



HAL
open science

Quelques Contributions en Modélisation, Analyse et Contrôle pour le Calcul des Structures

Dominique Chapelle

► **To cite this version:**

Dominique Chapelle. Quelques Contributions en Modélisation, Analyse et Contrôle pour le Calcul des Structures. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2003. tel-00003993

HAL Id: tel-00003993

<https://theses.hal.science/tel-00003993>

Submitted on 16 Dec 2003

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches
Quelques contributions en . . .
Modélisation, Analyse et Contrôle pour le Calcul des Structures

Dominique CHAPELLE¹

Résumé : Ce document présente la synthèse des travaux de recherche de l'auteur, ainsi que leurs perspectives. La majeure partie de ces travaux concerne la fiabilité et l'"applicabilité" des méthodes numériques pour les coques minces. La fiabilité des méthodes est plus particulièrement étudiée dans le contexte des comportements asymptotiques (vis-à-vis de l'épaisseur) des modèles de coque. On résume aussi des travaux plus exploratoires concernant le couplage fluide-structure, l'optimisation des gyrovibrants et la biomécanique cardiaque.

Abstract : This document presents a summary of the author's research work, together with some perspectives. The major part of this work deals with the reliability and the "applicability" of numerical methods for thin shells. More specifically, the issue is analysed in the context of the asymptotic behaviors (with respect to the thickness) of shell models. Some more recent investigations regarding fluid-structure interaction, optimal design of resonator gyroscopes and cardiac biomechanics are also summarized.

Ce mémoire présente la synthèse de mes travaux de recherche, dont beaucoup sont le fruit de collaborations riches et variées avec de nombreux collègues qu'il m'est agréable de collectivement (mais non moins chaleureusement !) remercier dans ce préambule.

La majeure partie de ces travaux concerne les méthodes numériques pour les structures minces (et notamment les plus complexes et plus élégantes d'entre elles : les coques). Dans ce cadre et plus spécifiquement, mes recherches ont essentiellement porté sur la fiabilité des méthodes d'éléments finis (Section 1) d'une part, et la formulation et l'analyse de méthodes adaptées aux applications (Section 2) d'autre part, les deux aspects n'étant naturellement pas sans lien entre eux.

Enfin la Section 3 fait un bilan (provisoire) d'activités de recherche plus récentes, plus "exploratoires" (bien qu'à chaque fois avec des objectifs applicatifs concrets), et donc aussi moins abouties.

Afin de permettre au lecteur d'identifier plus facilement mes propres contributions dans ce document, j'utilise un mode de citation différent pour les références dont je suis auteur ou coauteur (par exemple [1]) et pour les autres (comme [Bat96, BF91]), et en conséquence deux listes bibliographiques distinctes.

¹INRIA-Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, Dominique.Chapelle@inria.fr

Table des matières

1 Le verrouillage des méthodes d'éléments finis : comment coupler "analyse" et "numérique"	2
1.1 Méthodes mixtes pour le déverrouillage : de l'incompressible aux structures minces	3
1.2 Pourquoi rien ne s'étend aux coques (et comment espérer s'en sortir)	6
1.2.1 Les difficultés techniques : condition inf-sup et verrouillage membranaire	6
1.2.2 Les difficultés fondamentales : robustesse des méthodes en présence de comportements asymptotiques multifformes	7
1.2.3 Travaux en cours et perspectives	10
2 Eléments de coques pour les applications industrielles	11
2.1 Les "general shell elements"	11
2.2 Eléments de "coque-3D"	12
3 Explorations diverses	15
3.1 Couplage fluide-structure	15
3.2 Optimisation des gyrovibrants	16
3.3 Biomécanique du coeur	17

1 Le verrouillage des méthodes d'éléments finis : comment coupler "analyse" et "numérique"

Cet intitulé en apparence un peu mystérieux traduit pourtant l'esprit qui anime ma démarche de chercheur (depuis ses premiers pas dans le laboratoire de K.J. Bathe au MIT). Cet esprit s'exprime, dans la conception et l'analyse de méthodes numériques, par la recherche de "synergies" entre les éclairages apportés par les mathématiques appliquées et l'analyse numérique d'une part, et l'expérimentation numérique (et au delà la modélisation physique) d'autre part. Ses motivations sont simples : les mathématiques appliquées (dans un sens comprenant l'analyse numérique) ne peuvent pas tout démontrer de ce qui préoccupe l'ingénieur ou le physicien, mais elles fournissent des résultats "certains" sur des formulations "génériques" et aussi (en général) des clés pour comprendre le comportement de la solution (continue ou discrète) d'un modèle ; par ailleurs l'expérimentation numérique apporte des indications précises (et précieuses) sur le comportement des solutions dans des cas nécessairement particuliers (mais que l'on peut varier judicieusement en exploitant des éclairages théoriques), ce qui permet de guider l'analyse (notamment en détectant certaines impasses), de quantifier ses résultats (comme pour le cas des estimations d'erreur), et d'explorer les extensions possibles d'une méthodologie au delà du "domaine de validité" de l'analyse. Il s'agit donc bien là d'une véritable synergie où chacun des deux

aspects nourrit l'autre, et non du traditionnel schéma "analyse théorique / validation numérique" (où le second joue alors un peu le rôle de "parent pauvre" du premier). Sous diverses formes, les travaux décrits dans la suite sont tous des illustrations de cette démarche.

1.1 Méthodes mixtes pour le déverrouillage : de l'incompressible aux structures minces

Le verrouillage numérique est un phénomène indésirable qui peut se produire lorsque l'on cherche à approcher la solution d'une formulation variationnelle dans laquelle une contrainte est imposée, soit exactement, soit (le plus souvent) par pénalisation. Sous forme pénalisée, ce genre de formulation s'écrit :

Trouver U^ε dans \mathcal{V} tel que

$$A(U^\varepsilon, V) + \varepsilon^{-2}(\Gamma(U^\varepsilon), \Gamma(V))_0 = F(V), \quad \forall V \in \mathcal{V}. \quad (1)$$

Dans cette équation variationnelle, A désigne une forme bilinéaire symétrique positive, Γ un opérateur continu de \mathcal{V} dans un espace "de type L^2 " dont le produit scalaire est noté ici $(\cdot, \cdot)_0$, opérateur également supposé rendre la forme bilinéaire (symétrique positive) " $A(U, V) + (\Gamma(U), \Gamma(V))_0$ " *coercive*, et F représente une forme linéaire. Enfin ε^{-2} joue le rôle du paramètre de pénalisation² correspondant à la contrainte

$$\Gamma(V) \equiv 0. \quad (2)$$

Par exemple, en mécanique incompressible (ou quasi-incompressible) cette contrainte s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{v} \equiv 0, \quad (3)$$

c'est à dire qu'on tend à annuler un certain type de déformations (ici, les déformations volumétriques). Lorsque l'on fait tendre le paramètre ε vers 0, on peut montrer que la suite de solutions (U^ε) converge vers U^0 solution de *Trouver U^0 dans \mathcal{V}_0 tel que*

$$A(U^0, V) = F(V), \quad \forall V \in \mathcal{V}_0, \quad (4)$$

où \mathcal{V}_0 désigne le sous-espace contraint $\mathcal{V} \cap \{\Gamma(V) \equiv 0\}$, ce qui justifie au passage la dénomination "contrainte pénalisée".

On dit alors qu'il y a verrouillage numérique quand les estimations d'erreur optimales que l'on peut démontrer pour un schéma d'approximation donné à ε fixé dégénèrent lorsque l'on fait tendre ε vers 0. C'est par exemple clairement le cas pour une méthode de Galerkin quand la suite de sous-espace discrets \mathcal{V}_h est telle que

$$\mathcal{V}_h \cap \mathcal{V}_0 = \{0\}, \quad (5)$$

puisqu'alors, à " h fixé", la suite de solutions discrètes (U_h^ε) tend vers 0 avec ε . Ce genre de situation où le sous-espace discret est "totalement inadapté à

²La raison pour laquelle on choisit le paramètre de pénalisation sous cette forme apparaîtra plus bas.

la contrainte” est relativement répandu, et constitue d’ailleurs l’origine de l’expression “verrouillage numérique” (en mécanique, le système considéré apparaît de plus en plus “raide” à travers sa solution discrète à mesure que le paramètre ε décroît).

Les méthodes d’éléments finis mixtes, introduites dans les années 70 [Bab73, Bre74] ont fourni un cadre systématique d’analyse et de traitement du verrouillage numérique. Elles consistent à utiliser comme inconnue auxiliaire le multiplicateur de Lagrange de la contrainte et à discrétiser également cette nouvelle inconnue. On pose ainsi

$$\Sigma^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\Gamma(U^\varepsilon), \quad (6)$$

soit encore sous forme faible

$$\varepsilon^2(\Sigma^\varepsilon, \Xi)_0 = (\Gamma(U^\varepsilon), \Xi)_0, \quad \forall \Xi \in L^2. \quad (7)$$

On aboutit donc au système variationnel

$$\begin{cases} A(U^\varepsilon, V) + B(V, \Sigma^\varepsilon) = F(V), & \forall V \in \mathcal{V} \\ B(U^\varepsilon, \Xi) - \varepsilon^2(\Sigma^\varepsilon, \Xi)_0 = 0, & \forall \Xi \in L^2 \end{cases} \quad (8)$$

avec

$$B(V, \Xi) = (\Gamma(V), \Xi)_0. \quad (9)$$

On peut noter qu’on a ainsi transformé une formulation pénalisée en un système perturbé par le petit paramètre ε (perturbation régulière ou singulière selon les cas). La difficulté essentielle au plan numérique consiste alors à identifier des schémas de discrétisation des deux inconnues, sous la forme de sous-espaces discrets \mathcal{V}_h et \mathcal{T}_h (pour le multiplicateur) qui satisfont une condition du type :

$$\sup_{V \in \mathcal{V}_h, V \neq 0} \frac{B(V, \Xi)}{\|V\|_{\mathcal{V}}} \geq \delta \sup_{V \in \mathcal{V}, V \neq 0} \frac{B(V, \Xi)}{\|V\|_{\mathcal{V}}}, \quad \forall \Xi \in \mathcal{T}_h, \quad (10)$$

pour une constante δ strictement positive et indépendante du paramètre de discrétisation h . Cette condition est connue sous le nom de *condition inf-sup* du fait que, en définissant la norme³

$$\|\Xi\|_{\mathcal{T}} = \sup_{V \in \mathcal{V}, V \neq 0} \frac{B(V, \Xi)}{\|V\|_{\mathcal{V}}}, \quad (11)$$

on peut réécrire cette équation sous la forme plus classique

$$\inf_{\Xi \in \mathcal{T}_h, \Xi \neq 0} \sup_{V \in \mathcal{V}_h, V \neq 0} \frac{B(V, \Xi)}{\|V\|_{\mathcal{V}} \|\Xi\|_{\mathcal{T}}} \geq \delta > 0. \quad (12)$$

La condition inf-sup traduit la stabilité de la formulation mixte (discrète) vis-à-vis de l’inconnue auxiliaire (multiplicateur). La stabilité en l’inconnue principale

³On note que c’est bien une norme dans L^2 , “quotienté” au besoin par le sous-espace des Ξ qui annulent $B(V, \Xi)$ pour tout V .

(dite parfois primale) doit naturellement aussi être garantie, mais elle l’est en pratique beaucoup plus facilement, car en quelque sorte “héritée” de la formulation d’origine [Pit92, AB93, 24, 12, 1].

Pour éclairer le fonctionnement des méthodes mixtes en matière de traitement du verrouillage numérique, on peut remarquer qu’au niveau discret la deuxième équation du système mixte s’écrit

$$\Sigma_h^\varepsilon = \varepsilon^{-2} P_h(\Gamma(U_h^\varepsilon)), \quad (13)$$

où P_h désigne la projection L^2 sur l’espace discret \mathcal{T}_h . On peut alors éliminer l’inconnue auxiliaire de la première équation, ce qui donne

$$A(U_h^\varepsilon, V) + \varepsilon^{-2} (P_h(\Gamma(U_h^\varepsilon)), P_h(\Gamma(V)))_0 = F(V), \quad \forall V \in \mathcal{V}_h, \quad (14)$$

et on voit que, lorsqu’on fait tendre ε vers 0, la contrainte qui prévaut est devenue

$$P_h(\Gamma(U_h^\varepsilon)) = 0, \quad (15)$$

ce qu’on peut interpréter comme une relaxation de la contrainte d’origine. On peut ainsi voir les méthodes mixtes comme un outil rigoureux de construction de schémas d’“intégration numérique réduite” pour le déverrouillage (de tels schémas étant employés sur un mode “empirique” par les ingénieurs depuis que le mécanisme du verrouillage a été identifié; voir par exemple [Bat96, ZT91] et leurs références pour des perspectives historiques sur le verrouillage). Notons également que la formulation (14) peut fournir en pratique un moyen très efficace de résoudre le problème mixte discret (et donc idéalement sans verrouillage), à condition que l’espace discret des multiplicateurs soit discontinu entre les éléments de sorte qu’on puisse calculer la projection au niveau élémentaire (et ainsi se ramener à une formulation primale modifiée, de complexité comparable à celle d’origine). Cette discontinuité est par conséquent souvent un élément important du “cahier des charges” du numéricien.

On peut donc voir la condition inf-sup (10) comme la “clé du bon comportement” des schémas numériques employés pour discrétiser les formulations où le verrouillage est à redouter. Lorsqu’elle est satisfaite, et si on a pris garde à la stabilité de l’inconnue primale, on obtient en effet des estimations d’erreur indépendantes du paramètre ε , ce qui implique que le verrouillage n’apparaît pas. Par ailleurs, elle présente également un caractère “nécessaire” car elle commande la stabilité de l’inconnue auxiliaire (le multiplicateur) qui possède en général une signification physique importante (la pression dans les formulations incompressibles). On a donc vu apparaître, depuis l’introduction des méthodes mixtes, des techniques variées de démonstration de la condition inf-sup (c’est à dire de construction de schémas numériques la satisfaisant) pour des formulations diverses, et notamment pour la mécanique incompressible ainsi que pour les poutres et les plaques. Dans ces formulations dites de structures minces la contrainte pénalisée correspond à l’annulation des déformations de cisaillement⁴,

⁴Le paramètre ε s’exprime dans ce cas comme une épaisseur adimensionnée de la structure.

et le multiplicateur de Lagrange associé à l’effort tranchant [BF91, 1]. Cependant, les démonstrations de conditions inf-sup fonctionnent au “cas par cas” et s’avèrent en général délicates, et mon premier travail de recherche, en collaboration avec K.J. Bathe, a consisté à mettre au point un outil numérique destiné à guider l’analyse en évaluant le comportement d’un schéma numérique “vis-à-vis de la condition inf-sup”. On peut en effet montrer que l’expression inf-sup dans (12) est directement reliée à un problème aux valeurs propres qui s’écrit (et se résout numériquement) de manière standard lorsque la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{T}}$ correspond à une norme de Sobolev usuelle, ce qui est en particulier le cas pour les formulations incompressibles où il s’agit de la norme L^2 . En calculant les valeurs inf-sup pour une suite de maillages de pas décroissant, on peut ainsi se “faire une idée” de l’existence ou non d’une borne inférieure strictement positive pour ces valeurs. Naturellement ce test (baptisé “test inf-sup”) n’a pas valeur de démonstration, mais en pratique il s’avère remarquablement fiable et discriminant [15].

1.2 Pourquoi rien ne s’étend aux coques (et comment espérer s’en sortir)

Dans le cas des coques, le verrouillage a des sources multiples, car au verrouillage de cisaillement déjà mentionné pour les autres structures minces s’ajoute le verrouillage membranaire (associé à des contraintes de déformations membranaires nulles), voir par exemple [Pit92]. Ce phénomène préoccupe les ingénieurs depuis plusieurs décennies, et on peut sans doute dire qu’il n’a toujours pas, à l’heure actuelle, trouvé de solution “définitive”. Pour caractériser et résumer les difficultés particulières auxquelles on se heurte avec ces formulations, on peut dire qu’elles sont de deux ordres : les difficultés techniques et les difficultés fondamentales.

1.2.1 Les difficultés techniques : condition inf-sup et verrouillage membranaire

Les difficultés techniques concernent au premier chef la conception de méthodes numériques non-verrouillantes sur la base de la condition inf-sup. Tout d’abord la présence de coefficients géométriques variables (notamment les courbures) dans les formulations de coques rend impraticables les techniques “classiques” de démonstration de la condition inf-sup : macroéléments d’une part (voir [BN83, Ste84]) et utilisation du lemme de Fortin (“Fortin’s trick”, voir [BF91]). A cet égard, il est significatif qu’un des très rares résultats, publié dans [AB97], concernant une condition inf-sup de coque nécessite l’hypothèse de coefficients géométriques constants (ce qui en restreint notablement la portée). Par ailleurs, dans ces formulations l’espace des multiplicateurs de Lagrange n’est pas un espace sur lequel on peut opérer facilement (notamment au plan numérique, car il ne s’exprime que par dualité), et donc le test inf-sup ne s’applique pas non plus en tant que tel (voir néanmoins [8] pour des éléments dans cette direction). Pour pallier ces difficultés techniques, j’ai exploré, en collaboration avec Rolf Sten-

berg, la possibilité d’appliquer aux formulations de coque des méthodes mixtes *stabilisées* qui visent précisément à se dispenser de la condition inf-sup. Ces travaux ont conduit aux seuls résultats (à l’heure actuelle et à ma connaissance) d’estimations d’erreur indépendantes de l’épaisseur sans hypothèse particulière sur la géométrie, voir [12].

1.2.2 Les difficultés fondamentales : robustesse des méthodes en présence de comportements asymptotiques multiformes

Les difficultés à caractère fondamental sont encore plus “redoutables” que les précédentes. En particulier, les coques se distinguent des formulations verrouillantes évoquées ci-dessus par une pluralité de régimes asymptotiques possibles (pour un même modèle). En effet, du fait des contraintes d’inextensionnalité (déformations membranaires nulles) qui sont des contraintes “fortes” (3 équations scalaires homogènes indépendantes pour 3 composantes de déplacement), les situations dans lesquelles

$$\mathcal{V}_0 = \{0\} \tag{16}$$

sont courantes (probablement les plus fréquentes en pratique, d’ailleurs). Pour caractériser le comportement asymptotique, on introduit alors l’espace \mathcal{V}_m obtenu en complétant \mathcal{V} pour la norme définie par

$$\|\cdot\|_m = \|\Gamma(\cdot)\|_0. \tag{17}$$

L’espace \mathcal{V}_m correspond aux déplacements d’énergie de déformation membranaire finie. En supposant que la suite (pour ε variable) des chargements imposés est dans le dual de cet espace (ce qui est une restriction puisque \mathcal{V}_m est “plus grand” que \mathcal{V}), on montre alors que le comportement asymptotique pertinent s’obtient par une autre mise à l’échelle que dans (1), à savoir [SHSP97, 11, 1]

$$A_m(U^\varepsilon, V) + \varepsilon^2 A(U^\varepsilon, V) = F(V), \quad \forall V \in \mathcal{V}, \tag{18}$$

où

$$A_m(U^\varepsilon, V) = (\Gamma(U^\varepsilon), \Gamma(V))_0. \tag{19}$$

On reconnaît là un problème de perturbation singulière, dont le problème limite s’écrit [Lio73]

Trouver U^m dans \mathcal{V}_m tel que

$$A_m(U^m, V) = F(V) \quad \forall V \in \mathcal{V}_m. \tag{20}$$

On note au passage que ce comportement asymptotique, dit “à membrane dominante” correspond à une structure beaucoup plus “raide” que celui caractérisé précédemment, dit “à flexion dominante” pour les coques, puisque le second membre peut être mis à l’échelle par un coefficient d’ordre ε^{-2} plus grand pour obtenir une solution finie (ce qui explique que c’est en général ce comportement qui est recherché dans les structures industrielles). On peut montrer que

ce comportement à membrane dominante ne présente pas de difficulté particulière pour les méthodes d’éléments finis classiques (en particulier, il n’y a plus de verrouillage à craindre puisque plus de contrainte pénalisée) [11].

En revanche, si l’on veut disposer d’une méthode numérique unique qui rende compte correctement de tous les comportements possibles (ce qui est hautement souhaitable dans les applications, voir plus bas), on est conduit à employer dans les cas de membrane dominante des méthodes “de type mixte” (qui dans l’idéal ne verrouillent pas en flexion dominante). Dans ce cas, on résout en réalité

$$A_m^h(U_h^\varepsilon, V) + \varepsilon^2 A(U_h^\varepsilon, V) = F(V), \quad \forall V \in \mathcal{V}_h, \quad (21)$$

où

$$A_m^h(U_h^\varepsilon, V) = (P_h(\Gamma(U_h^\varepsilon)), P_h(\Gamma(V)))_0, \quad (22)$$

c’est à dire qu’on a perturbé par l’opérateur de “projection” le *terme principal* de l’équation variationnelle. Pour avoir un bon comportement numérique, il est donc nécessaire d’obtenir les propriétés adéquates de consistance pour cette perturbation. Il s’agit là d’une difficulté considérable car, outre la complexité technique que présente l’analyse numérique de cette question (du fait de la complexité des formulations de coque et des opérateurs de projection, voir cependant des éléments d’analyse dans [Mal01, HP02]), la “logique” du déverrouillage est fondamentalement étrangère à celle de la préservation de consistance membranaire. On est donc confronté à une forme de “dilemme asymptotique” : de fait, il n’y a pas à l’heure actuelle de méthode pour laquelle on ait pu démontrer une convergence uniforme (en ε) pour les deux comportements asymptotiques décrits ci-dessus. La méthode proposée dans [12] ne semble d’ailleurs pas échapper à ce dilemme car des tests numériques simples effectués sur des coques à membrane dominante révèlent de manière flagrante des défauts de consistance (d’où le titre de l’article).

Il n’est cependant pas véritablement envisageable, comme on pourrait à première vue y être incité, d’utiliser des méthodes numériques différentes selon le comportement (asymptotique) de la structure considérée. En effet, la dichotomie des comportements décrits ci-dessus est en réalité simplificatrice par le fait qu’on a évacué par l’hypothèse “ $F \in \mathcal{V}_m'$ ” (dans le cas où (16) a lieu) toute une foison de comportements asymptotiques “intermédiaires”, voir [PSP97, BL02, 1, 7] et Figure 1. Dans ces comportements plus complexes à analyser, l’énergie membranaire joue un rôle déterminant (et donc les considérations de consistance ci-dessus sont pertinentes) et néanmoins certains exemples mettent en évidence la présence simultanée de contraintes (pénalisées) qui s’appliquent au moins dans certaines zones de la structures, notamment à proximité des frontières [KSHSP00, PMS01], et par conséquent le déverrouillage est également essentiel. On a donc d’une certaine façon “les deux comportements asymptotiques en même temps”, et on en est (pour l’instant) réduit à espérer qu’un schéma qui fonctionnerait bien, c’est à dire qui présenterait des propriétés de convergence uniforme vis-à-vis de l’épaisseur, dans les deux situations extrêmes de flexion et membrane dominantes donnerait également de bons résultats (dans un sens à préciser) pour ces comportements asymptotiques plus complexes.

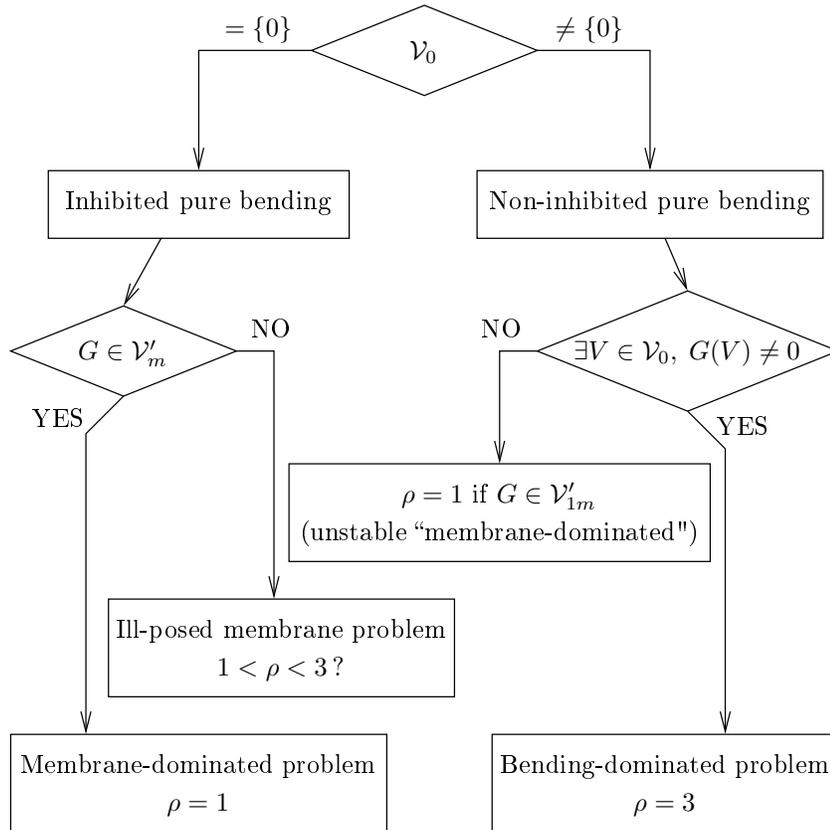


FIG. 1 – Comportements asymptotiques des coques, schéma synoptique (tiré de [1])

1.2.3 Travaux en cours et perspectives

L'obtention de méthodes d'éléments finis de coque dont l'analyse numérique puisse garantir la convergence uniforme à la fois dans les cas de flexion et de membrane dominantes reste donc à l'heure actuelle un problème ouvert très important. Naturellement, l'absence de tels résultats n'empêche pas l'utilisation quasi-routinière d'éléments de coque dans les applications (ce sont sans aucun doute les éléments de structure les plus utilisés, de loin). Que ce soit pour évaluer la fiabilité de tels éléments couramment employés ou pour guider l'analyse mathématique vers des éléments nouveaux qui aient véritablement de bonnes chances de présenter les propriétés désirées de convergence uniforme, il importe donc de pouvoir disposer de méthodologies rigoureuses et discriminantes pour tester numériquement les éléments. Dans cette optique, toute la connaissance que l'on a des comportements asymptotiques des modèles de coque et des propriétés numériques (effectives et recherchées) des éléments est bien entendu précieuse. La méthodologie numérique progressivement mise au point et proposée dans [11, 2, 1] s'appuie ainsi sur les principes de base suivants :

- Comparaison de courbes de convergence (correspondant donc à des maillages de plus en plus fins) pour différentes valeurs de l'épaisseur ;
- Utilisation d'un "jeu de cas-tests" ("benchmarks") dans lequel les deux catégories fondamentales de comportements asymptotiques (membrane et flexion dominante) sont représentées, et avec différentes géométries pour la surface moyenne (car l'énergie membranaire est très profondément liée à cette géométrie, voir [SHSP97]) ;
- Emploi de critères adaptés à la mesure de l'erreur : dans un cas de flexion dominante il est ainsi légitime d'utiliser la norme naturelle de l'espace des déplacements ; en revanche, dans un cas de membrane dominante cette norme ne convient pas mais on peut utiliser la norme de l'énergie membranaire [11] ;
- Prise en compte de la régularité non-uniforme des solutions exactes par l'emploi de maillages adaptés pour représenter correctement les couches limites [KSHSP00, MP00, 1].

Il faut souligner que, quoique ces principes paraissent sans doute naturels, leur mise en oeuvre effective n'est pas simple (notamment par le fait qu'il faille utiliser des normes d'erreur spécifiques), et de fait la pratique courante dans la littérature en "computational mechanics" (où l'on n'hésite parfois pas à affirmer la robustesse d'une méthode sur la base d'un résultat mesuré en un point isolé et pour un seul calcul!) en est pour l'instant assez éloignée. Pour les éléments finis MITC [BD85, BB93, Bat96], de nombreux tests ont déjà été réalisés sur la base de ces principes [8, 1, HB] et d'autres sont en cours. Les résultats déjà obtenus indiquent un très bon comportement pour certains éléments (notamment le MITC4), et moins bon pour d'autres (en particulier le MITC9). Pour ces derniers ils suggèrent néanmoins des voies d'amélioration à explorer [BLH03].

2 Éléments de coques pour les applications industrielles

Compte tenu de l'impact potentiel considérable dans les applications des méthodes numériques pour les coques, un aspect important à prendre en compte (et peut-être trop souvent négligé dans les travaux d'analyse numérique) concerne l'"applicabilité" de ces méthodes, c'est à dire leur adéquation à un cahier des charges qui répond à une logique différente de celle de la stricte orthodoxie des estimations d'erreur. Par exemple, dans les applications des considérations numériques pratiques, voire informatiques, conduisent fréquemment à écarter des méthodes numériques "exotiques" trop difficiles à mettre en oeuvre. En outre, des motivations d'ordre mécanique peuvent conduire à formuler des éléments finis de coque sous une forme à première vue radicalement différente de celle qui paraîtrait la plus naturelle (et propice à l'analyse) à un numéricien. C'est en particulier le cas des "general shell elements" évoqués ci-dessous. Il semble donc important, surtout dans la mesure où l'on estime que dans la situation actuelle les principaux progrès viendront des interactions entre théorique et numérique, aussi bien qu'entre mécanique et mathématique, d'une part de savoir prendre en compte les méthodes les plus couramment utilisées et d'autre part de ne formuler a priori que des méthodes qui soient susceptibles de répondre à un "cahier des charges applicatif minimal" (ce qui constitue une difficulté supplémentaire, bien sûr!).

2.1 Les "general shell elements"

Ces éléments finis de coque (désignés dans la suite par l'abréviation "GSE"), sont sans doute les plus couramment employés en pratique à l'heure actuelle (les éléments MITC, entre autres, appartiennent à cette famille [Bat96]), et ont pourtant longtemps constitué un mystère pour les numériciens. Ils reposent en effet sur la discrétisation numérique, non d'un modèle de coque, mais d'une formulation variationnelle tridimensionnelle. Ceci explique d'ailleurs leur nom car cette méthode permet, du moins en principe, d'obtenir des éléments finis de coque correspondant à une formulation mécanique 3D arbitraire (notamment pour ce qui concerne la loi de comportement), donc sans en passer par le préalable d'un modèle de coque. De façon imagée, on pourrait ainsi dire que la modélisation en coque est "assistée par ordinateur", ce qui est d'ailleurs aussi le cas des éléments de "coque à facettes", autre famille couramment rencontrée dans les applications [BD92].

Dans [10] (voir aussi [17, 1]), on a démontré l'existence d'un modèle de coque "sous-jacent" aux GSEs (dans le cas de l'élasticité linéarisée avec la loi de Hooke) par l'obtention d'estimations d'erreur (convergentes en maillage!) entre solution numérique et solution du modèle identifié. Par ailleurs on a démontré que ce modèle sous-jacent est comparable aux modèles de coque classiques (voir en particulier [Cia00]) au sens de la consistance asymptotique, c'est à dire que, lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro, les solutions du modèle sous-jacent

convergent vers les mêmes limites (et sous les mêmes hypothèses) que celles des modèles classiques. Ces résultats constituent donc à la fois des éléments de justification théorique des GSEs et des passerelles entre ces méthodes et celles analysées par les numériciens.

Soulignons que les estimations d’erreur obtenues pour les GSEs dans [10] sont valables à épaisseur fixée uniquement, c’est à dire qu’elles ne sont pas adaptées à l’analyse de la convergence uniforme vis-à-vis de l’épaisseur (de fait ces éléments souffrent de verrouillage comme les autres en l’absence de traitement particulier [11, 1]). Néanmoins, il semble que ces premiers résultats ouvrent la voie à des analyses plus poussées visant à évaluer (pour le neutraliser, ou du moins le réduire) l’effet de l’épaisseur sur les erreurs numériques, voir notamment [Mal01]. Il est clair que ces analyses sont rendues encore plus difficiles que celles des méthodes de discrétisation des modèles classiques par la complexité du modèle sous-jacent et de sa relation aux GSEs (avec notamment des erreurs de consistance assez délicates à manipuler). Cependant, on peut s’inspirer des similitudes identifiées entre ces deux catégories de modèles, d’une part, et de méthodes numériques d’autre part, pour transposer dans le champ des modèles et méthodes classiques (voir notamment [Ber96]), dans le but de pouvoir plus facilement les analyser, les méthodes proposées (en général sans analyse mathématique) pour réduire le verrouillage des GSEs. C’est notamment ce qui a été fait dans [6] pour l’élément MITC9, transposé dans le cadre d’un modèle classique “à la Naghdi” (voir par exemple [Cia00, BLD00]) et pour lequel les résultats numériques obtenus sont très proches de ceux du GSE dont il s’inspire (ce qui semble indiquer qu’on peut s’abstraire des difficultés inhérentes aux GSEs en analysant à sa place l’élément de formulation classique).

Une importante perspective pour ces travaux concerne la conception de GSEs *triangulaires* robustes. En effet, les éléments triangulaires sont très utiles (voire incontournables) dans nombre d’applications où l’on doit mailler des surfaces complexes, et les éléments existants sont notoirement peu robustes (voir [1] et ses références). Dans cette optique on peut envisager de s’inspirer des techniques d’“interpolation mixte” MITC pour formuler des éléments-prototypes que l’on testerait par les méthodes évoquées dans la section 1.2.3 avant d’entreprendre l’analyse de ceux qui présenteraient les meilleurs comportements.

2.2 Eléments de “coque-3D”

Dans la lignée des GSEs, je me suis intéressé (dans le cadre de collaborations variées) à des éléments de coque d’un type nouveau, que mes coauteurs et moi avons baptisés “éléments de coque-3D” (“3D-shell elements”) [28, 5, 20]. Ces éléments tirent leur nom du fait qu’ils se présentent extérieurement comme des éléments 3D (isoparamétriques) de type standard, c’est à dire avec des degrés de liberté de déplacement uniquement (pas de rotations) disposés en des noeuds présents notamment sur les faces externes de l’élément, qui définissent également la géométrie. Plus précisément, leur mise au point a conduit à spécifier une géométrie prismatique (par exemple hexaédrique) et des fonctions de forme associées prises quadratiques en la coordonnée locale qui décrit l’épaisseur de la

structure. Ces éléments sont conçus pour répondre aux motivations applicatives suivantes :

- Puisqu'ils se présentent extérieurement comme des éléments 3D, ces éléments de coque se couplent sans difficulté aucune à des éléments 3D par leurs faces externes, ce qui est très utile dans beaucoup d'applications (la motivation d'origine concernait la simulation du comportement des nappes de renfort dans les pneus, voir Figure 2, mais ces éléments peuvent naturellement être employés dans beaucoup d'autres situations où ce genre de couplage doit être pris en compte : interaction fluide-structure, coques-sandwichs, patches piézoélectriques. . .).
- La cinématique sous-jacente de ces éléments est plus riche (quadratique) vis-à-vis de la coordonnée transverse que dans les GSEs usuels (où la cinématique correspond à l'hypothèse de Reissner-Mindlin, c'est à dire qu'elle est linéaire pour le déplacement tangentiel et constante pour le déplacement transverse). Ceci permet d'espérer capturer plus finement certains comportements de grandes déformations où notamment la déformation transverse (de "pincement") intervient de manière significative, comme pour l'emboutissage par exemple.
- Enfin, on peut montrer que ces éléments ne nécessitent pas, au contraire des GSEs classiques, le recours à une hypothèse de contrainte plane dans la loi de comportement 3D, hypothèse qu'il n'est pas aisé de prendre en compte en pratique dans un cadre de grandes déformations.

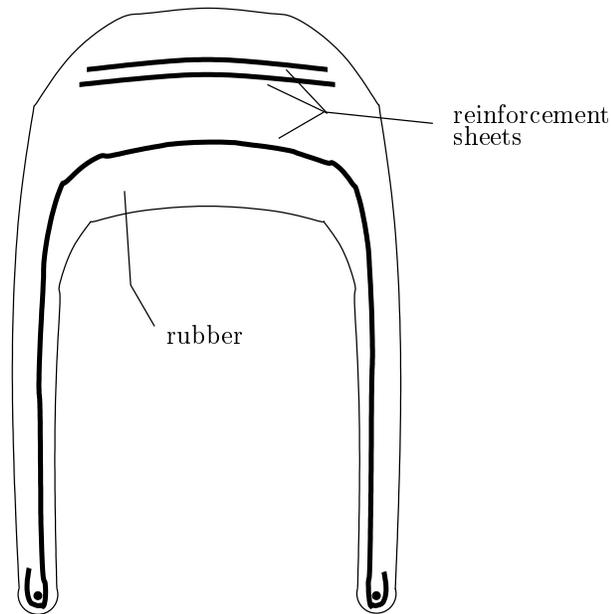


FIG. 2 – Nappes de renfort dans un pneu (coupe)

En préalable, on a étudié dans [4] différentes façons de coupler un modèle de coque à un ou plusieurs corps massifs par l’intermédiaire de ses surfaces externes, à savoir :

- Soit par l’approximation qui consiste à négliger l’épaisseur de la coque et à coupler directement les déplacements de la surface moyenne à ceux des interfaces du corps massif (méthode souvent utilisée en pratique) ;
- Soit en tenant compte de l’épaisseur de la coque à la fois dans la géométrie et dans l’écriture des relations de couplage (ce qui est malcommode avec les éléments usuels).

On a pu ainsi montrer par des techniques d’analyse asymptotique que ces problèmes couplés admettent les mêmes solutions-limites lorsque l’épaisseur de la coque tend vers zéro (sous certaines hypothèses sur les valeurs relatives des raideurs de la coque et des corps 3D). En revanche, des tests numériques montrent des résultats significativement différents entre les deux méthodes pour des coques pourtant relativement minces, ce qui dissuade d’employer la première méthode de couplage (on suppose implicitement, à défaut de “vrais” résultats par analyse 3D de la coque, que c’est la deuxième méthode qui est “la référence”).

Par ailleurs, en analysant les éléments de coque-3D et leur modèle sous-jacent (voir ci-dessous), on a mis en évidence le fait que les mêmes sources de verrouillage que dans les autres GSEs sont présentes (et peuvent donc faire l’objet des mêmes traitements heuristiques que ceux utilisés par ailleurs), voir [20]. En outre, une nouvelle source de verrouillage apparaît, liée à l’énergie de déformation de pincement (d’où le nom de “pinching locking” dont nous l’avons baptisé), et nous avons sur ce point complètement justifié (dans [5]) une stratégie de déverrouillage consistant à interpoler les déformations de pincement aux noeuds de l’élément, stratégie apparemment déjà employée, sur des bases heuristiques, dans d’autres éléments de coques correspondant à des cinématiques transverses de haut degré [BR97]. Soulignons au passage que ces diverses opérations de déverrouillage constituent la seule différence entre les éléments de coque-3D et de véritables éléments 3D, et qui font donc que l’élément de coque en question “sait qu’il est mince” dans une direction donnée.

Enfin, on a étendu pour ces éléments les résultats mentionnés pour les autres GSEs, sur l’existence d’un modèle sous-jacent (différent de celui des GSEs usuels, naturellement) et sur la consistence asymptotique de ce modèle avec les modèles de coque classiques [20]. Au passage, l’analyse asymptotique fournit un éclairage intéressant sur l’hypothèse de contraintes planes évoquée ci-dessus, puisqu’on montre que celle-ci prévaut “à la limite”. En incidente, on peut aussi mentionner que le fait de ne pas utiliser cette hypothèse *a priori* dans les éléments de coque-3D présente tout de même un inconvénient, à savoir qu’il redevient difficile (comme dans les formulations 3D) de prendre en compte des matériaux incompressibles. En particulier, il semblerait (comme on pourrait s’y attendre) qu’un verrouillage d’incompressibilité apparaît alors, voire même peut-être aussi des incompatibilités de modèles dans l’échange entre les deux limites asymptotiques (de coque et d’incompressibilité). Ceci fait l’objet de travaux en cours [21].

Comme mentionné ci-dessus, une perspective naturelle et intéressante des formulations de coque-3D concerne la modélisation et la simulation numérique de coques piézoélectriques (voir par exemple [RBOO98, BD00]). Je souhaite explorer ce sujet dans un avenir proche, plus généralement d'ailleurs aussi dans l'optique des applications au contrôle des structures, thématique qui m'intéresse particulièrement (voir également ci-dessous).

3 Explorations diverses

Mes activités de responsable d'une équipe de recherche (projet MACS⁵, depuis sa création en 2000) à l'INRIA-Rocquencourt, et les nombreux contacts qu'elles occasionnent, m'ont conduit à mener des travaux de recherche (pour l'instant à caractère largement "exploratoire") dans des directions variées et à travers diverses collaborations.

3.1 Couplage fluide-structure

J'ai contribué au lancement, puis au pilotage, d'une action de recherche collaborative, intitulée "Effets du vent sur les structures du génie civil", coordonnée par le LCPC (F. Bourquin) et impliquant par ailleurs le CSTB, l'ENPC et l'INRIA, de 1999 à 2003. Dans ce contexte, j'ai été co-responsable (avec S. Piperno, projet CAIMAN) du sujet "Soufflerie numérique" visant à développer des outils (y compris au sens de méthodes) de simulation pour appréhender les phénomènes de couplage fluide-structure pertinents dans ces applications, et à confronter ces outils à des vrais résultats expérimentaux (obtenus dans la soufflerie du CSTB). Une motivation essentielle pour cette action concernait l'utilisation d'outils numériques dans la conception des ouvrages, en complément (et non en remplacement, bien sûr) des essais en soufflerie.

La thèse de M. Fernandez (directeur de thèse : P. Le Tallec) a eu lieu dans ce cadre dans le projet MACS, avec pour objectif de mettre au point des modèles simplifiés et des méthodes numériques associées pour représenter le couplage fluide-structure et analyser la stabilité du système couplé. L'idée-clé de ces travaux repose sur la linéarisation du modèle couplé en formulation ALE, qui fournit un problème où le domaine fluide est fixe et où les conditions de couplage se traduisent par des conditions aux limites spécifiques (dites de "transpiration") à l'interface fluide-structure [22, FFLT00]. On étudie alors la stabilité du système couplé (linéaire) en examinant ses valeurs propres, ce qui est une alternative séduisante (car beaucoup moins coûteuse) à la simulation directe du système couplé en ALE. Les premiers résultats obtenus par cette méthode sur des cas-tests expérimentaux ou numériques sont très prometteurs [FLT02a, FLT02b].

En revanche, en ce qui concerne l'utilisation d'outils numériques pour la conception au vent des ouvrages, les campagnes d'essais numériques détaillés (en utilisant divers modèles de turbulence et lois de paroi) mettent en évidence

⁵<http://www-rocq.inria.fr/MACS/>

de grandes difficultés pour simuler correctement certains phénomènes déterminants (comme le décollement / recollement en aval du bord d’attaque) pour la stabilité au vent, et semblent indiquer que des progrès en modélisation fluide sont nécessaires avant de pouvoir envisager d’employer des outils de soufflerie numérique dans un contexte opérationnel [BP03].

3.2 Optimisation des gyrovibrants

Les gyrovibrants sont des capteurs inertiels qui, à la différence des gyroscopes traditionnels, ne comportent pas de pièces tournantes (sensibles à l’usure et peu propices à la miniaturisation). Ce sont des structures particulières dans lesquelles l’observation d’un certain plan d’onde de vibration permet la mesure de la rotation du dispositif par rapport à un repère inertiel, effet dû aux forces de Coriolis et connu sous le nom de son découvreur, Bryan [Bry90]. Cet effet requiert l’existence d’un espace modal de dimension 2 (correspondant au mode fondamental, de préférence), et il apparaît en particulier dans les structures à symétrie de révolution. Dans cette catégorie, on privilégie alors naturellement les coques minces qui permettent de réduire la taille de la structure (quelques centimètres) sans élévation excessive de la fréquence du mode fondamental (et de l’amortissement associé), voir par exemple [Lyn95].

Comme le laisse entendre le principe de fonctionnement exposé ci-dessus, l’exploitation de l’effet Bryan repose sur l’observation d’un phénomène “de dimension 2” (ou 4 dans l’espace d’état), et suppose qu’on peut idéalement s’abstraire du comportement global de la structure, c’est à dire de celui de ses autres modes. Or ces autres modes sont excités, à la fois par couplage avec les modes fondamentaux par effet Coriolis (et centrifuge), et aussi par l’action du dispositif de contrôle visant à entretenir la vibration du mode fondamental (sans perturber sa précession, naturellement). En retour, la vibration des modes “indésirables” induit des perturbations sur le comportement des modes fondamentaux (par couplage inverse), et donc sur la mesure inertielle. L’action du contrôle étant probablement la cause principale d’excitation des modes indésirables, on voit donc qu’une difficulté essentielle pour la conception de gyrovibrants consiste à limiter ce phénomène de “spillover” de contrôle.

Dans ce cadre, notre travail a consisté, après avoir “mis en équations” l’effet Bryan pour les structures de révolution, à mettre au point (et en oeuvre) une stratégie pour minimiser le spillover de contrôle en jouant sur les paramètres de forme de la structure. Pour cela, nous nous sommes donné une fonction de transfert “modèle” de type SISO pour la structure gyrovibrante (sous forme de somme infinie sur les modes), et nous avons choisi comme critère de minimisation la partie de cette fonction de transfert correspondant aux modes indésirables, considérée à une fréquence de fonctionnement correspondant à celle du mode fondamental (celle que le contrôle vise à entretenir). Ce critère mesure donc bien la fraction de l’énergie (“vue du capteur”) due aux modes indésirables. L’utilisation de ce critère dans une chaîne d’optimisation ad hoc (calcul des gradients par différentiation automatique; algorithme de point intérieur) a mis en évidence d’importantes marges d’optimisation par rapport aux structures gyrovibrantes

actuellement industrialisées (essentiellement de forme hémisphérique) [34, 29].

3.3 Biomécanique du coeur

Ces travaux ont eu lieu pour leur majeure partie dans le cadre des ARCS⁶ intitulées ICEMA et ICEMA2⁷, en collaboration avec des chercheurs de différentes spécialités (automatique, modélisation mécanique et calcul scientifique, traitement d'images) de l'INRIA et d'autres organismes. Leur objectif concerne l'exploitation d'images de l'activité cardiaque au moyen de modèles électromécaniques du comportement de l'organe, dans une perspective d'aide au diagnostic de pathologies diverses (de conduction et/ou de contraction).

Dans un premier temps, on a formulé les équations d'un modèle électromécanique de muscle cardiaque (en grands déplacements et grandes déformations) sur la base d'une loi de comportement (comportant une entrée électrique) elle-même obtenue sur des bases physiologiques au moyen d'une analyse multi-échelles [BCS01, 31]. Les outils numériques nécessaires à la simulation de ce modèle ont ensuite été mis au point et sont en cours de développement dans la toolbox OpenFEM⁸.

En parallèle, des réflexions et des études ont été menées sur l'utilisation de techniques d'assimilation de données dans la perspective d'exploiter des images provenant d'exams cliniques (échographies, IRM) pour remonter aux informations correspondant aux paramètres du modèle électromécanique mentionné ci-dessus, ainsi qu'à l'état complet du système au cours du temps (ce qui permet également d'accéder à des indicateurs physiologiques globaux pertinents comme l'indice de contractilité ou le volume d'éjection). Les résultats préliminaires obtenus au moyen de modèles simplifiés et de données de synthèse sont très encourageants [26]. Les différents éléments de la "chaîne méthodologique" nécessaires au "couplage du modèle et des données" étant ainsi sur le point d'être assemblés, les premières validations effectives (sur des vraies données) devraient pouvoir être menées dans les prochains mois.

Même si ces travaux relèvent pour l'instant du "défrichage scientifique" au sens où il n'est pas encore facile de discerner sur quels sujets spécifiques l'analyse numérique peut y avoir un impact déterminant, des pistes émergent néanmoins avec notamment :

- la modélisation multi-échelles et les couplages de modèles ;
- les questions relatives à l'identification des modèles à travers l'assimilation de données, et les retours sur la modélisation que cela implique.

Ces thématiques sont d'ailleurs génériques pour la modélisation du vivant, domaine que je juge passionnant et dans lequel je souhaite m'investir significativement dans l'avenir, personnellement autant qu'au titre de responsable d'équipe de recherche.

⁶Actions de Recherche Coopératives de la direction scientifique de l'INRIA.

⁷<http://www-rocq.inria.fr/sosso/icema2/icema2.html>

⁸<http://www.openfem.net>

Remerciements : Je souhaite tout particulièrement témoigner ma gratitude à Patrick Le Tallec qui m’a fait l’amitié de relire et commenter une version préliminaire de ce document.

Publications

Livres et chapitres de livres

- [1] D. Chapelle and K.J. Bathe. *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Springer, 2003.
- [2] D. Chapelle. Some new results and current challenges in the finite element analysis of shells. In *Acta Numerica*, pages 215–250. Cambridge University Press, 2001.
- [3] H. Borouchaki, D. Chapelle, P.L. George, P. Laug, and P. Frey. Estimateurs d’erreurs géométriques et adaptation de maillage. In P.L. George, editor, *Maillage et adaptation*. Hermes Science, 2001.

Articles

- [4] D. Chapelle and A. Ferent. Modeling of the inclusion of a reinforcing sheet within a 3D medium. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 13(4) :573–595, 2003.
- [5] D. Chapelle, A. Ferent, and P. Le Tallec. The treatment of “pinching locking” in 3D-shell elements. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(1) :143–158, 2003.
- [6] D. Chapelle, D.L. Oliveira, and M.L. Bucelem. MITC elements for a classical shell model. *Comput. & Structures*, 81 :523–533, 2003.
- [7] K.J. Bathe, D. Chapelle, and P.S. Lee. A shell problem ‘highly sensitive’ to thickness changes. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 57(8) :1039–1052, 2003.
- [8] K.J. Bathe, A. Iosilevich, and D. Chapelle. An evaluation of the MITC shell elements. *Comput. & Structures*, 75(1) :1–30, 2000.
- [9] K.J. Bathe, A. Iosilevich, and D. Chapelle. An inf-sup test for shell finite elements. *Comput. & Structures*, 75(5) :439–456, 2000.
- [10] D. Chapelle and K.J. Bathe. The mathematical shell model underlying general shell elements. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 48(2) :289–313, 2000.
- [11] D. Chapelle and K.J. Bathe. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Comput. & Structures*, 66 :19–36, 711–712, 1998.
- [12] D. Chapelle and R. Stenberg. Stabilized finite element formulations for shells in a bending dominated state. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(1) :32–73, 1998.

- [13] D. Chapelle and R. Stenberg. An optimal low-order locking-free finite element method for Reissner-Mindlin plates. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8(3) :407–430, 1998.
- [14] D. Chapelle. A locking-free approximation of curved rods by straight beam elements. *Numer. Math.*, 77 :299–322, 1997.
- [15] D. Chapelle and K.J. Bathe. The inf-sup test. *Comput. & Structures*, 47(4/5) :537–545, 1993.

Notes

- [16] J. Villard, H. Borouchaki, and D. Chapelle. Simulation du drapé des tissus par maillage adaptatif. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.335 :561–566, 2002. Série I.
- [17] D. Chapelle and K.J. Bathe. Optimal consistency errors for general shell elements. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.332 :771–776, 2001. Série I.

Mémoires

- [18] D. Chapelle. *Etude des phénomènes de verrouillage numérique pour les problèmes de coques minces*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1996.
- [19] D. Chapelle. *On the inf-sup condition in engineering practice*. Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology, February 1993.

Rapports de recherche et autres articles non-publiés

- [20] D. Chapelle, A. Ferent and K.J. Bathe. 3D-shell finite elements and their underlying shell model. A paraître dans *Math. Models Methods Appl. Sci.*
- [21] D. Chapelle and A. Münch. Obtention de modèles de coque incompressibles par analyse asymptotique. In *Actes CANUM 2003*.
- [22] D. Chapelle, M.A. Fernández-Varela, and P. Le Tallec. Un modèle simplifié d’interaction fluide-structure. Rapport de Recherche 3703, INRIA, 1999.
- [23] D. Chapelle. Etude numérique du verrouillage de quelques méthodes d’éléments finis pour les coques. Rapport de Recherche 2740, INRIA, 1995.
- [24] D. Chapelle. Une formulation mixte de plaques où l’effort tranchant est approché dans son espace naturel. Rapport de Recherche 2248, INRIA, November 1993.

Conférences avec actes (depuis 1997)

- [25] D. Chapelle and A. Ferent. Reliability considerations for 3D-shell elements. In *Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, 2003.

- [26] J. Sainte-Marie, D. Chapelle and M. Sorine. Data assimilation for an electro-mechanical model of the myocardium. In *Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, 2003.
- [27] M. Sermesant, Y. Coudière, H. Delingette, N. Ayache, J. Sainte-Marie, D. Chapelle, F. Clément, and M. Sorine. Progress towards model-based estimation of the cardiac electromechanical activity from ECG signals and 4D images. In *Conférence MS4CMS*, Rocquencourt, France, novembre 2002. INRIA.
- [28] D. Chapelle. Towards the convergence of 3D and shell finite elements ? In *Proceedings : Enumath 2001*, 2001.
- [29] D. Chapelle, F. Génot, A. Hassim, and M. Sorine. Optimisation des gyroscopes vibrants. In *Colloque National en Calcul des Structures*, pages 829–836, Giens (Var), 2001.
- [30] D. Chapelle and A. Ferent. Asymptotic analysis of the coupled model shells-3d solids. In *First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, 2001.
- [31] D. Chapelle, F. Clément, F. Génot, P. Le Tallec, M. Sorine, and J.M. Urquiza. A physiologically-based model for the active cardiac muscle contraction. In *Functional Imaging and Modeling of the Heart*, pages 128–133. Springer, 2001.
- [32] N. Ayache, D. Chapelle, F. Clément, Y. Coudière, H. Delingette, J.A. Désidéri, M. Sermesant, M. Sorine, and J.M. Urquiza. Towards model-based estimation of the cardiac electro-mechanical activity from ECG signals and ultrasound images. In *Functional Imaging and Modeling of the Heart*, pages 120–127. Springer, 2001.
- [33] D. Chapelle. Reliability of finite element methods for thin shells. In *Computational Mechanics for the Twenty-First Century*, pages 99–108. Saxe-Coburg Publications, 2000.
- [34] F. Génot, D. Chapelle, M. Delfour, A. Hassim, and M. Sorine. On the dynamics and optimum design of resonating gyros. In *Proc. of the 2nd European Conference on Structural Control*, ENPC, Champs-sur-Marne, France, 3-6 Juillet 2000.
- [35] D. Chapelle and R. Stenberg. Locking-free mixed stabilized finite element methods for bending-dominated shells. In *CRM Proceedings and Lecture Notes*, volume 21, pages 81–94. American Mathematical Society, 1999.
- [36] D. Chapelle, M. Fernández, and P. Le Tallec. Un modelo simplificado de interacción fluido-estructura. In R. Montenegro, G. Montero, and G. Winter, editors, *Actes du XVIe CEDYA et VIe CMA*, pages 1437–1444, 1999.
- [37] D. Chapelle and K.J. Bathe. On general shell finite elements and mathematical shell models. In B.H.V. Topping, editor, *Advances in Finite Element Procedures and Techniques*, pages 25–30, Edinburgh, 1998. CIVIL-COMP Press.

- [38] D. Chapelle. Modèles de coques minces : comportements asymptotiques et méthodes numériques. In *Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, pages 615–620, Giens, 20-23 mai 1997.
- [39] D. Chapelle, M. Lyly, and R. Stenberg. Stabilized finite element methods for plates and shells. In *Shells Mathematical Modelling and Scientific Computing*, pages 159–161, Universidade de Santiago de Compostela, 1997.

Bibliographie

- [AB93] D.N. Arnold and F. Brezzi. Some new elements for the Reissner-Mindlin plate model. In J.L. Lions and C. Baiocchi, eds, *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications*, Masson, 1993.
- [AB97] D.N. Arnold and F. Brezzi. Locking-free finite element methods for shells. *Math. Comp.*, 66(217) :1–14, 1997.
- [Bab73] I. Babuška. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20 :179–192, 1973.
- [Bat96] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [BB93] M.L. Bucleam and K.J. Bathe. Higher-order MITC general shell elements. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 36 :3729–3754, 1993.
- [BCS01] J. Bestel, F. Clément and M. Sorine. A biomechanical model of muscle contraction. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2208, 2001.
- [BD85] K.J. Bathe and E.N. Dvorkin. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 21 :367–383, 1985.
- [BD92] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des Structures par Éléments Finis. Vol.3 : Coques*. Hermes, Paris, 1992.
- [BD00] M. Bernadou and M.C. Delfour. Intrinsic models of piezoelectric shells. In *Proceedings of ECCOMAS 2000*.
- [Ber96] M. Bernadou. *Finite Element Methods for Thin Shell Problems*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [BL02] C. Baiocchi and C. Lovadina. A shell classification by interpolation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12(10) :1359–1380, 2002.
- [BLD00] A. Blouza and H. Le Dret. Naghdi’s shell model : existence, uniqueness and continuous dependence on the midsurface. *Journal of Elasticity*, 64 :199–216, 2000.
- [BLH03] K.J. Bathe, P.S. Lee and J.F. Hiller. Towards improving the MITC9 shell element. *Comput. & Structures*. In press.
- [BN83] J. Boland and R. Nicolaides. Stability of finite elements under divergence constraints. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20 :722–731, 1983.
- [BP03] E. Briand and S. Piperno. Validation du code NSI3FS sur des écoulements turbulents autour d’un tablier de pont élémentaire. Rapport de contrat, INRIA, 2003.
- [BR97] M. Bischoff and E. Ramm. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 40 :4427–4449, 1997.

- [Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *R.A.I.R.O., Anal. Numér.*, 8 :129–151, 1974.
- [Bry90] G.H. Bryan. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*, 7 :101–107, 1890.
- [Cia00] P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity - Volume III : Theory of Shells*. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [FFLT00] T. Fanion, M.A. Fernández and P. Le Tallec. Deriving adequate formulations for fluid-structure interaction problems : from ALE to transpiration. *Rev. Européenne Elém. Finis*, 9(6-7) :681–708, 2000.
- [FLT02a] M.A. Fernández and P. Le Tallec. Linear stability analysis in fluid-structure interaction with transpiration. Part I : formulation and mathematical analysis. Rapport de Recherche 4570, INRIA, 2002.
- [FLT02b] M.A. Fernández and P. Le Tallec. Linear stability analysis in fluid-structure interaction with transpiration. Part II : numerical analysis and applications. Rapport de Recherche 4571, INRIA, 2002.
- [HP02] V. Havu and J. Pitkäranta. Analysis of a bilinear finite element for shallow shells. I : Approximation of inextensional deformations. *Math. Comp.*, 71 :923–943, 2002.
- [HB] J.F. Hiller and K.J. Bathe. Measuring convergence of mixed finite element discretizations : an application to shell structures. *Comput. & Structures*. In press.
- [KSHSP00] P. Karamian, J. Sanchez-Hubert, and E. Sanchez-Palencia. A model problem for boundary layers of thin elastic shells. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(1) :1–30, 2000.
- [Lio73] J.L. Lions. *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1973.
- [Lyn95] D.D. Lynch. Hemispherical resonator gyro. *EOS Technical Journal*, 3(1) :11–22, 1995.
- [Mal01] M. Malinen. On the classical shell model underlying bilinear degenerated shell finite elements. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 52 :389–416, 2001.
- [MP00] M. Malinen and J. Pitkäranta. A benchmark study of reduced-strain shell finite elements : quadratic schemes. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 48 :1637–1671, 2000.
- [Pit92] J. Pitkäranta. The problem of membrane locking in finite element analysis of cylindrical shells. *Numer. Math.*, 61 :523–542, 1992.
- [PMS01] J. Pitkäranta, A.M. Matache, and C. Schwab. Fourier mode analysis of layers in shallow shell deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 :2943–2975, 2001.

- [PSP97] J. Pitkäranta and E. Sanchez-Palencia. On the asymptotic behaviour of sensitive shells with small thickness. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb*, 325 :127–134, 1997.
- [RBOO98] M. Rahmoune, A. Benjeddou, R. Ohayon and D. Osmont. New thin piezoelectric plate models. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 9 :1017–1029, 1998.
- [SHSP97] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Coques Elastiques Minces - Propriétés Asymptotiques*. Masson, Paris, 1997.
- [Ste84] R. Stenberg. Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem : a unified approach. *Math. Comp.*, 42 :9–23, 1984.
- [ZT91] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1&2. McGraw Hill, London, 4th edition, 1989/1991.