underline{\Delta}_r(x) , \end{aligned}$$

où pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_r(x) &= \sup \left\{ \frac{\mu(E)}{\nu(E)} ; x \in E, E \in \mathcal{I}(\mathbb{T}), l(I) < r \right\} \\ \underline{\Delta}_r(x) &= \inf \left\{ \frac{\mu(E)}{\nu(E)} ; x \in E, E \in \mathcal{I}(\mathbb{T}), l(I) < r \right\} . \end{aligned}$$

En particulier, on a pour tout $x \in \mathbb{T}$, $\overline{D}\mu(x) \geq \underline{D}\mu(x)$. La mesure μ sera différentiable au point x de $\mathbb{T}$ si $\overline{D}\mu(x) = \underline{D}\mu(x) < +\infty$. On pose alors, $\overline{D}\mu(x) = \underline{D}\mu(x) = D\mu(x)$. Le théorème suivant lie les propriétés de la dérivée $D\mu$ à celles de la dérivée de Radon-Nikodym ([Rud] théorème 8.6 et corollaire) :

Théorème C.2.1 Si μ est une mesure borélienne à valeurs complexes sur $\mathbb{T}$, alors

- μ est différentiable ν -pp
- $D\mu \in L^1(\mathbb{T}, \nu)$
- $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{T}), \mu(E) = \mu_s(E) + \int_E (D\mu)(x) d\nu(x)$

où μ_s est la composante singulière de la mesure μ par rapport à la mesure de Lebesgue et $D\mu_s(x) = 0$, ν -pp.

Ainsi, les dérivées h et $D\mu$ coïncident ν -presque partout.

Il est maintenant possible de définir les supports des composantes de la mesure μ à partir du comportement de l'intégrale de Poisson de la mesure μ , $P[\mu]$, définie en tout point z du disque ouvert unité par :

$$P[\mu](z) = \int_{\mathbb{T}} P(z, e^{it}) d\mu(t) \quad \text{où} \quad P(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} .$$

En effet, les limites suivantes existent, sont finies et coïncident ν -presque partout ([Rud] théorème 11.10)

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P[\mu](re^{i\theta}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P[\mu](e^{i\theta}e^{-\epsilon}) = (D\mu)(\theta) . \quad (\text{C.9})$$

Par conséquent, en notant $L = \{\theta \in \mathbb{T}; \lim_{r \rightarrow 1^-} P[\mu](re^{i\theta}) = (D\mu)(\theta) < +\infty\}$, on a

$$\mu_{ac}(\mathbb{T} \setminus L) = 0 . \quad (\text{C.10})$$

L'ensemble borélien L est un support de la composante absolument continue de la mesure μ . Le support de la composante singulière se caractérise de manière semblable ([Rud] théorème 8.9) :

Théorème C.2.2 *Soit μ une mesure borélienne positive sur $\mathbb{T}$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, alors :*

$$(D\mu)(x) = \infty \quad \mu - \text{pp} .$$

Si μ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, on a donc a fortiori : $(\underline{D}\mu)(\theta) = +\infty$, μ - presque partout. En vertu de l'inégalité (3) du théorème 11.10 [Rud] : $\forall \theta \in \mathbb{T}$,

$$(\underline{D}\mu)(\theta) \leq \liminf_{r \rightarrow 1^-} P[\mu](re^{i\theta}) .$$

Le théorème C.2.2 admet donc le corollaire suivant

Corollaire C.2.1 *Soit μ une mesure borélienne positive sur $\mathbb{T}$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $S = \{\theta \in \mathbb{T}; \lim_{r \rightarrow 1^-} P[\mu](re^{i\theta}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P[\mu](e^{i\theta}e^{-\epsilon}) = \infty\}$. Alors,*

$$\mu(\mathbb{T} \setminus S) = 0 .$$

Preuve : Il suffit de remarquer que S contient l'ensemble S_0 défini par :

$$S_0 = \{\theta \in \mathbb{T}; \lim_{r \rightarrow 1^-} P[\mu](re^{i\theta}) = +\infty \quad \text{et} \quad D\mu(\theta) = +\infty\} .$$

La conclusion se déduit alors du théorème (C.2.2) : $0 \leq \mu(\mathbb{T} \setminus S) \leq \mu(\mathbb{T} \setminus S_1) = 0$. $\square$

Les résultats suivants vont nous permettre de reformuler la caractérisation du support de la composante singulière d'une mesure.

Lemme C.2.1 *Soit μ une mesure borélienne finie positive sur $\mathbb{T}$. Les quantités*

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{\pm\epsilon} e^{i(x-\theta)}} d\mu(\theta)$$

ont même comportement asymptotique lorsque ϵ tend vers 0.

Preuve : Il suffit de remarquer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{\pm\epsilon} e^{i(x-\theta)}} d\mu(\theta) &= \int_{\mathbb{T}} d\mu(\theta) + \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i(x-\theta)} e^{\pm\epsilon}}{1 - e^{\pm\epsilon} e^{i(x-\theta)}} d\mu(\theta) \\ &= 1 + \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{e^{\mp\epsilon} e^{-i(x-\theta)} - 1} d\mu(\theta) \\ &= 1 - \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{\mp\epsilon} e^{i(x-\theta)}} d\mu(\theta) \right)^* \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Les quantités impliquées sont donc simultanément convergentes, divergentes ou bornées. $\square$

La même conclusion vaut pour les quantités :

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{e^{i\theta} - e^{\pm\epsilon} e^{ix}} d\mu(\theta) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{\mp\epsilon} e^{i(x-\theta)}} d\mu(\theta) ,$$

puisque pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{e^{i\theta} - e^{ix} e^{\pm\epsilon}} d\mu(\theta) = -e^{-ix} e^{\mp\epsilon} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{i(\theta-x)} e^{\mp\epsilon}} d\mu(\theta) .$$

Par conséquent,

Lemme C.2.2 *L'intégrale de Poisson $P[\mu]$ diverge au point e^{ix} si la quantité*

$$\left| \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{e^{i\theta} - e^{\pm\epsilon} e^{ix}} d\mu(\theta) \right|$$

diverge lorsque ϵ tend vers 0.

Preuve : Il suffit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{T}$ et tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P[d\mu](e^{ix} e^\epsilon) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{i(x-\theta)} e^{-\epsilon}} d\mu(\theta) - \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{i(x-\theta)} e^\epsilon} d\mu(\theta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{i(x-\theta)} e^{-\epsilon}} d\mu(\theta) - \left[1 - \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{i(x-\theta)} e^{-\epsilon}} d\mu(\theta) \right]^* \\ &= 2\Re \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{i(x-\theta)} e^{-\epsilon}} d\mu(\theta) \right) - 1 . \end{aligned} \tag{C.20}$$

La divergence de la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{e^{i\theta} - e^{\pm\epsilon} e^{ix}} d\mu(\theta) \right|$$

entraîne celle de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - e^{\pm\epsilon} e^{i(x-\theta)}} d\mu(\theta) \right|$$

ce qui justifie la divergence de $P[\mu]$. $\square$

On obtient alors une nouvelle caractérisation du support d'une mesure singulière continue :

Corollaire C.2.2 *Soit μ une mesure borélienne positive finie singulière sur $\mathbb{T}$. Alors,*

$$\mu(\mathbb{T} \setminus S') = 0 \quad \text{où} \quad S' = \left\{ x \in \mathbb{T}; \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{e^{i\theta} - e^{\pm\epsilon} e^{ix}} d\mu(\theta) = \infty \right\}$$

Preuve : Soit $S = \{\theta \in \mathbb{T}; \lim_{r \rightarrow 1^-} P[\mu](re^{i\theta}) = +\infty\}$. D'après le lemme (C.2.2) : $0 \leq \mu(\mathbb{T} \setminus S') \leq \mu(\mathbb{T} \setminus S)$. Compte tenu du corollaire C.2.1, nécessairement $\mu(\mathbb{T} \setminus S') = 0$. $\square$

C.3 Application aux opérateurs frappés

Les notations utilisées ici sont empruntées au chapitre 2. Soient $(E_{\kappa T}(\Delta))_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})}$ la famille spectrale associée à l'opérateur $V_{\kappa T}$ et $\mu_{\kappa T}$ la mesure borélienne positive définie par : $\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$,

$$\mu_{\kappa T}(\Delta) = \langle \phi, E_{\kappa T}(\Delta) \phi \rangle \quad \text{et} \quad \mu_{\kappa T}(\mathbb{T}) = \|\phi\|^2 .$$

On définit également une fonctionnelle de cette mesure $F_{\kappa T}$ par : $\forall (\kappa, T) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$,

$$F_{\kappa T}(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{e^{i\theta} - z} d\mu_{\kappa T}(\theta) .$$

La démonstration du théorème 2.1.1 s'appuie sur la proposition suivante :

Proposition C.3.1 *Soient $T \in \mathbb{R}^*$, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ et $B(x)$ la quantité définie pour tout x appartenant à $\mathbb{T}$ par :*

$$B(x)^{-1} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{2}(x - \theta)\right)} d\mu_0(\theta) .$$

Alors,

- le support de la composante absolument continue $\mu_{\kappa T, ac}$ de la mesure $\mu_{\kappa T}$ est caractérisé de la manière suivante :

$$L_{\kappa T} = \{x \in \mathbb{T}; \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - x)} d\mu_{\kappa T}(\theta) < +\infty\}$$

- le support de la composante singulière continue de la mesure $\mu_{\kappa T}$, $\mu_{\kappa T, sc}$ est :

$$S_{\kappa T} = \{x \in \mathbb{T}; \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} e^{i(x \pm \epsilon)} F_0(e^{i(x \pm \epsilon)}) = -\frac{1 + \mu}{\mu}, \text{ et } B(x)^{-1} = +\infty\} ,$$

- et l'ensemble des valeurs propres est :

$$P_{\kappa T} = \{x \in \mathbb{T}; \lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} e^{i(x \pm \epsilon)} F_0(e^{i(x \pm \epsilon)}) = -\frac{1 + \mu}{\mu}, \text{ et } B(x)^{-1} < +\infty\}$$

Ces ensembles sont mutuellement disjoints.

Preuve : Il suffit de se reporter aux relations (C.10) ou à [KK] pour obtenir le support de la composante absolument continue de la mesure $\mu_{\kappa T, ac}$:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} \langle \phi | V_{\kappa T} [(V_{\kappa T} - r e^{ix})^{-1} - (V_{\kappa T} - r^{-1} e^{ix})^{-1}] \phi \rangle &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - r^2) e^{i\theta}}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - x)} d\mu_{\kappa T}(\theta) \\ &< +\infty \quad \nu - \text{pp} \end{aligned}$$

La mesure de Lebesgue de $\mathbb{T} \setminus L_{\kappa T}$ est nulle et donc, $\mu_{\kappa T, ac}(\mathbb{T} \setminus L_{\kappa T}) = 0$. En vertu du corollaire (C.2.2), la fraction singulière de la mesure $\mu_{\kappa T}$ est portée par l'ensemble des points tels que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| F_{\kappa T}(e^{i(x \pm i\epsilon)}) \right| = +\infty . \quad (\text{C.30})$$

En utilisant la première identité de la résolvante, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}$,

$$\begin{aligned} (e^{iH_0 T} - z)^{-1} &= (V_{\kappa T} - z)^{-1} + \mu |\phi\rangle \langle \phi| (V_{\kappa T} - z)^{-1} + z \mu (e^{iH_0 T} - z)^{-1} |\phi\rangle \langle \phi| (V_{\kappa T} - z)^{-1} , \\ F_{\kappa T}(z) &= F_0(z) [1 + \mu + z \mu F_0(z)]^{-1} \end{aligned}$$

La limite (C.30) est équivalente à :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{i(x \pm i\epsilon)} F_0(e^{i(x \pm i\epsilon)}) = -\frac{1 + \mu}{\mu} .$$

Il reste alors à distinguer le support de la composante singulière continue $\mu_{\kappa T, sc}$ de l'ensemble des valeurs propres. C'est une conséquence de la proposition 1 [Co2] p 683. $\square$

Bibliographie

- [Ao] Ping Ao, *Absence of localization in energy space of a Bloch electron driven by a constant electric force*, Phys. Rev. B, **41**, 3998-4001 (1989).
- [Arn] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1998.
- [ABDN] J. Asch, F. Bentosela, P. Duclos, G. Nenciu, *On the Dynamics of Crystal Electrons, high Momentum Regime*, J. Math. Anal. Appl., **256**, 99-114 (2001).
- [ADE] J. Asch, P. Duclos, P. Exner, *Stability of driven systems with growing gaps: Quantum rings and Wannier ladders*, J. Stat. Phys., **vol. 92**, 1053-1069 (1998).
- [AG] W. O. Amrein, V. Georgescu, *On the characterization of bound states and scattering states in quantum mechanics*, Helv. Phys. Acta, **46**, 635-658 (1973).
- [AN] J.E. Avron, J. Nemirovsky, *Quasienergies, Stark Hamiltonians and Energy growth for driven quantum rings*, Phys. Rev. Lett., **68**, 2212-2215 (1992).
- [AS] J.E. Avron, B. Simon, *Transient and Recurrent Spectrum*, J. Func. Analysis, **43**, 1-31 (1981).
- [Bak] R.C. Baker, *Discrepancy Modulo One and Capacity of Sets*, Quart. J. Oxford, **22**, 597-603 (1971). *Slowly growing sequences and discrepancy modulo one*, Acta Arithm., **23**, 279-293 (1973).
- [Bar] S. Barisic et al. Eds, *Lect. Notes in Physics*, **95** et **96**, Springer Verlag, 1979.
- [Beh] H. Behnke, *Zur Theorie der diophantischen Approximationen I.*, Abh. math. Semin. Hamburg Univ. Bd **3**, S 261-318, (1924). *Der Real und Imaginärteil von $\sigma(x, \alpha)$* , Abh. math. Semin. Hamburg Univ. Bd **3**, S 33-46, (1926).
- [Bel] J. Bellissard: *Stability and instability in Quantum Mechanics* in "Trends and developments in the eighties", Ed. S. Albeverio, P. Blanchard, 1-106, World Scientific, Singapore, 1985.
- [Ber] J. M. Berezanskii, *On an Eigenfunction Expansion for Selfadjoint Operators*, Amer. Math. Soc. Transl., **vol. 93** (2), 227-238 (1970).
- [Boul] N. Bouleau, *Probabilités de l'Ingénieur*, Hermann, 1986.
- [Bour] O. Bourget, *Floquet Operators with Singular Continuous Spectrum*, J. Math. Anal. Appl., to appear.
- [BB] G. Blatter, D. Browne, *Zener tunneling and localization in small conducting rings*, Phys. Rev. B, **vol. 37**, n 8, 3856-3880 (1988).
- [BCM] J.M. Barbaroux, J.M. Combes, R. Montcho, *Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra*, J. Math. Anal. Appl., **213**, n 2, 698-722 (1997).
- [BG] D. Bambusi, S. Graffi, *Time Quasi-periodic unbounded perturbations of the Schrödinger operators and KAM methods*, Comm. Math. Phys., **vol. 219**, 465-480 (2001).

- [BGK] J.E. Bayfield, L.D. Gardner, P.M. Koch, Observation of Resonances in the Microwave-Stimulated Multiphonic Excitation and Ionization of Highly Excited Hydrogen Atoms, *Phys. Rev. Lett.*, **39**, p 76 (1977).
- [BGT] J.M. Barbaroux, F. Germinet, S. Tcheremchantsev, *Fractal dimensions and the phenomenon of Intermittency in Quantum Dynamics*, *Duke Math. J.*, **110**, n 1, 161-193 (2001). *Generalized Fractal dimensions: equivalences and basic properties*, *J. Math. Pure Appl.* **80**, n 10, 977-1012 (2001).
- [BHJ] O. Bourget, J. Howland, A. Joye, *Spectral Analysis of Unitary Band Matrices*, to appear in *Comm. Math. Phys.*
- [BJ] J.M. Barbaroux, A. Joye, *Expectation Value of Observables in Time Dependent Quantum Mechanics*, *J. Stat. Phys.*, **90** n 5-6, 1225-1249 (1998).
- [BK] M.S. Birman, M.G. Krein, *On the theory of Wave Operators and Scattering theory*, *Soviet. Math. Dokl.*, **vol. 3**, 740-744 (1962).
- [BL] P. Bougerol, J. Lacroix, *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*, Birkhauser, 1985.
- [BS] *Physics in One Dimension*, J. Bernasconi et T. Schneider eds., Springer Verlag, 1981.
- [Com] J.M. Combes, *Connections between quantum dynamics and spectral properties of time evolution operators in Differential equations with applications to Mathematical Physics*, 59-68, *Math. Sci. Engrg.*, **192**, Academic Press, 1993.
- [Co1] M. Combescure, *The quantum stability problem perturbations of the harmonic oscillators*, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **47**, (1987), 63-83.
- [Co2] M. Combescure, *Spectral properties of a periodically kicked quantum Hamiltonian*, *J. Stat. Phys.*, **vol. 59**, 679-690 (1990).
- [Co3] M. Combescure, *Recurrent versus diffusive quantum behaviour for time dependent Hamiltonians*, *Operator theory: advances and applications*, **vol. 57**, 15-26, Birkhauser Verlag (1992).
- [Co4] M. Combescure, *Recurrent versus diffusive dynamics for a kicked quantum oscillator*, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **57**, n 1, (1992), 67-87.
- [CFKS] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger Operators*, Springer Verlag, 1987.
- [CL] R. Carmona, J. Lacroix *Spectral theory of random Schrödinger Operators*, Birkhauser, 1990.
- [CMV] M.J. Cantero, L. Moral, L. Velazquez, *Five Diagonal Matrices and Zeros of Orthogonal Polynomials on the Unit Circle*, to appear in *Linear Algebra Appl.*
- [Dieu] J. Dieudonné, *Eléments d'Analyse*, vol.1, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [Dix] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans les espaces Hilbertiens*, Gauthier-Villars, 1969.
- [DBF] S. DeBièvre, G. Forni, *Transport Properties of Kicked and Quasiperiodic Hamiltonians*, *J. of Stat. Phys.*, **90**, n 5/6, 1201-1223 (1998).
- [DLSV] P. Duclos, O. Lev, P. Stovicek, M. Vittot, *Weakly regular Floquet Hamiltonians with pure point spectrum*, *Rev. Math. Phys.*, **14**, n 6, 531-568 (2002).
- [DS] P. Duclos, P. Stovicek, *Floquet hamiltonians with pure point spectrum*, *Commun. Math. Phys.*, **177**, 327-347 (1996).
- [DSV] P. Duclos, P. Stovicek, Vittot M., *Perturbation of an eigenvalue from a dense point spectrum: a general Floquet Hamiltonian*, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys.*

- Théor., **vol. 71**, n 3, 241-301 (1999). *Perturbation of an eigenvalue from a dense point spectrum: an example*, J. Phys. A, **30**, n 20, 7167-7185, (1997).
- [En β] V. En β , *Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering I. Short-range potential*, Comm. Math. Phys., **61**, 285-291 (1978).
- [EK] P. Erdős, J.F. Koksma, *On the Uniform Distribution modulo 1 of lacunary sequences*, Indag. Math., **Vol. 11**, 79-88 (1949). *On the Uniform Distribution modulo 1 of sequences $f(n, \theta)$* , Indag. Math., **Vol. 11**, 299-302 (1949).
- [EV] V.En β , K. Veselic, *Bound states and propagating states for time-dependent Hamiltonians*, Ann. Inst. H. Poincaré **39**, 159-191 (1986).
- [G] I. Guarneri, *On the dynamical meaning of spectral dimensions*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 68**, n 4, 491-506 (1998).
- [GC] I. Guarneri, G. Casati, *Non Recurrent Behaviour in Quantum Mechanics*, Comm. Math. Phys., **95**, 121-127 (1984).
- [GM] I. Guarneri, G. Mantica, *On the asymptotic properties of Quantum Dynamics in the presence of fractal spectrum*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 61**, n 4, 369-379 (1994).
- [GS-B] I. Guarneri, H. Schulz-Baldes, *Lower bounds on wave packet propagation by packing dimensions of spectral measures*, Math. Phys. Electron., **5**, 1-16 (1999).
- [GT] J.S. Geronimo, A. Teplyaev, *A Difference equation arising from the Trigonometric Moment Problem Having Random Reflection Coefficients - An Operator Theoretic Approach*, J. Func. Anal., **123**, 12-45 (1994).
- [GY] S. Graffi, K. Yajima, *Absolute Continuity of the Floquet Spectrum for a nonlinearly Forced Harmonic Oscillator*, Comm. Math. Phys., **vol. 215**, n 2, 245-250 (2000).
- [Ha] G. Harman, *Metric Number Theory*, Clarendon Press, 1998.
- [He] M. Herman, *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et Moser sur le tore en dimension 2*, Comment. Math. Helv., **58**, 453-502 (1983).
- [Ho1] J. Howland: *Scattering Theory for Hamiltonians Periodic in Time*, Indiana Journal Math., **28**, 471-494 (1979).
- [Ho2] J. Howland, *Floquet operators with singular continuous spectrum, I*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 49**, 309-323 (1989). *Floquet operators with singular continuous spectrum, II*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 49**, 325-334 (1989). *Floquet operators with singular continuous spectrum, III*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 69**, n 2, 265-273 (1998).
- [Ho3] J. Howland, *Stability of quantum oscillators*, J. Phys. A, **25**, 5177-5181 (1992).
- [Ho4] J. Howland, *Quantum Stability*, in Lecture notes in Physics **403**, Baslev éd., 100-122 (1992).
- [Hu] M-J. Huang, *On stability for time-periodic perturbations of harmonic oscillators*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 50**, n 3, 229-238 (1989).
- [HLS] G.A. Hagedorn, M. Loss, J. Slawny, *Nonstochasticity of Time dependent quadratic Hamiltonians and the spectra of canonical transformations*, J. Phys. A, **19**, n 4, 521-531 (1986).
- [Ish] K. Ishii, *Localization of Eigenstates and Transport Phenomena in One-dimensional disordered systems*, Suppl. Prog.Theor. Phys., **53**, 77 (1973).

- [Jo] A. Joye, *Absence of absolutely continuous spectrum of Floquet operators*, J. Stat. Phys., **vol. 75**, 929-952 (1994).
- [JL] H.R. Jauslin, J.L. Lebowitz, *Generalized Floquet operator for quasiperiodically driven quantum systems*, in *Mathematical Physics X, Leipzig, 1991*, 313-316, Springer Verlag, (1992).
- [JLB] H.R. Jauslin, J.L. Lebowitz, P.M. Blekher, *Floquet spectrum for two-level systems in quasi-periodic time dependent fields*, J. Stat. Phys., **68**, n 1-2, 271-310 (1992).
- [Kar] G.Karner, *Twist maps, kicked rotor and quantum chaos in Stochastic processes, physics and geometry: new interplays II, Leipzig, 1999*, 377-383, CMS Conf. Proc., **29**, Amer. Math. Soc., 2000. *On quantum twist maps and spectral properties of Floquet operators*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 68**, n 2, 139-157 (1998).
- [Kato] T. Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [Katz] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover, 1976.
- [King] J. Kingman, *Subadditive ergodic theory*, Ann. Prob., **1**, 883-909, (1973).
- [Ko] J.F. Koksma, *Diophantische Approximationen*, Chelsea Publishing Company, 1936.
- [Kr] S.G. Krein: *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, American Mathematical Society, Vol. 29, Providence, 1971.
- [Kh] A.Y. Khinchin, *Continued Fractions*, Phoenix books, 1964.
- [KK] T. Kato, S.T. Kuroda, *Theory of simple scattering and eigenfunction expansions*, in *Functional analysis and related fields*, F.Browder Ed., Springer Verlag, 1970.
- [KL] A. Kiselev, Y. Last, *Solutions, spectrum and dynamics for Schrödinger operators on infinite domains*, Duke Math. J., **102**, n 1, 125-150 (2000).
- [KN] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley Interscience, 1974.
- [L] Y. Last, *Quantum dynamics and decomposition of singular continuous spectra*, J. Func. Anal., **142**, n 2, 406-445 (1996).
- [MT] R. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.
- [N] G. Nenciu, *Floquet operators without absolutely continuous spectrum*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 59**, 91-97 (1993). *Adiabatic theory: stability of systems with increasing gaps*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **vol. 67**, 411-424 (1997).
- [dO] C. R. de Oliveira, *On kicked systems modulated along the Thue-Morse sequence*, J. Phys. A, **vol. 27**, n 22, 847-851 (1994).
- [dRJLS1] R. del Rio, S. Ya. Jitomirskaya, Y. Last, B. Simon, *What is localization?*, Phys. Rev. Lett., **75**, 117-119 (1995).
- [dRJLS2] R. del Rio, S. Ya. Jitomirskaya, Last Y., B. Simon, *Operators with singular continuous spectrum IV: Hausdorff dimensions, Rank one perturbations and localization*, J. Anal. Math., **69**, 153-200 (1996).
- [Pas] L. Pastur, *Spectral Properties of Disordered Systems in one-body approximations*, Comm. Math. Phys., **75**, 179 (1980).

- [Pi] C.A. Pillet, *Quantum mechanics with Stochastic time dependent potentials*, Comm. Math. Phys., **102**, n 2, 237-254 (1985). *Asymptotic Completeness for a quantum particle in a Markovian short range potential*, **105**, n 2, 259-280, (1986).
- [Rud] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill, 1987.
- [Rue1] D. Ruelle, *A Remark on Bound States in potential scattering theory*, Nuovo Cimento **61 A**, 655-662 (1969).
- [Rue2] D. Ruelle, *Ergodic Theory of Differential Dynamical Systems*, publications IHES, **50**, 27-58 (1979).
- [RS] M. Reed, B. Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 1-2-4, Academic Press, New York, 1975.
- [S1] B. Simon, *Schrödinger Semigroups*, Bulletin of the A.M.S., **vol.7**, n 3, 447-526 (1982).
- [S2] B. Simon, *Spectral Analysis of Rank One Perturbations and Applications*, Vancouver Summer School in Mathematical Physics, 1993.
- [SW] B. Simon, T. Wolff, *Singular continuous spectrum under rank one perturbations and localization for random Hamiltonians*, Comm. Pure Appl. Math., **vol. 39**, 75-90 (1986).
- [Tc1] S. Tcheremchantsev, *Markovian Anderson model: bounds for the rate of propagation*, Comm. Math. Phys., **187**, n 2, 441-469 (1997). *Transport properties of Markovian Anderson model*, Comm. Math. Phys., **196**, n 1, 105-131 (1998).
- [Tc2] S. Tcheremchantsev, *How to prove dynamical localization*, Comm. Math. Phys., **221**, n 1, 27-56 (2001).
- [V] I.M. Vinogradov, *The Method of Trigonometric Sums in Number Theory*, in *Selected Works*, Springer Verlag, 1985. *The Method of Trigonometric Sums in Number Theory*, Nauka, 1980.
- [Wa] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer Verlag, 1982.
- [Wei] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer Verlag, 1980.
- [Ya] K. Yajima : *Scattering Theory for Schrödinger Equations with Potential Periodic in Time*, J. Math. Soc. Japan, **29**, 729-743 (1977).
- [YA] S. Yucel et E.Y. Andrei, Phys. Rev. B **43**, 12029, (1991).