



**HAL**  
open science

# Structures latticielles, correspondances de Galois contraintes et classification symbolique

Florent Adrien Domenach

► **To cite this version:**

Florent Adrien Domenach. Structures latticielles, correspondances de Galois contraintes et classification symbolique. Autre [cs.OH]. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2002. Français. NNT : . tel-00003403

**HAL Id: tel-00003403**

**<https://theses.hal.science/tel-00003403>**

Submitted on 25 Sep 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS I

*Discipline : Informatique*

présentée et soutenue publiquement

par

Florent Adrien DOMENACH

Titre :

Structures latticielles, correspondances de Galois  
contraintes et classification symbolique

**Jury**

M. Jean-Pierre Barthélemy	Professeur	<i>Rapporteur</i>
M. Colin de la Higuera		
M. Yves Lechevallier		
M. Bruno Leclerc	Maître de conférence, HDR	<i>Directeur</i>
M. Bernard Monjardet	Professeur émérite	<i>Directeur</i>
M. Jean-Xavier Rampon	Professeur	<i>Rapporteur</i>
M. Petko Valtchev	Professeur adjoint	<i>Rapporteur</i>
M. Djamel A. Zighed		



# Introduction

Lorsque nous écoutons, regardons, sentons, . . . nos sens engrangent un grand nombre d'informations qui sont transformées en savoir utilisable (en reconnaissant les formes, couleurs, symboles) nous permettant de percevoir et d'agir sur notre environnement quotidien. Toutefois, ce passage de l'information (des informations) au savoir n'est pas quelque chose d'évident. Par exemple, dans le cas de la télévision, de nombreux auteurs (dont [Thi]) ont mis en évidence la difficulté d'interprétation propre aux images. Ainsi, H. Agel (cité par [Thi]) précise que, “du moment qu'il s'agit de donner une signification à des images, de les traiter, la matérialité de l'image s'oppose lourdement, pour une intelligence paresseuse, à ce passage de la “lettre” à “l'esprit”.”

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser plus particulièrement à ce passage de la lettre à l'esprit, de l'information au savoir, du signifiant au signifié selon la terminologie propre à la sémiologie (du grec *semieon* “signe”, et *logos* “discours, savoir”). Ferdinand de Saussure<sup>1</sup> est à l'origine de la différence signifiant / signifié, définissant ainsi le signe comme une entité à deux faces. Le signe a une partie perceptible, le signifiant, réductible à une image acoustique, et une partie imperceptible, le signifié, ce qui permet de le définir valablement comme la perception d'une variation d'énergie qui dénote autre chose que sa propre existence. Cette relation est complexe : c'est une transformation en une grandeur discrète (afin d'être intelligible) d'un continuum à la nature indéfinissable que R. Escarpit [Esc90] a appelé *la pensée*. Ainsi, si on considère le mot “arbre”, le signifiant est le mot lui-même, composé de cinq lettres, alors que le signifié associé est la partie du règne végétal qu'on retrouve sous ce terme.

---

<sup>1</sup> *Cours de linguistique générale*, 1973, Payot (oeuvre posthume).

Cette relation signifiant / signifié n'est pas forcément pertinente, car la notion de signifié n'est pas suffisamment fine. Ainsi, lorsqu'on parle d'"arbre", le signifié associé est tout à la fois un certain nombre d'espèces végétales, répondant à des critères précis, mais aussi, par exemple, le plaisir de faire la sieste sous un tilleul en été ou encore des représentations de classifications hiérarchiques. Afin de distinguer ces deux facettes, Louis Trolle Hjelmlev<sup>2</sup> a proposé de considérer la distinction dénotation / connotation. La dénotation constitue un élément de signification constant, non subjectif, d'une unité lexicale, valant pour l'ensemble des utilisateurs de la langue (un arbre est un végétal ligneux, de taille variable, dont le tronc se garnit de branches à partir d'une certaine hauteur) ; la connotation est la valeur particulière, émotionnelle ou culturelle, que prend un mot, pour un individu ou pour un groupe, et qui vient s'ajouter à la signification propre de ce mot (le plaisir de la sieste). Ainsi, les noms propres ont une dénotation, mais pas de connotation. On recourt à l'opposition dénotation / connotation pour distinguer ce qui constitue le sens fondamental et stable d'un signe (sa dénotation) et ce qui constitue les effets subjectifs qui peuvent naître de son utilisation dans divers contextes (sa ou ses connotations).

Une autre approche propre au domaine linguistique, complémentaire à la précédente, est donnée par Max Wertheimer, qui a introduit la notion de *Gestalt*<sup>3</sup>, configuration identifiable, mais dont la signification (dénotative et connotative) est beaucoup plus riche et plus maniable. La fonction du Gestalt est d'engendrer des relations signifiant - signifié dans des données confuses et indifférenciées. Ainsi, parmi toutes les formes géométriques et les couleurs diverses, on peut reconnaître un arbre, même si la forme de celui-ci est éloignée des expériences antérieures. Une illustration de ce qu'est le Gestalt est le test d'Hermann Rorschach (1921), fréquemment utilisé en psychanalyse, où l'on demande à un sujet de décrire ce qu'il distingue dans une tache d'encre (i.e. les Gestalten qu'il y "projette").

---

<sup>2</sup>*Prolégomènes à une théorie du langage*, 1943.

<sup>3</sup>ou de *pattern* en anglais ; il n'existe pas de terme équivalent en français, à part celui de *patron*, dans le sens patron utilisé en couture. Ce courant est né en Allemagne en 1891 lorsque C. Ehrenfels et E. Husserl ont défini, chacun de leur côté, "les qualités de forme", et "les moments figuraux d'unité". Pour illustrer la qualité de forme, Ehrenfels donne l'exemple de la mélodie, forme que l'on reconnaît, même si elle est transposée dans un autre ton, parce que l'organisation des notes entre elles n'a pas changé.

Lorsqu’il cherche à savoir si le raisonnement sociologique appartient à l’univers des raisonnements scientifiques, Jean-Claude Passeron [Pas91]<sup>4</sup> distingue trois formes de l’énonciation. Il caractérise une langue scientifique par la possibilité de distinguer et d’articuler l’énonciation d’*informations minimales* sur le monde empirique, les *effets de connaissance* que sont susceptibles de produire des opérations effectuées sur ces informations de base, et les *effets d’intelligibilité* que produit la reconstruction systématique des effets de connaissance dans une théorie. Nous laisserons de côté, dans le cadre de cette thèse, les effets d’intelligibilité, afin de nous concentrer sur les effets de connaissance (et donc sur ce qu’est une information minimale). Un exemple simple d’illustration de ce qu’est une information minimale est l’annuaire téléphonique : tout le monde s’accorde pour affirmer que c’est un des livres contenant le plus d’informations. Une information de base est donc un minimum sémantique, vérifiable ou vérifié. Toutefois, comme le montre bien l’exemple de l’annuaire, une information minimale donne peu de renseignements sur le monde considéré. C’est l’articulation de ces informations “brutes” qui va nous donner une connaissance plus poussée, et cette articulation est appelée par J.-C. Passeron un effet de connaissance. Cet effet peut être vu comme une question conduisant à mettre en relation des énoncés descriptifs les uns avec les autres et non plus seulement un énoncé avec la réalité empirique qu’il décrit. Il convient de poser une bonne question, permettant des mises en relations et des catégorisations pertinentes. Ce principe peut même être étendu : l’information que livrent la perception et la pratique quotidiennes du monde ne peut s’accroître sans faire appel à un traitement dont les règles ne sont jamais données par les énoncés qui lui sont soumis.

Lorsqu’on cherche à modéliser, d’un point de vue mathématique, cette différence entre information et savoir (ou, plus précisément, de modéliser ce qu’est un effet de connaissance), il convient, à la suite de Keith Devlin<sup>5</sup>, de faire une distinction nette entre les notions de *donnée (data)*, d’*information* et de *savoir (knowledge)*. Selon Wille [Wil01], cette distinction peut être résumée par les équations :

$$\begin{aligned} \text{Donnée} &= \text{Signe} + \text{Syntaxe}; \\ \text{Information} &= \text{Donnée} + \text{Sens}; \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>On peut voir aussi sur ce sujet, du même auteur, *Les mots de la sociologie*, Nantes, thèse d’Etat, 1980.

<sup>5</sup>*InfoSense - Turning information into Knowledge*, Freeman, New-York, 1999.

Savoir = Information intégrée + Capacité à utiliser l'information. <sup>6</sup>

La création de savoir à partir d'informations peut être vue comme issue de représentations propres de l'information qui rendent la structure logique inhérente à l'information transparente. Ici, le terme logique est pris dans le sens de Charles S. Peirce, pour qui la logique est la science de la pensée, pas seulement de la pensée comme phénomène psychique, mais de la pensée en général, ses lois générales et ses genres.

Que ce soit l'approche sociologique de J.-C. Passeron ou celle plus mathématique de K. Devlin, nous retrouvons comme notion essentielle du traitement de l'information l'exhibition des règles régissant cette information. Le Gestalt de M. Wertheimer participe à la même idée, car sa fonction est d'engendrer des relations signifiant - signifié, et donc de créer une structuration des données. Cette notion de structure logique va être au coeur de cette thèse. J.-C. Passeron décrit un effet de connaissance comme une question permettant une mise en relation des énoncés descriptifs, cette question devant être pertinente afin d'obtenir des effets de connaissance intéressants. Nous touchons ici la principale difficulté liée aux méthodes d'analyse des données : qu'est ce qu'une "bonne" question ? Dans le cas des méthodes dites "expertes", le choix entre diverses questions revient à un spécialiste du domaine, un expert. Notre recherche s'est développée avec, comme objectif principal, la modélisation de méthodes d'analyse des données "automatiques", c'est à dire des systèmes non experts, ne demandant pas la présence d'un spécialiste du domaine étudié, et permettant d'obtenir des effets de connaissance (extraction de connaissances). Cette structuration de l'information est nécessaire afin de la rendre plus aisément accessible. Nous nous sommes toutefois concentrés sur une partie de l'analyse des données, la classification (dont on peut voir dans [Mir96] la variété des approches, des modèles et des méthodes), en laissant de côté pour l'instant de nombreux domaines comme les statistiques, l'analyse multi-dimensionnelle (analyse factorielle), sériation et ordonnancement, . . . Au sein de la classification, nous avons particulièrement étudié la classification hiérarchique, que [Ben67] fait remonter à Linné<sup>7</sup>.

---

<sup>6</sup>Traduction libre de

$$\text{Data} = \text{Signs} + \text{Syntax};$$

$$\text{Information} = \text{Data} + \text{Meaning};$$

$$\text{Knowledge} = \text{Internalized Information} + \text{Ability to utilize the information.}$$

<sup>7</sup>Naturaliste suédois (Rashult, 1707 - Uppsala, 1778), Carl von Linné a établi une méthode de classifi-

En même temps, lorsqu'il s'agit de traiter des données où des objets de nature diverse sont décrits par des variables de type divers, les *correspondances de Galois* se sont imposées comme la formalisation de la vieille idée philosophique de dualité entre *intension* (ensemble des propriétés partagées par des objets) et *extension* (objets ayant des propriétés communes) [Duq99]. C'est aussi une généralisation des échelles de Guttman<sup>8</sup> permettant d'obtenir une structuration des données, et qui a été proposée comme tel, en ce qui concerne l'approche analyse des données, par Barbut [Bar65, BM70]. La correspondance de Galois associée à une relation (d'objets possédant ou non des propriétés, par exemple) permet, par la dualité existant entre l'intension et l'extension, d'obtenir une double structure de treillis (à cause de la dualité) aussi bien sur l'ensemble des objets que sur l'ensemble des propriétés, chaque classe d'objets obtenue étant munie d'un ensemble de propriétés qui lui sont spécifiques. Ce fait a particulièrement été développé dans le cadre de la "Formal Concept Analysis" ([Wil82, GW98, GW99]), et, plus généralement, en classification symbolique ([Bri94, Did88, DVdLH93, DDNC98, Huc99]) ainsi que dans des domaines aussi variés que les bases de données relationnelles ([CB01, DLM92, Plo88]), l'analyse de similitude ([Fla79, FDV79]), la morphologie mathématique ([Kes00]), la reconnaissance de formes ([BMN99, MB99]), les problèmes d'ordonnancement ([BF84, CE01]), l'étude du génome ([Duq90, Duq96b, DCC<sup>+</sup>01]), la structure de fonctions en économie ([Van99]), en psychologie ([SW88]), en marketing ([HS01]), en sociologie ([MD97]), ...

Cette méthode d'analyse des données a toutefois un certain nombre d'inconvénients. C'est une méthode dite exacte - tous les individus sont pris en considération lors de la création du treillis associé - et donc sujette à une croissance potentiellement exponentielle<sup>9</sup>

---

cation des végétaux. C'est dans son *Systema naturae* (cinq parutions de 1735 à 1766) que Linné propose sa classification des trois grands règnes de la nature (minéral, végétal, animal). Pour le règne végétal, il suggère (*Species plantarum*, 1753) une méthode tout à fait nouvelle : les plantes sont désignées par deux noms latins (nom de genre, nom d'espèce), et se répartissent en vingt-quatre classes, elles-mêmes déterminées d'après le nombre et la disposition des pistils et des étamines ; les subdivisions en genres et en espèces sont fondées sur de nombreux traits spécifiques de la fleur, des feuilles, etc.

<sup>8</sup>Psychologue et mathématicien américain (New York, 1916). L'échelle de Guttman est une technique d'analyse hiérarchique, pour laquelle l'acceptation d'une proposition entraîne nécessairement l'acceptation de propositions plus faibles. Sa représentation matricielle peut s'écrire, avec un permutation sur les lignes et sur les colonnes, avec l'ensemble des réponses positives sous forme d'escalier (relation de Ferrers).

<sup>9</sup>Le pire cas, pour lequel nous avons effectivement l'exponentialité, correspond paradoxalement à un

suivant le nombre d'individus. Un autre problème posé est le fait que cette méthode ne prend pas en compte le savoir a priori pouvant exister sur l'ensemble des propriétés, par exemple. Une illustration simple de ce fait pourrait être un ensemble de personnes dont on a mesuré la taille, et donc les propriétés sont  $< 1,5$  m,  $< 1,6$  m, ... On conçoit aisément qu'une personne faisant moins d'un mètre cinquante fasse également moins d'un mètre soixante. Or, lors de la création du treillis de Galois (cf. paragraphe 1.6.1), il n'est pas tenu compte de ce savoir "implicite".

Nous nous sommes intéressés, dans cette thèse, à une modélisation de ce savoir implicite en utilisant la notion de contrainte. En effet, l'exemple précédent peut aussi se traduire par le fait qu'il est impossible de faire moins d'1,5 mètre sans faire moins d'1,6. Nous nous sommes limités, dans le cadre de cette thèse, à l'hypothèse (réaliste) que les contraintes peuvent se formaliser par une structure d'ordre particulière. Les formalisations ordinales liées à la théorie des treillis nous fournissent des outils privilégiés pour faire le lien entre descriptions galosiennes exhaustives et les contraintes imposées par des savoirs implicites. Il convient toutefois de distinguer deux types de contraintes : dans bon nombre de cas, un savoir implicite se traduit par une fermeture particulière, i.e. un treillis donné (c'est le cas de notre exemple sur les tailles). Il existe aussi un autre forme de contrainte : structurer l'information revient aussi à imposer aux classes obtenues d'être d'un type particulier, ce qui pourra correspondre à une classe de treillis fixée (c'est ce qui se passe quand on cherche à obtenir une classification hiérarchique).

Notre travail se divise en quatre parties :

## Chapitre 1

Le premier chapitre est une présentation générale dans laquelle nous rappelons d'abord les notions essentielles de la théorie des ensembles ordonnés (et plus principalement des treillis) qui nous seront utiles dans la suite. Nous reverrons diverses méthodes permettant de condenser l'information donnée par un treillis en une structure plus réduite, notamment en utilisant la notion d'ensemble générateur. Cette préoccupation de réduction de la taille des données (en conservant toute l'information initiale) sera un des thèmes centraux (et

---

des treillis les plus simples, le treillis des parties d'un ensemble dit aussi treillis booléen (cf. exemple 1.9).

conducteurs) tout au long de cette thèse, à côté d'une autre préoccupation, annoncée plus haut, qui est la recherche de structuration des données lorsqu'il existe des contraintes. Ce chapitre de rappel concerne aussi certains types d'applications, les fermetures et les correspondances de Galois (ainsi que les correspondances résiduées / résiduelles, équivalentes aux applications galoisiennes, et leur généralisation faite par Benado), que nous illustrons grâce à une étude en écologie microbienne du sol. Ces types d'applications sont des notions essentielles pour la suite, et nous en trouverons des exemples tout au long des autres chapitres. La notion de fermeture est elle-même équivalente à celle de famille de Moore, également très utilisée dans notre travail.

## Chapitre 2

Une des premières formalisations que nous verrons de la notion de contrainte est due à V. Duquenne [GD86, Duq86, Duq87, Duq91] lorsqu'il a développé la notion d'*implication* (et de système implicatif). Étant donné une fermeture  $\varphi$  sur un ensemble  $S$ , on dit de deux parties  $A$  et  $B$  de  $S$  que  $A$  implique  $B$ , et on note  $A \rightarrow B$ , si  $B \subseteq \varphi(A)$ . En dehors des implications triviales (c'est à dire avec  $B \subseteq A$ ), le treillis de tous les sous-ensembles de  $S$  n'en possède aucune. Une contrainte correspond donc à une (ou plusieurs) implication(s) et à la suppression de certaines parties comme fermés. Lorsqu'on munit l'ensemble de ces implications de règles, on obtient ce qu'on appelle un *système implicatif complet* sur  $\mathcal{P}(S)$ . De tels systèmes sont en correspondance avec les fermetures sur  $S$  (ou, de façon équivalente, avec les familles de Moore). En généralisant un travail antérieur, nous introduisons un nouveau type de relation binaire sur  $\mathcal{P}(S)$ , les *relations d'emboîtement*.

Ces relations d'emboîtement trouvent leur origine dans les travaux d'Adams, plus précisément dans son article de 1972 [Ada72], qui propose une méthode de consensus pour les arbres de classifications (appelés aussi *hiérarchies*). La justification théorique de cette méthode de consensus a été fournie par Adams quelques années plus tard, en 1986 [Ada86]. Pour ce faire, il utilise une formalisation des arbres utilisant un type particulier de relations binaires sur les sous-ensembles, les *relations d'emboîtement*, lui permettant de transformer le consensus sur les arbres en consensus sur les emboîtements. Nous étendons et généralisons ce type de relations binaires, avec comme résultat important qu'elles sont en correspondance bijective avec les fermetures et les systèmes implicatifs complets. Grâce

à cette dernière correspondance, nous avons particularisé une base d'emboîtement par une des relations *flèches* ([Cas98]).

Outre une simplification importante de la preuve du théorème d'Adams mettant en bijection emboîtements et un certain type de fermetures (les hiérarchies vues comme des familles de Moore particulières), cette correspondance (en particulier avec les systèmes implicatifs complets) nous permet de mettre en valeur les ensembles critiques des hiérarchies faibles (qui sont une généralisation des hiérarchies), mais surtout de caractériser la forme générale des bases canoniques des hiérarchies.

Ce chapitre est donc consacré à la caractérisation des classifications hiérarchiques ou faiblement hiérarchiques parmi les familles de Moore. Nous étudions ainsi, non pas des contraintes particulières, mais les propriétés caractérisant les structures qu'on se propose d'obtenir lorsqu'on fait de la classification hiérarchique. Les contraintes ne sont donc pas liées à un treillis particulier, mais à une classe de treillis.

### Chapitre 3

Le chapitre précédent était consacré aux diverses façons de modéliser une fermeture. Dans celui-ci (qui a permis de publier un article, en collaboration avec B. Leclerc, et paru dans *Order* en 2001 [DL01]), nous nous intéressons aux correspondances de Galois entre deux treillis quelconques, dont nous abordons l'étude en tant que correspondances associées, comme il a été fait à l'origine, à des tableaux binaires. Nous montrons que la donnée d'espaces de fermeture spécifiés se traduit par des contraintes sur ces tables. On fait ainsi fonctionner l'idée présente au chapitre précédent de contraintes associées à une fermeture. Nous considérons un tableau binaire quelconque entre deux ensembles  $E$  et  $E'$  (objets / propriétés par exemple) sur lesquels sont données deux fermetures  $\varphi$  et  $\varphi'$  modélisant les différentes contraintes pouvant exister sur ces deux espaces. Ainsi, étant donnés deux espaces de fermeture  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$ , une relation  $R \subseteq E \times E'$  est dite *bifermée* si toute ligne de sa représentation matricielle correspond à un fermé par  $\varphi$ , et toute colonne à un fermé par  $\varphi'$ . Nous établissons alors le résultat majeur de cette partie,

un isomorphisme entre, d'une part, l'ensemble des relations bifermées et, d'autre part, l'ensemble des correspondances de Galois entre les deux treillis de fermés. De plus, les relations bifermées constituent elles-mêmes un espace de fermeture, et on associe donc canoniquement à toute relation un bifermée (appelée sa *bifermeture*). Ceci permet de passer, en travaillant simplement sur les tables binaires, d'une correspondance de Galois donnée à une autre, dont tous les fermés appartiennent à une famille de Moore fixée.

Nous faisons le lien entre ce résultat et divers cas particuliers existant dans la littérature, notamment en montrant qu'il implique aussi bien les propriétés des G-idéaux de Shmueli [Shm74] que le théorème de base de la "Formal Concept Analysis" [GW99]. En fait, il n'est pas limité au cas fini. Toutefois, il est particulièrement intéressant dans ce cas là, pour lequel nous avons pu proposer des applications algorithmiques, permettant le calcul effectif de la bifermeture d'une relation quelconque. Ceci nous permet de trouver la fermeture galoisienne d'une application quelconque entre treillis finis, ou encore de calculer le supremum de deux applications galoisiennes.

## Chapitre 4

Dans ce chapitre (qui a permis de soumettre un article ([DL02]), écrit conjointement avec B. Leclerc, et devant être édité par Springer Verlag), nous reprenons le matériel rassemblé dans les deux chapitres précédents en vue de proposer de nouvelles approches en classification symbolique. Auparavant, nous rappelons différents usages des correspondances de Galois en classification, parmi lesquelles nous avons sélectionné quelques thèmes portant sur la modélisation et l'agrégation de dissimilarités et sur la classification conceptuelle. Nous montrons comment la bifermeture de tableaux binaires fournit un cadre unificateur à ces différents usages. Les résultats du chapitre 3 permettent aussi de présenter la classification symbolique comme recherche de l'ajustement d'une relation bifermée à une relation donnée.

Nous illustrons cette approche grâce à deux exemples, dont celui du chapitre 1, en montrant comment un tableau donné  $R$  peut être transformé en un tableau  $R'$  possédant la propriété suivante : la correspondance de Galois associée à  $R'$  donne un ensemble de classes organisé de façon hiérarchique. On obtient ce résultat de deux façons :

- les classes obtenues appartiennent à une hiérarchie  $\mathcal{H}$  fixée, déterminée par ailleurs en appliquant un algorithme de classification ascendante hiérarchique aux lignes de la relation  $R$  ;
- la hiérarchie obtenue n'est pas fixée a priori mais on utilise les propriétés des familles de Moore hiérarchiques démontrées dans le chapitre 2 afin d'obtenir une correspondance de Galois contrainte assurant une structure arborescente. Cette seconde approche, présentée ici de façon plutôt exploratoire, semble la plus prometteuse.

# Chapitre 1

## Treillis et correspondances de Galois

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Ensembles ordonnés</b>	<b>2</b>
1.1.1	Relations binaires	3
1.1.2	Sous-ensembles ordonnés et principe de dualité	4
1.1.3	Éléments remarquables	7
1.1.4	Intervalles, parties commençantes et finissantes	8
<b>1.2</b>	<b>Structures latticielles</b>	<b>9</b>
1.2.1	Treillis et demi-treillis	10
1.2.2	Treillis complets	13
1.2.3	Différents types de treillis	14
1.2.4	Morphismes de treillis	14
<b>1.3</b>	<b>Représentation des treillis</b>	<b>16</b>
1.3.1	Description d'un treillis	16
1.3.2	Éléments irréductibles	18
1.3.3	Parties génératrices	20
<b>1.4</b>	<b>Fermetures, ouvertures et familles de Moore</b>	<b>22</b>
<b>1.5</b>	<b>Correspondances de Galois</b>	<b>24</b>
1.5.1	Applications galoisiennes	25
1.5.2	Résiduation	29
1.5.3	Correspondances de Benado	32
<b>1.6</b>	<b>Correspondances de Galois associées à une relation</b>	<b>34</b>

1.6.1	Treillis de Galois d'une relation . . . . .	34
1.6.2	Table réduite . . . . .	36
1.6.3	Quelques algorithmes de construction du treillis de Galois . . .	39

Cette thèse est essentiellement une contribution à l'étude de certaines applications (fermetures, correspondances de Galois) entre ensembles ordonnés (plus particulièrement entre treillis), et de leurs usages en analyse des données (classification, data mining, ...). Ce chapitre introductif contient donc les rappels indispensables sur ces notions. Ils se situent dans le cadre de la théorie des treillis, qui prend une place de plus en plus importante depuis le début des années 60 (on pourra consulter comme ouvrages de référence [Bir67, DP90, Grä98, Szà63]); dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à deux types d'applications particulières, les fermetures et les correspondances de Galois [BM70, GW99]. Après avoir fait d'abord quelques rappels sur les structures d'ordres, nous détaillons dans la section 1.2 ces ensembles ordonnés particuliers que sont les treillis, ainsi que certaines de leurs propriétés qui nous seront utiles dans la suite. Ces structures pouvant être de taille potentiellement exponentielle, la section 1.3 est dédiée à diverses méthodes permettant de condenser l'information contenue dans un treillis. La section 1.4 traite des notions équivalentes de fermetures et de familles de Moore, qui sont toutes deux étroitement associées aux treillis. Dans la section 1.5, nous regardons des applications particulières entre ensembles ordonnés, constituant les correspondances de Galois, ainsi que, sous réserve d'une dualité, leurs équivalents qui sont les couples d'applications résiduées / résiduelles. Dans la section 1.6, nous nous sommes intéressés à des correspondances de Galois particulières, associées à une relation binaire, et qui permettent d'obtenir une double structure de treillis grâce à la dualité entre intension et extension.

## 1.1 Ensembles ordonnés

*L'étude empirique de la nature a accumulé une masse si énorme de connaissances positives que la nécessité de les ordonner systématiquement et selon leur enchaînement interne dans chaque domaine de recherche séparé est devenue absolument impérieuse. (...) Mais la science de la nature, ce faisant, se transporte dans le domaine de la théorie et ici les méthodes empiriques échouent, la pensée théorique peut seule servir.*

*F. Engels, Dialectique de la nature.*

Dire que les structures d'ordre sont omniprésentes dans la vie de tous les jours est un euphémisme. Dès qu'on compare la taille de deux personnes, qu'on cherche à déterminer la filiation, qu'on établit un classement, ..., la notion d'ordre est présente. Nous allons, dans ce paragraphe, détailler la vision mathématique de ce qu'est une structure d'ordre, en regardant ce qu'on entend par le terme de relation binaire, avant de mettre en valeur un certain nombre d'éléments particuliers dans la section 1.1.3. Le sous-paragraphe 1.1.4 présente quand à lui quelques définitions d'intervalles et de certains sous-ensembles, notamment les filtres et les idéaux.

### 1.1.1 Relations binaires

Une *relation binaire* sur  $X$  est une partie  $R \subseteq X \times X$  de l'ensemble de tous les couples d'éléments de  $X$ ; on écrira  $xRy$  ou  $(x, y) \in R$  indifféremment pour signifier que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $X$  sont en relation par  $R$ . Une relation binaire  $R$  sur  $X$  est une *relation d'ordre* si elle vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout  $x \in X$ ,  $xRx$  (*réflexivité*);
- pour tous  $x, y \in X$ ,  $xRy$  et  $yRx$  impliquent  $x = y$  (*antisymétrie*);
- pour tous  $x, y, z \in X$ ,  $xRy$  et  $yRz$  impliquent  $xRz$  (*transitivité*).

De plus, l'ordre est dit *total* si, pour tout  $x, y \in X$ ,  $xRy$  ou  $yRx$ .

Un *ensemble ordonné* est un couple  $P = (X, O)$  où  $X$  est un ensemble et  $O$  une relation d'ordre, souvent notée  $\leq$ . Par abus de langage, nous dirons que  $X$  (à la place de  $(X, \leq)$ ) est un ensemble ordonné si la relation d'ordre associée à  $X$  est évidente.

Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $X$ . On dit que  $x$  *couvre*  $y$  ou  $y$  est *couvert par*  $x$  et on note  $y \prec x$  si  $y \leq x$  et, pour tout  $z \in X$  tel que  $y \leq z < x$ , on a  $y = z$ . Lorsque cette relation de couverture existe, un ordre est en fait représentable par celle-ci. La représentation graphique de celle-ci s'appelle le *diagramme (de Hasse)* de l'ordre, les éléments étant représentés par des points  $p_x$  du plan selon deux principes :

- si  $x < y$  alors  $p_x$  est en dessous de  $p_y$ ;
- $p_x$  et  $p_y$  sont liés par un segment si et seulement si  $x \prec y$ .

**Exemple 1.1**  $X = \{a, b, c, d, e\}$ ;  $O = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$ . On représente dans la figure 1.1 cet ensemble ordonné par un graphe du plan (A) dont les points correspondent aux éléments de  $X$  et les arcs fléchés aux couples, les boucles représentant les couples de la forme  $(x, x)$ ; on peut aussi le représenter de façon plus économique, par son diagramme (de Hasse) (B), ou encore par un tableau ((C), (D)).

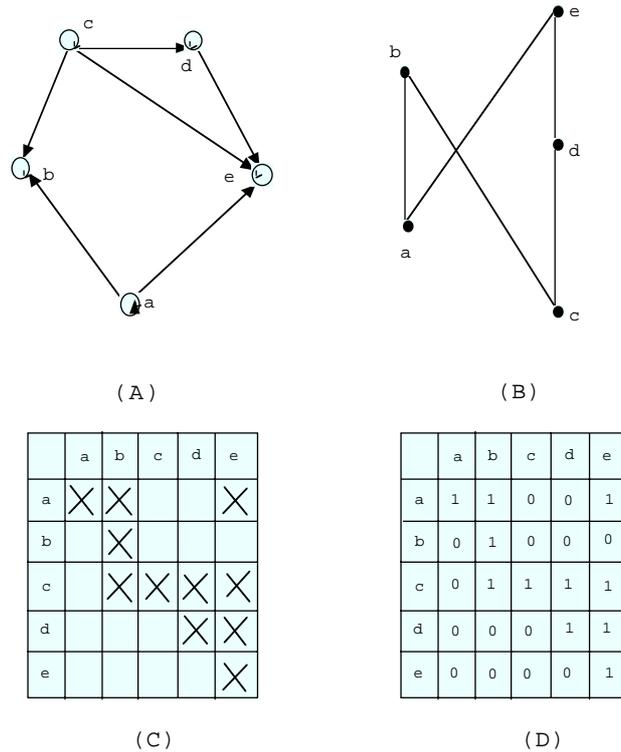


FIG. 1.1: Différentes représentations d'un ensemble ordonné .

**Exemple 1.2** La figure 1.2 donne le diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné des ensembles ordonnés ayant quatre éléments.

### 1.1.2 Sous-ensembles ordonnés et principe de dualité

Soient  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie de  $X$ ; la restriction de l'ordre  $\leq$  à la partie  $A$  est un ordre, noté  $\leq_A$ ; on dit alors que  $(A, \leq_A)$  est un *sous-ensemble ordonné* de  $(X, \leq)$ , souvent noté  $(A, \leq)$ .

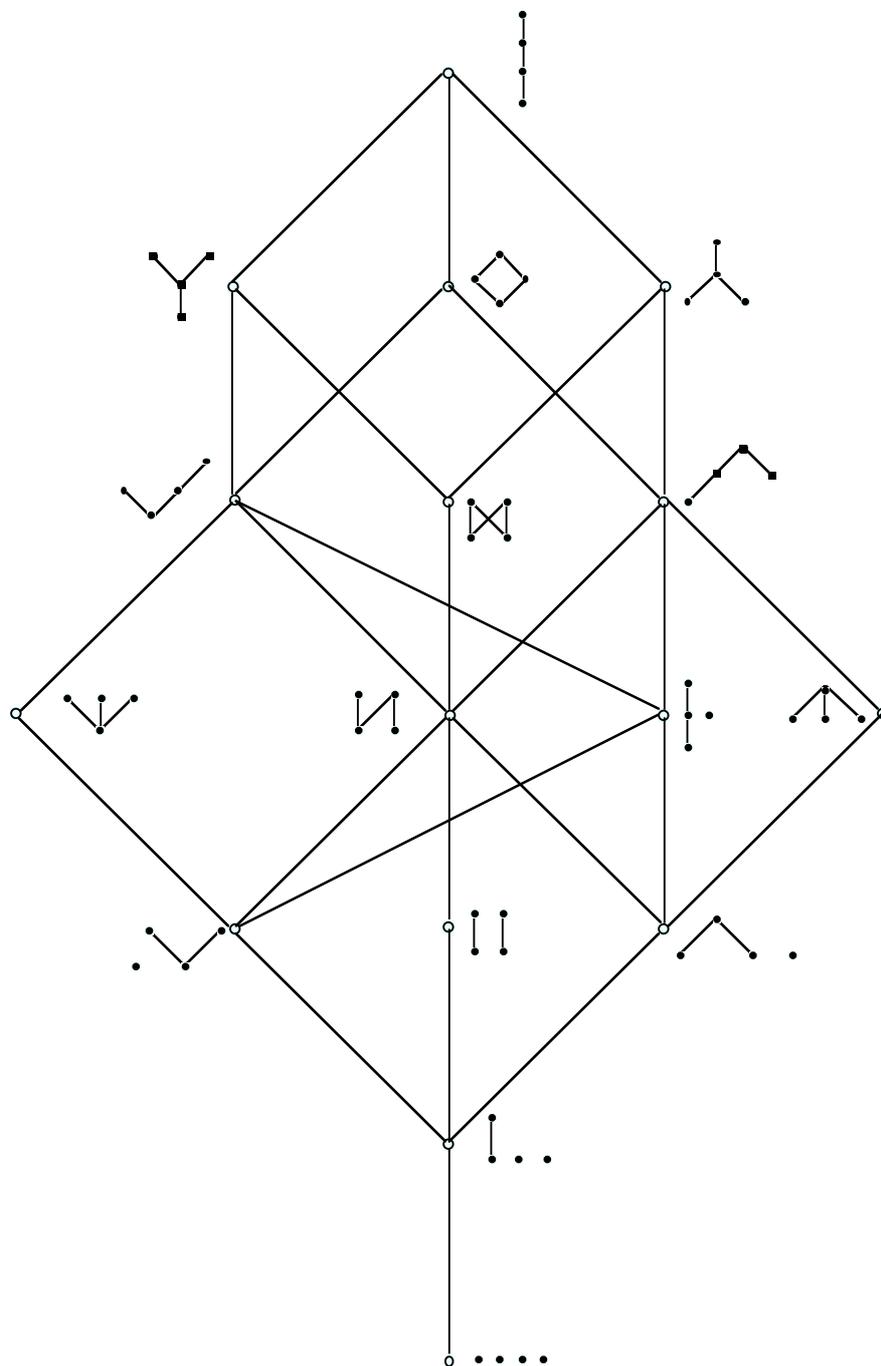


FIG. 1.2: Ensemble ordonné des ensembles ordonnés ayant quatre éléments (Tiré de [Bir95]).

Si on a deux ensembles ordonnés  $(X, \leq)$  et  $(X, \leq')$  définis par deux relations d'ordres  $\leq$  et  $\leq'$  sur le même ensemble  $X$ , l'ordre  $\leq'$  étant inclus dans l'ordre  $\leq$ , on dit que l'ordre  $\leq$  est une *extension* de  $\leq'$ , et une *extension linéaire* si de plus  $\leq$  est un ordre total.

Étant donné un ensemble ordonné  $(X, \leq)$ , on peut créer un nouvel ensemble ordonné  $X^d = (X, \leq^d)$ , le dual de  $X$ , en définissant, pour tout  $x, y \in X$ ,  $x \leq^d y \iff y \leq x$ . On note cette relation duale  $x \geq y$ . Pour un ensemble  $X$  fini, le diagramme de  $X^d$  s'obtient en “retournant” celui de  $X$ . La figure 1.3 donne une illustration simple d'un ensemble ordonné et de son dual.

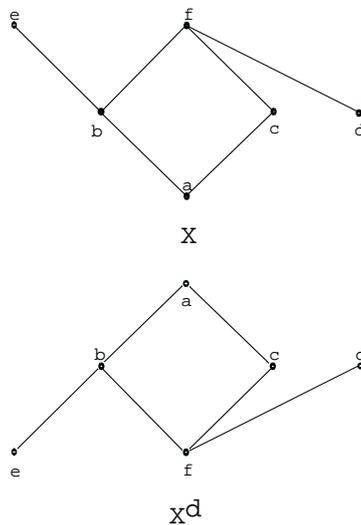


FIG. 1.3: Exemple d'un ensemble ordonné, avec son dual .

Pour chaque propriété vérifiée dans  $X$ , il existe une propriété duale vérifiée dans  $X^d$ . Par exemple, dans la figure 1.3, il existe dans l'ensemble  $X$  un unique élément couvert par exactement un élément, alors que dans  $X^d$ , il existe un unique élément couvrant exactement un élément. En général, étant donné une propriété  $\Phi$  sur les ensembles ordonnés, on peut obtenir la *propriété duale*  $\Phi^d$  en remplaçant chaque occurrence de  $\leq$  par  $\geq$ , et vice versa. Le *principe de dualité*<sup>1</sup>, utile pour simplifier les démonstrations, peut être énoncé comme suit :

<sup>1</sup>On trouve dans [Bir67] une version équivalente de ce principe, énoncé comme suit : “le dual de tout ensemble ordonné est un ensemble ordonné” ; d'après [Szà63], ce principe est due à E. Schröder, *Algebra der Logik*, 1, Teubner-Verlag, Leipzig, 1890, théorème 35 p. 315

**Théorème 1.3 (Principe de dualité)** *Étant donnée une proposition  $\Phi$  vraie dans tout ensemble ordonné, alors la proposition duale  $\Phi^d$  est vraie dans tout ensemble ordonné.*

### 1.1.3 Éléments remarquables

Soient  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné et  $x \in X$  un élément de  $X$ . On définit :

- $x$  est *maximal* dans  $X$  si pour tout  $y \in X, x \leq y$  implique  $x = y$  ;
- $x$  est *minimal* dans  $X$  si pour tout  $y \in X, y \leq x$  implique  $x = y$  ;
- $x$  est le *maximum* de  $X$  si pour tout  $y \in X, y \leq x$  ; l'élément  $x$  est alors unique ;
- $x$  est le *minimum* de  $X$  si pour tout  $y \in X, x \leq y$  ; l'élément  $x$  est alors unique.

De plus, si  $A$  est une partie non vide de  $X$ , un élément  $x$  de  $X$  est un *majorant* (resp. un *minorant*) de  $A$  si pour tout  $a \in A, a \leq x$  (resp.  $x \leq a$ ). On notera  $MajA$  (resp.  $MinA$ ) l'ensemble des majorants (resp. minorants) de  $A$ . On pose que  $Maj\emptyset = Min\emptyset = X$ .

Soit  $x$  un élément de  $X$  vérifiant  $x \in MajA$  et, pour tout  $y \in MajA, x \leq y$  alors  $x$  est appelé *borne supérieure* ou **supremum** de  $A$ . De même, dualement, on dit que  $x'$  est la *borne inférieure* ou **infimum** de  $A$  si  $x' \in MinA$  et si, pour tout  $y \in MinA, y \leq x'$ . On note

$$x = \bigvee A \text{ et } x' = \bigwedge A$$

Ainsi, avec ces notations, si  $x \in X$  est le maximum (resp. minimum) de  $X$  alors  $x = \bigvee X$  (resp.  $x = \bigwedge X$ ). De plus, si  $X = \{x, y\}$ , on note  $x \vee y$  (resp.  $x \wedge y$ ) le supremum (l'infimum) de  $X$  s'il existe. Inversement, l'ordre  $\leq$  peut s'exprimer en termes de supremum et d'infimum (cf. remarque 1.13 plus loin) car, pour  $x, y \in X$ , on a  $x \leq y \iff x \vee y = y \iff x \wedge y = x$ .

**Remarque 1.4** Dans un ensemble ordonné  $X$  quelconque, le supremum  $x \vee y$  de deux éléments  $x$  et  $y$  de  $X$  peut ne pas exister pour deux raisons :

- $x$  et  $y$  n'ont pas de majorant (figure 1.4 (a)) ;
- $x$  et  $y$  n'ont pas de plus petit majorant. Par exemple, dans la figure 1.4 (b),  $Maj(\{x, y\}) = \{z, t\}$  et  $z$  et  $t$  sont incomparables donc  $x \vee y$  n'existe pas.

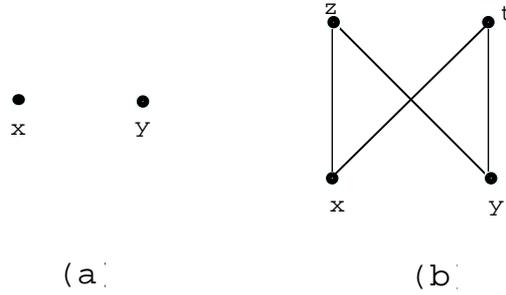


FIG. 1.4: Exemple d'ensembles ordonnés pour lesquels  $x \vee y$  n'existe pas.

Une partie  $A$  de  $X$  est *bornée* si elle est bornée inférieurement et supérieurement. De plus, il résulte des définitions précédentes que si  $X$  admet un maximum  $1_X$  (resp. un minimum  $0_X$ ), on a  $\bigvee X = \bigwedge \emptyset = 1_X$  (resp.  $\bigwedge X = \bigvee \emptyset = 0_X$ ).

#### 1.1.4 Intervalles, parties commençantes et finissantes

Soit  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné, et  $x, y \in X$ . On définit plusieurs parties de  $X$  par :

$$\begin{aligned} \uparrow x = [x] &= \{z \in X : x \leq z\} \quad \text{ensemble des majorants de } x ; \\ \downarrow x = (x] &= \{z \in X : z \leq x\} \quad \text{ensemble des minorants de } x ; \\ [x, y] &= \{z \in X : x \leq z \leq y\} = (\uparrow x) \cap (\downarrow y). \end{aligned}$$

La partie  $\uparrow x$  (resp.  $\downarrow x$ ) est appelée *section finissante* ou **filtre principal** (resp. *section commençante* ou **idéal principal**) de base  $x$  de  $X$ . La partie  $[x, y]$  est *l'intervalle* entre  $x$  et  $y$ , qui n'est non vide que pour  $x \leq y$ .

Soit  $A$  une partie de  $X$  :

- $A$  est une *partie commençante* si, pour tous  $x \in X, a \in A, x \leq a$  implique  $x \in A$  ;
- $A$  est une *partie finissante* si, pour tous  $x \in X, a \in A, a \leq x$  implique  $x \in A$  ;

On note  $\mathcal{C}(X)$  (resp.  $\mathcal{F}(X)$ ) l'ensemble des parties commençantes (resp. finissantes) de  $X$ . Pour tout  $x \in X$ , on a  $\downarrow x \in \mathcal{C}(X)$  et  $\uparrow x \in \mathcal{F}(X)$ . Une section commençante (resp. finissante) est une partie commençante (resp. finissante) ayant un maximum (resp. minimum) appelé *base* de  $A$ .

On a les propriétés élémentaires suivantes :

**Proposition 1.5** *Soit  $A$  une partie de  $X$ . Si  $A \in \mathcal{C}(X)$  alors  $P \setminus A \in \mathcal{F}(X)$  et, dualement,  $A \in \mathcal{F}(X)$  implique  $P \setminus A \in \mathcal{C}(X)$ .*

**Proposition 1.6** *Les ensembles  $\mathcal{C}(X)$  et  $\mathcal{F}(X)$  sont stables pour l'union et l'intersection ensemblistes.*

De plus, pour toute partie  $A$  non vide de  $X$  telle que  $\bigvee A$  et  $\bigwedge A$  existent, on a :

**Proposition 1.7**  $\downarrow (\bigwedge A) = \bigcap \{\downarrow a : a \in A\}$  et, dualement,  $\uparrow (\bigvee A) = \bigcap \{\uparrow a : a \in A\}$ .

**Proposition 1.8** *Tout élément  $A$  de  $\mathcal{C}(X)$  est l'union de sections commençantes, i.e.  $A = \bigcup \{\downarrow a : a \in A\}$ .*

## 1.2 Structures latticielles

*Il me semble par contre que les auteurs auraient pu sans inconvénient omettre le chapitre sur les lattices, auxquels toute une école américaine voue une prédilection persistante, malgré le peu d'intérêt que présente cette théorie dans les autres branches des mathématiques.*

*Dieudonné in Mac Lane et Birkhoff, cité par [Duq99]*

Issue des travaux en logique des années 1850 de Boole<sup>2</sup> et de de Morgan<sup>3</sup>, la théorie des treillis a longtemps été négligée, avant de prendre son essor à partir des années 30 grâce à des auteurs comme Öre, Von Neumann, Birkhoff, . . . , la transformant en branche fertile de l'algèbre. C'est à cette époque qu'on s'aperçoit que la structure de treillis se retrouve dans de nombreux domaines mathématiques (algèbre, géométrie, combinatoire, logique, analyse fonctionnelle . . . ) mais c'est à partir des années 60 que l'aspect combinatoire des treillis va se développer, en liaison avec la naissance de l'informatique et donc l'accroissement des besoins en algorithmie et combinatoire.

---

<sup>2</sup>*Mathematical Analysis of logic*, cité par [Bir95].

<sup>3</sup>*Formal Logic*, 1847

Après avoir défini ce que sont les treillis et les demi-treillis, d'abord comme des structures d'ordre particulières, et ensuite de façon algébrique, nous nous concentrerons dans le paragraphe 1.2.2 sur une classe particulière de treillis que nous utiliserons continuellement dans la suite, les treillis complets, avant de rappeler brièvement, dans la section 1.2.3, quelques autres types, les treillis distributifs ou modulaires. La section 1.2.4 donne enfin quelques définitions de morphismes de treillis.

### 1.2.1 Treillis et demi-treillis

Un ensemble ordonné  $T$  est un *inf-demi-treillis* si tout couple  $x, y$  d'éléments de  $T$  admet un infimum  $x \wedge y$ ; c'est un *sup-demi-treillis* si tout couple admet un supremum  $x \vee y$ ; c'est un **treillis** si tout couple admet à la fois un infimum et un supremum, donc s'il est en même temps un inf et un sup-demi-treillis. On appelle *sous-treillis* de  $T$  toute partie  $Q$  non vide de  $T$  telle que pour tous  $a, b \in Q$ ,  $a \vee b$  et  $a \wedge b$  appartiennent à  $Q$ .

**Exemple 1.9** L'ensemble ordonné  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$  des parties d'un ensemble  $E$ , muni de l'inclusion, est un treillis (appelé *treillis booléen*) avec, pour tout  $A, B \subseteq E$ ,  $A \vee B = A \cup B$  et  $A \wedge B = A \cap B$ . Une partie  $X$  de  $\mathcal{P}(E)$  est finissante si, pour tous  $A \subseteq E$ ,  $B \in X$ ,  $B \subseteq A$  implique  $A \in X$ , et, inversement, commençante si pour tous  $A \subseteq E$ ,  $B \in X$ ,  $A \subseteq B$  implique  $A \in X$ . L'ensemble  $(\mathcal{F}(\mathcal{P}(E)), \subseteq)$  des parties finissantes et l'ensemble  $(\mathcal{C}(\mathcal{P}(E)), \subseteq)$  des parties commençantes sont des sous-treillis de  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ .

**Exemple 1.10** Tout ensemble totalement ordonné (par exemple  $\mathbb{R}$ ) est un treillis, avec le minimum et le maximum comme infimum et supremum.

**Exemple 1.11** Une partition  $\pi = (C_1, \dots, C_p)$  de l'ensemble  $E$  est un ensemble de  $E$  (classes) deux à deux disjointes et d'union  $E$ . Muni de la relation d'ordre  $\pi \leq \pi'$  si et seulement si toute classe de  $\pi$  est incluse dans une classe de  $\pi'$ , l'ensemble  $\Pi_E$  des partitions de  $E$  est un treillis. La figure 1.5 montre le treillis des partitions d'un ensemble à 4 éléments.

**Exemple 1.12** Soit  $X$  un ensemble de  $n$  alternatives, et  $P$  un ordre strict sur  $X$ , c'est à dire vérifiant les propriétés d'antiréflexivité (pour tout  $x \in X$ ,  $(x, x) \notin P$ ), d'asymétrie

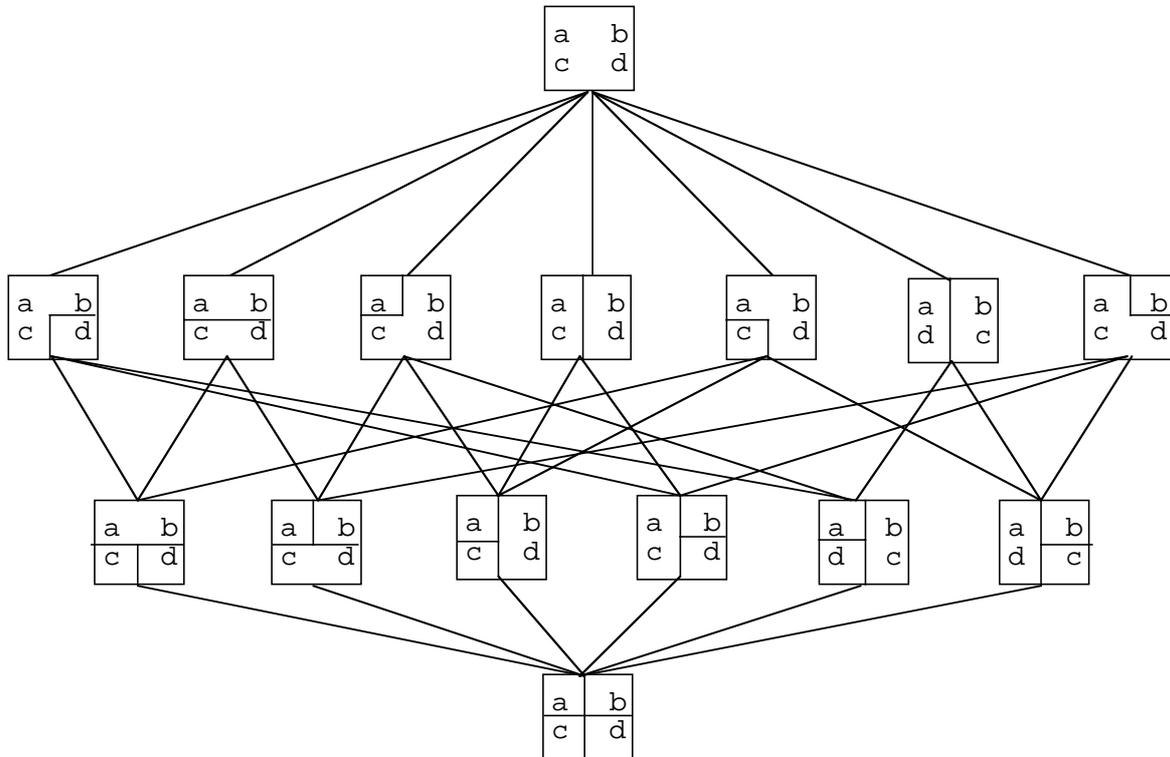


FIG. 1.5: Treillis des partitions d'un ensemble à 4 éléments.

(pour tous  $x, y \in X$ ,  $(x, y) \in P \Rightarrow (y, x) \notin P$ ) et de transitivité. On note  $\mathcal{O}_X$  l'ensemble des ordres stricts sur  $X$ ; c'est un inf-demi-treillis (car l'intersection de deux ordres est un ordre) dans lequel chaque ordre total est maximal : ce n'est donc pas un treillis. Quand il existe, le supremum  $P \vee P'$  est la fermeture transitive de la relation binaire  $P \cup P'$ .

**Remarque 1.13** Soit  $X$  un ensemble ordonné et  $x, y \in X$ . Si  $x \leq y$  alors  $\mathcal{F}(\{x, y\}) = \uparrow y$  et  $\mathcal{C}(\{x, y\}) = \downarrow x$ . Puisque le plus petit élément de  $\uparrow y$  est  $y$ , et le plus grand de  $\downarrow x$  est  $x$ , on a<sup>4</sup>  $x \vee y = y$  et  $x \wedge y = x$  quand  $x \leq y$ .

Il existe une définition équivalente de la structure de treillis :

**Proposition 1.14** *Un ensemble ordonné  $(T, \leq)$  est un treillis si et seulement si  $\vee H$  et  $\wedge H$  existent, pour tout sous-ensemble fini non vide  $H$  de  $T$ .*

<sup>4</sup>Une première démonstration de ce résultat est due à E. V. Huntington, Sets of independent postulates for the algebra of logic, *Trans. Amer. Math. Soc* 5, 1904, p.294, dans le cadre d'une définition algébrique des treillis (cf. proposition 1.15) [d'après [Szà63]].

**Preuve :** Il suffit de montrer que la première définition implique la deuxième. Soit  $(T, \leq)$  satisfaisant la première définition, et  $H \subseteq L$  un sous-ensemble fini non vide. Si  $H = \{a\}$ , alors  $\bigvee H = \bigwedge H = a$  grâce à la réflexivité de  $\leq$ . Soit  $H = \{a, b, c\}$ . Pour montrer que  $\bigwedge H$  existe, posons  $d = a \wedge b$  et  $e = c \wedge d$ . montrons que  $e = \bigwedge H$ . On a  $a \geq d, b \geq d, c \geq e$  et  $d \geq e$ , donc, par transitivité,  $x \geq e$  pour tout  $x \in H$ . Si  $f \in \text{Min}H$ , alors  $a \geq f, b \geq f$  et donc  $d \geq f$ . De plus,  $c \geq f$  d'où  $e \geq f$ . On a bien prouvé que  $e = \bigwedge H$ . La démonstration serait identique pour un nombre quelconque d'éléments et pour montrer que  $\bigvee H$  existe (principe de dualité).  $\square$

Il existe aussi une définition, algébrique<sup>5</sup>, équivalente pour les treillis :

**Proposition 1.15** *Un treillis est un ensemble muni de deux opérateurs binaires notés  $\vee$  et  $\wedge$  et vérifiant les axiomes suivants<sup>6</sup> :*

$(T1) \quad x \vee x = x$	$(T'1) \quad x \wedge x = x$ <i>Idempotence</i>
$(T2) \quad x \vee y = y \vee x$	$(T'2) \quad x \wedge y = y \wedge x$ <i>Commutativité</i>
$(T3) \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(T'3) \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ <i>Associativité</i>
$(T4) \quad x \wedge (x \vee y) = x$	$(T'4) \quad x \vee (x \wedge y) = x$ <i>Absorption</i>

**Preuve :** On trouvera une démonstration de l'équivalence entre cette définition et les définitions précédentes dans [BM70].  $\square$

**Exemple 1.16** Dans la figure 1.6 sont représentés tous les treillis (à un isomorphisme près) ayant moins de 6 éléments.

<sup>5</sup>La définition des treillis comme classe séparée d'algèbres est due à E. Schröder, *Algebra der Logik*, 1, Teubner-Verlag, Leipzig, 1890. Le système d'axiomes suivant est due à R. Dedekind, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler, *Gesammelte Werke* 2, 103-148 [cité par [Szà63]].

<sup>6</sup>En fait, l'idempotence peut être déduite des lois d'absorption : en effet, par (T'4), pour toute paire d'éléments  $x, z \in T$ ,  $x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge z))$ , or, en appliquant (T4) à  $y = x \wedge z$ , on a  $x \wedge (x \vee (x \wedge z)) = x$ . L'autre loi d'idempotence s'obtient de façon duale. Ces lois d'idempotence sont toutefois nécessaires si on définit d'abord, de façon algébrique, un sup-demi-treillis (par (T1), (T2) et (T3)) et un inf-demi-treillis (par (T'1), (T'2) et (T'3)).

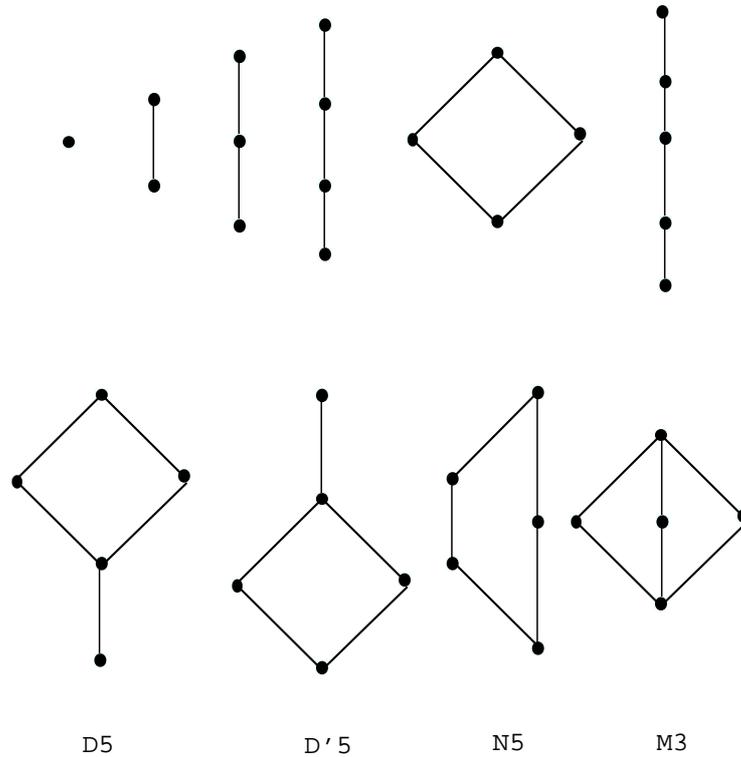


FIG. 1.6: Représentation des treillis ayant moins de 6 éléments.

### 1.2.2 Treillis complets

Un inf-demi-treillis (resp. sup-demi-treillis)  $T$  est dit *complet* si, pour toute partie non vide de  $X$ , l'infimum  $\bigwedge X$  (resp. le supremum  $\bigvee X$ ) existe. Un treillis est dit complet s'il est à la fois un inf-demi-treillis complet et un sup-demi-treillis complet.

**Proposition 1.17** *Tout treillis fini est complet.*

**Preuve :** Immédiate grâce à la proposition 1.14.

□

**Exemple 1.18** Les ensembles  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}$ , munis de l'ordre usuel, sont des treillis non complets. On peut rendre  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}$  complets en leur ajoutant  $+\infty$  et  $-\infty$ . De plus, si  $-\infty < x < y < +\infty$ , l'intervalle  $[x, y]$  dans  $\mathbb{R}$  est un treillis complet. Dans  $\mathbb{Q}$ , ce n'est pas l'absence d'éléments supérieurs ou inférieurs qui pose problème ; par exemple, l'ensemble  $\{s \in \mathbb{Q} : s^2 < 2\}$  possède des majorants mais pas de supremum.

**Théorème 1.19** *Dans un inf-demi-treillis complet, toute partie majorée possède un supremum. Dualement, dans un sup-demi-treillis complet, toute partie minorée possède un infimum.*

**Preuve :** Soient  $T$  un inf-demi-treillis complet et une partie  $A$  de  $T$  telle que  $MajA \neq \emptyset$ . Comme tout élément de  $A$  est un minorant de  $MajA$ , on a  $\bigwedge MajA \in MajA$ , et donc  $\bigwedge MajA = \bigvee A$ . Donc toute partie majorée a un supremum. □

**Corollaire 1.20** *Un inf-demi-treillis complet possédant un maximum est un treillis complet. Dualement, un sup-demi-treillis complet possédant un minimum est un treillis complet.*

### 1.2.3 Différents types de treillis

Un treillis  $(T, \leq)$  est *modulaire*, si pour tous  $x, y, z \in T$  tels que  $x \leq z$ , on a  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ .

Il existe une autre classe importante de treillis, à laquelle appartiennent, entres autres, les ordres totaux, les produits d'ordres totaux, ... : ce sont les treillis distributifs. Un treillis est *distributif* si et seulement si l'une des deux égalités suivantes est vérifiée :

- Pour tous  $x, y, z \in T$ ,  $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$  ;
- Pour tous  $x, y, z \in T$ ,  $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ .

**Remarque 1.21** Tout treillis distributif est modulaire.

Un treillis est *booléen*, s'il est borné, distributif et si tout élément  $x \in T$  est tel qu'il existe  $x' \in T$  vérifiant  $x \vee x' = 1_T$  et  $x \wedge x' = 0_T$  ( $x'$  est le *complémenté* de  $x$ ).

### 1.2.4 Morphismes de treillis

*La vie est essentiellement monotone.*

*Paul Valéry*

Soient  $E$  un ensemble,  $T$  un treillis. On considère  $T^E$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $T$ . On définit une relation d'ordre  $\leq$  dans  $T^E$ , l'ordre usuel des applications, en posant, pour  $f, g \in T^E$ ,  $f \leq g \iff f(x) \leq_T g(x)$  pour tout  $x \in E$ . L'ensemble  $(T^E, \leq)$

possède donc une structure de treillis, le supremum et l'infimum de deux applications  $f$  et  $g$  étant définis par : pour tout  $x \in T$ ,

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee_T g(x)$$

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge_T g(x)$$

Si on considère maintenant une application  $f$  entre deux treillis  $T$  et  $T'$ , on dit que  $f$  est, pour tous  $x, y \in T, K \subseteq T$  :

*isotone* si  $x \leq y$  implique  $f(x) \leq f(y)$  ;

*antitone* si  $x \leq y$  implique  $f(y) \leq f(x)$  ;

un  $\vee$ -*morphisme* si  $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$  ;

un  $\wedge$ -*morphisme* si  $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$  ;

un  $\vee$ -*morphisme complet*<sup>7</sup> si  $f(\bigvee K) = \bigvee_{k \in K} f(k)$  ;

un  $\wedge$ -*morphisme complet* si  $f(\bigwedge K) = \bigwedge_{k \in K} f(k)$  ;

un *morphisme* (de treillis) si  $f$  est un  $\vee$ -morphisme et un  $\wedge$ -morphisme ;

un *isomorphisme* (de treillis) si  $f$  est un morphisme de treillis bijectif.

La proposition suivante donne diverses caractérisations de ces propriétés dont on pourra trouver une preuve dans [DP90].

**Proposition 1.22** *Soient  $T$  et  $T'$  deux treillis et  $f : T \rightarrow T'$  une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $f$  est isotone ;
2. Pour tous  $a, b \in T, f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$  ;
3. Pour tous  $a, b \in T, f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$  ;

*En particulier, si  $f$  est un morphisme de treillis alors  $f$  est isotone.*

De plus, on remarque trivialement que, si une application  $f$  est isotone, alors, en notant par  $f^{-1}(B) = \{x \in T : f(x) \in B\}$  l'image réciproque d'une partie  $B \subseteq T'$ ,  $f^{-1}(\cdot)$  est une partie commençante de  $T$ .

---

<sup>7</sup>Si  $f$  est un  $\vee$ -morphisme complet, cela implique que  $f(0_T) = 0_{T'}$  car  $f(\bigvee \emptyset) = f(0_T) = \bigvee \emptyset = 0_{T'}$ .  
Dualement, dans le cas d'un  $\wedge$ -morphisme complet, on a  $f(1_T) = 1_{T'}$ .

## 1.3 Représentation des treillis

*Sous le nom de culture, il ne s'agit plus pour eux de faire reculer  
le préjugé et l'ignorance, mais d'exprimer dans sa singularité  
irréductible, l'âme unique dont ils sont les gardiens.*

*Alain Finkielkraut*

Nous allons maintenant énumérer diverses méthodes de représentation des treillis, à savoir différentes façons de réduire et de condenser la structure de treillis en un ensemble de taille réduite. A la suite de quoi il est légitime de se demander s'il existe des représentations minimales, i.e. des ensembles conservant toute l'information du treillis, et donc générant celui-ci, et ne pouvant être obtenu par un autre ensemble plus réduit. Ce problème de recherche de représentation minimale des treillis se pose particulièrement dans différents domaines informatiques (classification conceptuelle [Did88], apprentissage [GMA91, LS98], traitement d'image [Kes00], ...) où leur taille potentiellement exponentielle devient problématique.

Nous verrons tout d'abord de quelle manière un treillis peut être décrit grâce aux opérations d'infimum et de supremum, avant de mettre en avant des éléments particuliers du treillis, les éléments irréductibles. La section 1.3.2 montre ainsi que ces éléments ne peuvent être obtenus en combinant d'autres éléments avec les opérations infimum ou supremum (suivant s'il s'agit d'un inf- ou d'un sup-irréductible). L'ensemble de ces éléments forme le "noyau" de parties dites génératrices, parties qui permettent d'engendrer tous les éléments du treillis, et dont l'étude est le sujet du paragraphe 1.3.3.

### 1.3.1 Description d'un treillis

Il existe plusieurs représentations possibles pour un treillis. Par exemple, en suivant la terminologie propre à la théorie des graphes, un treillis est équivalent à la donnée de l'ensemble de ses sommets et de la relation d'ordre associée. Ainsi, nous pourrions avoir, pour le treillis  $M3$  (cf. figure 1.6) :

$$T = \{0, a, b, c, 1\}$$

et la relation d'ordre associée :

$$\{(0, 0), (0, a), (0, b), (0, c), (0, 1), (a, a), (a, 1), (b, b), (b, 1), (c, c), (c, 1), (1, 1)\}$$

Toutefois, cette description peut être réduite, car nous savons que tous les couples de la forme  $(x, x)$  seront présents. De plus, sachant que toute relation d'ordre satisfait la propriété de transitivité, elle peut être décrite, de façon plus économique, par :

$$T = \{0, a, b, c, 1\}$$

et la relation de couverture associée :

$$\{(0, a), (0, b), (0, c), (a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$$

Une autre manière de représenter un treillis, issue de la définition algébrique des treillis (proposition 1.15), est d'utiliser deux tables, appelées  $\wedge$ -table et  $\vee$ -table. Ces tables décrivent les deux opérateurs binaires  $\wedge$  et  $\vee$ . Pour l'exemple précédent, nous avons la table 1.1.

$\wedge$	0	$a$	$b$	$c$	1	$\vee$	0	$a$	$b$	$c$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	$a$	$b$	$c$	1
$a$	0	$a$	0	0	$a$	$a$	$a$	$a$	1	1	1
$b$	0	0	$b$	0	$b$	$b$	$b$	1	$b$	1	1
$c$	0	0	0	$c$	$c$	$c$	$c$	1	1	$c$	1
1	0	$a$	$b$	$c$	1	1	1	1	1	1	1

TAB. 1.1:  $\wedge$ -table et  $\vee$ -table de  $M3$ .

Ces deux tables peuvent être condensées en une table unique, la  $\wedge\vee$ -table, en remarquant que ces deux opérateurs sont idempotents et commutatifs. De plus, les lignes concernant les éléments 0 et 1 sont triviales. D'où la table 1.2.

$\vee \setminus \wedge$	$a$	$b$	$c$
$a$		0	0
$b$	1		0
$c$	1	1	

TAB. 1.2:  $\wedge\vee$ -table de  $M3$ .

### 1.3.2 Éléments irréductibles

Tout élément  $x$  d'un treillis peut être représenté sous la forme  $x = a \vee b$ , au pire en choisissant  $a$  égal à  $x$  et  $b \leq x$ . Toutefois, une décomposition avec  $a$  ou  $b$  égal à  $x$  ne donne aucune information nouvelle sur  $x$ ; les seules représentations de la forme  $x = a \vee b$  avec  $a, b < x$  sont intéressantes.

Ainsi, un élément  $x \in T$  est dit *sup-réductible*<sup>8</sup> s'il existe dans  $T$  des éléments  $x_1$  et  $x_2$  tels que :

$$x = x_1 \vee x_2 \text{ avec } x_1 < x \text{ et } x_2 < x$$

On pose que  $0_T$  est un élément sup-réductible. Un élément ne possédant pas de décomposition de cette forme est dit *sup-irréductible*. On note  $J_T$  (ou  $J$ ) l'ensemble des éléments sup-irréductibles du treillis  $T$ .

Dualement, un élément  $x \in T$  est dit *inf-irréductible* s'il n'est pas infimum d'une partie finie de  $T$  ne le contenant pas (on note  $M_T$  (ou  $M^9$ ) l'ensemble des éléments inf-irréductibles de  $T$ ) et inf-réductible sinon. Toutes les propositions suivantes, établies dans le cas des sup-irréductibles, peuvent aussi être dualisées au cas des inf-irréductibles.

**Remarque 1.23** Il peut arriver que tout élément d'un treillis soit inf-réductible ou sup-réductible. Par exemple, soit  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs, et définissons sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  les opérations supremum et infimum suivantes : pour tous  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ ,

$$(x_1, x_2) \vee (y_1, y_2) = (\max(x_1, y_1), \max(x_2, y_2))$$

$$(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2))$$

Muni de ces deux opérations,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est (trivialement) un treillis. Soit  $(a_1, a_2)$  un élément de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Il peut s'écrire

$$(a_1, a_2) = (a_1, p_2) \vee (p_1, a_2) \text{ avec } p_1 < a_1 \text{ et } p_2 < a_2$$

<sup>8</sup>Certains auteurs font parfois la distinction entre un élément sup-réductible (supremum d'une partie finie ne le contenant pas) et complètement sup-réductible (supremum d'une partie ne le contenant pas).

<sup>9</sup>Ces notations sont issues de la terminologie anglo-saxonne, où  $J$  est pour *join* (supremum), et  $M$  pour *meet* (infimum).

$$(a_1, a_2) = (a_1, q_2) \wedge (q_1, a_2) \text{ avec } q_1 > a_1 \text{ et } q_2 > a_2$$

Tout élément de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est donc sup et inf-réductible.

**Proposition 1.24** *Soit  $T$  un treillis fini. Un élément  $j \in T$  est sup-irréductible si et seulement si  $j$  couvre un et un seul élément.*

De même, un élément  $m \in T$ , avec  $T$  treillis fini, est un inf-irréductible si et seulement s'il admet une unique couverture supérieure dans  $T$ . On en déduit que, dans un treillis fini, on a toujours des éléments irréductibles, par exemple les éléments couvrant le minimum. Les résultats suivants montrent l'importance des éléments irréductibles dans un treillis fini, et on peut énoncer une première proposition portant sur la représentation de ceux-ci (on trouvera une démonstration dans [Szà63], par exemple).

**Proposition 1.25** *Dans un treillis fini<sup>10</sup>  $T$ , chaque élément peut être représenté comme supremum d'un nombre fini d'éléments sup-irréductibles.*

Pour tout ensemble ordonné  $(E, \leq)$ , on note, pour toute partie  $A \subseteq E$  et tout élément  $x \in E$ ,  $A_{\leq x}$  l'ensemble des éléments de  $A$  inférieurs ou égaux à  $x$ , i.e.  $A_{\leq x} = \{a \in A : a \leq x\}$  et, dualement,  $A_{\geq x} = \{a \in A : a \geq x\}$ . Dans le cadre des treillis, on notera  $J_{\leq x}$  l'ensemble des éléments sup-irréductibles inférieurs ou égaux à  $x$ .

Il résulte de la proposition 1.25 qu'on peut écrire, dans le cas d'un treillis fini  $T$  :

$$x = \bigvee J_{\leq x} = \bigvee \{j \in J_T : j \leq x\}$$

ou, dualement, en notant  $M_{\geq x}$  l'ensemble des éléments inf-irréductibles supérieurs ou égaux à  $x$ ,

$$x = \bigwedge M_{\geq x} = \bigwedge \{m \in M_T : m \geq x\}$$

---

<sup>10</sup>Dans [Szà63], le treillis n'est pas forcément fini, mais satisfait la "condition de chaîne descendante", i.e. pour toute suite infinie  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  d'éléments de  $T$  tels que  $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$ , il existe un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $x_p = x_{p+1}$ .

**Proposition 1.26** Soit  $T$  un inf-demi-treillis fini; pour tous  $x, y \in T$ , on a  $J_{\leq x \wedge y} = J_{\leq x} \cap J_{\leq y}$ .

**Preuve :** Soit  $j \in J$ . On a  $j \in J_{\leq x \wedge y} \iff j \leq x \wedge y \iff j \leq x$  et  $j \leq y \iff j \in J_{\leq x} \cap J_{\leq y}$ .

□

**Remarque 1.27** La propriété duale  $J_{\leq x} \cup J_{\leq y} = J_{\leq x \vee y}$  n'est pas vraie en général. Par exemple, dans le treillis  $M3$  (cf. figure 1.6),  $J_{\leq a} = \{a\}$ ;  $J_{\leq b} = \{b\}$  et  $J_{\leq a \vee b} = \{a, b, c\}$ .

La proposition suivante donne des caractérisations des treillis distributifs qui nous serons utiles dans la suite. On pourra trouver une preuve de cette proposition dans [Grä98].

**Proposition 1.28** Un treillis fini  $T$  est distributif si et seulement si une des propriétés suivantes est vérifiée :

- pour tous  $j \in J, A \subseteq T, j \leq \bigvee A$  implique  $j \leq a$  pour au moins un élément  $a \in A$ ;
- pour tous  $x, y \in T$ , on a  $J_{\leq x} \cup J_{\leq y} = J_{\leq x \vee y}$ .

Un inf-demi-treillis est dit *atomistique* si tout élément sup-irréductible est un *atome*, c'est à dire un élément couvrant le minimum  $0_T$ ; dualement, un sup-demi-treillis est *coatomistique* si tout élément inf-irréductible est un *coatome*, i.e. un élément couvert par  $1_T$ .

**Exemple 1.29** Tout treillis booléen fini est à la fois atomistique et coatomistique.

**Exemple 1.30 (suite de l'exemple 1.12)** Dans l'inf-demi-treillis  $\mathcal{O}_X$  des ordres stricts sur  $X$ , un atome est un ordre  $A_{xy}$  contenant une unique paire  $(x, y)$  Comme tout ordre  $P$  vérifie  $P = \bigvee \{A_{xy} : (x, y) \in P\}$ ,  $\mathcal{O}_X$  est atomistique.

### 1.3.3 Parties génératrices

Nous avons vu dans le paragraphe précédent deux ensembles,  $J_T$  et  $M_T$ , permettant, lorsque  $T$  est un treillis fini, d'engendrer tous ses éléments grâce aux opérations de

supremum et d'infimum respectivement. Il existe toutefois d'autres parties de  $T$  ayant la propriété d'engendrer tout élément : les parties génératrices.

Une partie  $G$  de  $T$  est dite **sup-génératrice**<sup>11</sup> de  $T$  si tout élément de  $T$  s'obtient comme supremum d'une partie de  $G$ , i.e. pour tout  $x \in T$ , il existe  $A \subseteq G$  tel que  $x = \bigvee A$ . On définit dualement les parties inf-génératrices.

**Proposition 1.31** *Soit  $G$  une partie sup-génératrice de  $T$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) *Pour tout  $x \in T$ ,  $x = \bigvee G_{\leq x}$  ( $= \bigvee \{g \in G : g \leq x\}$ );*
- (ii) *Pour tout  $G' \subseteq T$  avec  $G \subseteq G'$ ,  $G'$  est aussi une partie sup-génératrice.*

**Preuve :** Le (ii) est immédiat d'après la définition ; pour (i), puisque  $G$  est sup-génératrice, il existe  $A \subseteq G$  tel que  $x = \bigvee A$ ; de plus, on a  $A \subseteq G_{\leq x}$  d'où  $\text{Maj}G_{\leq x} \subseteq \text{Maj}A$  et donc  $x = \text{minMaj}A = \text{minMaj}G_{\leq x} = \bigvee G_{\leq x}$ .  $\square$

Le théorème suivant montre que l'ensemble des sup-irréductibles de  $T$  est la partie sup-génératrice minimum.

**Théorème 1.32** *Si  $T$  est fini, une partie  $G$  de  $T$  est sup-génératrice si et seulement si elle contient l'ensemble  $J_T$ .*

**Preuve :** Comme un sup-irréductible ne peut pas s'obtenir comme supremum d'une partie ne le contenant pas, toute partie sup-génératrice doit contenir  $J_T$ . Selon la proposition 1.25,  $J_T$  est une partie sup-génératrice.  $\square$

**Exemple 1.33** Dans un treillis booléen  $\mathcal{P}(E)$ , une partie sup-génératrice est l'ensemble des parties contenant un singleton unique.

---

<sup>11</sup>Certains auteurs utilisent parfois la notion de *sup-représentation*, où  $I \subseteq T$  est une sup-représentation de  $x \in T$  si  $x = \bigvee I$ . Si les éléments de la sup-représentation sont tous pris dans un ensemble  $G \subseteq T$ , on parle alors de *sup<sub>G</sub>-représentation*, ce qui revient à dire que  $G$  est une partie sup-génératrice de  $T$ . On définit dualement la notion d'*inf-représentation*.

## 1.4 Fermetures, ouvertures et familles de Moore

*Il est des portes ouvertes qui sont infranchissables tant elles sont bien fermées. J'ai pour ma part vu très souvent des portes fermées qui étaient des ouvertures plus qu'invitantes.*

*Serge Bouchard, Les portes.*

On trouve dans de nombreux domaines mathématiques la notion de fermeture, sous la forme de fermeture topologique, algébrique, convexe, ... Ce qui est commun à toutes ces types de fermeture se résume en trois propriétés, permettant d'établir de nombreuses propositions. Cette section présente les définitions de base et quelques unes de leurs conséquences.

Soient  $(E, \leq_E)$  un ensemble ordonné. Une **fermeture**  $\varphi$  est une application sur  $E$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- idempotence :  $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$  pour tout  $x \in E$  ;
- isotonie :  $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$  pour tous  $x, y \in E$  ;
- extensivité :  $x \leq \varphi(x)$  pour tout  $x \in E$ .

Une *ouverture*  $\varphi'$  est une application sur  $E$  idempotente, isotone et contractante (i.e.  $\varphi'(x) \leq x$  pour tout  $x \in E$ ).

Les points fixes, i.e. les éléments  $x$  tels que  $x = \varphi(x)$ , d'une fermeture (resp. ouverture) sont appelés les **fermés** (resp. *ouverts*) par  $\varphi$ . Une conséquence de l'idempotence de  $\varphi$  est en effet qu'un élément  $x$  est point fixe si et seulement s'il appartient à l'image de  $E$  par  $\varphi$ . En notant  $\Phi$  l'ensemble des fermés par  $\varphi$ , on a<sup>12</sup>, pour tout  $x \in E$ ,

$$\varphi(x) = \min\{h \in \Phi : x \leq h\} = \max\{x' \in E : \varphi(x') = \varphi(x)\}$$

**Remarque 1.34 (Tiré d'un exercice de [Szà63])** Soient  $E$  un ensemble ordonné et  $\varphi$  une application sur  $E$ . Montrons que  $\varphi$  est une fermeture si et seulement si, pour tous  $x, y \in E$ ,  $\varphi$  vérifie  $x \leq \varphi(y) \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$  (Relation de *Morgado* [Mor62]).

Si  $\varphi$  est une fermeture, on a  $x \leq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi\varphi(y) \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$ . Inversement,

<sup>12</sup>Ce sous-ensemble de  $E$  est parfois ([Fla77, Lec97]) appelé *réseau de fermeture* (sous-ensemble de  $E$  tel que  $\min\{x' \in R : x \leq x'\}$  existe pour tout  $x \in E$ ). Il existe de plus un isomorphisme dual entre l'ensemble des réseaux de fermeture de  $E$  et l'ensemble des fermetures sur  $E$  donné par  $\varphi(E) \subseteq \varphi'(E) \iff \varphi \geq \varphi'$ .

$x \leq y$  implique  $x \leq \varphi(y)$  d'où  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$  (isotonie) et  $x \leq \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi\varphi(x)$ ; de plus,  $\varphi(x) \leq \varphi(x) \Rightarrow \varphi\varphi(x) \leq \varphi(x)$  d'où l'idempotence. L'extensivité s'obtient en prenant  $x = y$  dans la relation de Morgado.

**Remarque 1.35** Il existe une autre caractérisation, où une application extensive  $\varphi$  sur  $\mathcal{P}(E)$  est une fermeture si et seulement si  $\varphi$  vérifie la propriété *d'indépendance de chemin* ([Plo73]) :  $\varphi(A \cup B) = \varphi(\varphi(A) \cup \varphi(B))$ .

**Exemple 1.36** La *fermeture transitive* d'une relation binaire  $R$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}(E \times E)$  des relations binaires sur un ensemble  $E$ , ordonné par inclusion, est la plus petite relation transitive contenant  $R$ . La *fermeture algébrique*, dans un groupe  $G$ , peut être définie par une fermeture sur  $\mathcal{P}(G)$  associant à chaque partie  $X$  de  $G$  le plus petit sous-groupe contenant  $X$ ; les fermés sont les sous-groupes de  $G$ .

**Proposition 1.37** Si  $\varphi$  est une fermeture sur un treillis complet  $T$ , l'ensemble  $\varphi(T)$  des fermés est un treillis complet<sup>13</sup>, sous inf-demi-treillis de  $T$  et contenant le maximum de  $T$ .

Ainsi  $(\Phi, \wedge_\Phi, \vee_\Phi)$  est un treillis avec, pour tout  $Q \subseteq \Phi$ ,  $\wedge_\Phi Q = \wedge Q$  et  $\vee_\Phi Q = \varphi(\vee Q)$ . Grâce à la propriété d'extensivité, on a  $\varphi(1_P) = 1_P$ .

Inversement, soit  $(P, \vee, \wedge)$  un treillis complet et un sous-ensemble  $\Phi$  de  $P$  qui est un sous-inf-demi-treillis complet de  $P$  et tel que  $1_P \in \Phi$ . Alors on peut associer à  $\Phi$  une fermeture  $\varphi$  sur  $P$  par  $\varphi(x) = \wedge\{y \in \Phi : x \leq y\}$  pour tout  $x \in P$ . De plus, comme  $\Phi$  possède un maximum, c'est un treillis complet.

Quand  $P = \mathcal{P}(E)$ , le treillis de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné  $E$ , une fermeture  $\varphi$  sur  $\mathcal{P}(E)$  correspond à une famille  $\Phi$  de sous-ensembles de  $E$  satisfaisant

---

<sup>13</sup>Une première version de cette proposition est due à Morgan Ward, The closure operators of a lattice, *Ann. of Math.* (2), vol 43 (1942), pp. 191-196 (d'après [Öre44]) et, dans le cadre d'une application quelconque  $f : T \rightarrow T$ , en notant  $T_f$  l'ensemble des points fixes de  $f$ , alors si  $T$  est un treillis complet,  $T_f$  est aussi un treillis complet (A. Tarski, A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, *Pacific J. Math.* 5, 1955, 285-309)

- $E \in \Phi$  ;
- $\Phi' \subseteq \Phi$  implique  $\bigcap \Phi' \in \Phi$ .

Muni de ces propriétés,  $\Phi$  est une *famille de Moore*<sup>14</sup> sur  $E$ , et la paire  $(E, \varphi)$  est un *espace de fermeture*. Les notions de famille de Moore et de fermeture sont en correspondance bi-univoque ([Bir67]<sup>15</sup>). En effet, à toute famille de Moore  $\Phi$  on peut associer la fermeture  $\varphi$  définie par, pour tout  $X \subseteq E$ ,  $\varphi(X) = \bigcap \{F \in \Phi : X \subseteq F\}$  et, à toute fermeture  $\varphi$ , la famille de Moore correspondante est la famille des fermés par  $\varphi$ .

**Remarque 1.38** Soit  $G$  une partie  $\vee$ -génératrice d'un treillis  $T$ . Pour tout  $A \subseteq G$ , on définit une application  $\varphi$  par  $\varphi(A) = G_{\leq \vee A}$ , qui est une fermeture sur  $\mathcal{P}(G)$  car

- $\varphi\varphi(A) = G_{\leq \vee \varphi(A)}$  or  $\vee \varphi(A) = \vee G_{\leq \vee A} = \vee A$  donc  $\varphi\varphi(A) = \varphi(A)$  ;
- si  $A \subseteq B$ ,  $\vee A \leq \vee B$  d'où  $G_{\leq \vee A} \subseteq G_{\leq \vee B}$  ;
- soit  $a \in A$ , on a  $a \in G$  et  $a \leq \vee A$  donc  $a \in \varphi(A)$ .

La partie  $G$  est donc une sup-représentation de  $T$ , i.e. le treillis des fermés de  $G$  est isomorphe au treillis  $T$ . En particulier, un treillis fini induit une fermeture sur l'ensemble de ses sup-irréductibles, qui est sa plus petite partie sup-génératrice.

## 1.5 Correspondances de Galois

Les correspondances de Galois sont un objet fondamental dans la théorie des ensembles ordonnés depuis leur mise en évidence par Birkhoff [Bir67] en 1940 sous le nom d'applications polarisées. Leur généralisation a toutefois eut lieu plus tard grâce à des auteurs comme Everett [Eve44], qui a montré que toute fermeture peut être considérée comme résultante d'une correspondance de Galois, et Öre [Öre44], qui est à l'origine du terme de correspondance de Galois<sup>16</sup>. Quelques années plus tard fut développée la notion

---

<sup>14</sup>Le terme de famille de Moore fut introduit par Birkhoff [Bir67] dans la première édition de 1940 de son livre, mais on trouve d'autres terminologies équivalentes : système de fermetures, protopologie, ... Pour une étude détaillée des familles de Moore, on peut voir [CM02] ou [Rad01].

<sup>15</sup>Birkhoff précise que cette correspondance apparaît, sous une terminologie différente, dans E. H. Moore, The New Haven Mathematical Colloquium, *Introduction to a form of general analysis*, AMS Colloq. Publ. vol. 2, New Haven, 1910.

<sup>16</sup>“The name [of Galois connection] is taken from the ordinary Galois theory of equations where the correspondence between subgroups and subfields represents a special correspondence of this type”, Oys-

équivalente<sup>17</sup> d'applications résiduées et résiduelles introduite par Croisot [DC54, Cro56] et mise en avant, entre autres, par le livre de Blyth et Janowitz [BJ72] ou les articles de Derderian [Der67] ou de Blyth [Bly84].

La section 1.5.1 donne une définition et des propriétés des correspondances de Galois, alors que le paragraphe 1.5.2 traite des applications résiduées et résiduelles, et montre l'équivalence (sous réserve d'une dualité) avec les correspondances de Galois. La généralisation de ces fonctions, connue sous le nom de fonctions de Benado, sera faite dans la section 1.5.3.

### 1.5.1 Applications galoisiennes

Soient  $P$  et  $P'$  deux ensembles ordonnés, et  $f : P \rightarrow P'$  une application. Les trois conditions suivantes (G1)-(G3) sont équivalentes, et sont équivalentes à la condition (G4) quand  $P$  et  $P'$  sont des treillis complets.

(G1) Pour tout  $x' \in P'$ ,  $f^{-1}([x'])$  est un idéal principal de  $P$  ;

(G2) Il existe une application  $g$  de  $P'$  dans  $P$  telle que, pour tous  $x \in P, x' \in P'$ ,

$$x \leq g(x') \iff x' \leq f(x) ;$$

(G3) L'application  $f$  est antitone et il existe une application antitone  $g$  de  $P'$  dans  $P$  telle que les compositions  $\varphi = gf$  et  $\psi = fg$  sont extensives ;

(G4) Pour tout  $S \subseteq P$ ,  $f(\bigvee S) = \bigwedge \{f(x) : x \in S\}$ .

**Preuve :** Nous allons démontrer l'équivalence entre les conditions précédentes. On obtient (G1)  $\Rightarrow$  (G2) en considérant la fonction  $g$  définie par  $g(x') = \max f^{-1}([x'])$  pour

---

tein Öre, [Öre44], p. 494 ("Le terme [de correspondance de Galois] est tiré de la théorie classique de Galois des équations où la correspondance entre sous-groupe et sous-corps est une correspondance particulière de ce type", traduction libre).

<sup>17</sup>Les correspondances de Galois sont un objet tellement fondamental qu'elles sont redécouvertes régulièrement. Il existe donc une terminologie variée servant à les désigner (ou à désigner les applications résiduées / résiduelles), comme les correspondances de Galois de première, deuxième ou troisième espèce ([HH86]), les correspondances de Lagois ([MSS94]), les érosions ([Kes00]), ...

tout  $x' \in P'$ . Pour (G2)  $\Rightarrow$  (G3), en prenant  $x' = f(x)$  et  $x = g(x')$  dans la double implication, on a l'extensivité de  $\varphi$  et de  $\psi$ . Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments de  $P$  tels que  $x_1 \leq x_2$ . L'extensivité de  $gf$  implique  $x_1 \leq x_2 \leq gf(x_2)$ , d'où  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Montrons maintenant que (G3)  $\Rightarrow$  (G1). Soient  $x' \in P'$  et  $x \in f^{-1}([x'])$ , et donc tels que  $f(x) \geq x'$ . Comme  $gf$  est extensive et  $g$  antitone, on a  $x \leq gf(x) \leq g(x')$ , donc  $f^{-1}([x']) \subseteq (g(y))$ . Pour  $y \in P$  tel que  $y \leq g(x')$ , on a  $f(y) \geq fg(x') \geq x'$ , et donc  $y \in f^{-1}([x'])$ , ce qui fini cette partie de la preuve.

Montrons maintenant que (G3)  $\iff$  (G4) lorsque  $P$  et  $P'$  sont des treillis complets. Supposons  $f$  satisfaisant (G3). Soit  $A \subseteq P$ . On a  $f(\bigvee A) \leq f(a)$  pour tout  $a \in A$ , à cause de l'antitonie de  $f$ , donc  $f(\bigvee A) \leq \bigwedge_{a \in A} f(a)$ . Montrons que  $f(\bigvee A) \geq \lambda$  pour tout  $\lambda$  mino- rant de  $f(A)$ . On a, par antitonie de  $g$  et extensivité de  $gf$ ,  $\lambda \leq f(a) \Rightarrow g(\lambda) \geq gf(a) \geq a$  pour tout  $a \in A$ , d'où  $g(\lambda) \geq \bigvee A$  et  $\lambda \leq fg(\lambda) \leq f(\bigvee A)$ . Ainsi, en prenant  $\lambda = \bigwedge_{a \in A} f(a)$ , on a l'égalité. Supposons maintenant que  $f$  satisfait (G4). Soit  $x' \in P'$ , l'ensemble  $X = \{x \in P : f(x) \geq x'\}$  est non vide, avec  $f^{-1}([x']) = (\bigvee X)$ . Ainsi (G1) est vérifiée.

□

Une application satisfaisant les conditions précédentes est dite **application galoisienne** ou *application polarisée* (polarized map [Bir33]).

L'application  $g$  définie dans les conditions (G2)-(G3) est déterminée de façon unique par  $f^{-1}([x']) = (g(x'))$  pour tout  $x' \in P'$ , et c'est une application galoisienne de  $P'$  dans  $P$ . La paire  $(f, g)$  est une **correspondance de Galois** entre  $P$  et  $P'$ ; les applications  $f$  et  $g$  dans une correspondance de Galois se déterminent l'une l'autre de façon unique. L'équivalence en (G2) est appelée *relation de Pickert*. Les deux applications de composition  $\varphi = gf$  et  $\psi = fg$  définies par la condition (G3) sont deux fermetures sur  $P$  et  $P'$ , respectivement.

**Exemple 1.39** Si  $\bigvee P = 1_P$  et  $\bigvee P' = 1_{P'}$  existent, l'application constante notée  $[1_{P'}]$  définie par, pour tout  $x \in P$ ,  $[1_{P'}](x) = 1_{P'}$  est une application galoisienne.

**Remarque 1.40** Il n'existe pas forcément d'applications galoisiennes entre deux ensembles ordonnés quelconques. En effet,  $f^{-1}(\uparrow 0_{P'}) = \{x \in P : f(x) \geq 0_{P'}\} = P$  doit être une

section commençante de  $(P, \leq)$ , ce qui équivaut à dire que  $1_P$  existe (on a alors  $P = \downarrow 1_P$ ).

On dira qu'un couple d'application  $(f, g)$  est *involutif* si, pour tous  $X \in P, X' \in P'$ , on a  $fgf(X) = f(X)$  et  $gfg(X') = g(X')$ . On a alors la propriété suivante :

**Proposition 1.41** *Une correspondance de Galois  $(f, g)$  est un couple involutif.*

**Preuve :** Par (G3), on a  $f(X) \subseteq fgf(X)$  et  $X \subseteq fg(X)$  donc, par antitonie de  $f$ ,  $f(X) \supseteq fgf(X)$ . La preuve pour  $gfg(X') = g(X')$  est similaire. □

**Théorème 1.42** ([Öre44]) *Toute correspondance de Galois<sup>18</sup>  $(f, g)$  entre deux treillis complets  $T$  et  $T'$  définit un isomorphisme dual entre les treillis complets des sous-ensembles fermés de  $T$  et  $T'$ .*

**Preuve :** La condition (G3) définit deux fermetures  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $T$  et  $T'$  respectivement, avec l'idempotence obtenue grâce à la proposition 1.41. Grâce à cette même proposition, on sait que les ensembles fermés de  $T$  et de  $T'$  sont de la forme  $g(X')$  et  $f(X)$ , resp. De plus, les correspondances  $g(X') \rightarrow fg(X')$  et  $f(X) \rightarrow gf(X)$  sont inverses ; on a donc une correspondance bijective. La dualité provient de l'antitonie de  $f$  et  $g$ . □

**Remarque 1.43** Lorsque la correspondance de Galois est entre deux ensembles ordonnés qui ne sont pas des treillis, les sous-ensembles fermés dualement isomorphes ne sont pas obligatoirement des treillis. Par exemple, si on considère le couple d'application  $(f, g)$  défini dans le tableau 1.3 entre les deux ensembles ordonnés  $P$  et  $P'$  de la figure 1.8, on obtient comme sous ensemble de fermés l'ensemble ordonné de la figure 1.9.

**Exemple 1.44** (Tiré d'un exercice de [Bir67]) Soit  $\rho$  une relation binaire entre les éléments de deux treillis complets  $T$  et  $T'$  telle que :

- $(x, y) \in \rho, t \leq x$  et  $u \leq y$  impliquent  $(t, u) \in \rho$  ;
- $(x_\alpha, y_\beta) \in \rho$  pour tous  $\alpha, \beta$  implique  $(\bigvee x_\alpha, \bigvee y_\beta) \in \rho$ .

---

<sup>18</sup>H. Crapo a montré dans [Cra82] qu'il suffisait que le couple  $(f, g)$  soit involutif (i.e. vérifie  $fgf = f$  et  $gfg = g$ ) pour qu'il existe une sous-structure de  $T$  et une de  $T'$  isomorphes (voir aussi la section 1.5.3 sur les correspondances de Benado).

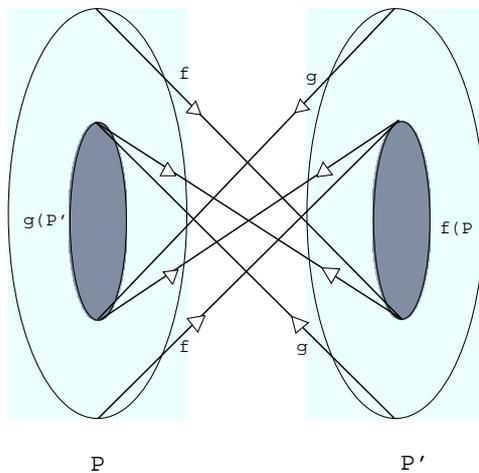


FIG. 1.7: Illustration d'une correspondance de Galois  $(f, g)$ .

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	$\alpha$	$\epsilon$	$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\mu$	$\rho$	$\alpha$	$\rho$
$y$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	$\mu$	$\nu$	$\xi$	$\rho$
$g(y)$	1	2	6	4	2	6	7	7	7

TAB. 1.3: Exemple de correspondance de Galois.

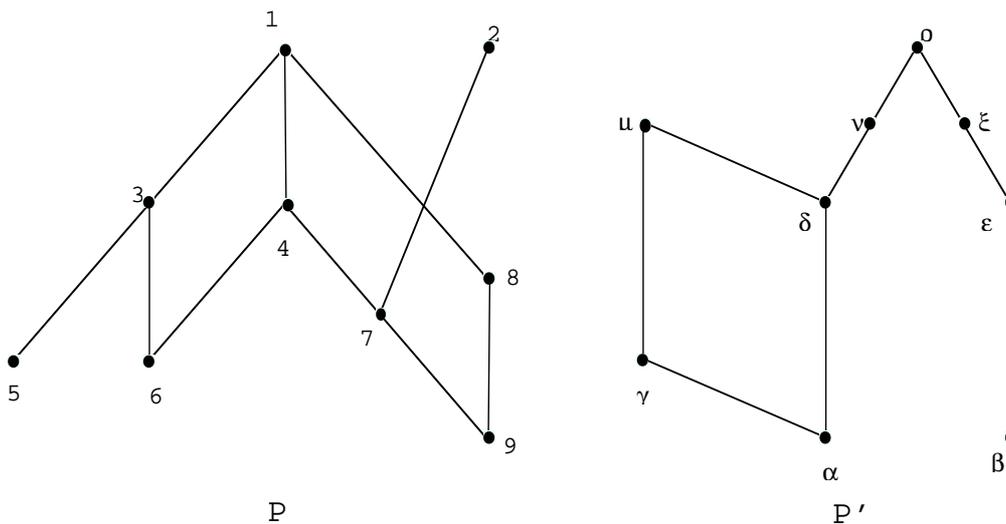
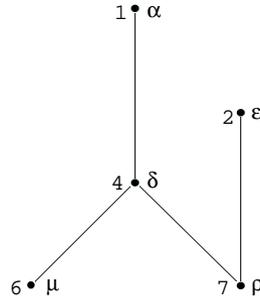


FIG. 1.8: Ensembles ordonnés  $P$  et  $P'$ .

FIG. 1.9: Sous-ensemble des fermés de  $(f, g)$ .

On pose  $x\rho = \{y \in T' : (x, y) \in \rho\}$  et  $\rho y = \{x \in T : (x, y) \in \rho\}$ . Soient  $f : T \rightarrow T'$  et  $g : T' \rightarrow T$  deux applications définies par  $f(x) = \sup(x\rho)$  et  $g(y) = \sup(\rho y)$ . Montrons que  $(f, g)$  est une correspondance de Galois. Soit  $S \subseteq T$  :

$$\begin{aligned}
 f(\bigvee S) &= \sup\{y \in T' : (\bigvee S, y) \in \rho\} \\
 &= \sup\{y \in T' : (s, y) \in \rho \text{ pour tout } s \in S\} \\
 &= \bigwedge \{\sup\{y \in T' : (s, y) \in \rho\} : s \in S\} \\
 &= \bigwedge \{f(s) : s \in S\}
 \end{aligned}$$

### 1.5.2 Résiduation

Une application  $f : P \rightarrow P'$  est dite **résiduée** si elle satisfait une des conditions suivantes :

(R1) Pour tout  $x' \in P'$ ,  $f^{-1}(\langle x' \rangle)$  est un idéal principal de  $P$  ;

(R2) Il existe une application  $g$  de  $P'$  dans  $P$  telle que, pour tous  $x \in P, x' \in P'$ ,

$$x \leq g(x') \iff x' \geq f(x) ;$$

(R3) L'application  $f$  est isotone et il existe une application isotone  $g$  de  $P'$  dans  $P$  telle que l'application  $\varphi = gf$  est extensive et l'application  $\psi = fg$  est contractante ;

(R4) L'application  $f$  est un  $\vee$ -morphisme complet.

L'application  $g$  définie par les conditions (R2) ou (R3) est dite **résiduelle**. La figure 1.10 illustre la condition (R1), qui dit que pour une application résiduée, les idéaux principaux sont préservés (les filtres principaux dans le cas d'une résiduelle). Cette même

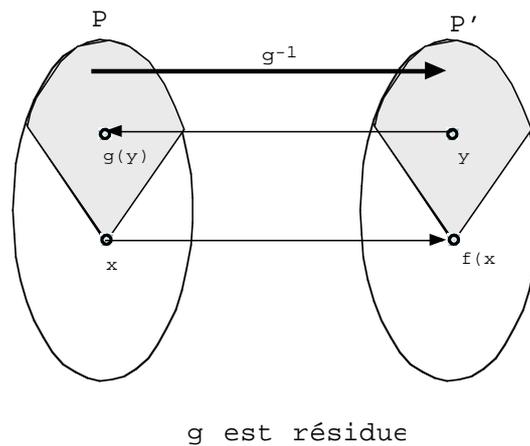
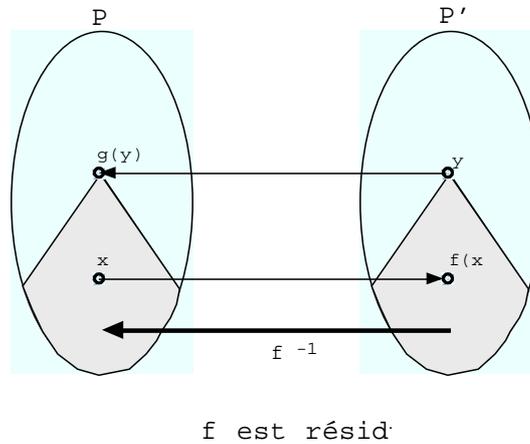


FIG. 1.10: Illustration d'un couple  $(f, g)$  d'application résiduée / résiduelle .

condition permet de situer les applications résiduées par rapport aux applications isotones, pour lesquelles, comme nous l'avons vu dans la section 1.2.4, l'image inverse d'un idéal principal est une partie commençante. Il est trivial de remarquer que :

**Proposition 1.45** *Une application  $f$  de  $P$  dans  $P'$  est résiduée si et seulement si  $f$  est une application galoisienne de  $P$  dans  $P'^d$ .*

Les notions d'application résiduelle, résiduée, galoisienne et de correspondance de Galois entre deux ensembles ordonnés sont équivalentes. On peut alors se demander, à la

suite de [Bly84], “what it is that residuated mappings have to offer that Galois connections do not”<sup>19</sup>. Une première réponse est simple : les applications résiduées (résiduelles) se composent. Ainsi, soient  $f : E \rightarrow E'$  et  $f' : E' \rightarrow E''$  deux applications résiduées (avec  $g$  et  $g'$  les résiduelles associées) alors  $f' \circ f : E \rightarrow E''$  est aussi résiduée et la résiduelle associée est  $g \circ g'$ . De plus, si  $f$  et  $f'$  sont deux applications résiduées, alors, grâce à (R4),  $f \vee f'$  est aussi une application résiduée. L'ensemble des applications résiduées est donc un  $\vee$ -demi-treillis ayant un minimum, et donc est un treillis, isomorphe au treillis des applications galoisiennes en utilisant la proposition 1.45.

**Exemple 1.46 (Tiré de [Bly84])** Soient  $E$  un ensemble non vide, et  $R$  une relation binaire sur  $E$ . Considérons l'application  $\xi_R : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  définie par  $\xi_R(A) = \{y \in E : \exists x \in A : xRy\}$  pour tout  $A \subseteq E$ . Soient  $R^d$  la relation duale de  $R$ , et  $i : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  l'application antitone telle que  $i(A) = E - A$  pour tout  $A \subseteq E$ . Alors  $\xi_R$  est résiduée et la résiduelle associée est  $\varsigma_R = i \circ \xi_{R^d} \circ i$  (on a, pour tout  $B \subseteq E$ ,  $\varsigma_R(B) = \{x \in E : \forall y \notin B, (x, y) \notin R\}$ ).

Il est maintenant facile de montrer qu'une application  $\eta : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  est résiduée si et seulement si elle est de la forme  $\xi_R$  pour une certaine relation binaire  $R$  sur  $E$ . D'abord définissons la relation  $R(\eta)$  sur  $E$  par  $(x, y) \in R(\eta) \iff y \in \eta(\{x\})$ . On a alors  $\xi_R(\{x\}) = \{y \in E : (x, y) \in R(\eta)\} = \eta(\{x\})$ . Ainsi, si  $\eta$  est résiduée, elle préserve l'opération supremum et donc  $\eta = \xi_{R(\eta)}$ .

Nous avons parlé, dans le paragraphe 1.3.3, de sup-représentation, en affirmant que  $J_T$ , avec  $T$  treillis fini, est la partie sup-génératrice minimum. Nous allons ici, en utilisant une correspondance résiduée / résiduelle particulière, donner une autre preuve de cette propriété. En notant  $J$  l'ensemble des sup-irréductibles de  $T$  et  $M$  l'ensemble de ses inf-irréductibles, on peut considérer les applications  $s_1, s_2, r_1$  et  $r_2$  définies par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(J) & \xrightarrow{s_1} & T & \xrightarrow{r_2} & \mathcal{P}(M) \\ & & \xleftarrow{r_1} & & \xleftarrow{s_2} \end{array}$$

<sup>19</sup> “ce que les applications résiduées peuvent offrir par rapport aux applications galoisiennes”, traduction libre.

Avec, pour tous  $K \subseteq J, x, y \in T$  et  $K' \in M$ ,

$$\begin{aligned} s_1(K) &= \vee K \\ r_1(x) &= J_{\leq x} \\ s_2(K') &= \wedge K' \\ r_2(y) &= M_{\geq y} \end{aligned}$$

Toutes ces applications sont isotones, pourvu que  $\mathcal{P}(M)$  soit ordonné par l'ordre d'inclusion inverse. Comme  $x = \vee J_{\leq x} = \wedge M_{\geq x}$ ,  $\psi_1 = s_1 r_1 = s_2 r_2$  est simultanément extensive et contractante. De plus,  $\varphi_1 = r_1 s_1$  est défini par  $\varphi_1(A) = J_{\leq \vee A}$  et est de façon triviale extensive, alors que  $\varphi_2 = r_2 s_2$  est défini par  $\varphi_2(B) = M_{\geq \wedge B}$  et est, en assumant la dualité sur  $\mathcal{P}(M)$ , contractante.

**Proposition 1.47** *L'application  $s_1$  est une application résiduée et  $r_1$  est l'application résiduelle associée;  $\varphi_1$  est une fermeture sur  $\mathcal{P}(J)$  et  $\varphi_1(\mathcal{P}(J))$  est isomorphe à  $T$ .*

**Preuve :** Soit  $A \subseteq J, b \in T$ . On a  $s_1(A) \leq b \iff \vee A \leq b \iff a \leq b \forall a \in A \iff A \subseteq r_1(b)$  La relation de Pickert est ainsi vérifiée pour le couple  $(s_1, r_1)$  d'application résiduée / résiduelle entre  $(\mathcal{P}(J), \subseteq)$  et  $(T, \leq)$ .  $\square$

### 1.5.3 Correspondances de Benado

A la suite de Benado [Ben73], Flament [Fla77] s'est intéressé à des correspondances plus générales que les correspondances de Galois, celles-ci devant satisfaire un certain nombre de conditions : antitonie des applications et extensivité des compositions. Nous avons vu de plus que les correspondances résiduée / résiduelle peuvent s'obtenir par dualité des correspondances de Galois. On peut donc s'interroger sur l'existence de correspondances ne pouvant s'obtenir par dualité.

On peut définir 16 types de correspondances  $(f, g)$  entre deux ensembles ordonnés  $P$  et  $P'$ , suivant que  $f$  et  $g$  soient chacune isotone ou antitone, et que les compositions  $gf$  et  $fg$  soient chacune extensive ou contractante. Nous ne nous intéresserons qu'aux cas où  $f$  et  $g$  sont de même monotonie. Ces cas sont résumés dans le tableau 1.4.

		Galois		Benado	
	$f$ et $g$	$gf$	$fg$	$gf$	$fg$
$P, P'$	antitones	extensive	extensive	extensive	contractante
$P, P'^d$	isotones	extensive	contractante	extensive	extensive
$P^d, P'$	isotones	contractante	extensive	contractante	contractante
$P^d, P'^d$	antitones	contractante	contractante	contractante	extensive

TAB. 1.4: Diverses correspondances entre deux ensembles ordonnés (tiré de [Fla77]).

Dans la colonne marquée Galois, la première ligne décrit les correspondances de Galois classiques (cf. section 1.5.1), la deuxième traitant de résiduation (section 1.5.2) et les deux dernières lignes pouvant facilement être obtenues par dualité. La colonne Benado présente des correspondances qui ne se déduisent pas par dualité des correspondances de Galois ; à la suite de Benado, nous ne parlerons que du cas où  $f$  et  $g$  sont antitones. Une *correspondance de Benado* est donc une paire d'application  $(f, g)$ ,  $f : P \rightarrow P'$  et  $g : P' \rightarrow P$ , telle que  $f$  et  $g$  soient antitones,  $gf$  extensive et  $fg$  contractante (ce qui correspond à la première ligne du tableau).

Un des intérêts de l'étude des correspondances de Benado, ou plus exactement des correspondances de Benado *involutives* (i.e. telles que  $gfg = g$  et  $fgf = f$ ) réside dans la proposition suivante :

**Proposition 1.48** *Si  $(f, g)$  est une correspondance involutive de Benado entre  $P$  et  $P'$ ,  $gf$  est une fermeture,  $fg$  une ouverture ;  $f$  est alors un isomorphisme dual de  $gf(P)$  sur  $fg(P')$  et  $g$  un isomorphisme dual de  $fg(P')$  sur  $gf(P)$ .*

On retrouve de plus nombre de propriétés intéressantes d'une correspondance de Galois. Un exemple de correspondance de Benado involutive sera utilisée dans le chapitre 3.2.1.

## 1.6 Correspondances de Galois associées à une relation

*“L’échelle des valeurs vacille sur ses bases et ...” Je le stoppe : “Installe toi sur une échelle de pompier”.*

*San-Antonio*

Nous allons dans ce chapitre nous intéresser à un cas particulier de correspondances de Galois. Nous avons vu dans le chapitre 1.5.1 que les applications galoisiennes étaient définies entre deux treillis ; nous allons considérer ici les treillis des parties  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(E')$  de deux ensembles finis  $E$  et  $E'$ . La correspondance de Galois sera ainsi associée à une relation binaire  $R \subseteq E \times E'$ , et permettra, entre autres, de modéliser l’intension et l’extension d’un concept. Ce type de correspondance de Galois est celui le plus fréquemment rencontré en analyse des données ([BMN99, Duq96c], ...), mais son intérêt va bien au-delà ([Rig48]), ainsi que l’affirme B. Ganter : “Not only in data analysis, but also for the structure theory of lattices, this correspondence [between formal context and complete lattice] is worthwhile to consider.”<sup>20</sup> [Gan95].

Après avoir regardé ce cas particulier de correspondance de Galois associée à une relation, nous verrons dans la section 1.6.2 comment celui-ci peut être réduit et condensé en une table binaire entre sup et inf-irréductibles, la table réduite. Une brève présentation de divers algorithmes permettant la construction du treillis de Galois associé à une relation sera faite dans le paragraphe 1.6.3.

### 1.6.1 Treillis de Galois d’une relation

Soient deux ensembles finis  $E$  et  $E'$ , et une relation binaire  $R \subseteq E \times E'$ . Soient  $f_R$  et  $g_R$  deux applications définies par :

$$\begin{aligned} f_R : (\mathcal{P}(E), \subseteq) &\rightarrow (\mathcal{P}(E'), \subseteq) \\ A &\rightarrow f_R(A) = \bigcap_{a \in A} aR = \{y \in E' : aRy \text{ pour tout } a \in A\} \end{aligned}$$

---

<sup>20</sup>“Pas seulement en analyse des données, mais aussi pour la théorie structurelle des treillis, cette correspondance [entre contexte formel et treillis complet] vaut la peine d’être considérée”, traduction libre.

$$g_R : (\mathcal{P}(E'), \subseteq) \rightarrow (\mathcal{P}(E), \subseteq)$$

$$B \rightarrow g_R(B) = \bigcap_{b \in B} Rb = \{x \in E : xRb \text{ pour tout } b \in B\}$$

Par exemple, pour le tableau 1.5,  $f(\{C, D\}) = \{2, 4, 5, 10\}$  et  $g(\{1, 3\}) = \{W\}$ . On vérifie aisément que le couple  $(f_R, g_R)$  est une correspondance de Galois<sup>21</sup> entre  $\mathcal{P}(E)$  et  $\mathcal{P}(E')$ , i.e.  $f_R$  est une application galoisienne de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(E')$ , et  $g_R$  est l'application galoisienne associée. Soient  $\varphi = g_R f_R$  et  $\psi = f_R g_R$  les fermetures associées ; si  $F$  est un fermé par  $\varphi$  alors  $G = f_R(F)$  est un fermé par  $\psi$  (et  $F = g_R(G)$ ). On dit alors que  $F \times G$  est un *rectangle maximal*<sup>22</sup> de la relation  $R$  car  $xRy$  pour tout  $(x, y) \in F \times G$  et, pour tout  $y' \in E' - G$ , il existe  $x' \in F$  tel que  $(x', y') \notin R$ . Le sous-tableau correspondant à  $F \times G$  est donc maximal au sens suivant : si on lui ajoute une ligne ou une colonne, le sous-tableau étendu contiendra au moins un 0. Par exemple, si  $X = \{D, G, L\}$ ,  $\varphi(X) = \{D, G, L, P, W\}$  et les rectangle maximal associé est  $\{D, G, L, P, W\} \times \{2, 3, 4, 5\}$ . On note  $Gal(E, E', R)$  l'ensemble des rectangles maximaux  $F \times G$  de  $R$ .

D'après le théorème 1.42, l'ensemble des fermés  $F$  et l'ensemble des fermés  $G$  sont deux treillis duaux. Donc en ordonnant  $Gal(E, E', R)$  par la relation  $F \times G \leq F' \times G' \iff F \subseteq F' \iff G' \subseteq G$  cet ensemble ordonné est un treillis, appelé **treillis de Galois**, muni des opérations infimum et supremum suivantes :

$$(F \times G) \wedge (F' \times G') = (F \cap F') \times (\psi(G \cup G'))$$

$$(F \times G) \vee (F' \times G') = (\varphi(F \cup F')) \times (G \cap G')$$

**Exemple 1.49** Dans un article paru dans *Molecular Ecology*, Navarro et al. [NJG<sup>+</sup>99] ont mis en évidence des associations entre plantes de l'espèce *Gymnostoma* et des bactéries de type *Frankia*. On peut voir dans le tableau 1.5 la relation de présence, de  $E = \{C, D, G, I, L, N, P, W\}$  ensemble des plantes, vers  $E' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ , ensemble des bactéries, et dans la figure 1.11, son treillis de Galois ayant 18 éléments.

<sup>21</sup>Historiquement, c'est ce type de correspondance de Galois qui a été découvert en premier par Birkhoff ([Bir33, Bir67]), la généralisation (cf. chap. 1.5.1) de ce type de correspondance étant due à Öre [Öre44].

<sup>22</sup>Il existe de nombreuses appellations différentes pour les rectangles maximaux d'une relation : rectangles premiers ([Che69]), sous-matrices (complètes) premières ([Mal62, KP77]) ...

Plant Species	Pattern																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
C		1		1	1		1			1			1				
D		1	1	1	1	1				1							
G		1	1	1	1	1			1	1							
I			1	1	1	1									1		
L		1	1	1	1												
N	1	1			1			1			1		1			1	1
P		1	1	1	1							1		1			
W	1	1	1	1	1			1									

TAB. 1.5: Présence de la bactérie *Frankia* en fonction de la plante.

Avec la légende suivante : C, *G. chamaecyparis*; D, *G. deplancheanum*; G, *G. glaucescens*; I, *G. intermedium*; L, *G. leucodon*; N, *G. nodiflorum*; P, *G. poissonianum*; W, *G. webbianum*.

Dans la terminologie propre à la “*Formal Concept Analysis*” développée à l’Université Technologique de Darmstadt (cf. [GW99]), un rectangle maximal  $F \times G$  est appelé *concept* du *contexte*  $(E, E', R)$ . L’ensemble  $F$  est *l’extension* (ensemble des individus satisfaisant toutes les propriétés de  $G$ ) et  $G$  *l’intension* (ensemble des propriétés communes aux individus de  $F$ ) du concept  $(F, G)$ . La figure 1.12 est le schéma directeur de la “*Formal Concept Analysis*”, son “*écusson*” selon les termes de Ganter ([Gan95]).

### 1.6.2 Table réduite

Considérons à nouveau, comme dans le chapitre précédent, une table binaire  $R \subseteq E \times E'$ . Nous avons vu qu’on peut y associer naturellement une correspondance de Galois  $(f_R, g_R)$ . On peut toutefois remarquer plusieurs choses :

- les éléments de  $E$  (et de  $E'$ ) qui sont en relation avec tous les éléments de  $E'$  (resp. de  $E$ ) n’apportent aucune information pertinente ;
- parmi les éléments de la même classe, c.a.d. ayant les mêmes propriétés, il y a redondance de l’information. On peut donc conserver un unique représentant par classe ;

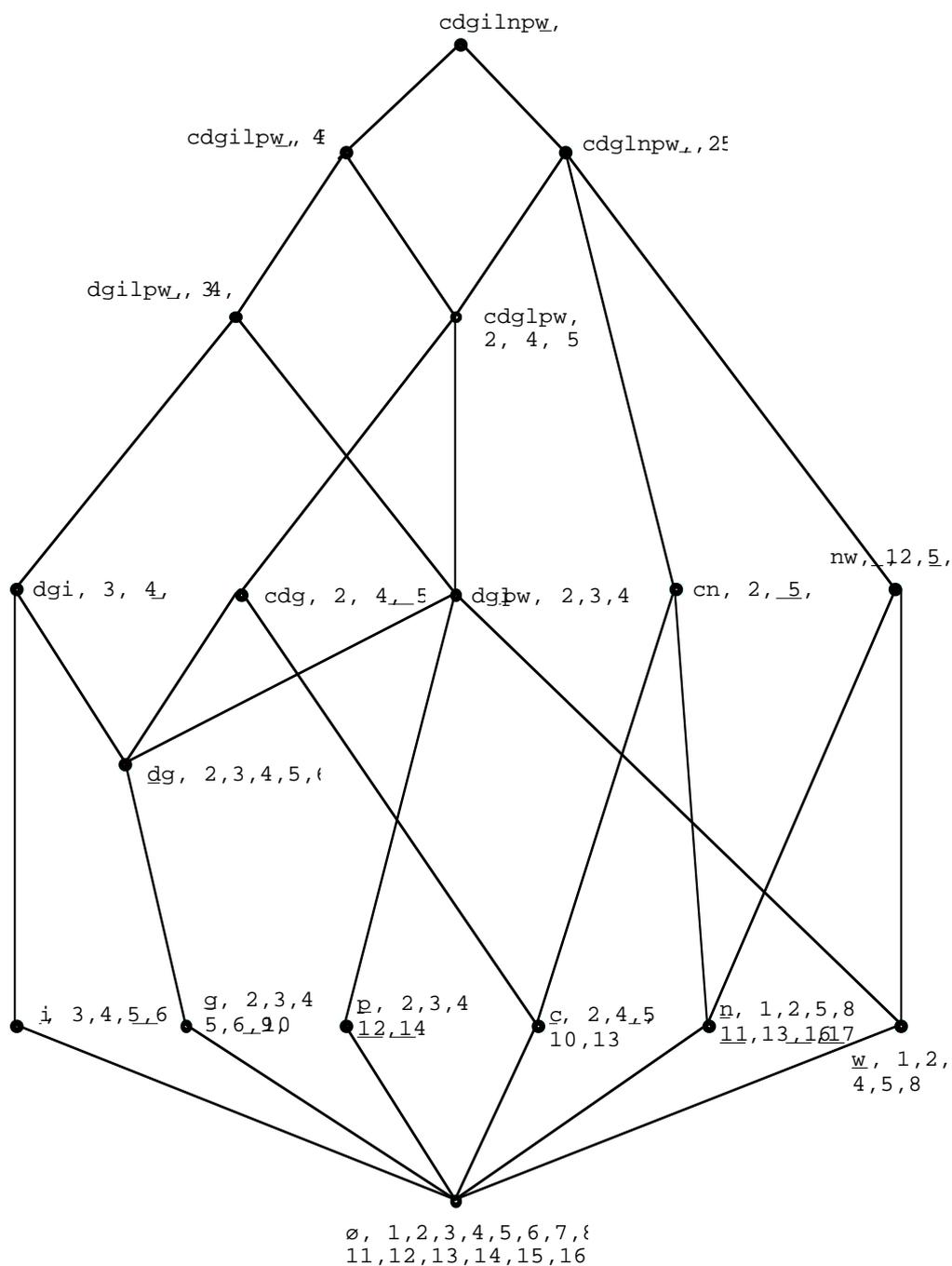


FIG. 1.11: Treillis de Galois de la relation de présence entre *Gymnostoma* et *Frankia*.

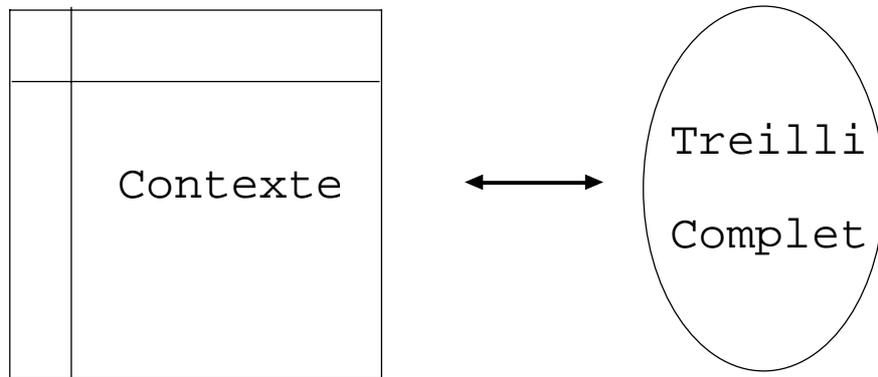


FIG. 1.12: Schéma directeur de la “Formal Concept Analysis”.

- tout élément de  $E$  dont la ligne peut être obtenue comme intersection d’autres donne une information redondante ; de même pour les élément de  $E'$ .

On a ainsi défini trois règles de réduction, qui permettent toutefois de conserver toute l’information initiale. On appellera la table ayant subi ces trois règles de réduction la *table réduite*. On a alors la proposition :

**Proposition 1.50** *Les treillis de Galois associés à  $R$  et à la table réduite sont isomorphes.*

Soit  $T$  un treillis fini. On remarque aisément que la table  $R_T \subseteq J_T \times M_T$  est la table la plus réduite possible, dont la représentation matricielle est appelée table réduite du treillis  $T$ . Les propriétés de cette table réduite vont même plus loin, car, comme l’a prouvé [Bar65], on a :

**Théorème 1.51** ([Bar65]) *Tout treillis fini  $T$  est isomorphe au treillis de Galois de sa table réduite  $R_T$ .*

**Exemple 1.52** [suite de l’exemple 1.49] Dans le tableau 1.5, il y a par exemple la colonne 5 qui correspond à la première condition ; les colonnes 12 et 14 sont présentes sur les mêmes plantes, on peut donc sélectionner un seul représentant de cette classe. La ligne  $L$  est une illustration de la troisième condition, car intersection des lignes  $P$  et  $W$ . La table réduite

est donnée dans le tableau 1.6.

Plant Species	Pattern									
	1	2	3	4	6	9	10	12	13	15
C		1		1			1		1	
D		1	1	1	1		1			
G		1	1	1	1	1	1			
I			1	1	1					1
N	1	1							1	
P		1	1	1				1		
W	1	1	1	1						

TAB. 1.6: Table réduite de la table 1.5.

### 1.6.3 Quelques algorithmes de construction du treillis de Galois

Le problème de calcul des fermés d'un treillis est complexe. En effet, un algorithme naïf cherchant à effectuer le calcul des éléments d'un treillis consisterait à énumérer  $\mathcal{P}(E)$ , calculer la fermeture de chaque partie et vérifier s'il s'agit d'un fermé. Cet algorithme est bien sûr très coûteux, de complexité  $\mathcal{O}(|\mathcal{P}(E)|)$ , or  $E$  est un ensemble généralement grand (dans le cas d'une base de données, par exemple).

Les algorithmes sont essentiellement divisés en deux grandes catégories : ceux nécessitant seulement l'utilisation des fermetures  $\varphi$  et  $\psi$  (par exemple l'algorithme de Ganter [Gan84, GR91], l'algorithme APREM [Tao00], celui de Nourine et Raynaud [NR99]) et ceux travaillant avec les applications galoisiennes  $f_R$  et  $g_R$  (cas d'un contexte). Parmi ces derniers, on peut distinguer les algorithmes fonctionnant de manière non incrémentale<sup>23</sup> (algorithme de Chein/Malgrange [Che69], algorithme de Bordat [Bor86]) et les algorithmes incrémentaux (Norris [Nor78], Godin et al. [GMA95], Missikoff et al. [MS89], Carpineto et Romano [CR96], AGIC [Tao00]). Parmi tous ces algorithmes, on peut distinguer celui

<sup>23</sup>Un algorithme est dit incrémental si l'ajout d'un nouvel élément à classer n'oblige pas à recalculer entièrement le treillis. Le calcul d'un nouvel état se fait donc en fonction des états précédents. L'incrémentalité, dans le contexte de construction de structures hiérarchiques, est la capacité d'acquérir les données à la suite, une après l'autre, et d'adapter la structure existante plutôt que de recommencer sa construction de zéro.

de Ganter, fonctionnant grâce à un ordre lexicographique<sup>24</sup>, ou encore celui de Bordat, qui est un des rares à construire simultanément les fermés du treillis et le diagramme de leur relation d'ordre. Une étude détaillée et comparée de certains de ces algorithmes est faite dans [Gué90] ou dans [KO01]. Il en existe certains permettant de trouver l'ensemble des implications ou encore la base canonique<sup>25</sup> ([TB01, Duq96a])

Les algorithmes de construction de treillis, dans leur forme initiale, s'appliquent exclusivement à une table binaire. Cette condition risquant d'être trop contraignante pour les applications réelles, il existe diverses approches :

- par application directe : on étend la notion de correspondance de Galois sur des structures plus riches ([DV93]) ;
- par codage : des descriptions plus complexes sont ramenées à des tables booléennes ([Wil88]). Nous reprenons cette approche dans le chapitre 3, en utilisant des contraintes sur la table binaire.

En résumant, et en reprennant les termes de [Val99], la construction des treillis de Galois est une technique de regroupement :

- objective : elle comporte tous les groupes d'individus qui satisfont une condition (celle de la fermeture) ;
- exacte : tous ces différents algorithmes arrivent à la même structure, elle ne dépend pas du choix de l'utilisateur et des biais des algorithmes.

---

<sup>24</sup>Un ordre lexicographique est tel que  $(x_1, \dots, x_p) < (x'_1, \dots, x'_q)$  si et seulement s'il existe  $i$  tel que  $x_j = x'_j$  pour tout  $j < i$ , et  $x_i < x'_i$ .

<sup>25</sup>On pourra trouver dans le paragraphe 2.1 une définition précise de ce qu'est une implication ou une base canonique.

# Chapitre 2

## Relations d'emboîtement et classification hiérarchique.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Implications et systèmes implicatifs . . . . .</b>	<b>44</b>
2.1.1	Ensemble quasi-fermé . . . . .	44
2.1.2	Systèmes implicatifs . . . . .	45
<b>2.2</b>	<b>Hiérarchies et emboîtements . . . . .</b>	<b>47</b>
2.2.1	Hiérarchies et hiérarchies faibles . . . . .	47
2.2.2	Les relations d'emboîtement pour les hiérarchies . . . . .	50
<b>2.3</b>	<b>Fermetures et emboîtements . . . . .</b>	<b>51</b>
2.3.1	La relation d'emboîtement associée à un espace de fermeture . . . . .	51
2.3.2	D'une relation d'emboîtement à une fermeture . . . . .	53
<b>2.4</b>	<b>Implications et emboîtements . . . . .</b>	<b>55</b>
2.4.1	Emboîtements et systèmes implicatifs complets . . . . .	56
2.4.2	Une base d'emboîtement . . . . .	58
<b>2.5</b>	<b>Les relations d'emboîtement en classification . . . . .</b>	<b>59</b>
2.5.1	Une preuve simple du théorème d'Adams . . . . .	60
2.5.2	Les bases canoniques des hiérarchies (faibles) . . . . .	61
2.5.3	Une base d'emboîtement des hiérarchies. . . . .	64
<b>2.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>64</b>

---

Les familles de Moore, conjointement avec la notion équivalente d'espaces de fermeture, constituent un objet fondamental dans de nombreux domaines aussi bien théoriques qu'appliqués, dont on pourra trouver une liste dans l'introduction de [CM02]. Parmi ceux-ci, on peut noter la logique, les bases de données relationnelles, l'analyse des données (dont la classification) ainsi que les mathématiques liées aux sciences sociales. Il y a ainsi un besoin d'amélioration des connaissances de telles structures, plus particulièrement pour les types particuliers ayant un rapport avec des domaines d'application (par exemple, les familles de Moore hiérarchiques en classification). Les relations entre les formalisations diverses d'un seul et même concept sont particulièrement intéressantes ; elles constituent une des contributions les plus importantes de l'article de Caspard et Monjardet ([CM02]).

Dans celui-ci, outre les familles de Moore et les opérateurs de fermeture sur un ensemble fini  $S$ , un type de relation binaire sur  $\mathcal{P}(S)$  est étudié, les fameux systèmes implicatifs complets ([GD86], pour des développements récents, on peut voir [GW99]), qui sont aussi équivalents aux espaces de fermeture. Il y a de bonnes raisons pour mettre en valeur de telles structures implicatives ; elles correspondent à des considérations logiques naturelles, et leur étude a apporté de nombreux résultats. Dans le domaine de la classification, un autre type de relations binaires sur  $\mathcal{P}(S)$ , les *relations d'emboîtement*, ont été introduites par Adams ([Ada86]) comme instrument afin de justifier et d'expliquer les propriétés de sa méthode de consensus sur les arbres de classification (les hiérarchies) sur  $S$ . Adams a montré que cette méthode, proposée en 1972, est en fait un consensus strict (unanime<sup>1</sup>) sur les emboîtements. Les relations d'emboîtement constituent, parmi de nombreux autres, une méthode afin de formaliser de tels arbres (on peut voir [Vac94, Lec98]), et Adams a établi une bijection entre les hiérarchies et les relations d'emboîtement, qu'il a caractérisées par une série d'axiomes.

Avec des modifications mineures (l'ajout de l'ensemble vide) par rapport à la définition standard (rappelée dans la section 2.2.1 ci dessous), les hiérarchies sont des familles de Moore d'un certain type. On peut alors légitimement se poser la question de la généralisation des emboîtements d'Adams à tout espace de fermeture. Une telle générali-

---

<sup>1</sup>On parle de consensus strict (ou unanime) lorsque, pour un profil de relations d'emboîtement, on ne conserve pour la relation d'emboîtement consensus que les paires présentes dans chacune des relations du profil.

sation de relations binaires sur  $\mathcal{P}(S)$  est obtenue ici. Nous les avons appelées les *relations d’emboîtements généralisées*. Afin de simplifier la terminologie, nous utiliserons dans la suite le terme de *relation d’emboîtement hiérarchique* pour le type de relation définie par Adams sur les hiérarchies, et simplement celui de *relation d’emboîtement* pour notre généralisation.

Le propos de ce chapitre est double : d’un côté, les relations d’emboîtement généralisées ont été introduites comme une méthode équivalente afin de formaliser l’idée commune aux familles de Moore, aux fermetures et aux systèmes implicatifs complets, et leurs propriétés ont été étudiées. D’un autre côté, nos nouvelles connaissances sur ces structures sont appliquées afin d’améliorer et de compléter l’étude des schémas de classification : dans ce domaine, d’autres types de familles de Moore sont associés aux ensembles de classes par certains coefficients de dissimilarité ([BB01]).

Ce chapitre est organisé comme suit. La section 2.1 rappelle quelques faits essentiels sur les ensembles quasi-fermés et les systèmes implicatifs complets sur  $S$ . La section 2.2 redonne les définitions des hiérarchies, classiques et modifiées (avec leur généralisation par les hiérarchies faibles) et des emboîtements hiérarchiques. La définition axiomatique des relations d’emboîtement sur  $S$ , commencée dans la section 2.2, est complétée dans la section 2.3, et l’équivalence entre espaces de fermeture et relations d’emboîtement est alors établie. Nous montrons aussi clairement que la relation d’emboîtement hiérarchique d’Adams est un cas particulier des relations d’emboîtement. Dans la section 2.4, une bijection directe entre systèmes implicatifs complets et emboîtements est obtenue grâce à une correspondance de Galois simple ; alors, inspirés par les résultats de Guigues et Duquenne ([GD86]) sur l’existence d’une base canonique d’implications, nous avons initié un travail similaire pour la relation d’emboîtement. Une “base d’emboîtement” est ainsi obtenue, en relation avec une des relations flèches associées à tout treillis fini. La section 2.5 est un retour à la classification. Munis des outils développés dans la section précédent, nous donnons une preuve simple et directe du résultat d’Adams. Nous explicitons ensuite la forme des bases canoniques des familles de Moore hiérarchiques (faibles), et nous caractérisons la base canonique des hiérarchies. A part pour le cas distributif, ce travail a été fait pour très peu de type de treillis. Dans notre conclusion, nous examinons quelques utilisations possibles de ces résultats et posons quelques problèmes ouverts.

## 2.1 Implications et systèmes implicatifs

### 2.1.1 Ensemble quasi-fermé

Soient  $\mathcal{F}$  une famille de Moore sur un ensemble  $S$ ,  $\varphi_{\mathcal{F}}$  la fermeture associée. On note par  $\mathcal{M}$  l'ensemble des familles de Moore sur  $S$ . Un ensemble  $Q \subseteq S$  est dit *quasi-fermé* si  $Q \notin \mathcal{F}$  et  $\mathcal{F} + \{Q\} \in \mathcal{M}$ , et est un ensemble *F-quasi-fermé* si  $Q$  est quasi-fermé et  $\varphi_{\mathcal{F}}(Q) = F$ . Un ensemble  $C \subseteq S$  est *critique* s'il existe  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $C$  est un ensemble  $F$ -quasi-fermé minimal.

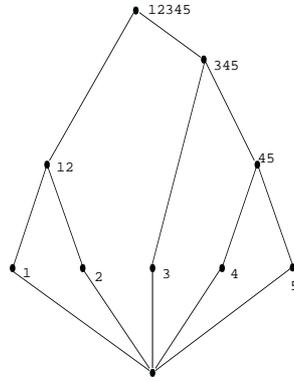


FIG. 2.1: Treillis hiérarchique sur un ensemble de cinq éléments.

**Exemple 2.1** Les ensembles quasi-fermés de la figure 2.1 sont 13, 14, 15, 23, 24, 34, 35, 123, 124, 125, 1245, 1345, 2345. L'ensemble des éléments critiques (quasi-fermés minimaux) est

- 13, 14, 15, 23, 24, 25 ayant comme fermeture 12345 ;
- 34, 35 ayant comme fermeture 345.

On a la propriété suivante :

**Proposition 2.2** Soit  $\mathcal{F}$  une famille de Moore et  $\mathcal{F}^c = \mathcal{P}(S) - \mathcal{F}$  la famille complémentaire de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{P}(S)$ . Pour tout  $A \subseteq S$ , si  $A \in \min \mathcal{F}^c$  alors  $A$  est un quasi-fermé de  $\mathcal{F}$  et donc est un élément critique de  $\mathcal{F}$ .

**Preuve :** Si  $A \in \min \mathcal{F}^c$  alors  $(\mathcal{F} + \{A\})$  est également une famille de Moore. En effet, tout  $F \in \mathcal{F}$  vérifie  $(F \cap A) \subseteq A$ , et donc  $A \in \min \mathcal{F}^c$  implique  $(F \cap A) \in \mathcal{F} + \{A\}$ .  $A$  est minimal, donc est un élément critique.  $\square$

On peut trouver diverses caractérisations des ensembles quasi-fermés dans [CM02].

### 2.1.2 Systèmes implicatifs

Nous introduisons ici une troisième notion, équivalente<sup>2</sup> aux deux fermetures et familles de Moore, et appelée systèmes implicatifs complets. Soit  $S$  un ensemble fini. Un *système implicatif*  $\Sigma$  sur  $S$  est une relation binaire sur  $\mathcal{P}(S) : \Sigma \subseteq \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ . Si  $(A, B) \in \Sigma$ , on note  $A \rightarrow_{\Sigma} B$  ou  $A \rightarrow B$  s'il ne peut y avoir de confusion. On dit que  $A$  implique  $B$  ou que  $A \rightarrow B$  est une *implication*<sup>3</sup> (de  $\Sigma$ ). La notion d'implication correspond à des considérations logiques simples : dans le cas d'implications entre individus par exemple, en reprenant l'exemple 1.49 d'écologie microbienne, on obtient que toute classe contenant  $D$  contient  $G$ , i.e. tous les attributs possédés par  $D$  le sont par  $G$ . Un autre exemple est [Duq95], dans lequel l'auteur étudie les possessions de paysans javanais, et obtient ainsi les implications *télévision*  $\rightarrow$  *matelas*  $\rightarrow$  *vélo*, i.e. ceux qui ont une télévision ont aussi un matelas, et ceux qui ont un matelas ont un vélo.

Un *système implicatif complet* est un système implicatif satisfaisant les conditions suivantes :

- (S1)  $B \subseteq A$  implique  $A \rightarrow B$  ;
- (S2) pour tous  $A, B, C \subseteq S$ ,  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  impliquent  $A \rightarrow C$  (transitivité) ;
- (S3) pour tous  $A, B, C, D \subseteq S$ ,  $A \rightarrow B$  et  $C \rightarrow D$  impliquent  $A \cup C \rightarrow B \cup D$ .

Un système implicatif complet peut donc être vu comme un préordre sur  $\mathcal{P}(S)$ , compatible avec  $\supseteq$  et union stable.

---

<sup>2</sup>Il existe en fait de nombreuses notions équivalentes aux fermetures et aux familles de Moore. Outre les relations d'emboîtement développées dans ce chapitre, on peut citer, parmi les plus célèbres, les *ordres colorés* [Nou00] et les *antichaînes maximales* [Nou00, MN96]. Une antichaîne est un ensemble ordonné ne contenant aucune paire d'éléments comparables, et elle est maximale si elle n'est pas strictement contenue dans une autre. En définissant une relation d'ordre sur ces antichaînes (par  $A < B$  si, pour tout  $y \in B - A$ , il existe  $x \in A$  tel que  $y \leq x$ ), on obtient que tout treillis est isomorphe au treillis des antichaînes maximales d'un ensemble ordonné. On trouvera dans B. Monjardet, *The presence of lattice theory in discrete problems of mathematical social sciences. Why ?*, à paraître, une définition des ordres colorés ainsi que de nombreux autres cryptomorphismes.

<sup>3</sup>On trouve aussi parfois le terme de *dépendance fonctionnelle* [DLM92, Mar73].

**Remarque 2.3** On dit que  $A \rightarrow B$  est une *implication élémentaire* si  $|B| = 1$ , et on peut remarquer que toute implication  $A \rightarrow B$  est équivalente à la conjonction d'implications élémentaires  $A \rightarrow x$ , avec  $x \in B$ , grâce aux propriétés (S1)-(S3).

Armstrong ([Arm74]) a montré qu'il existait une bijection entre les opérateurs de fermeture et les systèmes implicatifs complets. Un système implicatif  $\Sigma_\varphi$  est associé à toute fermeture  $\varphi$  sur  $S$  par  $A \rightarrow B \in \Sigma_\varphi$  si et seulement si  $B \subseteq \varphi(A)$ . Ce système implicatif est complet :

**Proposition 2.4** *Soit  $\varphi$  une fermeture  $S$ . Le système implicatif  $\Sigma_\varphi = \{A \rightarrow B : B \subseteq \varphi(A)\}$  est un système implicatif complet.*

**Preuve :** Si  $B \subseteq A$  alors  $B \subseteq \varphi(A)$  et donc  $A \rightarrow B$ . Pour la transitivité,  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  impliquent  $B \subseteq \varphi(A)$  et  $C \subseteq \varphi(B)$ , d'où, par (F1) et (F3),  $\varphi(B) \subseteq \varphi(A)$ . On a  $C \subseteq \varphi(A)$  donc  $A \rightarrow C$ . Pour la propriété (S3),  $A \rightarrow B, C \rightarrow D \iff B \subseteq \varphi(A), D \subseteq \varphi(C)$  d'où  $B \cup D \subseteq \varphi(A) \cup \varphi(C)$  et  $\varphi(A) \subseteq \varphi(A \cup C), \varphi(C) \subseteq \varphi(A \cup C)$ . Donc  $B \cup D \subseteq \varphi(A \cup C)$  i.e.  $A \cup C \rightarrow B \cup D$ . □

Inversement, une famille de Moore<sup>4</sup>  $\mathcal{F}_{[\Sigma]}$  (et, donc, une fermeture  $\varphi_{[\Sigma]}$ ) est associée à tout système implicatif complet par :

**Proposition 2.5** *Soit  $\Sigma$  un système implicatif complet sur  $S$ . L'ensemble  $\mathcal{F}_{[\Sigma]} = \{F \subseteq S : X \subseteq F \text{ et } X \rightarrow Y \text{ impliquent } Y \subseteq F\}$  est une famille de Moore.*

**Preuve :** On a trivialement  $S \in \mathcal{F}_{[\Sigma]}$ . Soit  $F, F' \in \mathcal{F}_{[\Sigma]}$ . Si  $X \rightarrow Y$  avec  $X \subseteq F$  et  $X \subseteq F'$ , alors  $X \subseteq F \cap F'$  d'où, avec  $F, F' \in \mathcal{F}_{[\Sigma]}$ ,  $Y \subseteq F \cap F'$  et  $F \cap F' \in \mathcal{F}_{[\Sigma]}$ . □

---

<sup>4</sup>En fait, on peut associer directement une fermeture  $\varphi_\Sigma$  à tout système implicatif complet  $\Sigma$  par  $\varphi_\Sigma(A) = \{X \subseteq S : X \rightarrow_\Sigma A\}$  pour tous  $A \subseteq S$ . Inversement, on peut aussi associer à toute famille de Moore  $\mathcal{F}$  un système implicatif complet  $\Sigma_{\mathcal{F}}$  par  $\Sigma_{\mathcal{F}} = \{X \rightarrow Y : \mathcal{F}^X \subseteq \mathcal{F}^Y\}$  avec  $\mathcal{F}^X = \{F \in \mathcal{F} : X \subseteq F\}$ . Nous avons ici privilégié le passage d'une fermeture à un système implicatif complet, et, inversement, d'un système implicatif complet à une famille de Moore afin de simplifier notre propos.

Soit  $\Sigma$  un système implicatif complet, et  $\mathcal{F}_{[\Sigma]}$  la famille de Moore associée. Une implication  $X \rightarrow Y$  est dite  $\Sigma$ -critique si  $X$  est un ensemble critique pour  $\mathcal{F}_{[\Sigma]}$  et  $Y = \varphi_{[\Sigma]}(X) - X$ . Guigues et Duquenne ([GD86]) ont montré que l'ensemble des implications de ce type forme la *base canonique* de  $\Sigma$ , dans le sens où il constitue un ensemble minimum d'implications générant le système entier  $\Sigma$  grâce à (S1-S3).

**Exemple 2.6** La base canonique liée à la figure 2.1 contient 6 implications qui sont :  
 $\{13 \rightarrow 245, 14 \rightarrow 235, 15 \rightarrow 234, 23 \rightarrow 145, 24 \rightarrow 135, 25 \rightarrow 134, 34 \rightarrow 5, 35 \rightarrow 4\}$

## 2.2 Hiérarchies et emboîtements

### 2.2.1 Hiérarchies et hiérarchies faibles

Les hiérarchies ont une place importante dans la littérature en classification, puisqu'elles correspondent aux arbres de classification. Parmi les multiples formalisations de ces objets, nous retiendrons la suivante : une hiérarchie  $\mathcal{H}$  sur  $S$  est un ensemble de sous-ensembles de  $S$  (*clusters*) satisfaisant les conditions :

- (H1)  $\emptyset \notin \mathcal{H}$ ;
- (H2)  $S \in \mathcal{H}$ ;
- (H3) pour tout  $s \in S$ ,  $\{s\} \in \mathcal{H}$ ; (*fermeture des singletons*)
- (H4) pour  $h, h' \in \mathcal{H}$ ,  $h \cap h' \in \{\emptyset, h, h'\}$ . (*arborescence*)

Ces conditions impliquent que, pour tout  $A \subseteq S$ , il y a une classe minimum  $A_{\mathcal{H}}$  dans  $\mathcal{H}$  contenant  $A$ .

Des définitions équivalentes des hiérarchies apparaissent dans la littérature en classification : une hiérarchie peut être définie comme l'ensemble des triplets  $st/u$  d'éléments de  $S$  tels que  $\{s, t\}_{\mathcal{H}} \subset \{s, t, u\}_{\mathcal{H}}$ . De tels ensembles de triplets ont été caractérisés par Colonus et Schultze ([CS81]). De façon plus générale, un *emboîtement* est une paire  $(A, B)$  de sous-ensembles de  $S$  telle que  $A_{\mathcal{H}} \subset B_{\mathcal{H}}$ ; ainsi, une hiérarchie est définie (clairement, de façon redondante) par l'ensemble de tous ses emboîtements.

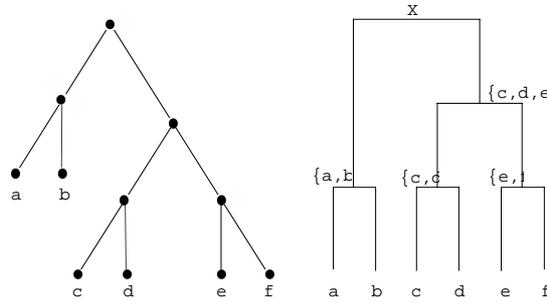


FIG. 2.2: Une hiérarchie comme graphe (gauche) et comme ensemble arborescent de classes (droite).

Ici, nous allons considérer des hiérarchies modifiées, avec un axiome “opposé” (H1’); maintenant, l’ensemble vide  $\emptyset$  appartient à toute hiérarchie  $\mathcal{H}$ . Alors  $\mathcal{H}$  devient une famille de Moore, et sera appelée une *famille de Moore hiérarchique*. On note  $\varphi_{\mathcal{H}}$  la fermeture associée à cette famille de Moore. Une famille de Moore est hiérarchique si les singletons sont fermés (propriété (H3)) et si elle satisfait une des propriétés suivantes :

- (H4) ou
- (H4’) Pour tout  $h \in \mathcal{H}, |h| \geq 1$ , l’ensemble  $\{h' \in \mathcal{H} : h \subseteq h'\}$  est totalement ordonné par inclusion ;
- (H4’’) Pour tout  $h \in \mathcal{H}, |h| \geq 2$ , les éléments de  $\mathcal{H}$  couverts par  $h$  dans le treillis  $(\mathcal{H}, \subseteq)$  forment une partition de  $h$  ;
- (H4’’’) Tout élément  $h$  de  $\mathcal{H}$ , à l’exception de  $\emptyset$  et de  $S$ , est inf-irréductible dans le treillis  $(\mathcal{H}, \subseteq)$ .

**Preuve :** Les implications  $(H4) \iff (H4')$  et  $(H4) \Rightarrow (H4''')$  sont triviales. Pour  $(H4) \Rightarrow (H4'')$ , si  $\mathcal{H}$  est arborescent, alors l’ensemble des éléments maximaux de  $\{H' \in \mathcal{H} : H' \subseteq H\}$ , qui est l’ensemble des éléments couverts par  $H$ , forme une partition de  $H$ . En effet, ils sont deux à deux disjoints (propriété d’arborescence), et comme  $\mathcal{H}$  est atomistique, leur union est bien  $H$ . Pour  $(H4'') \Rightarrow (H4)$ , par l’absurde, supposons  $H_1 \cap H_2 \notin \{\emptyset, H_1, H_2\}$ . Soit  $P_1, \dots, P_k$  la partition de  $\varphi_{\mathcal{H}}(H_1 \cup H_2)$ , il existe  $P_i$  et  $P_j$  couverts par  $\varphi_{\mathcal{H}}(H_1 \cup H_2)$  tels que  $H_1 \subseteq P_i$  et  $H_2 \subseteq P_j$ . On a donc  $P_i \cap P_j \supseteq H_1 \cap H_2$ , donc est non vide, ce qui est absurde. Pour  $(H4''') \Rightarrow (H4)$ , si tous les éléments sont inf-irréductibles, alors, pour tous  $H, H' \in \mathcal{H}$ ,  $H \cap H'$  est, ou  $0_{\mathcal{H}}$ , ou un élément inf-irréductible, donc  $H$  ou  $H'$ .  $\square$

L'opérateur de fermeture  $\varphi_{\mathcal{H}}$  associé à la famille de Moore hiérarchique  $\mathcal{H}$  est donné par  $\varphi_{\mathcal{H}}(A) = A_{\mathcal{H}}$ , pour tous  $A \subseteq S$ .

Dans une hiérarchie, deux classes sont soit disjointes, soit incluses l'une dans l'autre. Nous dirons que  $\mathcal{H}$  est une *hiérarchie binaire* si la partition de tout élément  $h$  de  $\mathcal{H}$  a exactement deux classes (i.e. il y a exactement deux éléments de  $\mathcal{H}$  couverts par  $h$ ). Nous faisons référence à Bandelt et Dress ([BD89]) pour la généralisation suivante, permettant des classes empiétantes. Une famille de Moore  $\mathcal{W}$  sur  $S$  est une *hiérarchie faible* (ou une quasi-hiérarchie pour Diatta et Fichet ([DF94])) si les singletons sont fermés et si elle satisfait la propriété suivante (W) :

(W) Pour tous  $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$ ,  $w_1 \cap w_2 \cap w_3 \in \{w_1 \cap w_2, w_1 \cap w_3, w_2 \cap w_3\}$ .

Bandelt et Dress ([BD89]) ont montré que toute classe de cardinalité supérieure ou égale à deux  $w$  d'une hiérarchie faible  $\mathcal{W}$  sur  $S$  est égale à  $\varphi_{\mathcal{W}}(st)$ , la classe minimale contenant  $s$  et  $t$ , avec  $s$  et  $t$  dans  $S$ . Il n'est pas difficile de trouver de tels éléments  $s$  et  $t$  : soient deux classes  $w_1$  et  $w_2$ , couvertes par  $w$ , et  $s \in w_1 - w_2, t \in w_2 - w_1$ . Maintenant,  $w_1, w_2 \not\subseteq \varphi_{\mathcal{W}}(st)$  impliquent que le triplet  $w_1, w_2, \varphi_{\mathcal{W}}(st)$  contredit la propriété (W) ; donc  $\varphi_{\mathcal{W}}(st) = w$ .

Il est facile de voir qu'une hiérarchie est une hiérarchie faible. Les hiérarchies faibles contiennent d'autres types intéressants de modèles de classification, comme les *pyramides* (ou pseudo-hiérarchies pour Diatta et Fichet ([DF94])), qui sont des familles de Moore telles que tout élément est un intervalle d'un ordre linéaire fixé sur  $S$ . D'un autre côté, les hiérarchies faibles sont des hiérarchies  $k$ -faibles ([BB01, Bru01]), pour lesquelles l'intersection de  $k + 1$  classes est égale à l'intersection de  $k$  classes parmi elles. Les hiérarchies faibles et les hiérarchies correspondent à, respectivement,  $k = 2$  et  $k = 1$ .

## 2.2.2 Les relations d'emboîtement pour les hiérarchies

Comme nous l'avons rappelé précédemment, Adams considère dans son article paru en 1986 une classe de relations binaires sur  $\mathcal{P}(S)$ , appelée *relations d'emboîtement*<sup>5</sup>. Il les utilise afin de caractériser sa célèbre méthode de consensus sur les hiérarchies (on peut voir aussi [Ada72, Vac94, Lec98]). Une relation  $\in \subseteq \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$  est une *relation d'emboîtement hiérarchique* (REH) si elle satisfait les propriétés suivantes : pour tous  $A, B, C \subseteq S, s \in S$ ,

- (OH1)  $A \in B$  implique  $A \subset B$ ;
- (OH2)  $A \subset B \subset C$  implique  $[A \in C \iff A \in B \text{ ou } B \in C]$ ;
- (HN0)  $\emptyset \in \{s\}$ ;
- (HN1)  $A \notin \{\emptyset, \{s\}\}$  implique  $\{s\} \in A \cup \{s\}$ ;
- (HN2)  $A \in C$  et  $B \in C$  impliquent  $A \cup B \in C$  ou  $A \cap B = \emptyset$ .

La condition (OH1) indique que seul un sous-ensemble strict peut être emboîté, et donc que la relation  $\in$  est asymétrique ; (OH2) est une forme limitée de transitivité. La condition (HN1) indique que tout singleton s'emboîte dans n'importe quel sur-ensemble et (HN2) dit que si un ensemble emboîte deux ensembles, alors ou il emboîte leur union, ou ils sont disjoints.

**Remarque 2.7** Dans notre version, (HN0) est ajouté et (HN1) est modifié comparative-ment à la version d'Adams, car on prend en compte l'ensemble vide. (OH2) est aussi modifié, et la version originale (équivalente) est  $A \in B$  implique (i)  $C \subset A$  implique  $C \in B$ ; (ii)  $A \subset C \subset B$  implique  $A \in C$  or  $C \in B$ ; (iii)  $B \subset C$  implique  $A \in C$ .

Notons par  $\notin$  la relation complémentaire de  $\in$  dans  $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$  et posons, pour tout  $A \subset S$ ,  $h_{\in}(A) = \{s \in S : A \notin A \cup \{s\}\}$ . On peut remarquer que  $h_{\in}(\emptyset) = \emptyset$ ,  $s \in A$  implique  $A \notin A \cup \{s\}$  et donc,  $h_{\in}(\{s\}) = \{s\}$  et  $h_{\in}(S) = S$ . Le résultat principal d'Adams est :

**Théorème 2.8** ([Ada86]) *Une REH  $\in_{\mathcal{H}}$  est associée à toute hiérarchie  $\mathcal{H}$  par  $A \in_{\mathcal{H}} B$*

---

<sup>5</sup>Cette terminologie est issue de la traduction directe de celle utilisée par Adams (*nesting relation*). Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons plutôt le terme de *relation d'emboîtement hiérarchique*.

si et seulement si  $A \subset B$  et  $\varphi_{\mathcal{H}}(A) \subset \varphi_{\mathcal{H}}(B)$ . Inversement, étant donné une REH  $\in$ , l'ensemble  $\mathcal{H} \in = \{h \in (A) : A \subseteq S\}$  est une famille de Moore hiérarchique sur  $S$ . Les deux transformations précédentes sont inverses l'une de l'autre.

Les propriétés (OH1) et (OH2) sont vérifiées dès que  $A \in B$  signifie  $A \subset B$  et  $\varphi_{\mathcal{H}}(A) \subset \varphi_{\mathcal{H}}(B)$ ; c'est trivial pour (OH1) et, dans le chapitre suivant, nous le démontrerons pour (OH2) dans un cadre plus général. La propriété (HN0) provient du fait que l'ensemble vide est fermé par  $\varphi_{\mathcal{H}}$ . La condition (HN1) signifie que tout singleton (ensemble ayant un seul élément) est fermé par  $\varphi_{\mathcal{H}}$ , ce qui implique l'atomisticité du treillis  $(\mathcal{H}, \subseteq)$ , et (HN2) est en relation avec la condition (H4) (cf. section 2.5.1). La question maintenant est de savoir si, en les remplaçant par des axiomes plus faibles (ou différents), nous aurions une correspondance avec des familles de Moore plus générales (ou différentes). Une réponse positive est donnée dans le chapitre suivant.

## 2.3 Fermetures et emboîtements

Dans cette section, nous définissons les relations d'emboîtement (généralisées) avant de montrer qu'elles généralisent les relations d'emboîtement d'Adams, et enfin nous établissons une bijection entre fermetures et emboîtements.

### 2.3.1 La relation d'emboîtement associée à un espace de fermeture

Soit  $(S, \varphi)$  un espace de fermeture, et  $\in_{\varphi}$  la relation binaire sur  $\mathcal{P}(S)$  définie par :

$$A \in_{\varphi} B \text{ si } A \subset B \text{ et } \varphi(A) \subset \varphi(B) \text{ pour tous } A, B \subseteq S$$

**Proposition 2.9** *La relation binaire  $\in_{\varphi}$  satisfait (OH1), (OH2) et la propriété suivante, pour tous  $A, B, C \subseteq S$  :*

$$(OH3) \text{ pour tous } A, B \subseteq S, A \in_{\varphi} A \cup B \Rightarrow A \cap B \in_{\varphi} B$$

**Preuve :** La propriété (OH1) est satisfaite par  $\in_{\varphi}$  par définition. Pour (OH2), soit  $A, B, C \subseteq S$  tels que  $A \subset B \subset C$ . Si  $B \in_{\varphi} C$ , on a  $\varphi(A) \subseteq \varphi(B) \subset \varphi(C)$  et donc,  $A \in_{\varphi} C$ . De la même façon,  $A \in_{\varphi} B$  implique  $A \in_{\varphi} C$ . Inversement, si  $A \in_{\varphi} C$  avec  $A \subset$

$B \subset C$ , alors  $\varphi(A) \subseteq \varphi(B) \subseteq \varphi(C)$ , avec une de ces inclusions qui doit être stricte, car  $\varphi(A) \subset \varphi(C)$ , et alors  $A \in_{\varphi} B$  ou  $B \in_{\varphi} C$ .

Pour (OH3), si  $A \in_{\varphi} A \cup B$  alors  $A \subset A \cup B$  donc  $A \cap B \subset B$ . Si on suppose que  $\varphi(A \cap B) = \varphi(B)$ , on a  $B \subseteq \varphi(B) = \varphi(A \cap B) \subseteq \varphi(A) \cap \varphi(B)$  donc  $\varphi(B) \subseteq \varphi(A)$  et alors  $\varphi(A) \cup \varphi(B) = \varphi(A)$ . Ainsi  $\varphi(\varphi(A) \cup \varphi(B)) = \varphi(A) \subset \varphi(A \cup B)$ , ce qui contredit la propriété d'indépendance de chemin. D'où  $A \cap B \in_{\varphi} B$ .  $\square$

Cette proposition justifie la définition suivante : une relation binaire  $\in$  sur  $\mathcal{P}(S)$  est une **relation d'emboîtement**<sup>6</sup> sur  $S$  vérifiant les propriétés

- (OH1)  $A \in B$  implique  $A \subset B$ ;
- (OH2)  $A \subset B \subset C$  implique  $[A \in C \iff (A \in B \text{ ou } B \in C)]$ ;
- (OH3) pour tous  $A, B \subseteq S$ ,  $A \in_{\varphi} A \cup B \Rightarrow A \cap B \in_{\varphi} B$ .

Dans la proposition suivante, nous donnons une condition alternative à la condition (OH3), avant de montrer que c'est un affaiblissement de la condition d'Adams (HN2), et donc que toute relation d'emboîtement hiérarchique est une relation d'emboîtement :

**Proposition 2.10** *Quand la propriété (OH2) est vérifiée, la propriété (OH3) est équivalente à la propriété suivante :*

$$(OH3') \quad A \in C \text{ et } B \in C \text{ impliquent } A \cup B \in C \text{ ou } A \cap B \in A$$

**Preuve :** Supposons (OH3'). Considérons  $A, B \subseteq S$  tels que  $A \in A \cup B$  et montrons que  $A \cap B \in B$ . Si  $A \cap B \subset A \subset A \cup B$  alors  $A \cap B \in A \cup B$ , et, ainsi,  $A \cap B \in B$  ou  $B \in A \cup B$ . Pour le dernier cas, par (OH3'), on a  $A \cup B \in A \cup B$ , ce qui est impossible, ou  $A \cap B \in B$ , ce qui termine cette partie de la preuve. Si on n'a pas  $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ , alors  $A \subset B$  (le cas  $A = B$  est impossible car on suppose que  $A \in A \cup B$ ), d'où  $A \cap B = A \in A \cup B = B$ . Inversement, supposons que (OH3) est vérifiée. Soient  $A \in C, B \in C$  et  $A \cap B \notin A$ . Si  $B = A \cup B$ , alors  $A \cup B \in C$ . Sinon, par (OH3),  $B \notin A \cup B$  avec  $B \subset A \cup B \subset C$  (le cas

---

<sup>6</sup>Nous avons proposé, comme terminologie anglaise, le terme d'*overhanging relation*, car celui de *nesting* (emboîtement) risquait de créer des confusions. L'idée est qu'un sous-ensemble  $A$  de  $S$  dépend (*hangs*) de sa fermeture  $\varphi(A)$ . Ainsi, si  $A \subset B$ , on a soit  $\varphi(A) = \varphi(B)$ , soit  $\varphi(A) \subset \varphi(B)$ ; dans le second cas, on dit que  $B$  *surplombe* (*overhangs*)  $A$ .

$A \cup B = C$  est impossible car on aurait  $B \in A \cup B$  donc, par (OH2),  $A \cup B \in C$ .

□

**Proposition 2.11** *Une relation d'emboîtement hiérarchique est une relation d'emboîtement.*

**Preuve :** Il suffit de montrer que (HN2) implique (OH3'). Pour tous  $A, B \subseteq S$ , si  $A \cap B \neq \emptyset$ , alors  $A \in C$  et  $B \in C$  impliquent, par (HN2),  $A \cup B \in C$ , CQFD.

□

**Exemple 2.12** La relation d'emboîtement associée au treillis de la figure 2.3 est, outre l'ensemble vide qui est emboîté dans tout sur-ensemble :

$$\begin{array}{llllll}
 a \in ab & b \in ab & c \in ac & d \in ad & ab \in abd & cd \in acd \\
 a \in ac & b \in bc & c \in bc & d \in bd & ab \in abcd & cd \in bcd \\
 a \in ad & b \in bd & c \in cd & d \in abd & ac \in acd & cd \in abcd \\
 a \in abc & b \in abc & c \in abc & d \in acd & ac \in abcd & abc \in abcd \\
 a \in abd & b \in abd & c \in acd & d \in bcd & bc \in bcd & \\
 a \in acd & b \in bcd & c \in bcd & d \in abcd & bc \in abcd & \\
 a \in abcd & b \in abcd & c \in abcd & & & 
 \end{array}$$

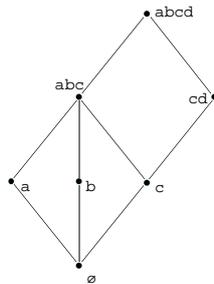


FIG. 2.3: Un exemple de treillis  $L$ .

### 2.3.2 D'une relation d'emboîtement à une fermeture

Maintenant, nous considérons une relation d'emboîtement  $\in$ , qui est une relation binaire sur  $\mathcal{P}(S)$  satisfaisant les propriétés (OH1-OH3). De la même façon que dans la section 2.2.2, nous associons à  $\in$  une application  $\varphi_{\in}$  par

$$\varphi_{\in}(A) = \{s \in S : A \notin A \cup \{s\}\}$$

pour tous  $A \subseteq S$ . Dans la suite,  $\varphi \in$  sera écrit  $\varphi$ . Dans cette section, nous allons maintenant démontrer que  $\varphi$  est une fermeture. Établissons d'abord quelques propriétés vérifiées par les relations d'emboîtement.

**Proposition 2.13**  $A \not\subseteq B$  pour tout  $B \subseteq S$  tel que  $A \subseteq B \subseteq \varphi(A)$ .

**Preuve :** Le résultat est vrai si  $|\varphi(A) - A| \leq 1$  par définition de  $\varphi$ . Considérons un sous-ensemble  $B$  de  $\varphi(A)$  tel que  $A \subset B$  et  $A \not\subseteq B$ . Soit  $s \in \varphi(A) - B$ . Si  $A \in B \cup \{s\}$ , alors, en appliquant (OH2) à  $A \subset B \subset B \cup \{s\}$ , avec  $A \not\subseteq B$ , on obtient  $B \in B \cup \{s\}$ . Ainsi, par (OH3),  $A \in A \cup \{s\}$ , ce qui est impossible. On a donc  $A \not\subseteq B \cup \{s\}$ , ce qui achève la démonstration. □

**Proposition 2.14**  $s \notin \varphi(A)$  implique  $A \in \varphi(A) \cup \{s\}$ .

**Preuve :** Ce résultat est trivial si  $A = \varphi(A)$ . Sinon, on a  $A \subset A \cup \{s\} \subset \varphi(A) \cup \{s\}$ , avec  $A \in A \cup \{s\}$ . En appliquant (OH2), on a  $A \in \varphi(A) \cup \{s\}$ . □

Nous allons dans la proposition suivante généraliser la proposition 2.14 à tout ensemble :

**Proposition 2.15**  $B \not\subseteq \varphi(A)$  implique  $A \in \varphi(A) \cup B$ .

**Preuve :** Si  $A = \varphi(A)$ , alors, si  $|B - A| > 1$ , on a, pour tout  $s \in B - A$ ,  $A \subset A \cup \{s\} \subset A \cup (B - A)$  et  $A \in A \cup \{s\}$ , donc, par (OH2),  $A \in A \cup B$ .

Sinon, si  $A \subset \varphi(A)$ , on a  $A \subset A \cup (B - \varphi(A)) \subset \varphi(A) \cup (B - \varphi(A))$  et  $A \in A \cup (B - \varphi(A))$ . En choisissant  $s \in B - \varphi(A)$  et en appliquant (OH2) à  $A \subset A \cup \{s\} \subset A \cup (B - \varphi(A))$ , on a  $A \in A \cup \{s\}$ . Alors,  $A \in \varphi(A) \cup (B - \varphi(A)) = \varphi(A) \cup B$ . □

Munis de ces trois propositions, nous pouvons maintenant établir le fait que l'application  $\varphi$  associée à toute relation d'emboîtement comme ci-dessus est une fermeture sur  $\mathcal{P}(S)$ .

**Théorème 2.16** *Soit  $\subseteq$  une relation d'emboîtement. L'application  $\varphi$  définie par  $\varphi(A) = \{s \in S : A \not\subseteq A \cup \{s\}\}$  pour tout  $A \subseteq S$  est une fermeture sur  $\mathcal{P}(S)$ .*

**Preuve :** L'extensivité de  $\varphi$  est triviale car, si  $s \in A$ ,  $A = A \cup \{s\}$  d'où  $A \not\subseteq A \cup \{s\}$ . Pour l'idempotence, soit  $s \in S$  tel que  $s \notin \varphi(A)$ , et  $s \in \varphi^2(A)$ , i.e.  $\varphi(A) \not\subseteq \varphi(A) \cup \{s\}$ . Ainsi  $A \not\subseteq \varphi(A)$  (proposition 2.13),  $\varphi(A) \not\subseteq \varphi(A) \cup \{s\}$  et  $A \subseteq \varphi(A) \cup \{s\}$  (proposition 2.14) contredisent (OH2). Donc de tels éléments  $s$  ne peuvent pas exister et  $\varphi\varphi(A) = \varphi(A)$ . Pour l'isotonie de  $\varphi$ , soient  $A, B \subseteq S$  avec  $A \subset B$  et  $s \in \varphi(A)$  (le cas  $A = B$  est trivial). Si  $s \notin \varphi(B)$ , on a  $B \subseteq B \cup \{s\} = B \cup (A \cup \{s\})$ , d'où, par (OH3),  $(A \cup \{s\}) \cap B = A \subseteq A \cup \{s\}$ , ce qui est absurde.

□

Pour finir ce paragraphe, considérons un opérateur de fermeture  $\varphi$  sur  $\mathcal{P}(S)$  et la relation d'emboîtement associée  $\subseteq_\varphi$ , comme décrit dans la section 2.3.1. Alors, pour tout  $A \subseteq S$ , les éléments de  $\varphi(A) - A$  sont exactement les  $s \in S$  tels que  $A \not\subseteq A \cup \{s\}$ . Ainsi, utiliser l'application  $\subseteq \rightarrow \varphi \subseteq$  définie précédemment sur  $\subseteq_\varphi$  permet de retrouver la fermeture initiale  $\varphi$ . Finalement, on a :

**Théorème 2.17** *Les applications  $\varphi \rightarrow \subseteq_\varphi$  et  $\subseteq \rightarrow \varphi \subseteq$  sont deux bijections inverses l'une de l'autre entre l'ensemble des fermetures sur  $S$  et l'ensemble des relations d'emboîtements sur  $S$ .*

## 2.4 Implications et emboîtements

Considérons un espace de fermeture  $(S, \varphi)$ . Dans les sections 2.1.2 et 2.3.1, deux relations binaires ont été associées à cet espace :

- un système implicatif complet  $\Sigma$  (i.e. une relation binaire vérifiant (S1-S3));
- une relation d'emboîtement  $\subseteq$  (i.e. une relation binaire vérifiant (OH1-OH3)).

Ce chapitre est dévolu aux relations existant entre  $\Sigma$  et  $\subseteq$ . Dans la partie 2.4.1, une correspondance directe entre systèmes implicatifs complets et emboîtements est obtenue grâce à une correspondance de Galois. En suivant Guigues et Duquenne ([GD86]), qui

affirment que tout système implicatif complet  $\Sigma$  admet une base canonique  $\Sigma^*$ , sous-ensemble de cardinalité minimum de  $\Sigma$  permettant de reconstruire entièrement  $\Sigma$  par les propriétés (S1-S3), nous effectuons un travail similaire dans le sous-chapitre 2.4.2 en exhibant un sous-ensemble réduit de  $\in$ , associé aux célèbres relations flèches d'un treillis.

### 2.4.1 Emboîtements et systèmes implicatifs complets

Soit  $\varphi$  une fermeture sur  $\mathcal{P}(S)$ ,  $\Sigma$  son système implicatif complet associé et  $\in$  sa relation d'emboîtement associée. Pour tous  $A, B \subseteq S$ , on a :

**Proposition 2.18**

$$A \notin A \cup B \iff A \rightarrow B \in \Sigma$$

**Preuve :** Il faut montrer que  $\varphi(A) = \varphi(A \cup B)$  si et seulement si  $B \subseteq \varphi(A)$ . La condition nécessaire est évidente ( $B \subseteq \varphi(A \cup B) = \varphi(A)$ ). Inversement,  $B \subseteq \varphi(A)$  implique  $\varphi(A \cup B) = \varphi(\varphi(A) \cup B) = \varphi^2(A) = \varphi(A)$ .

□

Il existe une bijection entre les relations d'emboîtement et les systèmes implicatifs complets sur  $\mathcal{P}(S)$ , qui a déjà été établie par le fait que les deux sont en correspondance avec les fermetures. Cette bijection est donnée par une correspondance de Galois sur le treillis  $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S)^2), \subseteq)$  de toutes les relations binaires sur  $\mathcal{P}(S)$ . Considérons les deux applications : pour  $R, T \subseteq \mathcal{P}(S)^2$ ,

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow f(R) = \{(A, B) : (A, A \cup B) \notin R\} \\ g : T &\rightarrow g(T) = \{(A, A \cup B) : (A, B) \notin T\} \end{aligned}$$

**Proposition 2.19** *La paire  $(f, g)$  est une correspondance de Galois sur  $(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S)^2), \subseteq)$ .*

**Preuve :** Les deux applications sont trivialement antitones. Pour l'extensivité de  $fg$ , si  $(A, B) \in T$ , alors  $(A, A \cup B) \notin g(T)$  donc  $(A, B) \in fg(T)$ ; pour l'extensivité de  $gf$ , si  $(A, B) \in R$ , alors  $(A, B - A) \notin f(R)$  donc  $(A, B) \in gf(R)$ .

□

**Proposition 2.20** *Si  $\in$  est une relation d'emboîtement, alors  $f(\in)$  est un système implicatif complet.*

**Preuve :** Notons par  $\rightarrow$  la relation  $f(\in)$ , c'est à dire  $A \rightarrow B$  si  $A \notin A \cup B$ . Montrons qu'elle vérifie les trois axiomes (S1-S3) des systèmes implicatifs complets.

Pour (S1), on peut remarquer que  $B \subseteq A$  implique  $A = A \cup B$  alors  $A \notin A \cup B$ , donc  $A \rightarrow B$ . La propriété de transitivité (S2) est équivalente à  $A \in A \cup C \Rightarrow (A \rightarrow B \Rightarrow B \in B \cup C)$ , et,  $A \in A \cup C$  implique  $A \in A \cup B \cup C$ .  $A \notin A \cup B$  implique  $A \cup B \in A \cup B \cup C$ . Donc  $(A \cap C) \cup B \in B \cup C$  par (OH3) et alors, par (OH2),  $B \in B \cup C$ .

Supposons que  $A \cup C \in A \cup B \cup C \cup D$ ,  $A \notin A \cup B$  et  $C \notin C \cup D$ . On a  $A \cup C \subset A \cup B \cup C \subset A \cup B \cup C \cup D$ ; on a donc par (OH2) deux possibilités. Soit  $A \cup C \in A \cup B \cup C$  d'où, par (OH3),  $(A \cup C) \cap (A \cup B) \in A \cup B$  et donc, par (OH2),  $A \in A \cup B$ , ce qui est absurde. Soit  $A \cup B \cup C \in A \cup B \cup C \cup D$  alors  $(A \cup B \cup C) \cap (C \cup D) \in C \cup D$  et  $C \in C \cup D$ , ce qui est impossible.

□

**Proposition 2.21** *Si  $\rightarrow_\Sigma$  est un système implicatif complet, alors  $g(\rightarrow_\Sigma)$  est une relation d'emboîtement.*

**Preuve :** Notons par  $\in$  la relation binaire  $g(\rightarrow_\Sigma) = \{(A, A \cup B) : A \not\rightarrow_\Sigma B\}$ , et montrons qu'elle vérifie les trois axiomes (OH1-OH3).

Pour (OH1), si  $A \in B$ , alors il existe  $B' \subseteq S$  tel que  $A \in A \cup B'$  avec  $A \cup B' = B$  et  $A \not\rightarrow_\Sigma B'$ . Pour tout  $C \subseteq S$  tel que  $C \subseteq A$ , on a  $A \rightarrow_\Sigma C$ , donc  $B' \not\subseteq A$ . D'où  $A \subset B$  et (OH1) est satisfait.

Pour (OH2), supposons que  $A \subset B \subset C$ . Notons  $B = A \cup B'$ , et  $C = B \cup B''$ . Montrons que  $A \in C$  implique  $A \in B$  ou  $B \in C$ . On a donc  $A \not\rightarrow_\Sigma B''$ . Supposons que  $A \rightarrow_\Sigma B'$  et  $B \rightarrow_\Sigma B''$ . Par (S1) et (S3), on a  $A \rightarrow_\Sigma A \cup B'$ , d'où, par transitivité,  $A \rightarrow_\Sigma B''$ , contradiction. Inversement, supposons que  $A \in B$  et montrons que  $A \in C$ . Si  $A \rightarrow_\Sigma B' \cup B''$ , alors  $A \rightarrow_\Sigma B'$ , ce qui contredit le fait que  $A \in B$ . Donc  $A \in C$ .

Pour (OH3), supposons  $A \in A \cup B$ , i.e.  $A \not\rightarrow_\Sigma B$ . Par l'absurde, supposons que  $A \cap B \notin B = (A \cap B) \cup (B - A)$ , i.e.  $A \cap B \rightarrow_\Sigma B - A$ . Par (S1-S3), on a  $A = (A \cap B) \cup A \rightarrow_\Sigma (B - A) \cup A = A \cup B \rightarrow_\Sigma B$ , donc  $A \rightarrow_\Sigma B$ , ce qui est une contradiction.

□

**Théorème 2.22** *L'ensemble ordonné des relations d'emboîtement, muni de la relation d'inclusion, et l'ensemble ordonné des systèmes implicatifs complets, avec la relation d'inclusion, sont deux treillis duaux.*

### 2.4.2 Une base d'emboîtement

Soit  $m \in M_L$  un élément inf-irréductible d'un treillis fini  $L$ , et considérons l'idéal principal  $(m] = \{x \in L : x \leq m\}$ , son complément  $U = L - (m]$  (une partie finissante de  $L$ ) a un plus petit élément minimal  $j$ . Alors,  $j$  est un élément sup-irréductible de  $S$ , et on pose  $j \not\leq m$ . Cette relation *flèche bas* et son dual, la relation *flèche haut* ont été définies par Wille ([Wil83]) et permettent des caractérisations simple de nombreuses classes de treillis (on peut voir [Gan95, Cas98]). On peut remarquer que, si  $j \not\leq m$ , alors  $j \wedge m$  est l'unique élément de  $L$  couvert par  $j$ . Nous appliquons ces notions au treillis  $(\mathcal{F}, \subseteq)$  associé à la famille de Moore  $\mathcal{F}$  sur  $S$ . Dans la suite, nous considérerons une relation d'emboîtement  $\in$  et une famille de Moore  $\mathcal{F}$  tels que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\in}$ , et donc  $\in = \in_{\mathcal{F}}$ . Posons  $\in^* = \{(m, j \cup m) : j \in J_{\mathcal{F}}, m \in M_{\mathcal{F}} \text{ et } j \not\leq m\}$ .

**Proposition 2.23**  $\in^* \subseteq \in$ .

**Preuve :** Si  $j \not\leq m$ , on a  $j \not\leq m$  et donc  $m = \varphi(m) \subset \varphi(j \cup m)$ .

□

**Théorème 2.24** *Soient  $A, B \subseteq S$  tels que  $A \subset B$ . Alors on a  $A \in B$  si et seulement si  $j \not\leq m$  pour  $m \in M_{\mathcal{F}}, j \in J_{\mathcal{F}}$  tels que  $A \subseteq m, j \subseteq B$ .*

**Preuve :** Si on a  $j \not\leq m$  alors  $m \in m \cup j$ , et  $m \cup j \subseteq m \cup B$  donc  $m \in m \cup B$  (OH2). Alors, par (OH3),  $m \cap B \in B$  or  $A \subset m \cap B$  donc  $A \in B$  par (OH2).

Supposons  $A \in B$ . Alors, pour la fermeture  $\varphi_{\mathcal{F}}$  associée à  $\mathcal{F}$ ,  $\varphi_{\mathcal{F}}(A) \subset S$  et donc il existe au moins un élément inf-irréductible  $m$  tel que  $\varphi_{\mathcal{F}}(A) \subseteq m$  et  $B \not\subseteq m$ . Donc  $B$  est un élément de  $\mathcal{F} - (m]$  et tout élément minimal  $j$  dans cet ensemble tel que  $j \subseteq B$  satisfait  $j \in J_{\mathcal{F}}$  et  $j \not\leq m$ .

□

Ainsi, toute paire emboîtée  $A, B$  avec  $A \in B$  peut être obtenue en appliquant les propriétés (OH2) et (OH3) à une paire de  $\in^*$ . L'ensemble de toutes les paires de ce type

permet de reconstruire entièrement la relation  $\subseteq$  et peut être appelée *base d'emboîtement* pour celle-ci. Pour justifier ce terme de “base”, supposons que le théorème 2.24 reste vrai pour un sous-ensemble propre  $\subseteq^{**}$  de  $\subseteq^*$ , et considérons une paire  $(m, m \cup j) \in \subseteq^* - \subseteq^{**}$ , avec  $m \in M_{\mathcal{F}}$ ,  $j \in J_{\mathcal{F}}$ , et  $j \not\subseteq m$ . Par le théorème 2.24 restreint à  $\subseteq^{**}$ , il existe une paire  $(m', m' \cup j') \in \subseteq^{**}$ , avec  $m' \subseteq m$ ,  $m' \in M_{\mathcal{F}}$ ,  $j \subseteq j' \in J_{\mathcal{F}}$ , et  $j' \not\subseteq m'$ . Mais, par définition de la relation flèche, cette situation n'est pas compatible avec  $j \not\subseteq m$ .

**Exemple 2.25** La table réduite associée au treillis  $L$  de la figure 2.3 de l'exemple 2.12 est donnée dans la table 2.1 et la base d'emboîtement est déduite des paires  $b \not\subseteq a, c \not\subseteq a, a \not\subseteq b, c \not\subseteq b, cd \not\subseteq abc, a \not\subseteq cd$  et  $b \not\subseteq cd$ , et est l'ensemble  $\subseteq^* = \{(a, ab), (a, ac), (b, ab), (b, bc), (abc, abcd), cd, acd), (cd, bcd)\}$ .

	a	b	abc	cd
a	×	↗	×	↗
b	↗	×	×	↗
c	↗	↗	×	×
cd			↗	×

TAB. 2.1: La table réduite du treillis  $L$ .

**Remarque 2.26** La relation  $\not\subseteq$  permet une caractérisation simple des treillis atomistiques, pour lesquels toute case de leur table réduite contient ou une  $\times$ , ou une  $\not\subseteq$ . Ainsi, la base d'emboîtement d'un treillis atomistique est  $\{(m, j \cup m) : j \in J, m \in M \text{ et } j \not\subseteq m\}$ .

## 2.5 Les relations d'emboîtement en classification

Comme nous l'avons dit dans la section 2.2.2, l'idée des relations d'emboîtement est apparue à propos d'un problème lié à la classification hiérarchique. Dans ce chapitre, nous allons revenir sur de telles questions, en appliquant à la classification les résultats des chapitres précédents. Dans la section 2.5.1, nous utilisons notre savoir sur les relations entre fermetures et emboîtements afin de donner une preuve véritablement simplifiée du théorème d'Adams. Dans les parties 2.5.2 et 2.5.3, nous caractérisons les bases canoniques d'implications des hiérarchies, et explicitons la base canonique et la base d'emboîtement des hiérarchies faibles.

### 2.5.1 Une preuve simple du théorème d'Adams

Nous avons dit, dans la section 2.2.2, que les conditions (HN1) et (HN2) correspondaient au cas des hiérarchies, et étaient en relation avec, respectivement, le fait que les singletons soient fermés (condition (H3)) et l'arborescence (condition (H4)). Nous allons maintenant démontrer cette assertion, et ainsi donner une preuve simple du théorème d'Adams.

**Proposition 2.27** *Soit  $\varphi$  une fermeture sur  $S$ , et  $\in$  sa relation d'emboîtement associée. Alors,  $\in$  satisfait la condition (HN1) si et seulement si  $\varphi(\{s\}) = \{s\}$  pour tout  $s \in S$  (condition (H3)).*

**Preuve :** Supposons que tout singleton est fermé par  $\varphi$ . Soient  $\emptyset \subset A \subseteq S$ ,  $\{s\} \neq A$ . On a  $\{s\} \subset A \cup \{s\} \subseteq \varphi(A \cup \{s\})$  et  $\varphi(\{s\}) = \{s\}$  donc  $\varphi(\{s\}) \subset \varphi(A \cup \{s\})$ , i.e.  $\{s\} \in A \cup \{s\}$ . Inversement, si  $\in$  satisfait (HN1) et  $A \neq \emptyset$ , on a  $\{s\} \subset A \cup \{s\}$  et  $\varphi(\{s\}) \subset \varphi(A \cup \{s\})$  pour tout  $A \neq \{s\}$ . Supposons  $A \subseteq \varphi(\{s\})$  avec  $A \neq \{s\}$ , alors  $\varphi(\{s\}) = \varphi(A \cup \{s\})$  ce qui est absurde, donc  $\varphi(\{s\}) = \{s\}$ .

□

**Proposition 2.28** *Soit  $\varphi$  une fermeture sur  $S$ , et  $\in$  sa relation d'emboîtement associée. Alors,  $\in$  satisfait la condition (HN2) si et seulement si  $\mathcal{H}_\varphi$  satisfait la condition (H4), i.e.  $h \cap h' \in \{\emptyset, h, h'\}$  pour tous  $h, h' \in \mathcal{H}_\varphi$ .*

**Preuve :** Pour (H4)  $\Rightarrow$  (HN2), soient  $A \in C, B \in C$  avec  $A \cap B \neq \emptyset$ . On a  $\varphi(A) \subset \varphi(C)$  et  $\varphi(B) \subset \varphi(C)$ , et, par la condition (H4),  $\varphi(A) \cap \varphi(B) \in \{\varphi(A), \varphi(B)\}$ . Alors,  $\varphi(A) \cup \varphi(B) \in \{\varphi(A), \varphi(B)\}$ , i.e.  $\varphi(\varphi(A) \cup \varphi(B)) \in \{\varphi(A), \varphi(B)\}$ . Par la propriété d'indépendance du chemin,  $\varphi(A \cup B) \in \{\varphi(A), \varphi(B)\}$  et  $\varphi(A \cup B) \subset \varphi(C)$  i.e.  $A \cup B \in C$ . Inversement, soient  $H$  et  $H'$  deux ensembles fermés. Si  $H \not\subseteq H'$  et  $H' \not\subseteq H$ ,  $H \in \varphi(H \cup H')$  et  $H' \in \varphi(H \cup H')$ ; donc, comme  $H \cup H' \notin \varphi(H \cup H')$ , on a  $H \in H \cup H'$  et  $H' \in H \cup H'$ . Alors, par (HN2),  $H \cap H' = \emptyset$ .

□

La conjonction des deux propriétés 2.27 et 2.28 nous permet de reformuler le théorème d'Adams, de la façon suivante :

**Corollaire 2.29** *Toute famille de Moore dont la relation d'emboîtement satisfait les conditions (HN1) et (HN2) est une famille de Moore hiérarchique.*

### 2.5.2 Les bases canoniques des hiérarchies (faibles)

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble de tous les ensembles critiques d'une famille de Moore hiérarchique faible sur  $S$  (i.e. tous les singletons sont fermés et, pour tous  $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$ ,  $w_1 \cap w_2 \cap w_3 \in \{w_1 \cap w_2, w_1 \cap w_3, w_2 \cap w_3\}$  (condition (W), cf. section 2.2.1)) est exactement l'ensemble des sous-ensembles de cardinalité 2 n'appartenant pas à la famille de Moore. Dans cette section, un sous-ensemble  $X$  de  $S$  sera indifféremment noté  $X = \{s_1, \dots, s_k\}$  ou  $X = s_1 \dots s_k$ .

**Théorème 2.30** *Un ensemble  $C \subseteq S$  est critique pour une famille de Moore hiérarchique faible  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $C = ss'$  avec  $s, s' \in S$  tels que  $\{ss'\} \notin \mathcal{H}$ .*

**Preuve :** Pour la condition suffisante, soient  $s, s' \in S$ , avec  $\{ss'\} \notin \mathcal{H}$ ;  $\mathcal{H}$  est atomistique, donc  $ss' \in \min \mathcal{H}^c$  et est un ensemble critique (cf. proposition 2.2).

Inversement, soient  $C \notin \mathcal{H}$  un ensemble quasi-fermé. On note  $\varphi(C) = H$ . Soient  $H_1, \dots, H_p$  les éléments de la famille de Moore couverts par  $H$ . L'ensemble  $C$  n'est pas inclus dans un seul ensemble  $H_i$  car sinon  $C \subseteq H_i$  impliquerait  $\varphi(C) \subseteq H_i \subset H$ , ce qui est absurde. Soient  $H_1$  et  $H_2$  tels que  $H_1 \cap C \neq \emptyset$  et  $H_2 \cap C \neq \emptyset$ . Nous sommes donc capables de trouver, comme dans la section 2.2.1, deux éléments  $s \in (H_1 - H_2) \cap C$  et  $s' \in (H_2 - H_1) \cap C$  tels que  $\varphi(ss') = H$ . Alors, si  $|C| \geq 3$ ,  $C$  n'est pas un ensemble critique. □

**Corollaire 2.31** *La base canonique d'une famille de Moore hiérarchique faible  $\mathcal{H}$  est constituée des implications du type  $X \rightarrow \varphi(X) - X$  avec  $|X| = 2$  et  $X \notin \mathcal{H}$ .*

Soit  $\mathcal{C}_r$  l'ensemble de tous les ensembles critiques d'une famille de Moore  $\mathcal{F}$  et  $\Sigma^*$  la base canonique élémentaire de  $\mathcal{F}$ , qui est la base canonique de  $\mathcal{F}$  décrite en termes d'implications élémentaires (cf. remarque 2.3).

Considérons les deux conditions suivantes :

(C1)  $C \in \mathcal{C}r$  implique  $|C| = 2$ ;

(C2)  $xy \not\rightarrow_{\Sigma^*} z$  implique  $xz \rightarrow_{\Sigma^*} y$  et  $yz \rightarrow_{\Sigma^*} x$ .

On a trivialement, avec les équivalences données dans la section 2.4.1, la proposition suivante :

**Proposition 2.32** *Pour tous  $x, y, z \in S$ , la condition (C2) est équivalente aux deux conditions suivantes, et implique la troisième :*

(C2')  $xy \in xyz$  implique  $xz \rightarrow_{\Sigma^*} y$  et  $yz \rightarrow_{\Sigma^*} x$ ;

(C2'')  $xy \in xyz$  implique  $xz \notin xyz$  et  $yz \notin xyz$ ;

Les deux conditions (C1) et (C2) (ou, de façon équivalente, (C2') ou (C2'')) nous donnent une caractérisation de la base canonique élémentaire des familles de Moore hiérarchiques :

**Théorème 2.33** *Soit  $\mathcal{M}$  une famille de Moore sur  $S$ , et  $\Sigma_{\mathcal{M}}^*$  sa base canonique élémentaire.  $\mathcal{M}$  est une famille de Moore hiérarchique si et seulement si  $\Sigma_{\mathcal{M}}^*$  satisfait (C1) et (C2).*

**Preuve :** Pour la condition suffisante, avec la remarque que toute famille de Moore hiérarchique est une famille de Moore hiérarchique faible, la condition (C1) est vérifiée par le théorème 2.30. Pour la condition (C2''), si on suppose que  $xy \in xyz$  et  $xz \in xyz$ , on a  $\varphi(xy) \subset \varphi(xyz)$  et  $\varphi(xz) \subset \varphi(xyz)$ . Donc  $x \in \varphi(xy) \cap \varphi(xz)$ ,  $y \notin \varphi(xz)$  et  $z \notin \varphi(xy)$ , alors  $\varphi(xy) \cap \varphi(xz) \notin \{\emptyset, \varphi(xy), \varphi(xz)\}$ , ce qui est absurde.

Inversement, la fermeture des singletons (condition (H3)) est triviale avec la condition (C1). Pour la condition (H4), supposons qu'elle ne soit pas vérifiée, i.e. qu'il existe  $H_1$  et  $H_2$  tels que  $H_1 \cap H_2 \notin \{\emptyset, H_1, H_2\}$ . Alors on peut écrire  $H_1 = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_p$  et  $H_2 = x_1 \dots x_n z_1 \dots z_q$  avec  $y_i \neq z_j$  pour tous  $i, j$ . Montrons que  $x_1 y_1 \in x_1 y_1 z_1$ . On a  $x_1 y_1 \subset x_1 y_1 z_1$ . Si  $\varphi(x_1 y_1) = \varphi(x_1 y_1 z_1)$ , alors avec  $x_1 y_1 \subset H_1$  on a  $z_1 \in \varphi(x_1 y_1) \subseteq \varphi(H_1) = H_1$ . Ce résultat est absurde, donc  $\varphi(x_1 y_1) \subset \varphi(x_1 y_1 z_1)$  et  $x_1 y_1 \in x_1 y_1 z_1$ . Par (C2''),  $x_1 z_1 \notin x_1 y_1 z_1$  et  $y_1 z_1 \notin x_1 y_1 z_1$ . Comme  $y_1 \neq z_1$ ,  $\varphi(x_1 z_1) = \varphi(x_1 y_1 z_1) = \varphi(y_1 z_1)$ . On a  $\varphi(x_1 z_1) \subseteq H_2$  mais comme  $\varphi(y_1 z_1) \not\subseteq H_2$  car  $y_1 \notin H_2$ , on a une contradiction.

□

**Remarque 2.34** Pour une famille de Moore  $\mathcal{H}$  sur  $S$ , si tous les singletons sont fermés, alors les parties ayant deux éléments  $\{x, y\}$  est ou bien dans la famille de Moore, ou bien critique. Dans le premier cas, si  $\mathcal{H}$  est une famille de Moore hiérarchique, alors, pour tout  $z \in S$ , ni  $\{x, z\}$  ni  $\{y, z\}$  ne peuvent être dans  $\mathcal{H}$ . Ces deux ensembles sont donc critiques. L'exemple de la figure 2.4 illustre le fait que la réciproque n'est pas vraie, car nous avons, pour tous  $x, y, z \in S$ ,  $\{x, y\} \notin \mathcal{C}r$  implique  $\{x, z\}$  et  $\{y, z\} \in \mathcal{C}r$ , mais ce treillis est une hiérarchie faible mais pas une hiérarchie (la condition (C2) n'est donc pas vérifiée).

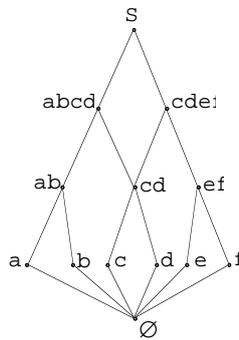


FIG. 2.4: Exemple de treillis non hiérarchique.

**Remarque 2.35** Dans le cas des hiérarchies binaires, pour tout triplet  $abc$  d'éléments de  $S$ , exactement une des trois implications  $ab \rightarrow c$ ,  $ac \rightarrow b$  et  $bc \rightarrow a$  n'est pas vérifiée. En effet, si  $a, b, c \in S$  avec  $ab \rightarrow c$ ,  $ac \rightarrow b$  et  $bc \rightarrow a$ ,  $ab$ ,  $ac$  et  $bc$  ne sont pas des ensembles fermés, ce qui contredit la définition des hiérarchies binaires.

Ceci implique, par le théorème 2.33, que les deux autres sont dans la base canonique élémentaire. Donc toute hiérarchie binaire sur un ensemble  $S$ , avec  $|S| = n$ , a exactement

$2 \times \binom{n}{3}$  implications élémentaires dans sa base.

**Exemple 2.36** Si on reprend l'exemple de la figure 2.2, l'ensemble des implications composant la base canonique élémentaire est :

$$\begin{array}{llllllll}
 ac \rightarrow b & ad \rightarrow b & ae \rightarrow b & af \rightarrow b & bc \rightarrow a & bd \rightarrow a & be \rightarrow a & bf \rightarrow a \\
 ac \rightarrow d & ad \rightarrow c & ae \rightarrow c & af \rightarrow c & bc \rightarrow d & bd \rightarrow c & be \rightarrow c & bf \rightarrow c \\
 ac \rightarrow e & ad \rightarrow e & ae \rightarrow d & af \rightarrow d & bc \rightarrow e & bd \rightarrow e & be \rightarrow d & bf \rightarrow d \\
 ac \rightarrow f & ad \rightarrow f & ae \rightarrow f & af \rightarrow e & bc \rightarrow f & bd \rightarrow f & be \rightarrow f & bf \rightarrow e \\
 ce \rightarrow d & ce \rightarrow f & cf \rightarrow d & cf \rightarrow e & de \rightarrow c & de \rightarrow f & df \rightarrow c & df \rightarrow e
 \end{array}$$

### 2.5.3 Une base d'emboîtement des hiérarchies.

Les considérations de la section 2.4.2 permettent aussi de déterminer facilement une base d'emboîtement  $\in_{\mathcal{H}}^*$  d'une hiérarchie  $\mathcal{H}$ . Comme nous l'avons rappelé dans la section 2.2.1, toute classe  $h \notin \{\emptyset, S\}$  de  $\mathcal{H}$  est un inf-irréductible de  $(\mathcal{H}, \subseteq)$ . Vu que les sup-irréductibles de  $\mathcal{H}$  sont les singletons (le treillis est atomistique), il est clair que  $\in_{\mathcal{H}}^*$  est donné par :

$$\in_{\mathcal{H}}^* = \{(h, h \cup \{s\}) : h \in \mathcal{H}, h \notin \{\emptyset, S\}, s \notin h\}$$

Trivialement, le nombre d'éléments de  $\in_{\mathcal{H}}^*$  est de l'ordre de  $n^2$ , où  $n$  est à nouveau la taille de  $S$ .

On peut aussi remarquer que la condition (C2'') de la proposition 2.32 donne une caractérisation simple sur les triplets des relations d'emboîtement hiérarchiques.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit un nouveau type de structure, appelé relations d'emboîtement, et nous avons montré qu'il était équivalent aux familles de Moore, aux fermetures et aux systèmes implicatifs complets. L'idée des relations d'emboîtement a son origine dans le domaine de la classification. En prolongeant ces relations aux familles de Moore quelconques, ce chapitre nous permet de situer un des modèles les plus utilisés en classification, les hiérarchies, comme des systèmes de fermeture particuliers. Cette approche nous permet de caractériser leur base canonique d'implications, ce type de résultat n'ayant été obtenu que pour les treillis distributifs. Nous obtenons aussi de nouveaux résultats sur les emboîtements dans le cas hiérarchique. Ceci constituera un outil utile pour une présentation unifiée des diverses utilisations des correspondances de Galois en classification.

Il reste du travail à faire dans cette voie, par exemple en étudiant les relations d'emboîtement associées aux treillis appartenant à des classes importantes, comme les treillis distributifs ou modulaires. Une autre question intéressante est l'existence d'un passage direct de la base d'emboîtement (qui est dérivée de la relation flèche bas) à la base cano-

nique d'implication. Il est bien connu qu'obtenir celle ci n'est pas évident, et tout progrès dans ce sens pourrait être appréciable.



# Chapitre 3

## Relations bifermées

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Relations bifermées sur un produit d'espaces de fermeture .</b>	<b>69</b>
3.1.1	Définition . . . . .	69
3.1.2	Diverses propriétés des relations bifermées . . . . .	70
<b>3.2</b>	<b>Un isomorphisme . . . . .</b>	<b>72</b>
3.2.1	Étude de la correspondance entre relations bifermées et applications galoisiennes . . . . .	72
3.2.2	Isomorphisme entre $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ et $\Phi \otimes \Phi'$ . . . . .	76
<b>3.3</b>	<b>Treillis complets et ensembles sup-générateurs . . . . .</b>	<b>76</b>
3.3.1	“Formal concept analysis” . . . . .	77
3.3.2	Les G-idéaux . . . . .	77
3.3.3	Le cas fini . . . . .	78
<b>3.4</b>	<b>Représentation des correspondances de Galois entre treillis finis . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>3.5</b>	<b>Fermetures sur les applications et les relations . . . . .</b>	<b>80</b>
3.5.1	Un algorithme pour la bifermure des tables binaires . . . . .	80
3.5.2	La fermeture galoisienne d'une application entre treillis finis . . . . .	82
3.5.3	Le supremum de deux applications galoisiennes . . . . .	85
<b>3.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>85</b>

---

Dans les divers domaines utilisant les correspondances de Galois, il y a un besoin réel d'outils efficaces afin d'obtenir et de transformer celles-ci, par exemple afin d'obtenir des correspondances ayant des contraintes, ou encore de trouver une application galoisienne proche d'une application donnée. Ce chapitre propose des solutions à de tels problèmes, avec comme idée principale la caractérisation de relations associées aux correspondances de Galois entre deux treillis complets  $T$  et  $T'$ . Ce qui revient à reprendre à notre compte l'interrogation de B. Ganter [Gan95], lorsqu'il se demande "What information can be read from a context without explicitly constructing the lattice?"<sup>1</sup>.

Plus explicitement, les lignes et les colonnes de la représentation matricielle de la correspondance de Galois doivent être des fermés dans les espaces de fermeture associés à  $T$  et  $T'$ . Une telle relation sera dite *bifermée*, et un isomorphisme d'ordre sera établi entre, d'un côté, l'ensemble des relations bifermées (ordonné par l'inclusion) et, de l'autre, l'ensemble des applications galoisiennes de  $T$  dans  $T'$ . Ainsi, les problèmes de construction de correspondance de Galois particulières peuvent être ramenés à des considérations en termes de relations, ce qui, dans le cas fini, est plus simple à appréhender.

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous établissons d'abord dans la section 3.1 ce qu'est, précisément, une relation bifermée entre deux espaces de fermeture, avant, dans le paragraphe 3.2, de donner deux applications  $\mu$  et  $\nu$  permettant de formuler le résultat principal de ce chapitre, à savoir l'existence d'un isomorphisme entre bifermées et applications galoisiennes entre deux treillis. Dans la section 3.3, nous montrons que des cas particuliers de cet isomorphisme ont déjà été mentionnés dans la littérature. Le paragraphe 3.4 parle de l'intérêt à utiliser, dans le cas fini, des relations binaires afin de représenter des correspondances de Galois entre deux treillis, et, enfin, la section 3.5 présente un algorithme et quelques méthodes de constructions efficaces afin de répondre aux problèmes précédents.

---

<sup>1</sup> "Quelles informations peuvent être obtenues d'un contexte sans construire explicitement le treillis?", traduction libre.

## 3.1 Relations bifermées sur un produit d'espaces de fermeture

Nous allons, dans ce premier chapitre, présenter un nouveau, à notre connaissance, type de relation binaire entre deux espaces de fermeture (cf. section 1.4), les relations bifermées. Cette terminologie trouve son origine dans le fait que la table associée à ce type de relation binaire est fermée en ligne et en colonne, suivant les fermetures associées aux deux espaces.

Après avoir défini précisément ce qu'est une relation bifermée, nous verrons dans le paragraphe 3.1.2 quelques propriétés de celles-ci, et nous formaliserons à l'aide de deux applications  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  le fait que les lignes et les colonnes de leur représentation matricielle sont des fermés. Nous montrerons aussi, dans cette même section, comment la composition itérative de ces applications nous permettra d'obtenir la biferméture d'une relation.

### 3.1.1 Définition

Soit  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$  deux espaces de fermeture, munis des familles de Moore correspondantes  $\Phi$  et  $\Phi'$ , respectivement sur  $E$  et  $E'$ . Une relation  $R \subseteq E \times E'$  est dite *bifermée* si elle satisfait les conditions suivantes :

$$(B1) \text{ pour tout } a \in E, aR = \{a' \in E' : (a, a') \in R\} \in \Phi';$$

$$(B2) \text{ pour tout } a' \in E', Ra' = \{a \in E : (a, a') \in R\} \in \Phi;$$

L'ensemble de toutes les relations bifermées est noté  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ .

**Exemple 3.1** Soient  $\Phi = \{\emptyset, a, b, c, d, e, ad, ae, be, abc, cde, abcde\}$  et  $\Phi' = \{\emptyset, a', b', b'c', b'd', a'b'd', b'c'd', a'b'c'd'\}$  deux familles de Moore sur  $E = \{a, b, c, d, e\}$  et  $E' = \{a', b', c', d'\}$ . La relation  $R$  présentée dans le tableau 3.1 est bifermée.

	a'	b'	c'	d'
a		×	×	×
b		×		×
c	×	×		×
d		×		×
e		×		×

TAB. 3.1: Exemple de relation bifermée.

### 3.1.2 Diverses propriétés des relations bifermées

**Proposition 3.2** *L'ensemble  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$  est une famille de Moore sur  $E \times E'$ .*

**Preuve :** Soit  $R_\omega = E \times E'$ . Alors, pour tous  $a \in E, a' \in E', aR_\omega = E' \in \Phi'$  et  $R_\omega a' = E \in \Phi$ ; donc,  $E \times E' \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ . Soient  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$  et  $R = \bigcap \mathcal{S}$ . Pour  $a \in E, aR = \{a' \in E' : (a, a') \in \bigcap \mathcal{S}\} = \{a' \in E' : (a, a') \in S \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}\} = \bigcap \{aS : S \in \mathcal{S}\} \in \Phi'$ . Dualement, on a  $aR' \in \Phi$ .

□

On note  $\Gamma$  la fermeture sur  $\mathcal{P}(E \times E')$  associée à la famille de Moore  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ . Ainsi,  $\Gamma(R)$  est la plus petite relation bifermée contenant la relation  $R$  :

$$\Gamma(R) = \bigcap \{B \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'} : R \subseteq B\}$$

Le problème qui se pose alors est celui de la construction effective de la fermeture  $\Gamma(R)$  d'une relation quelconque  $R$ . Les considérations suivantes conduisent à une solution simple, au moins dans le cas fini. Soient les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \mathcal{P}(E \times E') &\rightarrow \mathcal{P}(E \times E') \\ R &\rightarrow \Gamma_1(R) = \{(a, a') \in E \times E' : a' \in \varphi'(aR)\} \\ \Gamma_2 : \mathcal{P}(E \times E') &\rightarrow \mathcal{P}(E \times E') \\ R &\rightarrow \Gamma_2(R) = \{(a, a') \in E \times E' : a \in \varphi(Ra')\} \end{aligned}$$

Ces deux applications sont les formalisations de la double fermeture de la définition : si on considère la table associée à  $R$ ,  $\Gamma_1(R)$  est la fermeture en ligne de  $R$  (et correspond

à la condition (B1)) alors que  $\Gamma_2(R)$  est la fermeture en colonne correspondant à (B2). La proposition suivante montre que l'utilisation du terme de fermeture lorsqu'on parle des applications  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  n'est pas indue.

**Proposition 3.3**  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux fermetures sur  $\mathcal{P}(E \times E')$ .

**Preuve :** Soit  $R, S \in E \times E'$  deux relations binaires telles que  $R \subseteq S$ . Alors,  $(x, y) \in \Gamma_1(R)$  implique  $y \in \varphi'(xR)$  et  $xR \subseteq xS$  d'où  $\Gamma_1(R) \subseteq \Gamma_1(S)$ , c'est à dire que  $\Gamma_1$  est isotone. L'idempotence et l'extensivité de  $\Gamma_1$  peuvent être déduites de celles de  $\varphi'$ . La démonstration pour  $\Gamma_2$  est duale. □

Nous allons maintenant voir quelques propriétés des applications  $\Gamma, \Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  qui nous serons nécessaires par la suite :

**Proposition 3.4** Les propriétés suivantes sont vérifiées, pour tout  $R \subseteq E \times E'$  :

- (i)  $\Gamma_1\Gamma = \Gamma_2\Gamma = \Gamma\Gamma_1 = \Gamma\Gamma_2 = \Gamma$  ;
- (ii)  $R \subseteq \Gamma_1(R) \subseteq \Gamma(R)$  ;
- (iii)  $R \subseteq \Gamma_2(R) \subseteq \Gamma(R)$  ;
- (iv)  $\Gamma_2\Gamma_1(R) = R \iff \Gamma_1\Gamma_2(R) = R \iff R \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$

**Preuve :**  $\Gamma_1\Gamma(R) = \{(a, a') \in E \times E' : a' \in \varphi'(a\Gamma(R))\} = \{(a, a') \in E \times E' : a' \in a\Gamma(R)\} = \Gamma(R)$ . La preuve pour  $\Gamma_2\Gamma(R) = \Gamma(R)$  est similaire. Les égalités  $\Gamma\Gamma_1 = \Gamma\Gamma_2 = \Gamma$  sont triviales.

La première inclusion de (ii) est une conséquence de la proposition 3.3, et la seconde est obtenue grâce à (i) et à l'isotonie de  $\Gamma_1$  et de  $\Gamma_2$ . La démonstration de (iii) est duale.

D'après (iii),  $R = \Gamma_1\Gamma_2(R)$  implique que  $\Gamma_1\Gamma_2(R) \subseteq \Gamma_2(R)$ . Comme  $\Gamma_1$  est extensive, on a  $\Gamma_2(R) \subseteq \Gamma_1\Gamma_2(R)$ , et donc  $\Gamma_1\Gamma_2(R) = \Gamma_2(R) = \Gamma_1(R) = R$ . Alors on a  $\varphi(Ra') = Ra'$  et  $\varphi'(aR) = aR$ , pour tous  $a \in E, a' \in E'$  ; ainsi,  $R$  est bifermée, et on aurait une démonstration similaire dans le cas où  $R = \Gamma_2\Gamma_1(R)$ . Inversement, si  $R$  est bifermée, alors, pour tous  $a \in E, a' \in E', \varphi(Ra') = Ra'$  et  $\varphi'(aR) = aR$ , ce qui implique  $R = \Gamma_1\Gamma_2(R) = \Gamma_2\Gamma_1(R)$ . Ainsi (iv) est vérifiée. □

La proposition suivante donne le lien direct entre  $\Gamma$  et les applications  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Ces dernières permettent en effet de calculer, de façon simple, et par itérations successive de  $\Gamma_1$  et de  $\Gamma_2$ , la bifermeture d'une application binaire quelconque :

**Proposition 3.5** *Si  $E$  et  $E'$  sont finis, il existe un entier  $k \leq |E| \times |E'|$  tel que*

$$(\Gamma_1\Gamma_2)^k = \Gamma$$

**Preuve :** On applique itérativement la fonction  $\Gamma_1\Gamma_2$  (ou  $\Gamma_2\Gamma_1$ ) à une relation binaire donnée  $R \subseteq E \times E'$  jusqu'à obtenir  $(\Gamma_1\Gamma_2)^k(R) = (\Gamma_1\Gamma_2)^{k+1}(R)$  avec  $k \in \mathbb{N}$  (aucun élément nouveau n'apparaît en appliquant  $\Gamma_1\Gamma_2$ ), ce qui arrive nécessairement quand  $E$  et  $E'$  sont finis.

□

La borne donnée ici pour  $k$ , à savoir  $|E| \times |E'|$ , correspond au pire des cas possibles, où, à chaque étape de l'itération, un seul élément est ajouté. On peut voir que cette borne peut être facilement affinée, ne serait ce qu'en enlevant la cardinalité de  $R$ .

## 3.2 Un isomorphisme

Nous allons dans ce paragraphe établir un isomorphisme entre l'ensemble des relations bifermées sur  $(E, \varphi) \times (E', \varphi')$  et l'ensemble des applications galoisiennes de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ . Pour ce faire, nous allons définir deux applications  $\mu$  et  $\nu$  permettant d'associer à chaque relation bifermée une application galoisienne, et réciproquement.

Suite à une étude détaillée de ces deux applications faite dans le paragraphe 3.2.1, cet isomorphisme sera naturellement établie dans la section 3.2.2 grâce aux diverses propriétés mises à jour.

### 3.2.1 Étude de la correspondance entre relations bifermées et applications galoisiennes

Soient deux espaces de fermeture  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$  et les familles de Moore associées  $\Phi$  et  $\Phi'$ . On note par  $\Phi'^{\Phi}$  l'ensemble des applications de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ . On définit deux

applications  $\mu$  et  $\nu$  entre, d'une part, l'ensemble  $\mathcal{P}(E \times E')$  des relations entre  $E$  et  $E'$ , et d'autre part, l'ensemble  $\Phi'^\Phi$  des applications de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ , par :

$$\begin{aligned}\mu : \mathcal{P}(E \times E') &\rightarrow \Phi'^\Phi \\ R &\rightarrow \mu(R) = f\end{aligned}$$

avec, pour tout  $X \in \Phi$ ,  $f(X) = \varphi'(f_R(X)) = \varphi'(\bigcap_{a \in X} aR)$ . On note par  $f_R$  l'application galoisienne associée à une relation binaire  $R$  par  $f_R(X) = \bigcap_{a \in X} aR = \{y \in E' : aRy \text{ pour tout } a \in X\}$  (cf. section 1.6.1).

Inversement, on définit  $\nu$  par :

$$\begin{aligned}\nu : \Phi'^\Phi &\rightarrow \mathcal{P}(E \times E') \\ f &\rightarrow \nu(f) = \{(a, b) \in E \times E' : b \in f(\varphi(a))\}\end{aligned}$$

**Remarque 3.6** Une application  $g$  de  $\Phi'$  dans  $\Phi$  est associée de façon analogue à  $R$  par  $g(Y) = \varphi(g_R(Y)) = \varphi(\bigcap_{b \in Y} Rb)$  pour tout  $Y \in \Phi'$ . On définit ainsi une application  $\mu'$  de  $\mathcal{P}(E \times E')$  dans  $\Phi'^\Phi$ .

**Remarque 3.7** Si  $X$  et  $X'$  sont deux éléments de  $\Phi$  tels que  $X \subseteq X'$ , on a  $\bigcap_{a \in X} aR \supseteq \bigcap_{a \in X'} aR$  et donc  $f(X) \geq f(X')$ . Ainsi  $\mu(R)$  est une application antitone. On peut donc se restreindre au cas où le domaine de  $\nu$  est l'ensemble des applications antitones de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ , noté  $A(\Phi, \Phi')$ .

**Exemple 3.8** En notant  $[0_{\Phi'}]$  l'application constante qui à tout élément de  $\Phi$  associe  $0_{\Phi'}$ , on a  $\mu(\emptyset) = [0_{\Phi'}]$  et  $\mu(E \times E')(X) = \begin{cases} 0_{\Phi'} & \text{si } X = \emptyset \\ 1_{\Phi'} & \text{sinon} \end{cases}$ . Inversement, on a  $\nu([0_{\Phi'}]) = \{x'Rx' : x' \in E' \text{ et } x' \in 0_{\Phi'}\}$ .

De plus, lorsque les ensembles  $\mathcal{P}(E \times E')$  et  $\Phi'^\Phi$  sont munis, respectivement, de l'inclusion et de l'ordre usuel sur les applications, ces deux applications satisfont la propriété d'isotonie :

**Proposition 3.9** *Les applications  $\mu$  et  $\nu$  sont isotones.*

**Preuve :** Soit  $R \subseteq S$  deux relations binaires entre  $E$  et  $E'$ . Pour tout  $X \in \Phi$ ,  $XR \subseteq XS$  d'où  $\bigcap_{a \in X} aR \subseteq \bigcap_{a \in X} aS$  et  $\varphi'(\bigcap_{a \in X} aR) \subseteq \varphi'(\bigcap_{a \in X} aS)$  et donc  $\mu(R)(X) \subseteq \mu(S)(X)$ . Ainsi,  $\mu(R) \leq \mu(S)$ .

Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux applications antitones de  $\Phi$  dans  $\Phi'$  telles que  $f_1 \leq f_2$ . Pour tous  $a \in E, b \in E'$ ,  $a\nu(f_1)b \iff b \in f_1(\varphi(a)) \Rightarrow b \in f_2(\varphi(a)) \iff a\nu(f_2)b$  et donc  $\nu(f_1) \subseteq \nu(f_2)$ .

□

**Remarque 3.10** Étant donnée une relation  $R \subseteq E \times E'$ , on peut remarquer que, si  $aR \in \Phi'$  pour tout  $a \in E$ , alors, pour tout  $X \in \Phi$ ,  $\mu(R)(X) = f(X) = \bigcap_{a \in X} aR = f_R(X)$ , où  $f_R$  est l'application galoisienne de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(E')$  associée à  $R$ . Particulièrement,  $\mu(R) = f_R$  quand  $R = \nu(f')$  pour tout  $f' \in \Phi'^\Phi$ .

Les résultats suivants établissent le fait que les restrictions des applications  $\mu$  et  $\nu$  constituent une bijection entre, d'une part, les applications galoisiennes de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ , et, d'autre part, les relations bifermées de  $E$  dans  $E'$ . D'abord, nous allons montrer que l'image d'une relation bifermée par  $\mu$  est une application galoisienne, et, que, inversement, l'image par  $\nu$  d'une application galoisienne est une relation bifermée.

**Proposition 3.11** *Si  $R \subseteq E \times E'$  est une relation bifermée alors  $\mu(R)$  est une application galoisienne de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ .*

**Preuve :** Soit  $R \subseteq E \times E'$  une relation bifermée et posons  $f = \mu(R)$ . Pour tous  $X \in \Phi, Y \in \Phi'$ ,  $f(X) \supseteq Y \iff f_R(X) \supseteq Y$ , par la remarque précédente. Alors, par la relation de Pickert appliquée à la correspondance de Galois  $(f_R, g_R)$ , on a  $X \subseteq g_R(Y)$ . Sous l'hypothèse que  $R \in \mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ , on a aussi  $X \subseteq g_R(Y) \iff X \subseteq \varphi'(g_R(Y)) \iff X \leq g(Y)$  et la relation de Pickert est satisfaite par la paire  $(f, g)$ .

□

**Proposition 3.12** *Si  $f$  est une application galoisienne de  $\Phi$  dans  $\Phi'$  alors  $\nu(f)$  est une relation bifermée entre  $E$  et  $E'$ .*

**Preuve :** Soit  $f$  une application galoisienne de  $\Phi$  dans  $\Phi'$  et  $R = \nu(f)$ . Pour tout  $a \in E$ ,  $aR = a\nu(f) = \{b \in E' : b \in f(\varphi(a))\}$  appartient à  $\Phi'$ . Soient  $a \in E, K \subseteq E$  avec

$a \in \varphi(K)$  et  $kRb$  pour tout  $k \in K$ . Alors  $\varphi(a) \subseteq \varphi(K) = \bigvee_{\Phi} \{\varphi(k) : k \in K\}$  et, vu que  $f$  est une application galoisienne,  $f(\bigvee_{\Phi} \{\varphi(k) : k \in K\}) = \bigcap_{k \in K} f(\varphi(k)) \subseteq f(\varphi(a))$ . De plus, si  $kRb \iff b \in f(\varphi(k))$  est vérifié pour tout  $k \in K$ , alors on a  $b \in \bigcap_{k \in K} f(\varphi(k)) \subseteq f(\varphi(a))$ , et donc,  $a \in \varphi(Rb)$  et  $R$  est bifermée.

□

La bijection va maintenant être établie grâce à l'étude des applications composées  $\nu\mu$  et  $\mu\nu$ . On peut remarquer que la paire  $(\mu, \nu)$  ne constitue pas une correspondance résiduée / résiduelle car les composées  $\nu\mu$  et  $\mu\nu$  sont toutes deux extensives<sup>2</sup>.

**Proposition 3.13** *La composition  $\nu\mu$  est extensive. De plus, si  $R \subseteq E \times E'$  est une relation bifermée, alors  $\nu\mu(R) = R$ .*

**Preuve :** Afin de montrer que  $\nu\mu$  est extensive, on peut noter que, étant donné une relation  $R \subseteq E \times E'$ , pour tout  $a \in E$ ,  $f\varphi(a) = \varphi'(\bigcap_{a' \in \varphi(a)} a'R) \supseteq \bigcap_{a' \in \varphi(a)} a'R \supseteq aR$  et donc  $\nu\mu(R) \supseteq R$ . Supposons maintenant que  $R \subseteq E \times E'$  est une relation bifermée. On a  $f\varphi(a) = \bigcap_{a' \in \varphi(a)} a'R$  pour tout  $a \in E$ . De plus,  $a' \in \varphi(a)$  et  $a'Rb$  implique  $aRb$  et donc  $a'R \subseteq aR$ . Ainsi  $f\varphi(a) = aR$  et  $\nu\mu(R) = R$ .

□

**Proposition 3.14** *La composition  $\mu\nu$  est extensive, et  $\mu\nu(f) = f$  pour toute application galoisienne  $f$  de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ .*

**Preuve :** Considérons une application antitone  $f$  de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ , et soit  $R = \nu(f)$ . Pour tous  $X \in \Phi$ ,  $a \in E$ ,  $\varphi(a) \subseteq X$  et  $f$  antitone impliquent  $f\varphi(a) \supseteq f(X)$ , et donc  $aR \supseteq f(X)$ . De plus, on a  $\bigcap_{a \in X} aR \supseteq f(X)$  et donc  $\mu R(X) = \varphi'(\bigcap_{a \in X} aR) = \bigcap_{a \in X} f\varphi(a) \supseteq f(X)$ , ce qui signifie que  $\mu\nu$  est extensive. Supposons maintenant que  $f$  est une application galoisienne de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ . Alors, pour tout  $X \in \Phi$ ,  $X = \bigvee_{a \in X} \varphi(a) = \varphi(\bigcup_{a \in X} \varphi(a))$  et donc  $f(X) = \bigcap_{a \in X} f\varphi(a) = \bigcap_{a \in X} aR$ . D'après la proposition 3.12,  $R$  est bifermée, les égalités suivantes sont vérifiées pour tout  $X \in \Phi$  :  $\mu(R)(X) = \varphi'(\bigcap_{a \in X} aR) = \bigcap_{a \in X} aR = f(X)$ .

□

---

<sup>2</sup>En fait, c'est une correspondance de Benado ([Ben73] et chap. 1.5.3) entre  $\mathcal{P}(E \times E')$  et  $\Phi'^{\Phi'}$ , le dual de  $\Phi'^{\Phi}$ .

### 3.2.2 Isomorphisme entre $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$ et $\Phi \otimes \Phi'$

En tenant compte de l'isotonie de  $\mu$  et de  $\nu$  et des propositions 3.11 à 3.14, nous pouvons maintenant formuler le résultat principal de cette section ; en notant  $\Phi \otimes \Phi'$  l'ensemble de toutes les applications galoisiennes de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ , on a :

**Théorème 3.15** *Les ensembles  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$  et  $\Phi \otimes \Phi'$  sont isomorphes<sup>3</sup> par les restrictions des applications  $\mu$  et  $\nu$ .*

On peut aussi remarquer que, si  $f$  est une application galoisienne et  $R = \nu(f)$  la relation bifermée correspondante, alors  $f = f_R$  (et, similairement,  $g = g_R$ ). Ainsi, chaque correspondance de Galois entre deux treillis complets d'ensembles fermés est obtenue à partir d'une relation bifermée comme décrit dans la section 3.12. En fait, il sera équivalent dans de nombreux cas de considérer les relations bifermées et les correspondances de Galois.

## 3.3 Treillis complets et ensembles sup-générateurs

Dans cette section, nous allons considérer quelques cas particuliers issus de la situation précédente : soient  $T$  et  $T'$  deux treillis complets, et  $G$  et  $G'$  deux ensembles sup-générateurs de  $T$  et  $T'$ . Nous avons deux espaces de fermeture  $(G, \varphi)$  et  $(G', \varphi')$  (cf. remarque 1.38 de la section 1.4). Dans ce contexte, le résultat suivant est une conséquence du théorème 3.15. Ici, nous notons à nouveau  $T \otimes T'$  l'ensemble de toutes les applications galoisiennes de  $T$  dans  $T'$ .

**Théorème 3.16** *Les ensembles  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$  et  $T \otimes T'$  sont isomorphes.*

On peut remarquer que l'ensemble  $T \otimes T'$  ne dépend pas du choix d'ensembles générateurs particuliers  $G$  et  $G'$ . Ce résultat reste donc encore vrai, dans un certain sens, pour

---

<sup>3</sup>En fait, nous obtenons ainsi un isomorphisme entre l'ensemble des relations bifermées entre  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$  et l'ensemble des correspondances de Galois entre  $\Phi$  et  $\Phi'$ , car, comme nous l'avons vu dans la section 1.5.1, une correspondance de Galois est déterminée de façon unique par une de ces applications.

les ensembles de relations bifermées correspondants.

**Corollaire 3.17** *Soient  $G$  et  $H$  deux ensembles générateurs de  $T$ , et  $G'$  et  $H'$  deux ensembles générateurs de  $T'$ . Les ensembles de relations bifermées entre  $G$  et  $G'$ , d'un côté, et entre  $H$  et  $H'$ , d'un autre côté, sont isomorphes.*

Rappelons maintenant quelques cas particuliers, "triviaux", de cette correspondance qui ont été précédemment établis dans la littérature.

### 3.3.1 "Formal concept analysis"

Nous allons maintenant voir un premier cas particulier "extrême" de notre isomorphisme dans le sens où nous considérons les treillis des parties de deux ensembles  $G$  et  $G'$ , et donc générés par  $G$  et  $G'$ . Ce cas correspond à des travaux menés en "Formal Concept Analysis" par R. Wille et ses continuateurs ([GSW86, LW88, Wil87, Wil88, Wil92], ...), et de son *basic theorem for concept lattice* ([Wil82]).

Soient  $G$  et  $G'$  deux ensembles. Ils sont (trivialement) des ensembles sup-générateurs de  $\mathcal{P}(G)$  et  $\mathcal{P}(G')$ , respectivement. On a donc une correspondance entre l'ensemble des relations binaires  $R \subseteq G \times G'$  et les correspondances de Galois entre  $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$  et  $(\mathcal{P}(G'), \subseteq)$ . Elle est décrite, par exemple, dans [GW99] : à toute relation binaire  $R \subseteq G \times G'$ , les applications  $f_R(A) = \{b \in G' : aRb \ \forall a \in A\}$  et  $g_R(B) = \{a \in G : aRb \ \forall b \in B\}$  forment une correspondance de Galois entre  $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$  et  $(\mathcal{P}(G'), \subseteq)$ ; inversement, à toute correspondance de Galois  $(f, g)$  entre  $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$  et  $(\mathcal{P}(G'), \subseteq)$ ,  $R_{(f,g)} = \{(a, b) \in G \times G' : a \in g(b)\} = \{(a, b) \in G \times G' : b \in f(a)\}$  est la relation binaire telle que  $f_{R_{(f,g)}} = f$ ,  $g_{R_{(f,g)}} = g$  et  $R_{(f_R, g_R)} = R$ . La relation  $R_{(f,g)}$  est bien la relation bifermée associée à  $f$  (ou  $g$ ) sur les deux espaces de fermetures  $(G, Id)$  et  $(G', Id)$  par l'application  $\nu$ .

### 3.3.2 Les G-idéaux

En prenant  $G = T$  et  $G' = T'$  deux treillis complets et suivant les travaux de Shmueli ([Shm74]), on peut définir un  $G$ -idéal  $\theta \subseteq T \times T'$  de  $T \times T'$  par :

- (i)  $(x, y) \leq (a, b)$  et  $(a, b) \in \theta$  impliquent  $(x, y) \in \theta$ ;
- (ii) si  $\{(a_\alpha, b_\alpha)\} \subseteq \theta$  alors  $(\bigvee_\alpha a_\alpha, \bigwedge_\alpha b_\alpha) \in \theta$  et  $(\bigwedge_\alpha a_\alpha, \bigvee_\alpha b_\alpha) \in \theta$ ;
- (iii)  $(0, 1) \in \theta$  et  $(1, 0) \in \theta$ .

On note par  $K(T, T')$  l'ensemble de tous les G-idéaux de  $T \times T'$ .

Shmuely ([Shm74]) définit une correspondance entre  $K(T, T')$  et  $T \otimes T'$  comme suit : si  $(f, g)$  est une correspondance de Galois entre  $T$  et  $T'$ , alors  $\theta_f = \{(a, b) \in T \times T' : f(a) \geq b\}$  est un G-idéal de  $T \times T'$ . Inversement, pour tout G-idéal  $\theta \subseteq T \times T'$ , les applications  $f_\theta(a) = \bigvee\{b \in T' : (a, b) \in \theta\}$  and  $g_\theta(b) = \bigvee\{a \in T : (a, b) \in \theta\}$  forment une correspondance de Galois entre  $T$  et  $T'$ . Ce deuxième cas extrême revient à appliquer la corollaire 3.17 en considérant comme ensembles sup-générateurs de  $T$  et  $T'$  les treillis eux-mêmes.

### 3.3.3 Le cas fini

Quand  $T$  et  $T'$  sont finis, les ensembles de leurs sup-irréductibles  $J = J_T$  et  $J' = J_{T'}$  sont les ensembles sup-générateurs minimaux de  $T$  et  $T'$  respectivement. Nous avons, grâce au théorème 3.16, un isomorphisme entre les applications galoisiennes de  $T$  dans  $T'$  et les relations bifermées entre  $J$  et  $J'$ . De plus, la relation bifermée  $R$  associée à une application galoisienne  $f$  est donnée par  $jRj' \iff j' \leq f(j)$  pour tous  $j \in J, j' \in J'$ , grâce à l'opérateur  $\nu$  de la section 3.2. Inversement, l'application galoisienne  $f$  associée à une relation bifermée  $R$  est l'application galoisienne classique associée à une relation,  $f_R$  (cf. section 1.6.1).

## 3.4 Représentation des correspondances de Galois entre treillis finis

Considérons une correspondance de Galois  $(f, g)$  entre deux treillis finis  $T$  et  $T'$ , et les ensembles de sup-irréductibles de  $T$  et  $T'$ , notés respectivement  $J$  et  $J'$ . Soient  $n = |J|$  et  $n' = |J'|$ . Comme nous l'avons démontré précédemment, il est équivalent de considérer la paire  $(f, g)$  ou la relation bifermée  $R \subseteq J \times J'$  définie par  $jRj' \iff j' \leq f(j) \iff$

$j \leq g(j')$ . Deux représentations standard des relations binaires peuvent être intéressantes afin de représenter les correspondances de Galois entre  $T$  et  $T'$  :

- matrices binaires : une matrice  $M_R$  est associée à  $R$ . Cette matrice possède  $n$  lignes, indicées d'après  $J$ , et  $n'$  colonnes, indicées d'après  $J'$  ; pour  $j \in J, j' \in J'$ ,  $m_R(j, j')$  est égale à 1 si  $jRj'$ , et à 0 sinon. Dans une variante popularisée, entre autres, par “l'école de Darmstadt” ([Gan95], [GW99], [Wil82], [Wil84], ...), on utilise des tables avec des croix à la place des 1 ;
- graphes bipartis : le graphe  $B = (J \cup J', E)$ , où  $(j, j') \in E \iff jRj'$  est aussi associé à  $R$ . Une variante, utile pour la représentation des treillis ([Mar80]), considère l'ensemble complémentaire d'arêtes  $(J \times J') - E$ .

Quelques remarques sur la représentation matricielle. Une ligne, indicée par  $j$  (resp. une colonne, indicée par  $j'$ ) de  $M_R$  constitue une fonction caractéristique du sous-ensemble  $jR$  de  $J'$  (resp. du sous-ensemble  $Rj'$  de  $J$ ). Ainsi, la relation  $R$  est bifermée si les 1 d'une ligne correspondent à la représentation par les sup-irréductibles  $J'_{\leq y}$  pour un élément  $y$  de  $T'$ , alors que les 1 des colonnes correspondent à une même représentation pour un élément de  $T$ . Dans ce cas, la matrice  $M_R$  permet un codage particulièrement dense de la correspondance de Galois  $(f, g)$ . De plus, grâce à l'isomorphisme de la section 3.2, on sait que, étant donné deux correspondances de Galois  $(f, g)$  et  $(f', g')$  entre  $T$  et  $T'$  et leurs relations bifermées  $R$  et  $R'$ , la relation  $S = R \cap R'$  est la relation bifermée associée à la correspondance de Galois  $(f \wedge f', g \wedge g')$  et la matrice  $M_S$  est donnée par  $m_S(j, j') = \min(m_R(j, j'), m_{R'}(j, j'))$ , pour tous  $j \in J, j' \in J'$ .

Shmuely [Shm74] a introduit deux classes particulières d'applications galoisiennes notées, respectivement,  $L_b^a$  et  $E_b^a$ , où  $a \in T$  et  $b \in T'$ . Pour tout  $x \in T$  :

$$L_b^a(x) = \begin{cases} 1_{T'}, & \text{si } x = 0_T \\ b, & \text{si } 0_T < x \leq a \\ 0_{T'}, & \text{si } x \not\leq a \end{cases} \quad \text{et} \quad E_b^a(x) = \begin{cases} 1_{T'}, & \text{si } x \leq a \\ b, & \text{si } x \not\leq a \end{cases}$$

Les matrices binaires bifermées représentant ces fonctions ont des formes très simples : pour  $L_b^a$ , on a la matrice  $M$  dans laquelle  $m(j, j')$  est égal à 1 si et seulement si  $j \leq a$  et  $j' \leq b$  (on peut dire que tous les 1 peuvent être regroupés dans un unique rectangle après un réarrangement convenable des lignes et des colonnes). Pour  $E_b^a$ ,  $m(j, j') = 1$  si

et seulement si  $j \not\leq a$  et  $j' \not\leq b$  (tous les 0 peuvent être groupés en un unique rectangle).

Les éléments sup-irréductibles du treillis  $T \otimes T'$  sont exactement les applications  $L_{j'}^j$ , avec  $j \in J, j' \in J'$  ([Lec91], [Yaz98]). Si  $a$  et  $b$  sont des inf-irréductibles de, respectivement,  $T$  et  $T'$ , alors  $E_b^a$  est un inf-irréductible de  $T \otimes T'$ , mais d'autres inf-irréductibles peuvent exister ([Yaz98]). Ainsi qu'il a été démontré dans [Shm74] (voir aussi [Ban77]), les applications galoisiennes *contraintes*<sup>4</sup> (*tight Galois mapping*) ([Ran60]) sont obtenues comme infimum d'applications de la forme  $E_b^a$ . Il est bien connu que quand l'un des treillis  $T$  ou  $T'$  est distributif, toutes les applications galoisiennes sont contraintes ; dans ce cas, tous les inf-irréductibles de  $T \otimes T'$  sont de la forme  $E_b^a$  avec  $a, b$  des éléments inf-irréductibles, et les relations bifermées sont les intersections des relations  $\nu(E_b^a)$ .

## 3.5 Fermetures sur les applications et les relations

Dans cette section, nous allons présenter quelques utilisations possibles de l'isomorphisme établi dans le théorème 3.15 entre l'ensemble des relations bifermées sur  $(E, \varphi) \times (E', \varphi')$  et l'ensemble des applications galoisiennes de  $\Phi$  dans  $\Phi'$ . En premier lieu, nous allons présenter un algorithme permettant de calculer la fermeture bifermée d'une relation (dite aussi *bifermeture*). Ensuite, nous allons utiliser cet algorithme afin de proposer de nouvelles solutions (et de nouvelles méthodes de construction) de deux problèmes portant sur les applications galoisiennes : approcher une application quelconque entre deux treillis par une application galoisienne, et calculer la fermeture galoisienne du supremum de deux applications galoisiennes.

### 3.5.1 Un algorithme pour la bifermeture des tables binaires

Soient deux espaces de fermeture finis  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$ , et une relation binaire  $R \subseteq E \times E'$ . L'algorithme donné dans les tables 3.3 et 3.4 construit la relation bifermée  $\Gamma(R)$  associée à  $R$ . Comme démontré dans la section 3.1.2, cet algorithme de construction utilise itérativement les applications  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Toutefois, la paire  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  ne forme pas une correspondance de Galois mais une *correspondance de Benado* ([Ben73]) entre l'ensemble  $\mathcal{P}(E \times E')$  et lui même. Ainsi nous ne savons pas combien de fois nous devons itérer

---

<sup>4</sup>Une application galoisienne  $f$  est dite contrainte si, pour tout  $x \in T$ ,  $f(x) = \bigwedge_{v \in T, x \not\leq v} \bigvee_{u \in T, u \leq v} f(u)$ .

l'utilisation de l'application  $\Gamma_1\Gamma_2$  sur  $R$  afin d'obtenir  $\Gamma(R)$ , la relation bifermée. On sait seulement que, d'après la proposition 3.5, ce sera moins que  $|E| \times |E'|$ .

Les diverses notations utilisées sont rapellées dans la table 3.2.

$E, E'$	Ensembles partiellement ordonnés
$\varphi, \varphi'$	Fermetures sur $E$ et $E'$ , respectivement
$X, X'$	Sous-ensembles de $E$ et $E'$ , respectivement
$e, e'$	Éléments de $E$ et $E'$ , respectivement

TAB. 3.2: Notations.

<b>Algorithme 1</b> : détermination de $\Gamma$
1. <b>repeat</b>
2. $R \leftarrow \Gamma_1(R)$
3. $R \leftarrow \Gamma_2(R)$
4. <b>until</b> ( $change1 = false$ ) and ( $change2 = false$ )
5. <b>return</b>

TAB. 3.3: Algorithme pour  $\Gamma$ .

Si, comme dans la section 3.4,  $R$  est une relation bifermée entre les ensembles des sup-irréductibles de deux treillis finis, cet algorithme est particulièrement efficace si un des treillis est distributif. En fait, si  $T$  est un treillis distributif, nous allons montrer que  $\Gamma_1\Gamma_2(R) = \Gamma(R)$ , i.e.  $\Gamma_1\Gamma_2(R)$  est une relation bifermée. Posons  $R' = \Gamma_1\Gamma_2(R)$  et soient  $j_0 \in J, K \subseteq J$  tels que  $j_0 \in \varphi(K)$  et, pour tout  $j' \in J', kRj'$  pour tout  $k \in K$ . Par la propriété de distributivité, il existe  $k_0 \in K$  tel que  $j_0 \in \varphi(k_0)$ , i.e.  $j_0 \leq k_0$ . Ainsi nous avons  $j_0 \supseteq k_0$ , et comme  $\Gamma_1\Gamma_2$  est isotone, on a  $j_0R' \supseteq k_0R'$  et donc  $kR'j'$  pour tout  $k \in K$  implique  $k_0R'j'$  d'où  $j_0R'j'$ . Ainsi, pour tout  $j' \in J', R'j' \in \Phi$  et  $R'$  est bifermée.

De plus, si  $T'$  est distributif, nous avons, par une preuve similaire,  $\Gamma_2\Gamma_1(R) = \Gamma(R)$ . D'où le résultat suivant :

Algorithme 2 : détermination de $\Gamma_1$	Algorithme 3 : détermination de $\Gamma_2$
1. $change1 \leftarrow \text{false}$	1. $change2 \leftarrow \text{false}$
2. <b>for</b> all $e \in E$ <b>do</b>	2. <b>for</b> all $e' \in E'$ <b>do</b>
3. $X' \leftarrow \{e' : m_R(e, e') = 1\}$	3. $X \leftarrow \{e : m_R(e, e') = 1\}$
4. <b>if</b> $\varphi'(X') \neq X'$ <b>then</b>	4. <b>if</b> $\varphi(X) \neq X$ <b>then</b>
5. $change1 \leftarrow \text{true}$	5. $change2 \leftarrow \text{true}$
6. <b>for</b> all $e' \in \varphi'(X')$ <b>do</b>	6. <b>for</b> all $e \in \varphi(X)$ <b>do</b>
7. $m_R(e, e') = 1$	7. $m_R(e, e') = 1$
8. <b>end for</b>	8. <b>end for</b>
9. <b>end if</b>	9. <b>end if</b>
10. <b>end for</b>	10. <b>end for</b>

TAB. 3.4: Algorithmes de calcul de  $\Gamma_1$  et de  $\Gamma_2$ .

**Corollaire 3.18** *Si  $T$  ou  $T'$  est distributif, alors, pour toute relation binaire  $R \subseteq J \times J'$ , l'égalité  $\Gamma(R) = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_1(R)$  est vérifiée.*

**Preuve :** Ce résultat est une conséquence de la remarque précédente et de la propriété (ii) de la proposition 3.4.

□

**Exemple 3.19** Soient  $E = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $E' = \{a', b', c', d'\}$ ,  $T = \{\emptyset, a, b, c, d, e, abc, ad, ae, bd, be, cde, E\}$  et  $T' = \{\emptyset, a', b', b'c', b'd', a'b'd', b'c'd', E'\}$ . Ici nous avons  $J = \{a, b, c, d, e\}$  et  $J' = \{a', b', b'c', b'd'\}$ . Nous allons considérer la relation  $R = \{(a, c'), (a, d'), (b, b'), (c, a'), (d, d')\}$ . La figure 3.1 montre les treillis  $T$  et  $T'$  et les tables des relations  $R$ ,  $R_1 = \Gamma_1(R)$ ,  $R_2 = \Gamma_2(R_1)$ ,  $R_3 = \Gamma_1(R_2)$  et  $R_4 = \Gamma_2(R_3) = \Gamma(R)$ .

### 3.5.2 La fermeture galoisienne d'une application entre treillis finis

Soient  $T$  et  $T'$  deux treillis finis,  $J$  et  $J'$  leurs ensembles d'éléments sup-irréductibles, et une application  $f$  de  $T$  dans  $T'$ . On veut approcher  $f$  par une application galoisienne "proche" de  $f$  (comme dans [PF80]). Il est connu que l'ensemble  $T \otimes T'$  est fermé pour

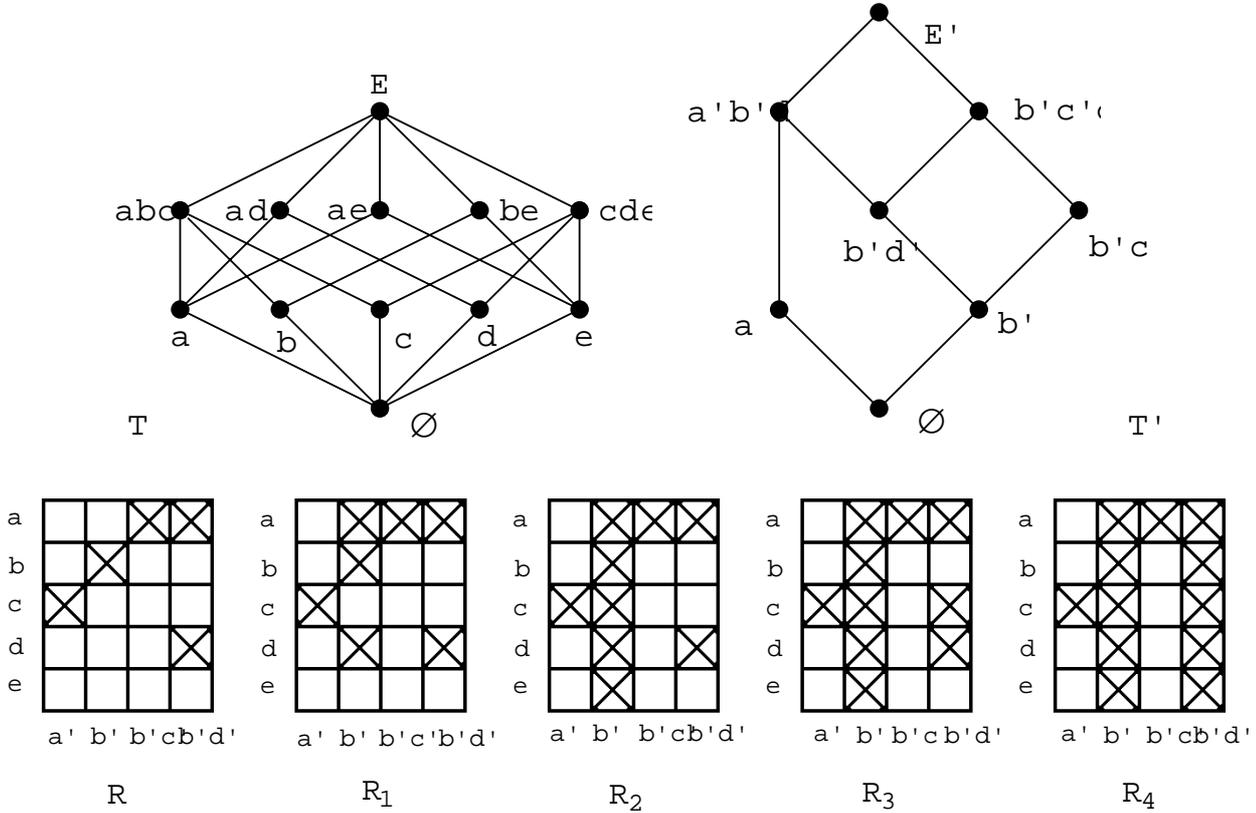


FIG. 3.1: Construction de la bifermature de  $R$ .

l'infimum dans le treillis  $T'^T$  des applications de  $T$  dans  $T'$  ; ainsi, l'ensemble des applications galoisiennes supérieures à une application  $f$  possède un minimum  $\gamma f = \wedge\{f' \in T \otimes T' : f \leq f'\}$ , et  $\gamma$  est une fermeture qui transforme  $f$  en ce minimum. Nous allons appliquer l'algorithme de la section 3.5.1 afin d'obtenir  $\gamma f$ .

Nous allons d'abord faire correspondre à  $f$  une relation binaire  $R = \nu'(f) \in J \times J'$  ; si  $f$  est antitone, on pose juste  $\nu'(f) = \nu(f)$ . Sinon, la définition de  $\nu(f)$  n'est plus adéquate<sup>5</sup> vu qu'elle ne prend en compte que les valeurs  $f(j)$  pour  $j \in J$ . Alors, nous

<sup>5</sup>[Fle84] a montré dans un article paru en 1984 que toute correspondance de Galois peut être vue comme la polarité d'une relation associée à une application antitone. C'est en fait un cas particulier de notre correspondance entre relation bifermées et correspondances de Galois, mais obtenu pour des

considérons l'application  $\alpha f$  de  $T$  dans  $T'$  définie par  $\alpha f(j) = \vee\{f(x) : j \leq x\}$  pour  $j \in J$  et  $\alpha f(x) = \wedge\{\alpha f(j) : j \in J, j \leq x\}$  pour  $x \in T - J$ .

**Proposition 3.20** *L'application  $\alpha f$  a les propriétés suivantes :*

- $\alpha f$  est antitone;
- $f \leq \alpha f$ ;
- $\gamma \alpha f = \gamma f$ .

**Preuve :** Pour l'antitonie de  $\alpha f$ , on peut remarquer que  $x, x' \in T$  et  $x \leq x'$  impliquent  $\wedge\{\alpha f(j) : j \leq x\} \geq \wedge\{\alpha f(j) : j \leq x'\}$ . Alors, pour  $j \in J$  et  $x \in T$ ,  $j \leq x$  implique  $\alpha f(j) \geq f(x)$ ; ainsi,  $\alpha f(x) = \wedge\{\alpha f(j) : j \leq x\} \geq f(x)$ . Pour la dernière propriété, on montre que  $f, f' \in T'^T$ ,  $f \leq f'$ , et  $f' \in T \otimes T'$  impliquent  $\alpha f \leq f'$ ; pour  $j \in J$  et  $x \in T$ ,  $j \leq x$  implique  $f'(x) \leq f'(j)$ ; ainsi,  $f'(j) \geq \vee\{f'(x) : j \leq x\} \geq \vee\{f(x) : j \leq x\} = \alpha f(j)$ ; alors, pour  $x \in T - J$ ,  $\alpha f(x) = \wedge\{\alpha f(j) : j \leq x\} \leq f'(x) = \wedge\{f'(j) : j \leq x\}$ .

□

Maintenant, en posant  $R = \nu'(f) = \nu(\alpha f)$ , il s'avère que, d'après les résultats de la section 3.2, il est équivalent de déterminer  $\Gamma(R)$  ou  $\gamma f$ . Plus précisément :

**Proposition 3.21** *Pour toute application  $f$  de  $T$  dans  $T'$ , l'égalité  $\mu(\Gamma(R)) = \gamma f$  est vérifiée.*

**Preuve :** Par l'isotonie de  $\nu$ , on a  $R = \nu(\alpha f) \leq \nu(\gamma f)$  ce qui, en utilisant la proposition 3.12, implique  $\Gamma(R) \leq \nu(\gamma f)$ . Ainsi, par l'isotonie de  $\mu$  et en utilisant la proposition 3.14,  $\mu(\Gamma(R)) \leq \mu\nu(\gamma f) = \gamma f$ . Inversement,  $f \leq \alpha f \leq \mu\nu(\alpha f) = \mu(R) \leq \mu(\Gamma(R))$ ; ainsi,  $\mu(\Gamma(R))$  est une application galoisienne supérieure à  $f$ , qui est  $\gamma f \leq \mu(\Gamma(R))$ .

□

**Exemple 3.22** Considérons les treillis  $T$  et  $T'$  de l'exemple 3.19 et l'application (anti-tone)  $f : T \rightarrow T'$  donnée par la table suivante (et par  $f(x) = \emptyset$  sinon) :

$x$	$\emptyset$	$a$	$b$	$c$	$d$	$ad$
$f(x)$	1	$b'c'd'$	$b'$	$a'$	$b'd'$	$b'$

applications entre ensembles ordonnés quelconques.

Avec la définition précédente,  $\nu'(f) = \nu(f) = R_1$  comme décrit dans la section 3.5.1. Ainsi,  $\Gamma(R_1) = R_4$  et l'application  $\gamma f$  est égale à  $f_{R_4}$ , donnée par  $\gamma f(a) = b'c'd'$ ,  $\gamma f(b) = \gamma f(d) = \gamma f(e) = b'd'$ ,  $\gamma f(c) = a'b'd'$  et  $\gamma f(x) = \bigwedge\{\gamma f(j) : j \leq x\}$  sinon.

### 3.5.3 Le supremum de deux applications galoisiennes

Soient  $T$  et  $T'$  deux treillis complets,  $J$  et  $J'$  leurs ensembles de sup-irréductibles et  $\varphi$  et  $\varphi'$  les fermetures associées. Nous allons maintenant considérer le contexte suivant : dans le treillis  $A(T, T')$  des application antitones de  $T$  dans  $T'$ , l'ensemble des applications galoisiennes  $T \otimes T'$  est un sous inf-demi-treillis complet de  $A(T, T')$  et un treillis complet avec les opérateurs suivants : pour tout sous-ensemble  $F \subseteq T \otimes T'$ , on a

$$\bigwedge_{T \otimes T'} F = \bigwedge_{A(T, T')} F$$

$$\bigvee_{T \otimes T'} F = \gamma\left(\bigvee_{A(T, T')} F\right)$$

Alors que l'infimum de deux applications antitones n'est que l'infimum usuel, on peut avoir des problèmes pour calculer le supremum de deux applications galoisiennes  $f_1$  et  $f_2$ . Afin de résoudre ce problème dans le cas fini, on va utiliser l'isomorphisme du théorème 3.15 entre correspondances de Galois et relations bifermées et l'algorithme de la section 3.5.1. Soient  $R_1$  et  $R_2$  les relations bifermées associées à  $f_1$  et  $f_2$ , respectivement. Dans le treillis  $A(T, T')$ ,  $\Gamma_1(R_1 \cup R_2)$  est la table associée à  $f_1 \vee_{A(T, T')} f_2$ . Ainsi, calculer  $f_1 \vee_{T \otimes T'} f_2 = \gamma(f_1 \vee_{A(T, T')} f_2)$  est équivalent à déterminer la fermeture galoisienne de  $f_1 \vee_{A(T, T')} f_2$ , et donc la bifermature de  $R_1 \cup R_2$ .

**Exemple 3.23** Considérons à nouveau les treillis  $T$  et  $T'$  de l'exemple 3.19 et les applications galoisiennes  $f_1$  et  $f_2$  associées aux relations (bifermées)  $R_1$  et  $R_2$  de la figure 3.2. Alors  $R_3 = R_1 \cup R_2$  et  $f_1 \vee_{T \otimes T'} f_2$  est l'application galoisienne associée à  $R_4 = \Gamma(R_3)$ .

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les relations bifermées entre deux espaces de fermeture. Nous avons alors établi un isomorphisme général entre les correspondances de

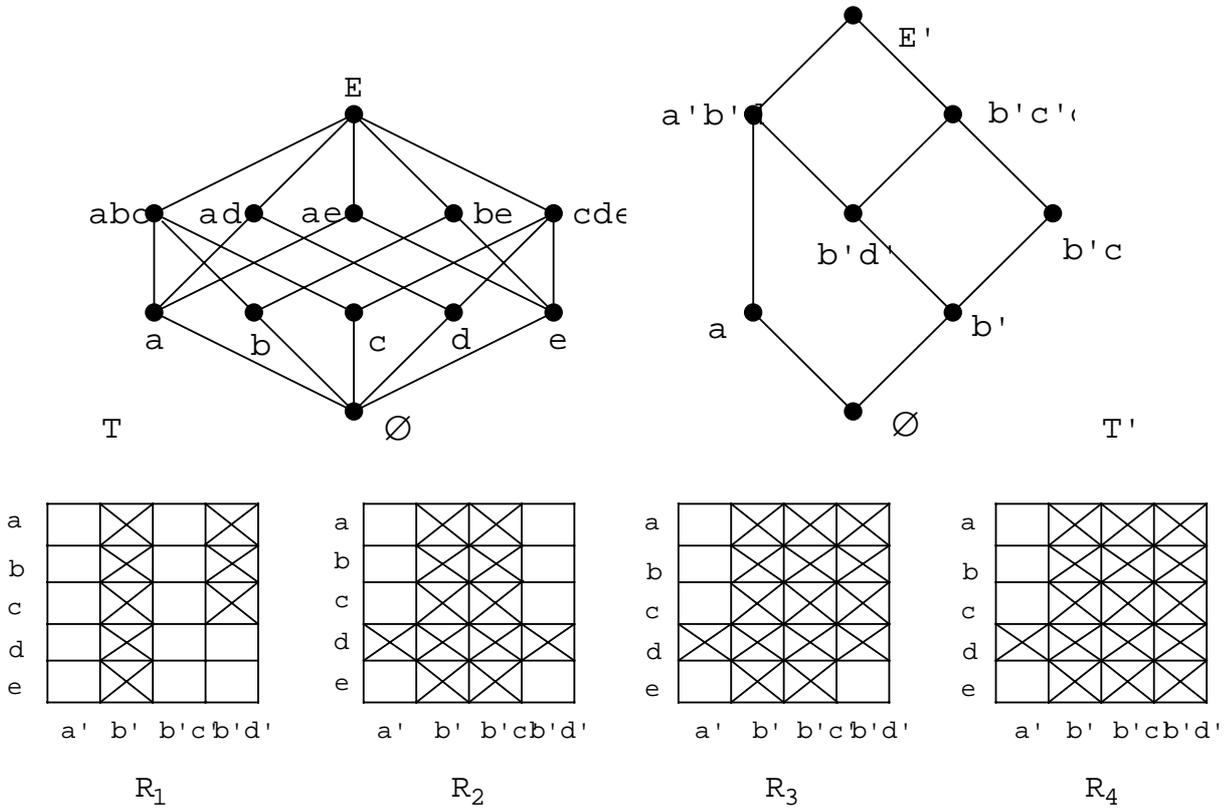


FIG. 3.2: Construction du supremum de  $f_1$  et  $f_2$  dans  $T \otimes T'$ .

Galois entre deux treillis de fermés (soit, en fait, deux treillis quelconques) et les relations bifermées. Après avoir utilisé cet isomorphisme afin de coder les correspondances de Galois, nous avons montré comment ce codage peut être utile pour des calculs pratiques, comme, par exemple, la détermination de la fermeture galoisienne d'une application donnée.

Pour ce travail, nous nous sommes concentrés sur les correspondances de Galois entre deux treillis. Toutefois, nos résultats peuvent être généralisés à d'autres correspondances de Galois (entre deux ensembles ordonnés  $P$  et  $P'$ ) en utilisant le résultat de Shmueli ([Shm74]) disant qu'une telle correspondance peut s'étendre canoniquement comme une correspondance de Galois sur les complétés de MacNeille de  $P$  et  $P'$  ([Mac37]).

Les correspondances de Galois sont de plus en plus utiles dans différents domaines de l'intelligence artificielle, comme l'apprentissage, l'extraction de connaissance, la représentation des connaissances, et d'autres domaines où les classes d'objets peuvent être décrites en termes de propriétés communes. Dans cette optique, les relations bifermées peuvent être un outil efficace lorsqu'on introduit des contraintes sur les classes comme sur les descriptions, dès lors que ces contraintes peuvent être décrites en termes de fermeture. Ces contraintes peuvent être de toute sorte, par exemple un ensemble de propriétés peut être totalement ordonné, des propriétés peuvent être incompatibles, ...

Il reste toutefois de nombreux développements possibles, aussi bien algorithmiquement, la borne  $k$  telle que  $(\Gamma_1\Gamma_2)^k = \Gamma$  pouvant certainement être affinée, que pour la structure même des correspondances de Galois. En effet, grâce à notre isomorphisme, l'étude d'ensembles de familles de Moore particulières<sup>6</sup> pourrait être simplifiée en se ramenant à celle des relations bifermées correspondantes.

---

<sup>6</sup>Par exemple, [Rad01] a étudié la structure latticielle d'ensembles de fonctions de choix satisfaisant certains axiomes.



# Chapitre 4

## Classification et correspondances de Galois

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Les correspondances de Galois en classification . . . . .</b>	<b>91</b>
4.1.1	Classes conceptuelles . . . . .	91
4.1.2	La classification symbolique . . . . .	92
4.1.3	Les objets symboliques . . . . .	93
4.1.4	Les modèles résiduels . . . . .	95
<b>4.2</b>	<b>Un paradigme pour la classification symbolique . . . . .</b>	<b>97</b>
4.2.1	Un cadre unificateur . . . . .	97
4.2.2	La classification symbolique comme problème d’ajustement . .	99
<b>4.3</b>	<b>Quelques usages . . . . .</b>	<b>100</b>
4.3.1	Ajustements à une hiérarchie donnée . . . . .	100
4.3.2	Construction d’une hiérarchie basée sur les relations d’emboîtement . . . . .	105
<b>4.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>111</b>

---

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats présentés aux chapitres 2 et 3 à la classification. Le propos de celle-ci (essentiel dans des domaines tels que l’analyse des données, l’apprentissage, le “data mining”, la reconstruction phylogénétique, . . .) est de constituer des classes parmi les objets décrits par des données. Deux méthodologies se présentent couramment.

Dans la plus usitée (voir les ouvrages les plus connus dans ce domaine [SS63, JS71, Har75, Gor99], et plus récemment [AHS96, Mir96]), le point de départ est de dégager des données une notion de ressemblance entre objets et, comme le disait<sup>1</sup> Buffon, mettre ensemble ce qui se ressemble et séparer ce qui diffère. On débouche alors le plus souvent sur des problèmes d’ajustement d’une structure classificatoire (partition, hiérarchie, ...) aux données.

L’autre approche (au développement plus récent) est celle de la classification symbolique. Son principe consiste à rassembler dans une classe tous les objets possédant en commun certaines caractéristiques. Les classes obtenues de cette manière sont parfois dites “monothétiques”, celles obtenues par l’approche précédente étant alors “polythétiques”<sup>2</sup>. On retrouve évidemment là la dualité extension / intension, et sa formalisation privilégiée par les correspondances de Galois (souvent redécouvertes dans ce contexte). Les problèmes de complexité sont potentiellement encore plus redoutables que dans le cas précédent, puisque la recherche de toutes les classes est de nature exponentielle.

En fait, loin d’être antinomiques, ces deux approches peuvent se rejoindre. Ce qui est peut-être moins connu est que M.F. Janowitz a établi dès 1978 l’importance des correspondances de Galois (sous la forme résiduelle / résiduelle) dans l’approche classique de la classification hiérarchique. On observe que, contrairement au cas de la classification symbolique, les correspondances de Galois sont, dans le cadre développé par Janowitz, fortement contraintes (au sens du chapitre 3). Ainsi, l’introduction dans la classification symbolique de contraintes structurelles du type de celles apparaissant dans les travaux de Janowitz permet de définir la recherche d’une classification fortement structurée (par exemple en une hiérarchie) comme un problème d’ajustement de tableaux binaires. C’est ce qui est exposé dans ce chapitre, avec quelques exemples illustrant cette approche.

---

<sup>1</sup>Il existe toutefois un doute sur l’origine de cette citation. B Leclerc l’attribue à Bécassine (cf. *L’enfance de*, Gauthier-Languereau, 1913.).

<sup>2</sup>En reprenant [Tur00], par classe “polythétique”, il faut entendre une classification où les classes sont formées à partir du comportement “voisin” ou ressemblant entre individus sur plusieurs caractéristiques simultanément, par opposition à la notion de classe “monothétique” qui utilise de proche en proche un comportement identique des individus.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : tout d’abord, dans le paragraphe 4.1, nous rappelons en détail différentes utilisations des correspondances de Galois en classification, aussi bien dans le cadre de la “Formal Concept Analysis”, que pour les objets symboliques développés par Diday ou les modèles résidués de Janowitz. Dans la section 4.2, nous proposons notre modèle pour la classification symbolique, sous l’optique des relations bifermees présentées dans le chapitre 3. La section 4.3 nous permet d’illustrer cette approche dans deux contextes différents, selon que la hiérarchie prise en compte est donnée ou à construire. Dans le second cas, les résultats du chapitre 2 nous apportent les outils nécessaires.

## 4.1 Les correspondances de Galois en classification

Dans ce paragraphe, nous effectuons un tour d’horizon de différentes utilisations des correspondances de Galois en classification, sans prétendre à aucune exhaustivité tellement le domaine est vaste et les applications différentes. Toutefois, nous présentons ici les utilisations les plus courantes et les plus célèbres, en introduisant tout d’abord dans la section 4.1.1 la méthode la plus classique, qui associe à tout élément une description, avant de la replacer dans le paragraphe 4.1.2 dans un cadre plus général. La section 4.1.3 présente une autre approche du problème, initiée par Diday, et le paragraphe 4.1.4 celle due à Janowitz utilisant les correspondances résiduées / résiduelles.

### 4.1.1 Classes conceptuelles

Les correspondances de Galois nécessitent des conditions fortes afin d’exister (cf. section 1.5.1), qui, à première vue, pourraient être difficilement satisfaites. En fait, comme le savent leurs utilisateurs, les correspondances de Galois sont rencontrées dans beaucoup de domaines différents, le plus souvent sous la forme suivante. Soit  $P = \mathcal{P}(S)$ , avec  $S$  un ensemble fini d’objets étudiés, et considérons un treillis (complet)  $Q$  de *descriptions*, avec une description  $d(s) \in Q$  pour chaque élément  $s \in S$ . L’ordre sur  $Q$  correspond à un ordre de généralisation, où  $q \leq q'$  signifie que la description  $q$  est plus générale que la description  $q'$ . Alors on dit que  $s \in S$  satisfait la description  $q$  si  $q \leq d(s)$ .

Considérons, pour toute classe (sous-ensemble)  $C \subseteq S$ , et toute description  $q \in Q$ , les applications  $f(C) = \bigwedge \{d(s) : s \in C\}$  et  $g(q) = \{s \in S : q \leq d(s)\}$ ; ainsi,  $f(C)$

est la description la moins générale satisfaite par tous les éléments de  $C$  (*l'intension* de  $C$ ), tandis que  $g(q)$  est la classe de tous les éléments de  $S$  satisfaisant la description  $q$  (*l'extension* de  $q$ ). Il est alors facile de voir que la paire  $(f, g)$  est une correspondance de Galois entre  $\mathcal{P}(S)$  et  $Q$ ; elle définit un ensemble  $\mathcal{C}$  de *classes conceptuelles* qui sont des paires  $(C, D)$  avec  $C = g(D) \subseteq S$  et  $D = f(C) \in Q$ . De plus, d'après les diverses propriétés des correspondances de Galois entre deux treillis,  $\mathcal{C}$  lui-même est le treillis de Galois du triplet  $(S, Q, d)$ , avec  $(C, D) \leq (C', D') \iff C \subseteq C' \iff D' \leq D$ ; les opérations de supremum et d'infimum de  $\mathcal{C}$  étant

$$(C, D) \wedge (C', D') = (C \wedge C', f(C \wedge C'))$$

$$(C, D) \vee (C', D') = (g(D \wedge D'), D \wedge D')$$

Le treillis  $Q$  peut être un ensemble de nombres, ou un ensemble d'intervalles numériques (avec l'ordre d'inclusion), ou un produit de treillis de cette forme (on peut voir par exemple [BD00]). Dans les cas classiques, on considère un ensemble  $A$  d'attributs binaires que les éléments de  $S$  peuvent posséder et le treillis  $Q$  est le treillis booléen  $\mathcal{P}(A)$  des parties de  $A$ . Les données consistent alors en une relation binaires  $I \subseteq S \times A$ , avec  $sIa$  si l'objet  $s$  possède l'attribut  $a$ ; de façon équivalente, pour  $s \in S$ ,  $d(s) = sI = \{a \in A : sIa\}$ . Ainsi,  $f(C) = \bigcap \{d(s) : s \in C\} = \{a \in A : sIa \text{ pour tous } s \in C\}$  et  $g(A') = \{s \in S : sIa \text{ pour tous } a \in A'\}$ . Cette situation est bien connue comme la base de la "*Formal Concept Analysis*" [GW99] et le treillis obtenu par une correspondance de Galois de ce type<sup>3</sup> est aussi appelé le *treillis de concepts* du *contexte*  $(S, A, I)$ .

### 4.1.2 La classification symbolique

Comme décrit précédemment, les treillis de Galois satisfont un des critères de la classification : ils fournissent des classes (les extensions) d'objets partageant des caractéristiques similaires (les intensions), une description par des attributs étant associée à chaque classe. Cette correspondance entre classes et descriptions est un fait de base dans le domaine de la classification symbolique.

Un autre but de la classification est l'organisation des données afin de les rendre plus lisibles ou d'exhiber des structures inconnues. Par exemple, les méthodes de classification

---

<sup>3</sup>Ce type de correspondance de Galois est le sujet du paragraphe 1.6.1.

hiérarchiques fournissent des arbres de classification, ou encore (par exemple en reconstruction phylogénétique ou en psychologie cognitive [BG88, Gas97, ML97, ML99, SN87]) une estimation d'un arbre inconnu. Le treillis de concept ne répond pas à un tel objectif car il préserve toute l'information contenue dans les données<sup>4</sup>. Ainsi, comme il a été souvent remarqué dans la littérature, le treillis de concepts est très sensible au bruit et aux petits écarts au modèle. De plus, le nombre de concepts augmente potentiellement de manière exponentielle avec la taille des données, introduisant des problèmes de complexité algorithmique.

Pour toutes ces raisons, de nombreux auteurs ont proposé des méthodes afin d'élaguer le treillis de concept, par exemple en limitant sa construction<sup>5</sup> par l'usage de filtres [GR99, Ngu93, Ngu01], ou en ne considérant que certaines implications<sup>6</sup> du système implicatif complet associé [BP99, Lux91]. Une autre approche, plus proche de la classification, consiste à retenir seulement une (petite) part de  $\mathcal{C}$ , de telle façon que l'ensemble des extensions correspondantes répond à une structure désirée, e.g. constitue un arbre hiérarchique ou une pyramide ([Gué93, Bri95, Pol98, PD98]), les deux dernières références dans le contexte plus général des objets symboliques développés par Diday ([Did88]).

### 4.1.3 Les objets symboliques

Développé par Diday et son équipe ([Did88, Bri95, PD96]), le formalisme des objets symboliques a été introduit dans le but d'étendre l'analyse des données à des données décrites par des intensions, sous la forme de conjonction de propriétés, et de ne plus se limiter à l'étude de tableaux binaires. Ces données peuvent être multivaluées, exprimer des variations, suivre certaines règles, ... Il permet aussi de prendre en compte le savoir propre à la sémantique du domaine considéré.

La description d'un individu  $w$  est représenté par  $w_s = (y_1(w), \dots, y_p(w))$ , où chaque variable  $y_i$  est une application de  $\Omega$  dans  $\mathcal{P}(O_i)$ , avec  $\Omega$  l'ensemble des individus,  $O_i$  l'es-

<sup>4</sup>cf. les remarques du paragraphe 1.6.3.

<sup>5</sup>Dans [Ngu93], l'idée est de ne construire qu'une partie du treillis de Galois, un filtre, satisfaisant certains critères, et d'obtenir ainsi un sous-inf-demi-treillis.

<sup>6</sup>Les implications retenues par [BP99, Lux91] sont des implications dites partielles, c'est à dire des implications classiques, définies dans la section 2.1.2, mais aussi des implications avec quelques contre-exemples.

pace de description de chaque variable  $y_i$  et  $\mathcal{P}(O_i)$  l'ensemble des descriptions possibles pour la variable  $y_i$ . On note par  $\mathcal{O} = O_1 \times \dots \times O_p$  l'espace de description. En analyse des données symboliques, la relation entre individus et classes peut être décrite par le quadruplet  $(\Omega, Y, \mathcal{O}, R)$ , avec  $Y = (y_1, \dots, y_p)$  l'ensemble des variables et  $R$  une relation entre l'ensemble des variables et l'ensemble de leurs descriptions.

Un évènement élémentaire, noté  $e = [y_i = V_i]$ , avec, pour tous  $1 \leq i \leq p$ ,  $V_i \subseteq O_i$ , exprime la condition “la variable  $y_i$  prend ces valeurs dans  $V_i$ ”. On peut alors associer à  $e$  l'application

$$\begin{aligned} e : \Omega &\rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\} \\ w &\rightarrow e(w) \end{aligned}$$

telle que  $e(w) = \text{vrai}$  si et seulement si  $y_i R V_i$ . L'extension de  $e$  sur  $\Omega$  est défini par  $\text{ext}_\Omega e = \{w \in \Omega : e(w) = \text{vrai}\} = e^{-1}(\text{vrai})$ .

**Exemple 4.1** [tiré de [Bri95]] Soit  $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  un ensemble d'objets observés, décrits par deux variables  $y_1 = \text{couleur}$ ,  $O_1 = \{\text{bleu}, \text{vert}, \text{jaune}, \text{blanc}, \dots\}$  et  $y_2 = \text{taille}$ ,  $O_2 = \{\text{grande}, \text{moyenne}, \text{petite}\}$  :

	$y_1$	$y_2$
$w_1$	bleu	moyenne
$w_2$	blanc	grande
$w_3$	bleu	grande
$w_4$	vert	petite

Considérons l'évènement élémentaire  $e = [\text{taille} = \{\text{grande}, \text{moyenne}\}]$ . Alors  $\text{ext}_\Omega e = \{w \in \Omega : e(w) = \text{vrai}\} = \{w_1, w_2, w_3\}$ .

Un objet symbolique  $a$  (assertion object) est une conjonction d'évènements élémentaires et l'application associée est :

$$\begin{aligned} a : \Omega &\rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\} \\ w &\rightarrow a(w) \end{aligned}$$

telle que  $a(w) = \text{vrai}$  si et seulement si  $y_i RV_i$  pour tous  $i = 1, \dots, p$ . L'extension est alors définie par  $\text{ext}_\Omega(a) = \{w \in \Omega : a(w) = \text{vrai}\} = a^{-1}(\text{vrai})$ .

**Exemple 4.2** Considérons à nouveau le tableau de l'exemple 4.1. On peut définir l'objet symbolique  $a = [\text{taille} = \{\text{grande}, \text{moyenne}\}] \wedge [\text{couleur} = \{\text{blanc}\}]$ . Alors,  $\text{ext}_\Omega(a) = \{w_2\}$ .

Nous pouvons maintenant définir un préordre<sup>7</sup> sur les objets symboliques, basé sur les extensions. Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des objets symboliques. Pour tous  $a_1, a_2 \in \mathcal{S}$ , on dit que  $a_1 \leq a_2$  si et seulement si  $\text{ext}_\Omega(a_1) \subseteq \text{ext}_\Omega(a_2)$ . On peut maintenant considérer l'application résiduelle suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{P}(\Omega) \\ a &\rightarrow \text{ext}_\Omega(a) \end{aligned}$$

En notant  $(g, f)$  la correspondance résiduée / résiduelle, on dit qu'un objet symbolique  $a$  est *complet*<sup>8</sup> si  $gf(a) = a$ . On a donc, en appliquant les résultats précédents (cf. section 1.5.2), le théorème suivant :

**Théorème 4.3** *L'ensemble de tous les objets symboliques complets constitue un treillis pour l'ordre symbolique défini précédemment, avec l'infimum et le supremum donnés par :*

$$a_1 \wedge a_2 = gf(a_1 \cap a_2)$$

$$a_1 \vee a_2 = a_1 \cup a_2$$

#### 4.1.4 Les modèles résidués

Une utilisation apparemment différente des correspondances de Galois en classification a été inaugurée par un article de Janowitz ([Jan78]), qui utilise la théorie de la résiduation

<sup>7</sup>Un préordre est une relation binaire réflexive et transitive. En général, ce n'est pas un ordre car nous pouvons avoir  $a_1 \leq a_2$  et  $a_2 \leq a_1$  avec  $a_1 \neq a_2$ . Ainsi, dans l'exemple 4.1, si on considère  $a_1 = [\text{taille} = \{\text{petite}\}]$  et  $a_2 = [\text{couleur} = \{\text{vert}\}]$ , on a  $\text{ext}_\Omega(a_1) = \text{ext}_\Omega(a_2) = \{w_4\}$  mais  $a_1 \neq a_2$ .

<sup>8</sup>Dans le cadre des correspondances résiduées, l'application  $gf$  n'est pas une fermeture, mais est une ouverture sur  $\mathcal{S}$ . Les objets symboliques complets sont donc les ouverts de l'application  $gf$ .

([BJ72]). Par souci d'homogénéité, notre présentation va différer de la sienne, et va être basée sur les similarités plutôt que sur les dissimilarités. Notre présentation utilisera le modèle galoisien, dual du modèle résidué. Considérons l'intervalle réel fermé  $[0, 1]$  et le treillis  $\mathcal{R}_S$  de toutes les relations binaires sur un ensemble fini  $S$ , ordonné par inclusion. Un *dendrogramme* est une application  $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}_S$  satisfaisant les propriétés :

(D1) pour tous  $\lambda, \mu \in [0, 1]$ ,  $\lambda \leq \mu$  implique  $g(\mu) \subseteq g(\lambda)$  ;

(D2) pour tous  $x, y \in S$ , l'ensemble  $\{\lambda \in [0, 1] : (x, y) \in g(\lambda)\}$  a un maximum  $f(x, y)$ .

La valeur  $f(x, y)$  peut être vue comme un degré de proximité de  $x$  à  $y$ .

Une conséquence de (D2) est que, en fait, pour toute relation binaire  $R \subseteq S^2$ , l'ensemble  $\{\lambda \in [0, 1] : R \subseteq g(\lambda)\}$  possède un maximum. Plus particulièrement,  $g(0) = S^2$ . Ainsi,  $g$  est une application galoisienne et, en étendant  $f$  à  $\mathcal{R}_S$  en posant  $f(R) = \min\{f(x, y) : (x, y) \in R\}$ , la paire  $(f, g)$  est une correspondance de Galois<sup>9</sup> entre les treillis  $\mathcal{R}_S$  et  $[0, 1]$ .

Dans le schéma précédent, un treillis restreint peut être considéré à la place de  $\mathcal{R}_S$ . Le cas du treillis  $\mathcal{S}_S$  de toutes les relations binaires symétriques sur  $S$  (avec les coefficients classiques de similarité comme fonction  $f$ ) correspond à l'article original de Janowitz. Dans Leclerc ([Lec91, Lec94]), les treillis des préordres sur  $S$  (conduisant à une formalisation de l'idée de préordres valué) et d'équivalences sur  $S$  (avec des ultramétriques duales<sup>10</sup> pour  $f$ ) sont considérés. Le dernier cas correspond aux dendrogrammes standards (appelés aussi *arbres valués* par Boorman et Olivier [BO73]). D'autres exemples sont aussi présentés dans [Lec94], où des dendrogrammes généralisés rendent compte de diverses correspondances bijectives entre des types de dissimilarités et des structures classificatoires. Deux points peuvent être avancés grâce à cette approche :

1. les éléments de  $Q$  ne sont pas nécessairement des relations binaires ; des exemples sont donnés où ils sont des sous-ensembles de  $S$  d'un type particulier, par exemple des ensembles convexes ;

---

<sup>9</sup>On peut aisément se convaincre que la relation de Pickert est vérifiée :  $\lambda \leq f(R) \iff \lambda \leq \min\{f(x, y), (x, y) \in R\} \iff \lambda \leq f(x, y) \forall (x, y) \in R \iff \lambda \leq \max\{\lambda' : (x, y) \in g(\lambda')\} \forall (x, y) \in R \iff (x, y) \in g(\lambda) \forall (x, y) \in R \iff R \subseteq g(\lambda)$ .

<sup>10</sup>Une ultramétrique  $U : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifie  $U(x, x) = 0$ ,  $U(x, y) = U(y, x)$  et l'inégalité ultramétrique  $U(x, z) \leq \max(U(x, y), U(y, z))$ . Un coefficient de similarité  $s$  est dit dualement ultramétrique s'il est symétrique et vérifie  $s(x, z) \geq \min(s(x, y), s(y, z))$ .

2. l'intervalle  $[0, 1]$  peut être remplacé par un treillis de descriptions  $Q$  comme dans la section 4.1.1 précédente.

Le modèle résidué de Janowitz (ou, comme présenté ici, le modèle galoisien) a été utilisé pour des méthodes de formalisation classificatoire ([Jan78, JW95]), pour la comparaison des arbres de classification ([BO73, BLM86]) ou le consensus des arbres de classification, préordres valués, et autres objets de type similaire ([BLM86, Lec91, LM95]).

## 4.2 Un paradigme pour la classification symbolique

### 4.2.1 Un cadre unificateur

Le tableau 4.1 ci-dessous résume les diverses utilisations en classification symbolique des treillis de Galois précédemment mentionnées; bien sur, nous ne prétendons à aucune exhaustivité dans le domaine.

Considérons le treillis  $Q$  des descriptions. Dans le tableau 4.1, la situation 2 apparaît comme une généralisation de la situation 1. En fait, comme il est montré dans Ganter et Wille [GW99], le modèle issu de la “Formal Concept Analysis” est valable pour de nombreux types de situations et de treillis. Ainsi tout treillis complet  $Q$  peut être représenté par une famille de sous-ensembles d'un ensemble  $A$  de descriptions élémentaires,  $A$  générant  $Q$  par l'opération supremum,  $A$  étant par exemple l'ensemble des sup-irréductibles de  $Q$ . Chaque description  $q \in Q$  peut être représentée par l'ensemble  $A_q = \{a \in A : a \leq q\}$ , avec  $q = \bigvee A_q$ . Un sous-ensemble  $A'$  de  $A$  peut être obtenu comme  $A_q$  pour un certain  $q \in Q$  si et seulement s'il satisfait la condition (C) suivante :

$$(C) \text{ pour tout } a \in A, a \leq \bigvee A' \text{ implique } a \in A'$$

Nous pouvons alors dire que  $A'$  est *fermé par rapport à  $Q$*  (ou  *$Q$ -fermé*). Soit  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(A)$  l'ensemble de tous les sous-ensembles  $Q$ -fermés. La correspondance  $q \leftrightarrow A_q$  entre  $Q$  et  $\mathcal{G}$  est bijective (cf. remarque 1.38). Par exemple, considérons le cas où les éléments de  $Q$  sont les intervalles d'un ensemble totalement ordonné  $(L, \leq_L)$ , ordonnés par inclusion. Alors nous pouvons prendre les extrémités des intervalles comme descriptions élémentaires, et

Modèle	Treillis $P$ d'objets	Treillis $Q$ de descriptions	Système de classes obtenu
1. "Formal Concept Analysis"	$\mathcal{P}(S)$	$\mathcal{P}(A)$	Tout treillis de sous-ensembles (classes) de $S$ .
2. Treillis de Galois en classification	$\mathcal{P}(S)$	Tout treillis de descriptions	Tout treillis de sous-ensembles de $S$ .
3. Classification symbolique	$\mathcal{P}(S)$	Tout treillis de descriptions	Un ensemble structuré de classes (hiérarchie, pyramide) extraite du treillis ci-dessus avec les descriptions associées.
4. Dendrogramme ([Jan78])	$\mathcal{S}_S$ (relations binaires symétriques)	$[0, 1]$ ou $\mathbb{R}^+$	Une chaîne indexée de relations binaires symétriques sur $S$ .
5. Dendrogramme standard	$\mathcal{E}_S$ (relations d'équivalence)	$[0, 1]$ ou $\mathbb{R}^+$	Un arbre de classification indexé.
6. Dendrogramme généralisé	$\mathcal{T}_S$ (un treillis spécifique de relations binaires)	$[0, 1]$ ou $\mathbb{R}^+$	Une chaîne indexée de relations dans $\mathcal{T}_S$

TAB. 4.1: Utilisations des treillis de Galois en classification

la contrainte de fermeture est particularisée par la condition

$$a, a' \in q \text{ et } a \leq_L b \leq_L a' \text{ impliquent } b \in q$$

Maintenant, le cas  $\mathcal{G} = \mathcal{P}(A)$  de la situation (1) apparaît comme le cas non contraint. Lorsque nous examinons les modèles de la section 4.1.4, nous pouvons remarquer que, dans les situations 5 et 6, les treillis  $P$  d'objets ne sont plus des treillis de parties. Ils peuvent aussi être représenté, comme ci-dessus, par des sous-ensembles  $P$ -fermés d'un ensemble  $S$  d'objets élémentaires, et l'ensemble  $\mathcal{F}$  de tous les sous-ensembles  $P$ -fermés de

$S$  est en bijection avec  $S$ . Par exemple, quand  $P = \mathcal{E}_S$ , les objets élémentaires sont les paires non ordonnées  $xy$  d'éléments de  $S$ , et la contrainte de fermeture est :

$$x, y, z \in S \text{ et } xy, yz \in p \text{ impliquent } xz \in p \text{ (propriété de transitivité)}$$

La représentation du treillis  $Q$  au moyen de descriptions élémentaires existe toujours, mais l'expression de tels éléments est souvent moins facile que celle des objets. Au pire, on prendra tous les éléments de  $Q$  comme description élémentaire, et, au mieux, les éléments sup-irréductibles (ceux-ci ne sont nécessairement faciles à caractériser). Supposons que les ensembles  $S$  et  $A$  d'objets et de descriptions élémentaires soient définis, et  $P$  et  $Q$  remplacés par les ensembles équivalents  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . Alors une relation  $I \subseteq S \times A$  est définie par  $sIa \iff a \leq d(s)$  et nous sommes dans une situation du type "Formal Concept Analysis", avec les contraintes suivantes :

- pour tout  $s \in S, sI = \{a \in A : sIa\} \in \mathcal{G}$  ;
- pour tout  $a \in A, Ia = \{s \in S : sIa\} \in \mathcal{F}$  ;

Nous pouvons alors dire que  $I$  est *PQ-bifermée*. Quand la relation  $I$  est donnée par sa table, les ensembles  $sI$  correspondent aux lignes de la table, et les ensembles  $Ia$  aux colonnes. Comme nous l'avons démontré dans [DL01], repris ici dans la section 3.2.2, les relations bifermées sont en bijection avec les correspondances de Galois entre  $P$  et  $Q$ . Avec une telle relation, un concept  $(C, D)$  a une extension correspondant à un élément de  $P$  (et une intension à une description dans  $Q$ ).

### 4.2.2 La classification symbolique comme problème d'ajustement

De nombreux problèmes classificatoires peuvent être vus comme un ensemble de conditions pour que les classes obtenues soient issues d'un treillis d'un certain type. Par exemple, un ensemble de classes  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(S)$  est une *hiérarchie* sur  $S$  si  $S \in \mathcal{H}, \{s\} \in \mathcal{H}$  pour tous  $s \in S$  et  $H, H' \in \mathcal{H}$  implique  $H \cap H' \in \{\emptyset, H, H'\}$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \{\emptyset\}$  est un treillis de sous-ensembles de  $S$ . La même remarque reste valable pour, e.g., les pyramides ; par souci de concision nous n'allons développer que le cas hiérarchique.

Considérons des données modélisées par, comme dans la section 4.1.1, un ensemble  $S$  muni de descriptions individuelles  $d(s)$ ,  $s \in S$ , éléments d'un treillis  $Q$ . D'après la section 4.2.1, de telles données correspondent à une relation binaire  $I_0$  avec des lignes  $sI_0$   $Q$ -fermées et des colonnes non contraintes  $I_0a$ . Le problème est maintenant d'associer à  $I_0$  une relation  $I$  ayant des colonnes  $P$ -fermées. Deux cas peuvent être distingués :

1. Le treillis  $P$  est donné. Alors il existe une solution canonique  $\beta(I_0)$ , la relation bifermée minimum (pour l'inclusion) contenant  $I_0$ . Cette existence est démontrée dans [DL01] (et reprise dans le chapitre 3 et plus particulièrement dans les sections 3.1.2 et 3.5.1), avec des indications algorithmiques. De futures recherches pourront s'intéresser aux propriétés de cette approche et à des méthodes proposant des solutions alternatives, peut être plus proches des données.
2. Seul le type de  $P$  est défini. Cette situation peut être comparée à celle de la classification hiérarchique, où le but est l'obtention d'un système de classes de la forme hiérarchique (cf. section 2.2.1), qui bien sûr n'est pas fixé au début du processus de classification. Le chapitre 2.5.2 peut être vu comme apportant des outils pour une approche de ce type, car, lorsque nous caractérisons la base canonique des hiérarchies, nous obtenons des conditions portant seulement sur le type de  $P$ . Il reste toutefois beaucoup de travail à faire ; les exemples du paragraphe 4.3.2 fournissent quelques éléments allant dans cette direction.

## 4.3 Quelques usages

### 4.3.1 Ajustements à une hiérarchie donnée

**Exemple 4.4** Nous allons illustrer le premier cas du paragraphe précédent par un exemple simple adapté, essentiellement par réduction, de données réelles. Six scanners sont décrits, dans une revue de consommateurs<sup>11</sup>, par huit critères ayant respectivement 4, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2 niveaux (totalement ordonnés) légendés dans la table 4.3. Un critère ayant  $k$  niveaux est représenté par  $k - 1$  colonnes dans le tableau 4.2 (les colonnes omises possédant seulement des "1"). Au final, nous avons 15 colonnes. D'une manière générale, les meilleurs résultats correspondent aux colonnes les moins pleines.

---

<sup>11</sup>Que choisir 380, Mars 2001, p.46.

A				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
B	1					1		1	1	1	1		1	1	1
C	1	1		1		1			1	1			1		
D				1	1	1		1							1
E	1	1		1		1			1		1				1
F	1	1	1					1			1	1	1	1	1
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$c_2$	$d$	$e_1$	$e_2$	$f_1$	$f_2$	$g_1$	$g_2$	$h$

TAB. 4.2: Relation  $I_0$ .

---

a :	prix ;
b :	résolution ;
c :	restitution des couleurs ;
d :	qualité monochrome ;
e :	détramage ;
f :	reconnaissance des caractères ;
g :	vitesse de numérisation ;
h :	commodité d'emploi.

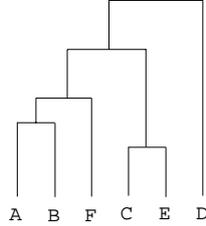
---

TAB. 4.3: Légende du tableau 4.2.

Dans l'idée de nous remettre dans le cas de la situation (1) ci-dessus, nous allons d'abord utiliser la similarité de Jaccard<sup>12</sup> entre les lignes de la table 4.2 afin de déterminer la hiérarchie  $\mathcal{H}$  de la figure 4.1 par la méthode du lien complet (cf. [Mir96]). Alors nous allons demander aux colonnes de correspondre à des classes de  $\mathcal{H}$ . La table 4.4 donne  $\beta(I_0)$ , tandis qu'une solution alternative  $I'$ , plus proche de la table d'origine, est obtenue en supprimant les "1" indiqués en gras dans  $\beta(I_0)$  dont certains sont issus de la table 4.2. Sous réserve de la classe vide et de la classe complète, la table  $\beta(I_0)$  produit des classes symboliques dont les extensions sont, respectivement,  $\emptyset$ ,  $A$ ,  $F$ ,  $ABF$ ,  $ABCEF$  et  $ABCDEF$ .

---

<sup>12</sup>L'indice de similarité de Jaccard [Jac01] porte sur les lignes d'un tableau binaire, et donne une indication de "ressemblance" entre ces deux lignes. Si on note, pour deux lignes  $j$  et  $k$ , par  $n_{JK}$  le nombre de réponses positives communes aux deux lignes,  $n_{jK}$  le nombre de réponses positives pour la ligne  $k$  et négative pour  $j$ , et, inversement,  $n_{Jk}$  le nombre de réponses positives pour  $j$  et négatives pour  $k$ , l'indice de Jaccard est égal à  $\frac{n_{JK}}{n_{JK}+n_{jK}+n_{Jk}}$ .

FIG. 4.1: Hiérarchie  $\mathcal{H}$  associée aux scanners.

A	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	1	1		1	<b>1</b>	1		1	1	1	1	1	1	1	1
C	1	1		1	<b>1</b>	1		<b>1</b>	1	1	1		1		1
D				1	<b>1</b>	1		<b>1</b>							1
E	1	1		1	<b>1</b>	1		<b>1</b>	1	1	1		1		1
F	1	1	1	1	<b>1</b>	1		1	1	1	1	1	1	1	1
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$c_2$	$d$	$e_1$	$e_2$	$f_1$	$f_2$	$g_1$	$g_2$	$h$

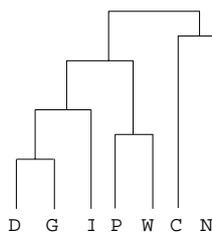
TAB. 4.4: Relation  $\beta(I_0)$ , et une solution alternative  $I'$ 

**Exemple 4.5** Un autre exemple, que nous avons déjà utilisé, est celui des bactéries *Frankia* présentes sur certaines plantes de l'espèce *Gymnostoma* (cf. exemple 1.49 page 35). La table réduite de la relation binaire associée à la présence des bactéries est rappelée dans le tableau 4.5.

Plusieurs méthodes de classification hiérarchique (cf. e.g. [Hub82, Mir96]) ont donné divers arbres de classification, parmi lesquels on a distingué la hiérarchie binaire  $\mathcal{H}_1$  de la figure 4.2, obtenue à la fois comme une solution parmi quatre de la méthode ascendante du lien complet et une solution parmi trois de la méthode descendante des bipartitions de diamètre minimal [GHJ91].

On peut donc fermer en colonne la table 4.5 selon la fermeture associée à cette hiérarchie considérée comme une famille de Moore; il n'y a pas de contraintes sur les lignes pour ces données de type binaire (présence / absence). On obtient la table 4.6,

Plant Species	Pattern									
	1	2	3	4	6	9	10	12	13	15
C		1		1			1		1	
D		1	1	1	1		1			
G		1	1	1	1	1	1			
I			1	1	1					1
N	1	1							1	
P		1	1	1				1		
W	1	1	1	1						

TAB. 4.5: Table de présence de la bactérie *Frankia*.FIG. 4.2: Hiérarchie  $\mathcal{H}_1$ .

dans laquelle les signes + indiquent les liaisons objets / attributs ajoutées.

Plant Species	Pattern									
	1	2	3	4	6	9	10	12	13	15
C	+	1		1			1		1	
D	+	1	1	1	1		1			
G	+	1	1	1	1	1	1			
I	+	+	1	1	1		+			1
N	1	1		+			+		1	
P	+	1	1	1			+	1		
W	1	1	1	1			+			

TAB. 4.6: Table modifiée.

L'écart entre les deux tables est assez important (11 signes + ajoutés); il est à noter

toutefois que plusieurs colonnes étaient déjà fermées de façon non triviale<sup>13</sup> dans la table 4.5, ce qui confirme le choix de la hiérarchie  $\mathcal{H}_1$ . Alternativement, on peut remplacer chaque colonne de la table 4.5 par le fermé le plus proche (toujours au sens de l'indice de Jaccard). Il y a plusieurs solutions équivalentes, dont celle du tableau 4.7 qui ne présente que quatre modifications du tableau initial. Les – indiquent les liaisons objet / attribut enlevées.

Plant Species	Pattern										
	1	2	3	4	6	9	10	12	13	15	
C		1		-			-		1		
D		1	1	1	1		1				
G		1	1	1	1	1	1				
I		+	1	1	1					1	
N	-	1							1		
P		1	1	1				1			
W	1	1	1	1							

TAB. 4.7: Une solution alternative.

On a une description, qui n'est autre que l'intension de la classe, de chaque classe de  $\mathcal{H}_1$  figurant effectivement comme colonne de la table 4.7 (de même pour la table 4.6, mais la seconde est nettement plus proche des données). Dans cet exemple, chacune des classes apparaît effectivement dans le treillis de concepts associé à la table 4.5 (cf. figure 1.11 page 37), mais ce fait n'est pas général.

Ce type de technique paraît donc pouvoir fournir une aide à l'interprétation des classes obtenues par des méthodes de classification courantes.

<sup>13</sup>Les fermés triviaux sont les singletons (i.e. les colonnes n'ayant que des 1), l'ensemble vide (colonne ne contenant aucun 1) et  $S$  (colonne ne contenant que des 1).

### 4.3.2 Construction d'une hiérarchie basée sur les relations d'emboîtement

Nous allons proposer dans ce paragraphe un nouvel indice<sup>14</sup> de similarité basé sur les relations d'emboîtement associées à une relation binaire  $R \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{A}$ . Considérons la famille de Moore  $\mathcal{F}_k$  associée à chaque colonne  $k \in \mathcal{A}$  par  $\mathcal{F}_k = \{\mathcal{S}, \{i \in \mathcal{S} : m_{ik} = 1\}\}$ , et  $\in_k$  la relation d'emboîtement associée à  $\mathcal{F}_k$ . Cet indice de similarité entre deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{S}$ , que nous appellerons *coefficient d'emboîtement*, est calculé comme suit : pour tous  $k \in \mathcal{A}$ ,

$$\sigma_k(xy) : |\{z \in \mathcal{S} : xy \in_k xyz\}|$$

$$\sigma(xy) = \sum_{k \in \mathcal{A}} s_k(xy)$$

Ainsi, en reprenant l'exemple 4.5 précédent sur les *Frankia*, la famille de Moore associée à la première colonne est  $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{S}, NW\}$ , celle associée à la deuxième est  $\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{S}, CDGNPW\}$ , ... On trouve dans la table 4.8 le calcul de cet indice de similarité pour toutes les paires d'éléments de  $\mathcal{S}$ , et dans la table 4.9 l'indice de Jaccard.

Cet indice est basé sur la notion de relation d'emboîtement, dont les fondements théoriques sont développés dans le chapitre 2, et plus particulièrement sur le fait que plus il existe, pour une paire d'éléments  $x$  et  $y$  donnée, d'éléments  $z$  emboîtés avec cette paire, plus  $x$  et  $y$  sont similaires. En effet, on a  $xy \in_k xyz$  pour tous les  $z$  qui n'appartiennent pas à la plus petite classe contenant  $x$  et  $y$ , c'est à dire à leur fermeture  $\varphi_k(xy)$ . Le coefficient d'emboîtement  $\sigma_k(xy)$  entre deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{S}$  est donc le nombre d'éléments  $z \in \mathcal{S}$  tels que  $z \notin \varphi_k(xy)$ , i.e. tels que  $\varphi_k(xy) \neq \varphi_k(xyz)$  avec  $\varphi_k$  la fermeture associée à la famille de Moore  $\mathcal{F}_k$ .

Le calcul de ce coefficient revient ainsi, pour une paire d'éléments de  $\mathcal{S}$  donnée, à comptabiliser le nombre de propriétés communes pondérées chacune par un certain coefficient de pertinence, i.e. plus la propriété est présente chez des individus, moins elle est pertinente. Ce coefficient de pertinence est simplement le nombre d'individus n'ayant pas la propriété. Il est résumé, dans le cas de notre exemple, dans la table 4.10. Par exemple,  $\sigma_1(NW) = 5$  car les plantes  $N$  et  $W$  possèdent la bactérie 1 toutes les deux, et il y a 5

<sup>14</sup>Nous n'avons pas rencontré d'indice de ce type dans la littérature. En particulier, il ne figure pas parmi les 43 indices recensés dans la synthèse de [Hub82].

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_6$	$\sigma_9$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{15}$	$\sigma$
CD	0	1	0	1	0	0	4	0	0	0	6
CG	0	1	0	1	0	0	4	0	0	0	6
CI	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
CN	0	1	0	0	0	0	0	0	5	0	6
CP	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
CW	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
DG	0	1	2	1	4	0	4	0	0	0	12
DI	0	0	2	1	4	0	0	0	0	0	7
DN	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
DP	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	4
DW	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	4
GI	0	0	2	1	4	0	0	0	0	0	7
GN	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
GP	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	4
GW	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	4
IN	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
IP	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	3
IW	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	3
NP	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
NW	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6
PW	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	4

TAB. 4.8: Coefficient d'emboîtement.

CD	0,5										
CG	0,43	DG	0,83								
CI	0,14	DI	0,50	GI	0,43						
CN	0,40	DN	0,14	GN	0,13	IN	0,00				
CP	0,33	DP	0,50	GP	0,43	IP	0,33	NP	0,17		
CW	0,33	DW	0,50	GW	0,43	IW	0,33	NW	0,40	PW	0,60

TAB. 4.9: Coefficient de Jaccard des Frankia.

autres plantes ne possédant pas cette bactérie.

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_6$	$\sigma_9$	$\sigma_{10}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{15}$
Pondération	5	1	2	1	4	0	4	0	5	0

TAB. 4.10: Pertinence du coefficient d'emboîtement.

Cet indice peut être généralisé en ne considérant plus une famille de Moore par colonne, mais une famille de Moore par ensemble de colonnes liées entre elles. Ainsi, si on reprend l'exemple des scanners (exemple 4.4 et table 4.2), chaque critère  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  et  $h$  correspond à une variable ordinale. Par exemple, le critère  $a$  (prix) a été discrétisé selon les colonnes  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , qui forment un ordre total (une échelle). On peut lui associer la famille de Moore

$$\mathcal{F}_a = \{\mathcal{S}, BCEF, CEF, F\}$$

au lieu d'une famille de Moore pour chaque colonne  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ . De même, on a les familles de Moore suivantes associées à chaque échelle :

$$\mathcal{F}_b = \{\mathcal{S}, ACDE, AD\}$$

$$\mathcal{F}_c = \{\mathcal{S}, ABCDE, A\}$$

$$\mathcal{F}_d = \{\mathcal{S}, ABDF\}$$

$$\mathcal{F}_e = \{\mathcal{S}, ABCE, ABC\}$$

$$\mathcal{F}_f = \{\mathcal{S}, ABEF, AF\}$$

$$\mathcal{F}_g = \{\mathcal{S}, ABCF, ABF\}$$

$$\mathcal{F}_h = \{\mathcal{S}, BDEF\}$$

La modélisation comme ci-dessus par des familles de Moore nous paraît présenter un double intérêt : d'une part, ces familles de Moore constituent une description exhaustive des données telles qu'elles apparaissent dans le tableau 4.2 ; d'autre part, en liaison avec les équivalences rappelées au chapitre 1 entre treillis, fermetures et familles de Moore, elles intègrent les contraintes a priori sur les colonnes, correspondant au type de variables considérées.

Pour la création de l'arbre associé au coefficient d'emboîtement, on pourrait appliquer comme au paragraphe précédent des méthodes de classification hiérarchique classiques (les méthodes ascendantes paraissant plus appropriées par rapport à la nature de cet indice) ; mais nous allons montrer qu'on peut travailler directement au niveau des familles de Moore.

La détermination du coefficient d'emboîtement par paires se fait comme dans l'exemple précédent. Son calcul est résumé dans la table 4.11.

	$\sigma_a$	$\sigma_b$	$\sigma_c$	$\sigma_d$	$\sigma_e$	$\sigma_f$	$\sigma_g$	$\sigma_h$	$\sigma$
A-B	0	0	1	2	3	2	3	0	11
A-C	0	2	1	0	3	0	2	0	8
A-D	0	4	1	2	0	0	0	0	7
A-E	0	0	1	0	2	2	0	0	7
A-F	0	0	0	2	0	4	3	0	9
B-C	2	0	1	0	3	0	2	0	8
B-D	0	0	1	2	0	0	0	2	5
B-E	2	0	1	0	2	2	0	2	9
B-F	2	0	0	2	0	2	3	2	11
C-D	0	2	1	0	0	0	0	0	3
C-E	3	2	1	0	2	0	0	0	8
C-F	3	0	0	0	0	0	2	0	5
D-E	0	2	1	0	0	0	0	2	5
D-F	0	0	0	2	0	0	0	2	4
E-F	3	0	0	0	0	2	0	2	7

TAB. 4.11: Coefficient d'emboîtement pour les scanners.

L'indice maximum est atteint pour les paires  $A$  et  $B$  d'une part, et  $B$  et  $F$  d'autre part. Dans ce cas, on peut examiner successivement toutes les solutions possibles ou effectuer un choix plus ou moins arbitraire de regroupement d'une de ces paires. C'est ce second parti que nous prenons ici en choisissant la classe  $BF$ , qui a l'indice de Jaccard (cf. table 4.12) le plus élevé (notons que les parties  $AB$  et  $BF$  sont toutes deux des classes

du treillis de Galois de la table 4.2 représenté dans la figure 4.3; si ce n'avait été le cas que de l'une des deux, cela aurait pu constituer un critère de choix).

AB	0,54								
AC	0,38	BC	0,45						
AD	0,33	BD	0,27	CD	0,20				
AE	0,29	BE	0,45	CE	0,56	DE	0,33		
AF	0,33	BF	0,50	CF	0,23	DF	0,17	EF	0,33

TAB. 4.12: Coefficient de Jaccard des scanners.

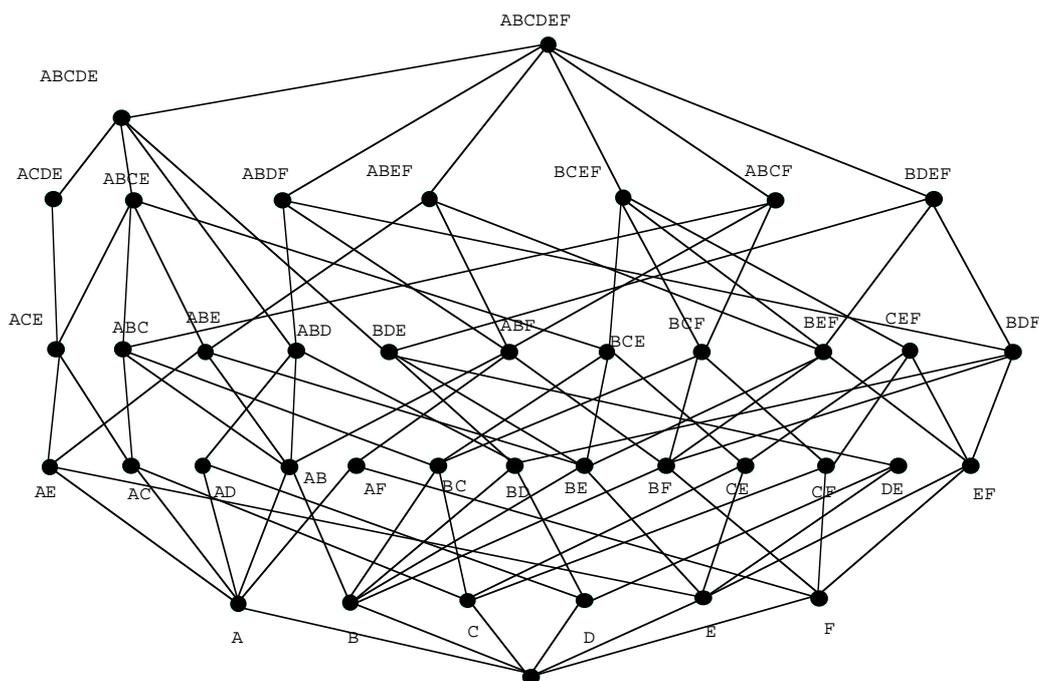


FIG. 4.3: treillis de Galois associé aux scanners.

Après regroupement de  $B$  et  $F$ , il y a beaucoup de façons de procéder aux itérations suivantes afin de construire une hiérarchie ascendante. On peut proposer par exemple plusieurs indices de similarité entre deux classes basés sur les emboîtements. A titre indicatif, nous retenons le suivant, cohérent avec ce qui précède et fondé uniquement sur l'examen des familles de Moore  $\mathcal{F}_i$ . L'indice de proximité  $\sigma(C, C')$  entre deux classes  $C$  et  $C'$  est le nombre de familles de Moore  $\mathcal{F}_i$  et d'éléments  $s \in \mathcal{S} - (C \cup C')$  tels qu'on a

$CUC' \in CUC' \cup \{s\}$ . Pour la deuxième itération de notre exemple, on obtient le tableau 4.13.

	$\sigma_a$	$\sigma_b$	$\sigma_c$	$\sigma_d$	$\sigma_e$	$\sigma_f$	$\sigma_g$	$\sigma_h$	$\sigma$
A-BF	0	0	0	2	0	2	3	0	7
A-C	0	2	1	0	3	0	2	0	8
A-D	0	4	1	2	0	0	0	0	7
A-E	0	2	1	0	2	2	0	0	7
BF-C	2	0	0	0	0	0	2	0	4
BF-D	0	0	0	2	0	0	0	2	4
BF-E	2	0	0	0	0	2	0	2	6
C-D	0	2	1	0	0	0	0	0	3
C-E	3	2	1	0	2	0	0	0	8
D-E	0	2	1	0	0	0	0	2	5

TAB. 4.13: Deuxième coefficient d'emboîtement pour les scanners.

Pour des raisons analogue avec le choix précédent, on regroupe  $C$  et  $E$  plutôt que  $A$  et  $C$ . Le tableau 4.14 décrit l'étape suivante.

	$\sigma_a$	$\sigma_b$	$\sigma_c$	$\sigma_d$	$\sigma_e$	$\sigma_f$	$\sigma_g$	$\sigma_h$	$\sigma$
A-BF	0	0	0	2	0	2	3	0	7
A-CE	0	2	1	0	0	2	0	0	5
A-D	0	4	1	2	0	0	0	0	7
BF-CE	2	0	0	0	0	0	0	0	2
BF-D	0	0	0	2	0	0	0	2	4
CE-D	0	2	1	0	0	0	0	0	3

TAB. 4.14: Troisième coefficient d'emboîtement pour les scanners.

En regroupant ensuite  $A$  et  $D$ , on obtient le tableau 4.15, qui conduit à regrouper les classes  $AD$  et  $CE$  et à obtenir finalement la hiérarchie de la figure 4.4.

	$\sigma_a$	$\sigma_b$	$\sigma_c$	$\sigma_d$	$\sigma_e$	$\sigma_f$	$\sigma_g$	$\sigma_h$	$\sigma$
AD-BF	0	0	0	2	0	0	0	0	2
AD-CE	0	2	1	0	0	0	0	0	3
BF-CE	2	0	0	0	0	0	0	0	2

TAB. 4.15: Quatrième coefficient d'emboîtement pour les scanners.

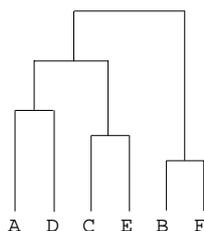


FIG. 4.4: Hiérarchie associée aux scanners.

Une étude approfondie serait indispensable avant de présenter une généralisation de ce qui précède (ou d'une variante) comme nouvelle méthode de classification. Cet exemple était juste destiné à illustrer comment on peut effectivement construire une classification hiérarchique à partir de considérations relativement simples (mais inspirées du chapitre 2) sur les emboîtements.

## 4.4 Conclusion

Toutes les utilisations des correspondances de Galois rappelées dans les sections 4.1.1 à 4.1.4 sont basées sur l'hypothèse forte d'une structure de treillis complet pour les deux ensembles  $P$  d'objets et  $Q$  de description. Cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite, mais est généralement considérée comme suffisamment réaliste en l'analyse des données symbolique. Définir les descriptions des treillis  $P$  et  $Q$  en termes de contraintes de fermeture (les implications dans la littérature récente sur les treillis) nous permet de donner une présentation unifiée de quelques parties de cette littérature et de proposer une approche pour des études ultérieures.



# Conclusion et perspectives

Historiquement, notre travail a d’abord porté sur l’étude de la composition de deux relations binaires  $R \subseteq E \times E'$  et  $S \subseteq E' \times E''$  par rapport à une relation  $T \subseteq E \times E''$  donnée, et ce dans le cadre d’une étude en microbiologie faite par le laboratoire d’Écologie Microbienne du Sol ([NJG<sup>+</sup>99]) et portant sur l’existence de bactéries du type *Frankia* sur certaines espèces de plantes du type *Gymnostoma*. Ces plantes poussant sur certains sols, les écologistes se demandaient si ceux-ci ne jouaient pas un rôle de “sélecteur” pour les bactéries, en favorisant certaines au détriment d’autres. D’un point de vue mathématique, nos interrogations portaient sur les treillis  $L_R$ ,  $L_S$  et  $L_T$  associés, afin de savoir si on pouvait déterminer  $L_T$  en fonction de  $L_R$  et de  $L_S$ , ou encore si l’existence de contraintes sur  $L_R$  ou  $L_S$  se reportaient sur  $L_T$  . . . Après avoir regardé les travaux faits dans ce sens par Biedermann et Wille (portant sur les “trilattices” [Bie97a, Bie97b, Bie98, Wil95]), nous avons finalement privilégié l’approche consistant à étudier en détail ce que signifiait l’existence de contraintes pour une relation binaire (et donc pour le treillis associé).

Dans le chapitre 3, nous avons établi les bases théoriques permettant de proposer une approche générale à ce problème d’existence de contraintes, approche utilisant des relations binaires particulières : les *relations bifermées* entre deux espaces de fermeture  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$ . Chaque ligne de la représentation matricielle d’une relation bifermée  $R$  est fermée dans le premier espace, et chaque colonne est fermée dans le deuxième espace. Nous avons alors établi un isomorphisme entre l’ensemble des relations bifermées et l’ensemble des correspondances de Galois entre les deux treillis de fermés. Cet isomorphisme, associé à un algorithme de construction, nous a permis de reformuler quelques problèmes de classification en termes de tables binaires.

Dans le chapitre suivant, nous présentons différentes utilisations des correspondances

de Galois en classification symbolique, où elles fournissent une formalisation mathématique du schéma classique extension/intension d'objets décrits par des propriétés ([Duq91, GW99]), ainsi qu'un outil fondamental pour la modélisation, la comparaison et l'aggrégation de méthodes de classification. Les relations bifermées fournissent un cadre commun pour ces différentes utilisations des correspondances de Galois, et nous permettent de définir une nouvelle approche de la classification symbolique.

Cette préoccupation de recherche de modèles permettant la formalisation de contraintes nous a amené à étudier les arbres de classification hiérarchiques comme des familles de Moore d'un certain type, et donc subissant des contraintes. Ces familles de Moore sont particulièrement intéressantes à étudier, car le modèle hiérarchique est prééminent en classification. Dans l'optique de revisiter les arbres hiérarchiques comme des familles de Moore particulières, nous avons dans le chapitre 2 généralisé les travaux d'Adams en établissant une bijection entre familles de Moore quelconques et *relations d'emboîtement*. Cette approche nous a permis de caractériser la base canonique d'implication des hiérarchies, et donc de particulariser les contraintes permettant la construction des arbres de classification.

Dans cette thèse, nous avons, malheureusement, laissé de côté l'étude des nombreuses classes de treillis existantes (entre autres, semi-modulaire, localement distributifs, ...). Quelques classes de treillis ont toutefois été étudiées suivant les chapitres (cf. par exemple les treillis distributifs dans la section 3.5.1 ou les familles de Moore hiérarchiques dans le chapitre 2), mais ces études étaient plus là pour illustrer notre propos que dans le cadre d'un travail systématique sur les diverses propriétés de ces classes de treillis. Il reste ainsi une importante recherche à effectuer, en regardant si on peut caractériser les relations d'emboîtement ou les bifermées suivant la classe du treillis considéré.

Trois autres principaux axes de recherches pourront être développés : le premier, suivant la conclusion du chapitre 4, consiste à créer de nouvelles méthodes de classification basées sur les méthodes hiérarchiques (pyramides, arbre de classification, ...) et sur les bifermatures. L'idée principale est qu'une méthode hiérarchique opérant sur les lignes de la table binaire définit une fermeture sur l'ensemble des propriétés (les colonnes de la table). Ainsi une table donnée peut, par bifermature, évoluer vers un autre arbre hiérarchique ou

une autre famille de classes bien structurée.

Le deuxième axe est plus théorique. Dans le chapitre 3, nous avons établi un isomorphisme entre l'ensemble des relations biformées  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$  entre  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$ , et l'ensemble des correspondances de Galois  $\Phi \otimes \Phi'$  entre  $\Phi = \varphi(\mathcal{P}(E))$  et  $\Phi' = \varphi'(\mathcal{P}(E'))$ . De plus, il existe une correspondance entre l'ensemble  $\mathcal{D}$  des systèmes implicatifs complets sur  $\mathcal{P}(E)$  et les fermetures sur  $E$ . En sachant que toute fermeture peut être obtenue par une correspondance de Galois, mais n'est pas déterminée de façon unique, l'étude des relations entre  $\mathcal{R}_{\varphi\varphi'}$  et  $\mathcal{D}$  peut nous permettre d'obtenir des informations sur la structure de  $\Phi \otimes \Phi'$ .

Enfin, nous pourrions développer nos résultats de façon algorithmique, afin d'obtenir de nouvelles méthodes et de nouveaux algorithmes. Une première possibilité part du chapitre 2, et de notre caractérisation de la base canonique des hiérarchies. En effet, pour tout triplet d'éléments de  $S$ , au plus un couple n'est pas un ensemble critique pour la base canonique élémentaire. A partir de ce résultat, on pourrait créer un algorithme permettant de produire une hiérarchie à partir de n'importe quelle table binaire. Une deuxième possibilité, plus délicate, serait d'utiliser les relations biformées afin d'élaborer un algorithme efficace permettant l'obtention du treillis associé.



# Bibliographie

- [Ada72] E.N. Adams, *Consensus techniques and the comparison of taxonomic trees*, Systematic Zoology **21** (1972), 390–397.
- [Ada86] E.N. Adams, *N-trees as nestings :complexity, similarity and consensus*, Journal of Classification **3** (1986), 299–317.
- [AHS96] P. Arabie, L.J. Hubert, and G. De Soete, *Clustering and classification*, World Scientific Publ., River Edge, 1996.
- [Arm74] W.W. Armstrong, *Dependency structures of data base relationship*, Information Processing **74** (1974), 580–583.
- [Ban77] H.-J. Bandelt, *Tight residuated mappings and d-extensions*, Universal algebra **29** (1977), 61–72, Esztergom (Hungary), 1977, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai.
- [Bar65] M. Barbut, *Note sur l’algèbre des techniques d’analyse hiérarchique*, L’analyse hiérarchique, B. Matalon, Paris, gauthier-villars ed., 1965.
- [BB01] J.P. Barthélemy and F. Brucker, *Np-hard approximation problems in overlapping clustering*, Journal of classification **18** (2001), 159–183.
- [BD89] H.-J. Bandelt and A.W.M. Dress, *Weak hierarchies associated with similarity measures : an additive clustering technique*, Bull. Math. Biology **51** (1989), 133–166.
- [BD00] H.-H. Bock and E. Diday, *Analysis of symbolic data, exploratory methods for extracting statistical informations from complex data*, Springer, 2000.
- [Ben67] J.P. Benzécri, *Description mathématique des classifications*, L’analyse des données 1. La taxinomie, vol. 3, chapitre IB, pp. 119–152, Dunod, Paris, France, 1967.

- [Ben73] M. Benado, *Ensembles ordonnés et fonctions monotones*, Rev. Fac. Ci. Univ. Lisboa (II-A) **14** (1973), 165–194.
- [BF84] P. Baptiste and J. Favrel, *Résolution de problèmes d'ordonnement par les treillis de galois et les graphes d'intervalle*, RAIRO Aut. Sys. An. Cont. **18** (1984), no. 4, 405–416.
- [BG88] J.P. Barthélemy and A. Guénoche, *Les arbres et les représentations des proximités*, Masson, Paris, 1988, Translation by G. Lawden (1991), *Trees and Proximity Representations*, New York : Wiley.
- [Bie97a] K. Biedermann, *How triadic diagrams represent conceptual structures*, Conceptual structures : fulfilling Pierce's dream (D. Lukose, H. Delugach, M. Keeler, L. Searle, and J. Sowa, eds.), Lecture notes in Artificial Intelligence, no. 1257, Berlin-Heidelberg, 1997, pp. 304–317.
- [Bie97b] K. Biedermann, *Triadic galois connections*, General algebra and applications in Discrete Mathematics (K. Denecke and O. Lüders, eds.), Shaker Verlag, 1997, pp. 23–33.
- [Bie98] K. Biedermann, *A foundation of the theory of trilattices*, PhD dissertation, Technischen Universität Darmstadt, 1998.
- [Bir33] G. Birkhoff, *On the combination of subalgebras*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **29** (1933), 441–464.
- [Bir67] G. Birkhoff, *Lattice theory*, third ed., Amer. Math.Soc., Providence, R.I., 1967.
- [Bir95] G. Birkhoff, *Lattices and their applications*, Lattice theory and its applications (K.A. Baker and R. Wille, eds.), Heldermann Verlag, 1995, pp. 7–25.
- [BJ72] T.S. Blyth and M.F. Janowitz, *Residuation theory*, Pergamon Press, Oxford, 1972.
- [BLM86] J.P. Barthélemy, B. Leclerc, and B. Monjardet, *On the use of ordered sets in problems of comparison and consensus of classifications*, Journal of classification **3** (1986), 187–224.
- [Bly84] T.S. Blyth, *Residuated mappings*, Order **1** (1984), 187–204.
- [BM70] M. Barbut and B. Monjardet, *Ordre et classification, algèbre et combinatoire*, Hachette, Paris, 1970.

- [BMN99] F. Le Ber, L. Mangelinck, and A. Napoli, *Un treillis de relations pour la classification de structures spatiales*, Actes des Septièmes journées de la Société Francophone de Classification (Nancy) (F. Le Ber, J.F. Mari, A. Napoli, and A. Simon, eds.), SFC'99, 1999, pp. 61–67.
- [BO73] S.A. Boorman and D.C. Olivier, *Metrics on spaces of finite trees*, Journal of Mathematical Psychology **10** (1973), 26–59.
- [Bor86] J.P. Bordat, *Calcul pratique du treillis de galois d'une correspondance*, Math. Sci. Hum. **96** (1986), 31–47.
- [BP99] J.-M. Bernard and S. Poitrenaud, *L'analyse implicative bayésienne multi-variée d'un questionnaire binaire : quasi-implications et treillis de galois simplifié*, Math. Inf. Sci. Hum. **147** (1999), 25–46.
- [Bri94] P. Brito, *Order structure of symbolic assertion objects*, I.E.E.E. Trans. Knowl. Data Eng. **6** (1994), no. 5, 830–835.
- [Bri95] P. Brito, *Symbolic objects : order structure and pyramidal clustering*, Annals of Operations Research **55** (1995), 277–297.
- [Bru01] F. Brucker, *Modèles de classification en classes empiétantes*, Ph.D. thesis, EHESS, Paris, 2001.
- [Cas98] N. Caspard, *Etude structurelle et algorithmique de classes de treillis obtenus par duplications*, Ph.D. thesis, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne, Paris, 1998.
- [CB01] M. Courtine and I. Bournaud, *Building a pruned inheritance lattice for relational descriptions*, International Workshop on Concept Lattices-based KDD (Stanford University, Palo Alto) (E. Mephu Nguifo, V. Duquenne, and M. Liquiere, eds.), ICCS'01, July 2001, pp. 65–76.
- [CE01] R. Cole and P. Eklund, *Browsing semi-structured web texts using formal concept analysis*, ICCS 2001 (Berlin) (H. Delugach and G. Stumme, eds.), LNAI, no. 2120, Springer-Verlag, 2001, pp. 319–332.
- [Che69] M. Chein, *Algorithme de recherche des sous-matrices premières d'une matrice*, Bull. Math. R.S. Roumanie **13** (61) (1969), no. 1, 21–25.
- [CM02] N. Caspard and B. Monjardet, *The lattices of moore families and closure operators on a finite set : a survey*, Discrete Applied Math. (2002), To appear.

- [CR96] C. Carpineto and G. Romano, *A lattice conceptual clustering system and its application to browsing retrieval*, Machine Learning **24** (1996), no. 2, 95–122.
- [Cra82] H. Crapo, *Ordered sets : retracts and connections*, Journal of Pure Applied Algebra **23** (1982), 13–28.
- [Cro56] R. Croisot, *Applications résiduées*, Tech. Report 73, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup, Paris, 1956.
- [CS81] H. Colonius and H.H. Schultze, *Tree structure for proximity data*, British J. Math. Statist. Psychol. **34** (1981), 167–180.
- [DC54] P. Dubreil and R. Croisot, *Propriétés générales de la résiduation en liaison avec les correspondances de galois*, Collect. Math. **7** (1954), 193–203.
- [DCC<sup>+</sup>01] V. Duquenne, C. Chabert, A. Cherfouh, J.-M. Delabar, A.-L. Doyen, and D. Pickering, *Structuration of phenotypes / genotypes through galois lattices and implications*, International Workshop on Concept Lattices-based KDD (Stanford University, Palo Alto) (E. Mephu Nguifo, V. Duquenne, and M. Liquiere, eds.), ICCS'01, July 2001, pp. 21–32.
- [DDNC98] A.-L. Doyen, V. Duquenne, S. Nuques, and M. Carlier, *What can we learn from a lattice analysis of a laterality questionnaire ?*, International Society for Developmental Psychobiology (Orléans), 1998.
- [Der67] J. C. Derderian, *Residuated mappings*, Pacific J. Math. **20** (1967), no. 1, 35–43.
- [DF94] J. Diatta and B. Fichet, *From asprejan hierarchies and bandelt-dress weak-hierarchies to quasi-hierarchies*, New Approaches in Classification and Data Analysis (Berlin) (E. Diday, Y. Lechevallier, M. Schader, P. Bertrand, and B. Burtschy, eds.), Springer-Verlag, 1994, pp. 11–118.
- [Did88] E. Diday, *The symbolic approach in clustering and related methods of data analysis : the basic choices*, Classification and Related Methods of Data Analysis, H.H. Bock, Amsterdam, North-Holland, 1988, pp. 673–683.
- [DL01] F. Domenach and B. Leclerc, *Biclosed binary relations and galois connections*, Order **18** (2001), 89–104.
- [DL02] F. Domenach and B. Leclerc, *On the roles of galois connections in classification*, Explanatory Data Analysis in Empirical Research (Munich) (O. Opitz

- and M. Schwaiger, eds.), Studies in Classification, Data Analysis and Knowledge Organization, Gfkl, Springer-Verlag, March 2002, Invited lecture at the 25th Conference of the German Classification Society, to appear, pp. 31–40.
- [DLM92] J. Demetrovics, L. Libkin, and I.B. Muchnik, *Functional dependencies in relational databases : a lattice point of view*, Discrete Applied Mathematics **40** (1992), 155–185.
- [DP90] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge University Press, Cambridge (U.K.), 1990.
- [Duq86] V. Duquenne, *Contextual implications between attributes and some representation properties for finite lattices*, Tech. report, CAMS, 1986.
- [Duq87] V. Duquenne, *Contextual implications between attributes and some representation properties for finite lattices*, Beiträge zur Begriffsanalyse (B. Ganter, R. Wille, and K.E. Wolff, eds.), Wissenschaftsverlag, 1987, pp. 213–240.
- [Duq90] V. Duquenne, *Intentional logic of symptoms*, Tech. report, CAMS, 1990.
- [Duq91] V. Duquenne, *The core of finite lattices*, Discrete Mathematics **88** (1991), 133–147.
- [Duq95] V. Duquenne, *Models of possessions and lattice analysis*, Social sciences information **34** (1995), no. 2, 253–267.
- [Duq96a] V. Duquenne, *Glad (general lattice analysis & design) : a fortran program for a glad user (1989-1996)*, ORDAL 96 : Order and Decision-making, I. Rival, 1996.
- [Duq96b] V. Duquenne, *Lattice analysis and the representation of handicap associations*, Social Networks **18** (1996), 217–230.
- [Duq96c] V. Duquenne, *On lattice approximations : Syntactic aspects*, Social Networks **18** (1996), 189–199.
- [Duq99] V. Duquenne, *Latticial structures in data analysis*, Theoretical Computer Science **217** (1999), 407–436.
- [DV93] M.C. Daniel-Vatonne, *Les termes : un modèle de représentation et structuration des données symboliques*, Ph.D. thesis, Université Montpellier II, 1993.
- [DVdLH93] M.C. Daniel-Vatonne and C. de La Higuera, *Les termes : un modèle de représentation et structuration de données symboliques*, Math. Inf. Sci. hum. **122** (1993), 41–63.

- [Esc90] R. Escarpit, *Théorie générale de l'information et de la communication*, Hachette Université, Paris, 1990.
- [Eve44] C.J. Everett, *Closure operators and galois theory in lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 514–525.
- [FDV79] C. Flament, A. Degenne, and P. Verges, *Analyse de similitude ordinale*, Inf. Sci. Hum. **40-41** (1979), 223–231.
- [Fla77] C. Flament, *Correspondances de galois et de benado, applications fermantes*, Laboratoire de psychologie, Université de Provence, 1977.
- [Fla79] C. Flament, *Un modèle des jugements de similitude*, Math. Sci. Hum. **65** (1979), 5–21.
- [Fle84] I. Fleischer, *Every galois connection is the polarity of an antitone relation*, Journal of Pure and Applied Algebra **32** (1984), 49–50.
- [Gan84] B. Ganter, *Two basic algorithms in concept analysis*, Tech. report, Technische Hochschule Darmstadt, 1984.
- [Gan95] B. Ganter, *Lattice theory and formal concept analysis, a subjective introduction*, Lattice theory and its applications (K.A. Baker and R. Wille, eds.), Heldermann Verlag, 1995, pp. 79–90.
- [Gas97] O. Gascuel, *Bionj : an improved version of the nj algorithm based on a simple model of biological data*, Mol. Biol. Evol. **14** (1997), 685–695.
- [GD86] J. L. Guigues and V. Duquenne, *Familles minimales d'implications informatives résultant d'un tableau de données binaires*, Math. Sci. Hum. **95** (1986), 5–18.
- [GHJ91] A. Guénoche, P. Hansen, and B. Jaumard, *Efficient algorithms for divisive hierarchical clustering with the diameter criterion*, J. of Classification **8** (1991), 5–30.
- [GMA91] R. Godin, R. Missaoui, and H. Alaoui, *Learning algorithms using a galois lattice structure*, Proceedings of the 1991 IEEE Int. Conf. for AI (San Jose, CA), 1991, pp. 22–29.
- [GMA95] R. Godin, R. Missaoui, and H. Alaoui, *Incremental concept formation algorithms based on galois (concept) lattices*, Computational Intelligence **11** (1995), no. 2, 246–267.

- [Gor99] A.D. Gordon, *Classification*, Chapman and Hall / CRC, London, 1999.
- [GR91] B. Ganter and K. Reuter, *Finding all closed sets : A general approach*, Order **8** (1991), 283–290.
- [GR99] R. Girard and H. Ralambondrainy, *Recherche de concepts à partir de données arborescentes et imprécises*, Math. Inf. Sci. Hum. **147** (1999), 87–111.
- [Grä98] G. Grätzer, *General lattice theory*, second ed., Birkhäuser, 1998.
- [GSW86] B. Ganter, J. Stahl, and R. Wille, *Conceptual measurement and many valued contexts*, Classification as a tool of research (North-Holland) (W. Gaul and M. Schader, eds.), Elsevier Science, 1986, pp. 169–176.
- [Gué90] A. Guénoche, *Construction du treillis de galois d'une relation binaire*, Math. Inf. Sci. Hum. **109** (1990), 41–53.
- [Gué93] A. Guénoche, *Hiérarchies conceptuelles de données binaires*, Math. Inf. Sci. Hum. **121** (1993), 23–34.
- [GW98] B. Ganter and R. Wille, *Applied lattice theory : formal concept analysis*, General Lattice Theory (G. Grätzer, ed.), Birkhauser Verlag, Basel, second ed., 1998, pp. 591–605.
- [GW99] B. Ganter and R. Wille, *Formal concept analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Har75] J.A. Hartigan, *Clustering algorithms*, Wiley, New-York, 1975.
- [HH86] H. Herrlich and M. Husek, *Galois connections*, Mathematical foundations of programming semantics (Berlin), LNCS, no. 239, Springer, 1986, Proc. Int. Conf., Manhattan / Kans. 1985, pp. 122–134.
- [HS01] J. Hereth and G. Stumme, *Reverse pivoting in conceptual information systems*, ICCS 2001 (Berlin) (H. Delugach and G. Stumme, eds.), LNAI, no. 2120, Springer-Verlag, 2001, pp. 202–215.
- [Hub82] Z. Hubàlek, *Coefficients of association and similarity, based on binary (presence absence) data : an evaluation*, Biol. Rev. **57** (1982), 669–689.
- [Huc99] M. Huchard, *évolution incrémentale dans les systèmes à objets basés sur des treillis de galois*, Actes du Colloque Langages et Modèles à Objets (Villefranche-sur-mer, France), 1999, pp. 179–196.

- [Jac01] P. Jaccard, *Distribution de la flore alpine dans le bassin des dranses et dans quelques régions voisines*, Bull. De la Soc. Vaudoise des Sciences Naturelles **37** (1901), 241–247.
- [Jan78] M.F. Janowitz, *An order theoretic model for cluster analysis*, SIAM J. Appl. Math. **37** (1978), 55–72.
- [JS71] N. Jardine and R. Sibson, *Mathematical taxonomy*, Wiley, London, 1971.
- [JW95] M.F. Janowitz and R. Wille, *On the classification of monotone and equivariant cluster methods*, Partitioning data sets (I.J. Cox, P. Hansen, and B. Julesz, eds.), DIMACS, Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, no. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 149–172.
- [Kes00] R. Keshet, *Mathematical morphology on complete semilattices and its applications to image processing*, Fundamenta Informaticae **41** (2000), 33–56.
- [KO01] S.O. Kuznetsov and S.A. Objedkov, *Comparing performance of algorithms for generating concept lattices*, International Workshop on Concept Lattices-based KDD (Stanford University, Palo Alto) (E. Mephu Nguifo, V. Duquenne, and M. Liquiere, eds.), ICCS'01, July 2001, pp. 35–48.
- [KP77] A. Kauffmann and E. Pichat, *Méthodes mathématiques non numériques et leurs algorithmes*, Masson, Paris, 1977.
- [Lec91] B. Leclerc, *Aggregation of fuzzy preferences : a theoretic arrow-like approach*, Fuzzy sets and systems **43** (1991), no. 3, 291–309.
- [Lec94] B. Leclerc, *The residuation model for the ordinal construction of dissimilarities and other valued objects*, Classification and Dissimilarity Analysis (B. Van Cutsem, ed.), Springer-Verlag, New York, 1994, pp. 149–172.
- [Lec97] B. Leclerc, *Un cours sur les ensembles ordonnés*, Les cahiers du CAMS, 134, 1997.
- [Lec98] B. Leclerc, *Consensus of classifications : the case of trees*, Advances in Data Science and Classification (A. Rizzi, M. Vichi, and H.-H. Bock, eds.), Studies in Classification, Data Analysis and Knowledge Organization, Springer-Verlag, Berlin, 1998, pp. 81–90.

- [LM95] B. Leclerc and B. Monjardet, *Latticial theory of consensus*, Social choice, Welfare and Ethics (V. Barnett, H. Moulin, M. Salles, and N. Schofield, eds.), Cambridge University Press, 1995, pp. 145–159.
- [LS98] M. Liquière and J. Sallantin, *Structural machine learning with galois lattices and graphs*, International Conference on Machine Learning, ICML98, 1998, pp. 1–9.
- [Lux91] M. Luxenburger, *Implications partielles dans un contexte*, Math. Inf. Sci. Hum. **113** (1991), 35–55.
- [LW88] P. Luksch and R. Wille, *Formal concept analysis of paired comparisons*, Classification and related methods of Data Analysis (Amsterdam, North-Holland) (H. H. Bock, ed.), 1988, pp. 567–576.
- [Mac37] H.M. MacNeille, *Partially ordered sets*, Trans. Amer. Soc. **42** (1937), 416–460.
- [Mal62] Y. Malgrange, *Recherche des sous matrices premières d'une matrice à coefficients binaires ; application à certains problèmes de graphe*, Deuxième congrès de l'AFCALTI, Gauthiers Villars, 1962, pp. 231–242.
- [Mar73] B. Markowsky, *Some combinatorial aspects of lattice theory*, Proc. Univ. Of Houston, Lattice Theory Conf. (Houston), 1973.
- [Mar80] B. Markowsky, *The representation of posets and lattices by sets*, Algebra Universalis **11** (1980), 173–192.
- [MB99] L. Mangelinck and F. Le Ber, *Représentation de relations et classification : reconnaissance de structures spatiales agricoles sur image satellites*, Actes du Colloque Langages et Modèles à Objets, 1999, pp. 197–212.
- [MD97] J. W. Mohr and V. Duquennes, *The duality of culture and practice : Poverty relief in new york city, 1888-1917*, Theory and society **26** (1997), 305–356.
- [Mir96] B. Mirkin, *Mathematical classification and clustering*, Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [ML97] V. Makarenkov and B. Leclerc, *Circular orders of tree metrics, and their uses for the reconstruction and fitting of phylogenetic trees*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 37, 1997, pp. 183–208.

- [ML99] V. Makarenkov and B. Leclerc, *An algorithm for the fitting of a tree metric according to a weighted least-squares criterion*, Journal of Classification **16** (1999), 3–26.
- [MN96] M. Morvan and L. Nourine, *Simplicial elimination schemes, extremal lattices and maximal antichain lattices*, Order **13** (1996), 159–173.
- [Mor62] J. Morgado, *A characterization of the closure operators by mean of one axiom*, Portugal Math. **21** (1962), 155–156.
- [MS89] M. Missikoff and M. Scholl, *An algorithm for insertion into a lattice : Application to type classification*, Proc. of the Third Int. Conf. on Foundations of Data Organization and Algorithms (FODO'89), 1989, pp. 64–82.
- [MSS94] A. Melton, B.S.W. Schröder, and G. E. Strecker, *Lagois connections - a counterpart to galois connections*, Theo. Comp. Sci. **136** (1994), 79–107.
- [Ngu93] E. Mephu Nguifo, *Une nouvelle approche basée sur le treillis de galois pour l'apprentissage de concepts*, Math. Inf. Sci. hum. **124** (1993), 19–63.
- [Ngu01] E. Mephu Nguifo, *Flexible concept lattices*, Conceptual structures : extracting and representing semantics (Stanford University, California, USA) (G.W. Mineau, ed.), Contributions to ICCS 2001, July 2001, pp. 193–196.
- [NJG<sup>+</sup>99] E. Navarro, T. Jaffre, D. Gauthier, F. Gourbiere, G. Rinaudo, P. Simonet, and P. Normand, *Distribution of gymnostoma spp. microsymbiotic frankia stains in new caledonia is related to soil type and to host-plant species*, Molecular Ecology **8** (1999), 1781–1788.
- [Nor78] E.M. Norris, *An algorithm for computing the maximal rectangles in a binary relation*, Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées **23** (1978), no. 2, 243–250.
- [Nou00] L. Nourine, *Une structuration algorithmique de la théorie des treillis*, Thèse d'habilitation, Université de Montpellier II, 2000.
- [NR99] L. Nourine and O. Raynaud, *A fast algorithm for building lattices*, Information Processing Letters **71** (1999), 199–204.
- [Öre44] O. Öre, *Galois connections*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 494–513.
- [Pas91] J.-C. Passeron, *Le raisonnement sociologique : l'espace non-poppérien du raisonnement naturel*, Nathan, Paris, 1991.

- [PD96] G. Polaillon and E. Diday, *Galois lattices construction and application in symbolic data analysis*, Tech. report, CEREMADE, 1996.
- [PD98] G. Polaillon and E. Diday, *Reduction of symbolic galois lattices via hierarchies and pyramid*, KESDA'98, 1998.
- [PF80] N. Polat and C. Flament, *Applications galoisiennes proches d'une application entre treillis*, Math. Sci. Hum. **70** (1980), 33–49.
- [Plø73] C.R. Plott, *Path independence, rationality and social choice*, Econometrica **41** (1973), no. 6, 1075–1091.
- [Plø88] B.I. Plotkin, *Galois theory of databases*, Algebra : some current trends (Varna) (L. L. Avramov and K. B. Tchakerian, eds.), Springer-Verlag, 1988, pp. 147–161.
- [Pol98] G. Polaillon, *Interpretation and reduction of galois lattices of complex data*, Advances in Data Science and Classification (A. Rizzi, M. Vichi, and H.H. Bock, eds.), IFCS 98, 1998, pp. 433–440.
- [Rad01] V. Raderanirina, *Treillis et agrégation de familles de moore et de fonctions de choix*, Ph.D. thesis, Université Paris I Panthéon-Sorbonne, 2001.
- [Ran60] G. N. Raney, *Tight galois connections and complete distributivity*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 418–426.
- [Rig48] J. Riguet, *Relations binaires, fermetures, correspondances de galois*, Bull. Soc. Math. De France **76** (1948), 114–155.
- [Shm74] Z. Shmueli, *The structure of galois connections*, Pacific J. Math. **54** (1974), no. 2, 209–225.
- [SN87] N. Saitou and M. Nei, *The neighbor-joining method : a new method for reconstructing phylogenetic trees*, Mol. Biol. Evol. **4** (1987), no. 4, 406–427.
- [SS63] R.R. Sokal and P.H.A. Sneath, *Principles of numerical taxonomy*, Freeman, San Francisco, 1963.
- [SW88] N. Spangenberg and K. E. Wolff, *Conceptual grid evaluation*, Classification and related methods of Data Analysis (Amsterdam, North-Holland) (H. H. Bock, ed.), 1988, pp. 577–580.
- [Szà63] G. Szász, *Introduction to lattice theory*, Academic Press, London, 1963.

- [Tao00] R. Taouil, *Algorithmique du treillis des fermés : application à l'analyse formelle de concepts et aux bases de données*, Ph.D. thesis, Clermont-Ferrand, 2000.
- [TB01] R. Taouil and Y. Bastide, *Computing proper implications*, International Workshop on Concept Lattices-based KDD (Stanford University, Palo Alto) (E. Mephu Nguifo, V. Duquenne, and M. Liquiere, eds.), ICCS'01, July 2001, pp. 49–61.
- [Thi] A.-M. Thibaut, *La pédagogie face aux images*, Les cahiers pédagogiques **69**.
- [Tur00] N. Turenne, *Apprentissage statistique pour l'extraction de concepts à partir de textes. applications au filtrage d'informations textuelles.*, Ph.D. thesis, Université Louis Pasteur Strasbourg, 2000.
- [Vac94] W. Vach, *Preserving consensus hierarchies*, Journal of Classification **11** (1994), 59–77.
- [Val99] P. Valtchev, *Construction automatique de taxonomies pour l'aide à la représentation des connaissances par objet*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier Grenoble I, 1999.
- [Van99] S. Vannucci, *On the galois lattice of an effectivity function*, Tech. Report 242, Università degli Studi di Siena, 1999.
- [Wil82] R. Wille, *Restructuring lattice theory : an approach based on hierarchies of concepts*, Ordered Sets (I. Rival, ed.), D. Reidel, 1982, pp. 445–470.
- [Wil83] R. Wille, *Subdirect decomposition of concept lattices*, Algebra universalis **17** (1983), 275–287.
- [Wil84] R. Wille, *Sur la fusion des contextes individuels*, Math. Sci. Hum. **85** (1984), 57–71.
- [Wil87] R. Wille, *Subdirect product construction of concept lattices*, Discrete Mathematics **63** (1987), 305–313.
- [Wil88] R. Wille, *Dependencies between many-valued attributes*, Classification and related methods of Data Analysis (H. H. Bock, ed.), 1988, pp. 581–586.
- [Wil92] R. Wille, *Concept lattice and conceptual knowledge systems*, Comp. Math. App. **23** (1992), no. 6-9, 493–515.

- 
- [Wil95] R. Wille, *The basic theorem of triadic concept analysis*, Order **12** (1995), 149–158.
- [Wil01] R. Wille, *Why can conceptual lattices support knowledge discovery in databases ?*, International Workshop on Concept Lattices-based KDD (Stanford University, Palo Alto) (E. Mephu Nguifo, V. Duquenne, and M. Liquiere, eds.), ICCS'01, July 2001, pp. 7–20.
- [Yaz98] M. Yazı, *Applications à seuils et applications galoisiennes ; étude et usage en analyse des données symboliques*, Ph.D. thesis, EHESS, Paris, 1998.

# Index

- antichaîne, 43
  - maximale, 43
- antiréflexivité, 10
- antisymétrie, 3
- application
  - antitone, 14
  - contractante, 21
  - extensive, 21
  - galoisienne, 25
    - contrainte, 73
    - tight, 73
  - involutive, 25, 26
  - isotone, 14
  - polarisée, 25
  - résiduelle, 28
  - résiduée, 28
- arborescence, 45
- arbres valués, 88
- assertion object, 86
- asymétrie, 10
- atome, 19
  
- base canonique, 44
  - élémentaire, 57
- base d'emboîtement, 55
- borne
  - inférieure, 7
  - supérieure, 7
  
- classe conceptuelle, 84
- coatome, 19
- coefficient d'emboîtement, 97
- complémenté, 14
- concept, 34
- condition de chaîne descendante, 18
- contexte, 34, 84
- correspondance de Benado, 31
- correspondance de Galois, 25
- critique, 42
  
- dendrogramme, 88
- diagramme de Hasse, 3
- dépendance fonctionnelle, 43
  
- element
  - majorant, 7
  - maximal, 7
  - maximum, 7
  - minimal, 7
  - minimum, 7
  - minorant, 7
- ensemble
  - critique, 42
  - quasi-fermé, 42
    - $F$ -, 42
- ensemble ordonné, 3
- espace de fermeture, 23
- evènement élémentaire, 86

- extension, 6, 34, 84, 86
  - linéaire, 6
- extensivité, 21
- famille de Moore, 23
  - hiérarchique, 46
- fermeture, 21
  - algébrique, 22
  - transitive, 22
- fermé, 21
- filtre principal, 8
- Formal Concept Analysis, 34
- G-idéal, 70
- hiérarchie, 45, 91
  - binaire, 46
  - faible, 46
- idempotence, 21
- idéal principal, 8, 24, 28
- implication, 43
  - $\Sigma$ -critique, 44
  - élémentaire, 43
- incrémentalité, 37
- indépendance de chemin, 22
- inf
  - demi-treillis, 10
  - irréductible, 18
  - représentation, 20
  - réductible, 18
- infimum, 7
- intension, 34, 83
- intervalle, 8
- isomorphisme, 15
  - monothétique, 82
- morphisme, 15
  - $\vee$ -morphisme, 14
    - complet, 14
  - $\wedge$ -morphisme, 14
    - complet, 14
  - isomorphisme, 15
- objet symbolique, 86
  - complet, 87
- ordre, 3
  - coloré, 43
  - lexicographique, 38
  - strict, 10
  - total, 3
- ouvert, 21
- ouverture, 21
- overhanging relation, 49
- partie
  - bornée, 8
  - commençante, 8
  - finissante, 8
  - génératrice, 20
  - inf-génératrice, 20
  - sup-génératrice, 20
- polythétique, 82
- principe de dualité, 6
- préordre, 87
- pseudo-hiérarchie, 47
- pyramide, 47
- quasi-fermé, 42
  - $F$ -, 42
- quasi-hiérarchie, 46

- rectangle maximal, 33
- relation
  - bifermée, 63
  - binaire, 3
  - couverture, 3
  - emboîtement, 49
    - hiérarchique, 47
  - flèche bas, 54
  - flèche haut, 54
  - ordre, 3
    - total, 3
- relation de Morgado, 21
- relation de Pickert, 25
- reseau de fermeture, 21
- réflexivité, 3
  
- section
  - commençante, 8
  - finissante, 8
- sous-ensemble ordonné, 4
- sous-treillis, 10
- $\sup_G$ -représentation, 20
- sup
  - demi-treillis, 10
  - irréductible, 17
  - représentation, 20
  - réductible, 17
- supremum, 7
- système implicatif, 43
  - complet, 43
  
- table
  - $\wedge$ -table, 16
  - table réduite, 36
  - transitivité, 3
  - treillis, 10
    - atomistique, 19
    - booléen, 10, 14
    - coatomistique, 19
    - complet, 12, 22
    - de concepts, 84
    - de Galois, 33
    - demi-, 10
    - distributif, 14, 19
    - modulaire, 13
    - sous-, 10

Annexe : Article *Biclosed Binary Relations and Galois Connections*,  
Order 18 (2001), 89-104.

---

## Abstract

This thesis is in the field of the latticial analysis of data in the situation, very general, where objects of various nature are described by variables of various types; one makes simply the assumption (realistic) according to which each variable takes his values in a lattice. The problems of processing of such data (extraction of knowledge) often amount seeking to obtain Moore families of a particular type, for example arborescent, and thus to impose structural constraints. Within this framework, we study initially particular Moore families, hierarchies, of which we characterize the implicational canonical basis. With this intention, we introduce a new type of binary relations on subsets of a set, called *overhanging relations*. We put them in a one-to-one correspondence with unspecified Moore families, establish their bond with one of the arrow relations, and reconsider their properties in the hierarchical case, where they initially appeared. In one second part, we are interested in the Galois connection associated with a binary table (to which data of the type indicated above can always be brought back). We examine the constraints then to be imposed on a binary table so that closed sets obtained belong to prescribed Moore families, or of desired type. We then obtained some binary relations called *biclosed*. Given two closure spaces  $(E, \varphi)$  and  $(E', \varphi')$ , a relation is biclosed if any line of its matrix representation corresponds to a closed set by  $\varphi$ , and any column with a closed set by  $\varphi'$ . We establish an isomorphism between the set of biclosed relations and that of Galois connections between the two lattices of closed sets induced by  $\varphi$  and  $\varphi'$ . In the finite case, we deduce some effective algorithms for the adjustment of a Galois connection to an unspecified mapping between two lattices, or for the calculation of the join of two polarities.

In a third part, we apply the preceding results to the study of the introduction of classifying constraints to a data table. We reconsider various uses of Galois connections (or the couples residuated / residual mappings) in models and methods of classification. Those are revisited in the optics of a unified frame based on biclosedes, and, by taking of account the results of the first part, differents ways are traced for definition of new methods.

These parts are preceded by a synthesis on lattices and Galois connections.

---

## Key words

Biclosed, Binary Relation, Closure, Hierarchy, Implication, Lattice, Moore family, Overhanging.

---

---

## Résumé

La thèse se situe dans le domaine de l'analyse latticielle de données dans la situation, très générale, où des objets de nature diverse sont décrits par des variables de types divers ; on fait simplement l'hypothèse (réaliste) selon laquelle chaque variable prend ses valeurs dans un treillis. Les problèmes de traitement de telles données (extraction de connaissance) reviennent souvent à chercher à obtenir des familles de Moore de type particulier, par exemple arborescent, et donc à imposer des contraintes structurelles.

Dans ce cadre, nous étudions d'abord les familles de Moore particulières que sont les hiérarchies, dont nous caractérisons la base canonique d'implications. Pour ce faire, nous introduisons un nouveau type de relations binaires sur les parties d'un ensemble, appelées *relations d'emboîtement*. Nous les mettons en correspondance bi-univoque avec les familles de Moore quelconques, leur lien avec l'une des relations flèche, et revenons sur leurs propriétés dans le cas hiérarchique, où elles sont d'abord apparues.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons à la correspondance de Galois associée à un tableau binaire (auquel les données du type indiqué ci-dessus peuvent toujours être ramenées). Nous examinons alors les contraintes à imposer à un tableau binaire pour que les fermés obtenus appartiennent à des familles de Moore prescrites, ou de type voulu. On obtient alors des relations binaires dites *bifermées*. Étant donnés deux espaces de fermeture  $(E, \varphi)$  et  $(E', \varphi')$ , une relation est bifermée si toute ligne de sa représentation matricielle correspond à un fermé par  $\varphi$ , et toute colonne à un fermé par  $\varphi'$ . Nous établissons l'isomorphisme entre l'ensemble des relations bifermées et celui des correspondances de Galois entre les deux treillis de fermés induits par  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Dans le cas fini, on en déduit des algorithmes efficaces pour l'ajustement d'une correspondance de Galois à une application quelconque entre deux treillis, ou pour le calcul du supremum de deux polarités.

Dans une troisième partie, nous appliquons les résultats précédents à l'étude de l'introduction de contraintes classificatoires sur un tableau de données. Nous revenons sur divers usages des correspondances de Galois (ou des couples application résiduelle / résiduelle) dans les modèles et les méthodes de la classification. Ceux-ci sont revisités dans l'optique d'une présentation unifiée fondée sur les bifermées, et, en prenant en compte les résultats de la première partie, des voies sont tracées pour la définition de nouvelles méthodes.

Ces parties sont précédées d'une synthèse sur les treillis et les correspondances de Galois.

---

## Mots clés

Bifermée, Emboîtement, Famille de Moore, Fermeture, Hiérarchie, Implication, Relation binaire, Treillis.

---