



**HAL**  
open science

# Étoiles à neutrons, étoiles de quarks, trous noirs et ondes gravitationnelles

Eric Gourgoulhon

► **To cite this version:**

Eric Gourgoulhon. Étoiles à neutrons, étoiles de quarks, trous noirs et ondes gravitationnelles. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2003. tel-00004260

**HAL Id: tel-00004260**

**<https://theses.hal.science/tel-00004260>**

Submitted on 21 Jan 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS VII

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

**Étoiles à neutrons,  
étoiles de quarks,  
trous noirs  
et  
ondes gravitationnelles**

Éric GOURGOULHON

Laboratoire de l'Univers et de ses Théories  
(CNRS / Observatoire de Paris / Université Paris VII)

*Eric.Gourgoulhon@obspm.fr*

soutenue le 4 juillet 2003,  
devant le Jury composé de

M. Marcello FULCHIGNONI,	président
M. Thibault DAMOUR,	rapporteur
Mme. Isabelle GRENIER,	rapporteur
M. José-Maria IBÁÑEZ,	rapporteur
M. Silvano BONAZZOLA,	examineur
M. Paweł HAENSEL,	examineur
M. Jean-Pierre LASOTA,	examineur



*À la mémoire de Jean-Alain Marck,  
compagnon de recherche extraordinaire,  
trop tôt disparu,  
mais dont le formidable élan m'anime toujours.*



# Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à remercier Silvano Bonazzola et Jean-Alain Marck, même si le second n'est plus là pour l'entendre. Ces années de collaboration ont été si enrichissantes et si fructueuses ! Au delà de la physique et des méthodes numériques, l'une des choses les plus importantes qu'ils m'ont transmis est le sentiment d'appartenir à un groupe de recherche, au sens fort du terme. Silvano et Jean-Alain ont en effet créé à la fin des années 1980 ce que, dans le microcosme de la relativité numérique, on appelle désormais le "groupe de Meudon". Dans ce monde où l'on prône la mobilité, la stabilité de notre groupe a été l'une des clés du succès de nos recherches. C'est, je pense, particulièrement vrai dans le domaine du numérique, activité qui nécessite souvent un travail de fond, sans publications immédiates, et qui s'exerce mal entre deux avions ou deux déménagements. Si le terme d'*Habilitation à diriger des recherches* doit être pris au sérieux, il signifie sans aucun doute pour moi assurer la pérennité et le développement du "groupe de Meudon". Au moment où j'écris ces lignes, je me rappelle que c'est Jean Heyvaerts et Jean-Pierre Lasota qui m'ont mis en contact avec Jean-Alain et Silvano. Je leur en serai toujours infiniment reconnaissant.

Un des éléments du "groupe de Meudon" n'est pas meudonais au sens propre du terme, puisqu'il s'agit de Paweł Haensel, du Centre Astronomique Nicolas Copernic de Varsovie. Cependant, ses nombreux séjours parmi nous et son expertise en physique de la matière dense, cruciale pour le traitement des étoiles à neutrons, en font un membre clé de notre groupe. Paweł est à la base de nombre de mes recherches. Sans lui je ne me serais sans doute jamais intéressé à des objets comme les étoiles de quarks étranges, qui sont le sujet de la Partie II de ce mémoire d'habilitation. Je remercie donc Paweł pour tout ce qu'il m'a apporté. J'en profite également pour remercier Alain Omont qui a dirigé pendant la décennie écoulée le programme de *Jumelage Astronomie France-Pologne*, programme qui a permis les séjours de Paweł à Meudon et mes voyages à Varsovie.

Mes remerciements vont également au plus jeune membre permanent du "groupe de Meudon", Jérôme Novak. Notre collaboration remonte au stage qu'il a effectué en 1994 dans notre groupe, et dont les résultats sont présentés dans le Chap. 7 de ce mémoire. Notre collaboration actuelle sur LORENE (Chap. 31) et la dynamique du champ gravitationnel, en particulier les équations d'ondes (Partie VII), alimente quotidiennement mon optimisme pour le futur du groupe.

Je tiens à remercier vivement Philippe Grandclément, qui fut mon premier étudiant en thèse officiel. Je n'oserais pas parler de direction de thèse tant son autonomie et l'excellence de son travail me le font considérer comme un collègue à part entière. Les résultats numériques sur les dernières orbites des trous noirs binaires présentés au Chap. 27 sont le produit de son travail de thèse.

Je remercie aussi chaleureusement Dorota Gondek-Rosińska, post-doc de l'Union Européenne dans notre groupe pendant ces trois dernières années, et avec qui j'ai réalisé certains des travaux

sur les étoiles de quarks étranges présentés dans la Partie II, ainsi que la détermination du point de bifurcation Maclaurin - Jacobi en relativité générale (Chap. 19).

J'ai également eu la chance de travailler avec un deuxième post-doc, Keisuke Taniguchi, sur les systèmes binaires d'étoiles à neutrons (Partie IV). Sa connaissance étendue des solutions analytiques pour les systèmes binaires (il est même l'auteur de certaines!) a permis de tester en profondeur notre code. J'ai pu ensuite apprécier sa rigueur dans le calcul des séquences d'évolution des étoiles à neutrons binaires.

Je remercie aussi vivement un autre de mes collaborateurs réguliers, Leszek Zdunik, du Centre Astronomique Nicolas Copernic à Varsovie, avec qui j'ai eu la joie de travailler sur les étoiles de quarks étranges (Partie II). Notre collaboration se poursuit actuellement sur les étoiles à neutrons dont l'intérieur contient des hypérons.

Je remercie également tous les collaborateurs plus occasionnels avec lesquels j'ai rédigé des articles ces dix dernières années : Marc Bocquet, Tomek Bulik, Thibault Damour, Yoshiharu Eriguchi, Adalberto Giazotto, Włodek Kluzniak, Richard Livine, Tetsuo Nozawa, Ewa Paluch et Nick Stergioulas. Merci également aux collaborateurs "en cours" que sont Michal Bejger, Christian Klein, François Limousin, Zakaria Meliani, Christophe Sauty et Loïc Villain. Merci aussi à Luc Blanchet pour tous les échanges que nous avons pu avoir sur les systèmes binaires spiralants.

Je tiens par ailleurs à exprimer ma reconnaissance à Brandon Carter pour toutes les heures de discussion sur différents problèmes de relativité. Brandon s'est toujours montré disponible, et les discussions avec lui ont été très éclairantes pour moi. Il en va de même de la lecture de ses articles, toujours très pénétrants. Je mesure la chance d'avoir pu effectuer mes recherches à ses côtés.

Les travaux menés pendant cette dizaine d'années ont bénéficié du soutien actif des directeurs qui se sont succédés à la tête du laboratoire auquel appartient notre groupe : le Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie (DARC) jusqu'en 2001 et le Laboratoire de l'Univers et de ses Théories (LUTH) depuis lors. Je remercie donc vivement Jean-Pierre Lasota et Nathalie Deruelle pour le DARC, et Jean-Michel Alimi pour le LUTH. Je remercie également les secrétaires/administratrices de l'ex-DARC : Cécile Rosolen et Dominique Lopez, ainsi que celles du nouveau LUTH : Sylvie Gordon, Nathalie Reinhard et Cécile Rosolen. Leur gentillesse, compétence et efficacité constituent un support non négligeable. Au delà, je remercie tous les personnels qui contribuent à faire de l'Observatoire de Meudon un cadre de travail très agréable : Stéphane Thomas à l'accueil, tout le personnel de la bibliothèque, ainsi que celui de la cantine.

Je remercie les membres du Jury que je n'ai pas encore cités, et plus particulièrement Thibault Damour, Isabelle Grenier et José-Maria Ibañez, pour avoir accepté la charge de rapporteur. J'ai été sensible à cette marque d'intérêt de leur part pour mon travail. Je voudrais par ailleurs remercier Thibault Damour pour les discussions très enrichissantes que nous avons pu avoir, et Isabelle Grenier pour sa relecture attentive du manuscrit et la correction de nombreuses fautes de frappe. Je remercie également José-Maria Ibañez pour tous les échanges que nous avons pu avoir par le passé et pour avoir fait le déplacement depuis Valence à l'occasion de la soutenance. Je suis reconnaissant à Marcello Fulchignoni d'avoir accepté la présidence du Jury. Enfin je remercie Jean-Pierre Lasota pour son indéfectible soutien, qui me touche toujours beaucoup.

Que l'on me permette de terminer ces remerciements par une pensée toute particulière pour Valérie, le matin.

# Avant-propos

Ce mémoire pour l’habilitation à diriger des recherches présente l’ensemble des travaux que j’ai effectués depuis ma thèse de doctorat, soutenue en 1992 (Ref. [1]) . Cette dernière avait pour thème l’effondrement gravitationnel des étoiles à neutrons en trou noir et l’émission de neutrinos qui en résulte. La détection de neutrinos constitue une branche de l’astronomie que l’on peut qualifier de *non-électromagnétique*, puisque son vecteur d’information n’est pas le photon, contrairement à la plupart des observations astrophysiques. L’astronomie des neutrinos est réellement née en 1987 avec la détection des neutrinos en provenance de la supernova SN 1987A (jusqu’alors, tous les neutrinos détectés provenaient du Soleil).

Une deuxième branche de l’astronomie non-électromagnétique est en train de voir le jour, avec l’achèvement de la construction des grands détecteurs interférométriques LIGO et VIRGO et l’avènement du projet spatial LISA : celle des *ondes gravitationnelles*. Les travaux présentés ici se situent dans ce cadre.

On m’avait dit : “une habilitation c’est facile : tu prends tous tes articles et tu les agrafes ensemble...”. La rédaction est alors minimale, seulement une introduction et une conclusion. Cependant, après réflexion, j’ai choisi une autre approche, qui a demandé certes plus de travail mais a été beaucoup plus enrichissante pour moi. J’ai en effet choisi de revoir tous mes articles de la période 1993-2002<sup>1</sup> en les mettant en perspective du point de vue de la recherche d’aujourd’hui dans le domaine. J’ai ainsi réexaminé les motivations de chaque article et présenté les progrès effectués depuis sa parution, aussi bien par notre groupe que par d’autres. Ce mémoire est donc divisé en autant de chapitres que d’articles publiés dans des revues à comité de lecture pendant la période 1993-2002 et, hormis pour les articles les plus récents, chaque chapitre se termine par un paragraphe intitulé *Développements ultérieurs*. Les 31 chapitres ne sont pas présentés par ordre chronologique mais regroupés par thème scientifique, suivant 6 parties :

1. étoiles à neutrons en rotation rapide,
2. étoiles de quarks étranges,
3. émission d’ondes gravitationnelles par les étoiles à neutrons en rotation,
4. systèmes binaires d’étoiles à neutrons,
5. systèmes binaires de trous noirs,
6. méthodes numériques.

---

<sup>1</sup>A l’exception de l’article [3], paru en 1995, qui constitue plutôt un prolongement de ma thèse de doctorat et que j’ai omis ici.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Étoiles à neutrons en rotation rapide</b>	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>Équations et méthode numérique pour le cas circulaire</b>	<b>23</b>
1.1	Symétries et vecteurs de Killing . . . . .	23
1.2	Espace-temps circulaires . . . . .	23
1.3	Un petit historique des travaux antérieurs à 1993 . . . . .	25
1.4	Notre article de 1993 [A1] . . . . .	26
1.4.1	Motivation . . . . .	26
1.4.2	Choix des coordonnées et forme des équations . . . . .	26
1.4.3	Intégrale première . . . . .	26
1.4.4	Méthodes spectrales multi-domaines . . . . .	28
1.5	Développements ultérieurs . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Équations pour le cas non circulaire</b>	<b>55</b>
2.1	Introduction . . . . .	55
2.2	Formalisme (2+1)+1 . . . . .	55
2.3	Coordonnées MTCMA . . . . .	56
2.4	Développements ultérieurs . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Théorème du viriel relativiste (GRV3)</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	77
3.2	Notre dérivation de 1994 [A3] . . . . .	78
3.3	Développements ultérieurs . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Identité du viriel à deux dimensions (GRV2)</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction . . . . .	91
4.2	L'identité relativiste GRV2 [A4] . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Modèles numériques d'étoiles à neutrons en rotation</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Notre article de 1994 [A5] . . . . .	103
5.3	Développements ultérieurs . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Comparaison de trois méthodes numériques pour calculer les configurations d'équilibre des étoiles relativistes en rotation</b>	<b>121</b>
6.1	Introduction . . . . .	121
6.2	Comparaison détaillée de trois codes . . . . .	121
6.3	Interpolation thermodynamiquement cohérente des équations d'état tabulées . . . . .	122

6.4	Importance d'intégrer dans tout l'espace . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Étoiles à neutrons magnétisées</b>	<b>147</b>
7.1	Les magnétars . . . . .	147
7.2	Notre article de 1995 [A7] . . . . .	147
7.3	Développements ultérieurs . . . . .	148
<b>II</b>	<b>Étoiles de quarks étranges</b>	<b>149</b>
<b>8</b>	<b>Étoiles de quarks étranges en rotation</b>	<b>175</b>
8.1	Études antérieures à 1999 . . . . .	175
8.2	Notre travail de 1998-1999 [A8] . . . . .	175
8.3	Équation d'état du "sac MIT" . . . . .	176
8.4	Principaux résultats . . . . .	177
8.5	Développements ultérieurs . . . . .	178
<b>9</b>	<b>Étoiles de quarks étranges très compactes</b>	<b>191</b>
9.1	L'équation d'état de Dey et al. . . . .	191
9.2	Notre étude [A9] . . . . .	192
<b>10</b>	<b>Peut on mettre en évidence les étoiles de quarks étranges par l'observation des binaires X ?</b>	<b>201</b>
10.1	Les binaires X . . . . .	201
10.2	Les observations du satellite RXTE . . . . .	201
10.3	Oscillations quasi-périodiques dans les binaires X de faible masse . . . . .	202
10.4	Dernière orbite stable autour des étoiles relativistes . . . . .	203
10.4.1	Cas de la métrique de Schwarzschild . . . . .	203
10.4.2	Cas des étoiles en rotation . . . . .	204
10.5	Notre étude pour les étoiles de quarks étranges [A10] . . . . .	205
10.6	Développements ultérieurs . . . . .	206
<b>11</b>	<b>Stabilité des orbites autour des corps newtoniens en rotation rapide</b>	<b>215</b>
11.1	Étoiles étranges de faible masse et corps newtoniens . . . . .	215
11.2	Notre étude de la dernière orbite stable en régime newtonien [A11] . . . . .	215
11.3	Développements ultérieurs . . . . .	216
<b>12</b>	<b>Fréquences minimales de la dernière orbite stable autour des étoiles de quarks étranges</b>	<b>221</b>
12.1	Notre article [A12] . . . . .	221
12.2	Développements ultérieurs . . . . .	222
<b>13</b>	<b>Écorce de matière "ordinaire" autour des étoiles de quarks étranges</b>	<b>231</b>
13.1	L'écorce solide . . . . .	231
13.1.1	Possibilité d'une écorce . . . . .	231
13.1.2	Comparaison avec l'écorce des étoiles à neutrons . . . . .	231
13.1.3	Formation d'une écorce . . . . .	232
13.1.4	Alternatives théoriques prédisant une absence d'écorce . . . . .	232

13.1.5	Le problème des glitches . . . . .	232
13.2	Études antérieures des propriétés de l'écorce . . . . .	233
13.3	Notre étude [A13] . . . . .	233
<b>14</b>	<b>Évolution des étoiles de quarks étranges en accréation</b>	<b>245</b>
14.1	Accréation dans les binaires X et formation des pulsars milliseconde . . . . .	245
14.2	Notre étude [A14] . . . . .	245
<b>III</b>	<b>Émission d'ondes gravitationnelles par les étoiles à neutrons en rotation</b>	<b>247</b>
<b>15</b>	<b>Émission gravitationnelle par les étoiles à neutrons magnétisées (pulsars)</b>	<b>261</b>
15.1	Émission gravitationnelle des pulsars . . . . .	261
15.2	Notre article de 1996 [A15] . . . . .	262
15.3	Développements ultérieurs . . . . .	264
<b>16</b>	<b>Fond d'ondes gravitationnelles de l'ensemble des étoiles à neutrons de la Galaxie</b>	<b>283</b>
16.1	Détection du signal gravitationnel des étoiles à neutrons . . . . .	283
16.2	Notre étude de 1997 [A16] . . . . .	284
16.3	Développements ultérieurs . . . . .	285
<b>17</b>	<b>Brisure de symétrie des étoiles à neutrons en rotation rapide</b>	<b>297</b>
17.1	Introduction . . . . .	297
17.2	Mécanismes de l'instabilité triaxiale séculaire . . . . .	297
17.2.1	Énergie et moment d'inertie . . . . .	297
17.2.2	Évolution à moment cinétique constant : instabilité induite par la viscosité	298
17.2.3	Évolution à circulation constante : instabilité Chandrasekhar-Friedman-Schutz . . . . .	300
17.2.4	Caractère séculaire de l'instabilité . . . . .	300
17.2.5	Stabilisation par l'effet combiné de la viscosité et du rayonnement gravitationnel . . . . .	301
17.3	L'instabilité séculaire triaxiale dans les étoiles à neutrons . . . . .	302
17.4	Notre étude de 1996 [A17] . . . . .	304
17.4.1	Cadre de l'étude . . . . .	304
17.4.2	Symétrie hélicoïdale . . . . .	304
17.4.3	Méthode employée . . . . .	304
17.4.4	Résultats . . . . .	305
17.5	Développements ultérieurs . . . . .	305
<b>18</b>	<b>Amélioration de l'approximation dans le traitement relativiste de l'instabilité triaxiale de type Jacobi</b>	<b>319</b>
18.1	Notre article [A18] . . . . .	319
18.2	Développements ultérieurs . . . . .	319

<b>19</b>	<b>Instabilité triaxiale séculaire pour des fluides incompressibles</b>	<b>333</b>
19.1	Introduction . . . . .	333
19.2	Notre article [A19] . . . . .	333
<b>IV</b>	<b>Systèmes binaires d'étoiles à neutrons</b>	<b>335</b>
<b>20</b>	<b>Systèmes binaires relativistes en rotation non-synchrone</b>	<b>355</b>
20.1	État de rotation des systèmes binaires serrés d'étoiles à neutrons . . . . .	355
20.2	Symétrie hélicoïdale . . . . .	356
20.3	Notre étude de 1997 [A20] . . . . .	356
20.4	Développements ultérieurs . . . . .	358
20.4.1	Une petite correction . . . . .	358
20.4.2	Une grosse amélioration . . . . .	358
20.4.3	Une plus jolie définition . . . . .	358
<b>21</b>	<b>Méthode et code numérique pour les étoiles binaires relativistes</b>	<b>371</b>
21.1	Introduction . . . . .	371
21.2	Formulation analytique du problème . . . . .	371
21.2.1	Hydrodynamique . . . . .	371
21.2.2	Équations d'Einstein dans l'approximation d'Isenberg-Wilson-Mathews . . . . .	372
21.3	Le code numérique et ses tests . . . . .	373
21.4	Développements ultérieurs . . . . .	374
<b>22</b>	<b>Étoiles binaires en régime newtonien : cas des masses identiques</b>	<b>403</b>
22.1	Introduction . . . . .	403
22.2	Notre étude de 2001 [A22] . . . . .	403
22.2.1	Régularisation du champ de densité . . . . .	403
22.2.2	Séquences à masse constante . . . . .	404
22.2.3	Résultats . . . . .	404
<b>23</b>	<b>Étoiles binaires en régime newtonien : cas des masses différentes</b>	<b>427</b>
23.1	Introduction . . . . .	427
23.2	Notre étude [A23] . . . . .	427
<b>24</b>	<b>Les étoiles à neutrons binaires s'effondrent-elles en trou noir avant de fusionner ?</b>	<b>445</b>
24.1	Les résultats surprenants de Wilson & Mathews . . . . .	445
24.2	La réponse de la communauté . . . . .	445
24.3	Notre étude de 1999 [A24] . . . . .	446
24.4	Développements ultérieurs . . . . .	447
<b>25</b>	<b>Systèmes binaires relativistes de masses différentes</b>	<b>453</b>
25.1	Introduction . . . . .	453
25.2	Notre article de 2002 [A25] . . . . .	453
25.3	Développements ultérieurs . . . . .	454

<b>V</b>	<b>Systèmes binaires de trous noirs</b>	<b>455</b>
<b>26</b>	<b>Une nouvelle formulation pour traiter des trous noirs binaires</b>	<b>471</b>
26.1	Travaux antérieurs à notre étude . . . . .	471
26.2	Notre traitement du problème [A26] . . . . .	473
26.3	Développements ultérieurs . . . . .	474
<b>27</b>	<b>Résultats numériques pour les trous noirs binaires en orbite circulaire</b>	<b>495</b>
27.1	Travaux antérieurs . . . . .	495
27.2	Notre étude [A27] . . . . .	495
27.3	Développements ultérieurs . . . . .	497
<b>28</b>	<b>Comparaison avec les résultats post-newtoniens</b>	<b>517</b>
28.1	Les différentes approches post-newtoniennes . . . . .	517
28.2	Notre étude [A28] . . . . .	517
28.3	Importance de la courbure extrinsèque dans les configurations de quasi-équilibre	518
<b>VI</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>521</b>
<b>29</b>	<b>Méthode spectrale multi-domaine</b>	<b>541</b>
29.1	Méthodes de décomposition de domaine . . . . .	541
29.2	Notre technique [A29] . . . . .	541
<b>30</b>	<b>Résolution des équations de Poisson scalaires et vectorielles</b>	<b>559</b>
30.1	Introduction . . . . .	559
30.2	Notre technique [A30] . . . . .	559
30.3	Développements ultérieurs . . . . .	560
<b>31</b>	<b>LORENE</b>	<b>591</b>
31.1	Introduction . . . . .	591
31.2	Structure de LORENE . . . . .	592
31.2.1	Les classes . . . . .	592
31.2.2	Encapsulation des données . . . . .	592
31.2.3	Gestion des objets constants . . . . .	593
31.2.4	Construction des objets . . . . .	593
31.2.5	État des objets et gestion de la mémoire . . . . .	593
31.3	Processus de développement de LORENE . . . . .	594
31.4	Résultats obtenus à l'aide de LORENE . . . . .	594
<b>VII</b>	<b>Perspectives</b>	<b>597</b>



# Introduction

Les travaux présentés ici sont des études théoriques motivées essentiellement par la construction du détecteur d'ondes gravitationnelles VIRGO, et de ses pendants américain LIGO, germano-britannique GEO600 et japonais TAMA, ainsi que par le projet spatial américano-européen LISA. Une deuxième motivation est l'interprétation des données X et gamma des nombreux satellites actuellement en orbite : Rossi XTE, Chandra, XMM-Newton et Integral, ou en projet : GLAST (lancement prévu en 2006), XEUS (lancement vers 2010).

Les sources principales de rayonnement gravitationnel mettant en œuvre des étoiles à neutrons ou des trous noirs, c'est essentiellement de ces deux types d'objets astrophysiques dont il sera question dans ces pages.

## Étoiles à neutrons et étoiles de quarks

Les étoiles à neutrons sont des astres compacts : leur taille est celle d'une ville comme Paris (intra-muros), mais leur masse est de l'ordre de celle d'une étoile comme le Soleil. Il s'en suit une densité énorme : égale ou même supérieure à celle d'un noyau atomique ( $\rho_{\text{nuc}} = 2 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ ). Plus généralement, on définit un *objet compact* comme un corps auto-gravitant pour lequel l'énergie potentielle gravitationnelle  $E_{\text{grav}}$  constitue une fraction non négligeable de son énergie de masse  $Mc^2$ . On forme ainsi le rapport

$$\Xi := \frac{|E_{\text{grav}}|}{Mc^2} \sim \frac{GM}{Rc^2} \sim \frac{|\Phi_{\text{surf}}|}{c^2}, \quad (1)$$

où  $R$  est le rayon moyen de l'objet et  $\Phi_{\text{surf}}$  le potentiel gravitationnel (newtonien) à sa surface. Pour la Terre ce rapport vaut  $10^{-10}$ , pour une étoile de type solaire  $10^{-6}$ , pour une naine blanche  $10^{-3}$  et pour une étoile à neutrons 0.2.

La grande valeur de  $\Xi$  signifie qu'il faut utiliser la théorie relativiste de la gravitation, c'est-à-dire la *relativité générale*, pour décrire correctement le champ gravitationnel des objets compacts. C'est pourquoi tous les travaux présentés dans ce mémoire d'habilitation se situent dans le cadre relativiste.

Les étoiles à neutrons sont les astres "réguliers" (c'est-à-dire pour lesquels l'espace-temps ne possède pas de singularité comme pour un trou noir) les plus relativistes. Elles ont notamment permis de tester la relativité générale *en champ fort* (ce qui n'avait pas été le cas des tests "historiques" effectués dans le système solaire). Réciproquement, la théorie de la relativité générale a permis de mesurer des masses d'étoiles à neutrons a mieux que  $10^{-3}$  près [206], ce qui constitue un record pour des objets hors du système solaire.

L'étoile à neutrons constitue le stade final de l'évolution des étoiles massives, de masse comprise entre une dizaine et une vingtaine de masse solaires (au delà, le stade final est un trou noir). Ces étoiles massives terminent leur vie brutalement sous forme de supernova. Ce phénomène est

provoqué lorsque le cœur de fer de l'étoile devient trop massif pour être supporté par la pression de dégénérescence des électrons (on dit qu'il a atteint la *masse de Chandrasekhar*). Il s'effondre alors sous l'effet de sa propre gravité. L'effondrement ne s'arrête que lorsque la densité nucléaire est atteinte et que l'interaction forte entre en jeu. Cet arrêt brutal de l'effondrement provoque le rebond des couches externes qui continuent de tomber. La vitesse de l'effondrement étant supersonique, le rebond donne naissance à une onde de choc sortante qui expulse les couches externes de l'étoile et provoque par là une intense émission électromagnétique : c'est le phénomène de *supernova*. Il reste alors que le résidu du cœur de fer qui s'est effondré : l'étoile à neutrons.

La densité de matière au centre des étoiles à neutrons dépasse la densité du noyau de l'atome, de sorte que la pression y est essentiellement fournie par *l'interaction nucléaire forte*. Les étoiles à neutrons sont donc, avec l'univers primordial, le lieu unique d'"observation" de la matière dans un état ultra-dense qui n'est pas reproductible en laboratoire. Les retombées de l'astrophysique vers la physique hadronique, relativement mal connue, sont dans ce cas potentiellement très importantes. Nous examinerons dans la Partie I les modèles théoriques d'étoiles à neutrons que l'on peut construire à partir de diverses équations d'état de la matière nucléaire. Des caractéristiques globales potentiellement observables, comme les masses, rayons et vitesse maximale de rotation y sont calculés. La comparaison avec les données recueillies par les radiotélescopes (pulsars) et les satellites de haute énergie (binaires X) permet de contraindre les modèles de matière ultra-dense. La Partie II est d'ailleurs entièrement dévolue à une alternative à la matière de neutrons, à savoir la matière de quarks. Les étoiles construites suivant ce modèle, qualifiées *d'étoiles de quarks étranges* (en raison de la présence du quark *s*, en plus des quarks *u* et *d* dans cette matière), sont plus compactes que les étoiles à neutrons et nous nous sommes attachés à calculer des caractéristiques qui pourraient les différencier observationnellement des étoiles à neutrons.

## Trous noirs

Un *trou noir* est une région de l'espace-temps causalement déconnectée du reste de l'univers. Autrement dit aucune géodésique de genre lumière (les trajectoires des photons) ne sort d'un trou noir. La frontière (immatérielle) qui sépare le trou noir du reste de l'univers s'appelle *l'horizon des événements*.

C'est le champ gravitationnel, particulièrement intense, qui est responsable de ce comportement. Les trous noirs sont donc les plus compacts des objets compacts et on ne peut les décrire correctement qu'en utilisant la relativité générale.

Par essence même un trou noir est inobservable. On ne peut espérer le détecter que par ses effets sur son environnement immédiat. C'est l'astre sur lequel l'accrétion de matière est susceptible de libérer le plus d'énergie. L'accrétion sur un trou noir en rotation peut dégager jusqu'à 42% de l'énergie de masse de la matière accrétée. Cela explique pourquoi dès la découverte des quasars, au début des années 1960, les trous noirs furent invoqués pour expliquer l'incroyable source d'énergie de ces objets. A partir de 1970, le développement de l'astronomie X allait fournir les preuves observationnelles de l'existence des trous noirs. Le premier candidat trou noir clairement identifié fut Cyg X-1 en 1972. Ce fut le seul pendant toute une décennie.

Aujourd'hui, les trous noirs font partie intégrante du bestiaire de l'astrophysique. On distingue deux classes de trous noirs :

- les **trous noirs stellaires**, qui sont des restes d'étoiles massives, après l'explosion en supernova ; leur masse varie entre la masse maximale des étoiles à neutrons ( $\sim 3 M_{\odot}$ ) et une ou deux dizaines de masses solaire ; on en connaît aujourd'hui une bonne douzaine.

- les **trous noirs massifs** dans les noyaux de galaxies : leur masse varie entre  $\sim 10^5$  et  $10^9 M_\odot$ . On en a identifié dans de nombreuses galaxies, dont la nôtre.

Tous les trous noirs stellaires identifiés sont dans des binaires X [198, 220]. L'objet compact accrétant dans une binaire X peut être soit une étoile à neutrons, soit un trou noir. L'argument principal d'identification d'un trou noir est la détermination d'une borne inférieure de la masse de l'objet compact qui soit supérieure à la masse maximale des étoiles à neutrons.

## Rayonnement gravitationnel

Le rayonnement électromagnétique a été le vecteur d'information quasi-exclusif de l'astronomie du XXème siècle. Quelques exceptions sont constituées par les rayons cosmiques, les échantillons minéraux issus de l'exploration spatiale et les neutrinos (en provenance du Soleil et de la supernova 1987A). Or le XXIème siècle va voir l'émergence d'un nouveau vecteur d'information : *le rayonnement gravitationnel*. Il s'agit-là d'un vecteur que l'on peut qualifier d'"orthogonal" au rayonnement électromagnétique, car les phénomènes astrophysiques qui émettent des ondes gravitationnelles en grande quantité n'émettent pas ou peu dans le domaine électromagnétique et réciproquement.

Les ondes gravitationnelles ont été prédites par Einstein en 1916 comme conséquences naturelles de sa théorie de la relativité générale. Dans cette dernière, l'espace-temps possède une dynamique propre, dictée par son contenu en matière. Toute accélération de matière comprenant une composante au moins quadrupolaire engendre des perturbations de l'espace-temps qui se propagent à la vitesse de la lumière, tout comme les ondes électromagnétiques résultent de l'accélération de charges électriques. Une différence est que les ondes électromagnétiques sont des oscillations du champ électromagnétique qui se propagent *à travers* l'espace-temps alors que les ondes gravitationnelles sont des oscillations de l'espace-temps *lui-même*. En termes naïfs, ce dernier point signifie que l'écoulement du temps et la mesure des distances sont modifiés au passage d'une onde gravitationnelle. Ainsi la distance  $L$  entre deux particules, mesurée par le temps d'aller-retour d'un faisceau lumineux, varie comme

$$\Delta L \approx h L , \quad (2)$$

où  $h$  est *l'amplitude* de l'onde gravitationnelle. Bien entendu, l'effet est extrêmement petit, si bien que nos sens ne le perçoivent jamais. Même à l'aide de dispositifs expérimentaux, aucune onde gravitationnelle n'a été détectée à ce jour. On peut voir facilement qu'aucune expérience du type de celle de Hertz pour la mise en évidence des ondes électromagnétiques ne peut générer d'ondes gravitationnelles détectables en laboratoire. Il n'en va pas de même pour les sources astrophysiques. L'amplitude estimée de leur rayonnement gravitationnel se situe au dessus du seuil de détectabilité des détecteurs actuellement en cours de construction ou en projet. Ceci marque le début de l'astronomie "gravitationnelle".

La luminosité gravitationnelle d'un objet animé de vitesses internes de l'ordre de  $v$  est de l'ordre de

$$L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \Xi^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 , \quad (3)$$

où  $s$  est un facteur d'asymétrie :  $s = 0$  pour un objet à symétrie sphérique.

Ainsi, pourvu qu'ils soient suffisamment asymétriques ( $s \sim 1$ ) et sièges de mouvements rapides ( $v \sim c$ ), les objets compacts ( $\Xi \sim 1$ ) peuvent rayonner une puissance fantastique sous

forme d'ondes gravitationnelles :  $L \sim c^5/G = 3.6 \times 10^{52}$  W, soit  $10^{26}$  fois la luminosité du Soleil dans le domaine électromagnétique !

Dans la Partie III, nous examinons divers mécanismes par lesquels une étoile à neutrons isolée en rotation peut émettre des ondes gravitationnelles. La Partie IV est ensuite consacrée aux étoiles à neutrons en système binaire, qui sont l'une des sources d'ondes gravitationnelles les plus attendues. La Partie V est quant à elle dévolue aux trous noirs binaires. La coalescence de deux trous noirs stellaires pourrait être observée par VIRGO avant celle de deux étoiles à neutrons et celle de deux trous noirs massifs constitue la source principale pour LISA. La Partie VI présente quelques développements numériques, qui ont permis d'obtenir les résultats présentés dans ce mémoire d'habilitation. Enfin la Partie VII discute des projets de recherche futurs.

Première partie

Étoiles à neutrons en rotation rapide



## Contexte astrophysique

Les étoiles à neutrons sont observées sous trois formes :

- **pulsar** : émission radio périodique, à la période de rotation de l'étoile à neutrons, provoquée par le non-alignement de l'axe de rotation et de l'axe du champ magnétique. On connaît environ 1500 pulsars, dont les périodes de rotations vont de  $P = 1.56$  ms à 8.5 s, avec une médiane de  $\sim 0.6$ s. 73 pulsars appartiennent à un système binaire (6 d'entre eux ont certainement une autre étoile à neutrons comme compagnon) et 90 sont des pulsars milliseconde ( $P < 10$  ms). Tous les pulsars connus appartiennent à notre Galaxie, sauf 7 qui se trouvent dans les Nuages de Magellan.
- **binaire X** : émission de rayons X par le gaz chauffé dans le disque d'accrétion autour d'une étoile à neutrons dans un système binaire serré (le compagnon donneur de matière est une étoile "ordinaire"). On connaît une centaine de binaires X. Dans certains cas (*pulsars X*), on observe une périodicité de l'émission, que l'on interprète comme la période de rotation ; les périodes mesurées vont de 1.7 ms (4U 1636-53 [268]) à 14 min.
- **émission de surface** : dans quelques cas d'étoiles à neutrons proches du système solaire (distance de l'ordre de 100 pc), on détecte en optique et en X le rayonnement de la surface, qui peut être soit directement le rayonnement thermique de l'étoile à neutrons, soit celui de la matière du milieu interstellaire accrétée par l'étoile.

## Cadre théorique : espaces-temps axisymétriques et stationnaires

Ainsi qu'il a été rappelé en introduction, les étoiles à neutrons sont des astres très relativistes, presque autant que les trous noirs, leur paramètre de relativité  $\Xi$  défini par l'Eq. (1), page 15, valant  $\sim 0.2$ , contre  $\sim 1$  pour un trou noir. C'est pourquoi, dans toute notre étude du sujet, nous avons choisi pour cadre la relativité générale, et non par exemple l'approximation post-newtonienne de cette dernière. Le premier ordre post-newtonien ne suffit en effet pas du tout à rendre compte des propriétés des étoiles à neutrons. Il faudrait aller au moins jusqu'à l'ordre deux, voire trois : l'erreur dans le champ de pression d'une étoile homogène de compacité  $\Xi = 0.2$  est encore de 8% à l'ordre 2 post-newtonien [41]. Mais les équations d'ordre post-newtonien élevé sont très compliquées, plus compliquées en fait que les équations de la relativité générale elle-même.

Comme nous nous intéressons aux configurations d'équilibre des étoiles à neutrons en rotation, nous ne considérerons dans cette partie que des espaces-temps axisymétriques et stationnaires. Nous détaillerons quelque peu cela au § 1.1.

La matière qui constitue les étoiles à neutrons sera toujours représentée par un *fluide parfait*, pour lequel le tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$\mathbf{T} = (e + p)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{g} , \quad (4)$$

où  $\mathbf{u}$  désigne la 4-vitesse du fluide,  $\mathbf{g}$  le tenseur métrique de l'espace-temps,  $e$  la densité d'énergie propre du fluide (i.e. mesurée dans le référentiel du fluide) et  $p$  sa pression.

De plus, nous ne nous intéressons qu'à des étoiles à neutrons froides, c'est-à-dire dont la température est bien inférieure à la température de Fermi des nucléons qui la composent (c'est le cas de toutes les étoiles à neutrons hormis au moment de leur formation). L'équation d'état ne dépend alors que d'un paramètre, que l'on peut choisir être la densité numérique de bayons

propre  $n$  :

$$e = e(n) \tag{5}$$

$$p = p(n) . \tag{6}$$

# Chapitre 1

## Équations et méthode numérique pour le cas circulaire

### 1.1 Symétries et vecteurs de Killing

Pour décrire les étoiles à neutrons en rotation, il est naturel de se placer dans le cadre d'un espace-temps qui possède deux symétries : une symétrie temporelle : la *stationnarité* et une spatiale : l'*axisymétrie*. Chacune de ces symétries peut être décrite par l'action d'un groupe (de Lie) à un paramètre :  $(\mathbb{R}, +)$  pour la stationnarité et  $SO(2)$  pour l'axisymétrie. L'espace-temps est alors invariant le long des orbites de ces groupes. On appelle *vecteur de Killing* tout vecteur générateur d'un groupe de symétrie. En particulier, un vecteur de Killing est tangent aux orbites (qui sont des courbes unidimensionnelles) du groupe de symétrie. Dans le cas présent, il y a donc deux champs de vecteurs de Killing, à des facteurs de normalisation près : le champ  $\mathbf{k}$  associé à la stationnarité et le champ  $\mathbf{m}$  associé à l'axisymétrie.

Carter [89] a montré que, sous les hypothèses d'espace-temps asymptotiquement plat et de l'existence d'un axe où  $\mathbf{m}$  s'annule, les deux vecteurs de Killing  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{m}$  commutent. On peut alors trouver un système de coordonnées  $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$  tel que

$$\mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (1.1)$$

Les coordonnées  $t$  et  $\varphi$  associées aux vecteurs de Killing  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{m}$  sont ainsi des coordonnées *ignorables*. Autrement dit, les composantes du tenseur métrique s'écrivent

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(r, \theta). \quad (1.2)$$

On se ramène ainsi à un problème à deux dimensions.

### 1.2 Espace-temps circulaires

Les deux hypothèses de stationnarité et d'axisymétrie permettent de dire que les composantes  $g_{\alpha\beta}$  du tenseur métrique ne dépendent que des deux variables  $r$  et  $\theta$ , mais ne permettent pas, à elles seules, d'annuler certaines composantes, ce qui simplifierait grandement le problème.

L'hypothèse supplémentaire qu'il faut imposer pour arriver à cette fin est celle de la *circularité* du tenseur énergie-impulsion  $\mathbf{T}$ , autrement dit de l'absence de mouvement dans les plans

méridiens  $(t, \varphi) = \text{const}$  (convection). Pour un fluide parfait, cela signifie que la 4-vitesse du fluide est une combinaison linéaire de  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{m}$ . Le théorème de Papapetrou généralisé stipule en effet que dans le cas circulaire, il existe une famille de 2-surfaces  $S$  orthogonales aux orbites du groupe de symétrie  $\mathbb{R} \times \text{SO}(2)$ , c'est-à-dire aux 2-surfaces tangentes à  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{m}$ . Il est alors judicieux de choisir les coordonnées  $r$  et  $\theta$  dans les 2-surfaces  $S$ , ce qui revient à annuler les composantes  $g_{tr}$ ,  $g_{t\theta}$ ,  $g_{r\varphi}$  et  $g_{\theta\varphi}$  du tenseur métrique (condition d'orthogonalité). Comme de plus on peut toujours dans la 2-surface  $S$  choisir (au moins localement) les coordonnées  $(r, \theta)$  telles que  $g_{r\theta} = 0$  et  $g_{\theta\theta} = r^2 g_{rr}$  (coordonnées *quasi-isotropes*), on peut mettre les composantes du tenseur métrique sous la forme

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + B^2 r^2 \sin^2 \theta (d\varphi - N^\varphi dt)^2 + A^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (1.3)$$

où  $N$ ,  $N^\varphi$ ,  $A$  et  $B$  sont quatre fonctions de  $(r, \theta)$ . Ce théorème a été démontré en 1966 par Papapetrou [226] pour le cas des espaces-temps vides. Il a été ensuite généralisé au cas avec matière par Kundt & Trümper [193] et au cas matière + champ électromagnétique par Carter [88]. La limite newtonienne correspond aux valeurs suivantes des potentiels métriques :  $A \sim 1$ ,  $B \sim 1$ ,  $N^\varphi \sim 0$  et  $N \sim 1 + \Phi/c^2$ , où  $\Phi < 0$  est le potentiel gravitationnel newtonien (normalisé par  $\Phi = 0$  à l'infini).

Ainsi, dans le cas stationnaire, axisymétrique et circulaire, les équations d'Einstein se trouvent ramenées d'un système de 10 EDP à 4 variables à un système de 4 EDP à 2 variables. La simplification est donc considérable ! Explicitement, lorsque la matière est modélisée par un fluide parfait, ces quatre EDP s'écrivent

$$\Delta_3 \nu = 4\pi A^2 (E + 3p + (E + p)U^2) + \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N^2} (\partial N^\varphi)^2 - \partial \nu \partial (\nu + \beta) \quad (1.4)$$

$$\tilde{\Delta}_3 (N^\varphi r \sin \theta) = -16\pi \frac{NA^2}{B} (E + p)U - r \sin \theta \partial N^\varphi \partial (3\beta - \nu) \quad (1.5)$$

$$\Delta_2 [(NB - 1)r \sin \theta] = 16\pi NA^2 B p r \sin \theta \quad (1.6)$$

$$\Delta_2 \zeta = 8\pi A^2 [p + (E + p)U^2] + \frac{3B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} (\partial N^\varphi)^2 - (\partial \nu)^2, \quad (1.7)$$

où l'on a introduit les abréviations suivantes :

$$\nu := \ln N, \quad \zeta := \ln(AN), \quad \beta := \ln B, \quad (1.8)$$

$$\Delta_2 := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.9)$$

$$\Delta_3 := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1.10)$$

$$\tilde{\Delta}_3 := \Delta_3 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (1.11)$$

$$\partial_a \partial_b := \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial b}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial a}{\partial \theta} \frac{\partial b}{\partial \theta}. \quad (1.12)$$

Dans ces équations,  $U$  et  $E$  sont respectivement la 3-vitesse du fluide et la densité d'énergie, toutes deux mesurées par l'observateur localement sans rotation :  $U = Br \sin \theta (\Omega - N^\varphi)/N$ ,  $E = \Gamma^2(\epsilon + p) - p$ ,  $\Gamma = (1 - U^2)^{-1/2}$ ,  $\epsilon$  étant la densité d'énergie propre du fluide et  $p$  sa pression.

A la limite newtonienne, les équations (1.5) à (1.7) se réduisent à “0=0”. Il ne reste donc que l’équation (1.4) qui se réduit à l’équation de Poisson

$$\Delta_3 \nu = 4\pi\rho, \quad (1.13)$$

$\nu$  se réduisant au potentiel newtonien  $\Phi$  et  $E/c^2$  à la densité de masse  $\rho$ .

D’un point de vue mathématique, le système (1.4)-(1.7) est un système de 4 EDP non-linéaires elliptiques. Le problème de l’existence de solutions globales décrivant une étoile, c’est-à-dire un espace-temps asymptotiquement plat et ne contenant de la matière que dans une région compacte, a été abordé récemment par Schaudt & Pfister [248, 232]. La solution de ce problème n’est pas encore complète. Mais il est à noter que l’existence d’étoiles en rotation *lente* en relativité générale a été établie par Heilig en 1995 [163]. Cette démonstration ne repose pas sur le système (1.4)-(1.7), contrairement à l’approche de Schaudt & Pfister.

### 1.3 Un petit historique des travaux antérieurs à 1993

Les premiers modèles d’étoiles à neutrons en rotation ont été obtenus en 1968 par Hartle & Thorne [161], dans le cadre de l’approximation de rotation lente introduite un an auparavant par Hartle [159]. Des modèles similaires ont été obtenus parallèlement en 1971 par Arutyunyan, Sedrakian & Chubaryan (1971) [39] suivant une formulation de la rotation lente développée par Sedrakian & Chubaryan en 1968 [251]. Les approximations d’Hartle et de Sedrakian & Chubaryan consistent à négliger les termes en  $\Omega$  d’ordre supérieur à  $\Omega^2$ . Le problème se réduit alors à résoudre des équations différentielles ordinaires (variable  $r$ ) [par opposition aux équations aux dérivées partielles en  $(r, \theta)$  du système (1.4)-(1.7)], car on peut effectuer un développement en  $\theta$  jusqu’à  $\ell = 2$  ( $\ell =$  indice des harmoniques sphériques).

Les premiers modèles d’étoiles à neutrons en rotation rapide, tenant compte de tous les termes en  $\Omega$ , ont été obtenus par Wilson en 1972 [288]. Ils étaient basés sur une formulation introduite par Bardeen & Wagoner [45], qui ont mis les équations d’Einstein sous la forme (1.4)-(1.6). Par contre ils n’ont pas utilisé (1.7), mais une équation du premier ordre plus compliquée pour  $\zeta$ . Les calculs de Wilson supposaient une équation d’état polytropicque  $\gamma = 4/3$  et une rotation différentielle.

Les premiers calculs basés sur la rotation rigide et sur une équation d’état explicite (en l’occurrence un gaz parfait de Fermi de neutrons) ont été effectués en 1974 par Bonazzola & Schneider [74]. Le système d’équations résolu était celui dérivé par Bonazzola & Maschio (1971) [73], à savoir un système de 4 équations elliptiques, similaires à (1.4)-(1.7), excepté l’utilisation du logarithme de  $g_{tt}$  comme variable, plutôt que celui de la fonction lapse  $N$  dans (1.4). Ceci avait pour conséquence d’interdire l’existence d’ergorégions, pour lesquelles  $g_{tt} < 0$ .

Après ces travaux de pionniers, les étoiles à neutrons en rotation rapide ont été étudiées avec par Butterworth & Ipser en 1976 [83], avec un code numérique construit sur la formulation de Bardeen & Wagoner [45]. En 1986, Friedman, Ipser et Parker [132, 133] ont utilisé le code de Butterworth & Ipser pour obtenir des modèles basés sur les meilleures équations d’état de l’époque.

Un nouveau code a été mis au point en 1989 par Komatsu, Eriguchi & Hachisu [188], toujours basé sur la formulation de Bardeen & Wagoner. Ce code a été utilisé par ses auteurs pour obtenir des polytropes en rotation différentielle [189].

Enfin, en 1992, Cook, Shapiro et Teukolsky [103] ont modifié le schéma de Komatsu et al. en introduisant la variable radiale  $s := r/(r + r_{\text{eq}})$ , où  $r_{\text{eq}}$  désigne le rayon équatorial de l’étoile.

L'utilisation de  $s$  plutôt que  $r$  permet de couvrir tout l'espace et d'imposer des conditions au contour exactes à l'infini spatial.

## 1.4 Notre article de 1993 [A1]

### 1.4.1 Motivation

En 1992, Silvano Bonazzola, Marcelo Salgado (thésitif dans notre groupe de 1991 à 1994), Jean-Alain Marck et moi nous sommes lancés dans un projet de calcul d'étoiles relativistes en rotation rapide. La motivation initiale était d'obtenir de bonnes conditions initiales pour étudier l'effondrement gravitationnel d'une étoile à neutrons en rotation en trou noir. Il s'agissait là d'un développement naturel de ma thèse [1], consacrée à l'effondrement gravitationnel sans rotation. A cette époque, la seule étude d'effondrement gravitationnel 2-D en rotation — celle de Stark & Piran en 1985 [264] — reposait sur des conditions initiales inconsistantes (étoiles sphériques auxquelles on superposait une vitesse de rotation ad hoc). Il s'agissait donc d'aller au delà. Mais ce qui n'aurait dû être qu'une étape (les conditions initiales) dans un projet plus vaste (l'effondrement 2-D axisymétrique en trou noir et les ondes gravitationnelles qui en résultent) s'est révélé tellement riche qu'il est devenu un sujet d'étude en soi dans notre groupe.

### 1.4.2 Choix des coordonnées et forme des équations

Dans le tout premier article [A1] de cette série de travaux, nous exposons pour la première fois le système (1.4)-(1.7)<sup>1</sup>. Rappelons que les deux systèmes précédents, celui de Bonazzola & Maschio [73] et celui de Bardeen & Wagoner [45], diffèrent de (1.4)-(1.7) par respectivement l'utilisation de  $\ln g_{tt}$  plutôt que  $\nu = \ln N$  (Bonazzola & Maschio) et une équation du type  $\partial\zeta/\partial\theta = \dots$  plutôt que (1.7) pour  $\zeta$  (Bardeen & Wagoner). Tout comme Bonazzola & Maschio ou Bardeen & Wagoner, nous utilisons des coordonnées *quasi-isotropes*, dans lesquelles la métrique prend la forme (1.3). Il convient de dire qu'au départ, nous avons essayé d'autres coordonnées, à savoir les coordonnées de la jauge radiale utilisée par Stark & Piran [264]. Cette jauge radiale nous semblait naturelle car elle généralisait au cas axisymétrique les coordonnées de Schwarzschild du cas sphérique et se réduisait aux coordonnées de Boyer-Lindquist dans le cas d'un trou noir en rotation (Kerr). Mais nous nous sommes aperçus que, mis à part pour la métrique de Kerr, ces coordonnées sont en général singulières, dans le sens où elles ne peuvent pas couvrir tout l'espace, depuis le centre de l'étoile jusqu'à l'infini asymptotiquement plat. Nous présentons cette pathologie de la jauge radiale dans l'annexe A de l'article [A1].

### 1.4.3 Intégrale première

Dans cet article, nous donnons également une intégrale première de l'équation du mouvement dans les cas où l'étoile est constituée (i) d'un fluide parfait seul ou (ii) d'un fluide parfait conducteur et d'un champ magnétique. Nous avons dérivé ces intégrales premières [Eq. (5.15), (5.16) et (5.30) de [A1]] à partir des équations aux dérivées partielles qui traduisent  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  en coordonnées quasi-isotropes. Il s'agissait d'une démarche un peu "pédestre". Depuis, j'ai donné une dérivation entièrement covariante de l'intégrale première (5.15) (fluide parfait en rotation rigide) dans [12]. Mais la démonstration la plus élégante de l'intégrale première est sans

<sup>1</sup>avec une notation différente pour les potentiels métriques

aucun doute celle basée sur le calcul extérieur et la formulation de Carter-Lichnerowicz [91, 201] des équations du mouvement d'un fluide parfait relativiste :

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}) = 0 , \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{w}$  désigne la 1-forme de co-impulsion :

$$\mathbf{w} := h \mathbf{u} , \quad (1.15)$$

$h$  étant l'enthalpie spécifique du fluide :

$$h := \frac{e + p}{m_B n} , \quad (1.16)$$

et  $\nabla \wedge \mathbf{w}$  la dérivée extérieure de  $\mathbf{w}$ , c'est-à-dire la 2-forme de vorticité [201]. En fonction des composantes, on a

$$(\nabla \wedge \mathbf{w})_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha w_\beta - \nabla_\beta w_\alpha = \partial_\alpha w_\beta - \partial_\beta w_\alpha . \quad (1.17)$$

Il est facile de voir que pour un fluide barotrope, l'équation  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$  est équivalent au système constitu e par l'équation de conservation du nombre baryonique  $\nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0$  et l'équation de Carter-Lichnerowicz (1.14).

La 2-forme de vorticité (1.17) apparaît dans l'identité de Cartan qui exprime la d eriv e de Lie de la 1-forme  $\mathbf{w}$  le long d'un champ de vecteurs  $\ell$  :

$$\mathcal{L}_\ell \mathbf{w} = \ell \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}) + \nabla(\ell \cdot \mathbf{w}) . \quad (1.18)$$

Placons-nous dans le cas de la rotation rigide :  $\Omega = \text{const}$  et choisissons  $\ell$  comme la combinaison linéaire suivante des deux vecteurs de Killing  $\mathbf{k}$  (stationnarité) et  $\mathbf{m}$  (axisymétrie) :

$$\ell = \mathbf{k} + \Omega \mathbf{m} . \quad (1.19)$$

Puisque  $\Omega$  est une constante,  $\ell$  est aussi un vecteur de Killing et l'on a  $\mathcal{L}_\ell \mathbf{w} = 0$ . L'identité de Cartan (1.18) se réduit alors à

$$\ell \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}) + \nabla(\ell \cdot \mathbf{w}) = 0 . \quad (1.20)$$

L'hypothèse de rotation rigide se traduit par la colinéarité de  $\mathbf{u}$  et  $\ell$  :

$$\mathbf{u} = \lambda \ell , \quad (1.21)$$

où  $\lambda$  est un champ scalaire d etermin e par la condition de normalisation de la quadrivitesse :  $\lambda = (-\ell \cdot \ell)^{-1/2}$ . Ces hypothèses et définitions étant mises en place, l'obtention de l'intégrale première est immédiate : en insérant la relation (1.21) dans l'équation de Carter-Lichnerowicz (1.14), on constate que le premier terme de (1.20) est identiquement nul. Il ne reste donc que le second terme, qui est un gradient parfait, de sorte que l'on a l'intégrale première suivante [91] :

$$\ell \cdot \mathbf{w} = \text{const} . \quad (1.22)$$

L'intégrale première (5.15) de [A1] est en fait le logarithme de cette relation, puisque l'on a  $\ell \cdot \mathbf{w} = -h/\lambda$ ,  $H = \ln h$  et  $\lambda = \Gamma/N$ .

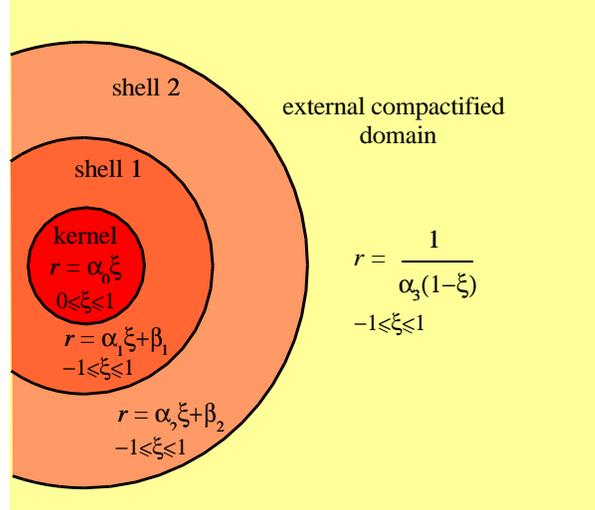


FIG. 1.1 – Domaines sphériques utilisés dans la méthode spectrale multi-domaines

#### 1.4.4 Méthodes spectrales multi-domaines

C’est à l’occasion de cette toute première étude des espaces-temps axisymétriques stationnaires [A1], que nous avons introduit des méthodes spectrales multi-domaines, divisant l’espace suivant le schéma de la Fig. 1.1, à savoir

- un *noyau* sphérique, dans lequel la coordonnée radiale  $r$  (des coordonnées quasi-isotropes données par (1.3) est relié à la coordonnée “numérique”  $\xi$  <sup>(2)</sup> par

$$r = \alpha_0 \xi \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.23)$$

- une ou plusieurs *coquilles*, dans lesquelles

$$r = \alpha_l \xi + \beta_l \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (1.24)$$

- un *domaine externe compactifié*, dans lequel

$$r = \frac{1}{\alpha(1 - \xi)} \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (1.25)$$

L’intérêt principal de cette méthode multi-domaines est de couvrir tout l’espace, jusqu’à  $r = +\infty$  ( $\xi = 1$  dans (1.25)). Les équations elliptiques à résoudre (1.4)-(1.7) n’étant pas à support compact, il est nécessaire d’aller jusqu’à l’infini pour avoir une solution exacte <sup>3</sup>. Il n’y a en effet qu’à l’infini que l’on connaît les conditions au contour à poser sur les système (1.4)-(1.7) :  $\nu = 0$ ,  $N^\varphi = 0$ ,  $NB = 1$  et  $\zeta = 0$ . Avant notre étude, et celle concomitante de Cook, Shapiro & Teukolsky [103] discutée plus haut (§ 1.3), tous les calculs d’étoiles à neutrons étaient faits sur un domaine fini, ce qui engendrait une erreur, qui pouvait être appréciable (de l’ordre du pourcent), ainsi que nous le verrons au Chap. 6.

<sup>2</sup>notée  $x$  dans l’article [A1]

<sup>3</sup>d’où le qualificatif “exact” dans le titre de l’article [A1]

Dans chaque domaine, tous les champs physiques sont développés sur une base de polynômes en  $\xi$ . Dans notre travail, nous utilisons les polynômes de Tchebyshev. Nous décrirons tout ceci plus en détail au Chap. 29.

Dans l'article [A1], nous présentons les tests effectués sur le code numérique. Ainsi la Figure 5 montre l'erreur commise en fonction du nombre  $N_r$  de polynômes de Tchebyshev utilisés pour le cas incompressible à symétrie sphérique. On dispose alors d'une solution analytique des équations d'Einstein : la solution interne et externe de Schwarzschild. La Figure 5 montre que l'erreur numérique décroît exponentiellement avec  $N_r$ . Il s'agit-là d'une erreur dite *évanescence*, typique des méthodes spectrales.

Par contre, dans le cas de la rotation, l'erreur n'est plus évanescence : elle décroît "seulement" comme  $N_r^{-4.5}$  (Figure 7). Cela est dû au fait que la surface de l'étoile ne coïncide plus avec la sphère qui délimite le noyau et la première coquille. Il en résulte une discontinuité dans les dérivées des champs de la matière (à la surface de l'étoile) à l'intérieur d'un domaine de calcul. Les fonctions n'étant donc plus  $C^\infty$ , la précision spectrale est perdue. Notons tout de même qu'une décroissance en  $N_r^{-4.5}$  est meilleure que celle de la plupart des méthodes aux différences finies. Il faudra attendre l'introduction de domaines non-sphériques, dont la forme peut s'adapter à la surface de l'étoile pour retrouver l'erreur évanescence. C'est ce que nous avons fait en 1998, ainsi qu'on le verra au Chap. 29.

En plus des tests présentés dans ce premier article, notre code a été comparé dans le détail avec d'autres codes numériques : c'est l'objet du Chap. 6.

## 1.5 Développements ultérieurs

En 1998, en collaboration avec Richard Livine et Ewa Paluch, j'ai mis au point un nouveau code pour le calcul des configurations d'équilibre des étoiles relativistes en rotation. Contrairement au code de 1993, ce nouveau code utilise des domaines non-sphériques, que l'on peut adapter à la surface de l'étoile. On s'affranchit ainsi du phénomène de Gibbs. La description de ce code fait l'objet des Chap. 8, 29 et 31.

En 2002, M. Ansorg, A. Kleinwaechter & R. Meinel [37] ont mis au point un code également basé sur les méthodes spectrales mais utilisant des coordonnées et des variables très différentes des nôtres (en particulier les coordonnées sont de type cartésiennes  $(x, y)$  et correspondent à une représentation d'une coupe méridienne de l'étoile par un carré). Ce code s'avère extrêmement précis mais est beaucoup plus lent que le nôtre, car les matrices des opérateurs ne peuvent pas être mises à bandes, contrairement aux matrices des opérateurs (1.9)-(1.11) que nous employons. Une comparaison détaillée entre la dernière version de notre code et celui d'Ansorg et al. est donnée par le Tableau I de [A19], pour un corps homogène (fluide incompressible) très relativiste. L'accord est de l'ordre de  $10^{-5}$  à  $10^{-4}$  suivant les quantités.

Enfin un autre axe de développement a concerné la *rotation différentielle*. En 2000 T.W. Baumgarte, S.L. Shapiro & M. Shibata [51] ont calculé des modèles d'étoiles à neutrons polytropiques ( $\gamma = 2$ ) en rotation différentielle. Leur travail a été étendu récemment à différentes valeurs de l'indice adiabatique  $\gamma$  par N.D. Lyford, T.W. Baumgarte & S.L. Shapiro [207]. J'ai également introduit la rotation différentielle dans notre code en 2001, mais sans application pour l'instant.



# Chapitre 2

## Équations pour le cas non circulaire

### 2.1 Introduction

Au Chapitre précédent ont été présentées les équations qui régissent un espace-temps stationnaire, axisymétrique et circulaire. Rappelons que dans le cas d'un fluide parfait, *circulaire* signifie que le mouvement du fluide est purement azimutal (rotation autour de l'axe de symétrie, sans convection). Rappelons également que c'est uniquement dans le cas circulaire que l'on peut annuler globalement les composantes  $g_{tr}$ ,  $g_{t\theta}$ ,  $g_{r\varphi}$  et  $g_{\theta\varphi}$  du tenseur métrique, ce qui simplifie considérablement les équations (cf. § 1.2).

La condition de circularité est violée dans au moins deux cas : (i) le fluide est animé d'un mouvement de convection dans les plans méridiens ; (ii) il existe du champ magnétique avec à la fois des composantes poloïdales et azimutales. C'est surtout cette dernière configuration qui nous a amenés, Silvano Bonazzola et moi, à considérer des espaces-temps non circulaires en 1993. La motivation astrophysique était l'étude des étoiles à neutrons nouvellement formées dans lesquelles le champ magnétique était susceptible d'être extrêmement intense, de l'ordre de  $10^4$  GT <sup>(1)</sup>. La densité d'énergie  $B^2/(2\mu_0)$  associée à de tels champs magnétiques est de l'ordre de  $0.025 \rho_{\text{nuc}} c^2$  <sup>(2)</sup>, c'est-à-dire qu'elle devient comparable à la densité de masse de la matière de neutrons. Autrement dit, le champ magnétique contribue de manière significative à la dynamique de l'espace-temps, comme source des équations d'Einstein. S'il n'est pas purement poloïdal ou purement azimutal, il génère donc un espace-temps non circulaire.

### 2.2 Formalisme (2+1)+1

Notre étude de 1993 [A2] a été la première à formuler le système d'équations aux dérivées partielles qui régissent les espaces-temps stationnaires, axisymétriques et non circulaires. Pour ce faire, nous avons effectué une décomposition (2+1)+1 des équations d'Einstein, dans le même esprit que la décomposition classique 3+1. Étant donné un système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$ , adapté à la stationnarité et à l'axisymétrie, c'est-à-dire tel que les coordonnées  $t$  et  $\varphi$  sont ignorables (cf. § 1.1), les hypersurfaces  $\Sigma_t$  définies par  $t = \text{const}$  constituent un feuilletage de l'espace-temps. C'est le feuilletage usuel du formalisme 3+1. Les surfaces de dimension deux  $\Sigma_{t\varphi}$  définies par  $t = \text{const}$  et  $\varphi = \text{const}$  constituent un feuilletage 2+1 de chaque hypersurface  $\Sigma_t$ . La décomposition orthogonale relative à  $\Sigma_t$  du vecteur de Killing  $\mathbf{k}$  associé à la stationnarité

---

<sup>1</sup>1 gigatesla (GT) =  $10^{13}$  gauss

<sup>2</sup> $\rho_{\text{nuc}} := 1.66 \times 10^{17}$  kg m<sup>-3</sup> désigne la densité nucléaire

(cf. Eq. (1.1)) définit la fonction lapse  $N$  et le vecteur shift  $\mathbf{N}$  suivant

$$\mathbf{k} = N\mathbf{n} - \mathbf{N} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le 4-vecteur unitaire normal aux hypersurfaces  $\Sigma_t$  et orienté vers le futur. De même la décomposition orthogonale relative à  $\Sigma_{t\varphi}$  du vecteur de Killing  $\mathbf{m}$  associé à l'axisymétrie ( $\mathbf{m}$  est tangent à  $\Sigma_t$ ) définit la fonction scalaire  $M$  et le vecteur  $\mathbf{M}$  suivant

$$\mathbf{m} = M\mathbf{b} - \mathbf{M} \quad \text{avec} \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{M} = 0, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{b}$  désigne le 4-vecteur unitaire normal aux surfaces  $\Sigma_{t\varphi}$  et orienté dans le sens des  $\varphi$  croissants<sup>3</sup>. Le vecteur shift  $\mathbf{N}$ , qui est tangent à  $\Sigma_t$ , admet également une décomposition 2+1 par rapport à  $\Sigma_t$  :

$$\mathbf{N} = \omega\mathbf{b} + \mathbf{q} \quad \text{avec} \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (2.3)$$

Le cas circulaire, traité au Chap. 1, correspond au cas où les deux vecteurs de Killing  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{m}$  sont orthogonaux aux 2-surfaces  $\Sigma_{t\varphi}$ . En général, on peut toujours trouver localement des 2-plans orthogonaux aux deux vecteurs  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{m}$ , mais il n'est pas possible d'intégrer globalement ces 2-plans en des 2-surfaces. Le cas circulaire est donc un cas très particulier. La condition d'orthogonalité aux 2-surfaces  $\Sigma_{t\varphi}$  se traduit par la nullité des vecteurs de projection orthogonale  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{M}$  introduits plus haut :

$$\mathbf{q} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = 0. \quad (2.4)$$

Il est facile de voir que ces conditions équivalent à  $g_{tr} = 0$ ,  $g_{t\theta} = 0$ ,  $g_{r\varphi} = 0$  et  $g_{\theta\varphi} = 0$ .

Dans le formalisme 3+1 habituel (cf. [296] pour une revue), les objets fondamentaux sont la 3-métrique  $\gamma$  induite par la métrique  $\mathbf{g}$  dans les hypersurfaces  $\Sigma_t$ , le tenseur de courbure associé à cette 3-métrique  ${}^3\mathbf{R}$ , et le tenseur de courbure extrinsèque  $\mathbf{K}$  des hypersurfaces  $\Sigma_t$ . Dans le formalisme (2+1)+1, les objets fondamentaux sont la 2-métrique  $\mathbf{y}$  induite par  $\gamma$  dans les surfaces  $\Sigma_{t\varphi}$  (<sup>4</sup>) :

$$\mathbf{y} = \gamma - \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{g} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}, \quad (2.5)$$

le tenseur de courbure associé  ${}^2\mathbf{R}$ , ainsi que le tenseur de courbure de courbure extrinsèque  $\mathbf{L}$  des surfaces  $\Sigma_{t\varphi}$  considérées comme des hypersurfaces de  $\Sigma_t$ . Le passage de  $(\mathbf{g}, \mathbf{R})$  (où  $\mathbf{R}$  désigne le tenseur de courbure de  $\mathbf{g}$ ) à  $(\gamma, {}^3\mathbf{R}, \mathbf{K})$  et de  $(\gamma, {}^3\mathbf{R})$  à  $(\mathbf{y}, {}^2\mathbf{R}, \mathbf{L})$  se fait par les relations de Gauss et Codazzi.

Les équations d'Einstein prennent alors la forme d'un système d'équations du second ordre faisant apparaître les laplaciens  $\Delta_\gamma$  par rapport à la 3-métrique  $\gamma$  du lapse  $N$  et du vecteur shift  $\mathbf{N}$ , et les laplaciens  $\Delta_y$  par rapport à la 2-métrique  $\mathbf{y}$  de la fonction  $MN$  et du vecteur  $\mathbf{M}$ .

## 2.3 Coordonnées MTCMA

Dans l'article [A2], nous proposons un choix de coordonnées, baptisé MTCMA (pour *Maximal Time slicing – Conformally Minimal Azimuthal slicing*), pour lequel les hypersurfaces  $\Sigma_t$  sont maximales ( $\text{tr } \mathbf{K} = 0$ ) et les surfaces  $\Sigma_{t\varphi}$  sont minimales par rapport à la métrique conforme  $N^2\gamma$  dans  $\Sigma_t$ . Les équations d'Einstein se réduisent alors à

- une équation du type Poisson scalaire pour le lapse  $N$ , avec le laplacien  $\Delta_\gamma$  ;

<sup>3</sup> $\mathbf{b}$  est noté  $\mathbf{m}$  dans l'article [A2], le vecteur de Killing  $\mathbf{m}$  y étant désigné par  $\partial/\partial\varphi$ .

<sup>4</sup>Dans l'article [A2],  $\gamma$  est noté  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{y}$  est noté  $\mathbf{k}$ , alors qu'ici nous utilisons ce dernier symbole pour le vecteur de Killing associé à la stationnarité.

- une équation du type Poisson vectorielle pour le shift  $\mathbf{N}$ , avec le laplacien  $\Delta_\gamma$  ;
- une équation du type Poisson scalaire pour la fonction  $MN$ , avec le laplacien  $\Delta_y$  ;
- une équation du type Poisson vectorielle pour le vecteur  $\mathbf{M}$ , avec le laplacien  $\Delta_y$  .

Par *équation du type Poisson*, nous entendons une équation de la forme

$$\Delta u = f(u, \nabla u) , \quad (2.6)$$

où  $f(u, \nabla u)$  est une fonction a priori non linéaire de  $u$  (dans la pratique quadratique comme par exemple  $f(u, \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla u$ ). La forme explicite des équations du type Poisson est donnée dans la section III.C de l'article [A2]. L'avantage principal des équations de type Poisson est qu'il existe des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions, comme par exemple le théorème de Cantor pour les espaces riemanniens asymptotiquement plats [84, 85, 263].

Il convient de noter que les équations de type Poisson obtenues sont covariantes par rapport aux coordonnées  $(r, \theta)$  qui balayent les surfaces  $\Sigma_{t\varphi}$ . En particulier ces dernières ne sont aucune-ment fixées par le choix des coordonnées MTCMA. Un choix naturel, toujours possible puisque les espaces  $\Sigma_{t\varphi}$  sont de dimension 2, est constitué par les coordonnées isotropes, pour lesquelles les composantes de la 2-métrie  $\mathbf{y}$  prennent la forme suivante :

$$y_{ab} dx^a dx^b = A^2(r, \theta) [dr^2 + r^2 d\theta^2] . \quad (2.7)$$

Dans le cas circulaire, ce choix correspond à celui de l'Eq. (1.3). Le choix MTCMA + coordonnées isotropes (2.7) fixe complètement le système de coordonnées, si bien que les équations d'Einstein s'y écrivent sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles. Ce système est explicité dans l'Annexe B de l'article [A2].

Une autre remarque qu'il convient de faire à propos des équations de type Poisson obtenues dans le système MTCMA est que l'opérateur  $\Delta_\gamma$  est structurellement un laplacien dans un espace de dimension 3, alors que  $\Delta_y$  est structurellement un laplacien dans un espace de dimension 2. En particulier la fonction de Green de ce dernier est du type  $\ln r$ . Elle diverge donc lorsque  $r \rightarrow \infty$ , contrairement à la fonction de Green du laplacien à 3 dimensions ( $1/r$ ). Cette pathologie est à l'origine de l'identité du viriel GRV2 qui sera présentée au Chap. 4.

## 2.4 Développements ultérieurs

Il faudra attendre 2003 pour que le formalisme (2+1)+1 présenté dans [A2] soit utilisé par quelqu'un, à savoir par K. Ioka & M. Sasaki [167, 168]. Ces deux auteurs ont dérivé les équations qui régissent la matière et le champ magnétique (dans un cadre MHD) dans un espace-temps axisymétrique stationnaire non circulaire et décrit par notre formalisme [167]. Ils ont ensuite intégré numériquement ces équations, dans l'approximation de rotation lente, pour obtenir des modèles d'étoiles relativistes avec champ magnétique poloïdal et toroïdal, ainsi qu'une circulation méridienne [168]. Leurs résultats seront discutés au § 7.3.



## Chapitre 3

# Théorème du viriel relativiste (GRV3)

### 3.1 Introduction

Pour un système auto-gravitant newtonien, constitué d'un fluide parfait et d'un champ électromagnétique, le théorème du viriel classique stipule que

$$2E_{\text{kin}} + 3P + E_{\text{mag}} + E_{\text{grav}} = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} , \quad (3.1)$$

où  $E_{\text{kin}}$  est l'énergie cinétique du système,  $P$  l'intégrale volumique de la pression,  $E_{\text{mag}}$  l'énergie électromagnétique,  $E_{\text{grav}}$  l'énergie potentielle gravitationnelle, et  $I$  le moment d'inertie du système par rapport à une certaine origine (cf. par exemple [99]). Les différentes quantités qui interviennent dans (3.1), et notamment la dérivée temporelle  $d/dt$ , sont supposées évaluées dans un référentiel inertiel.

Lorsque le moment d'inertie du système ne dépend pas du temps, le théorème du viriel se réduit à

$$2E_{\text{kin}} + 3P + E_{\text{mag}} + E_{\text{grav}} = 0 . \quad (3.2)$$

Ce cas particulier englobe bien évidemment toutes les configurations stationnaires (indépendance de tous les champs par rapport à  $t$ ), mais aussi les configurations d'équilibre des systèmes binaires. Dans tous ces cas, l'identité (3.2), qui ne fait intervenir que des intégrales de volume, peut être facilement utilisée pour tester des solutions numériques. Par exemple, nous avons montré que dans le cas des systèmes binaires newtoniens, la violation de (3.2) par la solution numérique était très fortement corrélée avec l'erreur numérique mesurée par comparaison avec une solution analytique [A29].

C'est dans cet esprit qu'avec l'aide de Silvano Bonazzola, j'ai recherché une généralisation relativiste de (3.2). L'application que nous avons en tête était le test des solutions numériques des équations d'Einstein axisymétriques et stationnaires (Chap. 1 et 2), représentant des étoiles à neutrons en rotation.

Silvano Bonazzola avait déjà obtenu en 1973 une identité pour des systèmes axisymétriques stationnaires qu'il avait qualifié de *théorème du viriel en relativité générale* [70]. Mais cette identité, qui sera discutée au Chap. 4, fait intervenir des intégrales dans un espace à deux dimensions. A la limite non relativiste, elle ne se réduit donc pas à (3.2) qui ne contient que des intégrales à trois dimensions (intégrales de volume).

Par ailleurs, Abramowicz, Lasota & Muchotrzeb [25] ont obtenu en 1976 une identité qualifiée de *théorème du viriel relativiste*. Néanmoins, sa limite newtonienne s'écrit

$$2E_{\text{kin}} + 3P + E_{\text{mag}} + E_{\text{grav}} + Mc^2 - Mc^2 = 0, \quad (3.3)$$

où  $M$  désigne la masse du système. Les deux termes d'énergie de masse s'annulant, on obtient bien (3.2). Par contre, dans le cas relativiste, les deux termes de masse ne s'annulent pas.

En 1990, Katz [183] a donné une généralisation élégante à la relativité restreinte du théorème du viriel. Il a étendu cette généralisation à la relativité générale mais sous forme différentielle et non intégrale. Il a également montré que, contrairement au cas de la relativité restreinte, la généralisation à la relativité générale nécessite d'introduire une structure supplémentaire sur l'espace-temps. Dans le cas explicitement présenté par Katz, cette structure supplémentaire est constituée par des *vecteurs du viriel* [183]. Il n'y a donc pas unicité du théorème du viriel relativiste.

### 3.2 Notre dérivation de 1994 [A3]

L'idée de départ est de remarquer que le terme  $2E_{\text{kin}} + 3P + E_{\text{mag}}$  qui apparaît dans le membre de gauche de (3.2) n'est pas autre chose que la trace  $S$  du tenseur des contraintes du fluide et du champ électromagnétique. Dans le cadre relativiste  $S$  est la trace de la partie spatiale du tenseur énergie-impulsion, et est donnée par  $S = \gamma_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ , où  $\gamma$  désigne la métrique induite dans les hypersurfaces  $t = \text{const}$ ,  $\Sigma_t$ . Le point de départ de notre calcul consiste donc à prendre la trace de la partie spatiale de l'équation d'Einstein, c'est-à-dire à la contracter par  $\gamma_{\mu\nu}$ . L'équation scalaire ainsi obtenue est ensuite intégrée sur tout l'espace, à l'aide de l'élément de volume correspondant à  $\gamma$  <sup>(1)</sup>. Les seules hypothèses que nous effectuons sont celles de stationnarité (vecteur de Killing associé  $\mathbf{k}$ ) et d'espace asymptotiquement plat. En particulier, nous ne supposons pas l'axisymétrie du système.

Un des termes de l'intégrale peut être alors être facilement identifié à la masse totale du système,  $M_K$ , telle que définie par Komar [187] pour tout espace-temps stationnaire, en prenant le flux à l'infini du dual du gradient du vecteur de Killing  $\mathbf{k}$  :

$$M_K := -\frac{1}{8\pi} \oint_{\infty} (\nabla \mathbf{k})^*, \quad (3.4)$$

où  $\oint_{\infty}$  désigne l'intégrale prise sur une sphère dont le rayon tend vers l'infini. En vertu de l'équation de Killing,  $\nabla \mathbf{k}$  est une 2-forme, et la 2-forme duale  $(\nabla \mathbf{k})^*$  qui apparaît dans (3.4) est formée à l'aide du tenseur de Levi-Civita  $\epsilon$  associé à la métrique d'espace-temps  $\mathbf{g}$  :  $(\nabla k)_{\alpha\beta}^* := \epsilon_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \nabla_{\mu} k_{\nu}$ .

Dans les termes restants, on peut faire apparaître une deuxième expression classique de la masse d'un système isolé, à savoir la masse ADM (Arnowitt, Deser & Misner [38]), qui est définie à partir du gradient de la 3-métrique  $\gamma$  par l'intégrale de surface à l'infini :

$$M_{\text{ADM}} := \frac{1}{16\pi} \oint_{\infty} f^{jk} (\bar{D}_k \gamma_{ij} - \bar{D}_i \gamma_{jk}) dS^i, \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{f}$  désigne une métrique plate, vers laquelle tend  $\gamma$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ , et  $\bar{D}$  la dérivation covariante associée. Dans notre calcul, la masse ADM est issue de l'intégrale de volume du scalaire de

<sup>1</sup>La 3-métrique  $\gamma$  est dénotée  $\mathbf{h}$  dans l'article [A3].

courbure  $R$  de la 3-métrique  $\gamma$ . Cette dernière quantité peut en effet s'écrire sous la forme de termes quadratiques dans les dérivées premières de  $\gamma$  et d'une divergence, qui conduit à l'intégrale de surface (3.5) via la formule de Green-Ostrogradski. Toutefois, pour que cette divergence soit covariante, il faut introduire dans toute l'hypersurface  $\Sigma_t$  (et non seulement à l'infini comme dans (3.5)), une métrique plate  $\mathbf{f}$ <sup>(2)</sup>. On retrouve là la nécessité exprimée par Katz [183] d'introduire une structure supplémentaire sur l'espace-temps pour obtenir le théorème du viriel relativiste (cf. § 3.1).

Étant données les deux métriques  $\gamma$  et  $\mathbf{f}$ , nous avons utilisé un formalisme bimétrique qui permet de relier les dérivées covariantes par rapport à  $\gamma$  aux dérivées covariantes par rapport à  $\mathbf{f}$ . Une alternative aurait été de spécifier un certain système de coordonnées et d'effectuer tous les calculs par rapport à ce système. Mais nous préférons l'approche covariante, qui permet d'utiliser n'importe quel système de coordonnées, en particulier des coordonnées de type sphérique. De plus, le formalisme bimétrique correspond à ce que nous effectuons pour résoudre numériquement les équations d'Einstein : cf. le système (1.4)-(1.7), où nous avons fait apparaître des laplaciens par rapport à une métrique plate.

A ce stade, il apparaît donc dans l'intégrale de la trace de la partie spatiale de l'équation d'Einstein la masse de Komar (3.4) et la masse ADM (3.5), toutes les deux avec le même préfacteur  $4\pi$ , mais avec des signes opposés. L'argument clé est alors le théorème de Beig [53] et Ashtekar & Magnon-Ashtekar [42] qui dit que pour tout espace-temps stationnaire et asymptotiquement plat, les masses de Komar et ADM coïncident. Les deux termes de masse s'éliminent donc et le résultat final ne comprend que des petits termes (petits devant  $M_K c^2$ ); il s'écrit (Eq. (35) de [A3], avec le feuilletage  $\Sigma_t$  choisi maximal,  $K = 0$ )

$$\int_{\Sigma_t} \Gamma^2 (e + p) U_i U^i \sqrt{\gamma} d^3x + 3 \int_{\Sigma_t} p \sqrt{\gamma} d^3x + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Sigma_t} (E_i E^i + B_i B^i) \sqrt{\gamma} d^3x + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} \left[ -D_i \nu D^i \nu + \frac{1}{4} \gamma^{ij} (\Delta^l{}_{im} \Delta^m{}_{jl} - \Delta^l{}_{lm} \Delta^m{}_{ij}) + \frac{3}{4} K_{ij} K^{ij} \right] \sqrt{\gamma} d^3x = 0, \quad (3.6)$$

où  $\Gamma$  désigne le facteur de Lorentz entre le fluide et l'observateur eulérien, c'est-à-dire l'observateur dont la 4-vitesse est la normale  $\mathbf{n}$  aux hypersurfaces  $\Sigma_t$ ,  $e$  est la densité propre d'énergie du fluide,  $p$  sa pression,  $U^i$  est la 3-vitesse du fluide mesurée par l'observateur eulérien,  $\gamma$  est le déterminant de la 3-métrique  $\gamma$ ,  $E^i$  et  $B^i$  sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique tous deux mesurés par l'observateur eulérien,  $\nu$  est le logarithme du lapse  $N$ ,  $K_{ij}$  le tenseur de courbure extrinsèque des hypersurfaces  $\Sigma_t$  et  $\Delta^k{}_{ij}$  est le tenseur de Christoffel<sup>(3)</sup> reliant les dérivées covariantes par rapport à  $\gamma$  à celles par rapport à  $\mathbf{f}$  :

$$\Delta^k{}_{ij} := \frac{1}{2} \gamma^{kl} (\bar{D}_i \gamma_{lj} + \bar{D}_j \gamma_{il} - \bar{D}_l \gamma_{ij}) . \quad (3.7)$$

A la limite newtonienne, la première intégrale dans (3.6) se réduit à  $2E_{\text{kin}}$ , la deuxième à  $3P$ , la troisième à  $E_{\text{mag}}$  et la quatrième à  $E_{\text{grav}}$ , si bien que la limite newtonienne de (3.6) est bien (3.2).

Nous avons baptisé l'identité (3.6) GRV3, pour *General Relativistic Virial in 3 dimensions* et pour la distinguer de l'identité à deux dimensions, baptisée quant à elle GRV2, qui sera présentée au Chap. 4.

<sup>2</sup> $\mathbf{f}$  est notée  $\mathbf{h}$  dans l'article [A3].

<sup>3</sup>contrairement aux symboles de Christoffel, cet objet est bien un tenseur

### 3.3 Développements ultérieurs

La première application de GRV3 est l'évaluation de l'erreur globale dans les solutions numériques pour les étoiles à neutrons en rotation. Nous l'utilisons depuis systématiquement dans tous les travaux du groupe sur le sujet : les étoiles à neutrons magnétisées ([A7] et Chap. 7), les étoiles à neutrons en rotation rapide ([A6] et Chap. 6) et les étoiles de quarks étranges en rotation ([A8] et Chap. 8). Les autres groupes l'utilisent également, comme on le verra au Chap. 6.

Ainsi, dans leur étude de 1996 de l'approximation conformément plate, où l'on fait l'hypothèse  $\gamma = \Psi^4\mathbf{f}$ , Cook, Shapiro & Teukolsky [107] ont employé GRV3. De même, Ansorg, Kleinwaechter & Meinel [37] ont employé GRV3 pour tester leur nouveau code (cf. § 1.5).

Récemment, Friedman, Uryu & Shibata [135] ont étendu GRV3 au cas des systèmes binaires contenant deux étoiles ou une étoile et un trou noir. Il s'agit bien d'une extension car ces systèmes ne sont pas stationnaires dans le strict sens du terme : le vecteur de Killing n'y est pas du genre temps dans la région asymptotique, mais du type hélicoïdal, ainsi que nous le verrons au Chap. 20.

# Chapitre 4

## Identité du viriel à deux dimensions (GRV2)

### 4.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons mentionné que l'identité intégrale dérivée en 1973 par S. Bonazzola [70] pour des espace-temps axisymétriques et stationnaires n'était pas une généralisation relativiste du théorème du viriel newtonien, étant donnée qu'elle porte sur des intégrales à deux dimensions. Plus précisément, l'identité de Bonazzola s'écrit, dans la limite newtonienne :

$$\int_0^\pi \int_0^\infty \left\{ p + \rho v^2 - \frac{1}{8\pi G} (\nabla \nu)^2 \right\} r dr d\theta = 0, \quad (4.1)$$

où  $p$  désigne la pression du fluide,  $\rho$  sa densité de masse,  $v$  la vitesse du fluide par rapport à un référentiel inertiel, et  $\nu$  le potentiel gravitationnel. Lorsqu'on regarde l'élément de volume de (4.1), il est clair qu'il s'agit d'une intégrale dans un espace à deux dimensions et qui est donc structurellement différente de l'intégrale à trois dimensions qui intervient dans le théorème du viriel classique (3.2).

En utilisant le formalisme (2+1)+1 présenté au Chap. 2, Silvano Bonazzola et moi avons dérivé [A4] une généralisation de l'identité qu'il avait obtenu en 1973, sans les hypothèses de stationnarité et d'axisymétrie.

Nous ne sommes pas parvenu à trouver de référence à (4.1) dans la littérature sur les étoiles newtoniennes, hormis dans le cas à symétrie sphérique, où (4.1) se réduit au cas particulier  $\nu = 2$  de l'identité du théorème 2 du Chapitre III du livre de Chandrasekhar sur la structure stellaire [92].

### 4.2 L'identité relativiste GRV2 [A4]

En manipulant les équations d'Einstein écrite suivant le formalisme (2+1)+1 présenté au Chap. 2, on obtient une équation du type

$$\Delta_2(\nu + \alpha) = A^2 Q, \quad (4.2)$$

où  $\nu$  désigne le logarithme de la fonction lapse,  $\alpha$  le logarithme du facteur conforme  $A$  entre la 2-métrique  $\mathbf{y}$  (cf. Eq. (2.5)) et une 2-métrique plate,  $\Delta_2$  le laplacien par rapport à la 2-métrique plate, et  $Q$  est l'expression donnée par l'Eq. (17) de [A4]. La fonction de Green de l'opérateur

$\Delta_2$  étant  $\ln r$  et non  $1/r$  comme pour le laplacien usuel à trois dimensions, le terme monopolaire de la solution de (4.2) doit être nul si l'on veut un espace-temps asymptotiquement plat. Cette condition donne l'identité intégrale GRV2 (Eq.(26) de [A4]).

## Chapitre 5

# Modèles numériques d'étoiles à neutrons en rotation

### 5.1 Introduction

En utilisant la méthode décrite au Chap. 1, Marcelo Salgado, Silvano Bonazzola, Pawel Haensel et moi avons calculé en 1993-1994 des modèles d'étoiles à neutrons en rotation rapide, basés sur diverses équations d'état de la matière nucléaire. Comme nous l'avons rappelé dans l'Introduction, page 15, l'équation d'état de la matière à densité supernucléaire, telle qu'on la rencontre dans les étoiles à neutrons est très mal connue actuellement. Des dizaines d'équations d'état ont été publiées dans la littérature. Notre approche n'est pas de privilégier une quelconque de ces équations d'état, mais de faire les calculs pour un panel représentatif (une douzaine) d'équations d'état et de présenter les résultats sur un même pied pour chacune de ces équations d'état. L'idée sous-jacente est que ce sont les observations qui trancheront.

Ainsi par exemple, certaines équations d'état, dites "molles", conduisent à une masse maximale assez faible des étoiles à neutrons (aux environs de  $1.5 M_{\odot}$ ). Si l'on mesure une masse d'étoile à neutrons supérieure, alors on peut rejeter ces équations d'état. Pour l'instant, les seules masses mesurées précisément d'étoiles à neutrons sont celles de pulsars binaires, et elles tournent autour de  $1.4 M_{\odot}$  [206]. Dans certaines binaires X, on a pu évaluer des masses d'étoiles à neutrons de l'ordre de  $1.8 M_{\odot}$ , mais avec des barres d'erreurs assez grandes. Il est donc prématuré d'en tirer des conclusions quant à l'équation d'état.

Parmi les caractéristiques observables que nous avons calculées figurent la masse (observable si l'étoile à neutrons appartient à un système binaire – pulsar binaire ou binaire X, cf. ci-dessus) et la fréquence de rotation (observable si l'étoile à neutrons apparaît sous la forme d'un pulsar radio ou X).

### 5.2 Notre article de 1994 [A5]

Nous avons utilisé 12 équations d'état issues de la littérature, 6 sont relativistes et reposent sur des théories de champ moyens, et 6 sont non relativistes. Ce panel comprenait l'une des équations d'état les meilleures de l'époque, à savoir celle de Wiringa, Fiks & Fabrocini (1988) [292]. Depuis des équations d'état plus sophistiquées ont été calculées, notamment celle d'Akmal, Pandharipande & Ravenhall en 1998 [29], et il conviendrait de reprendre notre étude de 1994 avec ces équations d'état-là.

Dans notre article, nous avons effectué une comparaison assez détaillée avec des travaux antérieurs et deux travaux contemporains : ceux d'Eriguchi, Hachisu & Nomoto (1994) [122] et de Cook, Shapiro & Teukolsky (1994) [104, 106]. Sur les équations que nous avons en commun, nous avons trouvé une différence de quelques pourcents avec Eriguchi et al. et de l'ordre du dixième de pourcent seulement avec Cook et al. Ce bien meilleur accord avec le groupe américain sera expliqué au Chap. 6. Il est dû à l'utilisation par ce groupe d'une grille compactifiée qui permet l'intégration des équations d'Einstein dans tout l'espace, ainsi que nous le faisons (cf. Sec. 1.4.4), alors que le groupe japonais effectue ses calculs sur une grille non compactifiée, et donc sur une partie finie de l'espace. Pour des problèmes aussi complexes que la résolution des équations d'Einstein décrivant des espaces-temps axisymétriques et stationnaires, il est crucial de comparer différents codes numériques pour avoir confiance dans les résultats. Dans notre article de 1994, nous avons détaillé cette comparaison plus que de coutume. Le point culminant de ces comparaisons sera le projet de comparaison directe que j'ai mené avec le groupe de J. Friedman et celui de Y. Eriguchi, qui fera l'objet du Chap. 6.

Pour donner une estimation de l'erreur numérique globale de chaque modèle calculé, nous avons utilisé l'identité du viriel GRV2 (Chap. 4). L'erreur relative sur cette identité est notée  $|1 - \lambda|$  dans l'article [A5] (cf. les Tables 2 et 3). Par contre nous n'avons pas utilisé le théorème du viriel relativiste GRV3 (Chap. 3) qui venait d'être fraîchement établi. Nous avons simplement montré ailleurs [6] que l'erreur GRV3 était du même ordre de grandeur que l'erreur GRV2.

L'article [A5] ne contient que trois tables, l'essentiel des résultats y étant présentés sous forme de figures. Les tables détaillant les résultats ont été publiées dans les *Supplement Series* de la revue *Astronomy and Astrophysics* [4].

### 5.3 Développements ultérieurs

En 1997, lors de sa thèse de doctorat dans notre groupe, Jacques-Olivier Goussard a introduit les effets thermiques (température non nulle) dans notre code, pour étudier l'évolution des proto-étoiles à neutrons [149, 150].

En 1998, B. Datta, A.V. Thampan & I. Bombaci [113] ont calculé de nouveaux modèles d'étoiles à neutrons en rotation en utilisant une équation d'état publiée l'année précédente : celle de Baldo, Bombaci & Burgio [44].

Dans l'étude [A5] présentée ici, nous n'avons pas inclus le calcul de la dernière orbite stable autour des étoiles à neutrons. Il s'agit d'un paramètre intéressant car elle définit le bord interne du disque d'accrétion lorsque l'étoile à neutrons fait partie d'une binaire X. Après le lancement du satellite RXTE en 1995 et la découverte des oscillations quasi-périodiques (QPO) de haute fréquence qui s'en est suivie, ce paramètre est devenu une observable (du moins dans l'un des modèles les plus en vogue pour expliquer les QPO). Nous l'avons donc depuis introduit dans notre code de calcul des étoiles en rotations, ainsi que nous le décrivons au Chap. 10.

Très récemment, des observateurs ont déterminé la masse de l'étoile à neutrons dans la binaire X 4U 1700-37 :  $M = 2.44 \pm 0.27 M_{\odot}$ , avec une probabilité inférieure à 3.5% d'avoir  $M < 2 M_{\odot}$  [98]. Si cette mesure est confirmée (et qu'il s'agit bien d'une étoile à neutrons et non d'un trou noir léger), de nombreuses équations d'état parmi celles que nous avons considérées dans notre étude [A5] sont à éliminer : mis à part l'équation d'état HKP, toutes les équations d'état "réalistes" donnent une masse maximale inférieure à  $2.2 M_{\odot}$  pour les modèles statiques. Quant aux modèles en rotation, seules les équations d'état HKP, WFF1, WFF2 ont une masse maximale supérieure à  $2.4 M_{\odot}$ .

## Chapitre 6

# Comparaison de trois méthodes numériques pour calculer les configurations d'équilibre des étoiles relativistes en rotation

### 6.1 Introduction

Au Chap. 5, nous avons souligné l'importance de comparer des codes numériques différents pour le problème des étoiles relativistes en rotation. Plus généralement, on devrait valider tous les résultats issus de la relativité numérique par des comparaisons entre différents codes, si possible écrits par différents groupes.

### 6.2 Comparaison détaillée de trois codes

En 1994, John Friedman & Nick Stergioulas, de l'Université du Wisconsin, Yoshiharu Eriguchi & Tetsuo Nozawa, de l'Université de Tokyo, et moi-même, avons démarré un programme de comparaison détaillé de nos codes respectifs. Pour ce faire, nous avons décidé d'utiliser exactement les mêmes équations d'état et les mêmes valeurs numériques pour les constantes fondamentales  $G$  et  $c$ , ainsi que des constantes masse baryonique  $m_B$  et masse solaire  $M_\odot$  (cette dernière n'intervenant que pour l'expression des résultats).

Les trois codes comparés sont

**KEH(OR)** : le code de Komatsu, Eriguchi & Hachisu élaboré en 1989 [188] (cf. § 1.3) ;

**KEH(SF)** : la version de ce code améliorée par Cook, Shapiro & Teukolsky en 1992-94 [103, 104, 106] (cf. § 1.3) puis par Stergioulas & Friedman en 1995 [266] ;

**BGSM** : notre code spectral décrit au Chap. 1.

Ces trois codes diffèrent tant par les équations aux dérivées partielles résolues (KEH(OR) et KEH(SF) n'utilisent pas l'Eq. (1.7) contrairement à BGSM) que par les méthodes numériques employées pour les résoudre : méthodes aux différences finies pour KEH(OR) et KEH(SF), contre méthodes spectrales pour BGSM. Il était donc très intéressant d'effectuer la comparaison. Néanmoins il ne s'agissait pas d'un travail de recherche novateur, si bien que nous ne l'avons tous mis en seconde priorité parmi nos travaux respectifs. Cela explique le délai entre le début du

projet (1994) et la soumission de l'article (1998). Mais ce qui est important est que nous avons mené ce travail à son terme! Combien de fois dans le domaine du numérique, deux groupes se rencontrent et se disent "tiens ce serait bien si on comparait nos deux codes sur le même problème physique"? Généralement chacun vaque ensuite à ses occupations du moment et le projet en reste là.

### 6.3 Interpolation thermodynamiquement cohérente des équations d'état tabulées

Nous avons profité de ce projet de comparaison détaillé pour introduire dans notre domaine une nouvelle méthode d'interpolation des tables contenant les équations d'état : la méthode de Swesty [269], publiée en 1996 seulement, mais dont je disposais sous forme de preprint (grâce à Pawel Haensel) dès 1995. L'avantage de cette méthode d'interpolation est d'être thermodynamiquement cohérente. Dans le cas qui nous préoccupe, l'entrée des tables d'équation d'état se fait par log-enthalpie (cf. Eq. (1.16)) :

$$H = \ln \frac{h}{c^2} = \ln \left( \frac{e + p}{m_B c^2 n} \right), \quad (6.1)$$

car c'est cette quantité qui est donnée par l'intégrale première (1.22). On peut écrire l'interpolation dans la table sous la forme

$$\begin{cases} e = e(H) \\ p = p(H) \end{cases} \quad (6.2)$$

Or le Premier Principe de la Thermodynamique, à température nulle, conduit à la relation de Gibbs-Duhem :

$$\frac{dp}{dH} = e + p. \quad (6.3)$$

Il n'est évidemment pas du tout garanti qu'une méthode d'interpolation (6.2) vérifie (6.3). Il en résulte une erreur dans la solution numérique, qui se reflète sur l'erreur donnée par GRV2 ou GRV3, ainsi que nous le montrons dans notre article [A6]. Par contre, la méthode de Swesty respecte (6.3), car elle est basée sur l'interpolation polynomiale d'Hermite, qui est une généralisation de l'interpolation de Lagrange prenant en compte les valeurs de la dérivée de la fonction, en plus des valeurs de la fonction elle-même (cf. par exemple § 7.4 de [238]). Cette méthode conduit à une bien meilleure erreur GRV2 et GRV3. De plus, elle n'est pas compliquée à mettre en œuvre (interpolation par des polynômes de degré trois). Depuis cette étude, nous utilisons systématiquement la méthode de Swesty dans notre groupe pour évaluer les équations d'état tabulées.

### 6.4 Importance d'intégrer dans tout l'espace

Les résultats de la comparaison se sont avérés très bons, la différence relative entre les résultats issus du code KEH(SF) et BGSM est au plus de  $10^{-3}$ , mais le plus souvent de l'ordre de  $10^{-4}$ . La différence entre les codes KEH(OR) et BGSM est un facteur dix plus grande. Ce relativement mauvais accord s'explique le domaine fini d'intégration dans KEH(OR), contre le domaine infini dans KEH(SF) et BGSM. Les équations d'Einstein n'étant pas à support compact, il faut vraiment les intégrer dans tout l'espace pour avoir une bonne précision.

## Chapitre 7

# Étoiles à neutrons magnétisées

### 7.1 Les magnétars

On sait que les étoiles à neutrons sont dotées d'un champ magnétique, que l'on estime être de l'ordre de 0.1 GT à 1 GT <sup>(1)</sup> dans les pulsars radio. Un tel champ, bien que très important, n'a que peu d'effet sur la structure interne de l'étoile à neutrons. La densité d'énergie correspondante  $B^2/(2\mu_0)$  ne vaut en effet que  $2 \times 10^{-10} \rho_{\text{nuc}} c^2$  pour  $B = 1$  GT, c'est-à-dire est ultra négligeable devant la densité de la matière de neutron  $\rho \gtrsim \rho_{\text{nuc}}$ .

Par contre, il existe une deuxième catégorie d'objets astrophysiques, que l'on appelle des *répéteurs gamma mous* (*soft gamma-ray repeaters* ou *SGR*), que l'on interprète comme des étoiles à neutrons et dans lesquels on a découvert récemment (1998) de bien plus fort champs magnétiques :  $B = 80$  GT dans SGR 1806-20 et SGR 1900+14 [191, 192]. Les SGR sont le siège de sursauts gamma récurrents. Ils constituent donc une population bien séparée des sursauteurs gamma "standards" et pour lesquels on n'observe aucune récurrence. On sait maintenant que ces derniers se produisent dans des galaxies lointaines et correspondent à des événements cataclysmiques (hypernova, coalescence d'un système binaire d'étoiles à neutrons). Le fort champ magnétique des SGR leur a valu le nom de *magnétars*. D'après certain modèles théoriques, le champ magnétique des magnétars pourrait atteindre la valeur de  $10^4$  GT [120]. Un tel champ magnétique correspond à une densité d'énergie de  $0.025 \rho_{\text{nuc}} c^2$ . Cela reste faible par rapport à la densité nucléaire, mais comme le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique est anisotrope, les effets sur la structure de l'étoile peuvent être très importants. De même, l'anisotropie de la force centrifuge provoque une déformation importante des étoiles à neutrons en rotation rapide, bien que la densité d'énergie cinétique correspondante soit faible.

### 7.2 Notre article de 1995 [A7]

Dès notre premier article sur les étoiles à neutrons en rotation (Chap. 1), nous avons considéré le cas d'un champ électromagnétique, en sus du fluide parfait, dans la formulation des équations d'Einstein pour les espaces-temps axisymétriques et stationnaires. Au printemps 1994, Marc Bocquet et Jérôme Novak (alors élèves de l'École Polytechnique en stage dans notre groupe), Silvano Bonazzola et moi-même ont entrepris les calculs numériques correspondants. Il s'agissait de la toute première étude cohérente du champ magnétique dans les étoiles relativistes en rotation, c'est-à-dire où sont pris en compte non seulement la force de Laplace exercée par le

---

<sup>1</sup>1 gigatesla (GT) =  $10^{13}$  gauss

champ magnétique sur le milieu conducteur, mais également le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique comme source du champ gravitationnel, via les équations d'Einstein.

A l'époque, il n'y avait pas encore la preuve observationnelle de l'existence des magnétars, qui ne sera acquise qu'en 1998, si bien que notre étude était quelque peu académique : comme nous l'avons rappelé au § 7.1, les champs magnétiques moyens des pulsars radio ne conduisent pas à une déformation appréciable des étoiles à neutrons.

Les hypothèses de notre travail sont

- les configurations sont axisymétriques et stationnaires ;
- le champ magnétique est purement *poloïdal* : il est contenu dans les plans méridiens, sans composante azimutale :  $B_{(\varphi)} = 0$  ;
- l'intérieur de l'étoile est un conducteur parfait ;
- l'extérieur de l'étoile est vide (on ne modélise donc pas une quelconque magnétosphère).

Sous ces hypothèses nous avons calculé les configurations d'équilibre en résolvant les équations d'Einstein - Maxwell.

Parmi les résultats obtenus, on peut mentionner le fait que les forces de Laplace viennent en aide à la pression du fluide pour contrebalancer la gravitation. Il s'en suit une masse maximale  $M_{\max}$  des étoiles à neutrons magnétisées qui est supérieure à la masse maximale des étoiles à neutrons sans champ magnétique. Nous avons ainsi trouvé que  $M_{\max}$  pouvait être augmentée de 13 à 29% suivant les équations d'état.

Ce travail a été le premier du groupe que nous ayons mis sur Internet, via le serveur de preprint gr-qc (<http://arXiv.org/>). Il a également valu à Marc Bocquet et Jérôme Novak le prix du meilleur stage d'option de l'École Polytechnique.

### 7.3 Développements ultérieurs

Le code mis au point a été ensuite utilisé pour calculer la déformation des pulsars et l'émission d'ondes gravitationnelles qui en résulte (Chap. 15).

En 1999, K. Konno, T. Obata et Y. Kojima [190], de l'Université d'Hiroshima, ont calculé la déformation par le champ magnétique poloïdal d'une étoile relativiste statique en effectuant un calcul perturbatif autour d'une métrique sphérique. Ils ont confirmé l'ordre de grandeur de nos résultats dans le cas des configurations peu déformées (cf. Chap. 15) et ont montré qu'à rapport fixé entre énergies magnétique et gravitationnelle, les effets relativistes augmentent la déformation de l'étoile.

En 2001 un deuxième code de calcul pour traiter le même problème physique (obéissant aux hypothèses énumérées ci-dessus) a été développé par une équipe de Stony Brook, composée de C.Y. Cardall, M. Prakash et J.M. Lattimer [87]. Dans des configurations identiques, ils reproduisent nos résultats à  $10^{-3}$  près. La méthode numérique employée par Cardall et al. leur a permis de traiter des champs magnétiques encore plus importants que ceux de notre article de 1995.

En 2003, K. Ioka & M. Sasaki [168] ont calculé des configurations stellaires relativistes avec champ magnétique poloïdal *et* toroïdal (l'espace-temps n'est alors plus circulaire, cf. § 2.4). Ils ont trouvé qu'en présence d'un champ magnétique toroïdal, la forme de l'étoile peut être prolongue plutôt qu'oblongue.

Deuxième partie

Étoiles de quarks étranges



## La matière de quarks

Dans la matière ordinaire, jusqu'à la densité nucléaire et même un peu au delà pour la plupart des équations d'état, les quarks (Tableau 7.1) sont confinés trois par trois dans les baryons. Ces derniers sont des *neutrons* (2 quarks  $d$  et 1 quark  $u$ ) et des *protons* (1 quark  $d$  et 2 quarks  $u$ ) jusqu'à la densité nucléaire, et en partie des *hypérons* au delà (exemple :  $\Lambda = uds$ ,  $\Sigma^+ = uus$ ).

En 1971 A.R. Bodmer [68] a émis l'idée que l'état fondamental de la matière nucléaire ne serait pas cet état-là, mais plutôt un plasma de quarks déconfinés. Edward Witten [293] a reformulé indépendamment cette idée en 1984 et, suivant une suggestion de F. Dyson (Ref. 23 de [293]), en a déduit qu'il pourrait exister des étoiles de quarks.

Si elle constitue l'état fondamental à la densité nucléaire, la matière de quarks comprend nécessairement des quarks  $s$  (*étrange*), en plus des quarks  $u$  et  $d$ . Cela ouvre en effet des états supplémentaires, qu'il est énergétiquement favorable de peupler, en vertu du principe d'exclusion de Pauli (cf. Fig. 7.1). Par contre, sauf à extrêmement haute densité ( $\rho \gtrsim 10^3 \rho_{\text{nuc}}$ ), la masse élevée du quark  $c$  (*charmé*) interdit l'apparition de ces derniers dans le milieu. Il en va de même pour les quarks  $b$  (*beauté*) et  $t$  (*top*), qui sont encore plus massifs.

Du point de vue expérimental, l'existence de la matière de quarks n'a pas encore été prouvée de façon certaine. Les physiciens des particules essaient de produire un *plasma quarks-gluons* par des collisions d'ions lourds dans des accélérateurs. Ce plasma de quarks-gluons constituerait un état chaud de la matière de quarks. La pression "de radiation" des gluons contribuerait de manière significative à l'équation d'état, contrairement à la matière de quarks froide, où la pression est seulement donnée par les quarks. Des indices sur l'existence du plasma quarks-gluons ont été obtenus en analysant six ans de données acquises au CERN lors de collisions d'ions lourds accélérés [164, 250, 147]. Le CERN a même fait une annonce officielle à la presse en février 2000. D'autres expériences sont en cours depuis juin 2000 au *Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) à Brookhaven, aux États-Unis ([172] et Fig. 7.3). Des noyaux d'or y sont accélérés à des énergies de 200 GeV (par paire nucléon-nucléon dans le centre de masse), soit 10 fois celles atteintes au CERN. Des indications très forte de la formation d'un plasma quarks-gluons ont été obtenues [26, 27, 250, 147], en confirmation des premiers indices acquis au CERN. La preuve finale viendra sans doute des collisions de noyaux de plombs qui seront effectuées dans l'expérience ALICE (*A Large Ion Collider Experiment*) du LHC (*Large Hadron Collider*) au CERN, lorsque celui-ci sera achevé, vers 2007.

## L'hypothèse des étoiles étranges

En 1984, Witten [293] avait introduit la notion d'étoiles de quarks étranges (*étoiles étranges*) sur des considérations purement théoriques, à savoir que la matière de quarks constituerait l'état fondamental de la matière à haute densité. C'est avec l'annonce en 1989 de la "découverte" d'un pulsar submilliseconde dans le reste de la fameuse supernova SN 1987A que les étoiles étranges sont apparues comme une alternative sérieuse aux étoiles à neutrons "ordinaires" [136, 143]. En effet, la période du pulsar, 0.5 ms, était beaucoup trop courte pour la plupart des modèles d'étoiles à neutrons (cf. Fig. 3 du Chap. 5). Par contre, cela ne posait pas de problème aux étoiles étranges, du moins pour certains paramètres du modèle de quarks, comme nous le verrons au Chap. 8. Hélas pour les partisans des étoiles étranges le signal périodique à 0.5 ms dans SN 1987A s'est avéré n'être qu'un artefact instrumental.

La découverte en 1996 des oscillations quasi-périodiques (QPO) de haute fréquence dans les binaires X de faible masse a suscité un regain d'intérêt pour les étoiles étranges, car la

TAB. 7.1 – Propriétés des quarks

saveur	d	u	s	c	b	t
spin	1/2					
nombre baryonique	1/3					
charge électrique	$-\frac{e}{3}$	$\frac{2e}{3}$	$-\frac{e}{3}$	$\frac{2e}{3}$	$-\frac{e}{3}$	$\frac{2e}{3}$
isospin (comp. $z$ )	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
masse [ $\text{MeV } c^{-2}$ ]	$\sim 7$	$\sim 3$	$\sim 150$	$\sim 1200$	$\sim 4200$	$\sim 175 \text{ GeV } c^{-2}$

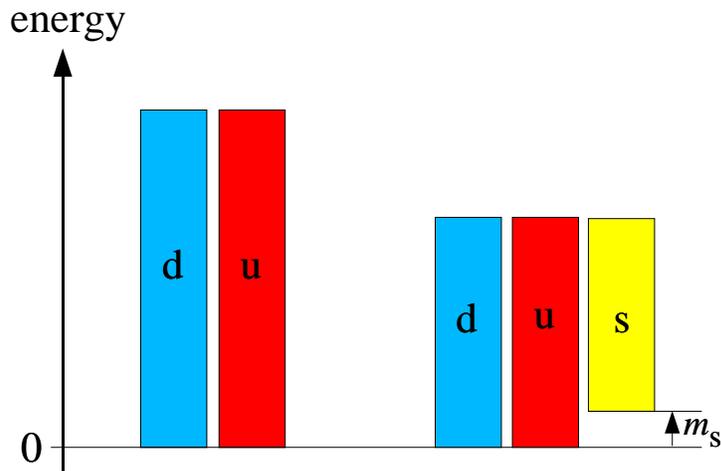


FIG. 7.1 – En vertu du principe d’exclusion de Pauli, la matière de quarks à trois saveurs a une énergie moyenne plus basse que celle à deux saveurs.

modélisation de certaines observations s’accommode mal des étoiles à neutrons “standard”, ainsi que nous le verrons aux Chap. 10 et suivants.

Enfin, en avril 2002, la NASA a annoncé la découverte de deux étoiles de quarks étranges, suite aux observations du satellite Chandra. Cette annonce a été très médiatisée et est aujourd’hui vivement débattue dans la communauté. S’il est clair que l’un des deux objets (PSR J0205+6449 dans le reste 3C 58 de la supernova de l’an 1181) n’est pas un candidat valable — les observations pouvant tout à fait s’expliquer par une étoile à neutrons “classique” [294] —, il n’en va pas de même de l’autre objet (RX J1856.5-3754) [118], qui constitue un candidat sérieux, même si l’interprétation étoile de quarks étranges est loin de faire un consensus [284, 227].

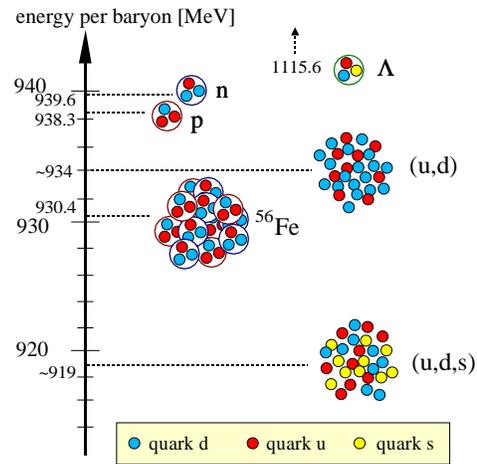


FIG. 7.2 – Énergie par baryon pour différents états de la matière.



FIG. 7.3 – Accélérateur d'ions lourds RHIC, en service depuis juin 2000 au Brookhaven National Laboratory, Long Island, New York [source : <http://www.bnl.gov/rhic/>].



## Chapitre 8

# Étoiles de quarks étranges en rotation

### 8.1 Études antérieures à 1999

Dans l'article même où il propose l'existence d'étoiles étranges (celui de 1984 : [293]), Witten présente des modèles d'étoiles étranges construits sur l'équation d'état dite *du sac MIT*, dans sa version la plus simple (SQM0, § 8.3 ci-après). Des modèles plus détaillés ont ensuite été calculés en 1986 par Haensel, Zdunik & Schaeffer [157], suivis par Alcock, Farhi & Olinto [30]. Ces modèles ont été obtenus par la résolution des équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff qui régissent les étoiles relativistes statiques et à symétrie sphérique.

Pour prendre en compte la rotation des étoiles, des calculs ont été effectués en 1992 dans le contexte de l'approximation de rotation lente de Hartle (cf. § 1.3), par Colpi & Miller [100] et Glendenning & Weber [146]. Cependant, surtout dans le contexte du pseudo-pulsar de 0.5 ms de SN 1987A — qui comme nous l'avons vu avait suscité un regain d'intérêt pour les étoiles étranges, l'approximation de Hartle ne peut décrire correctement les étoiles en rotation rapide, notamment lorsqu'elles sont proches de la vitesse keplerienne. Les premiers calculs d'étoile étrange en rotation rapide ont été effectués par J. Friedman en 1989 [131] et Lattimer et al. en 1990 [199]. Mais ces calculs étaient assez grossiers, car ils reposaient sur le vieux code de Butterworth & Ipson (cf. § 1.3) qui ne permettait pas de traiter correctement la discontinuité de densité à la surface des étoiles étranges. La comparaison avec nos résultats, effectuée au § 4.2 de [A8] montrera que l'erreur commise était de l'ordre de 10%.

### 8.2 Notre travail de 1998-1999 [A8]

Notre étude [A8] constitue la première étude précise des étoiles de quarks étranges en rotation rapide. Il s'agit de la toute première application astrophysique de la méthode spectrale multi-domaine avec grille adaptative [A29], qui sera discutée au Chap. 29. C'est cette technique qui permet de traiter correctement la discontinuité de densité très importante à la surface des étoiles étranges (cf. Fig. 3 ci-après [A8]). L'article [A8] constitue également la toute première publication issue d'un code C++ construit à partir de la bibliothèque orientée objet LORENE, que nous décrirons au Chap. 31. Les codes précédents, notamment celui employé pour les étoiles à neutrons en rotation rapide (Chap. 1, 5 et 6), étaient écrits en Fortran 77.

L'étude [A8] a été réalisée en partie grâce au stage de deux élèves de deuxième année de

l'E.N.S. Lyon : Richard Livine et Ewa Paluch. A cette occasion, j'ai pu constater la rapidité avec laquelle deux jeunes se familiarisaient avec LORENE. Je pense que le temps d'apprentissage de nos codes Fortran auraient été beaucoup plus long. Réalisé au printemps 1998, alors que Jean-Alain Marck et moi développons LORENE depuis seulement un an, ce stage m'a définitivement convaincu de la pertinence de l'approche objet et qu'il fallait continuer avec LORENE.

### 8.3 Équation d'état du "sac MIT"

La matière de quarks doit être décrite par la chromodynamique quantique (QCD). Malheureusement la complexité de cette théorie est telle que l'on ne sait pas calculer l'équation d'état, même à température nulle. On doit donc se contenter d'une approche phénoménologique, basée sur deux idées (cf. [126, 144, 210, 285] pour une description plus détaillée) :

- décrire les aspects non-perturbatifs de la QCD, tel le *confinement* des quarks et leur *liberté asymptotique* par un modèle très simple : celui du *sac*, élaboré au Massachusetts Institute of Technology (MIT) en 1974 [97] ;
- décrire les aspects perturbatifs, à savoir les interactions des quarks au sein du sac, par un développement en terme de  $\alpha_c = g^2/(4\pi)$ , où  $g$  est la constante de couplage de la QCD.

Le modèle du sac MIT rend compte du confinement des quarks en postulant que la pression qui s'exerce sur le volume occupé par les quarks est la pression du milieu extérieur, plus une pression constante  $B$  (cf. Fig. 8.1) :

$$p_{\text{ext}} + B = \sum_{\text{savoir } i} p_i, \quad (8.1)$$

où  $p_i$  représente la pression exercée par les quarks de saveur  $i$  ( $u$ ,  $d$  ou  $s$ ). La constante  $B$  peut également être perçue comme la densité d'énergie du vide "déconfiné" (c'est-à-dire où se meuvent les quarks, à l'intérieur du "sac", cf. Fig. 8.1) par rapport au vrai vide. La densité d'énergie totale de la matière de quark est alors donnée par

$$e = \sum_{\text{savoir } i} e_i + B. \quad (8.2)$$

Dans les Eq. (8.1) et (8.2),  $p_i$  et  $e_i$  sont les pressions d'un gaz de Fermi relativiste et dégénéré de particules de masse  $m_i$ , avec des corrections du premier ordre en  $\alpha_c$ . Étant donnée la petitesse des masses des quarks  $u$  et  $d$  (cf. Tableau 7.1) devant leur énergie cinétique, on peut prendre  $m_u = m_d = 0$ . Le modèle de sac de la matière de quarks dépend alors de trois paramètres :

- la constante de sac  $B$
- la masse  $m_s$  du quark étrange
- la constante de couplage QCD  $\alpha_c = g^2/(4\pi)$

Dans l'article [A8], nous avons utilisé le modèle le plus simple, à savoir des quarks  $s$  sans masse et sans interaction (autre que le confinement dans le sac), que nous dénoterons par SQM0 :

$$\text{SQM0} : \quad B = 60 \text{ MeV fm}^{-3} \quad m_s = 0 \quad \alpha_c = 0. \quad (8.3)$$

Les contributions de  $p_i$  et  $e_i$  de chaque saveur  $i$  à l'équation d'état (8.1)-(8.2) sont alors tout simplement celles de gaz parfaits de Fermi dégénérés et ultra-relativistes. On obtient alors<sup>1</sup> l'équation d'état donnée par les équations (1) et (2) de [A8].

Le choix de la constante  $B$  doit obéir aux deux contraintes suivantes :

<sup>1</sup>il faut juste faire attention au facteur de dégénérescence de chaque espèce de quark, qui est de 6, car chaque quark a deux états de spin et trois états de couleur.

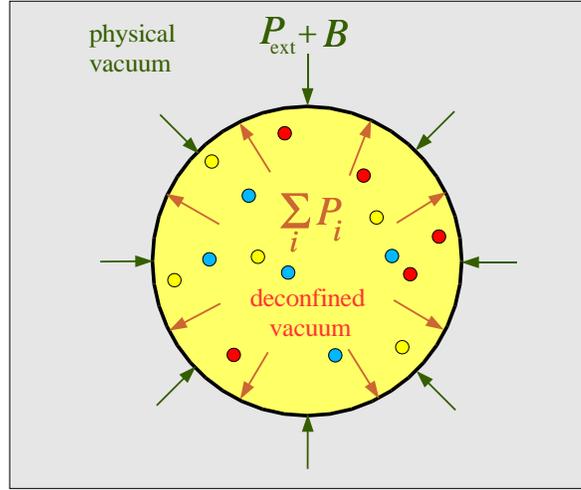


FIG. 8.1 – Modèle du sac MIT

1. A pression nulle, l'énergie par baryon de la matière de quarks composée uniquement de quarks  $u$  et  $d$  est supérieure à celle du  $^{56}\text{Fe}$ , de sorte que ce dernier est stable par rapport à un déconfinement spontané (cf. Fig. 7.2). Sinon tous les noyaux se transformeraient en “gouttelettes” de quarks  $u$  et  $d$ , qui à leur tour se transformeraient sous l'effet des interactions faibles en gouttelettes de quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$  – que l'on nomme *strangelets*. Dans le modèle  $m_s = 0$  et  $\alpha_c = 0$ , cette contrainte se traduit par  $B > 58.9 \text{ MeV fm}^{-3}$ .
2. A l'inverse, pour que la matière de quarks ( $u, d, s$ ) soit effectivement l'état fondamental de la matière dense, il faut que son énergie par baryon soit inférieure à celle du  $^{56}\text{Fe}$  (cf. Fig. 7.2) ; cela impose  $B < 91.5 \text{ MeV fm}^{-3}$ .

En conclusion, on doit avoir, dans le modèle sans masse ( $m_s = 0$ ) et sans interaction autre que le confinement dans le sac ( $\alpha_c = 0$ ) :

$$58.9 \text{ MeV fm}^{-3} < B < 91.5 \text{ MeV fm}^{-3} . \quad (8.4)$$

## 8.4 Principaux résultats

Les principaux résultats obtenus dans cette toute première étude basée sur l'équation d'état SQM0 sont les suivants (cf. Table 1 de [A8]) :

- Pour une étoile statique de  $1.4 M_\odot$ , le *rayon circonférentiel* (i.e. la longueur de l'équateur donnée par le tenseur métrique divisée par  $2\pi$ ) est  $R = 10.77 \text{ km}$ , ce rayon étant porté à  $11.19 \text{ km}$  lorsque l'étoile tourne à une période de  $1.56 \text{ ms}$  (aplatissement-coordonnées  $r_p/r_{\text{eq}} = 0.89$ ).
- La masse maximale des configurations statiques est  $M_{\text{max}}^{\text{stat}} = 1.964 B_{60}^{-1/2} M_\odot$  où  $B_{60}$  désigne la constante de sac en unités de  $60 \text{ MeV fm}^{-3}$  ; le rayon correspondant est  $R = 10.71 B_{60}^{-1/2} \text{ km}$ . On retrouve ainsi les résultats de Witten (Eq. (A3) de [293]).
- La masse maximale tenant compte de la rotation est  $M_{\text{max}} = 2.831 B_{60}^{-1/2} M_\odot$  ; le rayon correspondant à cette configuration est  $R = 16.54 B_{60}^{-1/2} \text{ km}$ .

- La période de rotation minimale est  $P_{\min} = 0.63 B_{60}^{-1/2}$  ms.

Il convient de noter que la configuration qui réalise  $M_{\max}$  n'est pas exactement celle qui réalise  $P_{\min}$  et que l'augmentation de la masse maximale sous l'effet de la rotation est de 44%, ce qui est bien supérieur à celle des étoiles à neutrons, qui se situe en général autour de 20% (cf. Chap. 5).

Enfin, nous avons remarqué dès ce premier travail que le rapport entre l'énergie cinétique de rotation et l'énergie potentielle gravitationnelle,  $T/|W|$ , était très élevé pour les étoiles étranges en rotation rapide (Fig. 7 de [A8]), bien plus que celui des étoiles à neutrons. Cela laissait présager que les étoiles étranges pouvaient être de bons émetteurs d'ondes gravitationnelles par brisure de leur symétrie axiale et développement d'un mode triaxial  $m = 2$  sous l'effet de la viscosité. L'étude est en cours.

## 8.5 Développements ultérieurs

Un deuxième code pour l'étude des étoiles de quarks étranges en rotation rapide a été développé par Stergioulas [265, 267], à partir du code KEH(SF) (cf. § 6.2). La comparaison avec notre code est présentée dans la Table 2 de [267]. Le très bon accord obtenu (écarts relatifs de quelques 0.1%) montre que la différence avec les calculs antérieurs discutés au § 8.1 reflète bien le manque de précision de ces derniers.

## Chapitre 9

# Étoiles de quarks étranges très compactes

### 9.1 L'équation d'état de Dey et al.

De nombreux physiciens ont cherché des alternatives au modèle du sac MIT (§ 8.3) pour décrire la matière de quarks. Ainsi M. Dey, I. Bombaci, J. Dey, S. Ray & B.C. Samanta [115] ont construit en 1998 une équation d'état qui rend compte de la liberté asymptotique des quarks et qui décrit l'interaction entre les quarks par

- un potentiel vecteur rendant compte des échanges de gluons ;
- un potentiel scalaire dépendant de la densité et qui restaure la symétrie chirale à haute densité.

Cette équation d'état est un peu moins phénoménologique que le simple modèle du sac MIT. Elle conduit à des étoiles très compactes. Dans l'article [A9], nous avons montré que l'équation d'état de Dey et al. peut être approximée par l'expression linéaire<sup>1</sup>

$$p = a(e - e_0) , \quad (9.1)$$

où  $e_0$  désigne la densité d'énergie à pression nulle (surface de l'étoile).  $a$  est une constante, qui n'est autre que le carré de la vitesse du son :  $c_s^2 = dp/de$ . A température nulle, le Premier Principe de la Thermodynamique conduit à la relation suivante entre la densité d'énergie  $e$ , la pression  $p$  et la densité baryonique  $n$  :

$$\mu := \frac{de}{dn} = \frac{e + p}{n} . \quad (9.2)$$

Cette dernière relation et l'approximation (9.1) donnent la forme suivante pour l'équation d'état en fonction de la densité baryonique  $n$  :

$$e(n) = \frac{e_0}{a + 1} \left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^{a+1} + a \right] \quad (9.3)$$

$$p(n) = \frac{a e_0}{a + 1} \left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^{a+1} - 1 \right] , \quad (9.4)$$

---

<sup>1</sup>Nous utilisons les mêmes notations que dans l'Eq. (4).

où  $n_0$  est la densité baryonique à pression nulle (surface de l'étoile). Deux réalisations du modèle de Dey et al. [115] ont été utilisées dans la littérature. En termes des paramètres  $a$ ,  $e_0$  et  $n_0$ , elles correspondent à

$$\text{Dey1 : } a = 0.463 \quad e_0/c^2 = 1.15 \times 10^{18} \text{ kg m}^{-3} \quad n_0 = 0.725 \text{ fm}^{-3} \quad (9.5)$$

$$\text{Dey2 : } a = 0.455 \quad e_0/c^2 = 1.33 \times 10^{18} \text{ kg m}^{-3} \quad n_0 = 0.805 \text{ fm}^{-3} \quad (9.6)$$

On peut remarquer que l'équation d'état du modèle du sac MIT sous la forme SQM0 (Eq. (1) de [A8]) peut être mise sous la forme (9.3)-(9.4), avec  $a = 1/3$  et  $e_0 = 4B$ . La différence principale avec Dey1 et Dey2 vient alors

- de la valeur de  $a$  qui est plus élevée pour Dey1 (0.463) et Dey2 (0.455) que pour SQM0 (0.333)
- des valeurs de surface  $e_0$  et  $n_0$  qui sont beaucoup plus élevées pour le modèle de Dey et al. que pour celui du sac MIT (cf. Eq. (5) de [A8]) :

$$e_0^{\text{Dey1}} \simeq 2.7 e_0^{\text{SQM0}} \quad \text{et} \quad e_0^{\text{Dey2}} \simeq 3.1 e_0^{\text{SQM0}} \quad (9.7)$$

$$n_0^{\text{Dey1}} \simeq 2.5 n_0^{\text{SQM0}} \quad \text{et} \quad n_0^{\text{Dey2}} \simeq 2.8 n_0^{\text{SQM0}} \quad (9.8)$$

## 9.2 Notre étude [A9]

En collaboration avec trois des auteurs de l'équation d'état de Dey et al. [115] (J. & M. Dey et M. Ray, de Calcutta), mes collègues polonais (D. Gondek-Rosińska, T. Bulik et J.L. Zdunik) et moi avons tout d'abord établi l'ajustement linéaire (9.1),(9.5),(9.6) à l'aide de la méthode des moindres carrés pour l'équation d'état de Dey et al. (Fig. 1 de [A9]).

Nous avons ensuite calculé la structure des étoiles bâties sur cette équation d'état, à l'aide du code présenté au Chap. 8. Nous avons notamment obtenu les résultats suivants :

- La masse maximale des configurations statiques est très faible :  $M_{\text{max}}^{\text{stat}} = 1.44 M_{\odot}$  pour Dey1 et même  $1.32 M_{\odot}$  pour Dey2 — ce qui est inférieur à la masse du pulsar binaire PSR 1913+16! Les rayons circonférentiels correspondants sont aussi très faibles :  $R = 7.1 \text{ km}$  (resp.  $6.5 \text{ km}$ ) pour Dey1 (resp. Dey2).
- La masse maximale tenant compte de la rotation est  $M_{\text{max}} = 2.05 M_{\odot}$  (resp.  $1.88 M_{\odot}$ ) pour Dey1 (resp. Dey2).
- La période de rotation minimale est très courte :  $P_{\text{min}} = 0.39 \text{ ms}$  (resp.  $0.36 \text{ ms}$ ) pour Dey1 (resp. Dey2).

Les étoiles étranges de ce type auraient donc pu être des candidates pour expliquer le pseudo-pulsar de 0.5 ms dans le reste de la supernova SN 1987A (cf. Introduction de la Partie II).

Enfin, tout comme les étoiles étranges construites sur l'équation d'état SQM0, les étoiles construites sur l'équation d'état de Dey et al. ont un rapport énergie cinétique sur énergie potentielle gravitationnelle,  $T/|W|$ , très élevé (cf. Fig. 6 de [A9]), ce qui en fait potentiellement de bons candidats à l'émission d'ondes gravitationnelles.

## Chapitre 10

# Peut on mettre en évidence les étoiles de quarks étranges par l'observation des binaires X ?

### 10.1 Les binaires X

Une *binaire X* est un système binaire serré dans lequel un objet compact accrète de la matière (hydrogène) depuis une étoile compagne située sur la séquence principale. Le transfert de matière a lieu soit parce que le compagne remplit son lobe de Roche (binaire X de faible masse), soit parce qu'il est le siège d'un fort vent stellaire, dont une partie est captée par l'objet compact (binaire X de grande masse). L'objet compact dans les binaires X est soit une étoile à neutrons (ou une étoile de quarks étranges), soit un trou noir<sup>1</sup>. On dit que la binaire X est *de grande masse* (resp. *de faible masse*) si la masse du compagne est supérieure (resp. *inférieure*) à la masse de l'objet compact. Les abréviations anglaises correspondantes sont HMXB (*High Mass X-ray Binary*) et LMXB (*Low Mass X-ray Binary*).

On connaît environ 70 binaires X de grande masse et 125 binaires X de faible masse dans notre Galaxie. Elles constituent les sources X les plus brillantes du ciel (après le Soleil), la plus brillante étant sans conteste Scorpius X 1, découverte dès les premiers vols extra-atmosphériques de fusées sondes, au début des années 1960. Nombre de binaires X sont des sources transitoires. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [200], ainsi qu'à l'article de revue [281].

### 10.2 Les observations du satellite RXTE

Le satellite Rossi X-ray Timing Explorer (RXTE) (Fig. 10.1) a été lancé par la NASA le 30 décembre 1995. Il se distingue de ces prédécesseurs par une grande surface collectrice et surtout une très grande résolution temporelle, de l'ordre de la microseconde. Cela en fait un instrument de tout premier plan pour l'étude de la variabilité temporelle des objets compacts.

Les observations menées à l'aide de RXTE ont conduit à la découverte de trois types de variabilité milliseconde dans les binaires X (pour plus de détails, cf. l'article de revue [279]) :

---

<sup>1</sup>Si l'objet compact est plutôt une naine blanche, alors le système binaire est qualifié de *variable cataclysmique*.

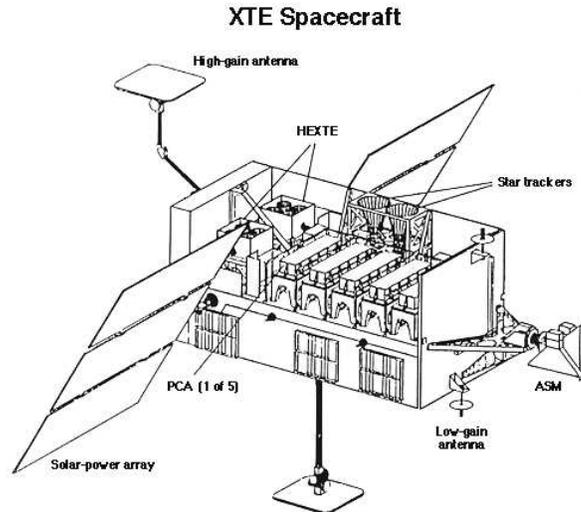


FIG. 10.1 – Le satellite Rossi XTE.

- le premier pulsar X milliseconde en 1998 : SAX J1808.4-3658, de période  $P = 2.5$  ms [287] ; depuis trois autres pulsars X milliseconde ont été découverts par RXTE : XTE J1715-305 ( $P = 2.3$  ms) [211], XTE J0929-314 ( $P = 5.4$  ms) [242], 4U 1636-53 ( $P = 1.7$  ms) [268]. Ces pulsars X milliseconde fournissent le “chaînon manquant” dans l’explication des pulsars radio milliseconde : on supposait en effet que ces derniers avaient été accélérés lors d’une phase d’accrétion dans un système binaire X. Les découvertes de RXTE en ont fourni la preuve.
- des oscillations milliseconde lors des explosions thermonucléaires à la surface des étoiles à neutrons. Ces explosions, qualifiées de *sursauts de type I*, correspondent à la fusion de l’hydrogène accrété à la surface de l’étoile compacte dans la binaire X. Elles libèrent une énergie de  $10^{32}$  à  $10^{33}$  J sur des échelles de temps de l’ordre de la seconde. Les oscillations milliseconde détectées par RXTE dans ces événements sont attribuées à la modulation du signal par la rotation de l’étoile à neutrons. Il s’agit donc également d’une preuve de la rotation rapide des objets compacts accrétant dans les binaires X.
- des oscillations quasi-périodiques (QPO) de haute fréquence (kilohertz) dans une vingtaine de binaires X de faible masse, dont Sco X-1 (Fig. 10.2). Nous discuterons ces dernières plus en détail au § 10.3.

### 10.3 Oscillations quasi-périodiques dans les binaires X de faible masse

Dans chaque objet, les QPO de haute fréquence<sup>2</sup> découverts par RXTE sont dédoublés et centrés sur deux fréquences,  $f_1$  et  $f_2$  (cf. Fig. 10.2), avec  $f_1 \sim 500 - 900$  Hz et  $f_2 \gtrsim 1$  kHz. Les QPO ont très vite été attribués au mouvement de la matière accrétée au voisinage de l’objet compact. Dans l’un des modèles les plus répandus (cf. [279])  $f_2$  est une fréquence orbitale au voisinage de l’étoile et  $f_1$  la fréquence de battement entre  $f_2$  et la fréquence de rotation de

<sup>2</sup>On connaissait auparavant des QPO de basse fréquence, de quelques dizaines de hertz, dans les binaires X.

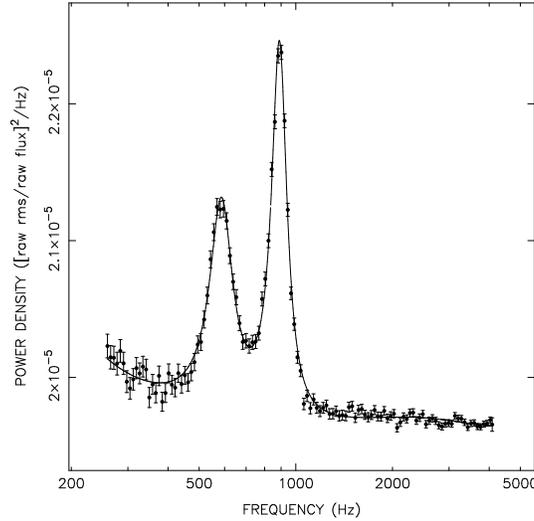


FIG. 10.2 – Spectre de puissance de la variabilité temporelle de la binaire X Sco X-1 observée avec RXTE. Les deux pics sont la signature d’oscillations quasi-périodiques de haute fréquence [d’après [280]].

l’étoile centrale :  $f_1 = f_2 - f_{\text{rot}}$ . Ainsi les observations de RXTE ouvrent l’accès aux fréquences orbitales autour des étoiles compactes. Or, comme nous allons le voir au § 10.4, il existe une borne supérieure aux fréquences orbitales : celle de la dernière orbite stable. Cette dernière dépend du champ gravitationnel de l’objet central et permet potentiellement de distinguer entre une étoile à neutrons et une étoile de quarks étranges.

La plus grande fréquence de QPO mesurée par RXTE est [282]

$$\max f_2 = 1329 \pm 4 \text{ Hz} \quad \text{dans } 4\text{U } 0614+09. \quad (10.1)$$

Pour le QPO de la binaire X 4U 1820-30, la fréquence  $f_2$  augmente en fonction de la luminosité (donc du taux d’accrétion) puis sature à un certain seuil. Ce phénomène a été interprété par Kaaret et al. [182] comme la signature de la dernière orbite stable, qui serait alors

$$f_{\text{ISCO}} = 1.07 \text{ kHz} \quad \text{dans } 4\text{U } 1820-30. \quad (10.2)$$

## 10.4 Dernière orbite stable autour des étoiles relativistes

### 10.4.1 Cas de la métrique de Schwarzschild

Rappelons tout d’abord qu’en vertu du théorème de Birkhoff tout objet à symétrie sphérique admet la métrique de Schwarzschild comme métrique externe et qu’il ne s’agit aucunement de l’apanage des trous noirs. Il est alors bien connu (cf. par exemple Chap. 25 de [218]) que les orbites circulaires stables de particules massives dans la métrique de Schwarzschild n’existent qu’au delà d’un certain rayon, qui vaut<sup>3</sup>

$$R_{\text{ISCO}} = \frac{6GM}{c^2} = 6\Xi R, \quad (10.3)$$

où  $M$  est la masse de l’objet central,  $R$  son rayon et  $\Xi$  son paramètre de compacité introduit par l’Eq. (1), page 15. *ISCO* signifie *Innermost Stable Circular Orbit*. Pour une étoile faiblement

<sup>3</sup> $R$  dénote le rayon circonférentiel, i.e. la coordonnée radiale de Schwarzschild

relativiste,  $\Xi \ll 1$  et  $R_{\text{ISCO}}$  est plus petit  $R$ . Les orbites circulaires stables existent alors jusqu'à la surface de l'étoile. Par contre, pour des objets compacts comme les étoiles à neutrons et les étoiles de quarks étranges,  $\Xi \sim 0.2$  et  $R_{\text{ISCO}} \sim 1.2 R$ . Il existe alors une dernière orbite stable, proche de la surface de l'étoile, mais distincte de celle-ci.

La fréquence orbitale de la dernière orbite stable est donnée par la formule

$$f_{\text{ISCO}} = \frac{1}{2\pi 6^{3/2}} \frac{c^3}{GM} = 1570 \left( \frac{1.4 M_{\odot}}{M} \right) \text{ Hz} . \quad (10.4)$$

### 10.4.2 Cas des étoiles en rotation

La métrique des étoiles en rotation est donnée par l'Eq. (1.3). Établissons alors l'équation qui régit les géodésiques de genre temps dans le plan équatorial (trajectoires des particules tests). Considérons une particule test de 4-vitesse  $\mathbf{u}$  et de masse  $m$ . Dire qu'elle suit une géodésique revient à dire que sa 4-accélération est nulle :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 . \quad (10.5)$$

On déduit facilement de cette équation et de l'équation de Killing pour les deux vecteurs de Killing  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{m}$  introduits au § 1.1 que les deux quantités suivantes sont conservées le long de la géodésique :

$$\bar{E} := -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{u} = -(e_t)^\mu u_\mu = -u_t \quad (10.6)$$

$$\bar{L} := \mathbf{m} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{u} = (e_\varphi)^\mu u_\mu = u_\varphi . \quad (10.7)$$

Si la trajectoire de la particule atteint l'infini,  $\bar{E}$  et  $\bar{L}$  sont respectivement son *énergie spécifique* et son *moment cinétique spécifique* (par rapport à l'axe de rotation) mesurés par un observateur asymptotiquement inertiel.

Pour un mouvement confiné dans le plan équatorial ( $\theta = \pi/2$ ), non seulement  $u_t$  et  $u_\varphi$  sont constants (Eqs. (10.6)-(10.7)), mais également  $u_\theta$  (qui est d'ailleurs nul :  $u_\theta = g_{\theta\mu} u^\mu = A^2 r^2 u^\theta = A^2 r^2 d\theta/d\tau = 0$ , où  $\tau$  dénote le temps propre de la particule). Il n'y a donc qu'une seule composante covariante de la 4-vitesse susceptible de varier le long de la géodésique :  $u_r$ . La relation de normalisation de la 4-vitesse,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ , permet d'exprimer  $u_r$  en fonction de  $u_t = -\bar{E}$ ,  $u_\theta = 0$  et  $u_\varphi = \bar{L}$  :

$$\frac{1}{A^2} u_r^2 = \frac{1}{N^2} (\bar{E} - N^\varphi \bar{L})^2 - 1 - \frac{\bar{L}^2}{B^2 r^2} . \quad (10.8)$$

En guise de vérification, on peut remarquer que cette expression est conforme à l'Eq. (7) de [247]. En utilisant

$$u_r = g_{r\mu} u^\mu = A^2 u^r = A^2 \frac{dr}{d\tau} , \quad (10.9)$$

on peut réécrire l'Eq. (10.8) comme

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r, \bar{E}, \bar{L}) = 0 , \quad (10.10)$$

où

$$V(r, \bar{E}, \bar{L}) := -\frac{1}{2A^2 N^2} (\bar{E} - N^\varphi \bar{L})^2 + \frac{\bar{L}^2}{2A^2 B^2 r^2} + \frac{1}{2A^2} . \quad (10.11)$$

L'équation (10.10) signifie que le mouvement géodésique dans le plan équatorial d'une étoile en rotation est équivalent au mouvement Newtonien d'une particule dans un espace à une dimension sous l'effet du potentiel effectif  $V(r, \bar{E}, \bar{L})$ .

Il est instructif de prendre la limite sphérique de (10.11). La métrique est alors celle de Schwarzschild et bien que nous utilisions des coordonnées quasi-isotropes  $(r, \theta, \varphi)$  (qui deviennent isotropes dans la présente limite), l'élément de longueur (1.3) est suffisamment général pour comprendre également les coordonnées de Schwarzschild  $(R, \theta, \varphi)$  pour des déplacements limités au plan équatorial ( $d\theta = 0$ ). Il suffit de poser  $N^2 = 1 - 2M/R$ ,  $A^2 = (1 - 2M/R)^{-1}$ ,  $B^2 = 1$  et  $N^\varphi = 0$ . Les calculs fait jusqu'alors restent valides et l'expression (10.11) redonne l'expression classique pour le potentiel effectif dans la métrique de Schwarzschild et en coordonnées de Schwarzschild :

$$V(R, \bar{E}, \bar{L}) = -\frac{M}{R} + \frac{\bar{L}^2}{2R^2} - \frac{M\bar{L}^2}{R^3} + \frac{1}{2} [1 - \bar{E}^2] . \quad (10.12)$$

Le premier terme (celui en  $1/R$ ) n'est autre que le potentiel gravitationnel newtonien. Le second terme (en  $1/R^2$ ) est le potentiel centrifuge newtonien. Le troisième terme (en  $1/R^3$ ) est purement relativiste. Il est attractif et domine le potentiel centrifuge (qui est répulsif) à courte distance. C'est lui qui est responsable de l'existence de la dernière orbite stable. Le dernier terme est une constante et ne contribue donc pas au mouvement.

En vertu de l'Eq. (10.10), une orbite circulaire ( $r = \text{const}$ ) correspond à  $V(r, \bar{E}, \bar{L}) = \text{const}$  et donc à un extremum de  $V$  :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{\bar{E}, \bar{L}} = 0 . \quad (10.13)$$

L'ISCO correspond à un changement de type d'extremum : de minimum (équilibre stable) à maximum (équilibre instable). Elle est donc donnée par l'annulation de la dérivée seconde de  $V$  :

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right|_{\bar{E}, \bar{L}} = 0 . \quad (10.14)$$

## 10.5 Notre étude pour les étoiles de quarks étranges [A10]

Leszek Zdunik et moi avons implémenté la formule (10.14) pour le calcul de la dernière orbite stable dans le code de calcul des configurations d'équilibre des étoiles étranges présenté au Chap. 8. Puis, en collaboration avec Pawel Haensel et Dorota Gondek-Rosińska, nous avons calculé des modèles d'étoiles de quarks étranges en rotation, en utilisant deux équations d'état du type sac MIT (cf. § 8.3) :

$$\mathbf{SQM1} : \quad B = 56 \text{ MeV fm}^{-3} \quad m_s = 200 \text{ MeV } c^{-2} \quad \alpha_c = 0.2 , \quad (10.15)$$

$$\mathbf{SQM2} : \quad B = 40 \text{ MeV fm}^{-3} \quad m_s = 100 \text{ MeV } c^{-2} \quad \alpha_c = 0.6 . \quad (10.16)$$

Les valeurs des paramètres de SQM1 sont à peu près "standard". Par contre, les paramètres de SQM2 sont quelque peu extrêmes. SQM2 a été introduite pour discuter des observations de RXTE.

Le rayon circonférentiel de la dernière orbite stable, en fonction de la fréquence de rotation de l'étoile, est représenté sur les Figs. 1 et 3 de [A10], pour SQM1 et SQM2 respectivement. La variation de  $f_{\text{ISCO}}$  avec la fréquence de rotation de l'étoile est quant à elle donnée sur les Figs. 2 et 4 de [A10].

Dans notre étude, nous avons tenu compte de la présence d’une croûte de matière nucléaire “ordinaire” à la surface de l’étoile de quarks. Pour ce faire, nous avons ajouté au rayon de l’étoile obtenu par le calcul l’épaisseur d’une croûte telle qu’obtenue dans l’approximation de rotation lente de Glendenning & Weber [146]. Nous discuterons ce point plus en détail au § 13.2.

Les principales conclusions de notre étude sont les suivantes

- La formule pour la détermination de la dernière orbite stable qui consiste à ajouter une correction en  $cJ/GM^2$  (où  $J$  est le moment cinétique) à (10.3) [184] n’est plus valable dès lors que la fréquence de rotation dépasse les  $\sim 200$  Hz. Ce point sera discuté plus en détail au Chap. 11.
- Contrairement aux étoiles à neutrons, la dernière orbite stable n’est pas “absorbée” par l’étoile lorsque celle-ci tourne vite. Autrement dit, les étoiles étranges sont suffisamment compactes pour qu’une dernière orbite stable existe toujours autour d’elles, même lorsqu’elles tournent à la vitesse maximale (vitesse keplerienne). Cette conclusion sera légèrement modifiée pour les étoiles de quarks étranges entourées d’une croûte, lorsqu’on calcule la structure de cette dernière de manière auto-cohérente (et non de la manière approchée effectuée ici), ainsi que nous le verrons, au Chap. 13.
- La contrainte observationnelle (10.1) est tout à fait compatible avec le modèle standard SQM1 : la fréquence de la dernière orbite stable est toujours supérieure à 1.33 kHz, sauf pour des vitesses proches de la vitesse keplerienne ou des masses supérieures à  $1.6 M_{\odot}$  et une rotation lente.
- Par contre, si on admet la contrainte (10.2), qui donne une fréquence de dernière orbite stable très basse<sup>4</sup>, l’équation d’état “standard” SQM1 avec croûte est exclue et il faut se tourner vers SQM2.

## 10.6 Développements ultérieurs

Dans cette première étude de la dernière orbite stable autour des étoiles de quarks étranges, nous n’avons pas considéré des configurations extrêmes, à savoir très peu massives et très massives. Les premières seront étudiées au Chap. 11, les deuxièmes au Chap. 12. Enfin l’ajout de la croûte solide sera effectué de manière exacte au Chap. 13.

---

<sup>4</sup>Pour des étoiles statiques, la fréquence  $f_{\text{ISCO}} = 1.07$  kHz conduit à une masse  $M = 2.05 M_{\odot}$ , en vertu de l’Eq. (10.4).

# Chapitre 11

## Stabilité des orbites autour des corps newtoniens en rotation rapide

### 11.1 Étoiles étranges de faible masse et corps newtoniens

Au cours de l'étude [A10] (Chap. 10), nous avons constaté qu'une dernière orbite stable existait autour des étoiles étranges même lorsque leur masse était très petite<sup>1</sup>, pourvu qu'elles tournent suffisamment vite. Or une étoile étrange de faible masse est très peu relativiste. En effet, sa densité est quasiment uniforme et égale à  $\rho_0 \simeq 4B/c^2 \simeq 4.3 \times 10^{17} B_{60} \text{ kg m}^{-3}$  (Eq. (5) de [A8]), si bien que le facteur de compacité (Eq. (1), page 15) varie comme

$$\Xi \propto M^{2/3} . \quad (11.1)$$

On ne peut donc pas invoquer les effets relativistes discutés au § 10.4.1 pour expliquer l'existence d'une dernière orbite stable.

Cette dernière est en fait due à l'écart très important à la symétrie sphérique d'un objet en rotation rapide. Son potentiel gravitationnel (newtonien) s'écarte alors considérablement du bon vieux potentiel en  $-GM/r$  donné par le théorème de Gauss, et pour lequel il n'y a évidemment pas d'orbite instable.

### 11.2 Notre étude de la dernière orbite stable en régime newtonien [A11]

Le potentiel effectif pour des mouvements orbitaux confinés au plan équatorial d'un corps newtonien est à l'ordre quadrupolaire par

$$V(r, \bar{L}) = -\frac{GM}{r} + \frac{\bar{L}^2}{2r^2} - \frac{GQ}{2r^3} , \quad (11.2)$$

où  $\bar{L}$  est le moment cinétique spécifique de la particule test et  $Q$  le moment quadrupolaire de l'objet central, supposé axisymétrique par rapport à l'axe de rotation. Il convient de rapprocher cette formule de l'expression (10.12) pour les orbites en métrique de Schwarzschild. Le terme

---

<sup>1</sup>Rappelons que contrairement aux étoiles à neutrons, il n'existe pas de masse minimale pour les étoiles de quarks étranges et qu'en théorie on peut avoir une séquence complète depuis les strangelets microscopiques jusqu'aux étoiles de masse solaire.

quadrupolaire  $-GQ/(2r^3)$  joue le même rôle que le terme relativiste  $-M\bar{L}^2/r^3$  dans (10.12) : il est attractif et domine le potentiel centrifuge  $\bar{L}^2/2r^2$  aux petits  $r$ , conduisant à une dernière orbite stable.

Dans l'article [A11] nous donnons deux exemples analytiques où cela se produit : celui d'une tige en rotation à la même vitesse que la vitesse orbitale et celui d'un disque. Ainsi, dans le plan équatorial d'un disque infiniment mince et de densité uniforme, il existe une dernière orbite stable située à

$$R_{\text{ISCO}} = 1.2885 R, \quad (11.3)$$

où  $R$  est le rayon du disque.

Nous avons ensuite des calculs pour les étoiles de quarks étranges de faible masse, en utilisant l'équation d'état du sac MIT avec les paramètres SQM1 (Eq. (10.15)). Il convient de remarquer que, tout comme pour les disques, la formule à l'ordre quadrupolaire (11.2) n'est pas suffisante pour déterminer la position de la dernière orbite stable (elle donne une erreur de 100%). Il faut faire le calcul exact, à l'aide de la formule complète (10.11).

Dans la pratique, les étoiles ordinaires ou les planètes ne tournent pas assez vite pour qu'une dernière orbite stable existe au delà de leur surface. Notre étude [A11] a montré que les étoiles étranges de faible masse et en rotation rapide sont les seuls exemples d'objets "physiques" pour lesquels cette instabilité orbitale purement newtonienne peut être effective.

### 11.3 Développements ultérieurs

Notre étude [A11] a été confirmée par un travail d'Amsterdamski, Bulik, Gondek-Rosińska & Kluzniak [34], qui ont spécifiquement considéré le cas d'ellipsoïdes de Maclaurin. Ils ont notamment montré qu'une dernière orbite stable existe (dans le plan équatorial) lorsque l'excentricité des ellipsoïdes est supérieure à  $e_{\text{crit}} = 0.835$ . Il est à noter que cette excentricité situe ces ellipsoïdes légèrement au delà du point de bifurcation vers les ellipsoïdes de Jacobi et de Dedekind ( $e_{\text{bif}} = 0.813$ ), donc sur la branche séculairement instable, mais en deçà de l'instabilité dynamique ( $e = 0.953$ ).

# Chapitre 12

## Fréquences minimales de la dernière orbite stable autour des étoiles de quarks étranges

### 12.1 Notre article [A12]

Dans cet article, nous avons étendu l'étude présentée au Chap. 10 en explorant la dernière orbite stable autour des étoiles de quarks étranges, pour des configurations de très faible masse aussi bien que des configurations supramassives, qui sont des étoiles dont la masse baryonique est supérieure à la masse maximale des configurations statiques (cf. Chap. 5) et qui n'étaient pas prises en compte dans [A10] (Chap. 10).

Pour ce faire, nous avons utilisé deux codes numériques : celui de notre groupe, décrit au Chap. 8, et celui de Stergioulas [267, 265]. Ce dernier code n'est pas aussi précis que notre code spectral (l'accord entre les deux codes est toutefois très bon, comme discuté au § 8.5) mais il a l'avantage de pouvoir calculer des configurations très aplaties, alors que notre méthode spectrale multi-domaine ne permet pas d'atteindre  $r_p/r_{\text{eq}} < 1/3$ , ainsi que nous le verrons au Chap. 29.

Les calculs ont été fait pour l'équation d'état du sac MIT dans sa version SQM0 (Eq. (8.3)) et également dans une version avec  $m_s = 250 \text{ MeV } c^{-2}$ , afin d'étudier l'influence de la masse du quark  $s$  sur le résultat. L'accent a été mis sur la détermination du minimum de la fréquence de la dernière orbite stable,  $f_{\text{ISCO}}$ . La motivation est que l'observation d'une fréquence de de dernière orbite stable particulièrement basse (comme celle donnée par l'Eq. (10.2)) permettrait de contraindre fortement l'équation d'état.

Les principaux résultats de notre étude sont les suivants :

- Lorsque l'étoile tourne lentement, ou pour le moins à une fréquence de rotation  $f_{\text{rot}}$  inférieure à  $\sim 1 \text{ kHz}$ , le minimum de  $f_{\text{ISCO}}$  est obtenu pour des configurations à la limite de stabilité par rapport aux perturbations axisymétriques : ce sont quasiment les configurations de masse maximale à  $f_{\text{rot}}$  fixée (ligne en pointillés sur la Fig. 5 de [A8], Chap. 8); un cas particulier de cette conclusion est le cas  $f_{\text{rot}} = 0$ , pour lequel on peut appliquer la formule (10.4) et voir immédiatement que le minimum de  $f_{\text{ISCO}}$  est atteint pour la configuration statique de masse maximale.
- Pour les grandes vitesses de rotation, le minimum de  $f_{\text{ISCO}}$  est atteint pour des configurations en rotation keplerienne. Ce minimum peut être très petit, de l'ordre de 800 Hz pour des fréquences  $f_{\text{rot}}$  voisines de 1 kHz (trou dans la zone hachurée des Figs. 1 et 4 de

[A12]). Ce résultat semble contredire celui obtenu dans [A10] (Chap. 10) pour l'équation d'état SQM1, mais dans [A10], nous avons tenu compte de la croûte solide, alors que les résultats ici sont obtenues pour des étoiles étranges "nues".

## 12.2 Développements ultérieurs

Les résultats obtenus dans [A12] ne tiennent pas compte d'une possible croûte solide autour des étoiles de quarks étrange. Cet aspect sera considéré au Chap. 13.

# Chapitre 13

## Écorce de matière “ordinaire” autour des étoiles de quarks étranges

### 13.1 L'écorce solide

#### 13.1.1 Possibilité d'une écorce

L'existence d'une écorce de matière nucléaire ordinaire à la surface des étoiles de quarks étranges a été proposée en 1986 par Alcock, Farhi & Olinto [30]. Leur argument est le suivant. En raison de leur masse les quarks  $s$  sont un peu moins nombreux dans la matière de quarks que les quarks  $u$  et  $d$  (cf. Fig. 7.1) :  $n_s \lesssim n_u = n_d$ . Il en résulte que la charge totale des quarks est légèrement positive (cf. Tab. 7.1) :  $q = 2e/3 n_u - e/3 n_d - e/3 n_s > 0$ . Il existe donc des électrons dans le milieu pour assurer la neutralité électrique globale de l'étoile. Ainsi que nous l'avons vu au Chap. 8, la densité de quarks est de l'ordre de la densité nucléaire à la surface de l'étoile. En fait la distribution des quarks tombe à zéro sur une échelle caractéristique de l'interaction forte, à savoir le fermi. Par contre, les électrons sont liés par l'interaction électromagnétique et leur distribution tombe moins vite à zéro : l'échelle correspondante est l'ordre de  $z_e \sim 300$  fm. Ainsi les électrons s'étendent légèrement à l'extérieur de la sphère de quarks, sur une hauteur  $z_e$ . Il résulte de ce déplacement de charge un très fort champ électrique à la surface de la boule de quarks. En résolvant l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique, Alcock et al. [30] ont estimé le champ électrique à  $E \sim 10^{19}$  V m<sup>-1</sup>, dirigé vers l'extérieur de l'étoile. La différence de potentiel correspondante est de l'ordre de  $\Delta V \sim 10^7$  V, si bien que l'énergie potentielle électrostatique d'un électron dans ce champ vaut  $e\Delta V \sim 10$  MeV.

Un champ électrique d'une telle intensité peut soutenir une couche (l'écorce) de matière formée de noyaux (positifs) et d'électrons (négatifs). L'écorce est globalement neutre mais les charges y sont réparties de manière à assurer l'équilibre du bord inférieur avec le champ électrique issu de la sphère de quarks. L'écorce dans son ensemble est gravitationnellement liée à l'étoile, mais elle est séparée de la matière de quarks par un “gap” de l'ordre de  $z_e \sim 300$  fm.

#### 13.1.2 Comparaison avec l'écorce des étoiles à neutrons

Une différence importante avec l'écorce solide des étoiles à neutrons est que cette dernière existe jusqu'à la densité nucléaire  $\rho_{\text{nuc}} \sim 2 \times 10^{17}$  kg m<sup>-3</sup>. On distingue en effet, pour les étoiles à neutrons,

- une *écorce externe*, d'épaisseur  $\sim 0.5$  km et de densité  $\rho < \rho_{\text{drip}} = 4.3 \times 10^{14}$  kg m<sup>-3</sup>,

formée d’un cristal de Coulomb de noyaux lourds en équilibre bêta avec un gaz d’électrons dégénérés et relativistes.  $\rho_{\text{drip}}$  est la densité critique au delà de laquelle apparaissent des neutrons libres dans le milieu (*neutron drip point*);

- une *écorce interne*, d’épaisseur  $\sim 1$  km et de densité  $\rho_{\text{drip}} < \rho < \rho_{\text{nuc}}$ , constituée d’un cristal de noyaux riches en neutrons, d’un gaz de neutrons superfluides et d’un gaz d’électrons.

L’écorce interne ne peut pas exister pour une étoile de quarks, car les neutrons libres ne sont pas soumis à la barrière de potentiel électrostatique à la surface de la matière de quarks, de sorte qu’ils seraient absorbés par cette dernière et dissous en quarks. Ainsi une écorce à la surface d’étoile de quarks se termine nécessairement à  $\rho_{\text{drip}}$ . En l’absence de rotation, sa masse est de l’ordre de  $10^{-5} M_{\odot}$ , contre environ  $0.1 M_{\odot}$  pour les étoiles à neutrons.

### 13.1.3 Formation d’une écorce

Il n’est pas clair que toutes les étoiles de quarks étranges doivent être entourées d’une écorce. En particulier les protons du milieu interstellaire accrétés par une étoile étrange isolée atteignent à la surface de l’étoile une énergie cinétique de l’ordre de

$$E_{\text{cin}} \simeq \Xi m_p c^2, \quad (13.1)$$

où  $m_p$  est la masse du proton et  $\Xi$  le facteur de compacité de l’étoile étrange (cf. Eq. (1), page 15) :  $\Xi \sim 0.1$ . On a donc  $E_{\text{cin}} \sim 100$  MeV, ce qui est bien supérieur à la barrière de potentiel électrostatique qui est de l’ordre de 10 MeV (§ 13.1.1). Ainsi les protons du milieu interstellaire traversent la barrière électrostatique et ne forment pas d’écorce.

Par contre si l’accrétion de matière s’effectue via un disque d’accrétion, comme dans les binaires X de faible masse (§ 10.1), une bonne partie de l’énergie (13.1) est dissipée par la friction visqueuse dans le disque et il est tout à fait envisageable que la matière accrétée soit stoppée par la barrière électrostatique et forme une écorce, d’autant plus que l’angle d’arrivée des protons par rapport à la normale à la surface de l’étoile est très grand comme nous le verrons au Chap. 14.

### 13.1.4 Alternatives théoriques prédisant une absence d’écorce

La matière de quarks est susceptible d’être le siège d’un phénomène de *supraconductivité de couleur*. Rajagopal & Wilczek [239] ont montré récemment que la matière de quarks purs serait alors strictement neutre, en dépit de la différence de masses des diverses saveurs de quarks (cf. § 13.1.1). On aurait alors  $n_s = n_u = n_d$  et  $n_e = 0$ . En l’absence des électrons l’argument décrit au § 13.1.1 ne s’appliquerait donc pas et l’on aurait des étoiles de quarks “nues”, sans écorce.

### 13.1.5 Le problème des glitches

L’écorce solide des étoiles de quarks étranges est notablement plus petite que celle des étoiles à neutrons, puisqu’elle s’arrête au point de lâchage des neutrons. Alpar [33] a utilisé cette propriété pour dire que les étoiles étranges ne peuvent pas rendre compte des glitches observés dans certains pulsars.

## 13.2 Études antérieures des propriétés de l'écorce

Après l'introduction de la notion d'écorce à la surface des étoiles de quarks étranges par Alcock, Farhi & Olinto [30] en 1986, la formation et la structure de l'écorce dans les étoiles statiques avec accréation sphérique a été étudiée en 1991 par Haensel & Zdunik [158].

La structure de l'écorce sur les étoiles de quarks en rotation a été calculée dans l'approximation de rotation lente en 1992 par Glendenning & Weber [146]. Dans l'article [A10] (Chap. 10), nous avons résumé les résultats numériques de Glendenning & Weber par une formule simple : l'épaisseur de l'écorce dans le plan équatorial pour une fréquence de rotation  $f$  donnée est

$$t_{\text{eq}}(f) \simeq t_0 \left[ 1 + 0.7 \left( \frac{f}{f_K} \right)^2 \right], \quad (13.2)$$

où  $t_0$  désigne l'épaisseur de l'écorce du modèle statique de même masse baryonique que le modèle considéré et  $f_K$  la fréquence keplerienne à cette masse baryonique-là. Nous avons utilisé la formule (13.2) dans l'article [A10] pour évaluer l'impact d'une écorce sur l'existence de la dernière orbite stable. Il ne s'agissait donc pas d'un calcul auto-cohérent de la structure de l'écorce : nous avons "greffé" le résultat (13.2) obtenu dans le cadre de l'approximation lente par Glendenning & Weber [146] sur nos modèles en rotation rapide.

## 13.3 Notre étude [A13]

Le "gap" de  $\sim 300$  fm entre la sphère de quarks et la écorce peut bien évidemment être négligé à l'échelle de l'étoile. Nous le traitons donc comme une surface d'épaisseur nulle, de part et d'autre de laquelle nous stipulons l'égalité des pressions. Par contre, la densité est discontinue à travers cette surface : elle vaut environ  $4B \sim 4 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$  du côté des quarks et  $\rho_{\text{drip}} \sim 4 \times 10^{14} \text{ kg m}^{-3}$  du côté de la écorce. On a donc une discontinuité de trois ordre de grandeur dans le profil de densité de l'étoile. Nous avons pu traiter une telle discontinuité grâce à la méthode spectrale multi-domaines présentée au Chap. 29. En introduisant deux domaines pour décrire l'étoile et en adaptant la frontière entre ces domaines à la surface de transition entre la matière de quarks et la écorce (Figs. 3 et 4 de [A13]), nous assurons que le profil de densité est  $C^\infty$  dans chaque domaine et pouvons effectuer un calcul précis, exempt du phénomène de Gibbs (oscillations non physiques lorsqu'on tente de décrire une fonction discontinue par un polynôme).

Nous avons utilisé l'équation d'état SQM1 (Eq. (10.15)) pour décrire la matière de quarks, et l'équation d'état de Baym, Pethick & Sutherland (BPS) [52] pour la écorce.

Pour les faibles masses, l'allure de la courbe masse-rayon des étoiles de quarks étranges avec écorce (Fig. 1 de [A13]) est très différente celle des étoiles sans écorce : lorsque la masse diminue, le rayon ne diminue plus mais au contraire réaugmente. En poursuivant la courbe dans le régime du millier de kilomètres, on obtiendrait même une ré-augmentation de la masse vers une masse solaire : c'est le domaine des hypothétiques *naines étranges* proposées par Glendenning, Kettner & Weber [145] en 1995.

Par nos calculs exacts, nous avons montré que les résultats obtenus par Glendenning & Weber [146] dans le cadre de l'approximation de rotation lente (Eq. (13.2)) ne sont valables que pour des fréquences de rotation inférieures à 500 Hz. Au delà l'épaisseur de la écorce doit plutôt être

décrite par la formule suivante (Eq. (4) de [A13]) :

$$t_{\text{eq}}(f) \simeq t_0 \left[ 1 + 0.4 \left( \frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^2 + 0.3 \left( \frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^6 \right]. \quad (13.3)$$

Cette formule reproduit assez bien nos résultats numériques jusqu’à  $f = 1$  kHz. Au delà, l’augmentation de l’épaisseur de la écorce est très important, comme le montre la Fig. 10 de [A13].

Même à la limite keplerienne où son rayon dépasse le kilomètre (Fig. 10 de [A13]), la masse de la écorce reste inférieure à  $10^{-4} M_{\odot}$  (Fig. 9 de [A13]), si bien que la écorce joue un rôle négligeable dans la génération du champ gravitationnel à l’extérieur de l’étoile. Par contre, de par son extension, elle peut “absorber” la dernière orbite stable pour les configurations proches de la vitesse keplerienne (Fig. 7 de [A13]). On a alors une situation similaire à celle des étoiles à neutrons : la dernière orbite stable disparaît à très grande vitesse de rotation. Néanmoins, contrairement aux étoiles à neutrons, cela ne se produit que pour des vitesses de rotations proches de la limite keplerienne, au delà de 1.1 kHz.

## Chapitre 14

# Évolution des étoiles de quarks étranges en accrétion

### 14.1 Accrétion dans les binaires X et formation des pulsars milliseconde

L'accrétion de matière dans les binaires X (§ 10.1) transfère du moment cinétique à l'objet compact et l'accélère jusqu'à des périodes très courtes. C'est comme cela que l'on explique l'existence des pulsars milliseconde ( $P < 10$  ms). On dit pour cette raison que les pulsars milliseconde sont *recyclés*. Ce scénario s'est trouvé confirmé récemment par la découverte par RXTE de quatre pulsars X de périodes comprises entre 1.7 et 5.4 ms dans des binaires X (cf. § 10.2).

La question intéressante est alors de connaître la quantité de masse qu'il faut accréter pour atteindre une période de rotation donnée à partir d'une période initiale et si cela peut se faire en un temps raisonnable. Dans le cas des étoiles à neutrons, l'évolution sous l'effet de l'accrétion a été étudiée par Kluźniak & Wagoner [184] en 1985, dans le cadre de l'approximation lente de Hartle (§ 1.3), puis par Cook, Shapiro & Teukolsky [105] en 1994 pour des modèles en rotation rapide.

Aucune étude n'avait été effectuée avant notre travail [A14] pour les étoiles de quarks étranges. On peut cependant signaler un travail récent de Poghosyan, Grigorian & Blaschke [233] sur l'accrétion sur des étoiles avec un cœur de quarks et une enveloppe de matière nucléaire "ordinaire". Ce type d'étoiles pourrait exister si la matière de quarks ne constituait pas l'état fondamental à pression nulle (hypothèse de Bodmer-Witten, introduite au début de cette Partie), mais à une pression élevée. L'étude de Poghosyan et al. a été effectuée dans le cadre de l'approximation de rotation lente.

### 14.2 Notre étude [A14]

Nous avons calculé l'accélération d'une étoile de quarks étranges qui accrete de la matière depuis un disque d'accrétion situé dans son plan équatorial, dans le cas où le champ magnétique est suffisamment faible ( $B \lesssim 10^5$  T) pour ne jouer aucun rôle dans le processus d'accrétion. On peut alors considérer que le disque d'accrétion s'arrête à la dernière orbite stable et que la matière tombe ensuite sur l'étoile en suivant des géodésiques. Si le champ magnétique avait été très fort, la matière aurait au contraire été canalisée le long des lignes de champ, pour arriver aux pôles magnétiques de l'étoile.

L'étude de la chute d'une particule depuis le bord interne du disque d'accréation est relativement simple, en vertu des deux quantités conservées le long des géodésiques de tout espace-temps axisymétrique et stationnaire (cf. Chap. 10) : l'énergie spécifique  $\bar{E}$  (Eq. (10.6)) et le moment cinétique spécifique  $\bar{L}$  (Eq. (10.7)). En plus, dans le cas présent d'un mouvement confiné au plan équatorial, il existe une troisième quantité conservée la composante  $\theta$  de la 4-vitesse  $u^\theta = d\theta/d\tau = 0$ . Le calcul des composantes de la 4-impulsion de la particule en n'importe quel point de sa trajectoire se ramène alors à un calcul algébrique (Eq. (A.10) de [A14]).

Considérons une quantité de matière, mesurée par son nombre baryonique  $\delta N$ , qui se détache du bord interne interne du disque d'accréation pour tomber sur l'étoile. L'augmentation du moment cinétique total de l'étoile qui en résulte est [299]

$$\delta J = x_l \bar{L}_{\text{ISCO}} m_B \delta N , \quad (14.1)$$

où  $\bar{L}_{\text{ISCO}}$  est la valeur de  $\bar{L}$  pour une orbite circulaire au bord interne du disque d'accréation (dernière orbite stable)<sup>1</sup>,  $m_B = 1.66 \times 10^{-27}$  kg la masse baryonique, et  $x_l \leq 1$  est un paramètre qui mesure la fraction de moment cinétique effectivement transféré à l'étoile. L'augmentation de la masse baryonique de l'étoile consécutive à cette accréation est évidemment

$$\delta M_B = m_B \delta N . \quad (14.2)$$

Pour une équation d'état donnée, l'espace des configurations d'une étoile relativiste en rotation rigide est un espace à deux paramètres (par exemple la densité centrale et la vitesse angulaire de rotation). Les équations (14.1) et (14.2), considérées comme des équations paramétriques, de paramètre  $\delta N$ , définissent alors une trajectoire unique dans l'espace des configurations. Elles suffisent donc à étudier l'évolution de l'étoile sous l'effet de l'accréation. Il convient de noter que  $\bar{L}_{\text{ISCO}}$  évolue également avec l'étoile et doit être recalculé à chaque étape.

En plus de l'évolution des propriétés globales de l'étoile comme  $J$  et  $M_B$ , nous avons calculé l'angle d'incidence de la matière accrétée à la surface de l'étoile, dans le but de discuter de la formation d'une croûte (§ 13.1.3). Comme rappelé plus haut, nous disposons de toutes les composantes de la 4-vitesse des particules en chute libre depuis le bord interne du disque. Il est alors facile de calculer l'angle d'incidence à partir des deux 4-vitesses : celle des particules accrétées et celle de la matière de l'étoile (cf. l'Annexe de l'article [A14]).

---

<sup>1</sup> $\bar{L}_{\text{ISCO}}$  est noté  $l_{\text{ms}}$  dans l'article [A14].

## Troisième partie

# Émission d'ondes gravitationnelles par les étoiles à neutrons en rotation



## Le détecteur VIRGO

Le détecteur d'ondes gravitationnelles VIRGO (Fig. 14.1) est un instrument franco-italien dont la construction a débuté en avril 1996 et qui devrait être opérationnel vers 2003-2004. Il s'agit un interféromètre de Michelson "amélioré", c'est-à-dire dont chaque bras (d'une longueur de 3 km), est une cavité Fabry-Pérot. L'interféromètre est calé sur la frange noire et au passage d'une onde gravitationnelle, la variation relative de longueur des bras (cf. Eq. (2), page 17) provoquera le "défilement" des franges d'interférences et donc un signal lumineux dans la photodiode qui observe la frange noire. Plus précisément, le signal en sortie de l'interféromètre est donné par

$$o(t) = h(t) + n(t), \quad (14.3)$$

où  $n(t)$  est le bruit dans le détecteur et  $h(t)$  est la partie résultant de l'excitation par l'onde gravitationnelle, représentée par ses deux modes de polarisation  $(h_+(t), h_\times(t))$  :

$$h(t) = F_+(\theta, \phi, \psi) h_+(t) + F_\times(\theta, \phi, \psi) h_\times(t), \quad (14.4)$$

$F_+$  et  $F_\times$  sont les fonctions de réponse du détecteur, qui dépendent de la direction  $(\theta, \phi)$  d'arrivée de l'onde par rapport aux bras du détecteur et  $\psi$  est l'angle de polarisation de l'onde par rapport à l'orientation du détecteur.

Le bruit du détecteur  $n(t)$  est caractérisé par sa *densité spectrale de puissance*  $S(f)$  : dans une bande de fréquence  $[f, f + df]$  des sources de bruit indépendantes s'additionnent en quadrature, si bien que l'on définit  $S(f)$  par la formule

$$\langle n(t)^2 \rangle =: S(f) df, \quad (14.5)$$

où la moyenne  $\langle \dots \rangle$  est à prendre sur un grand nombre de réalisations du bruit. On mesure donc le bruit par la quantité  $S(f)^{1/2}$  (unité :  $\text{Hz}^{-1/2}$ ), qui représente le bruit quadratique moyen dans une bande de 1 Hz autour de la fréquence  $f$ . La courbe  $S(f)^{1/2}$  en fonction de  $f$  est représentée sur la Fig. 14.2 pour le détecteur VIRGO. On y constate que VIRGO sera sensible aux ondes gravitationnelles dont la fréquence est comprise entre  $\sim 10$  Hz et quelques kHz, le maximum de sensibilité étant  $S(f)^{1/2} \simeq 3 \times 10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$  autour de 200 Hz. Les facteurs limitant la sensibilité de VIRGO sont

- le bruit thermique des fils de suspension des miroirs entre  $\sim 3$  Hz et  $\sim 40$  Hz ;
- le bruit thermique des miroirs eux-mêmes entre  $\sim 40$  Hz et  $\sim 600$  Hz ;
- le bruit de photons du laser au delà de  $\sim 600$  Hz.

## Les autres détecteurs d'ondes gravitationnelles

Parallèlement à VIRGO, d'autres détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles sont actuellement en construction :

**LIGO**, aux États-Unis, constitué par deux interféromètres de 4 km de long (un dans l'État de Washington et l'autre en Louisiane). La construction de LIGO a débuté en juin 1995. L'optique a été installée en 1999. Le tout premier test grandeur nature a consisté en l'obtention en décembre 1999 des franges d'interférence d'une cavité Fabry-Pérot de 2 km formée dans l'un des bras. La toute première acquisition de données a eu lieu entre le 28 décembre 2001 et le 14 janvier 2002. Mais le détecteur n'a pas encore atteint sa



FIG. 14.1 – Détecteur interférométrique VIRGO, dont la construction s’achève à Cascina, près de Pise [source : INFN/CNRS].

sensibilité maximale : la sensibilité effectivement mesurée en août 2002 est de  $S(f)^{1/2} \simeq 4 \times 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$  pour  $f \sim 300 \text{ Hz}$ , alors que la sensibilité finale devrait être la même que celle de VIRGO à cette fréquence-là, c’est-à-dire deux ordre de grandeur plus basse. Par contre une meilleure isolation sismique permettra à VIRGO d’étendre le domaine de détectabilité vers les basses fréquences, jusqu’à 10 Hz, alors que LIGO ne verra rien en dessous de 60 Hz.

**GEO600**, près d’Hanovre (Allemagne), est un projet germano-britannique. Il s’agit d’un interféromètre de 600 m de long. La sensibilité attendue est environ trois fois moindre que celle de VIRGO ou LIGO autour de 200 Hz. La construction de GEO600 a débuté à l’automne 1995. Les premières données ont été acquises du 28 décembre 2001 au 14 janvier 2002, en coïncidence avec LIGO. GEO600 devrait atteindre sa sensibilité nominale d’ici un an.

**TAMA**, est un projet japonais, dont la première étape a consisté en un interféromètre de 300 m de long, TAMA300, près de Tokyo. Sa construction a été achevée en 1999 et il a acquis plusieurs séries de données, dont une de 1000 heures à l’été 2001. Sa sensibilité est actuellement de  $S(f)^{1/2} \simeq 5 \times 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$  pour  $f \sim 1 \text{ kHz}$  [36].

En plus des détecteurs interférométriques mentionnés ci-dessous, il existe également des détecteurs résonnants (barres métalliques qui vibrent à leur fréquence de résonance, autour du kilohertz) : **EXPLORER** au CERN (projet de l’Université de Rome), **ALLEGRO** en Louisiane et **NIOBE** à Perth en Australie. Ces trois barres sont refroidies à  $\sim 2 - 4 \text{ K}$  et ont une sensibilité  $S(f)^{1/2} \sim 5 \times 10^{-21} \text{ Hz}^{-1/2}$ . De plus deux barres ultra-cryogéniques ( $T \simeq 0.1 \text{ K}$ ), **NAUTILUS** et **AURIGA** fonctionnent depuis 1997 en Italie. Leur sensibilité est de  $S(f)^{1/2} \sim 2 \times 10^{-22} \text{ Hz}^{-1/2}$ . Il convient de noter que, de par leur principe, les barres ont une bande passante beaucoup plus étroite que celle des détecteurs interférométriques (quelques hertz contre quelques kilohertz).

Enfin le projet d’interféromètre spatial **LISA** a été sélectionné comme *Pierre Angulaire* du programme *Horizon 2000+* de l’ESA et est actuellement considéré dans le cadre d’une collaboration NASA/ESA. Il pourrait être lancé vers 2010 - 2015. Il s’agira d’un instrument

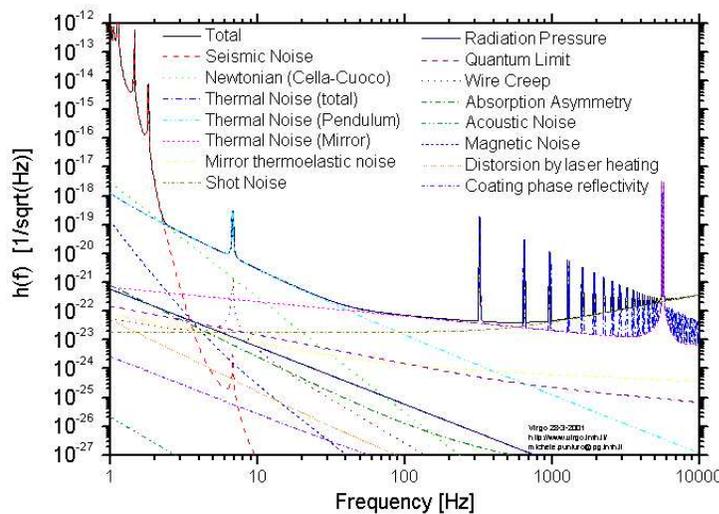


FIG. 14.2 – Courbe de sensibilité  $(S(f))^{1/2}$  en fonction de  $f$  du détecteur VIRGO, avec le détail des différentes sources de bruits [source : INFN/CNRS].

complémentaire de VIRGO car il observera à des fréquences beaucoup plus basses (inaccessibles au sol en raison du bruit sismique), de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$  Hz.

## Les étoiles à neutrons comme émetteurs d’ondes gravitationnelles

Comme discuté dans l’Introduction, les émetteurs d’ondes gravitationnelles les plus efficaces sont les objets compacts (cf. Eq. (3), page 3), au premier rang desquels les étoiles à neutrons et les étoiles de quarks étranges.

Motivés par la construction de VIRGO, nous avons entrepris une étude des divers mécanismes par lesquels une étoile à neutrons peut émettre des ondes gravitationnelles. Une étoile en rotation stationnaire, axisymétrique par rapport à l’axe de rotation, comme celles étudiées dans les Parties I et II, n’émet pas d’ondes gravitationnelles. Il faut une déviation à l’axisymétrie pour avoir un moment du quadrupôle variable et donc une émission gravitationnelle. Plusieurs mécanismes physiques peuvent produire une telle asymétrie :

- Le champ magnétique, auquel on pense naturellement dans le contexte des pulsars. Il faut en effet s’attendre à ce que les forces de Laplace déplacent légèrement la matière conductrice. Pour peu que l’axe magnétique ne soit pas aligné avec l’axe de rotation (ce que l’on pense être le cas dans le phénomène pulsar), on a alors l’asymétrie recherchée. C’est ce que nous étudierons au Chap. 15.
- Une brisure spontanée de la symétrie axiale lorsque la rotation dépasse un certain seuil, que nous étudierons aux Chap. 17-19.
- D’autres instabilités triaxiales, générées par la réaction au rayonnement gravitationnel (instabilités de Chandrasekhar-Friedman-Schutz), que nous ne discuterons pas ici. Elles ont été étudiées récemment dans notre groupe par L. Villain et S. Bonazzola [283].
- Des irrégularités (“montagnes”) dans la croûte solide de l’étoile à neutrons. Nous n’avons

pas étudié en détail ce mécanisme (cf. par exemple [179]), mais l'avons considéré dans l'étude de l'émission gravitationnelle de l'ensemble des étoiles à neutrons de la Galaxie (Chap. 16).

Les mécanismes mentionnés ci-dessus sont relatifs à une étoile à neutrons isolée, ou tout au plus accrétant de la matière dans une binaire X (cf. § 10.1). Une deuxième catégorie importante de sources d'ondes gravitationnelles mettant en jeu des étoiles à neutrons est constituée par les *systèmes binaires* d'étoiles à neutrons. Nous les étudierons dans la Partie IV.

# Chapitre 15

## Émission gravitationnelle par les étoiles à neutrons magnétisées (pulsars)

### 15.1 Émission gravitationnelle des pulsars

Comme rappelé plus haut, les pulsars sont des candidats naturels pour la détection d'ondes gravitationnelles par VIRGO. Si ils sont légèrement déformés par rapport à la symétrie axiale, ils émettent à une fois et deux fois leur fréquence de rotation, ce qui tombe dans la bande de VIRGO. L'amplitude de l'onde gravitationnelle dépend de la vitesse de rotation, de l'amplitude de la déformation et bien évidemment de la distance à la Terre, suivant la formule établie dans l'article [A15] (Eq. (26)) :

$$h_0 = 4.2 \times 10^{-24} \left( \frac{\text{ms}}{P} \right)^2 \left( \frac{\text{kpc}}{r} \right) \left( \frac{I}{10^{38} \text{ kg m}^2} \right) \left( \frac{\epsilon}{10^{-6}} \right), \quad (15.1)$$

où  $P$  désigne la période de rotation du pulsar,  $r$  sa distance à la Terre,  $I$  son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation ( $10^{38} \text{ kg m}^2$  est une valeur typique pour les étoiles à neutrons<sup>1</sup>), et  $\epsilon$  caractérise la déformation de l'étoile par rapport à l'axe de rotation : le produit  $\epsilon I$  est égal à une certaine composante du moment du quadrupôle induit par la déformation de l'objet. On n'a pas de mesure de  $\epsilon$  mais on peut obtenir une borne supérieure sur ce dernier, et donc sur  $h_0$ , à partir de la mesure du ralentissement  $\dot{P} = dP/dt$  du pulsar. En effet on attribue généralement le  $\dot{P} > 0$  à la perte de moment cinétique par émission électromagnétique (c'est d'ailleurs comme cela que l'on "mesure" le champ magnétique des pulsars dans la plupart des cas). Si le pulsar émet des ondes gravitationnelles, une contribution au  $\dot{P}$  doit également venir du rayonnement gravitationnel. On obtient alors une borne supérieure en faisant l'hypothèse que *tout* le  $\dot{P}$  est dû à l'émission gravitationnelle, et non à l'émission électromagnétique. On obtient ainsi (cf. Tableau I de l'article du Chap. 16 pour plus de détails) :

- pour le pulsar du Crabe ( $P = 33 \text{ ms}$ ,  $\dot{P} = 4.2 \times 10^{-13}$ ,  $r = 2 \text{ kpc}$ ) :  $h_0^{\text{max}} = 1.4 \times 10^{-24}$  ;
- pour le pulsar de Vela ( $P = 89 \text{ ms}$ ,  $\dot{P} = 1.2 \times 10^{-13}$ ,  $r = 0.5 \text{ kpc}$ ) :  $h_0^{\text{max}} = 1.9 \times 10^{-24}$  ;
- pour Geminga ( $P = 237 \text{ ms}$ ,  $\dot{P} = 1.1 \times 10^{-14}$ ,  $r = 0.16 \text{ kpc}$ ) :  $h_0^{\text{max}} = 1.1 \times 10^{-24}$  ;

---

<sup>1</sup>Par une coïncidence numérique amusante, cette valeur est la même que pour la Terre, alors que les deux types d'objet n'ont pas grand chose en commun...

- pour le pulsar milliseconde PSR B1957+20 ( $P = 1.56$  ms,  $\dot{P} = 1.7 \times 10^{-20}$ ,  $r = 1.5$  kpc) :  
 $h_0^{\max} = 1.7 \times 10^{-27}$ .

Ces amplitudes peuvent paraître très petites, surtout en regard de celles attendues pour des événements cataclysmiques, comme la coalescence de deux étoiles à neutrons ou de deux trous noirs :  $h \sim 10^{-21} - 10^{-20}$  à des distances de l'ordre de la centaine de Mpc. Néanmoins, les signaux des pulsars ont l'avantage de la durée : ils sont permanents ! Or, en utilisant un filtre adapté, le rapport signal sur bruit pour la détection d'un signal périodique croît avec le temps d'observation  $T$ , suivant

$$\frac{S}{N} \sim \frac{h_0 \sqrt{T}}{S(f)^{1/2}}. \quad (15.2)$$

Ainsi, en analysant  $T = 1$  an de données de VIRGO à la sensibilité  $S(f)^{1/2} = 3 \times 10^{-23}$ , on obtient un rapport signal sur bruit

$$\frac{S}{N} \sim \frac{h_0}{6 \times 10^{-27}}. \quad (15.3)$$

On constate donc que, dans l'hypothèse optimiste où tout le  $\dot{P}$  des pulsars de type Crabe est dû au rayonnement gravitationnel, les ondes gravitationnelles émises sont tout à fait détectables par VIRGO, avec un rapport signal sur bruit de plusieurs centaines ! Même si seulement 1% du ralentissement  $\dot{P}$  du Crabe est dû au rayonnement gravitationnel, le reste étant le fait du rayonnement électromagnétique, on conserve un signal détectable. L'amplitude gravitationnelle maximale, déduite du  $\dot{P}$ , pour l'ensemble des pulsars connus est portée sur la Fig. 15.1. On remarque sur cette figure que VIRGO est susceptible de détecter plus d'une dizaine de pulsars. On note également l'avantage de VIRGO par rapport à LIGO ou GEO600 dans le domaine des basses fréquences, autour de  $f \sim 10$  Hz, où se trouvent de nombreux pulsars. C'est grâce à sa meilleure isolation sismique, obtenue à l'aide des "super-atténuateurs" italiens, que VIRGO peut explorer ce domaine de fréquences très intéressant pour les étoiles à neutrons.

## 15.2 Notre article de 1996 [A15]

Les bornes supérieures déduites du ralentissement observé des pulsars étant plutôt en faveur d'une détection, il reste à trouver des mécanismes physiques pour dégénérer la triaxialité  $\epsilon$  qui apparaît dans l'Eq. (15.1). Avant notre étude [A15], le mécanisme généralement invoqué était la présence de "montagnes" dans la croûte solide des étoiles à neutrons<sup>2</sup>, issues de la formation de la croûte, lors du refroidissement de l'étoile à neutrons nouvellement formée, ou bien résultant de cassures soudaines provoquées par l'accumulation de contraintes lors du ralentissement ("glitches"). On invoquait alors la précession de l'étoile à neutrons [300] (cf. [180] et [179] pour un compte-rendu moderne). De plus, ces calculs étaient basés sur des formules newtoniennes.

C'est en 1984 que Gal'tsov, Tsvetkov & Tsirulev [138, 137] ont avancé un deuxième mécanisme : la déformation par le champ magnétique. Mais ils n'ont considéré que des corps newtoniens, formés d'un fluide incompressible. De plus le champ magnétique était supposé uniforme à l'intérieur de l'étoile et dipolaire au dehors. Notre travail [A15] constitue la première étude réaliste de ce phénomène, où l'on prend en compte tout à la fois les effets de relativité générale, de compressibilité du fluide, de l'interaction forte entre les nucléons (via une équation d'état moderne — celle de Wiringa, Fiks & Fabrocini [292]), et de non-uniformité du champ magnétique

<sup>2</sup>cf. § 13.1 pour une discussion sur la présence d'une croûte solide autour des étoiles de quarks étranges.

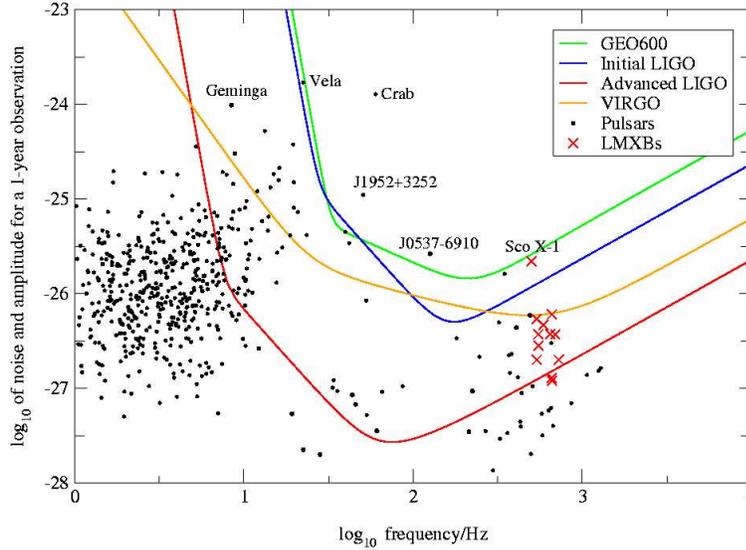


FIG. 15.1 – Amplitude maximale des ondes gravitationnelles émises par les pulsars, en supposant que leur ralentissement  $\dot{P}$  est entièrement dû au rayonnement gravitationnel. On a porté sur la figure les courbes d'amplitude minimale  $\sim S(f)^{1/2}T^{-1/2}$  pour une détection en analysant  $T = 1$  an de données dans chacun des détecteurs interférométriques actuellement en construction. Sont également portés sur cette figure des bornes supérieures de l'émission gravitationnelle des étoiles à neutrons dans des binaires X, déduites du flux mesuré en X [57] [Figure réalisée par Jones [179]].

(cette dernière caractéristique s'avérera d'ailleurs cruciale pour obtenir obtenir des déformations détectables). Pour ce faire nous avons utilisé le code numérique présenté au Chap. 7, qui rappelons-le, est pleinement relativiste. De plus, pour le calcul du rayonnement gravitationnel, nous avons utilisé une formule valable pour des objets très relativistes, à savoir celle d'Ipser [169]. Jusqu'alors tous les calculs d'émission gravitationnelle stationnaire par les étoiles à neutrons triaxiales étaient basés sur la formule du quadrupôle, qui n'est valable qu'à l'ordre newtonien.

Dans notre étude, la déformation de l'étoile résulte de l'action des forces de Laplace sur les courants électriques qui parcourent l'étoile. Nous avons considéré des distributions de courant étendues à toute l'étoile, ou bien localisées seulement dans la croûte. De plus, nous avons considéré le cas d'un intérieur supraconducteur de type I, où le champ magnétique est expulsé pour se trouver concentré dans la croûte. La prise en compte de ce genre de configuration a été rendu possible techniquement grâce à la méthode multi-domaine (cf. § 1.4.4). Nous avons introduit un paramètre  $\beta$  qui relie la déformation de l'étoile  $\epsilon$  au moment magnétique dipolaire  $\mathcal{M}$ , par

$$\epsilon = \beta \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}_0^2}, \quad (15.4)$$

où  $\mathcal{M}_0$  est une constante ayant la dimension d'un moment magnétique. Dans l'hypothèse où le ralentissement observé des pulsars est essentiellement dû au champ magnétique, on peut alors relier  $\mathcal{M}$  à la quantité mesurée  $\dot{P}$  (cf. Eq. (36) de [A15]) et, en combinant (15.1) et (15.4), exprimer l'amplitude des ondes gravitationnelles émises en fonction de  $\beta$  et  $\dot{P}$  (Eq. (40) de

[A15]) :

$$h_0 = 6.5 \times 10^{-30} \frac{\beta}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{R}{10 \text{ km}} \right)^2 \left( \frac{\text{kpc}}{r} \right) \left( \frac{\text{ms}}{P} \right) \left( \frac{\dot{P}}{10^{-13}} \right), \quad (15.5)$$

où  $R$  est le rayon circonférentiel de l'étoile et  $\alpha$  l'angle entre l'axe magnétique et l'axe de rotation. Le paramètre  $\beta$  dépend uniquement de la distribution du champ magnétique dans l'étoile. Pour des valeurs typiques observées sur les pulsars, ( $\dot{P} \sim 10^{-13}$ ) il faut donc  $\beta \gtrsim 10^4$  pour espérer avoir un signal détectable, à moins que  $\alpha \ll 1$ . Nos calculs montrent que  $\beta \sim 1$  pour un champ magnétique correspondant à une densité de courant électrique proportionnelle à la densité de matière (Fig. 2 de [A15]). Pour des courants électriques concentrés dans la croûte (Fig. 4 de [A15]),  $\beta \sim 9$ . Pour un intérieur supraconducteur de type I,  $\beta \sim 150$ . Pour des courants en contre-rotation dans une partie de l'étoile,  $\beta \sim 6 \times 10^3$ . Cette dernière configuration "simule" un champ magnétique stochastique. Nous avons par ailleurs donné des arguments en faveur d'un grand  $\beta$  pour le cas d'un intérieur supraconducteur de type II (champ magnétique présent dans la matière mais confiné dans des vortex). Mais, en raison de la complexité de la microphysique de ce dernier cas, nous n'avons pas pu faire de calcul explicite.

La conclusion est donc que, *pour les pulsars connus*, la déformation par le champ magnétique n'est pas suffisante pour générer un signal gravitationnel détectable [ $h_0 > 10^{-26}$ , cf. Eq. (15.3)] par la première génération des détecteurs de type VIRGO, à moins que l'étoile à neutrons ait un champ magnétique stochastique ou soit un supraconducteur de type II. Il convient de souligner que les pulsars connus (environ 1500) ne constituent qu'une toute petite fraction des étoiles à neutrons de notre galaxie, que l'on estime à  $\sim 10^9$ , et qu'il peut exister des étoiles à neutrons à champ magnétique bien plus fort que le pulsar du Crabe<sup>3</sup>, qui n'émettraient pas sous forme de pulsar, mais que l'on pourrait détecter par leur rayonnement gravitationnel.

Dans l'article [A15] nous avons également calculé en détail le signal  $h(t)$  reçu par VIRGO (Eq. (14.4)), en tenant compte de l'orientation de VIRGO et de la position du pulsar dans le ciel. Ce signal, qui comprend deux fréquences (la fréquence de rotation du pulsar et le double de celle-ci) est modulé par la rotation de la Terre (Figs. 10-12 de [A15]).

### 15.3 Développements ultérieurs

En 1999, K. Konno, T. Obata et Y. Kojima [190], de l'Université d'Hiroshima, ont calculé la déformation par le champ magnétique (poloïdal) d'une étoile relativiste statique en effectuant un calcul perturbatif autour d'une métrique sphérique et en utilisant une équation d'état polytropique. La distribution de champ magnétique correspondait à celle d'une densité de courant électrique proportionnelle à la densité de matière, ce qui correspond au premier cas que nous avons traité (§ 4.3.1 de [A15]). Ces auteurs ont notamment montré que le paramètre  $\beta$  croît avec le facteur de relativité  $\Xi$  (Fig. 4 de [190]). Pour un facteur de relativité caractéristique des étoiles à neutrons,  $\beta$  a même une valeur double de la valeur newtonienne.

En 2000, J.S. Heyl [165], de CalTech, a considéré le même problème que nous, mais pour des naines blanches au lieu des étoiles à neutrons. Les naines blanches n'étant que très faiblement relativistes ( $\Xi \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ ), il a effectué les calculs en théorie newtonienne et a simplement utilisé les formules (20) et (21) de notre article pour le calcul des ondes gravitationnelles émises. Le champ magnétique des naines blanches est certes plus faible que celui des pulsars (au plus  $10^5$  T en surface, contre  $10^9$  T), mais les naines blanches sont plus déformées sous l'effet de ce

<sup>3</sup>On connaît par exemple les magnétars, cf. § 7.1, mais leur rotation est trop lente pour qu'ils soient dans la bande de VIRGO.

champ que les étoiles à neutrons. J. Heyl obtient notamment une ellipticité importante pour la valeur moyenne du champ magnétique des naines blanches magnétisées de période de rotation plus petite que 3.5 h :  $\epsilon \simeq 10^{-3}$ . Il est à noter que la période de rotation des naines blanches observées (supérieure à 28 s et allant jusqu'à plusieurs heures) les placent dans la bande de fréquence du détecteur spatial LISA, plutôt que VIRGO. La conclusion de l'étude de Heyl est que la déformation magnétique des naines blanches n'est pas suffisante pour conduire à une détection par LISA, sauf pour les deux plus rapides d'entre elles : WZ Sge et AE Aqr.

Le cas d'étoiles à neutrons très magnétisées ( $B \sim 100$  GT, magnétars — cf. § 7.1) dans un très jeune reste de supernova a été considéré en 2001 par C. Palomba [225], de l'Université de Rome, et plus récemment par S. Yoshida [298], de la SISSA à Trieste. Ces deux auteurs ont utilisé nos résultats pour la déformation de l'étoile correspondant à un champ magnétique donné et ont étudié la détectabilité par VIRGO.

Très récemment, C. Cutler [108], de l'Institut Albert Einstein à Golm (Allemagne), a considéré l'émission gravitationnelle des étoiles à neutrons résultant de la déformation par un champ magnétique *toroïdal* (alors que dans l'article [A15] nous n'avons traité que le cas du champ magnétique *poloïdal*). À l'aide d'un modèle newtonien, il a montré que l'étoile évolue nécessairement vers une configuration où l'axe magnétique est orthogonal à l'axe de rotation, ce qui est la configuration la plus favorable du point de vue du rayonnement gravitationnel.

Nos formules pour le signal gravitationnel  $h(t)$  effectivement reçu par un détecteur interférométrique ont été utilisées par Jaranowski, Królak & Schutz [176] dans leur étude du traitement du signal nécessaire à la détection des pulsars.



## Chapitre 16

# Fond d'ondes gravitationnelles de l'ensemble des étoiles à neutrons de la Galaxie

### 16.1 Détection du signal gravitationnel des étoiles à neutrons

Comme on l'a vu au chapitre précédent, les étoiles à neutrons en rotation peuvent émettre des ondes gravitationnelles détectables par les interféromètres de type VIRGO. Nous avons vu que, pour une étoile à neutrons donnée, l'*amplitude* du signal variait au cours d'une journée en raison de la rotation de la Terre (Figs 10-12 de [A15]). La *fréquence* du signal varie également, car sujette au décalage Doppler induit par la rotation de la Terre [181]. Il ne s'agit donc pas de faire une simple transformée de Fourier des données de VIRGO pour chercher le signal gravitationnel à une fois et deux fois la fréquence de rotation de l'étoile. L'effet Doppler a cependant un avantage : c'est lui qui permet de "pointer" VIRGO dans une direction donnée. Le décalage Doppler est en effet une fonction de la position de la source dans le plan du ciel.

Pour augmenter les chances de détection, il convient de ne pas se limiter à l'"écoute" des pulsars connus, car ces derniers (environ 1500) ne constituent qu'une toute petite fraction des étoiles à neutrons de la Galaxie, dont le nombre est estimé à  $10^9$ . Deux types de recherche d'ondes gravitationnelles peuvent alors être envisagés :

1. La recherche de signaux cohérents en provenance d'étoiles à neutrons individuelles, dont on ne connaît par avance ni la position dans le ciel, ni la fréquence de rotation (et la variation temporelle de celle-ci). On qualifie cette recherche de *recherche en aveugle*.
2. La recherche du signal incohérent ("fond diffus") formé par la superposition des émissions gravitationnelles de toutes les étoiles à neutrons de notre Galaxie. C'est le sujet de l'étude présentée dans ce chapitre.

La recherche en aveugle demande des ressources informatiques énormes, à la limite, voire au delà, des capacités actuelles des ordinateurs. Il faut en effet découper le ciel en un très grand nombre de petits carrés (de l'ordre de  $10^{10}$ ), chacun donnant un effet Doppler différent, puis effectuer autant de convolutions de toute la série de données (de l'ordre d'une année, échantillonnée à 10 kHz!) corrigée de l'effet Doppler que de modèles théoriques de signal ("patrons"). Chaque patron fait intervenir la fréquence de rotation de l'étoile, sa dérivée temporelle, etc... La première discussion détaillée de la recherche en aveugle est due à Bernard Schutz (1991) [249]. Différents

algorithmes ont été ensuite proposés par X. Graves (1997) [152], P. Jaranowski, A. Królak & B.F. Schutz (1998-2000) [176, 174, 175], et Brady et al. (1998,2000) [78, 77].

## 16.2 Notre étude de 1997 [A16]

Notre étude [A16] est la première consacrée au fond d'ondes gravitationnelles de l'ensemble des étoiles à neutrons de la Galaxie. Elle a depuis été suivie par de nombreux autres travaux, comme nous le verrons au § 16.3.

L'idée initiale est due à Adalberto Giazotto, responsable italien du projet VIRGO. Elle consiste à prendre la moyenne temporelle du carré du signal de sortie de l'interféromètre, c'est-à-dire, en reprenant les notations de l'Eq. (14.3) :

$$\langle o(t)^2 \rangle = \langle h(t)^2 \rangle + \langle n(t)^2 \rangle . \quad (16.1)$$

Il faut noter que  $\langle h(t) \rangle = 0$ , mais  $\langle h(t)^2 \rangle \neq 0$ . En prenant une moyenne temporelle sur un intervalle de temps grand devant le maximum des périodes de rotation des étoiles à neutrons qui peuvent être dans la bande de VIRGO ( $\max P \sim 0.1$  s), tout en restant petit devant un jour, on peut négliger les contributions des produits des amplitudes gravitationnelles issues de deux étoiles différentes et obtenir une formule du type

$$\langle h(t)^2 \rangle \sim K(t)N \frac{A^2}{D^2} , \quad (16.2)$$

où  $N$  est le nombre total d'étoiles à neutrons de la Galaxie dans la bande de fréquence de VIRGO,  $D^2$  est la moyenne harmonique des carrés des distances des étoiles à neutrons,  $A$  la moyenne des amplitudes gravitationnelles à une distance unité (cette dernière quantité est proportionnelle au produit  $\Omega^2 \epsilon$ , cf. Eq. (15.1)). Enfin  $K(t)$  est une fonction périodique, de période un jour sidéral et qui dépend de la distribution des étoiles à neutrons sur le plan du ciel. La variation du signal  $\langle h(t)^2 \rangle$  au cours d'un jour sidéral est représentée sur les Figs. 1 et 2 de [A16] pour deux distributions galactiques d'étoiles à neutrons, correspondant respectivement à un disque et à un halo. La modulation du signal est nettement plus marquée, donc plus facile à détecter, pour le disque que pour le halo.

En comparant le rapport signal sur bruit obtenu à partir de (16.2) à celui du signal gravitationnel d'une étoile à neutrons isolée située à 100 pc et ayant la même amplitude  $A$ , nous sommes arrivés à la conclusion qu'il serait plus facile de détecter le fond gravitationnel plutôt qu'une étoile isolée si  $N > 2 \times 10^6$ . Cependant la mise en évidence du fond d'ondes gravitationnelles requiert une très grande stabilité du bruit dans l'interféromètre.

Selon nos calculs, l'amplitude du fond gravitationnel généré par une population d'étoiles à neutrons réparties dans un disque d'épaisseur 1 kpc et de rayon est (Fig. 1 de [A16])

$$\sqrt{\langle h(t)^2 \rangle} = 2 \times 10^{-26} \left( \frac{5 \text{ ms}}{\bar{P}} \right)^2 \left( \frac{\bar{\epsilon}}{10^{-8}} \right) \left( \frac{N}{10^5} \right)^{1/2} , \quad (16.3)$$

où  $N$  est le nombre total d'étoiles à neutrons dans la bande de fréquence du détecteur,  $\bar{P}$  est la racine quatrième de la moyenne *harmonique* des puissances quatrièmes des périodes de rotation et  $\bar{\epsilon}$  la racine carrée de la moyenne des carrés des ellipticités.

La principale conclusion de notre étude [A16] est que le fond d'ondes gravitationnelles galactiques sera détectable en analysant trois ans de données de VIRGO si il y a eu une importante formation d'étoiles à neutrons lors de la naissance de la Galaxie.

### 16.3 Développements ultérieurs

Peu après la parution de notre article en février 1997, G. Giampieri (Queen Mary and Westfield College, Londres) [141] a également mis en évidence la possibilité de détecter le fond d'étoiles à neutrons galactiques par la modulation diurne du signal dans le détecteur. Il a considéré la précession des étoiles à neutrons (cf. discussion au début du § 15.2) comme mécanisme d'émission individuelle et a fait référence à notre article pour l'étude détaillée de la stabilité du bruit de l'interféromètre.

Toujours dans le courant 1997, J.A. de Freitas Pacheco (Observatoire de la Côte d'Azur) et J.E. Horvath (Université de São Paulo, Brésil) [129] ont considéré le fond d'ondes gravitationnelles générées par les étoiles à neutrons qui émettent comme pulsar. Ils ont estimé la population totale de pulsars du disque galactique à partir de la population observée. Ils ont ensuite calculé l'amplitude quadratique moyenne et le signal induit dans un détecteur omnidirectionnel de type sphère résonnante (aluminium ou niobium). Contrairement au détecteur interférométrique que nous avons considéré, il n'y a dans ce cas pas de modulation journalière de l'amplitude du signal. Pour le cas d'un détecteur interférométrique, de Freitas Pacheco et Horvath se réfèrent à notre article pour le facteur de modulation journalière et obtiennent une amplitude moyenne (Eq. (13) de [129])

$$\sqrt{\langle h(t)^2 \rangle} = 9 \times 10^{-28} \left( \frac{\bar{\epsilon}}{10^{-8}} \right). \quad (16.4)$$

Cette amplitude est plus petite que celle donnée par (16.3) pour  $N \sim 10^5$  car de Freitas Pacheco et Horvath ne considèrent qu'une population extrapolée à partir des seuls pulsars radios aujourd'hui observés. L'étude de de Freitas Pacheco et Horvath a été reprise en 2000 par le premier auteur et T. Regimbau (Observatoire de la Côte d'Azur) [243], en calculant la population de pulsars radios par une technique de Monte Carlo (le travail [129] résultant uniquement de considérations analytiques). Leurs résultats confirment l'ordre de grandeur (16.4). Les auteurs soulignent que la contribution majeure à  $\sqrt{\langle h(t)^2 \rangle}$  vient de quelques pulsars très proches. Notons que Regimbau et de Freitas Pacheco ont étendu leur étude en 2001 au fond des pulsars *extragalactiques* [244].

Dès 1997 K.A. Postnov et M.E. Prokhorov (Institut Astronomique Sternberg de l'Université d'État de Moscou) [235] ont étendu notre étude en prenant en compte l'évolution séculaire de la période de rotation de étoiles à neutrons, c'est-à-dire le ralentissement consécutif à la perte de moment cinétique par émission électromagnétique ou émission gravitationnelle. Dans le cas le plus favorable où ce ralentissement a pour seule origine le rayonnement gravitationnel, ils obtiennent (Eq. (15) de [235]) :

$$\sqrt{\langle h(t)^2 \rangle_{\max}} = 3 \times 10^{-24} \left( \frac{\mathcal{R}}{1/30 \text{ yr}^{-1}} \right)^{1/2}, \quad (16.5)$$

où  $\mathcal{R}$  est le taux de formation d'étoiles à neutrons dans la Galaxie. Le fait que le résultat ne dépende pas de l'ellipticité moyenne des étoiles à neutrons, contrairement à (16.3) et (16.4) est dû à l'attribution de l'intégralité du ralentissement  $\dot{P}$  des étoiles à neutrons au rayonnement gravitationnel. Cela avait déjà été remarqué par R. Blandford [66]. Les grandes lignes de l'argument sont les suivantes. L'émission gravitationnelle d'une étoile à neutrons individuelle est certes d'autant plus grande que son ellipticité est grande [cf. Eq. (15.1)], mais son ralentissement est également important, si bien que l'étoile passe moins de temps dans la bande de fréquence de VIRGO. Dans le cas plus réaliste où le ralentissement des étoiles à neutrons est essentiellement

dû au champ magnétique, Postnov et Prokhorov obtiennent une formule où apparaît cette fois-ci l'ellipticité :

$$\sqrt{\langle h(t)^2 \rangle} = 1 \times 10^{-27} \left( \frac{\mathcal{R}}{1/30 \text{ yr}^{-1}} \right)^{1/2} \left( \frac{5 \text{ ms}}{\bar{P}} \right) \left( \frac{\bar{\epsilon}}{10^{-8}} \right) \left( \frac{30 \text{ G cm}^{-3}}{\mathcal{M}} \right), \quad (16.6)$$

où  $\mathcal{M}$  désigne le moment magnétique d'une étoile à neutrons. Par ailleurs Postnov & Prokhorov ont considéré le fond d'ondes gravitationnelles produit par les étoiles à neutrons des autres galaxies et ont montré qu'il était dix fois plus petit que le fond galactique.

Enfin, il convient de remarquer que de nombreuses études ont été consacrées au fond d'ondes gravitationnelles émises par les systèmes binaires (cf. par exemple l'article [166] et les références qu'il contient). Ce fond d'ondes est particulièrement important pour LISA, puisqu'il limite la sensibilité du détecteur à basse fréquence (en dessous de  $10^{-3}$  Hz).

# Chapitre 17

## Brisure de symétrie des étoiles à neutrons en rotation rapide

### 17.1 Introduction

Une étoile à neutrons en rotation n'émet des ondes gravitationnelles que si elle n'est pas parfaitement symétrique par rapport à l'axe de rotation. Nous avons présenté au Chap. 15 un mécanisme explicite de brisure de la symétrie axiale : la déformation par le champ magnétique de l'étoile. Il existe d'autres mécanismes qui ne font pas appel au champ magnétique, mais reposent seulement sur la structure *fluide auto-gravitant* de l'étoile. Ce sont des instabilités que l'on pourrait qualifier de *gravito-hydrodynamiques*. Lorsqu'une de ces instabilités se développe, l'étoile devient triaxiale et émet alors des ondes gravitationnelles. Il existe en fait deux grandes catégories d'instabilités gravito-hydrodynamiques : les instabilités *séculaires* et les instabilités *dynamiques*. Les premières nécessitent un processus dissipatif pour se développer, contrairement aux secondes, et leur échelle de temps est celle du dit processus dissipatif, alors que pour les secondes, il s'agit du temps dynamique ( $\sim$  une période de rotation).

### 17.2 Mécanismes de l'instabilité triaxiale séculaire

#### 17.2.1 Énergie et moment d'inertie

En théorie newtonienne de la gravitation, un corps fluide auto-gravitant qui tourne autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel inertiel prend une forme axisymétrique, avec l'axe de rotation comme axe de symétrie. Cette figure d'équilibre est stable lorsque la vitesse de rotation est modérée. Il n'en va pas de même aux vitesses de rotation élevées. En effet, l'énergie totale du corps par rapport au référentiel inertiel s'écrit

$$E = T + W + E_{\text{int}} , \quad (17.1)$$

où  $T$  est l'énergie cinétique de rotation,  $W$  est l'énergie potentielle gravitationnelle et  $E_{\text{int}}$  l'énergie interne du fluide. Introduisons le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation  $I$  et l'amplitude  $J$  du moment cinétique total  $\vec{J}$ , qui est parallèle à l'axe de rotation. Pour une rotation rigide à la vitesse angulaire  $\Omega$  on a les relations  $T = I\Omega^2/2$  et  $J = I\Omega$ , si bien que l'on peut exprimer l'énergie cinétique sous la forme

$$T = \frac{J^2}{2I} . \quad (17.2)$$

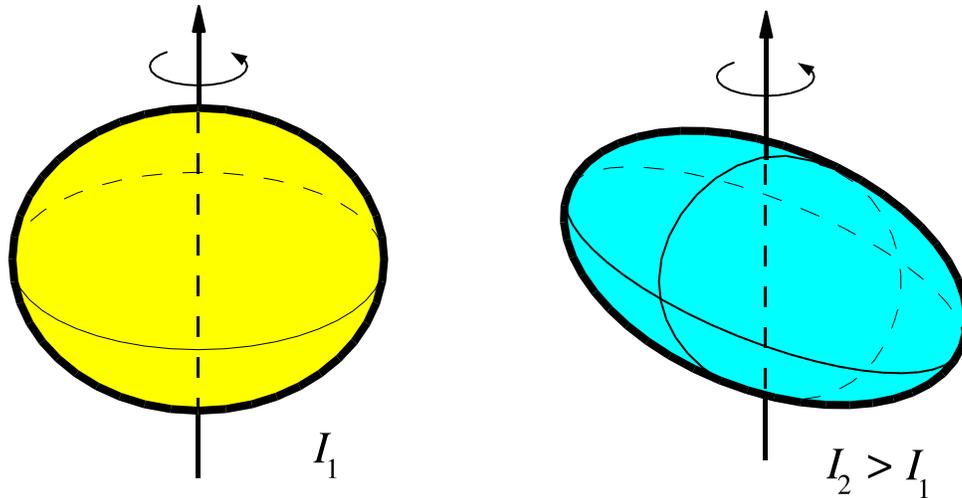


FIG. 17.1 – Ellipsoïde de Maclaurin (gauche) et ellipsoïde de Jacobi (droite). A masse égale, l'ellipsoïde de Jacobi, qui tourne autour de son plus petit axe, a un moment d'inertie supérieur à celui de l'ellipsoïde de Maclaurin, ce qui diminue son énergie cinétique (à moment cinétique fixé).

A moment cinétique fixé,  $T$  est donc une fonction décroissante de  $I$ . Au contraire,  $W$  croît avec  $I$ , car augmenter  $I$  revient à augmenter la séparation entre les particules et donc à augmenter l'énergie potentielle gravitationnelle. Une configuration d'équilibre de l'étoile sera stable si et seulement si elle correspond à un minimum de l'énergie totale  $E$ .

### 17.2.2 Évolution à moment cinétique constant : instabilité induite par la viscosité

Plaçons-nous dans le cas où l'étoile est isolée et n'est susceptible d'évoluer qu'en émettant du rayonnement électromagnétique sous la forme d'un corps noir (rayonnement thermique). Ce rayonnement extrait essentiellement de l'énergie de l'étoile (prise sur l'énergie interne) et quasiment pas de moment cinétique. On peut donc raisonner à  $J$  constant. Nous discuterons plus bas le cas où l'on tient compte du rayonnement gravitationnel ; on ne peut alors plus supposer  $J$  constant puisque les ondes gravitationnelles transportent du moment cinétique tout autant que de l'énergie.

La configuration qui minimise l'énergie totale  $E$  résulte d'un compromis entre  $T$  qui décroît avec  $I$  (puisque  $J$  est constant, cf. Eq. (17.2)) et  $W$  qui croît avec  $I$ . A faible vitesse de rotation, c'est ce dernier terme qui domine et la configuration d'équilibre stable correspond à un moment d'inertie  $I$  le plus petit possible : c'est la configuration axisymétrique par rapport à l'axe de rotation. Au contraire, lorsque le moment cinétique de rotation  $J$  est élevé,  $T$  domine  $W$  et la configuration d'énergie minimale est celle qui maximise  $I$ . Cette dernière est une configuration triaxiale avec rotation autour du plus petit axe (cf. Fig. 17.1). Dans le cas d'un fluide newtonien incompressible ( $E_{\text{int}} = 0$ ), cette configuration triaxiale est un ellipsoïde de Jacobi, la configuration axisymétrique stable à basse vitesse étant un ellipsoïde de Maclaurin. La figure 17.2 illustre clairement qu'à  $J$  fixé, un ellipsoïde de Jacobi a une énergie moindre qu'un ellipsoïde de Maclaurin de même masse. L'ellipsoïde de Maclaurin cesse donc d'être une configuration stable lorsque la vitesse de rotation est suffisante pour que des ellipsoïdes de Jacobi existent, c'est-à-dire lorsque

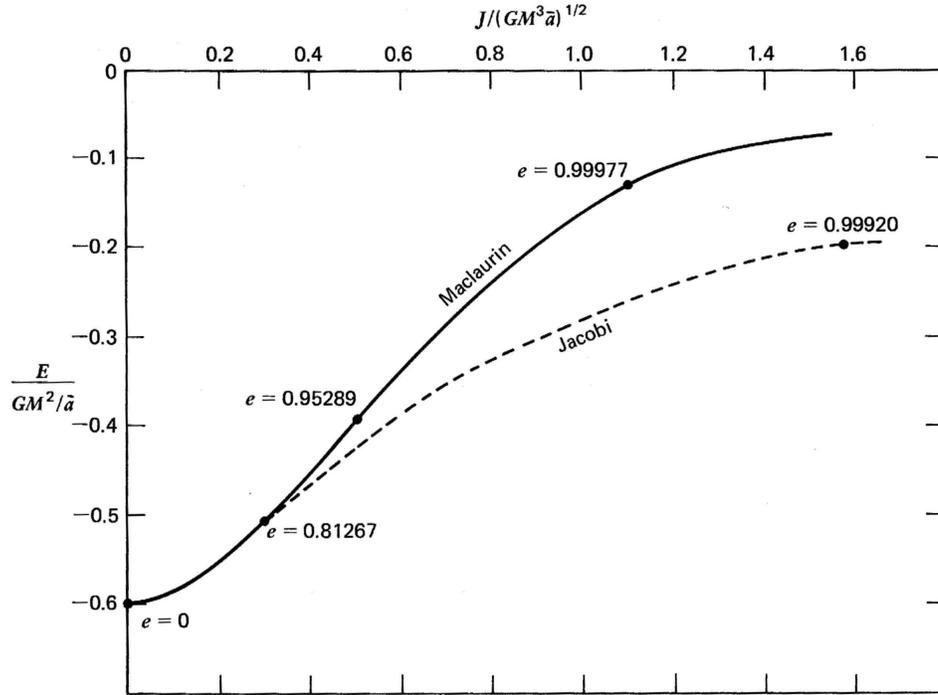


FIG. 17.2 – Énergie totale  $E$  en fonction du moment cinétique  $J$ , à masse constante, pour les ellipsoïdes de Maclaurin et ceux de Jacobi.  $E$  et  $J$  sont normalisés par la masse  $M$  et le rayon moyen  $\bar{a} := (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$ . Ce dernier est proportionnel au volume et ne varie donc pas le long d'une séquence à masse constante, les ellipsoïdes étant incompressibles.  $e$  désigne l'excentricité définie comme  $e^2 = 1 - a_3^2/a_1^2$  [d'après Shapiro & Teukolsky [252]]

l'aplatissement est plus petit que la valeur critique [94]

$$\left. \frac{a_3}{a_1} \right|_{\text{sec}} = 0.582724 \quad (17.3)$$

(excentricité  $e_{\text{sec}} = 0.81267$ ), ou encore lorsque le rapport entre l'énergie cinétique de rotation et l'énergie potentielle gravitationnelle est supérieur à la valeur critique [94]

$$\left. \frac{T}{|W|} \right|_{\text{sec}} = 0.1375. \quad (17.4)$$

A ce stade, il convient de noter qu'une étoile qui se trouverait sur la branche instable (branche des configurations axisymétriques de type Maclaurin au delà de la bifurcation avec les configurations triaxiales de type Jacobi, cf. Fig. 17.2) doit perdre de l'énergie pour migrer vers la position d'équilibre stable. Un mécanisme naturel de perte d'énergie est la viscosité du fluide, qui transforme une partie de l'énergie cinétique en énergie interne. Comme il s'agit de forces internes, le moment cinétique est conservé dans ce processus. Par contre, le surplus d'énergie interne est dissipé par le rayonnement thermique. Il en résulte donc une baisse d'énergie à moment cinétique constant. De plus, la viscosité assure la réorganisation des lignes d'écoulement du fluide pour passer de la forme axisymétrique à la forme triaxiale. En particulier, elle change la circulation dans l'étoile. La circulation de la vitesse le long de l'équateur,

$$C := \oint_{\text{equat}} \vec{V} \cdot d\vec{l}, \quad (17.5)$$

n'est en effet pas la même dans un ellipsoïde de Maclaurin et dans l'ellipsoïde de Jacobi de même  $J$ .

Poincaré [234] avait déjà remarqué qu'à moment cinétique fixé, l'ellipsoïde de Jacobi avait une énergie totale inférieure à l'ellipsoïde de Maclaurin et en avait déduit que le point de bifurcation Maclaurin-Jacobi correspondait à un changement de stabilité dans la séquence des ellipsoïdes de Maclaurin. Mais ce sont P.H. Roberts et K. Stewartson [246] qui en 1963 ont calculé les premiers les modes d'oscillations d'un ellipsoïde de Maclaurin en présence de viscosité et ont montré explicitement qu'au delà du point de bifurcation Maclaurin-Jacobi, les ellipsoïdes de Maclaurin sont instables.

### 17.2.3 Évolution à circulation constante : instabilité Chandrasekhar-Friedman-Schutz

Considérons à présent le cas où l'étoile est soumise à un processus physique (externe) qui, contrairement à celui que nous venons de voir, conserve la circulation mais pas le moment cinétique. La circulation (Eq. (17.5)) est conservée pour un fluide parfait, barotrope et soumis uniquement à des forces externes qui dérivent d'un potentiel (théorème de Kelvin, cf. par exemple § 3.2.4 de [245]). Le processus physique intéressant ici est le rayonnement gravitationnel, car il emporte du moment cinétique tout en conservant la circulation du fluide, puisqu'en première approximation, la force de réaction au rayonnement gravitationnel dérive d'un potentiel [61].

A circulation autour de l'équateur fixée, la configuration qui minimise l'énergie totale de l'étoile n'est plus un ellipsoïde de Maclaurin lorsque  $T/|W|$  dépasse un certain seuil, mais un ellipsoïde de Dedekind. Il s'agit d'un ellipsoïde triaxial, dont la figure globale ne tourne pas par rapport à un référentiel inertiel (contrairement à l'ellipsoïde de Jacobi). La forme triaxiale est "supportée" par la circulation du fluide (cf. Fig. 17.3). Sur la séquence des ellipsoïdes de Maclaurin, le point de bifurcation vers les ellipsoïdes de Dedekind est le même que celui de la bifurcation vers les ellipsoïdes de Jacobi, donné par les Eqs. (17.3) et (17.4).

L'instabilité de type Maclaurin  $\rightarrow$  Dedekind liée à la réaction au rayonnement gravitationnel a été mise en évidence par S. Chandrasekhar [95] en 1970. Son aspect générique a été reconnu par J.L. Friedman & B.F. Schutz [130, 134] en 1978. On l'appelle depuis l'instabilité *Chandrasekhar-Friedman-Schutz (CFS)*. Une découverte importante a été effectuée par N. Andersson [35], de l'Université de Southampton (G.B.), en 1998, à savoir que l'instabilité CFS peut se développer très efficacement (c'est-à-dire même à faible vitesse de rotation) pour les modes inertiels (modes  $r$ ), les modes considérés par Chandrasekhar, Friedman & Schutz étant les modes  $f$ . Il faut noter que l'émission gravitationnelle des modes inertiels s'effectue essentiellement via la variation temporelle des moments multipolaires d'impulsion et non de masse, comme pour les modes  $f$ .

### 17.2.4 Caractère séculaire de l'instabilité

Dans les deux cas considérés ci-dessus le passage d'une configuration axisymétrique de type Maclaurin à une configuration triaxiale de type Jacobi ou Dedekind ne peut se faire que si un mécanisme dissipatif est à l'œuvre dans l'étoile :

- pour réorganiser la circulation du fluide dans le cas d'une transition vers une configuration de type Jacobi — le mécanisme dissipatif naturel est dans ce cas la *viscosité de cisaillement* du fluide (qui conserve le moment cinétique) ;
- pour dissiper le moment cinétique dans le cas d'une transition vers une configuration de

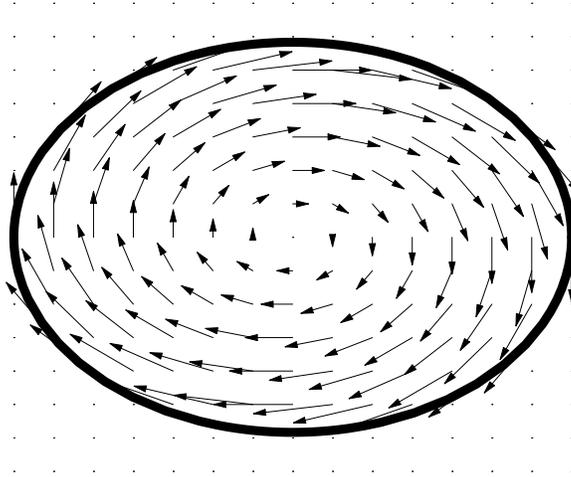


FIG. 17.3 – Champ de vitesse d'un ellipsoïde de Dedekind. Il s'agit d'un champ de vitesse à vorticité constante. Le plan de la figure est le plan équatorial. Le rapport des deux axes équatoriaux est  $a_2/a_1 = 0.7$ . L'aplatissement selon le troisième axe (perpendiculaire au plan de la figure) vaut  $a_3/a_1 = 0.47$ .

type Dedekind — le mécanisme dissipatif naturel est dans ce cas la *réaction au rayonnement gravitationnel* (qui conserve la circulation du fluide).

L'échelle de temps de la transition est l'échelle de temps du processus dissipatif, qui en général est très grande devant le temps dynamique du système. C'est pourquoi ce type d'instabilité triaxiale est qualifié de *séculaire*.

Pour des vitesses de rotation très  lev es, un autre type d'instabilité triaxiale apparaît : il s'agit d'une *instabilité dynamique* qui se développe sans nécessiter de mécanisme dissipatif. L'échelle de temps est alors très brève puisqu'elle est de l'ordre d'une période de rotation. Pour les ellipsoïdes de Maclaurin, l'instabilité dynamique correspond au point  $e = 0.95289$  sur la Fig. 17.2 et à la valeur suivante du rapport  $T/|W|$  :

$$\left. \frac{T}{|W|} \right|_{\text{dyn}} = 0.2738. \quad (17.6)$$

Dans le contexte de l'astrophysique relativiste, l'instabilité dynamique pourrait se produire dans la phase post-supernova, si la proto-étoile à neutrons tourne très vite, ou bien dans la phase post-coalescence de deux étoiles à neutrons (cf. [258] pour une étude récente de l'instabilité dynamique).

Bertin & Radicati [56] en 1976 ont analysé la transition d'un ellipsoïde de Maclaurin vers un ellipsoïde de Jacobi comme une brisure de symétrie dans le cadre de la théorie des transitions de phase du second ordre. Ce point de vue s'est avéré très fructueux et a été développé plus en avant par Christodoulou, Kazanas, Shlosman & Tohline [96], qui l'ont également étendue à l'instabilité dynamique.

### 17.2.5 Stabilisation par l'effet combiné de la viscosité et du rayonnement gravitationnel

Un ellipsoïde de Dedekind ne peut pas être stationnaire en présence de viscosité, car le mouvement du fluide y présente un cisaillement non nul (cf. Fig. 17.3), contrairement à la

rotation solide à l'œuvre dans les ellipsoïdes de Maclaurin et Jacobi. Ainsi, la viscosité agit contre la transition vers un objet de type Dedekind et a un effet stabilisateur sur l'instabilité CFS. Réciproquement, un ellipsoïde de Jacobi ne peut pas être stationnaire en présence de rayonnement gravitationnel, car il émet des ondes gravitationnelles et perd ainsi du moment cinétique. Le rayonnement gravitationnel a donc un effet stabilisateur sur l'instabilité induite par la viscosité.

L. Lindblom & S.L. Detweiler [202] ont montré en 1977 que si l'on prenait en compte à la fois la viscosité et le rayonnement gravitationnel, les ellipsoïdes de Maclaurin étaient stables, à la fois vis-à-vis de l'instabilité induite par la viscosité et vis-à-vis de l'instabilité CFS, au delà du point de bifurcation Jacobi-Dedekind (Eq. (17.4)). Pour une valeur critique du rapport entre la viscosité et l'émissivité gravitationnelle, la région de stabilité est même étendue jusqu'au point d'instabilité dynamique (Eq. (17.6)). Detweiler & Lindblom [114] ont calculé l'évolution d'un ellipsoïde de Maclaurin sous l'effet conjugué de la viscosité et du rayonnement gravitationnel (Fig. 17.5). Cette étude a été étendue en 1995 au cas compressible (polytrophe), mais toujours dans le cadre des ellipsoïdes<sup>1</sup>, par D. Lai & S.L. Shapiro [197]. Ils ont montré que le seuil de développement de l'instabilité séculaire dépend du rapport

$$Q = 4.4 \times 10^{-9} \left( \frac{\gamma - 6/5}{\gamma - 1} \right)^2 \left( \frac{R}{10 \text{ km}} \right)^2 \left( \frac{1.4M_{\odot}}{M} \right)^3 \left( \frac{\nu}{\text{m}^2\text{s}^{-1}} \right), \quad (17.7)$$

où  $\gamma$  est l'indice adiabatique du polytrophe,  $R$  le rayon moyen de l'étoile,  $M$  sa masse et  $\nu$  la viscosité cinématique de cisaillement. Pour un ellipsoïde de Maclaurin, il suffit de faire  $\gamma \rightarrow \infty$  (fluide incompressible) et on retrouve alors la formule établie par Lindblom & Detweiler [202]. La quantité  $Q$  mesure l'importance de la viscosité par rapport au rayonnement gravitationnel. Si  $Q \ll 1$ , c'est la réaction au rayonnement gravitationnel qui domine et l'instabilité est alors du type CFS (partie de gauche de la Fig. 17.4) Pour  $Q \gg 1$ , c'est au contraire la viscosité qui domine et l'instabilité conduit à une configuration de type Jacobi (partie de droite de la Fig. 17.4). Pour  $Q \sim 1$ , la combinaison de la viscosité et du rayonnement gravitationnel a un effet stabilisateur très important, comme on le voit sur la Fig. 17.4.

### 17.3 L'instabilité séculaire triaxiale dans les étoiles à neutrons

Les résultats classiques rappelés ci-dessus concernent essentiellement la théories des ellipsoïdes constitués d'un fluide incompressible en théorie newtonienne. Dans le contexte des étoiles à neutrons, la question naturelle qui se pose est comment ces résultats s'étendent au cas compressible et à la relativité générale. En ce qui concerne la compressibilité, J.H. Jeans [177, 178] dans les années 1920 avait déjà montré que pour des fluides assez compressibles (indice adiabatique  $\gamma \lesssim 2.2$ ), la vitesse de rotation keplerienne était atteinte avant que l'instabilité triaxiale séculaire puisse se déclencher. Ce résultat a été raffiné à

$$\gamma_{\text{crit}}^{\text{Newt}} = 2.238 \quad (17.8)$$

par R.A. James en 1964 [173]. Quant aux effets de la relativité générale, peu d'études ont été faites en 1996. On peut seulement noter des résultats de S. Chandrasekhar [93] en 1967 et d'A.N. Tsirulev & V.P. Tsvetkov [274] en 1982 qui montrent qu'à l'ordre 1 post-newtonien, la bifurcation Maclaurin  $\rightarrow$  Jacobi a lieu à vitesse de rotation plus élevée qu'en régime newtonien à densité égale.

<sup>1</sup>Il s'agit alors d'une approximation car, en gravitation newtonienne, un ellipsoïde n'est une figure d'équilibre exacte que pour un fluide incompressible.

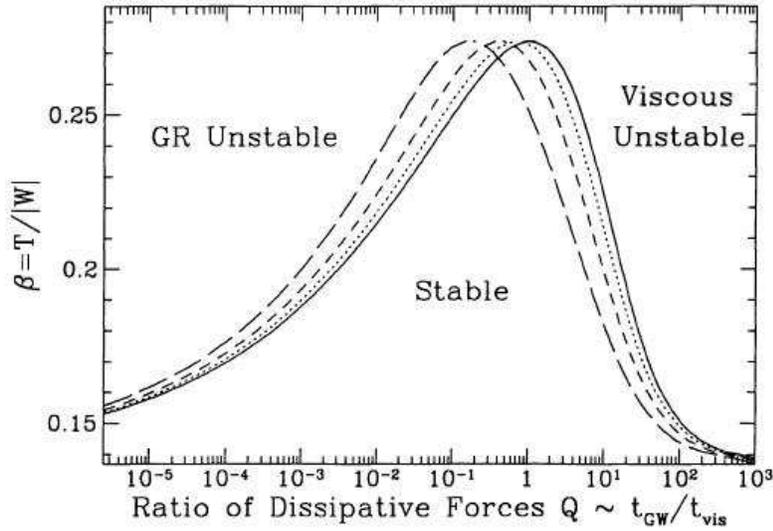


FIG. 17.4 – Valeur critique du rapport  $T/|W|$  pour le développement de l'instabilité triaxiale séculaire, en fonction du paramètre  $Q$  qui mesure l'importance de la viscosité par rapport au rayonnement gravitationnel. La ligne continue correspond au cas des ellipsoïdes de Maclaurin (fluide incompressible). Les autres lignes correspondent à des polytropes dans l'approximation ellipsoïdale :  $\gamma = 5/3$  (pointillés),  $\gamma = 2$  (tirets),  $\gamma = 3$  (tirets longs) [d'après Lai & Shapiro [197]].

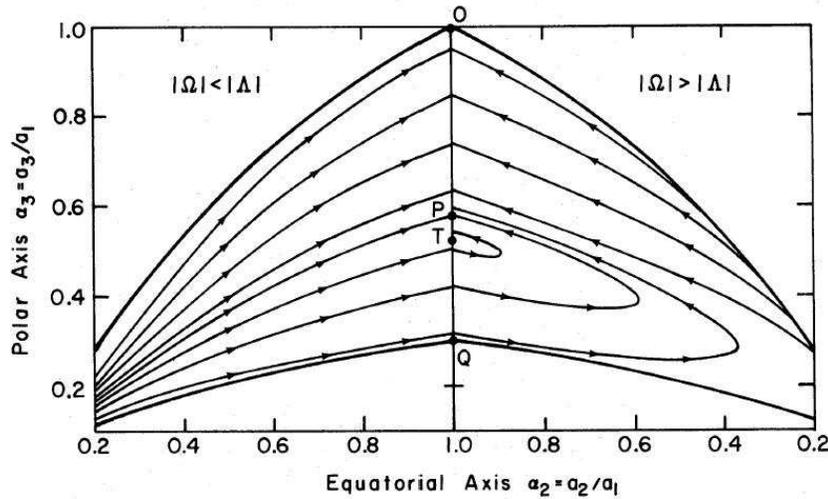


FIG. 17.5 – Évolution d'une étoile newtonienne incompressible dans le plan  $a_2/a_1 - a_3/a_1$  sous l'effet de l'instabilité séculaire liée à la viscosité et en présence de rayonnement gravitationnel. La séquence des ellipsoïdes de Maclaurin est la droite verticale  $a_2/a_1 = 1$ . Les configurations sont stables jusqu'au point T, situé au delà du point P qui marque la bifurcation avec la branche des ellipsoïdes de Jacobi. Le point Q dénote l'instabilité dynamique [d'après Detweiler & Lindblom [114]].

## 17.4 Notre étude de 1996 [A17]

### 17.4.1 Cadre de l'étude

Nous avons entrepris la recherche du point de bifurcation du type Maclaurin  $\rightarrow$  Jacobi pour des étoiles constituées d'un fluide compressible en relativité générale. L'hypothèse de base de notre travail est la rotation rigide, aussi bien pour la configuration axisymétrique que pour la configuration triaxiale où se développe l'instabilité. Cela revient à dire que nous étudions l'instabilité séculaire engendrée par la viscosité.

### 17.4.2 Symétrie hélicoïdale

En plus de la rotation rigide, une autre hypothèse de base est celle de la symétrie de l'espace-temps lorsqu'on tourne avec l'étoile. Autrement dit nous supposons que le vecteur  $\ell$  introduit au § 1.4.3 (Eq. (1.19))

$$\ell = \mathbf{k} + \Omega \mathbf{m}, \quad (17.9)$$

est toujours un vecteur de Killing, alors que  $\mathbf{k} = \partial/\partial t$  et  $\mathbf{m} = \partial/\partial \varphi$  ne le sont plus pour des configurations triaxiales en rotation. Il s'agit du premier exemple de ce que nous qualifierons en 1997 [A20] de *symétrie hélicoïdale* et que nous utiliserons systématiquement pour les configurations d'équilibre des systèmes binaires (Parties IV et V). Le qualificatif *hélicoïdale* reflète le fait que les lignes de champ du vecteur de Killing  $\ell$  sont des hélices dans un diagramme d'espace-temps. La symétrie hélicoïdale revient à dire que le système n'évolue pas, hormis son mouvement de rotation autour d'un axe. Cette symétrie est exacte en gravitation newtonienne. Par contre, en présence de rayonnement gravitationnel sortant, elle n'est qu'approchée puisque le système évolue sous l'effet de la perte d'énergie et de moment cinétique par rayonnement gravitationnel. Toutefois, au moment même où l'étoile brise sa symétrie axiale, aucune onde gravitationnelle n'a encore été émise et on peut considérer que la symétrie hélicoïdale est exacte. Elle peut donc être utilisée pour la détermination du point de brisure de symétrie. Par contre, il serait incorrect de l'utiliser pour calculer l'évolution ultérieure de l'instabilité car on ne tiendrait alors pas compte de la réaction au rayonnement gravitationnel.

Nous avons écrit les équations d'Einstein dans le cadre la symétrie hélicoïdale et les avons tronquées d'une manière qui redonne les équations exactes dans le cas axisymétriques, mais ne tient compte que des termes dominants dans le cas triaxial. Dans la version de 1996 de cette approximation [A17], nous n'avons pris en compte que le caractère triaxial de la fonction lapse  $N$  (dont le logarithme redonne le potentiel gravitationnel à la limite newtonienne). Cela ne veut pas dire que seul le coefficient métrique  $g_{tt}$  a été considéré comme triaxial, car via notre choix de décomposition des coefficients métriques à l'aide de la fonction lapse (cf. Eqs. (1.4)-(1.7)), les coefficients métriques  $g_{tt}$ ,  $g_{t\varphi}$ ,  $g_{rr}$ ,  $g_{r\theta}$  et  $g_{r\varphi}$  deviennent tous des fonctions non-axisymétriques, c'est-à-dire des fonctions de  $(r, \theta, \varphi - \Omega t)$  (cf. Eq. (20) de [A17]). Pour la partie fluide, l'existence du champ de vecteur de Killing  $\ell$  en conjonction avec l'hypothèse de rotation rigide garantit l'existence d'une intégrale première de l'équation d'Euler relativiste, comme nous l'avons montré au § 1.4.3 à l'aide de l'équation de Carter-Lichnerowicz.

### 17.4.3 Méthode employée

Nous avons cherché le point de bifurcation de type Maclaurin  $\rightarrow$  Jacobi à l'aide de la méthode itérative suivante. Ayant fixé une valeur centrale  $H_c$  de l'enthalpie  $H$  et la vitesse de rotation  $\Omega$ , nous calculons tout d'abord une configuration d'équilibre axisymétrique en résolvant

itérativement le système d'EDP non linéaire issu de la formulation décrite ci-dessus. Lorsque la procédure a suffisamment convergé, nous modifions le logarithme  $\nu$  du lapse en lui ajoutant une partie 3-D, de type  $m = 2$  (où  $m$  est l'indice azimutal de la décomposition en série de Fourier suivant  $\varphi$ ). Nous reprenons ensuite l'itération, sans autre altération, et suivons l'évolution de la partie non-axisymétrique ( $m = 2$ ) de la solution. Si cette dernière décroît, nous concluons que la configuration de départ est stable, alors que si elle croît, nous concluons au contraire qu'elle est séculairement instable. Cette procédure est décrite plus en détail au § III.A de l'article [A19] (Chap. 19).

Il convient de noter que la méthode employée ne requiert pas de spécifier la valeur de la viscosité de cisaillement. Quelle que soit cette valeur, l'effet de la viscosité est pris en compte par le caractère rigide du profil de rotation que nous imposons à chaque pas de la procédure itérative. Si l'on considère que le schéma itératif représente une évolution temporelle quasi-stationnaire cela revient à dire que l'on considère que le lapse de temps entre chaque pas est suffisant pour permettre à la viscosité de gommer toute rotation différentielle. Une conséquence de cette méthode est que l'on obtient pas l'échelle de temps de développement de l'instabilité séculaire — qui elle dépendrait de la valeur explicite de la viscosité — mais seulement le seuil d'apparition de l'instabilité.

#### 17.4.4 Résultats

A la limite newtonienne, nous avons retrouvé la valeur critique (17.8) de l'indice adiabatique pour que l'instabilité séculaire apparaisse avant la limite de rupture centrifuge. Dans le cas newtonien  $\gamma = 3$ , le point de bifurcation obtenu est conforme avec des calculs précédents (Tableau 1 de [A17]). Ces deux résultats valident la méthode employée, au moins pour le cas compressible newtonien.

Dans le régime relativiste, nous avons montré que l'indice adiabatique critique augmentait avec le degré de relativité  $\Xi$  de l'étoile, ce qui montre que la relativité générale a un effet stabilisateur à l'égard de l'instabilité séculaire liée à la viscosité. En utilisant des équations d'état de la matière nucléaire (les mêmes que celles employées au Chap. 5), il en résulte que seules les équations d'état les plus dures permettent le développement de l'instabilité.

## 17.5 Développements ultérieurs

En 1998, nous avons apporté une amélioration majeure de l'approximation employée, en tenant compte du caractère triaxial du vecteur shift, en plus de la fonction lapse. Cela sera décrit au Chap. 18. Les résultats sont quantitativement modifiés, mais pas qualitativement : l'effet stabilisateur de la relativité générale est confirmé, et même amplifié.

La première étude analytique détaillée du problème dans le cadre relativiste, est parue en 1998. Elle a été effectuée dans le cadre de l'approximation post-newtonienne du premier ordre par S.L. Shapiro & S. Zane [253] et a confirmé qualitativement nos résultats. Nous la discuterons plus en détail au Chap. 19.

Enfin, très récemment, nous avons utilisé notre nouvelle méthode spectrale multi-domaine avec grille adaptative [A29], qui sera discutée au Chap. 29, pour calculer le seuil de l'instabilité pour des fluides incompressibles. La discontinuité de densité à la surface de l'étoile dans le cas incompressible empêchait tout traitement par la méthode employée dans [A17]. L'avantage du cas incompressible est qu'il permet une comparaison directe avec les résultats classiques sur les ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi. Nous présenterons cette comparaison au Chap. 19.



## Chapitre 18

# Amélioration de l'approximation dans le traitement relativiste de l'instabilité triaxiale de type Jacobi

### 18.1 Notre article [A18]

Comme mentionné au § 17.5, nous avons sensiblement amélioré en 1998 notre méthode de calcul du seuil de développement de l'instabilité triaxiale séculaire des étoiles relativistes en rotation. Pour cela, nous avons pris en compte le caractère vectoriel et triaxial du vecteur shift. Autrement dit, nous avons écrit

$$\mathbf{N} = N^r(r, \theta, \varphi - \Omega t) \mathbf{e}_r + N^\theta(r, \theta, \varphi - \Omega t) \mathbf{e}_\theta + N^\varphi(r, \theta, \varphi - \Omega t) \mathbf{e}_\varphi, \quad (18.1)$$

alors que dans l'étude [A17] présentée au Chap. 17 nous avons utilisé un vecteur shift tronqué à son terme dominant, à savoir le terme axisymétrique

$$\mathbf{N} = N^\varphi(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi \quad (18.2)$$

(cf. Eq. (1.3), § 1.2). D'un point de vue technique, cela veut dire qu'il faut résoudre une équation elliptique vectorielle 3-D pour le vecteur  $\mathbf{N}$ .

Le résultat principal est résumé sur la Fig. 3 de [A18] : l'effet stabilisateur de la relativité générale sur l'instabilité triaxiale séculaire liée à la viscosité est encore plus marqué que celui qui avait été obtenu dans [A17] (Chap. 17), puisque l'indice adiabatique critique, en deça duquel les étoiles sont stables jusqu'à la rotation keplerienne, est plus grand que dans [A17]. Pour une étoile à neutrons de  $1.4 M_\odot$ , l'indice adiabatique doit être supérieur à 2.5 pour que l'instabilité triaxiale puisse se développer à grande vitesse de rotation. Cela implique une équation d'état assez dure.

### 18.2 Développements ultérieurs

Comme indiqué au § 17.5, le développement majeur depuis 1998 a consisté dans l'utilisation de la méthode spectrale multi-domaines à grille adaptée, qui permet de traiter les objets avec discontinuité de densité (fluides incompressibles, étoiles de quarks étranges), que nous présentons au Chapitre suivant.



## Chapitre 19

# Instabilité triaxiale séculaire pour des fluides incompressibles

### 19.1 Introduction

La méthode présentée au Chap. 17 et améliorée au Chap. 18 utilisait un découpage de l'espace en domaines numériques sphériques (cf. Fig. 1.1). Cela ne permettait pas de traiter une discontinuité du champ de densité à la surface de l'étoile. Par contre, pour la méthode numérique multi-domaines que nous avons mise au point en 1998 [A29] et qui sera présentée au Chap. 29, la surface de l'étoile coïncide avec la limite entre deux domaines, de sorte que toutes les quantités sont des fonctions  $C^\infty$  dans chaque domaine numérique. En utilisant LORENE (Chap. 31), nous avons donc construit un nouveau code, basé sur cette nouvelle méthode multi-domaines. L'intérêt est que l'on peut désormais traiter de la stabilité séculaire des fluides incompressibles et comparer avec les résultats classiques sur les ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi en régime newtonien, mais aussi avec des résultats récents [253, 142] en régime post-newtonien.

### 19.2 Notre article [A19]

Le premier test important a consisté à retrouver le point de bifurcation Maclaurin - Jacobi dans le cas newtonien. Nous l'avons localisé avec une précision de six chiffres (Eq. (35) de [A19]), soit un chiffre de mieux que dans le célèbre traité de Chandrasekhar, *Ellipsoidal figures of equilibrium* [94].

Le second test était de retrouver les résultats post-newtoniens (à l'ordre 1) en régime faiblement relativiste. Avant 2002, une seule étude post-newtonienne permettait une telle comparaison, celle de S.L. Shapiro & S. Zane en 1998 [253]. L'accord avec nos résultats n'était pas bon, même si, comme mentionné au § 17.5, la tendance trouvée par Shapiro & Zane était la même que nous, à savoir que la relativité générale stabilise les étoiles en rotation vis-à-vis de l'instabilité séculaire liée à la viscosité. L'effet stabilisateur trouvé par Shapiro & Zane était beaucoup plus grand (cf. Fig. 8 de [A19]). Heureusement, une deuxième étude post-newtonienne a été effectuée récemment par T. Di Girolamo & M. Vietri, de l'Université de Rome 3 [142] et ses résultats se sont avérés en très bon accord avec les nôtres, comme on peut le voir sur la Fig. 8 de [A19]. Cela constitue une validation remarquable de la méthode décrite au § 17.4.3 pour localiser le point d'instabilité en régime relativiste.

Nos résultats peuvent être résumés par la formule approchée suivante, qui donne le rap-

port entre l'énergie cinétique de rotation et l'énergie potentielle gravitationnelle au point de bifurcation Maclaurin - Jacobi en fonction du paramètre de relativité  $\Xi = M/R$  (cf. Eq. (1), page 15) :

$$\left. \frac{T}{|W|} \right|_{\text{sec}} = 0.1375 + 0.148 \Xi(\Xi + 1) . \quad (19.1)$$

Lorsque  $\Xi = 0$  (limite newtonienne), on retrouve le résultat (17.4). La positivité du coefficient 0.148 montre l'effet stabilisateur de la relativité générale : il faut tourner plus vite pour que l'instabilité séculaire se produise.

Quatrième partie

**Systèmes binaires d'étoiles à  
neutrons**



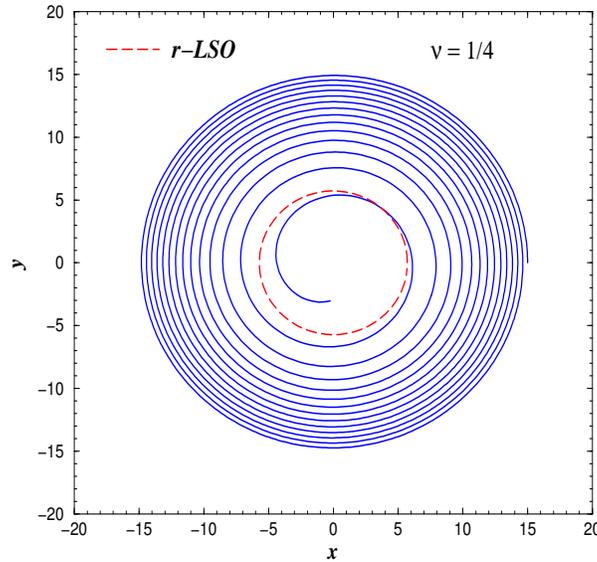


FIG. 19.1 – Mouvement en spirale de la particule réduite du traitement effectif à un corps du problème des deux corps, dans l’approximation post-newtonienne d’ordre deux de la relativité générale [d’après Buonanno & Damour [82]].

## Évolution d’un système binaire sous l’effet du rayonnement gravitationnel

Contrairement à la théorie newtonienne de la gravitation, il n’existe pas de solution stationnaire pour le problème des deux corps en relativité générale. La raison est très simple : le mouvement orbital génère des ondes gravitationnelles qui emportent de l’énergie et du moment cinétique. Comme pour tout système auto-gravitant qui perd de l’énergie, les orbites des deux corps se rétrécissent et le mouvement exact est un mouvement en spirale décroissante plutôt qu’un mouvement suivant des orbites fermées (Fig. 19.1). On a même un phénomène d’emballement car plus les orbites sont petites, plus les vitesses orbitales sont élevées (en vertu de la troisième loi de Kepler) et plus le système émet des ondes gravitationnelles. Un autre effet du rayonnement gravitationnel est d’annuler l’excentricité des orbites, de sorte que lorsque l’on traite des phases finales de l’évolution du système, on peut supposer les orbites circulaires.

Le mouvement de spirale consécutif à l’émission d’ondes gravitationnelles constitue même la meilleure preuve observationnelle que nous ayons à ce jour de l’existence des ondes gravitationnelles : le chronométrage des pulses radio du pulsar binaire PSR B1913+16 a montré que les orbites de ce système double d’étoiles à neutrons rétrécissaient sous l’effet du rayonnement gravitationnel (Fig. 19.2). Cette découverte a d’ailleurs valu le Prix Nobel de Physique 1993 à ses deux auteurs, Joseph Taylor & Russel Hulse.

L’évolution d’un système binaire d’objets compacts (étoiles à neutrons ou trous noirs) sous l’effet du rayonnement gravitationnel peut être décomposée en trois phases :

1. La lente phase de spirale décrite ci-dessus ; cette phase s’achève lorsque la vitesse radiale devient du même ordre de grandeur que la vitesse orbitale, de sorte que l’on ne peut plus vraiment parler d’orbite.
2. Une phase de plongeon, sur un temps dynamique, suivi de la coalescence des deux corps

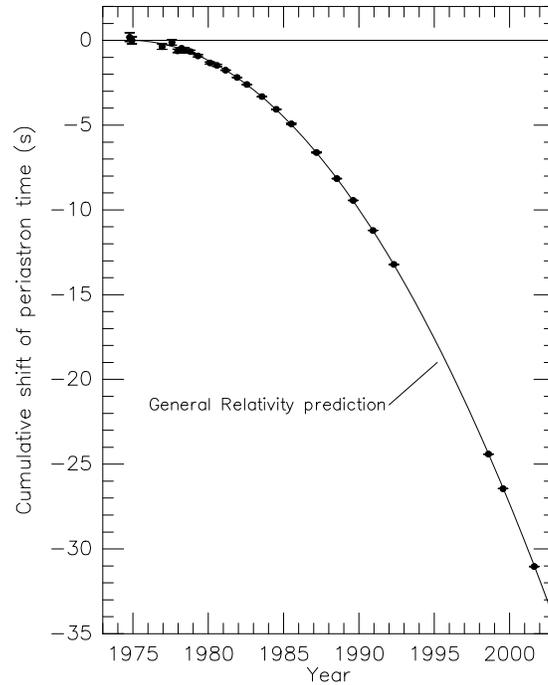


FIG. 19.2 – Preuve observationnelle de l’existence des ondes gravitationnelles : décroissance de la période orbitale  $P_{\text{orb}} \simeq 7\text{ h }45\text{ min}$  du pulsar binaire PSR B1913+16 mesurée par le décalage  $\Delta T$  des instants de passage au périastre par rapport à une orbite de période constante; la courbe en trait plein correspond à  $\Delta T(t) = (P_{\text{orb}}/2P_{\text{orb}})t^2$  avec  $\dot{P}_{\text{orb}}$  donné par la relativité générale (réaction au rayonnement gravitationnel) [d’après Weisberg & Taylor [286] ].

pour former un trou noir<sup>1</sup>

3. Une phase de désexcitation du trou noir final. D’une manière imagée, on peut dire que c’est dans cette phase que “le trou noir perd ses cheveux” pour devenir un trou noir de Kerr (le seul trou noir stationnaire possible suivant le théorème d’unicité d’Israel-Carter-Hawking).

La transition entre la phase de spirale et la phase de plongeon peut être le résultat d’une instabilité orbitale, d’origine relativiste et/ou hydrodynamique. L’instabilité orbitale relativiste en deçà d’une distance critique est bien connue dans le cas où l’un des deux corps est beaucoup moins massif que l’autre. Elle définit la dernière orbite circulaire stable (*ISCO* pour *Innermost Stable Circular Orbit*) à  $R = 6M$  dans la métrique de Schwarzschild (cf. § 25.5 de [218]). Cependant il n’est pas clair que pour deux corps de masses comparables, une telle dernière orbite stable soit bien définie : la transition entre la phase de spirale et celle de “plongeon” pourrait être progressive [82].

<sup>1</sup>Pour la coalescence de deux étoiles à neutrons légères, l’objet issu de la fusion pourrait être également une étoile à neutrons si la somme des masses des deux étoiles est inférieure à la masse maximale des étoiles à neutrons. Même dans le cas contraire, la pression thermique dans l’objet formé pourrait assurer un équilibre hydrostatique temporaire, jusqu’à ce que le refroidissement — par émission de neutrinos — soit suffisant pour que l’effondrement en trou noir se déclenche.

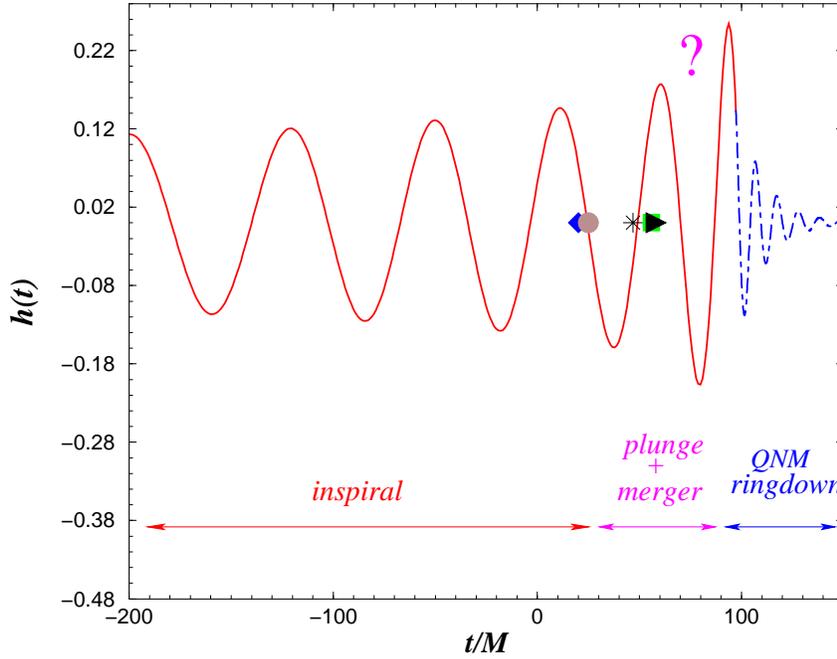


FIG. 19.3 – Forme des ondes gravitationnelles émises lors de l'évolution d'un système binaire d'objets compacts [adapté de Buonanno & Damour [82]].

## Ondes gravitationnelles émises

La forme des ondes gravitationnelles émises par un système binaire reflète les trois étapes de son évolution (Fig. 19.3). Le signal gravitationnel a une forme relativement simple dans la phase de spirale, puisqu'il s'agit d'un signal quasi-sinusoidal (avec les deux modes de polarisation  $h_+$  et  $h_\times$  en quadrature de phase), dont à la fois l'amplitude et la fréquence augmentent avec le temps. Un tel signal est qualifié de *chirp* en Anglais (*chirp* vaut plus généralement pour la *stridulation* des insectes de type criquet). L'augmentation de la fréquence s'interprète facilement car, en première approximation, cette dernière n'est autre que deux fois la fréquence orbitale, qui augmente du fait du rétrécissement des orbites. L'augmentation de l'amplitude est quant à elle due à l'accroissement des vitesses orbitales.

Plus précisément, la forme du signal est la suivante, à l'ordre le plus bas (mouvement orbital newtonien)

$$\begin{cases} h_+ \propto \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{r} f^{2/3} \cos(2\pi ft) \\ h_\times \propto \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{r} f^{2/3} \sin(2\pi ft) \end{cases}, \quad (19.2)$$

où  $r$  est la distance à la source et la fréquence  $f$  augmente avec le temps comme

$$f = \frac{5^{3/8}}{8\pi} \left( \frac{c^3}{G} \right)^{5/8} \mathcal{M}^{-5/8} (t_{\text{coal}} - t)^{-3/8}, \quad (19.3)$$

Dans les équations (19.2)-(19.3), les masses  $M_1$  et  $M_2$  des deux corps interviennent uniquement via la combinaison suivante :

$$\mathcal{M} := \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}, \quad (19.4)$$

qui est appelée *chirp mass*. Aux ordres post-newtoniens supérieurs, le signal gravitationnel comprend plus d'harmoniques et fait intervenir d'autres combinaisons de  $M_1$  et  $M_2$ , ainsi que le moment cinétique de chaque objet [65, 59].

Le temps caractéristique d'évolution du système se déduit de l'Eq. (19.3) :

$$\tau := \frac{f}{\dot{f}} = \frac{8}{3}(t_{\text{coal}} - t) = \frac{5}{96\pi^{8/3}} \frac{c^5}{G^{5/3}} \mathcal{M}^{-5/3} f^{-8/3}. \quad (19.5)$$

L'application numérique donne

- pour deux étoiles à neutrons ( $M_1 = M_2 = 1.4 M_\odot \Rightarrow \mathcal{M} = 1.22 M_\odot$ ) :

$$t_{\text{coal}} - t = 16 \text{ min} \left( \frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^{8/3} \left( \frac{1.22 M_\odot}{\mathcal{M}} \right)^{5/3}; \quad (19.6)$$

- pour deux trous noirs stellaires ( $M_1 = M_2 = 10 M_\odot \Rightarrow \mathcal{M} = 8.7 M_\odot$ ) :

$$t_{\text{coal}} - t = 37 \text{ s} \left( \frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^{8/3} \left( \frac{8.7 M_\odot}{\mathcal{M}} \right)^{5/3}; \quad (19.7)$$

- pour deux trous noirs supermassifs ( $M_1 = M_2 = 10^6 M_\odot \Rightarrow \mathcal{M} = 8.7 \times 10^5 M_\odot$ ) :

$$t_{\text{coal}} - t = 43 \text{ j} \left( \frac{10^{-4} \text{ Hz}}{f} \right)^{8/3} \left( \frac{8.7 \times 10^5 M_\odot}{\mathcal{M}} \right)^{5/3}. \quad (19.8)$$

La fréquence de 10 Hz qui apparaît dans les Eqs. (19.6)-(19.7) (resp. Eq. (19.8)) est la fréquence d'entrée dans la bande passante de VIRGO (cf. Fig. 14.2, page 259) (resp. LISA). Ainsi un système binaire d'étoiles à neutrons passera environ un quart d'heure dans la bande de VIRGO, correspondant à  $\sim 16000$  cycles, un système binaire de deux trous noirs environ une demi-minute (600 cycles) et un système binaire de deux trous noirs d'un million de masses solaires passera un mois et demi dans la bande de LISA (600 cycles).

La coalescence d'un système binaire d'étoiles à neutrons constitue, avec celle des trous noirs, une des meilleures sources d'ondes gravitationnelles pour VIRGO. Ce dernier pourra détecter un tel événement jusqu'à  $\sim 30$  Mpc (étoiles à neutrons) et  $\sim 100$  Mpc (trous noirs). Étant donnée la fréquence d'occurrence de ces événements, de l'ordre d'une coalescence par galaxie tous les  $10^5$  ans pour les étoiles à neutrons et de l'ordre d'une tous les  $10^6$  ans pour les trous noirs<sup>2</sup>, on peut s'attendre à une détection de coalescence par an. Mais ce nombre peut varier d'une par mois à une tous les dix ans. De plus, il n'est pas clair à l'heure actuelle de savoir si VIRGO détectera en premier une coalescence d'étoiles à neutrons ou de trous noirs. Ce dernier type d'événement est plus rare pour une galaxie donnée, mais on le voit plus loin. Le taux de coalescence effectivement observé sera alors un paramètre important pour contraindre les modèles d'évolution des étoiles massives [80].

## Notre étude des systèmes binaires

Le signal gravitationnel de la phase de spirale est celui qui est le mieux connu actuellement, grâce aux méthodes analytiques post-newtoniennes (cf. [64] pour des résultats récents et [61] pour

<sup>2</sup>estimation à partir des théories d'évolution des systèmes d'étoiles massives et prenant en compte les pulsars observés (cf. [54] pour une étude récente)

une revue). La dernière phase (désexcitation du trou noir nouvellement formé) est également relativement bien connue : le trou noir se désexcite par ses modes propres d'oscillation, que l'on qualifie de quasi-normaux (cf. [186] pour une revue). Il s'agit d'oscillations très fortement amorties (cf. la partie de droite de la Fig. 19.3). Pour un trou noir de  $20 M_{\odot}$ , la fréquence du mode  $\ell = m = 2$  (le moins amorti) est d'environ 600 Hz et le temps caractéristique d'amortissement est d'une milliseconde [121].

Notre étude des systèmes binaires concerne la phase intermédiaire : celle des dernières orbites (fin de la spirale), du plongeon et de la coalescence. Cette phase est, de loin, la moins bien connue aujourd'hui (d'où le point d'interrogation sur la Fig. 19.3). Contrairement aux deux autres, elle n'est pas accessible au traitement analytique car la séparation entre les corps est du même ordre de grandeur que leur taille, de sorte que l'on ne peut plus faire l'hypothèse de masses ponctuelles, comme dans les études post-newtoniennes de la phase de spirale. Ainsi, pour un système d'étoiles à neutrons, un traitement hydrodynamique des étoiles s'impose. Par ailleurs, la phase de coalescence proprement dite est dynamique et les analyses perturbatives autour d'un trou noir stationnaire, valables dans la dernière phase, ne s'appliquent pas.

Dans cette partie, nous présentons le traitement des dernières orbites, avant l'ISCO des systèmes binaires d'étoiles à neutrons. La Partie V sera consacrée aux systèmes de trous noirs.



## Chapitre 20

# Systèmes binaires relativistes en rotation non-synchrone

### 20.1 État de rotation des systèmes binaires serrés d'étoiles à neutrons

Comme nous venons de le voir, l'évolution des systèmes binaires d'étoiles à neutrons est entièrement dictée par le rayonnement gravitationnel. En particulier, l'évolution ne se fait pas par échange de matière comme dans d'autres systèmes binaires (variables cataclysmiques, binaires X). La raison en est que les étoiles à neutrons sont des objets *compacts* et ne remplissent donc jamais leurs lobes de Roche, sauf au moment de la coalescence finale.

Une autre différence avec les systèmes binaires serrés "ordinaires" est que pour ces derniers, la viscosité assure un état de rotation *synchronisé* avec le mouvement orbital, c'est-à-dire qu'une étoile de la séquence principale en système binaire serré présente toujours la même face à son compagnon, tout comme la Lune vis-à-vis de la Terre. Si tel n'était pas le cas, il y aurait un mouvement du fluide par rapport à la figure d'équilibre de l'étoile, et comme cette dernière est déformée par les forces de marées, ce mouvement ne pourrait se faire sans cisaillement, si bien qu'il serait dissipé par la viscosité. Ce raisonnement est évidemment valable pour les étoiles à neutrons, mais la différence est l'échelle de temps de l'évolution du système. L'évolution sous l'effet du rayonnement gravitationnel est en effet trop rapide pour que la dissipation visqueuse ait le temps d'assurer la synchronisation de la rotation de l'étoile à neutrons avec le mouvement orbital. Rappelons en effet que, suivant l'estimation (19.6), le système ne met qu'un quart d'heure pour passer de la fréquence orbitale de 5 Hz à la coalescence finale. La viscosité de la matière nucléaire, même tenant compte de la viscosité "effective" résultant de la plasticité de la croûte solide, n'est pas efficace sur une période de temps si courte [185, 58].

On peut donc considérer que l'évolution du système est celle d'un fluide *parfait*. Comme nous l'avons déjà mentionné au § 17.2.3, en première approximation, la réaction au rayonnement gravitationnel est une force qui dérive d'un potentiel. Le théorème de Kelvin s'applique alors et stipule que la circulation de la vitesse (par rapport à un référentiel inertiel) le long d'un contour entraîné par le fluide est constante (cf. par exemple § 3.2.4 de [245]). En choisissant comme contour l'équateur de chaque étoile, on obtient la conservation de la quantité

$$C := \oint_{\text{equat}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathcal{A}} (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{S} =: 2A\omega, \quad (20.1)$$

où  $\mathcal{A}$  est la section équatoriale de l'étoile,  $A$  son aire, et la dernière égalité constitue la définition de la vitesse angulaire moyenne  $\omega$  du fluide par rapport à un référentiel inertiel (il s'agit donc d'une moyenne dans le plan équatorial). L'aire  $A$  varie peu lors de l'évolution du système, car les forces de marée ne déforment appréciablement l'étoile que lors des toutes dernières orbites. La constance de  $C$  est donc équivalente à celle de  $\omega$ . Définissons à présent la vitesse angulaire moyenne de rotation par rapport au référentiel co-orbitant (référentiel tournant à la vitesse orbitale) en retranchant à  $\omega$  la vitesse angulaire orbitale :

$$\Omega_{\text{spin}} := \omega - \Omega_{\text{orb}}. \quad (20.2)$$

Lorsque les étoiles sont encore très éloignées l'une de l'autre,  $\Omega_{\text{orb}}$ , qui décroît comme la puissance  $-3/2$  de la séparation (troisième loi de Kepler), est négligeable devant  $\Omega_{\text{spin}}$ . On peut donc écrire  $\omega = \Omega_{\text{spin}}^0$ , où  $\Omega_{\text{spin}}^0$  représente la vitesse angulaire de rotation "initiale", c'est-à-dire à grande séparation. Lors de l'évolution du système, la constance de  $\omega$  conduit alors à

$$\Omega_{\text{spin}} = \Omega_{\text{spin}}^0 - \Omega_{\text{orb}}. \quad (20.3)$$

A la fin de la phase de spirale, discutée page 349,  $\Omega_{\text{orb}}$  est très grand, de l'ordre de  $10^3$  à  $10^4 \text{ rads}^{-1}$  (fréquence de l'ordre du kilohertz, proche de la borne supérieure de la bande de VIRGO). Dans le cas où l'étoile à neutrons n'est pas initialement un rotateur milliseconde (comme les pulsars recyclés discutés au § 14.1), on a alors  $|\Omega_{\text{spin}}^0| \ll |\Omega_{\text{orb}}|$ , si bien que (20.3) se réduit à

$$\Omega_{\text{spin}} = -\Omega_{\text{orb}}. \quad (20.4)$$

Dans le référentiel co-orbitant le mouvement du fluide est ainsi un mouvement de *contre-rotation*.

## 20.2 Symétrie hélicoïdale

Dans la phase de spirale, où la notion d'orbite a encore un sens, la vitesse azimutale (mouvement orbital) est supérieure à la vitesse radiale (due à la réaction au rayonnement gravitationnel), ainsi qu'il est clair sur la Fig. 19.1, page 349. On peut alors traiter l'évolution du système comme une succession d'orbites circulaires *fermées*, de rayon de plus en plus petit. Il s'agit d'une approximation de *quasi-équilibre*. C'est l'approche que nous avons adoptée pour notre étude des dernières orbites des systèmes binaires. Elle donne lieu à une interprétation géométrique simple : pour des orbites circulaires fermées, l'espace-temps possède la symétrie hélicoïdale décrite au § 17.4.2 et qui est illustrée sur la Fig. 1 de [A20]. Rappelons que c'est grâce au rayonnement gravitationnel que les orbites sont circulaires, même si elles étaient elliptiques lorsque les étoiles étaient très séparées. Des orbites elliptiques ne satisferaient pas à la symétrie hélicoïdale. C'est également en raison du rayonnement gravitationnel que la symétrie hélicoïdale n'est qu'approchée. En théorie newtonienne de la gravitation, elle est parfaitement exacte pour tout système binaire avec des orbites circulaires. Elle reste exacte jusqu'à l'ordre 2.5 post-newtonien, qui est l'ordre auquel apparaît la réaction au rayonnement gravitationnel.

## 20.3 Notre étude de 1997 [A20]

Toutes les études relativistes de systèmes binaires d'étoiles à neutrons jusqu'à 1997 reposaient sur des systèmes en rotation synchrone (on dit également *corotation*) [48, 49, 212]. Comme nous l'avons dit ci-dessus, il ne s'agit pas d'un état de rotation réaliste. Il avait néanmoins été utilisé

car l'hydrodynamique est alors très simple : en se plaçant dans le référentiel co-orbitant la vitesse du fluide est nulle. On a alors une intégrale première de l'équation d'Euler, en suivant le raisonnement présenté au § 1.4.3, qui s'applique tout à fait ici puisque la 4-vitesse du fluide est parallèle au vecteur de Killing hélicoïdal dans le cas d'une rotation synchrone. Même dans le cadre newtonien, les seuls calculs de configurations non-synchrones antérieurs à 1997 étaient ceux de configurations en contre-rotation effectués en 1991 par S. Bonazzola & J.-A. Marck et publiés dans [2]. Toujours dans le cadre newtonien, mais avec en plus l'approximation ellipsoïdale<sup>1</sup>, les seuls calculs existants étaient ceux de M.L. Aizenman en 1968 [28] (cas incompressible) et ceux de D. Lai, F.A. Rasio & S.L. Shapiro en 1994 [195]. Ces derniers ont été étendus aux premières corrections post-newtoniennes par J.C. Lombardi, F.A. Rasio & S.L. Shapiro en 1997 [205].

Dans l'article [A20], nous avons entrepris l'étude d'un système binaire relativiste dans l'approximation de quasi-équilibre (c'est-à-dire en supposant la symétrie hélicoïdale), pour des états de rotation différents de la rotation synchrone, en particulier pour l'état de contre-rotation décrit par (20.4). En partant des équations de l'hydrodynamique relativiste sous la forme de Carter-Lichnerowicz (Eq. (1.14), § 1.4.3), nous avons montré que l'écoulement fluide doit obéir aux équations suivantes (Eqs. (35), (43) et (44) de [A20]) :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \ln(n\Gamma) = 0, \quad (20.5)$$

$$(\nabla \wedge \mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega}_{\text{orb}}) \wedge \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\nabla\Phi - (\mathbf{V} \cdot \nabla\Phi)\mathbf{V} = -\Gamma^{-2}\nabla(H + \Phi + \ln\Gamma). \quad (20.6)$$

Dans ces équations,  $\nabla$  désigne la dérivation covariante associée à la métrique d'espace-temps et  $\nabla \wedge$  le produit vectoriel dans les hyperplans propres de l'observateur co-orbitant ;  $\mathbf{V}$  est la 3-vitesse du fluide par rapport à l'observateur co-orbitant et  $\Gamma$  le facteur de Lorentz correspondant ;  $n$  est la densité baryonique dans le référentiel du fluide ;  $\Phi$  est une quantité purement métrique qui (i) dans le cas relativiste relie la 4-vitesse  $\mathbf{v}$  de l'observateur co-orbitant au vecteur de Killing hélicoïdal  $\ell$  par  $\mathbf{v} = e^{-\Phi} \ell$  et (ii) à la limite newtonienne se réduit à la somme du potentiel gravitationnel et du potentiel centrifuge ;  $\mathbf{\Omega}_{\text{orb}}$  est le 4-vecteur rotation de l'observateur co-orbitant (vitesse angulaire orbitale, cf. § 20.1)<sup>2</sup> ;  $H$  désigne la log-enthalpie du fluide, définie par l'équation (6.1).

L'équation (20.5) n'est autre que l'expression de la conservation du nombre baryonique. L'équation (20.6) est la version relativiste de l'équation de Crocco en régime stationnaire dans un référentiel tournant (cf. par exemple § 3.1.2 de [245]).

Le cas de la rotation synchrone s'obtient très simplement en faisant  $\mathbf{V} = 0$  dans le système (20.5)-(20.6). On ré-obtient alors l'intégrale première (1.22) du § 1.4.3 sous la forme  $H + \Phi = \text{const.}$

Dans [A20], nous avons défini l'état de contre-rotation en posant (Eqs. (44) et (49) de [A20])

$$H + \Phi + \ln\Gamma = \text{const.} \quad (20.7)$$

Le membre de droite de l'Eq. (20.6) est alors zéro. Nous avons alors montré comment réduire la résolution de (20.6) à une équation de Poisson vectorielle et celle de (20.5) à une équation elliptique scalaire, en décomposant  $\mathbf{V}$  à l'aide d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire.

<sup>1</sup>L'approximation ellipsoïdale consiste à supposer que les surfaces isobares de chaque étoile sont des ellipsoïdes homothétiques entre eux, ce qui est toujours faux pour des systèmes binaires, même dans le cas incompressible, contrairement au cas des corps isolés en rotation discutés au § 17.2.

<sup>2</sup> $\mathbf{\Omega}_{\text{orb}}$  est dénoté  $\boldsymbol{\omega}$  dans l'article [A20]

## 20.4 Développements ultérieurs

### 20.4.1 Une petite correction

Immédiatement après la publication de notre article, H. Asada, de l'Université d'Hirosaki, au Japon [40], a remarqué que la condition (20.7) n'était pas suffisante pour déterminer univoquement le champ de vitesse dans l'étoile. En réécrivant l'équation de Crocco (20.6) sous la forme

$$\left[ e^\Phi \nabla \wedge (e^{-\Phi} \mathbf{V}) + 2\Omega_{\text{orb}} \right] \wedge \mathbf{V} = -\Gamma^{-2} \nabla (H + \Phi + \ln \Gamma), \quad (20.8)$$

Asada a proposé de définir le mouvement de contre-rotation par la condition vectorielle :

$$\frac{1}{2} e^\Phi \nabla \wedge (e^{-\Phi} \mathbf{V}) = -\Omega_{\text{orb}}. \quad (20.9)$$

Notons que notre "définition" (20.7) de la contre-rotation apparaît alors comme une conséquence de cette nouvelle définition, comme on le voit immédiatement en reportant (20.9) dans (20.8). A la limite newtonienne, la définition (20.9) redonne directement l'expression (20.4). H. Asada [40] a également montré que la définition (20.9) implique l'*irrotationnalité* de l'écoulement du fluide, au sens relativiste du terme, c'est-à-dire un écoulement dont la 2-forme de vorticité, définie par l'Eq. (1.17), s'annule :

$$\nabla \wedge (h\mathbf{u}) = 0. \quad (20.10)$$

Dans cette équation,  $\mathbf{u}$  désigne la 4-vitesse du fluide et  $h$  l'enthalpie spécifique, reliée à la log-enthalpie  $H$  par  $h = \exp(H)$ . Notons que, dans la discussion du § 20.1, la condition d'irrotationnalité s'écrit  $\omega = 0$ , ce qui reporté dans (20.2) conduit bien à la contre-rotation exprimée par l'Eq. (20.4).

### 20.4.2 Une grosse amélioration

En 1998, inspiré par notre article (selon ses propres termes), S.A. Teukolsky [272] a grandement simplifié le traitement du problème en partant de l'aspect irrotationnel (Eq. (20.10)), plutôt que de l'aspect contre-rotation (Eq. (20.9)). Au même moment et de manière indépendante, M. Shibata [254] développait le même point de vue et obtenait une formulation équivalente. La remarque de base de Teukolsky et Shibata est que l'équation d'irrotationnalité (20.10) est beaucoup plus simple à résoudre que l'équation de contre-rotation (20.9) : il suffit en effet de poser que l'écoulement fluide soit *potentiel*, c'est-à-dire d'introduire un champ scalaire  $\Psi$  tel que

$$h\mathbf{u} = \nabla \Psi, \quad (20.11)$$

pour que (20.10) soit automatiquement résolue (en vertu du théorème de Schwarz). Le champ de vitesse est alors entièrement décrit par le scalaire  $\Psi$ , pour lequel on a seulement à résoudre l'équation de continuité  $\nabla \cdot (n/h \nabla \Psi) = 0$ . La simplification par rapport au formalisme de notre article [A20] est considérable. De notre côté, nous avons dans [A21, A24] quelque peu simplifié la dérivation de l'intégrale première par rapport à la démonstration donnée par Shibata, ainsi que nous le verrons au chapitre suivant.

### 20.4.3 Une plus jolie définition

En 2002 J.L. Friedman, K. Uryu & M. Shibata [135] ont donné une définition de la *symétrie hélicoïdale* plus élégante que celle que nous avons proposée dans [A20], où nous avons justement

introduit le mot *hélicoïdal*<sup>3</sup> Alors que notre définition faisait appel à une décomposition du vecteur de Killing  $\ell$  en deux vecteurs (Eq. (2) de [A20]), celle de Friedman, Uryu & Shibata ne considère que les lignes de champ du vecteur  $\ell$  (les *orbites* du groupe de symétrie). Elles sont de genre espace au delà du “cylindre de lumière”, mais si on les suit suffisamment, on se retrouve séparé du point de départ par une courbe de genre temps. C’est cette propriété qui définit un vecteur de Killing hélicoïdal. Notre définition implique celle de Friedman, Uryu & Shibata, mais il pourrait exister des cas “pathologiques” où elle ne s’applique pas. Ainsi, non seulement la définition de Friedman, Uryu & Shibata est plus jolie, mais en plus elle est plus générale.

---

<sup>3</sup>Dans l’article [A20], rédigé en Anglais, nous avons utilisé le terme *helicoïdal*, ce qui n’est pas très anglais mais avait été accepté par l’éditeur de *Phys. Rev. D*. D’un commun accord avec J. Friedman, nous avons décidé depuis de l’appeler *helical*, qui est la traduction anglaise correcte d’hélicoïdal.



# Chapitre 21

## Méthode et code numérique pour les étoiles binaires relativistes

### 21.1 Introduction

Au chapitre précédent nous avons vu que les dernières orbites des systèmes binaires d'étoiles à neutrons devaient être représentées par des configurations en contre-rotation plutôt qu'en rotation synchrone. Nous avons également vu que la contre-rotation était équivalente à l'irrotationalité de l'écoulement fluide et que ce dernier point de vue, adopté par Teukolsky [272] et Shibata [254], simplifie grandement le traitement du problème. Pour cette raison nous avons repris le formalisme irrotationnel dans tous nos travaux ultérieurs sur le sujet. Ce chapitre, basé sur l'article [A21], décrit la méthode employée pour calculer les configurations de quasi-équilibre des systèmes binaires irrotationnels dans les dernières orbites de la phase de spirale, ainsi que le code numérique construit sur cette méthode.

### 21.2 Formulation analytique du problème

#### 21.2.1 Hydrodynamique

Le point de départ de la méthode présentée dans [A21] est celui de Teukolsky et Shibata, à savoir un écoulement potentiel (irrotationnel), donné par l'Eq. (20.11) :

$$\mathbf{w} = \nabla \Psi, \quad (21.1)$$

avec  $\mathbf{w} := h\mathbf{u}$  (1-forme de co-impulsion, cf. Eq. (1.15)). En conjonction avec la symétrie hélicoïdale discutée au § 20.2 et représentée par le vecteur de Killing  $\ell$ , (21.1) conduit à une intégrale première qui a exactement la même forme que l'intégrale (1.22) obtenue dans le cas rigide (rotation synchrone pour les binaires) :

$$\ell \cdot \mathbf{w} = \text{const.} \quad (21.2)$$

C'est B. Carter [91] qui a obtenu le premier (21.2) dans le cas irrotationnel, en remarquant qu'elle se déduit immédiatement de l'équation de Cartan (1.20) :

$$\ell \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}) + \nabla(\ell \cdot \mathbf{w}) = \mathcal{L}_\ell \mathbf{w} = 0, \quad (21.3)$$

sans même faire appel à l'équation de conservation de l'énergie-impulsion  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ , contrairement au cas de la rotation rigide. La condition d'irrotationalité (21.1) annule en effet à elle

seule le premier terme du membre de gauche de (21.3), si bien que cette dernière se réduit à  $\nabla(\ell \cdot \mathbf{w}) = 0$ , d'où (21.2). La limite newtonienne de (21.2) est discutée au § II.F de l'article [A21] et la comparaison avec les formes obtenues par Teukolsky [272] et Shibata [254] est donnée dans l'annexe A du même article.

### 21.2.2 Équations d'Einstein dans l'approximation d'Isenberg-Wilson-Mathews

La formulation hydrodynamique discutée ci-dessus est complètement covariante et ne dépend donc pas de la forme explicite du tenseur métrique. Tournons-nous à présent vers les équations qui régissent ce dernier, à savoir les équations d'Einstein. Pour un système binaire la symétrie hélicoïdale n'est pas compatible avec les équations d'Einstein et un espace asymptotiquement plat, en raison du rayonnement gravitationnel [140]. Or il se trouve que J.A. Isenberg [170] a développé en 1978 une approximation de la relativité générale dans laquelle les ondes gravitationnelles n'existent pas. Les équations du champ gravitationnel y sont en effet réduites à cinq équations elliptiques, sans équation hyperbolique. Cette formulation a été reprise, indépendamment semble-t-il, en 1989 par J.R. Wilson & G.J. Mathews [289]. L'article d'Isenberg n'ayant jamais été publié, il est resté inconnu de la communauté (et de nous en particulier!) jusqu'à ce qu'en 2002 J.L. Friedman, K. Uryu & M. Shibata le mentionnent dans leur article [135]. Cela explique pourquoi nous n'avons pas fait de référence à Isenberg dans l'article [A21]. Suivant [135], nous qualifierons désormais l'approche d'*Isenberg-Wilson-Mathews (IWM)*.

L'hypothèse de base de l'approximation IWM est que l'espace-temps peut être feuilleté par une famille d'hypersurfaces spatiales dont la métrique induite (3-métrique)  $\gamma$  est conformément plate<sup>1</sup> :

$$\gamma = \psi^4 \mathbf{f}, \quad (21.4)$$

où  $\mathbf{f}$  est une 3-métrique plate. Cela revient à dire qu'il existe un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  où la métrique totale de l'espace-temps,  $\mathbf{g}$ , prend la forme (Eq. (46) de [A21] avec  $\beta^i = -B^i$ )

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(N^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \psi^4 f_{ij} dx^i dx^j. \quad (21.5)$$

Il n'y donc que 5 coefficients métriques indépendants : la fonction lapse  $N$ , le facteur conforme  $\psi$  et les 3 composantes  $\beta^i$  du vecteur shift  $\boldsymbol{\beta}$ . C'est la raison pour laquelle la théorie d'Isenberg-Wilson-Mathews ne comprend que 5 équations, au lieu de 10 pour les équations d'Einstein. Ces 5 équations sont déduites d'un principe de moindre action par Isenberg [170], en prenant comme lagrangien du champ gravitationnel le scalaire de courbure associé à la métrique (21.5). On peut également voir les 5 équations d'Isenberg comme 5 des 10 équations d'Einstein, à savoir les 4 équations de contrainte et la trace de la partie "dynamique", écrites en feuilletage maximal et dans lesquelles on remplacerait le tenseur de courbure extrinsèque par l'expression suivante :

$$K^{ij} = \frac{1}{2\psi^4 N} \left( \bar{D}^i \beta^j + \bar{D}^j \beta^i - \frac{2}{3} \bar{D}_k \beta^k f^{ij} \right), \quad (21.6)$$

où  $\bar{D}_i$  désigne la dérivée covariante par rapport à la métrique plate  $\mathbf{f}$ . Or cette expression est justement celle qui traduit l'identité de Killing pour le vecteur  $\ell$ . On en conclut que la théorie IWM de la gravitation est complètement compatible avec la symétrie hélicoïdale, contrairement à la relativité générale.

<sup>1</sup>Dans l'article [A21] la 3-métrique induite est notée  $\mathbf{h}$ ; nous utilisons désormais plutôt la notation  $\gamma$ , conforme à l'usage général en relativité numérique

Le fait que la théorie IWM soit une approximation intéressante de la relativité générale apparaît lorsque l'on prend en compte les éléments suivants : (i) elle coïncide avec la relativité générale à l'ordre 1 post-newtonien ; (ii) elle est exacte pour des espace-temps à symétrie sphérique (par exemple l'espace-temps de Schwarzschild) ; (iii) elle constitue une excellente approximation pour les étoiles relativistes en rotation rapide étudiées dans les Parties I et II (cf. aussi [107]) : les termes non conformément plats de  $\gamma_{ij}$  n'y ont qu'une amplitude relative de  $10^{-3}$  ; (iv) pour un système binaire, elle dévie peu de la relativité générale, ainsi qu'on peut le voir en la comparant avec la solution analytique à l'ordre 2.5 post-newtonien (cf. § III.A de [A21]). Il convient également de clarifier un point : le fait que la théorie IWM n'admette pas d'ondes gravitationnelles ne signifie aucunement qu'il n'y a pas de sens de l'utiliser pour traiter des *sources* d'ondes gravitationnelles, comme les systèmes binaires d'étoiles à neutrons et de trous noirs. Cela signifie simplement que les ondes gravitationnelles n'ont que peu de rôle dans la dynamique du système : leur densité d'énergie-impulsion "effective" est faible devant celle des sources proprement dites. On peut donc négliger le contenu en rayonnement gravitationnel de l'espace-temps pour calculer les configurations de quasi-équilibre. Dans une deuxième phase de l'étude, on pourra ainsi appliquer des formules de type "formule du quadrupôle" pour extraire les ondes gravitationnelles émises par le système et susceptibles d'être détectées sur Terre.

## 21.3 Le code numérique et ses tests

Le problème tel que formulé au § 21.2 revient à résoudre 5 équations elliptiques pour le champ gravitationnel et une équation elliptique pour le potentiel scalaire de la vitesse. Nous avons utilisé la méthode spectrale multi-domaines avec grille adaptée décrite au Chap. 29. Le code numérique a été écrit avec LORENE (Chap. 31). Pour décrire correctement chaque étoile, nous avons utilisé deux grilles multi-domaines : une pour chaque étoile. Les deux grilles se recoupent entièrement, chacune d'elle recouvrant tout l'espace. On passe d'une grille à l'autre sans interpolation "ad hoc" grâce aux développements spectraux (que l'on peut voir comme une interpolation polynomiale de très haut degré). Il s'agit d'une technique très précise mais coûteuse en temps de calcul, puisqu'elle requiert  $N^6$  opérations où  $N$  est le nombre de coefficients spectraux dans chaque dimension. Cependant, du fait de l'utilisation des coordonnées sphériques, qui sont bien adaptées à la topologie des étoiles,  $N$  peut être choisi assez petit, de l'ordre de 20 ou 30, si bien que le facteur  $N^6$  n'est pas pénalisant dans la pratique.

Dans l'article [A21] nous avons mis un accent particulier sur les tests du code numérique (15 figures sur 25 et 2 tableaux sur 4 sont entièrement dévolus aux tests). En particulier, nous avons testé la limite newtonienne par comparaison avec des solutions analytiques récentes de K. Taniguchi & T. Nakamura [270, 271]. Le très faible désaccord était seulement dû à la troncature du développement (effectué pourtant à l'ordre  $(R/d)^6$ , où  $R$  est le rayon des étoiles et  $d$  leur séparation !) dans le traitement de Taniguchi & Nakamura et non au code numérique ! D'autres tests de la limite newtonienne sont présentés sur les Fig. 2 et 3 de l'article [A22] (Chap. 22). Pour tester le code en régime relativiste, en l'absence de solution analytique, nous avons comparé avec des résultats précédents de T.W. Baumgarte, G.B. Cook, M.A. Scheel, S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky [49] qui concernaient le cas de la rotation synchrone, qui est plus simple du point de vue de l'hydrodynamique mais pas de celui de la gravitation. L'accord est très bon comme on peut le voir sur le tableau II de [A21]. Un autre test relativiste, basé sur le théorème du viriel (cf. § 3.3), est présenté sur la Fig. 1 de [A25] (Chap. 25).

## 21.4 Développements ultérieurs

A l'aide du code numérique décrit ci-dessus, nous avons effectué en 1998 la toute première étude relativiste des configurations irrotationnelles d'étoiles à neutrons binaires [A24], qui sera présentée au Chap. 24. Les travaux précédents concernaient seulement les binaires en rotation synchrone [48, 49, 212]. Deux autres groupes ont depuis calculé des configurations irrotationnelles, toujours dans l'approximation IWM de la relativité générale : P. Marronetti, G.J. Mathews & J.R. Wilson [213] et K. Uryu, Y. Eriguchi & M. Shibata [277, 278]. Enfin, très récemment, nous avons adapté le code numérique pour le traitement de deux étoiles différentes [A23, A25], que nous présenterons aux Chap. 23 et 25.

## Chapitre 22

# Étoiles binaires en régime newtonien : cas des masses identiques

### 22.1 Introduction

Nous avons utilisé le code décrit au Chap. 21 pour calculer des configurations de systèmes binaires en gravitation newtonienne. Le code a en effet été écrit pour fonctionner aussi bien en régime newtonien que relativiste. On fixe simplement le cadre à utiliser en début de calcul.

L'intérêt d'effectuer une étude newtonienne va au delà du simple test de la limite newtonienne d'un code relativiste. En effet, peu de calculs de configurations binaires d'étoiles fluides compressibles ont été effectués sans approximation (autre que l'“approximation” numérique), et ce même en régime newtonien. Dans le cas de la rotation synchrone, les premiers calculs d'étoiles binaires polytropiques ont été effectués par I. Hachisu & Y. Eriguchi en 1984 [154]. Il s'agissait de deux étoiles de même masse et d'indice adiabatique variant de  $\gamma = 5/3$  à  $\gamma = \infty$  (fluide incompressible). Des calculs plus récents ont été effectués par M. Shibata, K. Taniguchi & T. Nakamura [260] en 1997. Dans le cas du mouvement irrotationnel (cf. la discussion du § 20.1), les seuls calculs effectués avant notre étude étaient ceux de S. Bonazzola & J.-A. Marck en 1991 pour une seule configuration, publiée dans [2], et ceux de K. Uryu & Y. Eriguchi en 1998 [275, 276].

### 22.2 Notre étude de 2001 [A22]

#### 22.2.1 Régularisation du champ de densité

Nous avons apporté une petite amélioration au code présenté au Chap. 21 afin de pouvoir traiter des étoiles avec un indice adiabatique  $\gamma$  supérieur à 2. Dans la théorie des polytropes, il est en effet bien connu que si  $\gamma > 2$ , le profil de densité admet une dérivée radiale infinie à la surface de l'étoile (cf. Fig. 2 de [A29]). Autrement dit la densité n'est plus un champ différentiable en tout point de l'étoile et l'approximation par des polynômes de Tchebyshev employée dans notre méthode spectrale pour résoudre l'équation de Poisson devient mauvaise (phénomène de Gibbs). Pour traiter ce problème, nous avons employé la technique de régularisation développée dans [A29] (Chap. 29). Elle consiste à retrancher au champ de densité une fonction simple qui a

la même pathologie que la densité à la surface de l'étoile, de sorte que la différence des deux est différentiable. En choisissant une fonction dont on connaît l'intégrale de Poisson<sup>1</sup>, on se ramène donc à la résolution numérique d'une équation de Poisson pour une source régulière. L'amélioration de la précision est spectaculaire, comme on peut le voir sur la Fig. 1 de [A22].

### 22.2.2 Séquences à masse constante

Comme nous l'avons discuté au Chap. 20, l'évolution d'un système binaire d'étoiles à neutrons se fait uniquement sous l'action du rayonnement gravitationnel et, dans la phase de spirale, peut être approximée par une séquence d'orbites circulaires (fermées) de rayon décroissant. L'évolution sous l'effet du rayonnement gravitationnel conserve la masse de chaque étoile (le nombre baryonique dans le cas relativiste), si bien qu'on s'intéresse à construire des séquences d'équilibres à masse constante. La symétrie hélicoïdale (cf. § 20.2) étant exacte en théorie newtonienne, il s'agit d'équilibres exacts. Une séquence est alors entièrement définie par la donnée (i) d'une équation d'état, (ii) de la masse des étoiles, et (iii) de leur état de rotation. Nous avons considéré deux états de rotation : la rotation synchrone et le mouvement irrotationnel. L'évolution le long de la séquence est paramétrée par la séparation entre les deux étoiles, ou encore par la vitesse angulaire orbitale  $\Omega_{\text{orb}}$ .

La séquence de configurations d'équilibre se termine soit par le *contact* entre les deux étoiles, soit par une configuration *détachée* où apparaît un *point anguleux* (pic) au point de l'équateur qui regarde vers le compagnon<sup>2</sup>. Cette dernière caractéristique traduit un début de perte de matière et est l'analogue du point anguleux le long de l'équateur des étoiles en rotation keplerienne (cf. Fig. 2 de [A1]). Dans le cas en corotation, il s'agit du *point de Lagrange*  $L_1$  du lobe de Roche de l'étoile.

Si l'on suit l'évolution de l'énergie totale  $E$  et du moment cinétique total  $J$  le long de la séquence, il peut apparaître un point où  $E$  et  $J$  sont minimum. Le minimum de  $E$ , s'il existe, est atteint au même point que celui de  $J$ , en vertu de la relation

$$dE = \Omega_{\text{orb}} dJ, \quad (22.1)$$

valable le long de toute séquence en corotation ou irrotationnelle [135]. Ce minimum signale la fin des configurations d'équilibre accessibles au système, car pour aller plus loin, ce dernier devrait acquérir de l'énergie et du moment cinétique. Or il ne peut qu'en perdre, par émission d'ondes gravitationnelles. Le minimum de  $E$  et de  $J$  localise en fait une *instabilité séculaire* dans le cas de binaires en corotation et une *instabilité dynamique* dans le cas de binaires irrotationnelles. On appelle l'orbite correspondant à ce minimum *ISCO*, de l'anglais *Innermost Stable Circular Orbit*. L'origine de cette ISCO réside dans les effets de taille finie — elle n'existe pas pour deux masses ponctuelles, contrairement à l'ISCO discutée page 350 et qui est d'origine purement relativiste.

Nous renvoyons le lecteur au § 2 de [123] pour une discussion plus détaillée des points critiques le long des séquences de binaires.

### 22.2.3 Résultats

Au vu des résultats numériques que nous présentons dans [A22], on peut tirer les conclusions suivantes :

<sup>1</sup>En fait l'astuce consiste à partir d'un potentiel simple et à prendre son laplacien

<sup>2</sup>Dans le cas du contact, le point où les étoiles se touchent est également un point anguleux, comme on le voit sur la Fig. 10 de [A22]

- **séquences en rotation synchrone** : elles se terminent toutes par le contact entre les deux étoiles. Pour  $\gamma \geq 1.8$ , il existe un minimum de l'énergie totale (et du moment cinétique total) avant le point de contact.
- **séquences en mouvement irrotationnel** : elles se terminent par une configuration détachée avec un départ de matière de chaque étoile en direction du compagnon (point anguleux à la surface des étoiles). Pour  $\gamma \geq 2.3$ , un minimum de l'énergie totale est rencontré avant ce point anguleux.

Pour des équations d'état suffisamment dures ( $\gamma \geq 1.8$  ou  $\gamma \geq 2.3$ ), il y a donc une instabilité orbitale avant la fin des séquences d'équilibre, c'est-à-dire qu'il existe une dernière orbite stable (ISCO). Dans le cas de la rotation synchrone, M. Shibata, K. Taniguchi & T. Nakamura [260] avait déjà montré l'existence d'une ISCO pour  $\gamma \geq 2$ .

Le point d'arrêt détaché des séquences irrotationnelles est un résultat original de notre travail. En particulier, il n'avait pas été remarqué par K. Uryu & Y. Eriguchi dans leur étude de 1998 [275, 276]. Par contre ces deux auteurs avaient déjà obtenu la valeur critique  $\gamma_{\text{crit}} = 2.4 \simeq 2.3$  pour l'existence de l'ISCO dans les séquences irrotationnelles. Il convient de noter que des calculs antérieurs, basés sur l'approximation d'étoiles ellipsoïdales, prédisaient une ISCO des systèmes irrotationnels dès  $\gamma > 1.8$  [195]. Ce désaccord significatif d'avec  $\gamma_{\text{crit}} = 2.3$  montre bien l'importance des calculs 3-D exacts par rapport aux approximations semi-analytiques. De même, M. Shibata, K. Taniguchi & T. Nakamura [260] avaient déjà noté des différences importantes entre leur calcul exact de l'ISCO en rotation synchrone et les résultats de l'approximation ellipsoïdale de D. Lai, F. Rasio & S.L. Shapiro [194].



## Chapitre 23

# Étoiles binaires en régime newtonien : cas des masses différentes

### 23.1 Introduction

Avant notre étude, il n’existait aucun calcul sans approximation (autre que l’approximation “numérique”) de systèmes binaires d’étoiles fluides irrotationnelles et de masses différentes, même en régime newtonien. Pour le cas plus simple de la rotation synchrone, les premiers calculs exacts d’étoiles de masses différentes ont été effectués pour un fluide incompressible par I. Hachisu & Y. Eriguchi en 1984 [155]. En 1994-1995, F.A. Rasio & S.L. Shapiro [240, 241] ont traité le cas d’un fluide compressible, toujours en supposant la rotation synchrone.

Les seuls calculs avec masse différentes dans le cas irrotationnel avaient été effectués dans le cadre de l’approximation ellipsoïdale [196], dont nous avons souligné au § 22.2.3 qu’il fallait se méfier, tout du moins pour des configurations serrées.

### 23.2 Notre étude [A23]

Nous avons calculé des configurations binaires irrotationnelles, ainsi qu’en rotation synchrone, pour trois valeurs du rapport de masse :  $M_1/M_2 = 0.5, 0.2$  et  $0.1$ . Nous avons trouvé que dans tous les cas où les masses étaient différentes, les séquences d’équilibre se terminent par la limite de perte de matière par l’étoile la moins massive (apparition d’un point anguleux à la surface de l’étoile, cf. § 22.2.2) pour des configurations détachées. Pour la rotation synchrone, cela contraste avec le cas des masses égales, où les configurations se terminent par le contact entre les étoiles.

Mis à part les points d’arrêt des séquences d’équilibre, le résultat principal de notre étude concerne la détermination des configurations d’énergie et de moment cinétique minimaux le long d’une séquence à masse fixée. Rappelons (cf. § 22.2.2) que ces configurations marquent la fin des équilibres stables le long de la séquence (ISCO). Pour les séquences en rotation synchrone, nous avons trouvé que le minimum d’énergie est très proche de la fin des séquences, voire n’apparaît pas du tout, lorsque le rapport  $0.2 \lesssim M_1/M_2 \lesssim 0.3$ . Pour les séquences en mouvement irrotationnel, nous n’avons pas trouvé de minimum d’énergie lorsque  $M_1/M_2 \lesssim 0.5$ , ce qui signifie soit que le minimum d’énergie n’existe pas, soit qu’il est très proche de la fin de la séquence.

Avec notre méthode numérique, nous ne pouvons pas traiter très précisément les configurations anguleuses de fin de séquence, de sorte qu'il est difficile de conclure.

## Chapitre 24

# Les étoiles à neutrons binaires s'effondrent-elles en trou noir avant de fusionner ?

### 24.1 Les résultats surprenants de Wilson & Mathews

En 1995, J.R. Wilson & G.J Mathews [290] ont publié un résultat qui a fait grand bruit : dans la phase terminale d'une coalescence d'étoiles à neutrons, chacune des étoiles s'effondre en trou noir avant que la fusion des deux objets n'ait lieu. Ce résultat a ensuite été confirmé par une analyse plus détaillée des deux auteurs, en collaboration avec P. Marronetti [291]. Les conséquences du résultat de Wilson & Mathews sont très importantes. En premier lieu, la forme des ondes gravitationnelles émises s'en trouve changée. Par ailleurs, l'effondrement en trou noir signifie la compression des étoiles à neutrons et donc un chauffage important. Mathews & Wilson [215] ont calculé l'émission de neutrinos résultant de ce chauffage et l'ont proposé comme mécanisme pour expliquer les sursauts gamma.

Les calculs de Wilson, Mathews & Marronetti sont des calculs relativistes d'évolution temporelle de deux étoiles fluides, en traitant le système d'équations couplées de l'hydrodynamique et de la gravitation. Le traitement est complètement relativiste pour la partie hydrodynamique et repose sur l'approximation IWM discutée au § 21.2.2 pour la partie gravitationnelle. En conséquence, seul le fluide est traité dynamiquement, l'évolution du champ gravitationnel se faisant par réponse instantanée à la distribution d'énergie-impulsion du fluide, via les équations elliptiques du système IWM.

### 24.2 La réponse de la communauté

Devant l'importance des implications du résultat de Wilson & Mathews, la réaction de la communauté a été rapide et une avalanche d'articles ont tenté d'infirmer le résultat. Les arguments ont été de différents ordres : l'effet n'existe pas en régime newtonien, ni à l'ordre 1-PN, ni lorsqu'on effectue un développement limité du champ gravitationnel de l'étoile compagnon. Nous renvoyons le lecteur à [214] pour les références aux nombreux articles (plus d'une douzaine) qui ont contesté le résultat de Wilson & Mathews. Clairement le résultat contre-intuitif de Wilson & Mathews ne pouvait s'expliquer qu'en régime fortement relativiste. Une façon d'étudier le problème est alors de traiter l'évolution du système binaire dans l'approximation de quasi-

équilibre en relativité générale. On construit ainsi une séquence d’orbites de rayon de plus en plus petit, en se plaçant dans le cadre de l’approximation hélicoïdale (§ 20.2). La quantité qui se conserve lors de l’évolution lente sous l’effet du rayonnement gravitationnel est le nombre baryonique de chaque étoile — l’analogie de la masse dans le cas newtonien discuté au § 22.2.2. Nous appellerons pour cette raison *séquence d’évolution* toute séquence à nombre baryonique constant. Baumgarte et al. [48, 49] ont calculé en 1997 des séquences d’évolution en rotation synchrone et dans le cadre de l’approximation IWM de la relativité générale. Ils ont trouvé que la masse maximale des étoiles à neutrons en système binaire en rotation rigide était plus grande que celle des étoiles à neutrons isolées. Il s’agit là d’un effet *stabilisateur* de la relativité générale, à l’opposé de l’effet trouvé par Wilson & Mathews.

### 24.3 Notre étude de 1999 [A24]

Les résultats de Baumgarte et al. [48, 49] mentionnés ci-dessus ne permettaient pas de conclure quant à la réalité de l’instabilité trouvée par Wilson & Mathews car ils reposent sur l’hypothèse de rotation synchrone. Or nous avons vu au § 20.1 que dans les dernières étapes de l’évolution orbitale, les deux étoiles ne peuvent pas être synchronisées et, pourvu qu’il ne s’agisse pas initialement de rotateurs rapides (pulsars millisecondes), le mouvement irrotationnel était une bien meilleure approximation de la réalité. Comme le montrent les différences entre rotation synchrone et mouvement irrotationnel rapportées aux Chap. 22 et 23, l’état de rotation a un rôle important sur la stabilité de l’étoile. En particulier, les résultats de Baumgarte et al. pouvaient s’expliquer par la grande amplitude de la force centrifuge en rotation synchrone, qui s’oppose efficacement à la compression de l’étoile. Pour conclure définitivement, il était donc crucial de calculer une séquence d’évolution irrotationnelle, ainsi que le soulignaient eux-mêmes Mathews, Marronetti & Wilson dans leur article de 1998 [214].

Notre toute première utilisation du code pour les étoiles binaires irrotationnelles relativistes décrit au Chap. 21 a donc consisté dans le calcul d’une séquence d’évolution formée de configurations d’équilibre irrotationnelles en régime relativiste. Afin de reproduire autant que faire se peut les résultats de Wilson et al., nous avons considéré la même équation d’état (polytropique  $\gamma = 2$ ) et la même masse baryonique des étoiles ( $M_B = 1.625 M_\odot$ ) que celles utilisées dans leur article [214]. Le résultat est présenté sur la Fig. 1 de l’article [A24]. Il montre clairement que la densité centrale décroît lorsque les étoiles se rapprochent. La tendance est donc la même que pour les séquences en rotation synchrone, même si quantitativement l’effet est moins marqué. Nous avons donc infirmé les résultats de Wilson et Mathews. Notre article [A24] a marqué la fin du débat, d’autant plus qu’immédiatement après sa publication paraissait un article montrant explicitement une erreur dans les calculs de Wilson et Mathews (cf. § 24.4).

A titre personnel, je n’avais, en commençant les calculs, aucun a priori sur l’effet trouvé par Wilson et Mathews. Je trouvais même que la critique de la communauté envers eux était partielle, étant donné que les hypothèses faites dans les “contre-calculs” ne correspondaient pas au cas physique étudié par Wilson et al. : par exemple gravitation newtonienne ou post-newtonienne (qui ne sont pas suffisantes pour décrire l’intérieur des étoiles à neutrons) ou encore gravitation relativiste mais rotation synchrone, ainsi que nous l’avons souligné ci-dessus.

## 24.4 Développements ultérieurs

Il y avait donc un problème avec les résultats de Wilson & Mathews. C'est Flanagan [127] qui, en novembre 1998 — alors que notre article était soumis à *Physical Review Letters*<sup>1</sup> et rendu public sur le serveur de preprints [arXiv.org/gr-qc](https://arxiv.org/gr-qc), a montré que les résultats de Wilson & Mathews étaient faux, suite, non pas à une erreur dans le code numérique, mais à une faute dans les calculs analytiques ! Pour la petite histoire, j'avais moi-même remarqué cette erreur en lisant l'article de Wilson et al. (il manquait un facteur de Lorentz à un endroit), mais je l'avais prise pour une faute de frappe ! Par une étude détaillée Flanagan a montré que cette erreur conduisait à un accroissement de la densité centrale des étoiles et pouvait donc expliquer leur effondrement en trou noir.

On peut noter que sur la Figure 1 de l'article [A24], la densité centrale de la séquence irrotationnelle accuse une légère augmentation avant de décroître franchement. Il s'agit là d'un artefact numérique dû à un manque de précision dans la détermination de la surface de l'étoile. Nous avons depuis amélioré cette partie du code et la densité centrale montre une décroissance continue (cf. la Fig. 2 de [A25], Chap. 25).

---

<sup>1</sup>l'article de Flanagan [127] est paru deux semaines après le nôtre, également dans *Physical Review Letters*

44 Les étoiles à neutrons binaires s'effondrent-elles en trou noir avant de fusionner ?

## Chapitre 25

# Systèmes binaires relativistes de masses différentes

### 25.1 Introduction

A ce jour, tous les calculs de configurations d'équilibre d'étoiles binaires en relativité générale ont été effectués dans l'approximation d'Isenberg-Wilson-Mathews (§ 21.2.2). Ils concernent les systèmes binaires synchrones [48, 49, 212, **A21**] ou irrotationnels [**A24**, **A21**, 213, 277, 278]. Tous ces travaux n'ont considéré que des étoiles de masses identiques. Notre étude récente [**A25**] a donc été la première à traiter des masses différentes en relativité générale.

### 25.2 Notre article de 2002 [**A25**]

Nous avons utilisé le fait que le code numérique présenté au Chap. 21 ne suppose pas de symétrie entre les deux étoiles pour calculer des configurations avec des étoiles différentes. Nous avons toutefois fixé la même équation d'état pour les deux étoiles<sup>1</sup>, à savoir un polytrophe  $\gamma = 2$ . Nous avons paramétré chaque étoile par sa compacité  $\Xi_\infty = (M/R)_\infty$  (cf. Eq. (1), page 15) lorsque la séparation est infiniment grande. Nous avons considéré des valeurs de  $\Xi_\infty$  allant de 0.12 à 0.18.

Les résultats principaux de notre étude sont les suivants : (i) Seules les séquences d'évolution d'étoiles identiques en rotation synchrone se terminent par le contact entre les deux étoiles, toutes les autres séquences (rotation synchrone avec des masses différentes, séquences irrotationnelles avec des masses identiques ou différentes) se terminent par une configuration détachée avec un départ de matière de l'étoile la moins massive vers la plus massive (apparition d'un point anguleux à la surface de l'étoile la moins massive, cf. Chap. 22 et 23). (ii) Pour des binaires constituées d'étoiles identiques, il n'y a pas de minimum de la masse ADM (avant la fin de la séquence) le long d'une séquence dans le cas irrotationnel, contrairement au cas de la rotation synchrone. Comme l'ont démontré J.L. Friedman, K. Uryu & M. Shibata [135], le minimum de la masse ADM correspond à la dernière orbite stable du système (ISCO, cf. pages 350 et 404) (iii) Il est plus difficile d'obtenir un minimum de la masse ADM dans le cas de deux étoiles différentes.

---

<sup>1</sup>Le code numérique pourrait fonctionner avec des étoiles d'équation d'état différentes

### 25.3 Développements ultérieurs

Certaines configurations présentées dans [A25] ont été mises en ligne, sur le serveur CVS du réseau européen sur les sources d'ondes gravitationnelles, à l'adresse

<http://www.eu-network.org/Projects/InitialData.html>

Sur ce même site, nous fournissons également un code de lecture et d'“exportation” vers une grille cartésienne.

Les résultats présentés dans [A25] ont été utilisés par J.A. Faber, P. Grandclément, F.A. Rasio & K. Taniguchi [125] pour étudier l'influence de la compacité sur le spectre d'énergie des ondes gravitationnelles et obtenir ainsi une méthode de mesure du rapport  $M/R$  des étoiles à neutrons, en plus de la masse  $M$ .

Cinquième partie

**Systemes binaires de trous noirs**



## Chapitre 26

# Une nouvelle formulation pour traiter des trous noirs binaires

### 26.1 Travaux antérieurs à notre étude

Comme nous l'avons rappelé page 352, il n'est pas clair de savoir si les détecteurs de type VIRGO observeront plus de coalescences de trous noirs binaires que d'étoiles à neutrons binaires, ou encore de systèmes mixte étoile à neutrons - trou noir. Cependant certains auteurs privilégient nettement les trous noirs binaires [153].

Avant notre étude [A26], les calculs de configurations d'équilibre des systèmes binaires de trous noirs reposaient sur une méthode bien différente de celle présentée dans la Partie IV pour les étoiles à neutrons binaires. Il s'agissait de la méthode du *potentiel effectif avec courbure extrinsèque de Bowen-York*, mise au point par G.B. Cook en 1994 [101]. Cette méthode est entièrement basée sur le problème des conditions initiales en relativité générale, à savoir la résolution des *équations de contrainte*

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 0 \quad (\text{contrainte hamiltonienne}) \quad (26.1)$$

$$D_j K^{ij} - D^i K = 0 \quad (\text{contrainte impulsionnelle}) \quad (26.2)$$

sur une hypersurface de genre espace  $\Sigma$ , munie d'une métrique définie positive  $\gamma$ . Dans les équations (26.1)-(26.2),  $K_{ij}$  désigne le tenseur de courbure extrinsèque de  $\Sigma$  (en tant que surface de dimension 3 plongée dans un espace de dimension 4),  $K$  sa trace,  $D_i$  la dérivation covariante associée à  $\gamma$  et  $R$  le scalaire de Ricci correspondant. La topologie de  $\Sigma$  doit être différente de celle de  $\mathbb{R}^3$ . En effet, puisqu'il s'agit de résoudre les équations d'Einstein dans le vide, la seule façon d'avoir une solution non triviale (c'est-à-dire différente de l'espace-temps de Minkowski) est d'avoir une topologie non triviale. Pour représenter deux trous noirs, on choisit soit la topologie de Misner-Lindquist [217, 203], soit celle de Brill-Lindquist [79]. La première, que l'on peut également qualifier de *topologie d'Einstein-Rosen à deux ponts*, est constituée par une variété à deux feuillet asymptotiquement plats et connectés par deux ponts d'Einstein-Rosen (cf. Fig. 26.1). La deuxième contient également deux ponts d'Einstein-Rosen mais ces derniers connectent trois feuillet asymptotiquement plats (cf. Fig. 26.1). Le feuillet qui contient les entrées des deux ponts (feuillet supérieur sur la Fig. 26.1) est celui qui correspond à notre univers.

La procédure développée par Cook [101] consiste à résoudre les équations de contrainte sur l'une de ces deux variétés, en optant pour un feuilletage maximal ( $K = 0$ ) et une 3-métrique

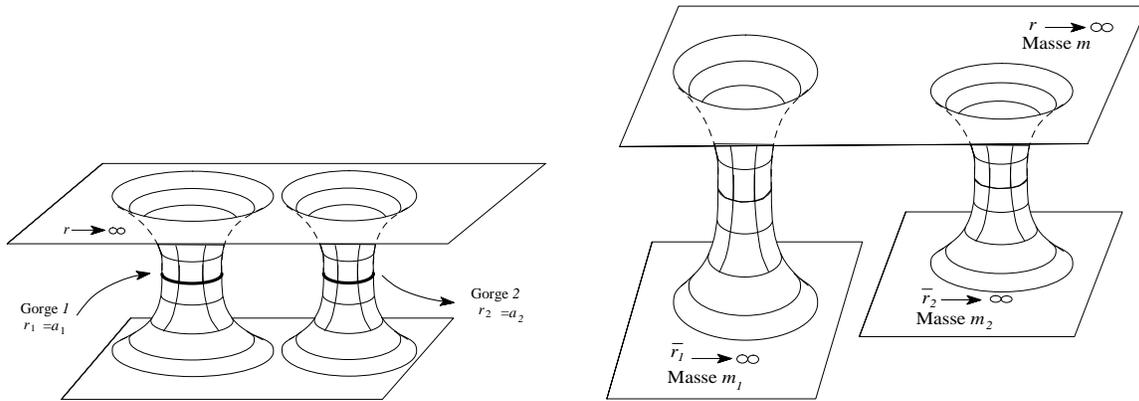


FIG. 26.1 – Coupe à deux dimensions de la variété de Misner-Lindquist (gauche) et de celle de Brill-Lindquist (droite) [d’après [151]].

conformément plate :

$$\gamma = \psi^4 \mathbf{f}, \quad (26.3)$$

où  $\mathbf{f}$  est une métrique plate. Le feuilletage maximal rend l’équation de contrainte impulsionnelle indépendante du facteur conforme  $\psi$  et ne fait apparaître que des opérateurs par rapport à la métrique plate. On peut alors la résoudre analytiquement. Une solution analytique simple consiste en la courbure extrinsèque de Bowen-York [75], qui contient six paramètres vectoriels  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{P}_1, \mathbf{S}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{P}_2, \mathbf{S}_2)$ , que l’on peut identifier naïvement comme la position du trou noir 1, son impulsion et son moment cinétique par rapport à un référentiel asymptotiquement inertiel, et idem pour le trou noir 2. Il ne reste alors plus qu’à résoudre numériquement l’équation de contrainte hamiltonienne (26.1). On obtient alors une solution parfaitement valide des équations de contraintes de la relativité générale, avec deux horizons apparents, que l’on peut associer à deux trous noirs. En particulier le fait que la 3-métrique soit conformément plate ne constitue pas une approximation (comme pour l’approximation IWM du § 21.2.2) mais un choix que l’on est libre d’effectuer. La question qui se pose est alors la suivante : parmi toutes les solutions possibles, c’est-à-dire parmi tous les jeux de paramètres  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{P}_1, \mathbf{S}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{P}_2, \mathbf{S}_2)$ , lesquelles correspondent à deux trous noirs en mouvement orbital circulaire ? Nous verrons au § 28.3 qu’il n’y a pas de solution à ce problème. Mais cela n’était pas clair il y a huit ans et la réponse de Cook a été de définir l’énergie de liaison du système par

$$E = M_{\text{ADM}} - M_1 - M_2, \quad (26.4)$$

où  $M_{\text{ADM}}$  est la masse ADM du système et  $M_1$  et  $M_2$  sont les “masses individuelles” des deux trous noirs. Cook fait jouer à cette énergie de liaison le rôle d’un potentiel effectif et il définit une orbite circulaire comme celle minimisant  $E$  par rapport à la séparation  $l$  entre les trous noirs, minimum à moment cinétique total  $J$  et spins fixés. La vitesse orbitale angulaire est alors calculée suivant

$$\Omega = \left. \frac{\partial E}{\partial J} \right|_{M_1, M_2, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, l}. \quad (26.5)$$

Il y a plusieurs problèmes avec cette approche. Tout d’abord, pour un système binaire, seule la masse ADM totale  $M_{\text{ADM}}$  est une quantité bien définie. Les masses individuelles  $M_1$  et  $M_2$  ne peuvent pas être définies rigoureusement car, en relativité générale, on ne peut localiser l’énergie du champ gravitationnel. Dans le cas de la topologie de Brill-Lindquist, on pourrait à

la rigueur s'en sortir en utilisant pour  $M_1$  et  $M_2$  les masses ADM sur chacun des feuilletts du "bas" (cf. Fig. 26.1). Mais pour la topologie de Misner-Lindquist que Cook considère dans son article de 1994 [101], il n'y a clairement pas de définition invariante de  $M_1$  et  $M_2$ . Cook suggère alors d'utiliser l'aire des horizons de chaque trou noir pour obtenir une masse individuelle via la formule de Christodoulou. Cependant cette dernière n'est rigoureusement établie que pour un trou noir isolé (trou noir de Kerr).

Cette méthode a été utilisée par Cook en 1994 [101] pour des trous noirs sans spin, puis par H.P. Pfeiffer, S.A. Teukolsky & G.B. Cook en 2000 [230] pour des trous noirs avec spins. Ces deux études utilisent la topologie de Misner-Lindquist. Enfin une troisième étude, celle de T.W. Baumgarte en 2000 [46], a utilisé la même méthode mais avec la topologie de Brill-Lindquist. Les différentes topologies conduisaient sensiblement au même résultat. Les orbites obtenues différaient notablement des résultats issus des développements analytiques post-newtoniens, notamment en ce qui concerne la dernière orbite stable (ISCO), ainsi que l'a souligné T.W. Baumgarte dans son article de revue [47].

## 26.2 Notre traitement du problème [A26]

Devant les faiblesses de l'approche décrite ci-dessus, nous avons décidé d'attaquer le problème sous un tout autre angle. En fait, nous avons adopté le même point de vue que pour l'étude des systèmes binaires d'étoiles à neutrons présentée dans la Partie IV, à savoir la construction d'un espace-temps approché représentant deux corps en orbite exactement circulaire. L'espace-temps a ainsi la symétrie hélicoïdale discutée au § 20.2. De plus nous avons utilisé l'approximation d'Isenberg-Wilson-Mathews (§ 21.2.2), c'est-à-dire une 3-métrique conformément plate. Le gros avantage par rapport à l'approche de Cook est de traiter un espace-temps quadridimensionnel complet (bien qu'approché) plutôt qu'une surface spatiale de dimension trois. Les notions d'orbite circulaire et de vitesse angulaire orbitale sont alors bien définies, et ne requièrent pas une construction ad hoc comme dans la méthode du "potentiel effectif".

Nous avons choisi la topologie de  $\mathbb{R} \times$  Misner-Lindquist pour l'espace-temps complet ( $\mathbb{R}$  pour le temps) (cf. Fig. 26.1 et Fig. 1 et 2 de [A26]) et avons imposé que les deux feuilletts soient isométriques. Cela permet de ne résoudre les équations d'Einstein que dans une moitié de l'espace-temps, en donnant des conditions au contour sur deux sphères excisées (les deux gorges des ponts d'Einstein-Rosen). Il reste à préciser l'état de rotation des trous noirs. Nous avons choisi de traiter des trous noirs en *rotation synchrone*. Nous avons vu au § 20.1 que cet état de rotation n'est pas réaliste pour les étoiles à neutrons car la viscosité de la matière nucléaire n'est pas suffisante pour assurer la synchronisation de la rotation de chaque étoile avec le mouvement orbital. Dans le cas des trous noirs, on peut rendre compte des effets de "friction" en introduisant une *viscosité effective*, suivant les travaux de S.W. Hawking & J.B Hartle [162, 160] et T. Damour [109]. La valeur de cette viscosité effective est bien plus grande que celle de la matière nucléaire. Néanmoins il n'est pas clair qu'elle puisse être suffisante pour synchroniser les trous noirs. Seul un calcul dynamique complet pourrait répondre à cette question. Nous y reviendrons au § 26.3. La condition de rotation synchrone des trous noirs a une traduction géométrique très simple : les deux horizons sont dans ce cas des *horizons de Killing*. Autrement dit, le vecteur de Killing hélicoïdal est tangent aux horizons (et devient donc de genre lumière sur ceux-ci).

Dans le cadre de l'approximation IWM que nous utilisons (§ 21.2.2), les équations d'Einstein se réduisent à cinq équations elliptiques (Eq. (99) à (101) de [A26]), où la vitesse orbitale  $\Omega$  n'apparaît pas. Cette dernière n'intervient en fait que comme condition au contour à l'infini

pour le vecteur shift des coordonnées cotournantes. Cela diffère notablement du cas des étoiles fluides, où  $\Omega$  intervient dans le terme centrifuge de l'équation exprimant l'équilibre du fluide. Face à cela, nous avons déterminé  $\Omega$  en demandant que la masse ADM du système soit égale à la masse de type Komar associée au vecteur de Killing hélicoïdal (cf. Eq. (3.4), page 78). Cette condition se réduit au théorème du viriel à la limite newtonienne. Il s'agit donc d'un analogue du théorème du viriel relativiste GRV3 traité au Chap. 3, sauf que pour GRV3 le vecteur de Killing était supposé être asymptotiquement de genre temps, alors que le vecteur de Killing hélicoïdal est asymptotiquement de genre espace.

### 26.3 Développements ultérieurs

Notre travail [A26] et les résultats numériques [A27] qui lui ont succédé (Chap. 27), ont suscité un certain intérêt de la communauté. Tout d'abord, G.B. Cook [102] a effectué une analyse détaillée de notre formulation dans le cadre du traitement de “*sandwich fin conforme*” du problème des conditions initiales de la relativité générale [297, 231]. Il a également proposé des modifications pour traiter d'autres états de rotation que la rotation synchrone.

Dans un travail très “qualitatif”, R.H. Price & J.T. Whelan [236] ont suggéré que la viscosité effective des trous noirs conduisait à un transfert efficace de moment cinétique de rotation de chaque trou noir en moment cinétique orbital. Il en résulterait un arrêt provisoire du rétrécissement des orbites. L'évolution de  $\Omega$ , après une augmentation monotone dans la phase de spirale, marquerait alors un palier lorsque les trous noirs sont proches. Si l'on pousse le raisonnement de Price & Whelan jusqu'au bout<sup>1</sup>, le transfert du moment cinétique de spin au moment cinétique orbital devrait s'arrêter lorsque les trous noirs sont en rotation synchrone.

Très récemment, T. Mora & C.M. Will [219] ont comparé nos résultats numériques (qui seront présentés au Chap. 27) avec des résultats post-newtoniens incluant une excentricité non nulle. Ils ont trouvé un meilleur ajustement à nos données lorsque l'excentricité vaut  $e = 0.03$ . Un tel résultat n'implique aucunement que les orbites que nous avons déterminées soient excentriques, mais reflète simplement le fait que lorsqu'on élargit l'espace des paramètres et que l'on cherche à représenter une solution comme la nôtre qui n'est qu'approchée (elle repose notamment sur l'approximation de métrique spatiale conformément plate), on trouve un meilleur ajustement pour des valeurs non nulles des nouveaux paramètres. Nous reviendrons là-dessus au § 27.3.

Enfin, M. Skoge & T.W. Baumgarte [262] ont comparé notre critère de détermination de  $\Omega$ , basé sur le *théorème du viriel relativiste*, avec celui de la méthode du *potentiel effectif* de Cook (§ 26.1). Pour ce faire, ils ont appliqué les deux critères à un même problème simple : celui d'une coquille sphérique mince de particules sans interaction autre que gravitationnelle (poussière) en orbites sphériques. Ils ont montré que les deux méthodes conduisent au même résultat. Nous y reviendrons au § 28.3.

<sup>1</sup>Mais ce n'est pas écrit dans l'article [236]

## Chapitre 27

# Résultats numériques pour les trous noirs binaires en orbite circulaire

### 27.1 Travaux antérieurs

Comme rappelé au § 26.1, toutes les approches numériques précédentes [101, 230, 46] du problème des orbites circulaires des trous noirs binaires reposaient sur la méthode du “potentiel effectif” avec courbure extrinsèque de Bowen-York, développée par G.B. Cook en 1994 [101]. D’un point de vue numérique, il n’y avait qu’une seule équation à résoudre : la contrainte hamiltonienne qui détermine le facteur conforme  $\psi$ , étant donnée que l’équation de contrainte impulsionnelle était automatiquement satisfaite par le choix de la courbure extrinsèque de Bowen-York.

### 27.2 Notre étude [A27]

Dans notre approche, exposée au Chap. 26, il s’agit de résoudre cinq équations elliptiques (deux scalaires et une vectorielle) avec conditions aux contours sur deux sphères (les horizons des trous noirs) et à l’infini spatial. Pour ce faire, nous avons employé une méthode spectrale multi-domaine avec deux jeux de domaines sphériques, chacun centré sur un des deux trous noirs. Cette méthode est semblable à celle employée pour les systèmes binaires d’étoiles à neutrons (Chap. 21), sauf qu’étant donné que dans nos coordonnées les gorges/horizons de chaque trou noir sont exactement sphériques, il n’est pas nécessaire d’effectuer une déformation des domaines au delà de la sphère.

Le code numérique a été écrit avec LORENE (Chap. 31) par Philippe Grandclément, lors de sa thèse de doctorat [151]. Tout comme pour le code pour les étoiles à neutrons binaires (§ 21.3), nous avons effectué de nombreux tests, qui vont de la comparaison avec la solution de Schwarzschild pour un trou noir isolé statique à l’obtention de la troisième loi de Kepler lorsque les deux trous noirs sont très éloignés.

Le système d’équations elliptiques non-linéaires présenté au Chap. 26 est résolu par itérations, en traitant à chaque pas les équations comme des équations de Poisson. A un pas donné le système apparaît alors surdéterminé, car les conditions d’isométrie et de régularité sur les horizons sont plus nombreuses que le nombre de conditions au contour que l’on peut mettre sur les équations de Poisson. Cela apparaît en fait pour l’équation de contrainte impulsionnelle que l’on résout pour le vecteur shift (Eq. (4) de [A27]). Pour traiter ce problème, nous calculons le shift suivant

$$\beta = \beta_{\text{contr}} + \beta_{\text{cor}}, \quad (27.1)$$

où  $\beta_{\text{contr}}$  est la solution de l'équation de contrainte impulsionnelle (à un pas donné) et  $\beta_{\text{cor}}$  est un terme "correctif" qui assure que  $\beta$  satisfasse aux conditions de régularité et d'isométrie. Pour obtenir une solution acceptable du problème  $\beta_{\text{cor}}$  doit tendre vers zéro à la fin de l'itération (solution exacte), ou au moins être petit (solution approchée). Pour un trou noir isolé en rotation,  $\beta_{\text{cor}} \rightarrow 0$  (Fig. 3 et 4 de [A27]) et l'on obtient une solution exacte du système<sup>1</sup>. Par contre, pour un système binaire  $\beta_{\text{cor}}$  ne tend pas vers zéro en fin d'itération. Mais il reste très petit :  $|\beta_{\text{cor}}| \sim 8 \times 10^{-4} |\beta|$  à la dernière orbite stable (Fig. 10 de [A27]). La solution numérique viole donc très légèrement l'équation de contrainte impulsionnelle. Pour jauger de l'effet de cette violation, nous avons comparé les valeurs du moment cinétique total  $J$  données par deux intégrales de surface : la première sur les horizons des trous noirs, la deuxième à l'infini spatial. Ces deux intégrales sont égales si l'équation de contrainte impulsionnelle est vérifiée dans tout l'espace. Nous avons trouvé une différence de 2% à la dernière orbite stable (Fig. 10 de [A27]). Cette erreur nous semble tout à fait acceptable car du même ordre de grandeur, voire inférieure, à d'autres erreurs induites par notre traitement du problème physique, comme l'approximation de métrique spatiale conformément plate. Rappelons qu'avant nos travaux, il y avait un désaccord de 100 % sur la position de la dernière orbite stable entre les résultats numériques et les résultats post-newtoniens. Notre objectif était d'obtenir une solution approchée du problème des dernières orbites des trous noirs binaires à quelques pourcents près.

Nous avons calculé une séquence d'évolution d'un système binaire de trous noirs en orbite circulaire en stipulant que le long de la séquence la masse ADM du système,  $M$ , et le moment cinétique total,  $J$ , doivent évoluer selon

$$dM = \Omega dJ. \quad (27.2)$$

Cette prescription fixe sans univoque la séquence. Nous l'avons utilisé en lieu et place de la constance du nombre baryonique pour les étoiles à neutrons binaires (§ 22.2.2 et § 24.2), parce que l'énergie et le moment cinétique emporté par les ondes gravitationnelles vérifient  $dE = \Omega dJ$ , au moins à l'ordre quadrupolaire. En vertu du "premier principe de la thermodynamique des trous noirs binaires" établi récemment par J.L. Friedman, K. Uryu & M. Shibata [135], la relation (27.2) est équivalente à la constance des aires des horizons le long de la séquence. Comme nous n'imposons pas cette dernière lors de la procédure numérique, nous obtenons là une possibilité de test intéressante. Comme on le voit sur la Fig. 19 de [A27], l'aire des horizons est conservée à  $3 \times 10^{-4}$  près jusqu'à la dernière orbite stable. Il s'agit là d'un test très fort de toute notre procédure.

Le résultat principal de l'article [A27] a été la détermination de la dernière orbite stable (ISCO, cf. pages 350 et 404) pour un système binaire de deux trous noirs en orbites circulaires. Nous avons obtenu

$$\frac{\Omega_{\text{ISCO}}}{2\pi} = 160 \frac{20 M_{\odot}}{M_{\text{ir}}} \text{ Hz}, \quad (27.3)$$

où  $M_{\text{ir}}$  désigne la somme des masses des deux trous noirs. Rappelons que la fréquence fondamentale des ondes gravitationnelles correspondantes est le double de cette fréquence, soit 320 Hz pour deux trous noirs de  $10 M_{\odot}$  chacun. La fréquence ainsi obtenue est en très bon accord avec les résultats analytiques post-newtoniens à l'ordre 3 (3PN), contrairement aux résultats numériques précédents, issus de la méthode du "potentiel effectif" avec courbure extrinsèque de Bowen-York.

<sup>1</sup>Il ne s'agit cependant pas de la solution de Kerr en raison de l'approximation de métrique spatiale conformément plate (Fig. 6 de [A27])

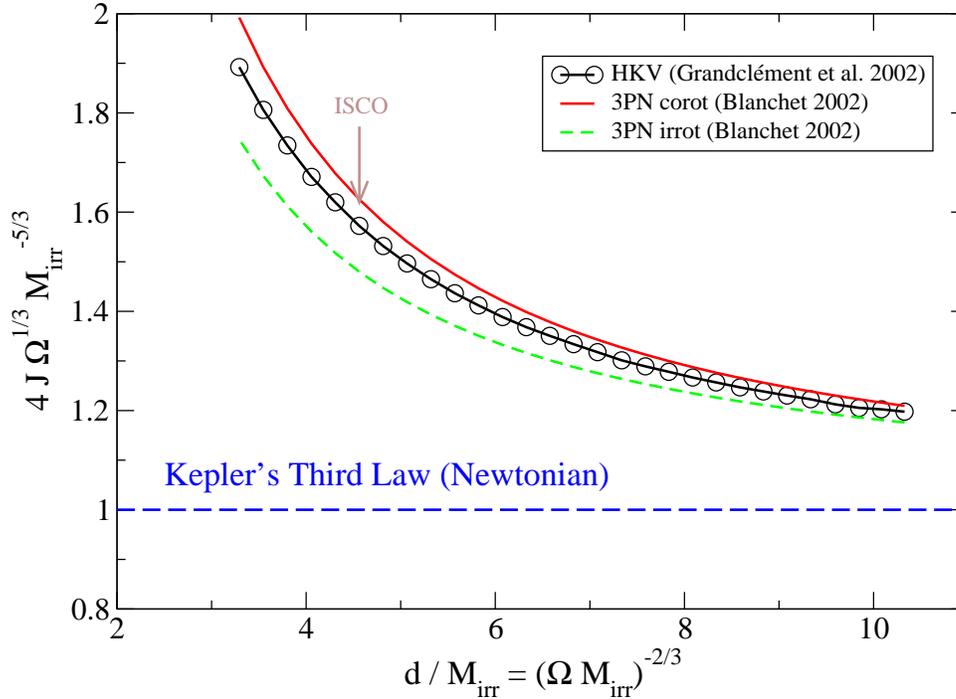


FIG. 27.1 – Variation de la quantité  $4J\Omega^{1/3}M_{\text{irr}}^{-5/3}$  en fonction de l'indicateur de distance  $(\Omega M_{\text{irr}})^{-2/3}$  pour les résultats numériques présentés dans [A27] et les résultats post-newtoniens à l'ordre 3.

## 27.3 Développements ultérieurs

Comme test de la méthode de calcul, nous avons essayé de retrouver la troisième loi de Kepler lorsque les trous sont très séparés. Nous avons formé la quantité sans dimension  $4J\Omega^{1/3}M^{-5/3}$  qui vaut 1 à la limite newtonienne, en vertu de la troisième loi de Kepler pour des orbites circulaires. La variation de cette quantité avec la distance entre les trous noirs est représentée sur la Fig. 12 de [A27]. Pour la plus grande séparations calculée, l'écart avec la valeur newtonienne est encore de 15%, ce qui n'est pas très contraignant pour le code numérique. Par contre, nous avons depuis effectué la comparaison avec la valeur post-newtonienne à l'ordre 3, fournie par Luc Blanchet à partir des résultats présentés dans [60]. Comme on le voit sur la Fig. 27.1 l'accord avec le 3PN est excellent à grande distance. En particulier, cela montre que l'excentricité des orbites est nulle, ou du moins très petite (cf. l'objection de T. Mora & C.M. Will discutée au § 26.3). En effet la quantité  $4J\Omega^{1/3}M^{-5/3}$  dépend de l'excentricité des orbites.

La comparaison détaillée des résultats numériques présentés ici avec les prédictions post-newtoniennes a été effectuée par L. Blanchet [60] et par nous [A28]. Elle fera l'objet du Chap. 28.

Enfin, récemment, H.P. Pfeiffer, G.B. Cook & S.A. Teukolsky [228] ont résolu le problème des conditions initiales pour deux trous noirs (c'est-à-dire les quatre équations de contrainte) avec une métrique spatiale qui n'est pas conforme à la métrique plate mais à une superposition de deux métriques de Kerr-Schild. Ils ont comparé plusieurs décompositions des équations de contrainte, dont le traitement en "sandwich fin conforme" mentionné au § 26.3. Cependant, ils n'ont pas calculé de configurations en orbite circulaire.



## Chapitre 28

# Comparaison avec les résultats post-newtoniens

### 28.1 Les différentes approches post-newtoniennes

La méthode post-newtonienne consiste à développer les équations de la relativité générale en puissances du petit paramètre

$$\epsilon \sim \frac{GM}{c^2 r} \sim \frac{v^2}{c^2}, \quad (28.1)$$

où  $M$  est la masse totale du système binaire,  $r$  la séparation entre les deux composantes et  $v$  la vitesse orbitale (cf. [61] pour une revue). L'état de l'art est actuellement le développement à l'ordre 3. Il a été obtenu par deux groupes, utilisant deux techniques différentes :

- le développement en série de Taylor des équations écrites en coordonnées harmoniques (L. Blanchet & G. Faye [63])
- un traitement hamiltonien dans le cadre du formalisme canonique Arnowitt-Deser-Misner (T. Damour, P. Jaranowski & G. Schäfer [111, 112])

Il a été montré que le développement post-newtonien converge très mal dans le cas d'un système binaire constitué par deux masses très différentes, disons  $m_1 \ll m_2$ . Dans ce cas on peut en effet comparer la solution post-newtonienne avec la solution exacte qui est celle du mouvement de  $m_1$  dans la métrique de Schwarzschild générée par  $m_2$ . Bien que l'on puisse arguer que ce mauvais comportement ne s'étend sans doute pas au cas des masses comparables [62], A. Buonanno & T. Damour [81, 82] ont introduit une méthode de resommation du développement post-newtonien qui redonne la limite de Schwarzschild dans le cas  $m_1 \ll m_2$  : il s'agit de la méthode *effective à un corps* (*effective one body* ou *EOB*). L'idée de base est de réduire l'étude du problème à deux corps à un problème à un corps.

### 28.2 Notre étude [A28]

La méthode EOB a été étendue au cas des corps avec rotation (spin) par T. Damour en 2001 [110]. Dans [A28], nous l'avons appliquée au cas de la rotation synchrone (corotation), afin de pouvoir comparer directement avec les résultats numériques présentés au Chap. 27. Nous avons exploré différentes méthodes de resommation, dont des approximants de Padé de différents ordres. Les résultats ont montré une grande robustesse de la méthode EOB vis-à-vis de ces différentes resommations.

Les séquences d'évolution EOB 3PN sont très proches de la séquence numérique des trous noirs en corotation obtenue à l'aide de la symétrie hélicoïdale (*HKV* pour *Helical Killing Vector*) et présentée au Chap. 27. En particulier les fréquences de la dernière orbite stable (ISCO, § 27.2) sont en très bon accord. Chose intéressante, les résultats EOB 3PN sont plus proches des résultats numériques que ceux issus de l'EOB 2PN (cf. Fig. 5 et 6 de [A28]). L. Blanchet [60] a également remarqué cela pour la formulation post-newtonienne non resommée en coordonnées harmoniques.

### 28.3 Importance de la courbure extrinsèque dans les configurations de quasi-équilibre

Le très bon accord avec les prédictions post-newtoniennes à l'ordre 3 montre que l'approche HKV présentée au Chap. 26 est meilleure que l'approche numérique précédente développée par G.B. Cook [101]. Cette dernière est la méthode *du potentiel effectif avec courbure extrinsèque de Bowen-York (EPBY)*<sup>1</sup> et a été présentée au § 26.1. Elle a été utilisée par Cook lui-même [101] et plus récemment (en 2000) par H.P. Pfeiffer, S.A. Teukolsky & G.B. Cook [230] et T.W. Baumgarte [46]. Le désaccord (un facteur 2 de différence sur la fréquence de l'ISCO!) de EPBY avec le post-newtonien avait tout d'abord été attribué à l'utilisation d'une métrique spatiale conformément plate, alors que la métrique post-newtonienne cesse d'être conformément plate à partir de l'ordre 2. Le fait que notre approche utilise également une métrique spatiale conformément plate montre qu'il ne s'agit pas là de la source principale du désaccord. Il reste alors deux possibilités, c'est-à-dire deux différences majeures entre les traitements HKV et EPBY (cf. § 26.1 et 26.2) :

- le critère de détermination des orbites circulaires ;
- la courbure extrinsèque  $\mathbf{K}$  des hypersurfaces  $t = \text{const.}$

Le critère de détermination des orbites circulaires d'EPBY nous paraît moins bien fondé que le nôtre, notamment en raison du caractère intrinsèquement tridimensionnel d'EPBY qui rend douteuse toute définition de vitesse (pas de temps!), contrairement à HKV où la dimension temporelle est prise en compte. Cependant deux études récentes ont montré que les deux critères conduisaient à des résultats semblables. Tout d'abord, ainsi que nous l'avons déjà mentionné au § 26.3, M. Skoge & T.W. Baumgarte [262] ont comparé les deux critères dans le cas d'un problème d'école simple : celui d'une coquille sphérique mince de particules sans interaction autre que gravitationnelle (poussière) en orbites sphériques. Ils ont montré que les deux critères conduisent exactement au même résultat. Par ailleurs, M. Shibata [257] a effectué l'expérience numérique suivante : il a calculé des configurations d'équilibre irrotationnelles dans le cadre HKV mais en utilisant la courbure extrinsèque de Bowen-York et non celle qui découle de l'équation de Killing dans le formalisme HKV. Il a trouvé des résultats proches de EPBY.

Ainsi, il apparaît que la source principale de la différence entre HKV et EPBY est la courbure extrinsèque des hypersurfaces  $t = \text{const.}$  Déjà dans l'article [A28], nous suggérions au § IV.D que c'était bien là l'origine de la différence entre les deux approches. L'argument est que l'approche post-newtonienne, basée sur la relation  $c^{-1}\partial/\partial t \ll \partial/\partial x$ , conduit à un espace-temps quasi-stationnaire, régi par des équations elliptiques, et qui a le bon contenu en ondes gravitationnelles, générées par toute l'histoire du système. Tout contenu d'ondes gravitationnelles incorrect provoquerait une évolution rapide, incompatible avec l'hypothèse  $c^{-1}\partial/\partial t \ll \partial/\partial x$ .

<sup>1</sup>Nous avons utilisé l'abréviation *IVP* plutôt que *EPBY* dans l'article [A28]

De même, l'approche HKV et ses équations elliptiques sélectionne automatiquement parmi toutes les solutions possibles des équations de contrainte, celles qui correspondent au régime physiquement quasi-stationnaire. Au contraire, l'approche EPBY sélectionne des solutions des équations contraintes via un choix technique, à savoir une solution analytique simple (Bowen-York) pour l'équation de contrainte impulsionnelle. Bien qu'obtenant ainsi des solutions parfaitement exactes des équations de contrainte, elle ne conduit pas à des solutions qui représentent une coupe à  $t = \text{const}$  d'un espace-temps physique quasi-stationnaire généré par un système binaire. La procédure de minimisation de l'énergie de liaison introduite par Cook [101] est alors vouée à l'échec, car elle opère sur un sous-ensemble de l'espace des configurations qui ne contient pas les solutions physiques (c'est-à-dire quasi-stationnaires).



Sixième partie

**Méthodes numériques**



---

Depuis sa création par Silvano Bonazzola & Jean-Alain Marck au milieu des années 1980 [71, 72], notre groupe utilise des *méthodes spectrales* [148, 86, 216, 55, 76] pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) de la relativité générale et de l'hydrodynamique. Jusqu'à récemment, il s'agissait là d'une particularité de notre groupe vis-à-vis des autres groupes de relativité numérique, qui utilisaient tous la méthode des *différences finies*. Mais depuis peu d'autres groupes utilisent également des méthodes spectrales, comme le groupe de Frauendiener à Tübingen [128] ou celui de Teukolsky à Cornell [229].

Les méthodes spectrales que nous employons sont en perpétuel développement, au gré des nouvelles EDP ou conditions au contour qui apparaissent lorsque l'on traite de nouveaux problèmes. Cette partie présente quelques uns de ces développements. Elle ne constitue en aucun cas une introduction aux méthodes spectrales. On pourra trouver des telles introductions dans le cours que j'ai donné aux Houches en 1995 [13], dans notre article de revue [19], ou encore en ligne sur la page Web de LORENE : <http://www.lorene.obspm.fr/>. Mentionnons également qu'il existe de nombreuses monographies sur le sujet comme [55, 76, 86, 148, 216].



# Chapitre 29

## Méthode spectrale multi-domaine

### 29.1 Méthodes de décomposition de domaine

Il est souvent utile de décomposer le domaine physique sur lequel on doit résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP) en plusieurs sous-domaines. On peut ainsi décrire une géométrie compliquée. On résout l'EDP séparément sur chaque sous-domaine et on raccorde ensuite les solutions pour obtenir une solution globale. Il y a essentiellement deux méthodes de raccord :

- La *méthode de patch* (*formulation forte* du problème), qui consiste à assurer la continuité de la solution et sa dérivée normale à la frontière entre deux domaines<sup>1</sup>
- La *méthode variationnelle* (*formulation faible* du problème), qui consiste à assurer la continuité sous une forme intégrale (cf. [76, 209] pour plus de détails).

Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir les EDP elliptiques issues de la relativité générale, il est nécessaire d'avoir un domaine d'intégration qui recouvre tout l'espace, car ce n'est qu'à l'infini spatial que l'on peut mettre des conditions aux contours exactes : celle de l'espace-temps plat. Nous avons vu au Chap. 6 que l'erreur commise suite à l'emploi d'un domaine d'intégration fini pouvait être relativement importante. Pour mettre tout l'espace dans un ordinateur de mémoire finie, il est nécessaire d'opérer une certaine compactification. C'est ce que nous avons fait dès 1993 [A1] en introduisant la méthode spectrale multi-domaine décrite au Chap. 1. L'espace y était décomposé en domaines sphériques, avec une compactification du dernier domaine (Fig. 1.1).

### 29.2 Notre technique [A29]

La nouvelle méthode spectrale multi-domaine que nous avons développée en 1998 était motivée par le traitement précis de la surface des étoiles. Sauf dans le cas statique, la surface d'une étoile n'est pas exactement sphérique, si bien que le traitement de 1993 (§ 1.4.4) résulte dans des frontières entre domaines qui ne coïncident pas avec la surface de l'étoile. Cela est une source de problème pour deux raisons :

- la surface de l'étoile est un lieu de discontinuité pour de nombreux champs ou leurs dérivées ; si la surface ne se trouve pas à la frontière entre deux domaines, on décrit alors un champ discontinu (ou de dérivée discontinue) à l'aide de séries de fonctions polynomiales

---

<sup>1</sup>On considère ici une EDP du second ordre ; pour des ordres plus élevés, il faut ajouter la continuité des dérivées d'ordres supérieurs.

(les fonctions de base de la méthode spectrale). Il en résulte une erreur connue sous le nom de *phénomène de Gibbs*, dont la conséquence est la perte de la décroissance exponentielle de l'erreur avec le nombre de degrés de liberté.

- la surface de l'étoile est souvent un endroit où l'on doit mettre des conditions aux contours, notamment pour le champ de vitesse.

C'est pour cette raison que nous avons mis en œuvre des domaines adaptés à la surface de l'étoile. Une première façon de faire eut été de relier les coordonnées “numériques” (c'est-à-dire vis-à-vis desquelles on effectue les développements spectraux)  $(\xi, \theta', \varphi')$  aux coordonnées physiques  $(r, \theta, \varphi)$  par

$$r = R(\theta', \varphi') \xi \quad (29.1)$$

$$\theta = \theta' \quad (29.2)$$

$$\varphi = \varphi', \quad (29.3)$$

où  $R$  est la fonction définissant la surface de l'étoile par  $r = R(\theta, \varphi)$ , de sorte que la surface correspond à  $\xi = 1$ . Ce type de coordonnées adaptées a déjà été utilisé dans la littérature, notamment par Uryu & Eriguchi en 1998 [276] dans leur étude des systèmes binaires irrotationnels (cf. § 22.1). Cependant les conditions de régularité à l'origine et sur l'axe  $\theta = 0$  (cf. Eq. (10) de [A29]) sont très compliquées à exprimer en terme de  $(\xi, \theta', \varphi')$  dans un tel système. Nous avons donc opté pour un changement de coordonnées d'une forme différente :

$$r = \alpha \left[ \xi + (3\xi^4 - 2\xi^6)F(\theta', \varphi') + \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi^5)G(\theta', \varphi') \right] \quad (29.4)$$

$$\theta = \theta' \quad (29.5)$$

$$\varphi = \varphi', \quad (29.6)$$

où  $\alpha$  est une constante et  $F(\theta', \varphi')$  (resp.  $G(\theta', \varphi')$ ) une fonction ne contenant que des harmoniques paires (resp. impaires) en  $\varphi'$ . La surface de l'étoile correspond toujours à  $\xi = 1$ , si bien que son équation dans les coordonnées physiques s'écrit  $r = \alpha[1 + F(\theta, \varphi) + G(\theta, \varphi)]$ . La parité et la forme des petits polynômes de  $\xi$  en facteur de  $F(\theta', \varphi')$  et  $G(\theta', \varphi')$  est choisie de manière à ce que les conditions de régularité exprimées en termes de  $(\xi, \theta', \varphi')$  soient voisines des conditions de régularité exprimées en termes de  $(r, \theta, \varphi)$ . Notamment, près de l'origine  $r \sim \alpha\xi$ , ce qui n'est pas le cas de la forme (29.1).

Nous avons introduit un changement de variable de même type dans les coquilles, sauf qu'il n'y a pas là de problème de régularité en  $\xi$  :  $F(\theta', \varphi')$  décrit alors la forme de la frontière interne du domaine et  $G(\theta', \varphi')$  sa forme externe.

Nous avons ensuite explicité les opérateurs gradient et laplacien en termes de  $(\xi, \theta', \varphi')$ . Le laplacien prend notamment une forme assez compliquée (Eq. (98) de [A29]), si bien que l'on doit désormais résoudre l'équation de Poisson par itération, en isolant un “pseudo-laplacien” et en mettant tous les termes non affines (c'est-à-dire issus de la non nullité de  $F(\theta', \varphi')$  ou  $G(\theta', \varphi')$ ) dans le membre de droite de l'équation. A chaque pas de l'itération, nous avons résolu l'équation de Poisson par la *méthode de patch* mentionnée § 29.1.

Dans l'article [A29] nous avons illustré cette technique par le calcul de configurations d'équilibre newtonienne pour des fluides incompressibles en rotation ou en système binaire en corotation. On peut alors comparer avec des solutions analytiques du problème, qui sont respectivement les ellipsoïdes de Maclaurin et les ellipsoïdes de Roche. Sans les coordonnées adaptées le problème ne serait pas traitable avec les méthodes spectrales, en raison de l'importante discontinuité dans le champ de densité à la surface de ces objets. Par contre avec les coordonnées

---

adaptées de la forme (29.4)-(29.6), nous avons retrouvé la décroissance exponentielle de l'erreur avec le nombre de coefficients, typique des méthodes spectrales (Fig. 5 et 6 de [A29]). Pour la petite histoire, il a même fallu écrire un petit code MATHEMATICA pour calculer précisément la solution analytique car les tables qui figurent dans le livre classique de Chandrasekhar sur les figures d'équilibre ellipsoïdales [94] ne comportaient que 5 chiffres significatifs et la précision du code va bien au delà de  $10^{-5}$ .



## Chapitre 30

# Résolution des équations de Poisson scalaires et vectorielles

### 30.1 Introduction

Un des grands intérêts des méthodes spectrales développées dans notre groupe est qu'elles permettent la résolution d'équations elliptiques de manière très efficace, c'est-à-dire avec une grande précision et un faible temps de calcul. Cette situation contraste avec celle des méthodes aux différences finies, pour lesquelles la résolution des équations elliptiques est synonyme de grande consommation de temps CPU. Pour cette raison, les autres groupes de relativité numérique ont longtemps essayé d'éviter au maximum les équations elliptiques. Ces considérations purement techniques ont d'ailleurs provoqué un engouement massif pour des formulations entièrement hyperboliques des équations d'Einstein dans les années 1990 (cf. par exemple [69]), avant que l'on s'aperçoive que la plupart de ces formulations conduisent à des singularités de coordonnées [31, 32].

Pourtant, dès la fin des années 1970, L. Smarr & J.W. York [263] avaient proposé, dans le cadre du formalisme 3+1 de la relativité générale, un système de coordonnées bien adapté à la fois aux champs gravitationnels fort et à la description asymptotique du rayonnement gravitationnel sortant. Il s'agissait du *feilletage maximal* combiné avec la jauge spatiale de *distortion minimale*. Seulement la résolution des équations d'Einstein dans ce système de coordonnées passait par la résolution d'équations elliptiques pour la fonction lapse et le vecteur shift. Bien qu'adapté à la physique des sources d'ondes gravitationnelles, ce système de coordonnées n'a pas été employé jusqu'à récemment en relativité numérique en raison des équations elliptiques qu'il comportait. Il faudra attendre 1999 et les travaux de M. Shibata [255, 256] pour voir les coordonnées de Smarr & York employées dans des problèmes dynamiques 3-D.

S. Bonazzola & J.A. Marck [72] ont développé en 1990 une méthode spectrale de résolution des équations de Poisson 3-D. A l'époque il s'agissait d'une méthode mono-domaine (intérieur d'une sphère). Cette méthode a ensuite été étendue au cas multi-domaine avec domaine externe compactifié par S. Bonazzola (§ 7 et 8 de [19], cf. aussi [8]).

### 30.2 Notre technique [A30]

Nous avons mis au point une méthode spectrale pour résoudre les équations de Poisson scalaires et vectorielles avec source à support non compact. Le point de départ est le même que

dans la méthode de Bonazzola & Marck mentionnée ci-dessus : on utilise comme base spectrale les harmoniques sphériques  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ . Ces dernières étant des fonctions propres de l'opérateur laplacien angulaire, l'équation de Poisson

$$\Delta u = s, \quad (30.1)$$

a priori 3D, se réduit à un système d'équations différentielles 1D :

$$\forall(\ell, m), \quad \left( \frac{d}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) u_{\ell m}(r) = s_{\ell m}(r), \quad (30.2)$$

où  $u_{\ell m}(r)$  (resp.  $s_{\ell m}(r)$ ) désigne les coefficients du développement de  $u$  (resp.  $s$ ) en harmoniques sphériques.

Par contre la nouvelle méthode se distingue de celle de Bonazzola & Marck [72, 19] par trois aspects :

- le traitement de conditions de régularité en  $r = 0$  repose sur l'utilisation des parties finies des opérateurs différentiels, alors que Bonazzola & Marck avaient utilisé une base de Galerkin ;
- le nombre de coefficients en  $\theta$  et  $\varphi$  peut varier d'un domaine à l'autre ;
- les équations de Poisson vectorielles sont traitées en composantes cartésiennes et non sphériques.

Une équation elliptique vectorielle de grande importance pour la relativité générale est

$$\Delta \vec{\beta} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\beta}) = \vec{s}. \quad (30.3)$$

Il s'agit en effet de l'équation de la jauge de distorsion minimale de Smarr & York [263],  $\vec{\beta}$  étant alors le vecteur shift du formalisme 3+1. Rappelons au passage que si  $\vec{\beta}$  est le vecteur shift de coordonnées adaptées à un vecteur de Killing de genre temps, alors nécessairement  $\vec{\beta}$  obéit à l'équation (30.3). Même en composantes cartésiennes, l'équation (30.3) couple les trois composantes  $\beta^i$ , contrairement à l'équation de Poisson vectorielle ordinaire. Il existe plusieurs façons de réduire (30.3) à un système d'équations de Poisson scalaire. Dans l'article [A30], nous avons étudié les réductions de Bowen-York [75], d'Oohara-Nakamura [223] et de Shibata [224], en mettant l'accent sur le comportement à l'infini. Nous avons montré que les schémas d'Oohara-Nakamura et de Shibata sont de ce point de vue supérieurs à celui de Bowen-York.

En comparant avec des solutions analytiques de l'équation de Poisson, nous avons montré que si la source est à support non-compact et décroît comme  $r^{-k}$ , alors l'erreur numérique

- est évanescence (c'est-à-dire décroît comme  $\exp(-N_r)$  où  $N_r$  est le nombre de coefficients en  $r$ ) si la source ne contient pas d'harmoniques sphériques d'indice  $\ell \geq k - 3$  ( $\ell \geq k - 5$  dans le cas vectoriel) ;
- décroît comme  $N_r^{-2(k-2)}$  sinon.

### 30.3 Développements ultérieurs

La méthode spectrale de résolution des équations de Poisson scalaires et vectorielles présentée dans [A30] a été utilisée dans tous les travaux numériques des Parties II, IV et V, ainsi que dans le Chap. 19.

Très récemment, J. Novak & S. Bonazzola [221] ont considéré le cas de l'équation de d'Alembert (équation des ondes) et ont développé une méthode spectrale multi-domaine avec de "bonnes" conditions d'onde sortante.

# Chapitre 31

## LORENE

### 31.1 Introduction

Jusqu'en 1996, notre groupe utilisait le langage *Fortran 77* pour écrire les codes numériques. Il s'agissait alors du langage universellement répandu dans le monde du calcul scientifique. Or ce langage est très ancien, son origine remontant à 1953. Il s'agit même du tout premier langage de programmation de "haut niveau" créé par les ingénieurs d'IBM pour aller au delà de l'assembleur. L'utilisation de ce "bon vieux Fortran" rendait l'écriture de nos codes relativement fastidieuse. Comme nous traitons des problèmes de plus en plus complexes, avec en vue le 3-D relativiste, l'"encodage" en Fortran 77 était de plus en plus lourd et nous passions de plus en plus de temps dans la recherche d'erreurs (la plupart du temps sur les indices de boucle).

C'est Jean-Alain Marck qui à l'automne 1996 a suggéré que nous changions de langage et options pour un langage *orienté objet*. On distingue en effet deux grandes catégories de langages informatiques :

**les langages procéduraux**, pour lesquels le concept primordial est celui de *procédure* ou *fonction* (on dit également *sous-programme* ou *sous-routine*) : un code numérique est alors un assemblage de ces fonctions, qui s'appellent les unes les autres. Le *Fortran* (77 et 90) et le *C* appartiennent à cette catégorie.

**les langages orientés objet**, pour lesquels le concept primordial est celui d'*objet*, qui sont des représentations abstraites des données numériques. La fonction perd alors son rôle central et n'apparaît que comme un modificateur d'objet. Les langages orientés objet les plus répandus sont le *C++*<sup>1</sup>, *Java* et *ADA*.

Les langages orientés objets sont beaucoup plus puissants pour le traitement de problèmes complexes et sont systématiquement utilisés dans tous les gros projets industriels.

Jean-Alain Marck a examiné ADA, Java et le C++ et, à la fin de l'année 1996 nous a présenté ses conclusions : des trois langages orientés objets, c'est le C++ qui est le plus adapté à nos besoins. Lui et moi avons alors décidé de ne plus écrire une ligne de Fortran à partir du 1er janvier 1997, mais uniquement du C++. Ainsi naquit le projet LORENE.

---

<sup>1</sup>Contrairement à ce que son nom pourrait suggérer, le *C++*, de part son aspect objet, est très éloigné du *C*, dont il n'a gardé que la syntaxe

## 31.2 Structure de LORENE

### 31.2.1 Les classes

L'idée qui sous-tend le développement de LORENE est que chaque fois qu'une notion fait sens par elle-même, qu'elle soit mathématique (ex. : un tenseur) ou physique (ex. : une équation d'état), on en fait une classe C++. Ce point de vue "tout objet" s'est révélé extrêmement payant (cf. par exemple la discussion du § 8.2). Ainsi, nous avons construit des classes pour décrire, par ordre de complexité croissante :

- des tableaux 3-D, avec l'arithmétique associée
- des tableaux 3-D sur des grilles multi-domaines
- des composantes de tenseurs
- des tenseurs
- des métriques
- des étoiles
- des trous noirs
- des systèmes binaires d'étoiles ou de trous noirs

A côté de cela, il y a également des classes pour décrire

- les bases fonctionnelles pour les développements des méthodes spectrales
- les ensembles de coefficients d'une fonction sur ces bases
- les grilles de points de collocation des méthodes spectrales
- les transformations entre la grille "numérique" et l'espace physique (grilles adaptées à la forme des objets, cf. Chap. 29)
- les équations d'état
- les bases vectorielles (triades) sur lesquelles on exprime les composantes des tenseurs
- etc...

Il y a actuellement environ 80 classes différentes dans LORENE. Certaines de ces classes sont *dérivées* (au sens du C++, c'est-à-dire qu'elles forment une sous-classe) d'une classe de base. Ainsi, la classe des étoiles en rotation est une classe dérivée de la classe générale pour toutes les étoiles. Au 7 mars 2003, LORENE compte 221 731 lignes de code.

### 31.2.2 Encapsulation des données

Une classe C++ est définie par des *données* et des *méthodes* (fonctions agissant sur ces données). Dans l'esprit de la programmation objet, (presque) toutes les données dans LORENE sont *encapsulées*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas y accéder directement en dehors de la classe (elles sont déclarées avec le mot clé `protected` dans la définition de la classe). L'accès aux données se fait uniquement via des méthodes `get_xxx()` (lecture seule) ou `set_xxx()` (modification des données). L'avantage de l'encapsulation est le contrôle rigoureux des dépendances entre les données. Ainsi, l'appel de la méthode `set_xxx()` ne modifiera pas seulement les données `xxx`, mais également les données ou les objets qui dépendent de `xxx`.

### 31.2.3 Gestion des objets constants

Un soin particulier a été apporté à la gestion des objets constants dans LORENE, en employant systématiquement le qualificatif `const` du C++ lorsqu'il y a lieu :

- `A::f(const B& b)` : la méthode `f` de la classe `A` ne modifie pas son argument `b` ;
- `A::f() const` : la méthode `f` de la classe `A` ne modifie pas l'objet (de type `A`) sur lequel elle est appelée ;
- `const B& A::get_xxx() const` : la méthode `get_xxx` de la classe `A` retourne une référence sur un objet de type `B` constant ; de plus cette méthode ne modifie pas l'objet de type `A` sur lequel elle est appelée, d'où le second qualificatif `const`.

L'identification des objets constants ainsi opérée clarifie la programmation et permet de se reposer sur le compilateur pour détecter certaines erreurs : l'appel d'une méthode qui n'est pas déclarée `const` sur un objet constant générera une erreur de compilation. Il convient également de noter que le C++ offre une souplesse intéressante dans la gestion des objets constants, en laissant au programmeur le choix de définir ce qu'il entend exactement par *objet constant* et de ne pas le réduire à un objet dont toutes les données seraient constantes. Le mot clé `mutable` appliqué à des données d'une classe permet en effet de modifier celles-ci même si l'objet auquel elles appartiennent est déclaré constant. Ainsi la *constance* peut être définie dans un sens logique et non dans le sens "informatique" d'une partie figée de la mémoire de l'ordinateur. LORENE exploite abondamment cette fonctionnalité du C++.

### 31.2.4 Construction des objets

Il y a au moins trois façons de créer un objet d'une classe donnée dans LORENE, correspondant à trois types de constructeurs C++ :

- une construction ex nihilo, à partir du minimum d'information nécessaire pour construire l'objet (par exemple le nombre de points dans chacune des trois dimensions pour un tableau 3-D) ;
- une construction par recopie d'un objet de la même classe déjà existant ;
- une construction par lecture de fichier, dans lequel un objet de la même classe avait préalablement été sauvé (toutes les classes de LORENE sont munie d'une méthode `save` qui permet l'écriture dans un fichier binaire, dans un format indépendant du type d'ordinateur utilisé).

De plus, il existe parfois dans LORENE des constructeurs par conversion d'un objet d'une classe différente.

### 31.2.5 État des objets et gestion de la mémoire

La plupart des objets de LORENE existent dans l'un des trois états suivants :

**état ordinaire** : l'objet a une valeur bien définie, différente de la valeur nulle, et tous ses champs (données) sont alloués ;

**état nul** : l'objet a la valeur nulle ;

**état non défini** : la construction logique de l'objet n'est pas terminée.

Dans les états *nul* et *non défini*, la mémoire pour les données n'est pas allouée. Pour des objets de type champ tensoriel, il en résulte alors une importante économie de mémoire. Dans l'état *nul*,

il en résulte également une économie de temps de calcul car toute la mathématique de LORENE teste d'abord l'état d'un objet avant d'effectuer une opération. Ainsi par exemple l'addition  $a + b$  retournera directement  $a$  si  $b$  est dans l'état nul, sans effectuer l'addition d'un tableau de zéros.

### 31.3 Processus de développement de LORENE

Nous avons mis LORENE dans le domaine public en novembre 2001, sous la License Publique GNU (GPL). Cela signifie notamment que les sources de LORENE sont accessibles à n'importe qui. Tout le monde est également libre de modifier ces sources pour les adapter à ses propres besoins. Par contre Jérôme Novak et moi gardons le contrôle des personnes qui peuvent intégrer leurs modifications dans LORENE. En décembre 2002, il s'agit de 13 personnes : Michal Bejger, Nicolas Chamel, Jörg Frauendiener, Dorota Gondek-Rosińska, Éricourgoulhon, Philippe Granclément, Christian Klein, François Limousin, Emmanuel Marcq, Jérôme Novak, Reinhard Prix, Keisuke Taniguchi et Leszek Zdunik. Concrètement, l'accessibilité de LORENE est réalisée par le biais de deux serveurs Internet :

- un serveur Web, <http://www.lorene.obspm.fr/>, qui fournit les renseignements nécessaires à l'installation de LORENE, ainsi que de la documentation
- un serveur CVS, `:pserver:anonymous@octane.obspm.fr:/cvsroot`, qui permet l'accès direct à toutes les sources de LORENE. Le logiciel CVS (pour *Concurrent Version System*) est un outil standard de gestion de développement multi-programmeurs et multi-site. Il permet d'éviter les conflits entre deux programmeurs en deux lieux différents qui modifieraient en même temps la même partie de LORENE. CVS repose notamment sur un gestionnaire de version, qui permet à tout moment de revenir à une version précédente d'un fichier source.

LORENE est ainsi en continuel développement. En décembre 2002, LORENE compte 178 000 lignes de code C++ et 39 000 lignes de code Fortran 77. Cette dernière partie est vouée à disparaître, de manière à ce que l'installation de LORENE sur un ordinateur donné ne requiert qu'un compilateur C++. Les quelques (rares) problèmes de portabilité que nous avons eu ont en effet été liés au Fortran. De plus, il semble que les constructeurs abandonnent progressivement le développement de compilateurs Fortran. Nous attachons une importance particulière à la portabilité de LORENE, afin d'être en mesure d'effectuer rapidement des calculs sur toutes les machines disponibles en un lieu donné. A l'heure actuelle, LORENE fonctionne sur des PC sous Linux, des stations SGI, des stations Compaq Alpha et des stations IBM. Elle a été implémentée dans divers endroits, dont l'Université de Tours, Université de Valence (Espagne), Centre Astronomique Nicolas Copernic (Varsovie, Pologne), Institut Albert Einstein (Golm, Allemagne), Université de Tübingen (Allemagne), Université de Southampton (Royaume-Uni), SISSA (Trieste, Italie), Université Northwestern (Chicago, USA), et Université de Tokyo (Japon).

### 31.4 Résultats obtenus à l'aide de LORENE

Tous les résultats numériques de la Partie II (étoiles de quarks étranges) ont été obtenus à l'aide du code `Lorene/Codes/Rot_Star/rotstar`, que j'ai écrit en introduisant la classe `Etoile_rot` dans LORENE. Cette classe est une classe dérivée de la classe générique `Etoile` (dont dérivent toutes les classes d'étoiles) et implémente les fonctionnalités propres aux étoiles isolées en rotation (comme par exemple la vitesse de rotation  $\Omega$  ou la métrique (1.3) (page 24) spécifique

aux espaces-temps axisymétriques stationnaires et circulaires. La classe `Etoile_rot` contient elle-même trois classes dérivées : `Et_rot_bifluid`, écrite par Jérôme Novak pour les étoiles à deux fluides (en particulier les étoiles dont l'intérieur est superfluide) [237], `Et_rot_diff`, écrite par moi pour les étoiles en rotation différentielle, et `Et_rot_mag`, écrite par Jérôme Novak et Emmanuel Marq pour les étoiles magnétisées [222].

Les résultats du Chap. 19 (point de bifurcation Maclaurin-Jacobi en relativité générale) ont été obtenus à l'aide du même code `rotstar`, mais en utilisant sa version 3-D.

Tous les résultats numériques de la Partie IV (étoiles binaires) ont été obtenus à l'aide du code `Lorene/Codes/Bin_Star/coal`, écrit essentiellement par moi-même, avec des petites améliorations apportées par Keisuke Taniguchi. Ce code est construit sur les classes `Binaire` et `Etoile_bin` de LORENE. Tout comme `Etoile_rot`, `Etoile_bin` est une classe dérivée d'`Etoile` ; elle implémente les fonctionnalités propres aux étoiles binaires, comme par exemple le potentiel gravitationnel de l'étoile compagnon. La classe `Etoile_bin` permet de traiter aussi bien les étoiles en rotation synchrone que les étoiles en mouvement irrotationnel, ainsi que la limite newtonienne. La classe `Binaire` décrit le système binaire dans son ensemble et contient évidemment deux objets de type `Etoile_bin`.

Tous les résultats numériques de la Partie V (trous noirs binaires) ont été obtenus à l'aide du code `Lorene/Codes/Bin_Bholes/coal_bholes`, écrit par Philippe Grandclément et construit sur les classes `Bhole_binaire` et `Bhole` de LORENE. La classe `Bhole` décrit un seul trou noir, éventuellement en système binaire, alors que la classe `Bhole_binaire` décrit le système binaire dans son ensemble.

La méthode multi-domaine avec grille adaptative décrite au Chap. 29 a été mise en œuvre via la classe `Map_et` de LORENE. Cette classe est une classe dérivée de la classe `Map` qui décrit tous les changements de variables  $(\xi, \theta', \varphi') \mapsto (r, \theta, \varphi)$  entre les coordonnées "numériques"  $(\xi, \theta', \varphi')$  et les coordonnées physiques  $(r, \theta, \varphi)$ . La classe `Map_et` implémente le changement de variable tel que donné par le système (29.4)-(29.6).

La technique de résolution des équations de Poisson scalaires et vectorielles présentée au Chap. 30 a été implémentée via respectivement les méthodes `Cmp::poisson` et `Tenseur::poisson_vect` de LORENE.

Enfin, mentionnons que LORENE est actuellement utilisée en dehors de notre groupe<sup>2</sup> :

- pour résoudre des équations de Poisson dans un code hydro + gravitation post-newtonienne par le groupe de F. Rasio à l'Université Northwestern (Chicago) ;
- également pour résoudre des équations de Poisson dans un code hydro pour l'étude des oscillations des étoiles en rotation, par I. Jones, de l'Université de Southampton, actuellement en post-doc à l'Université de Pennsylvanie.
- pour résoudre les équations de type Ernst dans les espaces-temps de trou noir par J. Frauendiener, de l'Université de Tübingen.

---

<sup>2</sup>Ne figurent pas dans cette liste les groupes avec qui nous avons une collaboration directe et qui utilisent LORENE, à savoir Varsovie, Valence, Tokyo et Golm



Septième partie

Perspectives



## Développement numérique : méthodes spectrales basées sur des polynômes de Legendre

Jusqu'à présent nous avons toujours employé une formulation forte pour résoudre les EDP multi-domaines (cf. § 29.1). Or pour des problèmes d'évolution temporelle (équation d'advection ou équation d'ondes), la formulation faible résulterait dans des schémas plus stables [208]. Mais la formulation faible ne peut être mise en œuvre avec les polynômes de Tchebyshev — que nous avons toujours utilisés jusqu'alors pour la décomposition radiale. La raison est la divergence du poids associé aux polynômes de Tchebyshev,  $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ , aux extrémités de l'intervalle  $[-1, 1]$ . Les polynômes de Legendre, pour lesquels le poids est  $\omega(x) = 1$ , ont un bien meilleur comportement à cet égard. Nous prévoyons donc de les introduire pour résoudre des EDP en formulation faible. Il convient de noter que la structure modulaire de LORENE est parfaitement adaptée à l'ajout d'une nouvelle famille de polynômes pour les décompositions spectrales.

## Modèles “sophistiqués” d'étoiles à neutrons

Depuis l'étude de 1994 ([A5], Chap. 5), des progrès importants ont été accomplis dans la physique de la matière dense, débouchant sur de nouvelles équations d'état. Nous prévoyons donc de calculer de nouveaux modèles d'étoiles à neutrons en rotation, basés sur les équations d'état suivantes :

- Pour l'intérieur liquide :
  - Akmal, Pandharipande & Ravenhall (1998) [29] : matière de neutrons, protons, électrons et muons, décrite via le potentiel A18+dv+UIX\* ;
  - Baldo, Bombaci & Burgio (1997) [44] : matière de neutrons, protons, électrons et muons, décrite en approximation Brueckner-Hartree-Fock avec le potentiel de Paris avec des corrections à trois corps de type Urbana ;
  - Balberg (2000) [43] : matière contenant des hypérons.
- Pour la croûte solide :
  - modèle de Douchin & Haensel (2001) [117] : croûte interne ;
  - modèle d'Haensel & Pichon (1994) [156] : croûte externe.

Avec l'aide de J.L. Zdunik, j'ai déjà implémenté ces équations d'état dans LORENE, en utilisant la technique d'interpolation thermodynamiquement cohérente présentée au § 6.3.

Pour chacun des modèles d'étoiles à neutrons, nous prévoyons de calculer la position de la dernière orbite stable (ISCO, § 10.4), ce qui n'avait pas été fait en 1994, mais est désormais pertinent au vu des observations du satellite RXTE (cf. Chap. 10).

## Systèmes binaires et physique nucléaire

Les calculs de configurations d'équilibre d'étoiles binaires serrées présentés dans la Partie IV ne concernaient que des équations d'état polytropiques. Nous prévoyons d'étendre ces calculs aux équations d'état issues de la physique nucléaire et mentionnées ci-dessus. Une telle étude n'a jamais été faite. De même, il sera intéressant d'étendre les calculs à la matière de quarks ( $u, d, s$ ) considérée dans la Partie II pour voir si les systèmes binaires d'étoiles de quarks étranges ont des propriétés potentiellement observables par VIRGO et qui pourraient les distinguer des

systèmes binaires d'étoiles à neutrons, comme par exemple l'ISCO (§ 22.2.2) ou la forme du spectre d'énergie (§ 25.3).

## Systèmes binaires étoile à neutrons - trou noir

Une autre généralisation intéressante des calculs présentés dans les Parties IV et V est celle des configurations d'équilibre (et des séquences d'évolution associées) des systèmes "mixtes", à savoir composés d'une étoile à neutrons et d'un trou noir. Nous avons en effet mentionné au début de la Partie IV, page 352, qu'il n'était pas facile de connaître qui des binaires d'étoiles à neutrons ou des binaires de trous noirs seront les événements les plus fréquents observés par VIRGO. Il se pourrait qu'en fait les systèmes binaires "mixtes" soient un bon compromis entre la fréquence par galaxie donnée (moins que les binaires d'étoiles à neutrons mais plus que les binaires de trous noirs) et l'amplitude du signal (moins que les binaires de trous noirs mais plus que les binaires d'étoiles à neutrons). Nous prévoyons donc d'effectuer ces calculs, en développant un nouveau code qui empruntera au code présenté au Chap. 21 pour la partie étoile à neutrons et au code présenté au Chap. 27 pour la partie trou noir.

## Au delà de l'approximation IWM

Tous les calculs de configurations d'équilibre et de séquences d'évolution quasi-stationnaires que nous avons effectués jusqu'à présent, aussi bien pour les binaires d'étoiles à neutrons (Partie IV) que pour les binaires de trous noirs (Partie V) reposent sur l'approximation d'Isenberg-Wilson-Mathews discutée au § 21.2.2. Cette dernière revient à ne résoudre que cinq des dix équations d'Einstein, en supposant la métrique spatiale conformément plate. Bien qu'il soit aujourd'hui clair que cette approximation n'est pas à l'origine de la différence entre les résultats post-newtoniens et certains calculs numériques (cf. la discussion du § 28.3), il est naturel d'aller au delà de cette approximation pour effectuer des calculs plus précis, tout en conservant l'approximation de symétrie hélicoïdale (§ 20.2). Il se pose alors un problème de compatibilité avec l'hypothèse d'espace-temps asymptotiquement plat. Nous étudions actuellement divers moyens de traiter ce problème, dont certaines ont été suggérées par Isenberg lui-même dans son article original [170].

Les développements mentionnés ci-dessus se situent dans le cadre du formalisme 3+1. Or Christian Klein, Jérôme Novak et moi explorons actuellement une voie alternative, à savoir l'approche *variété quotient*. Il s'agit d'une approche naturelle lorsque l'on doit traiter d'un espace-temps avec un vecteur de Killing, comme ici le vecteur de Killing hélicoïdal. Suivant J. Ehlers et R.P. Geroch [139], on réduit le problème à un problème de dimension 3 en effectuant le quotient de la variété d'espace-temps par les orbites du groupe de symétrie généré par le vecteur de Killing. Il s'agit ensuite de résoudre une équation de type Ernst [124] sur la variété quotient.

## Dynamique du champ gravitationnel

L'abandon de l'approximation IWM peut également être perçu comme une préparation à l'étude de la dynamique complète du champ gravitationnel, c'est-à-dire de l'évolution temporelle avec émission d'ondes gravitationnelles. Cela passe par la résolution des équations d'Einstein dans toute leur généralité. De nombreux groupes développent différents codes numériques pour résoudre les équations d'Einstein 3-D dans des situations fortement dynamiques. On peut citer

- le code *Cactus* (<http://www.cactuscode.org/>), développé essentiellement à l'Institut Albert Einstein à Golm (Allemagne) et à l'Université Washington à Saint-Louis (États-Unis);
- le groupe de M. Shibata, de l'Université de Tokyo (Japon);
- le groupe de R. Matzner à l'Université du Texas (États-Unis);
- le groupe de S.A. Teukolsky à l'Université Cornell (États-Unis).

Tous ces groupes emploient le formalisme 3+1 de la relativité générale. On trouvera une discussion détaillée des différents choix de coordonnées et de système d'EDP dans [261]. Nous avons déjà mentionné au § 30.1 que les formulations entièrement hyperboliques, qui avaient été choisies sur des critères purement techniques, sont aujourd'hui abandonnées. Pour notre part, nous nous orientons vers un choix de coordonnées du type de la *jauge de rayonnement (feuilletage maximal + distortion minimale)* de Smarr & York [263], peut-être sous la forme d'une variante constituée par la *jauge de Dirac*. L'idée de départ remonte aux travaux de J.W. York qui a montré en 1972 [295] que la dynamique du champ gravitationnel est portée par la “*métrique*” conforme :

$$\hat{\gamma}_{ij} := \gamma^{-1/3} \gamma_{ij}, \quad (31.1)$$

où  $\gamma_{ij}$  désigne la 3-métrique induite par la métrique d'espace-temps  $g_{\mu\nu}$  sur les hypersurfaces de temps coordonné constant  $\Sigma_t$  du formalisme 3+1 et  $\gamma$  le déterminant des composantes covariantes de cette 3-métrique :  $\gamma = \det \gamma_{ij}$ . Notons que puisque  $\gamma$  dépend des coordonnées<sup>3</sup>, la 3-métrique conforme définie par (31.1) n'est pas un tenseur, mais une *densité de tenseur*, de poids  $-2/3$ . D'un point de vue numérique, la quantité  $\hat{\gamma}_{ij}$ , que l'on va faire évoluer dans le temps, est “petite” devant  $\gamma_{ij}$ . Cette propriété a notamment été mise en avant par M. Shibata & T. Nakamura en 1995 [259] pour diminuer l'erreur numérique globale : une erreur relative sur  $\hat{\gamma}_{ij}$  contribue moins à l'erreur globale qu'une erreur relative de même niveau sur  $\gamma_{ij}$ . Remarquons que le cas conformément plat de l'approximation IWM que nous avons utilisée jusqu'alors pour les systèmes binaires (Parties IV et V) correspond à  $\hat{\gamma}_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$  : toute l'information sur la métrique spatiale est portée par le déterminant  $\gamma$  et le champ gravitationnel n'a pas de dynamique propre.

Notre projet est d'introduire, en plus de la 3-métrique physique  $\gamma_{ij}$  et de la 3-métrique conforme associée, une métrique plate  $f_{ij}$  sur l'hypersurface  $\Sigma_t$ . Les autres groupes (cf. [259] et [50]) n'introduisent pas explicitement un tel objet mais réduisent leur cadre de travail aux seules coordonnées cartésiennes. Nous préférons le point de vue plus covariant d'autoriser tout type de coordonnées — par exemple des coordonnées de type sphériques —, quitte à introduire une 3-métrique plate. Cette dernière est en effet nécessaire pour définir une métrique conforme qui ne soit pas une densité de tenseur comme (31.1), suivant

$$\tilde{\gamma}_{ij} := \left(\frac{\gamma}{f}\right)^{-1/3} \gamma_{ij}, \quad (31.2)$$

où  $f$  désigne le déterminant des composantes covariantes de la métrique plate  $f_{ij}$  par rapports aux coordonnées choisies. Comme le rapport des deux déterminants  $\gamma/f$  est un champ scalaire, l'Eq. (31.2) définit bien un tenseur sur l'hypersurface  $\Sigma_t$  et donc une vraie métrique  $\tilde{\gamma}_{ij}$ , en plus de la métrique physique  $\gamma_{ij}$ . On peut alors introduire l'unique dérivation covariante  $\tilde{D}_i$  associée à  $\tilde{\gamma}_{ij}$ . Cela n'était pas possible pour la densité de tenseur (31.1) : on ne pouvait pas lui associer de

<sup>3</sup>par exemple, pour une métrique plate,  $\gamma = 1$  en coordonnées cartésiennes, alors que  $\gamma = r^4 \sin^2 \theta$  en coordonnées sphériques

manière unique une dérivation covariante (ainsi par exemple la dérivation covariante  $D_i$  associée à  $\gamma_{ij}$  vérifie  $D_k \hat{\gamma}_{ij} = 0$ ).

Dans le cadre du formalisme 3+1, les équations d'Einstein se décomposent en les équations de contrainte (26.1)-(26.2) et en des équations d'évolution, dont la partie sans trace s'exprime en fonction de  $\tilde{\gamma}_{ij}$  sous la forme

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}}{\partial t} = -2N \tilde{A}_{ij} + \mathcal{L}_{\beta} \tilde{\gamma}_{ij} - \frac{2}{3} D_k \beta^k \tilde{\gamma}_{ij} \quad (31.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}_{ij}}{\partial t} &= \gamma^{-1/3} \left[ N \left( \tilde{R}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{R} \tilde{\gamma}_{ij} \right) - \tilde{D}_i \tilde{D}_j (\gamma^{1/6} N) + \frac{1}{3} \tilde{D}_k \tilde{D}^k (\gamma^{1/6} N) \tilde{\gamma}_{ij} \right] \\ &+ \mathcal{L}_{\beta} \tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3} D_k \beta^k \tilde{A}_{ij} + \text{des termes quadratiques,} \end{aligned} \quad (31.4)$$

où  $N$  désigne la fonction lapse,  $\beta$  le vecteur shift,  $\tilde{A}_{ij}$  est conforme à la partie sans trace du tenseur de courbure extrinsèque (l'équation (31.3) peut être vue comme une définition de  $\tilde{A}_{ij}$ ),  $\tilde{R}_{ij}$  est le tenseur de Ricci de la dérivation covariante  $\tilde{D}_i$  et  $\tilde{R}$  sa trace vis-à-vis de la 3-métrique conforme :  $\tilde{R} := \tilde{\gamma}^{ij} R_{ij}$ . Par "termes quadratiques", nous entendons des termes du type  $\tilde{D}_i \gamma \tilde{D}_j N$  ou encore  $\tilde{A}_{ik} \tilde{A}_{jl}$ . Dans le cas où de la matière est présente dans l'espace-temps, il faut également ajouter des termes provenant du tenseur impulsion-énergie.

En combinant (31.3) et (31.4), on obtient une équation d'évolution temporelle du second ordre pour  $\tilde{\gamma}_{ij}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{N} \frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}}{\partial t} \right) &= -2\gamma^{-1/3} \left[ \tilde{R}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{R} \tilde{\gamma}_{ij} - \frac{1}{N} \tilde{D}_i \tilde{D}_j (\gamma^{1/6} N) + \frac{1}{3N} \tilde{D}_k \tilde{D}^k (\gamma^{1/6} N) \tilde{\gamma}_{ij} \right] \\ &- \frac{2}{N} \mathcal{L}_{\beta} \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{N} \mathcal{L}_{\beta} \tilde{\gamma}_{ij} \right) + \text{des termes quadratiques.} \end{aligned} \quad (31.5)$$

Dans le membre de droite de cette équation apparaît la partie sans trace du tenseur de Ricci  $\tilde{R}_{ij}$  qui s'exprime en terme des dérivées spatiales de  $\tilde{\gamma}_{ij}$  suivant :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{R} \tilde{\gamma}_{ij} &= -\frac{1}{2} \left[ \tilde{\gamma}^{kl} \tilde{D}_k \tilde{D}_l \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} \tilde{D}_j H^k + \tilde{\gamma}_{jk} \tilde{D}_i H^k \right] + \frac{1}{3} \tilde{D}_k H^k \tilde{\gamma}_{ij} \\ &+ \text{des termes quadratiques,} \end{aligned} \quad (31.6)$$

où  $\tilde{D}_i$  désigne la dérivation covariante associée à la métrique plate  $f_{ij}$  et  $H^i$  la divergence de la 3-métrique conforme par (rapport à  $\tilde{D}_i$ ) :

$$H^i = \tilde{D}_j \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (31.7)$$

La *jauge de Dirac* est définie par

$$H^i = 0. \quad (31.8)$$

Elle a été introduite par P.A.M. Dirac en 1959 [116] dans le cadre de la formulation hamiltonienne de la relativité générale, en vue de sa quantification. Grâce à (31.8), les dérivées secondes de  $\tilde{\gamma}_{ij}$  qui apparaissent au membre de droite de (31.6) se réduisent au laplacien  $\tilde{\gamma}^{kl} \tilde{D}_k \tilde{D}_l \tilde{\gamma}_{ij}$ , de sorte que l'opérateur du second ordre agissant sur  $\tilde{\gamma}_{ij}$  dans (31.5) n'est rien d'autre qu'un d'Alembertien :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{N} \frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}}{\partial t} \right) - \gamma^{kl} \tilde{D}_k \tilde{D}_l \tilde{\gamma}_{ij} &= \gamma^{-1/3} \left[ \frac{2}{N} \tilde{D}_i \tilde{D}_j (\gamma^{1/6} N) - \frac{2}{3N} \tilde{D}_k \tilde{D}^k (\gamma^{1/6} N) \tilde{\gamma}_{ij} \right] \\ &- \frac{2}{N} \mathcal{L}_{\beta} \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{N} \mathcal{L}_{\beta} \tilde{\gamma}_{ij} \right) \\ &+ \text{des termes quadratiques.} \end{aligned} \quad (31.9)$$

Ainsi la jauge de Dirac paraît bien adaptée au traitement du rayonnement gravitationnel. Nous prévoyons de résoudre l'équation de d'Alembert (31.9) à l'aide de la technique spectrale développée par J. Novak & S. Bonazzola [221] et qui présente des bonnes propriétés d'onde sortante.

La jauge de Dirac n'a pas encore été utilisée en relativité numérique. Elle se traduit par une équation elliptique (du type laplacien + 1/3 du gradient de la divergence) pour le vecteur shift  $\beta$ , que nous résoudrons à l'aide de la méthode spectrale présentée au Chap. 30. On peut combiner la jauge de Dirac avec le feuilletage maximal (trace du tenseur de courbure extrinsèque des hypersurfaces  $\Sigma_t$  égale à zéro), auquel cas on doit résoudre également une équation elliptique (de type Poisson) pour la fonction lapse  $N$ . L'équation de contrainte hamiltonienne (26.1) peut être combinée avec cette dernière pour donner une équation elliptique (également de type Poisson) pour la quantité  $\gamma^{1/6}N$ .

Si l'on fait le bilan de l'approche envisagée, on constate qu'elle comporte une partie elliptique (équations pour le lapse, pour le shift et pour le déterminant combiné avec le lapse,  $\gamma^{1/6}N$ ) et une partie hyperbolique (équation de d'Alembert (31.9)). Loin du système, la partie hyperbolique se réduit à la propagation d'ondes gravitationnelles en jauge TT (transverse et sans trace, cf. Eqs. (31.7)-(31.8)).

Cette approche doit nous permettre d'étudier des problèmes ouverts en astrophysique et où la dynamique du champ gravitationnel joue un grand rôle, comme la fusion de deux trous noirs ou encore divers modèles de "moteurs internes" pour les sursauts gamma.



# Bibliographie

## Articles constituant la base de la présente habilitation

- [A1] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, M. Salgado & J.-A. Marck : *Axisymmetric rotating relativistic bodies : a new numerical approach for “exact” solutions*, Astron. Astrophys. **278**, 421 (1993).
- [A2] E. Gourgoulhon & S. Bonazzola : *Noncircular axisymmetric stationary spacetimes*, Phys. Rev. D **48**, 2635 (1993).
- [A3] E. Gourgoulhon & S. Bonazzola : *A formulation of the virial theorem in general relativity*, Class. Quantum Grav. **11**, 443 (1994).
- [A4] S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *A virial identity applied to relativistic stellar models*, Class. Quantum Grav. **11**, 1775 (1994).
- [A5] M. Salgado, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & P. Haensel : *High precision rotating neutron star models. I. Analysis of neutron star properties*, Astron. Astrophys. **291**, 155 (1994).
- [A6] T. Nozawa, N. Stergioulas, E. Gourgoulhon & Y. Eriguchi : *Construction of highly accurate models of rotating neutron stars – comparison of three different numerical schemes*, Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **132**, 431 (1998).
- [A7] M. Bocquet, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J. Novak : *Rotating neutron star models with a magnetic field*, Astron. Astrophys. **301**, 757 (1995).
- [A8] E. Gourgoulhon, P. Haensel, R. Livine, E. Paluch, S. Bonazzola, & J.-A. Marck : *Fast rotation of strange stars*, Astron. Astrophys. **349**, 851 (1999).
- [A9] D. Gondek-Rosińska, T. Bulik, L. Zdunik, E. Gourgoulhon, S. Ray, J. Dey & M. Dey : *Rotating compact strange stars*, Astron. Astrophys. **363**, 1005 (2000).
- [A10] J.L. Zdunik, P. Haensel, D. Gondek-Rosińska & E. Gourgoulhon : *Innermost stable circular orbits around strange stars and kHz QPOs in low-mass X-ray binaries*, Astron. Astrophys. **356**, 612 (2000).
- [A11] J.L. Zdunik & E. Gourgoulhon : *Small strange stars and marginally stable orbit in Newtonian theory*, Phys. Rev. D **63**, 087501 (2001).
- [A12] D. Gondek-Rosińska, N. Stergioulas, T. Bulik, W. Kluźniak & E. Gourgoulhon : *Lower limits on the maximum orbital frequency around strange stars*, Astron. Astrophys. **380**, 190 (2001).
- [A13] J.L. Zdunik, P. Haensel & E. Gourgoulhon : *The crust of rotating strange quark stars*, Astron. Astrophys. **372**, 535 (2001).
- [A14] J.L. Zdunik, P. Haensel & E. Gourgoulhon : *Recycling strange stars to millisecond periods*, Astron. Astrophys. **381**, 933 (2002).

- [A15] S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *Gravitational waves from pulsars : emission by the magnetic-field-induced distortion*, Astron. Astrophys. **312**, 675 (1996).
- [A16] A. Giazotto, S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *Gravitational waves emitted by an ensemble of rotating neutron stars*, Phys. Rev. D **55**, 2014 (1997).
- [A17] S. Bonazzola, J. Friebe & E. Gourgoulhon : *Spontaneous symmetry breaking of rapidly rotating stars in general relativity*, Astrophys. J. **460**, 379 (1996).
- [A18] S. Bonazzola, J. Friebe & E. Gourgoulhon : *Spontaneous symmetry breaking of rapidly rotating stars in general relativity : influence of the 3D-shift vector*, Astron. Astrophys. **331**, 280 (1998).
- [A19] D. Gondek-Rosińska & E. Gourgoulhon : *Jacobi-like bar mode instability of relativistic rotating bodies*, Phys. Rev. D **66**, 044021 (2002).
- [A20] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck : *Relativistic formalism to compute quasi-equilibrium configurations of non-synchronized neutron star binaries*, Phys. Rev. D **56**, 7740 (1997).
- [A21] E. Gourgoulhon, P. Grandclément, K. Taniguchi, J.-A. Marck & S. Bonazzola : *Quasiequilibrium sequences of synchronized and irrotational binary neutron stars in general relativity : Method and tests*, Phys. Rev. D **63**, 064029 (2001).
- [A22] K. Taniguchi, E. Gourgoulhon & S. Bonazzola : *Quasiequilibrium sequences of synchronized and irrotational binary neutron stars in general relativity. II. Newtonian limits*, Phys. Rev. D **64**, 064012 (2001).
- [A23] K. Taniguchi & E. Gourgoulhon : *Equilibrium sequences of synchronized and irrotational binary systems composed of different mass stars in Newtonian gravity*, Phys. Rev. D **65**, 044027 (2002).
- [A24] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck : *Numerical models of irrotational binary neutron stars in general relativity*, Phys. Rev. Lett. **82**, 892 (1999).
- [A25] K. Taniguchi & E. Gourgoulhon : *Quasiequilibrium sequences of synchronized and irrotational binary neutron stars in general relativity. III. Identical and different mass stars with  $\gamma = 2$* , Phys. Rev. D **66**, 104019 (2002).
- [A26] E. Gourgoulhon, P. Grandclément & S. Bonazzola : *Binary black holes in circular orbits. I. A global spacetime approach*, Phys. Rev. D **65**, 044020 (2002).
- [A27] P. Grandclément, E. Gourgoulhon & S. Bonazzola : *Binary black holes in circular orbits. II. Numerical methods and first results*, Phys. Rev. D **65**, 044021 (2002).
- [A28] T. Damour, E. Gourgoulhon & P. Grandclément : *Circular orbits of corotating binary black holes : comparison between analytical and numerical results*, Phys. Rev. D **66**, 024007 (2002).
- [A29] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck : *Numerical approach for high precision 3-D relativistic star models*, Phys. Rev. D **58**, 104020 (1998).
- [A30] P. Grandclément, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck : *A multi-domain spectral method for scalar and vectorial Poisson equations with non-compact sources*, J. Comput. Phys. **170**, 231 (2001).

## Autres publications pendant la période 1992-2002

- [1] E. Gourgoulhon : *Étude numérique d'effondrements gravitationnels en relativité générale*, Thèse de doctorat, Université Paris 7 (1992).
- [2] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, P. Haensel & J.-A. Marck : *Astrophysical sources of gravitational waves and neutrinos*, in *Approaches to Numerical Relativity*, Ed. R.A. d'Inverno, Cambridge University Press, Cambridge (1992), p. 230.
- [3] E. Gourgoulhon, P. Haensel & D. Gondek : *Maximum mass instability of neutron stars and weak interaction processes in dense matter*, *Astron. Astrophys.* **294**, 747 (1995).
- [4] M. Salgado, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & P. Haensel : *High precision rotating neutron star models. II. Large sample of neutron star properties* *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **108**, 455 (1994).
- [5] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & M. Salgado : *General Relativistic Stationary Axisymmetric Rotating Systems*, in *Rotating objects and relativistic physics, Proc. of the Summer School on General Relativity and Gravitation (El Escorial, Spain, Aug. 1992)*, Eds. F.J. Chinea & L.M. González-Romero, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [6] S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *The Virial Theorem in General Relativity*, in *Relativity in General, Proc. of the Encuentros Relativistas Españoles 93 (Salas, Asturias, Spain, 7-10 September 1993)*, Eds. J. Diaz Alonso & M. Lorente Paramo, p. 179, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette (1994).
- [7] S. Bonazzola, J. Frieben & E. Gourgoulhon : *Triaxial neutron stars — a possible source of gravitational radiation*, in *Dark matter in cosmology, quantum measurements, experimental gravitation, Proc. of the XXXIst Moriond Workshop (Les Arcs, France, 20-27 January 1996)*, Eds. R. Ansari, Y. Giraud-Héraud & J. Trân Thanh Vân, p. 369, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette (1996).
- [8] S. Bonazzola, J. Frieben, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck : *Spectral methods in general relativity – toward the simulation of 3D-gravitational collapse of neutron stars*, in *ICOSA-HOM'95, Proc. of the Third International Conference on Spectral and High Order Methods (Houston, U.S.A., 5-9 June 1995)*, Eds. A.V. Ilin & L.R. Scott, p. 3, Houston Journal of Mathematics (Houston) (1996).
- [9] S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *L'apport des ondes gravitationnelles à l'astronomie du XXIème siècle*, *Journal des Astronomes Français*, **51**, 19-27 (1996).
- [10] S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *Gravitational waves from accreting neutron stars*, in *Proc. of the International Conference on Gravitational Waves : Sources and Detectors (Cascina (Pisa), Italy, 19-23 March 1996)*, Eds. I. Ciufolini & F. Fidicaro, p. 231, World Scientific, Singapore (1997).
- [11] E. Gourgoulhon, S. Bonazzola : *Gravitational waves from isolated neutron stars*, in *Proc. of the International Conference on Gravitational Waves : Sources and Detectors (Cascina (Pisa), Italy, 19-23 March 1996)*, Eds. I. Ciufolini & F. Fidicaro, p. 51, World Scientific, Singapore (1997).
- [12] S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *Gravitational waves from neutron stars*, in *Relativistic gravitation and gravitational radiation (Les Houches, France, 26 September - 6 October 1995)*, Eds. J.-A. Marck & J.-P. Lasota, p. 151, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

- [13] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck : *Spectral methods*, in *Relativistic gravitation and gravitational radiation (Les Houches, France, 26 September - 6 October 1995)*, Eds. J.-A. Marck & J.-P. Lasota, p. 257, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [14] E. Gourgoulhon : *Les ondes gravitationnelles d'un trou noir*, in *Les trous noirs*, Pour la Science, dossier hors-série **16**, p. 126 (1997).
- [15] S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *Strategy to detect the gravitational radiation counterpart of gamma-ray bursts*, in *Proceedings of the Second Workshop on Gravitational Wave Data Analysis* (Orsay, 13-15 November 1997), Eds. M. Davier & P. Hello, p. 179, Editions Frontières, Gif-sur-Yvette (1998).
- [16] E. Gourgoulhon : *Les trous noirs : maelströms cosmiques — relu 20 ans après*, La Recherche **314**, 86 (1998).
- [17] E. Gourgoulhon : *Simulations numériques de sources d'ondes gravitationnelles*, Journal des Astronomes Français, **57-58**, 6 (1998).
- [18] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, P. Grandclément & J.-A. Marck : *Darwin-Riemann problems in general relativity*, in *Proceedings of the 9th Yukawa International Seminar "Black Holes and Gravitational Waves" (Kyoto, Japon, 28 juin - 2 juillet 1999)*, Eds. T. Nakamura & H. Kodama, Prog. Theor. Phys. Suppl. **136**, 216 (1999).
- [19] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, J.-A. Marck : *Spectral methods in general relativistic astrophysics*, J. Comput. Applied Math. **109**, 433 (1999).
- [20] S. Bonazzola & E. Gourgoulhon : *Physics of sources of gravitational waves*, in *Proceedings of the International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves (Urbino, Italie, 6-18 septembre 1999)*, Eds. M. Barone, G. Calamai, M. Mazzoni, R. Stanga & F. Vettrano, p. 62, World Scientific, Singapore (2000).
- [21] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon & J.-A. Marck : *Evolutionary sequences of irrotational binary neutron stars*, in *Proceedings of 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology (Paris, France, 14-18 décembre 1998)* (CD-ROM version), Eds. E. Aubourg, T. Montmerle, J. Paul & P. Peter, CEA/DAPNIA, Gif-sur-Yvette (2000).
- [22] D. Gondek-Rosińska, P. Haensel, J.L. Zdunik & E. Gourgoulhon : *Rapidly rotating strange stars*, in *Proceedings of the conference "Pulsar Astronomy – 2000 and Beyond", (Bonn, Allemagne, 30 août - 3 septembre 1999)*, Eds. M. Kramer, N. Wex & R. Wielebinski, Astron. Soc. Pacific Conf. Ser. **202**, 661 (2000).
- [23] D. Gondek-Rosińska, T. Bulik, W. Kluźniak, J.L. Zdunik & E. Gourgoulhon : *Innermost stable circular orbits around rotating compact quark stars and QPOs*, in *Proceedings of the 4th INTEGRAL workshop "Exploring the Gamma-ray Universe" (Alicante, Espagne, 4-8 septembre 2000)*, ESA **SP-459**, 223 (2001).
- [24] E. Gourgoulhon, P. Grandclément & S. Bonazzola : *Last orbits of binary black holes*, in *Proceedings of Journées Relativistes 2001 (Dublin, 6-8 septembre 2001)*, Eds. C. Barrabès & P.A. Hogan, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 2689 (2002).

## Références citées dans le texte

- [25] M.A. Abramowicz, J.-P. Lasota & B. Muchotrzeb : *On fitting rotating bodies to exterior gravitational fields*, Commun. Math. Phys. **47**, 109 (1976).
- [26] K.H. Ackermann et al. : *Elliptic flow in Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  GeV*, Phys. Rev. Lett. **86**, 402 (2001).
- [27] K. Adcox et al. : *Suppression of hadrons with large transverse momentum in central Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 130$  GeV*, Phys. Rev. Lett. **88**, 022301 (2002).
- [28] M.L. Aizenman : *The equilibrium and the stability of the Roche-Riemann ellipsoids*, Astrophys. J. **153**, 511 (1968).
- [29] A. Akmal, V.R. Pandharipande & D.G. Ravenhall : *Equation of state of nucleon matter and neutron star structure*, Phys. Rev. C **58**, 1804 (1998).
- [30] C. Alcock, E. Farhi & A. Olinto : *Strange stars*, Astrophys. J. **310**, 261 (1986).
- [31] M. Alcubierre : *The appearance of coordinate shocks in hyperbolic formalisms of General Relativity*, Phys. Rev. D **55**, 5981 (1997).
- [32] M. Alcubierre & J. Masso : *Pathologies of hyperbolic gauges in general relativity and other field theories*, Phys. Rev. D **57**, 4511 (1998).
- [33] M.A. Alpar : *Comment on strange stars*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2152 (1987).
- [34] P. Amsterdamski, T. Bulik, D. Gondek-Rosińska & W. Kluźniak : *Marginally stable orbits around Maclaurin spheroids and low-mass quark stars*, Astron. Astrophys. **381**, L21 (2002).
- [35] N. Andersson : *A new class of unstable modes of rotating relativistic stars*, Astrophys. J. **502**, 708 (1998).
- [36] M. Ando et al. : *Stable operation of a 300-m laser interferometer with sufficient sensitivity to detect gravitational-wave events within our Galaxy*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3950 (2001).
- [37] M. Ansorg, A. Kleinwaechter & R. Meinel : *Highly accurate calculation of rotating neutron stars*, Astron. Astrophys. **381**, L49 (2002).
- [38] R. Arnowitt, S. Deser & C.W. Misner : *The dynamics of general relativity*, in *Gravitation : an introduction to current research*, Ed. L. Witten, Wiley, New York (1962).
- [39] G.G. Arutyunyan, D.M. Sedrakian & E.V. Chubaryon : *Rotating superdense configurations in general relativity*, Astronomicheskii Zhurnal **48**, 496 (1971); traduction anglaise dans Soviet Astronom.-AJ **15**, 390 (1971).
- [40] H. Asada : *Formulation for the internal motion of quasiequilibrium configurations in general relativity*, Phys. Rev. D **57**, 7292 (1998).
- [41] H. Asada & M. Shibata : *Formulation for nonaxisymmetric uniformly rotating equilibrium configurations in the second post-Newtonian approximation of general relativity*, Phys. Rev. D **54**, 4944 (1996).
- [42] A. Ashtekar & A. Magnon-Ashtekar : *On conserved quantities in general relativity*, J. Math. Phys. **20**, 793 (1979).
- [43] S. Balberg, I. Lichtenstadt & G.B. Cook : *Roles of hyperons in neutron stars*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **121**, 515 (1999).

- [44] M. Baldo, I. Bombaci & G.F. Burgio : *Microscopic nuclear equation of state with three-body forces and neutron star structure*, *Astron. Astrophys.* **328**, 274 (1997).
- [45] J.M. Bardeen & R.V. Wagoner : *Relativistic disks. I. Uniform rotation*, *Astrophys. J.* **167**, 359 (1971).
- [46] T.W. Baumgarte : *Innermost stable circular orbit of binary black holes*, *Phys. Rev. D* **62**, 024018 (2000).
- [47] T.W. Baumgarte : *The innermost stable circular orbit in compact binaries*, in *Astrophysical Sources of Gravitational Radiation*, Ed. J.M. Centrella, AIP Press (2001).
- [48] T.W. Baumgarte, G.B. Cook, M.A. Scheel, S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky : *Binary neutron stars in general relativity : Quasiequilibrium models*, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1182 (1997).
- [49] T.W. Baumgarte, G.B. Cook, M.A. Scheel, S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky : *General relativistic models of binary neutron stars in quasiequilibrium*, *Phys. Rev. D* **57**, 7299 (1998).
- [50] T.W. Baumgarte & S.L. Shapiro : *Numerical integration of Einstein's field equations*, *Phys. Rev. D* **59**, 024007 (1998).
- [51] T.W. Baumgarte, S.L. Shapiro & M. Shibata : *On the maximum mass of differentially rotating neutron stars*, *Astrophys. J.* **528**, L29 (2000).
- [52] G. Baym, C. Pethick & P. Sutherland : *The ground state of matter at high densities : equation of state and stellar models*, *Astrophys. J.* **170**, 299 (1971).
- [53] R. Beig : *Arnold-Descartes-Misner energy and  $g_{00}$* , *Phys. Lett.* **69A**, 153 (1978).
- [54] K. Belczynski, V. Kalogera & T. Bulik : *A comprehensive study of binary compact objects as gravitational wave sources : Evolutionary channels, rates, and physical properties*, *Astrophys. J.* **572**, 407 (2002).
- [55] C. Bernardi & Y. Maday : *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Springer-Verlag, Paris (1992).
- [56] G. Bertin & L.A. Radicati : *The bifurcation from the Maclaurin to the Jacobi sequence as a second-order phase transition*, *Astrophys. J.* **206**, 815 (1976).
- [57] L. Bildsten : *Gravitational radiation and rotation of accreting neutron stars*, *Astrophys. J.* **501**, L89 (1998).
- [58] L. Bildsten & C. Cutler : *Tidal interactions of inspiraling compact binaries*, *Astrophys. J.* **400**, 175 (1992).
- [59] L. Blanchet : *Post-Newtonian gravitational radiation*, in *Einstein's field equations and their physical implications*, Ed. B.G. Schmidt, Springer-Verlag, Berlin (2000), p. 225.
- [60] L. Blanchet : *Innermost circular orbit of binary black holes at the third post-Newtonian approximation*, *Phys. Rev. D* **65**, 124009 (2002).
- [61] L. Blanchet : *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*, *Living Rev. Relativity* **5**, 3 (2002), <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume5/2002-3blanchet/>
- [62] L. Blanchet : *On the accuracy of the post-Newtonian approximation*, in *Proc. of the 25th Johns Hopkins Workshop*, Eds. I. Ciufolini & L. Lusanna, sous presse [preprint : gr-qc/0207037].
- [63] L. Blanchet & G. Faye : *General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order*, *Phys. Rev. D* **63**, 062005 (2001).

- [64] L. Blanchet, G. Faye, B.R. Iyer & B. Joguet : *Gravitational-wave inspiral of compact binary systems to  $7/2$  post-Newtonian order*, Phys. Rev. D **65**, 061501(R) (2002).
- [65] L. Blanchet, B.R. Iyer, C.M. Will & A.G. Wiseman : *Gravitational waveforms from inspiralling compact binaries to second-post-Newtonian order*, Class. Quantum Grav. **13**, 575 (1996).
- [66] R. Blandford : non publié (1984) ; cité par K. Thorne [273]
- [67] D. Blaschke, N.K. Glendenning & A. Sedrakian (Eds.) : *Physics of neutron star interiors*, Springer-Verlag, Berlin (2001).
- [68] A.R. Bodmer : *Collapsed nuclei*, Phys. Rev. D **4**, 1601 (1971).
- [69] C. Bona, J. Masso, E. Seidel & J. Stela : *First order hyperbolic formalism for Numerical Relativity*, Phys. Rev. D **56**, 3405 (1997).
- [70] S. Bonazzola : *The virial theorem in general relativity*, Astrophys. J. **182**, 335 (1973).
- [71] S. Bonazzola & J.A. Marck : *Pseudo-spectral technique applied to numerical solutions for stellar collapse*, Astron. Astrophys. **164**, 300 (1986).
- [72] S. Bonazzola & J.A. Marck : *Three-dimensional gas dynamics in a sphere*, J. Comput. Phys. **87**, 201 (1990).
- [73] S. Bonazzola & G. Maschio : *Models of rotating neutron stars in general relativity*, in *The Crab Nebula – IAU Symposium 46*, Eds. Davies & Smith, Reidel, Dordrecht (1971), p. 346.
- [74] S. Bonazzola & J. Schneider : *An exact study of rigidly and rapidly rotating stars in general relativity with application to the Crab pulsar*, Astrophys. J. **191**, 273 (1974).
- [75] J.M. Bowen & J.W. York : *Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions*, Phys. Rev. D **21**, 2047 (1980).
- [76] J.P. Boyd : *Chebyshev and Fourier spectral methods*, Second edition, Dover, New York (2001) ; version en ligne sur <http://www-personal.engin.umich.edu/~jpboyd/>.
- [77] P.R. Brady & T. Creighton : *Searching for periodic sources with LIGO. II. Hierarchical searches*, Phys. Rev. D **61**, 082001 (2000).
- [78] P.R. Brady, T. Creighton, C. Cutler & B.F. Schutz : *Searching for periodic sources with LIGO*, Phys. Rev. D **57**, 2101 (1998).
- [79] D.R. Brill & R.W. Lindquist : *Interaction energy in geometrostatics*, Phys. Rev. **131**, 471 (1963).
- [80] T. Bulik, K. Belczynski & V. Kalogera : *The distribution of mass ratios in compact object binaries*, à paraître dans les compte-rendus de la conférence SPIE *Astronomical Telescopes and Instrumentation* (2002) [preprint : astro-ph/0207659].
- [81] A. Buonanno & T. Damour : *Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics*, Phys. Rev. D **59**, 084006 (1999).
- [82] A. Buonanno & T. Damour : *Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences*, Phys. Rev. D **62**, 064015 (2000).
- [83] E.M. Butterworth & J.R. Ipser : *On the structure and stability of rapidly rotating fluid bodies in general relativity. I - The numerical method for computing structure and its application to uniformly rotating homogeneous bodies*, Astrophys. J. **204**, 200 (1976).
- [84] M. Cantor : *The existence of nontrivial asymptotically flat initial data for vacuum space-times*, Commun. Math. Phys. **57**, 83 (1977).

- [85] M. Cantor : *Compos. Math.* **38**, 3 (1979).
- [86] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni & T.A. Zang : *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin (1988).
- [87] C.Y. Cardall, M. Prakash & J.M. Lattimer : *Effects of strong magnetic fields on neutron star structure*, *Astrophys. J.* **554**, 322 (2001).
- [88] B. Carter : *Killing horizons and orthogonal transitive groups in space-time*, *J. Math. Phys.* **10**, 70 (1969).
- [89] B. Carter : *Commun. Math. Phys.* **17**, 233 (1970).
- [90] B. Carter : *Black hole equilibrium states*, in *Black holes — Les Houches 1972*, Eds. C. DeWitt & B.S. DeWitt, Grodon and Breach, New York (1973).
- [91] B. Carter : *Perfect fluid and magnetic field conservations laws in the theory of black hole accretion rings*, in *Active Galactic Nuclei*, Eds. C. Hazard & S. Mitton, Cambridge University Press, Cambridge (1979), p. 273.
- [92] S. Chandrasekhar : *An introduction to the study of stellar structure*, University of Chicago Press, Chicago (1939).
- [93] S. Chandrasekhar : *The post-Newtonian effects of general relativity on the equilibrium of uniformly rotating bodies. III. The deformed figures of the Jacobi ellipsoids*, *Astrophys. J.* **148**, 621 (1967).
- [94] S. Chandrasekhar : *Ellipsoidal figures of equilibrium*, Yale University Press, New Haven (1969).
- [95] S. Chandrasekhar : *Solutions of two problems in the theory of gravitational radiation*, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 611 (1970).
- [96] D.M. Christodoulou, D. Kazanas, I. Shlosman & J.E. Tohline : *Phase-transition theory of instabilities. I. Second-harmonic instability and bifurcation points*, *Astrophys. J.* **446**, 472 (1995).
- [97] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn & V. F. Weisskopf : *New extended model of hadrons*, *Phys. Rev. D* **9**, 3471 (1974).
- [98] J.S. Clark, S.P. Goodwin, P.A. Crowther, L. Kaper, M. Fairbairn, N. Langer & C. Borck-sopp : *Physical parameters of the high-mass X-ray binary 4U1700-37*, *Astron. Astrophys.* **392**, 909 (2002).
- [99] G.W. Collins : *The virial theorem in stellar astrophysics*, Pachart, Tucson (1978).
- [100] M. Colpi & J.C. Miller : *Rotational properties of strange stars*, *Astrophys. J.* **388**, 513 (1992).
- [101] G.B. Cook : *Three-dimensional initial data for the collision of two black holes. II. Quasi-circular orbits for equal-mass black holes*, *Phys. Rev. D* **50**, 5025 (1994).
- [102] G.B. Cook : *Corotating and irrotational binary black holes in quasicircular orbits*, *Phys. Rev. D* **65**, 084003 (2002).
- [103] G.B. Cook, S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky : *Spin-up of a rapidly rotating star by angular momentum loss : Effects of general relativity*, *Astrophys. J.* **398**, 203 (1992) [errata dans *Astrophys. J.* **422**, 227 (1994)].
- [104] G.B. Cook, S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky : *Rapidly rotating polytropes in general relativity*, *Astrophys. J.* **422**, 227 (1994).

- [105] G.B. Cook, S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky : *Recycling pulsars to millisecond periods in general relativity*, *Astrophys. J.* **423**, L117 (1994).
- [106] G.B. Cook, S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky : *Rapidly rotating neutron stars in general relativity : Realistic equations of state*, *Astrophys. J.* **424**, 823 (1994).
- [107] G.B. Cook, S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky : *Testing a simplified version of Einstein's equations for numerical relativity*, *Phys. Rev. D* **53**, 5533 (1996).
- [108] C. Cutler : *Gravitational waves from neutron stars with large toroidal B-fields*, *Phys. Rev. D* **66**, 084025 (2002).
- [109] T. Damour : *Surface effects in black hole physics*, in *Proc. 2nd Marcel Grossmann meeting on General Relativity*, Ed. R. Ruffini, North Holland (1982).
- [110] T. Damour : *Coalescence of two spinning black holes : An effective one-body approach*, *Phys. Rev. D* **64**, 124013 (2001).
- [111] T. Damour, P. Jaranowski & G. Schäfer : *Dynamical invariants for general relativistic two-body systems at the third post-Newtonian approximation*, *Phys. Rev. D* **62**, 044024 (2000).
- [112] T. Damour, P. Jaranowski & G. Schäfer : *Dimensional regularization of the gravitational interaction of point masses*, *Phys. Lett. B* **513**, 147 (2001).
- [113] B. Datta, A.V. Thampan & I. Bombaci : *Equilibrium sequences of rotating neutron stars for new realistic equations of state*, *Astron. Astrophys.* **334**, 943 (1998).
- [114] S.L. Detweiler & L. Lindblom : *On the evolution of the homogeneous ellipsoidal figures*, *Astrophys. J.* **213**, 193 (1977).
- [115] M. Dey, I. Bombaci, J. Dey, S. Ray & B.C. Samanta : *Strange stars with realistic quark vector interaction and phenomenological density-dependent scalar potential*, *Phys. Lett. B* **438**, 123 (1998).
- [116] P.A.M. Dirac : *Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation*, *Phys. Rev.* **114**, 924 (1959).
- [117] F. Douchin & P. Haensel : *A unified equation of state of dense matter and neutron star structure*, *Astron. Astrophys.* **380**, 151 (2001).
- [118] J.J. Drake et al. : *Is RX J185635-375 a quark star ?*, *Astrophys. J.* **572**, 996 (2002).
- [119] M. D. Duez, T. W. Baumgarte, S. L. Shapiro, M. Shibata & K. Uryu : *Comparing the inspiral of irrotational and corotational binary neutron stars*, *Phys. Rev. D* **65**, 024016 (2002).
- [120] R.C. Duncan & C. Thompson : *Formation of very strongly magnetized neutron stars : Implications for gamma-ray bursts*, *Astrophys. J.* **392**, L9 (1992).
- [121] F. Echeverria : *Gravitational-wave measurements of the mass and angular momentum of a black hole*, *Phys. Rev. D* **40**, 3194 (1989).
- [122] Y. Eriguchi, I. Hachisu & K. Nomoto : *Structure of rapidly rotating neutron stars*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **266**, 179 (1994).
- [123] Y. Eriguchi & K. Uryu : *Darwin-Riemann problems in Newtonian gravity*, in *Black holes and gravitational waves — New eyes in the 21st Century*, Eds. T. Nakamura & H. Kodama, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **136**, 199 (1999).
- [124] F.J. Ernst : *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem*, *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).

- [125] J.A. Faber, P. Grandclément, F.A. Rasio & K. Taniguchi : *Measuring neutron-star radii with gravitational-wave detectors*, Phys. Rev. Lett. **89**, 231102 (2002).
- [126] E. Farhi & R.L. Jaffe : *Strange matter*, Phys. Rev. D **30**, 2379 (1984).
- [127] E.E. Flanagan : *Possible explanation for star-crushing effect in binary neutron star simulations*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1354 (1999).
- [128] J. Frauendiener : *Calculating initial data for the conformal Einstein equations by pseudo-spectral methods*, J. Comput. Applied Math. **109**, 475 (1999).
- [129] J.A. de Freitas Pacheco & J.E. Horvath : *Gravitational wave emission from galactic radio pulsars*, Phys. Rev. D **56**, 859 (1997).
- [130] J.L. Friedman : *Generic instability of rotating relativistic stars*, Commun. Math. Phys. **62**, 247 (1978).
- [131] J.L. Friedman, non-publié, cité dans [143].
- [132] J.L. Friedman, J.R. Ipser & L. Parker : *Rapidly rotating neutron star models*, Astrophys. J. **304**, 115 (1986).
- [133] J.L. Friedman, J.R. Ipser & L. Parker : *Implications of a half-millisecond pulsar*, Phys. Rev. Lett. **62**, 3015 (1989).
- [134] J.L. Friedman & B.F. Schutz : *Secular instability of rotating Newtonian stars*, Astrophys. J. **222**, 281 (1978).
- [135] J.L. Friedman, K. Uryu & M. Shibata : *Thermodynamics of binary black holes and neutron stars*, Phys. Rev. D **65**, 064035 (2002).
- [136] J.A. Frieman & A.V. Olinto : *Is the sub-millisecond pulsar strange ?*, Nature **341**, 633 (1989).
- [137] D.V. Gal'tsov & V.P. Tsetkov : *On the gravitational radiation of an oblique rotator*, Phys. Lett. **103A**, 193 (1984).
- [138] D.V. Gal'tsov, V.P. Tsetkov & A.N. Tsirulev : *Spectrum and polarization of the gravitational radiation of pulsars*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **86**, 809 (1984) ; traduction anglaise dans Sov. Phys. JETP **59**, 472 (1984).
- [139] R.P. Geroch : *A method for generating new solutions of Einstein's equation*, J. Math. Phys. **12**, 918 (1971).
- [140] G.W. Gibbons & J.M. Stewart : *Absence of asymptotically flat solutions of Einstein's equations which are periodic and empty near infinity*, in *Classical General Relativity*, Eds. W.B. Bonnor, J.N. Islam & M.A.H. MacCallum Cambridge University Press, Cambridge (1984), p. 77.
- [141] G. Giampieri : *Gravitational waves from Galactic neutron stars*, Mont. Not. Roy. Astron. Soc. **292**, 218 (1997).
- [142] T. Di Girolamo & M. Vietri : *Post-Newtonian treatment of bar mode instability in rigidly rotating equilibrium configurations for neutron stars*, Astrophys. J. **581**, 519 (2002).
- [143] N.K. Glendenning : *Fast pulsar in SN 1987A : candidate for strange-quark matter*, Phys. Rev. Lett. **63**, 2629 (1989).
- [144] N.K. Glendenning : *Compact Stars*, 2nd edition, Springer-Verlag, New-York (2000).
- [145] N.K. Glendenning, C. Kettner & F. Weber : *From strange stars to strange dwarfs*, Astrophys. J. **450**, 252 (1995).

- [146] N.K. Glendenning & F. Weber : *Nuclear solid crust on rotating strange quark stars*, *Astrophys. J.* **400**, 647 (1992).
- [147] M. Gonin : *Quelques millièmes de seconde après le Big Bang*, *La Recherche* **357**, 22 (2002).
- [148] D. Gottlieb & S.A. Orszag : *Numerical analysis of spectral methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1977).
- [149] J.-O. Goussard, P. Haensel & J.L. Zdunik : *Rapid uniform rotation of protoneutron stars*, *Astron. Astrophys.* **321**, 822 (1997).
- [150] J.-O. Goussard, P. Haensel & J.L. Zdunik : *Rapid differential rotation of protoneutron stars and constraints on radio pulsars periods*, *Astron. Astrophys.* **330**, 1005 (1998).
- [151] P. Grandclément : *Étude numérique de binaires d'étoiles à neutrons et de trous noirs*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII (2001).
- [152] X. Grave : *Etude de méthodes pour la recherche, avec le détecteur VIRGO, d'ondes gravitationnelles émises par les étoiles à neutrons*, Thèse de Doctorat, Université Paris XI (1997).
- [153] L.P. Grishchuk, V.M. Lipunov, K.A. Postnov, M.E. Prokhorov & B.S. Sathyaprakash : *Gravitational wave astronomy : in anticipation of first sources to be detected*, *Usp. Fiz. Nauk* **171**, 3 (2001); *Phys. Usp.* **44**, 1 (2001).
- [154] I. Hachisu & Y. Eriguchi : *Fission of dumbbell equilibrium and binary state of rapidly rotating polytropes*, *Pub. Astron. Soc. Japan* **36**, 239 (1984).
- [155] I. Hachisu & Y. Eriguchi : *Binary fluid star*, *Pub. Astron. Soc. Japan* **36**, 259 (1984).
- [156] P. Haensel & B. Pichon : *Experimental nuclear masses and the ground state of cold dense matter*, *Astron. Astrophys.* **283**, 313 (1994).
- [157] P. Haensel, J.L. Zdunik & R. Schaeffer : *Strange quark stars*, *Astron. Astrophys.* **160**, 121 (1986).
- [158] P. Haensel & J.L. Zdunik : *Accreting strange stars*, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **24B**, 139 (1991).
- [159] J.B. Hartle : *Slowly rotating relativistic stars. I. Equations of Structure*, *Astrophys. J.* **150**, 1005 (1967).
- [160] J.B. Hartle : *Tidal friction in slowly rotating black holes*, *Phys. Rev. D* **8**, 1010 (1973); errata dans *Phys. Rev. D* **9**, 2749 (1974).
- [161] J.B. Hartle & K.S. Thorne : *Slowly rotating relativistic stars. II. Models for neutron stars and supermassive stars*, *Astrophys. J.* **153**, 807 (1968).
- [162] S.W. Hawking & J.B. Hartle : *Energy and angular momentum flow into a black hole*, *Commun. Math. Phys.* **27**, 283 (1972).
- [163] U. Heilig : *Commun. Math. Phys.* **166**, 457 (1995).
- [164] U. Heinz & M. Jacob : *Evidence for a new state of matter : an assessment of the results from the CERN lead beam programme*, <http://arXiv.org/abs/nucl-th/0002042> (2000).
- [165] J.S. Heyl : *Gravitational radiation from strongly magnetized white dwarfs*, *Mont. Not. Roy. Astron. Soc.* **317**, 310 (2000).
- [166] V.B. Ignatiev, A.G. Kuranov, K.A. Postnov & M.E. Prokhorov : *Gravitational wave background from coalescing compact stars in eccentric orbits*, *Mont. Not. Roy. Astron. Soc.* **327**, 531 (2001).

- [167] K. Ioka & M. Sasaki : *Grad-Shafranov equation in noncircular stationary axisymmetric spacetimes*, Phys. Rev. D, sous presse [preprint : gr-qc/0302106] (2003).
- [168] K. Ioka & M. Sasaki : *Relativistic stars with poloidal and toroidal magnetic fields and meridional flow*, Phys. Rev. D, soumis [preprint : astro-ph/0305352] (2003).
- [169] J.R. Ipser : *Gravitational radiation from slowly rotating, fully relativistic stars*, Astrophys. J. **166**, 175 (1971).
- [170] J.A. Isenberg : *Waveless approximation theories of gravity*, preprint University of Maryland, non publié (1978). Une version très abrégée peut être trouvée dans [171].
- [171] J. Isenberg & J. Nester : in *General Relativity and Gravitation*, Vol. 1, Ed. A. Held, Plenum, New York (1980).
- [172] R.L. Jaffe, W. Busza, F. Wilczek & J. Sandweiss : *Review of speculative “disaster scenarios” at RHIC*, Rev. Mod. Phys. **72**, 1125 (2000).
- [173] R.A. James : *The structure and stability of rotating gas masses*, Astrophys. J. **140**, 552 (1964).
- [174] P. Jaranowski & A. Królak : *Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. II. Accuracy of estimation of parameters*, Phys. Rev. D **59**, 063003 (1999).
- [175] P. Jaranowski & A. Królak : *Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. III. Detection statistics and computational requirements*, Phys. Rev. D **61**, 062001 (2000).
- [176] P. Jaranowski, A. Królak & B.F. Schutz : *Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars : the signal and its detection*, Phys. Rev. D **58**, 063001 (1998).
- [177] J.H. Jeans : *Problems of cosmogony and stellar dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1919).
- [178] J.H. Jeans : *Astronomy and cosmogony*, Cambridge University Press, Cambridge (1928).
- [179] D.I. Jones : *Gravitational waves from rotating strained neutron stars*, in *Proc. 4th Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Waves*, Class. Quantum Grav. **19**, 1255 (2002).
- [180] D.I. Jones & N. Andersson : *Freely precessing neutron stars : model and observations*, Mont. Not. Roy. Astron. Soc. **324**, 811 (2001).
- [181] K. Jotania, S.R. Valluri & S.V. Dhurandhar : *A study of the gravitational wave form from pulsars*, Astron. Astrophys. **306**, 317 (1996).
- [182] P. Kaaret, S. Piraino, P.F. Bloser, E.C. Ford, J.E. Grindlay, A. Santangelo, A.P. Smale & W. Zhang : *Strong-field gravity and X-Ray observations of 4U 1820-30*, Astrophys. J. **520**, L37 (1999).
- [183] J. Katz : *On the relativistic virial equation*, in *The Gardener of Eden*, special issue in honour of R. Brout’s 60th birthday, Eds. P. Nicoletopoulos & J. Orloff, Physica Magazine **12**, 123 (1990).
- [184] W. Kluźniak & R.V. Wagoner : *Evolution of the innermost stable orbits around accreting neutron stars*, Astrophys. J. **297**, 548 (1985).
- [185] C.S. Kochanek : *Coalescing binary neutron stars*, Astrophys. J. **398**, 234 (1992).
- [186] K.D. Kokkotas & B.G. Schmidt : *Quasi-normal modes of stars and black holes*, Living Rev. Relativity **2**, 2 (1999), <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume2/1999-2kokkotas/>

- [187] A. Komar : *Covariant conservation laws in general relativity*, Phys. Rev. **113**, 934 (1959).
- [188] H. Komatsu, Y. Eriguchi & I. Hachisu : *Rapidly rotating general relativistic stars – I. Numerical method and its application to uniformly rotating polytropes*, Mont. Not. Roy. Astron. Soc. **237**, 355 (1989).
- [189] H. Komatsu, Y. Eriguchi & I. Hachisu : *Rapidly rotating general relativistic stars – II. Differentially rotating polytropes*, Mont. Not. Roy. Astron. Soc. **239**, 153 (1989).
- [190] K. Konno, T. Obata & Y. Kojima : *Deformation of relativistic stars*, Astron. Astrophys. **352**, 211 (1999).
- [191] C. Kouveliotou, S. Dieter, T. Strohmayer, J. van Paradijs, G.J.Fishman, C.A. Meegan & K. Hurley : *An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20*, Nature **393**, 235 (1998).
- [192] C. Kouveliotou, et al. : *Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14*, Astrophys. J. **510**, L115 (1999).
- [193] W. Kundt & M. Trümper : *Orthogonal decomposition of axi-symmetric stationary space-times*, Z. Physik **192**, 419 (1966).
- [194] D. Lai, F.A. Rasio & S.L. Shapiro : *Ellipsoidal figures of equilibrium - Compressible models*, Astrophys. J. Suppl. **88**, 205 (1993).
- [195] D. Lai, F.A. Rasio & S.L. Shapiro : *Hydrodynamic instability and coalescence of binary neutron stars*, Astrophys. J. **420**, 811 (1994).
- [196] D. Lai, F.A. Rasio & S.L. Shapiro : *Equilibrium, stability, and orbital evolution of close binary systems*, Astrophys. J. **423**, 344 (1994).
- [197] D. Lai & S.L. Shapiro : *Gravitational radiation from rapidly rotating nascent neutron stars*, Astrophys. J. **442**, 259 (1995).
- [198] J.-P. Lasota : *Physics near a black-hole horizon*, in *Société Française d’Astronomie et d’Astronophysique — Scientific Highlights 2001*, Eds. F. Combes, D. Barret & F. Thévenin, EDP Sciences, Les Ulis (2001), p. 405.
- [199] J.M. Lattimer, M. Prakash, D. Masak & A. Yahil : *Rapidly rotating pulsars and the equation of state*, Astrophys. J. **355**, 241 (1990).
- [200] W.H.G. Lewin , J. van Paradijs & E.P.J. van den Heuvel : *X-ray binaries*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [201] A. Lichnerowicz : *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics*, Benjamin, New York (1967).
- [202] L. Lindblom & S.L. Detweiler : *On the secular instabilities of the Maclaurin spheroids*, Astrophys. J. **211**, 565 (1977).
- [203] R.W Lindquist : *Initial-value problem on Einstein-Rosen manifolds*, J. Math. Phys. **4**, 938 (1963).
- [204] V.M. Lipunov, S.N. Nazin, I.E. Panchenko, K.A. Postnov, & M.E. Prokhorov : *The gravitational wave sky*, Astron. Astrophys. **298**, 677 (1995).
- [205] J.C Lombardi, F.A. Rasio & S.L. Shapiro : *Post-Newtonian models of binary neutron stars*, Phys. Rev. D **56**, 3416 (1997).
- [206] D. R. Lorimer : *Binary and millisecond pulsars at the new millennium*, Living Rev. Relativity **4**, 5 (2001), <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-5lorimer/>.

- [207] N.D. Lyford, T.W. Baumgarte & S.L. Shapiro : *Effects of differential rotation on the maximum mass of neutron stars*, *Astrophys. J.* **583**, 410 (2003).
- [208] Y. Maday : communication privée (2002).
- [209] Y. Maday & A.T. Patera : *Spectral element method for the incompressible Navier-Stokes equation*, in *State-of-art surveys in computational mechanics*, Eds. A.K. Noor & J.T. Oden, ASME (1989), p. 71.
- [210] J. Madsen : *Physics and astrophysics of strange quark matter*, in *Hadrons in dense matter and hadrosynthesis*, Lecture Notes in Physics, Ed. J. Cleymans, Springer-Verlag, New York (1999).
- [211] C.B. Markwardt & J.H. Swank : *XTE J1751-305*, circulaire IAU 7870 (2002).
- [212] P. Marronetti, G.J. Mathews & J.R. Wilson : *Binary neutron-star systems : From the Newtonian regime to the last stable orbit*, *Phys. Rev. D* **58**, 107503 (1998).
- [213] P. Marronetti, G.J. Mathews & J.R. Wilson : *Irrotational binary neutron stars in quasiequilibrium*, *Phys. Rev. D* **60**, 087301 (1999).
- [214] G.J. Mathews, P. Marronetti & J.R. Wilson : *Relativistic hydrodynamics in close binary systems : Analysis of neutron-star collapse*, *Phys. Rev. D* **58**, 043003 (1998).
- [215] G.J. Mathews & J.R. Wilson : *Binary-induced neutron star compression, heating, and collapse*, *Astrophys. J.* **482**, 929 (1997).
- [216] B. Mercier : *An introduction to the numerical analysis of spectral methods*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [217] C.W. Misner : *The method of images in geometrostatics*, *Ann. Phys. (N.Y.)* **24**, 102 (1963).
- [218] C.W. Misner, K.S. Thorne & J.A. Wheeler : *Gravitation*, Freeman, New York (1973).
- [219] T. Mora & C.M. Will : *Numerically generated quasiequilibrium orbits of black holes : circular or eccentric ?*, *Phys. Rev. D* **66**, 101501(R) (2002).
- [220] R. Narayan, M.R. Garcia & J.E. McClintock : *X-ray novae and the evidence for black hole event horizons*, in *Proc. 9th Marcel Grossmann meeting on General Relativity*, Eds. V.G. Gurzadyan, R.T. Jantzen & R. Ruffini, World Scientific, Singapore (2002), p. 405.
- [221] J. Novak & S. Bonazzola : *Solving wave equation with spectral methods and nonreflecting boundary conditions*, *J. Comput. Phys.*, soumis [preprint : gr-qc/0203102].
- [222] J. Novak & E. Marcq : *Gyromagnetic ratio of rapidly rotating compact stars in general relativity*, *Class. Quantum Grav.* **20**, 3051 (2003).
- [223] K. Oohara & T. Nakamura : *Coalescence of binary neutron stars*, in *Relativistic gravitation and gravitational radiation*, Eds J.-A. Marck & J.-P. Lasota, Cambridge University Press, Cambridge (1997), p. 309.
- [224] K. Oohara, T. Nakamura & M. Shibata : *A way to 3D numerical relativity*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **128**, 183 (1987).
- [225] C. Palomba : *Gravitational radiation from young magnetars : preliminary results*, *Astron. Astrophys.* **367**, 525 (2001).
- [226] A. Papapetrou : *Champs gravitationnels stationnaires à symétrie axiale*, *Ann. Inst. H. Poincaré A* **4**, 83 (1966).
- [227] G.G. Pavlov & V.E. Zavlin : *Thermal radiation from cooling neutron stars*, in *Proceedings of the XXI Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, sous presse [preprint : astro-ph/0305435].

- [228] H.P. Pfeiffer, G.B. Cook & S.A. Teukolsky : *Comparing initial-data sets for binary black holes*, Phys. Rev. D **66**, 024047 (2002).
- [229] H.P. Pfeiffer, L.E. Kidder, M.A. Scheel & S.A. Teukolsky : *A multidomain spectral method for solving elliptic equations*, Comput. Phys. Commun. **152**, 253 (2003).
- [230] H.P. Pfeiffer, S.A. Teukolsky & G.B. Cook : *Quasicircular orbits for spinning binary black holes*, Phys. Rev. D **62**, 104018 (2000).
- [231] H.P. Pfeiffer & J.W. York : *Extrinsic curvature and the Einstein constraints*, Phys. Rev. D **67**, 044022 (2003).
- [232] H. Pfister & U. M. Schaudt : *Steps towards an existence proof for rotating stars solutions in general relativity*, Ann. Phys. (Leipzig) **11**, 507 (2000).
- [233] G. Poghosyan, H. Grigorian & D. Blaschke : *Population clustering as a signal for deconfinement in accreting compact stars*, Astrophys. J. **551**, L73 (2001).
- [234] H. Poincaré : *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, C. Naud, Paris (1902) ; ré-édité aux Editions Jacques Gabay, Sceaux (1990).
- [235] K.A. Postnov & M.E. Prokhorov : *On the stochastic gravitational radiation background produced by an ensemble of single neutron stars*, Astron. Astrophys. **327**, 428 (1997).
- [236] R.H. Price and J.T. Whelan : *Tidal interaction in binary black hole inspiral*, Phys. Rev. Lett. **87**, 231101 (2001).
- [237] R. Prix, J. Novak & G.L. Comer : *Stationary structure of relativistic superfluid neutron stars*, in *Proc. of the 26th Spanish Relativity Meeting (ERE 2002)*, sous presse [preprint : gr-qc/0211105].
- [238] A. Quarteroni, R. Sacco & F. Saleri : *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*, Springer-Verlag France, Paris (2000).
- [239] K. Rajagopal & F. Wilczek : *Enforced electrical neutrality of the color-flavor locked phase*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3492 (2001).
- [240] F. A. Rasio & S. L. Shapiro : *Hydrodynamics of binary coalescence. 1 : Polytropes with stiff equations of state*, Astrophys. J. **432**, 242 (1994).
- [241] F. A. Rasio & S. L. Shapiro : *Hydrodynamics of binary coalescence. 2 : Polytropes with  $\gamma = 5/3$* , Astrophys. J. **438**, 887 (1995).
- [242] R.A. Remillard, J.H. Swank & T.E. Strohmayer : *XTE J0929-314*, circulaire IAU 7893 (2002).
- [243] T. Regimbau & J.A. de Freitas Pacheco : *Gravitational wave emission from radio pulsars revisited*, Astron. Astrophys. **359**, 242 (2000).
- [244] T. Regimbau & J.A. de Freitas Pacheco : *Cosmic background of gravitational waves from rotating neutron stars*, Astron. Astrophys. **376**, 381 (2001).
- [245] M. Rieutord : *Une introduction à la dynamique des fluides*, Masson, Paris (1997).
- [246] P.H. Roberts & K. Stewartson : *On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity*, Astrophys. J. **137**, 777 (1963).
- [247] C. Schaab & M.K. Weigel : *Quasi-periodic oscillations in low-mass X-ray binaries and constraints on the equation of state of neutron star matter*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **308**, 718 (1999).

- [248] U. M. Schaudt & H. Pfister : *The boundary value problem for the stationary and axisymmetric Einstein equations is generically solvable*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3284 (1996).
- [249] B. Schutz : in *The detection of gravitational waves*, Ed. D.G. Blair, Cambridge University Press, Cambridge (1991), p. 406.
- [250] Y. Schutz & H. Delagrange : *La traque du plasma de quarks et de gluons*, Pour la Science **297**, 86 (2002).
- [251] D.M. Sedrakian & E.V. Chubaryan : *Stationary axially symmetric gravitational fields*, Astrofizika **4**, 239 (1968).
- [252] S.L. Shapiro & S.A. Teukolsky : *Black holes, white dwarfs, and neutron stars — the physics of compact objects*, John Wiley & Sons, New York (1983).
- [253] S.L. Shapiro & S. Zane : *Bar mode instability in relativistic rotating stars : a post-Newtonian treatment*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **117**, 531 (1998).
- [254] M. Shibata : *Relativistic formalism for computation of irrotational binary stars in quasiequilibrium states*, Phys. Rev. D **58**, 024012 (1998).
- [255] M. Shibata : *Fully general relativistic simulation of merging binary clusters — Spatial gauge condition*, Prog. Theor. Phys. **101**, 1199 (1999).
- [256] M. Shibata : *Fully general relativistic simulation of coalescing binary neutron stars : Preparatory tests*, Phys. Rev. D **60**, 104052 (1999).
- [257] M. Shibata : communication privée (2002).
- [258] M. Shibata, S. Karino & Y. Eriguchi : *Dynamical instability of differentially rotating stars*, Mont. Not. Roy. Astron. Soc. **334**, L27 (2002).
- [259] M. Shibata & T. Nakamura : *Evolution of three-dimensional gravitational waves : Harmonic slicing case*, Phys. Rev. D **52**, 5428 (1995).
- [260] M. Shibata, K. Taniguchi & T. Nakamura : *Location of the innermost stable circular orbit of binary neutron stars in the post Newtonian approximations of general relativity*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **128**, 295 (1997).
- [261] H. Shinkai & G. Yoneda : *Re-formulating the Einstein equations for stable numerical simulations : Formulation problem in Numerical Relativity*, in *Progress in Astronomy and Astrophysics*, Nova Science Publ., in press [preprint : gr-qc/0209111].
- [262] M.L. Skoge & T.W. Baumgarte : *Comparing criteria for circular orbits in general relativity*, Phys. Rev. D **66**, 107501 (2002).
- [263] L.L. Smarr & J.W. York : *Radiation gauge in general relativity*, Phys. Rev. D **17**, 1945 (1978).
- [264] R.F. Stark & T. Piran : *Gravitational-wave emission from rotating core collapse*, Phys. Rev. Lett. **55**, 891 (1985).
- [265] N. Stergioulas : *Rotating stars in relativity*, Living Rev. Relativity **6**, 3 (2003), <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-3/>
- [266] N. Stergioulas & J.L. Friedman : *Comparing models of rapidly rotating relativistic stars constructed by two numerical methods*, Astrophys. J. **444**, 306 (1995).
- [267] N. Stergioulas, W. Kluzniak & T. Bulik : *Keplerian frequencies and innermost stable circular orbits of rapidly rotating strange stars*, Astron. Astrophys. **352**, L116 (1999).

- [268] T.E. Strohmayer & C.B. Markwardt : *Evidence for a millisecond pulsar in 4U 1636-53 during a superburst*, *Astrophys. J.* **577**, 337 (2002).
- [269] F.D. Swesty : *Thermodynamically consistent interpolation for equation of state tables*, *J. Comp. Phys.* **127**, 118 (1996).
- [270] K. Taniguchi & T. Nakamura : *Almost analytic solutions to equilibrium sequences of irrotational binary polytropic stars for  $n = 1$* , *Phys. Rev. Lett.* **84**, 581 (2000).
- [271] K. Taniguchi & T. Nakamura : *Equilibrium sequences of irrotational binary polytropic stars : The case of double polytropic stars*, *Phys. Rev. D* **62**, 044040 (2000).
- [272] S.A Teukolsky : *Irrotational binary neutron stars in quasi-equilibrium in general relativity*, *Astrophys. J.* **504**, 442 (1998).
- [273] K.S. Thorne : *Gravitational radiation*, in *300 years of gravitation*, Eds. S.W. Hawking & W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, (1987), p. 330.
- [274] A.N. Tsirulev & V.P. Tsvetkov : *Astron. Zh.* **59**, 666 (1982) ; traduction anglaise dans *Sov. Astron.* **26**, 407 (1982).
- [275] K. Uryu. and Y. Eriguchi : *Stationary states of irrotational binary neutron star systems and their evolution as a result of gravitational wave emission*, *Mont. Not. Roy. Astron.* **296**, L1 (1998).
- [276] K. Uryu. and Y. Eriguchi : *Stationary structures of irrotational binary systems : Models for close binary systems of compact stars*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **118**, 563 (1998).
- [277] K. Uryu & Y. Eriguchi : *New numerical method for constructing quasiequilibrium sequences of irrotational binary neutron stars in general relativity*, *Phys. Rev. D* **61**, 124023 (2000).
- [278] K. Uryu, M. Shibata & Y. Eriguchi : *Properties of general relativistic, irrotational binary neutron stars in close quasiequilibrium orbits : Polytropic equations of state*, *Phys. Rev. D* **62**, 104015 (2000).
- [279] M. van der Klis : *Millisecond oscillations in X-ray binaries*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **38**, 717 (2000).
- [280] M. van der Klis, R.A.D. Wijnands, K. Horne & W. Chen : *Kilohertz quasi-periodic oscillation peak separation is not constant in Scorpius X-1*, *Astrophys. J.* **481**, L97 (1997).
- [281] J. van Paradijs : *Neutron stars and black holes in X-ray binaries*, in *The many faces of neutron stars*, Eds. R. Buccheri, J. van Paradijs & M.A. Alpar, Kluwer, Dordrecht (1998).
- [282] S. van Straaten, E.C. Ford, M. van der Klis, M. Méndez & P. Kaaret : *Relations between timing features and colors in the X-Ray Binary 4U 0614+09*, *Astrophys. J.* **540**, 1049 (2000).
- [283] L. Villain & S. Bonazzola : *Inertial modes in slowly rotating stars : an evolutionary description*, *Phys. Rev. D* **66**, 123001 (2002).
- [284] F.M. Walter & J. Lattimer : *A Revised Parallax and its Implications for RX J185635-3754*, *Astrophys. J.* **576**, L145 (2002).
- [285] F. Weber : *Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol (1999).
- [286] J. M. Weisberg & J. H. Taylor : *The relativistic binary pulsar B1913+16*, in *Radio pulsars*, Eds. M. Bailes, D. J. Nice & S.E. Thorsett, ASP. Conf. Series, sous presse [preprint : astro-ph/0211217].

- [287] R. Wijnands & M. van der Klis : *A millisecond pulsar in an X-ray binary system*, Nature **394**, 344 (1998).
- [288] J.R. Wilson : *Models of differentially rotating stars*, Astrophys. J. **176**, 195 (1972).
- [289] J.R. Wilson & G.J. Mathews : *Relativistic hydrodynamics*, in *Frontiers in numerical relativity*, Eds. C.R. Evans, L.S. Finn & D.W. Hobill, Cambridge University Press, Cambridge (1989), p. 306.
- [290] J.R. Wilson and G.J. Mathews : *Instabilities in close neutron star binaries*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4161 (1995).
- [291] J.R. Wilson, G.J. Mathews, and P. Marronetti : *Relativistic numerical model for close neutron-star binaries*, Phys. Rev. D **54**, 1317 (1996).
- [292] R.B. Wiringa, V. Fiks & A. Fabrocini : *Equation of state for dense nucleon matter*, Phys. Rev. C **38**, 1010 (1988).
- [293] E. Witten : *Cosmic separation of phases*, Phys. Rev. D **30**, 272 (1984).
- [294] D.G. Yakovlev, A.D. Kaminker, P. Haensel & O.Y. Gnedin : *The cooling neutron star in 3C 58*, Astron. Astrophys. **389**, L24 (2002).
- [295] J.W. York : *Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation*, Phys. Rev. Lett. **28**, 1082 (1972).
- [296] J.W. York : *Kinematics and dynamics of general relativity*, in *Sources of Gravitational Radiation*, Ed. L.L. Smarr, Cambridge University Press, Cambridge (1979), p. 83.
- [297] J.W. York : *Conformal “thin-sandwich” data for the initial-value problem of general relativity*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1350 (1999).
- [298] S. Yoshida : *Gravitational radiation from highly magnetized nascent neutron stars in supernova remnants*, Mont. Not. Roy. Astron. Soc. **336**, 957 (2002).
- [299] Ya. B. Zeldovich & I.D. Novikov : *Relativistic astrophysics, vol. 1 : Stars and relativity*, University of Chicago Press (1971).
- [300] M. Zimmermann & E. Szedenits : *Gravitational waves from rotating and precessing rigid bodies : Simple models and applications to pulsars*, Phys. Rev. D **20**, 351 (1979).